В. И. СМИРНОВ

# КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

## ТОМ ТРЕТИЙ

## ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ИЗДАНИЕ ДЕВЯТОЕ,
СТЕРЕОТИПНОЕ

*Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия для студентов механико-математических
и физико-математических факультетов университетов*

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1974

517
С 50
УДК 510 (022)

*Владимир Иванович Смирнов*
Курс высшей математики, том III, часть 2

М., 1974 г., 672 стр. с илл.

Редактор *В. В. Абгарян*

Техн. редактор *К. Ф. Брудно* Корректор *Т. С. Плетнева*

Печать с матриц. Подписано к печати 11/VI 1974 г. Бумага $60\times90^1/_{16}$, тип. № 3. Физ. печ. л. 42. Услови. печ. л. 42. Уч.-изд. л. 39,82. Тираж 50 000 экз. Цена книги 1 р. 55 к. Заказ 224.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Отпечатано в ордена Трудового Красного Знамени Ленинградской типографии № 2 им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, 198052, Ленинград, Л-52, Измайловский пр., 29, с матриц ордена Трудового Красного Знамени Ленинградской типографии № 1 «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, г. Ленинград, Гатчинская ул. 26.

С $\frac{20203-072}{053\ (02)-74}$ 20-74

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к восьмому изданию . . . . . 7

ГЛАВА I

## ОСНОВЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

**1.** Функции комплексного переменного (9). **2.** Производная (15). **3.** Конформное преобразование (21). **4.** Интеграл (24). **5.** Теорема Коши (27). **6.** Основная формула интегрального исчисления (31). **7.** Формула Коши (34). **8.** Интегралы типа Коши (40). **9.** Следствия формулы Коши (42). **10.** Изолированные особые точки (44). **11.** Бесконечные ряды с комплексными членами (47). **12.** Теорема Вейерштрасса (50). **13.** Степенные ряды (52). **14.** Ряд Тейлора (55). **15.** Ряд Лорана (57). **16.** Примеры (61). **17.** Изолированные особые точки. Бесконечно далекая точка (66). **18.** Аналитическое продолжение (71). **19.** Примеры многозначных функций (78). **20.** Особые точки аналитических функций и римановы поверхности (87). **21.** Теорема вычетов (91). **22.** Теоремы о числе корней (94). **23.** Обращение степенного ряда (98). **24.** Принцип симметрии (101). **25.** Ряд Тейлора на окружности круга сходимости (105). **26.** Дополнительные сведения о формуле Коши (108). **27.** Главное значение интеграла (110). **28.** Главное значение интеграла (продолжение) (115). **29.** Интегралы типа Коши (120). **30.** Интегралы типа Коши (продолжение) (125).

ГЛАВА II

## КОНФОРМНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ И ПЛОСКОЕ ПОЛЕ

**31.** Конформное преобразование (127). **32.** Линейное преобразование (130). **33.** Дробно-линейное преобразование (132). **34.** Функция $w = z^2$ (142). **35.** Функция $w = \frac{k}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ (143). **36.** Двуугольник и полоса (146). **37.** Основная теорема (149). **38.** Формула Кристоффеля (152). **39.** Частные случаи (157). **40.** Случай внешности многоугольника (161). **41.** Минимальное свойство преобразования на круг (162). **42.** Способ сопряженных тригонометрических рядов (165). **43.** Плоское установившееся течение жидкости (169). **44.** Примеры (171). **45.** Задача полного обтекания (175). **46.** Формула Н. Е. Жуковского (176). **47.** Плоская

электростатическая задача (178). **48.** Формула Шварца (181). **49.** Ядро $\operatorname{ctg}\frac{s-t}{2}$ (184). **50.** Предельные задачи (188). **51.** Бигармоническое уравнение (193). **52.** Волновое уравнение и аналитические функции (196). **53.** Основная теорема (198). **54.** Дифракция плоской волны (204). **55.** Отражение упругих волн от прямолинейной границы (209).

ГЛАВА III

**ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ВЫЧЕТОВ, ЦЕЛЫЕ И ДРОБНЫЕ ФУНКЦИИ**

**56.** Интеграл Френеля (215). **57.** Интегрирование выражений с тригонометрическими функциями (217). **58.** Интегрирование рациональной дроби (219). **59.** Некоторые новые типы интегралов с тригонометрическими функциями (221). **60.** Лемма Жордана (224). **61.** Представление некоторых функций контурными интегралами (226). **62.** Примеры интегралов от многозначных функций (230). **63.** Интегрирование системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами (234). **64.** Разложение дробной функции на простейшие дроби (240). **65.** Функция $\operatorname{ctg} z$ (244). **66.** Построение мероморфной функции (246). **67.** Целые функции (248). **68.** Бесконечные произведения (250). **69.** Построение целой функции по ее корням (253). **70.** Интегралы, зависящие от параметра (257). **71.** Эйлеров интеграл второго рода (260). **72.** Эйлеров интеграл первого рода (265). **73.** Бесконечное произведение для функции $[\Gamma(z)]^{-1}$ (266). **74.** Представление $\Gamma(z)$ контурным интегралом (272). **75.** Формула Стирлинга (275). **76.** Формула суммирования Эйлера (281). **77.** Числа Бернулли (284). **78.** Метод скорейшего спуска (286). **79.** Асимптотическое разложение интеграла (288). **80.** Примеры (293). **81.** Метод стационарной фазы (297).

ГЛАВА IV

**АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ И ФУНКЦИИ МАТРИЦ**

**82.** Регулярные функции многих переменных (300). **83.** Двойной интеграл и формула Коши (302). **84.** Степенные ряды (304). **85.** Аналитическое продолжение (310). **86.** Функции матриц. Предварительные понятия (311). **87.** Степенные ряды от одной матрицы (313). **88.** Умножение степенных рядов. Обращение степенного ряда (316). **89.** Дальнейшее исследование сходимости (319). **90.** Интерполяционные полиномы (324). **91.** Тождество Кейли. Формула Сильвестра (325). **92.** Определение функций одной матрицы формулой Коши (327). **93.** Аналитическое продолжение (330). **94.** Логарифм матриц (335). **95.** Обращение целой функции от матрицы в случае матриц второго порядка (336). **96.** Системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами (339). **97.** Функции нескольких матриц (344).

ГЛАВА V

## ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

**98.** Разложение решения в степенной ряд (347). **99.** Аналитическое продолжение решения (351). **100.** Окрестность особой точки (353). **101.** Регулярная особая точка (358). **102.** Уравнения класса Фукса (366). **103.** Уравнение Гаусса (370). **104.** Гипергеометрический ряд (372). **105.** Полиномы Лежандра (377). **106.** Полиномы Якоби (383). **107.** Конформное преобразование и уравнение Гаусса (387). **108.** Преобразование Лапласа (392). **109.** Различный выбор решений (394). **110.** Уравнение Бесселя (397). **111.** Функции Ханкеля и интегральное представление решений уравнения Бесселя (400). **112.** Асимптотические разложения (403). **113.** Асимптотические разложения решений, полученных преобразованием Лапласа (408). **114.** Асимптотические разложения решений уравнения Бесселя (414). **115.** Вырождение уравнения Гаусса (418). **116.** Формальные ряды в окрестности иррегулярной особой точки (419). **117.** Построение асимптотических разложений методом последовательных приближений (422). **118.** Функции Эйри (428). **119.** Асимптотика при большом значении параметра (431). **120.** Уравнения с периодическими коэффициентами (438). **121.** Условия устойчивости и неустойчивости для уравнения Хилла (443). **122.** Системы линейных дифференциальных уравнений (451). **123.** Регулярная особая точка (454). **124.** Регулярные системы (457). **125.** Представление решения в окрестности особой точки (464). **126.** Канонические решения (467). **127.** Связь с регулярными решениями типа Фукса (470). **128.** Случай любых $U_s$ (471). **129.** Формальные разложения в окрестности иррегулярной особой точки (474).

ГЛАВА VI

## СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

**§ 1. Сферические функции и функции Лежандра** . . . . . 477

**130.** Определение сферических функций (477). **131.** Явные выражения сферических функций (480). **132.** Свойство ортогональности (484). **133.** Полиномы Лежандра (488). **134.** Разложение по сферическим функциям (493). **135.** Доказательство сходимости (496). **136.** Связь сферических функций с предельными задачами (498). **137.** Задачи Дирихле и Неймана (501). **138.** Потенциал объемных масс (503). **139.** Потенциал сферического слоя (505). **140.** Электрон в центральном поле (508). **141.** Шаровые функции и линейные представления группы вращения (510). **142.** Функция Лежандра (512). **143.** Функция Лежандра второго рода (514).

**§ 2. Функции Бесселя** . . . . . 518

**144.** Определение функций Бесселя (518). **145.** Соотношения между функциями Бесселя (520). **146.** Ортогональность функций Бесселя и их корни (523). **147.** Производящая функция и интегральное представле-

ние (528). **148.** Формула Фурье — Бесселя (532). **149.** Функции Ханкеля и Неймана (533). **150.** Разложение функций Неймана с целым значком (539). **151.** Случай чисто мнимого аргумента (541). **152.** Новые интегральные представления (543). **153.** Асимптотические представления (545). **154.** Функции Бесселя и уравнение Лапласа (550). **155.** Волновое уравнение в цилиндрических координатах (552). **156.** Волновое уравнение в сферических координатах (555).

**§ 3. Полиномы Эрмита и Лагерра** . . . . . 558

**157.** Линейный осциллятор и полиномы Эрмита (558). **158.** Свойство ортогональности (562). **159.** Производящая функция (563). **160.** Параболические координаты и функции Эрмита (565). **161.** Полиномы Лагерра (567). **162.** Связь полиномов Эрмита и Лагерра (574). **163.** Асимптотическое выражение полиномов Эрмита (575). **164.** Асимптотическое выражение полиномов Лежандра (579).

**§ 4. Эллиптические интегралы и эллиптические функции** . . . . . 582

**165.** Приведение эллиптических интегралов к нормальному виду (582). **166.** Приведение интегралов к тригонометрической форме (586). **167.** Примеры (590). **168.** Обращение эллиптического интеграла (592). **169.** Общие свойства эллиптических функций (596). **170.** Основная лемма (600). **171.** Функции Вейерштрасса (602). **172.** Дифференциальное уравнение для $\wp(u)$ (607). **173.** Функции $\sigma_k(u)$ (610). **174.** Разложение целой периодической функции (613). **175.** Новые обозначения (614). **176.** Функция $\vartheta_1(v)$ (616). **177.** Функции $\vartheta_k(v)$ (619). **178.** Свойства функций тэта (622). **179.** Выражение чисел $e_k$ через $\vartheta_s$ (625). **180.** Эллиптические функции Якоби (627). **181.** Основные свойства функций Якоби (629). **182.** Дифференциальные уравнения для функций Якоби (631). **183.** Формулы сложения (632). **184.** Связь функций $\wp(u)$ и $\operatorname{sn} u$ (634). **185.** Эллиптические координаты (636). **186.** Введение эллиптических функций (638). **187.** Уравнение Лямэ (639). **188.** Простой маятник (641). **189.** Пример конформного преобразования (643).

ДОБАВЛЕНИЕ

## ПРИВЕДЕНИЕ МАТРИЦ К КАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

**190.** Вспомогательные предложения (647). **191.** Случай простых корней (652). **192.** Первый этап преобразований в случае кратных корней (654). **193.** Приведение к канонической форме (657). **194.** Определение структуры канонической формы (663). **195.** Пример (667).

# ПРЕДИСЛОВИЕ К ВОСЬМОМУ ИЗДАНИЮ

В настоящее издание внесены следующие добавления и изменения: в главе I указаны результаты, касающиеся формулы Коши и интегралов типа Коши с использованием интегралов Лебега; в главе III изменено изложение приближенного вычисления интегралов по методу скорейшего спуска и добавлено изложение метода стационарной фазы; в главе IV расширено изложение теории аналитических функций одной матрицы. Наибольшие изменения внесены в главу V. В частности, добавлена краткая теория функций Эйри, рассмотрена асимптотика решения одного линейного уравнения второго порядка, содержащего большой параметр, и расширено изложение теории одного дифференциального уравнения второго порядка с периодическим коэффициентом. В главе VI изменено изложение асимптотик функций Ханкеля и Бесселя при большом значке и аргументе.

Большую помощь при изложении указанных вопросов оказали мне В. М. Бабич, В. С. Булдырев и В. А. Якубович. Приношу им мою глубокую благодарность. Без их помощи я не мог бы выполнить большой работы по подготовке настоящего издания тома $III_2$.

*В. Смирнов*

12 февраля
1968 г.

ГЛАВА I

# ОСНОВЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

**1. Функции комплексного переменного.** При изложении дифференциального и интегрального исчисления мы считали, что как независимая переменная, так и функция принимают лишь вещественные значения. Далее, при изложении основ высшей алгебры мы рассматривали наиболее элементарную функцию, а именно — полином, и в том случае, когда независимая переменная принимает комплексные значения. Целью настоящей главы является распространение основ анализа на случай функции от комплексного переменного.

Возьмем, например, полином

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n,$$

где $a_k$ — заданные комплексные числа. Мы можем считать, что и независимая переменная $z$ принимает любые комплексные значения, и таким образом функция $f(z)$ будет определена для любых комплексных значений $z$.

То же самое можно сказать о рациональной функции

$$\frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_m}$$

или о выражениях, содержащих радикалы, например:

$$\sqrt{z-1}.$$

В главе VI тома I мы определили элементарные трансцендентные функции для случаев комплексных значений независимого переменного, а именно для показательной функции мы имеем:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y),$$

и, определив таким образом показательную функцию, сможем определить и тригонометрические функции при комплексных значениях

аргумента

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i}\,\frac{e^{i2z} - 1}{e^{i2z} + 1}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = i\,\frac{e^{i2z} + 1}{e^{i2z} - 1}. \tag{1}$$

Напомним выражение для натурального логарифма комплексного числа:

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z, \tag{2}$$

где $|z|$ есть модуль $z$, $\arg z$ обозначает аргумент переменной $z$. Точно так же, рассматривая функции, обратные (1), мы приходим к обратным круговым функциям комплексного переменного:

$$\operatorname{arcsin} z, \ \arccos z, \ \operatorname{arctg} z, \ \operatorname{arcctg} z.$$

Нетрудно показать, что эти функции могут быть выражены через логарифм. Положим, например,

$$z = \operatorname{tg} w = \frac{e^{i2w} - 1}{i\,(e^{i2w} + 1)},$$

откуда

$$i(e^{i2w} + 1)\,z = e^{i2w} - 1,$$

или

$$e^{i2w} = \frac{1 + iz}{1 - iz}.$$

Умножая числитель и знаменатель на $i$ и логарифмируя, получим

$$w = \operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i} \ln \frac{i - z}{i + z}.$$

Совершенно так же, если положить

$$z = \sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i},$$

то получим квадратное уравнение для $e^{iw}$:

$$e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0,$$

откуда

$$e^{iw} = iz + \sqrt{1 - z^2},$$

и, следовательно,

$$w = \frac{1}{i} \ln (iz + \sqrt{1 - z^2}),$$

где надо брать оба значения квадратного радикала.

Как мы увидим в дальнейшем, все вышеуказанные элементарные функции комплексного переменного имеют производную как функции комплексного переменного, т. е. для них существует определенный предел отношения

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z},$$

когда комплексное выражение $\Delta z$ стремится к нулю. Вся настоящая глава и будет посвящена изложению основ теории функций комплексного переменного, имеющих производную. Эта теория отличается чрезвычайно большой отчетливостью и простотой, с одной стороны, а с другой стороны, имеет широкое применение ко многим отделам естествознания и техники. В настоящей главе будет дан краткий очерк самой теории, а приложения будут изложены в следующих главах. Мы надеемся таким путем достигнуть более отчетливого и компактного изложения теоретических основ.

В дальнейшем мы будем очень часто пользоваться геометрической интерпретацией комплексного числа, о которой говорили уже в [I, 170].

Напомним кратко основную идею этой интерпретации. Отнеся плоскость к прямолинейным прямоугольным осям $OX$, $OY$, мы можем каждой точке этой плоскости сопоставить или две вещественные координаты $(x, y)$ или одну комплексную координату $x+iy$, что и будем делать дальше. В этом смысле плоскость называется плоскостью комплексного переменного, ось $X$ — вещественной осью и ось $Y$ — мнимой осью. Кроме этой точечной интерпретации комплексного числа, мы будем пользоваться, главным образом в следующих главах, еще и векторной интерпретацией, при которой комплексному числу $x+iy$ сопоставляется вектор, составляющие которого на координатные оси равны $x$ и $y$. Непосредственно очевидна связь между двумя этими интерпретациями, а именно: если провести вектор из начала координат в точку с комплексной координатой $x+iy$, то этому вектору будет соответствовать то же самое комплексное число $x+iy$. Вообще, если на нашей плоскости провести вектор, имеющий начало в точке $A$ с комплексной координатой $a_1+ia_2$ и конец в точке $B$ с комплексной координатой $b_1+ib_2$, то этому вектору $\overline{AB}$ будет соответствовать комплексное число, равное разности комплексных координат конца и начала:

$$(b_1-a_1)+i(b_2-a_2).$$

Напомним некоторые результаты, изложенные раньше [I, 171 и 172].

Сложению комплексных чисел соответствует геометрическое сложение соответствующих этим числам векторов. Модуль комплексного числа есть длина соответствующего вектора, а аргумент равен углу, образованному вектором с осью $X$.

Если комплексная переменная $z$ меняется, то соответствующая точка двигается по плоскости.

Мы будем говорить, что $z = x + iy$ стремится к пределу $\alpha = a + ib$, где $a$ и $b$ — постоянные, если модуль разности

$$|\alpha - z| = \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2}$$

стремится к нулю.

Из написанного выражения непосредственно следует, поскольку под радикалом стоят положительные слагаемые, что $|\alpha - z| \to 0$ равносильно тому, что

$$x \to a \text{ и } y \to b.$$

Итак,

$$x + iy \to a + ib$$

равносильно

$$x \to a \text{ и } y \to b.$$

При этом, очевидно, переменная точка $M$, соответствующая числу $z = x + iy$, стремится к точке $A$ с комплексной координатой $\alpha = a + ib$ как к своему предельному положению. Как нетрудно показать, на чем мы останавливаться не будем, для комплексного переменного имеют место обычные теоремы о пределе суммы, произведения и частного.

Заметим еще, что из определения предела вытекает, что $z \to 0$ равносильно $|z| \to 0$. Далее, если $z \to \alpha$, то, очевидно, $|z| \to |\alpha|$.

Для комплексного переменного имеет место также признак Коши существования предела.

Пусть имеется, например, последовательность значений комплексного переменного

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 + y_1 i, \\ z_2 &= x_2 + y_2 i, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ z_n &= x_n + y_n i, \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Существование предела у этой последовательности равносильно существованию пределов у вещественных последовательностей $x_n$ и $y_n$, а для существования этих пределов необходимо и достаточно, чтобы абсолютные значения разностей $|x_n - x_m|$ и $|y_n - y_m|$ становились сколь угодно малыми при достаточно больших $n$ и $m$ [**I, 31**].

Принимая во внимание, что

$$|z_n - z_m| = \sqrt{(x_n - x_m)^2 + (y_n - y_m)^2}$$

и что под радикалом стоят положительные слагаемые, мы видим, что для существования предела последовательности $z_n$ необходимо и достаточно, чтобы $|z_n - z_m|$ становился сколь угодно малым при всех достаточно больших $n$ и $m$, т. е., точнее говоря, при любом заданном положительном $\varepsilon$ существует такое $N$, что $|z_n - z_m| < \varepsilon$, если только $n$ и $m > N$. В общем случае комплексного переменного мы должны повторить о комплексном переменном то, что мы говорили в начале тома I о вещественном переменном. Необходимое и достаточное условие существования предела комплексного переменного $z$ состоит в следующем: при любом заданном положительном $\varepsilon$ существует такое значение переменной $z$, что $|z' - z''| < \varepsilon$, если только $z'$ и $z''$ — любые два значения, следующие после упомянутого значения. В дальнейшем мы будем говорить, что комплексное переменное $z$ стремится к бесконечности, если $|z| \to +\infty$.

Перейдем теперь к рассмотрению функции комплексного переменного

$$w = f(z)$$

и условимся относительно некоторых терминов. Функция $f(z)$ может быть определена или на всей плоскости, или лишь в некоторой области плоскости комплексного переменного $z$, например в некотором круге, или прямоугольнике, или кольце и т. д. У всякой такой области мы будем отличать внутренние ее точки и точки контура. Так, например, в случае круга с центром в начале координат и радиусом единица, внутренние точки характеризуются условием

$$|z| < 1, \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 < 1,$$

а контуром является окружность

$$|z| = 1, \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 = 1.$$

Характерным свойством внутренней точки является то свойство, что не только она сама, но и некоторая ее окрестность целиком принадлежит области, т. е. точка $M$ будет внутренней точкой области, если этой области принадлежит целиком некоторый достаточно малый круг с центром $M$. Точки контура не являются уже внутренними точками области, но в сколь угодно малой окрестности точки контура находятся внутренние точки области. Мы будем, кроме того, считать, что наша область не распадается на отдельные куски (связность области), иначе говоря, будем предполагать, что любые две точки области могут быть соединены некоторой линией, которая целиком находится внутри области. В дальнейшем под областью будем подразумевать обычно лишь *совокупность внутренних точек* области. Если же к области присоединяется и граница, то будем называть область *замкнутой* [II, 91].

Кроме того, мы будем называть область *ограниченной*, если все ее точки находятся на конечном расстоянии от начала. В дальнейшем еще несколько дополним характеристику понятия области.

Вернемся к рассмотрению функции $w=f(z)$. Положим, что она определена внутри некоторой области $B$, т. е. во всякой точке $z$, лежащей внутри $B$, $f(z)$ имеет определенное комплексное значение (мы говорим об однозначных функциях). Пусть $z_0$ — некоторая точка внутри $B$. Функция $f(z)$ называется непрерывной в точке $z_0$, если $f(z)\to f(z_0)$ при $z\to z_0$, т. е. при любом данном положительном $\varepsilon$ существует такое положительное $\eta$, что $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$, если только $|z-z_0|<\eta$. Функция называется непрерывной внутри $B$, если она непрерывна во всякой точке, находящейся внутри $B$. Функция $f(z)$ может быть определена не только внутри $B$, но и на границе $l$ области, т. е. в замкнутой области $B$. Мы будем говорить, что такая функция непрерывна в замкнутой области $B$, если она непрерывна в каждой точке этой замкнутой области $B$. При определении непрерывности в какой-либо точке $z_0$ границы $l$ надо иметь в виду, что точка $z$ может стремиться к $z_0$ любым образом, но не покидая замкнутой области $B$. Как и в случае вещественного переменного, имеет место теорема: если $f(z)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области, то она равномерно непрерывна в этой области, т. е. для любого заданного положительного $\varepsilon$ существует такое положительное $\eta$ (одно и то же для всей области), что $|f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon$, если $|z_1-z_2|<\eta$, где $z_1$ и $z_2$ принадлежат упомянутой замкнутой области.

Напишем $z$ и $w=f(z)$ разложенными на вещественную и мнимую части:

$$z=x+yi;$$
$$w=f(z)=u+vi.$$

Задать $z$ это значит задать $x$ и $y$, и задать $f(z)$ — значит задать $u$ и $v$, т. е. $u$ и $v$ мы должны считать функциями $x$ и $y$:

$$w=f(z)=u(x, y)+v(x, y)\,i. \tag{3}$$

В элементарных функциях такое разделение вещественной и мнимой частей может быть произведено при помощи простых операций, например:

$$w=z^2=(x+yi)^2=(x^2-y^2)+2xyi.$$

Положим, что $z_0=x_0+y_0i$; условие $z\to z_0$ равносильно $x\to x_0$ и $y\to y_0$.

Определение непрерывности в точке $z_0$ дает, что при $z\to z_0$, т. е. при $x\to x_0$ и $y\to y_0$, мы должны иметь

$$f(z)\to f(z_0),$$

или

$$u(x, y)+v(x, y)\,i\to u(x_0, y_0)+v(x_0, y_0)\,i,$$

что равносильно

$$u(x, y) \to u(x_0, y_0)$$

и

$$v(x, y) \to v(x_0, y_0).$$

Следовательно, непрерывность $f(z)$ в точке $z_0$ равносильна непрерывности $u(x, y)$ и $v(x, y)$ в точке $(x_0, y_0)$.

Разделяя вещественную и мнимую части и пользуясь свойством непрерывности элементарных функций вещественного переменного, мы убеждаемся в том, что полином, $e^z$, $\sin z$, $\cos z$ — непрерывные функции на всей плоскости комплексного переменного. Рациональная дробь непрерывна везде, кроме тех точек $z$, где ее знаменатель обращается в нуль. Точно так же $\operatorname{tg} z$ непрерывен везде, кроме тех точек $z$, где $\cos z$ обращается в нуль. Как и в случае вещественного переменного, сумма и произведение конечного числа непрерывных функций — также непрерывные функции, а частное двух непрерывных функций непрерывно, кроме тех значений $z$, в которых знаменатель обращается в нуль.

При изложении дальнейшей теории мы будем заниматься сначала однозначными функциями, а затем специально рассмотрим вопрос и о многозначных функциях. Примерами многозначных функций являются $\sqrt{z-1}$, функция (2) и обратные круговые функции.

**2. Производная.** Выше мы видели, что функция $f(z)$ согласно формуле (3) определяется двумя вещественными функциями $u(x, y)$ и $v(x, y)$ и непрерывность $f(z)$ равносильна непрерывности $u(x, y)$ и $v(x, y)$. Выбор их при построении $f(z)$ остается произвольным без дополнительных требований на $f(z)$. Основой той теории, которую мы будем излагать в дальнейшем, является требование, чтобы $f(z)$ имела производную по комплексной независимой переменной $z$. Это требование наложит некоторые связи на $u(x, y)$ и $v(x, y)$, и из них будут следовать свойства этих функций. Положим, что $f(z)$ определена в некоторой точке $z$ и во всех точках, достаточно близких к $z$. Производная $f'(z)$ в точке $z$ определяется, как мы уже упоминали, как предел отношения

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}, \tag{4}$$

причем этот предел должен быть конечным и одним и тем же при любом законе стремления комплексного приращения $\Delta z = \Delta x + i\,\Delta y$ к нулю. Точнее говоря [ср. I, 45], при любом заданном числе $\varepsilon > 0$ существует такое число $\eta > 0$, что

$$\left|\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} - f'(z)\right| < \varepsilon, \text{ если } |\Delta z| = \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} < \eta.$$

Нетрудно показать, как и в случае вещественного переменного, что справедливы обычные теоремы о производной суммы, произведения и частного [I, 47]. Применяя формулу бинома Ньютона, получим при целом положительном $z$

$$(z^n)' = nz^{n-1}. \tag{5}$$

Из сказанного следует существование производной у любого полинома от $z$, а у рациональной дроби — везде, кроме тех значений, при которых знаменатель дроби обращается в нуль. Имеет место обычное правило дифференцирования сложных функций:

$$F'_z(w) = F'_w(w) \cdot w'_z. \tag{6}$$

Точную формулировку для этого правила мы приведем в [5]. Ниже мы выразим $f'(z)$ через частные производные функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$.

Положим, что функция $f(z)$ определена внутри некоторой области $B$ и имеет в каждой точке внутри $B$ производную. При этом просто говорят, что $f(z)$ имеет производную внутри области $B$. Эта производная $f'(z)$ будет также однозначной функцией внутри $B$.

Введем новое важное определение. Будем говорить, что $f(z)$ *регулярна*, или *голоморфна*, внутри $B$, если она однозначна внутри $B$ и имеет внутри $B$ непрерывную производную $f'(z)$. Заметим прежде всего, что из существования производной вытекает и непрерывность $f(z)$ внутри $B$. Иногда говорят, что $f(z)$ регулярна (или голоморфна) в точке $z_0$. Это значит, что $f(z)$ регулярна внутри некоторой области, содержащей точку $z_0$ внутри себя.

Обратимся к формуле (3), в которой отделены вещественная и мнимая части как у $z$, так и у функции $f(z)$, и поставим следующий вопрос: каким условиям должны удовлетворять функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ для того, чтобы $f(z)$ была регулярной внутри области $B$. Положим сначала, что $f(z)$ регулярна внутри $B$ и выведем отсюда следствия, касающиеся $u(x, y)$ и $v(x, y)$.

Как уже упоминалось выше, при определении производной, существование которой предполагается, можно стремить приращение независимого переменного $\Delta z = \Delta x + \Delta y i$ к нулю любым образом.

Отметим внутри $B$ некоторую точку $M$ с координатой $z = x + yi$ и переменную точку $N$ с координатой $z + \Delta z = (x + \Delta x) + (y + \Delta y) i$, причем $N$ стремится к $M$.

Возьмем два частных способа стремления $N$ к $M$, т. е. стремления $\Delta z$ к нулю.

При первом способе будем считать, что $N$ стремится к $M$, оставаясь на прямой, параллельной оси $X$, т. е. при первом способе будем иметь

$$\Delta y = 0 \quad \text{и} \quad \Delta z = \Delta x, \tag{7}$$

а при втором способе будем считать, что $N$ стремится к $M$, оставаясь на прямой, параллельной оси $Y$, и при этом будем иметь

$$\Delta x = 0 \quad \text{и} \quad \Delta z = i\,\Delta y. \tag{8}$$

Составим производную $f'(z)$ для обоих этих случаев. В общем случае мы имеем

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{[u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x, y)] + i\,[v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x, y)]}{\Delta x + i\,\Delta y}. \tag{9}$$

Отсюда при первом способе стремления $N$ к $M$ получим

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[ \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i\,\frac{v(x+\Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} \right].$$

Мы видим, таким образом, что вещественная и мнимая части в правой части равенства должны иметь предел, т. е. функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ должны иметь частные производные по $x$, причем имеет место формула

$$f'(z) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial x}\, i. \tag{10}$$

Точно так же при втором способе стремления $N$ к $M$ будем иметь согласно (8) и (9)

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{i} \left[ \frac{u(x, y+\Delta y) - u(x, y)}{\Delta y} + i\,\frac{v(x, y+\Delta y) - v(x, y)}{\Delta y} \right],$$

или

$$f'(z) = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\, i. \tag{11}$$

Сравнивая выражения (10) и (11) для $f'(z)$, получаем условия, которым должны удовлетворять частные производные $u(x, y)$ и $v(x, y)$:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}. \tag{12}$$

Заметим еще, что из непрерывности $f'(z)$ вытекает, на основании (10) и (11), непрерывность частных производных первого порядка функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$. Предыдущие рассуждения приводят нас к следующему результату. Для того чтобы $f(z)$ была регулярна внутри $B$, необходимо выполнение следующих условий: $u(x, y)$ и $v(x, y)$ *должны иметь внутри $B$ непрерывные частные производные первого порядка по $x$ и $y$, и эти производные должны удовлетворять соотношениям* (12).

Покажем теперь, что *эти условия не только необходимы, но и достаточны для регулярности* $f(z)$ *внутри* $B$. Итак, будем считать, что высказанные условия выполнены, и докажем существование непрерывной производной $f'(z)$. Принимая во внимание непрерывность частных производных от $u(x, y)$ и $v(x, y)$ по $x$ и $y$, можем написать [I, 68]

$$u(x+\Delta x, y+\Delta y)-u(x, y)= \\ =\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y,$$

$$v(x+\Delta x, y+\Delta y)-v(x, y)= \\ =\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v(x, y)}{\partial y}\Delta y+\varepsilon_3\Delta x+\varepsilon_4\Delta y,$$

где $\varepsilon_k$ стремятся к нулю одновременно с $\Delta x$ и $\Delta y$. Составляя при помощи последних выражений приращение функции $f(z+\Delta z)-f(z)$ и подставляя его в отношение (4), будем иметь

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}= \\ =\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\right)+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right)+(\varepsilon_1+i\varepsilon_3)\Delta x+(\varepsilon_2+i\varepsilon_4)\Delta y}{\Delta x+i\Delta y},$$

откуда, пользуясь условиями (12), можем переписать это отношение в виде

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}= \\ =\frac{\frac{\partial u}{\partial x}(\Delta x+i\Delta y)+i\frac{\partial v}{\partial x}(\Delta x+i\Delta y)}{\Delta x+i\Delta y}+\varepsilon_5\frac{\Delta x}{\Delta x+i\Delta y}+\varepsilon_6\frac{\Delta y}{\Delta x+i\Delta y},$$

где

$$\varepsilon_5=\varepsilon_1+i\varepsilon_3 \quad \text{и} \quad \varepsilon_6=\varepsilon_2+i\varepsilon_4$$

стремятся к нулю одновременно с $\Delta z$.

Нетрудно видеть, что последние два слагаемых справа также стремятся к нулю. Действительно, например,

$$\left|\varepsilon_5\frac{\Delta x}{\Delta x+i\Delta y}\right|=|\varepsilon_5|\frac{|\Delta x|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}},$$

и первый множитель стремится к нулю, а второй не превосходит единицы. Таким образом, предыдущая формула переписывается в виде

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}+\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}i+\varepsilon_7,$$

где $\varepsilon_7$ стремится к нулю одновременно с $\Delta z$, а первые два слагаемых в правой части вовсе не зависят от $\Delta z$. Таким образом, отношение (4) стремится к определенному пределу, определяемому формулой (10). Итак, указанные выше условия для $u(x, y)$ и $v(x, y)$ *необходимы и достаточны* для регулярности $f(z)$ внутри $B$. Уравнения (12) называются обычно *уравнениями Коши—Римана.*

Напомним, что мы уже встречались с этими уравнениями, а именно таким двум уравнениям должны удовлетворять потенциал скорости и функция тока при установившемся плоском течении идеальной несжимаемой жидкости [**II, 74**]. Таким образом, основные уравнения теории функций комплексного переменного (12) являются в то же время и основными уравнениями при исследовании упомянутого только что случая задач гидродинамики. На этом факте основаны многочисленные применения теории функций комплексного переменного к гидродинамике, о чем мы будем говорить в следующей главе.

Отметим теперь одно важное обстоятельство, вытекающее из уравнений (12). Мы увидим в дальнейшем, что в случае регулярной функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ имеют производные всех порядков. Дифференцируя первое из уравнений (12) почленно по $x$, второе по $y$ и складывая, получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0. \tag{13$_1$}$$

Точно так же из уравнений (12) нетрудно вывести

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0. \tag{13$_2$}$$

Отсюда видно, что *вещественная и мнимая части регулярной функции* $f(z)$ *должны удовлетворять уравнению Лапласа,* т. е. должны быть гармоническими функциями. В следующей главе мы так же подробно исследуем эту связь теории функций комплексного переменного с уравнением Лапласа.

Отметим еще одно важное обстоятельство, вытекающее из уравнений (13), а именно мы можем конструировать регулярную функцию, задавая произвольным образом ее вещественную часть, т. е. принимая за $u(x, y)$ любое решение уравнения (13$_1$). Покажем, что при этом $v(x, y)$ определяется с точностью до постоянного слагаемого.

Действительно, из уравнений (12) имеем

$$dv=\frac{\partial v}{\partial x}\,dx+\frac{\partial v}{\partial y}\,dy=-\frac{\partial u}{\partial y}\,dx+\frac{\partial u}{\partial x}\,dy,$$

откуда

$$v(x, y)=\int^{(x, y)}-\frac{\partial u}{\partial y}\,dx+\frac{\partial u}{\partial x}\,dy+C. \tag{14}$$

Остается проверить, что написанный криволинейный интеграл не зависит от пути и дает некоторую функцию своего верхнего предела [II, 71]. Напомним, что условия независимости криволинейного интеграла

$$\int X\,dx + Y\,dy$$

от пути могут быть написаны следующим образом:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Применяя это к интегралу (14), получим

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right), \text{ или } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

а это по условию выполнено, так как за $u(x, y)$ мы взяли некоторую гармоническую функцию. Напомним, что если $u(x, y)$ однозначна, то $v(x, y)$ может оказаться и многозначной, если область, в которой мы применяем формулу (14), многосвязна [II, 72].

Обратимся теперь к некоторым примерам. Полином есть очевидно регулярная функция на всей плоскости $z$. Рациональная дробь есть регулярная функция внутри всякой области, не содержащей корней ее знаменателя. Если возьмем, например, $f(z) = z^2$, то $u(x, y) = x^2 - y^2$ и $v(x, y) = 2xy$. Нетрудно проверить, что эти функции удовлетворяют соотношениям (12).

Покажем теперь, что показательная функция

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$$

регулярна на всей плоскости. В данном случае

$$u(x, y) = e^x \cos y, \qquad v(x, y) = e^x \sin y,$$

откуда непосредственно следует

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y,$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y.$$

Эти частные производные непрерывны и удовлетворяют соотношениям (12). Вычисляем производную по формуле (10):

$$(e^z)' = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^x(\cos y + i \sin y), \quad \text{т. е.} \quad (e^z)' = e^z.$$

Мы получили то же правило дифференцирования показательной функции, что и для вещественного переменного. Теперь нетрудно показать, что $\sin z$ и $\cos z$ имеют также непрерывные производные на всей плоскости $z$. Эти производные вычисляются по тем же правилам, что и для вещественного переменного. Действительно, при-

меняя правила дифференцирования показательной и сложной функций, получим

$$(\sin z)' = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)' = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z,$$

$$(\cos z)' = \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)' = i\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = -\sin z.$$

**3. Конформное преобразование.** Выясним геометрический смысл понятия функциональной зависимости и производной. Положим, что функция $f(z)$ регулярна в некоторой области $B$ плоскости $(X, Y)$. Всякому значению $z$ из области $B$ соответствует определенное значение $w = f(z)$, и совокупность всех значений $w = u + iv$, соответствующих всем $z$ из $B$, заполняет некоторую новую область $B_1$,

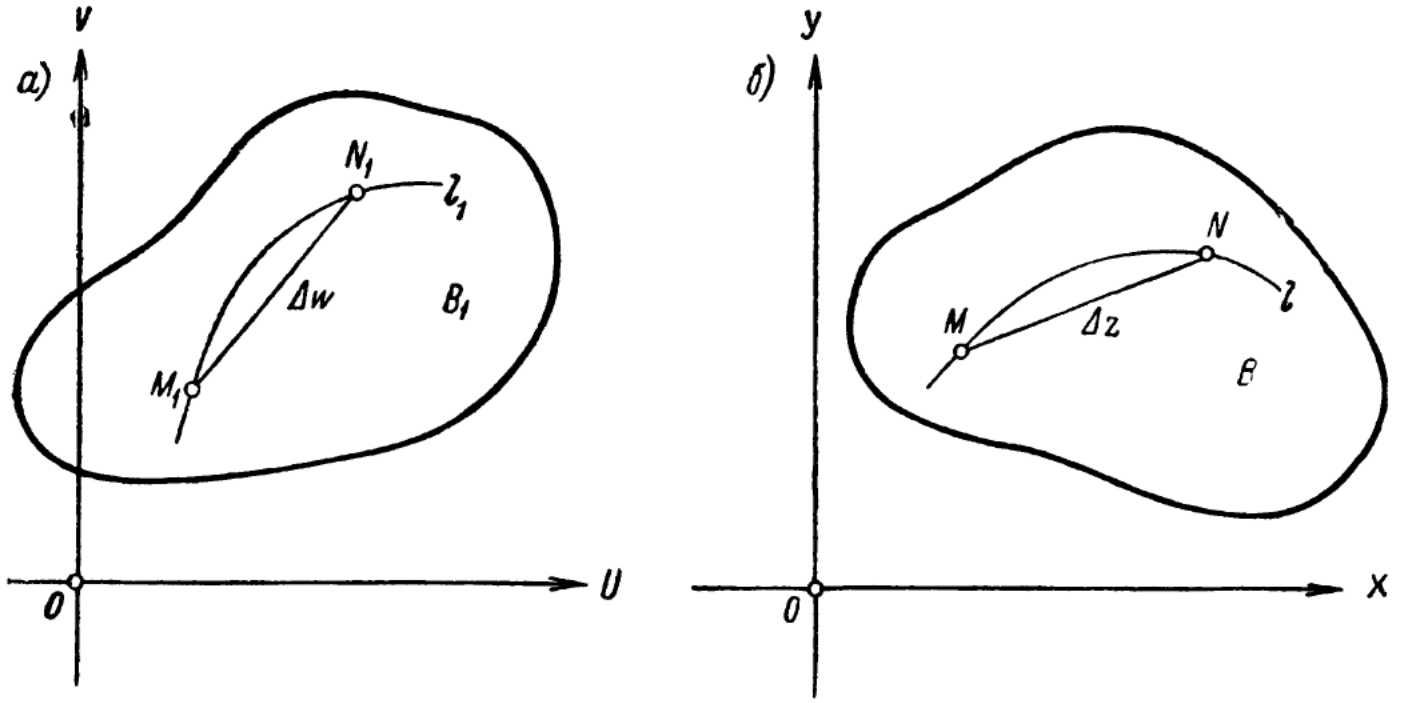



Рис. 1.

которую мы нарисуем на новой плоскости комплексного переменного $u + iv$ (рис. 1). Таким образом, наша *функция $f(z)$ совершает преобразование области $B$ в область $B_1$*. Строго говоря, мы должны были бы более подробно исследовать зависимость между точками $z$ и $w$, осуществляемую нашей функцией, и доказать, что совокупность значений $w$ также заполняет некоторую область. В дальнейшем, имея в руках аналитический аппарат, мы займемся этим более подробным исследованием, а в настоящий момент ограничимся лишь общими указаниями, которые все же дадут возможность читателю выяснить геометрический смысл вводимых понятий. В дальнейшем будет показано, что если в некоторой точке $z$ производная $f'(z)$ отлична от нуля, то достаточно малый круг с центром $z$ перейдет в некоторую область на плоскости $w$, содержащую соответствующую точку $w = f(z)$ внутри себя.

Перейдем теперь к выяснению геометрического смысла *модуля* и *аргумента* производной, причем будем считать, что производная $f'(z)$ в рассматриваемой точке отлична от нуля. Возьмем две близкие точки $z$ и $z+\Delta z$. Соответствующие им точки в области $B_1$ будут $w$ и $w+\Delta w$.

Возьмем отрезки $MN$ и $M_1N_1$, соединяющие $z$ с $z+\Delta z$ и $w$ с $w+\Delta w$. Этим векторам соответствуют комплексные числа $\Delta z$ и $\Delta w$. Таким образом, отношение длин этих векторов будет

$$\frac{|M_1N_1|}{|MN|}=\frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}$$

или, принимая во внимание, что модуль частного равен частному модулей,

$$\frac{|M_1N_1|}{|MN|}=\left|\frac{\Delta w}{\Delta z}\right|.$$

В пределе при стремлении $N$ к $M$ точка $N_1$ будет стремиться к $M_1$, и мы получим

$$\lim\frac{|M_1N_1|}{|MN|}=|f'(z)|,$$

т. е. *модуль производной $f'(z)$ характеризует изменение линейных размеров* в точке $z$ при преобразовании, совершаемом функцией $f(z)$.

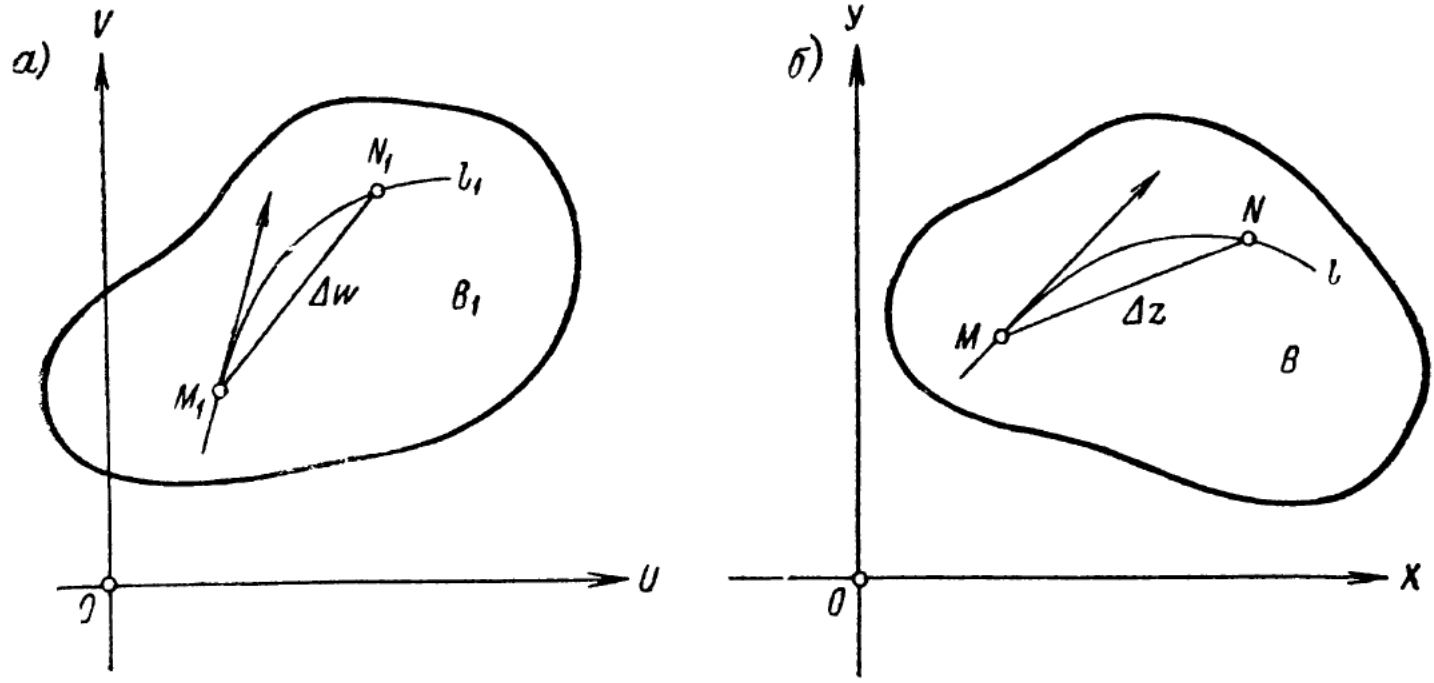



Рис. 2.

Если, например, $f(z)=z^3+z+3$, то при преобразовании линейные размеры в точке $z=1$ увеличиваются в три раза.

Перейдем теперь к выяснению геометрического смысла аргумента производной. Положим, что точка $N$ стремится к точке $M$ вдоль некоторой линии $l$, и пусть $l_1$ — соответствующая линия в области $B_1$ (рис. 2). Аргумент комплексного числа $\Delta z$ дает угол, образованный

вектором $\overline{MN}$ с вещественной осью, и точно так же $\arg \Delta w$ дает угол, образованный вектором $\overline{M_1N_1}$ с вещественной осью. Разность указанных аргументов, т. е.

$$\arg \Delta w - \arg \Delta z,$$

представляет собою угол, образованный направлением вектора $\overline{M_1N_1}$ с направлением вектора $\overline{MN}$, причем этот угол отсчитывается от вектора $\overline{MN}$ противоположно часовой стрелке. Принимая во внимание, что аргумент частного равен разности аргументов делимого и делителя, можем написать

$$\arg \Delta w - \arg \Delta z = \arg \frac{\Delta w}{\Delta z}.$$

В пределе направление вектора $\overline{MN}$ совпадает с направлением касательной к кривой $l$ в точке $M$, а направление вектора $\overline{M_1N_1}$ совпадает с направлением касательной к кривой $l_1$ в точке $M_1$.

Переходя в предыдущей формуле к пределу, мы видим, что *аргумент производной* $\arg f'(z)$ *дает угол поворота в данной точке* $z$ в результате преобразования, совершаемого функцией $f(z)$. Иными словами, если провести через $z$ какую-нибудь кривую $l$, имеющую в точке $z$ определенную касательную, то в результате преобразования получится новая кривая $l_1$, касательная к которой в соответствующей точке $w$ будет образовывать с вышеуказанной касательной угол, равный аргументу производной. Если мы возьмем в области $B$ две кривые, пересекающиеся в точке $z$ под некоторым углом, то в результате преобразования касательные к этим кривым повернутся на один и тот же угол, равный аргументу производной, и, следовательно, угол между преобразованными кривыми будет прежним как по величине, так и по направлению, т. е. *преобразование, совершаемое регулярной функцией, сохраняет углы во всех точках, где производная этой функции отлична от нуля.* Такое преобразование, сохраняющее углы, называется обычно *конформным.*

Если мы нанесем в области $B$ плоскости $XY$ некоторую сетку кривых, то в результате преобразования получим также сетку кривых, но уже, конечно, других, причем углы между кривыми сохраняются, кроме тех точек, где производная равна нулю. Если мы возьмем, например в области $B$, сетку прямых, параллельных осям, то в области $B_1$ получим уже криволинейную, вообще говоря, сетку, но углы между кривыми останутся по-прежнему прямыми, т. е. сетка останется ортогональной. Больше того, если мы покроем область $B$ малыми одинаковыми квадратами, то каждый такой квадрат превратится в области $B_1$ в малый криволинейный прямоугольник, стороны которого приближенно будут равны произведению длины стороны квадрата на модуль производной в какой-либо из точек этого

квадрата, т. е. упомянутый выше криволинейный прямоугольник будет также с точностью до малых высших порядков квадратом, но так как значение $|f'(z)|$ в разных точках будет разное, то эти криволинейные квадраты, заполняющие $B_1$, будут иметь различные по длине стороны.

Пусть точка $z=z_0$ принадлежит области регулярности $B$ функции $f(z)$ и $f'(z_0)\neq 0$. При этом можно утверждать, как будет потом доказано, что $w=f(z)$ преобразует некоторую окрестность $B_0$ точки $z_0$ в некоторую окрестность $B_0'$ точки $w_0=f(z_0)$ ($w_0$ находится внутри $B_0'$), так что в $B_0'$ существует однозначная обратная функция $z=\varphi(w)$, преобразующая $B_0'$ в $B_0$. При этом $\varphi(w)$ регулярна в $B_0'$, и имеет место правило дифференцирования обратной функции

$$\varphi'(w)=\frac{1}{f'(z)}.$$

Окрестность $B_0$ точки $z_0$ во всяком случае должна быть такой, что во всех ее точках $f'(z)\neq 0$. В дальнейшем мы исследуем и тот случай, когда $f'(z)$ обращается в нуль, и более подробно рассмотрим вопрос об обратной функции.

Остановимся кратко на понятии сложной функции $F(w)$, где $w=f(z)$. Пусть $f(z)$ регулярна внутри некоторой области $B$ и преобразует ее в некоторую область $B'$ плоскости $w$. Положим, далее, что $F(w)$ регулярна в $B'$. При этом сложная функция $F(w)$ — регулярная функция от $z$ в $B$, и для нее имеет место правило дифференцирования, выражаемое формулой (6).

Отметим, что это правило справедливо и в том случае, когда функция $w=f(z)$ такова, что в $B'$ нет однозначной обратной, т. е. при различных $z$ из $B$ могут получаться одинаковые $w$ из $B'$ и под $B'$ подразумевается множество значений $f(z)$, когда $z$ меняется в $B$. Как мы увидим в дальнейшем, $B'$ есть некоторая открытая область на плоскости $w$. В упомянутых случаях обычно не говорят, что $w=f(z)$ преобразует $B$ и $B'$. Этот вопрос будет выяснен в дальнейшем.

**4. Интеграл.** Пусть $l$ — некоторая направленная линия на плоскости $z$. В дальнейшем, если не оговорено особо, всегда будем предполагать, что линии $l$ гладкие или кусочно гладкие. Это значит, что $l$ имеет параметрическое представление $x=x(t)$, $y=y(t)$, где $x(t)$ и $y(t)$ — непрерывные функции с непрерывными производными, причем

$$[x'(t)]^2+[y'(t)]^2>0$$

(это гарантирует в каждой точке $l$ определенную касательную), или что $l$ состоит из конечного числа кусков, каждый из которых вплоть до своих концов обладает вышеуказанным свойством. Любая дуга такой линии имеет определенную длину [I, 103], или, как говорят, $l$ спрямляема. Если за параметр $t$ принять длину дуги $s$ линии $l$, отсчитываемую от фиксированной точки в направлении, указанном

на $l$, то производные $x'(s)$, $y'(s)$ суть направляющие косинусы касательной к $l$ [I, 70], и имеет место равенство

$$[x'(s)]^2 + [y'(s)]^2 = 1.$$

Для линий указанного типа вычисление криволинейного интеграла

$$\int_l P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$$

непосредственно сводится к вычислению обычного определенного интеграла. Достаточно лишь в подинтегральном выражении заменить $x$, $y$ на $x(t)$, $y(t)$ и положить $dx = x'(t)\,dt$, $dy = y'(t)\,dt$. Дело сведется к интегрированию по $t$ в пределах, соответствующих линии $l$.

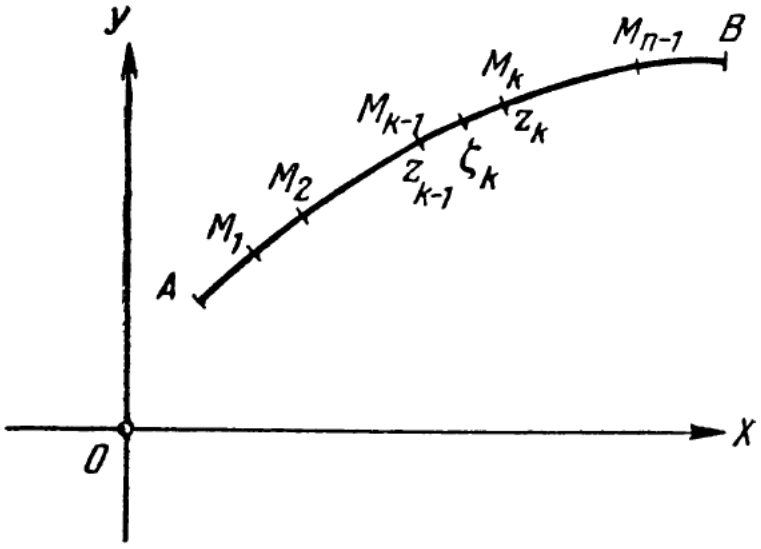



Рис. 3.

Положим, что на $l$ задана некоторая непрерывная функция $f(z)$. Определим понятие контурного интеграла по контуру $l$ (рис. 3). Разобьем $l$ на части промежуточными точками $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$, и пусть $z_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ — комплексные координаты $M_k$, а $z_0$ и $z_n$ — координаты концов $A$ и $B$. Пусть, далее, $\zeta_k$ — некоторая точка на дуге $M_{k-1}M_k$, $\zeta_1$ — на дуге $AM_1$ и $\zeta_n$ — на дуге $M_{n-1}B$. Составим сумму произведений

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}).$$

Предел этой суммы при беспредельном возрастании $n$ и беспредельном уменьшении каждой из частных дуг называется *контурным интегралом от функции* $f(z)$ по $l$:

$$\int_l f(z)\,dz = \lim \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}). \qquad (15)$$

Напомним, что написанное равенство равносильно следующему: при любом заданном $\varepsilon > 0$ существует такое $\eta > 0$, что

$$\left| \int_l f(z)\,dz - \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) \right| < \varepsilon,$$

если наибольшая из длин частичных дуг $< \eta$.

Обозначим $z_k = x_k + y_k i$ и $\zeta_k = \xi_k + \eta_k i$. Отделяя вещественную и мнимую части у $f(z)$, можем написать

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} [u(\xi_k, \eta_k) + v(\xi_k, \eta_k) i][(x_k - x_{k-1}) + (y_k - y_{k-1}) i],$$

или

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} u(\xi_k, \eta_k)(x_k - x_{k-1}) - v(\xi_k, \eta_k)(y_k - y_{k-1}) +$$

$$+ i \sum_{k=1}^{n} v(\xi_k, \eta_k)(x_k - x_{k-1}) + u(\xi_k, \eta_k)(y_k - y_{k-1}).$$

При сделанных предположениях о линии $l$ и при непрерывности $f(z)$ обе суммы, стоящие в правой части, стремятся к пределам, равным соответствующим криволинейным интегралам по $l$, и мы получаем выражение для интеграла (15) в виде суммы обычных криволинейных вещественных интегралов:

$$\int_l f(z)\,dz = \int_l u(x, y)\,dx - v(x, y)\,dy +$$

$$+ i \int_l v(x, y)\,dx + u(x, y)\,dy. \qquad (16)$$

Выше мы для определенности считали, что линия $l$ имеет концы, но очевидно, что данное определение годится и при интегрировании по замкнутым контурам.

Контурный интеграл (15) обладает совершенно такими же свойствами, как и обычный криволинейный вещественный интеграл [II, 69]. Упомянем основные из этих свойств. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла. Интеграл от суммы равен сумме интегралов от слагаемых. При перемене направления у контура интегрирования величина интеграла меняет лишь знак. Если разбить контур интегрирования на несколько частей, то величина интеграла по всему контуру равна сумме интегралов по отдельным его частям.

Выведем теперь одно важное неравенство, дающее оценку величине интеграла (15). Положим, что на контуре $l$ модуль подинтегральной функции не превышает положительного числа $M$, т. е.

$$|f(z)| \leqslant M \qquad (z \text{ на } l), \qquad (17)$$

и пусть $s$ — длина контура $l$. При этом для интеграла (15) имеет место следующая оценка:

$$\left|\int_l f(z)\,dz\right| \leqslant Ms. \tag{18}$$

Действительно, обратимся к сумме (15), дающей в пределе интеграл. Принимая во внимание, что модуль суммы меньше или равен сумме модулей слагаемых, получим

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1})\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)|\,|z_k - z_{k-1}|,$$

или, в силу (17),

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1})\right| \leqslant M\sum_{k=1}^{n} |z_k - z_{k-1}|.$$

Сумма, стоящая множителем при $M$, представляет собою, очевидно, периметр ломаной линии, вписанной в контур $l$, и, переходя в последнем неравенстве к пределу, будем иметь неравенство (18).

Можно указать более точную оценку для интеграла (15), а именно, если обозначить через $ds$ дифференциал дуги кривой $l$, то имеет место формула

$$\left|\int_l f(z)\,dz\right| \leqslant \int_l |f(z)|\,ds. \tag{19}$$

Это неравенство может быть непосредственно получено, если в подинтегральном выражении заменить $f(z)$ на $|f(z)|$ и $dz = dx + i\,dy$ — на $|dz| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = ds$.

**5. Теорема Коши.** В дальнейшем мы постоянно будем иметь дело с функциями, регулярными в некоторых областях. Границей области может быть весьма сложное множество. Мы в дальнейшем будем предполагать, если не оговорено особо, что граница области состоит из одной или нескольких простых замкнутых кривых, гладких или кусочно гладких [4]. Определим точно понятие простой замкнутой кривой. Пусть замкнутой кривой $l$ соответствует параметрическое представление $x(t)$, $y(t)$, при котором параметр $t$ меняется на промежутке $a \leqslant t \leqslant b$, причем $x(a) = x(b)$ и $y(a) = y(b)$. Кривая называется *простой*, если ни для какой пары различных значений $t = t_1$ и $t = t_2$ (кроме концов $t = a$ и $t = b$) точки $x = x(t_1)$, $y = y(t_1)$ и $x = x(t_2)$, $y = y(t_2)$ не совпадают. В некоторых случаях, которые будут оговариваться особо, замкнутая кривая может вырождаться в точку. Например, если область есть круг $|z| < 1$ с исключенной точкой $z = 0$, граница состоит из окружности $|z| = 1$ и точки $z = 0$.

Поставим теперь основной вопрос о том, при каких условиях контурный интеграл (16) не зависит от пути. Для этого, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы оба криволинейных интеграла, стоящих в правой части и дающих вещественную и мнимую части контурного интеграла, не зависели от пути. Применяя указанный в [II, 74] критерий независимости криволинейного интеграла от пути, приходим к уравнениям

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x},$$

а это суть в точности условия (12) из [2]. Итак, окончательно, *условие независимости контурного интеграла от пути совпадает с условием регулярности* $f(z)$. Это является основным фактом интегрального исчисления теории функций комплексного переменного.

Отметим, что при выводе условий независимости криволинейного интеграла от пути мы пользовались формулой

$$\int_l P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \iint_B \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

При выводе этой формулы мы предполагали непрерывность не только самих функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, но и их частных производных, поскольку они входят под знак двойного интеграла. В данном случае это будет иметь место, так как для регулярной функции $f(z)$ функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ имеют непрерывные частные производные первого порядка. В дальнейшем мы будем применять интегрирование и по самому контуру области $B$. Это будет вполне законным, если предположить, что $f(z)$ регулярна в замкнутой области $B$. Мы понимаем под этим, что $f(z)$ регулярна в несколько более широкой области, содержащей область $B$ вместе с ее контуром внутри себя, т. е. $f(z)$ называется *регулярной в замкнутой области* $B$, если она регулярна внутри некоторой области, содержащей $B$ вместе с ее контуром внутри себя.

Для более подробного исследования вопроса необходимо принять во внимание вид области, в которой функция $f(z)$ регулярна, а именно существенную роль играет здесь, так же как и при исследовании вещественных контурных интегралов, то обстоятельство, является ли область односвязной или многосвязной. Напомним относящиеся сюда основные определения и сформулируем результаты, которые совершенно аналогичны соответствующим результатам для вещественных контурных интегралов [II, 75].

Если ограниченная область плоскости $z$ имеет контуром одну замкнутую кривую (иначе говоря, область не имеет дыр), то область

называется односвязной. Если при этом $f(z)$ — регулярная функция в такой области и $z_0$ — некоторая точка этой области, то интеграл

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(z')\,dz' \tag{20}$$

(через $z'$ обозначена переменная интегрирования), взятый по любой кривой внутри этой области, не зависит от пути и дает однозначную функцию своего верхнего предела $z$. При этом, конечно, величина интеграла по любому замкнутому контуру внутри области будет равна нулю. Если наша функция $f(z)$ регулярна в замкнутой области, то мы можем интегрировать и по самому контуру области $B$, и результатом интегрирования будет нуль.

Положим теперь, что наша область $B$ многосвязна и ограничена одним замкнутым внешним контуром и несколькими замкнутыми внутренними контурами. Положим для определенности, что имеется лишь один внутренний контур [область двусвязна (рис. 4)]. Проведем в нашей области разрез $\lambda$, соединяющий внешний контур с внутренним. Таким образом разрезанная область $B'$ будет уже односвязной, и выражение (20) будет давать однозначную функцию от $z$ в $B'$. Если предположить, что $f(z)$ регулярна в замкнутой области, то можно интегрировать и по самому контуру области. Мы можем при этом утверждать, что интеграл по всему контуру односвязной области $B'$ должен равняться нулю. При этом, как указано на рисунке, нам придется интегрировать по внешнему контуру против часовой стрелки, по внутреннему контуру — по часовой стрелке и по разрезу $\lambda$ — два раза в противоположных направлениях. Интегралы по разрезу взаимно уничтожатся, и мы будем, следовательно, иметь

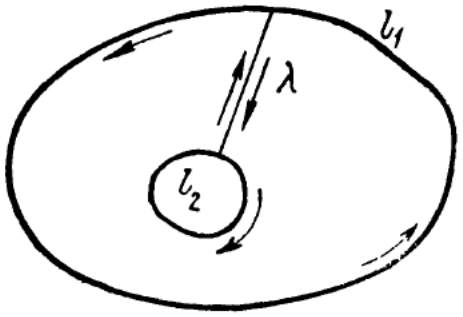


Рис. 4.

$$\oint_{l_1} f(z)\,dz+\oint_{l_2} f(z)\,dz=0, \tag{21}$$

где $l_1$ — внешний контур, $l_2$ — внутренний и стрелками обозначено направление интегрирования. Как непосредственно следует из чертежа, это направление для обоих контуров можно определить из одного и того же условия, а именно из того условия, что при обходе контура область остается слева. Такое направление назовем *положительным относительно области.* Пользуясь равенством (21), можем сказать, что и для случая многосвязной области интеграл по контуру будет равняться нулю, если интегрировать везде в положительном относительно области направлении.

Если изменить направление интегрирования по внутреннему контуру, то вместо формулы (21) мы можем написать

$$\int_{(l_1)} f(z)\,dz = \int_{(l_2)} f(z)\,dz, \tag{22}$$

т. е. интеграл по внешнему контуру равен сумме интегралов по внутренним контурам (здесь только один), если согласиться интегрировать по всем контурам против часовой стрелки.

Полученные нами результаты составляют основную для теории функций комплексного переменного теорему, которая называется обычно *теоремой Коши.* Мы ее формулируем несколькими различными способами.

Теорема Коши I. *Если функция регулярна в замкнутой односвязной области, то интеграл от нее по контуру этой области равен нулю.*

Теорема Коши II. *Если функция регулярна в замкнутой многосвязной области, то интеграл от нее по всему контуру этой области в положительном направлении равен нулю.*

Теорема Коши III. *Если функция регулярна в замкнутой многосвязной области, то интеграл от нее по внешнему контуру равен сумме интегралов по всем внутренним контурам при условии, что интегрирование по всем контурам производится против часовой стрелки.*

Выясним одно практически важное следствие теоремы Коши. Пусть два разных контура $l'$ и $l''$ имеют одни и те же концы $A$ и $B$. Положим, что $l'$ можно непрерывной деформацией перевести в $l''$, не покидая области, где $f(z)$ регулярна, и сохраняя неизменными концы $A$ и $B$. Из теоремы Коши непосредственно вытекает, что при этом величина интеграла от $f(z)$ не будет меняться, т. е. *если некоторый контур при закрепленных концах непрерывно деформируется и при этом не выходит из области регулярности функции $f(z)$, то при такой деформации величина интеграла от функции $f(z)$ по контуру не меняется.* То же самое имеет место и *при деформировании замкнутого контура,* если при этом он все время остается замкнутым.

В заключение сделаем одно замечание, имеющее принципиальное значение. При выводе теоремы Коши мы пользовались, как указывалось, не только существованием, но и непрерывностью производной $f'(z)$. Эта непрерывность $f'(z)$ входит в определение регулярной функции. Применяя другой метод доказательства, можно доказать теорему Коши, пользуясь только существованием $f'(z)$, но не ее непрерывностью. Но в дальнейшем мы увидим, что из теоремы Коши вытекает, что $f(z)$ имеет производные всех порядков, откуда сразу следует, что $f'(z)$ непрерывна.

Таким образом, второе доказательство теоремы Коши, которое мы не приводим, имеет то принципиально важное значение, что оно

не пользуется непрерывностью $f'(z)$, но из него, как следствие, вытекает, что из наличия производной $f'(z)$ следует и ее непрерывность.

В дальнейшем, если не будет оговорено особо, мы будем всегда считать, что при интегрировании по замкнутому контуру направление обхода берется против часовой стрелки.

**6. Основная формула интегрального исчисления.** Положим, что $f(z)$ регулярна в некоторой области, и рассмотрим функцию, определяемую формулой (20). Если наша область многосвязна, то все же мы можем считать $F(z)$ однозначной, произведя соответствующие разрезы. Совершенно так же, как в интегральном исчислении функций вещественного переменного [I, 96], можно показать, что $F(z)$ является первообразной функцией для $f(z)$, т. е. $F'(z)=f(z)$.

Для этого заметим прежде всего, что из самого определения интеграла, как предела суммы, непосредственно вытекает

$$\int_l dz=\beta-\alpha,$$

где $\alpha$ и $\beta$ — комплексные координаты начала и конца $l$. Далее, очевидно,

$$F(z+\Delta z)-F(z)=\int_z^{z+\Delta z} f(z')\,dz',$$

где интегрирование можно совершать, например, по прямолинейному отрезку, соединяющему точки $z$ и $z+\Delta z$. При достаточно малом $|\Delta z|$ этот отрезок не выходит из области регулярности функции $f(z)$ (поскольку $z$ считается внутренней точкой этой области), и мы имеем, очевидно,

$$F(z+\Delta z)-F(z)=\int_z^{z+\Delta z}[f(z')-f(z)+f(z)]\,dz'=$$
$$=f(z)\int_z^{z+\Delta z} dz'+\int_z^{z+\Delta z}[f(z')-f(z)]\,dz',$$

где $f(z)$ вынесена за знак интегрирования, так как она не содержит переменной интегрирования $z'$. Последнюю формулу можно переписать в следующем виде:

$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=f(z)+\frac{1}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z}[f(z')-f(z)]\,dz'. \qquad (23)$$

Остается доказать, что последнее слагаемое, стоящее справа, стремится к нулю при $\Delta z\to 0$. Пользуясь оценкой интеграла, данной

в [4], и принимая во внимание, что длина пути интегрирования в данном случае равна $|\Delta z|$, можем написать

$$\left|\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z}[f(z')-f(z)]\,dz'\right|\leqslant\frac{1}{|\Delta z|}\cdot\max|f(z')-f(z)|\cdot|\Delta z|=$$

$$=\max|f(z')-f(z)|.$$

Нам надо взять maximum модуля разности $|f(z')-f(z)|$ при изменении $z'$ вдоль прямолинейного отрезка, соединяющего $z$ и $z+\Delta z$. Непрерывная неотрицательная функция $|f(z')-f(z)|$ от $z'$ принимает на упомянутом отрезке наибольшее значение в некоторой точке $z'=z_0'$, т. е. $\max|f(z')-f(z)|=|f(z_0')-f(z)|$. Но при $\Delta z\to 0$ точка $z_0'$, принадлежащая упомянутому отрезку, стремится к $z$, и в силу непрерывности $f(z)$ разность $f(z_0')-f(z)\to 0$, откуда и следует, что последнее слагаемое справа в выражении (23) стремится к нулю, т. е. $F'(z)=f(z)$.

Покажем теперь, что если имеются две первообразные функции $F_1(z)$ и $F_2(z)$ для функции $f(z)$, то они отличаются постоянным слагаемым. По условию имеем

$$F_1'(z)=f(z)\quad\text{и}\quad F_2'(z)=f(z),$$

т. е.

$$[F_1(z)-F_2(z)]'=0.$$

Таким образом, нам остается показать, что *если внутри области B производная некоторой функции равна тождественно нулю, то эта функция в области B есть постоянная.* Итак, пусть $f_1(z)=u_1(x,y)+iv_1(x,y)$ и

$$f_1'(z)\equiv 0.$$

Составляем два выражения для производной

$$f_1'(z)=\frac{\partial u_1}{\partial x}+i\frac{\partial v_1}{\partial x}=\frac{\partial v_1}{\partial y}-i\frac{\partial u_1}{\partial y}\equiv 0,$$

и, следовательно, имеем

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}\equiv 0,\quad\frac{\partial u_1}{\partial y}\equiv 0,\quad\frac{\partial v_1}{\partial x}\equiv 0,\quad\frac{\partial v_1}{\partial y}\equiv 0,$$

откуда непосредственно следует, что $u_1$ и $v_1$ не зависят ни от $x$, ни от $y$, т. е. являются постоянными, а следовательно, и функция $f_1(z)$ будет постоянной.

Положим, что мы имеем некоторую первообразную функцию $F_1(z)$ для функции $f(z)$. Она отличается от первообразной функции (20) лишь постоянным слагаемым, т. е.

$$\int_{z_0}^{z}f(z')\,dz'=F_1(z)+C.$$

Для определения этого постоянного слагаемого положим, что конец $z$ совпадает с началом пути $z_0$, что даст нам

$$0 = F_1(z_0) + C, \quad \text{или} \quad C = -F_1(z_0),$$

и предыдущую формулу можно переписать в виде

$$\int_{z_0}^{z} f(z')\,dz' = F_1(z) - F_1(z_0), \tag{24}$$

т. е. *величина контурного интеграла равна приращению первообразной функции вдоль пути интегрирования.* При этом предполагается, конечно, что первообразная функция $F(z)$ однозначна и регулярна в некоторой области, содержащей путь интегрирования внутри себя.

Пример. Рассмотрим интеграл

$$\int_l (z-a)^n\,dz, \tag{25}$$

где $n$ — некоторое целое число и $l$ — замкнутый контур. Если $n$ отлично от $(-1)$, то первообразная функция будет

$$\frac{1}{n+1}(z-a)^{n+1}. \tag{26}$$

Это будет однозначная регулярная функция или везде, если $n \geqslant 0$, или везде, кроме $z = a$, если $n < -1$. Предполагаем контур $l$ не проходящим через $z = a$. При обходе по замкнутому контуру однозначная функция (26) будет иметь, очевидно, приращение, равное нулю, и, следовательно, величина интеграла (25) при $n \neq -1$ будет по любому замкнутому контуру равна нулю. Если $n \geqslant 0$, то это непосредственно следует из теоремы Коши. Если $n < -1$, то это также следует из теоремы Коши, если только точка $z = a$ не находится внутри контура $l$.

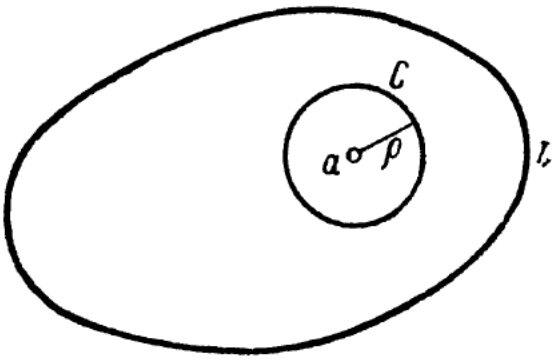


Рис. 5.

Предыдущее рассуждение показывает, что и при отрицательном $n$, не равном $-1$, величина интеграла (25) будет равна нулю, даже если $a$ находится внутри контура $l$. При этом подинтегральная функция не будет уже регулярной в точке $z = a$, так как в этой точке она будет обращаться в бесконечность.

Рассмотрим теперь случай $n = -1$, т. е. интеграл вида

$$\int_l \frac{dz}{z-a}. \tag{27}$$

Если $a$ находится вне замкнутого контура $l$, то по теореме Коши интеграл (27) равен нулю. Положим, что точка $a$ находится внутри контура $l$ (рис. 5). Проведем окружность $C$ с центром $a$

и малым радиусом $\rho$. Подинтегральная функция $(z-a)^{-1}$ будет регулярной в кольце, ограниченном контуром $l$ и окружностью $C$, и, следовательно, согласно теореме Коши, мы можем при вычислении интеграла (27) интегрировать по окружности $C$. На этой окружности

$$z-a=\rho e^{i\varphi},$$

где $\varphi$ меняется в промежутке $(0,\ 2\pi)$. Отсюда

$$dz=i\rho e^{i\varphi}\,d\varphi.$$

Подставляя в интеграл (27), будем иметь

$$\int_C \frac{dz}{z-a}=\int_0^{2\pi}\frac{i\rho e^{i\varphi}\,d\varphi}{\rho e^{i\varphi}}=2\pi i,$$

т. е. окончательно

$$\int_l \frac{dz}{z-a}=2\pi i. \tag{28}$$

**7. Формула Коши.** Пусть $f(z)$ — некоторая функция, регулярная в замкнутой области $B$, которую мы пока для простоты будем считать односвязной. Пусть $l$ — контур этой области и $a$ — некоторая точка внутри этой области.

Составим новую функцию

$$\frac{f(z)}{z-a}. \tag{29}$$

Эта новая функция также регулярна везде в $B$, кроме, может быть, точки $z=a$, так как в этой точке знаменатель дроби (29) обращается в нуль. Исключим эту точку кружком с центром $a$ и малым радиусом $\varepsilon$, и пусть $C_\varepsilon$ — окружность этого круга. В кольце, ограниченном контурами $l$ и $C_\varepsilon$, наша функция (29) будет регулярной без всякого исключения, и, следовательно, согласно теореме Коши, мы можем написать

$$\int_l \frac{f(z)}{z-a}\,dz=\int_{C_\varepsilon}\frac{f(z)}{z-a}\,dz.$$

В интеграле, стоящем справа, положим $f(z)=f(a)+f(z)-f(a)$. Тогда

$$\int_l \frac{f(z)}{z-a}\,dz=f(a)\int_{C_\varepsilon}\frac{dz}{z-a}+\int_{C_\varepsilon}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz,$$

или, в силу (28),

$$\int_l \frac{f(z)}{z-a}\,dz=f(a)\,2\pi i+\int_{C_\varepsilon}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz. \tag{30}$$

Обратим теперь внимание на следующее обстоятельство: интеграл, стоящий в левой части формулы (30), и первое слагаемое правой части не зависят от выбора радиуса $\varepsilon$, поэтому можно утверждать, что и второе слагаемое, стоящее справа, на самом деле не зависит от $\varepsilon$. Но мы сейчас докажем, что оно стремится к нулю, когда $\varepsilon \to 0$. Отсюда будет непосредственно следовать, что оно в точности равно нулю.

Применяя оценку из [4] и принимая во внимание, что при движении $z$ по окружности $C_\varepsilon$ с центром $a$, очевидно, $|z-a|=\varepsilon$, получим

$$\left|\int_{C_\varepsilon}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz\right| \leqslant \frac{\max\limits_{\text{на } C_\varepsilon}|f(z)-f(a)|}{\varepsilon}\,2\pi\varepsilon = \max_{\text{на } C_\varepsilon}|f(z)-f(a)|\cdot 2\pi.$$

При беспредельном уменьшении $\varepsilon$ точки окружности $z$ стремятся к $a$, и максимум модуля разности $\max|f(z)-f(a)|$ будет стремиться к нулю, т. е. действительно второе слагаемое правой части формулы (30) стремится к нулю вместе с $\varepsilon$, и по высказанным выше соображениям оно равно нулю. Таким образом формула (30) переписывается в виде

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{f(z)}{z-a}\,dz.$$

Переменим несколько наше обозначение, а именно будем обозначать через $z'$ переменную интегрирования и через $z$ — любую точку внутри нашей области. При этом предыдущая формула примет вид

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{f(z')}{z'-z}\,dz'. \tag{31}$$

Эта *формула Коши выражает значение регулярной функции в любой точке $z$ внутри области через ее значения на контуре области.* Интеграл, входящий в формулу Коши, содержит $z$ под знаком интеграла в качестве параметра и притом в чрезвычайно простой форме.

Точка $z$ находится внутри области, а переменная точка интегрирования $z'$ пробегает контур области. Таким образом, $z'-z\neq 0$, и интеграл, стоящий в формуле Коши, представляет собою интеграл от непрерывной функции, и его можно дифференцировать по $z$ под знаком интеграла сколько угодно раз. Мы получаем, последовательно дифференцируя,

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{f(z')}{(z'-z)^2}\,dz', \quad f''(z)=\frac{2!}{2\pi i}\int_l \frac{f(z')}{(z'-z)^3}\,dz'$$

и вообще при любом целом положительном $n$

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_l \frac{f(z')}{(z'-z)^{n+1}}\,dz'. \tag{32}$$

Мы видим, таким образом, что регулярная функция имеет производные всех порядков, и эти производные выражаются через контурные значения функции по формуле (32).

Докажем строго возможность дифференцировать под знаком интеграла для определения $f'(z)$. Мы имеем

$$f(z+\Delta z)-f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{f(z')}{z'-z-\Delta z}\,dz'-\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{f(z')}{z'-z}\,dz'=$$

$$=\frac{\Delta z}{2\pi i}\int_l \frac{f(z')}{(z'-z)(z'-z-\Delta z)}\,dz',$$

или

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{f(z')}{(z'-z)(z'-z-\Delta z)}\,dz'.$$

Если справа перейти к пределу при $\Delta z\to 0$ под знаком интеграла, то мы получим для этого предела выражение

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{f(z')}{(z'-z)^2}\,dz'. \qquad (32_1)$$

Остается доказать возможность упомянутого предельного перехода под знаком интеграла, т. е. надо доказать, что разность

$$\delta=\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{f(z')}{(z'-z)^2}\,dz'-\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{f(z')}{(z'-z)(z'-z-\Delta z)}\,dz'$$

стремится к нулю при $\Delta z\to 0$.

После элементарных преобразований получаем

$$\delta=\frac{-\Delta z}{2\pi i}\int_l \frac{f(z')}{(z'-z)^2[z'-(z+\Delta z)]}\,dz'.$$

Функция $f(z')$, во всяком случае непрерывная на $l$, будет ограниченной по модулю, т. е. $|f(z')|\leqslant M$. Обозначим через $2d$ положительное число, равное кратчайшему расстоянию от точки $z$ до контура $l$, т. е. $|z'-z|\geqslant 2d$. Точка $(z+\Delta z)$ при $\Delta z$, близких к нулю, близка к $z$, а потому $|z'-(z+\Delta z)|>d$. Применяя обычную оценку интеграла, получим

$$|\delta|<\frac{|\Delta z|}{2\pi}\cdot\frac{Ms}{4d^3},$$

где $s$ — длина контура, откуда и вытекает, что $\delta\to 0$ при $\Delta z\to 0$. Совершенно так же можно показать, исходя из формулы $(32_1)$, что $f'(z)$ также имеет производную

$$f''(z)=\frac{2!}{2\pi i}\int_l \frac{f(z')}{(z'-z)^3}\,dz',$$

что и требовалось доказать.

Формулы (31) и (32), как и теорема Коши, непосредственно применимы и для многосвязной области, при этом надо только интегрировать по всему контуру области в положительном направлении, т. е. имея область слева.

Распространим теперь формулу Коши на случай *бесконечной области*. Пусть $f(z)$ регулярна в области $B$, образованной частью плоскости, находящейся вне замкнутого контура $l$, и подчиняется еще дополнительному условию, а именно — при *беспредельном удалении точки $z$ функция $f(z)$ стремится к нулю:*

$$f(z) \to 0 \text{ при } z \to \infty. \tag{33}$$

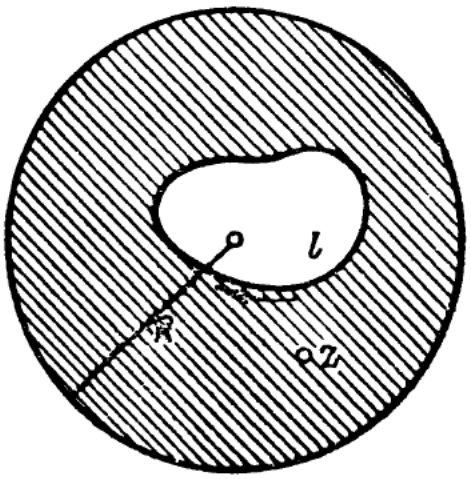


Рис. 6.

Покажем, что при этом также имеет место формула Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_l \frac{f(z')}{z' - z}\, dz', \tag{34}$$

причем направление интегрирования берется так, чтобы область $B$ (в данном случае часть плоскости вне $l$) находилась слева. Для доказательства проведем круг с центром в начале и с большим радиусом $R$. Наша функция $f(z)$ регулярна в кольце, ограниченном контуром $l$ и окружностью $C_R$ (рис. 6) проведенного круга, и мы имеем для любой точки $z$ внутри этого кольца

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_l \frac{f(z')}{z' - z}\, dz' + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{f(z')}{z' - z}\, dz'. \tag{35}$$

Как и при доказательстве формулы Коши, мы убеждаемся, что второе слагаемое в правой части по существу не зависит от выбора $R$, и, следовательно, если мы докажем, что оно стремится к нулю при беспредельном возрастании $R$, то отсюда будет следовать, что оно тождественно равно нулю, и при этом формула (35) перейдет в формулу (34). Оценим второе слагаемое правой части формулы (35). При этой оценке мы заменим модуль знаменателя $|z' - z|$ меньшей величиной, а именно разностью модулей $|z'| - |z| = R - |z|$. В результате получится оценка вида

$$\left| \int_{C_R} \frac{f(z')}{z' - z}\, dz' \right| \leqslant \max_{C_R} |f(z')| \frac{2\pi R}{R - |z|},$$

или

$$\left| \int_{C_R} \frac{f(z')}{z' - z}\, dz' \right| \leqslant \max_{C_R} |f(z')| \frac{2\pi}{1 - \frac{|z|}{R}}.$$

При беспредельном возрастании $R$ написанная дробь стремится к $2\pi$, а первый из множителей $\max\limits_{C_R} |f(z')|$ стремится к нулю согласно условию (33). Таким образом, мы доказали формулу Коши для случая бесконечной области. Заметим, что из доказательства следует, что условие (33) должно выполняться равномерно относительно $z$. Иными словами, полностью это условие можно формулировать так: при любом заданном $\varepsilon$ существует такой $R_\varepsilon$, что $|f(z)| < \varepsilon$, если $|z| > R_\varepsilon$.

Иногда приходится иметь дело с функциями, которые регулярны внутри области и имеют определенные предельные значения при переходе на контур области, так что во всей замкнутой области они являются функциями непрерывными, но про них нельзя все же утверждать, что они регулярны в замкнутой области, т. е. что они остаются регулярными и при расширении области. Заметим, что для таких функций, *регулярных в области и непрерывных в замкнутой области, имеют место как теорема Коши, так и формула Коши.* Действительно, если мы сожмем немного контур, то функция станет регулярной и на контуре, и, например, теорема Коши будет применима, т. е. интеграл по контуру будет равен нулю. Если мы затем будем непрерывно расширять контур с тем, чтобы он совпал со своим первоначальным положением, то и в пределе интеграл по первоначальному контуру области будет тоже равным нулю. Здесь, конечно, возможен переход к пределу, так как функция равномерно непрерывна в замкнутой области.

Можно сказать, что почти все дальнейшие результаты настоящей главы являются непосредственным следствием формулы Коши, и мы много раз будем к ней обращаться. В настоящем номере мы приведем два примера применения этой формулы.

Проведем более подробно доказательство теоремы Коши для того случая, когда $f(z)$ регулярна внутри круга $|z| > R$ с центром в начале и радиусом $R$ и непрерывна в замкнутом круге $|z| \leqslant R$. Функция $f(z)$ будет регулярной в замкнутом круге $|z| \leqslant R_1$, где $R_1$ — любое положительное число, меньшее $R$. Теорема Коши применима, и мы имеем

$$\int\limits_{|z|=R_1} f(z)\,dz = 0.$$

На окружности этого круга $z = R_1 e^{i\varphi}$ и $dz = R_1 i e^{i\varphi}\,d\varphi$, так что

$$iR_1 \int\limits_0^{2\pi} f(R_1 e^{i\varphi})\, e^{i\varphi}\,d\varphi = 0.$$

Поскольку $f(z)$ равномерно непрерывна в замкнутом круге [1], можно доказать возможность перехода к пределу под знаком интеграла при $R_1 \to R$ [II, 84], и в пределе получим

$$iR \int\limits_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi})\, e^{i\varphi} d\varphi = 0,$$

или, переходя опять к переменной $z$, можем написать

$$\int_{|z|=R} f(z)\,dz = 0,$$

что и требовалось доказать. Для контуров более сложного вида доказательство представляет бо́льшие трудности. Из теоремы Коши, как и выше, вытекает формула Коши для функций, регулярных внутри области и непрерывных в замкнутой области.

Пример I. Возьмем показательную функцию $f(z) = e^z$. Она регулярна на всей плоскости, и мы можем применить формулу (32), взяв за $l$ любой замкнутый контур, внутри которого находится точка $z$:

$$e^z = \frac{n!}{2\pi i}\int_l \frac{e^{z'}}{(z'-z)^{n+1}}\,dz'.$$

Берем за $l$ круг с центром $z' = z$ и некоторым фиксированным радиусом $\rho$. Мы имеем

$$z'-z = \rho e^{i\varphi};\quad e^{z'} = e^z e^{\rho\cos\varphi + i\rho\sin\varphi};\quad dz' = i\rho e^{i\varphi}d\varphi;$$

подставляя в предыдущую формулу, получаем

$$1 = \frac{n!}{2\pi\rho^n}\int_0^{2\pi} e^{\rho\cos\varphi + i\rho\sin\varphi - in\varphi}\,d\varphi,$$

откуда

$$2\pi\frac{\rho^n}{n!} = \int_0^{2\pi} e^{\rho\cos\varphi + i(\rho\sin\varphi - n\varphi)}d\varphi.$$

Отделяя вещественную часть, получим выражение для определенного интеграла довольно сложного типа:

$$\int_0^{2\pi} e^{\rho\cos\varphi}\cos(\rho\sin\varphi - n\varphi)\,d\varphi = 2\pi\frac{\rho^n}{n!}. \tag{36}$$

Пример II. Рассмотрим рациональную дробь

$$\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = f(z), \tag{37}$$

где степень полинома $\psi(z)$ стоящего в знаменателе, выше степени полинома $\varphi(z)$. Такая функция удовлетворяет, очевидно, условию (33). Положим, кроме того, что $l$ есть замкнутый контур, содержащий внутри себя все корни полинома $\psi(z)$. Мы можем утверждать после этого, что функция (37) регулярна на части плоскости, находящейся вне контура $l$, и что к ней применима формула Коши для бесконечной области. В этой формуле интегрирование по $l$ надо производить так, чтобы область, находящаяся вне $l$, была слева, т. е. по часовой стрелке. Если же будем интегрировать против часовой стрелки, то результат переменит знак, и будем, следовательно иметь

$$-\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{\varphi(z')}{\psi(z')(z'-z)}\,dz'. \tag{38}$$

Обратим внимание на подинтегральную функцию в последнем интеграле. Как функция от $z'$ она перестает быть регулярной или, как говорят, имеет особые точки внутри $l$ там, где $\psi(z')$ обращается в нуль. Точка $z$ не является особой, так как она находится вне контура $l$ (внутри бесконечной области $B$). Наличие упомянутых точек, являющихся корнями полинома $\psi(z')$, и приводит к тому факту, что величина интеграла (38) по замкнутому контуру $l$ оказывается отличной от нуля.

**8. Интегралы типа Коши.** В формуле Коши (31) числитель в подинтегральной функции представлял собою значение регулярной функции $f(z)$ на контуре $l$. При этом, согласно формуле Коши, величина интеграла воспроизводила в точности функцию $f(z)$ в точке, находящейся внутри области. Будем рассматривать интеграл, стоящий в формуле Коши, как некий вычислительный аппарат, и посмотрим, что он будет давать, если мы в числитель его подинтегральной функции подставим какую-нибудь совершенно произвольно заданную непрерывную функцию на контуре, про которую ничего не известно больше того, что она задана и непрерывна на контуре. Обозначим эту функцию через $\omega(z')$. Величина нашего интеграла будет, очевидно, некоторой функцией от $z$:

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{\omega(z')}{z'-z}\,dz'. \tag{39}$$

Интеграл, стоящий справа, при сделанных общих предположениях относительно функции $\omega(z')$ называется *интегралом типа Коши.* Мы можем, как и в предыдущем номере, дифференцировать по $z$ под знаком интеграла сколько угодно раз и получим формулы, аналогичные формулам (32):

$$F^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_l \frac{\omega(z')}{(z'-z)^{n+1}}\,dz', \tag{40}$$

т. е. $F(z)$ есть во всяком случае регулярная функция внутри той области $B$, которая ограничена замкнутым контуром $l$. Мы могли бы, конечно, считать, что $z$ находится и вне замкнутого контура $l$. При этом наряду с формулой (39) мы опять имели бы формулу (40), т. е. формула (39) и для точек $z$ вне контура $l$ определяет некоторую регулярную функцию. Если считать, что $z$ находится на самом контуре, то интеграл (39) теряет смысл, так как при этом подинтегральная функция на контуре интегрирования обращается в бесконечность. Предыдущие рассуждения приводят нас к следующему результату: *интеграл типа Коши* (39) *определяет две регулярные функции — одну внутри контура $l$ и другую вне контура.*

Заметим, что эти две регулярные функции будут, вообще говоря, различными. Чтобы пояснить это обстоятельство, рассмотрим наи-

более простой случай, а именно тот случай, когда «плотность» в интеграле типа Коши $\omega(z')$ совпадает со значениями на контуре функции $f(z)$, регулярной в замкнутой области, ограниченной контуром $l$. Итак, пусть $\omega(z')=f(z')$ есть функция, регулярная в замкнутой области, ограниченной контуром $l$. Если $z$ находится внутри $l$, то применима формула Коши (31), и интеграл типа Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{f(z')}{z'-z}\,dz' \tag{41}$$

дает нам внутри контура функцию $f(z)$. Положим теперь, что $z$ находится вне контура $l$, и рассмотрим подинтегральную функцию в интеграле (41) как функцию от $z'$. Ее числитель $f(z')$ регулярен внутри и на $l$, а ее знаменатель $z'-z$ не обращается в нуль внутри и на $l$, так как $z$ находится по условию вне $l$. Следовательно, мы можем применить теорему Коши и утверждать, что величина интеграла (41), если $z$ находится вне $l$, равна нулю, т. е. в рассматриваемом случае интеграл типа Коши (41) дает $f(z)$, если $z$ внутри $l$, и нуль, если $z$ вне $l$.

Вернемся опять к формуле Коши (31). В этой формуле «плотность» интеграла типа Коши $f(z')$ совпадала со значениями самой функции $f(z)$ на контуре $l$. В общем случае интеграла типа Коши (39), если $\omega(z')$ задается как произвольная непрерывная функция на контуре $l$, это обстоятельство, конечно, не будет иметь места. Для формулы (39) мы должны различать две функции: функцию $f_1(z)$, определенную формулой (39) внутри $l$, и функцию $f_2(z)$, определенную вне $l$. Если $z$ стремится к некоторой точке $z'$, лежащей на контуре $l$ изнутри, то возникает вопрос — будет ли вообще $f_1(z)$ стремиться к пределу и как этот предел будет связан со значением $\omega(z')$. Такой же вопрос можно поставить и для функции $f_2(z)$, если $z$ стремится к $z'$ извне контура. В настоящей главе мы не будем заниматься этим вопросом. При некоторых дополнительных предположениях предельные значения функций $f_1(z')$ и $f_2(z')$ наверно будут существовать, но их связь с $\omega(z')$ представляется довольно сложной. Разность этих предельных значений, т. е., точнее говоря, разность предела $f_1(z)$ и предела $f_2(z)$ при стремлении $z$ к $z'$ по нормали к кривой $l$ будет равна в точности $\omega(z')$. Это правило подтверждается на частном примере интеграла типа Коши вида (41). Здесь внутреннее предельное значение будет $f(z')$ и внешнее — нуль.

Интегралами типа Коши нередко пользуются при аналитическом представлении функций. Заметим, что это представление многозначно, т. е., точнее говоря, можно одну и ту же функцию представить различными интегралами типа Коши. Покажем это на примере. Пусть $l$ — замкнутый контур, содержащий начало $z=0$ внутри себя, и определим внутри $l$ регулярную функцию, равную тождественно нулю. Она, конечно, может быть представлена интегралом типа Коши (39)

с «плотностью» $\omega(z')\equiv 0$. Покажем, что эту функцию, т. е. нуль, можно представить интегралом типа Коши с «плотностью» $\omega(z')=\frac{1}{z'}$. Действительно, рассмотрим интеграл

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{1}{z'(z'-z)}\,dz' \tag{42}$$

и покажем, что он равен нулю при любом положении $z$ внутри $l$, причем напомним, что по условию начало также находится внутри $l$. Разлагая рациональную дробь на простейшие, можем написать

$$\frac{1}{z'(z'-z)}=-\frac{1}{zz'}+\frac{1}{z(z'-z)}$$

и, следовательно,

$$F(z)=-\frac{1}{2\pi iz}\int_l \frac{dz'}{z'}+\frac{1}{2\pi iz}\int_l \frac{dz'}{z'-z}.$$

Принимая во внимание пример из [6], получим

$$F(z)=-\frac{1}{z}+\frac{1}{z}\equiv 0.$$

Итак, интеграл типа Коши (42) дает также нуль внутри $l$. Добавляя этот интеграл к некоторому интегралу типа Коши (39), дающему регулярную функцию $F(z)$, мы получим другой интеграл типа Коши, дающий ту же самую функцию $F(z)$. Таким образом, из равенства двух интегралов типа Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{\omega_1(z')}{z'-z}\,dz'=\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{\omega_2(z')}{z'-z}\,dz' \qquad (z\text{ — внутри }l) \tag{43}$$

при всяком $z$ внутри $l$ нельзя все же заключить, что «плотности» этих интегралов совпадают. Но это будет так, если мы наложим на «плотности» некоторые добавочные условия. Так, например, имеет место следующая теорема Гарнака: если $\omega_1(z')$ и $\omega_2(z')$ — непрерывные вещественные функции и $l$ есть окружность, то равенство (43) равносильно тождеству $\omega_1(z')\equiv\omega_2(z')$.

В конце этой главы мы рассмотрим вопрос о предельных значениях интегралов типа Коши при приближении к контуру области.

**9. Следствия формулы Коши.** Пусть $f(z)$ — функция, регулярная в замкнутой области $B$ с контуром $l$ или регулярная внутри области и непрерывная в замкнутой области. Рассмотрим регулярную функцию $[f(z)]^n$, где $n$ — некоторое целое положительное число, и применим к этой функции формулу Коши:

$$[f(z)]^n=\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{[f(z')]^n}{z'-z}\,dz'.$$

Пусть $M$ — максимум модуля $|f(z')|$ на контуре $l$, и обозначим через $\delta$ минимум модуля $|z'-z|$, т. е. наименьшее расстояние точки $z$ от контура $l$.

Применяя обычные оценки, будем иметь

$$|f(z)|^n \leqslant \frac{M^n S}{2\pi\delta},$$

где $S$ — длина контура $l$. Предыдущее неравенство можно переписать так:

$$|f(z)| \leqslant M\left(\frac{S}{2\pi\delta}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

При стремлении целого положительного числа $n$ к бесконечности получаем в пределе неравенство

$$|f(z)| \leqslant M, \tag{44}$$

т. е. *если $f(z)$ — функция, регулярная в области и непрерывная в замкнутой области, то максимум ее модуля достигается на контуре,* т. е. ее модуль в любой внутренней точке области не больше, чем максимум ее модуля на контуре.

Можно показать, что в формуле (44) может иметь место знак равенства только в том случае, когда $f(z)$ есть постоянная. Доказанное выше свойство называется обычно *принципом модуля.*

Перейдем теперь ко второму следствию из формулы Коши. Функция $e^z$ или полином от $z$ дают примеры функций, регулярных на всей плоскости. Покажем, что такие функции не могут быть ограничены по модулю, за исключением того неинтересного случая, когда $f(z)$ есть постоянная величина. Иными словами, имеет место следующая теорема, которая называется обычно теоремой Лиувилля: *если $f(z)$ регулярна на всей плоскости и ограничена,* т. е. *существует такое положительное число $N$, что при всяком $z$*

$$|f(z)| \leqslant N, \tag{45}$$

*то $f(z)$ есть постоянная.*

Применим формулу Коши для $f'(z)$:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{f(z')}{(z'-z)^2}\,dz'.$$

Так как $f(z)$ регулярна на всей плоскости, то за контур $l$ мы можем взять любой контур, содержащий $z$ внутри себя. Возьмем за $l$ окружность с центром $z$ и некоторым радиусом $R$, который мы затем будем беспредельно увеличивать. Мы имеем, очевидно,

$$|z'-z| = R$$

и, следовательно,

$$|f'(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \frac{\max\limits_{\text{на } l} |f(z')|}{R^2} 2\pi R.$$

Принимая во внимание (45), получаем следующую оценку:

$$|f'(z)| \leqslant \frac{N}{R}.$$

Левая часть этого неравенства не зависит от выбора $R$, а правая стремится к нулю при беспредельном возрастании $R$. Отсюда непосредственно следует, что $f'(z) \equiv 0$, и, следовательно, $f(z)$ есть постоянная [6].

В связи с теоремой Лиувилля отметим, что функция $f(z) = \cos z$, регулярная на всей плоскости, остается ограниченной при вещественном $z$, но, например, при чисто мнимых значениях $z = yi$ она равна $(e^{-y} + e^{y}) : 2$, откуда видно, что она стремится к бесконечности при $|y| \to \infty$.

Пользуясь теоремой Лиувилля, нетрудно доказать основную теорему алгебры: *всякий полином*

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n$$

*имеет по крайней мере один корень.* Доказываем от противного. Предположим, что написанный полином не имеет ни одного корня, т. е. не обращается в нуль на всей плоскости $z$. Составляем функцию

$$\varphi(z) = \frac{1}{z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n} = \frac{1}{z^n \left(1 + \frac{a_1}{z} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{z^{n-1}} + \frac{a_n}{z^n}\right)},$$

регулярную по предположению на всей плоскости. При $|z| \to \infty$, как видно из ее выражения, она стремится к нулю, и, следовательно, существует такое $R > 0$, что $|\varphi(z)| \leqslant 1$ при $|z| \geqslant R$, а в круге $|z| \leqslant R$ она, как непрерывная функция, ограничена, т. е. $|\varphi(z)| \leqslant M$ при $|z| \leqslant R$, где $M$ — определенное число. Следовательно, регулярная на всей плоскости функция $\varphi(z)$ ограничена, и, следовательно, по теореме Лиувилля, $\varphi(z)$ есть постоянная. Из $|\varphi(z)| \to 0$ при $|z| \to \infty$ следует, что эта постоянная равна нулю, т. е. $\varphi(z) \equiv 0$, а это противоречит тому, что $\varphi(z)$ есть частное от деления единицы на полином.

**10. Изолированные особые точки.** Мы обращаемся теперь к исследованию возможных изолированных особых точек регулярных функций. Положим, нам известно, что $f(z)$ однозначна и регулярна лишь в окрестности точки $z = a$. Например, функции $f_1(z) = \frac{1}{z}$ и

$f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ на всей плоскости, кроме $z=0$, регулярны, а в точке $z=0$ уже не регулярны и даже теряют непрерывность. Особые точки указанного выше типа называются *изолированными особыми точками*. Мыслимы три случая: 1) при всех значениях $z$, близких к $a$, функция $f(z)$ ограничена; 2) $|f(z)|\to\infty$ при $z\to a$; 3) $f(z)$ не остается ограниченной при $z$, близких к $a$, но $|f(z)|$ и не стремится к $\infty$ при $z\to a$. Примером для второго случая является $f_1(z)=\frac{1}{z}$ в точке $z=0$. Примером для третьего случая является $f_2(z)=e^{\frac{1}{z}}$. Эта функция стремится к нулю, если $z$, принимая отрицательные значения, стремится к нулю, т. е. $z\to -0$, и $f_2(z)\to +\infty$, если $z\to +0$.

Остается рассмотреть первый случай. Мы докажем, что в этом случае $f(z)$ *стремится к определенному пределу при* $z\to a$, *и если этот предел принять за* $f(a)$, *то* $f(z)$ *будет регулярной и в самой точке* $z=a$.

Действительно, окружим точку $z=a$ двумя окружностями радиусов $\rho$ и $R$ с центрами $z=a$, причем $\rho<R$. Если $z$ находится внутри кольца, образованного этими окружностями, то по формуле Коши мы будем иметь

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_R}\frac{f(z')}{z'-z}\,dz'+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\rho}\frac{f(z')}{z'-z}\,dz'.$$

Покажем теперь, что второе слагаемое в правой части стремится к нулю, если $\rho$ стремится к нулю. Отсюда, как и при доказательстве формулы Коши, будет вытекать, что это второе слагаемое просто равно нулю. Условие ограниченности модуля функции $f(z)$ в окрестности $z=a$ дает нам $|f(z)|\leqslant N$, где $N$ — некоторое положительное число.

Мы имеем $z'-z=(z'-a)-(z-a)$; заменим модуль этой разности меньшей величиной:

$$|(z'-a)-(z-a)|\geqslant|z-a|-|z'-a|=|z-a|-\rho,$$

причем $|z'-a|=\rho$ на $C_\rho$. Таким образом, имеем для упомянутого слагаемого следующую оценку:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\rho}\frac{f(z')}{z'-z}\,dz'\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{N}{|z-a|-\rho}\cdot 2\pi\rho=\frac{N\rho}{|z-a|-\rho};$$

отсюда непосредственно и следует, что это слагаемое стремится к нулю при $\rho\to 0$. Таким образом, предыдущая формула дает нам

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_R}\frac{f(z')}{z'-z}\,dz',$$

т. е. при всех $z$, близких к $a$, $f(z)$ выражается интегралом типа Коши и, следовательно, $f(z)$ представляет собою функцию, регулярную везде, включая и точку $z=a$.

Особые точки второго типа называются *полюсами*, т. е. *если $f(z)$ однозначна и регулярна в некоторой окрестности $z=a$ и $|f(z)|\to\infty$ при $z\to a$, то точка $z=a$ называется полюсом $f(z)$.* Особые точки третьего типа называются *существенно особыми точками*, т. е. *если $f(z)$ однозначна и регулярна в окрестности точки $z=a$, но не ограничена в этой окрестности и $|f(z)|$ не стремится к бесконечности при $z\to a$, то точка $z=a$ называется существенно особой точкой $f(z)$.*

Докажем одну теорему, касающуюся значений функции в окрестности существенно особой точки. Она впервые была доказана Ю. В. Сохоцким.

Теорема. Если *$z=a$ — существенно особая точка $f(z)$, то при изменении $z$ в произвольном малом круге с центром $z=a$ есть значения $f(z)$, сколь угодно близкие к любому наперед заданному комплексному числу.*

Утверждение теоремы заключается в следующем. Пусть $\gamma$ — произвольное заданное комплексное число и $\varepsilon$ — произвольное заданное положительное число. При этом в любом малом круге с центром $a$ существуют такие точки $z$, в которых $|f(z)-\gamma|<\varepsilon$. Будем доказывать теорему от обратного. Пусть существует такое комплексное число $\beta$, что во всех точках некоторого круга $C$ с центром $a$ выполняется неравенство $|f(z)-\beta|\geqslant m$, где $m$ — некоторое положительное число. Составим новую функцию:

$$\varphi(z)=\frac{1}{f(z)-\beta}.$$

Она регулярна в круге $C$ (кроме, может быть, $z=a$) и ограничена по модулю:

$$|\varphi(z)|=\frac{1}{|f(z)-\beta|}\leqslant\frac{1}{m}.$$

Следовательно, по доказанному выше, она регулярна и в точке $z=a$, и значит при $z\to a$ функция $\varphi(z)$ стремится к конечному пределу. При этом

$$f(z)=\beta+\frac{1}{\varphi(z)}$$

при $z\to a$ также должна была бы стремиться к конечному пределу, если предел $\varphi(z)$ отличен от нуля, или к бесконечности, если предел $\varphi(z)$ равен нулю, но обе эти возможности противоречат определению существенно особой точки.

Можно доказать более точную теорему, а именно:

Теорема Пикара. *Если $z=a$ — существенно особая точка $f(z)$, то в любом сколь угодно малом круге с центром $a$ функ-*

*ция $f(z)$ принимает бесчисленное множество раз всякое комплексное значение, кроме, может быть, одного.*

Доказательство этой теоремы гораздо более сложно, чем доказательство предыдущей теоремы, и мы не будем его приводить. Мы только проверим теорему для функции $e^{\frac{1}{z}}$, имеющей $z=0$ существенно особой точкой.

Возьмем любое комплексное число $\alpha$, отличное от нуля, и напишем уравнение:

$$e^{\frac{1}{z}}=\alpha. \tag{46}$$

Вспоминая правило логарифмирования комплексного числа, получим корни уравнения (46):

$$z=\frac{1}{\ln|\alpha|+i(\varphi+2k\pi)},$$

где $\varphi$ — аргумент числа $\alpha$, заключающийся в промежутке $(0, 2\pi)$, и $k$ — любое целое число. Беря его сколь угодно большим по абсолютной величине, будем получать корни уравнения (46), сколь угодно близкие к нулю. Таким образом, функция $e^{\frac{1}{z}}$ в любом сколь угодно малом круге с центром в начале принимает бесчисленное множество раз любое наперед заданное значение, кроме нуля. Нетрудно показать, что функция $\sin\frac{1}{z}$ в любом круге с центром в начале принимает бесчисленное множество раз любое комплексное значение без всякого исключения.

Полюсы и существенно особые точки являются *изолированными* особыми точками, т. е. в некоторой окрестности этих точек функция регулярна. В дальнейшем при исследовании многозначных функций мы встретимся еще с одним типом изолированных особых точек, а именно *с точками разветвления.*

**11. Бесконечные ряды с комплексными членами.** Выяснив основные вопросы, связанные с понятием об интеграле, перейдем к рассмотрению бесконечных рядов. Пусть имеется бесконечный ряд с комплексными членами

$$(a_1+ib_1)+(a_2+ib_2)+\ldots+(a_n+ib_n)+\ldots \tag{47}$$

Он называется сходящимся, если сумма его первых $n$ слагаемых

$$S_n=(a_1+a_2+\ldots+a_n)+i(b_1+b_2+\ldots+b_n) \tag{48}$$

стремится к конечному пределу при беспредельном возрастании $n$. Из этого определения непосредственно следует, что ряд (47) будет сходящимся тогда и только тогда, когда будут сходиться ряды с вещественными членами

$$a_1+a_2+\ldots \quad \text{и} \quad b_1+b_2+\ldots, \tag{49}$$

составленные из вещественных и мнимых частей членов ряда (47). Если обозначить через $A$ и $B$ суммы рядов (49), то конечная сумма (48) будет, очевидно, стремиться к пределу $A+iB$, который и будет представлять собою сумму ряда (47).

Выясним теперь понятие об абсолютной сходимости ряда (47). Заменяя в ряде (47) каждый член его модулем, получим ряд с положительными членами

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}+\ldots \tag{50}$$

Покажем, что если этот ряд сходится, то и основной ряд (47) также сходится. Действительно, из очевидного неравенства

$$\sqrt{a_n^2+b_n^2}\geqslant |a_n| \text{ и } |b_n|$$

непосредственно следует [I, 120 и 124], что из сходимости ряда (50) вытекает сходимость (даже абсолютная) рядов (49) и, следовательно, сходимость ряда (47).

*Если ряд* (50) *сходится, то сходящийся ряд* (47) *называется абсолютно сходящимся.* Такие абсолютно сходящиеся ряды обладают свойствами, аналогичными свойствам абсолютно сходящихся рядов с вещественными членами.

Если ряд (47) сходится абсолютно, то, как мы только что видели, ряды (49) сходятся абсолютно, и их сумма не зависит от порядка слагаемых [I, 137]. Следовательно, то же самое можно сказать и о сумме ряда (47).

Совершенно так же, пользуясь рассуждениями, аналогичными рассуждениям из [I, 138], можно доказать и теорему об умножении абсолютно сходящихся рядов, а именно: если имеются два абсолютно сходящихся ряда с комплексными членами:

$$S=\alpha_1+\alpha_2+\ldots \quad \text{и} \quad T=\beta_1+\beta_2+\ldots,$$

то ряд

$$\alpha_1\beta_1+(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)+(\alpha_1\beta_3+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_1)+\ldots$$

абсолютно сходится и его сумма равна $ST$. На подробном доказательстве этой теоремы мы не останавливаемся. Поскольку для комплексного переменного справедлив признак Коши существования предела, то этот признак, как и для вещественного переменного [I, 125], дает необходимое и достаточное условие сходимости ряда с комплексными членами, а именно: *для сходимости ряда* (47) *необходимо и достаточно, чтобы при любом заданном положительном* $\varepsilon$ *существовало такое положительное* $N$, *что*

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}(a_k+ib_k)\right|<\varepsilon,$$

*если только* $n>N$ *и* $p$ *— любое целое положительное число.*

Перейдем теперь к рассмотрению рядов с переменными членами, т. е. рядов, члены которых содержат переменное $z$:

$$u_1(z)+u_2(z)+\ldots \tag{51}$$

Если такой ряд сходится при всех значениях $z$, принадлежащих некоторой области $B$ (или некоторой кривой $l$), то говорят, что ряд (51) сходится в области $B$ (или на кривой $l$).

Введем теперь понятие о *равномерной сходимости* совершенно так же, как мы это делали для случая вещественного переменного [I, **143**]. *Ряд* (51) *называется равномерно сходящимся в области* $B$ (*на кривой* $l$), *если при любом заданном положительном* $\varepsilon$ *существует положительное* $N$, *одно и то же для всех* $z$, *находящихся в* $B$ (*на* $l$), *такое, что*

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(z)\right|<\varepsilon, \tag{52}$$

*если только* $n>N$ *и* $p$ — *любое целое положительное число.* Равномерно сходящиеся ряды в случае комплексного переменного обладают теми же свойствами, что и равномерно сходящиеся ряды вещественного переменного [I, **146**]. Мы приведем два основных свойства, которые доказываются совершенно так же, как и в случае вещественного переменного.

Если члены ряда (51) суть непрерывные функции $z$ в некоторой области $B$ (на кривой $l$), и ряд сходится равномерно в этой области (на этой кривой), то и сумма ряда будет непрерывной функцией.

Если ряд (51), состоящий из непрерывных функций, сходится равномерно на некоторой кривой $l$, то его можно интегрировать вдоль этой кривой почленно.

Укажем, наконец, достаточное условие абсолютной и равномерной сходимости ряда (51), совершенно аналогичное тому, которое мы имели и в случае вещественного переменного [I, **147**]. Если для всех $z$ из области $B$ (на кривой $l$) члены ряда (51) удовлетворяют неравенствам

$$|u_k(z)|\leqslant m_k \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots),$$

где $m_k$ — положительные числа, образующие сходящийся ряд, то ряд (51) сходится в области $B$ (на кривой $l$) абсолютно и равномерно.

Отметим еще одно обстоятельство, непосредственно вытекающее из предыдущего, а именно, если ряд (51) сходится равномерно на некоторой кривой $l$ и если мы умножим все его члены на некоторую функцию $v(z)$, которая на этой кривой остается ограниченной по модулю, например непрерывна, то и новый ряд будет равномерно сходящимся. Действительно, в результате такого умножения мы вместо ряда (51) будем иметь ряд

$$u_1(z)v(z)+u_2(z)v(z)+\ldots,$$

где $|v(z)|<N$. Из неравенства (52) непосредственно вытекает для нового ряда

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(z)\,v(z)\right| = |v(z)|\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(z)\right| < N\varepsilon,$$

откуда и следует равномерная сходимость этого ряда, так как $N$ — определенное положительное число и $\varepsilon$ — сколь угодно малое при больших $n$.

Выяснив простейшие понятия, относящиеся к рядам с комплексными членами, мы переходим теперь к доказательству основной теоремы, касающейся рядов, члены которых суть регулярные функции от $z$.

**12. Теорема Вейерштрасса.** *Если члены ряда* (51) *суть регулярные функции в некоторой замкнутой области $B$ с контуром $l$ и этот ряд равномерно сходится на контуре $l$, то он равномерно сходится во всей замкнутой области $B$, его сумма есть регулярная функция внутри области $B$ и этот ряд можно почленно дифференцировать сколько угодно раз.*

Обозначим через $z'$ переменную точку контура $l$. Ряд

$$u_1(z') + u_2(z') + \ldots \tag{53}$$

по условию равномерно сходится, и, следовательно, мы имеем неравенство вида

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} u_k(z')\right| < \varepsilon \quad (\text{при } n > N \text{ и любом } p > 0).$$

Написанная конечная сумма регулярных функций есть также регулярная функция в замкнутой области $B$, и, следовательно, согласно принципу модуля, из предыдущего неравенства вытекает такое же неравенство, справедливое для всей области [9]:

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} u_k(z)\right| < \varepsilon \quad (\text{при } n > N \text{ и любом } p > 0),$$

откуда и следует, что ряд (51) равномерно сходится во всей замкнутой области.

Обозначая сумму ряда (53) через $\varphi(z')$ (непрерывная функция на $l$), помножим все члены ряда на

$$\frac{1}{2\pi i}\,\frac{1}{z'-z},$$

где $z$ — некоторая точка внутри области $B$:

$$\frac{1}{2\pi i}\,\frac{\varphi(z')}{z'-z} = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{u_1(z')}{z'-z} + \frac{1}{2\pi i}\,\frac{u_2(z')}{z'-z} + \ldots$$

Этот ряд также равномерно сходится на контуре $l$, и, интегрируя его по этому контуру почленно, будем иметь

$$\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{\varphi(z')}{z'-z}\,dz' = \frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{u_1(z')}{z'-z}\,dz' + \frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{u_2(z')}{z'-z}\,dz' + \dots$$

Но для регулярных функций $u_k(z)$ мы имеем формулу Коши, и, следовательно, последнюю формулу можем переписать в виде

$$\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{\varphi(z')}{z'-z}\,dz' = u_1(z) + u_2(z) + \dots$$

Отсюда видно, что сумма ряда (51) внутри области $B$ представляется интегралом типа Коши и, следовательно, есть регулярная функция. Обозначим эту сумму через $\varphi(z)$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z) = \varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{\varphi(z')}{z'-z}\,dz'. \tag{54}$$

Заметим, что из доказанной выше равномерной сходимости ряда (51) во всей замкнутой области $B$ следует, что $\varphi(z)$ будет непрерывной в замкнутой области $B$, и формула (54) представляет собою просто формулу Коши для этой функции $\varphi(z)$.

Остается только доказать возможность почленного дифференцирования ряда (51) сколько угодно раз. Для этого помножим (53) на

$$\frac{m!}{2\pi i}\,\frac{1}{(z'-z)^{m+1}},$$

где $m$ — некоторое целое положительное число, и проинтегрируем по $l$:

$$\frac{m!}{2\pi i}\int_l \frac{\varphi(z')}{(z'-z)^{m+1}}\,dz' = \frac{m!}{2\pi i}\int_l \frac{u_1(z')}{(z'-z)^{m+1}}\,dz' + \frac{m!}{2\pi i}\int_l \frac{u_2(z')}{(z'-z)^{m+1}}\,dz' + \dots$$

В силу формулы Коши и формулы (54) можем записать последнее выражение в виде

$$\varphi^{(m)}(z) = u_1^{(m)}(z) + u_2^{(m)}(z) + \dots, \tag{55}$$

что и доказывает возможность почленного дифференцирования ряда $m$ раз внутри области. В следующем номере мы применим эту теорему к рядам частного типа, с которыми и будем иметь почти исключительно дело в дальнейшем, а именно к степенным рядам.

Замечание 1. Пользуясь обычной оценкой интегралов, нетрудно убедиться, что *ряд* (55), *составленный из производных, равномерно сходится во всякой области* $B_1$, *которая вместе со своим контуром лежит внутри* $B$. Образуем для ряда (55) обычное выражение

$$\sum_{k=n}^{n+p} u_k^{(m)}(z).$$

Пользуясь представлением производной по формуле Коши, получим

$$\sum_{k=n}^{n+p} u_k^{(m)}(z) = \frac{m!}{2\pi i} \int_l \frac{1}{(z'-z)^{m+1}} \sum_{k=n}^{n+p} u_k(z')\,dz'.$$

Пусть $\delta$ — кратчайшее расстояние от контура $l_1$ области $B_1$ до контура $l$ (рис. 7). Применяя к написанному интегралу обычную оценку, получим

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} u_k^{(m)}(z) \right| \leqslant \frac{m!\,S}{2\pi\delta^{m+1}} \cdot \max_l \left| \sum_{k=n}^{n+p} u_k(z') \right|,$$

где $S$ — длина контура $l$. Ввиду равномерной сходимости ряда (53), последний множитель правой части будет сколь угодно малым при больших $n$, что и дает равномерную сходимость ряда (55). Так же нетрудно показать, что если $B$ — односвязная область, то ряд, полученный почленным интегрированием:

$$\int_a^z u_1(z')\,dz' + \int_a^z u_2(z')\,dz' + \ldots,$$

где $a$ — некоторая точка из $B$, сходится равномерно в $B$ [ср. **I, 146**]. Члены этого ряда — регулярные, однозначные в $B$ функции от $z$ [**6**].

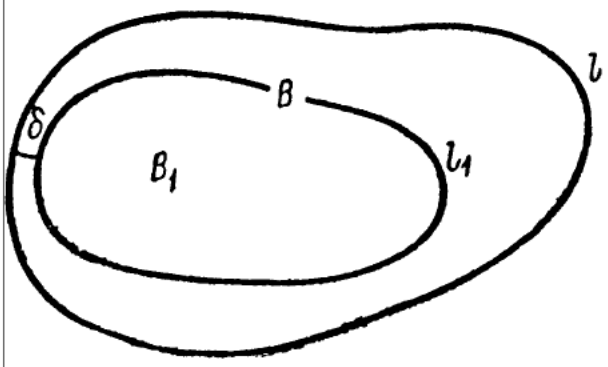


Рис. 7.

Замечание 2. Мы могли бы формулировать теорему Вейерштрасса, пользуясь не рядами, а последовательностями функций [**I, 144**]; если имеется последовательность $s_k(z)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ функций, регулярных в замкнутой области $B$ с контуром $l$, и эта последовательность равномерно стремится к пределу на контуре $l$, то она равномерно стремится к пределу и во всей замкнутой области $B$, предельная функция $s(z)$ регулярна внутри $B$ и при всяком целом положительном $m$ имеем внутри $B$

$$\lim_{k\to\infty} s_k^{(m)}(z) = s^{(m)}(z).$$

**13. Степенные ряды.** *Степенны́м рядом* называется ряд вида

$$a_0 + a_1(z-b) + a_2(z-b)^2 + \ldots, \qquad (56)$$

где $a_k$ и $b$ — заданные числа. Выясним прежде всего область сходимости ряда (56). Для этого докажем следующую теорему:

Теорема Абеля. *Если ряд* (56) *сходится в некоторой точке,* $z = z_0$, *отличной от* $z = b$, *то он сходится абсолютно во всякой точке* $z$, *которая ближе к* $b$, *чем* $z_0$, т. е.

$$|z-b| < |z_0-b|,$$

*и сходится равномерно во всяком круге с центром $b$ и радиусом $\rho$, меньшим* $|z_0 - b|$ (рис. 8).

Из условия теоремы следует, что ряд

$$a_0 + a_1(z_0 - b) + a_2(z_0 - b)^2 + \dots$$

сходится, и, следовательно, его общий член стремится к нулю при беспредельном возрастании номера. Мы можем поэтому утверждать, что существует положительное число $N$ такое, что при всяком $k$

$$|a_k(z_0 - b)^k| < N. \tag{57}$$

Рассмотрим теперь некоторый круг $C_\rho$ с центром $b$ и радиусом $\rho$, меньшим, чем $|z_0 - b|$, так что величину этого радиуса мы можем обозначить через $\rho = \theta|z_0 - b|$, где $0 < \theta < 1$. Для всякого $z$, принадлежащего этому кругу $C_\rho$, мы имеем

$$|z - b| \leqslant \theta|z_0 - b|. \tag{58}$$

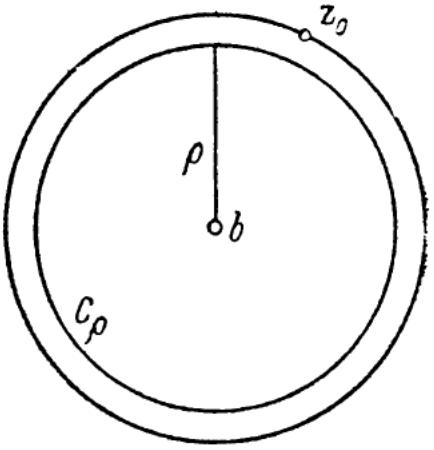


Рис. 8.

Оценим в круге $C_\rho$ члены ряда (56). В силу (57) и (58) можно написать

$$|a_k(z - b)^k| = |a_k(z_0 - b)^k| \left|\frac{z - b}{z_0 - b}\right|^k \leqslant N\theta^k,$$

откуда непосредственно следует, что в круге $C_\rho$ члены ряда (56) по модулю меньше членов убывающей геометрической прогрессии, составленной из положительных чисел, т. е. ряд (56) сходится в круге $C_\rho$ абсолютно и равномерно. Очевидно, что всякую точку $z$, которая расположена ближе к $b$, чем $z_0$, мы можем считать находящейся в некотором круге $C_\rho$, и, следовательно, по доказанному во всякой такой точке ряд (56) сходится абсолютно. Теорема Абеля доказана полностью. Выясним теперь некоторые следствия этой теоремы.

Следствие I. Если ряд (56) расходится в некоторой точке $z = z_1$, то он, очевидно, расходится и во всякой точке, которая отстоит от $b$ дальше, чем $z_1$. Действительно, если бы он сходился в такой точке, то по теореме Абеля он должен был бы сходиться и в точке $z_1$. Мы можем, таким образом, сказать, что для ряда (56) имеет место следующий факт: *из его сходимости в некоторой точке следует его абсолютная сходимость внутри окружности, проходящей через эту точку и имеющей центр $b$, и из его расходимости в некоторой точке — его расходимость вне окружности, проходящей через эту точку и имеющей центр $b$.*

Может случиться, что ряд (56) сходится на всей плоскости $z$, а также что он сходится только при $z = b$. В последнем случае он сводится к одному слагаемому $a_0$. Если исключить эти случаи, то из сказанного выше следует [ср. **I, 148**], что для всякого ряда

(56) существует такое положительное число $R$, что ряд сходится абсолютно при $|z-b|<R$ и расходится при $|z-b|>R$, причем во всяком круге радиуса, меньшего $R$, т. е. при $|z-b|\leqslant\theta R$, $0<\theta<1$, сходимость ряда (56) равномерная. Число $R$ называется *радиусом сходимости ряда* (56). В исключенных выше двух случаях считают обычно $R=\infty$ (сходимость на всей плоскости) или $R=0$ (сходимость только в точке $z=b$). При $R=\infty$ сходимость на всей плоскости абсолютная и во всяком конечном круге равномерная.

Заметим, что предыдущее рассуждение не дает нам равномерной сходимости во всем круге сходимости, но лишь в любом концентрическом круге меньшего радиуса. Мы будем выражать этот факт, говоря просто, что ряд (56) равномерно сходится внутри своего круга сходимости. Вообще будем называть какой-либо ряд *равномерно сходящимся внутри области $B$, если ряд равномерно сходится в любой замкнутой области $B'$, лежащей вместе со своим контуром внутри $B$.* Отметим, что из приведенного выше доказательства следует, что и ряд с общим членом $|a_k(z-b)^k|$ равномерно сходится внутри круга сходимости ряда (56).

Следствие II. Из равномерной сходимости ряда (56) и теоремы Вейерштрасса [12] следует, что сумма ряда есть регулярная функция внутри круга сходимости и что этот ряд можно почленно дифференцировать сколько угодно раз внутри упомянутого круга. Как равномерно сходящийся ряд его можно и почленно интегрировать. Кроме того, в силу абсолютной сходимости степенные ряды вида (56) можно перемножать как полиномы внутри того круга, где они оба сходятся.

Из предыдущего непосредственно вытекает, что почленное интегрирование и дифференцирование ряда (56) не нарушают во всяком случае его сходимости внутри круга сходимости, т. е. ряды

$$a_1+2a_2(z-b)+3a_3(z-b)^2+\ldots, \tag{59}$$

$$a_0(z-b)+\frac{a_1}{2}(z-b)^2+\ldots \tag{$59_1$}$$

имеют радиус сходимости во всяком случае не меньший, чем ряд (56). Нетрудно видеть, что этот радиус сходимости рядов (59) не может быть и больше, чем радиус сходимости $R$ ряда (56). Действительно, положим, например, что радиус $\rho$ сходимости ряда ($59_1$) будет больше $R$, т. е. что $\rho>R$. Дифференцируя этот ряд, мы, как только что упомянули, не уменьшаем его радиуса сходимости и возвращаемся к ряду (56), и, следовательно, $\rho\leqslant R$, что противоречит $\rho>R$. Мы можем, таким образом, утверждать, что *почленное дифференцирование и интегрирование ряда* (56) *не меняют его радиуса сходимости.*

Отметим в заключение, что во всем предыдущем ничего не говорилось о сходимости ряда (56) на самой окружности $|z-b|=R$ его круга сходимости. Этот вопрос мы рассмотрим несколько позже.

**14. Ряд Тейлора.** Выше мы видели, что сумма ряда (56) есть регулярная функция внутри круга сходимости этого ряда. Докажем теперь обратное предложение: *всякая функция $f(z)$, регулярная в некотором круге $|z-b|<R$ с центром $b$, может быть представлена внутри этого круга степенным рядом вида* (56), *и такое представление единственно.*

Возьмем какую-нибудь фиксированную точку $z$ внутри круга $|z-b|<R$. Проведем окружность $C_{R_1}$ с центром $b$ и радиусом $R_1$, меньшим $R$, но таким, чтобы $z$ заключалась внутри $C_{R_1}$ (рис. 9). Мы можем выразить $f(z)$ по формуле Коши, интегрируя по $C_{R_1}$:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{R_1}}\frac{f(z')}{z'-z}\,dz'. \qquad (60)$$

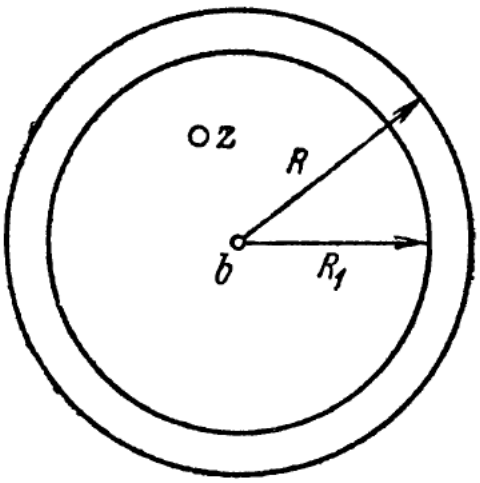


Рис. 9.

На $C_{R_1}$ мы имеем $|z'-b|=R_1$, а, с другой стороны, $|z-b|<R_1$, поскольку $z$ лежит внутри $C_{R_1}$. Пользуясь формулой для суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, можем написать

$$\frac{1}{z'-z}=\frac{1}{z'-b}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-b}{z'-b}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-b)^k}{(z'-b)^{k+1}}, \qquad (61)$$

причем для модулей членов этого ряда имеем

$$\left|\frac{(z-b)^k}{(z'-b)^{k+1}}\right|=\frac{1}{R_1}q^k\quad\left(q=\left|\frac{z-b}{z'-b}\right|\right),$$

и из предыдущего вытекает, что $0\leqslant q<1$. Таким образом, бесконечный ряд (61) сходится равномерно относительно $z'$, находящегося на $C_{R_1}$. Умножая обе его части на

$$\frac{1}{2\pi i}f(z')$$

и интегрируя по $C_{R_1}$ почленно, получим в силу формулы (60)

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(z-b)^k\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{R_1}}\frac{f(z')}{(z'-b)^{k+1}}\,dz',$$

или

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-b)^k, \qquad (62)$$

где в силу формулы Коши [7]

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{R_1}} \frac{f(z')}{(z'-b)^{k+1}}\,dz' = \frac{f^{(k)}(b)}{k!}, \qquad (62_1)$$

т. е. *значение $f(z)$ в любой точке внутри круга $|z-b|<R$, где $f(z)$ регулярна, представляется рядом Тейлора:*

$$f(z) = f(b) + \frac{f'(b)}{1!}(z-b) + \frac{f''(b)}{2!}(z-b)^2 + \ldots \qquad (63)$$

Покажем теперь, что представление $f(z)$ степенным рядом единственно. Положим, что внутри некоторого круга с центром $b$ функция $f(z)$ представима рядом вида (62). Покажем, что коэффициенты $a_k$ определяются единственным образом, а именно они должны быть коэффициентами Тейлора. Действительно, полагая в (62) $z=b$, получим $a_0 = f(b)$. Продифференцируем степенной ряд (62):

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (z-b)^{k-1}.$$

Полагая $z=b$, получим $a_1 = f'(b)$. Продолжая так и дальше, получим вообще

$$a_k = \frac{f^{(k)}(b)}{k!},$$

и разложение (62) должно совпадать с рядом Тейлора (63). Таким образом, если мы какими-либо двумя способами получили разложение одной и той же функции в степенной ряд по целым положительным степеням $(z-b)$, то коэффициенты в обоих этих разложениях при одинаковых степенях $(z-b)$ должны быть равными.

Предыдущие рассуждения показывают, что *ряд Тейлора* (63) *функции $f(z)$ сходится внутри такого круга с центром $b$, внутри которого $f(z)$ регулярна, и внутри этого круга сумма этого ряда Тейлора равна $f(z)$.*

Из выражения коэффициентов ряда Тейлора непосредственно вытекает оценка величины этих коэффициентов. Пусть $R$ — радиус сходимости ряда (62). Возьмем в формуле $(62_1)$ за $C_{R_1}$ окружность с центром в точке $b$ и радиусом $(R-\varepsilon)$, где $\varepsilon$ — фиксированное малое положительное число. На этой окружности наша функция $f(z)$ регулярна, и ее модуль не превышает некоторого положительного числа $M$, и кроме того, очевидно, $|z'-b| = R-\varepsilon$. Обычная оценка интеграла дает

$$|a_k| \leqslant \frac{M}{(R-\varepsilon)^k}. \qquad (64)$$

Число $\varepsilon$ можно брать сколь угодно близким к нулю, но, очевидно, значение числа $M$ зависит от выбора $\varepsilon$.

Применим теорему Вейерштрасса, доказанную в [12], к случаю степенных рядов. Пусть имеются функции, регулярные внутри некоторого круга $C_R$ с центром $b$:

$$u_k(z) = a_0^{(k)} + a_1^{(k)}(z-b) + a_2^{(k)}(z-b)^2 + \ldots,$$

и положим, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$$

равномерно сходится внутри этого круга. При этом, согласно теореме Вейерштрасса, его сумма будет также регулярной функцией внутри этого круга и будет, следовательно, представляться степенным рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_0^{(k)} + a_1^{(k)}(z-b) + a_2^{(k)}(z-b)^2 + \ldots\right] = a_0 + a_1(z-b) + a_2(z-b)^2 + \ldots$$

Мы можем, согласно теореме Вейерштрасса, почленно дифференцировать этот ряд сколько угодно раз. Совершая дифференцирование и полагая затем $z = b$, получим следующие выражения для коэффициентов суммы ряда:

$$a_0 = \sum_{k=1}^{\infty} a_0^{(k)};\quad a_1 = \sum_{k=1}^{\infty} a_1^{(k)};\quad a_2 = \sum_{k=1}^{\infty} a_2^{(k)},\ \ldots,$$

т. е. *при сделанных предположениях эти бесконечные ряды складываются, как обычные полиномы.*

**15. Ряд Лорана.** Нетрудно получить результаты, аналогичные предыдущим, и для степенных рядов более общего типа:

$$\ldots + a_{-2}(z-b)^{-2} + a_{-1}(z-b)^{-1} + a_0 + a_1(z-b) + a_2(z-b)^2 + \ldots, \qquad (65)$$

содержащих не только целые положительные, но и целые отрицательные степени $(z-b)$. Ряд вида (65) называется обычно *рядом Лорана.* Займемся прежде всего вопросом определения его области сходимости. Ряд (65) состоит из двух рядов:

$$a_0 + a_1(z-b) + a_2(z-b)^2 + \ldots \qquad (66_1)$$

и

$$\frac{a_{-1}}{z-b} + \frac{a_{-2}}{(z-b)^2} + \ldots, \qquad (66_2)$$

и нам надо определить ту область, где оба последних ряда сходятся; она и будет областью сходимости ряда (65). Ряд $(66_1)$ есть обычный

степенной ряд рассмотренного выше типа, и его область сходимости есть некоторый круг с центром в $b$. Пусть это будет круг $|z-b|<R_1$. Для рассмотрения ряда ($66_2$) введем вместо $z$ новую переменную $z'$ по формуле $z'=(z-b)^{-1}$. После этого ряд ($66_2$) превратится в обычный степенной ряд вида

$$a_{-1}z'+a_{-2}z'^2+\ldots$$

Его область сходимости на плоскости $z'$ есть некоторый круг с центром в начале (роль числа $b$ играет нуль). Обозначим радиус этого круга через $\frac{1}{R_2}$, так что область сходимости последнего ряда будет $|z'|<\frac{1}{R_2}$, или $\frac{1}{|z'|}>R_2$. Возвращаясь к прежней переменной $z$, получим область сходимости вида $|z-b|>R_2$. Таким образом, область сходимости всего ряда (65) определяется двумя неравенствами:

$$|z-b|<R_1, \quad |z-b|>R_2. \tag{67}$$

Первое неравенство определяет внутреннюю часть круга с центром $b$ и радиусом $R_1$, и это есть область сходимости ряда ($66_1$). Второе из неравенств (67) определяет часть плоскости, находящуюся вне круга с центром $b$ и радиусом $R_2$, и это есть область сходимости ряда ($66_2$). Если $R_1\leqslant R_2$, то неравенства (67) не определяют никакой области. Если $R_1>R_2$, то неравенства (67) определяют круговое кольцо

$$R_2<|z-b|<R_1, \tag{68}$$

ограниченное концентрическими окружностями с центром $b$, радиусами $R_2$ и $R_1$. Таким образом, *область сходимости ряда вида* (65) *есть круговое кольцо* (68).

Выше мы разбили ряд (65) на два степенных ряда, и из теории степенных рядов непосредственно следует, что ряд (65) сходится внутри своего кольца сходимости абсолютно и равномерно, сумма ряда есть регулярная функция и ряд можно почленно дифференцировать. Заметим, что в неравенстве (68), определяющем размеры кольца, внутренний радиус $R_2$ может оказаться равным нулю, и при этом ряд (65) будет сходиться при всех $z$, достаточно близких к $b$. Точно так же внешний радиус $R_1$ может оказаться равным бесконечности, и при этом ряд (65) будет сходиться при всех $z$, удовлетворяющих условию $|z-b|>R_2$. Если кольцо определяется неравенством $0<|z-b|<\infty$, то ряд (65) сходится на всей плоскости $z$ за исключением точки $z=b$.

Отметим еще, что часть ряда Лорана (65), содержащая положительные степени $(z-b)$, сходится не только в кольце (68), но везде внутри внешней окружности, т. е. при $|z-b|<R_1$, а часть ряда, содержащая отрицательные степени $(z-b)$, сходится везде вне внут-

ренней окружности, т. е. при $|z-b|>R_2$. Если, например, в ряде конечное число членов с отрицательными степенями, то обязательно $R_2=0$, а если конечное число членов с положительными степенями, то обязательно $R_1=\infty$. Отметим еще раз, что мы рассматриваем только такие ряды Лорана, для которых $R_2<R_1$, ибо в противном случае у них нет никакой области сходимости.

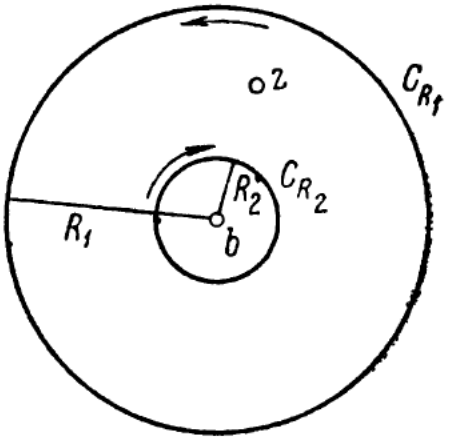


Рис. 10.

Совершенно так же, как и для степенных рядов, докажем предложение, обратное предыдущему, а именно: *если $f(z)$ регулярна внутри кольца* (68), *то она может быть представлена внутри этого кольца рядом Лорана и притом единственным образом.*

Немного сжимая внешнюю окружность кольца и немного расширяя внутреннюю окружность, мы можем считать, что $f(z)$ регулярна и на обоих контурах кольца. Обозначим эти контуры через $C_{R_2}$ и $C_{R_1}$. Для любой точки $z$ внутри кольца будем иметь формулу Коши (рис. 10):

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{R_1}}\frac{f(z')}{z'-z}\,dz'+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{R_2}}\frac{f(z')}{z'-z}\,dz'. \tag{69}$$

При интегрировании по окружности $C_{R_1}$ мы имеем

$$\left|\frac{z-b}{z'-b}\right|<1$$

и так же, как и при выводе формулы Тейлора, можем представить дробь, входящую под знак интеграла, в виде ряда, равномерно сходящегося на окружности $C_{R_1}$:

$$\frac{1}{z'-z}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-b)^k}{(z'-b)^{k+1}}.$$

Умножая на

$$\frac{1}{2\pi i}f(z') \tag{70}$$

и интегрируя по $C_{R_1}$, мы получим для первого слагаемого правой части формулы (69) представление в виде степенного ряда по положительным степеням $(z-b)$:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{R_1}}\frac{f(z')}{z'-z}\,dz'=a_0+a_1(z-b)+a_2(z-b)^2+\ldots,$$

где

$$a_k=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{R_1}}\frac{f(z')}{(z'-b)^{k+1}}\,dz'.$$

При интегрировании по $C_{R_2}$, наоборот, будем иметь

$$\left|\frac{z'-b}{z-b}\right|<1,$$

и для упомянутой выше дроби мы должны написать уже другое разложение, равномерно сходящееся на окружности $C_{R_2}$:

$$\frac{1}{z'-z}=-\frac{1}{z-b}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z'-b}{z-b}}=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z'-b)^k}{(z-b)^{k+1}},$$

откуда, умножая опять на множитель (70), получим представление второго слагаемого правой части формулы (69) в виде степенного ряда по целым отрицательным степеням $(z-b)$:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{R_2}}\frac{f(z')}{z'-z}\,dz'=a_{-1}(z-b)^{-1}+a_{-2}(z-b)^{-2}+\ldots,$$

где

$$a_{-k}=-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{R_2}}(z'-b)^{k-1}f(z')\,dz'.$$

Соединяя оба слагаемых вместе, получим для функции $f(z)$ внутри кольца (68) представление в виде ряда Лорана

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k(z-b)^k. \tag{71}$$

Остается показать, что такое разложение единственно. Для этого, как и в случае ряда Тейлора, покажем, что из формулы (71) получаются вполне определенные выражения для коэффициентов разложения $a_k$. Пусть $l$ — некоторый замкнутый контур, обходящий вокруг $b$ внутри кольца (68). На этом контуре ряд (71) сходится равномерно. Выберем некоторое целое число $m$, помножим обе части равенства (71) на $(z-b)^{-m-1}$ и проинтегрируем по $l$ против часовой стрелки:

$$\int_l(z-b)^{-m-1}f(z)\,dz=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k\int_l(z-b)^{k-m-1}\,dz.$$

Мы знаем [6], что все интегралы, стоящие в правой части, будут равны нулю, кроме одного, который будет содержать под знаком интеграла $(z-b)^{-1}$. Такой интеграл получится в члене, соответствую-

щем $k=m$, и его величина, как известно, будет равна $2\pi l$. Таким образом, предыдущая формула дает нам

$$\int_l (z-b)^{-m-1} f(z)\,dz = 2\pi l a_m,$$

откуда и получаются определенные выражения для коэффициентов

$$a_m = \frac{1}{2\pi i}\int_l (z-b)^{-m-1} f(z)\,dz \quad (m=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots). \tag{72}$$

**16. Примеры.** Применяя разложение в ряд Тейлора к элементарным трансцендентным функциям, мы получим для них известные из дифференциального исчисления разложения в степенные ряды, причем теперь эти ряды будут уже годиться и для комплексных значений независимого переменного.

Пример I. Для функции $f(z)=e^z$ мы имеем, очевидно, $f^{(n)}(z)=e^z$, и, следовательно, $f^{(n)}(0)=1$. Формула (63) дает нам при $b=0$ (ряд Маклорена)

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots \tag{73}$$

Наша функция $e^z$ регулярна на всей плоскости, и, следовательно, *разложение* (73) *верно на всей плоскости.*

Точно так же получаем справедливые на всей плоскости разложения для тригонометрических функций:

$$\sin z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots, \tag{74}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots \tag{75}$$

Пример II. Формула геометрической прогрессии

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots$$

дает пример ряда с кругом сходимости $|z|<1$.

Заменим в этом ряде $z$ на $-z$ и проинтегрируем от 0 до $z$:

$$\varphi(z) = \int_0^z \frac{dz}{1+z} = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots \tag{76}$$

Мы получили новый степенной ряд с тем же кругом сходимости $|z|<1$. При вещественных значениях $z$ его сумма равна, как известно [I, 132], $\ln(1+z)$. Покажем, что то же самое будет и при всех комплексных $z$ из круга $|z|<1$, т. е., точнее говоря, покажем, что

сумма нашего ряда

$$\varphi(z)=\int_0^z \frac{dz}{1+z} \tag{77}$$

удовлетворяет уравнению

$$e^{\varphi(z)}=1+z. \tag{78}$$

Возьмем регулярную в круге $|z|<1$ функцию $e^{\varphi(z)}=f(z)$ и составим ее разложение в ряд Маклорена. Для этого определим производные от этой функции. Принимая во внимание, что $\varphi'(z)=\frac{1}{1+z}$, имеем, очевидно,

$$f'(z)=e^{\varphi(z)}\cdot\frac{1}{1+z} \tag{79}$$

и, далее,

$$f''(z)=e^{\varphi(z)}\cdot\frac{1}{(1+z)^2}-e^{\varphi(z)}\frac{1}{(1+z)^2}\equiv 0,$$

т. е. $f^{(n)}(z)\equiv 0$ при всяком $n\geqslant 2$. Кроме того, из формул (77) и (79) непосредственно вытекает, что $f(0)=e^0=1$ и $f'(0)=1$. Разложение $f(z)$ в ряд Маклорена действительно дает нам

$$f(z)=e^{\varphi(z)}=1+z.$$

Мы видим, таким образом, что сумма ряда (76) есть одно из возможных значений $\ln(1+z)$. Эта последняя функция является функцией многозначной, но степенной ряд (76) выделяет из этой многозначной функции однозначную ветвь, регулярную в круге $|z|<1$:

$$\ln(1+z)=\frac{z}{1}-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\ldots \tag{80}$$

Значения логарифма, определяемые этой формулой, называют иногда главными значениями логарифма. На окружности нашего круга сходимости лежит особая точка $z=-1$ функции $\ln(1+z)$. Характер этой особой точки будет выяснен нами впоследствии.

Пример III. Рассмотрим функцию $(1+z)^m$. При целом положительном $m$ ее разложение по целым положительным степеням $z$ представляет собой обычную формулу бинома Ньютона. При целых отрицательных $m$ наша функция имеет в точке $z=-1$ полюс, и, последовательно вычисляя производные и составляя ряд Маклорена, будем иметь разложение в круге $|z|<1$ [I, 131]:

$$(1+z)^m=1+\frac{m}{1!}z+\frac{m(m-1)}{2!}z^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}z^3+\ldots \tag{81}$$

Если $m$ не есть целое число, то наша функция будет многозначной. Например, при $m=\frac{1}{2}$ будем иметь $\sqrt{1+z}$. Вообще для любого

значения постоянной $m$ мы можем написать нашу функцию в виде [I, 176]

$$(1+z)^m = e^{m\ln(1+z)}, \tag{82}$$

и ее многозначность является следствием многозначности $\ln(1+z)$. Возьмем для $\ln(1+z)$ то значение, которое определяется формулой (80). При этом и функция (82) будет однозначной и регулярной в круге $|z|<1$. Последовательно вычисляя производные функции (82), будем иметь в силу (77)

$$[(1+z)^m]' = e^{m\ln(1+z)}\cdot\frac{m}{1+z} = me^{(m-1)\ln(1+z)} = m(1+z)^{m-1},$$
$$[(1+z)^m]'' = m(m-1)e^{(m-2)\ln(1+z)} = m(m-1)(1+z)^{m-2}$$

и вообще

$$[(1+z)^m]^{(k)} = m(m-1)\ldots(m-k+1)e^{(m-k)\ln(1+z)} =$$
$$= m(m-1)\ldots(m-k+1)(1+z)^{m-k},$$

где $\ln(1+z)$ определяется рядом (80). Заметим теперь, что ряд (80) дает то значение $\ln(1+z)$, которое обращается в нуль при $z=0$. Таким образом, формула (82) и следующие дают

$$(1+z)^m|_{z=0} = 1, \quad [(1+z)^m]'|_{z=0} = m$$

и

$$[(1+z)^m]^{(k)}|_{z=0} = m(m-1)\ldots(m-k+1).$$

Отсюда видно, что ряд Маклорена для нашей функции (82) совпадает с рядом (81), т. е. формула (81) дает нам регулярное однозначное значение функции (82) внутри круга $|z|<1$ при любом показателе $m$. Будем в дальнейшем называть формулу (81) биномом Ньютона.

Пример IV. Заменяя в формуле для прогрессии $z$ на $-z^2$, получаем разложение, справедливое в круге $|z|<1$:

$$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - \ldots$$

Интегрируя его от нуля до $z$, получаем новое разложение, справедливое в том же круге:

$$\int_0^z \frac{dz}{1+z^2} = \frac{z}{1} - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \ldots \tag{83}$$

В дальнейшем мы увидим, что сумма написанного ряда дает одно из возможных значений $\operatorname{arctg} z$, и, таким образом, формула (83) определяет в круге $|z|<1$ ту ветвь многозначной функции, которая в этом круге является однозначной и регулярной функцией.

Аналогично получается и разложение одной из ветвей многозначной функции $\arcsin z$ в том же круге:

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{z}{1} + \frac{1}{2}\frac{z^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{z^5}{5} + \cdots \tag{84}$$

Пример V. Рассмотрим функцию

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}.$$

Она имеет особыми точками полюсы $z=0$, $z=1$, $z=2$, а в остальном однозначна и регулярна на всей плоскости. Отметим три круговых кольца, имеющих центр в начале:

$$(K_1) \quad 0<|z|<1; \qquad (K_2) \quad 1<|z|<2; \qquad (K_3) \quad 2<|z|<+\infty.$$

В каждом из них наша функция разлагается в ряд Лорана, расположенный по целым степеням $z$. Например, в кольце $K_2$ мы имеем, разлагая $f(z)$ на простейшие дроби:

$$f(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{z} - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{z-2},$$

откуда, в силу $1<|z|<2$, имеем внутри кольца

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z^{k+1}}; \quad \frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{2^k};$$

и окончательно в кольце $K_2$ имеем

$$f(z) = -\frac{1}{2}\frac{1}{z} - \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{z^k} - \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{2^k}.$$

В кольце $K_3$ аналогичным образом, принимая во внимание, что $|z|>2$, будем иметь разложение, содержащее только отрицательные степени $z$:

$$\frac{1}{z-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z^{k+1}}; \quad \frac{1}{z-2} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{z^{k+1}},$$

или

$$f(z) = \sum_{k=2}^{\infty}(2^{k-1}-1)\frac{1}{z^{k+1}}.$$

Наша функция регулярна также, например, в кольце с центром в $z=1$, внутренним радиусом $R_2=0$ и внешним радиусом $R_1=1$. Нетрудно представить ее внутри этого кольца в виде ряда Лорана по целым степеням $(z-1)$.

Пример VI. Рассмотрим частное двух степенных рядов

$$\frac{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots}{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots} \tag{85}$$

Пусть радиусы сходимости обоих этих рядов не меньше положительного числа $\rho$. Положим, кроме того, что свободный член $a_0$ ряда, стоящего в знаменателе, отличен от нуля. При этом функция, стоящая в знаменателе, будет отличной от нуля не только в начале, но и в некотором круге с центром в начале координат. Положим, что она будет регулярной и отличной от нуля в некотором круге $|z|<\rho_1$. Мы можем утверждать, что и вся дробь (85) будет регулярной в круге с центром в начале и радиусом, равным наименьшему из двух чисел $\rho$ и $\rho_1$ (или, может быть, даже в большем круге). Мы будем иметь в этом круге разложение функции в степенной ряд

$$\frac{b_0+b_1z+b_2z^2+\dots}{a_0+a_1z+a_2z^2+\dots}=c_0+c_1z+c_2z^2+\dots$$

Для вычисления коэффициентов $c_k$ помножим частное на делитель, представив произведение в виде степенного ряда

$$a_0c_0+(a_1c_0+a_0c_1)\,z+(a_2c_0+a_1c_1+a_0c_2)\,z^2+\dots=b_0+b_1z+b_2z^2+\dots$$

Полученное произведение должно совпадать с делимым, и, в силу единственности разложения в степенной ряд, мы можем просто приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях $z$. Это даст ряд равенств для определения искомых коэффициентов $c_k$ частного:

$$\left.\begin{aligned} a_0c_0 &= b_0,\\ a_1c_0+a_0c_1 &= b_1,\\ a_2c_0+a_1c_1+a_0c_2 &= b_2,\\ &\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} \tag{86}$$

Из этих формул мы сможем последовательно вычислять коэффициенты $c_k$. Можно рассматривать первые $(n+1)$ уравнений (86) как систему $(n+1)$ уравнений с неизвестными $c_0, c_1\dots, c_n$. Решая их по формуле Крамера, можно написать явное выражение для коэффициента $c_n$ в виде частного двух определителей:

$$c_n=\frac{\begin{vmatrix} a_0, & 0, & 0, & \dots, & 0, & b_0\\ a_1, & a_0, & 0, & \dots, & 0, & b_1\\ a_2, & a_1, & a_0, & \dots, & 0, & b_2\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n-1}, & a_{n-2}, & a_{n-3}, & \dots, & a_0, & b_{n-1}\\ a_n, & a_{n-1}, & a_{n-2}, & \dots, & a_1, & b_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_0, & 0, & 0, & \dots, & 0, & 0\\ a_1, & a_0, & 0, & \dots, & 0, & 0\\ a_2, & a_1, & a_0, & \dots, & 0, & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n-1}, & a_{n-2}, & a_{n-3}, & \dots, & a_0, & 0\\ a_n, & a_{n-1}, & a_{n-2}, & \dots, & a_1, & a_0 \end{vmatrix}} \tag{87}$$

Определитель, стоящий в знаменателе, равен, очевидно, $a_0^{n+1}$,

Применяя это рассуждение к разложению

$$\operatorname{tg} z=\frac{\sin z}{\cos z}=\frac{\frac{z}{1!}-\frac{z^3}{3!}+\dots}{1-\frac{z^2}{2!}+\dots},$$

будем иметь представление $\operatorname{tg} z$ в виде степенного ряда в круге $|z|<\frac{\pi}{2}$, так как, как мы увидим дальше, функция $\cos z$ имеет только вещественные корни, которые хорошо известны из тригонометрии.

**17. Изолированные особые точки. Бесконечно далекая точка.** В [10] мы исследовали функции, однозначные и регулярные в окрестности некоторой точки, которую мы обозначим сейчас через $z=b$, кроме, может быть, самой этой точки, и установили три возможности: 1) $f(z)$ имеет предел при $z\to b$; 2) $|f(z)|$ стремится к бесконечности при $z\to b$; 3) третья возможность может быть определена исключением первых двух. Напомним, что если в первом случае принять $f(b)$ равным упомянутому пределу, то $f(z)$ окажется регулярной и в точке $z=b$.

Если $f(z)$ однозначна и регулярна в окрестности $z=b$, то она тем самым будет однозначной и регулярной в некотором кольце $D$ с центром $z=b$, внутренним радиусом, равным нулю, и некоторым внешним радиусом $R$. В этом кольце $f(z)$ разлагается в ряд Лорана по целым степеням $(z-b)$. Покажем, что указанным трем возможностям соответствуют следующие возможности при представлении $f(z)$ рядом Лорана: 1) этот ряд не содержит отрицательных степеней $(z-b)$; 2) ряд содержит конечное число членов с отрицательными степенями $(z-b)$; 3) ряд содержит бесконечное число членов с отрицательными степенями $(z-b)$.

Если ряд Лорана $f(z)$ не содержит отрицательных степеней, т. е. имеет вид

$$f(z)=a_0+a_1(z-b)+a_2(z-b)^2+\ldots,$$

то $f(z)\to a_0$ при $z\to b$ (непрерывность степенного ряда), т. е. мы имеем первый случай из [10]. Наоборот, если мы имеем первый случай из классификации [10], то $f(z)$ регулярна, включая $z=b$, и должна разлагаться в некотором круге $|z-b|<R$ в ряд Тейлора без отрицательных степеней.

Перейдем к рассмотрению второго случая, когда ряд Лорана в кольце $D$ имеет вид

$$f(z)=\sum_{k=-m}^{\infty} a_k(z-a)^k, \tag{88}$$

причем коэффициент $a_{-m}$ можно считать отличным от нуля. Мы можем переписать формулу (88) в виде

$$f(z)=\frac{1}{(z-b)^m}\left[a_{-m}+a_{-m+1}(z-b)+a_{-m+2}(z-b)^2+\ldots\right].$$

При стремлении $z$ к $b$ множитель, стоящий перед квадратной скобкой, стремится к бесконечности, а вся квадратная скобка стре-

мится к пределу $a_{-m}$, конечному и отличному от нуля (сумма степенного ряда есть непрерывная функция), и, следовательно, все произведение стремится к бесконечности. Таким образом, во втором из указанных выше случаев точка $z=b$ будет полюсом функции $f(z)$ по нашей прежней терминологии [10]. Введем некоторую терминологию, которой обычно пользуются: при наличии разложения (88) точка $z=b$ называется *полюсом порядка* $m$; сумма членов с отрицательными степенями

$$\frac{a_{-m}}{(z-b)^m}+\frac{a_{-m+1}}{(z-b)^{m-1}}+\cdots+\frac{a_{-1}}{z-b}$$

называется *бесконечной частью, соответствующей этому полюсу.* Коэффициент $a_{-1}$, стоящий при $(z-b)^{-1}$, называется *вычетом функции* $f(z)$ *в полюсе* $z=b$.

Покажем теперь, что разложение вида (88) будет иметь место всегда, если $z=b$ есть полюс функции согласно определению из [10]. Итак, пусть $f(z)$ однозначна и регулярна в окрестности $z=b$ и стремится к бесконечности при $z\to b$. Покажем, что имеет место разложение вида (88). Рассмотрим функцию

$$\varphi(z)=\frac{1}{f(z)}.$$

Поскольку $f(z)$ регулярна в окрестности $z=b$ и $|f(z)|\to\infty$ при $z\to b$, то можно утверждать, что $\varphi(z)$ регулярна в окрестности точки $z=b$ и стремится к нулю при $z\to b$. Следовательно, $\varphi(z)$ регулярна и в самой точке $z=b$ [10], причем обращается в этой точке в нуль. Напишем ее разложение в ряд Тейлора; в нем наверняка будет отсутствовать свободный член. Предположим, что первый из членов, отличных от нуля, будет содержать $(z-b)^m$, т. е.

$$\varphi(z)=b_m(z-b)^m+b_{m+1}(z-b)^{m+1}+\ldots \qquad (b_m\neq 0).$$

Для функции $f(z)$ будем иметь отсюда формулу

$$f(z)=\frac{1}{\varphi(z)}=\frac{1}{(z-b)^m}\cdot\frac{1}{b_m+b_{m+1}(z-b)+\ldots}.$$

Знаменатель второй из написанных дробей отличен от нуля при $z=b$, и, следовательно, эта дробь разлагается в ряд Тейлора по положительным степеням $(z-b)$. Деля этот ряд Тейлора на $(z-b)^m$, мы получим для $f(z)$ как раз разложение вида (88). Сопоставляя этот последний результат с предыдущим, мы можем утверждать, что понятие полюса, введенное нами в [10], равносильно понятию такой особой точке, вблизи которой функция разлагается в ряд Лорана с конечным числом членов с отрицательными степенями $(z-b)$. Следовательно, существенно особой точкой будет такая точка, вблизи которой разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана содержит бесчисленное

множество членов с отрицательными степенями $(z-b)$. Здесь, как и в случае полюса, коэффициент при $(z-b)^{-1}$ называется *вычетом* $f(z)$ в существенно особой точке $z=b$.

Отметим, что в разложении $\varphi(z)$ должен обязательно встретиться коэффициент $b_m$, отличный от нуля, ибо в противном случае $\varphi(z)$ была бы равна тождественно нулю в некотором круге с центром в $z=b$, а это противоречит равенству $\varphi(z)=\frac{1}{f(z)}$, где $f(z)$ по условию регулярна в окрестности $z=b$.

Введем один «несобственный» элемент плоскости — *бесконечно далекую точку плоскости* [III$_1$, **62**]. Окрестностью бесконечно далекой точки назовем часть плоскости, лежащую вне какой-либо замкнутой кривой на плоскости. Всякая такая окрестность содержит в себе часть плоскости, лежащую вне круга с любым центром $b$ и достаточно большим радиусом $R$, т. е. часть плоскости, координаты которой удовлетворяют неравенству $|z-b|>R$. В дальнейшем мы будем главным образом пользоваться окрестностями бесконечно далекой точки, определяемыми неравенством $|z|>R$. Плоскость с присоединенной к ней бесконечно далекой точкой называется обычно *расширенной плоскостью*. Бесконечно далекую точку обозначают символом $z=\infty$. Пусть $f(z)$ однозначна и регулярна в окрестности $z=\infty$ бесконечно далекой точки. Мы можем рассматривать эту окрестность как круговое кольцо с центром $z=0$, некоторым внутренним радиусом $R>0$ и внешним радиусом, равным бесконечности. В этом кольце $f(z)$ разлагается в ряд Лорана

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{-k}z^k, \qquad |z|>R. \tag{89}$$

Если вместо $z$ ввести новое комплексное переменное $t$:

$$z=\frac{1}{t}, \quad t=\frac{1}{z},$$

то окрестность $|z|>R$ точки $z=\infty$ перейдет в окрестность $|t|<\frac{1}{R}$ точки $t=0$, и ряд (89) примет вид

$$f\left(\frac{1}{t}\right)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{-k}t^{-k}. \tag{89$_1$}$$

Как и выше, могут представиться три случая. В качестве первого возьмем тот, когда ряд (89) не содержит членов с положительными степенями $z$:

$$f(z)=a_0+\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\ldots, \tag{90}$$

или

$$f\left(\frac{1}{t}\right)=a_0+a_1t+a_2t^2+\ldots, \tag{91}$$

откуда следует, что $f\left(\frac{1}{t}\right) \to a_0$ при $t \to 0$, т. е. $f(z) \to a_0$ при $|z| \to \infty$. В этом случае говорят, что $f(z)$ регулярна в точке $z = \infty$, причем полагают $f(\infty) = a_0$.

Если разложение (90) начинается с члена, содержащего $z^{-m}$, где $m > 0$ — целое, то $z = \infty$ называется *корнем* $f(z)$ *кратности* $m$. В этом случае $f(\infty) = a_0$.

Если разложение (89) содержит конечное число членов с положительными степенями $z$:

$$f(z) = a_{-m}z^m + a_{-m+1}z^{m-1} + \ldots + a_{-1}z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \ldots \quad (a_{-m} \neq 0),$$

то, вынося за скобки $z^m$, убедимся в том, что $f(z)$ стремится к бесконечности при $|z| \to \infty$, причем частное $\frac{f(z)}{z^m} \to a_{-m}$ при $|z| \to \infty$. В этом случае точка $z = \infty$ называется *полюсом* $f(z)$ порядка $m$, а сумма $a_{-m}z^m + \ldots + a_{-1}z$ называется *бесконечной частью* в этом полюсе. При этом полагают $f(\infty) = \infty$. Наконец, если разложение (89) содержит бесконечно много членов с положительными степенями $z$, то $z = \infty$ называется *существенно особой точкой* $f(z)$. При переходе к переменной $t$ мы получим существенно особую точку $t = 0$. Отсюда и из [10] непосредственно следует, что если $z = \infty$ есть существенно особая точка $f(z)$, то в области $|z| > \rho$, где $\rho > 0$ — сколь угодно большое число, есть значения $f(z)$, сколь угодно близкие к любому наперед заданному комплексному числу. Во всех указанных трех случаях вычетом в точке $z = \infty$ называется коэффициент $a_1$ при $z^{-1}$ с обратным знаком, т. е. $-a_1$. Смысл такого определения будет выяснен нами позже.

Из сказанного выше следует, что мы можем говорить об определенном значении $f(z)$ в полюсе $z = b$, а именно $f(b) = \infty$, т. е. $w = f(z)$ преобразует точку $z = b$ в точку $w = \infty$. Если точка $z = \infty$ есть регулярная точка, то $f(\infty) = a_0$ (см. выше), а если $z = \infty$ есть полюс $f(z)$, то $f(\infty) = \infty$. В первом случае точка $z = \infty$ переходит в $w = a_0$, а во втором $w = f(z)$ преобразует точку $z = \infty$ в себя, т. е. оставляет ее на месте.

Отметим еще, что если $\alpha$ — любое комплексное число, то окрестность точки $z = \infty$, где $f(z)$ однозначна и регулярна, содержит области $|z - \alpha| > R$, где $R$ — достаточно большое число. Таким образом, вместо ряда (89) мы могли бы написать ряд Лорана для $f(z)$ по целым степеням $(z - \alpha)$:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{-k}(z - \alpha)^k$$

и получили бы тот же характер особенности $f(z)$ при $z = \infty$ и те же значения $f(\infty)$ в случае, если $z = \infty$ — регулярная точка или

полюс $f(z)$. Если в случае регулярности точки $z=\infty$ мы продифференцируем почленно ряд (90) по $z$, что сводится к дифференцированию ряда (91) по $t$ с последующим умножением на $\left(-\frac{1}{z^2}\right)=-t^2$, то получим

$$f'(z)=-\frac{a_1}{z^2}-\frac{2a_2}{z^3}-\frac{3a_3}{z^4}-\dots,$$

откуда следует, что если $z=\infty$ есть регулярная точка $f(z)$, то $f'(\infty)=0$. Очевидно, что и производные любого порядка $f^{(m)}(\infty)=0$. Отметим, что выше мы всегда считали, что в исходных рядах Тейлора и Лорана не все коэффициенты равны нулю, т. е. что рассматриваемая функция не равна нулю тождественно в соответствующем круге или кольце.

Возвращаясь к [7], мы видим, что условие применимости формулы Коши для области, содержащей бесконечно далекую точку, формулируемое в виде:

$$f(z)\to 0 \text{ равномерно при } z\to\infty,$$

сводится к тому, что $f(z)$ регулярна в бесконечно далекой точке и в разложении (89) $a_0=0$, т. е. $f(\infty)=0$.

Пример I. Относительно функции $e^z$ мы говорили раньше, что она регулярна на всей плоскости. При этом мы исключали бесконечно далекую точку. Разложение этой функции $e^z$ годится везде и, в частности, в окрестности бесконечно далекой точки. Оно содержит бесчисленное множество членов с положительными степенями $z$, и, следовательно, бесконечно далекая точка будет существенно особой точкой для $e^z$. То же самое можно сказать, например, относительно $\sin z$ и $\cos z$.

Пример II. Всякий полином будет регулярной функцией на всей плоскости и будет, очевидно, иметь на бесконечности полюс, порядок которого равен степени полинома.

Рассмотрим рациональную функцию, т. е. частное двух полиномов:

$$\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=f(z),$$

причем будем считать дробь несократимой, т. е. корни числителя и знаменателя различными. Наша функция будет иметь на конечном расстоянии особыми точками корни полинома $\psi(z)$, и эти точки будут полюсами функций. Поведение функции в бесконечно далекой точке будет зависеть от степеней полиномов, стоящих в числителе и знаменателе. Если степень $\varphi(z)$ выше степени $\psi(z)$ на $m$ единиц, то $f(z)$ будет стремиться к бесконечности при $z\to\infty$, но отношение $\frac{f(z)}{z^m}$ будет стремиться к конечному пределу, отличному от нуля,

т. е. наша функция будет иметь на бесконечности полюс порядка $m$. Если же степень $\varphi(z)$ не выше степени $\psi(z)$, то функция будет регулярной на бесконечности.

**18. Аналитическое продолжение.** Если некоторая функция $f(z)$ регулярна в некоторой области $B$, то естественно возникает вопрос: нельзя ли расширить область определения функции, т. е. нельзя ли создать более широкую область $C$, содержащую $B$ внутри себя, и в этой более широкой области определить регулярную функцию $F(z)$, которая бы в первоначальной области $B$ совпадала с $f(z)$? Такое *расширение области определения регулярной функции* или, как еще можно сказать, экстраполирование регулярной функции, называется *аналитическим продолжением функции*. Оказывается, что если такое аналитическое продолжение возможно, то оно является вполне определенным, единственным. В этом отношении регулярные функции комплексного переменного существенным образом отличаются, например, от непрерывных функций вещественного переменного. Действительно, положим, что нам дана некоторая непрерывная функция $\omega(x)$ вещественного переменного $x$ в некотором промежутке $a \leqslant x \leqslant b$. Мы можем, очевидно, не нарушая непрерывности, продолжить график этой функции и вне промежутка и при этом бесчисленным множеством способов. Для регулярных же функций комплексного переменного $f(z)$ значения в первоначальной области $B$ вполне определяют и значения функции вне этой области, если только расширение области, т. е. аналитическое продолжение, вообще возможно. Надо только заметить, что, совершая аналитическое продолжение, мы можем прийти и к многозначным функциям. Целью настоящего номера является выяснение всех обстоятельств, которые могут встретиться при аналитическом продолжении и, главным образом, доказательство единственности такого продолжения.

Выясним предварительно некоторые свойства регулярных функций.

Пусть точка $z = b$ является корнем регулярной функции $f(z)$. При этом в ряде Тейлора с центром $b$ будет отсутствовать свободный член и, может быть, еще несколько следующих членов. Положим, что первый член, отличный от нуля, будет порядка $(z-b)^m$, т. е.

$$f(z) = a_m(z-b)^m + a_{m+1}(z-b)^{m+1} + \ldots \qquad (a_m \neq 0) \qquad (92)$$

или, иначе,

$$f(z) = (z-b)^m [a_m + a_{m+1}(z-b) + \ldots]. \qquad (93)$$

В этом случае $z = b$ называется корнем кратности $m$. Обратимся к формуле (93) и положим, что $z$ равно некоторому числу, близкому к $b$, но отличному от $b$. При этом множитель $(z-b)^m$ будет отличен от нуля, и сумма, стоящая в квадратных скобках, будет

близкой по величине к числу $a_m$, отличному от нуля, т. е. также будет отлична от нуля. Иначе говоря, во всех точках, достаточно близких к корню регулярной функции, эта функция уже отлична от нуля. Другими словами, *корни регулярной функции суть изолированные точки.* В предыдущем рассуждении мы предполагали, конечно, что разложение Тейлора (92) содержит хоть один член, отличный от нуля. В противном случае мы должны, очевидно, считать функцию тождественно равной нулю, хотя бы в том круге, для которого имеем разложение Тейлора. Основываясь на нашем рассуждении, докажем теперь теорему, которая является основной в вопросе единственности аналитического продолжения.

Теорема. *Если $f(z)$ регулярна внутри некоторой области $B$ и обращается в нуль в некоторой области $\beta$, составляющей часть $B$, то $f(z)$ равна нулю тождественно во всей области $B$.*

Будем доказывать от противного. Положим, что $f(z)$ отлична от нуля в некоторой точке $c$ области $B$. Возьмем внутри $\beta$ некоторую точку $b$ и соединим ее с $c$ кривой $l$, принадлежащей области $B$. На некотором участке этой кривой, примыкающем к точке $b$, наша функция равна нулю, а на участке, примыкающем к точке $c$, она от нуля отлична. Таким образом, на кривой $l$ должна существовать некоторая точка $d$, обладающая тем свойством, что на всем участке $bd$ наша функция равна нулю, а на участке $dc$ есть точки, сколь угодно близкие к $d$, в которых наша функция от нуля отлична. Регулярная функция является в то же время и непрерывной и, следовательно, в самой точке $d$ она должна иметь корень. Но этот корень оказывается не изолированным, ибо вся дуга $bd$ кривой $l$ состоит из корней нашей функции. Но тогда из наших предыдущих рассуждений следует, что разложение в ряд Тейлора нашей функции с центром $d$ должно обращаться тождественно в нуль, и, следовательно, наша функция должна быть равной нулю в некотором круге с центром $d$, т. е. она должна равняться нулю и на некотором участке кривой, примыкающем к точке $d$ и составляющем часть участка $dc$. Это обстоятельство противоречит тому свойству точки $d$, что на участке $dc$ есть точки, сколь угодно близкие к $d$, где $f(z)$ отлична от нуля. Таким образом, высказанная теорема доказана.

Замечание. При доказательстве теоремы можно было бы ограничиться требованием, что $f(z)$ обращается в нуль на некоторой кривой, лежащей внутри $B$. При этом функция должна была бы, очевидно, обращаться в нуль и в некотором круге, имеющем центр в одной из точек упомянутой кривой.

Достаточно даже предположить, что корни $f(z)$ имеют точку сгущения внутри $B$, т. е. существует такая точка $b$ внутри $B$, что в круге с центром $b$ и любым малым радиусом находится бесчисленное множество корней $f(z)$. При этом, в силу предыдущих соображений, ряд Тейлора $f(z)$ с центром $b$ должен был бы обра-

щаться тождественно в нуль, т. е. $f(z)$ была бы равной нулю в некотором круге с центром $b$, т. е. была бы равна нулю везде в $B$.

Следствие. Положим, что две функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$, регулярные внутри $B$, совпадают на некотором куске этой области $\beta$ или на некоторой кривой. При этом разность должна быть равной нулю в $\beta$, и, согласно доказанной теореме, она будет равной нулю и во всей области, т. е. *если две функции, регулярные в некоторой области, совпадают в некоторой части этой области (или на кривой), то они совпадают и во всей области.*

Положим, что у наших двух функций совпадают их значения и значения всех их производных в некоторой одной точке $b$ области $B$. При этом будут совпадать и их разложения в ряд Тейлора с центром в $b$, т. е. наши функции будут совпадать в некотором круге с центром $b$, а потому будут совпадать и во всей области, т. е. *совпадение значений функций и всех производных в некоторой одной точке влечет за собой совпадение функций во всей области, где эти функции регулярны.*

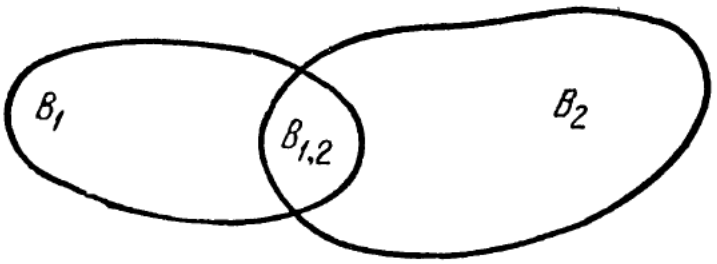


Рис. 11.

Обратимся теперь к вопросу об аналитическом продолжении. Пусть $f_1(z)$ регулярна в области $B_1$, и положим, что нам удалось построить новую область $B_2$, имеющую с $B_1$ общую часть $B_{1,2}$ (тоже область; рис. 11), и определить в области $B_2$ регулярную функцию $f_2(z)$, совпадающую с $f_1(z)$ в $B_{1,2}$. Можно назвать $f_2(z)$ непосредственным аналитическим продолжением $f_1(z)$ из $B_1$ в $B_2$, через $B_{1,2}$. Функция, определенная в $B_1$, как $f_1(z)$, и в $B_2$, как $f_2(z)$, дает единую регулярную функцию во всей расширенной области. Покажем, что не может существовать двух различных аналитических продолжений. Действительно, положим, что мы имеем два различных аналитических продолжения $f_1(z)$ из $B_1$ в $B_2$ через $B_{1,2}$. Эти две функции $f_2^{(1)}(z)$ и $f_2^{(2)}(z)$, регулярные в $B_2$, должны совпадать с $f_1(z)$, а следовательно, и между собой в $B_{1,2}$. Но тогда, в силу доказанного выше, они совпадают и во всей области $B_2$, т. е. дают одно и то же аналитическое продолжение.

Положим, мы имеем теперь целую цепь областей $B_1$, $B_2$, $B_3$, ..., причем $B_1$ и $B_2$ имеют общую часть $B_{1,2}$, $B_2$ и $B_3$ имеют общую часть $B_{2,3}$ и т. д. В области $B_2$ имеется регулярная функция $f_2(z)$, совпадающая с $f_1(z)$ в $B_{1,2}$. В области $B_3$ имеется регулярная функция $f_3(z)$, совпадающая с $f_2(z)$ в $B_{2,3}$, и т. д. Здесь мы имеем *аналитическое продолжение $f_1(z)$ при помощи нашей цепи областей*, и это аналитическое продолжение единственно. Заметим, что, вообще говоря, области $B_s$ могут налегать друг на друга и помимо тех частей $B_{k,k+1}$, о которых мы упоминали выше. Рассмотрим для примера цепь,

состоящую из трех областей $B_1$, $B_2$ и $B_3$, и положим, что $B_3$ налегает на $B_1$ (рис. 12). На этом налегающем куске, заштрихованном на чертеже, значения $f_1(z)$, определенные в $B_1$, и значения $f_2(z)$, определенные в $B_3$, могут быть и различными. При этом будем иметь при аналитическом продолжении многозначную функцию. Но мы можем геометрически избегнуть многозначности, а именно, если на заштрихованном куске значения $f_1(z)$ и $f_3(z)$ различны, то будем считать, что этот заштрихованный кусок состоит как бы из двух листов: одного, принадлежащего $B_1$, и другого, принадлежащего $B_3$.

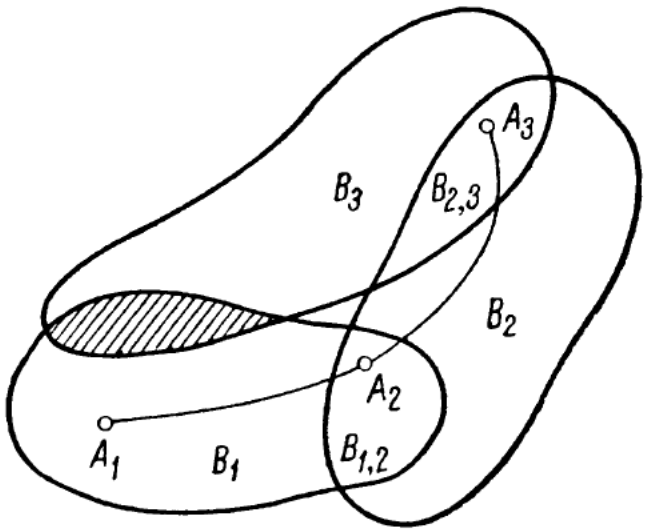


Рис. 12.

Факт многозначности может встретиться уже при первом шаге аналитического продолжения. Положим, мы имеем аналитическое продолжение $f_1(z)$ из $B_1$ и $B_2$ через $B_{1,2}$ (рис. 13), но $B_2$ имеет с $B_1$ еще общую часть $\beta$. На $\beta$ значения $f_2(z)$ могут и не совпадать со значениями $f_1(z)$. Совокупность всех значений, получаемых при помощи всевозможных аналитических продолжений исходной функции $f_1(z)$, образует единую функцию, которую назовем *аналитической функцией* и обозначим через $f(z)$. Как мы уже упоминали, эта функция $f(z)$ может оказаться и многозначной.

Часто вместо аналитического продолжения при помощи цепи областей говорят об *аналитическом продолжении вдоль некоторой кривой*. Пусть имеется некоторая линия $l$, разделенная на последовательные участки: $P_1Q_1$, $P_2Q_2$, ..., $P_nQ_n$, так что участок $P_kQ_k$ имеет с участком $P_{k+1}Q_{k+1}$ общую часть $P_{k+1}Q_k$ (рис. 14). Положим, что эта кривая $l$ покрыта цепью областей $B_1$, $B_2$, ..., $B_k$, ..., так что участок $P_kQ_k$ находится внутри $B_k$. Обозначим через $B_{k,k+1}$ область, по которой перекрываются $B_k$ и $B_{k+1}$ и которая содержит участок $P_{k+1}Q_k$ линии $l$. (Областей, по которым перекрываются $B_k$ и $B_{k+1}$, может быть несколько или даже бесчисленное множество, но мы берем именно ту из этих областей, которая содержит $P_{k+1}Q_k$ внутри себя.) Как указано на рис. 14, мы считаем, что области $B_k$ и $B_{k+1}$ имеют общую односвязную часть, содержащую отрезок $P_{k+1}Q_k$ линии $l$. Положим, что в $B_1$ имеется регулярная функция $f_1(z)$ и что ее можно аналитически продолжить при помощи цепи областей $B_{1,2}$, $B_{2,3}$ ..., $B_{n-1,n}$. Вместо этого говорят, что $f_1(z)$ *можно продолжить*

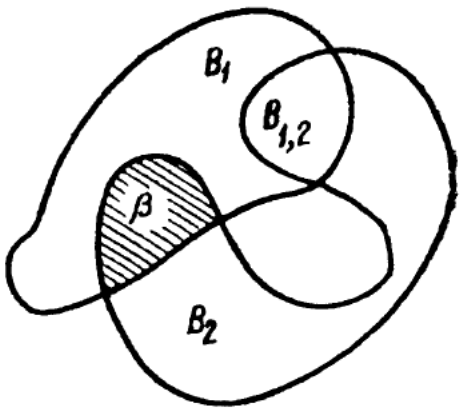


Рис. 13.

*вдоль линии $l$.* Значения функции на участке $P_1 Q_1$ (и в окрестности этого участка) нам заданы, и, применяя основную теорему настоящего номера, мы убедимся, как и выше, в том, что аналитическое продолжение вдоль $l$ может быть только одно. Оно не зависит от того, как мы разбили $l$ на участки и какими областями с указанными выше свойствами мы покрываем линию $l$.

Вернемся к аналитическому продолжению вдоль $l$ при помощи определенной цепи областей $B_k$. В окрестности каждой точки линии $l$ аналитическая функция $f(z)$ будет иметь определенное представление в виде ряда Тейлора. Назовем этот ряд *элементом функции в соответствующей точке линии $l$.* Если мы немного деформируем линию $l$, оставляя неизменными концы $P_1$ и $Q_n$, то она не

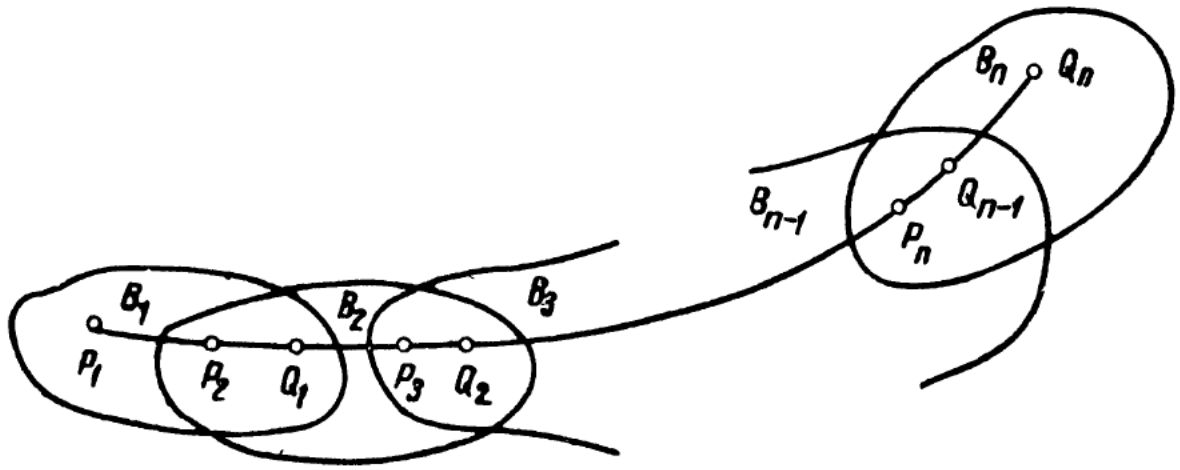



Рис. 14.

выйдет из областей $B_k$, и тот элемент функции $f(z)$, который мы имеем в точке $Q_n$, останется прежним. Отсюда нетрудно видеть, что *если вообще, сохраняя концы кривой $P_1$ и $Q_n$, будем ее непрерывно деформировать, причем в любом ее положении возможно аналитическое продолжение исходного элемента в точке $P_1$ вдоль линии, то полученный в результате аналитического продолжения элемент в точке $Q_n$ будет все время одним и тем же.*

Положим, что при аналитическом продолжении вдоль некоторой кривой $l$ от точки $P_1$ мы можем совершить продолжение лишь до некоторой точки $C$, а дальше аналитическое продолжение вдоль этой кривой невозможно. При этом точка $C$ называется *особой точкой нашей функции.* Отметим только одно существенное обстоятельство, а именно: если бы мы при аналитическом продолжении из точки $P_1$ в точку $C$ совершили это продолжение не вдоль кривой $l$, а вдоль некоторой другой кривой $l_1$, то при этом точка $C$ могла бы и не оказаться особой, т. е., *вообще говоря, особая точка определяется не только своим положением на плоскости, но и тем путем, которым мы к ней пришли, совершая аналитическое продолжение* (см. пример из [19]). В дальнейшем мы почти всегда будем иметь дело с более простым случаем, когда положение особых точек

может быть фиксировано заранее и не связано с путем аналитического продолжения.

В непосредственной связи с предыдущим стоит одна важная в теории аналитического продолжения теорема, которая называется *теоремой однозначности.*

*Если аналитическое продолжение некоторого исходного элемента функции возможно по любому пути, лежащему в некоторой односвязной области $B$, то эти аналитические продолжения вдоль путей, принадлежащих $B$, дают однозначную в $B$ функцию.*

Действительно, пусть исходный элемент функции определен в окрестности некоторой точки $P_1$, и возьмем два различных пути $l_1$ и $l_2$ аналитического продолжения из $P_1$ в $Q_n$. Ввиду односвязности области мы можем при помощи непрерывной деформации преобразовать контур $l_1$ в контур $l_2$, не покидая области $B$, и при этом, согласно условию теоремы однозначности, аналитическое продолжение вдоль контура будет все время осуществимо. Но при этом, как мы упоминали выше, и окончательный результат в точке $Q_n$ будет одним и тем же, т. е. наши различные пути аналитического продолжения приводят к одному и тому же окончательному результату, и мы действительно имеем в области $B$ однозначную регулярную функцию.

Проведенное выше рассуждение не является строгим. Вообще выше мы ограничивались часто лишь простыми указаниями, не вдаваясь в подробные доказательства. Мы надеемся все же, что читатель составил себе представление об основных идеях аналитического продолжения. Надо заметить, что изложенное выше имеет лишь теоретический характер и не дает никаких указаний на практическую возможность аналитического продолжения.

Упомянем еще об одном принципе теории функций, тесно связанном с аналитическим продолжением и называемом обычно *принципом перманентности.* Положим, что исходный элемент аналитической функции $f_1(z)$ удовлетворяет некоторому уравнению, например дифференциальному уравнению второго порядка:

$$p_0(z)\frac{d^2f(z)}{dz^2}+p_1(z)\frac{df(z)}{dz}+p_2(z)f(z)=0, \qquad (94)$$

коэффициенты которого $p_k(z)$ суть данные полиномы от $z$. При аналитическом продолжении $f_1(z)$ производные $f_1'(z)$ и $f_1''(z)$, а также и вся левая часть нашего уравнения испытывают аналитическое продолжение. Следовательно, если эта левая часть была равна нулю в исходной области, то она будет равной нулю и при аналитическом продолжении, т. е., иначе говоря, если исходный элемент аналитической функции удовлетворяет уравнению (94), то этому уравнению будет удовлетворять и вся аналитическая функция, получаемая из исходного элемента путем аналитического продолжения.

Обратимся теперь к некоторому конкретному способу аналитического продолжения, а именно будем пользоваться лишь *круговыми областями и разложением Тейлора* в таких областях (рис. 15). Пусть начальный элемент функции задан некоторым рядом Тейлора с центром $b_1$:

$$f_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(1)} (z - b_1)^k. \tag{95}$$

Проведем из точки $b_1$ некоторый контур $l$ и будем аналитически продолжать нашу функцию вдоль этого контура. Для этого будем поступать следующим образом: возьмем на нашей кривой $l$ некоторую точку $b_2$ такую, чтобы дуга $b_1b_2$ лежала внутри круга $K_1$ сходимости ряда (95). Пользуясь этим рядом, мы можем вычислить производные $f_1^{(n)}(b_2)$ и написать разложение нашей функции с центром $b_2$:

$$f_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(2)} (z - b_2)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_1^{(k)}(b_2)}{k!} (z - b_2)^k. \tag{96}$$

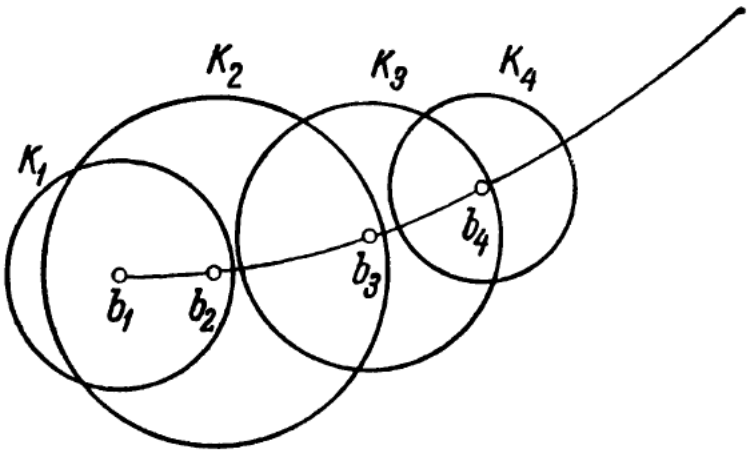



Рис. 15.

Эта новая функция будет определена в некотором круге $K_2$ с центром $b_2$. Если этот круг будет выходить за круг $K_1$, то функция (96) даст аналитическое продолжение $f_1(z)$. В точке $b_2$ значения функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$ и всех их производных будут совпадать, и эти функции будут совпадать в той круговой луночке, по которой наши круги перекрываются. Заметим, что мы можем получить ряд (96) из ряда (95) следующим образом. Перепишем ряд (95) в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(1)} [(z - b_2) + (b_2 - b_1)]^k. \tag{97}$$

Разлагая $[(z - b_2) + (b_2 - b_1)]^k$ по биному Ньютона и собирая в сумме (97) члены с одинаковыми степенями $(z - b_2)$, получим ряд (96).

Совершив первое аналитическое продолжение, переходим к следующему. Для этого выбираем на кривой $l$ новую точку $b_3$ такую, чтобы дуга $b_2b_3$ принадлежала кругу $K_2$. Ряд (96) мы можем, как и выше, перестроить по степеням $(z - b_3)$ и получим новый элемент функции

$$f_3(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(3)} (z - b_3)^k,$$

определенный в некотором круге $K_3$ с центром $b_3$ и т. д.

Отметим, что аналитическое продолжение можно совершать и через полюс $f(z)$, а также через точку $z=\infty$, если эта точка есть точка регулярности или полюс аналитически продолжимой функции. В качестве простого примера рассмотрим аналитическое продолжение при помощи ряда Тейлора функции

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\ldots \tag{98}$$

Ряд сходится и определяет регулярную функцию лишь в круге $|z|<1$. Но его сумма $\frac{1}{1-z}$ есть регулярная функция на всей расширенной плоскости, кроме точки $z=1$ (полюс), и, следовательно, мы можем аналитически продолжить ряд (98) при помощи ряда Тейлора на всю плоскость. Если мы возьмем внутри круга $|z|<1$ некоторую точку $b_2$ и перестроим ряд (98) по степеням $(z-b_2)$, то получим новый ряд вида

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(1-b_2)^{k+1}}(z-b_2)^k.$$

Этот ряд будет сходиться в круге с центром $b_2$ и радиусом, равным расстоянию от этой точки до точки $z=1$. Если точка $b_2$ не лежит на отрезке вещественной оси (0, 1), то этот новый круг выйдет за старый, и мы получим аналитическое продолжение, которое затем можем продолжать и дальше. Практически в данном случае, конечно, не надо применять аналитического продолжения ряда (98), а естественно пользоваться выражением функции в конечном виде $\frac{1}{1-z}$. Но если функция задана только степенным рядом, и никакого другого выражения для нее не известно, то нам остается лишь путь аналитического продолжения. В этом направлении было много работ, посвященных вопросу о возможно более простом практическом осуществлении аналитического продолжения. В дальнейшем мы дадим один из таких практических способов для одного частного случая. Сейчас перейдем к выяснению аналитического продолжения на примерах элементарных многозначных функций.

**19. Примеры многозначных функций.** Рассмотрим функцию

$$z=w^2 \tag{99}$$

и положим, что переменная $w$ меняется в верхней полуплоскости, т. е. в той части плоскости, где коэффициент мнимой части положителен (над вещественной осью), так что $\arg w$ изменяется от 0 до $\pi$. При возведении в квадрат модуль $|w|$ будет возводиться в квадрат, а аргумент умножаться на два, и, следовательно, значения $z$

заполнят уже всю плоскость, причем как положительная, так и отрицательная части вещественной оси плоскости $w$ перейдут на плоскости $z$ в положительную часть вещественной оси. Мы видим, таким образом, что в результате преобразования (99) верхняя часть плоскости $w$ перейдет *во всю плоскость $z$ с разрезом, проведенным вдоль положительной части вещественной оси от* 0 *до* $+\infty$. Обозначим плоскость с таким разрезом через $T_1$. Мы можем, наоборот, считать, что $w$ — однозначная функция от $z$ в области $T_1$:

$$w=\sqrt{z}, \tag{100}$$

причем мы должны брать то значение радикала, для которого коэффициент мнимой части $\sqrt{z}$ положителен. Вещественные положительные значения $z$ будут находиться как на верхнем, так и на нижнем берегу нашего разреза. На верхнем берегу функцию $\sqrt{z}$ надо брать положительной, а на нижнем берегу — отрицательной.

Будем теперь считать, что $w$ меняется в нижней полуплоскости. Возводя его в квадрат, получим, как нетрудно видеть, для $z$ второй экземпляр той же самой прежней области $T_1$. Обозначим его через $T_2$. В этой новой области $T_2$ функция (100) опять будет регулярной и однозначной, причем радикал надо брать таким, чтобы коэффициент мнимой части у $\sqrt{z}$ был отрицательным.

Из предыдущих рассуждений непосредственно следует также, что значения функции (100) на верхнем берегу разреза в области $T_1$ совпадают со значениями этой функции на нижнем берегу разреза области $T_2$ и наоборот.

Таким образом, проводя разрез от 0 к $+\infty$, мы получаем область, где функция (100) однозначна, но для того чтобы иметь все значения этой функции, надо считать ее за две различные функции, определенные в областях $T_1$ и $T_2$ так, как это мы делали выше. Такое разбиение функции (100) на две отдельные однозначные функции представляется искусственным, и мы свяжем сейчас эти две функции в единую аналитическую функцию, однозначную и регулярную на некоторой двулистной плоскости. Для того чтобы создать эту двулистную плоскость $T$, наложим экземпляр $T_1$ на экземпляр $T_2$ и соединим мысленно берега разрезов этих двух экземпляров крестнакрест, а именно: верхний берег разреза на $T_1$ соединим с нижним на $T_2$ и наоборот. Точки $z=0$ и $z=\infty$ будем считать совпадающими на обоих экземплярах плоскости. Это соответствует тому факту, что функция (99) имеет значение $z=0$ только при $w=0$ и значение $z=\infty$ только при $w=\infty$ ($w=\infty$ есть полюс этой функции). Всякое другое значение $z=a$ ($a\neq 0$ и $\infty$) получается при двух значениях $w=\pm\sqrt{z}$. Построенная вышеуказанным образом двулистная область $T$ получается, очевидно, из расширенной плоскости $z$ при помощи преобразования (99), причем, как указано выше,

точки $z=0$ и $z=\infty$ на двулистной плоскости $T$ отождествляются, т. е. считается, что два листа $T$ «скреплены» в этих точках. Применяя правило дифференцирования обратной функции, получим

$$\frac{dz}{dw}=2w, \qquad \frac{dw}{dz}=\frac{1}{2w}, \qquad \text{т. е.} \qquad \frac{dw}{dz}=\frac{1}{2\sqrt{z}}, \tag{101}$$

откуда мы видим, что функция (100) регулярна на двулистной области $T$ везде, кроме точек $z=0$ и $z=\infty$.

Выясним особую роль этих последних точек. Если мы на обычной плоскости $(z)$ из какой-либо точки $z_0$, отличной от $z=0$, опишем простой замкнутый контур вокруг $z=0$ (например, против часовой стрелки), так что аргумент $z$ при возвращении в исходную точку $z_0$ получит приращение $2\pi$, а аргумент $\sqrt{z}$ получит приращение $\pi$, то мы придем в точку $z_0$ уже с другим знаком $\sqrt{z_0}$. Такой обход на плоскости $(z)$ приведет на двулистной области $T$ в точку $z$, лежащую на другом листе.

Если мы возьмем, например, на плоскости $(z)$ окрестность $|z|<\rho$ и произведем в этой окрестности разрез вдоль радиуса $0\leqslant z\leqslant\rho$, то на полученной окрестности $z$ функция $\sqrt{z}$ будет однозначной, непрерывной и регулярной (кроме $z=0$). Но, как видно из вышесказанного, она не будет однозначной на полной окрестности без разреза, т. е., точнее говоря, при аналитическом продолжении по линии, обходящей $z=0$, наша функция не однозначна. Такая точка называется обычно *точкой разветвления функции*. На двулистной области $T$ это соответствует тому факту, что при обходе точки $z=0$ мы попадаем на другой лист. В данном случае при вторичном обходе точки $z=0$ мы возвращаемся к исходному значению $\sqrt{z_0}$ на плоскости $(z)$ и соответственно возвращаемся на исходный лист двулистной области $T$. Такая точка разветвления называется *точкой разветвления первого порядка* (функции $\sqrt{z}$ или двулистной области $T$).

Совершенно аналогично точка $z=\infty$ будет также точкой разветвления первого порядка функции $\sqrt{z}$. При этом в качестве контура $l$, обходящего вокруг точки $z=\infty$, мы можем брать любой простой замкнутый контур, содержащий точку $z=0$ внутри (точка $z=\infty$ будет содержаться вне $l$). Отметим, что если мы возьмем контур таким, что и $z=0$ находится вне $l$, то естественно считать, что контур $l$ обходит две точки разветвления $z=0$ и $z=\infty$ с точки зрения расширенной плоскости (обе точки вне $l$). При таком обходе $\sqrt{z}$ вернется к прежнему значению, а на $T$ мы вернемся на исходный лист.

В данном случае нам удалось просто получить область $T$, на которой функция (100) является однозначной и регулярной, так как

эта функция является обратной для весьма простой функции (99). В дальнейшем мы уточним понятие точки разветвления функции. На рис. 16 намечен вид двулистной плоскости близ точки разветвления.

Вообще, если функция

$$z = \varphi(w) \tag{102}$$

есть рациональная функция $w$ (частное двух полиномов без общих корней или просто полином), то в результате преобразования (102) плоскость $w$ переходит в многолистную плоскость $z$ во всех случаях, кроме следующих элементарных случаев [**30** и **31**]:

$$z = aw + b \quad (a \neq 0);$$

$$z = \frac{aw + b}{cw + d} \quad (c \neq 0,\ ad - bc \neq 0),$$

когда расширенная плоскость $w$ переходит в расширенную плоскость $z$. В общем случае обратная функция

$$w = f(z) \tag{103}$$

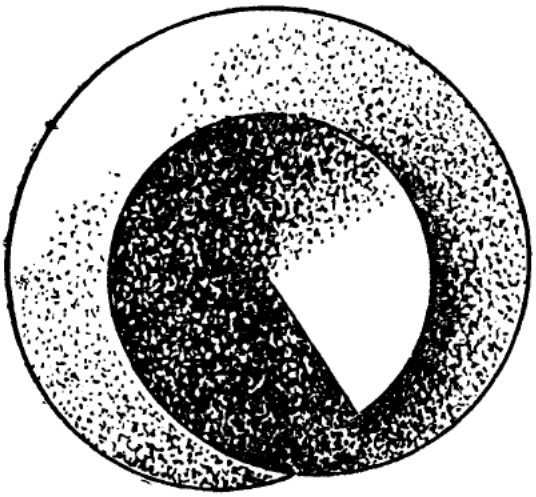


Рис. 16.

на всей многолистной плоскости $T$ (кроме точек разветвления $T$ и полюсов $f(z)$) регулярна. Точки разветвления $T$ получаются: 1) при тех конечных значениях $w$, при которых $\varphi'(w) = 0$; 2) при значении $w = \infty$, если в этой точке $\varphi(w)$ имеет корень или полюс выше первой кратности; 3) при значении $z = \infty$, если в разложении (90) при замене $z$ на $w$ после $a_0$ следует член $\frac{a_m}{w^m}$ при $m > 1$. При этом получается координата $z = z_0$ точки ветвления. При $m = 1$ точка $z = z_0$ есть простой полюс $f(z)$. Число листов $T$ равно наибольшей степени полиномов, входящих в рациональную функцию (102). Многолистные плоскости, которые получаются не только указанным выше приемом, но и из более общих соображений, называются обычно римановыми поверхностями (Риман — немецкий математик середины XIX века).

Рассмотрим следующий пример многозначной функции:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{z} + 2}. \tag{104}$$

Многозначность этой функции проистекает лишь от наличия в ее выражении $\sqrt{z}$, и, следовательно, на двулистной плоскости $T$, которую мы построили выше, функция (104) однозначна. Она, как и функция (100), имеет точки разветвления $z = 0$ и $z = \infty$, а также полюс в одной из точек $z = 4$. Таких точек мы будем иметь две (на листах $T_1$ и $T_2$). На одном листе $\sqrt{4} = 2$, и на другом $\sqrt{4} = -2$,

и именно последняя точка будет полюсом функции (104). Если бы мы не пользовались двулистной плоскостью $T$ и совершали бы аналитическое продолжение функции (104), например, от точки $z=1$, считая $f(1)=\frac{1}{3}$, то мы приходили бы к различным значениям $f(z)$ в зависимости от пути продолжения. В частности, точка $z=4$ будет полюсом $f(z)$ при таком пути продолжения, который приводит $\sqrt{z}$ при $z=4$ к $(-2)$.

Функцию (104) можно рассматривать как функцию, обратную функции

$$z=\frac{(2w-1)^2}{w^2},$$

которая регулярна на всей расширенной плоскости, кроме точки $w=0$. Эта точка является полюсом второго порядка $\varphi(w)$, и она дает точку ветвления $z=\infty$ (первого порядка). Далее, $\varphi'\left(\frac{1}{2}\right)=0$ и точка $w=\frac{1}{2}$ дает вторую точку ветвления $z=0$. Точка $w=\infty$ дает точку $z=4$ на одном листе, и точка $w=\frac{1}{4}$ дает $z=4$ на другом листе.

Рассмотрим функцию вида

$$w=f(z)=\sqrt{(z-a)(z-b)}. \tag{105}$$

Для этой функции точками разветвления будут точки $a$ и $b$. Обход по замкнутому контуру вокруг одной из этих точек будет менять знак у выражения (105), но одновременный обход вокруг обеих этих точек $a$ и $b$ оставляет функцию неизменной. Действительно, положим

$$z-a=\rho_1 e^{i\varphi_1}; \quad z-b=\rho_2 e^{i\varphi_2},$$

откуда

$$f(z)=\sqrt{\rho_1\rho_2}\,e^{i\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}}.$$

Если мы обойдем по замкнутому контуру $l$ против часовой стрелки вокруг обеих точек, то к аргументам $\varphi_1$ и $\varphi_2$ добавится $2\pi$, сумма $(\varphi_1+\varphi_2)$ получит приращение $4\pi$, а аргумент выражения (105) получит приращение $2\pi$, т. е. функция не изменит своей величины. Чтобы сделать функцию (105) однозначной, нам достаточно провести разрез из точки $a$ в точку $b$. Такой разрез является как бы запрещением обходить в отдельности вокруг точек $a$ и $b$. Функция (105) имеет во всех точках, кроме $z=a$ и $b$, два значения, и, чтобы получить все значения этой функции, мы должны взять два экземпляра разрезанной вышеуказанным способом плоскости. На каждом из них (105) будет однозначной функцией, и значения этой функции на раз-

ных экземплярах будут отличаться друг от друга только знаком. Если мы наложим один экземпляр на другой и мысленно соединим берега разрезов крест-накрест, то получим двулистную риманову поверхность с точками разветвления $a$ и $b$ первого порядка, на которой функция (105) однозначна и регулярна (кроме точек разветвления). Бесконечно далекая точка не будет точкой разветвления, и в каждом листе будет своя бесконечно далекая точка. Вблизи этой бесконечно далекой точки мы можем переписать функцию (105) в виде

$$f(z)=\pm z\left(1-\frac{a}{z}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{b}{z}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Разлагая разности по биному Ньютона, что возможно, ибо в окрестности бесконечно далекой точки $\left|\frac{a}{z}\right|$ и $\left|\frac{b}{z}\right|$ меньше единицы, мы получим для нашей функции следующее представление в окрестности бесконечно далекой точки:

$$f(z)=\pm z\left(1-\frac{1}{2}\frac{a}{z}-\frac{1}{2\cdot 4}\frac{a^2}{z^2}-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{a^3}{z^3}-\dots\right)\times$$
$$\times\left(1-\frac{1}{2}\frac{b}{z}-\frac{1}{2\cdot 4}\frac{b^2}{z^2}-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{b^3}{z^3}-\dots\right),$$

т. е., перемножая ряды, увидим, что бесконечно далекая точка на обоих листах будет полюсом первого порядка.

Отметим, что, решая уравнение (105) относительно $z$, мы получим многозначную функцию $w$, т. е. функция (105) не является обратной функцией от функции, однозначной на всей плоскости. Ее риманова поверхность, на которой она однозначна, имеет две точки разветвления, $z=a$ и $z=b$, первого порядка. Можно получить эту риманову поверхность при помощи преобразования

$$z=\frac{bw^2-a}{w^2-1}$$

на плоскости $w$, и функция, обратная написанной,

$$w=\sqrt{\frac{z-a}{z-b}},$$

будет иметь ту же риманову поверхность, что и функция (105).

Рассмотрим функцию

$$f(z)=\sqrt[n]{z-a}, \tag{106}$$

где $n$ — некоторое целое положительное число. Для этой функции всякий обход вокруг $z=a$ меняет значение функции, и, лишь совершив $n$ обходов вокруг $z=a$ в одном и том же направлении, мы вернемся к исходному значению функции, т. е. для функции (106)

точка $a$ будет точкой разветвления $n-1$-го порядка. Действительно, обозначая через $\rho$ и $\varphi$ модуль и аргумент $z-a$, получим

$$\sqrt[n]{z-a}=\sqrt[n]{\rho}\,e^{i\frac{\varphi}{n}}.$$

Совершив $n$ раз обход вокруг $z=a$ в положительном направлении, мы добавим к $\varphi$ слагаемое $2n\pi$, и, следовательно, аргумент

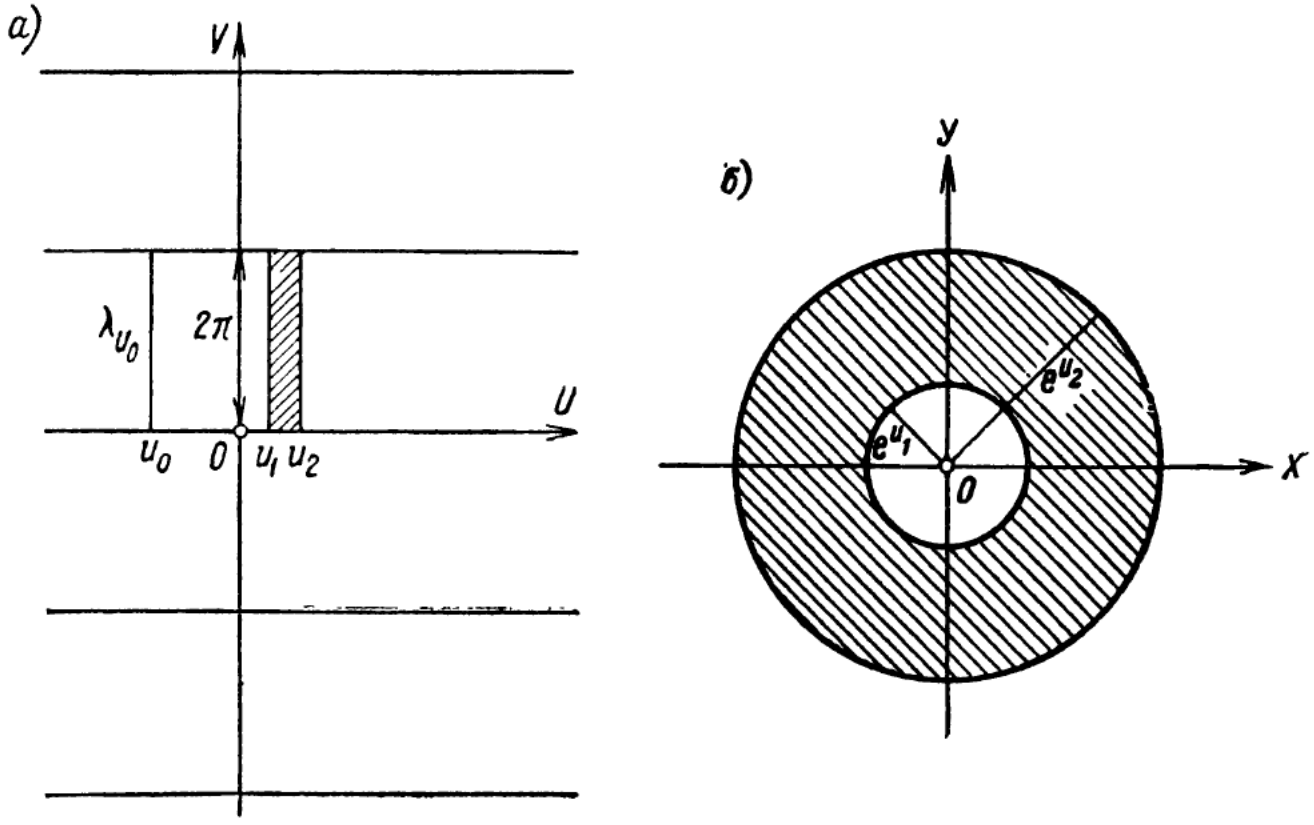



Рис. 17.

$\sqrt[n]{z-a}$ получит приращение $2\pi$, от чего значение функции не изменится.

Перейдем теперь к рассмотрению другой важной в теории функций многозначной функции, а именно логарифма. Эта функция получается в результате обращения показательной функции

$$z=e^{w}. \tag{107}$$

Выясним сначала некоторые свойства показательной функции. Нетрудно видеть, что она имеет *чисто мнимый период* $2\pi i$. Действительно:

$$e^{w+2\pi i}=e^{w}e^{2\pi i}=e^{w}(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)=e^{w}.$$

Разделим всю плоскость $w=u+iv$ на полосы, шириною $2\pi$ прямыми, параллельными вещественной оси (рис. 17, *а*). За исходную полосу возьмем, например, полосу $U_0$, ограниченную прямыми $v=0$ и $v=2\pi$. Мы можем перевести эту основную полосу в любую другую, добавляя к $w$ слагаемые вида $2n\pi i$, где $n$ — некоторое целое число. При этом в силу указанной периодичности значения функции

(107) не будут меняться, т. е. значения этой функции в каждой из полос будут такими же, что и в основной полосе. Посмотрим теперь, во что преобразует функция (107) эту основную полосу. Проведем в этой полосе отрезок $\lambda_{u_0}$, параллельный мнимой оси, с абсциссой $u = u_0$. Вдоль этого отрезка будем иметь

$$u = u_0 \qquad (0 \leqslant v \leqslant 2\pi)$$

и, следовательно,

$$e^w = e^{u_0} e^{iv} \quad (0 \leqslant v \leqslant 2\pi),$$

т. е. наш отрезок перейдет в полную окружность с центром в начале и радиусом $e^{u_0}$, причем концам этого отрезка $\lambda_{u_0}$ будет соответствовать одна и та же точка окружности. Если мы возьмем часть полосы $U_0$, заключенную между двумя отрезками, параллельными оси $u = 0$, с абсциссами $u = u_1$ и $u_2$, то в результате преобразования (107) получим на плоскости $z$ круговое кольцо с центром в начале и радиусами $e^{u_1}$ и $e^{u_2}$ (рис. 17, *б*). Окончательно вся полоса $U_0$ перейдет в плоскость $z$ с исключенным началом координат. Верхняя и нижняя границы полосы перейдут в положительную часть вещественной оси. Совершим разрез вдоль этой части вещественной оси. Мы можем тогда сказать, что верхний берег этого разреза соответствует нижней границе полосы, а нижний — верхней границе полосы. Обозначим через $T_1$ плоскость с исключенным началом и проведенным нами разрезом. В этой области $T_1$ функция, обратная (107):

$$w = \ln z, \tag{108}$$

будет однозначной и регулярной, и ее производная будет определяться по обычному правилу дифференцирования обратных функций:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{(e^w)'} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}. \tag{109}$$

Как известно, мы имеем

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z.$$

При аналитическом продолжении этой функции вдоль некоторого контура мы должны следить за непрерывным изменением аргумента $\arg z$.

В построенной нами области $T_1$ изменение аргумента ограничено пределами $0 \leqslant \arg z \leqslant 2\pi$, и мы получаем однозначное определение для функции (108). Точка $z = 0$ является, очевидно, точкой разветвления нашей функции (108), а именно: совершая аналитическое продолжение этой функции по замкнутому контуру вокруг начала и обходя это начало $n$ раз против часовой стрелки, мы добавим к функции (108) слагаемое $2n\pi i$, и всякий новый обход будет нам давать новые значения функции, т. е. в данном случае точка $z = 0$ является *точкой разветвления бесконечного порядка.*

Обратим внимание на бесконечно далекие точки плоскостей $z$ и $w$. Функция (107) имеет точку $w=\infty$ существенно особой точкой, и она не определена в этой точке, а для функции (108) точка $z=\infty$ есть точка разветвления бесконечного порядка. Значение $z=\infty$ не принадлежит области значений $e^w$, и точка $z=\infty$ не принадлежит бесконечнолистной плоскости функции $\ln z$. Совершенно аналогично предыдущему можно рассмотреть функцию $\ln(z-a)$, имеющую точки разветвления $z=a$ и $z=\infty$ бесконечного порядка.

Рассмотрим еще функцию

$$w=\ln\frac{z-b}{z-a}=\ln(z-b)-\ln(z-a), \tag{110}$$

имеющую точки разветвления $z=a$ и $z=b$. Если описать замкнутый контур, содержащий $z=a$ и $z=b$ внутри, то уменьшаемое и вычитаемое написанной выше разности получат одно и то же слагаемое, разность не изменится, т. е. точка $z=\infty$ не будет точкой разветвления функции (110). Если мы перепишем функцию (110) в виде

$$w=\ln\left(1-\frac{b}{z}\right)-\ln\left(1-\frac{a}{z}\right),$$

то при $|z|>\rho$, где $\rho$ — наибольшее из чисел $|a|$ и $|b|$, мы можем разложить оба логарифма по формуле (80) и получим

$$w=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b^k-a^k}{kz^k}. \tag{111}$$

Эта формула дает одну из ветвей нашей многозначной функции в окрестности $z=\infty$. Остальные ветви $w$ получаются добавлением к (111) слагаемого $2n\pi i$, где $n$ — любое целое число ($n\neq 0$). При любом фиксированном $n$ мы получим другую ветвь $w$. Рассмотренная функция будет однозначной на плоскости с прямолинейным разрезом, соединяющим точки $z=a$ и $z=b$, и точка $z=\infty$ будет на такой плоскости регулярной точкой функции $w$, причем мы фиксируем в окрестности $z=\infty$ для $w$, например, разложение (111). Если образовать, пользуясь указанным выше разрезом $ab$, бесконечнолистную плоскость так же, как это мы делали для функции $\ln z$, пользуясь разрезом $0\leqslant z<\infty$, то на полученной бесконечнолистной плоскости функция (110) будет однозначной, к каждому листу будет принадлежать точка $z=\infty$ и в окрестности этой точки мы будем иметь разложение (111) с добавлением слагаемого $2n\pi i$, причем целое число $n$ различно на различных листах. Как указано выше, на исходном листе мы приняли $n=0$. При всяком целом фиксированном $n$ мы получим некоторую другую ветвь нашей функции.

Рассмотрим еще функцию

$$w = \operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i} \ln \frac{i - z}{i + z},$$

имеющую точки разветвления $z = i$ и $z = -i$ бесконечного порядка. Для производной этой функции мы, как и в случае вещественного переменного, будем иметь

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{1 + z^2}$$

или

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{1}{(i + z)(i - z)}.$$

**20. Особые точки аналитических функций и римановы поверхности.** В предыдущем пункте мы разобрали ряд примеров многозначных функций и построили соответствующие им римановы поверхности, на которых они однозначны. Рассмотрим соответствующие вопросы в общем случае. Мы не будем при этом за недостатком места входить в детали и ограничимся общими указаниями. Предварительно выясним понятие об изолированной особой точке при аналитическом продолжении.

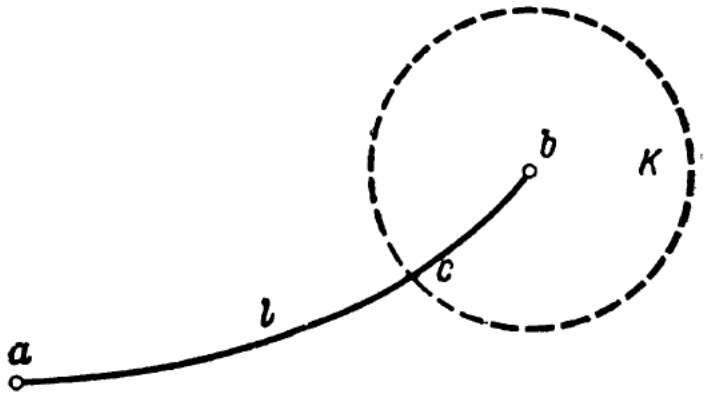


Рис. 18.

Пусть в точке $z = a$ задан начальный элемент аналитической функции $f(z)$, который мы затем продолжаем вдоль линии $l$. Положим, что аналитическое продолжение возможно до точки $z = b$ исключительно, но не дальше, так что точка $z = b$ является особой точкой при аналитическом продолжении вдоль $l$ [18]. Пусть существует круг $K$ с центром $z = b$ такой, что элементы функции $f(z)$, соответствующие точкам участка $cb$ линии $l$ (рис. 18), лежащего внутри $K$, можно аналитически продолжать вдоль любой линии, лежащей внутри $K$ и не проходящей через точку $z = b$. В этом случае точка $z = b$ называется *изолированной особой точкой* $f(z)$ (соответствующей пути $l$). Упомянутое аналитическое продолжение по всевозможным линиям внутри $K$ может привести к однозначной или многозначной функции внутри $K$. В первом случае полученная однозначная внутри $K$ функция будет регулярной везде внутри $K$, кроме $z = b$, будет разлагаться в ряд Лорана по целым степеням $(z - b)$, и точка $z = b$ будет или полюсом или существенно особой точкой нашей аналитической функции $f(z)$ (при аналитическом продолжении вдоль $l$). Во втором случае, при многозначности получаемой внутри $K$ функции, точка $z = b$ называется *точкой разветвления*. Положим,

что при всевозможных аналитических продолжениях внутри $K$ мы получаем в некоторой точке $z=\alpha$ внутри $K$ конечное число различных элементов. Обозначим это число через $m$. Нетрудно видеть, что в любой другой точке $z=\beta$, принадлежащей $K$, мы получим тоже $m$ различных элементов. Это непосредственно следует из того, что при аналитическом продолжении из $\alpha$ в $\beta$ или из $\beta$ в $\alpha$ различных исходных элементов по одному и тому же пути в конечной точке получаются различные элементы. В рассматриваемом случае точка $z=b$ называется *точкой разветвления порядка* $(m-1)$. Если число различных элементов, получаемых при аналитическом продолжении внутри $K$, в каждой точке $K$ не конечно, то $z=b$ называется *точкой разветвления бесконечного порядка.*

Рассмотрим подробнее случай точки разветвления конечного порядка $(m-1)$. По условию аналитическое продолжение внутри $K$ выполнимо, исключая точку $z=b$. Такой круг $K$ с исключенной точкой $z=b$ есть двусвязная область. Возьмем $m$ экземпляров круга $K$ и разрежем каждый из этих экземпляров вдоль одного и того же радиуса. Такой разрезанный вдоль радиуса круг $K_1$ будет односвязной областью. Возьмем внутри каждого экземпляра $K_1$ одну и ту же точку $z=\alpha$. Мы имеем в этой точке $m$ элементов нашей аналитической функции. Возьмем в каждом экземпляре в точке $z=\alpha$ определенный элемент и будем его аналитически продолжать внутри $K_1$. По теореме однозначности [18] получим в каждом экземпляре определенную однозначную функцию. Будем называть один из берегов разреза в каждом экземпляре левым, а другой — правым. Например, назовем правым берегом такой берег, что из его точек можно попасть на левый берег, двигаясь внутри $K_1$ и обходя $z=b$ против часовой стрелки. Возьмем некоторый экземпляр круга $K_1$ с определенной на нем однозначной функцией. Назовем этот экземпляр первым, а определенную на нем однозначную функцию обозначим через $f_1(z)$. Значения $f_1(z)$ на левом берегу разреза будут совпадать со значениями нашей функции на правом берегу разреза в некотором другом экземпляре $K_1$. Назовем этот последний экземпляр $K_1$ вторым, а определенную на нем функцию обозначим через $f_2(z)$. Соединим мысленно левый берег первого экземпляра с правым берегом второго. Значения $f_2(z)$ на левом берегу второго экземпляра будут совпадать со значениями нашей функции на правом берегу разреза в некотором другом экземпляре $K_1$. Назовем этот экземпляр третьим, а определенную на нем функцию обозначим через $f_3(z)$. Соединим мысленно левый берег второго экземпляра с правым берегом третьего экземпляра. Продолжая так и дальше, дойдем до последнего экземпляра с номером $m$. Нетрудно видеть, что значения $f_m(z)$ на левом берегу этого $m$-го экземпляра должны совпадать со значениями $f_1(z)$ на правом берегу первого экземпляра. Соединим мысленно эти два берега. Таким образом мы получим $m$-листный круг $L$ с точкой

разветвления $z=b$ порядка $(m-1)$. Эта точка считается совпадающей на всех экземплярах. На $m$-листном круге наша функция будет однозначной и регулярной везде за исключением точки $z=b$. Введем вместо $z$ новую независимую переменную

$$z'=\sqrt[m]{z-b}=\sqrt[m]{\rho}\,e^{i\frac{\varphi}{m}}, \tag{112}$$

где $\rho=|z-b|$ и $\varphi=\arg(z-b)$, причем $\varphi$ фиксировано определенным образом в некоторой точке $L$. Точка $z=b$ перейдет в $z'=0$. Общее изменение аргумента на $L$ при обходе $z=b$ равно $2\pi m$, а при обходе $z'=0$ общее изменение аргумента будет $2\pi$. Круг $L$, имеющий $m$ листов, перейдет на плоскости $z'$ в однолистный круг $C$ с центром $z'=0$ и радиусом $\sqrt[m]{R}$, где $R$ есть радиус $L$. В этом однолистном круге $C$ наша функция будет однозначной и регулярной, кроме, может быть, точки $z'=0$. Следовательно, она будет разлагаться внутри $C$ в ряд Лорана:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n z'^n,$$

или, если вернуться к прежней переменной:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n\left(\sqrt[m]{z-b}\right)^n=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-b)^{\frac{n}{m}}, \tag{113}$$

т. е. в окрестности точки разветвления порядка $(m-1)$ функция разлагается по целым степеням аргумента (112). Можно произвольным, но определенным образом фиксировать значение аргумента (112) в некоторой точке $z$ из окрестности точки $z=b$. Могут представиться различные случаи в отношении разложения (113). Может случиться, что в этом разложении вовсе не будет членов с отрицательными значениями $n$:

$$f(z)=a_0+a_1\sqrt[m]{z-b}+a_2\left(\sqrt[m]{z-b}\right)^2+\ldots$$

При этом, очевидно, $f(z)\to a_0$ при $z\to b$, причем $z$ может стремиться к $b$ любым образом, оставаясь лишь в $L$. В рассматриваемом случае полагаем $f(b)=a_0$ и назовем $z=b$ *точкой разветвления регулярного типа*. Если разложение (113) содержит лишь конечное число членов с отрицательными значениями $n$, то $f(z)\to\infty$ при $z\to b$. В этом случае полагаем $f(b)=\infty$ и называем $z=b$ *точкой разветвления полярного типа*. Если разложение (113) содержит бесчисленное множество членов с отрицательными значениями $n$, то назовем $z=b$ *точкой разветвления существенно особого типа*.

Все предыдущие определения можно перенести и на бесконечно далекую точку. Положим, что совершается аналитическое продолжение

$f(z)$ вдоль контура $l$ и существует такая окрестность $K(|z|>R)$ бесконечно далекой точки (рис. 19), что элементы функции $f(z)$, соответствующие точкам дуги $l$, принадлежащей $K$, можно аналитически продолжать по любому пути, лежащему внутри $K$. Если это аналитическое продолжение дает однозначную функцию, то точка $z=\infty$ будет или регулярной точкой для $f(z)$, или полюсом, или существенно особой точкой [10]. При многозначности упомянутого аналитического продолжения $z=\infty$ называют точкой разветвления. Если эта точка разветвления будет конечного порядка $(m-1)$, то в ее окрестности будет иметь место разложение

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\left(\frac{1}{\sqrt[m]{z}}\right)^n=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^{-\frac{n}{m}},$$

причем дословно можно повторить все, что сказано выше о таком разложении. Характер точки $z=\infty$ может зависеть, конечно, от того пути аналитического продолжения $l$, которым мы приходим в окрестность бесконечно далекой точки.

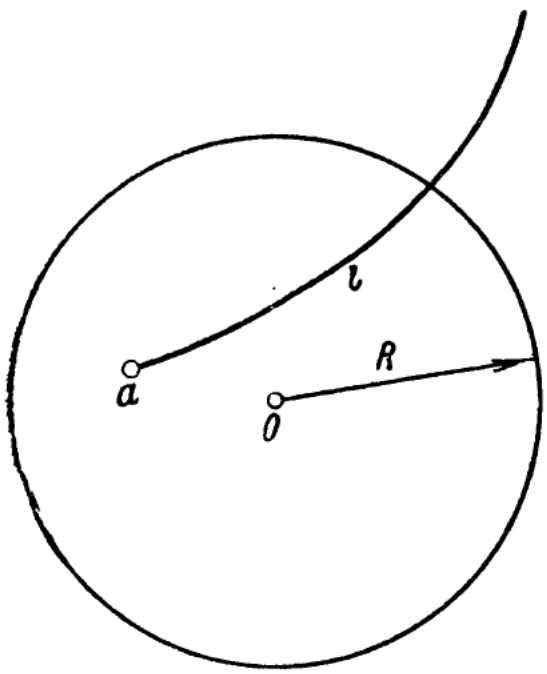


Рис. 19.

Выясним теперь в основных чертах понятие римановой поверхности для данной многозначной аналитической функции $f(z)$. Положим, что при аналитическом продолжении исходного элемента мы пришли в некоторую точку $z=\alpha$. Мы будем иметь в этой точке некоторый элемент, т. е. ряд, расположенный по целым положительным степеням $(z-\alpha)$. Этот ряд может быть перестроен по целым положительным степеням $(z-\beta)$, где $\beta$ — любая точка из окрестности точки $z=\alpha$, т. е. элемент в точке $z=\alpha$ дает и элементы во всех точках, достаточно близких к $\alpha$. Каждому такому элементу мы сопоставляем точку $z$, являющуюся центром соответственного круга сходимости степенного ряда (элемента). Упомянутому элементу с центром $z=\alpha$ мы сопоставляем именно эту точку $\alpha$. Тем элементам, которые из него получаются в близких точках $z=\beta$, мы сопоставляем точки $z=\beta$, принадлежащие окрестности $z=\alpha$. Совершая аналитическое продолжение, мы получаем все новые и новые элементы, а тем самым — все новые и новые точки $z$ римановой поверхности. Если при возвращении в точку $z=\alpha$ получится элемент функции, который уже имелся раньше, то мы отождествим ее с прежней точкой $z=\alpha$. Если же при аналитическом продолжении при возвращении в точку $z=\alpha$ получим аналитический элемент (ряд, расположенный по целым

неотрицательным степеням $(z-a)$), отличный от исходного, то полученная точка $z=a$ считается отличной от исходной. Значения функции и ее нескольких последовательных производных могут и совпадать в этих точках $z=a$. Речь идет о различии ряда Тейлора, рассматриваемого в целом. Как мы указывали выше, можно совершать аналитическое продолжение через полюс и бесконечно далекую точку. На полученной таким образом римановой поверхности полученная аналитическим продолжением функция однозначна. К этой поверхности причисляют полюсы и точки разветвления конечного порядка регулярного или полярного типа. В этих последних точках функция имеет определенное конечное или бесконечное значение.

Кратко говоря, аналитическое продолжение создает риманову поверхность. Полная полученная таким образом поверхность может состоять из бесчисленного множества листов. Заметим, что риманова поверхность аналитической функции $f(z)$, естественно, не всегда может быть получена путем преобразования плоскости $w$ при помощи однозначной функции $z=\varphi(w)$, как это имело место в простейших примерах из [19].

Отметим, что мы лишь в самых общих чертах коснулись понятия римановой поверхности многозначной аналитической функции. Строгое изложение можно найти, например, в книгах: H. Weyl, Die Idee der Riemannschen Fläche; А. Гурвиц, Р. Курант, Теория функций, «Наука», 1968.

В заключение настоящего пункта обратим внимание на то, что при аналитическом продолжении особые точки могут быть и неизолированными. Например, может случиться, что исходный степенной ряд непродолжим, т. е. что всякая точка окружности его круга сходимости является особой точкой. Примером такого непродолжимого степенного ряда является ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!} = z + z^{1\cdot 2} + z^{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots,$$

радиус сходимости которого равен единице.

**21. Теорема вычетов.** Вернемся опять к разложению функции в ряд Лорана вблизи особой точки (полюса или существенно особой). В таком разложении мы выделили особо коэффициент при $(z-b)^{-1}$ и дали ему особое название вычета функции в рассматриваемой особой точке. Выясним роль этого коэффициента. Итак, пусть имеется в окрестности точки $b$ разложение

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z-b)^k.$$

Проинтегрируем написанную формулу по какому-либо небольшому замкнутому контуру $l_0$, окружающему точку $b$, на котором написанное разложение равномерно сходится:

$$\int_{l_0} f(z)\,dz = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \int_{l_0} (z-b)^k dz.$$

Как мы видели выше [6], все интегралы, стоящие справа, будут равны нулю, кроме одного, соответствующего случаю $k=-1$, и этот интеграл будет равен $2\pi i$, т. е. мы имеем

$$\int_{l_0} f(z)\,dz = a_{-1}\cdot 2\pi i.$$

Рассмотрим теперь более общий случай. Положим, что $f(z)$ регулярна в некоторой замкнутой области $B$ с контуром $l$, за исключением конечного числа точек $b_1, \ldots, b_m$, лежащих внутри области и являющихся для функции полюсами или существенно особыми точками. Обозначим через $a_{-1}^{(s)}$ $(s=1, \ldots, m)$ вычеты в этих особых точках. Выделим каждую из особых точек небольшим замкнутым контуром $l_s$. Согласно теореме Коши можем написать

$$\int_l f(z)\,dz = \sum_{s=1}^{m} \int_{l_s} f(z)\,dz.$$

Но, как мы видели выше, величина интеграла по каждому из контуров $l_s$ равна $a_{-1}^{(s)}\cdot 2\pi i$, и, следовательно, предыдущее равенство выражает нам величину интеграла по контуру области через вычеты функции в особых точках, лежащих внутри области:

$$\int_l f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{s=1}^{m} a_{-1}^{(s)}. \qquad (114)$$

Теорема вычетов. *Если функция регулярна в замкнутой области, за исключением конечного числа точек, лежащих внутри области (полюсы или существенно особые точки), то интеграл от функции по контуру области равен произведению $2\pi i$ на сумму вычетов в указанных особых точках.*

В дальнейшем мы будем иметь многочисленные применения этой теоремы. Пока установим только некоторые теоретические следствия из доказанной теоремы, необходимые нам в дальнейшем. Прежде всего дадим практические правила вычисления вычета, не пользуясь разложением функции в ряд Лорана.

В качестве первого примера возьмем функцию, имеющую вид

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}, \qquad (115)$$

где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ регулярны в точке $b$ и $\psi(b)=0$, так что функция (115) имеет, вообще говоря, в точке $b$ полюс. Положим, кроме того, что $z=b$ является простым корнем $\psi(z)$, т. е. что разложение в ряд Тейлора функции $\psi(z)$ начинается с члена первой степени:

$$\psi(z)=c_1(z-b)+c_2(z-b)^2+\ldots \qquad (c_1\neq 0).$$

При этом функция (115) будет иметь простой полюс (первой кратности) и вблизи $z=b$:

$$f(z)=\frac{\varphi(b)+\frac{\varphi'(b)}{1!}(z-b)+\ldots}{(z-b)\,[c_1+c_2(z-b)+\ldots]}.$$

Из последней формулы непосредственно следует, что для вычета $a_{-1}$ можно написать

$$a_{-1}=f(z)(z-b)\,|_{z=b}=\frac{\varphi(b)}{c_1}$$

или, принимая во внимание, что $c_1$ равно $\psi'(b)$,

$$a_{-1}=\frac{\varphi(b)}{\psi'(b)}. \tag{116}$$

В качестве второго примера рассмотрим случай, когда функция $f(z)$ имеет в точке $b$ полюс любого порядка $m$:

$$f(z)=\sum_{k=-m}^{\infty} a_k(z-b)^k.$$

Произведение $f(z)(z-b)^m$ будет уже регулярной функцией в точке $b$, и коэффициент $a_{-1}$ будет для этого произведения коэффициентом при $(z-b)^{m-1}$, откуда, вспоминая выражение коэффициентов в ряде Тейлора, будем иметь для вычета нашей функции следующее выражение:

$$a_{-1}=\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[f(z)(z-b)^m]\,|_{z=b}. \tag{117}$$

Рассмотрим еще один пример. Положим, что $f(z)$ имеет в точке $b$ корень порядка $m$, т. е. ряд Тейлора нашей функции с центром $b$ начинается с члена, содержащего $(z-b)^m$. При этом наша функция будет иметь вблизи точки $b$ представление

$$f(z)=(z-b)^m\varphi(z) \qquad (\varphi(b)\neq 0), \tag{118}$$

где $\varphi(z)$ регулярна в $b$ и отлична от нуля. Составим *логарифмическую производную нашей функции:*

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{m}{z-b}+\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}. \tag{119}$$

Отсюда непосредственно видно, что точка $b$ является простым полюсом для логарифмической производной, с вычетом, равным порядку

корня самой функции $f(z)$. Если в точке $b$ наша функция $f(z)$ имеет не корень, а полюс кратности $m$, то точно так же имеет место формула (118), но в ней $m$ следует заменить на $(-m)$ и все последующие вычисления также сохраняются, т. е. если в некоторой точке функция имеет полюс некоторой кратности $n$, то ее логарифмическая производная имеет в этой точке простой полюс с вычетом $(-n)$.

**22. Теоремы о числе корней.** Положим, что $f(z)$ регулярна в замкнутой области $B$ с контуром $l$ и на контуре не обращается в нуль. Пусть внутри области она имеет корни $b_1, \ldots, b_m$, кратности $k_1, \ldots, k_m$. Ее логарифмическая производная будет иметь в этих точках $b_s$ простые полюсы с вычетом $k_s$, и теорема вычетов дает нам

$$\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = k_1 + k_2 + \ldots + k_m. \tag{120}$$

Если считать всякий кратный корень столько раз, сколько единиц в его кратности, то стоящая справа сумма дает общее число корней нашей функции внутри области, т. е. при наших предположениях относительно функции $f(z)$ *интеграл, стоящий слева, дает число корней функции, заключающихся внутри контура $l$.*

Подинтегральная функция в этом интеграле имеет, очевидно, первообразную функцию $\ln f(z)$, и мы получим величину интеграла, определив приращение этой первообразной функции, которое она получает при обходе контура $l$. При этом нужно рассматривать однозначную ветвь этой функции, что сводится, как мы знаем, к тому, чтобы при обходе контура $l$ следить за непрерывным изменением аргумента $f(z)$, причем

$$\ln f(z) = \ln|f(z)| + i \arg f(z).$$

После обхода контура $\ln|f(z)|$ вернется к прежнему значению и никакого приращения не получит, и, следовательно, общее приращение нашей первообразной функции будет равно произведению $i$ на приращение, получаемое аргументом $\arg f(z)$. Согласно формуле (120), мы должны еще разделить приращение первообразной функции на $2\pi i$ и получаем окончательно следующий результат:

Теорема Коши. *Если $f(z)$ регулярна в замкнутой области $B$ и отлична от нуля на контуре $l$ этой области, то число корней этой функции внутри области равно изменению аргумента функции при обходе контура, деленному на $2\pi$, или, иначе говоря, равно упомянутому изменению аргумента, выраженному в долях $2\pi$.*

Доказанная теорема представляется совершенно очевидной для случая полиномов. Возьмем для примера полином третьей степени и

представим его в виде, разложенном на множители первой степени:

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 = a_3 (z - b_1)(z - b_2)(z - b_3).$$

Положим, что корни $b_1$ и $b_2$ находятся внутри контура $l$, а корень $b_3$ — вне этого контура $l$. Всякой разности $(z - b_k)$ соответствует вектор, идущий из $b_k$ в $z$. При обходе точкой $z$ контура $l$ аргументы векторов $(z - b_1)$ и $(z - b_2)$ получат, очевидно, приращение $2\pi$, а аргумент вектора $(z - b_3)$ не изменится. Таким образом, общее приращение аргумента для функции будет $4\pi$ (аргумент произведения равен сумме аргументов сомножителей), или в долях $2\pi$ это приращение будет равно 2, т. е. как раз числу корней внутри $l$.

Установим еще одну теорему, касающуюся числа корней регулярной функции и являющуюся непосредственным следствием теоремы Коши. Пусть, как и раньше, $f(z)$ регулярна в замкнутой области и на контуре отлична от нуля. Положим, что имеется еще функция $\varphi(z)$, регулярная в замкнутой области, значение которой на контуре $l$ по модулю меньше значений $f(z)$, т. е.

$$|\varphi(z)| < |f(z)| \text{ на } l. \tag{121}$$

Заметим, что при наличии этого условия $f(z)$ не может, очевидно, обращаться в нуль на $l$. Будем рассматривать две функции:

$$f(z) \text{ и } f(z) + \varphi(z). \tag{122}$$

Обе они удовлетворяют условиям теоремы Коши. Для первой из них это уже указано, а что касается второй, то она не может на контуре обращаться в нуль в силу условия (121). Покажем, что вторая из функций (122) имеет внутри контура столько же корней, сколько и первая. Для этого рассмотрим аргумент этой функции на контуре, причем будем помнить, что на этом контуре $f(z) \neq 0$:

$$\arg [f(z) + \varphi(z)] = \arg f(z) + \arg \left[ 1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)} \right].$$

Для доказательства нашего утверждения достаточно показать, что при обходе контура $l$ изменение аргумента

$$\arg \left[ 1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)} \right] \tag{123}$$

будет равно нулю. Согласно условию (121), на контуре $l$ дробь $\frac{\varphi(z)}{f(z)}$ будет по модулю меньше единицы, и, следовательно, при обходе контура $l$ переменная точка

$$z' = 1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)}$$

будет все время заключаться внутри окружности $C$ с центром в точке $z' = 1$ и радиусом единица. Эта переменная точка опишет некоторую замкнутую кривую, находящуюся внутри окружности $C$ и не

обходящую, очевидно, вокруг начала координат. Мы видим таким образом, что, действительно, изменение аргумента выражения (123) будет равно нулю.

Теорема Руше. *Если $f(z)$ регулярна в замкнутой области с контуром $l$ и $\varphi(z)$ также регулярна в замкнутой области и на контуре $l$ удовлетворяет условию* (121), *то функции $f(z)$ и $f(z)+\varphi(z)$ имеют внутри области одинаковое число корней.*

Заметим, что из этой теоремы Руше непосредственно вытекает *основная теорема алгебры* о том, что всякий полином степени $n$

$$a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n \qquad (a_n\neq 0) \tag{124}$$

имеет на плоскости ровно $n$ корней. Действительно, положим в данном случае $f(z)=a_nz^n$ и $\varphi(z)=a_0+a_1z+\ldots+a_{n-1}z^{n-1}$. На всякой окружности с центром в начале и с достаточно большим радиусом мы будем иметь, очевидно, $|\varphi(z)|<|f(z)|$, так как степень полинома $\varphi(z)$ ниже степени полинома $f(z)$. В силу теоремы Руше полином (124) будет иметь внутри такой окружности столько же корней, сколько их имеется у полинома $f(z)=a_nz^n$, а последний полином имеет в начале $z=0$ корень кратности $n$.

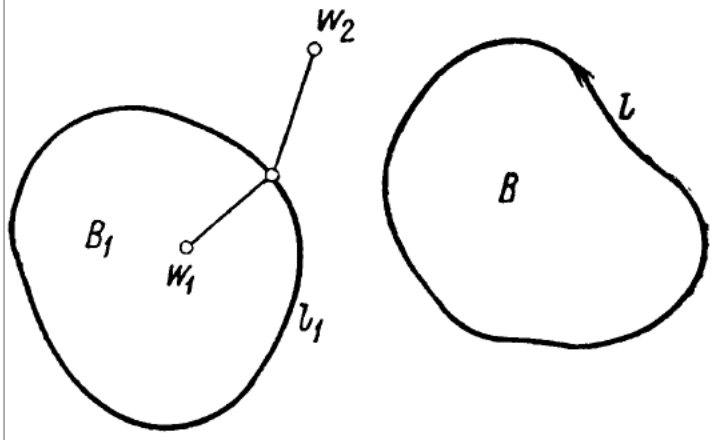


Рис. 20.

Укажем еще на одно следствие теоремы Коши, которое играет важную роль в теории конформного преобразования. Положим, что функция

$$w=f(z) \tag{125}$$

регулярна в замкнутой области и при обходе точкой $z$ контура $l$ точка $w$ описывает простой замкнутый контур $l_1$, который не пересекает сам себя (рис. 20). Покажем, что при таком условии функция (125) преобразует исходную область $B$ в область $B_1$, ограниченную контуром $l_1$. Возьмем некоторую точку $w_1$ внутри контура $l_1$ и некоторую точку $w_2$ вне контура $l_1$. Нам надо показать, что функция

$$F_1(z)=f(z)-w_1$$

имеет внутри области $B$ один корень, а функция

$$F_2(z)=f(z)-w_2$$

ни одного корня. При обходе точкой $z$ контура $l$ разности $f(z)-w_1=w-w_1$ будет соответствовать вектор, идущий из точки $w_1$ в переменную точку $w$ контура $l_1$. При этом мыслимы два случая: или точка $w$ описывает контур $l_1$ против часовой стрелки, или этот

обход совершается по часовой стрелке, причем точку $z$ мы заставляем описывать контур $l$ в положительном направлении, т. е. против часовой стрелки. В первом случае изменение аргумента функции $F_1(z)$ будет, очевидно, равно $2\pi$, и, следовательно, эта функция будет действительно иметь один корень внутри $l$. Во втором случае мы получили бы для изменения аргумента функции $F_1(z)$ отрицательное число $(-2\pi)$, и вышло бы, что функция $F_1(z)$ имеет внутри области минус один корень, что нелепо, ибо число корней должно быть равно нулю или целому положительному числу. Таким образом, второй случай встретиться не может, и при положительном обходе точкой $z$ контура $l$ и соответствующая точка $w$ должна описывать $l_1$ тоже в положительном направлении. Обращаемся теперь к функции $F_2(z)$. Соответствующий вектор, идущий из $w_2$ в переменную точку $w$ контура $l_1$, при обходе этого контура не получит никакого приращения аргумента, и, следовательно, действительно функция $F_2(z)$ не будет иметь корней внутри $l$. Мы приходим, таким образом, к следующей теореме: если $f(z)$ регулярна в замкнутой области $B$ с контуром $l$ и преобразует $l$ в простой замкнутый контур $l_1$, который не пересекает сам себя, то при положительном обходе контура $l$ контур $l_1$ также обходится в положительном направлении, и *функция $f(z)$ преобразует область $B$ в часть плоскости, ограниченную контуром $l_1$.*

Мы получили теорему Коши, рассматривая интеграл, стоящий в левой части формулы (120), в предположении, что $f(z)$ регулярна в замкнутой области и на контуре отлична от нуля. Предположим теперь, что $f(z)$ имеет внутри области конечное число полюсов, а в остальном регулярна и на контуре регулярна и отлична от нуля. При этом, как мы видели, подинтегральная функция будет иметь внутри области простые полюсы в корнях функции $f(z)$ с вычетом, равным кратности корня, и в полюсах функции $f(z)$ — с вычетом, равным минус кратность полюса. Применяя к интегралу основную теорему о вычетах, будем иметь в рассматриваемом случае вместо формулы (120)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = m - n, \tag{126}$$

где $m$ — общее число корней и $n$ — общее число полюсов нашей функции внутри области. Положим, что корни находятся в точках $b_1, \ldots, b_m$, а полюсы — в точках $c_1, c_2 \ldots, c_n$, причем кратные корни и полюсы считаются несколько раз. Нетрудно доказать, пользуясь основной теоремой вычетов, следующую формулу:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_l z\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = (b_1 + b_2 + \ldots + b_m) - (c_1 + c_2 + \ldots + c_n), \tag{127}$$

т. е. интеграл, стоящий слева, выражает разность между суммой координат корней и суммой координат полюсов. Действительно,

например в случае корня $b$ кратности $k$ мы имеем вблизи этой точки разложение

$$z\frac{f'(z)}{f(z)} = [b+(z-b)]\left[\frac{k}{z-b} + a_0 + a_1(z-b)+\dots\right],$$

откуда непосредственно следует, что вычет в этой точке равен $kb$. Аналогично рассуждение и для полюса.

Сделаем в заключение некоторое добавление к предыдущей теореме о конформном преобразовании области в область. Пусть нам известно, что $f(z)$ имеет внутри области $B$ один простой полюс, т. е. в формуле (126) $n=1$, и что $f(z)$ переводит контур $l$ в простой замкнутый контур, не пересекающий сам себя, но положительному обходу контура $l$ соответствует отрицательный обход по контуру $l_1$. Обратимся вновь к рассмотрению функций $F_1(z)$ и $F_2(z)$. Обе они имеют внутри области тот же простой полюс, что и $f(z)$. Для первой из них изменение аргумента, выраженное в долях $2\pi$, будет равно минус единице, но, с другой стороны, согласно формуле (126), это изменение аргумента должно давать разность между числом корней и числом полюсов, причем по условию функция имеет один полюс. Отсюда непосредственно следует, что функция $F_1(z)$ не имеет ни одного корня. Наоборот, изменение аргумента функции $F_2(z)$ при обходе точкой $z$ контура $l$ будет равно нулю, т. е. разность числа корней и полюсов у этой функции будет равна нулю. Но эта функция имеет один полюс, а следовательно, она имеет и один корень. Таким образом, в рассматриваемом случае функция $f(z)$ преобразует часть плоскости, находящуюся внутри контура $l$, в часть плоскости, находящуюся вне контура $l_1$, причем полюс $f(z)$ переходит в бесконечно далекую точку.

**23. Обращение степенного ряда.** Мы применим сейчас теорему Руше для исследования функции, обратной степенному ряду

$$w = a_0 + a_1(z-b) + a_2(z-b)^2 + \dots = F(z). \qquad (128)$$

Будем сначала считать, что коэффициент $a_1$ отличен от нуля, т. е. что $F'(b) \neq 0$. При значениях $z$, близких к $b$, мы будем получать значения $w$, близкие к $a_0$. Покажем, что в рассматриваемом случае некоторая окрестность точки $b$ перейдет в однолистную окрестность точки $a_0$, содержащую эту точку внутри себя. Из этого, между прочим, будет непосредственно следовать, что функция, обратная (128), будет однозначной и регулярной в окрестности точки $a_0$ и будет, следовательно, разлагаться в ряд Тейлора по степеням $(w-a_0)$.

Функция

$$f(z) = a_1(z-b) + a_2(z-b)^2 + \dots$$

имеет в точке $b$ простой корень и в некоторой окрестности этой точки наверно отлична от нуля [18]. Пусть $K$ — такой круг с центром $b$, в котором функция $f(z)$ регулярна и имеет единственный корень $z=b$. На окружности $C$ этого круга $|f(z)|$ в нуль не обращается, и существует такое положительное число $m$, что на этой окружности $|f(z)|>m$. Пусть далее $K_1$ есть круг на плоскости $w$ с центром $a_0$ и радиусом $\rho$, меньшим числа $m$. Возьмем некоторую фиксированную точку $w_0$, принадлежащую этому кругу.

Мы имеем, следовательно, $|a_0-w_0|\leqslant\rho<m$, т. е. на окружности $C$ круга $K$ имеем $|a_0-w_0|<|f(z)|$, так как $|f(z)|>m$ на $C$. Согласно теореме Руше, функция

$$a_0-w_0+f(z)=a_0+f(z)-w_0=F(z)-w_0$$

имеет внутри круга $K$ столько же корней, что и функция $f(z)$, т. е. один корень. Иначе говоря, значения $w=F(z)$ покроют однолистно круг $K_1$, когда $z$ меняется в некоторой окрестности точки $z=b$, т. е. однолистному кругу $K_1$ плоскости $w$ будет соответствовать на плоскости некоторая, вообще говоря, не круговая окрестность точки $z=b$ (содержащая точку $z=b$ внутри себя). Наше утверждение, таким образом, доказано, т. е. *если в ряде* (128) *коэффициент* $a_1\neq 0$, *то окрестность точки* $z=b$ *переходит в однолистную окрестность* $w=a_0$, *и обращение ряда* (128) *при* $w$, *близких к* $w=a_0$, *имеет вид*

$$z=b+\sum_{n=1}^{\infty}c_n(w-a_0)^n. \tag{129}$$

Перейдем теперь к рассмотрению того случая, когда в ряде (128) несколько первых коэффициентов обращаются в нуль:

$$w-a_0=a_m(z-b)^m+a_{m+1}(z-b)^{m+1}+ \\ +a_{m+2}(z-b)^{m+2}+\ldots \quad (a_m\neq 0), \tag{130}$$

т. е.

$$w-a_0=a_m(z-b)^m\left[1+\frac{a_{m+1}}{a_m}(z-b)+\frac{a_{m+2}}{a_m}(z-b)^2+\ldots\right].$$

Рассмотрим корень $m$-й степени из последнего множителя справа:

$$\left\{1+\left[\frac{a_{m+1}}{a_m}(z-b)+\frac{a_{m+2}}{a_m}(z-b)^2+\ldots\right]\right\}^{\frac{1}{m}},$$

причем мы берем то значение этого корня (степени с показателем $\frac{1}{m}$), которое равно единице при $z=b$. Существует такое положительное число $\rho$, что при $|z-b|\leqslant\rho$ степенной ряд, стоящий в квадратной скобке, сходится и его сумма по модулю меньше некоторого

наперед фиксированного числа $q$, меньшего единицы. При этом ко всей фигурной скобке в степени $\frac{1}{m}$ можно применить формулу бинома Ньютона:

$$\left\{1+\left[\quad\right]\right\}^{\frac{1}{m}}=1+\frac{1}{m}\left[\quad\right]+\frac{\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)}{2!}\left[\quad\right]^2+\ldots$$

При $|z-b|<\rho$ члены этого ряда — регулярные функции и ряд сходится равномерно, ибо модуль квадратной скобки меньше числа $q$, где $0<q<1$. Пользуясь теоремой Вейерштрасса [12], получим

$$\left\{1+\left[\frac{a_{m+1}}{a_m}(z-b)+\frac{a_{m+2}}{a_m}(z-b)^2+\ldots\right]\right\}^{\frac{1}{m}}=$$
$$=1+c_1(z-b)+c_2(z-b)^2+\ldots,$$

где $|z-b|<\rho$, и можно переписать (130) в виде

$$w-a_0=\left\{\sqrt[m]{a_m}(z-b)\left[1+c_1(z-b)+c_2(z-b)^2+\ldots\right]\right\}^m,$$

где $\sqrt[m]{a_m}$ — какое-либо фиксированное значение корня, или

$$w-a_0=\left[d_1(z-b)+d_2(z-b)^2+\ldots\right]^m, \tag{131}$$

где $d_1=\sqrt[m]{a_m}\neq 0$ и $d_k=\sqrt[m]{a_m}\,c_{k-1}$ $(k>1)$.

Функция

$$w'=d_1(z-b)+d_2(z-b)^2+\ldots \qquad (d_1\neq 0)$$

преобразует однолистную окрестность точки $z=b$ в однолистную окрестность точки $w'=0$, и при этом преобразовании углы в точке $z=b$ не меняются. Преобразование (131) может быть записано в виде $w-a_0=w'^m$, откуда следует, что при преобразовании (131) или, что то же, *при преобразовании* (130) *окрестность точки* $z=b$ *переходит в* $m$*-листную окрестность точки* $w=a_0$ *и углы в точке* $z=b$ *при этом преобразовании в точке* $w=a_0$ *увеличиваются в* $m$ *раз.* Формула (131) равносильна формуле

$$w'=\sqrt[m]{w-a_0}=d_1(z-b)+d_2(z-b)^2+\ldots \qquad (d_1\neq 0;\ |z-b|<\rho), \tag{132}$$

где слева надо брать все значения корня. Формула $w'=\sqrt[m]{w-a_0}$ $m$-листную окрестность точки $w=a_0$ преобразует в однолистную окрестность $w'=0$. В силу доказанного выше обращение степенного ряда (132) имеет вид

$$z=b+\sum_{n=1}^{\infty}e_n w'^n \qquad (e_1\neq 0)$$

или, возвращаясь к переменной $w$, получаем обращение степенного ряда (130) в виде

$$z = b + \sum_{n=1}^{\infty} e_n \left(\sqrt[m]{w - a_0}\right)^n \qquad (e_1 \neq 0), \tag{133}$$

и справа надо брать все значения корня.

Выше рассмотрен случай, когда точки $z$ и $w$ находятся на конечном расстоянии. Аналогичные результаты получаются и в том случае, когда одна из точек или обе находятся на бесконечности. Положим, например, $b = \infty$ и $a_0$ — на конечном расстоянии. Вместо (130) будем иметь разложение

$$w - a_0 = \frac{a_m}{z^m} + \frac{a_{m+1}}{z^{m+1}} + \ldots \qquad (m > 1;\ a_m \neq 0). \tag{134}$$

При этом однолистная окрестность точки $z = \infty$ переходит в $m$-листную окрестность точки $w = a_0$, и обращение ряда (134) имеет вид

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n}{\left(\sqrt[m]{w - a_0}\right)^n} \qquad (e_1 \neq 0). \tag{135}$$

В случае $w = \infty$ и $z$ — на конечном расстоянии функция имеет полюс в точке $z = b$:

$$w = \frac{a_{-m}}{(z-b)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-b)^{m-1}} + \ldots + \frac{a_{-1}}{z-b} + a_0 + a_1(z-b) + \ldots \tag{136}$$
$$(m > 0;\ a_{-m} \neq 0).$$

Однолистная окрестность $z = b$ переходит в $m$-листную окрестность $w = \infty$, и обращение ряда имеет вид

$$z - b = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n}{\left(\sqrt[m]{w}\right)^n} \qquad (e_1 \neq 0).$$

Если $z$ и $w$ находятся на бесконечности, то $w$ имеет при $z = \infty$ полюс:

$$w = a_{-m}z^m + a_{-m+1}z^{m-1} + \ldots + a_1 z + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}, \tag{137}$$

а обращение имеет вид

$$z = e_{-1}\sqrt[m]{w} + \sum_{n=0}^{\infty} e_n \left(\sqrt[m]{w}\right)^{-n} \qquad (e_{-1} \neq 0).$$

**24. Принцип симметрии.** В [18] было определено аналитическое продолжение из области $B_1$ в новую область $B_2$ для того случая, когда эта новая область налегала на первоначальную, причем в общем

случае не было дано никакого практического способа, как действительно осуществлять это аналитическое продолжение. Теперь укажем на одну из возможностей осуществить аналитическое продолжение в частном случае, причем в этом частном случае новая область будет не налегать на старую, но лишь соприкасаться со старой областью вдоль некоторого контура. Предварительно мы должны доказать одну вспомогательную теорему.

Теорема Римана. *Если $f_1(z)$ регулярна с одной стороны от дуги кривой $L$ и на самой этой кривой, а $f_2(z)$ обладает тем же свойством по другую сторону от кривой, и значения этих функций на самой дуге $L$ совпадают, то эти две функции совместно определяют единую регулярную функцию в области, содержащей упомянутую дугу внутри себя, или, иначе говоря, $f_2(z)$ является аналитическим продолжением $f_1(z)$.*

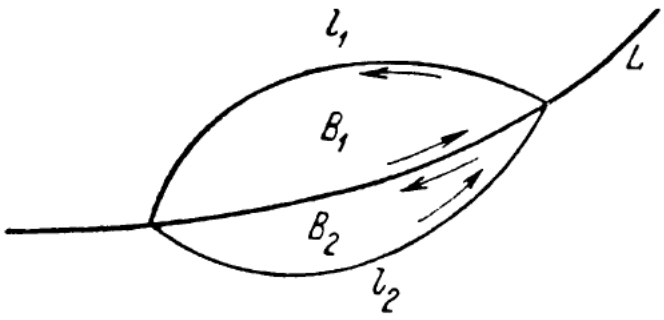


Рис. 21.

Проведем контуры $l_1$ и $l_2$ с общими концами на $L$, из которых первый лежит в области регулярности функции $f_1(z)$, а второй — в области регулярности функции $f_2(z)$, так что в областях $B_1$ и $B_2$, ограниченных замкнутыми контурами $l_1$ и $L$ и $l_2$ и $L$, наши функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ регулярны (рис. 21). Возьмем некоторую точку $z$ внутри $B_1$. Она будет лежать вне $B_2$, и мы, следовательно, можем написать [7]

$$f_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_1+L}\frac{f_1(z')}{z'-z}\,dz',$$

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_2+L}\frac{f_2(z')}{z'-z}\,dz'.$$

Если мы сложим эти два равенства, то в правой части нам придется два раза интегрировать по дуге $L$ в противоположных направлениях, причем подинтегральные функции при обоих интегрированиях будут одинаковыми, так как на указанной дуге значения $f_1(z')$ и $f_2(z')$ по условию совпадают. Таким образом, эти два интеграла взаимно сократятся и останутся лишь интегралы по дугам $l_1$ и $l_2$. Для сокращения обозначим через $f(z')$ функцию, равную $f_1(z')$ на дуге $l_1$ и равную $f_2(z')$ на дуге $l_2$. Складывая предыдущие равенства, будем иметь

$$f_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_1+l_2}\frac{f(z')}{z'-z}\,dz'.$$

Совершенно так же, беря точку $z$ в области $B_2$, мы получили бы

$$f_2(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_1+l_2}\frac{f(z')}{z'-z}\,dz',$$

т. е. наши функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ выражаются одним и тем же интегралом типа Коши по замкнутому контуру $(l_1+l_2)$. Следовательно, первая из этих функций из области $B_1$ аналитически продолжима в область $B_2$, а вторая из $B_2$ — в $B_1$, и в результате этого аналитического продолжения они создают единую аналитическую функцию, что и доказывает теорему Римана.

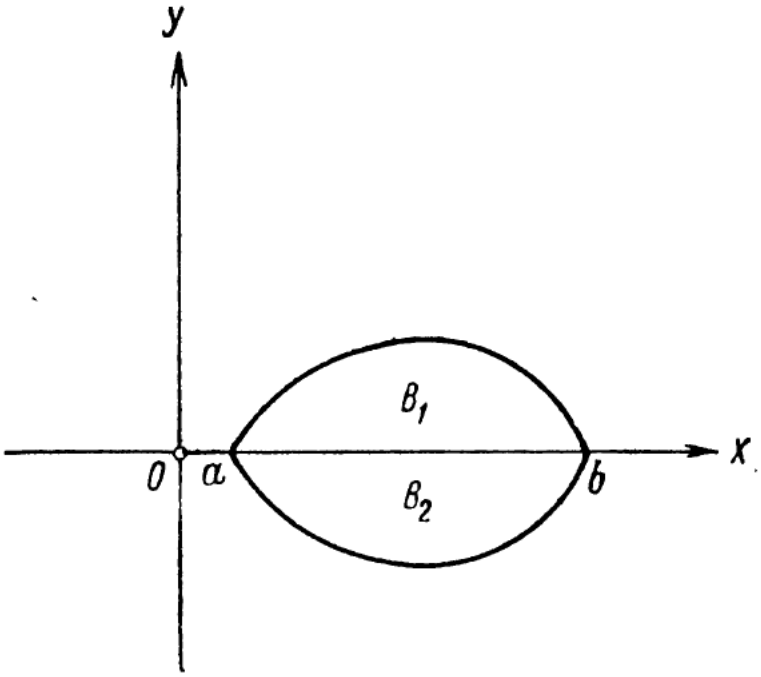


Рис. 22.

Заметим, что в предыдущем доказательстве мы пользовались формулой Коши, которая справедлива и для того случая, когда функция не регулярна на контуре, но лишь непрерывна в замкнутой области и регулярна внутри. Таким образом, в условии теоремы Римана мы не обязаны считать данные функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ регулярными на самой дуге. Достаточно лишь, чтобы $f_1(z)$ была регулярна с одной стороны дуги $L$ и непрерывна вплоть до самой дуги и то же для $f_2(z)$ с другой стороны дуги, причем значения этих функций на самой дуге $L$ должны совпадать. При этом теорема Римана доказывает возможность аналитического продолжения каждой из этих функций через дугу и тот факт, что одна из этих функций осуществляет это аналитическое продолжение для другой.

Переходим теперь к установлению принципа симметрии.

Принцип симметрии. *Если $f_1(z)$ регулярна с одной стороны от некоторого отрезка $(a, b)$ вещественной оси и непрерывна вплоть до этого отрезка, причем на самом отрезке ее значения вещественны, то эта функция аналитически продолжима через упомянутый отрезок, и в точках, симметричных относительно вещественной оси, эта функция будет иметь комплексные сопряженные значения.*

Положим для определенности, что наша функция $f_1(z)$ регулярна в некоторой области $B_1$, примыкающей к отрезку $(a, b)$ и лежащей над этим отрезком (рис. 22). Построим область $B_2$, симметричную с $B_1$ относительно вещественной оси, и определим в этой области функцию $f_2(z)$ по следующему правилу: положим, что в каждой

точке $A_2$ области $B_2$ функция $f_2(z)$ имеет значение комплексное, сопряженное с тем значением, которое данная функция $f_1(z)$ имеет в симметричной относительно вещественной оси точке $A_1$. Эти симметричные точки имеют, очевидно, комплексные сопряженные координаты и, обозначая, как всегда, через $\bar{\alpha}$ комплексное число, сопряженное с $\alpha$, мы можем написать определение нашей функции $f_2(z)$ в области $B_2$ в виде

$$f_2(z) = \overline{f_1(\bar{z})}.$$

Эта вновь построенная функция будет регулярной в области $B_2$. Действительно, для нее приращения независимого переменного $\Delta z$ и функции $\Delta w$ будут величинами комплексными, сопряженными с аналогичными величинами для функции $f_1(z)$ в симметричной точке. То же можно сказать и про отношение этих приращений. Следовательно, это отношение для функции $f_2(z)$ стремится к определенному пределу, равному величине комплексной сопряженной с аналогичным пределом для $f_1(z)$, т. е. к пределу, равному $\overline{f'(\bar{z})}$, и, следовательно, функция $f_2(z)$ будет регулярной в области $B_2$. На самом отрезке $(a, b)$ значения $f_2(z)$ совпадают со значениями $f_1(z)$, так как на этом отрезке значения $f_1(z)$ вещественны. Таким образом, $f_2(z)$ является, согласно теореме Римана, аналитическим продолжением $f_1(z)$ через отрезок, что и доказывает принцип симметрии.

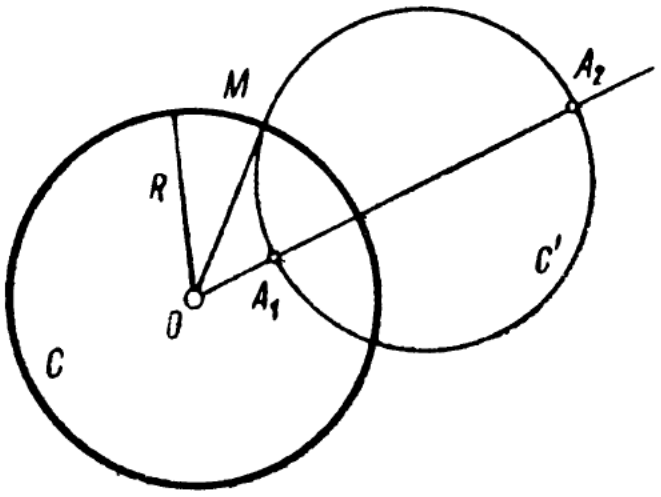


Рис. 23.

Мы можем формулировать принцип симметрии и геометрически, а именно: если $f_1(z)$ регулярна с одной стороны отрезка $(a, b)$ вещественной оси и преобразует этот отрезок тоже в отрезок вещественной оси, то она аналитически продолжима через этот отрезок и точки, симметричные относительно вещественной оси, преобразует в точки, тоже симметричные относительно вещественной оси. Можно формулировать принцип симметрии более общим образом, вводя понятие *о точках, симметричных относительно окружности*, а именно назовем две точки симметричными относительно окружности, если эти две точки находятся на одном и том же радиусе окружности (одна на самом радиусе, а другая на его продолжении), причем произведение расстояний этих точек до центра окружности равно квадрату радиуса этой окружности (рис. 23).

Пусть $A_1$ и $A_2$ — две точки, симметричные относительно окружности $C$. Проведем через эти две точки какую-нибудь окружность $C'$, и пусть $M$ — одна из точек пересечения $C'$ с окружностью $C$.

Принимая во внимание, что произведение секущей $\overline{OA_2}$ на ее внешнюю часть $\overline{OA_1}$ должно равняться квадрату касательной и, с другой стороны, по определению это произведение должно равняться квадрату радиуса $\overline{OM^2}$, мы можем утверждать, что радиус $\overline{OM}$ является касательной к окружности $C'$, т. е. окружность $C'$ ортогональна к окружности $C$. Отсюда нетрудно видеть, что и для двух точек $A_1$ и $A_2$, симметричных относительно окружности $C$, характерным является то обстоятельство, что всякая окружность, проходящая через них, будет ортогональна с $C$, или, иначе говоря, *пучок окружностей, проходящих через точки, симметричные относительно окружности $C$, будет состоять из окружностей, ортогональных к $C$.* Таким же характерным свойством обладают и две точки, симметричные

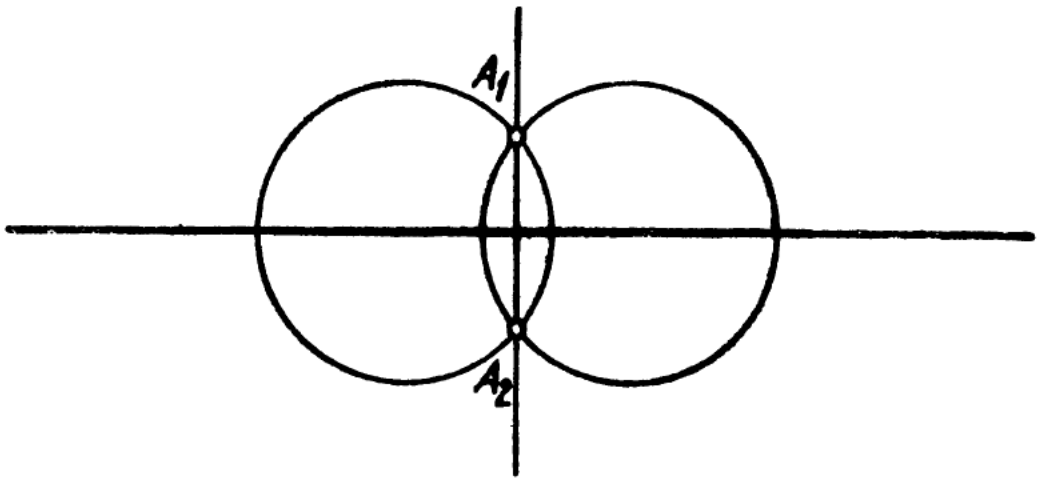



Рис. 24.

относительно прямой, а именно: *пучок окружностей, проходящих через эти две точки, будет состоять из окружностей, ортогональных к прямой* (рис. 24).

Принцип симметрии в общем виде читается так: если $f_1(z)$ регулярна с одной стороны некоторой дуги $(a, b)$ окружности $C_1$, непрерывна вплоть до этой дуги и преобразует эту дугу также в некоторую дугу другой окружности $C_2$, то $f_1(z)$ аналитически продолжима за дугу $(a, b)$, и точки, симметричные относительно окружности $C_1$, она преобразует в точки, симметричные относительно окружности $C_2$. В этой формулировке принципа симметрии мы можем понимать под словом «окружность» как окружность в собственном смысле этого слова, так и прямую линию.

Доказательство этой общей формулировки принципа симметрии будет нами дано в начале следующей главы.

**25. Ряд Тейлора на окружности круга сходимости.** Рассмотрим ряд Тейлора

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-b)^k \qquad (138)$$

с радиусом сходимости $R$. Полагая $z-b=\rho e^{i\varphi}$, можем написать ряд (138) в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \rho^k e^{ik\varphi} \tag{139}$$

или

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (\cos k\varphi + i \sin k\varphi) \rho^k.$$

Этот ряд по условию будет сходящимся при $\rho < R$. Что же касается $\rho = R$, т. е. самой окружности круга сходимости, то в этом случае ничего определенного сказать о сходимости нельзя. Если мы возьмем, например, ряд

$$1 + z + z^2 + \ldots \tag{140}$$

с радиусом сходимости $R=1$, то на самой окружности круга сходимости, т. е. при $|z|=1$, модули всех членов ряда будут равны единице, и ряд будет, очевидно, расходиться на всей окружности круга сходимости. В качестве противоположного примера рассмотрим ряд

$$1 + \frac{z}{1^2} + \frac{z^2}{2^2} + \ldots \tag{141}$$

Для этого ряда отношение модулей последующего члена к предыдущему будет

$$\left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)^2}\right| : \left|\frac{z^n}{n^2}\right| = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 |z|,$$

и это отношение будет стремиться к $|z|$, а следовательно, в силу признака Даламбера, радиус сходимости этого ряда будет также единица. Подставляя $z=e^{i\varphi}$, получим ряд, модули членов которого будут равны положительным числам $\frac{1}{n^2}$, образующим сходящийся ряд, т. е. ряд (141) сходится абсолютно и равномерно не только внутри круга сходимости, но и во всем замкнутом круге, включая его окружность. Мы видим, таким образом, что в вопросе сходимости степенного ряда на окружности круга сходимости обстоятельства могут быть весьма разнообразными.

Выше мы видели, что дифференцирование и интегрирование степенного ряда не меняют круга сходимости. Но эти операции могут весьма существенным образом сказаться на сходимости этого ряда на контуре круга сходимости. Так, например, интегрируя два раза ряд (140), получим ряд

$$\frac{z^2}{1\cdot 2} + \frac{z^3}{2\cdot 3} + \frac{z^4}{3\cdot 4} + \ldots,$$

который, как и ряд (141), абсолютно и равномерно сходится во всем замкнутом круге.

Отметим одну теорему, которая касается суммы степенного ряда, если он сходится на окружности круга сходимости. Совершенно аналогичную теорему для случая вещественного переменного мы доказали раньше [**I, 149**] и здесь мы не будем останавливаться на доказательстве и формулируем лишь результат.

Вторая теорема Абеля. *Если степенной ряд* (138) *сходится в некоторой точке* $z-b=Re^{i\varphi_0}$ *окружности круга сходимости, то он сходится равномерно на всем радиусе* $\arg(z-b)=\varphi_0$. Отсюда непосредственно следует, что сумма ряда есть непрерывная функция на всем упомянутом радиусе, т. е. что значение суммы ряда в точке окружности $Re^{i\varphi_0}$ равно пределу, к которому стремятся внутренние значения суммы ряда при приближении к точке $Re^{i\varphi_0}$ изнутри по радиусу. На этой теореме основано простое определение сумм некоторых тригонометрических рядов.

Рассмотрим один пример. Заменим в разложении

$$\ln(1+z)=\frac{z}{1}-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\dots$$

$z$ на $(-z)$ и вычтем полученный ряд из предыдущего. Таким образом получится разложение

$$\ln\frac{1+z}{1-z}=2\left(\frac{z}{1}+\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}+\dots\right) \tag{142}$$

с кругом сходимости $|z|<1$. Положим в этом разложении $z=e^{i\varphi}$ и отделим вещественную часть от мнимой:

$$2\left(\frac{\cos\varphi}{1}+\frac{\cos 3\varphi}{3}+\frac{\cos 5\varphi}{5}+\dots\right)+$$

$$+i2\left(\frac{\sin\varphi}{1}+\frac{\sin 3\varphi}{3}+\frac{\sin 5\varphi}{5}+\dots\right).$$

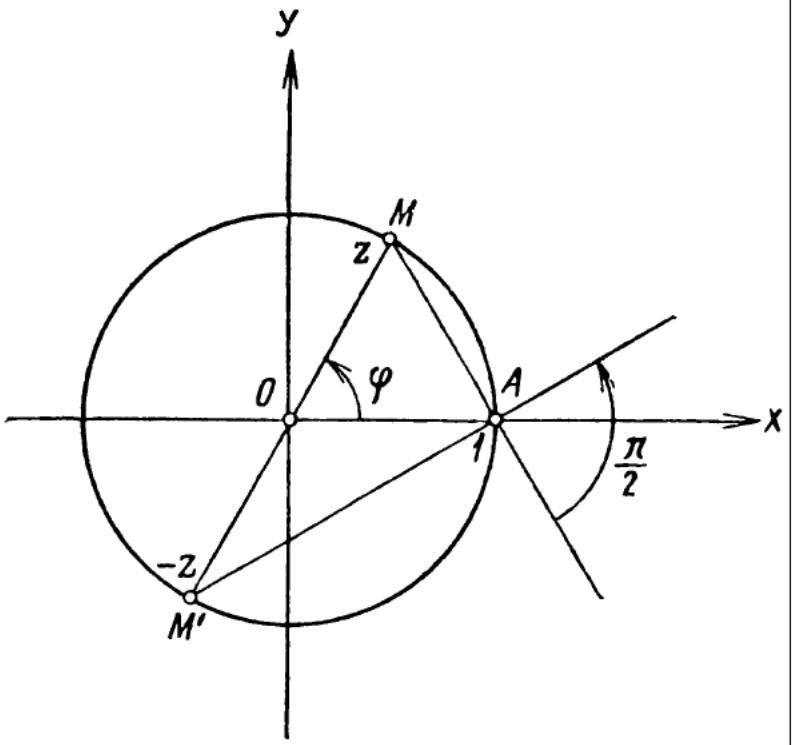



Рис. 25.

Можно показать, на чем мы не останавливаемся, что оба написанных тригонометрических ряда сходятся, если $\varphi$ отлично от $k\pi$ ($k=0,\pm1,\pm2,\dots$). Определим суммы этих рядов, исходя из формулы

$$\ln\frac{1+z}{1-z}=\ln\frac{|1+z|}{|1-z|}+i\arg\frac{1+z}{1-z}.$$

Из рис. 25 непосредственно получаем при $z=e^{i\varphi}$

$$|1+z|=\text{дл. } M'A=2\cos\frac{\varphi}{2},$$

$$|1-z|=\text{дл. } MA=2\sin\frac{\varphi}{2} \qquad (0<\varphi<\pi).$$

Аргумент дроби $\frac{1+z}{1-z}$ равен углу, образованному вектором $\overline{M'A}$ с вектором $\overline{MA}$, причем при $z=0$ (векторы $\overline{M'A}$ и $\overline{MA}$ совпадают с вектором $OA$) сумма ряда (142) равна нулю и упомянутый угол надо считать равным нулю. При $M \to e^{i\varphi}$ точка $M'$ стремится к $(-e^{i\varphi})$, и при совпадении $M$ с $e^{i\varphi}$ указанный угол равен $\frac{\pi}{2}$ (он опирается на диаметр). Мы определили, таким образом, сумму вышенаписанных рядов:

$$\ln \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = 2\left(\frac{\cos\varphi}{1} + \frac{\cos 3\varphi}{3} + \ldots\right)$$
$$\frac{\pi}{2} = 2\left(\frac{\sin\varphi}{1} + \frac{\sin 3\varphi}{3} + \ldots\right). \qquad (0 < \varphi < \pi),$$

Отметим еще одно обстоятельство, связанное с представлением тригонометрического ряда в виде (139). Отделим у коэффициентов $a_k$ вещественную и мнимую части: $a_k = \alpha_k - i\beta_k$. Подставляя в формулу (139) и отделяя у всей суммы вещественную и мнимую части, мы получим формулу вида

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_k \cos k\varphi + \beta_k \sin k\varphi)\,\rho^k + i\sum_{k=0}^{\infty} (-\beta_k \cos k\varphi + \alpha_k \sin k\varphi)\,\rho^k. \qquad (143)$$

Второй тригонометрический ряд отличается от первого лишь тем, что коэффициенты при $\cos k\varphi$ и $\sin k\varphi$ переставлены, причем у коэффициента, который стоял при $\sin k\varphi$, изменен знак. Обычно второй тригонометрический ряд называется *сопряженным с первым.*

**26. Дополнительные сведения о формуле Коши.** Используя интеграл Лебега, можно получить простые законченные результаты о предельных значениях функций, регулярных в некоторой области, на границе $l$ этой области, и об условиях применимости формулы Коши. Напомним и уточним понятия, связанные с границей. В [5] мы определили простую замкнутую кривую. Если в параметрическом представлении такой кривой ограничиться лишь предположением в непрерывности функций $x(t)$ и $y(t)$, то соответствующая кривая называется замкнутой кривой Жордана. Строго доказывается, что такая кривая $l$ является границей двух областей плоскости, из которых одна лежит внутри и другая вне $l$. Мы будем сейчас предполагать, что $l$ есть гладкая кривая, так что ее уравнение может быть записано в виде $x = x(s)$, $y = y(s)$, где $s$ — длина дуги $l$, отсчитываемая от некоторой фиксированной точки вдоль $l$ [4]. Если $\omega(z')$ есть какая-либо функция, заданная на $l$, то ее можно рассматривать, как функцию $\omega[x(s) + iy(s)]$ от $s$, заданную на промежутке $0 \leqslant s \leqslant L$, где $L$ — длина $l$. Контурный интеграл по $l$ сводится к интегралу по $s$:

$$\int_l \omega(z')\,dz' = \int_0^L \omega[x(s) + iy(s)]\,[x'(s) + iy'(s)]\,ds, \qquad (144)$$

где

$$|x'(s) + iy'(s)| = \sqrt{x'^2(s) + y'^2(s)} = 1. \qquad (145)$$

Отделяя в $\omega[x(s)+iy(s)]$ вещественную и мнимую части: $\omega(z')=u(s)+iv(s)$, мы получим два вещественных интеграла, и интеграл (144) будет иметь смысл, если $u(s)$ и $v(s)$ измеримы и суммируемы на промежутке $0\leqslant s\leqslant L$. Отметим, что $x'(s)$ и $y'(s)$ по условию непрерывны и в силу сказанного выше удовлетворяют неравенствам $|x'(s)|\leqslant 1$ и $|y'(s)|\leqslant 1$. Таким образом, при сделанных выше предположениях мы определили контурный интеграл (144) по $l$. Сказанное, естественно, сохраняется и в случае незамкнутых кривых. Это относится, в частности, и к интегралам типа Коши. Пусть $B$ — область, находящаяся внутри замкнутой кривой $l$, и $f(z)$ — функция, регулярная внутри $B$. Определим строго понятие предельного значения $f(z)$ в какой-либо точке $z_0'$ на $l$. Кратко говоря, речь будет идти о том, что при определении предельного значения мы должны исключить стремление $z$ к $z_0'$ из $B$ по путям, касательным к $l$ в точке $z_0'$. Пусть $n_0$ — направление внутренней нормали к $l$ в точке $z_0'$, т. е. то направление, которое в окрестности $z_0'$ принадлежит $B$. Пусть $\hat{\alpha}$ — угол, с вершиной $z_0'$, растворения меньше $\pi$, биссектрисой которого является внутренняя нормаль $n_0$. Если $f(z)$ имеет определенный предел при стремлении $z$ к $z_0'$ во всех углах указанного типа, то этот предел $f(z_0')$ называют обычно угловым предельным значением $f(z)$ в точке границы $z_0'$.

Положим, что $f(z)$ имеет везде или «почти везде» на $l$ угловые предельные значения $f(z_0')$. Термин «почти везде» на $l$ обозначает почти везде на промежутке $0\leqslant s\leqslant L$. Напомним, что точкам $z'$ на $l$ соответствуют $s$ из указанного промежутка (значениям $s=0$ и $s=L$ соответствует одна и та же точка на $l$, что несущественно). Положим, далее, что эти предельные значения $f(z')=f[x(s)+iy(s)]$ — суммируемая функция по $s$ на промежутке $0\leqslant s\leqslant L$. При этом нельзя утверждать, что $f(z)$ выражается через свои предельные значения по формуле Коши. Для того чтобы это имело место, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\int_l f(z')\,z'^k dz'=0 \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{146}$$

Можно при этом исходить не от функции, регулярной внутри $B$, а от функции $f(z')$, заданной на $l$ и удовлетворяющей условиям (146). Сформулируем соответствующую теорему:

Теорема 1. *Если $l$ — гладкая кривая и $f(z')$ — заданная на $l$ суммируемая функция, то условия* (146) *необходимы и достаточны для того, чтобы существовала регулярная внутри $B$ функция $f(z)$, угловые предельные значения которой на $l$ совпадают почти везде на $l$ с $f(z')$ и которая представима формулой Коши*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{f(z')}{z'-z}\,dz' \qquad (z \text{ из } B). \tag{147}$$

Отметим, что при условиях (146) интеграл, стоящий в правой части формулы (147), равен нулю, если $z$ находится вне $B$. Условия (146) связаны с функцией $f(z')$, определенной на $l$. Естественно, возникает вопрос об условиях, накладываемых на значения регулярной внутри $B$ функции $f(z)$, при которых $f(z)$ имеет везде или почти везде на $l$ угловые предельные значения и выражается через них по формуле Коши (147). Достаточным условием этого является ограниченность $f(z)$ в $B$, т. е. существование такого числа $M>0$, что $|f(z)|\leqslant M$ для всех $z$ из $B$. В случае, если $B$ есть круг $|z|<1$, необходимое и достаточное условие состоит в ограниченности интегралов от $|f(z)|$ по концентрическим окружностям $|z|=r$ $(0<r<1)$, т. е. в существовании такого числа $M>0$, что

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|\,d\varphi\leqslant M$$

Можно доказать, что эти интегралы возрастают при возрастании $r$. Для любой области с гладкой границей имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Для того чтобы функция $f(z)$, регулярная внутри $B$, имела везде или почти везде на $l$ угловые предельные значения $f(z')$, суммируемые на $l$, и выражалась через них по формуле Коши, необходимо и достаточно существование внутри $B$ последовательности таких гладких замкнутых контуров $l_n$, стремящихся к $l$, что*

$$\int_{l_n} |f(z')|\,ds \leqslant M, \tag{148}$$

*где $M$ — определенное число* (не зависит от $n$).

Стремление $l_n$ к $l$ состоит в следующем: любая замкнутая область, лежащая внутри $B$, находится внутри всех $l_n$, начиная с некоторого номера $n$. В дальнейшем будет показано, что область $B$ может быть бесчисленным множеством способов конформно преобразована в круг $|z|<1$ единичного радиуса и в качестве линий $l_n$ можно брать линии, которые при каком-либо из указанных конформных преобразований переходят в окружности $|z|=r$ $(0<r<1)$. Если на таких линиях условие (148) не выполнено, то не существует последовательности $l_n$, на которой оно выполнено.

Выше мы предполагали, что граница $l$ — гладкая кривая. Достаточно предположить, что это — кусочно гладкая кривая [4]. При этом в отдельных точках может и не существовать касательной.

Гораздо более общим предположением, при котором все сказанное выше имеет место, является предположение, что $l$ есть спрямляемая кривая Жордана. Определим точно это понятие. Пусть $x=x(t)$, $y=y(t)$ — параметрическое представление замкнутой кривой Жордана и $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ — какая-либо часть всего промежутка $a \leqslant t \leqslant b$ (или весь этот промежуток), соответствующего параметрическому представлению. Промежутку $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ соответствует некоторая дуга $\lambda$ кривой $l$. Произведем какое-либо разбиение указанного промежутка на части:

$$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = \beta,$$

что даст некоторое разбиение дуги $\lambda$ на части. Проводя через точки деления ломаную, будем иметь для ее длины выражение

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} |z(t_{k+1}) - z(t_k)| \qquad (z(t_s) = x(t_s) + iy(t_s)).$$

Величина $\sigma$ зависит от способа разбиения промежутка. Если множество значений $\sigma$ при всевозможных способах разбиения имеет конечную точную верхнюю границу [I, 42], то эта граница называется длиной дуги $\lambda$. Если любая дуга $\lambda$ имеет в указанном смысле длину, то кривая $l$ называется спрямляемой кривой Жордана, и для нее в этом случае можно в качестве параметра взять длину дуги $s$, отсчитываемую от какой-либо ее определенной точки: $x=x(s)$, $y=y(s)$, как это мы делали для гладкой кривой. При этом почти везде на промежутке $0 \leqslant s \leqslant L$, где $L$ — длина всей кривой $l$, существуют производные $x'(s)$ и $y'(s)$, удовлетворяющие соотношению $x'^2(s)+y'^2(s)=1$. *Обе указанные выше теоремы имеют место и в том случае, когда $l$ — спрямляемая кривая Жордана.* Отметим, что мы рассмотрели лишь тот случай, когда область ограничена одной замкнутой кривой (односвязная область).

**27. Главное значение интеграла.** Мы переходим к исследованию предельных значений интеграла типа Коши. Предварительно нам надо ввести новое понятие в связи с интегралами от разрывных функций. Пусть $x=c$ —

некоторая точка, содержащаяся внутри конечного промежутка $(a, b)$, и $f(x)$ — некоторая функция, определенная в этом промежутке. Пусть далее интегралы

$$\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \tag{149}$$

существуют при любом $\varepsilon > 0$. Положим, например, что $f(x)$ непрерывна во всем промежутке $(a, b)$, кроме точки $x = c$, и становится неограниченной при приближении $x$ к $c$. Определение несобственного интеграла от $f(x)$ по промежутку $(a, b)$ сводится к следующему: если при $\varepsilon \to +0$ интегралы (149) стремятся к конечным пределам, то сумма этих пределов и называется интегралом от $f(x)$ по промежутку $(a, b)$ [I, 97]. Если этих пределов в отдельности для интегралов нет, но сумма этих интегралов при $\varepsilon \to +0$ стремится к конечному пределу, то этот предел

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \left[ \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \right]$$

называется главным значением интеграла от $f(x)$ по промежутку $(a, b)$:

$$\text{v. p.} \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \left[ \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \right], \tag{150}$$

где v. и p. — первые буквы французских слов valeur principale, что значит по-русски «главное значение».

В дальнейшем для сокращения письма мы не будем писать букв v. p. перед знаком интеграла. Характерным для определения (150) является тот факт, что в пределах интегралов, находящихся в правой части формулы, стоит одно и то же число $\varepsilon$, стремящееся к $(+0)$.

Совершенно аналогично определяется главное значение интеграла и в том случае, когда $f(x)$ имеет несколько точек разрыва непрерывности внутри промежутка. Если существует обычный несобственный интеграл от функции $f(x)$ по всему промежутку $(a, b)$ [I, 97], то главное значение интеграла (150) совпадает, очевидно, с этим несобственным интегралом. Из определения (150) непосредственно вытекает, что постоянный множитель можно выносить за знак интеграла и что интеграл от суммы конечного числа слагаемых равен сумме интегралов от отдельных слагаемых, причем предполагается, что интегралы от слагаемых существуют в смысле главного значения.

Приведем простейшие примеры главного значения интеграла. Рассмотрим интеграл

$$\int_a^b \frac{dt}{(t-x)^p}, \tag{151}$$

где $a < x < b$ и $p$ — некоторое целое положительное число

Если $p > 1$, то мы имеем

$$\int_a^{x-\varepsilon} \frac{dt}{(t-x)^p} + \int_{x+\varepsilon}^{b} \frac{dt}{(t-x)^p} =$$

$$= -\frac{1}{p-1} \left\{ \frac{1}{(b-x)^{p-1}} - \frac{1}{(a-x)^{p-1}} + [(-1)^{p-1} - 1] \frac{1}{\varepsilon^{p-1}} \right\}.$$

Если $p$ — четное, то в правой части последнее слагаемое будет $(-2)$: $\varepsilon^{p-1}$, и эта правая часть будет беспредельно возрастать при $\varepsilon \to (+0)$, и интеграл (151) не существует. Если же $p$ — нечетное число, то правая часть написанной формулы не будет содержать $\varepsilon$, и мы получим

$$\int_a^b \frac{dt}{(t-x)^p} = \frac{1}{1-p}\left[\frac{1}{(b-x)^{p-1}} - \frac{1}{(a-x)^{p-1}}\right] \quad (p \text{ — нечетное}).$$

При $p=1$ получим

$$\int_a^{x-\varepsilon} \frac{dt}{t-x} + \int_{x+\varepsilon}^b \frac{dt}{t-x} = \ln(x-t)\Big|_{t=a}^{t=x-\varepsilon} + \ln(t-x)\Big|_{t=x+\varepsilon}^{t=b} = \ln\frac{b-x}{x-a},$$

т. е.

$$\int_a^b \frac{dt}{t-x} = \ln\frac{b-x}{x-a}.$$

Будем говорить, что *функция* $\omega(x)$ *удовлетворяет в промежутке* $(a, b)$ *условию Липшица с показателем* $\alpha$, где $0 < \alpha \leqslant 1$, если для любых значений $x_1$ и $x_2$, принадлежащих упомянутому промежутку, выполнено условие

$$|\omega(x_2) - \omega(x_1)| \leqslant k\,|x_2 - x_1|^{\alpha}, \tag{152}$$

где $k$ — некоторая постоянная. Мы вводили раньше такое условие при $\alpha = 1$ и видели, что оно выполнено, если $\omega(x)$ имеет внутри промежутка ограниченную производную [II, 51]. Рассмотрим интеграл

$$f(x) = \int_a^b \frac{\omega(t)}{t-x}\,dt, \tag{153}$$

который мы можем переписать в виде

$$\int_a^b \frac{\omega(t)}{t-x}\,dt = \int_a^b \frac{\omega(t)-\omega(x)}{t-x}\,dt + \omega(x)\int_a^b \frac{dt}{t-x}.$$

Пользуясь условием (152), получаем для подинтегральной функции первого интеграла следующую оценку в окрестности точки $t=x$:

$$\left|\frac{\omega(t)-\omega(x)}{t-x}\right| \leqslant \frac{k}{|t-x|^{1-\alpha}}, \tag{154}$$

и, следовательно, этот интеграл будет абсолютно сходящимся интегралом в обычном смысле [II, 85]. Второй интеграл равен

$$\omega(x)\ln\frac{b-x}{x-a}.$$

Таким образом, интеграл (153) имеет смысл при любом $x$, находящемся внутри $(a, b)$, если $\omega(t)$ удовлетворяет условию Липшица (152). Функция $f(x)$, определяемая равенством (153), будет определена для всех $x$, лежащих внутри $(a, b)$. Составим выражение

$$\int_a^{x-\varepsilon} \frac{\omega(t)}{t-x}\,dt + \int_{x+\varepsilon}^b \frac{\omega(t)}{t-x}\,dt. \tag{155}$$

При положительном $\varepsilon$ подинтегральные функции будут непрерывными функциями $t$ и $x$, если $x$ принадлежит любому замкнутому промежутку, находящемуся внутри промежутка $(a, b)$, а $t$ принадлежит промежутку $(a, x-\varepsilon)$ или $(x+\varepsilon, b)$; поэтому и выражение (155) будет непрерывной функцией от $x$. Пользуясь тождеством

$$\frac{\omega(t)}{t-x}=\frac{\omega(t)-\omega(x)}{t-x}+\omega(x)\frac{1}{t-x}$$

и условием (152), нетрудно показать, что при $\varepsilon \to +0$ выражение (155) стремится к пределу $f(x)$ равномерно по отношению к $x$, и, следовательно, функция $f(x)$, определяемая формулой (153), будет непрерывной функцией во всяком замкнутом промежутке, лежащем внутри $(a, b)$, т. е., проще говоря, $f(x)$ есть непрерывная функция внутри промежутка $(a, b)$. Дальше мы докажем более точный результат, а именно: если $\omega(t)$ удовлетворяет условию Липшица с показателем $\alpha < 1$, то $f(x)$ во всяком промежутке, лежащем внутри $(a, b)$, удовлетворяет также условию Липшица с тем же показателем $\alpha$, а если в условии (152) $\alpha = 1$, то $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица с любым показателем, меньшим единицы.

Из условия (152) вытекает, очевидно, непрерывность функции $\omega(x)$. Наоборот, из непрерывности функции не следует, что эта функция удовлетворяет условию Липшица, т. е. условие Липшица является более сильным условием, чем простая непрерывность. Отметим еще, что для существования интеграла (153) в некоторой точке $x$ достаточно потребовать, чтобы $\omega(t)$ удовлетворяла условию Липшица в некоторой окрестности точки $x$, а в остальной части промежутка $(a, b)$ была просто непрерывной или даже только интегрируемой. Действительно, для существования интеграла (153) нам достаточно иметь оценку (154) при всех значениях $t$, достаточно близких к $x$. Если каждую точку $x$, лежащую внутри $(a, b)$, можно покрыть промежутком, в котором выполняется условие Липшица (152) при некотором выборе $k$ и $\alpha$, то интеграл (153) будет существовать при всех $x$, лежащих внутри $(a, b)$. При этом на различных промежутках, лежащих внутри $(a, b)$, постоянные $k$ и $\alpha$ могут быть различными.

Выясним теперь возможность замены переменных в интеграле (153). Предварительно докажем лемму: *если* $\eta_1(\varepsilon)$ *и* $\eta_2(\varepsilon)$ *таковы, что отношения* $\eta_1(\varepsilon):\varepsilon$ и $\eta_2(\varepsilon):\varepsilon$ *стремятся к нулю при* $\varepsilon \to (+0)$, *то*

$$\int_a^b \frac{\omega(t)}{t-x}\,dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int_a^{x-\varepsilon+\eta_1(\varepsilon)}\frac{\omega(t)}{t-x}\,dt+\int_{x+\varepsilon+\eta_2(\varepsilon)}^{b}\frac{\omega(t)}{t-x}\,dt\right].$$

Для доказательства леммы достаточно показать, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{x-\varepsilon}^{x-\varepsilon+\eta_1(\varepsilon)}\frac{\omega(t)}{t-x}\,dt=0 \text{ и } \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{x+\varepsilon}^{x+\varepsilon+\eta_2(\varepsilon)}\frac{\omega(t)}{t-x}\,dt=0.$$

Докажем, например, первое из этих равенств. Считая $\eta_1(\varepsilon)>0$, будем иметь $|t-x|\geqslant\varepsilon-\eta_1(\varepsilon)$ при $x-\varepsilon\leqslant t\leqslant x-\varepsilon+\eta_1(\varepsilon)$, и, следовательно,

$$\left|\int_{x-\varepsilon}^{x-\varepsilon+\eta_1(\varepsilon)}\frac{\omega(t)}{t-x}\,dt\right|\leqslant\frac{m\cdot\eta_1(\varepsilon)}{\varepsilon-\eta_1(\varepsilon)}=\frac{m}{1-\dfrac{\eta_1(\varepsilon)}{\varepsilon}}\cdot\frac{\eta_1(\varepsilon)}{\varepsilon}\to 0,$$

где $m$ — наибольшее значение $|\omega(t)|$. Если $\eta_1(\varepsilon) < 0$, то мы могли бы написать

$$\left| \int_{x-\varepsilon}^{x-\varepsilon+\eta_1(\varepsilon)} \frac{\omega(t)}{t-x}\,dt \right| \leqslant \frac{m \cdot |\eta_1(\varepsilon)|}{\varepsilon} \to 0,$$

и лемма таким образом доказана.

Пользуясь этой леммой, легко доказать формулу замены переменных в интеграле (153).

Теорема. *Пусть $t = \mu(\tau)$ — монотонно возрастающая функция от $\tau$, изменяющаяся в промежутке $(a, b)$, если $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$, причем $\mu(\tau)$ имеет в промежутке $(\alpha, \beta)$ непрерывные производные до второго порядка, и $\mu'(\tau) \neq 0$ внутри этого промежутка. При этом имеет место формула замены переменных*

$$\int_a^b \frac{\omega(t)}{t-x}\,dt = \int_\alpha^\beta \frac{\omega[\mu(\tau)]\,\mu'(\tau)}{\mu(\tau)-\mu(\xi)}\,d\tau, \tag{156}$$

*где $x = \mu(\xi)$, и интеграл, стоящий справа, надо понимать в смысле главного значения.*

В соответствии с определением главного значения интеграла составим сумму

$$\int_\alpha^{\xi-\varepsilon} \frac{\omega[\mu(\tau)]\,\mu'(\tau)}{\mu(\tau)-\mu(\xi)}\,d\tau + \int_{\xi+\varepsilon}^{\beta} \frac{\omega[\mu(\tau)]\,\mu'(\tau)}{\mu(\tau)-\mu(\xi)}\,d\tau. \tag{157}$$

Обозначим $\mu(\xi-\varepsilon) = x-\varepsilon'$ и $\mu(\xi+\varepsilon) = x+\varepsilon'+\eta$. Согласно формуле Тейлора

$$\mu(\xi+h) = \mu(\xi) + h\mu'(\xi) + \frac{h^2}{2}\mu''(\xi+\theta h) \quad (0<\theta<1).$$

Полагая $h = -\varepsilon$ и затем $h = +\varepsilon$, получим

$$x-\varepsilon' = x - \varepsilon\mu'(\xi) + \frac{\varepsilon^2}{2}\mu''(\xi-\theta_1\varepsilon),$$

$$x+\varepsilon'+\eta = x + \varepsilon\mu'(\xi) + \frac{\varepsilon^2}{2}\mu''(\xi+\theta_2\varepsilon) \quad (0<\theta_1 \text{ и } \theta_2<1),$$

откуда непосредственно вытекает

$$\varepsilon' = \varepsilon\left[\mu'(\xi) - \frac{\varepsilon}{2}\mu''(\xi-\theta_1\varepsilon)\right],$$

$$\eta = \frac{\varepsilon^2}{2}\left[\mu''(\xi+\theta_2\varepsilon) + \mu''(\xi-\theta_1\varepsilon)\right],$$

и, следовательно, отношение $\eta : \varepsilon'$ стремится к нулю, если $\varepsilon' \to 0$. Преобразуя интегралы, входящие в сумму (157), к переменной $t$, представим эту сумму в виде

$$\int_a^{x-\varepsilon'} \frac{\omega(t)}{t-x}\,dt + \int_{x+\varepsilon'+\eta}^{b} \frac{\omega(t)}{t-x}\,dt.$$

Отметим при этом, что из $\varepsilon \to +0$ следует $\varepsilon' \to +0$ и наоборот.

Пользуясь доказанной выше леммой, можно утверждать, что сумма (157) в пределе дает интеграл, стоящий в левой части формулы (156), чем и доказывается эта формула. В условиях теоремы монотонное возрастание функции $\mu(\tau)$ можно, очевидно, заменить и монотонным убыванием.

**28. Главное значение интеграла (продолжение).** Понятие главного значения интеграла может быть определено и в случае криволинейного интеграла. Мы ограничимся рассмотрением интегралов типа Коши:

$$f(\xi) = \int_L \frac{\omega(\tau)}{\tau - \xi}\, d\tau, \tag{158}$$

где $L$ — замкнутый или незамкнутый контур плоскости комплексного переменного $\tau$ и $\xi$ — точка этого контура, не совпадающая с его концом, если контур $L$ незамкнутый. Пусть $s$ — длина дуги $L$, отсчитываемая от некоторой точки. Будем в дальнейшем считать, что в параметрическом уравнении контура $\tau(s) = x(s) + y(s)\,i$ функции $x(s)$ и $y(s)$ имеют непрерывные производные до второго порядка. Положим, что точке $\tau = \xi$ соответствует значение $s = s_0$. Главное значение интеграла (158) мы можем определить как главное значение интеграла по вещественному переменному $s$:

$$\int_0^l \frac{\omega[\tau(s)]}{\tau(s) - \tau(s_0)}\, \tau'(s)\, ds, \tag{159}$$

где $l$ — длина контура $L$, и мы можем считать, что $s_0$ находится внутри промежутка интегрирования. Совершенно так же, как и в [27], можно показать, что интеграл (158) существует, если функция $\omega(\tau)$ удовлетворяет на $L$ условию Липшица:

$$|\omega(\tau_2) - \omega(\tau_1)| \leqslant k\,|\tau_2 - \tau_1|^{\alpha} \quad (0 < \alpha \leqslant 1). \tag{160}$$

Пользуясь доказанной в [27] теоремой о замене переменных, нетрудно показать, что если в некотором параметрическом уравнении контура $\tau(t) = x(t) + y(t)\,i$ функции имеют непрерывные производные до второго порядка и $\tau'(t) \neq 0$, то главное значение интеграла (158) сводится к главному значению интеграла

$$\int_\alpha^\beta \frac{\omega[\tau(t)]}{\tau(t) - \tau(t_0)}\, \tau'(t)\, dt,$$

где $(\alpha, \beta)$ — промежуток изменения параметра $t$ и значение $t = t_0$ соответствует точке $\tau = \xi$. Если $\omega(\tau)$ тождественно равна единице, то для интеграла (158) мы имеем первообразную функцию $\ln(\tau - \tau_0)$ и непосредственно получаем для случая замкнутого контура

$$\int_L \frac{d\tau}{\tau - \xi} = \pi i, \tag{161}$$

причем всегда считаем, что интегрирование по замкнутому контуру происходит против часовой стрелки. Совершенно так же, как и в случае прямолинейного отрезка, можно утверждать, что при условии (160) формула (158) определяет функцию $f(\xi)$, непрерывную во всех внутренних точках $L$, если это — незамкнутая кривая, и вообще во всех точках $L$, если это — замкнутая кривая. Имеет место, как и в случае отрезка, более точная теорема, доказанная И. И. Приваловым:

*При наличии условия* (160) *функция* $f(\xi)$ *удовлетворяет на замкнутой кривой* $L$ *условию Липшица с тем же* $\alpha$, *если* $\alpha < 1$, *и с любым показателем, меньшим единицы, если* $\alpha = 1$. *Если* $L$ — *незамкнутая кривая, то же имеет место для* $f(\xi)$ *на любой замкнутой дуге кривой, лежащей внутри* $L$.

Докажем эту теорему для случая отрезка. Для контурных интегралов доказательство аналогично. Сделаем предварительно несколько замечаний об условии Липшица. Прежде всего нетрудно видеть, что условие Липшица

$$|f(\xi+\Delta\xi)-f(\xi)|\leqslant k|\Delta\xi|^{\alpha} \tag{162}$$

достаточно проверить для достаточно малых значений $|\Delta\xi|$. Действительно, пусть (162) установлено при $|\Delta\xi|\leqslant m$, где $m$ — некоторая положительная постоянная. Если $|\Delta\xi|\geqslant m$, то отношение

$$\frac{|f(\xi+\Delta\xi)-f(\xi)|}{|\Delta\xi|^{\alpha}}$$

остается ограниченным, т. е.

$$|f(\xi+\Delta\xi)-f(\xi)|\leqslant k_1|\Delta\xi|^{\alpha} \qquad (|\Delta\xi|\geqslant m),$$

где $k_1$ — некоторая постоянная. Выбирая наибольшую из двух постоянных $k$ и $k_1$, мы получаем условие Липшица для всех допустимых значений $\Delta\xi$. Пусть, далее, $\beta<\alpha\leqslant 1$. При значениях $\Delta\xi$, по модулю меньших единицы, мы имеем $|\Delta\xi|^{\beta}>|\Delta\xi|^{\alpha}$, а потому, если $f(\xi)$ удовлетворяет условию Липшица с показателем $\alpha$, то тем более она удовлетворяет условию с показателем $\beta$. Положим, что две функции $f_1(\xi)$ и $f_2(\xi)$ удовлетворяют условию Липшица с одним и тем же показателем $\alpha$. Нетрудно видеть, что их сумма и произведение удовлетворяют также условию с тем же самым показателем. Для суммы это непосредственно вытекает из того, что модуль суммы меньше или равен сумме модулей, а в случае произведения мы можем написать

$$f_1(\xi+\Delta\xi)f_2(\xi+\Delta\xi)-f_1(\xi)f_2(\xi)=f_2(\xi+\Delta\xi)[f_1(\xi+\Delta\xi)-f_1(\xi)]+$$
$$+f_1(\xi)[f_2(\xi+\Delta\xi)-f_2(\xi)],$$

откуда и следует непосредственно наше утверждение о произведении.

Перейдем теперь к доказательству высказанной выше теоремы. Мы имеем

$$f(\xi)=\int_a^b\frac{\omega(t)}{t-\xi}\,dt,$$

и

$$f(\xi)=\int_a^b\frac{\omega(t)-\omega(\xi)}{t-\xi}\,dt+\omega(\xi)\ln\frac{b-\xi}{\xi-a},$$

где $\omega(t)$ удовлетворяет условию Липшица с некоторым показателем $\alpha$. Положим, что $\xi$ принадлежит некоторому промежутку $l$, лежащему внутри $(a, b)$. Во втором слагаемом правой части множитель $\omega(\xi)$ удовлетворяет условию Липшица с показателем $\alpha$, а второй множитель имеет ограниченную производную и тем самым удовлетворяет условию Липшица с показателем единица. Таким образом все произведение удовлетворяет условию Липшица с показателем $\alpha$, и теорему достаточно доказать для функции

$$\psi(\xi)=\int_a^b\frac{\omega(t)-\omega(\xi)}{t-\xi}\,dt,$$

выраженной обычным несобственным интегралом. Нам надо оценить модуль разности

$$\psi(\xi+\Delta\xi)-\psi(\xi)=\int_a^b\left[\frac{\omega(t)-\omega(\xi+\Delta\xi)}{t-\xi-\Delta\xi}-\frac{\omega(t)-\omega(\xi)}{t-\xi}\right]dt, \qquad (163)$$

считая $|\Delta\xi|$ достаточно малым. Выделим из промежутка интегрирования часть $(\xi-\varepsilon,\ \xi+\varepsilon)$, где $\varepsilon=2|\Delta\xi|$, и оценим модуль интеграла (163) по этой части промежутка. Пользуясь условием (160), получим оценку

$$k\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon}(|t-\xi-\Delta\xi|^{\alpha-1}+|t-\xi|^{\alpha-1})\,dt.$$

Интеграл от второго слагаемого можно представить в виде

$$\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi}(\xi-t)^{\alpha-1}\,dt+\int_{\xi}^{\xi+\varepsilon}(t-\xi)^{\alpha-1}\,dt=\frac{1}{\alpha}(2^{\alpha}|\Delta\xi|^{\alpha}+2^{\alpha}|\Delta\xi|^{\alpha}).$$

Таким же образом можно поступить и с интегралом от первого слагаемого, и модуль интеграла (163) по промежутку $(\xi-\varepsilon,\ \xi+\varepsilon)$ будет иметь оценку $k_1|\Delta\xi|^{\alpha}$, где $k_1$ — некоторая постоянная. Остается оценить интеграл (163) по сумме промежутков $(a,\ \xi-\varepsilon)$ и $(\xi+\varepsilon,\ b)$. Для этого представим подынтегральную функцию в виде

$$[\omega(t)-\omega(\xi+\Delta\xi)]\frac{\Delta\xi}{(t-\xi)(t-\xi-\Delta\xi)}-[\omega(\xi+\Delta\xi)-\omega(\xi)]\frac{1}{t-\xi}. \qquad (164)$$

Пользуясь (160), получаем следующую оценку для интеграла от модуля второго слагаемого:

$$k|\Delta\xi|^{\alpha}\left|\int_a^{\xi-\varepsilon}\frac{dt}{t-\xi}+\int_{\xi+\varepsilon}^{b}\frac{dt}{t-\xi}\right|=k\left|\ln\frac{b-\xi}{\xi-a}\right||\Delta\xi|^{\alpha}\leqslant k_2|\Delta\xi|^{\alpha},$$

где $k_2$ — некоторая постоянная. При этом надо иметь в виду, что написанный логарифм остается ограниченным по модулю при изменении $\xi$ в упомянутом выше промежутке $l$. Остается оценить интеграл от первого слагаемого выражения (164) по сумме промежутков $(a,\ \xi-\varepsilon)$ и $(\xi+\varepsilon,\ b)$. Займемся оценкой интеграла по одному первому промежутку. Для второго промежутка оценка будет буквально такой же. В силу (160) мы имеем следующую оценку для первого слагаемого выражения (164):

$$\left|[\omega(t)-\omega(\xi+\Delta\xi)]\frac{\Delta\xi}{(t-\xi)(t-\xi-\Delta\xi)}\right|\leqslant\frac{k|\Delta\xi|}{|t-\xi||t-\xi-\Delta\xi|^{1-\alpha}}=$$

$$=\frac{k|\Delta\xi|}{|t-\xi|^{2-\alpha}\left|1-\dfrac{\Delta\xi}{t-\xi}\right|^{1-\alpha}}.$$

При изменении $t$ на промежутке $(a,\ \xi-\varepsilon)$ мы имеем $(\xi-t)\geqslant\varepsilon$, т. е. $(\xi-t)\geqslant 2|\Delta\xi|$, и, следовательно, $|\Delta\xi|:|t-\xi|\leqslant\frac{1}{2}$, а поэтому

$$\left|1-\frac{\Delta\xi}{t-\xi}\right|\geqslant\frac{1}{2}.$$

Таким образом, при изменении $t$ в промежутке $(a, \xi-\varepsilon)$ модуль первого слагаемого выражения (164) не превышает

$$\frac{2^{1-\alpha}k\,|\Delta\xi|}{(\xi-t)^{2-\alpha}} \quad (\xi-t>0),$$

и модуль интеграла от упомянутого первого слагаемого имеет оценку

$$2^{1-\alpha}k\,|\Delta\xi|\int_a^{\xi-\varepsilon}\frac{dt}{(\xi-t)^{2-\alpha}}. \tag{$164_1$}$$

Если $\alpha<1$, то мы имеем требуемую оценку:

$$\frac{2^{1-\alpha}k}{1-\alpha}\,|\Delta\xi|\left[-\frac{1}{(\xi-a)^{1-\alpha}}+\frac{1}{2^{1-\alpha}\,|\Delta\xi|^{1-\alpha}}\right]\leqslant\frac{k}{1-\alpha}\,|\Delta\xi|^{\alpha}.$$

Таким образом, при $\alpha<1$ нужная оценка разности (163) получена. Если $\alpha=1$, то оценка ($164_1$) имеет вид

$$k\,|\Delta\xi|\,[\ln(\xi-a)-\ln(2\,|\Delta\xi|)],$$

и при $\alpha=1$ разность (163) имеет оценку вида

$$k_3\,|\Delta\xi|+k_4\,|\Delta\xi|\ln\frac{1}{|\Delta\xi|},$$

где $k_3$ и $k_4$ — некоторые постоянные. Принимая во внимание, что $\ln\frac{1}{|\Delta\xi|}$ при $\Delta\xi\to 0$ растет слабее, чем любая отрицательная степень $|\Delta\xi|$, мы можем написать

$$k_3\,|\Delta\xi|+k_4\,|\Delta\xi|\ln\frac{1}{|\Delta\xi|}\leqslant k_5\,|\Delta\xi|^{\beta},$$

где $\beta$ — любое число, удовлетворяющее условию $0<\beta<1$, и теорема доказана и для случая $\alpha=1$.

Исследуем теперь поведение функции $f(\xi)$ при приближении точки $\xi$ к концам отрезка, например к концу $t=\alpha$. Мы, как и выше, считаем, что $\omega(t)$ удовлетворяет условию Липшица с показателями $\alpha$ на всем замкнутом отрезке $(a, b)$. Положим сначала, что $\omega(a)=0$. При этом мы можем продолжить функцию нулем для $t<a$, т. е. можем считать $\omega(t)=0$ при $t<a$. При этом $\omega(t)$ будет определена на некотором отрезке $(a_1, b)$, где $a_1<a$, и условие Липшица при указанном продолжении не нарушится. Интеграл

$$\int_{a_1}^{b}\frac{\omega(t)}{t-\xi}\,dt=\int_a^b\frac{\omega(t)}{t-\xi}\,dt$$

будет давать прежнюю функцию $f(\xi)$, и, принимая во внимание, что точка $t=a$ находится внутри отрезка $(a_1, b)$, мы можем, на основании доказанного выше, утверждать, что $f(\xi)$ удовлетворяет условию Липшица с показателем $\alpha$ (считаем $\alpha<1$) и на любом отрезке $(a, b_1)$, где $b_1<b$. Положим теперь, что $\omega(a)\neq 0$.

Мы можем написать

$$f(\xi)=\int_a^b\frac{\omega(t)-\omega(a)}{t-\xi}\,dt+\omega(a)\int_a^b\frac{dt}{t-\xi}.$$

В первом интеграле числитель обращается в нуль при $t=a$, и этот интеграл дает функцию, удовлетворяющую условию Липшица с показателем $\alpha$ вплоть до $\xi=a$. Второе слагаемое правой части равно, как мы видели в [27],

$$\omega(a)\ln(b-\xi)-\omega(a)\ln(\xi-a).$$

Уменьшаемое в этой разности удовлетворяет условию Липшица с показателем единица вплоть до $\xi=a$.

Таким образом, окончательно в окрестности $\xi=a$ функция $f(\xi)$ представляет собою сумму

$$-\omega(a)\ln(\xi-a)+f_1(\xi),$$

где $f_1(\xi)$ удовлетворяет условию Липшица с показателем $\alpha$ вплоть до $\xi=a$. Аналогично рассматривается и конец $\xi=b$, и в этом случае получается

$$\omega(b)\ln(b-\xi)+f_2(\xi),$$

где $f_2(\xi)$ удовлетворяет условию Липшица вплоть до $\xi=b$.

Поведение $f(\xi)$ вблизи концов отрезка рассматривалось и при более общих предположениях относительно $\omega(t)$. Приведем только результат, доказательство которого можно найти в книге Н. И. Мусхелишвили «Сингулярные интегральные уравнения», содержащей впервые проведенное подробное исследование интегралов типа Коши.

Теорема. *Пусть $\omega(t)$ удовлетворяет условию Липшица (152) с показателем $\alpha$ на любом замкнутом отрезке $(a', b')$, содержащемся внутри $(a, b)$, причем постоянная $k$ может зависеть от выбора отрезка $(a', b')$ ($k$ может беспредельно возрастать при $a'\to a$ или $b'\to b$). Пусть, далее, вблизи концов $a$ и $b$ функция $\omega(t)$ представима в виде*

$$\omega(t)=\frac{\omega^*(t)}{(t-c)^{\gamma}}, \tag{165}$$

*где $c$ означает $a$ или $b$, $\gamma=\gamma_1+\gamma_2 i$ $(\gamma\neq 0)$, причем $0\leqslant\gamma_1<1$ и $\omega^*(t)$ удовлетворяет некоторому условию Липшица вплоть до $t=c$. При этом $f(\xi)$ удовлетворяет условию Липшица с показателем $\alpha$, если $\alpha<1$, и с любым показателем, меньшим единицы, если $\alpha=1$, на любом замкнутом отрезке, лежащем внутри $(a, b)$, и в окрестности $\xi=c$ имеет вид*

$$f(\xi)=\pm\pi\operatorname{ctg}\gamma\pi\,\frac{\omega^*(c)}{(\xi-c)^{\gamma}}+f_1(\xi),$$

*причем, если $\gamma_1=0$, то $f_1(\xi)$ удовлетворяет некоторому условию Липшица вплоть до $\xi=c$, а если $\gamma_1\neq 0$, то*

$$f_1(\xi)=\frac{f^*(\xi)}{|\xi-c|^{\gamma_0}},$$

*где $f^*(\xi)$ удовлетворяет условию Липшица вплоть до $\xi=c$ и $\gamma_0<\gamma_1$; знак «+» относится к случаю $c=a$, и знак «—» — к случаю $c=b$.*

Это предложение имеет место и в том случае, если прямолинейный отрезок заменен любой достаточно гладкой дугой с концами $t=a$ и $t=b$, причем интегрирование ведется в этом случае по комплексной переменной $t$.

Отметим, что если $\gamma=0$, то имеет место указанный выше результат:

$$f(\xi)=\pm\omega(c)\ln\frac{1}{\xi-c}+f_1(\xi),$$

где $f_1(\xi)$ удовлетворяет условию Липшица вплоть до $\xi=c$.

**29. Интегралы типа Коши.** Рассмотрим интеграл типа Коши [8]

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(\tau)}{\tau-z}\,d\tau \tag{166}$$

при прежних предположениях относительно $\omega(\tau)$ и $L$. Положим, что $z$ находится не на $L$. Если $L$ — замкнутый контур, то этот интеграл определяет две различные регулярные функции внутри и вне $L$. Если контур незамкнутый, то $F(z)$ регулярна вне $L$. В обоих случаях $F(\infty)=0$. Если $z=\xi$ лежит на контуре, то мы имеем интеграл в смысле главного значения и можем переписать его в виде

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(\tau)}{\tau-\xi}\,d\tau=\frac{\omega(\xi)}{2\pi i}\int_L \frac{d\tau}{\tau-\xi}+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(\tau)-\omega(\xi)}{\tau-\xi}\,d\tau,$$

т. е., в силу (161),

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(\tau)}{\tau-\xi}\,d\tau=\frac{1}{2}\,\omega(\xi)+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(\tau)-\omega(\xi)}{\tau-\xi}\,d\tau. \tag{167}$$

Считая сначала, что контур замкнутый, докажем теорему: *если $z$ стремится к некоторой точке $\xi$, лежащей на $L$, то интеграл* (166) *имеет предел*

$$\pm\frac{1}{2}\,\omega(\xi)+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(\tau)}{\tau-\xi}\,d\tau, \tag{168}$$

*причем знак «+» берется, если $z\to\xi$ изнутри $L$, и знак «—», если $z\to\xi$ извне.* Разберем стремление изнутри. Интеграл (166) мы можем переписать в виде

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(\tau)}{\tau-z}\,d\tau=\frac{\omega(\xi)}{2\pi i}\int_L \frac{d\tau}{\tau-z}+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(\tau)-\omega(\xi)}{\tau-z}\,d\tau \tag{169}$$

или

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(\tau)}{\tau-z}\,d\tau=\omega(\xi)+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(\tau)-\omega(\xi)}{\tau-z}\,d\tau.$$

Исследуем разность

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(\tau)-\omega(\xi)}{\tau-z}\,d\tau-\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(\tau)-\omega(\xi)}{\tau-\xi}\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(\tau)-\omega(\xi)}{\tau-\xi}\cdot\frac{z-\xi}{\tau-z}\,d\tau. \tag{170}$$

По обе стороны от точки $\xi$ отложим дуги малой длины $\eta$. Образуемую этими дугами часть контура обозначим через $L_1$, а остальную часть — через $L_2$. Обозначая разность (170) одной буквой $\Delta$, можем написать

$$\Delta=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1} \frac{\omega(t)-\omega(\xi)}{\tau-\xi}\cdot\frac{z-\xi}{\tau-z}\,d\tau+\frac{1}{2\pi i}\int_{L_2} \frac{\omega(\tau)-\omega(\xi)}{\tau-\xi}\cdot\frac{z-\xi}{\tau-z}\,d\tau. \tag{171}$$

Положим, что $z$ стремится к $\xi$ по нормали к контуру $L$. При этом расстояние от $z$ до $\xi$ будет меньше, чем расстояние от $z$ до других точек контура,

т. е. $|z-\xi| \leqslant |\tau - z|$. Кроме того, $d\tau = [x'(s) + y'(s)\,i]\,ds$, причем $|x'(s) + y'(s)\,i| = 1$. Оценивая обычным образом первый из интегралов формулы (171), получим

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\omega(\tau) - \omega(\xi)}{\tau - \xi} \cdot \frac{z-\xi}{\tau - z}\, d\tau \right| \leqslant \frac{k}{2\pi} \int_{s_0-\eta}^{s_0+\eta} \frac{ds}{|\tau(s) - \tau(s_0)|^{1-\alpha}},$$

где $s = s_0$ соответствует точке $\tau = \xi$. Принимая во внимание, что отношение длины хорды $|\tau(s) - \tau(s_0)|$ к длине дуги $|s - s_0|$ стремится к единице, можем утверждать, что последний интеграл будет сходящимся, и, следовательно, при любом заданном положительном $\varepsilon$ мы можем выбрать $\eta$ настолько малым, чтобы модуль интеграла по $L_1$ был меньше $\frac{\varepsilon}{2}$. Закрепив таким образом $\eta$, мы будем иметь уже обычный интеграл по $L_2$, в котором $|\tau - \xi|$ и $|\tau - z|$ остаются бóльшими некоторого положительного числа, а потому интеграл по $L_2$ будет по модулю меньше $\frac{\varepsilon}{2}$ при всех $z$, достаточно близких к $\xi$. Ввиду произвольности $\varepsilon$ мы можем утверждать, что разность (171) стремится к нулю при $z \to \xi$ по нормали, т. е.

$$\lim_{z \to \xi} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega(\tau) - \omega(\xi)}{\tau - z}\, d\tau = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega(\tau) - \omega(\xi)}{\tau - \xi}\, d\tau$$

или, в силу (161),

$$\lim_{z \to \xi} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega(\tau) - \omega(\xi)}{\tau - z}\, d\tau = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega(\tau)}{\tau - \xi}\, d\tau - \frac{1}{2}\,\omega(\xi),$$

и формула (169) дает требуемый результат:

$$\lim_{z \to \xi} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega(\tau)}{\tau - z}\, d\tau = \frac{1}{2}\,\omega(\xi) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega(\tau)}{\tau - \xi}\, d\tau. \tag{172}$$

В случае стремления извне доказательство проводится буквально так же, только надо иметь в виду, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{d\tau}{\tau - z} = \begin{cases} 1, & \text{если } z \text{ внутри } L, \\ 0, & \text{если } z \text{ вне } L. \end{cases} \tag{173}$$

До сих пор мы предполагали, что $z \to \xi$ по нормали. Можно показать, что формула (172) сохранит свою силу и при любом стремлении $z$ к $\xi$. Для этого достаточно показать, что при предельном переходе на контур по нормали стремление интеграла (166) к пределу (168) имеет место равномерно при всех значениях $\xi$ на контуре $L$. Ограничимся рассмотрением окружности $|z| = 1$. Пока считаем, что $z \to \xi$ по нормали. В данном случае $\tau = e^{i\varphi}$, $\xi = e^{i\varphi_0}$ и $ds = d\varphi$. Нетрудно показать, что если $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, то $\sin x \geqslant \frac{2}{\pi} x$. Пользуясь этим, можно написать

$$|\tau - \xi| = 2 \sin \frac{|\varphi - \varphi_0|}{2} \geqslant \frac{2}{\pi} |\varphi - \varphi_0| \qquad (|\varphi - \varphi_0| < \pi),$$

и модуль интеграла по $L$ будет меньше

$$\frac{k}{2\pi} \int_{\varphi_0-\eta}^{\varphi_0+\eta} \frac{\pi^{1-\alpha} d\varphi}{2^{1-\alpha} |\varphi - \varphi_0|^{1-\alpha}} = \frac{k}{2^{1-\alpha}\pi^{\alpha}} \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+\eta} \frac{d\varphi}{(\varphi - \varphi_0)^{1-\alpha}} = \frac{k}{2^{1-\alpha}\pi^{\alpha}\alpha}\,\eta^{\alpha}.$$

На контуре $L_2$, если $z$ достаточно близка к $\xi$,

$$|\tau-\xi|>\frac{1}{2}\sin\eta;\ |\tau-z|>\frac{1}{2}\sin\eta;\ |\omega(\tau)-\omega(\xi)|\leqslant 2M,$$

где $M$ — наибольшее значение $|\omega(\tau)|$ на $L$. Полагая $\delta=|z-\xi|$, получим

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2}\frac{\omega(\tau)-\omega(\xi)}{\tau-\xi}\cdot\frac{z-\xi}{\tau-z}\,d\tau\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}\frac{8M\delta}{\sin^2\eta}(2\pi-2\eta)\leqslant\frac{8M\delta}{\sin^2\eta}$$

и окончательно

$$|\Delta|\leqslant\frac{k}{2^{1-\alpha}\pi^\alpha\alpha}\eta^\alpha+\frac{8M}{\sin^2\eta}\delta.$$

Сначала выбирается $\eta$ так, чтобы первое слагаемое было меньше $\frac{\varepsilon}{2}$, и затем при таком фиксированном $\eta$ второе слагаемое будет меньше $\frac{\varepsilon}{2}$, если $\delta<(\varepsilon\sin^2\eta):(16M)$. В эти оценки не входит $\xi$, и, следовательно, разность (171) стремится к нулю равномерно относительно $\xi$, когда $z$ по радиусу стремится к окружности. Следовательно, в формуле (172) предельный переход также имеет место равномерно относительно $\xi$. Отсюда следует, между прочим, что и правая часть формулы (172) и интеграл (166) представляют собой непрерывную функцию от $\xi$ [I, 145]. В [27] мы упоминали о том, что эта функция удовлетворяет условию Липшица.

Обозначим правую часть формулы (172) через $\omega_1(\xi)$ и положим, что $z\to\xi$ любым образом. Пусть $\xi'$ — переменная точка окружности, лежащая на одном радиусе с $z$. Очевидно, что $\xi'-\xi\to 0$ и $|z-\xi'|\to 0$. Пользуясь доказанным выше утверждением о равномерности предельного перехода в (172) при стремлении $z$ по радиусу к $\xi$, можем утверждать, что при любом заданном положительном $\varepsilon$ для всех $z$, достаточно близких к $\xi$, будем иметь

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{\omega(\tau)}{\tau-z}\,d\tau-\omega_1(\xi')\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

С другой стороны, в силу непрерывности $\omega_1(\xi)$ для всех $z$, достаточно близких к $\xi$, мы имеем $|\omega_1(\xi)-\omega_1(\xi')|<\frac{\varepsilon}{2}$, а потому

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{\omega(\tau)}{\tau-z}\,d\tau-\omega_1(\xi)\right|<\varepsilon$$

для всех $z$, достаточно близких к $\xi$. Ввиду произвольности $\xi$ это и показывает, что в формуле (172) предельный переход имеет место при любом законе стремления $z$ к $\xi$ изнутри, и притом равномерно относительно $\xi$. Иначе говоря, мы можем утверждать, что функция $F(z)$, определяемая интегралом (166) внутри окружности, будет непрерывной вплоть до окружности, причем ее предельные значения на окружности определяются формулой (172). То же самое справедливо при стремлении извне.

Это же свойство интеграла типа Коши может быть доказано и для любого замкнутого контура $L$ при указанных в [28] предположениях относительно $x(s)$ и $y(s)$. Можно даже допустить, что $L$ имеет конечное число угловых точек. Пусть $M$ — угловая точка $L$, и положим, что при обходе по $L$ против часовой стрелки направление касательной поворачивается в точке $M$ на угол $\pi\theta$, где $-1<\theta<1$. При этом, как нетрудно видеть, в правой

части формулы (161) вместо $\pi i$ мы будем иметь $(1-\theta)\pi i$, и выражение (168) мы должны заменить в точке $M$ выражением

$$\pm\frac{1\pm\theta}{2}\omega(\xi)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\omega(\tau)}{\tau-\xi}d\tau,$$

причем одновременно надо брать верхние или нижние знаки.

Если мы обозначим через $F_i(\xi)$ и $F_e(\xi)$ предельные значения на контуре $L$ функций (166), определенных внутри и вне $L$, то доказанную выше теорему можно записать в виде

$$F_i(\xi)=\frac{1}{2}\omega(\xi)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\omega(\tau)}{\tau-\xi}d\tau,$$

$$F_e(\xi)=-\frac{1}{2}\omega(\xi)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\omega(\tau)}{\tau-\xi}d\tau. \tag{174}$$

Совершенно аналогичную теорему можно доказать и для случая незамкнутого контура. Ограничимся рассмотрением конечного отрезка $(a, b)$ вещественной оси:

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_a^b\frac{\omega(t)}{t-z}dt. \tag{175}$$

Если $\omega(t)$ тождественно равна единице, то вместо формулы (168) будем иметь

$$\frac{1}{2\pi i}\int_a^b\frac{dt}{t-z}=\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{b-z}{a-z}, \tag{176}$$

где мы должны брать то значение логарифма, которое обращается в нуль при $z=\infty$. Если $\xi$ лежит внутри отрезка $(a, b)$, то вместо формулы (161) будем иметь

$$\frac{1}{2\pi i}\int_a^b\frac{dt}{t-\xi}=\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{b-\xi}{\xi-a},$$

где значение логарифма берется вещественным. Повторяя буквально прежнее рассуждение, получим

$$\lim_{z\to\xi}\frac{1}{2\pi i}\int_a^b\frac{\omega(t)}{t-z}dt=\frac{\omega(\xi)}{2\pi i}\left[\ln\frac{b-z}{a-z}\Big|_{z\to\xi}-\ln\frac{b-\xi}{\xi-a}\right]+\frac{1}{2\pi i}\int_a^b\frac{\omega(t)}{t-\xi}dt.$$

Функция (176) имеет разные пределы при стремлении $z$ к $\xi$ сверху или снизу отрезка $(a, b)$, а именно:

$$\ln\frac{b-z}{z-a}\Big|_{z\to\xi}=\ln\frac{b-\xi}{\xi-a}\pm\pi i,$$

где верхний знак относится к случаю стремления сверху, т. е. от значений с положительной мнимой частью, а нижний знак — к случаю стремления снизу. При интегрировании от $a$ до $b$ верхняя полуплоскость находится

с левой стороны и стремление $z$ к $\xi$ сверху аналогично стремлению изнутри в случае замкнутой кривой. Точно так же стремление $z$ к $\xi$ снизу аналогично стремлению извне в случае замкнутой кривой. Обозначая через $F_i(\xi)$ и $F_e(\xi)$ предельные значения функции (175) при стремлении $z$ к $\xi$ сверху и снизу, будем иметь формулы, аналогичные формулам (174):

$$F_i(\xi) = \frac{1}{2}\omega(\xi) + \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\omega(t)}{t-\xi}\,dt,$$
$$F_e(\xi) = -\frac{1}{2}\omega(\xi) + \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\omega(t)}{t-\xi}\,dt. \tag{177}$$

Если $\omega(t)$ удовлетворяет на отрезке условиям, указанным в конце [28], а вблизи концов имеет вид (160), то для точек $z$, близких к концам отрезка, имеют место следующие предложения (см. Н. И. Мусхелишвили):

1. Если $\gamma = 0$, то

$$F(z) = \pm\frac{\omega(c)}{2\pi i}\ln\frac{1}{z-c} + F_0(z),$$

где знак «+» относится к случаю $c = a$ и знак «—» — к случаю $c = b$ и $F_0(z)$ есть ограниченная функция, имеющая определенный предел при $z \to c$. Под $\ln(z-c)$ подразумевается любая ветвь, однозначная вблизи $z = c$ на плоскости с разрезом $(a, b)$.

2. Если $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 i \neq 0$, то

$$F(z) = \pm\frac{e^{\pm\gamma\pi i}}{2i\sin\gamma\pi}\cdot\frac{\omega^*(c)}{(z-c)^\gamma} + F_0(z),$$

где знаки выбираются, как и выше, $(z-c)^\gamma$ обозначает ту однозначную вблизи $z = c$ на плоскости с разрезом $(a, b)$ ветвь, у которой на верхнем (левом) берегу разреза $(z-c)^\gamma$ равно тому значению $(t-c)^\gamma$, которое входит в формулу (165). Далее, $F_0(z)$ обладает следующими свойствами: если $\gamma_1 = 0$, то $F_0(z)$ ограничена и имеет определенный предел при $z \to c$; если же $\gamma_1 > 0$, то

$$|F_0(z)| < \frac{c}{|z-c|^{\gamma_0}},$$

где $c$ и $\gamma_0$ — постоянные, причем $\gamma_0 < 1$. Используя понятие интеграла Лебега, можно исследовать значения интеграла типа Коши для любой суммируемой функции $\omega(t)$ и для широкого класса контуров (см. И. И. Привалов, Интеграл Коши, 1918).

Отметим один частный случай. Если $\omega(\tau)$ суть предельные значения на $L$ функции, регулярной внутри замкнутого контура $L$ и непрерывной вплоть до $L$, причем $\omega(\tau)$ удовлетворяет условию Липшица, то $F_i(\xi) = \omega(\xi)$, и первая из формул (169) показывает, что $\omega(\tau)$ должна быть решением однородного интегрального уравнения второго рода

$$\omega(\xi) = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\omega(\tau)}{\tau-\xi}\,d\tau. \tag{178}$$

Пусть $L$, как и выше, — простой замкнутый контур. Главное значение интеграла

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(\tau)}{\tau-\xi}\,d\tau \tag{179}$$

переводит любую функцию $\omega(\tau)$, заданную на $L$ и удовлетворяющую условию Липшица, в некоторую другую функцию $\omega_1(\xi)$, определенную на $L$ и также удовлетворяющую условию Липшица. Иначе говорят, что интеграл (179) является преобразованием или оператором над функцией $\omega(\tau)$. К полученной функции $\omega_1(\xi)$ мы можем опять применить оператор с ядром Коши. При этом имеет место формула

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{1}{\xi-\eta}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(\tau)}{\tau-\xi}\,d\tau\right]d\xi = \frac{1}{4}\,\omega(\eta). \tag{180}$$

Иначе говоря, в результате двукратного применения преобразования с ядром Коши мы получаем исходную функцию с коэффициентом $\frac{1}{4}$. Для доказательства (180) перепишем первую из формул (174) в виде

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(\tau)}{\tau-\xi}\,d\tau = F_i(\xi) - \frac{1}{2}\,\omega(\xi). \tag{181}$$

Правая часть дает результат применения к функции $\omega(\tau)$ линейного преобразования с ядром Коши. К этой правой части опять применимо линейное преобразование с ядром Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{F_i(\xi) - \frac{1}{2}\,\omega(\xi)}{\xi-\eta}\,d\xi, \tag{182}$$

где $\eta$ лежит на $L$ и интеграл, как и выше, надо понимать в смысле главного значения. Поскольку $F_i(\xi)$ дает предельные значения на $L$ функции, регулярной внутри $L$, мы должны иметь в силу (178)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{F_i(\xi)}{\xi-\eta} = \frac{1}{2}\,F_i(\eta).$$

С другой стороны, в силу (181)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{-\frac{1}{2}\,\omega(\xi)}{\xi-\eta}\,d\xi = \frac{1}{2}\,F_i(\eta) - \frac{1}{4}\,\omega(\eta),$$

и окончательно интеграл (182) оказывается равным $\omega(\eta):4$, т. е. мы имеем формулу (180).

**30. Интегралы типа Коши (продолжение).** Приведем теперь, как и в [26], без доказательства некоторые общие предложения об интегралах типа Коши. В дальнейшем для краткости интеграл в смысле главного значения будем называть особым интегралом. Сформулируем основную теорему.

Теорема. *Если $L$ — спрямляемая кривая, $\omega(\tau)$ суммируема на $L$ и особый интеграл*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(t)}{t-\xi}\,dt \tag{183}$$

*существует почти везде для $\xi$ на $L$, то интеграл типа Коши* (166) *имеет почти везде на $L$ угловые предельные значения, выражаемые формулами* (172).

Обратно, *если интеграл типа Коши* (166) *имеет почти везде на* $L$ *угловые предельные значения изнутри или извне* $L$, *то почти везде на* $L$ *существует особый интеграл* (183) *и граничные значения интеграла типа Коши выражаются формулой* (172) (*изнутри и извне*).

Приведем два результата, касающихся того случая, когда интеграл типа Коши определяет непрерывную в замкнутой области $\overline{B}$ функцию. Это будет иметь место, например, если на спрямляемой кривой Жордана $L$ функция $\omega(t)$ удовлетворяет условию

$$|\omega(t_2) - \omega(t_1)| \leqslant A\,|t_2 - t_1|.$$

В случае круга $|\xi| < 1$ имеет место следующий результат: если угловые предельные значения интеграла типа Коши (183) совпадают почти везде на окружности $|\xi| = 1$ с некоторой непрерывной на этой окружности функцией $f(\xi)$, то (183) является непрерывной в замкнутом круге $|\xi| \leqslant 1$ функцией $F(\xi)$ и $F(\xi) \equiv f(\xi)$ на окружности $|\xi| = 1$.

ГЛАВА II

# КОНФОРМНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ И ПЛОСКОЕ ПОЛЕ

**31. Конформное преобразование.** В настоящей главе мы займемся рассмотрением некоторых приложений теории функций комплексного переменного к задачам плоской гидродинамики, электростатики и теории упругости. Существенную роль при этих применениях играет конформное преобразование, и мы начнем настоящую главу с более подробного рассмотрения конформного преобразования. Основные свойства преобразования, совершаемого регулярной функцией, были нами выяснены в [3] и затем в [22]. Мы рассмотрели более подробно это преобразование как в тех точках, где производная отлична от нуля, так и в тех точках, где она равна нулю. В точках первого рода углы остаются без изменения, а что касается точек второго рода, то в этих точках углы увеличиваются так, как это было указано в [23]. Пусть

$$w = f(z) \tag{1}$$

регулярная функция, совершающая конформное преобразование области $B$ в область $B_1$. Если $f'(z)$ нигде в нуль не обращается в области $B$, то область $B_1$ не имеет точек разветвления, но может все же быть многолистной, т. е. налегать сама на себя. Рассмотрим в области $B$ некоторую кривую $l$, функцию $\varphi(s)$, заданную на этой кривой, и криволинейный интеграл

$$\int_l \varphi(s)\, ds,$$

где $ds$ — элемент дуги кривой $l$. В результате преобразования (1) кривая $l$ перейдет в некоторую кривую $l_1$, лежащую в области $B_1$, и элемент дуги новой кривой $ds_1$ будет выражаться произведением $ds_1 = |f'(z)|\, ds$, так как $|f'(z)|$ дает коэффициент изменения линейных размеров [3].

Вводя функцию

$$z = F(w), \tag{2}$$

обратную (1), мы будем иметь, очевидно, $F'(w)=\frac{1}{f'(z)}$ и, следовательно, можем написать $ds=|F'(w)|\,ds_1$. Так что интеграл в результате преобразования будет выражаться в виде

$$\int_l \varphi(s)\,ds=\int_{l_1}\varphi(s_1)\,|F'(w)|\,ds_1. \tag{3}$$

Точно так же, принимая во внимание, что $|f'(z)|^2$ будет давать коэффициент изменения площади в заданном месте, мы будем иметь следующую формулу преобразования двойного интеграла при конформном преобразовании:

$$\iint_B \varphi(z)\,d\sigma=\iint_{B_1}\varphi_1(w)\,|F'(w)|^2\,d\sigma_1, \tag{4}$$

и для элемента площади будет иметь место следующая формула:

$$d\sigma_1=|f'(z)|^2\,d\sigma. \tag{5}$$

Если отделить в формуле (1) вещественную и мнимую части,

$$w=f(z)=u(z,\,y)+iv(x,\,y), \tag{6}$$

то нетрудно видеть, что $|f'(z)|^2$ равно функциональному определителю от функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ по переменным $x$ и $y$. Действительно, этот функциональный определитель выражается формулой

$$\frac{D(u,\,v)}{D(x,\,y)}=\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial v}{\partial x}$$

или, в силу уравнений Коши — Римана, формулой

$$\frac{D(u,\,v)}{D(x,\,y)}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2,$$

а это и есть как раз квадрат модуля производной

$$|f'(z)|^2=\left|\frac{\partial u}{\partial x}+i\,\frac{\partial v}{\partial x}\right|^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2.$$

Рассмотрим на плоскости $z=x+iy$ два семейства линий вида

$$u(x,\,y)=C_1;\;\; v(x,\,y)=C_2, \tag{7}$$

где $C_1$ и $C_2$ — произвольные постоянные. На плоскости $w=u+iv$ им будут соответствовать прямые $u=C_1$ и $v=C_2$, параллельные координатным осям, и, следовательно, линии (7) получаются из сетки прямых, параллельных осям, при помощи преобразования (2). Отсюда, между прочим, следует непосредственно, что линии (7), принадлежащие различным семействам, взаимно ортогональны, кроме тех точек, где $f'(z)$ равна нулю. Наоборот, если мы возьмем уравнения

$$u=u(x,\,y);\quad v=v(x,\,y)$$

и положим в правых частях этих уравнений $x = C_1$ или $y = C_2$, где $C_1$ и $C_2$ — произвольные постоянные, то получим на плоскости $w = u + iv$ сетку, состоящую из двух семейств взаимно ортогональных линий. Эта сетка получается из сетки прямых, параллельных осям координат плоскости $z$, при помощи преобразования, совершаемого функцией (1). Эти две сетки, которые будут играть в дальнейшем существенную роль, называются обычно *изотермическими сетками*. Выясним смысл этого названия. Вещественная часть $u(x, y)$ (или мнимая) регулярной функции должна удовлетворять уравнению Лапласа [2]:

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0.$$

Но такому уравнению удовлетворяет температура в случае установившегося потока тепла [II, 129] причем мы считаем, что имеется

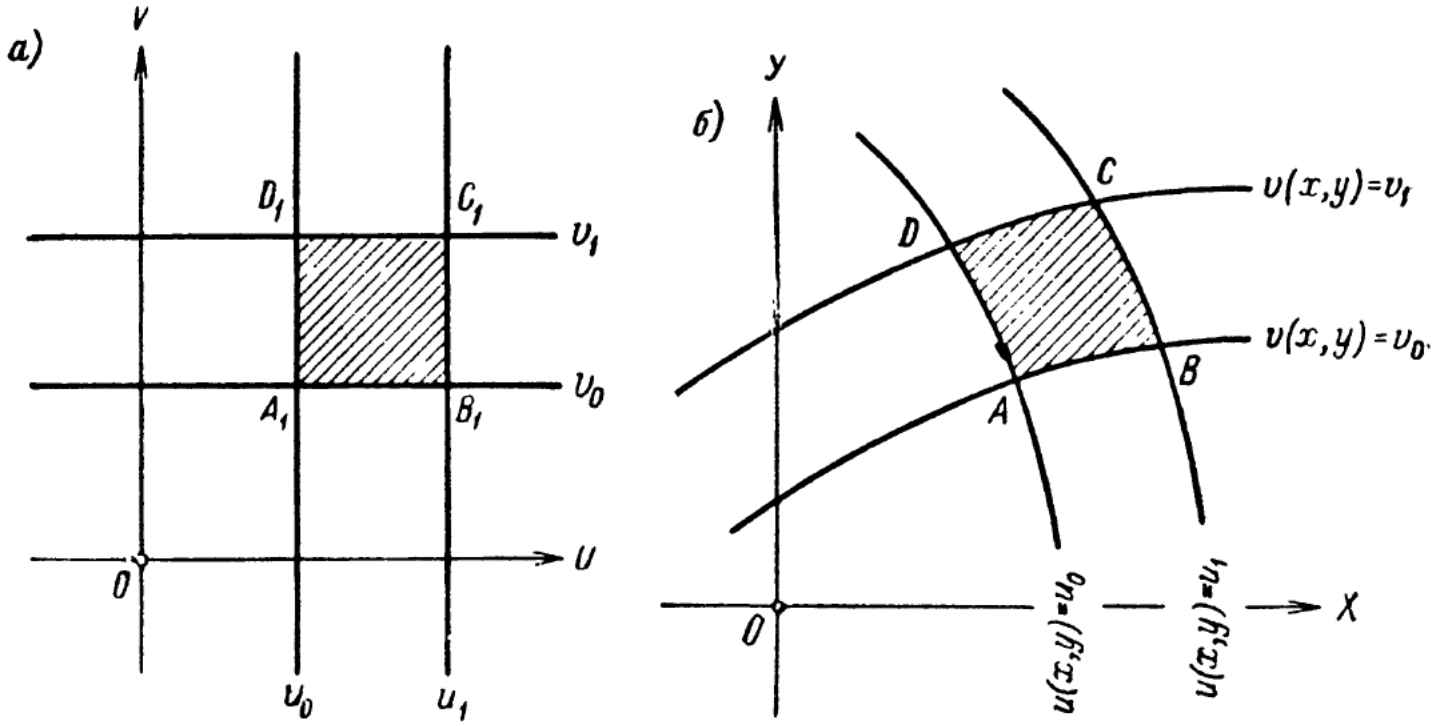



Рис. 26.

плоский случай, т. е. температура $u$ не зависит от одной из координат. При таком толковании функции $u(x, y)$, как температуры при установившемся потоке тепла, линии первого из семейств (7) будут линиями равной температуры, откуда и происходит название изотермическая сетка. В рассматриваемом случае линии второго из семейств (7), ортогональные к первым, будут служить векторными линиями для векторов, которые мы рассматривали в [II, 129] и называли векторами потока тепла.

При преобразовании (1) две линии $u(x, y) = u_0$ и $u(x, y) = u_1$ перейдут в прямые $u = u_0$ и $u = u_1$, параллельные оси $u = 0$, и часть области $B$, ограниченная вышеуказанными линиями, перейдет в часть полосы, ограниченной вышеуказанными прямыми, параллельными оси $u = 0$. Криволинейный четырехугольник, ограниченный четырьмя

линиями изотермической сетки, перейдет в результате преобразования (1) в прямоугольник, ограниченный прямыми, параллельными осям (рис. 26)

$$u = u_0, \quad u = u_1, \quad v = v_0, \quad v = v_1.$$

Сделаем еще одно добавление к общим основам конформного преобразования, прежде чем переходить к примерам. Мы видели, что при преобразовании, совершаемом регулярной функцией $f(z)$ в тех точках, где производная отлична от нуля, углы сохраняются не только по величине, но и по направлению их отсчета. Иногда рассматривают такие преобразования плоскости, при которых величины углов сохраняются, а направление их отсчета переходит в противоположное. Такое преобразование называют иногда *конформным преобразованием второго рода.* В качестве примера укажем преобразование симметрии в вещественной оси, которое будет, очевидно, конформным преобразованием второго рода (рис. 27). Это преобразование можно записать в виде формулы $w = \bar{z}$. Вообще, если $f(z)$ есть регулярная функция в области $B$, то формула

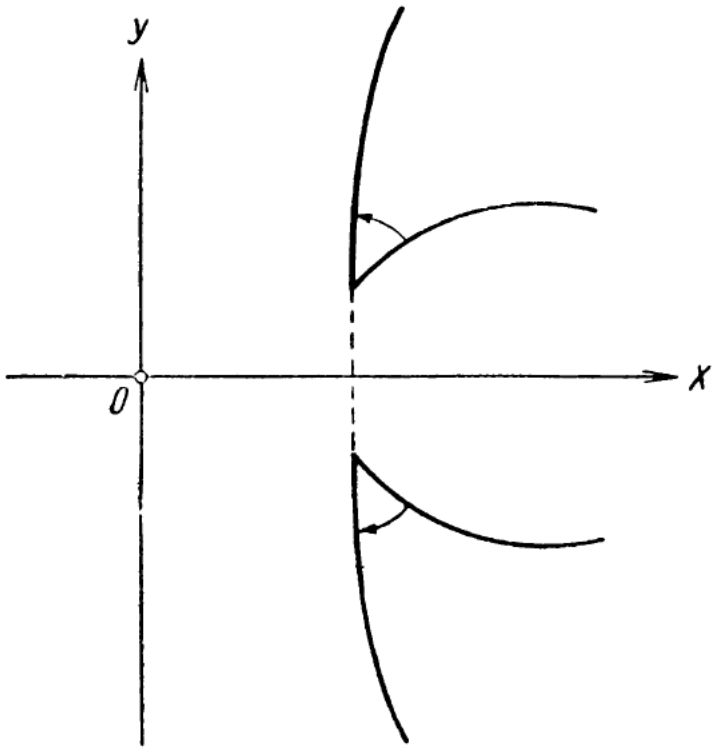


Рис. 27.

$$w = f(\bar{z}) \tag{8}$$

будет давать конформное преобразование второго рода, определенное в области $B'$, симметричной с $B$ относительно вещественной оси. Действительно, переход от $z$ к $\bar{z}$ будет переводить $B'$ в $B$ с сохранением величин углов, но с изменением направления их отсчета. Последующий затем переход от $\bar{z}$ к $f(\bar{z})$ по формуле (8) не будет уже менять ни величин углов, ни направления их отсчетов и, таким образом, в окончательном преобразовании от $z$ к $w$ мы будем иметь конформное преобразование второго рода.

**32. Линейное преобразование.** В качестве первого примера конформного преобразования рассмотрим наиболее простую линейную функцию

$$w = az + b \quad (a \neq 0), \tag{9}$$

откуда

$$z = \frac{1}{a} w - \frac{b}{a}.$$

Эта функция переводит всю плоскость, включая бесконечно далекую точку, в себя, причем бесконечно далекая точка также переходит в себя, т. е. остается на месте. В частном случае при $a=1$ мы имеем функцию $w=z+b$, которая дает параллельный перенос плоскости на вектор, соответствующий комплексному числу $b$. В другом частном случае $b=0$ и $a=e^{i\psi}$ ($\psi$ — некоторое вещественное число) дело сводится к прибавлению к аргументу $z$ числа $\psi$, и это преобразование $w=e^{i\psi}z$ есть, очевидно, поворот плоскости вокруг начала на угол $\psi$. Общий случай движения плоскости как целого получится соединением поворота и параллельного переноса:

$$w=e^{i\psi}z+b. \tag{10}$$

Если $a=e^{i\psi}\neq 1$, т. е. если мы имеем дело не с чистым параллельным переносом, то из формулы (10) нетрудно определить координату неподвижной точки преобразования, т. е. той точки, которая останется на своем месте в результате преобразования. Координата этой точки определится из уравнения

$$z_0=e^{i\psi}z_0+b, \quad \text{откуда} \quad z_0=\frac{b}{1-e^{i\psi}}.$$

Нетрудно проверить, что преобразование (10) может быть написано в виде

$$w-z_0=e^{i\psi}(z-z_0),$$

т. е. общий случай движения плоскости (10) мы можем рассматривать как поворот плоскости вокруг точки $z_0$ на угол $\psi$. Заметим, что преобразование (10) будет иметь еще вторую неподвижную точку на бесконечности.

Перейдем теперь к рассмотрению того случая, когда модуль коэффициента $a$ в линейном преобразовании (9) будет отличен от единицы. Вводя модуль и аргумент числа $a$, рассмотрим преобразование в случае $b=0$:

$$w=\rho e^{i\psi}z.$$

Здесь дело сводится к умножению длины радиуса вектора из начала в точку $z$ на $\rho$ и к повороту плоскости вокруг начала на угол $\psi$. Такое преобразование называют *преобразованием подобия с центром подобия в начале и с коэффициентом подобия* $\rho$.

Рассмотрим теперь линейное преобразование (9) в общем случае при $a\neq 1$. Вводя неподвижную точку преобразования

$$z_0=az_0+b, \quad \text{т. е.} \quad z_0=\frac{b}{1-a},$$

мы можем переписать формулу (9), как это нетрудно проверить, в виде

$$w-z_0=a(z-z_0),$$

и имеем здесь, очевидно, преобразование подобия, но только с центром не в начале координат, а в точке $z_0$. Предоставляем читателю показать, что в данном случае изотермическая сетка будет состоять из двух семейств параллельных прямых линий, что очевидно и чисто геометрически.

**33. Дробно-линейное преобразование.** *Дробно-линейным преобразованием* называется преобразование, выражающееся в виде частного двух линейных функций

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \tag{11}$$

причем надо считать $ad - bc \neq 0$, так как в противном случае дробь, стоящая в формуле (11), будет сократимой и будет равна просто постоянному числу. Решая уравнение (11) относительно $z$, получим формулу для преобразования, обратного (11), которое также будет дробно-линейным:

$$z = \frac{-dw + b}{cw - a}. \tag{12}$$

Всякой точке плоскости $z$ будет соответствовать определенная точка плоскости $w$ и наоборот, т. е. преобразование (11) преобразует всю плоскость, включая бесконечно далекую точку, саму в себя.

Если в формуле (11) $c = 0$, то преобразование просто будет линейным. В противном случае точка $z = \infty$ перейдет в точку $\frac{a}{c}$, и точка $z = -\frac{d}{c}$ даст точку $w = \infty$, т. е. в общем случае дробно-линейного преобразования бесконечно далекая точка не будет уже неподвижной точкой.

Докажем одно основное свойство дробно-линейного преобразования, а именно покажем, что оно преобразует окружность в окружность, причем под термином «окружность» мы будем здесь и в дальнейшем понимать не только окружность в собственном смысле слова, но и прямую линию. Для линейного преобразования, которое сводится или к простому движению плоскости как целого, или к преобразованию подобия, это свойство совершенно очевидно, причем в этом случае прямая переходит в прямую или окружность в собственном смысле этого слова. Прежде чем доказывать это свойство для дробно-линейного преобразования, представим его в несколько другом виде. Считая $c \neq 0$ и деля числитель на знаменатель, мы можем написать формулу (11) в виде

$$w = e + \frac{f}{z + \frac{d}{c}}, \text{ где } e = \frac{a}{c} \text{ и } f = \frac{bc - ad}{c^2}.$$

Таким образом, наше преобразование состоит из параллельного переноса $w_1 = z + \frac{d}{c}$, преобразования вида $w_2 = \frac{f}{w_1}$ и еще параллельного переноса $w = w_2 + e$. Достаточно, таким образом, рассмотреть преобразование простейшего вида

$$w = \frac{\gamma}{z} \tag{13}$$

и доказать, что оно переводит окружность в окружность. Уравнение окружности имеет вид

$$A(x^2 + y^2) + 2Bx + 2Cy + D = 0,$$

где $A = 0$ в случае прямой линии. Мы можем записать это уравнение в виде

$$Az\bar{z} + \delta z + \overline{\delta z} + D = 0, \quad \text{где } \delta = B - iC \tag{14}$$

и черта наверху показывает, что взято комплексное сопряженное число. Положим теперь, что на плоскости $z$ мы имеем некоторую окружность $l$. Чтобы получить уравнение преобразованной кривой на плоскости $w$, нам достаточно определить $z$ из уравнения (13) и подставить полученное выражение в уравнение (14). Мы будем иметь, таким образом, на плоскости $w$ кривую $l_1$ с уравнением

$$A\gamma\bar{\gamma} + \delta\gamma\bar{w} + \overline{\delta\gamma}w + Dw\bar{w} = 0.$$

Это уравнение того же типа, что и уравнение (14), т. е. ему также соответствует окружность (или прямая). Итак, *всякое преобразование вида* (11) *преобразует окружность в окружность* (*прямая есть окружность, проходящая через бесконечно далекую точку*).

Положим, что преобразование (11) преобразует некоторую окружность $l$ в окружность $l_1$, причем обе окружности суть окружности в собственном смысле слова. Принимая во внимание сказанное в [**22**], мы можем утверждать, что если положительному обходу по $l$ соответствует положительный обход по $l_1$, то преобразование (11) переводит внутренность $l$ во внутренность $l_1$ и внешность $l$ во внешность $l_1$. Если же направления обходов по $l$ и $l_1$ противоположны, то внутренность $l$ переходит во внешность $l_1$ и наоборот. Если одна из упомянутых окружностей есть прямая или обе суть прямые, то для определения тех частей плоскости, которые переходят друг в друга, надо брать соответствующий обход по обеим линиям, и при этом те части плоскости, которые находятся с одной стороны от движущегося наблюдателя, например слева, будут переходить друг в друга.

Рассмотрим далее две точки $A_1$ и $A_2$, симметричные относительно окружности $l$. Положим, что после преобразования они перешли в точки $B_1$ и $B_2$. Покажем, что эти последние также будут симметричны относительно преобразованной окружности $l_1$. Действительно,

пучок окружностей, проходящих через точки $A_1$ и $A_2$, будет, как мы знаем [24], состоять из окружностей, ортогональных к $l$. После преобразования мы получим, очевидно, пучок окружностей, проходящих через точки $B_1$ и $B_2$, и в силу конформности эти окружности, составляющие пучок, будут ортогональны к окружности $l_1$, а это, как мы знаем, и является характерным свойством симметричных точек. Таким образом, *если преобразование* (11) *переводит окружность* $l$ *в окружность* $l_1$, *то точки, симметричные относительно окружности* $l$, *переходят при этом в точки, симметричные относительно окружности* $l_1$. Заметим при этом, что центру окружности соответствует по закону симметрии бесконечно далекая точка. В данном случае пучок окружностей, проходящих через эти две точки, сводится к пучку прямых, проходящих через центр окружности, и прямые этого пучка, очевидно, ортогональны самой окружности.

Если $a$ и $c \neq 0$, то мы можем написать преобразование (11) в следующем виде:

$$w = k\frac{z-\alpha}{z-\beta} \qquad \left(k = \frac{a}{c}\right). \tag{15}$$

Числа $\alpha$ и $\beta$ имеют простое геометрическое значение, а именно точка $z = \alpha$ переходит в начало $w = 0$ и точка $z = \beta$ переходит в бесконечно далекую точку.

Рассмотрим на плоскости $w$ семейство концентрических окружностей, имеющих центр в начале. Уравнение этих окружностей будет $|w| = C$, и для них вышеупомянутые точки $w = 0$ и $w = \infty$ будут симметричными. Отсюда следует, что этим окружностям на плоскости $z$ будут соответствовать также окружности, для которых точки $z = \alpha$ и $z = \beta$ будут симметричными, и уравнение этого семейства окружностей будет, очевидно, иметь вид

$$\left|\frac{z-\alpha}{z-\beta}\right| = C, \tag{16}$$

где $C$ — произвольная постоянная. Итак, *уравнению* (16) *будет соответствовать семейство окружностей, относительно которых точки* $\alpha$ *и* $\beta$ *симметричны* (рис. 28). В это семейство будет входить, очевидно, и прямая, перпендикулярная к отрезку $\alpha$, $\beta$ в его середине. Рассмотрим теперь на плоскости $w$ семейство прямых, проходящих через начало, или, иначе говоря, пучок окружностей, проходящих через точки $w = 0$ и $w = \infty$. Уравнение этого пучка окружностей будет, очевидно, $\arg w = C$. На плоскости $z$ этому пучку окружностей будет соответствовать, очевидно, пучок окружностей, проходящих через точки $\alpha$ и $\beta$, и уравнение этого пучка будет (заметим, что аргумент числа $k$ постоянен)

$$\arg\frac{z-\alpha}{z-\beta} = C_1. \tag{17}$$

Итак, *уравнению* (17) *соответствует на плоскости z пучок окружностей, проходящих через точки* $\alpha$ и $\beta$. Окружности семейства (17), очевидно, пересекаются с окружностями семейства (16) под прямым углом (рис. 28).

Определим теперь изотермическую сетку на плоскости $z$. На плоскости $w$ ей соответствуют два семейства прямых, параллельных осям. Каждое из этих семейств мы можем рассматривать как семейство окружностей, взаимно касающихся в бесконечно далекой точке.

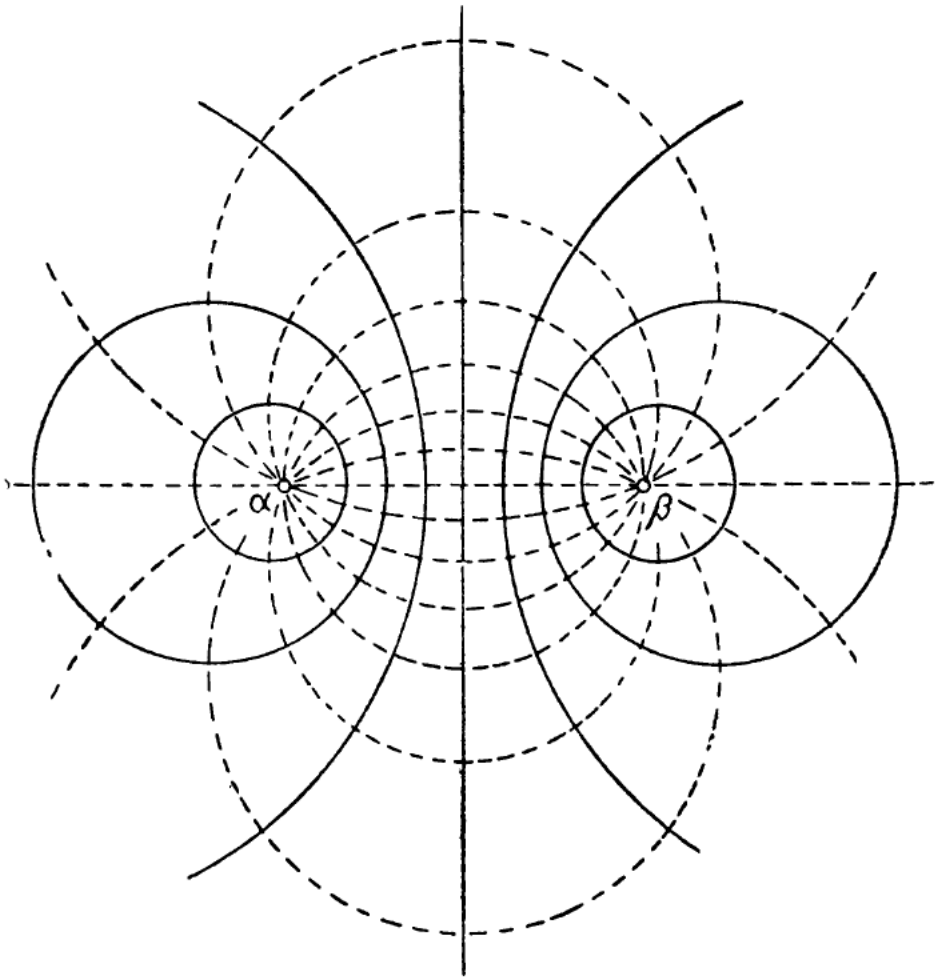



Рис. 28.

Такому семейству будет соответствовать на плоскости $z$ некоторое семейство окружностей, взаимно касающихся в точке $z = -\frac{d}{c}$. Таким образом, *искомая изотермическая сетка будет состоять из двух семейств окружностей, причем окружности каждого семейства взаимно касаются в точке* $z = -\frac{d}{c}$, *и окружности двух разных семейств пересекаются в этой точке под прямым углом* (рис. 29).

Точное определение одного из этих семейств, а вместе с ним и другого, связано со значением комплексных коэффициентов преобразования (11).

Преобразование (11) содержит три произвольных комплексных параметра, а именно отношения трех из коэффициентов $a, b, c, d$

к четвертому. Таким образом, мы можем определить преобразование (11), задав соответственное количество дополнительных условий. Мы можем, например, потребовать, чтобы три заданные точки $z_1$, $z_2$, $z_3$ плоскости $z$ перешли в три заданные точки $w_1$, $w_2$, $w_3$ плоскости $w$. Нетрудно написать то дробно-линейное преобразование, которое будет осуществлять эти условия. Оно будет иметь вид

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}\cdot\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\cdot\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}. \tag{18}$$

Действительно, решая это уравнение относительно $w$, мы получим, очевидно, дробно-линейное преобразование вида (11). Кроме того, подставляя $z=z_1$ и $w=w_1$, мы будем в формуле (18) и слева и справа иметь нуль. При подстановке другой пары точек $z=z_3$ и $w=w_3$ мы будем в обеих частях иметь единицу, и при подстановке третьей пары точек мы будем в обеих частях иметь бесконечность. Отсюда видно, что дробно-линейное преобразование, определяемое по формуле (18), действительно удовлетворяет поставленному условию. Нетрудно показать также, что это условие определяет дробно-линейное преобразование единственным образом. При этом, очевидно, построенное преобразование будет переводить окружность, определяемую тремя точками $z_1$, $z_2$, $z_3$, в окружность, определяемую точками $w_1$, $w_2$, $w_3$. Если обе тройки точек взяты на одной и той же окружности, то дробно-линейное преобразование будет преобразовывать окружность самое в себя. Если при этом последовательность точек $z_k$ на этой окружности дает то же направление обхода, что и последовательность точек $w_k$, то построенное преобразование будет преобразовывать круг, ограниченный упомянутой окружностью, в самого себя.

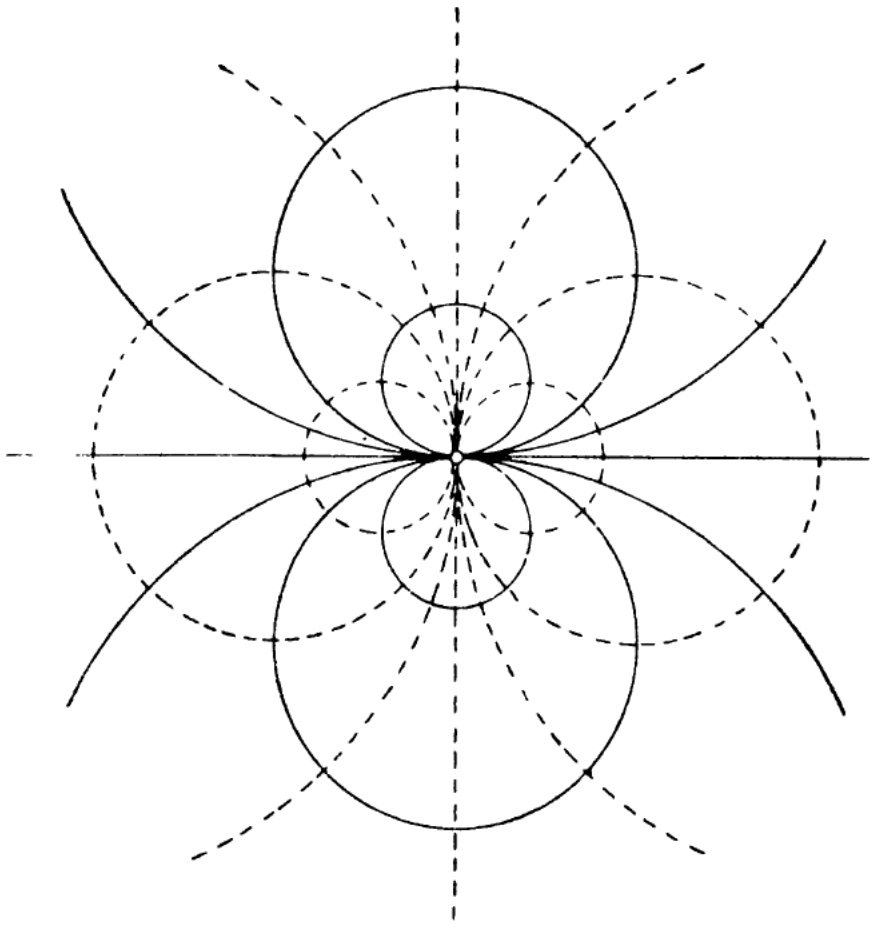


Рис. 29.

В качестве примера рассмотрим верхнюю полуплоскость, границей которой служит вещественная ось (внутренние точки этой полу-

плоскости определяются из условия, что коэффициент мнимой части у координат точек положителен). В данном случае преобразование, переводящее верхнюю полуплоскость в самое себя, должно и вещественную ось преобразовывать в себя, т. е. вещественным $z$ должны соответствовать и вещественные $w$, а следовательно, в формуле (11) мы можем все четыре коэффициента считать также вещественными. Но этого мало, надо еще, чтобы при движении $z$ в положительном направлении по вещественной оси (в сторону возрастания) и $w$ двигалось бы в таком же направлении. В противном случае верхняя полуплоскость $z$ будет переходить в нижнюю полуплоскость $w$.

Подставляя в формулу (11) $z = x + iy$, получим

$$w = \frac{(ax+b)+iay}{(cx+d)+icy}$$

или, отделяя вещественную и мнимую части,

$$w = u + iv = \frac{(ax+b)(cx+d)+acy^2}{(cx+d)^2+c^2y^2} + i\,\frac{(ad-bc)\,y}{(cx+d)^2+c^2y^2}.$$

Отсюда непосредственно видно, что при $y > 0$ коэффициент у мнимой части $w$ будет также положителен, если выполнено условие

$$ad - bc > 0. \qquad (19)$$

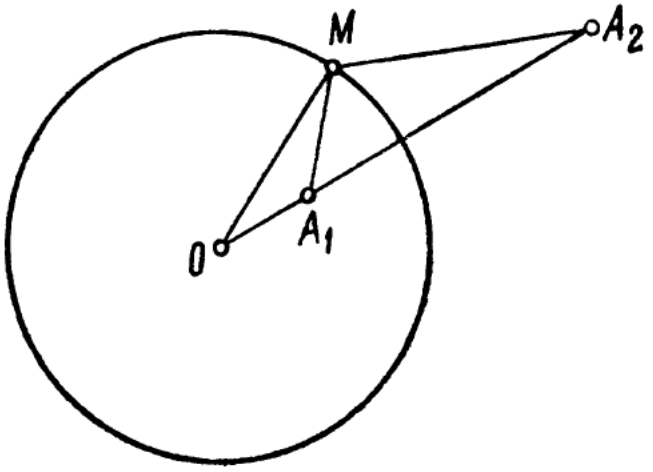



Рис. 30.

Итак, *общий вид дробно-линейных преобразований, преобразующих верхнюю полуплоскость самое в себя, будет* (11), *с любыми вещественными коэффициентами, удовлетворяющими условию* (19).

Точно так же можно рассматривать преобразование самого в себя единичного круга, т. е. круга с центром в начале координат и радиусом единица, уравнение которого может быть написано в виде $|z| \leqslant 1$. Предварительно выясним некоторые простые свойства точек, симметричных относительно окружности $C$ такого круга.

Пусть $A_1$ и $A_2$ — две такие точки и $M$ — любая точка на самой окружности $C$. Мы имеем $\overline{OA_1} \cdot \overline{OA_2} = \overline{OM}^2$, что может быть записано в виде следующей пропорции (рис. 30):

$$\frac{\overline{OA_1}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{OA_2}}.$$

Отсюда видно, что треугольники $OA_1M$ и $OA_2M$, имеющие общий угол $A_1OM$ и пропорциональные стороны, образующие этот

угол, будут подобными треугольниками, и это подобие дает нам следующую пропорцию:

$$\frac{\overline{MA_1}}{\overline{MA_2}} = \frac{\overline{OA_1}}{\overline{OM}}. \tag{20}$$

Обозначим через $\alpha$ комплексную координату $A_1$ и пусть $\alpha = \rho e^{i\varphi}$. Для симметричной точки $A_2$ будем иметь, очевидно, $\beta = \frac{1}{\rho} e^{i\varphi}$, или иначе комплексную координату этой симметричной точки мы можем выразить дробью $\beta = \frac{1}{\bar{\alpha}}$. Составим дробно-линейное преобразование, которое преобразует единичный круг сам в себя и переводит точку $\alpha$ в начало. Оно должно переводить симметричную точку $\beta$ в бесконечность, т. е. оно должно иметь вид

$$w = k \frac{z - \alpha}{z - \beta} \tag{21}$$

или, если заменить $\beta = \frac{1}{\bar{\alpha}}$,

$$w = k \frac{\bar{\alpha}(z - \alpha)}{\bar{\alpha} z - 1}, \tag{22}$$

где $k$ — постоянный множитель, вид которого мы должны еще определить из условия, что вся правая часть формулы (21) при любом $z$ на окружности $C$ должна иметь также модуль, равный единице, т. е.

$$|k| \frac{|z - \alpha|}{|z - \beta|} = 1 \text{ при } |z| = 1.$$

Но, очевидно, в силу (20)

$$\frac{|z - \alpha|}{|z - \beta|} = \frac{|\alpha|}{1},$$

откуда $|k\alpha| = 1$. Обращаясь к формуле (22), мы видим, таким образом, что произведение $k\bar{\alpha}$ должно иметь модуль, равный единице, т. е. должно иметь вид $k\bar{\alpha} = e^{i\psi}$, где $\psi$ может иметь любое вещественное значение. Окончательно для искомого преобразования мы получаем формулу

$$w = e^{i\psi} \frac{z - \alpha}{\bar{\alpha} z - 1}, \tag{23}$$

в которой можем произвольно выбирать точку $\alpha$ внутри единичного круга и вещественный параметр $\psi$. В частном случае, если $\alpha = 0$, т. е. если начало переходит само в себя, мы имеем простое преобразование $w = e^{i(\psi + \pi)} z$, т. е. вращение единичного круга вокруг начала на угол $(\psi + \pi)$. Общее преобразование (23) можно разбить

на две части, а именно на преобразование

$$w = \frac{z - a}{\bar{a}z - 1}, \tag{24}$$

переводящее единичный круг самого в себя и преобразующее точку $a$ в начало, и затем — на поворот вокруг начала на угол $\psi$.

Мы можем также построить бесчисленное множество преобразований, переводящих некоторый круг $K_1$ в другой круг $K_2$. Достаточно для этого построить одно из таких преобразований, переводящих $K_1$ в $K_2$, и затем к полученному результату применить любое дробно-линейное преобразование, переводящее круг $K_2$ самого в себя. При этом важно отметить, что *результат последовательного применения двух дробно-линейных преобразований есть также дробно-линейное преобразование.* Действительно, положим, что мы имеем дробно-линейное преобразование (11) от переменной $z$ к переменной $w$ и затем следующее дробно-линейное преобразование

$$w_1 = \frac{a_1 w + b_1}{c_1 w + d_1} \tag{25}$$

от переменной $w$ к переменной $w_1$. Подставляя выражение (11) в последнюю формулу, будем иметь после элементарных преобразований окончательное дробно-линейное преобразование от переменной $z$ к переменной $w_1$:

$$w_1 = \frac{(a_1 a + b_1 c)\, z + (a_1 b + b_1 d)}{(c_1 a + d_1 c)\, z + (c_1 b + d_1 d)}.$$

Оно называется обычно *произведением дробно-линейных преобразований* (11) и (25), причем, вообще говоря, это произведение будет зависеть от порядка сомножителей, т. е. от того порядка, в котором мы совершали дробно-линейные преобразования (11) и (25).

Вернемся к случаю верхней полуплоскости и единичного круга и построим одно дробно-линейное преобразование, переводящее полуплоскость в единичный круг. Возьмем для этого преобразование вида

$$w = \frac{z - i}{z + i}. \tag{26}$$

Нетрудно видеть, что точка $z = i$ верхней полуплоскости переходит в начало координат, и вещественным значениям $z$ соответствуют значения $w$, по модулю равные единице. Действительно,

$$|w| = \frac{|z - i|}{|z + i|},$$

причем числитель и знаменатель написанной дроби равны соответственно расстоянию от точки $z$ до точек $i$ и $(-i)$, и если точка $z$ находится на вещественной оси, то эти расстояния одинаковы и,

следовательно, $|w| = 1$. Если затем к переменной $w$ применить любое дробно-линейное преобразование, преобразующее единичный круг самого в себя, то получим общий вид преобразований, переводящих верхнюю полуплоскость в единичный круг.

В заключение докажем *принцип симметрии в том общем виде*, как мы его формулировали в [24]. Пусть функция $f(z)$ регулярна с одной стороны от некоторой дуги $AB$ окружности $C$, непрерывна вплоть до этой дуги и преобразует ее в некоторую дугу $A_1B_1$ окружности $C_1$. Совершим над $z$ дробно-линейное преобразование, переводящее $C$ в вещественную ось:

$$z_1 = \frac{az+b}{cz+d},$$

и точно так же совершим над самой функцией дробно-линейное преобразование, переводящее окружность $C_1$ в вещественную ось. Таким образом, будем иметь новую функцию $f_1(z_1)$ от новой независимой переменной $z_1$:

$$f_1(z_1) = \frac{a'f(z)+b'}{c'f(z)+d'}.$$

Эта новая функция $f_1(z_1)$ регулярна с одной стороны отрезка вещественной оси, непрерывна вплоть до самого отрезка и переводит этот отрезок тоже в отрезок вещественной оси. Согласно первоначальной формулировке принципа симметрии, доказанного нами раньше [24], эта функция будет аналитически продолжима за упомянутый отрезок и будет в точках, симметричных относительно вещественной оси, иметь значения, также симметричные относительно вещественной оси. Принимая во внимание, что при упомянутых двух дробно-линейных преобразованиях симметричные точки переходят в симметричные, мы можем утверждать, что первоначальная функция $f(z)$ аналитически продолжима за дугу $AB$ окружности $C$, и точки, симметричные относительно этой окружности, переводит в точки, симметричные относительно окружности $C_1$.

Дробно-линейное преобразование, как мы увидим дальше, имеет большое принципиальное значение в теории функций комплексного переменного. Часто им пользуются совершенно так же, как преобразованием координат в аналитической геометрии, а именно прежде чем рассматривать какой-нибудь вопрос, подвергают плоскость переменных, входящих в задачу, дробно-линейному преобразованию так, чтобы получить возможно более простую формулировку задачи. Так, например, пользуясь дробно-линейным преобразованием, мы свели принцип симметрии в общем случае к уже разобранному нами частному случаю.

Назовем отображением в некоторой окружности $C$ или прямой преобразование плоскости, при котором всякая точка $A$ переходит

в точку $A_1$, симметричную с ней относительно $C$. Пусть $z$ — комплексная координата $A$ и $w$ — комплексная координата $A_1$. Положим, что $C$ есть окружность с центром $B$ ($z = a$) и радиусом $R$. Векторы $\overline{BA}$ и $\overline{BA_1}$ должны иметь один и тот же аргумент, а произведение их длин должно равняться $R^2$. Нетрудно видеть, что это приводит к следующей формуле, выражающей $w$ через $z$:

$$w - a = \frac{R^2}{\bar{z} - \bar{a}}, \tag{27}$$

т. е. отображение в окружности выражается дробно-линейной функцией от $\bar{z}$:

$$w = \frac{a\bar{z} + (R^2 - a\bar{a})}{\bar{z} - \bar{a}}$$

и, следовательно, является конформным преобразованием второго рода. Рассмотрим теперь отображение в прямой. Положим, что прямая проходит через начало и образует угол $\psi$ с положительным направлением вещественной оси (рис. 31). При этом точка $z$ перейдет, очевидно, в точку $w$ с тем же модулем $|w| = |z|$ и с аргументом $\arg w = 2\psi - \arg z$, т. е. в этом случае преобразование может быть написано в виде

$$w = e^{i2\psi}\bar{z}, \tag{28}$$

и оно будет выражаться просто линейной функцией от $\bar{z}$. Как нетрудно видеть, тот же результат получим и при отображении в любой прямой.

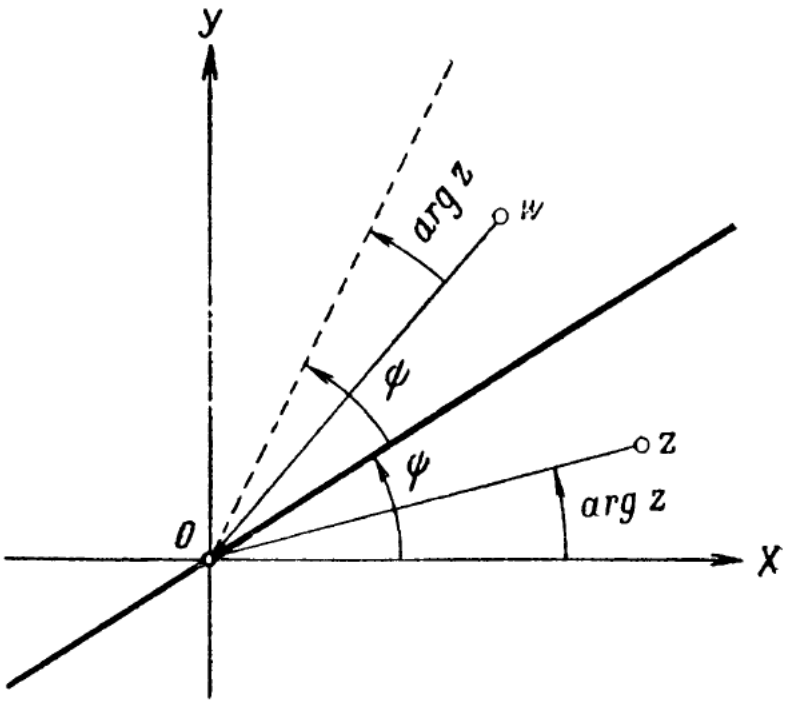



Рис. 31.

Если произвести последовательно два отображения в различных окружностях или прямых, то в окончательном результате получится некоторое дробно-линейное преобразование. Рассмотрим более подробно тот случай, когда производятся последовательно два отображения в пересекающихся прямых. Можно всегда считать, что точка пересечения находится в начале координат. Пусть, далее, $\psi_1$ и $\psi_2$ суть углы, образованные этими прямыми с положительным направлением вещественной оси. Последовательно проводя эти отображения, мы перейдем от точки $z$ к точке $w_1$ и от точки $w_1$ к точке $w$ по формулам

$$w_1 = e^{i2\psi_1}\bar{z}, \quad w = e^{i2\psi_2}\bar{w}_1.$$

Подставляя выражение $w_1$ в правую часть второй формулы, мы будем иметь окончательное преобразование от $z$ к $w$ в виде

$$w = e^{i2(\psi_2 - \psi_1)} z,$$

и это будет вращение вокруг начала на угол $2(\psi_2 - \psi_1)$, т. е. два последовательных отображения в пересекающихся прямых дают вращение плоскости вокруг точки пересечения на угол, равный удвоенному углу, образованному этими прямыми. Точно так же нетрудно показать, что два последовательных отображения в параллельных прямых дают параллельный перенос плоскости.

**34. Функция $w = z^2$.** Мы уже исследовали раньше (в других обозначениях) функцию

$$w = z^2 \tag{29}$$

и видели, что она преобразует плоскость $z$ в двулистную риманову поверхность на плоскости $w$ с точками разветвления первого порядка $w = 0$ и $w = \infty$. Установим теперь только вид изотермических сеток на плоскостях $z$ и $w$. Отделяя вещественную и мнимую части, получим

$$w = u(x, y) + iv(x, y) = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i2xy.$$

Изотермическая сетка на плоскости $z$ будет состоять из двух семейств равнобочных гипербол (рис. 32):

$$x^2 - y^2 = C_1; \quad 2xy = C_2.$$

Рассмотрим теперь изотермическую сетку на плоскости $w$. Полагая в формулах:

$$u = x^2 - y^2; \quad v = 2xy, \quad x = C_1$$

и исключая $y$, а затем полагая $y = C_2$ и исключая $x$, мы получим два семейства парабол (рис. 33):

$$v^2 = 4C_1^2(C_1^2 - u); \quad v^2 = 4C_2^2(C_2^2 + u),$$

которые являются преобразованием прямых $x = C_1$ и $y = C_2$ плоскости $z$.

Мы можем, очевидно, рассматривать изотермическую сетку, образованную этими параболами, как изотермическую сетку на плоскости $z$ для функции $w = \sqrt{z}$, обратной функции (29).

Рассмотрим на рис. 32 какую-либо равнобочную гиперболу, изображенную пунктиром, для которой ось $OX$ является вещественной осью. Ее уравнение будет $x^2 - y^2 = C_1$, где $C_1$ — некоторая положительная постоянная. Возьмем ее правую ветвь. Если в уравнении $x^2 - y^2 = C$ увеличивать $C$ от $C_1$ до $(+\infty)$, то будут

получаться гиперболы, изображенные пунктиром, правые ветви которых лежат правее правой ветви гиперболы $x^2-y^2=C_1$, и из сказанного выше непосредственно следует, что функция (29) конформно преобразует часть плоскости $z$, лежащую внутри правой ветви гиперболы, на полуплоскость $u\geqslant C_1$ плоскости $w$. Совершенно аналогично функция (29) конформно преобразует часть плоскости $z$, лежащую внутри левой ветви гиперболы $x^2-y^2=C_1$, на полуплоскость $u\geqslant C_1$.

Рассмотрим теперь на рис. 33 какую-либо параболу, изображенную пунктиром. Ее уравнение имеет вид $v^2=4C_2^2(C_2^2+u)$, и ей

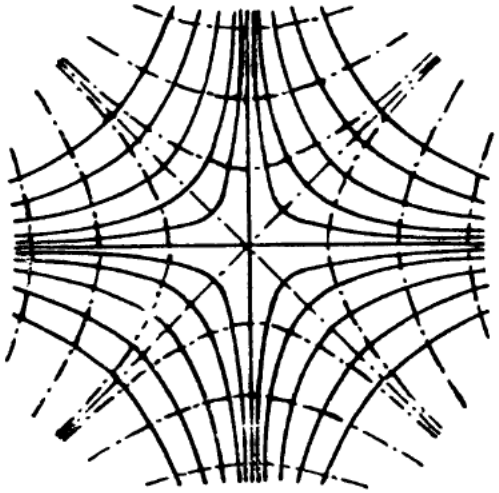


Рис. 32.

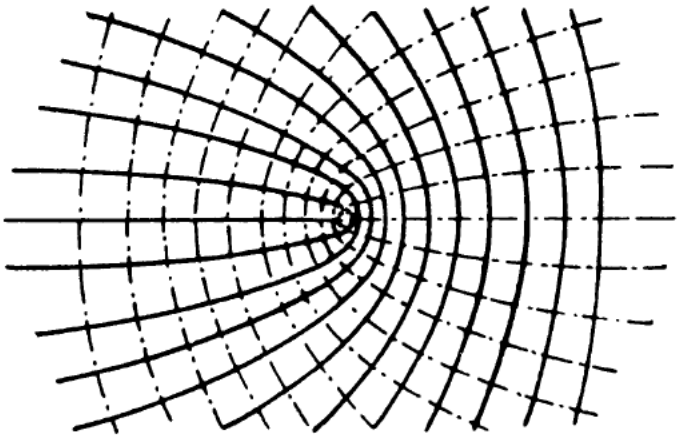


Рис. 33.

соответствует на плоскости $z$ прямая $y=C_2$, причем постоянную $C_2$ мы можем считать положительной, поскольку в уравнение параболы входит только $C_2^2$. Если в уравнении $v^2=4C^2(C^2+u)$ увеличивать $C$ от $C_2$ до $(+\infty)$, то будут получаться параболы, изображенные пунктиром и лежащие левее параболы $v^2=4C_2^2(C_2^2+u)$, и отсюда следует, что функция $z=\sqrt{w}$ конформно преобразует часть плоскости $w$, лежащую вне параболы $v^2=4C_2^2(C_2^2+u)$, на полуплоскость $y\geqslant C_2$ плоскости $z$.

**35. Функция $w=\frac{k}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$.** Рассмотрим преобразование плоскости, совершаемое функцией

$$w=\frac{k}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \tag{30}$$

где $k$ — некоторое заданное положительное число. Посмотрим, во что перейдет сетка полярных координат плоскости $z$, т. е. во что перейдут окружности $|z|=\rho$ с центром в начале, и во что перейдет пучок прямых $\arg z=\varphi$, проходящих через начало. Подставляя в формулу (30) $z=\rho e^{i\varphi}$ и отделяя вещественную и мнимую части, получим равенства

$$u=\frac{k}{2}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\cos\varphi;\quad v=\frac{k}{2}\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)\sin\varphi. \tag{31}$$

Рассмотрим окружность $\rho = \rho_0$. Нетрудно исключить $\varphi$ из уравнений (31), что приводит к уравнению

$$\frac{u^2}{\frac{k^2}{4}\left(\rho_0 + \frac{1}{\rho_0}\right)^2} + \frac{v^2}{\frac{k^2}{4}\left(\rho_0 - \frac{1}{\rho_0}\right)^2} = 1, \tag{32}$$

т. е. упомянутая окружность переходит на плоскости $w$ в эллипс с полуосями

$$a = \frac{k}{2}\left(\rho_0 + \frac{1}{\rho_0}\right); \quad b = \frac{k}{2}\left|\rho_0 - \frac{1}{\rho_0}\right|,$$

причем в выражении для $b$ мы пишем абсолютное значение, потому что разность может быть как положительной, так и отрицательной. Уравнения (31) при $\rho = \rho_0$ дают, очевидно, параметрическое уравнение этого эллипса. В случае единичной окружности $\rho = 1$ уравнения (31) дают $u = k\cos\varphi$ и $v = 0$, т. е. эллипс вырождается в отрезок $(-k, k)$ вещественной оси, пробегаемой два раза или, как мы будем говорить, в двойной отрезок. При уменьшении $\rho$ от единицы до нуля эллипсы будут беспредельно расширяться и покроют всю плоскость, и таким образом внутренности единичного круга будет соответствовать вся плоскость $w$ с разрезом $(-k, k)$. Точно так же при увеличении $\rho$ от единицы до бесконечности мы получим такие же беспредельно расширяющиеся эллипсы, т. е. части плоскости $z$, находящейся вне единичного круга, будет также соответствовать вся плоскость $w$ с разрезом $(-k, k)$. Полная плоскость $z$ перейдет в двулистную риманову поверхность на плоскости $w$ с точками разветвления $w = -k$ и $w = k$. В соответствии с этим функция, обратная (30):

$$z = \frac{w \pm \sqrt{w^2 - k^2}}{k}, \tag{30$_1$}$$

будет двузначной и будет иметь упомянутые точки разветвления. Обратимся к более подробному рассмотрению эллипсов (31). Фокусы этих эллипсов находятся на вещественной оси, и их абсциссы вычисляются, как известно, через полуоси $a$ и $b$ по формуле $c = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$. В данном случае будем иметь

$$c = \pm\sqrt{\frac{k^2}{4}\left(\rho_0 + \frac{1}{\rho_0}\right)^2 - \frac{k^2}{4}\left(\rho_0 - \frac{1}{\rho_0}\right)^2} = \pm k,$$

т. е. при всяком значении $\rho_0$ фокусы будут находиться на концах отрезка $(-k, k)$, или, иначе говоря, эллипсы (32) будут софокусными.

Посмотрим теперь, во что перейдут прямые $\varphi = \varphi_0$. Исключая из уравнений (31) переменную $\rho$, будем иметь

$$\frac{u^2}{k^2\cos^2\varphi_0} - \frac{v^2}{k^2\sin^2\varphi_0} = 1, \tag{33}$$

т. е. получим семейство гипербол с полуосями $a=k|\cos\varphi_0|$ и $b=k|\sin\varphi_0|$. Покажем, что эти гиперболы будут софокусны рассмотренным выше эллипсам. Как известно, у гипербол (33) фокусы находятся на вещественной оси, и абсциссы фокусов выражаются через полуоси по формуле $c=\pm\sqrt{a^2+b^2}$. В данном случае $c=\pm k$, т. е. действительно эллипсы и гиперболы софокусны. Гиперболы, соответствующие координатным осям плоскости $z$

$$\left(\varphi=0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi\ \text{и}\ \frac{3\pi}{2}\right),$$

вырождаются в ось $u=0$ и в отрезки $(-\infty, -k)$ и $(k, +\infty)$ вещественной оси. Таким образом, мы можем окончательно сказать,

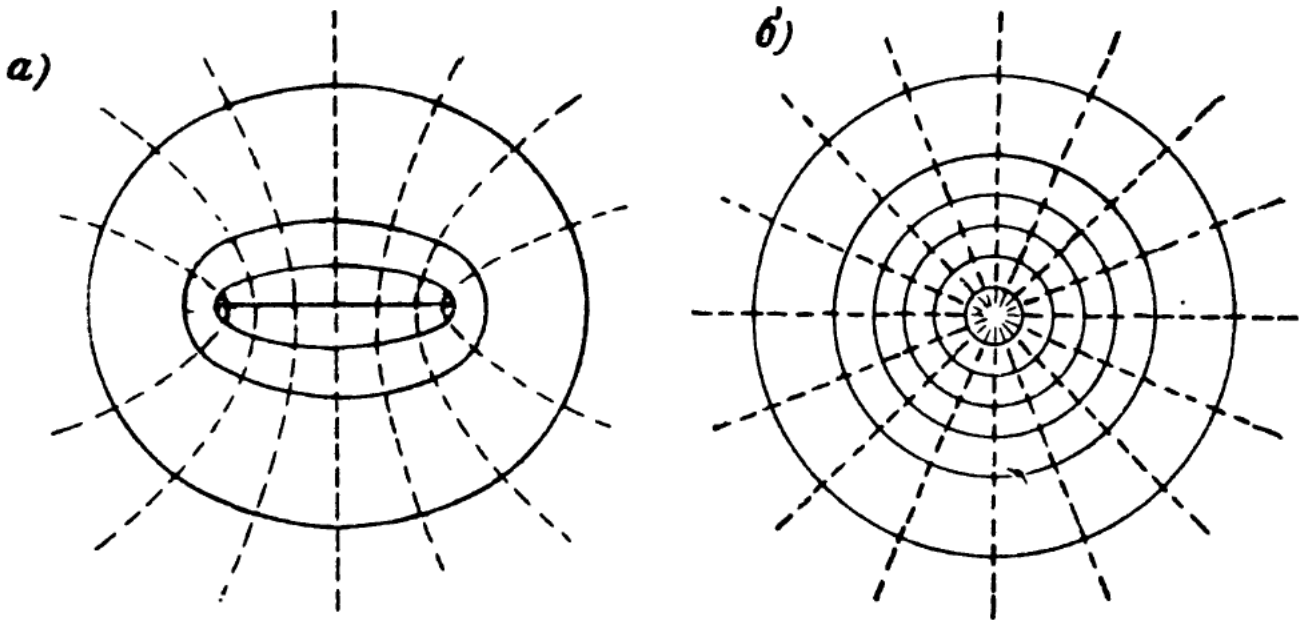



Рис. 34.

что сетка полярных координат плоскости $z$ переходит в результате преобразования (30) в сетку софокусных эллипсов и гипербол, имеющих фокусы в точках $\pm k$ (рис. 34).

Нетрудно построить функцию, для которой сетка софокусных эллипсов и гипербол будет служить изотермической сеткой. Для этого напомним то, что мы раньше знали относительно преобразования, совершаемого показательной функцией [19]:

$$w=e^z,$$

имеющей период $2\pi i$. Из формулы

$$w=e^x e^{yi}$$

непосредственно вытекает, что линии $x=x_0$ переходят в окружности с центром в начале и радиусом $e^{x_0}$, а линии $y=y_0$ переходят в прямые $\varphi=y_0$, проходящие через начало, т. е. функция $e^z$ преобразует сетку декартовых координат плоскости $z$ в сетку полярных координат плоскости $w$.

Рассмотрим функцию вида

$$w_1 = e^{iz} = e^{ix}e^{-y}, \tag{34}$$

имеющую период $2\pi$. Из написанной формулы непосредственно вытекает, что и для этой функции сетка декартовых координат переходит в сетку полярных координат, но только линии $y = y_0$ переходят в окружности и линии $x = x_0$ — в прямые.

Рассмотрим теперь функцию

$$w = \frac{k}{2}\left(w_1 + \frac{1}{w_1}\right) = k\,\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = k\cos z. \tag{35}$$

В результате преобразования (34) сетка декартовых координат перейдет в сетку полярных координат, и затем в результате преобразования (35) сетка полярных координат перейдет в вышеуказанную сетку софокусных эллипсов и гипербол. Но применение упомянутых двух преобразований от $z$ к $w_1$ и от $w_1$ к $w$ дает в окончательном результате преобразование $w = k\cos z$; таким образом, функция $k\cos z$ переводит сетку декартовых координат в сетку софокусных эллипсов и гипербол, т. е. эта последняя сетка является изотермической сеткой на плоскости $w$ для функции $w = k\cos z$. Если бы мы стали рассматривать обратную функцию $w = \arccos\frac{z}{k}$, то для нее сетка софокусных эллипсов и гипербол была бы изотермической сеткой на плоскости $z$.

Совершенно так же, как и в предыдущем номере, мы можем получить из предыдущих рассуждений некоторые результаты, касающиеся конформных преобразований. Одно из значений функции $(30_1)$ преобразует плоскость $w$ с разрезом $(-k, k)$ во внутренность единичного круга плоскости $z$. Та же функция преобразует часть плоскости, находящуюся вне эллипса (32), при каком-либо фиксированном $\rho_0$, во внутреннюю часть круга с центром в начале и радиусом $\rho_0$, где $\rho_0 < 1$. Если мы возьмем другое значение функции $(30_1)$, то получится часть плоскости, лежащая вне указанной окружности, если взять $\rho_0 > 1$. Точно так же одно из значений функции $(30_1)$ конформно преобразует часть плоскости $w$, лежащую между двумя ветвями гиперболы (33), на угол плоскости $z$, определяемый неравенствами: $\varphi_0 \leqslant \arg z \leqslant \pi - \varphi_0$, где $0 < \varphi_0 < \frac{\pi}{2}$.

Подробное рассмотрение конформных отображений, связанных с кривыми второго порядка, имеется в книге И. И. Привалова «Введение в теорию функций комплексного переменного».

**36. Двуугольник и полоса.** Рассмотрим двуугольник, образованный двумя дугами окружностей $C_1$ и $C_2$ (рис. 35). Пусть $\psi$ — угол этого двуугольника и $a_1$ и $a_2$ — координаты его вершин. Совершая

дробно-линейное преобразование

$$w_1 = \frac{z - \alpha_1}{z - \alpha_2},$$

мы переводим точки $\alpha_1$ и $\alpha_2$ в $w_1 = 0$ и $w_1 = \infty$, так что дуги, образующие двуугольник, переходят в полупрямые, идущие из начала на бесконечность, а сам двуугольник в результате преобразования будет представлять собою угол величины $\psi$ с вершиной в начале. Если мы затем совершим преобразование $w_2 = w_1^{\frac{\pi}{\psi}}$, то величина угла станет равной $\pi$, и угол превратится в полуплоскость. Умножая еще затем $w_2$ на множитель вида $e^{i\varphi_0}$, мы можем достигнуть того, чтобы эта полуплоскость была верхней полуплоскостью, ограниченной вещественной осью. Собирая вместе все проделанные преобразования, получим окончательно формулу, дающую преобразование нашего двуугольника в верхнюю полуплоскость:

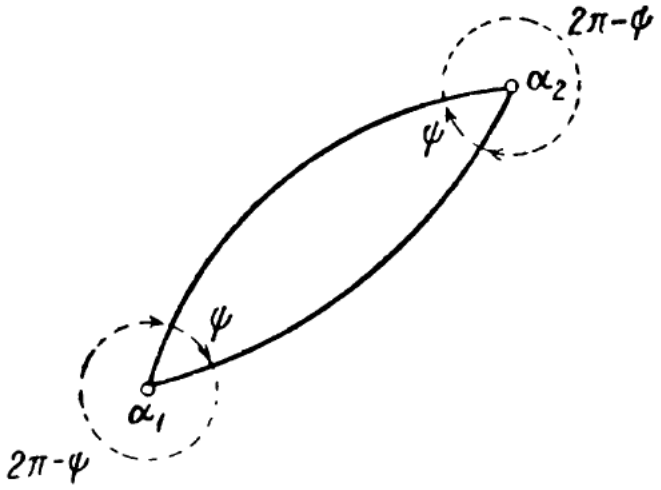



Рис. 35.

$$w = e^{i\varphi_0}\left(\frac{z - \alpha_1}{z - \alpha_2}\right)^{\frac{\pi}{\psi}}. \qquad (36)$$

Здесь $\varphi_0$ есть некоторое вещественное число, зависящее от расположения нашего двуугольника. Совершая еще над $w$ дробно-линейное преобразование, указанное в [33], мы можем преобразовать наш двуугольник в единичный круг.

Выше был рассмотрен двуугольник, заключающийся внутри контура, образованного двумя дугами окружности. На рис. 35 можно рассматривать часть плоскости, находящуюся вне замкнутого контура, так же, как двуугольник, ограниченный дугами окружностей. Но угол этого двуугольника будет уже, конечно, не $\psi$, а $(2\pi - \psi)$.

Мы предполагали в предыдущем, что угол двуугольника отличен от нуля. Рассмотрим теперь случай угла, равного нулю. Положим, что две окружности $C_1$ и $C_2$ взаимно касаются изнутри (рис. 36). При этом ограниченная часть плоскости, находящаяся внутри замкнутого контура, и будет давать нам двуугольник с углом, равным нулю. Точно так же, если две окружности взаимно касаются извне (рис. 37), то часть плоскости, находящаяся вне этих окружностей, тоже дает двуугольник с углом, равным нулю. Если $\alpha$ — координата точки касания, то, совершая дробно-линейное преобразование

$$w_1 = \frac{1}{z - \alpha},$$

мы преобразуем окружности в параллельные прямые, и сам двуугольник

ник перейдет в полосу, ограниченную этими двумя параллельными прямыми. Совершая затем преобразование подобия, а также параллельный перенос и поворот, т. е. некоторое линейное преобразование, всегда можно добиться того, чтобы эта полоса была ограничена двумя наперед заданными параллельными прямыми, например прямыми

$$y=0 \quad \text{и} \quad y=2\pi.$$

Поставим теперь себе задачу найти регулярную функцию, которая преобразовывала бы эту полосу в верхнюю полуплоскость. Мы знаем, что функция $w=e^z$ преобразует нашу полосу во всю плоскость $w$ с разрезом $(0, +\infty)$ вдоль положительной части вещественной оси.

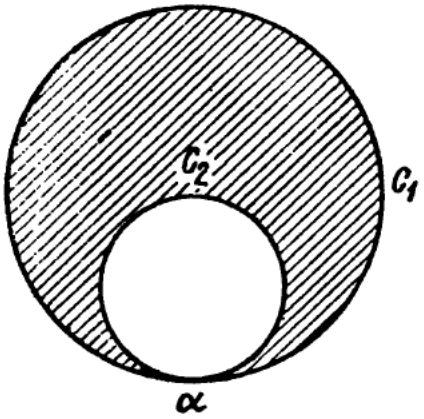



Рис. 36.

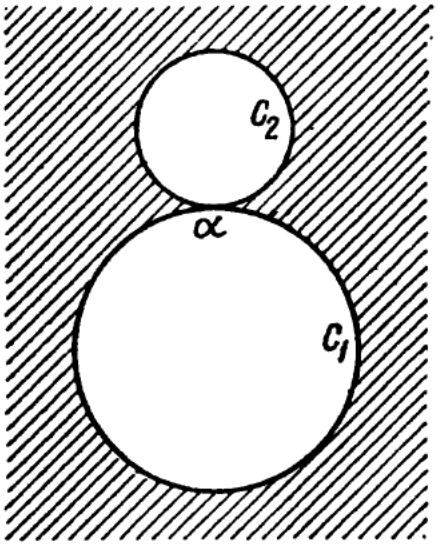



Рис. 37.

Совершая затем преобразование $\sqrt{w}$, получим, очевидно, верхнюю полуплоскость, т. е. окончательно функция, преобразующая нашу полосу в верхнюю полуплоскость, будет $w=e^{\frac{z}{2}}$.

Из предыдущего непосредственно следует также, что сама функция $e^z$ преобразует в верхнюю полуплоскость полосу, ограниченную прямыми $y=0$ и $y=\pi$. Совершая над переменной $e^z$ дробно-линейное преобразование, преобразующее верхнюю полуплоскость в единичный круг [33], получим функцию

$$w=\frac{e^z-i}{e^z+i}, \tag{37}$$

преобразующую полосу, ограниченную прямыми $y=0$ и $y=\pi$, в единичный круг.

Рассмотрим более подробно один частный случай двуугольника, а именно верхний полукруг, построенный на отрезке $(-1, 1)$ вещественной оси, как на диаметре. Функция

$$w=\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2 \tag{38}$$

преобразует вершины этого двуугольника $z=-1$ и $z=1$ в точки $w=0$ и $w=+\infty$, а диаметр и полуокружность переходят при этом в две прямые, причем угол между этими двумя прямыми будет вдвое больше соответствующего угла в полукруге, т. е. будет просто равен $\pi$.

Иначе говоря, наши две полупрямые образуют одну прямую, а именно, как нетрудно видеть, вещественную ось, причем при обходе контура полукруга против часовой стрелки мы двигаемся по вещественной оси от $-\infty$ к $+\infty$, т. е. функция (38) преобразует наш полукруг в верхнюю полуплоскость. Совершая еще дробно-линейное преобразование (26), получим функцию

$$\frac{(z+1)^2-i(z-1)^2}{(z+1)^2+i(z-1)^2},$$

преобразующую наш полукруг в единичный круг.

**37. Основная теорема.** В предыдущем был рассмотрен ряд случаев конформного преобразования односвязной области в полуплоскость или единичный круг, при этом мы имели как случаи ограниченной односвязной области (полукруг), так и случаи односвязной области, содержащей бесконечно далекую точку внутри себя (внешность эллипса, внешность двуугольника). Поставим общую задачу о преобразовании любой заданной односвязной области на плоскости $z$, например, в единичный круг на плоскости $w$ или на полуплоскость. Исключим при этом два случая, а именно тот случай, когда данная область есть вся плоскость $z$, включая бесконечно далекую точку, и тот случай, когда эта область есть вся плоскость, за исключением одной точки, например бесконечно далекой точки. Во всех остальных случаях, как оказывается, всегда существует регулярная функция $w=f(z)$ внутри заданной односвязной области $B$, преобразующая эту область в единичный круг $|w|<1$. Но мы можем затем при помощи дробно-линейного преобразования переводить этот единичный круг в самого себя и будем получать таким образом новые конформные преобразования области $B$ в единичный круг. Отметим внутри нашей области некоторую определенную точку $A$, и пусть при преобразовании, совершаемом функцией

$$w=f(z), \tag{39}$$

эта точка переходит в точку $\alpha$, лежащую внутри единичного круга. Совершая над этим кругом подходящим образом выбранное дробно-линейное преобразование, мы можем всегда перевести точку $\alpha$ в начало, не меняя единичного круга [33]. Новое преобразование будет переводить точку $A$ в начало. Кроме того, поворачивая единичный круг вокруг начала, мы можем достигнуть того, чтобы линейные элементы при переходе точки $A$ в начало не поворачивались, т. е. чтобы $f'(z)$

была положительной величиной в точке $A$. Таким образом, имея одно конформное преобразование области $B$ в единичный круг, мы можем построить и бесчисленное множество таких преобразований, и среди них будет существовать такое преобразование, которое преобразует любую наперед заданную точку $A$ внутри $B$ в центр единичного круга и не меняет направлений в этой точке. Можно показать, что при этих дополнительных условиях функция, совершающая конформное преобразование, определяется уже единственным образом, а именно имеет место следующая, основная в теории конформного преобразования теорема:

Теорема Римана. *Если $B$ — некоторая данная односвязная область на плоскости $z$ (за указанными выше двумя исключениями) и $z_0$ — некоторая точка внутри $B$, то существует одна определенная регулярная внутри $B$ функция $f(z)$, преобразующая $B$ в единичный круг так, что $z_0$ переходит в начало и значение производной $f'(z_0)$ положительно.*

Мы не приводим доказательства этой теоремы. Заметим, что функция, о которой говорится в ней, только в исключительных случаях выражается через элементарные функции. В дальнейшем мы займемся практически важным вопросом приближенного построения указанной функции.

Сделаем одно важное добавление к теореме Римана. Если граница области есть простая замкнутая кривая [5], причем относительно функций $x=x(t)$ и $y=y(t)$, входящих в ее параметрическое представление, предполагается лишь непрерывность, то $f(z)$ будет непрерывной вплоть до границы $l$ и будет преобразовывать эту границу в окружность $|w|=1$. Функция $z=\varphi(w)$, обратная $w=f(z)$, будет регулярной внутри круга $|w|<1$ и непрерывной вплоть до окружности $|w|=1$, которую она будет преобразовывать в границу $B$.

Как указывалось выше, функция, совершающая конформное преобразование данной области $B$ в единичный круг, определяется вполне лишь при наличии дополнительного условия, о котором говорится в формулировке теоремы Римана. Можно заменить это дополнительное условие другим, причем будем в дальнейшем считать, что наш контур области таков, что функция, совершающая конформное преобразование, непрерывна вплоть до контура. При этом можно использовать дробно-линейное преобразование единичного круга в самого себя с той целью, чтобы три заданные точки контура области $B$ перешли в три заданные точки окружности единичного круга. При этом функция, совершающая конформное преобразование, определяется вполне. Можно формулировать дополнительные условия еще и другим образом, а именно: потребуем прежде всего, чтобы данная точка $z_0$ внутри $B$ перешла в начало. После этого у нас остается еще возможность поворачивать единичный круг вокруг начала, и мы можем использовать этот поворот для того, чтобы заданная точка контура

области $B$ перешла в заданную точку единичной окружности, и, как можно показать, при этом функция определяется вполне.

Итак, при выполнении условий, гарантирующих непрерывность функции, совершающей конформное преобразование, вплоть до контура области $B$, *можно вполне определить эту функцию, задавая произвольно соответствие трех точек контура области $B$ трем точкам единичной окружности или задавая произвольно соответствие одной внутренней точки и одной точки контура области $B$ таким же точкам единичного круга.*

Если у нас имеются на плоскости $z$ две односвязные области $B_1$ и $B_2$, то существуют, согласно теореме Римана, две регулярные функции:

$$w_1 = f_1(z_1) \quad \text{и} \quad w_1 = f_2(z_2), \tag{40}$$

которые преобразуют эти области в единичный круг $|w_1| < 1$. Исключая из предыдущих равенств переменную $w_1$, мы придем к регулярной функции $z_2 = \varphi(z_1)$, которая преобразует $B_1$ в $B_2$.

При этом каждой точке $z_1$ будет соответствовать такая точка $z_2$, что точкам $z_1$ и $z_2$ отвечает в силу (40) одно и то же $w_1$. Таким образом, существует конформное преобразование любых двух односвязных областей (за указанными двумя исключениями) друг в друга. При этом, конечно, можно ставить такие же дополнительные условия, какие мы указывали выше при преобразовании области в круг.

Отметим одно важное свойство функции $f(z)$, преобразующей односвязную область в круг или в другую односвязную область.

Будем считать, что наши области суть однолистные области или — более общо — что они, хотя и могут налегать сами на себя, но не имеют внутри себя точек разветвления. При этом производная $f'(z)$ не может обращаться внутри области в нуль, так как обращение в нуль производной влечет за собой точку разветвления преобразованной области [**23**]. Заметим еще, что если возьмем функции $\lg f'(z)$ и $\sqrt{f'(z)}$, то они при аналитическом продолжении внутри нашей односвязной области $B$ не будут иметь особых точек и будут, следовательно, однозначными [**18**] и регулярными функциями внутри области.

Если мы имеем на плоскости $z$ не односвязную, а, например, двусвязную область: некоторое кольцо, ограниченное двумя замкнутыми кривыми, то его невозможно, очевидно, преобразовать конформно в односвязную область так, чтобы каждой точке кольца соответствовала определенная точка односвязной области и наоборот.

В случае многосвязной области имеет место одно обстоятельство, отличающее этот случай от случая односвязной области, а именно не всякие две области одной и той же связности могут быть конформно преобразованы одна в другую. Так, например, два кольца, ограниченных концентрическими окружностями, могут быть конформно преобразованы одно в другое в том лишь случае, если для обоих этих

колец отношение радиусов ограничивающих их окружностей одно и то же.

Но и в случае многосвязной области существует возможность преобразовать любую область в область определенного типа, а именно: всякую $n$-связную область можно преобразовать на плоскость с $n$ вырезами, которые имеют вид параллельных отрезков прямых, причем некоторые из этих вырезов могут выродиться в точку.

Прежде чем переходить к изложению приближенных методов построения функции, совершающей конформное преобразование, мы выведем аналитическое выражение для функций, дающих конформное преобразование единичного круга или верхней полуплоскости в область, ограниченную ломаной линией, т. е. в многоугольник. Формула эта часто встречается в приложениях.

**38. Формула Кристоффеля.** Пусть на плоскости $z$ имеется многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$ (рис. 38), и положим, что величины углов этого многоугольника суть $\alpha_1\pi$, $\alpha_2\pi$, ..., $\alpha_n\pi$. Введем в рассмотрение функцию

$$z = f(t), \tag{41}$$

которая совершает конформное преобразование верхней полуплоскости $t$ в наш многоугольник. Нашей задачей будет построение аналитического выражения этой функции. Положим, что вершинам многоугольника $A_k$ соответствуют точки

$$t = a_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

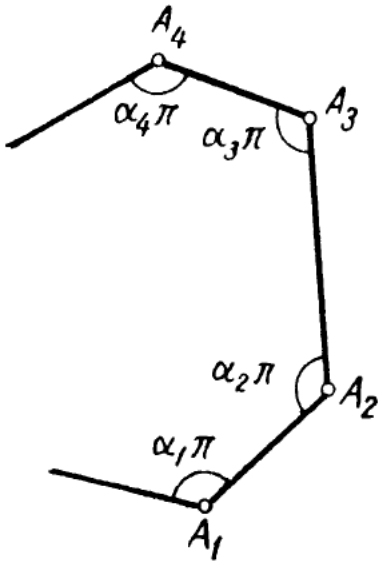


Рис. 38.

лежащие на вещественной оси, причем мы считаем, что все эти точки находятся на конечном расстоянии, чего всегда можно достигнуть при помощи дробно-линейного преобразования плоскости $t$. Кроме того, пусть $a_1$ — крайняя точка слева и $a_n$ — крайняя точка справа. Рассмотрим вопрос об аналитическом продолжении функции $f(t)$ через вещественную ось. Возьмем некоторый определенный отрезок $a_ka_{k+1}$ вещественной оси, которому соответствует сторона $A_kA_{k+1}$ многоугольника. В силу принципа симметрии мы можем функцию $f(t)$ аналитически продолжить через отрезок $a_ka_{k+1}$, и значения этого продолжения в нижней полуплоскости дадут новый многоугольник, который получается из основного при помощи отображения в стороне $A_kA_{k+1}$. Мы можем затем дальше аналитически продолжить вновь полученную функцию из нижней полуплоскости в верхнюю через некоторый отрезок $a_la_{l+1}$ вещественной оси. При этом опять в силу принципа симметрии новые значения $f(t)$ в верхней полуплоскости дадут многоугольник, который получается из второго многоугольника при помощи его отображения в той его стороне, которая соответствовала упомя-

нутому отрезку $a_l a_{l+1}$ вещественной оси и т. д. Мы видим, таким образом, что можно беспрепятственно продолжать нашу функцию $f(t)$ через вещественную ось, и при этом значения этой функции будут преобразовывать всякую полуплоскость в многоугольник, который получается из основного путем нескольких отображений в тех сторонах, которые соответствуют тем отрезкам вещественной оси, через которые мы совершали аналитическое продолжение. Заметим при этом, что стороне многоугольника $A_n A_1$ соответствует на вещественной оси отрезок, идущий от $a_n$ к $\infty$ и затем от $\infty$ к $a_1$, так что бесконечно далекая точка в плоскости $t$ соответствует некоторой точке, лежащей на стороне $A_n A_1$ многоугольника. Сами точки $a_k$ будут, вообще говоря, особыми точками функции $f(t)$. Исследуем характер этих особых точек. Возьмем для определенности точку $a_2$ и обойдем вокруг этой точки, отправляясь из верхней полуплоскости и вновь туда возвращаясь. При этом нам сначала придется пройти из верхней полуплоскости в нижнюю через отрезок $a_1 a_2$ и затем вернуться из нижней в верхнюю через отрезок $a_2 a_3$. Согласно вышесказанному, значения $f(t)$ в нижней полуплоскости дадут многоугольник $A_1 A_2 A_3' \ldots A_n'$, который получается из основного отображением в стороне $A_1 A_2$, и затем возвращение в верхнюю полуплоскость сведется к отображению в стороне $A_2 A_3'$ этого нового многоугольника (рис. 39).

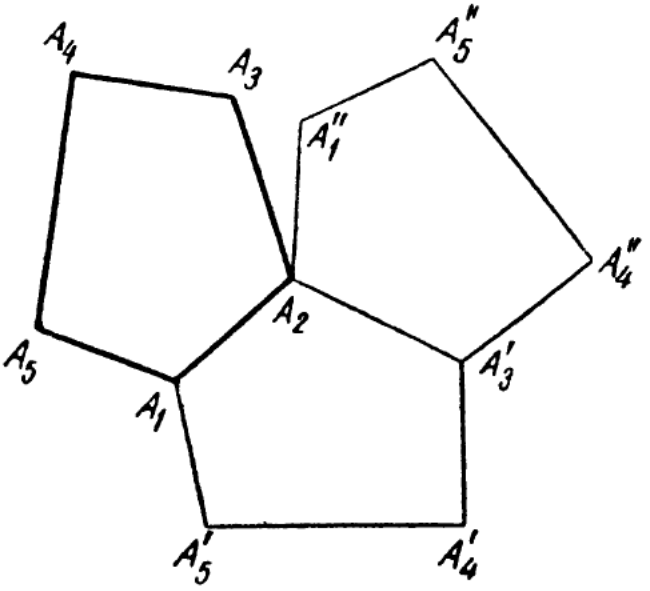


Рис. 39.

Таким образом, вышеуказанному обходу вокруг точки $a_2$ будет соответствовать на плоскости $z$ отображение в прямых $A_2 A_1$ и $A_2 A_3'$, т. е., как мы видели в [33], линейное преобразование вида $z' - b_2 = e^{i\varphi}(z - b_2)$, где $b_2$ — координата точки $A_2$.

Отсюда непосредственно следует

$$\overset{*}{f}(t) = e^{i\varphi} f(t) + \gamma,$$

где $\gamma$ — некоторая постоянная ($\gamma = b_2 - e^{i\varphi} b_2$) и $\overset{*}{f}(t)$ — новая ветвь $f(t)$ в верхней полуплоскости.

Отсюда следует

$$\frac{\overset{*}{f}''(t)}{\overset{*}{f}'(t)} = \frac{f''(t)}{f'(t)},$$

т. е. функция

$$\frac{f''(t)}{f'(t)} \tag{42}$$

будет регулярной и однозначной в окрестности точки $a_2$, и эта точка может для функции (42) быть полюсом или существенно особой точкой. Покажем, что эта точка будет простым полюсом с вычетом $(\alpha_2 - 1)$. Действительно, введем вместо $z$ новую комплексную переменную $z'$:

$$z' = (z - b_2)^{\frac{1}{\alpha_2}},$$

где $b_2$ — координата вершины $A_2$. Этой вершине будет соответствовать значение $z' = 0$, и стороны $A_2A_1$ и $A_2A_3$, образующие угол $\alpha_2\pi$, перейдут в две прямые, образующие угол $\pi$, т. е. на плоскости $z'$ вышеупомянутые стороны превратятся в два отрезка одной и той же прямой $l$, выходящих из начала в разные стороны. Если мы обратимся теперь к плоскости переменной $t$, то увидим, что окрестность точки $a_2$, лежащая над вещественной осью, перейдет на плоскости $z'$ в окрестность точки $z' = 0$, лежащую по одну сторону от прямой $l$. В силу принципа симметрии то же самое будет иметь место и для окрестностей точек $t = a_2$ и $z' = 0$, лежащих по другую сторону от упомянутых прямых. Таким образом, окрестность точки $t = a_2$ перейдет в однолистную окрестность точки $z' = 0$, и мы должны будем иметь разложение вида

$$z' = (z - b_2)^{\frac{1}{\alpha_2}} = c_1(t - a_2) + c_2(t - a_2)^2 + \ldots \qquad (c_1 \neq 0).$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$z = b_2 + c_1^{\alpha_2}(t - a_2)^{\alpha_2}\left\{1 + \frac{c_2}{c_1}(t - a_2) + \frac{c_3}{c_1}(t - a_2)^2 + \ldots\right\}^{\alpha_2}$$

или, если применить формулу бинома Ньютона [ср. 23],

$$f(t) = b_2 + (t - a_2)^{\alpha_2} f_1(t),$$

где $f_1(t)$ — регулярна в точке $t = a_2$ и отлична там от нуля.

Отсюда

$$f'(t) = \alpha_2(t - a_2)^{\alpha_2 - 1} f_1(t) + (t - a_2)^{\alpha_2} f_1'(t),$$

$$f''(t) = \alpha_2(\alpha_2 - 1)(t - a_2)^{\alpha_2 - 2} f_1(t) + 2\alpha_2(t - a_2)^{\alpha_2 - 1} f_1'(t) + (t - a_2)^{\alpha_2} f_1''(t),$$

и, следовательно,

$$\frac{f''(t)}{f'(t)} = \frac{1}{t - a_2} \cdot \frac{\alpha_2(\alpha_2 - 1) f_1(t) + 2\alpha_2(t - a_2) f_1'(t) + (t - a_2)^2 f_1''(t)}{\alpha_2 f_1(t) + (t - a_2) f_1'(t)}.$$

Второй множитель справа есть регулярная функция в точке $t = a_2$, и значение его в этой точке равно $(\alpha_2 - 1)$, т. е. вблизи точки $t = a_2$ имеет место разложение

$$\frac{f''(t)}{f'(t)} = \frac{\alpha_2 - 1}{t - a_2} + P(t - a_2),$$

где $P(t - a_2)$ есть функция, регулярная в точке $t = a_2$.

Аналогично мы убедимся, что функция (42) имеет в каждой точке $a_k$ вещественной оси полюс первого порядка с вычетом $(\alpha_k - 1)$. Никаких других особых точек на конечном расстоянии наша функция, как мы знаем, не имеет, а потому разность

$$\frac{f''(t)}{f'(t)} - \sum_{s=1}^{n} \frac{\alpha_s - 1}{t - a_s} \tag{43}$$

будет регулярной и однозначной функцией на всей плоскости. Выясним теперь поведение функции (43) на бесконечности. Как мы видели выше, функция $f(t)$ на бесконечности стремится к определенному значению, а именно к координате $b_\infty$ той точки стороны $A_nA_1$, которая соответствует $t = \infty$, и, следовательно, в окрестности бесконечно далекой точки имеем разложение вида

$$f(t) = b_\infty + \frac{c_1}{t} + \frac{c_2}{t^2} + \dots$$

Отсюда непосредственно следует, что для функции $\frac{f''(t)}{f'(t)}$ в окрестности бесконечности имеем разложение вида

$$\frac{f''(t)}{f'(t)} = \frac{d_1}{t} + \frac{d_2}{t^2} + \dots,$$

т. е. эта функция стремится к нулю при $t \to \infty$. Таким образом, функция (43), регулярная на всей плоскости, стремится к нулю при $t \to \infty$, а следовательно, ограничена на всей плоскости. Согласно теореме Лиувиля [9], выражение (43) должно быть величиной постоянной, и так как мы только что видели, что оно должно стремиться к нулю при $t \to \infty$, то отсюда следует, что эта постоянная должна равняться нулю. Это приводит к равенству:

$$\frac{f''(t)}{f'(t)} = \frac{\alpha_1 - 1}{t - a_1} + \frac{\alpha_2 - 1}{t - a_2} + \dots + \frac{\alpha_n - 1}{t - a_n}. \tag{44}$$

Интегрируя один раз, получаем

$$\ln f'(t) = (\alpha_1 - 1)\ln(t - a_1) + (\alpha_2 - 1)\ln(t - a_2) + \dots + (\alpha_n - 1)\ln(t - a_n) + C$$

или

$$f'(t) = A(t - a_1)^{\alpha_1 - 1}(t - a_2)^{\alpha_2 - 1}\dots(t - a_n)^{\alpha_n - 1}$$

и, наконец, интегрируя еще раз, имеем окончательно

$$z = f(t) = A\int_{t_0}^{t} (t - a_1)^{\alpha_1 - 1}(t - a_2)^{\alpha_2 - 1}\dots(t - a_n)^{\alpha_n - 1}\,dt + B, \tag{45}$$

где $A$ и $B$ — постоянные. Таким образом, наша задача решена и

*конформное преобразование верхней полуплоскости $t$ в многоугольник с углами $\alpha_k\pi$ дается формулой* (45), *где $a_k$ — некоторые точки на вещественной оси, а $A$ и $B$ — комплексные постоянные.*

Выясним прежде всего роль этих последних постоянных. В предыдущих рассуждениях мы использовали лишь величины углов нашего многоугольника. Таким образом, подвергая многоугольник движению или даже преобразованию подобия, мы не меняем углов, и для нового многоугольника должна иметь место также формула (45). Роль постоянных $A$ и $B$ и сводится к тому, что мы при изменении их переходим от одного многоугольника к подобному многоугольнику. Более существенной является роль чисел $a_k$ в формуле (45). Расположение этих чисел на вещественной оси вместе со значением постоянной $A$ дает длины сторон многоугольника. В дальнейшем мы вернемся еще к этому вопросу.

При выводе формулы (45) предполагалось, что всем вершинам многоугольника соответствуют точки вещественной оси, лежащие на конечном расстоянии. Положим теперь, что одной из вершин, например вершине $A_n$, соответствует бесконечно далекая точка.

Совершая, например, в формуле (45) замену переменной интегрирования $t = -\frac{1}{t'} + a_n$ и пользуясь соотношением

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = n - 2, \tag{46}$$

легко показать, возвращаясь к прежним обозначениям, что в этом случае формула имеет вид

$$z = f(t) = A\int_{t_0}^{t} (t - a_1)^{\alpha_1 - 1}(t - a_2)^{\alpha_2 - 1}\ldots(t - a_{n-1})^{\alpha_{n-1} - 1}\,dt + B. \tag{47}$$

При помощи дробно-линейной функции, преобразующей полуплоскость в круг $|\tau| < 1$, можно показать, что конформное преобразование упомянутого круга в многоугольник выражается формулой, по виду совпадающей с (45):

$$z = f(\tau) = A\int_{0}^{\tau} (\tau - a_1')^{\alpha_1 - 1}(\tau - a_2')^{\alpha_2 - 1}\ldots(\tau - a_n')^{\alpha_n - 1}\,d\tau + B, \tag{48}$$

где $a_k'\,(k = 1, \ldots, n)$ — точки, лежащие на окружности $|\tau| = 1$.

В указанных выше формулах нижний предел не играет роли и влияет лишь на постоянную $B$. Аргументы разностей $t - a_k$ и $\tau - a_k'$ надо фиксировать хотя бы в одной точке одного из промежутков $(a_k, a_{k+1})$, считая, например, $\arg(t - a_1) = 0$ при $a_1 < t < a_2$. При этом они определяются на всей полуплоскости (или во всем круге).

Выше мы исходили из некоторого многоугольника на плоскости $t$ и вывели формулы для функции, преобразующей полуплоскость или круг в этот многоугольник. Будем теперь исходить из этих формул. Рассмотрим, например, формулу (45), где $a_k$ — некоторые точки вещественной оси и $\alpha_k$ — числа, удовлетворяющие условиям $0 < \alpha_k < 2$ и соотношению (46). Можно показать, что при этом формула (45) преобразует верхнюю полуплоскость плоскости $t$ в некоторую область плоскости $z$ без точек разветвления (однолистную или многолистную), контур которой — ломаная линия с углами $\alpha_k\pi$.

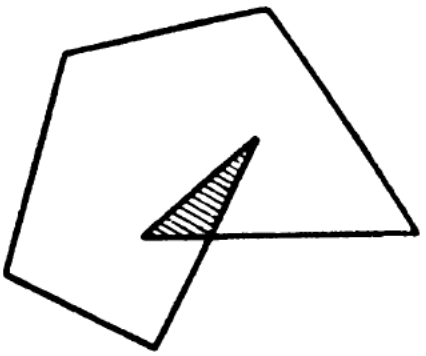


Рис. 40.

На рис. 40 изображен семиугольник, который является двулистным в заштрихованной части.

Заключение, совершенно аналогичное только что сформулированному, имеет место и по отношению к формулам (47) и (48).

**39. Частные случаи.** Начнем с наиболее простого случая треугольника. Пользуясь дробно-линейным преобразованием плоскости $t$, мы всегда можем привести задачу к тому случаю, когда вершинам треугольника соответствуют точки $t = 0$, 1 и $\infty$. При этом мы должны воспользоваться формулой (47), полагая $a_1' = 0$ и $a_2' = 1$, и получим таким образом формулу

$$z = A' \int_0^\tau \tau^{\alpha_1 - 1}(\tau - 1)^{\alpha_2 - 1} d\tau + B'. \qquad (49)$$

В этом случае в нашей формуле остались лишь произвольные постоянные $A'$ и $B'$, не играющие существенной роли и связанные с подобным преобразованием треугольника. Сравнительная простота формулы (49) соответствует тому факту, что всякие два треугольника с одинаковыми углами будут обязательно подобны один другому. В случае четырехугольника это обстоятельство уже не будет иметь места, и в общей формуле для четырехугольника с заданными углами мы будем иметь под знаком интеграла неопределенный параметр, который зависит от длин сторон многоугольника.

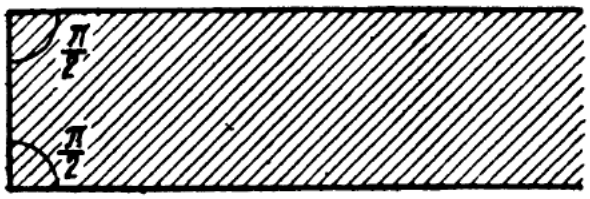



Рис. 41.

Формула (49) применима и к случаю безграничного треугольника с углами $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ и 0. Такой треугольник представляет собою, очевидно, полуполосу, ограниченную двумя параллельными полупрямыми и отрезком, перпендикулярным к ним (рис. 41). Полагая в формуле (49)

$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$, будем иметь

$$z = A' \int_0^{\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau(\tau-1)}} + B'.$$

Остановимся еще подробно на случае прямоугольника. Положим, что вершины этого прямоугольника $B$ имеют координаты (рис. 42):

$$-\frac{\omega_1}{2},\ \frac{\omega_1}{2},\ \frac{\omega_1}{2}+i\omega_2,\ -\frac{\omega_1}{2}+i\omega_2,$$

где $\omega_1$ и $\omega_2$ — заданные вещественные положительные числа. Возьмем правую половину этого прямоугольника с вершинами

$$0,\ \frac{\omega_1}{2},\ \frac{\omega_1}{2}+i\omega_2,\ i\omega_2,$$

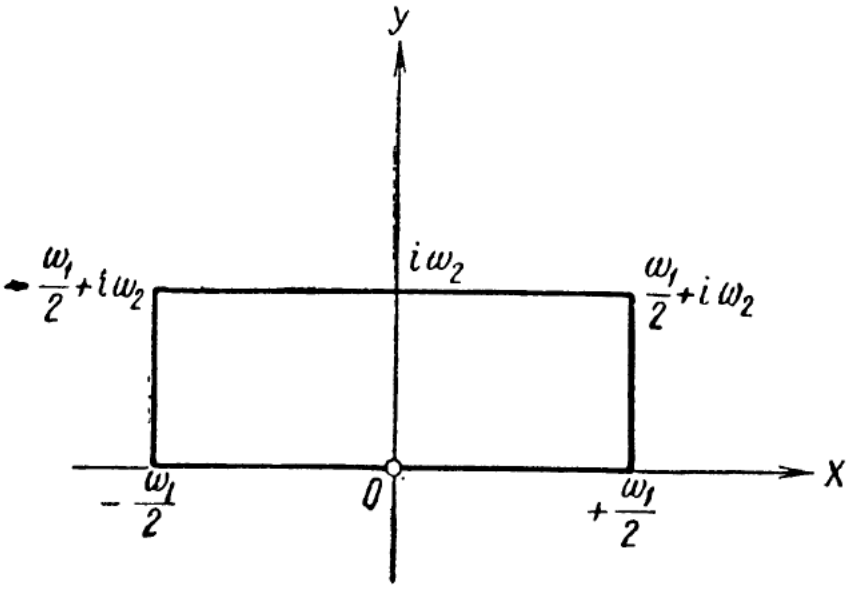


Рис. 42.

и положим, что она конформно отображена на правую половину верхней полуплоскости $t$, т. е. на ту половину верхней полуплоскости $t$, точки которой имеют положительную вещественную часть. При этом мы можем считать, что вершинам $0$, $\frac{\omega_1}{2}$ и $i\omega_2$ соответствуют точки 0, 1 и $\infty$ контура упомянутой правой части верхней полуплоскости. При этом вершине $\frac{\omega_1}{2}+i\omega_2$ будет соответствовать некоторая точка вещественной оси, лежащая между точками 1 и $\infty$. Обозначим эту точку через $\frac{1}{k}$, где $0<k<1$. В силу принципа симметрии левой половине нашего прямоугольника будет соответствовать левая половина верхней полуплоскости $t$, причем вершинам $-\frac{\omega_1}{2}$, $-\frac{\omega_1}{2}+i\omega_2$ будут соответствовать точки $t=-1$ и $t=-\frac{1}{k}$. Из предыдущих рассуждений непосредственно вытекает, что всегда можно таким образом нормировать наше конформное преобразование верхней полуплоскости в прямоугольник $B$, чтобы точкам $t=-1,\ 0,\ 1,\ \infty$ соответствовали точки $z=-\frac{\omega_1}{2},\ 0,\ \frac{\omega_1}{2},\ i\omega_2$, и при этом точкам $t=\frac{1}{k}$ и $t=-\frac{1}{k}$ будут соответствовать значения $z=\frac{\omega_1}{2}+i\omega_2$ и $z=-\frac{\omega_1}{2}+i\omega_2$. Можно теперь применить к нашему случаю формулу (45),

полагая $a_1 = -\frac{1}{k}$; $a_2 = -1$; $a_3 = 1$; $a_4 = \frac{1}{k}$ и $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \frac{1}{2}$.

Мы получаем таким образом, принимая во внимание, что при $t = 0$ и $z = 0$, формулу вида

$$z = A' \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)\left(\frac{1}{k^2}-t^2\right)}}$$

или формулу вида

$$z = A \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}. \tag{50}$$

При значениях $t$, лежащих внутри отрезка $-1 < t < 1$ вещественной оси, мы должны иметь отрезок вещественной оси $\left(-\frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_1}{2}\right)$ в плоскости $z$. Отсюда следует, что в формуле (50) мы можем считать $A$ положительной постоянной и должны брать радикал равным единице при $t = 0$. Дальнейшие значения этого радикала в верхней полуплоскости получатся единственным образом, так как этот радикал будет регулярной функцией в этой полуплоскости и не будет там иметь точек разветвления. Принимая во внимание, что вершинам $\frac{\omega_1}{2}$ и $\frac{\omega_1}{2} + i\omega_2$ соответствуют значения $t = 1$ и $t = \frac{1}{k}$, мы получим следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\omega_1}{2} &= A \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \\ \omega_2 &= A \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}. \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Длины сторон нашего прямоугольника равны $\omega_1$ и $\omega_2$, и можно построить уравнение для определения параметра $k$, входящего под знак интеграла, зная отношение длин сторон нашего прямоугольника

$$\omega_1 : \omega_2 = 2 \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} : \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}. \tag{52}$$

Определив отсюда $k$, мы сможем найти $A$ из одного из уравнений (51).

Интеграл, входящий в формулу (50), не выражается через элементарные функции и называется эллиптическим интегралом первого рода в форме *Лежандра*. Будем дальше заниматься такими интегралами и не будем сейчас разбирать подробнее вопрос об определении $k$ из уравнения (52). Мы привели предыдущее рассуждение лишь для того, чтобы более отчетливо выяснить вопрос об определении постоянных в формуле Кристоффеля.

Рассмотрим еще один частный случай. Пусть на плоскости $z$ мы имеем правильный $n$-угольник $A_1 A_2 \ldots, A_n$, и пусть $z = 0$ — его центр (рис. 43 для $n = 6$). Возьмем конформное преобразование треугольника $OA_1A_2$ на сектор $O'A_1'A_2'$ единичного круга с центральным углом $\frac{2\pi}{n}$ так, чтобы вершинам треугольника $O$, $A_1$ и $A_2$ отвечали центр

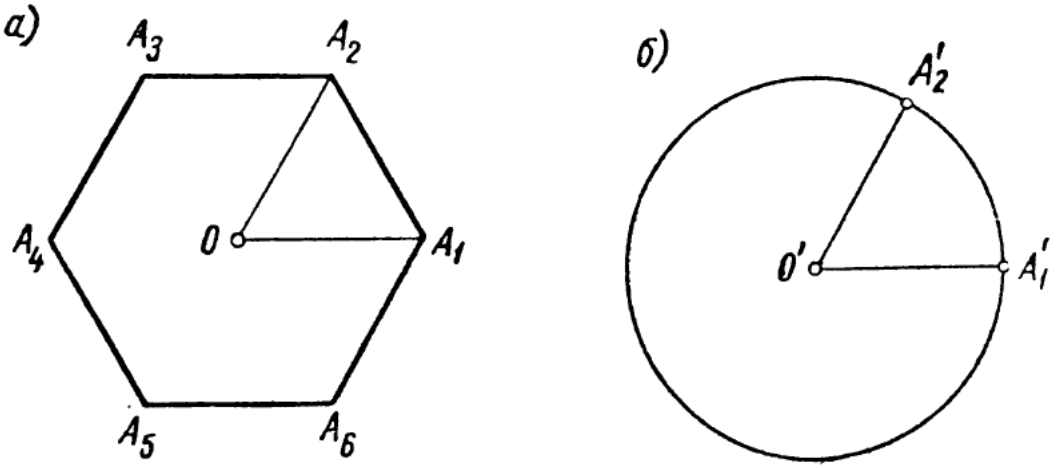



Рис. 43.

круга $O'$ и концы дуги $A_1'$ и $A_2'$. Совершая отображение треугольника в его сторонах, мы, согласно принципу симметрии, будем иметь отображение сектора в соответствующих радиусах. Таким образом, при аналитическом продолжении функция отобразит весь правильный многоугольник в единичный круг. Из этих рассуждений непосредственно следует, что при отображении правильного многоугольника на единичный круг вершинам многоугольника соответствуют точки, делящие окружность единичного круга на равные части. Кроме того, в формуле (48) мы должны в данном случае считать

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = \frac{n-2}{n} = 1 - \frac{2}{n}.$$

Поворачивая единичный круг вокруг начала, мы можем, конечно, считать, что вершине $A_1$ соответствует любая точка окружности например точка $\tau = 1$. При этом остальные точки окружности, соответствующие вершинам многоугольника, будут $e^{i\frac{2\pi k}{n}}$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$, так что подинтегральная функция формулы (48) в данном случае будет иметь вид

$$\left[(\tau - 1)\left(\tau - e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)\left(\tau - e^{i\frac{4\pi}{n}}\right)\ldots\left(\tau - e^{i(n-1)\frac{2\pi}{n}}\right)\right]^{\frac{2}{n}}. \qquad (53)$$

Считая, что центр многоугольника находится в начале координат, получаем следующую формулу преобразования единичного круга в правильный $n$-угольник:

$$z = A'' \int_0^w \frac{d\tau}{\sqrt[n]{(\tau^n - 1)^2}}. \tag{54}$$

Модуль постоянной $A''$ определяется из размеров многоугольника, а аргумент этой постоянной дает просто поворот многоугольника вокруг центра.

**40. Случай внешности многоугольника.** Рассмотрим часть плоскости, лежащей вне многоугольника (рис. 44). Эта односвязная область содержит бесконечно далекую точку $z = \infty$. Сумма углов, содержащихся в $B$, равна $\pi(n+2)$, и, обозначая эти углы по-прежнему через $\alpha_k\pi$, получим соотношение

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = n + 2. \tag{55}$$

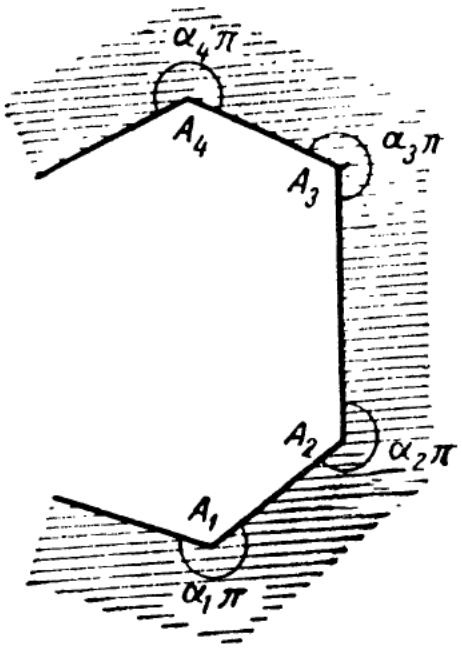


Рис. 44.

Пусть $z = f(\tau)$ — функция, совершающая конформное преобразование единичного круга $|\tau| < 1$ на $B$, причем мы считаем, что точке $\tau = 0$ соответствует $z = \infty$, из чего следует, что $w = 0$ есть полюс $f(\tau)$ первого порядка. Проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям из [38], получим

$$z = f(\tau) = A \int_{\tau_0}^{\tau} (\tau - a_1')^{\alpha_1 - 1}(\tau - a_2')^{\alpha_2 - 1} \ldots (\tau - a_n')^{\alpha_n - 1} \frac{d\tau}{\tau^2} + B, \tag{56}$$

где $a_k'$ — точки окружности $|\tau| = 1$, соответствующие вершинам ломаной линии.

Заменяя $\tau$ на $\frac{1}{\tau}$, мы получим, принимая во внимание (55), формулу того же вида, что и формула (56), для конформного преобразования области $|\tau| > 1$ на многоугольник.

Сделаем одно замечание по поводу формулы (56), считая, что она дает преобразования области $|\tau| > 1$ на многоугольник. Разлагая подинтегральную функцию вблизи $\tau = \infty$, получим, принимая во внимание (55),

$$1 - \frac{(\alpha_1 - 1)\, a_1' + (\alpha_2 - 1)\, a_2' + \ldots + (\alpha_n - 1)\, a_n'}{\tau} + \frac{c_2}{\tau^2} + \ldots. \tag{57}$$

Коэффициент при $\frac{1}{\tau}$ должен обращаться в нуль, ибо в противном случае точка $\tau = \infty$ была бы точкой ветвления бесконечного порядка.

Это приводит к следующему соотношению:

$$(\alpha_1 - 1)\, a_1' + (\alpha_2 - 1)\, a_2' + \ldots + (\alpha_n - 1)\, a_n' = 0. \tag{58}$$

Если предположить, что формула (56) дает преобразование круга $|\tau| < 1$ на многоугольник, то, строя разложение подинтегральной функции в начале, придем к соотношению

$$(\alpha_1 - 1)\frac{1}{a_1'} + (\alpha_2 - 1)\frac{1}{a_2'} + \ldots + (\alpha_n - 1)\frac{1}{a_n'} = 0. \tag{59}$$

Оно совпадает с (58), ибо по условию $|a_k'| = 1$, и, следовательно, $a_k'^{-1} = \overline{a_k'}$, а числа $\alpha_k$ вещественны (и положительны).

Рассмотрим в качестве примера преобразование $|\tau| < 1$ на часть плоскости, находящуюся вне квадрата. В силу его симметрии точки $a_k'$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ делят окружность на равные части, и мы можем считать, что это будут точки

$$a_1' = 1,\ a_2' = i,\ a_3' = -1,\ a_4' = -i. \tag{60}$$

Для углов имеем

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \frac{3}{2}\pi, \tag{61}$$

так что окончательно

$$z = A \int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{\tau^4 - 1}\, \frac{d\tau}{\tau^2} + B. \tag{62}$$

Значение постоянных $A$ и $B$ зависит от длины сторон квадрата и его расположения на плоскости.

**41. Минимальное свойство преобразования на круг.** Рассмотрим функцию

$$z = f(\tau) = \tau + c_2\tau^2 + \ldots, \tag{63}$$

регулярную в круге $|\tau| < R$. Она преобразует его в некоторую область $B$, которая может быть многолистной и может содержать точки разветвления. Круг $|\tau| < R_1$, где $0 < R_1 < R$, переходит в некоторую область $B_1$. Площадь ее выражается, как мы знаем [31], интегралом

$$S_1 = \iint\limits_{|\tau| \leqslant R_1} |f'(\tau)|^2\, ds. \tag{64}$$

Мы можем написать этот интеграл в следующем виде:

$$S_1 = \int_0^{R_1}\int_0^{2\pi} (1 + 2c_2 re^{i\varphi} + 3c_3 r^2 e^{i2\varphi} + \ldots)(1 + 2\bar{c}_2 re^{-i\varphi} + 3\bar{c}_3 r^2 e^{-i2\varphi} + \ldots)\, r\, dr\, d\varphi.$$

Ввиду абсолютной и равномерной сходимости ряда в круге $|\tau| < R_1$ мы можем перемножить наши два ряда почленно и интегрировать их также почленно. Заметим при этом, что при интегрировании функции вида $e^{ik\varphi}$, где $k$ — целое число, отличное от нуля, по промежутку $(0, 2\pi)$ мы получаем

нуль. Следовательно, при перемножении рядов в предыдущей формуле нам достаточно сохранить лишь члены, не содержащие множителей вида $e^{ik\varphi}$, и интегрирование по $\varphi$ сведется просто к умножению на $2\pi$. Таким образом получим

$$S_1 = 2\pi \int_0^{R_1} (1 + 2^2 |c_2|^2 r^2 + \ldots + n^2 |c_n|^2 r^{2n-2} + \ldots)\, r\, dr \tag{65}$$

или

$$S_1 = \pi R_1^2 + \pi \sum_{n=2}^{\infty} n |c_n|^2 R_1^{2n}. \tag{66}$$

При стремлении $R_1$ к $R$ последняя сумма будет, увеличиваясь, стремиться или к конечному пределу или к бесконечности. Но во всяком случае этот предел, который дает нам площадь всей области $B$, будет больше числа $\pi R^2$, равного площади исходного круга $|\tau| < R$, если в разложении (65) хоть один из коэффициентов $c_k$ отличен от нуля. Мы получаем таким образом следующий результат: *при преобразовании круга* $|\tau| < R$ *функцией* (65), *регулярной внутри этого круга, площадь области увеличивается, если хоть один из коэффициентов* $c_k$ *отличен от нуля.*

Установив эту предварительную теорему, мы перейдем теперь к выяснению одного важного свойства функции, совершающей конформное преобразование. Пусть $B$ — некоторая односвязная ограниченная область плоскости $z$, причем, не ограничивая общности, мы будем считать, что начало $z = 0$ находится внутри этой области. Пусть, далее, $F_1(z)$ — функция, совершающая конформное преобразование $B$ в единичный круг, причем начало $z = 0$ переходит в центр круга. Эта функция будет иметь в окрестности $z = 0$ разложение вида

$$F_1(z) = d_1 z + d_2 z^2 + \ldots,$$

где мы можем считать $d_1 > 0$. Рассмотрим теперь вместо функции $F_1(z)$ новую функцию

$$F(z) = \frac{1}{d_1} F_1(z).$$

Она будет давать преобразование $B$ в круг $|\tau| < R$, где $R = \dfrac{1}{d_1}$, и ее разложение вблизи $z = 0$ будет иметь вид

$$\tau = F(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots \tag{67}$$

Функция, обратная ей, будет регулярна внутри круга $|\tau| < R$ и будет иметь разложение формы

$$z = f(\tau) = \tau + c_2 \tau^2 + c_3 \tau^3 + \ldots \tag{68}$$

Двойной интеграл

$$\iint_B |F'(z)|^2\, ds, \tag{69}$$

дающий площадь круга, равен, очевидно, $\pi R^2$. Если мы вместо функции $F(z)$ возьмем какую-нибудь другую функцию $\varphi(z)$, регулярную внутри $B$ и имеющую в окрестности $z = 0$ разложение вида (67), то, подставляя вместо $z$ разложение (68), получим в результате некоторую функцию от $\tau$, регулярную внутри круга $|\tau| < R$ и имеющую там разложение:

$$\varphi(z) = \varphi[f(\tau)] = \tau + e_2 \tau^2 + e_3 \tau^3 + \ldots = f_1(\tau). \tag{70}$$

Вычислим двойной интеграл (69) для этой новой функции $\varphi(z)$. Переходя на плоскость $\tau$ и принимая во внимание выражение элемента площади на плоскости $\tau$ через элемент площади на плоскости $z$ [31]:

$$ds_z = |f'(\tau)|^2 ds_\tau,$$

найдем

$$\iint_B |\varphi'(z)|^2 ds_z = \iint_{|\tau|<R} |\varphi'(z)\cdot f'(\tau)|^2 ds_\tau = \iint_{|\tau|<R} |f_1'(\tau)|^2 ds_\tau,$$

и, согласно доказанному выше предложению, величина этого интеграла будет больше $\pi R^2$, если в разложении (70) хоть один из коэффициентов $e_k$ будет отличным от нуля. Если же все эти коэффициенты равны нулю, т. е. если $\varphi(z)=\tau$, то, очевидно, $\varphi(z)=F(z)$. Приходим, таким образом, к следующей теореме:

Теорема. *Среди всех функций, регулярных внутри B и имеющих вблизи* $z=0$ *разложение вида* (67), *функция, конформно преобразующая B в круг с центром в начале, дает интегралу* (69) *наименьшее значение.*

Можно использовать эту теорему для построения приближенного выражения функции $F(z)$, преобразующей $B$ в круг, в виде полинома. Итак, будем считать, что $F(z)$ представляется приближенно полиномом степени $n$:

$$F(z) = z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n, \tag{71}$$

и определим коэффициенты этого полинома $a_k$ из того условия, что полином (71), среди всех полиномов такого же вида, минимизирует интеграл (69), т. е. дает этому интегралу наименьшее значение. Построим произвольный полином

$$\omega(z) = b_2 z^2 + b_3 z^3 + \ldots + b_n z^n$$

и построим затем новый полином, имеющий ту же форму (71), что и полином $F(z)$:

$$\Phi(z) = F(z) + \varepsilon\omega(z),$$

где $\varepsilon$ — некоторый параметр, который мы будем считать вещественным. Составим интеграл (69) для нашего нового полинома

$$\iint_B [F'(z) + \varepsilon\omega'(z)]\,\overline{[F'(z) + \varepsilon\omega'(z)]}\, ds.$$

Эта функция от $\varepsilon$ должна иметь минимум при $\varepsilon=0$. Приравнивая нулю ее производную по $\varepsilon$ при $\varepsilon=0$, мы получаем следующее условие:

$$\iint_B [F'(z)\,\overline{\omega'(z)} + \overline{F'(z)\,\omega'(z)}]\, ds = 0, \tag{$72_1$}$$

которое должно иметь место при любом выборе полинома $\omega(z)$.

Совершенно так же заменяя $\varepsilon$ на $i\varepsilon$, где $\varepsilon$ — вещественно, получим вместо ($72_1$) условие

$$\iint_B [F'(z)\,\overline{\omega'(z)} - \overline{F'(z)}\,\omega'(z)]\, ds = 0. \tag{$72_2$}$$

Складывая, получим условие

$$\iint_B F'(z)\,\overline{\omega'}(z)\, ds = 0.$$

Принимая последовательно $\omega(z)$ равным

$$\omega(z) = z^2, z^3, \ldots, z^n$$

и вводя обозначение

$$p_{ik} = \iint_B z^i z^k \, ds, \tag{73}$$

мы будем иметь для искомых коэффициентов $a_k$ полинома (71) следующую систему уравнений первой степени:

$$\left.\begin{aligned} p_{10} + 2p_{11}a_2 + 3p_{12}a_3 + \ldots + np_{1,\,n-1}a_n &= 0, \\ p_{20} + 2p_{21}a_2 + 3p_{22}a_3 + \ldots + np_{2,\,n-1}a_n &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ p_{n-1,0} + 2p_{n-1,1}a_2 + 3p_{n-1,2}a_3 + \ldots + np_{n-1,\,n-1}a_n &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{74}$$

Таким образом, в существенном дело сводится к вычислению интегралов вида (73).

Если контур области есть простая замкнутая, сама себя не пересекающая кривая, то можно доказать, что построенные таким образом полиномы стремятся при $n \to \infty$ равномерно внутри $B$ к функции, отображающей $B$ на круг.

Сделаем в заключение одно замечание по поводу первой из доказанных в настоящем номере теорем. Функция (65) может преобразовывать круг $|\tau| < R$ в область $B$, чрезвычайно сложную по своим геометрическим свойствам как в отношении многолистности, так и в отношении вида контура. Такая область, как можно показать, может даже не иметь площади в обычном смысле этого слова, и то, что мы называли выше площадью области, надо понимать как предел площадей областей $B_1$, находящихся внутри $B$ и расширяющихся таким образом, что всякая точка $B$ попадает внутрь этих областей так, что эти области $B_1$ стремятся к $B$ как к пределу. Если $B$ имеет площадь в обычном смысле слова, то эта площадь совпадает, очевидно, с указанным выше пределом.

**42. Способ сопряженных тригонометрических рядов.** Укажем теперь другой способ приближенного построения функции, совершающей конформное преобразование односвязной области $B$ на круг. В данном случае мы будем иметь это приближенное представление в виде полинома не на плоскости $z$ области $B$, как в предыдущем случае, а на плоскости единичного круга $\tau$. Для простоты будем считать, не ограничивая общности, что центр круга переходит в начало координат, которое лежит внутри $B$. Пусть

$$z = a_1\tau + a_2\tau^2 + \ldots \tag{75}$$

функция, которая преобразует единичный круг $C$ ($|\tau| < 1$) в $B$. Если контур $B$ есть простая замкнутая кривая, то можно показать, что ряд (75) сходится равномерно во всем замкнутом круге $C$, включая его окружность. На этой окружности мы должны положить $\tau = e^{i\varphi}$, где $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$; при этом получим уравнение контура $\Gamma$ нашей области $B$:

$$z = x + iy = a_1e^{i\varphi} + a_2e^{i2\varphi} + a_3e^{i3\varphi} + \ldots \tag{76}$$

или, отделяя в коэффициентах вещественную и мнимую части $a_k = \alpha_k - i\beta_k$, можем написать уравнение контура в виде

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos k\varphi + \beta_k \sin k\varphi); \quad y = \sum_{k=1}^{\infty} (-\beta_k \cos k\varphi + \alpha_k \sin k\varphi). \tag{77}$$

В частности, мы можем считать $a_1$ вещественным, т. е. $\beta_1 = 0$. Уравнения (77) дают параметрическое представление контура $\Gamma$ области $B$ особого вида, а именно *параметрическое представление в виде сопряженных*

*тригонометрических рядов* [25]. Назовем такое представление *нормальным параметрическим представлением кривой.* В комплексной форме это представление может быть написано в виде (76). Наоборот, имея нормальное параметрическое представление контура Γ области в виде (76) или (77), мы можем построить и самую функцию, заменив в ряде (76) $e^{ik\varphi}$ на $\tau^k$. При этом, конечно, ряд (76) должен быть равномерно сходящимся. Таким образом, задача сводится к нахождению нормального параметрического представления контура Γ заданной области $B$.

Предположим, что имеется уравнение контура Γ в неявной форме, причем это уравнение имеет вид

$$x^2+y^2-1+\lambda P(x^2, y^2)=0, \tag{78}$$

где $\lambda$ — некоторая постоянная и $P(x^2, y^2)$ — полином, содержащий лишь четные степени $x$ и $y$. Уравнение (78) мы можем переписать в комплексной форме. Заметим для этого, что $P(x^2, y^2)$ можно считать полиномом от двух аргументов:

$$x^2+y^2=z\bar{z} \text{ и } 2(x^2-y^2)=z^2+\bar{z}^2,$$

так что уравнение (78) может быть переписано в форме

$$z\bar{z}-1+\lambda\sum_{l=0}^{l_0}\sum_{k=0}^{k_0}A_{kl}(z\bar{z})^k(z^2+\bar{z}^2)^l=0, \tag{79}$$

где $A_{kl}$ — заданные вещественные коэффициенты. По условию наша кривая Γ симметрична относительно координатных осей, и, повторяя рассуждения, аналогичные тем, которые мы проводили в [39] при рассмотрении правильного многоугольника, можно показать, что в формулах (77) мы должны иметь $\beta_k=0$ и $\alpha_{2k}=0$, так что уравнение контура в комплексной форме мы должны будем искать в следующем виде:

$$z=\alpha_1 e^{i\varphi}+\alpha_3 e^{i3\varphi}+\ldots \qquad (\alpha_1>0) \tag{80}$$

где $\alpha_{2k+1}$ — вещественные коэффициенты, и, следовательно,

$$\bar{z}=\alpha_1 e^{-i\varphi}+\alpha_3 e^{-i3\varphi}+\ldots \tag{81}$$

Непосредственным перемножением получим выражения

$$\left.\begin{aligned} z\bar{z}&=\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\Big[\sum_{j-j'=p}\alpha_{2j+1}\alpha_{2j'+1}\Big]e^{2ip\varphi},\\ z^2+\bar{z}^2&=\sum_{p=0}^{+\infty}\Big[\sum_{j+j'=p}\alpha_{2j+1}\alpha_{2j'+1}\Big]e^{i(2p+2)\varphi}+\\ &\quad+\sum_{p=0}^{+\infty}\Big[\sum_{j+j'=p}\alpha_{2j+1}\alpha_{2j'+1}\Big]e^{-i(2p+2)\varphi}. \end{aligned}\right\} \tag{82}$$

В каждом из написанных выражений суммирование по $j$ и $j'$ совершается от 0 до $+\infty$ лишь по тем значениям, которые удовлетворяют написанным внизу суммы равенствам. Подставляя выражения (82) в левую часть (79), мы должны, перемножая опять ряды и собирая члены с одинаковыми степенями $e^{i\varphi}$, приравнять нулю члены при различных степенях $e^{i\varphi}$. Заметим при этом, что в формулах (82) коэффициенты при положительных и отрицательных степенях будут одинаковы и участвуют лишь четные степени $e^{i\varphi}$. То же будет, очевидно, и при разложении левой части уравнения (79), так что нам придется приравнять нулю лишь свободный член и коэффициенты при $e^{i2p\varphi}$ для $p>0$.

Не проделывая всех вычислений в общем случае, заметим лишь, что мы получим, в силу первого из уравнений (82), систему уравнений вида

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1^2+\alpha_3^2+\alpha_5^2+\ldots+\lambda T_0(\alpha_{2j+1})&=1,\\ \alpha_1\alpha_3+\alpha_3\alpha_5+\ldots+\lambda T_1(\alpha_{2j+1})&=0,\\ \alpha_1\alpha_5+\alpha_3\alpha_7+\ldots+\lambda T_2(\alpha_{2j+1})&=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots& \end{aligned}\right\} \tag{83}$$

где $T_p(\alpha_{2j+1})$ — некоторые определенные выражения, содержащие заданные коэффициенты $A_{kl}$ и искомые $\alpha_{2j+1}$. Мы их не будем выписывать в общем случае. Перепишем предыдущую систему, оставляя в каждом уравнении слева лишь первое слагаемое и извлекая в первом уравнении корень квадратный, а остальные уравнения деля на $\alpha_1$:

$$\begin{aligned} \alpha_1&=\sqrt{1-[\alpha_3^2+\alpha_5^2+\ldots+\lambda T_0(\alpha_{2j+1})]},\\ \alpha_3&=-\frac{\alpha_3\alpha_5}{\alpha_1}-\frac{\alpha_5\alpha_7}{\alpha_1}-\ldots-\frac{1}{\alpha_1}\lambda T_1(\alpha_{2j+1}),\\ \alpha_5&=-\frac{\alpha_3\alpha_7}{\alpha_1}-\frac{\alpha_5\alpha_9}{\alpha_1}-\ldots-\frac{1}{\alpha_1}\lambda T_2(\alpha_{2j+1}),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Разлагая радикал по биному Ньютона, получим

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1&=1-\frac{1}{2}[\alpha_3^2+\alpha_5^2+\ldots+\lambda T_0(\alpha_{2j+1})]+\\ &\quad+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}[\alpha_3^2+\alpha_5^2+\ldots+\lambda T_0(\alpha_{2j+1})]^2+\ldots,\\ \alpha_3&=-\frac{\alpha_3\alpha_5}{\alpha_1}-\frac{\alpha_5\alpha_7}{\alpha_1}-\ldots-\frac{1}{\alpha_1}\lambda T_1(\alpha_{2j+1}),\\ \alpha_5&=-\frac{\alpha_3\alpha_7}{\alpha_1}-\frac{\alpha_5\alpha_9}{\alpha_1}-\ldots-\frac{1}{\alpha_1}\lambda T_2(\alpha_{2j+1}),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\} \tag{84}$$

Будем решать эту систему по методу последовательных приближений, принимая за исходные следующие значения:

$$\alpha_1^{(0)}=1;\quad \alpha_3^{(0)}=\alpha_5^{(0)}=\ldots=0. \tag{85}$$

Подставляя выражения (85) в правые части равенств (84) и отбрасывая все члены, содержащие $\lambda$ выше, чем в первой степени, мы получим первое приближение:

$$\alpha_{2j+1}^{(0)}+\lambda\alpha_{2j+1}^{(1)}, \tag{86}$$

причем, пользуясь выражениями $T_k(\alpha_{2j+1})$, можно показать, что все выражения (86) при достаточно больших значениях $j$ будут равны нулю.

Подставляя выражения (86) опять в правую часть равенств (84) и отбрасывая те члены, которые содержат $\lambda$ выше, чем во второй степени, мы будем иметь для коэффициентов второе приближение вида

$$\alpha_{2j+1}^{(0)}+\lambda\alpha_{2j+1}^{(1)}+\lambda^2\alpha_{2j+1}^{(2)},$$

причем опять все эти выражения будут нули при больших $j$ и т. д. Можно показать, что полученные таким образом бесконечные ряды для $\alpha_{2j+1}$ будут сходящимися для всех $\lambda$, достаточно близких к нулю, и будут давать решение задачи.

Пример. Для разъяснения предыдущего метода рассмотрим пример, а именно найдем функцию, отображающую единичный круг на внутренность эллипса с уравнением:

$$x^2 + y^2 - 1 - \lambda (x^2 - y^2) = 0 \quad (\lambda < 1). \tag{87}$$

В комплексной форме это уравнение может быть представлено в виде

$$z\bar{z} - \lambda \frac{z^2 + \bar{z}^2}{2} = 1,$$

и, непосредственно пользуясь формулами (82), получим бесконечную систему вида

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_1^2 + \alpha_3^2 + \alpha_5^2 + \alpha_7^2 + \alpha_9^2 + \alpha_{11}^2 + \ldots = 1,\\
&\alpha_1\alpha_3 + \alpha_3\alpha_5 + \alpha_5\alpha_7 + \alpha_7\alpha_9 + \alpha_9\alpha_{11} + \ldots = \lambda\left(\frac{1}{2}\,\alpha_1^2\right),\\
&\alpha_1\alpha_5 + \alpha_3\alpha_7 + \alpha_5\alpha_9 + \alpha_7\alpha_{11} + \ldots = \lambda\,(\alpha_1\alpha_3),\\
&\alpha_1\alpha_7 + \alpha_3\alpha_9 + \alpha_5\alpha_{11} + \ldots = \lambda\left(\frac{1}{2}\,\alpha_3^2 + \alpha_1\alpha_5\right),\\
&\alpha_1\alpha_9 + \alpha_3\alpha_{11} + \ldots = \lambda\,(\alpha_1\alpha_7 + \alpha_3\alpha_5),\\
&\alpha_1\alpha_{11} + \alpha_3\alpha_{13} + \ldots = \lambda\left(\alpha_1\alpha_9 + \alpha_3\alpha_7 + \frac{1}{5}\,\alpha_5^2\right),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \tag{88}$$

Введем новые неизвестные $\rho_k$, полагая

$$\rho_0 = \alpha_1; \quad \rho_1 = \frac{\alpha_3}{\alpha_1}; \quad \rho_2 = \frac{\alpha_5}{\alpha_1}; \quad \ldots \tag{89}$$

Для них система (88) перепишется так:

$$\left.\begin{aligned}
&\rho_0 = (1 + \rho_1^2 + \rho_2^2 + \ldots)^{-\frac{1}{2}},\\
&\rho_1 = \frac{1}{2}\lambda - \rho_1\rho_2 - \rho_2\rho_3 - \rho_3\rho_4 - \rho_4\rho_5 - \ldots,\\
&\rho_2 = \lambda\rho_1 - \rho_1\rho_3 - \rho_2\rho_4 - \rho_3\rho_5 - \ldots,\\
&\rho_3 = \lambda\left(\frac{1}{2}\,\rho_1^2 + \rho_2\right) - \rho_1\rho_4 - \rho_2\rho_5 - \ldots,\\
&\rho_4 = \lambda\,(\rho_1\rho_2 + \rho_3) - \rho_1\rho_5 - \ldots,\\
&\rho_5 = \lambda\left(\rho_4 + \rho_1\rho_3 + \frac{1}{2}\,\rho_2^2\right) - \rho_1\rho_6 - \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \tag{90}$$

Не обращая пока внимания на первое уравнение, мы можем решить остальные указанным выше методом последовательных приближений.

Таким путем, доходя до членов, содержащих $\lambda^5$, получим

$$\rho_1 = \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{4}\lambda^3 + \frac{3}{32}\lambda^5, \quad \rho_2 = \frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{9}{16}\lambda^4,$$

$$\rho_3 = \frac{5}{8}\lambda^3 - \frac{9}{8}\lambda^5, \quad \rho_4 = \frac{7}{8}\lambda^4, \quad \rho_5 = \frac{21}{16}\lambda^5,$$

причем все остальные $\rho_k$ будут равны нулю. За начальные значения мы брали $\rho_1^{(0)} = \rho_2^{(0)} = \ldots = 0$. Подставляя полученные выражения для $\rho_k$ в правую часть первого из уравнений системы (90) и пользуясь формулой бинома Ньютона, получим для $\rho_0$ выражение с точностью до $\lambda^5$:

$$\rho_0 = 1 - \frac{1}{8}\lambda^2 + \frac{3}{128}\lambda^4.$$

Зная $\rho_k$, согласно (89), можно построить $\alpha_k$:

$$\alpha_1 = \rho_0, \quad \alpha_3 = \rho_0\rho_1, \quad \alpha_5 = \rho_0\rho_2, \ldots$$

Искомая функция, отображающая единичный круг во внутреннюю часть эллипса (87), будет приближенно представляться в виде

$$z = \left(1 - \frac{1}{8}\lambda^2 + \frac{3}{128}\lambda^4\right)\tau\left[1 + \left(\frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{4}\lambda^3 + \frac{3}{32}\lambda^5\right)\tau^2 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{9}{16}\lambda^4\right)\tau^4 + \left(\frac{5}{8}\lambda^3 - \frac{9}{8}\lambda^5\right)\tau^6 + \frac{7}{8}\lambda^4\tau^8 + \frac{21}{16}\lambda^5\tau^{10}\right]. \quad (91)$$

**43. Плоское установившееся течение жидкости.** Выяснив основы теории конформного преобразования, мы переходим теперь к приложению теории функций комплексного переменного в гидродинамике. Пусть имеется плоское установившееся движение жидкости, обладающее *потенциалом скорости* $\varphi(x, y)$ *и функцией тока* $\psi(x, y)$ [II, 77]. Напомним, что при этом составляющие скорости в каждой точке выражаются по формулам

$$v_x = \frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial y} \quad (92)$$

и разность

$$\psi(x_1, y_1) - \psi(x_0, y_0) = \psi(M_1) - \psi(M_0) \quad (93)$$

дает количество жидкости, протекающей за единицу времени через произвольный контур, соединяющий точки $M_0$ и $M_1$. Течение считается не зависящим от времени и одинаковым во всех плоскостях, параллельных плоскости $XY$, причем плотность жидкости мы приняли за единицу. Точнее говоря, выражение (93) дает количество жидкости, протекающей в единицу времени через цилиндрическую поверхность, параллельную оси $Z$, высотой единица, имеющую направляющей некоторый контур $l$ плоскости $XY$, соединяющий $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$. Как мы видели, функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ связаны между собой соотношениями

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

которые в точности совпадают с уравнениями Коши — Римана. Мы можем поэтому утверждать, что функция комплексного переменного

$$f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) \quad (94)$$

будет иметь производную в области, занятой текущей жидкостью. Эта функция называется обычно *комплексным потенциалом течения.*

Как упоминалось уже раньше, функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ могут быть многозначными, а именно могут приобретать постоянные слагаемые при обходе некоторой точки или, более общо, некоторой дыры, которая находится внутри рассматриваемой области. Для функции $\psi(x, y)$ эта многозначность указывает на наличие источника в соответствующей точке, а для функции $\varphi(x, y)$ — на наличие элементарного вихря в этой точке. В таких случаях функция $f(z)$ будет также многозначной функцией, т. е. она будет получать постоянные слагаемые при обходе некоторых точек (или дыр).

В силу (92) вектору скорости соответствует комплексное число

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - i\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Последнее выражение совпадает, очевидно, с величиной, сопряженной с производной $\overline{f'(z)}$ [2]. Итак, *величина, сопряженная с производной, дает вектор скорости течения.*

Рассмотрим изотермическую сетку, соответствующую функциям (94):

$$\varphi(x, y) = C_1, \quad \psi(x, y) = C_2. \tag{95}$$

Первое семейство линий представляет собою семейство линий равного потенциала скорости или, как говорят, *семейство эквипотенциальных линий.* Второе семейство (линии тока), как нетрудно видеть, представляет собою семейство траекторий жидких частиц. Действительно, как мы знаем, второе семейство будет ортогонально первому, но вектор скорости, равный $\operatorname{grad}\varphi(x, y)$, направлен как раз по нормали соответствующей линии первого из семейств (95). Таким образом, в данном установившемся движении в каждой точке вектор скорости направлен по касательной к линии второго из семейств (95), проходящей через эту точку, т. е. действительно это семейство есть семейство линий тока, и эти линии тока в установившемся движении дают траектории жидких частиц.

До сих пор мы ограничивались лишь кинематическими соображениями и убедились, что всякая кинематическая возможная картина движения задается комплексным потенциалом, представляющим собою регулярную функцию, и, наоборот, всякий такой комплексный потенциал дает кинематически возможную картину движения. Покажем теперь, что мы *сможем таким образом удовлетворить и уравнениям гидродинамики, причем из этих уравнений получим величину давления.* Напишем уравнения гидродинамики для нашего случая плоского установившегося течения, считая, что внешние объемные силы имеют потенциал $U(x, y)$. Приняв во внимание (92), получим два уравнения

гидродинамики и уравнение непрерывности [II, 127]:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},$$
$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0,$$

где $\rho$ — плотность жидкости и $p(x, y)$ — давление. Уравнение непрерывности, очевидно, удовлетворено, так как вещественная часть регулярной функции есть функция гармоническая. Первые два уравнения могут быть переписаны в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]-U+\frac{1}{\rho}p\right\}=0,$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]-U+\frac{1}{\rho}p\right\}=0.$$

Отсюда следует, что выражение, стоящее в фигурных скобках, должно быть постоянной величиной, и мы получаем таким образом следующий интеграл:

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]-U+\frac{1}{\rho}p=C, \tag{96}$$

откуда и определяется величина давления $p(x, y)$. В случае отсутствия объемных сил и полагая $\rho=1$, получаем формулу

$$p=C-\frac{1}{2}|\mathbf{V}|^2=C-\frac{1}{2}|f'(z)|^2, \tag{97}$$

где через $|\mathbf{V}|$ мы обозначили величину скорости.

Заметим, что если вместо $f(z)=\varphi+i\psi$ возьмем комплексный потенциал $if(z)=-\psi+i\varphi$, то эквипотенциальные линии перейдут в линии тока, и наоборот. Таким образом, *всякая изотермическая сетка регулярной функции дает по существу две различные картины течения жидкости.*

**44. Примеры.** I. Все примеры изотермических сеток, которые мы приводили раньше, можно теперь истолковать с точки зрения гидродинамики, причем, как было только что указано, каждый такой пример даст две гидродинамические картины.

Перейдем теперь к рассмотрению некоторых новых примеров. Начнем со случая элементарной функции

$$f(z)=A\ln(z-a)=A\ln|z-a|+iA\arg(z-a),$$

где $a$ — некоторая точка на плоскости и $A$ — вещественная постоянная. В данном случае эквипотенциальные линии будут окружности с центром $a$, и линии тока будут прямые, выходящие из этой точки. При обходе этой точки функция $f(z)$ приобретает постоянные слагаемые $i2\pi A$, и, таким образом, мнимая часть комплексного потенциала $\varphi(x, y)$ (функция тока) будет приобретать слагаемые $2\pi A$, т. е. будем иметь в точке $a$ источник интен-

сивности $2\pi A$. Вектор скорости будет определяться комплексным числом

$$\overline{f'(z)} = \frac{A}{\overline{z-a}}.$$

Если обозначить через $\rho$ и $\varphi$ модуль и аргумент комплексного числа $z-a$, то вектору скорости будет соответствовать комплексное число $\frac{A}{\rho} e^{i\varphi}$. Отсюда, между прочим, непосредственно следует, что при приближении к источнику скорость будет стремиться к бесконечности и что при положительном $A$ эта скорость будет направлена от источника на бесконечность, т. е. мы будем иметь в данном случае именно *источник*, а не *сток*.

Рассмотрим теперь более общую функцию

$$f(z) = A \ln \frac{z-a}{z-b} = A \ln \left| \frac{z-a}{z-b} \right| + iA \arg \frac{z-a}{z-b}, \tag{98}$$

где $a$ и $b$ — две различные точки плоскости и $A$ — вещественная постоянная. В данном случае изотермическая сетка будет определяться уравнениями

$$\left| \frac{z-a}{z-b} \right| = C_1, \quad \arg \frac{z-a}{z-b} = C_2.$$

Как мы знаем, первому из этих уравнений соответствует семейство окружностей, относительно которых $a$ и $b$ суть симметричные точки, а второму уравнению — семейство окружностей, проходящих через точки $a$ и $b$ [33]. В данном случае мы будем иметь в точке $a$ источник интенсивности $2\pi A$, а в точке $b$ — сток такой же интенсивности.

II. Положим, что точки $a$ и $b$ находятся в точках $(-h)$ и 0 вещественной оси, и возьмем $A = \frac{1}{h}$. При этом функция (98) будет иметь вид

$$f(z) = \frac{\ln(z+h) - \ln z}{h}.$$

Переходя к пределу при $h \to 0$, мы получим комплексный потенциал, характеризующий так называемый *диполь* в начале координат:

$$f_1(z) = \frac{1}{z}.$$

Как нетрудно проверить (рис. 45), в данном случае изотермическая сетка будет состоять из окружностей, проходящих через начало координат и касающихся оси $Y$ (эквипотенциальные линии), и из окружностей, проходящих через начало и касающихся оси $X$ (линии тока) [33].

III. Рассмотрим функцию

$$f(z) = iA \ln(z-a) = -A \arg(z-a) + iA \ln|z-a|,$$

где $A$, как и раньше, — вещественная постоянная. В этом случае линиями тока будут окружности с центром $a$, а прямые, выходящие из точки $a$, будут эквипотенциальными линиями. При обходе точки $a$ в положительном направлении вещественная часть $f(z)$ (потенциал скорости) получит приращение $-2\pi A$, и мы будем иметь в точке $A$ элементарный вихрь интенсивности $-2\pi A$.

IV. Возьмем функцию

$$f(z) = \frac{k}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \tag{99}$$

которую мы уже исследовали в [35]. Отделяя вещественную и мнимую части, получим уравнение линий тока в виде

$$\frac{k}{2}\left(y-\frac{y}{x^2+y^2}\right)=C$$

или

$$ky\,(x^2+y^2-1)-2C\,(x^2+y^2)=0.$$

В общем случае это будут некоторые кривые третьего порядка. В частном случае, при $C=0$, имеем окружность $x^2+y^2=1$ и ось $y=0$. Будем рассматривать только часть плоскости вне упомянутой окружности. Мы

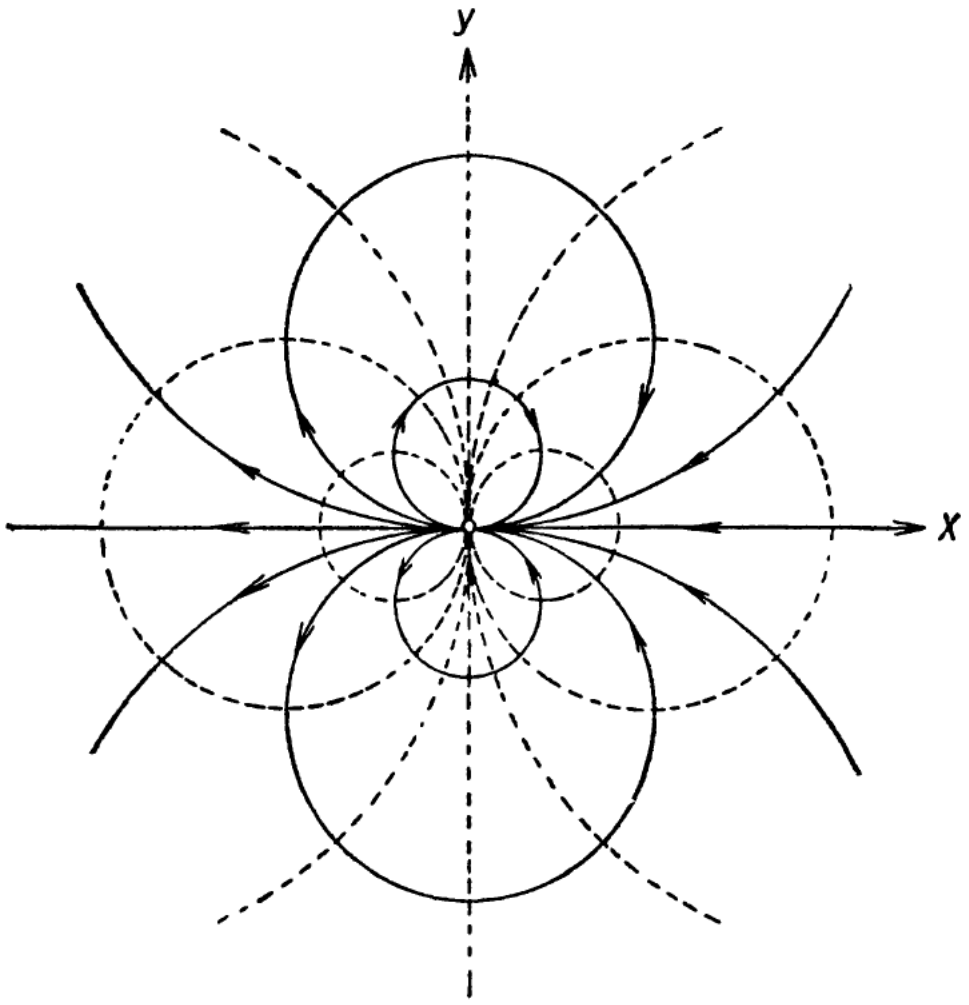



Рис. 45.

можем сказать, что одна из линий тока будет состоять из отрезков $(-\infty, -1)$ и $(1, \infty)$ оси $y=0$ и упомянутой окружности. Мы имеем, таким образом, в данном случае течение жидкости вне окружности с обтеканием этой окружности. Вычисляя производную

$$f'(z)=\frac{k}{2}\left(1-\frac{1}{z^2}\right),$$

видим, что скорость течения на бесконечности равна $\frac{k}{2}$ ($k$ считается вещественным) и что эта скорость равна нулю в точках $z=\pm 1$, т. е. в тех точках, где прямолинейные отрезки линий тока выходят на окружность.

Добавим к нашей функции логарифмический член и составим таким образом новую функцию

$$f_1(z)=\frac{k}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)-iA\ln z. \qquad (100)$$

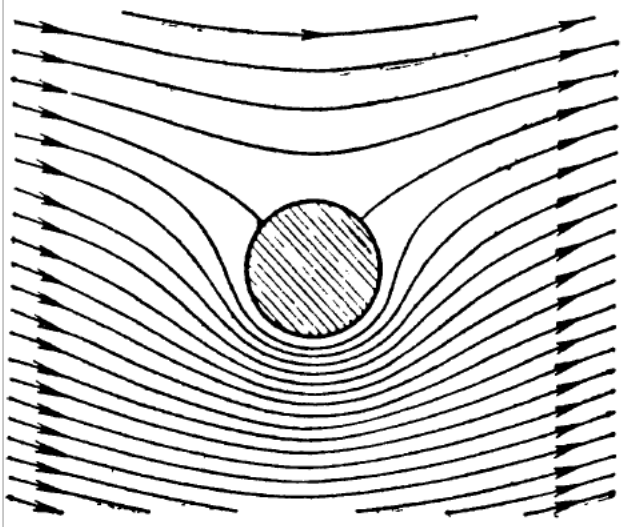


Рис. $46_1$.

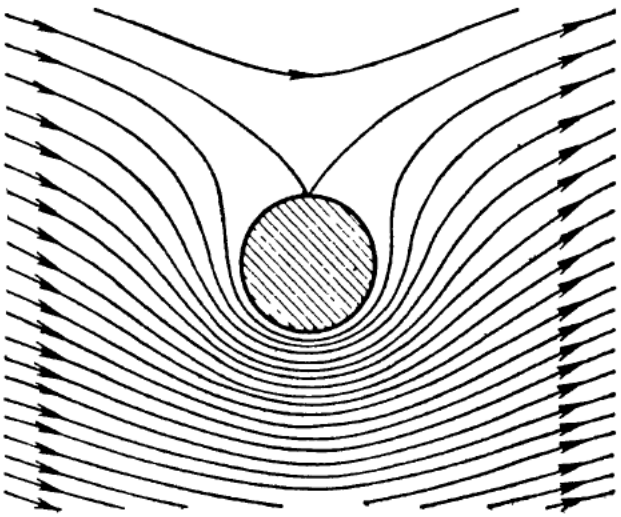


Рис. $46_2$.

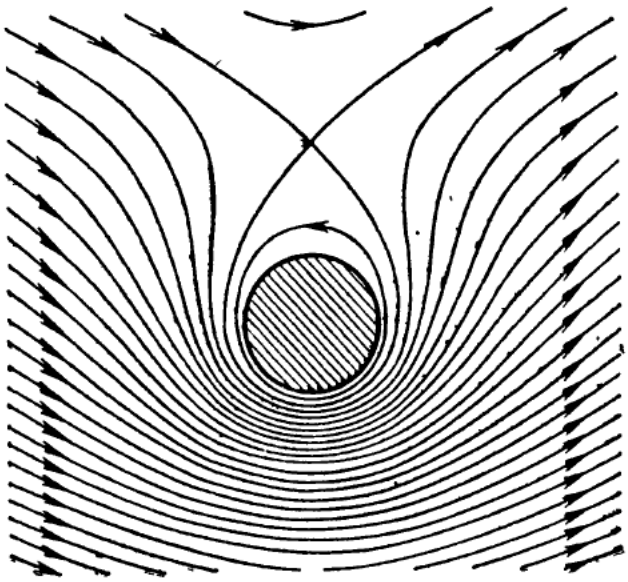


Рис. $46_3$.

Мнимая часть второго слагаемого также сохраняет постоянное значение на упомянутой выше окружности, т. е. эта окружность и в случае комплексного потенциала (100) является одной из линий тока, но только в рассматриваемом случае при обходе вокруг этой окружности потенциал скорости получает дополнительное слагаемое $2\pi A$, т. е. в случае потенциала (100) мы имеем обтекание нашей окружности при наличии элементарного вихря. На рис. $46_1$, $46_2$ и $46_3$ изображен вид линий тока при различных значениях постоянной $\frac{A}{k}$. В случае течения, изображенного на рис. $46_2$, точки входа и выхода линии тока на обтекаемой окружности сливаются.

V. Как мы видели раньше [35], для функции $f(z) = \arccos\frac{z}{k}$ изотермическая сетка будет состоять из софокусных эллипсов и гипербол с фокусами $\pm k$ на вещественной оси. Эта сетка изображена на рис. 47. Если за линии тока взять гиперболы, то получим картину течения через отверстие $(-k, k)$ на вещественной оси. Если же за линии тока взять эллипсы, то получится картина обтекания эллипса или отрезка $(-k, k)$.

VI. Часто при исследовании гидродинамической картины бывает удобнее задавать не комплексный потенциал $w = f(z)$, а обратную функцию $z = \varphi(w)$. Рассмотрим один пример такого рода. Пусть комплексный потенциал задан обратной функцией

$$z = w + e^w.$$

Отделяя вещественную и мнимую части

$$z = x + iy, \quad w = \varphi + i\psi,$$

мы будем иметь

$$x = \varphi + e^{\varphi}\cos\psi, \quad y = \psi + e^{\varphi}\sin\psi.$$

Полагая $\psi = C$, получим уравнение линий тока в параметрической форме:

$$x = \varphi + e^{\varphi}\cos C, \quad y = C + e^{\varphi}\sin C,$$

где $\varphi$ — переменный параметр. Рассмотрим две линии тока, а именно линию

тока, соответствующую $C=\pi$, и линию, соответствующую $C=-\pi$. В первом случае будем иметь

$$x=\varphi-e^{\varphi};\quad y=\pi.$$

Как нетрудно видеть, в данном случае линия тока будет представлять собою двойной отрезок $-\infty<x\leqslant-1$ прямой $y=\pi$. Точно так же при $C=-\pi$ получим двойной отрезок $-\infty<x\leqslant-1$ прямой $y=-\pi$. Кроме того, очевидно, что при $C=0$ линией тока будет служить сама ось $y=0$. На рис. 48 изображены линии тока для настоящего случая.

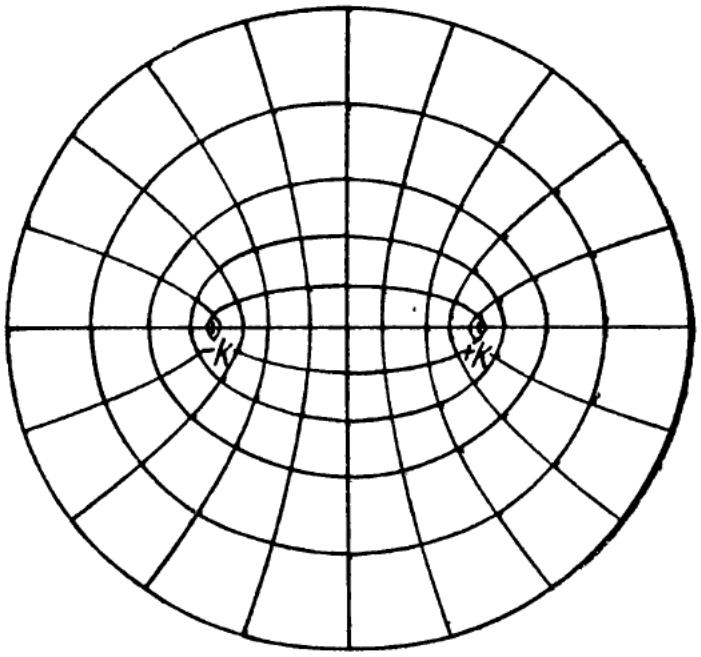



Рис. 47.

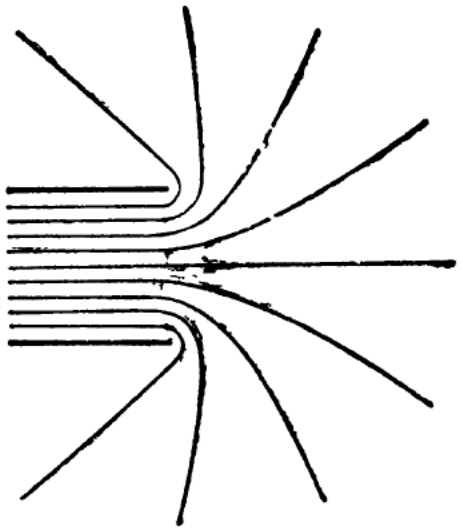


Рис. 48.

**45. Задача полного обтекания.** Положим, что нам задан на плоскости простой замкнутый контур $l$, и мы ищем течение жидкости вне этого контура, которое бы удовлетворяло следующим двум условиям: 1) контур $l$ должен быть одной из линий тока и 2) скорость на бесконечности должна быть определенной по величине и направлению. Будем, кроме того, требовать, чтобы комплексный потенциал $f(z)$ был однозначной функцией. Не ограничивая общности, можем считать, что скорость на бесконечности характеризуется некоторым вещественным положительным числом $c$ (т. е. выберем направление скорости на бесконечности за положительное направление вещественной оси).

Положим, что известна функция, конформно преобразующая часть плоскости $z$, находящуюся вне $l$, на внешность единичного круга $|\tau|>1$. Таких функций, как известно, бесчисленное множество, и мы берем ту из них, которая преобразует бесконечно далекую точку в самое себя и не меняет направлений в этой точке. Для этой функции $\omega'(\infty)$ есть вещественное положительное число, так что имеем следующее ее разложение вблизи точки $z=\infty$:

$$\tau=\omega(z)=bz+b_0+\frac{b_1}{z}+\ldots\quad(b>0). \tag{101}$$

Как нам уже известно, выражение комплексного потенциала для задачи обтекания окружности представляется так:

$$f_1(\tau)=\frac{k}{2}\left(\tau+\frac{1}{\tau}\right), \tag{102}$$

где $k$ — некоторая вещественная постоянная, которую мы дальше определим. Если подставим в выражение (102) вместо $\tau$ его выражение (101), то получим функцию однозначную, регулярную вне контура $l$, мнимая часть которой сохраняет постоянное значение на контуре $l$, так как мнимая часть (102) сохраняла постоянное значение на окружности $|\tau|=1$:

$$f(z)=f_1[\omega(z)]=\frac{k}{2}\left[\omega(z)+\frac{1}{\omega(z)}\right]. \tag{103}$$

Остается теперь только подобрать постоянную $k$ так, чтобы скорость на бесконечности была равна $c$, т. е. так, чтобы $f'(\infty)=c$. Мы имеем, очевидно, на бесконечности, принимая во внимание формулы (101) и (102),

$$f'(z)=\frac{k}{2}\left[1-\frac{1}{\omega^2(z)}\right]\omega'(z) \quad \text{и} \quad f'(\infty)=\frac{k}{2}\cdot b,$$

откуда и следует непосредственно, что мы должны считать $k=\frac{2c}{b}$.

Мы видим, таким образом, что *задача полного обтекания некоторого контура приводит к задаче конформного преобразования части плоскости вне этого контура на внешность единичного круга.*

Можно показать, что при условии однозначности функции $f(z)$ решение задачи единственно, причем предполагается, что $f(z)$ вне $l$ не имеет особых точек, кроме простого полюса $z=\infty$.

**46. Формула Н. Е. Жуковского.** Пусть $f(z)$ — комплексный потенциал, который дает обтекание контура $l$, причем на бесконечности скорость равна положительному числу $c$. Будем считать, что $f(z)$ не является однозначной функцией, но при обходе вокруг контура $l$ вещественная ее часть $\varphi(x, y)$ получает постоянное слагаемое $\gamma$. Составляющие давления на обтекаемое тело будут выражаться, очевидно, криволинейными интегралами

$$F_x=\int_l p(x, y)\cos(n, x)\,ds,\quad F_y=\int_l p(x, y)\cos(n, y)\,ds, \tag{104}$$

где $p(x, y)$ — величина давления и $n$ — направление внутренней нормали к контуру.

Элементу контура $\mathbf{ds}$, как вектору, соответствует комплексное число $dz=e^{i\theta}\,ds$, где $\theta$ — угол, образованный касательной к контуру

с осью $OX$. Поскольку умножению комплексного числа на $i$ соответствует добавление к аргументу $\frac{\pi}{2}$, комплексному числу $ie^{i\theta}\,ds$ соответствует вектор величины $ds$, направленный по внутренней нормали к $l$, мы будем, очевидно, иметь

$$F_x + iF_y = \int_l pi\,dz. \tag{105}$$

Согласно формуле (97)

$$p = C - \frac{1}{2}|f'(z)|^2 = C - \frac{1}{2}\left|\frac{df}{dz}\right|^2,$$

и поэтому

$$F_x + iF_y = i\int_l C\,dz - \frac{1}{2}i\int_l \left|\frac{df}{dz}\right|^2 dz.$$

Но ясно, что

$$\int_l dz = 0,$$

и, кроме того, удобно перейти в предыдущем равенстве к комплексным сопряженным значениям, после чего получим

$$F_x - iF_y = \frac{1}{2}i\int_l \left|\frac{df}{dz}\right|^2 \overline{dz} = \frac{1}{2}i\int_l \frac{df}{dz}\cdot\frac{\overline{df}}{\overline{dz}}\,\overline{dz} = \frac{1}{2}i\int_l \frac{df}{dz}\,\overline{df}. \tag{106}$$

Так как контур $l$ есть линия тока, то на нем $\psi(x, y)$ постоянна: $\psi(x, y) = C_1$, и, следовательно, на $l$

$$f(z) = \varphi(x, y) + iC_1,\ \overline{f(z)} = \varphi(x, y) - iC_1,$$

откуда следует, что $df = \overline{df}$. Умножив обе части (106) на $i$, получим комплексное выражение, которое будет вполне характеризовать вектор общего давления, испытываемого обтекаемым телом:

$$R = F_y + iF_x = -\frac{1}{2}\int_l \frac{df}{dz}\,df$$

или окончательно

$$R = F_y + iF_x = -\frac{1}{2}\int_l \left(\frac{df}{dz}\right)^2 dz. \tag{107}$$

Функцию $f'(z)$ мы считаем уже регулярной и однозначной вне $l$. В окрестности бесконечности она должна иметь разложение вида

$$f'(z) = c + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \dots, \tag{108}$$

где $c$ есть как раз заданное значение скорости на бесконечности. Для самой функции $f(z)$ мы имеем в окрестности бесконечности выражение

$$f(z)=C+cz+b_1\ln z-\frac{b_2}{z}+\dots,$$

и при обходе вокруг $l$ в положительном направлении функция $f(z)$ будет, очевидно, приобретать слагаемое $i2\pi b_1$, которое раньше было обозначено буквой $\gamma$. Таким образом, мы должны иметь $b_1=\frac{1}{2\pi i}\gamma$ и вместо (108) можем написать

$$f'(z)=c+\frac{\gamma}{2\pi iz}+\frac{b_2}{z^2}+\dots$$

Отсюда, возводя в квадрат, получим разложение вида

$$[f'(z)]^2=c^2+\frac{c\gamma}{\pi iz}+\frac{d_2}{z^2}+\dots \tag{109}$$

При вычислении интеграла (106) мы можем, в силу теоремы Коши, производить интегрирование не по самому контуру $l$, а по замкнутой кривой, обходящей вокруг $l$ и расположенной в окрестности бесконечно далекой точки. При этом интегрировании мы можем воспользоваться разложением (109) и, как нетрудно видеть, получим для $R$ следующее выражение:

$$R=F_y+iF_x=-\frac{c\gamma}{2\pi i}2\pi i=-c\gamma,$$

т. е.

$$F_y=-c\gamma,\quad F_x=0. \tag{110}$$

Эти формулы были впервые даны Н. Е. Жуковским.

**47. Плоская электростатическая задача.** Обратимся теперь к вопросу о приложении теории функций комплексного переменного к задачам электростатики. Мы здесь встретимся во многом с задачами, аналогичными предыдущим. Прежде всего выясним, в чем состоит плоская электростатическая задача. Как известно, точечный заряд $e$ создает в пространстве силовое поле, действующее по закону Кулона, причем интенсивность этого поля выражается общеизвестной формулой

$$f=\frac{e}{\rho^2},$$

где $\rho$ — расстояние от заряда $e$ до той точки $M$, где мы определяем вектор силы. Этот вектор силы имеет направление отрезка, идущего от заряда к точке $M$. Представим теперь себе, что мы имеем заряженную прямую, параллельную оси $Z$ и пересекающую плоскость $XY$ в некоторой точке $O$, причем плотность заряда во всех точках прямой

одинакова. Обозначим через $e$ величину заряда, рассчитанного на единицу длины. Картина электростатического поля будет одинакова, очевидно, во всех плоскостях, параллельных плоскости $XY$, так что достаточно рассмотреть лишь саму плоскость $XY$, причем, опять-таки в силу симметрии, вектор силы будет, очевидно, расположен в самой этой плоскости и будет иметь направление отрезка, идущего от точки $O$ к той точке $M$ плоскости, для которой мы вычисляем силу. Элементарный заряд на отрезке $dz$ нашей прямой будет выражаться произведением $e \cdot dz$, и чтобы получить величину силы в точке $M$ с координатами $(x, y, 0)$, мы должны вычислить сумму проекций составляющих силы на направление $\overline{OM}$ вышеупомянутого отрезка.

Для величины силы имеем выражение

$$\frac{e\,dz}{x^2+y^2+z^2},$$

где точку $O$ мы приняли за начало координат. Предыдущее выражение надо еще помножить на косинус угла $\varphi$, образованного направлением $NM$ из переменной точки $N$ оси $Z$ с направлением $\overline{OM}$, причем из прямоугольного треугольника $ONM$ имеем

$$\cos\varphi = \frac{r}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad \text{и} \quad z = r\operatorname{tg}\varphi,$$

где $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Вводя в интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e\cos\varphi\,dz}{x^2+y^2+z^2}$$

вместо $z$ переменную $\varphi$, получим для величины силы выражение

$$f = \frac{e}{r}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\,d\varphi$$

или

$$f = \frac{2e}{r} \quad \left(r = \sqrt{x^2+y^2}\right). \tag{111}$$

Соответствующая потенциальная функция имеет, очевидно, вид

$$V(x, y) = 2e\ln\frac{r_0}{r}, \tag{112}$$

где $r_0$ — некоторая произвольная постоянная, которую считаем положительной. Таким образом, логарифмический потенциал (112) является в электростатической задаче элементарным потенциалом, происходящим как бы от точечного заряда, если мы отвлечемся от всего

пространства и будем рассматривать только плоскость $XY$. Заметим, что этот элементарный потенциал (112) обращается на бесконечности не в нуль, как обычный ньютоновский потенциал трехмерного пространства $\frac{1}{r}$, а в бесконечность, что существенным образом отличает электростатические задачи в плоском случае. Если мы имеем заряженной не одну прямую, а некоторый цилиндр, имеющий основание $B$ на плоскости $XY$, то вместо элементарного потенциала (112) будем иметь потенциал, выражающийся двойным интегралом

$$V(x, y) = 2 \iint_B \rho(\xi, \eta) \ln \frac{r_0}{r} d\xi\, d\eta, \tag{113}$$

где $\rho(\xi, \eta)$ — плотность и $r$ — расстояние от переменной точки $(\xi, \eta)$ области $B$ до точки $M(x, y)$:

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}.$$

Аналогично, если заряженной оказывается поверхность некоторого цилиндра, то потенциал выразится криволинейным интегралом. Известно, далее, что функция $\ln r$ и, следовательно, функция (112) удовлетворяют уравнению Лапласа [**II, 131**]

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0.$$

Такому же уравнению удовлетворяет и потенциал (113) вне зарядов, т. е. вне области $B$.

Но мы можем считать всякую гармоническую функцию вещественной или мнимой частью регулярной функции комплексного переменного. В данном случае будем считать потенциал $V(x, y)$ мнимой частью некоторой регулярной функции

$$f(z) = U(x, y) + iV(x, y). \tag{114}$$

Таким образом, *всякая электростатическая картина вне зарядов приводит нас к некоторой регулярной функции $f(z)$ (комплексному потенциалу), и наоборот, всякая такая регулярная функция дает некоторую электростатическую картину плоского поля.*

В данном случае оба семейства изотермической сетки функции

$$U(x, y) = C_1, \quad V(x, y) = C_2 \tag{115}$$

имеют простое физическое значение. Второе из семейств (115) дает семейство *эквипотенциальных* линий, а первое семейство, ортогональное ко второму, дает, как хорошо известно, семейство *силовых линий*, т. е. таких линий, касательные к которым определяют в каждой точке направление действующей силы. Составляющие вектора силы

имеют следующие выражения:

$$F_x = -\frac{\partial V(x, y)}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial V(x, y)}{\partial y}$$

или, в силу уравнений Коши — Римана,

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial x}.$$

Таким образом, *вектору силы* соответствует комплексное число

$$F_x + iF_y = -\frac{\partial V}{\partial x} - i\frac{\partial U}{\partial x} = -\overline{if'(z)}. \tag{116}$$

Если мы имеем замкнутый ограниченный проводник, то внутри него, как известно, потенциал сохраняет постоянное значение, и плотность заряда на его поверхности вычисляется, как это доказывается в электростатике, с точностью до знака по формуле

$$\rho = \frac{1}{4\pi}\sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

или при помощи комплексного потенциала по формуле

$$\rho = \frac{1}{4\pi}|f'(z)|. \tag{117}$$

Нетрудно подметить аналогию между всеми этими понятиями и соответствующими понятиями в задаче плоской гидродинамики.

**48. Формула Шварца.** Вышеуказанное приложение аналитических функций комплексного переменного к задачам гидродинамики и электростатики по существу было основано на той тесной связи, которая существует между гармоническими функциями и аналитическими функциями комплексного переменного. Мы указывали на эту связь уже раньше в [**2**].

Формулируем еще раз основные моменты этой связи: *вещественная и мнимая части аналитической функции суть гармонические функции и, наоборот, всякую гармоническую функцию можно рассматривать как вещественную часть некоторой аналитической функции, и при этом ее мнимая часть определяется с точностью до постоянного слагаемого,* т. е. *сама функция по вещественной части определяется с точностью до чисто мнимого постоянного слагаемого.* Как мы упоминали раньше [**II, 204**], в случае ограниченной области гармоническая функция определяется единственным образом своими предельными значениями на контуре этой области (задача Дирихле). Таким образом, принимая во внимание сказанное выше, мы можем утверждать, что *регулярная в некоторой области $B$ с контуром $l$ функция $f(z)$ определяется с точностью до чисто мнимого постоянного слагаемого по заданным значениям ее*

*вещественной части на контуре l.* В общем случае любой области мы не имеем простой формулы, которая бы давала нам решение этой задачи, т. е. определяла бы регулярную функцию по заданным контурным значениям ее вещественной части. В случае круга такую формулу построить нетрудно, к чему мы сейчас и переходим.

Пусть имеется круг с центром в начале и радиусом $R$. Пусть, далее, $u(x, y)$ — вещественная часть искомой аналитической функции. Эта гармоническая функция определяется своими контурными значениями $u(\varphi)$ при помощи интеграла Пуассона, который, как мы знаем, имеет следующий вид [II, **204**]:

$$u(x, y)=u(r, \vartheta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(\varphi)\,\frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\varphi-\vartheta)+r^2}\,d\varphi \quad (r<R). \tag{118}$$

Нетрудно видеть, что ядро этого интеграла Пуассона, т. е. дробь, стоящая под знаком интеграла, представляет собою вещественную часть некоторой аналитической функции, а именно:

$$\frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\varphi-\vartheta)+r^2}=\operatorname{Re}\left[\frac{Re^{i\varphi}+z}{Re^{i\varphi}-z}\right] \quad (z=re^{i\vartheta}=x+iy).$$

Если мы подставим под знак интеграла вместо ядра интеграла Пуассона написанную аналитическую функцию комплексного переменного $z$, то в результате получится функция комплексного переменного $z$, вещественная часть которой совпадает как раз с $u(x, y)$. Эта функция будет иметь вид

$$f(z)=u(x, y)+iv(x, y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(\varphi)\,\frac{Re^{i\varphi}+z}{Re^{i\varphi}-z}\,d\varphi. \tag{119}$$

Полагая в этой формуле $z=0$, мы получим чисто вещественное значение для $f(z)$, т. е. формула (119) дает то решение нашей задачи, которое имеет вещественное значение в начале. Если мы обозначим через Ci мнимую часть искомой функции в начале, то общее решение задачи будет иметь вид

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(\varphi)\,\frac{Re^{i\varphi}+z}{Re^{i\varphi}-z}\,d\varphi+\mathrm{Ci}. \tag{120}$$

Эта формула и называется обычно *формулой Шварца.*

Если мы отделим мнимую часть у дроби, стоящей под знаком интеграла:

$$\operatorname{Im}\left[\frac{Re^{i\varphi}+z}{Re^{i\varphi}-z}\right]=\frac{2rR\sin(\vartheta-\varphi)}{R^2-2rR\cos(\varphi-\vartheta)+r^2},$$

то получим *выражение мнимой части регулярной функции внутри круга через контурные значения ее вещественной части*:

$$v(x, y)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} u(\varphi)\,\frac{2rR\sin(\vartheta-\varphi)}{R^2-2rR\cos(\varphi-\vartheta)+r^2}\,d\varphi+C. \qquad (121)$$

Все сказанное выше имеет тесную связь с понятием о сопряженных тригонометрических рядах.

Пусть

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi)$$

— ряд Фурье функции $u(\varphi)$, представляющей предельные значения вещественной части $f(z)$. При этом, как мы знаем [**II, 205**], можно представить саму эту вещественную часть внутри круга не интегралом Пуассона, а рядом вида

$$u(x, y)=u(r, \vartheta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\vartheta+b_n\sin n\vartheta)\,r^n. \qquad (122)$$

Для мнимой части мы будем иметь сопряженный тригонометрический ряд [**25**]

$$v(x, y)=v(r, \vartheta)=C+\sum_{n=1}^{\infty}(-b_n\cos n\vartheta+a_n\sin n\vartheta)\,r^n. \qquad (123)$$

Если функция $u(\varphi)$ имеет достаточно хорошие свойства, например имеет первую производную, удовлетворяющую условиям Дирихле, то ряд (123), так же как и ряд (122), будет равномерно сходящимся во всем замкнутом круге и функция $v(r, \vartheta)$ будет гармонической внутри круга и непрерывной в замкнутом круге. Ее называют обычно *функцией, сопряженной* с $u(r, \vartheta)$ [**2**], и то же название сохраняется и для ее предельных значений $v(1, \varphi)$ по отношению к $u(\varphi)$.

Положим, что два интеграла Шварца дают одну и ту же регулярную внутри круга функцию

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_1(\varphi)\,\frac{Re^{i\varphi}+z}{Re^{i\varphi}-z}\,d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_2(\varphi)\,\frac{Re^{i\varphi}+z}{Re^{i\varphi}-z}\,d\varphi, \qquad (124)$$

где $u_1(\varphi)$ и $u_2(\varphi)$ — непрерывные вещественные функции. Нетрудно видеть, что эти функции совпадают, так как они являются предельными значениями одной и той же гармонической функции, а именно вещественной части нашей регулярной функции. Таким образом, *тождество* (124) *относительно* $z$ *вполне равносильно тождеству* $u_1(\varphi)=u_2(\varphi)$ *относительно* $\varphi$. В этом, по существу, и состоит теорема Гарнака, о которой мы упоминали в [**8**].

**49. Ядро $\operatorname{ctg}\frac{s-t}{2}$.** Применим сейчас основную теорему о предельных значениях интеграла типа Коши [29] к случаю окружности $|z|=1$ с центром в начале и радиусом единица. Положим, что на этой окружности дана вещественная функция $u(\tau)$, где $\tau = e^{is}$, удовлетворяющая условию Липшица. Мы можем, пользуясь формулой Шварца [48], построить регулярную внутри окружности функцию, вещественная часть которой имеет предельные значения $u(\tau)$ на самой окружности:

$$u(re^{i\varphi}) + v(re^{i\varphi})\, i = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(\tau)\,\frac{\tau+z}{\tau-z}\,ds \qquad (z = re^{i\varphi}) \tag{125}$$

или, принимая во внимание, что $d\tau = i\tau\, ds$,

$$u(re^{i\varphi}) + v(re^{i\varphi})\, i = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1} u(\tau)\,\frac{\tau+z}{\tau(\tau-z)}\,d\tau.$$

Полагая $\tau + z = (\tau - z) + 2z$ и разбивая наш интеграл на два интеграла получим

$$u(re^{i\varphi}) + v(re^{i\varphi})\, i = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(\tau)\,ds + \frac{2z}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\frac{u(\tau)}{\tau}\cdot\frac{1}{\tau-z}\,d\tau.$$

Положим, что точка $z = re^{i\varphi}$ стремится к некоторой точке $\xi = e^{it}$ окружности $|z|=1$. Пользуясь теоремой о предельном значении интеграла типа Коши [29], получим предельное значение нашей функции:

$$u(e^{it}) + v(e^{it})\, i = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(\tau)\,ds + \xi\,\frac{u(\xi)}{\xi} + \frac{2\xi}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\frac{u(\tau)}{\tau}\cdot\frac{1}{\tau-\xi}\,d\tau$$

или

$$u(e^{it}) + v(e^{it})\, i = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(\tau)\,ds + u(\xi) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(\tau)\,\frac{2\xi}{\tau-\xi}\,ds, \tag{126}$$

но

$$\frac{2\xi}{\tau-\xi} = \frac{2e^{it}}{e^{is}-e^{it}} = -1 + i\operatorname{ctg}\frac{t-s}{2},$$

и, отделяя в формуле (126) мнимую часть, получаем выражение предельных значений мнимой части через вещественную часть:

$$v(e^{it}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(e^{is})\operatorname{ctg}\frac{t-s}{2}\,ds,$$

причем написанный интеграл надо понимать в смысле главного значения. Будем писать $u(s)$ и $v(t)$ вместо $u(e^{is})$ и $v(e^{it})$:

$$v(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(s)\operatorname{ctg}\frac{t-s}{2}\,ds. \tag{127}$$

Напомним, что формула (125) дает ту регулярную внутри круга $|z|<1$ функцию, мнимая часть которой равна нулю в центре круга. Принимая во внимание, что значение гармонической функции в центре круга равно среднему арифметическому ее значений на окружности [II, 204], можем написать

$$\int_{-\pi}^{\pi} v(t)\,dt = 0. \tag{128}$$

Функцию $u(s)$ можно считать периодической с периодом $2\pi$, и функция $v(t)$ получается также периодической, а в формуле (127) мы могли бы брать за промежуток интегрирования любой промежуток длины $2\pi$. Функция $\operatorname{ctg} z$ имеет при $z=0$ простой полюс с вычетом, равным единице [21], и мы можем выразить ядро линейного преобразования (127) через ядро Коши:

$$\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{t-s}{2} = -\frac{1}{s-t} + P(t-s), \tag{129}$$

где $P(z)$ — аналитическая регулярная функция во всех точках отрезка $-2\pi<z<2\pi$. Совершенно так же, как и в [28], можно показать, что если периодическая функция $u(s)$ удовлетворяет условию Липшица с показателем $\alpha$, то $v(t)$ удовлетворяет также условию Липшица с тем же показателем, если $\alpha<1$, и с любым показателем, меньшим единицы, если $\alpha=1$. Согласно (129) это утверждение вытекает также из аналогичного утверждения для ядра Коши.

Мы можем применить к функции $v(t)$ линейное преобразование (127) и получим таким образом некоторую новую функцию $w(t_1)$, удовлетворяющую условию Липшица:

$$w(t_1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(t)\,\operatorname{ctg}\frac{t_1-t}{2}\,dt.$$

Функция $w(t_1)$ дает предельные значения мнимой части, если за предельные значения вещественной части принять $v(t)$, причем

$$\int_{-\pi}^{\pi} w(t_1)\,dt_1 = 0. \tag{130}$$

С другой стороны, если умножить регулярную функцию (125) на $(-i)$, то получим регулярную функцию $v(re^{i\varphi}) - u(re^{i\varphi})\,i$. Но заданием вещественной части мнимая определяется с точностью до постоянного слагаемого, и мы можем поэтому написать

$$w(t_1) = -u(t_1) + C.$$

Для определения постоянной $C$ проинтегрируем обе части этого равенства по промежутку $(-\pi, \pi)$ и примем во внимание (130):

$$0 = -\int_{-\pi}^{\pi} u(t_1)\,dt_1 + 2\pi C$$

и окончательно

$$w(t_1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(t)\,\operatorname{ctg}\frac{t_1-t}{2}\,dt = -u(t_1) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(s)\,ds, \tag{131}$$

т. е. двукратное применение преобразования (127) приводит с точностью до постоянного слагаемого к прежней функции с обратным знаком. Полученный результат мы можем записать в виде следующей формулы:

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} u(s)\operatorname{ctg}\frac{t-s}{2}\,ds\right]\operatorname{ctg}\frac{t_1-t}{2}\,dt=-u(t_1)+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(s)\,ds. \quad (132)$$

Это есть известная формула Гильберта, и ядро преобразования (127) естественно назвать ядром Гильберта. Заметим, что в левой части формулы (132) мы, как и в интеграле Фурье, не имеем права менять порядок интегрирования. Обозначая символически преобразование (127) одной буквой $h$, можем написать формулу (127) в виде $v(s)=h[u(s)]$, причем в обеих функциях аргумент обозначен буквой $s$. При этом формула Гильберта (132) запишется в виде

$$h^2[u(s)]=-u(s)+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(s)\,ds.$$

Формулу (127) можно рассматривать как интегральное уравнение относительно $u(s)$ при заданной функции $v(t)$. Из предыдущих рассуждений следует, что для его разрешимости необходимо выполнение условия (128). Одним из решений этого уравнения будет в силу (131) функция

$$u(s)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}v(t)\operatorname{ctg}\frac{s-t}{2}\,dt. \quad (133)$$

Это есть то решение уравнения (131), которое удовлетворяет условию

$$\int_{-\pi}^{\pi}u(s)\,ds=0.$$

Иначе говоря, это есть та мнимая часть регулярной функции $v(re^{i\varphi})-iu(re^{i\varphi})$, которая обращается в нуль в начале координат. Если значение функции $u(re^{i\varphi})$ в начале координат равно $C$, то

$$u(s)=C-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}v(t)\operatorname{ctg}\frac{s-t}{2}\,dt, \quad (134)$$

причем $u(s)=\text{const}$ есть решение однородного уравнения

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(s)\operatorname{ctg}\frac{t-s}{2}\,ds=0,$$

ибо если $u(s)=\text{const}$, то мнимая часть $v$, равная нулю в начале, равна, очевидно, нулю. Формула (134) дает все решения уравнения (127), так как по вещественной части мнимая определяется с точностью до постоянного слагаемого. В предыдущих рассуждениях считалось, что заданная и искомая функции удовлетворяют условию Липшица.

Мы можем написать преобразование (127) в виде обычного несобственного интеграла, аналогично тому как это мы делали в случае ядра Коши.

Действительно, принимая во внимание, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{ctg}\frac{t-s}{2}\,ds=0,$$

так как однородное уравнение (127) имеет в качестве решения постоянную $u(s)=C$, можем переписать формулу (127) в виде

$$v(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[u(s)-u(t)]\operatorname{ctg}\frac{t-s}{2}\,ds. \tag{135}$$

Положим, что функция $u(s)$ имеет непрерывную производную. Принимая во внимание, что

$$\operatorname{ctg}\frac{t-s}{2}=-\frac{d}{ds}\ln\left(\sin^2\frac{t-s}{2}\right),$$

применяя к интегралу (127) формулу интегрирования по частям на промежутках $(-\pi, t-\varepsilon)$, $(t+\varepsilon, \pi)$ и учитывая еще формулу

$$\lim_{\varepsilon\to+0}[u(t+\varepsilon)-u(t-\varepsilon)]\ln\left(\sin^2\frac{\varepsilon}{2}\right)=\lim_{\varepsilon\to+0}u'(\xi)\,2\varepsilon\ln\sin^2\frac{\varepsilon}{2}$$
$$(t-\varepsilon<\xi<t+\varepsilon),$$

получим для $v(t)$ следующее выражение:

$$v(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u'(s)\ln\left(\sin^2\frac{t-s}{2}\right)ds,$$

причем справа стоит обычный несобственный интеграл.

Если $u(\tau)$ удовлетворяет условию Липшица, то функция комплексного переменного $z=re^{i\varphi}$, определенная формулой (125), как мы видели выше, будет непрерывной вплоть до окружности $|z|=1$. Пусть

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos ks+b_k\sin ks) \tag{136$_1$}$$

есть ряд Фурье функции $u(s)$. Для функции $v(s)$ будем иметь ряд Фурье [48]

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-b_k\cos ks+a_k\sin ks). \tag{136$_2$}$$

В силу уравнения замкнутости [II, 169]

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u^2(s)\,ds=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\ \text{и}\ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}v^2(s)\,ds=\sum_{k=1}^{\infty}(b_k^2+a_k^2),$$

и, следовательно,

$$\int_{-\pi}^{\pi}v^2(s)\,ds\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}u^2(s)\,ds,$$

причем знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $a_0 = 0$. Итак, в результате преобразования (127) интеграл от квадрата функции по промежутку $(-\pi, \pi)$ может только уменьшиться. Отметим при этом, что мы считаем функцию $u(s)$ вещественной. Мы видим, таким образом, что преобразование (127) равносильно переходу от ряда Фурье $(136_1)$ к ряду Фурье $(136_2)$.

**50. Предельные задачи.** Задача Дирихле является наиболее простой из предельных задач для гармонических функций. Формулируем общую предельную задачу для гармонических функций, частным случаем которой является задача Дирихле: требуется найти гармоническую функцию внутри некоторой односвязной области $B$ с контуром $l$, удовлетворяющую на контуре предельному условию вида

$$au + b\frac{\partial u}{\partial x} + c\frac{\partial u}{\partial y} = d, \tag{137}$$

где $a$, $b$, $c$ и $d$ — заданные вещественные функции на контуре $l$, которые считаем функциями длины дуги $s$ этого контура. Мы можем считать $u$ вещественной частью некоторой регулярной функции

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

При этом, как известно,

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y},$$

и, следовательно, мы имеем отсюда

$$b\frac{\partial u}{\partial x} + c\frac{\partial u}{\partial y} = \operatorname{Re}[(b + ic) f'(z)],$$

где Re — знак вещественной части.

Условие (137) переписывается в виде

$$\operatorname{Re}[af(z) + (b + ic) f'(z)] = d, \tag{138}$$

и, таким образом, вопрос сводится к разысканию регулярной внутри $B$ функции, которая на контуре удовлетворяет условию (138).

Пусть известна функция $z = \omega(\tau)$, совершающая конформное преобразование нашей области $B$ в единичный круг $|\tau| < 1$. Мы можем рассматривать искомую функцию как функцию $F(\tau)$, регулярную внутри единичного круга:

$$F(\tau) = f[\omega(\tau)], \quad f'(z) = F'(\tau)\frac{1}{\omega'(\tau)}.$$

При этом будем иметь вместо (138)

$$\operatorname{Re}\left[aF(\tau) + \frac{b + ic}{\omega'(\tau)} F'(\tau)\right] = d \quad (|\tau| = 1),$$

где в результате преобразования $z = \omega(\tau)$ можно считать, что $a$, $b$, $c$ и $d$ определены на окружности $|\tau| = 1$. Таким образом, задача привелась к случаю круга.

Рассмотрим подробно тот случай, когда предельное условие (137), которое мы будем считать относящимся к окружности $|z| = 1$, не содержит самой искомой функции $u$. В этом случае задача формулируется следующим образом: требуется найти гармоническую внутри единичного круга функцию

$u(x, y)$, удовлетворяющую на окружности этого круга предельному условию вида

$$b\frac{\partial u}{\partial x}+c\frac{\partial u}{\partial y}=d.$$

Будем рассматривать $u(x, y)$ как вещественную часть некоторой регулярной функции $f(z)$. При этом $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)$ будут вещественной и мнимой частью $f'(z)$. Меняя обозначения и полагая

$$f'(z)=u+iv, \quad b=l(\varphi), \quad c=-m(\varphi),$$

сводим сформулированную выше задачу к следующей, называемой обычно *задачей Гильберта: найти функцию $f(z)$, регулярную внутри единичного круга, у которой вещественная и мнимая части удовлетворяют на окружности круга предельному условию вида*

$$l(\varphi)\,u(\varphi)+m(\varphi)\,v(\varphi)=d(\varphi) \quad (0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi), \tag{139}$$

*где $l(\varphi)$, $m(\varphi)$ и $d(\varphi)$ — заданные функции полярного угла $\varphi$ на единичной окружности.* Мы считаем, что коэффициенты суть непрерывные функции, причем $l(\varphi)$ и $m(\varphi)$ одновременно в нуль не обращаются. Можно при этом, деля обе части уравнения (139), добиться того, чтобы коэффициенты удовлетворяли условию

$$l^2(\varphi)+m^2(\varphi)=1. \tag{140}$$

При этом можно положить

$$l(\varphi)=\cos\omega(\varphi), \quad m(\varphi)=-\sin\omega(\varphi), \tag{141}$$

где $\omega(\varphi)$ есть некоторая функция от $\varphi$, а именно:

$$\omega(\varphi)=-\operatorname{arctg}\frac{m(\varphi)}{l(\varphi)}. \tag{142}$$

Разберем сначала подробно тот случай, когда формулы (141) дают $\omega(\varphi)$ как однозначную функцию $\varphi$. Это будет иметь место, например, в том случае, когда $l(\varphi)$ или $m(\varphi)$ не обращаются в нуль в промежутке $(-\pi, \pi)$. Пользуясь функцией $\omega(\varphi)$, мы можем записать предельное условие (139) в виде

$$\operatorname{Re}\left[e^{i\omega(\varphi)}f(z)\right]=d(\varphi) \quad (z=e^{i\varphi}). \tag{143}$$

Построим функцию $\pi(z)$ по ее вещественной части $\omega(\varphi)$, пользуясь формулой Шварца:

$$\pi(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\omega(\varphi)\,\frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}\,d\varphi. \tag{144}$$

Обозначим через $\omega_1(\varphi)$ предельные значения ее мнимой части. Функция

$$e^{i\pi(z)}f(z)$$

имеет на единичной окружности $z=e^{i\varphi}$ вещественную часть, равную

$$e^{-\omega_1(\varphi)}\operatorname{Re}\left[e^{i\omega(\varphi)}f(z)\right] \qquad (z=e^{i\varphi}),$$

и, следовательно, предельное условие (143) равносильно следующему предельному условию:

$$\operatorname{Re}\left[e^{i\pi(z)}f(z)\right]=d(\varphi)\,e^{-\omega_1(\varphi)}.$$

Зная вещественную часть функции на контуре, мы можем определить эту функцию внутри опять по формуле Шварца:

$$e^{i\pi(z)} f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d(\varphi)\, e^{-\omega_1(\varphi)} \frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z}\, d\varphi + iC,$$

где $\omega_1(\varphi)$ суть предельные значения мнимой части функции (144):

$$\omega_1(\varphi) = \lim_{r \to 1} \operatorname{Im} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} \omega(\psi) \frac{e^{i\psi} + re^{i\varphi}}{e^{i\psi} - re^{i\varphi}}\, d\psi \right]. \tag{145}$$

Здесь Im — знак мнимой части. Окончательно для $f(z)$ будем иметь выражение

$$f(z) = e^{-i\pi(z)} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d(\varphi)\, e^{-\omega_1(\varphi)} \frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z}\, d\varphi + iC \right]. \tag{146}$$

Рассмотрим теперь тот случай, когда при обходе единичной окружности функция $\omega(\varphi)$ приобретает слагаемое $(-2n\pi)$, где $n$ — целое положительное число:

$$\omega(\pi) - \omega(-\pi) = -2n\pi. \tag{147}$$

Построим функцию, однозначную на единичной окружности:

$$\chi(\varphi) = \omega(\varphi) + n\varphi,$$

и по этой функции построим соответствующую функцию комплексного переменного $\sigma(z)$, имеющую предельные значения вещественной части $\chi(\varphi)$. Предельные значения вещественной части у функции

$$\sigma_1(z) = \sigma(z) + in \ln z$$

будут равны $\omega(\varphi)$, а предельные значения ее мнимой части будут, очевидно, те же, что и у функции $\sigma(z)$. Обозначим их опять через $\omega_1(\varphi)$. Совершенно так же, как и выше, мы можем показать, что функция

$$e^{i\sigma_1(z)} f(z) = z^{-n} e^{i\sigma(z)} f(z)$$

должна иметь предельные значения вещественной части равными

$$\operatorname{Re}\left[z^{-n} e^{i\sigma(z)} f(z)\right] = d(\varphi)\, e^{-\omega_1(\varphi)}. \tag{148}$$

Ввиду присутствия множителя $z^{-n}$ эта функция может иметь в начале координат полюс порядка не выше $n$. Построим сначала с помощью формулы Шварца регулярную внутри единичного круга функцию с предельными значениями вещественной части

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d(\varphi)\, e^{-\omega_1(\varphi)} \frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z}\, d\varphi + iC. \tag{149}$$

Мы должны добавить теперь к этой функции слагаемое, у которого вещественная часть на единичной окружности равна нулю, но которая может иметь полюс порядка $n$ в начале. Нетрудно видеть, что такое слагаемое

будет иметь вид

$$\sum_{k=1}^{n}\left[A_k\left(\frac{1}{z^k}-z^k\right)+iB_k\left(\frac{1}{z^k}+z^k\right)\right],$$

где $A_k$ и $B_k$ — произвольные вещественные постоянные.

Добавив это последнее выражение к выражению (149), будем иметь общее решение задачи

$$f(z)=z^n e^{-i\sigma(z)}\left\{Ci+\sum_{k=1}^{n}\left[A_k\left(\frac{1}{z^k}-z^k\right)+iB_k\left(\frac{1}{z^k}+z^k\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d(\varphi)\, e^{-\omega_1(\varphi)}\,\frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}\,d\varphi\right\}. \qquad (150)$$

В том случае, когда $n$ в формуле (147) есть целое отрицательное число, решение задачи будет иным. Укажем лишь на то, что в этом случае функция, которая стоит под знаком вещественной части выражения (148), не только должна быть регулярна внутри единичного круга, но должна еще иметь в начале координат корень порядка не ниже $n$. Строя по правой части формулы (148) регулярную функцию при помощи интеграла Шварца, мы должны будем написать еще условие того, что полученная функция имеет в начале координат корень порядка не ниже $z$. Таким образом, получится несколько условий для функции $d(\varphi)$, которым эта функция должна удовлетворять для того, чтобы задача имела решение.

Рассмотрим еще одну задачу частного вида, а именно: положим, что предельные условия для гармонической функции на единичной окружности имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial n}+l\,\frac{\partial u}{\partial s}+mu=d(\varphi), \qquad (151)$$

где $l$ и $m$ — постоянные и $d(\varphi)$ — заданная функция, причем $n$ есть направление внешней нормали к окружности и $s$ — направление, касательное к окружности. В данном случае мы вместо производных по направлениям осей координат берем производные по указанным выше направлениям, связанным с граничной кривой. Как хорошо известно [II, 120], эти производные выражаются друг через друга. В математической физике чаще пользуются предельными условиями, выраженными в форме (151). Дифференцирование по направлению $n$ совпадает, очевидно, с дифференцированием по радиусу-вектору $r$, и дифференцирование по $s$ совпадает с дифференцированием по полярному углу $\varphi$ при $r=1$. Вообще мы имеем, полагая $z=re^{i\varphi}$ и $u=\operatorname{Re} f(z)$, причем можно считать $\operatorname{Im} f(z)=0$,

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\operatorname{Re}[z'f'(z')];\quad \frac{\partial u}{\partial s}=\operatorname{Re}[z'if'(z')]\quad (z'=e^{i\varphi}),$$

и предельное условие (151) можно переписать так:

$$\operatorname{Re}[(1+il)\,z'f'(z')+mf(z')]=d(\varphi)\quad (z'=e^{i\varphi}).$$

Умножим обе части этого равенства на

$$\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{z'+z}{z'-z}\,d\varphi$$

и проинтегрируем по $\varphi$. Мы получим новое равенство, равносильное предыдущему [48]. Принимая во внимание формулу Шварца, нетрудно видеть, что оно будет иметь вид

$$(1 + il)\, zf'(z) + mf(z) = F(z), \tag{152}$$

где

$$F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d(\varphi)\,\frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}\,d\varphi = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z'|=1} d(\varphi)\,\frac{z'+z}{z'(z'-z)}\,dz'. \tag{153}$$

Будем считать, что $d(\varphi)$ есть тригонометрический полином порядка $n$:

$$d(\varphi) = A_0 + \sum_{s=1}^{n} (A_s \cos s\varphi + B_s \sin s\varphi).$$

При этом

$$F(z) = \sum_{s=0}^{n} c_s z^s \qquad (c_0 = A_0;\ c_s = A_s - iB_s).$$

Уравнение (152) есть линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Интегрируя его [II, 23], получаем

$$f(z) = z^{-k}\left[C + \frac{1}{l}\int z^{k-1} F(z)\,dz\right]$$

где штрих у суммы показывает, что $s = p$ при суммировании надо исключить. Наконец, если $k$ есть целое отрицательное и $k < -n$, то решение будет

$$f(z) = Cz^{-k} + \sum_{s=0}^{n}{}' c_s \frac{z^s}{s+k}.$$

**51. Бигармоническое уравнение.** Переходим теперь к рассмотрению связи теории аналитических функций комплексного переменного с теорией так называемых *бигармонических функций*, т. е. функций, удовлетворяющих уравнению

$$\Delta\Delta u(x, y) = 0, \tag{155}$$

где $\Delta$ есть обычный оператор Лапласа, выражающий сумму вторых производных по переменным $x$ и $y$ (мы рассматриваем плоский случай). В раскрытом виде уравнение (155) будет

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0$$

или

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0. \tag{156}$$

Пусть $u$ — некоторая функция, непрерывная со своими производными в конечной односвязной области $B$ и удовлетворяющая в этой области уравнению (156). Согласно (155) функция

$$\Delta u = p(x, y) \tag{157}$$

будет гармонической функцией. Положим, что $q(x, y)$ есть сопряженная функция, так что

$$p(x, y) + iq(x, y) = f(z) \tag{158}$$

есть аналитическая функция комплексного переменного $z = x + iy$.

Построим еще аналитическую функцию

$$\varphi(z) = \frac{1}{4}\int f(z)\, dz = r(x, y) + is(x, y). \tag{159}$$

Мы имеем, очевидно,

$$\Delta r = \Delta s = 0, \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{1}{4}\operatorname{Re}[f(z)] = \frac{1}{4}p. \tag{160}$$

Вычислим оператор Лапласа от выражения $u - (rx + sy)$. Принимая во внимание (160), мы будем иметь

$$\Delta[u - (rx + sy)] = p - 2\frac{\partial r}{\partial x} - 2\frac{\partial s}{\partial y} = 0,$$

т. е. упомянутое выше выражение есть гармоническая функция, которую мы обозначим через $p_1$. Вводя сопряженную функцию $q_1$ и соответствующую функцию комплексного переменного $\psi(z) = p_1 + iq_1$, можем написать

$$u - (rx + sy) = p_1, \quad u = (rx + sy) + p_1 = \operatorname{Re}[(x - iy)(r + is)] + p_1$$

или

$$u = \operatorname{Re}[\bar{z}\varphi(z) + \psi(z)]. \tag{161}$$

Таким образом, *всякая бигармоническая функция выражается через две аналитические функции комплексного переменного согласно формуле* (161). Нетрудно показать, что и, наоборот, при любом выборе аналитических функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ формула (161) дает бигармоническую функцию, т. е. *формула* (161), *содержащая две произвольные аналитические функции, дает общее выражение бигармонических функций*. Эта формула называется обычно *формулой Гурса.*

При заданной бигармонической функции $u$ функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, входящие в формулу (161), определяются не вполне, но содержат некоторые произвольные постоянные. Прежде всего, вещественная функция $q(x, y)$ определяется с точностью до постоянного слагаемого, т. е. функция $f(z)$ определяется с точностью до чисто мнимого постоянного слагаемого. Кроме того, при определении функции $\varphi(z)$ по формуле (159) в нее входит еще произвольное постоянное комплексное слагаемое. Таким образом, окончательно функция $\varphi(z)$ будет содержать произвольные элементы в виде слагаемого следующего вида:

$$C + iaz,$$

где $C$ — произвольная комплексная постоянная и $a$ — произвольная вещественная постоянная. Мы можем определить эти произвольные постоянные, поставив некоторые дополнительные условия, например условия вида

$$\varphi(0) = 0, \quad \operatorname{Im}[\varphi'(0)] = 0. \tag{162}$$

Точно так же при определении функции $\psi(z)$ мы получаем произвольное слагаемое в виде чисто мнимой постоянной, которая определяется, если подчинить функцию $\psi(z)$, например, условию

$$\operatorname{Im}[\psi(0)] = 0. \tag{163}$$

Условия (162) и (163) определяют функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ уже вполне, причем считаем, конечно, что точка $z = 0$ принадлежит нашей области.

Рассмотрим основную предельную задачу, касающуюся бигармонических функций. Она формулируется следующим образом: найти функцию, бигармоническую внутри замкнутого контура $l$, если заданы значения самой функции и ее нормальной производной на этом контуре:

$$u = \omega_1(s), \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \omega_2(s) \quad (\text{на } l). \tag{164}$$

Покажем, что предельные условия (164) дают нам непосредственно и предельные значения производных от функции $u$ по координатам. Действительно, мы имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial s}\cos(s, x) + \frac{\partial u}{\partial n}\cos(n, x),$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial s}\cos(s, y) + \frac{\partial u}{\partial n}\cos(n, y),$$

где $s$ — направление, касательное к контуру $l$. Таким образом, из предельных условий (164) вытекают предельные условия вида

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \omega_1'\cos(s, x) + \omega_2\cos(n, x) = \omega_3(s), \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \omega_1'\cos(s, y) + \omega_2\cos(n, y) = \omega_4(s). \end{aligned}\right\} \tag{165}$$

Но в этих последних предельных условиях функции $\omega_3(s)$ и $\omega_4(s)$ нельзя задавать произвольно, а именно: криволинейный интеграл

$$\int \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy, \tag{166}$$

дающий приращение функции вдоль замкнутого контура, должен, очевидно, равняться нулю, так как функция $u$ должна быть однозначной. Это приводит нас к следующему условию для функций $\omega_3(s)$ и $\omega_4(s)$ в предельных условиях (165):

$$\int_L [\omega_3(s)\cos(s, x) + \omega_4(s)\cos(s, y)]\,ds = 0. \tag{167}$$

В остальном выбор этих функций может быть произвольным.

Будем искать бигармоническую функцию по формуле Гурса (161). Дифференцируя по $x$ и $y$ через посредство $z$ и $\bar{z}$, мы будем, очевидно, иметь

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \operatorname{Re}[\varphi(z) + \bar{z}\varphi'(z) + \psi'(z)], \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \operatorname{Re}[-i\varphi(z) + i\bar{z}\varphi'(z) + i\psi'(z)] = \operatorname{Im}[\varphi(z) - \bar{z}\varphi'(z) - \psi'(z)]. \end{aligned}\right\} \tag{168}$$

Таким образом, мы приходим к двум равенствам, которым должны удовлетворять искомые функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ на контуре $l$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} &= \overline{\varphi(z)} + z\varphi'(z) + \psi'(z) = \omega_3(s) - i\omega_4(s), \\ \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y} &= \varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi'(z)} = \omega_3(s) + i\omega_4(s). \end{aligned}\right\} \tag{169}$$

Второе из этих равенств является, очевидно, следствием первого и получается из него путем перехода к сопряженным величинам. Мы приходим, таким образом, в данном случае к некоторой предельной задаче для двух аналитических функций.

Рассматриваем здесь, как и в случае гармонических функций, только внутреннюю задачу, относящуюся к ограниченной части плоскости.

В плоской задаче теории упругости напряжения $X_x$, $Y_y$ и $X_y$ выражаются через бигармоническую функцию (функцию Эри) по формулам

$$X_x = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \qquad Y_y = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad X_y = -\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}, \tag{170}$$

и, пользуясь формулой Гурса, можно, таким образом, выразить напряжение через две аналитические функции. Не приводя вывода, дадим лишь окончательный результат. Пользуясь обозначениями формулы (161), будем иметь

$$\left.\begin{aligned} X_x + Y_y &= 4\operatorname{Re}[\varphi'(z)], \\ 2X_y + i(X_x - Y_y) &= -2i[\psi''(z) + \bar{z}\varphi''(z)]. \end{aligned}\right\} \tag{171}$$

При помощи этих формул решение статических плоских задач теории упругости при заданных напряжениях на контуре также сводится к решению предельной задачи теории функций комплексного переменного.

Выяснение связи теории функций комплексного переменного с плоскими статическими задачами теории упругости было дано проф. Г. В. Колосовым в работе «Об одном приложении теории функций комплексного переменного к плоской задаче математической теории упругости». Систематическое применение функций комплексного переменного к задачам теории упругости можно найти в книге Н. И. Мусхелишвили «Некоторые основные задачи математической теории упругости» (1966).

**52. Волновое уравнение и аналитические функции.** Мы видели в томе II, что при распространении колебаний, как акустических, так электромагнитных, основное значение имеет уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \tag{172}$$

которое называется обычно волновым уравнением. Мы будем рассматривать сейчас лишь плоский случай, т. е. когда искомая функция $u$ не зависит от одной из координат, например от координаты $z$. В этом случае волновое уравнение будет иметь вид

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \left(c^2 = \frac{1}{a^2}\right), \tag{173}$$

где $u$ — функция переменных $t$, $x$ и $y$. Пользуясь аналитическими функциями комплексного переменного, мы можем выделить некоторый класс решений уравнения (173), имеющий важное применение в физике, причем пользование аналитическими функциями значительно упрощает все операции внутри этого класса решений.

Построим некоторое вспомогательное уравнение, которое играет основную роль во всем дальнейшем:

$$l(\tau)t + m(\tau)x + n(\tau)y + p(\tau) = 0, \tag{174}$$

где $l(\tau)$, $m(\tau)$, $n(\tau)$ и $p(\tau)$ — некоторые аналитические функции комплексного переменного $\tau$. Уравнение (174) определяет $\tau$ как функцию переменных $t$, $x$ и $y$. Положим теперь, что у нас имеется некоторая аналитическая функция $f(\tau)$, которая в конечном счете является функцией переменных $t$, $x$ и $y$. Выведем формулы для производных от этой функции. Обозначая через $\delta'$ производную от левой части уравнения (174) по переменной $\tau$ и применяя обычные правила дифференцирования сложных и неявных функций, мы получим без труда следующие выражения для производных функции $\tau$:

$$\frac{\partial\tau}{\partial t} = -\frac{l(\tau)}{\delta'}; \quad \frac{\partial\tau}{\partial x} = -\frac{m(\tau)}{\delta'}; \quad \frac{\partial\tau}{\partial u} = -\frac{n(\tau)}{\delta'}.$$

При вычислении производных второго порядка надо иметь в виду, что

$$\delta' = l'(\tau)t + m'(\tau)x + n'(\tau)y + p'(\tau)$$

зависит, например, от $t$ как непосредственно, так и через посредство $\tau$:

$$\frac{\partial^2\tau}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{l(\tau)}{\delta'}\right]\frac{l(\tau)}{\delta'} + \frac{l(\tau)\,l'(\tau)}{\delta'^2} = \frac{2l(\tau)\,l'(\tau)}{\delta'^2} - \frac{l^2(\tau)}{\delta'^3}\delta'',$$

что может быть записано следующим образом:

$$\frac{\partial^2\tau}{\partial t^2} = \frac{1}{\delta'}\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{l^2(\tau)}{\delta'}\right].$$

Совершенно аналогично получается

$$\frac{\partial^2\tau}{\partial x^2}=\frac{1}{\delta'}\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{m^2(\tau)}{\delta'}\right];\quad \frac{\partial^2\tau}{\partial y^2}=\frac{1}{\delta'}\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{n^2(\tau)}{\delta'}\right];$$

$$\frac{\partial^2\tau}{\partial x\,\partial y}=\frac{1}{\delta'}\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{m(\tau)\,n(\tau)}{\delta'}\right].$$

Заданная аналитическая функция $f(\tau)$ зависит от $t$, $x$ и $y$ через посредство $\tau$, и ее производные определяются по правилу дифференцирования сложных функций. Принимая во внимание предыдущие формулы, получим

$$\frac{\partial^2 f(\tau)}{\partial t^2}=f''(\tau)\left(\frac{\partial\tau}{\partial t}\right)^2+f'(\tau)\frac{\partial^2\tau}{\partial t^2}=f''(\tau)\frac{l^2(\tau)}{\delta'^2}+f'(\tau)\frac{1}{\delta'}\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{l^2(\tau)}{\delta'}\right],$$

что можно записать так:

$$\frac{\partial^2 f(\tau)}{\partial t^2}=\frac{1}{\delta'}\frac{\partial}{\partial\tau}\left[f'(\tau)\frac{l^2(\tau)}{\delta'}\right],$$

и совершенно аналогично

$$\frac{\partial^2 f(\tau)}{\partial x^2}=\frac{1}{\delta'}\frac{\partial}{\partial\tau}\left[f'(\tau)\frac{m^2(\tau)}{\delta'}\right];\quad \frac{\partial^2 f(\tau)}{\partial y^2}=\frac{1}{\delta'}\frac{\partial}{\partial\tau}\left[f'(\tau)\frac{n^2(\tau)}{\delta'}\right];$$

$$\frac{\partial^2 f(\tau)}{\partial x\,\partial y}=\frac{1}{\delta'}\frac{\partial}{\partial\tau}\left[f'(t)\frac{m(\tau)\,n(\tau)}{\delta'}\right].$$

Полагая $u=f(\tau)$ и подставляя в (173), мы получим уравнение вида

$$\frac{1}{\delta'}\frac{\partial}{\partial\tau}\left[f'(\tau)\frac{m^2(\tau)+n^2(\tau)-a^2l^2(\tau)}{\delta'}\right]=0,$$

откуда следует, что $f(\tau)$ есть решение уравнения (173), если коэффициенты уравнения (174) удовлетворяют соотношению

$$m^2(\tau)+n^2(\tau)=a^2l^2(\tau). \tag{175}$$

Если хотим получить вещественное решение, то мы можем взять лишь вещественную часть $f(\tau)$, которая в отдельности должна удовлетворять уравнению (173) так же, как и мнимая часть.

Введем в рассмотрение трехмерное пространство $(S)$ с координатами $(t, x, y)$. Если в некоторой области $B$ этого пространства уравнение (174) дает для $\tau$ вещественные значения, то в предыдущих рассуждениях не надо даже считать функцию $f(\tau)$ аналитической функцией, так как ее аргумент принимает лишь вещественные значения. Достаточно предположить, что $f(\tau)$ есть произвольная функция вещественного переменного, имеющая непрерывные производные до второго порядка.

Предыдущие рассуждения приводят к следующей теореме, которая определяет класс решений уравнения (173), о котором мы говорили выше.

**53. Основная теорема.** *Если в некоторой области $B$ пространства $(S)$ уравнение* (174) *при условии* (175) *определяет $\tau$ как комплексную функцию переменных $t, x$ и $y$, то вещественная и мнимая части любой аналитической функции $f(\tau)$ дают решение уравнения* (173). *Если же $\tau$ в некоторой области есть вещественная функция $(t, x, y)$, то произвольная вещественная функция от $\tau$ с непрерывными производными до второго порядка дает решение уравнения* (173).

Если $l(\tau) \neq 0$, то, деля обе части (174) на $l(\tau)$, можем считать $l(\tau) = 1$. Кроме того, мы можем принять $m(\tau)$ за новую комплексную переменную $(-\theta)$. При этом условие (175) даст $n^2(\tau) = a^2 - \theta^2$, так что уравнение (174) может быть переписано, например, в форме

$$t - \theta x + \sqrt{a^2 - \theta^2}\, y + p(\theta) = 0, \tag{176}$$

где $p(\theta)$ — любая аналитическая функция $\theta$. Вместо $f(\tau)$ мы должны писать, конечно, при этом $f(\theta)$.

Остановимся более подробно на рассмотрении того частного случая, когда $p(\theta) = 0$. В этом случае уравнение (176) имеет вид

$$t - \theta x + \sqrt{a^2 - \theta^2}\, y = 0 \text{ или } 1 - \theta \frac{x}{t} + \sqrt{a^2 - \theta^2}\, \frac{y}{t} = 0, \tag{177}$$

и отсюда $\theta$ определяется как функция лишь от двух аргументов:

$$\xi = \frac{x}{t}, \quad \eta = \frac{y}{t}. \tag{178}$$

В данном случае и построенные нами решения $f(\theta)$ уравнения (173) будут функциями аргументов (178), т. е. это будут однородные функции $t, x$ и $y$ нулевого измерения. Такие функции, как известно, определяются соотношением

$$u(kt, kx, ky) = u(t, x, y),$$

которое должно иметь место тождественно. Можно показать, что и, наоборот, любое такое однородное решение уравнения (173) может быть получено указанным выше путем. Будем называть в дальнейшем эти решения просто *однородными решениями.*

Исследуем более подробно уравнение (177). Входящий в него радикал $\sqrt{a^2 - \theta^2}$ будет, как мы знаем [**19**], однозначной функцией на плоскости $\theta$ с разрезом $(-a, a)$ вдоль вещественной оси. Фиксируем значение упомянутого радикала условием, чтобы он был положительным на верхней части мнимой оси, т. е. при $\theta = ib$, где $b > 0$. Это условие равносильно тому, чтобы упомянутый радикал был отрицательно мнимым при $\theta > a$ или положительно мнимым при $\theta < -a$ на вещественной оси. В этом нетрудно убедиться, следя за непрерывным изменением аргумента упомянутого радикала. Уравнение (177) мы можем переписать в виде

$$1 - \theta\xi + \sqrt{a^2 - \theta^2}\, \eta = 0. \tag{179}$$

Освобождаясь от радикала и решая полученное квадратное уравнение, получим для $\theta$ выражение

$$\theta = \frac{\xi - i\eta\sqrt{1 - a^2(\xi^2+\eta^2)}}{\xi^2+\eta^2} = \frac{xt - iy\sqrt{t^2 - a^2(x^2+y^2)}}{x^2+y^2}. \qquad (180)$$

Мы считаем при этом, что имеет место неравенство

$$\xi^2 + \eta^2 < \frac{1}{a^2} \qquad (181)$$

или, что то же,

$$x^2 + y^2 < \frac{1}{a^2} t^2. \qquad (182)$$

В формуле (180) радикал надо понимать арифметически. В этом легко убедиться, пользуясь самим уравнением (179), где радикал должен иметь определенное значение. Действительно, если мы положим в уравнении (179) $\xi = 0$, то для $\theta$ получим чисто мнимые значения, и в силу (179) знак радикала $\sqrt{a^2 - \theta^2}$ должен быть противоположным знаку $\eta$, т. е. если, например, $\eta < 0$, то согласно поставленному выше условию $\theta$ должно находиться на верхней части мнимой оси, что и совпадает с тем выбором знака в формуле (180), который мы сделали, считая радикал в этой формуле положительным.

При фиксированных значениях $\xi$ и $\eta$ мы имеем в силу (178) прямую пространства $(S)$, проходящую через начало. Будем рассматривать только ту часть этой прямой, на которой $t > 0$, и назовем такую полупрямую лучом. В силу условия (181) или (182) эти лучи образуют конический пучок с вершиной в начале и с углом $\operatorname{arctg}\frac{1}{a}$ при вершине, причем осью пучка является ось $t$. Уравнение (179) или (180) приводит в соответствие лучам этого пучка комплексные значения плоскости $\theta$ с разрезом $(-a, a)$. Пользуясь формулой (180), нетрудно проследить это соответствие более подробно. Отметим некоторые существенные факты, непосредственно вытекающие из формулы (180). Прежде всего, отметим, что лучам, образующим поверхность конического пучка, т. е. лучам, которые удовлетворяют равенству

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{1}{a^2} \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 = \frac{1}{a^2} t^2,$$

соответствуют точки разреза плоскости $\theta$. Оси нашего конического пучка, которая характеризуется значениями $x = y = 0$ или $\xi = \eta = 0$, соответствует бесконечно далекая точка плоскости $\theta$. Наконец, отметим еще, что тем лучам, которые находятся в плоскости $y = 0$ и для которых $\eta = 0$, соответствуют вещественные значения $\theta$, по абсолютному значению большие $a$, т. е. соответствуют точки, лежащие на вещественной оси плоскости $\theta$ и находящиеся вне разреза $(-a, a)$.

Если мы разделим наш конический пучок плоскостью $y=0$ на две части, то одной из них будет соответствовать верхняя полуплоскость $\theta$ и другой — нижняя полуплоскость, а именно: той половине, где $y>0$, будет соответствовать нижняя полуплоскость, а там, где $y<0$, — верхняя полуплоскость.

Если мы возьмем решение уравнения (173), построенное указанным выше способом, т. е. являющееся вещественной частью некоторой аналитической функции $f(\theta)$, то такое решение будет иметь постоянное значение на каждом из вышеуказанных лучей.

Исследуем теперь значения $\theta$ для точек пространства $(S)$, которые лежат вне упомянутого конического пучка, т. е. для всех точек, в которых выполнено неравенство

$$\xi^2+\eta^2>\frac{1}{a^2} \quad \text{или} \quad x^2+y^2>\frac{1}{a^2}t^2.$$

Уравнение (179) даст нам при этом два вещественных корня, принадлежащих отрезку $(-a, a)$:

$$\theta=\frac{\xi\pm\eta\sqrt{a^2(\xi^2+\eta^2)-1}}{\xi^2+\eta^2}=\frac{xt\pm yt\sqrt{a^2(x^2+y^2)-t^2}}{x^2+y^2}. \qquad (183)$$

Этот отрезок $(-a, a)$ является разрезом на плоскости, и на противоположных берегах этого разреза радикал $\sqrt{a^2-\theta^2}$ имеет противоположные знаки, так что в уравнении (179) мы должны в данном случае принимать во внимание двойной знак радикала и вместе с тем в формуле (183) брать также оба знака у радикала. Пусть $M_0(t_0, x_0, y_0)$ — некоторая точка вне нашего конического пучка, а $\theta_1$ и $\theta_2$ — соответствующие значения $\theta$, получаемые из формулы (183). Если мы подставим эти значения $\theta=\theta_1$ и $\theta_2$ в левую часть уравнения (179), то у нас получатся два вещественных уравнения первой степени относительно $t$, $x$ и $y$, и, следовательно, мы будем иметь две плоскости, проходящие через точку $M_0$. Мы можем выразить это и иначе, а именно: всякому значению $\theta=\theta_0$, находящемуся на разрезе $(-a, a)$, соответствует некоторая плоскость $P$ пространства $(S)$. Пусть $\lambda$ — та образующая нашего конического пучка, которая соответствует точке $\theta=\theta_0$ разреза. Плоскость $P$ должна, очевидно, содержать в себе эту образующую $\lambda$. Нетрудно показать, что плоскость $P$ будет касательной плоскостью к поверхности нашего конического пучка вдоль образующей $\lambda$. Действительно, если бы плоскость $P$ не была касательной к поверхности конуса вдоль $\lambda$, то она пересеклась бы с этой поверхностью и часть плоскости попала бы внутрь конического пучка. Но тогда мы получили бы, что точкам, лежащим внутри конического пучка, соответствует вещественное $\theta=\theta_0$ из промежутка $(-a, a)$, что, как мы видели выше, не имеет места. Итак, *каждому вещественному* $\theta$, *находящемуся на разрезе* $(-a, a)$, *в силу* (179) ***соответствует плоскость, касательная к поверхности конического***

*кого пучка вдоль той образующей, которая отвечает взятому значению* $\theta$.

Вместо того чтобы говорить о коническом пучке и касательных плоскостях к его поверхности, мы можем пользоваться и плоским чертежом, а именно мы можем пересечь наш конический пучок некоторой плоскостью, перпендикулярной к оси $t$. При этом сам конический пучок изобразится некоторым кругом, а касательные плоскости изобразятся касательными к окружности этого круга. В частности, мы можем воспользоваться переменными $\xi$ и $\eta$ для того, чтобы перейти к плоскому чертежу. Вместо конического пучка мы будем иметь на плоскости $(\xi, \eta)$ круг $K$:

$$\xi^2 + \eta^2 \leqslant \frac{1}{a^2}, \qquad (184)$$

так что каждой точке этого круга будет соответствовать определенный луч нашего пучка, и наоборот. Касательной к окружности нашего круга будет соответствовать упомянутая выше касательная плоскость к поверхности пучка. Полуплоскости $\eta > 0$ будет соответствовать та часть пространства, где $y > 0$. Оси $\eta = 0$ будет соответствовать плоскость $y = 0$.

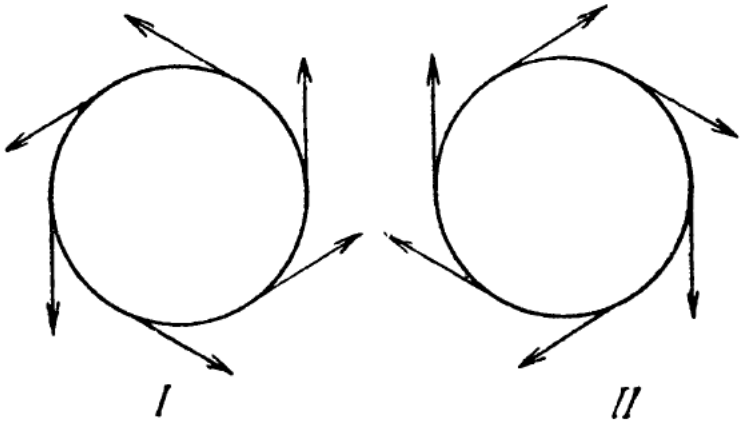


Рис. 49.

Пусть $f(\theta)$ — аналитическая однозначная функция на плоскости $\theta$ с разрезом $(-a, a)$. Возьмем соответствующее решение уравнения (173):

$$u = \operatorname{Re} f(\theta). \qquad (185)$$

Это решение будет определено внутри нашего конического пучка или, для случая плоскости $(\xi, \eta)$, в круге (184). Укажем один, важный в приложениях, способ продолжения этого решения вне конического пучка. Для этой цели проведем семейство касательных полуплоскостей к поверхности нашего конического пучка так, чтобы эти касательные полуплоскости шли в одном и том же направлении, т. е. соответствующие им касательные к окружности

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{1}{a^2} \qquad (186)$$

имели вид, указанный на рис. 49. Эти касательные полуплоскости не будут пересекаться друг с другом и заполнят часть пространства $(S)$, лежащую вне конического пучка. На каждой из таких полуплоскостей $f(\theta)$ сохраняет постоянное значение, и мы можем определить однозначным образом решение $u$ вне конического пучка, пользуясь той же самой формулой (185), которая нам давала решение внутри конического пучка. В данном случае вне пучка решение будет

сохранять постоянное значение уже не на лучах, а на полуплоскостях. Заметим, что мы можем, очевидно, двояким образом определять направление касательных к окружности (186) и, значит, получим два различных способа продолжения решения по указанному выше методу.

Соответствующие поверхности конического пучка $\theta$ принадлежат разрезу $-a<\theta<a$. Мы можем при этом разбить значение $u$, определяемое формулой (185), на два вещественных слагаемых: $u=u_1(\theta)+u_2(\theta)$, и продолжать одно из них по полукасательным $I$ (рис. 49), а другое — по полукасательным $II$. Это даст нам тоже некоторое решение уравнения вне круга. Мы имеем, таким образом, по существу, бесчисленное множество различных способов продолжения, причем при всех этих продолжениях сохраняется непрерывность

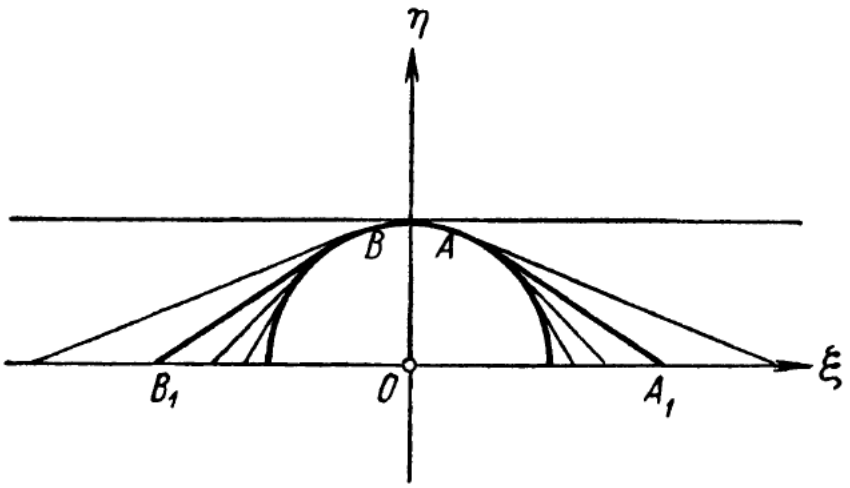



Рис. 50.

решения $u$ при переходе через окружность. В конкретных задачах способ продолжения определяется из рассмотрения движения фронта волны.

Все предыдущее относилось к тому случаю, когда мы рассматривали решение во всем пространстве $(S)$. Положим теперь, что нас интересует только полупространство $y\geqslant 0$ или на плоскости $(\xi, \eta)$ только полуплоскость $\eta\geqslant 0$. Положим, что формула (185) дает нам решение в полукруге, причем это решение обращается в нуль на некоторой дуге $AB$ полуокружности так, как это изображено на рис. 50. В данном случае во многих задачах, связанных с распространением колебаний, мы приходим к однозначному продолжению решения (185), пользуясь полукасательными к окружности, изображенными на рис. 50, т. е. соответствующими полуплоскостями, касательными к поверхности конического пучка. При этом решение будет равно нулю вне контура $A_1ABB_1A_1$.

Соображения, аналогичные предыдущим, применимы и к общему случаю уравнения (176), но при этом, конечно, вместо конического пучка мы будем иметь более сложный геометрический образ (семейство прямых с двумя параметрами), связанный с выбором функции $p(\theta)$.

Мы можем в уравнениях (176) или (177) выбирать вместо $\theta$ другую комплексную переменную $z$, связанную с $\theta$ некоторой аналитической функциональной зависимостью. Укажем на один особенно удобный выбор комплексной переменной. Пусть $z$ связана с $\theta$ формулой

$$\theta = \frac{a}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right). \tag{187}$$

При этом, как мы знаем [**35**], вместо плоскости $\theta$ с разрезом $(-a, a)$ мы будем иметь для переменной $z$ единичный круг $|z| \leqslant 1$. Пользуясь формулой (187), нетрудно видеть, что при нашем выборе значения радикала будет иметь место формула

$$\sqrt{a^2 - \theta^2} = i\frac{a}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right). \tag{188}$$

Исследуем в данном случае более подробно уравнение (177). Оно будет иметь вид

$$t - \frac{a}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)x + i\frac{a}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)y = 0$$

или

$$1 - \frac{a}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\xi + i\frac{a}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)\eta = 0,$$

что можно переписать следующим образом:

$$1 - \frac{a}{2}z(\xi - i\eta) - \frac{a}{2}\frac{1}{z}(\xi + i\eta) = 0. \tag{189}$$

Введем для круга (184) полярные координаты по формулам

$$\xi = \rho\cos\varphi, \quad \eta = \rho\sin\varphi \quad \left(0 \leqslant \rho \leqslant \frac{1}{a}\right).$$

Уравнение (189) перепишется при этом так:

$$a\rho e^{-i\varphi}z^2 - 2z + a\rho e^{i\varphi} = 0,$$

и мы имеем, очевидно, для $z$ решение вида $z = re^{i\varphi}$, где $r$ определяется из квадратного уравнения

$$a\rho r^2 - 2r + a\rho = 0 \quad (0 \leqslant r \leqslant 1),$$

т. е. в данном случае каждой точке круга (184) (т. е. лучу) соответствует значение комплексного переменного $z = re^{i\varphi}$ с тем же самым аргументом и точкам окружности круга (186) соответствуют точки единичной окружности с тем же самым аргументом. Иначе говоря, всякому радиусу круга (184) соответствует радиус единичного круга $|z| \leqslant 1$ с тем же самым полярным углом.

Указанные в настоящем пункте основные идеи приложения теории функций комплексного переменного к решению волнового уравнения

(173) имеют обширные приложения в задачах распространения колебаний (акустических, электромагнитных), связанных с волновым уравнением, а также в более сложных задачах распространения упругих колебаний. Предыдущий метод дает только некоторый класс решений уравнения (173), но, как оказывается, в этот класс входят решения, имеющие важное физическое значение, и, пользуясь этим классом решений, можно доводить до конца в виде, удобном для вычисления, задачи, связанные с отражением и дифракцией волн.

Уравнение (173) есть волновое уравнение для плоского случая (цилиндрические волны), но, пользуясь принципом наложения, можно из решений указанного выше типа составлять новые решения и исследовать таким образом волновое уравнение и в общем случае трехмерного пространства. Обоснование изложенного выше метода можно найти в работах С. Л. Соболева и автора, напечатанных в «Трудах Сейсмологического института Академии наук СССР». Его применение к конкретным задачам находится в работах Е. А. Нарышкиной и С. Л. Соболева. Не вдаваясь в подробности, которые завели бы нас слишком далеко и потребовали бы много места, мы изложим весьма кратко применение этого метода к двум задачам: к задаче дифракции плоской волны и к задаче отражения упругих колебаний от плоской границы.

**54. Дифракция плоской волны.** Рассмотрим плоскость $(x, y)$, на которой сделан вырез вдоль полупрямой $y = x$, где $x > 0$. Положим, далее, что в оставшейся части плоскости при $t < 0$ мы имеем плоскую волну, которая распространяется параллельно $OX$ со скоростью $\frac{1}{a}$ так, что в момент $t = 0$ она доходит до вершины выреза (начала координат). Положим, что эта плоская волна имеет следующую элементарную форму:

$$u = 1 \text{ при } x < \frac{1}{a}\, t;\ u = 0 \text{ при } x > \frac{1}{a}\, t, \tag{190}$$

т. е. позади фронта распространения $u$ имеет постоянное значение единица, а впереди фронта, куда возмущение еще не дошло, $u = 0$.

В данном случае при $t < 0$ функция $u$ удовлетворяет уравнению (173), и, кроме того, будет являться, очевидно, решением однородного уравнения, зависящим только от $\xi$ и $\eta$ и определяемым условиями:

$$u = 1 \text{ при } \xi < \frac{1}{a}; \quad u = 0 \text{ при } \xi > \frac{1}{a}; \tag{191}$$

фронт этой волны распространяется со скоростью $\frac{1}{a}$, как и должно быть для волнового уравнения (173).

Рассмотрим теперь вопрос о дифракции плоской волны (190) относительно упомянутого выреза, причем будем считать, что и после дифракции, т. е. при $t > 0$, волна будет представляться однородным решением уравнения (173), т. е. вещественной частью некоторой аналитической функции $f(z)$ комплексного переменного $z$, определяемого уравнением (189). Такое пред-

положение является вполне естественным, поскольку линия, которая вызывает дифракцию, является вырезом с вершиной в начале. Будем считать, что на обеих сторонах выреза должно быть выполнено условие

$$u = 0 \text{ (на вырезе)}. \tag{192}$$

В момент $t = 0$ наша плоская волна дойдет до вершины, и затем будет иметь место явление дифракции. Рассмотрим некоторый положительный момент времени $t > 0$. Принимая во внимание, что скорость распространения возмущения для случая волнового уравнения (173) равна $\frac{1}{a}$, мы будем иметь в указанный момент следующую картину возмущений. Прежде всего, мы будем иметь прямолинейный фронт $ABCD$, разорванный на две части препятствием, через которое этот фронт прошел. Линия этого фронта перпендикулярна к оси $X$, причем $\overline{OB} = \frac{1}{a}\, t$. Дальше мы будем иметь прямолинейный фронт, который будет создаваться волной, отраженной по обычному закону от границы $OG$ (рис. 51). Это будет прямая $EC$, параллельная оси $X$. Кроме того, наличие вершины $O$ создает добавочное возмущение в круге с центром в начале и радиусом $\frac{1}{a}\, t$. Основным пунктом задачи и является определение функции $u$ внутри этого круга. Отметим сначала ту картину значений $u$, которая будет иметь место вне этого круга. Спереди от линии $ABF$ внизу выреза $OG$ мы будем иметь, очевидно, $u = 0$. Сверху того же выреза, очевидно, $u = 0$ спереди от линии $CD$. Кроме того, в части плоскости, ограниченной контуром $ECFE$, к падающей волне будет присоединяться отраженная, и в силу предельного условия (192) мы будем иметь и здесь $u = 0$. В части плоскости, лежащей вне упомянутого круга позади фронта волны, всюду $u = 1$, за исключением указанной области $ECFE$. Круг с центром в начале и радиусом $\frac{1}{a}\, t$ есть как раз круг (184). Только в данном случае он разрезан по радиусу $\operatorname{arctg} \frac{\eta}{\xi} = \frac{\pi}{4}$.

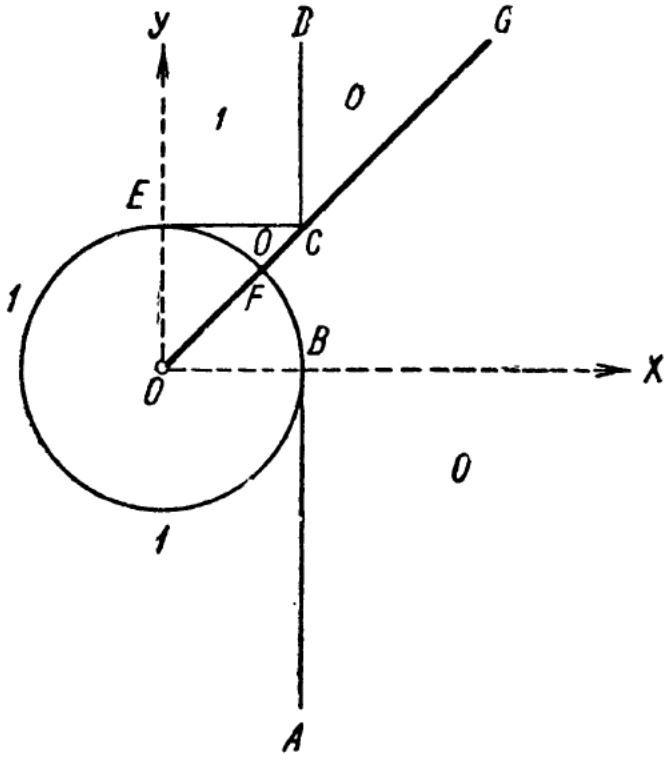


Рис. 51.

Переходя на плоскость $z$, согласно (189) будем иметь единичный круг $|z| \leqslant 1$, разрезанный по радиусу $\arg z = \frac{\pi}{4}$. Как мы уже видели выше, радиусам круга (184) соответствуют радиусы единичного круга $|z| < 1$ с тем же центральным углом.

Принимая во внимание упомянутые выше значения $u$ и предельные условия и переходя на плоскость $z$, мы придем к следующей задаче: найти функцию $f(z)$, регулярную в разрезанном круге $|z| < 1$ и $-\frac{7\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{4}$, такую, чтобы ее вещественная часть обращалась в нуль на обоих

берегах разреза, т. е. на радиусах

$$\arg z = \frac{\pi}{4} \text{ и } \arg z = -\frac{7\pi}{4},$$

а также на дугах

$$-\frac{7}{4}\pi < \arg z < -\frac{3\pi}{2} \text{ и } 0 < \arg z < \frac{\pi}{4},$$

и была равна единице на остальной части окружности $|z| = 1$. Нетрудно написать в явном виде решение этой задачи.

Повернув плоскость $z$ вокруг начала на угол $\frac{7}{4}\pi$:

$$w_1 = e^{i\frac{7\pi}{4}} z,$$

получим круг $|w_1| < 1$ и $0 \leqslant \arg w_1 \leqslant 2\pi$, разрезанный вдоль радиуса $w_1 = 0$. При извлечении квадратного корня этот разрез перейдет в отрезок $(-1, 1)$ вещественной оси, и весь круг перейдет в верхнюю часть единичного круга. Таким образом, преобразование

$$w = \sqrt{w_1} = e^{i\frac{7\pi}{8}} z^{\frac{1}{2}}$$

переводит наш разрезанный круг плоскости $z$ в верхний полукруг плоскости $w$. Граничные условия для искомой функции $f(w)$ при этом будут: вещественная часть $f(w)$ равна нулю на отрезке $(-1, 1)$ вещественной оси, и

$$\operatorname{Re}[f(e^{i\varphi})] = 0 \text{ при } 0 < \varphi < \frac{\pi}{8} \text{ и } \frac{7}{8}\pi < \varphi < \pi,$$

$$\operatorname{Re}[f(e^{i\varphi})] = 1 \text{ при } \frac{\pi}{8} < \varphi < \frac{7}{8}\pi.$$

Таким образом, $f(w)$ преобразует отрезок $(-1, 1)$ вещественной оси в отрезок мнимой оси и по принципу симметрии $f(w)$ аналитически продолжима в нижнюю часть единичного круга, причем в точках $w$, симметричных относительно вещественной оси, она принимает значения, симметричные относительно мнимой оси [24].

Это приводит нас к следующему равенству:

$$\operatorname{Re}[f(e^{-i\varphi})] = -\operatorname{Re}[f(e^{i\varphi})].$$

Приняв это во внимание, мы переходим к следующим граничным условиям для $f(w)$ на окружности единичного круга:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{Re}[f(e^{i\varphi})] = 0, \ -\frac{\pi}{8} < \varphi < \frac{\pi}{8} \text{ и } \frac{7}{8}\pi < \varphi < \frac{9}{8}\pi \\ &\operatorname{Re}[f(e^{i\varphi})] = 1, \ \frac{\pi}{8} < \varphi < \frac{7\pi}{8}, \\ &\operatorname{Re}[f(e^{i\varphi})] = -1, -\frac{7\pi}{8} < \varphi < -\frac{\pi}{8}. \end{aligned}\right\} \quad (193)$$

Для построения решений этой предельной задачи рассмотрим функцию

$$\frac{1}{i}\ln\frac{\alpha - w}{\beta - w} = \frac{1}{i}\ln\left|\frac{\alpha - w}{\beta - w}\right| + \arg\frac{\alpha - w}{\beta - w}, \quad (194)$$

где $\alpha$ и $\beta$ — точки единичной окружности, находящиеся на концах одного и того же диаметра $AB$ (рис. 52). Пусть $M$ — переменная точка $w$. Вещественная часть

$$\arg \frac{\alpha - w}{\beta - w} = \arg (\alpha - w) - \arg (\beta - w)$$

представляет собою угол, образованный вектором $MA$ с вектором $MB$ и отсчитываемый от $MB$. Функция (194) однозначна и регулярна в круге $|w| < 1$. При $w = 0$ ее значение, с точностью до кратного $2\pi$, равно $\pi$. Мы будем считать его равным $\pi$ и, таким образом, фиксируем определенную ветвь функции (194) в круге $|w| < 1$. При таком выборе ветви будем иметь

$$\frac{1}{i} \ln \frac{\alpha - w}{\beta - w} = \pi + \frac{1}{i} \ln \frac{1 - \alpha^{-1} w}{1 - \beta^{-1} w} =$$

$$= \pi + \frac{1}{i} \ln (1 - \alpha^{-1} w) - \frac{1}{i} \ln (1 - \beta^{-1} w),$$

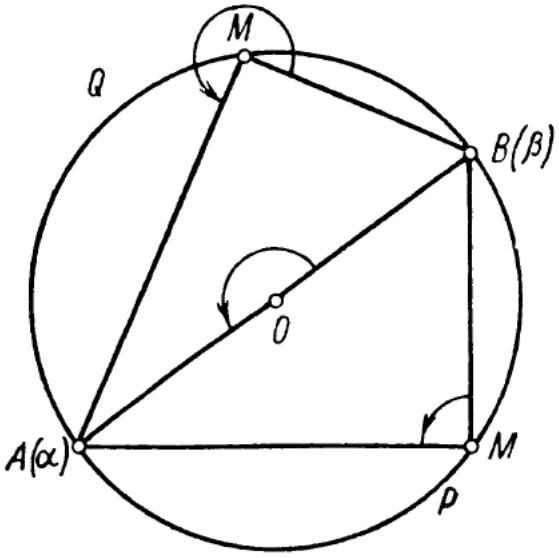



Рис. 52.

где для обоих логарифмов берутся главные значения, определяемые обычным степенным рядом. Если $w$ попадает на дугу $APB$, то упомянутый угол $BMA$ будет равен $\frac{\pi}{2}$, а на дуге $AQB$ он будет равен $\frac{3\pi}{2}$, т. е. при сделанном выборе однозначной ветви функции (194) в круге $|w| < 1$ ее вещественная часть будет равна $\frac{\pi}{2}$ на дуге $APB$ и $\frac{3\pi}{2}$ на дуге $AQB$.

Применим этот результат к функции

$$\psi (w) = \frac{1}{i} \ln \frac{e^{i\frac{7\pi}{8}} - w}{e^{-i\frac{\pi}{8}} - w} + \frac{1}{i} \ln \frac{e^{-i\frac{7\pi}{8}} - w}{e^{i\frac{\pi}{8}} - w}.$$

Обозначая через $M_1$, $M_2$, $M_3$ и $M_4$ точки

$$e^{-i\frac{\pi}{8}}, \quad e^{i\frac{\pi}{8}}, \quad e^{-i\frac{7\pi}{8}}, \quad e^{i\frac{7\pi}{8}},$$

мы можем утверждать, что вещественная часть $\psi (w)$ равна $2\pi$ на дугах $M_1M_2$ и $M_3M_4$, равна $\pi$ на дуге $M_1M_3$ и $3\pi$ на дуге $M_2M_4$. Принимая это во внимание, мы непосредственно получаем решение предельной задачи (193) в следующем виде:

$$f (w) = \frac{1}{\pi} \psi (w) - 2.$$

Возвращаясь к прежней переменной $z$, имеем решение задачи дифракции внутри круга

$$x^2 + y^2 < \frac{1}{a^2} t^2$$

в виде

$$U=\operatorname{Re}\left[\frac{1}{\pi i}\ln\frac{\left(e^{i\frac{7\pi}{8}}-e^{i\frac{7\pi}{8}}z^{\frac{1}{2}}\right)\left(e^{-i\frac{7\pi}{8}}-e^{i\frac{7\pi}{8}}z^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(e^{-i\frac{\pi}{8}}-e^{i\frac{7\pi}{8}}z^{\frac{1}{2}}\right)\left(e^{i\frac{\pi}{8}}-e^{i\frac{7\pi}{8}}z^{\frac{1}{2}}\right)}\right]-2.$$

Предыдущие рассуждения не являются строго обоснованными, и само понятие об элементарной плоской волне $u$, равной единице позади фронта и нулю впереди фронта, представляется на первый взгляд несколько искусственным. Однако можно показать, что всякую плоскую волну можно представить в виде интеграла, содержащего элементарную плоскую волну. Полученный результат можно с помощью этих соображений распространить на дифракцию самой общей плоской волны, приведя эту задачу к рассмотренной задаче.

Рассмотрим общий вид плоской волны, движущейся параллельно оси $X$. Такая волна задается функцией $f\left(\frac{1}{a}t-x\right)$, причем считаем, что $f(\tau)=0$ при $\tau<0$. Функция $f\left(\frac{1}{a}t-x\right)$, очевидно, удовлетворяет уравнению (173). Выше нами рассмотрен тот элементарный частный случай, когда $f(\tau)=1$ при $\tau>0$ и $f(\tau)=0$ при $\tau<0$. В этом частном случае функцию $f(\tau)$ обозначим через $u(\tau)$, как это уже было сделано в формуле (190):

$$u(\tau)=\begin{cases}0 \text{ при } \tau<0,\\ 1 \text{ при } \tau>0.\end{cases}$$

Положим теперь, что $f(\tau)$ есть непрерывная функция, имеющая непрерывную производную и равная нулю при $\tau\leqslant 0$. Мы можем написать

$$f(\tau)=\int_0^\infty u(\tau-\lambda)f'(\lambda)\,d\lambda.$$

Действительно, принимая во внимание определение $u(\tau)$ и условие $f(0)=0$, получим

$$\int_0^\infty u(\tau-\lambda)f'(\lambda)\,d\lambda=\int_0^\tau f'(\lambda)\,d\lambda=f(\tau)-f(0)=f(\tau).$$

Таким образом, можно написать

$$f\left(\frac{1}{a}t-x\right)=\int_0^\infty u\left(\frac{1}{a}t-x-\lambda\right)f'(\lambda)\,d\lambda=\int_0^\infty u\left(\frac{t-a\lambda}{a}-x\right)f'(\lambda)\,d\lambda.$$

Как видно из этой формулы, падающая плоская волна общего типа оказывается «суммою» (точнее, интегралом) элементарных падающих волн:

$$u\left(\frac{t-a\lambda}{a}-x\right)f'(\lambda)\,d\lambda.$$

Если через $U(x, y, t)$ мы обозначим полученный выше результат дифракции элементарной волны, то для случая падающей волны $f\left(\frac{1}{a}t-x\right)$ будем

иметь решение вида

$$V=\int_0^\infty U(x, y, t-a\lambda)\, f'(\lambda)\, d\lambda.$$

Ограничимся рассмотрением результата дифракции относительно начала координат и через $U(x, y, t)$ обозначим именно этот результат дифракции. При $t>0$ он имеет место в круге с центром в начале и радиусом $\frac{1}{a}t$, т. е. мы должны считать $U(x, y, t)=0$ при $t\leqslant 0$ для любых $(x, y)$ и, кроме того, $U(x, y, t)=0$ при $x^2+y^2\geqslant \frac{1}{a^2}t^2$ для $t>0$. Таким образом, в выражении для $V$ интеграл по $\lambda$ будет распространен фактически по конечному промежутку изменения $\lambda$.

При помощи приведенного выше метода может быть решена задача дифракции относительно угла любой величины плоской волны, падающей в произвольном направлении.

**55. Отражение упругих волн от прямолинейной границы.** В случае плоской задачи теории упругости составляющие смещения $u$ и $v$ могут быть выражены с помощью формул

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad v=\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}, \tag{195}$$

где функция $\varphi$ называется обычно потенциалом продольных волн, а функция $\psi$ — потенциалом поперечных волн. Эти потенциалы должны удовлетворять волновым уравнениям вида

$$a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}, \tag{196}$$

$$b^2\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}, \tag{197}$$

где

$$a=\sqrt{\frac{\rho}{\lambda+2\mu}},\quad b=\sqrt{\frac{\rho}{\mu}}, \tag{198}$$

причем $\rho$ есть плотность среды, $\lambda$ и $\mu$ — упругие постоянные Лямэ. Числа $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{b}$ дают, как известно из теории упругости, скорость распространения продольной и поперечной волн, и формула (195) представляет собою разбиение возмущения общего типа на возмущения продольного и поперечного типа.

Приведем еще формулы, которые выражают напряжение в нашем упругом теле через потенциалы. Мы будем рассматривать лишь вектор напряжения, действующего на площадку, перпендикулярную к оси $Y$. Составляющие этого вектора выражаются по следующим формулам:

$$\left.\begin{aligned} Y_x&=\mu\left[2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right],\\ Y_y&=\mu\left[\left(\frac{b^2}{a^2}-2\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}\right].\end{aligned}\right\} \tag{199}$$

После этих предварительных сведений перейдем к постановке задачи. Положим, что в момент времени $t=0$ из точки $x=0$, $y=y_0$

распространяется возмущение чисто продольного типа, которое характеризуется некоторым потенциалом $\varphi$, удовлетворяющим уравнению (196), причем этот потенциал представляет собою однородное решение уравнения относительно аргументов $t$, $x$ и $(y-y_0)$, т. е. он определяется как вещественная часть некоторой аналитической функции

$$\varphi = \mathrm{Re}\,[\Phi(\theta)], \tag{200}$$

где комплексная переменная $\theta$ определяется из уравнения

$$t - \theta x + \sqrt{a^2 - \theta^2}\,(y - y_0) = 0. \tag{201}$$

Последнее уравнение отличается от уравнения (177) лишь заменою $y$ на $(y-y_0)$. Это соответствует тому факту, что потенциал (200) соответствует некоторой силе, сосредоточенной в момент $t=0$ в точке $x=0$, $y=y_0$. Мы не будем останавливаться подробнее на выяснении этого обстоятельства с точки зрения механической характеристики источника, определяемого формулой (200).

Будем считать, что заданная функция $\Phi(\theta)$, входящая в формулу (200), регулярна на плоскости $\theta$ с разрезом $(-a, a)$, кроме бесконечно далекой точки, и что ее вещественная часть обращается в нуль на разрезе. Последнее обстоятельство соответствует тому факту, что заданный потенциал $\varphi$ обращается в нуль на поверхности конического пучка с вершиной $t=0$; $x=0$, $y=y_0$ и с углом $\operatorname{arctg}\frac{1}{a}$ при вершине. Эта поверхность соответствует фронту распространяющегося возмущения. Мы считаем, конечно, потенциал равным нулю и везде вне конического пучка. Положим, что имеем не всю плоскость, где распространяется возмущение, но лишь полуплоскость $y>0$, внутри которой находится центр возмущения $x=0$, $y=y_0>0$. Потенциал $\varphi$ будет вполне определять движение лишь в промежуток времени $t<ay_0$. В момент времени $t=ay_0$ фронт возмущения дойдет до линии $y=0$, которая является границей нашей среды, и появятся отраженные волны, причем закон отражения должен получиться из предельных условий, которые имеют место на этой границе. Мы будем предполагать, что эта граница свободна от напряжений, и в дальнейшем напишем соответствующие предельные условия, приравнивая нулю выражения (199) при $y=0$.

В результате отражения мы должны будем присоединить к заданному потенциалу $\varphi$ еще два потенциала: один — отраженный продольный потенциал $\varphi_1$, а другой — отраженный поперечный потенциал $\psi_1$. Будем считать, что оба эти потенциала выражаются как вещественные части некоторых аналитических функций комплексных переменных

$$\varphi_1 = \mathrm{Re}\,[\Phi_1(\theta_1)], \qquad \psi_1 = \mathrm{Re}\,[\Psi_1(\theta_2)]. \tag{202}$$

Нам надо найти как уравнения, определяющие эти комплексные переменные $\theta_1$ и $\theta_2$, так и вид аналитических функций $\Phi_1(\theta_1)$ и $\Psi_1(\theta_2)$ по заданному падающему потенциалу $\varphi$ и по предельным условиям. Упомянутые комплексные переменные в соответствии со сказанным в [53], а также с тем обстоятельством, что волновое уравнение для поперечного потенциала $\psi$ содержит не постоянную $a$, а постоянную $b$, будут определяться из уравнений вида

$$\left.\begin{aligned} t - \theta_1 x \pm \sqrt{a^2 - \theta_1^2}\,y + p_1(\theta_1) = 0, \\ t - \theta_2 x \pm \sqrt{b^2 - \theta_2^2}\,y + p_2(\theta_2) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{203}$$

и нам надо прежде всего выбрать вид функций $p_1(\theta_1)$ и $p_2(\theta_2)$ и знаки у радикалов, причем значения радикалов на плоскости с разрезом определяются всегда так, как это было указано в [53].

Обратимся к коническому пучку лучей, соответствующему уравнению (201) и имеющему вершину в точке $t=x=0$, $y=y_0$. В данном случае разность $(y-y_0)$ играет роль буквы $y$, если мы сравним наше теперешнее рассуждение с рассуждением из [53]. Плоскость $y=y_0$ будет делить наш пучок на две части, и та часть пучка, где $y>y_0$, вовсе не встретит границы $y=0$ в пространстве $(S)$ с координатами $(t, x, y)$. Другая часть пучка, где $y<y_0$, встретит эту плоскость, и точки пересечения прямых пучка с этой плоскостью заполнят на этой плоскости область, определяемую неравенством (рис. 53)

$$x^2+y_0^2<\frac{1}{a^2}t^2. \qquad (204)$$

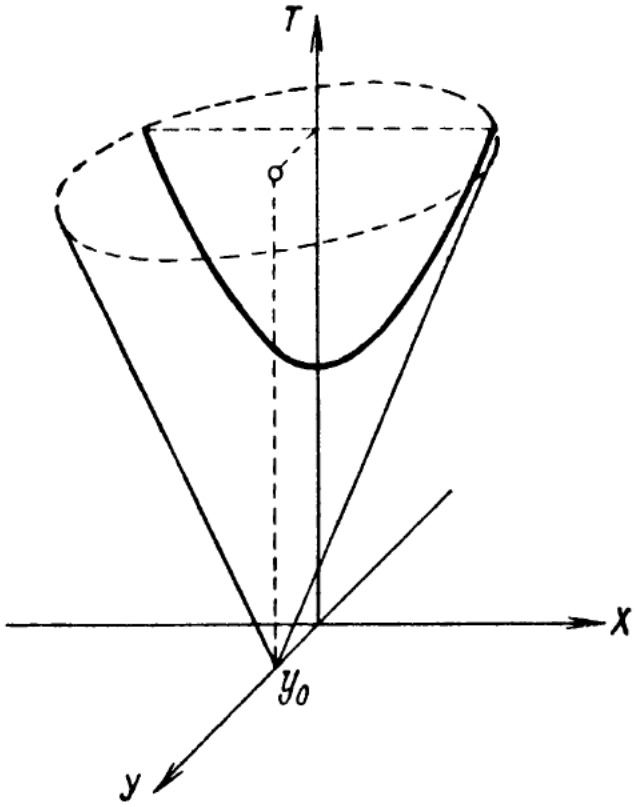



Рис. 53.

Это непосредственно следует из того, что уравнение самого пучка в данном случае будет иметь вид

$$x^2+(y-y_0)^2<\frac{1}{a^2}t^2.$$

Область (204) представляет собою, очевидно, внутреннюю часть некоторой гиперболы плоскости $y=0$ пространства $(S)$. Как мы видели в [53], той половине конического пучка, которая пересекается с плоскостью $y=0$ и где $y-y_0<0$, соответствует верхняя полуплоскость значений комплексного переменного $\theta$. Кроме того, очевидно, вдоль каждого из наших лучей $y$ уменьшается и $t$ одновременно увеличивается. Выберем в уравнениях (203) знаки у радикалов противоположными знаку радикала в уравнении (201) и, кроме того, функции $p_1(\theta_1)$ и $p_2(\theta_2)$ определим так, чтобы уравнения (205) совпадали с уравнением (201) при $y=0$. Мы получим, таким образом, для новых комплексных переменных уравнения вида

$$t-\theta_1 x-\sqrt{a^2-\theta_1^2}\,(y+y_0)=0, \qquad (205)$$

$$t-\theta_2 x-\sqrt{b^2-\theta_2^2}\,y-\sqrt{a^2-\theta_2^2}\,y_0=0. \qquad (206)$$

Возьмем некоторую точку $M_1(t_1, x_1)$ в области (204) плоскости $y=0$,

Сравнивая его с уравнением (201), нетрудно убедиться, что ему соответствует конический пучок с вершиной $t=x=0$, $y=-y_0$, симметричной с центром возмущения относительно плоскости $y=0$. Принимая во внимание, что знак у радикала в уравнении (205) отличается от знака при радикале уравнения (201), мы можем утверждать, что в данном случае значениям $\theta$ из верхней полуплоскости, которые мы сейчас и будем иметь в результате отражения, соответствуют те лучи, где $t>0$ и $y+y_0>0$, причем при увеличении $t$ $y$ увеличивается вдоль луча. Аналогичное обстоятельство будет иметь место и для лучей, определяемых уравнением (206), но только в данном случае пучок этих лучей не будет уже коническим. Таким образом, из каждой точки $M_1$ области (204) будут выходить два отраженных луча. Ищем потенциалы отраженных волн согласно формулам (202), т. е. так, чтобы они сохраняли постоянное значение вдоль отраженных лучей. Остается еще выбрать вид функций в формулах (202). Мы рассматриваем, как уже было упомянуто выше, в данном случае предельные условия вида

$$2\frac{\partial^2(\varphi+\varphi_1)}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial\psi_1^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}\Big|_{y=0}=0,$$

$$\left(\frac{b^2}{a^2}-2\right)\left[\frac{\partial^2(\varphi+\varphi_1)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(\varphi+\varphi_1)}{\partial y^2}\right]+2\frac{\partial^2(\varphi+\varphi_1)}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x\,\partial y}\Big|_{y=0}=0.$$

Для вычисления производных от функций $\varphi$, $\varphi_1$ и $\psi_1$, определяемых по формулам (200) и (202), мы можем воспользоваться формулами из [52], заменяя $l(\tau)$, $m(\tau)$ и $n(\tau)$ соответствующими коэффициентами из уравнений (201), (205) и (206). Заметим при этом, что для отраженного поперечного потенциала $\psi_1$ мы должны заменить $a$ на $b$. При $y=0$ наши комплексные переменные $\theta$, $\theta_1$, $\theta_2$ совпадают, и мы можем обозначить их одной и той же буквой $\theta$. Приходим, таким образом, к условиям следующего вида:

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{Re}\left[\frac{1}{\delta'}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{-2\theta\sqrt{a^2-\theta^2}\,[\Phi'(\theta)-\Phi_1'(\theta)]+(b^2-2\theta^2)\,\Psi_1'(\theta)}{\delta'}\right]=0,\\&\mathrm{Re}\left[\frac{1}{\delta'}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{(b^2-2\theta^2)\,[\Phi'(\theta)+\Phi_1(\theta)]-2\theta\sqrt{b^2-\theta^2}\,\Psi_1'(\theta)}{\delta'}\right]=0,\end{aligned}\right\}\qquad(207)$$

где

$$\delta'=-x+\frac{\theta}{\sqrt{a^2-\theta^2}}y_0.$$

Условия (207) должны быть выполнены во всей области (204), т. е. во всей верхней полуплоскости $\theta$.

Мы получим, очевидно, решение уравнений (207), если определим искомые функции $\Phi_1(\theta)$ и $\Psi_1(\theta)$ из уравнений

$$-2\theta\sqrt{a^2-\theta^2}\,[\Phi'(\theta)-\Phi_1'(\theta)]+(b^2-2\theta^2)\,\Psi_1'(\theta)=0,$$

$$(b^2-2\theta^2)\,[\Phi'(\theta)+\Phi_1'(\theta)]-2\theta\sqrt{b^2-\theta^2}\,\Psi_1'(\theta)=0.$$

Можно показать, что эти уравнения не только достаточны, но и необходимы для выполнения условий (207). Решая эти уравнения, получаем выражения для производных искомых функций:

$$\left.\begin{aligned}\Phi_1'(\theta)&=\frac{-(2\theta^2-b^2)^2+4\theta^2\sqrt{a^2-\theta^2}\sqrt{b^2-\theta^2}}{F(\theta)}\,\Phi'(\theta),\\\Psi_1'(\theta)&=-\frac{4\theta\,(2\theta^2-b^2)\sqrt{a^2-\theta^2}}{F(\theta)}\,\Phi'(\theta),\end{aligned}\right\}\qquad(208)$$

где

$$F(\theta)=(2\theta^2-b^2)^2+4\theta^2\sqrt{a^2-\theta^2}\sqrt{b^2-\theta^2}.\qquad(209)$$

Для решения задачи нам и интересны только производные от потенциалов. Согласно формулам (195) будем иметь для смещений следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned} u &= \operatorname{Re}\left[\Phi'(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial x} + \Phi_1'(\theta_1)\frac{\partial\theta_1}{\partial x} + \Psi_1'(\theta_2)\frac{\partial\theta_2}{\partial y}\right], \\ v &= \operatorname{Re}\left[\Phi'(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial y} + \Phi_1'(\theta_1)\frac{\partial\theta_1}{\partial y} - \Psi_1'(\theta_2)\frac{\partial\theta_2}{\partial x}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{210}$$

Если через рассматриваемую точку $M(t, x, y)$ не проходит падающий или отраженный луч, то в выражениях (210) мы должны вычеркнуть соответствующее слагаемое. Отметим одно важное обстоятельство, а именно: согласно условию вещественная часть $\Phi'(\theta)$ равна нулю при $-a<\theta<a$. Из формул (208) и очевидного в силу (198) соотношения $b>a$ непосредственно следует, что то же будет иметь место для $\Phi_1'(\theta)$ и $\Psi_1'(\theta)$, так что отраженные потенциалы $\varphi_1$ и $\psi_1$ также будут постоянными на поверхностях отраженных пучков лучей, и мы можем их считать равными нулю как на этих поверхностях, так и вне пучков.

Если бы мы стали рассматривать источник колебания не продольного, а поперечного типа, то картина получилась бы несколько иной. В этом случае нам был бы задан потенциал поперечных колебаний как вещественная часть некоторой аналитической функции

$$\psi = \operatorname{Re}[\Psi(\theta)], \tag{211}$$

регулярной на плоскости $\theta$ с разрезом $(-b, b)$, причем комплексная переменная $\theta$ определяется уравнением

$$t - \theta x + \sqrt{b^2-\theta^2}\,(y-y_0) = 0 \tag{212}$$

и вещественная часть $\Psi(\theta)$ равна нулю при $-b<\theta<b$. Мы должны были бы искать отраженные продольные и поперечные потенциалы в виде

$$\varphi_1 = \operatorname{Re}[\Phi_1(\theta_1)], \quad \psi_1 = \operatorname{Re}[\Psi_1(\theta_2)], \tag{213}$$

где $\theta_1$ и $\theta_2$ определяются уравнениями

$$t - \theta_1 x - \sqrt{a^2-\theta_1^2}\,y - \sqrt{b^2-\theta_1^2}\,y_0 = 0, \tag{214}$$

$$t - \theta_2 x - \sqrt{b^2-\theta_2^2}\,(y+y_0) = 0. \tag{215}$$

Совершенно так же, как и выше, мы получили бы для функций, входящих в выражения (213), вместо формул (208) следующие:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1'(\theta) &= \frac{4\theta(2\theta^2-b^2)\sqrt{b^2-\theta^2}}{F(\theta)}\Psi'(\theta), \\ \Psi_1'(\theta) &= \frac{-(2\theta^2-b^2)^2 + 4\theta^2\sqrt{a^2-\theta^2}\sqrt{b^2-\theta^2}}{F(\theta)}\Psi'(\theta). \end{aligned}\right\} \tag{216}$$

В данном случае разрез на плоскости $\theta$, точки которого соответствуют лучам, лежащим на поверхности конического пучка, будет $-b<\theta<b$. Коэффициенты при $\Psi'(\theta)$ в обоих выражениях (216) содержат радикал $\sqrt{a^2-\theta^2}$ а потому эти коэффициенты, оставаясь вещественными при $-a<\theta<a$, уже перестанут быть вещественными при $-b<\theta<-a$ и $a<\theta<b$. При этом произведение мнимой части коэффициента на мнимую часть $\Psi'(\theta)$ даст для $\Phi_1'(\theta)$ и $\Psi_1'(\theta)$ вещественную часть, отличную от нуля при

$$-b<\theta<-a \quad \text{и} \quad a<\theta<b. \tag{217}$$

Если мы подставим такое значение $\theta$ в левую часть уравнения (214), то это уравнение после отделения вещественной и мнимой частей распадется на два уравнения:

$$t - \theta x - \sqrt{b^2 - \theta^2}\, y_0 = 0, \quad y = 0,$$

т. е. для отраженного продольного потенциала эти критические лучи, на которых потенциал будет отличным от нуля, не попадут внутрь среды, а будут идти в плоскости $y = 0$ (рис. 54). Для отраженного поперечного потенциала отраженный пучок лучей, определяемый уравнением (215), будет просто коническим пучком с вершиной $t = x = 0$, $y = -y_0$, и вдоль тех образующих поверхности этого пучка, которые соответствуют значениям $\theta$, удовлетворяющим условиям (217), значения отраженного потенциала будут отличны от нуля. В данном случае нам придется, следовательно, продолжить отраженный поперечный потенциал и вне указанного конического пучка тем методом, о котором мы упоминали в [53]. Это обстоятельство имеет простое механическое значение, а именно: поперечные волны, исходящие из источника колебания, падая на границу $y = 0$, вызывают отраженные продольные волны, которые, распространяясь вдоль границы быстрее, чем поперечные, вызывают в свою очередь поперечную волну, которая как бы забегает вперед по отношению к отраженной по обычному закону поперечной волне.

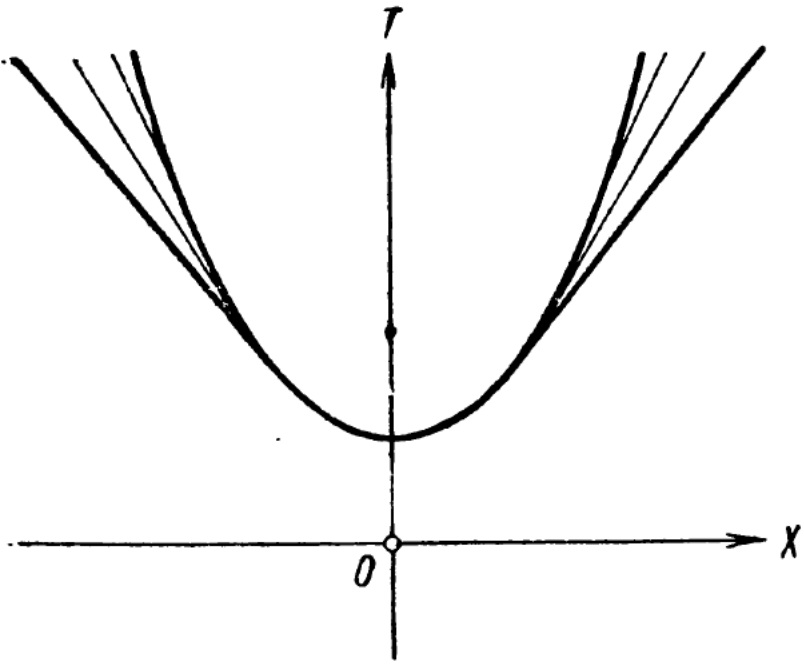


Рис. 54.

Мы ограничиваемся этими краткими указаниями и не останавливаемся на подробном механическом исследовании формул (208) и (216). Заметим только, что знаменатель $F(\theta)$, определяемый уравнением (209), имеет вещественный корень $\theta = \pm c$, удовлетворяющий неравенству $c > b$, и наличие этого корня дает то явление, которое обычно называется явлением поверхностных волн.

ГЛАВА III

# ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ВЫЧЕТОВ, ЦЕЛЫЕ И ДРОБНЫЕ ФУНКЦИИ

**56. Интеграл Френеля.** В [21] была доказана основная теорема о вычетах, которая является исходным моментом при применении теории аналитических функций к различного рода вычислительным процессам и аналитическим представлениям функций. Мы будем дальше заниматься задачами вычисления определенных интегралов, интегрирования линейных дифференциальных уравнений, разложения функций в бесконечные ряды и представления функций контурными интегралами.

Начнем с вычисления определенного интеграла вида [II, 86]

$$\int_0^\infty \sin(x^2)\,dx, \tag{1}$$

который называется обычно интегралом Френеля и встречается в задачах дифракции света. Рассмотрим интеграл

$$\int_l e^{-z^2}dz, \tag{2}$$

где $l$ — замкнутый контур, состоящий из отрезка $OA$ вещественной оси дуги $AB$ окружности с центром $O$ и радиуса $R=\overline{OA}$ и отрезка прямой $\overline{BO}$, причем мы берем угол $\overline{AOB}$ равным $\frac{\pi}{4}$. Внутри этого контура подинтегральная функция $e^{-z^2}$ не имеет вовсе особых точек, а потому величина интеграла (2) равна нулю. Разобьем этот интеграл на три части соответственно трем, указанным выше, кускам контура. Вдоль $\overline{OA}$ переменная $z$ будет вещественной, и мы положим $z=x$, причем $0\leqslant x\leqslant R$. Вдоль $\overline{BO}$ мы имеем $z=xe^{i\frac{\pi}{4}}$, $z^2=ix^2$ и $dz=e^{i\frac{\pi}{4}}dx$. Наконец, вдоль $AB$ имеем:

$$z=Re^{i\varphi}\quad\left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4}\right),$$

откуда $z^2 = R^2 e^{i2\varphi}$ и $dz = iRe^{i\varphi}\, d\varphi$. Таким образом, мы получаем следующее равенство:

$$\int_0^R e^{-x^2}\, dx + e^{i\frac{\pi}{4}} \int_R^0 e^{-ix^2}\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} iRe^{-R^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi) + i\varphi}\, d\varphi = 0. \qquad (3)$$

Покажем, что третий из написанных выше интегралов стремится к нулю при беспредельном возрастании $R$. Принимая во внимание, что $e^{\tau}$ при чисто мнимом $\tau$ по модулю дает единицу, и заменяя подинтегральную функцию в интеграле ее модулем, мы придем к неравенству вида

$$\left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} iRe^{-R^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi) + i\varphi}\, d\varphi \right| < R \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\cos 2\varphi}\, d\varphi.$$

Докажем, что выражение, стоящее справа, стремится к нулю при $R \to \infty$ Вводя вместо $\varphi$ новое переменное $\psi = 2\varphi$ и отбрасывая постоянный множитель, не играющий роли, мы получим выражение

$$R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2\cos\psi}\, d\psi.$$

Разделим промежуток интегрирования на две части $(0, \alpha)$ и $\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right)$, где $\alpha$ — некоторое число, лежащее между 0 и $\frac{\pi}{2}$:

$$R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2\cos\psi}\, d\psi = \int_0^{\alpha} Re^{-R^2\cos\psi}\, d\psi + \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} Re^{-R^2\cos\psi}\, d\psi. \qquad (4)$$

В первом из написанных интегралов заменим отрицательный показатель наибольшим из его значений, т. е. наименьшим по абсолютной величине, а именно значением $(-R^2\cos\alpha)$. Подинтегральную функцию второго интеграла умножим на дробь $\frac{\sin\psi}{\sin\alpha}$, которая все время больше единицы в промежутке $\alpha < \psi < \frac{\pi}{2}$. Таким образом, увеличивая сумму (4), мы придем к сумме вида

$$\int_0^{\alpha} Re^{-R^2\cos\alpha}\, d\psi + \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} R\frac{\sin\psi}{\sin\alpha} e^{-R^2\cos\psi}\, d\psi,$$

и нам достаточно показать, что эта последняя сумма стремится к нулю. Но оба интеграла, входящих в эту сумму, вычисляются до конца, и сумма их имеет вид

$$\alpha Re^{-R^2\cos\alpha} + \frac{1}{R\sin\alpha}\left[e^{-R^2\cos\psi}\right]_{\psi=\alpha}^{\psi=\frac{\pi}{2}} = \alpha Re^{-R^2\cos\alpha} + \frac{1 - e^{-R^2\cos\alpha}}{R\sin\alpha},$$

откуда непосредственно и следует, что она стремится к нулю при беспредельном возрастании $R$. Таким образом, мы показали, что третье слагаемое в левой части (3) стремится к нулю при $R \to \infty$. Первое же из слагаемых левой части имеет предел

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx,$$

который, как мы знаем [II, 81], равен $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. Можно, следовательно, утверждать, что и второе слагаемое имеет определенный предел, причем в пределе получаем равенство

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\int_\infty^0 e^{-ix^2}\,dx=0$$

или, отделяя вещественную и мнимую части под знаком интеграла,

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\int_0^\infty [\cos(x^2)-i\sin(x^2)]\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Приравнивая вещественные и мнимые части, находим отсюда непосредственно величину интеграла Френеля:

$$\int_0^\infty \cos(x^2)\,dx=\int_0^\infty \sin(x^2)\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \tag{5}$$

**57. Интегрирование выражений с тригонометрическими функциями.** Рассмотрим теперь интегралы вида

$$\int_0^{2\pi} R(\cos x,\ \sin x)\,dx, \tag{6}$$

где $R(\cos x,\ \sin x)$ — рациональная функция от $\cos x$ и $\sin x$. Введем вместо вещественной переменной $x$ комплексную переменную $z=e^{ix}$. При изменении $x$ в промежутке $(0,\ 2\pi)$ комплексная переменная $z$ пробегает, очевидно, единичную окружность. Кроме того, согласно формулам Эйлера, мы можем написать

$$\cos x=\frac{z+z^{-1}}{2},\qquad \sin x=\frac{z-z^{-1}}{2i}$$

и, кроме того, очевидно, $dx=\frac{1}{iz}\,dz$. Подставляя все это в (6), мы получим интеграл от рациональной дроби по единичной окружности $|z|=1$, которую будем обозначать через $C$.

Этот интеграл равен произведению $2\pi i$ на сумму вычетов подинтегральной функции относительно полюсов, лежащих внутри единичной окружности.

Пример I. Рассмотрим интеграл

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x} \qquad (0<\varepsilon<1).$$

Проделывая указанные выше преобразования, приведем его к следующему виду:

$$\int_C \frac{dz}{iz\left(1+\varepsilon\,\frac{z+z^{-1}}{2}\right)}$$

или

$$\frac{2}{i}\int_C \frac{dz}{\varepsilon z^2+2z+\varepsilon}.$$

Полюсы подинтегральной функции будут совпадать с корнями квадратного уравнения

$$\varepsilon z^2+2z+\varepsilon=0, \tag{7}$$

один из корней которого по модулю меньше единицы. Этот корень определяется по формуле

$$z_0=\frac{-1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon},$$

причем радикал надо брать положительным. Вычет подинтегральной функции мы можем определить согласно тому правилу, которое было указано в [21], а именно этот вычет будет равен частному от деления числителя подинтегрального выражения на производную от знаменателя при $z=z_0$, т. е. в данном случае этот вычет будет

$$r=\frac{1}{2\varepsilon z_0+2}=\frac{1}{2\sqrt{1-\varepsilon^2}},$$

и окончательно мы получаем

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}=\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}. \tag{8}$$

Пример II. Рассмотрим еще интеграл

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(1+\varepsilon\cos x)^2} \qquad (0<\varepsilon<1).$$

Совершая такие же преобразования, что и выше, мы будем иметь

$$\frac{4}{i}\int_C \frac{z}{(\varepsilon z^2+2z+\varepsilon)^2}\,dz.$$

В данном случае значение $z=z_0$ будет единственным полюсом внутри единичной окружности, причем это будет полюс уже второго порядка. Согласно указанию [21], для определения вычета $r$ в этом полюсе мы должны умножить подинтегральную функцию на $(z-z_0)^2$, взять первую производ-

ную от полученного произведения и положить затем $z=z_0$. Пусть $z=z_1$ — второй корень уравнения (7), по модулю больший единицы:

$$z_1=\frac{-1-\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}.$$

Проделывая указанные операции, в данном случае будем иметь

$$r=\left[\frac{z}{\varepsilon^2(z-z_1)^2}\right]'_{z=z_0}=-\left.\frac{z+z_1}{\varepsilon^2(z-z_1)^3}\right|_{z=z_0},$$

и затем, полагая $z=z_0$ и принимая во внимание выражения $z_0$ и $z_1$, получим следующее значение для вычета:

$$r=\frac{1}{4(1-\varepsilon^2)^{3/2}}.$$

Окончательно теорема о вычетах дает

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{(1+\varepsilon\cos x)^2}=\frac{2\pi}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}}. \tag{9}$$

**58. Интегрирование рациональной дроби.** Рассмотрим интеграл от рациональной дроби

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\,dx. \tag{10}$$

Для того чтобы такой интеграл имел смысл, необходимо и достаточно [II, 85], чтобы полином $\psi(x)$, стоящий в знаменателе, не имел вещественных корней и чтобы его степень по крайней мере на две единицы превышала степень полинома $\varphi(x)$. Если мы рассмотрим при этом функцию комплексного переменного

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

то она, очевидно, будет обладать тем свойством, что произведение $zf(z)$ будет стремиться к нулю при $z\to\infty$ и притом равномерно, т. е. независимо от способа стремления $z$ к бесконечности. Точнее говоря, эта равномерность будет сводиться к следующему: для любого малого положительного $\varepsilon$ существует такое положительное $R_\varepsilon$, что $|zf(z)|<\varepsilon$, если только $|z|>R_\varepsilon$. Покажем, что если функция $f(z)$ удовлетворяет этому условию, то интеграл от нее по любой дуге окружности $|z|=R$ стремится к нулю при беспредельном возрастании $R$.

Лемма. *Если $f(z)$ непрерывна в окрестности бесконечно далекой точки и $zf(z)\to 0$ равномерно при $z\to\infty$, то интеграл от $f(z)$ по любой дуге окружности $|z|=R$ стремится к нулю при беспредельном возрастании $R$.*

Применяя к интегралу обычную оценку из [4], мы будем иметь

$$\left|\int_l f(z)\,dz\right| = \left|\int_l zf(z)\frac{1}{z}dz\right| \leqslant \max_l |zf(z)| \cdot \frac{1}{R}\,s,$$

где $s$ — длина упомянутой дуги $l$, которая, очевидно, не превышает $2\pi R$, так что окончательно

$$\left|\int_l f(z)\,dz\right| \leqslant 2\pi \max_l |zf(z)|.$$

Принимая во внимание, что $zf(z)$ на нашей дуге стремится к нулю при беспредельном возрастании $R$, мы и получаем непосредственно утверждение нашей леммы.

Вернемся к нашему примеру и проинтегрируем рациональную дробь $\varphi(z):\psi(z)$ по контуру, состоящему из отрезка $(-R, R)$ вещественной оси и полуокружности в верхней полуплоскости, имеющей упомянутый отрезок диаметром. Мы можем взять $R$ настолько большим, чтобы все полюсы функции $f(z)$, лежащие в верхней полуплоскости, оказались внутри построенного полукруга. Обозначая построенную полуокружность через $C_R$, имеем

$$\int_{-R}^{R} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\,dx + \int_{C_R} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}\,dz = 2\pi i \sum r, \tag{11}$$

где через $\sum r$ мы обозначили сумму вычетов функции $f(z)$ относительно полюсов, находящихся в верхней полуплоскости. При беспредельном увеличении $R$ правая часть равенства не будет меняться, а второе слагаемое левой части будет, согласно лемме, стремиться к нулю, и мы получим в пределе

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\,dx = 2\pi i \sum r,$$

т. е. *интеграл* (10) *от рациональной дроби равен произведению* $2\pi i$ *на сумму вычетов подинтегральной функции относительно полюсов, находящихся в верхней полуплоскости.*

Пример. Рассмотрим интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n}.$$

В данном случае в верхней полуплоскости находится единственный полюс подинтегральной функции $z = i$ порядка $n$. Для определения вычета в этом полюсе мы должны, согласно [21], помножить подинтегральную функцию $(z^2+1)^{-n}$ на $(z-i)^n$, полученное произведение продифференцировать $n-1$

раз по $z$, разделить на $(n-1)!$ и положить затем $z=i$, т. е. искомый вычет определяется по формуле

$$r=\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}(z-i)^n}{dz^{n-1}(z^2+1)^n}\Big|_{z=i}=\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}(z+i)^{-n}}{dz^{n-1}}\Big|_{z=i}$$

или

$$r=\frac{(-n)(-n-1)\ldots(-n-n+2)(2i)^{-2n+1}}{(n-1)!}=-\frac{n(n+1)\ldots(2n-2)}{(n-1)!\,2^{2n-1}}i,$$

и окончательно будем иметь

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^n}=\frac{(2n-2)!}{[(n-1)!]^2}\frac{\pi}{2^{2n-2}}. \tag{12}$$

**59. Некоторые новые типы интегралов с тригонометрическими функциями.** Заметим, что при выводе предыдущего правила вычисления интегралов с бесконечными пределами мы нигде, по существу, не пользовались тем, что подинтегральная функция $f(z)$ есть рациональная дробь. Для нас достаточно, чтобы функция $f(z)$ удовлетворяла следующим двум условиям: 1) она регулярна в верхней полуплоскости и на вещественной оси, кроме конечного числа полюсов, лежащих в верхней полуплоскости, и 2) при $z\to\infty$ в упомянутой области $zf(z)\to 0$ равномерно. При этом мы, как и выше, придем к равенству (11), причем второе слагаемое в левой части стремится к нулю, так что, переходя к пределу, будем иметь

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}f(x)\,dx=2\pi i\sum r, \tag{13}$$

где $\sum r$ — сумма вычетов $f(z)$ относительно полюсов, лежащих в верхней полуплоскости. Разбивая промежуток интегрирования $(-R, R)$ на части $(-R, 0)$ и $(0, R)$ и заменяя в первом из интегралов $x$ на $(-x)$, мы можем вместо равенства (13) написать

$$\lim_{R\to\infty}\int_{0}^{R}[f(x)+f(-x)]\,dx=2\pi i\sum r$$

или

$$\int_{0}^{\infty}[f(x)+f(-x)]\,dx=2\pi i\sum r. \tag{14}$$

Применим полученный результат к тому частному случаю, когда подинтегральная функция имеет вид

$$f(z)=F(z)\,e^{imz}\qquad(m>0), \tag{15}$$

причем функция $F(z)$ удовлетворяет поставленным выше двум условиям. При этом, как нетрудно видеть, и функция $f(z)$ будет

удовлетворять этим двум условиям. Чтобы убедиться в этом, достаточно показать, что множитель $e^{imz}$, регулярный на всей плоскости, остается ограниченным в верхней полуплоскости и на вещественной оси. Мы имеем, очевидно,

$$e^{imz} = e^{im(x+iy)} \text{ и } |e^{imz}| = e^{-my} \qquad (m > 0;\ y \geqslant 0),$$

откуда непосредственно следует, что $|e^{imz}| \leqslant 1$ при $y \geqslant 0$. Таким образом, если $F(z)$ удовлетворяет поставленным выше двум условиям, то мы имеем

$$\int_0^\infty [F(x)\, e^{imx} + F(-x)\, e^{-imx}]\, dx = 2\pi i \sum r, \tag{16}$$

где $\sum r$ — сумма вычетов функции (15) в верхней полуплоскости. Рассмотрим два частных случая. Положим сперва, что $F(z)$ — функция четная, т. е. что $F(-z) = F(z)$, при этом предыдущая формула дает

$$\int_0^\infty F(x) \cos mx\, dx = \pi i \sum r. \tag{17}$$

Если же $F(z)$ — функция нечетная, т. е. если $F(-z) = -F(z)$, то предыдущая формула дает

$$\int_0^\infty F(x) \sin mx\, dx = \pi \sum r. \tag{18}$$

Пример 1. Рассмотрим интеграл

$$\int_0^\infty \frac{\cos mx}{x^2 + a^2}\, dx \qquad (a > 0;\ m > 0).$$

В данном случае функция

$$F(z) = \frac{1}{a^2 + z^2}$$

удовлетворяет, очевидно, поставленным выше двум условиям и является функцией четной, так что мы имеем возможность применить формулу (17). Единственный полюс функции

$$f(z) = \frac{e^{imz}}{a^2 + z^2} \tag{19}$$

в верхней полуплоскости есть простой полюс $z = ia$. Мы можем определить вычет в этом полюсе по тому правилу, которое уже применяли и которое можно формулировать кратко как правило: числитель, деленный на

производную от знаменателя. В данном случае это правило дает следующее выражение для вычета функции (19):

$$r = \frac{e^{-ma}}{i2a},$$

и мы окончательно получаем

$$\int_0^\infty \frac{\cos mx}{x^2 + a^2}\, dx = \frac{\pi}{2a}\, e^{-ma}. \tag{20}$$

Пример II. Рассмотрим интеграл

$$\int_0^\infty \frac{x \sin mx}{(x^2 + a^2)^2}\, dx.$$

В данном случае будет применима формула (18), и функция

$$f(z) = \frac{ze^{imz}}{(z^2 + a^2)^2}$$

будет иметь единственный полюс $z = ia$ в верхней полуплоскости второй кратности. Вычет в этом полюсе будет определяться по формуле

$$r = \frac{d}{dz}\left[\frac{ze^{imz}}{(z^2 + a^2)^2}(z - ia)^2\right]\Big|_{z=ia}$$

или

$$r = \frac{d}{dz}\left[\frac{ze^{imz}}{(z + ia)^2}\right]\Big|_{z=ia} = \frac{m}{4a}\, e^{-ma},$$

откуда непосредственно получаем окончательный результат:

$$\int_0^\infty \frac{x \sin mx}{(x^2 + a^2)^2}\, dx = \frac{\pi m}{4a}\, e^{-ma}. \tag{21}$$

Замечание. Заметим, что формулу (13) мы не имеем права, вообще говоря, писать в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \sum r. \tag{22}$$

Действительно, интеграл между бесконечными пределами

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$$

определяется как сумма пределов интегралов

$$\int_0^R f(x)\, dx \quad \text{и} \quad \int_{-R}^0 f(x)\, dx$$

при стремлении $R$ к $+\infty$. Если этих пределов в отдельности нет, но сумма написанных интегралов стремится к конечному пределу, т. е. существует конечный предел

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx,$$

то этот предел называется *главным значением интеграла по бесконечному промежутку* и его обозначают следующим образом:

$$\text{v. p.}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx. \tag{23}$$

В формуле (13) мы должны интеграл рассматривать в смысле главного значения. Но если из каких-либо соображений мы знаем, что интеграл этот существует как обычный несобственный интеграл, то этого не надо делать, так как в этом случае интеграл в смысле главного значения совпадает с обычным несобственным интегралом. В [**26**] мы определили главное значение интеграла в том случае, когда $f(x)$ терпит разрыв непрерывности в какой-либо точке на конечном расстоянии.

**60. Лемма Жордана.** Можно облегчить те условия, которые мы наложили на функцию $F(z)$ в предыдущем номере для того, чтобы формулы (17) и (18) имели место. Для этого докажем важную для дальнейшего лемму.

Лемма Жордана. *Если $F(z)$ в верхней полуплоскости и на вещественной оси удовлетворяет условию: $F(z)\to 0$ равномерно при $z\to\infty$ и $m$ есть некоторое положительное число, то при $R\to+\infty$*

$$\int_{C_R} F(z)\,e^{imz}\,dz \to 0, \tag{24}$$

*где $C_R$ есть полуокружность с центром в начале координат и радиусом $R$, находящаяся в верхней полуплоскости.*

Вводя полярные координаты $z = Re^{i\varphi}$, перепишем интеграл (24) в виде

$$\int_0^{\pi} F(Re^{i\varphi})\,e^{imR(\cos\varphi+i\sin\varphi)}\,iRe^{i\varphi}\,d\varphi,$$

и отсюда, принимая во внимание, что $|ie^{imR\cos\varphi+i\varphi}| = 1$, будем иметь

$$\left|\int_{C_R} F(z)\,e^{imz}\,dz\right| < \int_0^{\pi}\left|F(Re^{i\varphi})\right| e^{-mR\sin\varphi}R\,d\varphi,$$

или

$$\left|\int_{C_R} F(z)\, e^{imz}\, dz\right| \leqslant \max_{\text{на } C_R} \left|F(z)\right| \int_0^{\pi} e^{-mR\sin\varphi} R\, d\varphi. \tag{25}$$

По условию $|F(Re^{i\varphi})|$ стремится к нулю при $R\to\infty$ равномерно относительно $\varphi$ при $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$, и, следовательно, нам достаточно показать, что при $R\to\infty$ интеграл

$$\int_0^{\pi} e^{-mR\sin\varphi} R\, d\varphi \tag{26}$$

будет ограниченной величиной. Разбивая промежуток интегрирования на два: $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ и $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, и заменяя во втором из интегралов переменное $\varphi$ на $(\pi-\varphi)$, мы приведем интеграл (26) к виду

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-mR\sin\varphi} R\, d\varphi.$$

Будем теперь поступать так же, как мы это делали в [56]. Разбивая промежуток интегрирования на две части и увеличивая положительную подинтегральную функцию, получаем неравенство

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-mR\sin\varphi} R\, d\varphi < 2\int_0^{\alpha} e^{-mR\sin\varphi} R\,\frac{\cos\varphi}{\cos\alpha}\, d\varphi + 2\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} e^{-mR\sin\alpha} R\, d\varphi.$$

Последние два интеграла берутся до конца и приводят нас к следующему неравенству:

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-mR\sin\varphi} R\, d\varphi < \frac{2}{m\cos\alpha}\left[-e^{-mR\sin\varphi}\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\alpha} + 2e^{-mR\sin\alpha} R\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right).$$

Второе из написанных слагаемых стремится, очевидно, к нулю при $R\to\infty$, а первое стремится к конечному пределу $\frac{2}{m\cos\alpha}$ так, что вся сумма остается ограниченной при $R\to\infty$. То же самое подавно можно утверждать и относительно интеграла (26), откуда и следует результат леммы.

Пользуясь установленной леммой, мы можем доказать, например, формулу (18) при более легких требованиях по отношению к функции $F(z)$. Действительно, раньше мы требовали, чтобы в верхней

полуплоскости и на вещественной оси $zF(z)\to 0$ при $|z|\to\infty$, и это требование было нам необходимо для того, чтобы интеграл

$$\int_{C_R} F(z)\,e^{imz}\,dz$$

по верхней полуокружности $C_R$ стремился к нулю при $R\to\infty$. Согласно лемме, мы знаем, что для этого достаточно потребовать лишь, чтобы $F(z)\to 0$, и, таким образом, можем применять формулу (18) лишь в этом предположении.

Пример. Рассмотрим интеграл

$$\int_0^\infty \frac{x\sin mx}{x^2+a^2}\,dx \qquad (a>0;\ m>0).$$

В данном случае функция

$$F(z)=\frac{z}{z^2+a^2}$$

удовлетворяет всем условиям для формулы (18), и, следовательно, мы должны, как и раньше, определить лишь вычет функции

$$F(z)\,e^{imz}=\frac{ze^{imz}}{z^2+a^2}$$

в полюсе $z=ia$, находящемся в верхней полуплоскости. Это будет полюс первого порядка, и соответствующий вычет определяется по обычному правилу: числитель, деленный на производную от знаменателя, т. е.

$$r=\frac{ze^{imz}}{2z}\Big|_{z=ia}=\frac{1}{2}e^{-ma},$$

и окончательно

$$\int_0^\infty \frac{x\sin mx}{x^2+a^2}\,dx=\frac{\pi}{2}e^{-ma}. \tag{27}$$

**61. Представление некоторых функций контурными интегралами.** Пользуясь теорией вычетов, можно легко составить контурные интегралы, представляющие прерывные функции.

Рассмотрим, например, функцию $\varphi(t)$, которая равна нулю при $t<0$ и единице при $t>0$, т. е.

$$\varphi(t)=\begin{cases}0 & (t<0),\\ 1 & (t>0).\end{cases} \tag{28}$$

Покажем, что такая функция может быть представлена контурным интегралом вида

$$\varphi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\smile} \frac{e^{itz}}{z}\,dz, \tag{29}$$

причем $t$ входит как параметр под знак интеграла. Контуром интегрирования является вся вещественная ось, причем начало координат $z=0$, являющееся полюсом для подинтегральной функции, обходится по полуокружности малого радиуса, лежащей в нижней полуплоскости и имеющей

центр в начале (рис. 55). Рассмотрим вспомогательный контур $l_R$, который состоит не из всей вещественной оси, но лишь из ее отрезка $(-R, R)$ с обходом начала и из полуокружности $C_R$ в верхней полуплоскости, имеющей центр в начале и радиус $R$. Если $t>0$, то к интегралу (29) применима лемма Жордана, так что интеграл по полуокружности будет стремиться к нулю при возрастании $R$. Подинтегральная функция имеет внутри контура единственный полюс в начале $z=0$ с вычетом, равным единице, так что

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{l_R}\frac{e^{itz}}{z}\,dz=1.$$

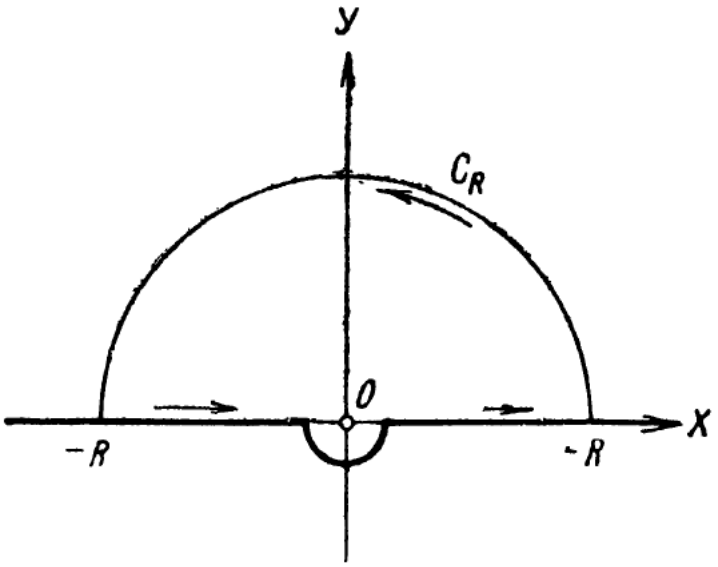



Рис. 55.

Переходя к пределу, мы получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{e^{itz}}{z}\,dz=1 \qquad (t>0).$$

Положим теперь, что $t<0$. Рассмотрим замкнутый контур, состоящий из прежнего отрезка $(-R, R)$ вещественной оси с обходом начала и полуокружности $C'_R$ радиуса $R$, находящейся не в верхней, а в нижней полуплоскости (рис. 56). Внутри этого контура наша функция вовсе не имеет особых точек, а потому интеграл по всему этому контуру будет равен нулю.

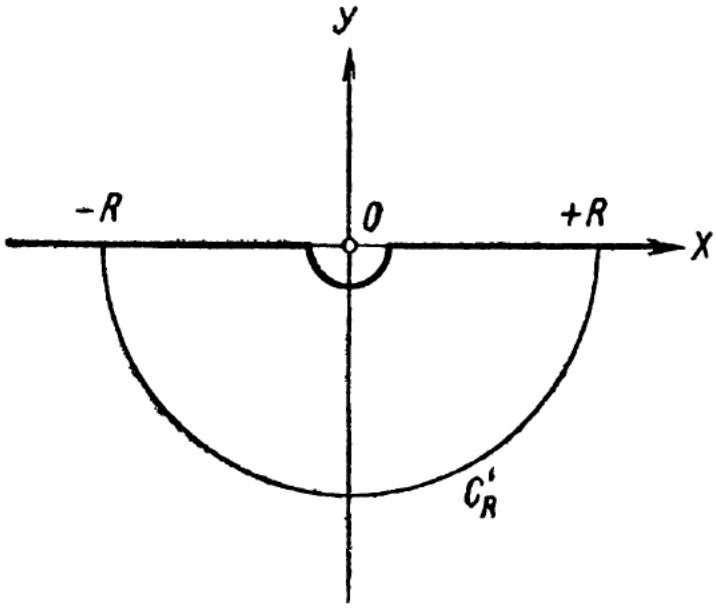



Рис. 56.

Покажем теперь, что при беспредельном возрастании $R$ интеграл по нижней полуокружности будет стремиться к нулю. Действительно, если введем вместо $z$ новую переменную интегрирования $z'=-z$, то нижняя полуокружность $C'_R$ перейдет в верхнюю полуокружность $C_R$, и мы будем иметь

$$\int_{C'_R}\frac{e^{itz}}{z}\,dz=\int_{C_R}\frac{e^{-itz'}}{z'}\,dz'.$$

По условию $t<0$, а следовательно, $-t>0$, и лемма Жордана показывает, что последний интеграл действительно стремится к нулю. Таким образом, переходя к пределу, как и выше, получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{e^{itz}}{z}\,dz=0 \qquad (t<0).$$

Рассмотрим интеграл и при $t=0$. Он будет иметь вид

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{1}{z}\,dz. \tag{30}$$

Рассматривая, как и раньше, отрезок $(-R, R)$ вещественной оси, мы должны будем вычислить приращение $\ln z$ при движении вдоль этого отрезка с обходом начала. На концах пути вещественная часть $\ln z$ будет иметь значение $\ln R$ и, следовательно, не получит никакого приращения. Что же касается мнимой части, равной $i \arg z$, то при обходе начала по полуокружности она получит, очевидно, приращение $\pi i$, а на остальных участках пути остается неизменной. Таким образом, величина интеграла (30) вдоль отрезка $(-R, R)$ равна $\frac{1}{2}$. Следовательно, то же число мы получим и в пределе при $R \to \infty$, т. е.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\cup} \frac{1}{z}\, dz = \frac{1}{2}. \tag{31}$$

В данном случае было существенным, что верхний и нижний пределы стремились к $\infty$, имея одинаковые абсолютные значения, т. е. равенство (31) надо понимать в смысле главного значения интеграла в промежутке $(-\infty, +\infty)$ с обходом $z = 0$. Интеграл (29) при $t \neq 0$ будет сходящимся

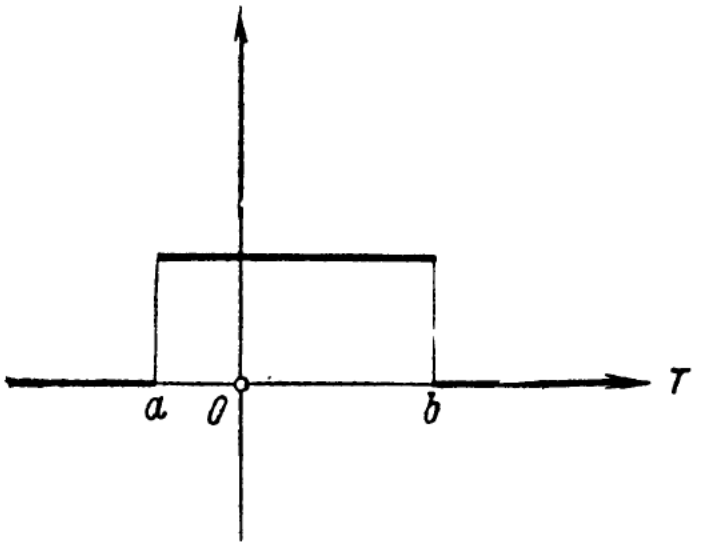



Рис. 57.

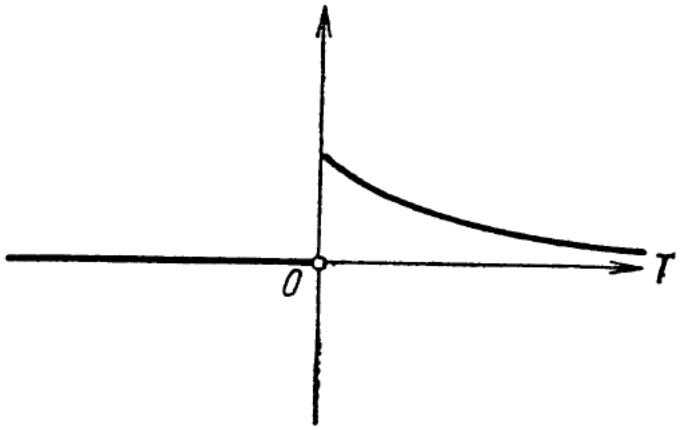



Рис. 58.

в обычном смысле слова относительно бесконечных пределов. Действительно, отделяя вещественную и мнимую части, мы будем иметь интегралы вида

$$\int_a^\infty \frac{\cos tz}{z}\, dz \quad \text{и} \quad \int_a^\infty \frac{\sin tz}{z}\, dz \qquad (a > 0).$$

Сходимость второго из них мы доказали выше [II, 86]. Так же можно доказать и сходимость первого интеграла.

Итак, при $t \neq 0$ интеграл (29) дает функцию (28). При $t = 0$ он существует только в смысле главного значения, и его величина равна $\frac{1}{2}$.

Рассмотрим теперь второй пример, когда функция равна нулю везде, кроме некоторого конечного отрезка, где она обращается в единицу, т. е.

$$\psi(t) = 0 \text{ при } t < a \text{ и } t > b; \quad \psi(t) = 1 \text{ при } a < t < b. \tag{32}$$

Нетрудно представить эту функцию как разность двух функций указанного типа, а именно:

$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\cup} \frac{e^{i(b-t)z}}{z}\, dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\cup} \frac{e^{i(a-t)z}}{z}\, dz. \tag{33}$$

Оба члена обращаются в нуль при $t > b$. В промежутке $a < t < b$ уменьшаемое равно единице, а вычитаемое еще равно нулю, и, следовательно, вся

разность равна единице. Наконец, при $t < a$ и уменьшаемое и вычитаемое равны единице, а вся разность обращается в нуль, так что мы действительно получаем функцию (32). График этой функции указан на рис. 57.

Рассмотрим теперь функцию, которая равна нулю при $t < 0$, а затем, начиная с $t = 0$, убывает по показательному закону от значения, равного единице:

$$\varphi_1(t) = 0 \quad (t < 0); \quad \varphi_1(t) = e^{-\alpha t} \quad (t > 0,\ \alpha > 0). \tag{34}$$

График этой функции изображен на рис. 58. Нетрудно проверить, что эта функция может быть представлена контурным интегралом вида

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itz}}{z - i\alpha}\, dz, \tag{35}$$

где контур интегрирования идет по вещественной оси. Доказательство этой формулы будет буквально таким же, как и для формулы (29). В данном случае только вычет функции

$$\frac{e^{itz}}{z - i\alpha}$$

в полюсе $z = i\alpha$ будет равен $e^{-\alpha t}$.

Рассмотрим наконец функцию, равную нулю при $t < 0$ и представляющуюся синусоидой при $t > 0$ (рис. 59):

$$\left.\begin{aligned} &\psi_1(t) = 0 && \text{при } t < 0; \\ &\psi_1(t) = \sin \alpha t && \text{при } t > 0 \ (\alpha \text{ — вещественно}). \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Так же, как и выше, нетрудно показать, что эту последнюю функцию можно представить в виде контурного интеграла

$$\psi_1(t) = \operatorname{Re}\left[-\frac{1}{2\pi} \int_{\cup} \frac{e^{itz}}{z - \alpha}\, dz\right], \tag{37}$$

где контур интегрирования идет по вещественной оси и обходит полюс $z = \alpha$ подинтегральной функции. В данном случае вычет подинтегральной функции в этом полюсе будет равен

$$e^{it\alpha} = \cos \alpha t + i \sin \alpha t,$$

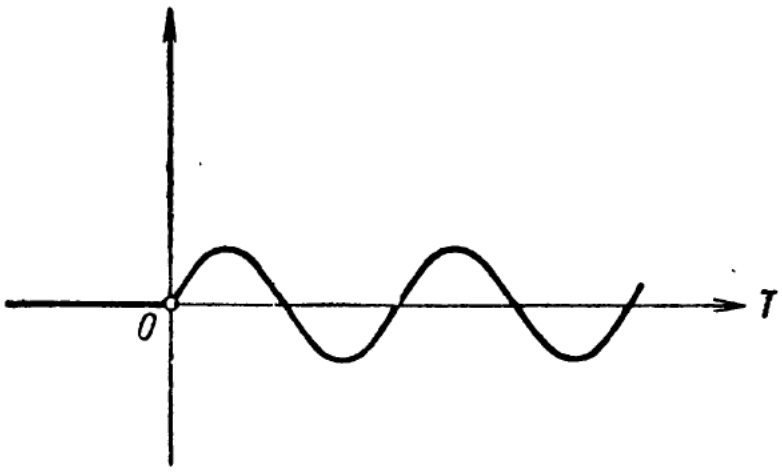



Рис. 59.

так что, отделяя вещественную часть, мы и получаем формулу (37).

Иногда выведенные формулы пишут в другом виде, а именно применяют интегрирование не по вещественной, а по мнимой оси, причем обход полюса совершается с правой стороны, т. е. с той стороны от мнимой оси, где вещественная часть комплексного числа положительна. Чтобы получить этот новый контур интегрирования, достаточно повернуть плоскость вокруг начала на угол $\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки, т. е. ввести вместо $z$ новую переменную $z'$ по формуле $z' = iz$ или $z = \frac{1}{i} z'$. Вводя эту новую переменную, мы вместо

формулы (29) будем иметь

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{e^{tz'}}{z'}\,dz'. \tag{29'}$$

В формуле (35) мы будем иметь значение $i\alpha$ уже не на мнимой оси, а на отрицательной части вещественной оси, и таким образом получим для функции $\varphi_1(t)$ представление вида

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty i}^{+\infty i} \frac{e^{tz'}}{z'+\alpha}\,dz'. \tag{35$_1$}$$

Точно так же для функции $\psi_1(t)$ будем иметь представление вида

$$\psi_1(t) = \operatorname{Re}\left[-\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma} \frac{e^{tz'}}{z'-i\alpha}\,dz'\right].$$

Содержание настоящего номера непосредственно связано с так называемым преобразованием Лапласа, о котором мы будем говорить в томе IV.

**62. Примеры интегралов от многозначных функций.** Рассмотрим некоторые примеры, когда под знаком интеграла стоят многозначные функции комплексного переменного. В качестве первого примера возьмем интеграл

$$\int_{l} (-z)^{a-1} Q(z)\,dz, \tag{38}$$

где $a$ — некоторое вещественное число и $Q(z)$ — рациональная функция, такая, что $z^a Q(z) \to 0$, если $z \to 0$ или $z \to \infty$. Подинтегральная функция будет многозначной, так как при обходе точки $z = 0$ против часовой стрелки $(-z)$ совершает такой же обход, и, следовательно, аргумент этого выражения приобретает слагаемое $2\pi$; само это выражение приобретает множитель $e^{2\pi i}$, и $(-z)^{a-1}$ в результате обхода будет иметь вид $(-z)^{a-1}e^{2(a-1)\pi i}$, т. е. в данном случае функция приобретает множитель $e^{2(a-1)\pi i}$, отличный от единицы, если $a$ не целое число. Таким образом, начало координат является точкой разветвления нашей подинтегральной функции. Чтобы сделать функцию однозначной, проведем из точки $z = 0$ разрез вдоль положительной части вещественной оси. На разрезанной таким образом плоскости $T$ наша подинтегральная функция будет уже однозначной, и, чтобы определить ее вполне, нам надо задать аргумент $(-z)$ в какой-либо точке плоскости $T$. Согласимся, например, считать, что на верхнем берегу разреза, где $z$ положительно, аргумент отрицательного числа $(-z)$ равен $(-\pi)$. При обходе по замкнутому контуру вокруг начала мы попадаем с верхнего берега разреза на нижний, причем аргумент $(-z)$ получает дополнительное слагаемое $2\pi$, так что мы должны считать на нижнем берегу разреза аргумент $(-z)$ равным $\pi$. Обозначая модуль величины $z$ через $x$, будем иметь

$$(-z) = xe^{-i\pi} \text{ на верхнем берегу,}$$
$$(-z) = xe^{i\pi} \text{ на нижнем берегу}$$

и, следовательно,

$$(-z)^{a-1} = x^{a-1}e^{-i(a-1)\pi} \text{ на верхнем берегу,}$$
$$(-z)^{a-1} = x^{a-1}e^{i(a-1)\pi} \text{ на нижнем берегу.} \tag{39}$$

Выберем теперь контур $l$ интегрирования для интеграла (38). Возьмем за контур интегрирования замкнутую кривую, состоящую из следующих четырех частей: отрезка $(\varepsilon, R)$ верхнего берега разреза, окружности $C_R$ с центром в начале и радиусом $R$, пробегаемой против часовой стрелки, отрезка $(R, \varepsilon)$ нижнего берега разреза и, наконец, окружности $C_\varepsilon$ с центром в начале и радиусом $\varepsilon$, пробегаемой по часовой стрелке (рис. 60). Чтобы иметь возможность интегрировать по положительной части вещественной оси, будем предполагать, что рациональная дробь $Q(z)$ не имеет полюсов на положительной части вещественной оси. Согласно основной теореме о вычетах, величина интеграла (38) будет равна произведению $2\pi i$ на сумму вычетов подинтегральной функции относительно всех полюсов рациональной дроби $Q(z)$, которые будут в то же время и полюсами для подинтегральной функции. Мы при этом считаем, что $\varepsilon$ взято настолько малым и $R$ настолько большим, что все упомянутые полюсы находятся внутри области, ограниченной нашим контуром интегрирования. Покажем теперь, что интегралы по окружностям $C_R$ и $C_\varepsilon$ стремятся к нулю при $R \to \infty$ и $\varepsilon \to 0$. Действительно, применяя обычную оценку, будем иметь

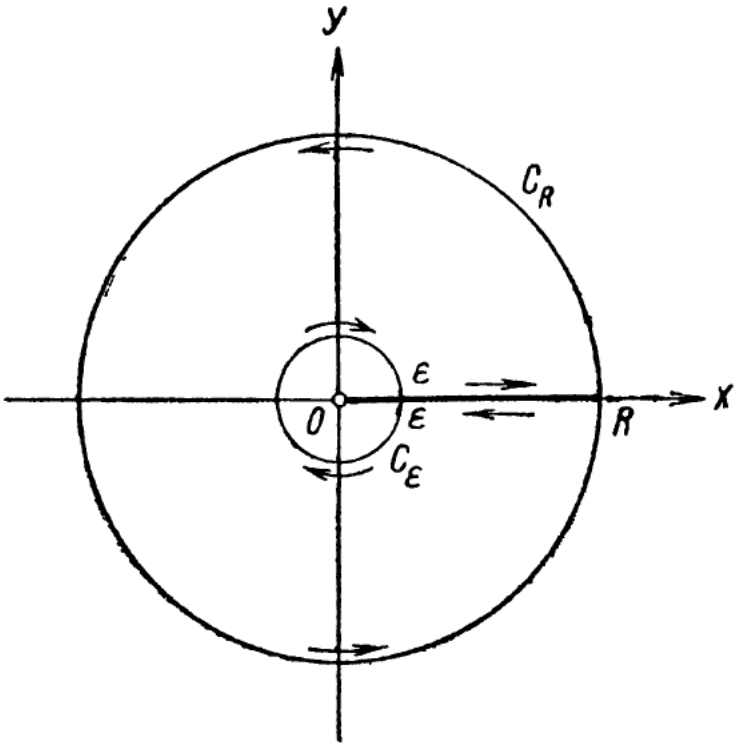



Рис. 60.

$$\left| \int_{C_R} (-z)^{a-1} Q(z)\, dz \right| \leqslant 2\pi R \cdot R^{a-1} \max_{\text{на } C_R} |Q(z)| = 2\pi R^a \max_{\text{на } C_R} |Q(z)|.$$

Но по условию $z^a Q(z) \to 0$ при $|z| \to \infty$, и, следовательно, выражение, стоящее справа, действительно стремится к нулю при $R \to \infty$. Точно так же на окружности $C_\varepsilon$ будем иметь оценку

$$\left| \int_{C_\varepsilon} (-z)^{a-1} Q(z)\, dz \right| < 2\pi \varepsilon^a \max_{\text{на } C_\varepsilon} |Q(z)|,$$

и так как по условию $z^a Q(z) \to 0$ при $z \to 0$, то последнее выражение также стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Таким образом, в пределе у нас останутся лишь интегралы по верхнему и нижнему берегам разреза, причем значение подинтегральной функции на этих двух берегах определяется по формулам (39), и это дает нам следующую формулу:

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ R \to \infty}} \int_{\varepsilon}^{R} \left[ x^{a-1} e^{-i\pi(a-1)} Q(x) - x^{a-1} e^{i\pi(a-1)} Q(x) \right] dx = 2\pi i \sum r,$$

где через $\Sigma r$ мы обозначили сумму вычетов функции $(-z)^{a-1} Q(z)$ относительно всех ее полюсов, лежащих на конечном расстоянии.

Принимая во внимание, что $e^{-i\pi} = e^{i\pi} = -1$, можно переписать предыдущую формулу в виде

$$(e^{i\pi a} - e^{-i\pi a}) \int_0^\infty x^{a-1} Q(x)\, dx = 2\pi i \sum r$$

или (согласно формулам Эйлера)

$$\int_0^\infty x^{a-1}Q(x)\,dx = \frac{\pi}{\sin a\pi}\sum r. \tag{40}$$

Формула (40) дает возможность вычислить многие определенные интегралы, для которых первообразная функция не выражается в конечном виде. Напомним еще раз те условия, которым должна подчиняться функция $Q(z)$ для того, чтобы эта формула имела место. *Функция $Q(z)$ должна быть рациональной дробью, которая не имеет полюсов на положительной части вещественной оси и, кроме того, удовлетворяет условиям:*

$$z^aQ(z) \to 0 \quad \text{при} \quad z \to 0 \quad \text{и} \quad z \to \infty.$$

Рассмотрим в качестве частного примера интеграл

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx \quad (0 < a < 1). \tag{41}$$

В данном случае, как нетрудно видеть, функция

$$Q(z) = \frac{1}{1+z}$$

удовлетворяет всем поставленным выше условиям и имеет единственный полюс $z = -1$. В этом полюсе функция

$$\frac{(-z)^{a-1}}{1+z}$$

будет иметь вычет, который вычисляется по правилу: числитель делить на производную от знаменателя, т. е. этот вычет будет равен

$$r = (-z)^{a-1}\big|_{z=-1}.$$

Заметим, что при вычислении значения функции $(-z)^{a-1}$ в точке $z = -1$, мы должны руководиться тем определением этой многозначной функции, которое было дано выше, а именно на верхнем берегу разреза аргумент $(-z)$ равен $(-\pi)$, и, следовательно, при полуобходе вокруг начала на отрицательной части вещественной оси аргумент $(-z)$ будет равен нулю. Иначе говоря,

$$r = 1.$$

Окончательно для интеграла (41), согласно формуле (40), получаем следующее значение:

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin a\pi}. \tag{42}$$

В качестве следующего примера интеграла от многозначной функции возьмем

$$\int_{z_1}^{z_2} \sqrt{A + 2\frac{B}{z} + \frac{C}{z^2}}\,dz, \tag{43}$$

причем мы считаем, что трехчлен $A+2\frac{B}{z}+\frac{C}{z^2}$ имеет вещественные коэффициенты и вещественные различные корни $z=z_1$ и $z=z_2$, где $0<z_1<z_2$.

Будем считать, кроме того, что $A<0$, откуда непосредственно следует, что трехчлен будет положительным при $z_1<z<z_2$. В (43) интегрирование совершается по отрезку $z_1\leqslant z\leqslant z_2$ вещественной оси, и радикал считается положительным на этом отрезке. Подинтегральная функция

$$\sqrt{A+2\frac{B}{z}+\frac{C}{z^2}}=\frac{\sqrt{A(z-z_1)(z-z_2)}}{z} \tag{44}$$

будет иметь в точках $z_1$ и $z_2$ точки разветвления первого порядка. Если мы проведем разрез вдоль отрезка $(z_1, z_2)$ вещественной оси, то функция (44) будет регулярной и однозначной на разрезанной таким образом плоскости $T$ [19].

равным $\frac{\pi}{2}$. Иначе говоря, функцию (44) надо считать положительно мнимой на отрезке $(z_2, +\infty)$ вещественной оси. (Положительно мнимым мы называем число $ai$ при $a>0$.) Из (46) при этом следует, что радикал $\sqrt{A}$ надо считать положительно мнимым.

Совершенно так же, чтобы попасть с нижнего берега отрезка $(z_1, z_2)$ на отрезок $(0, z_1)$, надо обойти точку $z=z_1$ по часовой стрелке, и после такого обхода аргумент выражения (44) будет $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, т. е. это выражение будет отрицательно мнимым на отрезке $(0, z_1)$.

Напишем теперь разложение функции (44) вблизи $z=0$:

$$\sqrt{A+2\frac{B}{z}+\frac{C}{z^2}}=\frac{\sqrt{C}}{z}\left[1+\left(2\frac{Bz}{C}+\frac{Az^2}{C}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

или, согласно биному Ньютона,

$$\sqrt{A+2\frac{B}{z}+\frac{C}{z^2}}=\frac{\sqrt{C}}{z}\left(1+\frac{B}{C}z+\ldots\right), \tag{47}$$

и, согласно предыдущим рассуждениям, $\sqrt{C}$ надо считать отрицательно мнимым. Напомним, что по условию $A<0$ и из равенства $z_2>z_1>0$ вытекает, что и $C<0$.

Согласно теореме Коши, интеграл от функции (44) по большому замкнутому контуру $L$ в окрестности $z=\infty$ равен сумме интегралов по контуру $l$, упомянутому выше, и по контуру $\lambda$, обходящему вокруг $z=0$, причем каждый из интегралов берется против часовой стрелки. Интегралы по $L$ и $\lambda$ равны произведению $2\pi i$ на коэффициент при $z^{-1}$ в разложениях (46) и (47), и, следовательно,

$$\int_l \sqrt{A+2\frac{B}{z}+\frac{C}{z^2}}\,dz=2\pi i\left(\frac{B}{\sqrt{A}}-\sqrt{C}\right),$$

и фрмула (45) дает нам окончательно значение нашего интеграла (43):

$$J=\int_{z_1}^{z_2}\sqrt{A+2\frac{B}{z}+\frac{C}{z^2}}\,dz=\pi i\left(\frac{B}{\sqrt{A}}-\sqrt{C}\right). \tag{48}$$

**63. Интегрирование системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами.** Изложим теперь применение теории вычетов к задаче интегрирования системы линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами. Рассмотрим такую систему:

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n,\\ x_2' &= a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_n' &= a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n, \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

где $a_{ik}$ — постоянные коэффициенты и через $x_s'$ мы обозначили производные от искомых функций $x_s$ по независимой переменной $t$. Будем искать решение этой системы в следующем виде:

$$x_s = \sum_R \varphi_s(z)\, e^{tz} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{50}$$

где $\varphi_s(z)$ суть искомые рациональные функции от $z$, и символом

$$\sum_R f(z)$$

мы обозначаем здесь и в дальнейшем сумму вычетов функции $f(z)$ относительно всех особых точек, лежащих на конечном расстоянии. В формулах (50) функции, стоящие под знаком суммы вычетов, зависят не только от комплексного переменного $z$, относительно которого и рассчитываем вычеты, но и от вещественного параметра $t$, так что и сумма вычетов будет, вообще говоря, функцией этого параметра $t$. Так как $z$ и $t$ совершенно независимы между собой, то можно при дифференцировании функции (50) по $t$ производить дифференцирование под знаком суммы вычетов, т. е. мы будем иметь один и тот же результат, если сначала продифференцируем функцию

$$\varphi_s(z)\, e^{tz} \tag{51}$$

по $t$ и потом возьмем сумму ее вычетов, или если сначала возьмем сумму вычетов функции (51), а затем полученный результат продифференцируем по $t$. Таким образом, наряду с формулами (50), имеем и следующие формулы:

$$x_s' = \sum_R z\varphi_s(z)\, e^{tz} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n). \tag{52}$$

Подставим все это в нашу систему (49) и соберем все члены в одну часть:

$$\sum_R [(a_{11} - z)\varphi_1(z) + a_{12}\varphi_2(z) + \ldots + a_{1n}\varphi_n(z)]\, e^{tz} = 0,$$

$$\sum_R [a_{21}\varphi_1(z) + (a_{22} - z)\varphi_2(z) + \ldots + a_{2n}\varphi_n(z)]\, e^{tz} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sum_R [a_{n1}\varphi_1(z) + a_{n2}\varphi_2(z) + \ldots + (a_{nn} - z)\varphi_n(z)]\, e^{tz} = 0.$$

Эти равенства будут наверно удовлетворены, если мы приравняем выражения, стоящие в квадратных скобках, произвольным

постоянным, так как при этом под знаком суммы вычетов мы будем иметь функции вида $Ce^{tz}$, которые не имеют вовсе особых точек на конечном расстоянии. Обозначая упомянутые произвольные постоянные через $-C_1, -C_2, \ldots, -C_n$, получим для определения функций $\varphi_s(z)$ систему обыкновенных алгебраических уравнений первой степени

$$\begin{aligned}
(a_{11}-z)\varphi_1(z)+\quad & a_{12}\varphi_2(z)+\ldots+a_{1n}\varphi_n(z)=-C_1,\\
a_{21}\varphi_1(z)+(a_{22}-z)\varphi_2(z)+\ldots+&\ a_{2n}\varphi_n(z)=-C_2,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\\
a_{n1}\varphi_1(z)+a_{n2}\varphi_2(z)+\ldots+&(a_{nn}-z)\varphi_n(z)=-C_n.
\end{aligned}$$

Будем решать эту систему по формулам Крамера

$$\varphi_s(z)=\frac{\Delta_s(z)}{\Delta(z)} \qquad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{53}$$

где

$$\Delta(z)=\begin{vmatrix} a_{11}-z, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n}\\ a_{21}, & a_{22}-z, & \ldots, & a_{2n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn}-z \end{vmatrix} \tag{54}$$

и $\Delta_s(z)$ получается заменой в определителе $\Delta(z)$ элементов $s$-го столбца свободными членами $(-C_k)$. Заметим, что определитель $\Delta(z)$ представляет собою левую часть известного нам векового уравнения [$III_1$, 17]. Остается теперь подставить выражения (53) в формулу (50).

Произведя указанные подстановки, найдем решение нашей системы в виде

$$x_s=\sum_R \frac{\Delta_s(z)}{\Delta(z)}e^{tz} \qquad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{55}$$

где значения $\Delta(z)$ и $\Delta_s(z)$ объяснены выше.

Покажем теперь, что полученное нами решение удовлетворяет начальным условиям

$$x_1|_{t=0}=C_1;\quad x_2|_{t=0}=C_2;\quad \ldots;\quad x_n|_{t=0}=C_n. \tag{56}$$

Проверим это лишь для $x_1$. Имеем

$$x_1|_{t=0}=\sum_R \frac{\Delta_1(z)}{\Delta(z)}. \tag{57}$$

Знаменатель написанной дроби определяется по формуле (54) и представляет собою, очевидно, полином степени $n$ со старшим

членом $(-1)^n z^n$. Числитель дроби, входящей в формулу (57), будет иметь вид

$$\Delta_1(z)=\begin{vmatrix} -C_1, & a_{12}, & \dots, & a_{1n} \\ -C_2, & a_{22}-z, & \dots, & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -C_n, & a_{n2}, & \dots, & a_{nn}-z \end{vmatrix}.$$

Раскрывая по элементам первого столбца, нетрудно убедиться, что это будет полином степени $(n-1)$ со старшим членом $(-1)^n C_1 z^{n-1}$, и, таким образом, можно переписать формулу (57) в виде

$$x_1|_{t=0}=\sum_R \frac{(-1)^n C_1 z^{n-1}+\dots}{(-1)^n z^n+\dots}, \tag{58}$$

где точками мы обозначили члены полиномов низшей степени, которые в дальнейших вычислениях никакой роли играть не будут.

Установим теперь некоторое общее предложение, касающееся суммы вычетов рациональной дроби.

Лемма. *Сумма вычетов рациональной дроби относительно ее полюсов, лежащих на конечном расстоянии, равна коэффициенту при $z^{-1}$ в разложении рациональной дроби в окрестности бесконечно далекой точки.*

Действительно, положим, что наша рациональная дробь имеет в окрестности бесконечно далекой точки разложение вида

$$f(z)=\sum_k b_k z^k. \tag{59}$$

Рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} f(z)\,dz,$$

где $C_R$ — окружность с центром в начале и радиусом $R$. При достаточно большом $R$ все полюсы $f(z)$ будут находиться внутри $C_R$, и интеграл будет давать сумму вычетов в этих полюсах. С другой стороны, при достаточно больших $R$ окружность $C_R$ будет находиться в окрестности бесконечно далекой точки, и мы можем для вычисления интеграла применить разложение (59), откуда будет непосредственно следовать, что величина этого интеграла равна $b_{-1}$, что и доказывает лемму.

Замечание. Выше [17] мы назвали коэффициент $b_{-1}$ в разложении (59) с обратным знаком вычетом функции $f(z)$ в бесконечно далекой точке, т. е. этот вычет считаем равным $(-b_{-1})$. Поэтому нашу лемму можно формулировать следующим образом: *сумма вычетов рациональной дроби во всех ее полюсах, включая и бесконечно далекую точку, равна нулю.*

Применим теперь доказанную лемму к выражению (58). Заметим, что в окрестности бесконечно далекой точки мы имеем очевидное для написанной дроби разложение вида

$$\frac{(-1)^n C_1 z^{n-1} + \dots}{(-1)^n z^n + \dots} = \frac{C_1}{z} + \frac{\beta_2}{z^2} + \dots,$$

и доказанная лемма дает нам непосредственно $x_1|_{t=0} = C_1$, точно так же можно показать, что $x_s|_{t=0} = C_s$. Итак, решение, даваемое формулой (55), удовлетворяет начальным условиям (56), т. е. произвольные постоянные $C_s$, входящие в полиномы $\Delta_s(z)$, играют роль начальных условий. Отсюда непосредственно следует, что наши формулы (55) дают общий интеграл системы.

Пример. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} x_1' &= \quad x_2 + x_3 \\ x_2' &= x_1 \quad + x_3 \\ x_3' &= x_1 + x_2. \end{aligned}$$

В данном случае

$$\Delta(z) = \begin{vmatrix} -z, & 1, & 1 \\ 1, & -z, & 1 \\ 1, & 1, & -z, \end{vmatrix},$$

или

$$\Delta(z) = -z(z^2-1) + 2(z+1) = (z+1)(-z^2+z+2),$$

и для первой из искомых функций получим формулу

$$x_1 = \sum_R \frac{\begin{vmatrix} -C_1, & 1, & 1 \\ -C_2, & -z, & 1 \\ -C_3, & 1, & -z \end{vmatrix}}{(z+1)(-z^2+z+2)} e^{tz}$$

или, разлагая определитель и сокращая на $(1+z)$,

$$x_1 = \sum_R \frac{C_1(1-z) - C_2 - C_3}{-z^2+z+2} e^{tz}.$$

Знаменатель имеет корни $z=-1$ и $z=2$. Определяя вычеты в этих точках по обычному правилу: числитель на производную от знаменателя, получим

$$x_1 = \left(\frac{2}{3}C_1 - \frac{1}{3}C_2 - \frac{1}{3}C_3\right)e^{-t} + \left(\frac{1}{3}C_1 + \frac{1}{3}C_2 + \frac{1}{3}C_3\right)e^{2t}.$$

Заметим, что в данном случае полином $\Delta(z)$ имеет двойной корень $z=-1$, и все же в выражении $x_1$ множитель при $e^{-t}$ представляет собою не полином первой степени от $t$, но просто постоянную.

В случае системы неоднородных уравнений (вынужденные колебания)

$$x_s' = a_{s1}x_1 + \ldots + a_{sn} + f_s(t) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{60}$$

где $f_s(t)$ — заданные функции от $t$, надо искать решение в виде

$$x_s = -\sum_R \frac{C_1(t)\, A_{1s}(z) + \ldots + C_n(t)\, A_{ns}(z)}{\Delta(z)} e^{tz}, \tag{61}$$

где $A_{ik}(z)$ — алгебраические дополнения элементов определителя $\Delta(z)$ и $C_k(t)$ — искомые функции $t$ (метод вариации произвольных постоянных) [II, 26]. Подставляя (61) в (60) и принимая во внимание, что при произвольных постоянных $C_k$ формулы (61) дают решение однородной системы, получим уравнения для производных $C_k'(t)$:

$$-\sum_R \frac{C_1'(t)\, A_{1s}(z) + \ldots + C_n'(t)\, A_{ns}(z)}{\Delta(z)} e^{tz} = f_s(t)$$

$$(s = 1, 2, \ldots, n). \tag{62}$$

Покажем, что мы можем удовлетворить этой системе, полагая

$$C_1'(t) = e^{-tz} f_1(t); \ \ldots; \ C_n'(t) = e^{-tz} f_n(t). \tag{63}$$

Действительно, подставляя, получим в левой части (62)

$$-\sum_R \frac{f_1(t)\, A_{1s}(z) + \ldots + f_n(t)\, A_{ns}(z)}{\Delta(z)}. \tag{64}$$

Если $i \neq k$, то при образовании алгебраического дополнения $A_{ik}(z)$ будут вычеркнуты два элемента $(a_{ii} - z)$ и $(a_{kk} - z)$, стоящие на главной диагонали определителя $\Delta(z)$, и, следовательно, $A_{ik}(z)$ будет полиномом степени $(n-2)$ от $z$. В силу доказанной выше леммы

$$\sum_k \frac{A_{ik}(z)}{\Delta(z)} = 0 \qquad (i \neq k),$$

ибо разложение $A_{ik}(z) : \Delta(z)$ в окрестности бесконечности начнется с члена $\frac{a}{z^2}$ и, следовательно, не будет содержать члена с $z^{-1}$.

Алгебраическое дополнение $A_{ii}(z)$ будет полиномом $(n-1)$-й степени со старшим коэффициентом $(-1)^{n-1} z^{n-1}$ (см. выше) и, следовательно,

$$-\sum_R \frac{A_{ii}(z)}{\Delta(z)} = 1.$$

Из этого непосредственно следует, что предыдущие выражения (64) равны $f_s(t)$. Формулы для $C_k'(t)$ дают

$$C_k(t) = \int_0^t e^{-\tau z} f_k(\tau)\, d\tau \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{65}$$

причем мы выбираем постоянную интегрирования так, чтобы $C_k(0) = 0$ (чисто вынужденные колебания).

Подставляя в (61), получаем окончательно

$$x_s = -\sum_R \int_0^t \frac{f_1(\tau)\, A_{1s}(z) + \ldots + f_n(\tau)\, A_{ns}(z)}{\Delta(z)}\, e^{(t-\tau)z} d\tau.$$

**64. Разложение дробной функции на простейшие дроби.** Мы применим сейчас основную теорему о вычетах к задаче разложения функции в бесконечный ряд. Пусть $f(z)$ — функция, регулярная и однозначная на всей плоскости, кроме отдельных изолированных точек, которые являются ее полюсами. Такая функция называется обычно *дробной, или мероморфной функцией.* Примером дробной функции является рациональная дробь. В качестве второго примера приведем функцию $\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$, которая имеет своими полюсами те точки, где $\sin z$ обращается в нуль.

Последняя мероморфная функция имеет бесчисленное множество полюсов. Заметим, что если мероморфная функция имеет бесчисленное множество полюсов, то во всякой ограниченной части $B$ плоскости их должно быть во всяком случае конечное число. Действительно, в противном случае мы имели бы в $B$ хоть одну предельную точку этих полюсов, т. е. такую точку $z = c$, что в любом малом круге с центром $z = c$ находится бесчисленное множество полюсов функции $f(z)$. Эта точка $z = c$ была бы особой точкой $f(z)$, отличной от полюса, так как из определения [17] полюса вытекает, что он должен быть изолированной особой точкой. Но, по условию, $f(z)$ не имеет других особых точек, кроме полюсов. Раз в любой ограниченной части плоскости полюсов конечное число, то мы можем их пронумеровать в порядке неубывающего модуля, так что, обозначая полюсы через $a_k$, будем иметь

$$|a_1| \leqslant |a_2| \leqslant |a_3| \leqslant \ldots,$$

причем $|a_n| \to +\infty$ при беспредельном возрастании $n$. В каждом полюсе $z = a_k$ наша функция будет иметь определенную бесконечную часть, которая будет представлять собою полином относительно аргумента $\frac{1}{z - a_k}$ без свободного члена [17]. Обозначим этот полином через

$$G_k\left(\frac{1}{z - a_k}\right) \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{66}$$

Покажем теперь, что при некоторых дополнительных предположениях дробная функция $f(z)$ представляется простым бесконечным рядом, члены которого выражаются через бесконечные части (66). Формулируем то условие, которое мы налагаем на функцию $f(z)$. Положим, что имеется последовательность замкнутых контуров $C_n$, обходящих вокруг начала, и таких, что всякий контур $C_n$ находится внутри $C_{n+1}$. Пусть $l_n$ — длина контура $C_n$ и $\delta_n$ — его кратчайшее расстояние от начала. Мы будем считать, что $\delta_n \to \infty$, т. е. что контуры $C_n$ при увеличении $n$ беспредельно расширяются по всем направлениям. Кроме того, будем считать, что отношение $l_n : \delta_n$ остается ограниченным при беспредельном увеличении $n$, т. е. существует такое положительное число $m$, что

$$\frac{l_n}{\delta_n} \leqslant m. \tag{67}$$

Если, например, $C_n$ суть окружности с центром в начале и радиусом $r_n$, то $l_n = 2\pi r_n$ и $\delta_n = r_n$, так что $l_n : \delta_n = 2\pi$. Предположим теперь относительно нашей дробной функции $f(z)$, что она остается ограниченной по модулю на всех контурах $C_n$, т. е., иными словами, существует такое положительное число $M$, что на любом контуре $C_n$ выполняется неравенство

$$|f(z)| \leqslant M \quad (\text{на } C_n). \tag{68}$$

Рассмотрим интеграл вида

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{f(z')}{z' - z}\, dz', \tag{69}$$

где интегрирование совершается в положительном направлении, а точка $z$ находится внутри $C_n$ и отлична от $a_k$. Введем в рассмотрение сумму бесконечных частей, относящуюся к тем полюсам $a_k$, которые лежат внутри $C_n$:

$$\omega_n(z) = \sum_{(C_n)} G_k\left(\frac{1}{z - a_k}\right), \tag{70}$$

где знак $(C_n)$, помещенный внизу знака суммы, обозначает, что суммирование надо производить лишь по тем полюсам, которые находятся внутри $C_n$.

Подинтегральная функция интеграла (69), как функция от $z'$, имеет внутри $C_n$ простой полюс $z' = z$, происходящий от обращения в нуль знаменателя, и полюсы $z' = a_k$, происходящие от бесконечных частей $f(z')$. Вычет в полюсе $z' = z$ определяется по правилу: числитель на производную от знаменателя:

$$\left.\frac{f(z')}{(z' - z)'}\right|_{z'=z} = \left.\frac{f(z')}{1}\right|_{z'=z} = f(z).$$

Вычеты в полюсах $z'=a_k$ будут такими же, что и у функции

$$\frac{\omega_n(z')}{z'-z}. \tag{71}$$

В этой последней функции $\omega_n(z')$ представляет собою рациональную дробь, у которой степень числителя ниже степени знаменателя и все полюсы которой находятся внутри $C_n$. Покажем, что при этом сумма вычетов функции (71) относительно полюсов $a_k$ будет

$$-\omega_n(z)=-\sum_{(C_n)} G_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right). \tag{72}$$

Действительно, функция (71) есть рациональная дробь от $z'$, у которой степень знаменателя по крайней мере на две единицы выше степени числителя, так как $\omega_n(z')$ есть уже рациональная дробь, у которой степень знаменателя выше степени числителя. В окрестности $z'=\infty$ мы имеем, следовательно, разложение вида

$$\frac{\omega_n(z')}{z'-z}=\frac{a_2}{z'^2}+\frac{a_3}{z'^3}+\dots,$$

и интеграл по окружности достаточно большого радиуса от функции (71) будет равен нулю, т. е. будет равна нулю сумма вычетов функции (71) во всех ее полюсах, находящихся на конечном расстоянии. Ее вычет в точке $z'=z$ равен, очевидно, $\omega_n(z)$, и, следовательно, сумма вычетов в остальных полюсах $a_k$ равна выражению (72). Применяя к интегралу (69) основную теорему о вычетах, получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\frac{f(z')}{z'-z}\,dz'=f(z)-\sum_{(C_n)} G_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right).$$

Положим в этой формуле $z=0$, причем мы считаем, что эта точка $z=0$ не есть полюс $f(z)$:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\frac{f(z')}{z'}\,dz'=f(0)-\sum_{(C_n)} G_k\left(-\frac{1}{a_k}\right).$$

Вычитая это равенство из предыдущего, будем иметь

$$\frac{z}{2\pi i}\int_{C_n}\frac{f(z')}{z'(z'-z)}\,dz'=f(z)-f(0)-\sum_{(C_n)}\left[G_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)-G_k\left(-\frac{1}{a_k}\right)\right]. \tag{73}$$

Покажем теперь, что интеграл, стоящий в левой части последнего равенства, стремится к нулю при беспредельном возрастании $n$. Действительно, принимая во внимание, что

$$|z'|\geqslant\delta_n \quad\text{и}\quad |z'-z|\geqslant|z'|-|z|\geqslant\delta_n-|z|,$$

получим в силу (68)

$$\left|\int_{C_n}\frac{f(z')}{z'(z'-z)}\,dz'\right|\leqslant\frac{Ml_n}{\delta_n(\delta_n-|z|)}$$

или в силу (67)

$$\left|\int_{C_n}\frac{f(z')}{z'(z'-z)}\,dz'\right|<\frac{Mm}{\delta_n-|z|},$$

откуда непосредственно вытекает, что интеграл стремится к нулю, так как $\delta_n\to\infty$. Таким образом, формула (73) дает в пределе

$$f(z)-f(0)-\lim_{n\to\infty}\sum_{(C_n)}\left[G_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)-G_k\left(-\frac{1}{a_k}\right)\right]=0,$$

или

$$f(z)=f(0)+\lim_{n\to\infty}\sum_{(C_n)}\left[G_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)-G_k\left(-\frac{1}{a_k}\right)\right]. \tag{74}$$

При беспредельном увеличении $n$ контур $C_n$ по условию беспредельно расширяется, и внутрь $C_n$ попадают все новые и новые полюсы $a_k$, так что в пределе будем иметь в правой части (74) бесконечный ряд, и формула (74) дает представление $f(z)$ в виде бесконечного ряда

$$f(z)=f(0)+\sum_{k=1}^{\infty}\left[G_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)-G_k\left(-\frac{1}{a_k}\right)\right]. \tag{75}$$

Строго говоря, мы должны, согласно (74), в бесконечном ряде (75) соединять в один член те слагаемые, которые относятся к полюсам, лежащим между $C_n$ и $C_{n+1}$. Но если мы убедимся, что ряд (75) сходится и без такой группировки его членов, то можем, очевидно, рассматривать в формуле (75) бесконечный ряд обычным образом.

Если вместо условия (68), которое утверждает ограниченность модуля функции $f(z)$ на контурах $C_n$, мы имеем более широкое условие, а именно условие, что $f(z)$ на контурах $C_n$ растет не быстрее некоторой целой положительной степени $z^p$, т. е. что на всех контурах $C_n$ имеет место неравенство

$$\left|\frac{f(z)}{z^p}\right|\leqslant M \qquad (\text{на } C_n),$$

то вместо формулы (75) будет иметь место следующая формула разложения:

$$f(z)=f(0)+\frac{f'(0)}{1}z+\ldots+\frac{f^{(p)}(0)}{p!}z^p+\sum_{k=1}^{\infty}\left[G_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)-\chi_k^{(p)}(z)\right], \tag{76}$$

где символом $\chi_k^{(p)}(z)$ мы обозначили первые $p+1$ членов разложения функции $G_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)$ в ряд Маклорена.

**65. Функция ctg $z$.** Рассмотрим дробную функцию

$$\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}. \tag{77}$$

Из формулы Эйлера

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

непосредственно следует, что уравнение $\sin z = 0$ равносильно $e^{i2z} = 1$, и оно имеет корни $z = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), т. е. $\sin z$ имеет лишь вещественные корни, хорошо известные из тригонометрии. Функция (77) будет иметь полюсы в точках

$$z = 0, \pm \pi, \pm 2\pi, \ldots \tag{78}$$

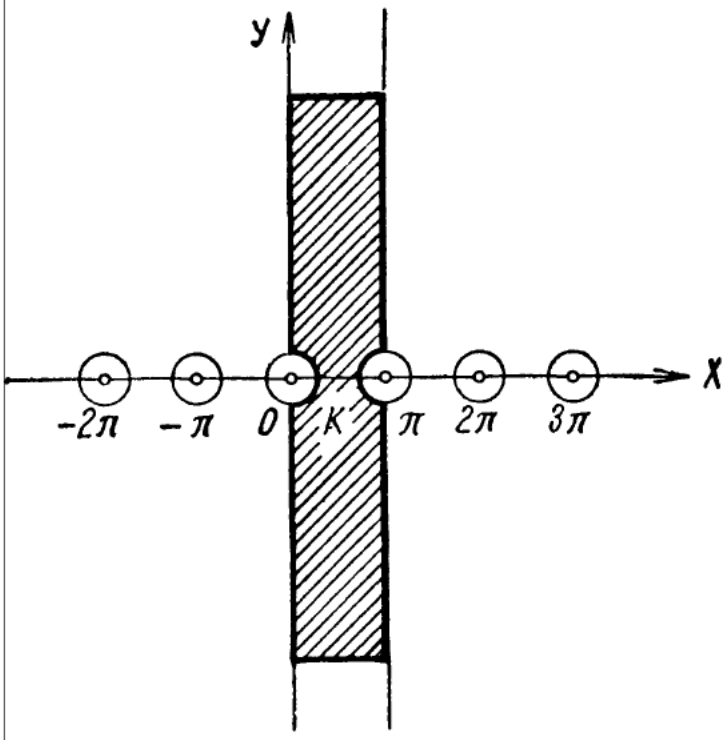


Рис. 61.

Покажем, что функция (77) будет ограниченной по модулю на всей плоскости, если мы выделим из плоскости точки (78) кружками $\lambda_\rho$ одного и того же радиуса $\rho$, где $\rho$ — произвольное, заданное положительное число. Так как функция (77) имеет период $\pi$, то достаточно рассмотреть ее значения в полосе $K$, ограниченной прямыми $x = 0$ и $x = \pi$ (рис. 61), причем в этой полосе точки $z = 0$ и $z = \pi$ выделены упомянутыми выше кружками радиуса $\rho$ с центром в этих точках. Во всякой ограниченной части полосы $K$ функция (77) непрерывна, а следовательно, и подавно ограничена. Нам остается, следовательно, показать, что при беспредельном удалении на полосе наверх или вниз, модуль функции (77) остается ограниченным. Положим, например, что мы удаляемся в полосе $K$ на бесконечность, идя кверху, т. е. если положить $z = x + iy$, то $y \to +\infty$, а $x$ находится в промежутке $0 \leqslant x \leqslant \pi$. Мы имеем

$$\operatorname{ctg} z = i\,\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} = i\,\frac{e^{ix}e^{-y} + e^{-ix}e^{y}}{e^{ix}e^{-y} - e^{-ix}e^{y}},$$

откуда, заменяя модуль числителя суммою модулей, а модуль знаменателя — разностью модулей, будем иметь

$$|\operatorname{ctg} z| \leqslant \frac{e^{y} + e^{-y}}{e^{y} - e^{-y}} = \frac{1 + e^{-2y}}{1 - e^{-2y}}.$$

При беспредельном возрастании $y$ правая часть стремится к пределу единица и, следовательно, при всех достаточно больших $y$ мы имеем, например, неравенство

$$|\operatorname{ctg} z| < 1{,}5.$$

Точно так же можно рассмотреть и нижнюю часть полосы $K$, и таким образом наше утверждение доказано.

Заметим, что такое же доказательство можно применить к дробной функции

$$\frac{1}{\sin z}, \tag{79}$$

которая имеет полюсы в тех же точках и обладает периодом $2\pi$, т. е. функция (79) будет ограниченной по модулю, если выделить ее полюсы кружками одного и того же радиуса, величину которого можно брать произвольно малой.

Вернемся к функции (77) и примем за контуры $C_n$ окружности с центром в начале координат и радиусами $\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$. Эти окружности удовлетворяют условию (67). Кроме того, взяв $\rho$ достаточно малым $\left(\text{например, меньше } \frac{\pi}{2}\right)$, можем утверждать, что окружности $C_n$ не будут проходить через выделенные из плоскости кружки $\lambda_\rho$, и, таким образом, в силу доказанного выше, на этих окружностях функция (77) будет ограниченной по модулю. То же самое можно, очевидно, утверждать и относительно функции

$$f(z) = \operatorname{ctg} z - \frac{1}{z}, \tag{80}$$

так как $z^{-1}$ стремится к нулю при $z \to \infty$. Нетрудно видеть, что функция (80) уже не имеет полюса в начале $z=0$, а поэтому мы можем применить к этой функции разложение (75). Определим бесконечные части функции (77) в ее полюсах $z = k\pi$. Каждый ее полюс будет простым корнем $\sin z$ и вычет в этом полюсе будет вычисляться по обычной формуле

$$r_k = \frac{\cos z}{(\sin z)'}\Big|_{z=k\pi} = 1.$$

Таким образом, бесконечная часть функции (77) в полюсе $z = k\pi$ будет

$$\frac{1}{z-k\pi} \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

В частности, в полюсе $z=0$ бесконечная часть будет $z^{-1}$, а следовательно, действительно функция (80) не будет уже иметь полюса $z=0$. Что же касается остальных полюсов $z = k\pi$, то у функции (80) бесконечная часть будет такой же, как у (77). Для применения формулы (75) остается еще вычислить $f(0)$. Функция (80), как нечетная функция, имеет вблизи $z=0$ разложение вида

$$f(z) = \gamma_1 z + \gamma_3 z^3 + \ldots,$$

откуда непосредственно вытекает, что $f(0)=0$. Окончательно формула (75) дает

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}' \left(\frac{1}{z-k\pi} + \frac{1}{k\pi}\right), \tag{81}$$

где штрих у знака суммы показывает, что надо исключить слагаемое, соответствующее $k=0$.

Нетрудно проверить, что ряд, стоящий справа, сходится абсолютно и равномерно во всякой ограниченной части плоскости, если отбросить несколько первых слагаемых, которые имеют в этой части плоскости полюсы. Действительно, общий член ряда будет

$$\frac{z}{(z-k\pi)\,k\pi}.$$

Во всякой ограниченной части плоскости мы имеем $|z|<M$, и, считая $k$ достаточно большим по абсолютному значению, можем написать

$$\left|\frac{z}{(z-k\pi)\,k\pi}\right| \leqslant \frac{1}{k^2}\cdot\frac{M}{\pi\,(\pi-Mk^{-1})}.$$

Коэффициент при $\frac{1}{k^2}$ при возрастании $k$ стремится к конечному пределу $\frac{M}{\pi^2}$, а ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{k^2},$$

как известно, сходится. Следовательно, ряд (81) сходится абсолютно и равномерно в любой ограниченной части плоскости.

Если в формуле (81) заменим $z$ на $\pi z$, то эта формула перепишется следующим образом:

$$\pi \operatorname{ctg} \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}' \left(\frac{1}{z-k}+\frac{1}{k}\right). \tag{$81_1$}$$

Группируя попарно слагаемые, относящиеся к значениям $k$, одинаковым по абсолютной величине, но различным по знаку, мы можем переписать эту формулу следующим образом:

$$\pi \operatorname{ctg} \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-k^2}.$$

Точно так же можно доказать, например, формулу

$$\frac{\pi}{\sin \pi z} = \frac{1}{z} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}' (-1)^k \left(\frac{1}{z-k}+\frac{1}{k}\right).$$

Дифференцируя равномерно сходящийся ряд ($81_1$), будем иметь также формулу

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{(z-k)^2} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-k)^2}.$$

Напомним, что выведенные выше формулы были нами получены другим путем в теории тригонометрических рядов [II, 157].

**66. Построение мероморфной функции.** Займемся сейчас задачей построения мероморфной функции, если заданы ее полюсы $a_k$ и бесконечные части

$$g_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right) \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots) \tag{82}$$

в этих полюсах. Если задано лишь конечное число полюсов $a_k$ $(k=1, 2, \ldots, n)$, то функция

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{n} g_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)$$

будет давать очевидное решение задачи, причем написанная функция представляет собою рациональную дробь. Положим теперь, что нам дано бесчисленное множество полюсов $a_k$ и соответствующих бесконечных частей. Как мы видели [64], во всякой ограниченной части плоскости должно быть лишь конечное число полюсов, и их можно пронумеровать в порядке неубывающих модулей, т. е.

$$|a_1| \leqslant |a_2| \leqslant \ldots \qquad (|a_n| \to +\infty).$$

Никаких других ограничений на расположение полюсов или задание бесконечных частей не предполагается. Считаем только, что среди полюсов нет полюса $z=0$.

Каждая бесконечная часть (82) представляет собою функцию, регулярную внутри круга $|z|<|a_k|$, и внутри этого круга она разлагается в ряд Маклорена:

$$g_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right) = a_0^{(k)} + a_1^{(k)} z + a_2^{(k)} z^2 + \ldots \quad (|z|<|a_k|). \tag{83}$$

Возьмем какую-нибудь последовательность положительных чисел $\varepsilon_k$, образующих сходящийся ряд:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k. \tag{84}$$

Ввиду равномерной сходимости степенного ряда (83) в круге [13]

$$|z| \leqslant \frac{1}{2}|a_k|$$

мы можем взять такой отрезок этого ряда

$$q_k(z) = a_0^{(k)} + a_1^{(k)} z + a_2^{(k)} z^2 + \ldots + a_{m_k}^{(k)} z^{m_k},$$

что

$$\left| g_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right) - q_k(z) \right| < \varepsilon_k \quad \text{в круге } |z| \leqslant \frac{1}{2}|a_k|. \tag{85}$$

Составим ряд

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ g_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right) - q_k(z) \right] \tag{86}$$

и рассмотрим любой круг $C_R$ с центром в начале и радиусом $R$. В силу $|a_k| \to +\infty$ существует такое $N$, что $R \leqslant \frac{1}{2}|a_k|$ при $k > N$, и при таких значениях $k$ в круге $C_R$ имеет место оценка (85), и, следовательно, в силу сходимости ряда (84), ряд (86) сходится в $C_R$ абсолютно и равномерно, если отбросить в нем первые $N$ слагаемых. Эти первые слагаемые дадут в круге $C_R$ полюсы $a_k$ с бесконечными частями (82). Абсолютно и равномерно сходящийся ряд даст функцию, регулярную в $C_R$. Ввиду произвольности радиуса $R$ в этих рассуждениях, мы видим, что сумма (86) решает поставленную задачу о построении мероморфной функции по заданным полюсам и бесконечным частям. Заметим при этом, что полиномы $q_k(z)$ никаких новых особенностей не добавляют.

Если задан еще полюс $z=0$ с бесконечной частью

$$g_0\left(\frac{1}{z}\right),$$

то достаточно добавить эту бесконечную часть к ряду (86). Приведенное решение задачи принадлежит шведскому математику Миттаг-Леффлеру.

В [64] мы дали формулу разложения мероморфной функции на простейшие дроби при некоторых дополнительных предположениях. Сейчас дадим аналогичную формулу в общем случае.

Пусть $f(z)$ — некоторая мероморфная функция. Пользуясь вышеуказанным методом, можно построить мероморфную функцию $\varphi(z)$, которая имела бы те же полюсы с теми же бесконечными частями, что и $f(z)$. Эта мероморфная функция $\varphi(z)$ будет выражаться формулой вида (86). Разность $f(z) - \varphi(z)$ будет, очевидно, функцией, регулярной на всей плоскости (кроме $z = \infty$). Такая функция называется *целой функцией*. Она представима на всей плоскости своим рядом Маклорена. Обозначая

$$f(z) - \varphi(z) = F(z),$$

получим следующее представление мероморфной функции:

$$f(z) = F(z) + g_0\left(\frac{1}{z}\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\left[g_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right) - q_k(z)\right], \tag{87}$$

где $F(z)$ — некоторая целая функция. Эта последняя формула имеет больше теоретический интерес, тогда как формулами (75) и (76) удобно пользоваться в конкретных примерах. Если считать $F(z)$ — любой целой функцией, то (87) дает общую формулу для всех мероморфных функций с заданными полюсами и бесконечными частями.

**67. Целые функции.** Как мы упоминали, *целой функцией называется функция, регулярная на всей плоскости.* Она представима на всей плоскости рядом Маклорена. Если этот ряд обрывается, то функция есть просто полином. В противном случае бесконечно далекая точка будет существенно особой точкой нашей функции, и в этом случае функция называется иногда целой трансцендентной функцией. Функции $e^z$ и $\sin z$ представляют собою пример целых трансцендентных функций. В дальнейшем мы будем пользоваться просто термином — целая функция.

Как известно, всякий полином имеет корни. Таким свойством может и не обладать целая функция. Так, например, $e^z$ вовсе не имеет корней. Составим сейчас общее выражение для целых функций, не имеющих корней. Пусть $g(z)$ — некоторая целая функция. При этом функция

$$f(z) = e^{g(z)} \tag{88}$$

будет также, очевидно, целой и не будет иметь корней. Покажем теперь наоборот, что всякая целая функция $f(z)$, не имеющая корней, имеет вид (88), где $g(z)$ есть некоторая целая функция, т. е. *формула* (88), *где* $g(z)$ *есть произвольная целая функция, дает общий вид целых функций* $f(z)$, *не имеющих корней.*

Раз целая функция $f(z)$ не имеет корней, то функция

$$\frac{f'(z)}{f(z)}$$

также будет целой. Интегрируя эту целую функцию, мы получаем тоже целую функцию

$$g(z)=\int \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=\lg f(z),$$

откуда и вытекает непосредственно (88).

Положим теперь, что целая функция $f(z)$ имеет конечное число корней, отличных от $z=0$:

$$z=a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m,$$

причем кратный корень выписывается столько раз, сколько единиц содержится в его кратности. Отношение

$$f(z):\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{z}{a_k}\right),$$

где символ $\prod_{k=1}^{m}$ обозначает произведение, распространенное на все целые значения $k$ от 1 до $m$, будет, очевидно, целой функцией без корней, т. е. будет иметь вид (88). Мы получаем, таким образом, для нашей функции $f(z)$ представление следующего вида:

$$f(z)=e^{g(z)}\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{z}{a_k}\right), \tag{89}$$

где $g(z)$ — некоторая целая функция.

Мы считаем при этом, что точка $z=0$ не есть корень $f(z)$. Если эта точка будет корнем кратности $p$, то вместо формулы (89) будем иметь, очевидно, следующую формулу:

$$f(z)=e^{g(z)}z^p\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{z}{a_k}\right). \tag{90}$$

В наиболее интересном случае, когда $f(z)$ имеет бесчисленное множество корней, уже нельзя применить непосредственно формулу (90), так как справа будет стоять бесконечное произведение, которое может и не иметь смысла. Чтобы сделать это произведение сходящимся, мы должны будем приписать к сомножителям $\left(1-\frac{z}{a_k}\right)$ дополнительные множители показательного типа, которые, не вводя новых корней, сделают бесконечное произведение сходящимся.

Разберем это для случая функции $\sin z$. Перепишем формулу (81):

$$\operatorname{ctg} z-\frac{1}{z}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}'\left(\frac{1}{z-k\pi}+\frac{1}{k\pi}\right).$$

При этом обе части будут регулярны в точке $z=0$, и мы можем почленно проинтегрировать бесконечный ряд от $z=0$ до переменной точки $z$. Мы получим в результате такого интегрирования

$$\ln\frac{\sin z}{z}\Big|_{z=0}^{z=z}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}'\left[\ln(z-k\pi)+\frac{z}{k\pi}\right]_{z=0}^{z=z}$$

или, принимая главное значение логарифма в окрестности начала,

$$\ln\frac{\sin z}{z}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}'\left[\ln\left(1-\frac{z}{k\pi}\right)+\frac{z}{k\pi}\right].$$

Отсюда, переходя от логарифма к числам, мы получаем представление функции $\sin z$ в виде бесконечного произведения:

$$\sin z=z\prod_{k=-\infty}^{+\infty}{}'\left(1-\frac{z}{k\pi}\right)e^{\frac{z}{k\pi}}, \tag{91}$$

где штрих у знака произведения показывает, что надо исключить сомножитель, соответствующий $k=0$. В данном случае множители показательного типа $e^{\frac{z}{k\pi}}$ гарантируют сходимость бесконечного произведения.

Группируя попарно сомножители, соответствующие значениям $k$, одинаковым по абсолютной величине, получим

$$\sin z=z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2\pi^2}\right). \tag{92}$$

Заменяя $z$ на $\pi z$, можем переписать формулу в следующем виде:

$$\frac{\sin\pi z}{\pi}=z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right). \tag{93}$$

Для более тщательного выяснения вопроса о разложении целой функции в бесконечное произведение нам надо выяснить некоторые основные факты, касающиеся бесконечных произведений.

**68. Бесконечные произведения.** Рассмотрим бесконечное произведение

$$\prod_{k=1}^{\infty}c_k=c_1c_2\ldots, \tag{94}$$

где $c_k$ суть некоторые комплексные числа, отличные от нуля. Понятие о сходимости произведения (94) аналогично понятию о сходимости ряда. Образуем конечные произведения:

$$P_n=\prod_{k=1}^{n}c_k=c_1c_2\ldots c_n. \tag{95}$$

Если при беспредельном возрастании $n$ произведения $P_n$ стремятся к конечному пределу $P$, отличному от нуля, то бесконечное произведение (94) называется сходящимся, и $P$ называется величиною этого бесконечного произведения.

Если среди чисел $c_k$ находятся равные нулю, то бесконечное произведение (94) называется сходящимся, если после исключения сомножителей, равных нулю, остается бесконечное произведение, сходящееся в указанном выше смысле. При этом величина бесконечного произведения, содержащего сомножители, равные нулю, считается равной нулю. Указанная выше оговорка о том, что предел $P$ произведений $P_n$ должен быть отличен от нуля, сделана для того, чтобы бесконечные сходящиеся произведения обладали обычным свойством конечного произведения, а именно — были равны нулю тогда и только тогда, когда хоть один из множителей равен нулю.

Положим, что все члены произведения (94) отличны от нуля, и составим бесконечный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln c_k, \tag{96}$$

где в каждом члене значение логарифма выбрано каким-нибудь образом. Сумма первых $n$ слагаемых ряда (96) будет

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln c_k. \tag{97}$$

Положим, что при некотором выборе значений логарифмов ряд (96) сходится, т. е. что существует предел $S_n \to S$. Формула (95) дает $P_n = e^{S_n}$, и, следовательно, существует предел $P_n \to e^S$, отличный от нуля, т. е. из сходимости ряда (96) вытекает сходимость произведения (94). Положим теперь наоборот, что бесконечное произведение (94) сходится, т. е. что существует предел $P_n \to P$, отличный от нуля. Выберем для членов ряда (96) значение логарифмов так, чтобы в правой части формулы (97) иметь всегда главное значение логарифма произведения $c_1 c_2 \dots c_n$:

$$S_n = \ln |c_1 c_2 \dots c_n| + i \arg (c_1 c_2 \dots c_n),$$

где

$$-\pi < \arg (c_1 c_2 \dots c_n) \leqslant \pi.$$

В данном случае $S_n$ также будут стремиться к определенному пределу, а именно:

$$\lim S_n = \ln |P| + i \arg P = \ln P,$$

и, следовательно, ряд (96) будет сходящимся.

Мы предполагаем при этом, что $P$ не есть вещественное отрицательное число, так что $\arg P$ находится внутри промежутка $(-\pi, \pi)$.

В случае, когда $P$ есть отрицательное вещественное число, мы могли бы выбирать аргументы так, чтобы $\arg(c_1c_2 \dots c_n)$ заключался в промежутке $(0, 2\pi)$. Доказательство осталось бы прежним.

Мы приходим таким образом к следующему общему предложению: *если все числа $c_k$ отличны от нуля, то для сходимости бесконечного произведения* (94) *необходимо и достаточно, чтобы ряд* (96) *сходился при некотором выборе значений логарифма; при этом величина бесконечного произведения будет*

$$P = e^S. \tag{98}$$

Общий член ряда (96) будет

$$\ln c_k = \ln |c_k| + i \arg c_k,$$

и, принимая во внимание, что общий член сходящегося ряда должен стремиться к нулю, мы должны во всяком случае иметь $\arg c_k \to 0$, т. е. ряд (96) может сходиться только в том случае, если, начиная с некоторого места, будем брать главные значения логарифма. Выбор значений логарифма в конечном числе первых слагаемых не может, естественно, повлиять на сходимость ряда и добавит лишь к сумме ряда (96) слагаемое вида $2m\pi i$, где $m$ — некоторое целое число. Такое добавочное слагаемое у величины $S$ не изменит, согласно формуле (98), величины $P$. Таким образом, упомянутый выше выбор значений логарифмов у членов ряда (96) сводится к тому, чтобы, *начиная с некоторого определенного, но произвольно выбранного места, брать главные значения логарифма.*

Рассмотрим теперь бесконечное произведение, члены которого суть целые функции от $z$:

$$F(z) = \prod_{k=1}^{\infty} u_k(z) = u_1(z) \cdot u_2(z) \dots \tag{99}$$

Возьмем на плоскости $z$ круг $C_R$ с центром в начале и некоторым радиусом $R$. Положим, что при любом выборе $R$ члены $u_k(z)$, начиная с некоторого значения $k$, уже не имеют корней в круге $C_R$. Пусть для определенности при заданном $R$ это будет, начиная с номера $k = k_0$ (этот номер будет, вообще говоря, зависеть от $R$). Рассмотрим бесконечный ряд

$$S(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \ln u_k(z), \tag{100}$$

который перепишем следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{k_0-1} \ln u_k(z) + \sum_{k=k_0}^{\infty} \ln u_k(z). \tag{101}$$

Члены последней суммы суть регулярные однозначные в круге $C_R$ функции, так как $u_k(z)$ не обращаются в этом круге в нуль. Положим, что при некотором выборе значений регулярных функций $\ln u_k(z)$ последний ряд равномерно сходится в круге $C_R$. Обозначая его сумму через $f_{k_0}(z)$, где $f_{k_0}(z)$ есть некоторая регулярная функция [12], мы будем иметь

$$\prod_{k=1}^{\infty} u_k(z) = e^{f_{k_0}(z)} \prod_{k=1}^{k_0-1} u_k(z),$$

т. е. при этом (99) будет регулярной функцией в круге $C_R$ и корни ее в этом круге будут определяться корнями членов $u_k(z)$ при $k < k_0$. Ввиду произвольности $R$ мы можем утверждать вообще, что *при равномерной сходимости ряда* (100) *во всякой ограниченной части плоскости* (*исключая несколько первых слагаемых, что не существенно*) *бесконечное произведение* (99) *будет сходиться на всей плоскости, его величина будет целой функцией и корни этой целой функции вполне определяются корнями сомножителей* $u_k(z)$.

Дифференцируя равномерно сходящийся ряд (100), получим

$$S'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k'(z)}{u_k(z)},$$

но

$$F(z) = e^{S(z)} \text{ и } F'(z) = S'(z) F(z),$$

т. е.

$$F'(z) = F(z) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k'(z)}{u_k(z)}. \tag{102}$$

Эта формула показывает, что в случае равномерной сходимости ряда (100) для бесконечного произведения (99) имеет место правило дифференцирования (102), аналогичное правилу дифференцирования конечного произведения.

**69. Построение целой функции по ее корням.** Пользуясь предыдущими соображениями, мы сможем построить целую функцию по заданным ее корням. Заметим прежде всего, что корни целой функции не могут иметь предельных точек на конечном расстоянии. Если бы такая точка $z = c$ существовала, т. е. если бы в любом малом круге с центром $z = c$ находилось бесчисленное множество корней целой функции, то эта целая функция должна была бы тождественно равняться нулю [18]. Повторяя рассуждения из [64], мы убеждаемся, что во всяком случае корни $a_k$ целой функции могут быть расположены в порядке неубывающего модуля:

$$|a_1| \leqslant |a_2| \leqslant \ldots,$$

причем $|a_n| \to \infty$ при $n \to \infty$. Заметим, что если некоторое число $\alpha$ фигурирует $q$ раз среди чисел $a_k$, то это значит, что соответствующий корень $\alpha$ должен быть корнем кратности $q$. Мы пока считаем, кроме того, что $z = 0$ не участвует среди заданных чисел $a_k$.

Ограничим нашу задачу рассмотрением одного частного случая, наиболее важного в приложениях, а именно будем считать, что $a_k$ настолько быстро удаляются на бесконечность, что существует такое целое положительное число $m$, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|a_k|^m} \tag{103}$$

есть ряд сходящийся. Мы будем считать $m \geqslant 2$.

Построим бесконечное произведение

$$F(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right) e^{\frac{z}{a_k} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_k}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{m-1}\left(\frac{z}{a_k}\right)^{m-1}} \tag{104}$$

и покажем, что оно будет удовлетворять всем условиям, указанным в предыдущем номере. Рассмотрим некоторый круг $C_R$. Начиная с некоторого значка $k = k_0$, числа $a_k$ будут находиться вне круга $C_R$, так что при $k \geqslant k_0$ члены произведения (104) не будут иметь корней в круге $C_R$ и для всякого $z$, принадлежащего $C_R$, мы будем иметь

$$\left|\frac{z}{a_k}\right| < \vartheta < 1 \qquad (k \geqslant k_0), \tag{105}$$

где $\vartheta$ — определенное положительное число, меньшее единицы. Рассмотрим ряд (100) для данного случая:

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \ln\left[\left(1 - \frac{z}{a_k}\right) e^{\frac{z}{a_k} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_k}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{m-1}\left(\frac{z}{a_k}\right)^{m-1}}\right]. \tag{106}$$

В силу (105) можно воспользоваться разложением логарифма в степенной ряд и получим при таком выборе значения логарифма для ряда (106) следующую формулу:

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \left[\frac{z}{a_k} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_k}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{m-1}\left(\frac{z}{a_k}\right)^{m-1} - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s}\left(\frac{z}{a_k}\right)^s\right] =$$

$$= \sum_{k=k_0}^{\infty} \left[-\frac{1}{m}\left(\frac{z}{a_k}\right)^m - \frac{1}{m+1}\left(\frac{z}{a_k}\right)^{m+1} - \ldots\right].$$

Исследуем общий член этого ряда

$$v_k(z) = -\frac{1}{m}\left(\frac{z}{a_k}\right)^m - \frac{1}{m+1}\left(\frac{z}{a_k}\right)^{m+1} - \ldots$$

Мы имеем, очевидно,

$$|v_k(z)| \leqslant \frac{1}{m}\left|\frac{z}{a_k}\right|^m + \frac{1}{m+1}\left|\frac{z}{a_k}\right|^{m+1} + \dots$$

или в силу (105), вынося за скобки $\frac{1}{m}\left|\frac{z}{a_k}\right|^m$ и принимая во внимание, что в круге $C_R$ $|z| \leqslant R$

$$|v_k(z)| \leqslant \frac{R^m}{m|a_k|^m}(1 + \vartheta + \vartheta^2 + \dots),$$

т. е.

$$|v_k(z)| \leqslant \frac{R^m}{m(1-\vartheta)}\frac{1}{|a_k|^m}.$$

В силу сходимости ряда (103) положительные числа, стоящие в правой части последнего неравенства, образуют сходящийся ряд, и, следовательно, ряд (106) будет сходиться абсолютно и равномерно в круге $C_R$. Таким образом, мы можем утверждать, что бесконечное произведение (104) представляет собою целую функцию и что корни этой целой функции определяются корнями сомножителей, т. е. что корни этой целой функции суть числа $a_k$.

Если мы имеем какую-нибудь целую функцию $f(z)$, корни которой суть $a_k$, то частное $f(z):F(z)$ будет целой функцией без корней, т. е. это частное будет иметь вид $e^{g(z)}$, и мы получим таким образом следующее представление для целой функции $f(z)$:

$$f(z) = e^{g(z)}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_k}\right)e^{\frac{z}{a_k}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_k}\right)^2+\dots+\frac{1}{m-1}\left(\frac{z}{a_k}\right)^{m-1}}, \quad (107)$$

где $g(z)$ — некоторая целая функция. До сих пор мы предполагали, что точка $z=0$ не является корнем функции. Если эта точка есть корень кратности $p$, то следует только добавить к правым частям формул (104) и (107) множитель $z^p$.

Рассмотрим в качестве примера функцию $\sin z$. Она имеет простой корень $z=0$ и простые корни $z = k\pi$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$).

В данном случае имеем $m=2$, так как ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{|k\pi|^2},$$

как мы уже упоминали выше, сходится. Применяя формулу (107) и добавляя множитель $z$, мы получим

$$\sin z = e^{g(z)} z \prod_{k=-\infty}^{+\infty}{}' \left(1-\frac{z}{k\pi}\right)e^{\frac{z}{k\pi}}.$$

Целая функция $g(z)$ не может быть, конечно, определена из предыдущих общих соображений. Результаты [67] показывают, что в данном случае эта функция равна тождественно нулю.

Заметим, что если $m=1$, т. е. если сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|a_k|},$$

то, рассуждая, как и выше, можно вместо формулы (107) написать формулу

$$f(z)=e^{g(z)}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_k}\right).$$

В дальнейшем мы будем иметь еще примеры применения формулы (104), которая называется обычно *бесконечным произведением Вейерштрасса.*

Может случиться, что числа $a_k$ заданы так, что ряд (103) расходится при всяком целом положительном $m$. Это будет, например, если мы положим $a_k=\ln(k+1)$ $(k=1, 2, \ldots)$. Действительно, ряд с общим членом $[\ln(k+1)]^{-m}$ расходится при всяком положительном $m$, так как сумма его первых членов больше, чем

$$\frac{k}{[\ln(k+1)]^m},$$

а это последнее выражение, как нетрудно показать, применяя хотя бы правило Лопиталя, беспредельно возрастает вместе с $k$. В случае расходимости ряда (103) при всяком целом положительном $m$ составим бесконечное произведение

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_k}\right)e^{Q_k(z)}, \tag{108}$$

где

$$Q_k(z)=\frac{z}{a_k}+\frac{z^2}{2a_k^2}+\ldots+\frac{z^{m_k}}{m_k a_k^{m_k}}$$

и $m_k$ будет зависеть от $k$. Повторяя вышеуказанные оценки, мы убедимся в том, что для сходимости бесконечного произведения (108) достаточна сходимость при всяком $R>0$ ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{R}{|a_k|}\right)^{m_k+1}.$$

Достаточно для этого взять $m_k=k-1$. Действительно, применяя признак Коши [I, 121] к ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{R}{|a_k|}\right)^{k},$$

получим

$$\sqrt[k]{\left(\frac{R}{|a_k|}\right)^k}=\frac{R}{|a_k|}\to 0,$$

т. е. ряд действительно сходится. Можно показать, что для сходимости ряда достаточно взять $m_k$ такими, чтобы имело место неравенство: $m_k+1>\ln k$.

**70. Интегралы, зависящие от параметра.** В дальнейшем нам придется встречаться с определением функций в виде интегралов, зависящих от параметра. С этим мы уже встречались в [**61**]. В случае вещественного переменного мы рассматривали такой способ задания функции и устанавливали условия, при которых такая функция имеет производную, причем можно производить дифференцирование под знаком интеграла [**II, 83**].

Рассмотрим аналогичный вопрос для случая комплексного переменного.

Теорема. *Пусть $f(t, z)$ — непрерывная функция двух переменных $t$ и $z$, когда $z$ принадлежит замкнутой области $B$ с контуром $l$ и $t$ — конечному интервалу $a \leqslant t \leqslant b$ вещественной оси. Пусть, далее, $f(t, z)$ есть регулярная функция от $z$ в замкнутой области $B$ при всяком $t$, принадлежащем упомянутому интервалу. При этом функция $\omega(z)$, определяемая равенством*

$$\omega(z) = \int_a^b f(t, z)\, dt, \tag{109}$$

***есть регулярная функция внутри $B$, и при вычислении ее производной мы можем производить дифференцирование по $z$ под знаком интеграла, т. е.***

$$\omega'(z) = \int_a^b \frac{\partial f(t, z)}{\partial z}\, dt. \tag{$109_1$}$$

Согласно формуле Коши, можем написать

$$f(t, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{f(t, z')}{z' - z}\, dz',$$

где $z$ — внутри $B$ и $t$ — любая точка интервала $a \leqslant t \leqslant b$. Следовательно,

$$\omega(z) = \int_a^b \left[\frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{f(t, z')}{z' - z}\, dz'\right] dt.$$

При интегрировании непрерывной функции мы можем менять порядок интегрирования [**II, 81** и **89**]:

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{\int_a^b f(t, z')\, dt}{z' - z}\, dz'.$$

Эта формула дает $\omega(z)$ в виде интеграла типа Коши, и, следовательно, $\omega(z)$ есть регулярная функция внутри $B$, а ее производная определяется по формуле [8]

$$\omega'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{\int_a^b f(t, z')\,dt}{(z'-z)^2}\,dz'.$$

Меняя опять порядок интегрирования, можем написать

$$\omega'(z)=\int_a^b \left[\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{f(t, z')}{(z'-z)^2}\,dz'\right]dt.$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, согласно формуле Коши дает производную $\frac{\partial f(t, z)}{\partial z}$. Последняя формула совпадает с формулой ($109_1$), и теорема доказана. Заметим, что мы могли бы считать, что $t$ меняется не вдоль конечного интервала $(a, b)$ вещественной оси, а вдоль любой конечной кривой. Доказательство теоремы от этого не изменилось бы. Заметим по поводу предыдущего доказательства, что интеграл

$$\int_a^b f(t, z')\,dt,$$

стоящий в числителе интеграла типа Коши, которым выражается $\omega(z)$, представляет собою непрерывную функцию от $z'$ на $l$. Это непосредственно следует из того, что $f(t, z)$ есть, по условию, непрерывная функция своих двух аргументов.

Перейдем теперь к рассмотрению несобственных интегралов. Здесь для доказательства теоремы достаточно добавить условие равномерной сходимости интеграла (109). Для определенности будем рассматривать интеграл по бесконечному промежутку $(a, +\infty)$, но доказательство годится и для других типов несобственных интегралов.

Теорема. *Пусть $f(t, z)$ — непрерывная функция двух переменных, когда $z$ принадлежит замкнутой области $B$ и $t \geqslant a$. Пусть, далее, $f(t, z)$ — регулярная функция в замкнутой области $B$ при всяком $t \geqslant a$ и интеграл*

$$\int_a^\infty f(t, z)\,dt$$

*сходится равномерно относительно $z$, принадлежащего замкнутой области $B$. При этом*

$$\omega(z)=\int_a^\infty f(t,\ z)\,dt \tag{110}$$

*— регулярная функция от $z$ внутри $B$ и*

$$\omega'(z)=\int_a^\infty \frac{\partial f(t,z)}{\partial z}\,dt.$$

Составим последовательность функций

$$\omega_n(z)=\int_a^{a_n} f(t,z)\,dt,$$

где $a_n$ — любая последовательность чисел, больших $a$, стремящаяся к $(+\infty)$. По доказанной теореме, $\omega_n(z)$ — регулярные функции внутри $B$ и

$$\omega_n'(z)=\int_a^{a_n} \frac{\partial f(t,z)}{\partial z}\,dt.$$

Из условия равномерной сходимости интеграла (110) следует, что $\omega_n(z)$ равномерно стремятся к функции $\omega(z)$, определяемой формулой (110), и по теореме Вейерштрасса эта функция $\omega(z)$ есть регулярная функция внутри $B$ и $\omega_n'(z)\to\omega'(z)$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^{a_n}\frac{\partial f(t,z)}{\partial z}\,dt=\omega'(z)$$

при любом законе стремления $a_n$ к $(+\infty)$. Отсюда следует

$$\omega'(z)=\int_a^\infty \frac{\partial f(t,z)}{\partial z}\,dt,$$

причем интеграл, стоящий справа, наверно имеет смысл. Теорема, таким образом, полностью доказана.

При доказательстве теоремы мы могли бы считать, что интегрирование по $t$ происходит и по некоторому бесконечному контуру $C$. Такой несобственный интеграл надо понимать как предел интегралов по конечным контурам, составляющим часть $C$. Теорема дословно применима и для несобственного интеграла, в котором подинтегральная функция $f(t, z)$ становится неограниченной, например при приближении $t$ к $a$.

Заметим, наконец, что имеет место следующее достаточное условие абсолютной и равномерной сходимости интеграла [II, 84]: если интегрирование по $t$ совершается вдоль вещественной оси и если при $t \geqslant a$ и $z$, принадлежащем замкнутой области $B$, выполняется неравенство $|f(t, z)| \leqslant \varphi(t)$, причем интеграл

$$\int_a^\infty \varphi(t)\,dt$$

сходится, то интеграл (110) сходится абсолютно и равномерно. Абсолютная сходимость определяется так же, как и в случае вещественного $f(z, t)$.

**71. Эйлеров интеграл второго рода.** Рассмотрим функцию, определяемую эйлеровым интегралом второго рода:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\,dt, \tag{111}$$

причем $t^{z-1} = e^{(z-1)\ln t}$ и значение логарифма положительного числа $t$ надо брать вещественным. Представим написанный интеграл в виде суммы двух интегралов:

$$\Gamma(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1}\,dt + \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1}\,dt. \tag{112}$$

Рассмотрим сначала второе слагаемое в правой части:

$$\omega(z) = \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1}\,dt. \tag{113}$$

При $t \geqslant 1$ подинтегральная функция

$$e^{-t} t^{z-1} = e^{-t+(z-1)\ln t} \tag{114}$$

есть непрерывная функция $t$ и $z$ для любого $z$ и $t \geqslant 1$ и есть целая функция от $z$ при всяком $t \geqslant 1$. Положим, что $z$ принадлежит некоторой ограниченной области $B$ плоскости $z$. Положим $z = x + yi$. В замкнутой области $B$ абсцисса $x$ имеет наибольшее значение, которое мы обозначим через $x_0$. Принимая во внимание, что $\ln t \geqslant 0$ при $t \geqslant 1$ и что модуль показательной функции $e^{\varphi i}$ с чисто мнимым показателем равен единице, получим для $z$, принадлежащих $B$:

$$|e^{-t} t^{z-1}| = |e^{-t+(x-1)\ln t + iy\ln t}| \leqslant e^{-t+(x_0-1)\ln t} = e^{-t} t^{x_0-1}.$$

Интеграл

$$\int_1^\infty e^{-t} t^{x_0-1}\,dt$$

очевидно сходится [II, 85], и, следовательно, интеграл (113) сходится равномерно относительно $z$, принадлежащих $B$. Принимая во внимание вторую теорему предыдущего номера и полную произвольность при выборе $B$, можем утверждать, что $\omega(z)$, определяемая формулой (113), есть целая функция, и можно дифференцировать по $z$ под знаком интеграла.

Рассмотрим теперь первое слагаемое формулы (112):

$$\varphi(z)=\int_0^1 e^{-t}t^{z-1}\,dt. \tag{115}$$

В данном случае подинтегральная функция (114) может терпеть разрыв непрерывности при $t=0$, так как $\ln t$ при $t=0$ обращается в $(-\infty)$. Как и выше, модуль функции (114) будет

$$e^{-t}t^{x-1}.$$

Если $x>1$, то при $t=0$ подинтегральная функция не будет терпеть разрыва непрерывности, и, применяя первую из теорем предыдущего параграфа, мы убедимся, что функция (115) будет регулярной функцией при $x>1$, т. е. правее прямой $x=1$. Докажем сейчас, что она будет регулярной правее мнимой оси. Действительно, возьмем какую-нибудь конечную область $B$, лежащую правее мнимой оси. Пусть $x_1$ — наименьшая абсцисса точек замкнутой области $B$. Раз замкнутая область $B$ лежит правее мнимой оси, то $x_1>0$. Принимая во внимание, что $\ln t\leqslant 0$ при $t\leqslant 1$, получим

$$|e^{-t}t^{z-1}|\leqslant e^{-t}t^{x_1-1},$$

если $z$ принадлежит $B$. Но при $x_1>0$ интеграл

$$\int_0^1 e^{-t}t^{x_1-1}dt$$

сходится, и, следовательно, как и выше, отсюда следует регулярность функции (115) правее мнимой оси и возможность дифференцировать под знаком интеграла. Из всего сказанного следует, что *формула* (111) *определяет справа от мнимой оси регулярную функцию* $\Gamma(z)$.

Займемся сейчас аналитическим продолжением функции налево от мнимой оси и покажем, что $\Gamma(z)$ есть мероморфная функция, имеющая простые полюсы в точках

$$z=0,\ -1,\ -2,\ \ldots \tag{116}$$

Поскольку второе слагаемое справа в формуле (112) есть целая функция, нам надо заняться функцией (115).

На конечном промежутке $0 \leqslant t \leqslant 1$ функция $e^{-t}$ разлагается в равномерно сходящийся ряд:

$$e^{-t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{n!},$$

где, как всегда, считаем $0! = 1$. Умножая на $t^{z-1}$ и интегрируя почленно по промежутку (0, 1), получим

$$\int_0^1 e^{-t} t^{z-1}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left[ \frac{t^{n+z}}{n+z} \right]_{t=0}^{t=1}.$$

Мы считаем $z$ лежащим правее мнимой оси и, следовательно, вещественная часть $(n+z)$ положительна, и $t^{n+z} = 0$ при $t = 0$, т. е.

$$\int_0^1 e^{-t} t^{z-1}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{1}{z+n}.$$

Таким образом, для $\Gamma(z)$ получаем следующее выражение правее мнимой оси:

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{1}{z+n} + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1}\, dt. \tag{117}$$

Бесконечная сумма, стоящая в правой части, ввиду присутствия $n!$ в знаменателе сходится абсолютно и равномерно во всякой ограниченной части плоскости, если отбросить несколько первых слагаемых, имеющих полюсы в точках (116). Следовательно, эта сумма дает мероморфную функцию с простыми полюсами (116), причем вычет в полюсе $z = -n$ равен $\frac{(-1)^n}{n!}$. Второе слагаемое справа есть, как мы уже упоминали, целая функция. Таким образом, правая часть формулы (117) дает аналитическое продолжение функции $\Gamma(z)$, определенной формулой (111) только справа от мнимой оси, на всю плоскость комплексного переменного $z$, причем $\Gamma(z)$ *оказывается мероморфной функцией с простыми полюсами* (116) *и с вычетом* $\frac{(-1)^n}{n!}$ *в полюсе* $z = -n$. Нетрудно получить значения $\Gamma(z)$ при целых положительных значениях аргумента. Положим $z = n+1$, где $n$ — целое положительное число. Мы получим при этом [II, 84]

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^n\, dt = n!$$

и

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t}\, dt = 1.$$

Таким образом, значения $\Gamma(z)$ при целых положительных $z$ дают факториалы целых чисел:

$$\Gamma(1)=1, \quad \Gamma(n+1)=n! \quad (n=1, 2, 3, \ldots). \tag{118}$$

Выясним теперь основные свойства функции $\Gamma(z)$. Считая $z>0$ и интегрируя по частям, будем иметь

$$\Gamma(z+1)=\int_0^\infty e^{-t}t^z\,dt=[-e^{-t}t^z]_{t=0}^{t=\infty}+z\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt,$$

т. е.

$$\Gamma(z+1)=z\,\Gamma(z). \tag{119}$$

Мы доказали это равенство лишь на положительной части вещественной оси. Но если две аналитические функции совпадают на некоторой линии, то они совпадают везде [18], и, следовательно, формулу (119) можно считать установленной при всех $z$. Пусть $n$ — некоторое целое положительное число. Применяя несколько раз формулу (119), получим более общее равенство, справедливое при всех комплексных $z$:

$$\Gamma(z+n)=(z+n-1)(z+n-2)\ldots(z+1)\,z\,\Gamma(z). \tag{120}$$

Будем теперь считать, что $z$ находится внутри отрезка (0, 1) вещественной оси, и вернемся к основной формуле (111), причем вместо переменной интегрирования $t$ введем новую переменную интегрирования $u$ по формуле $t=u^2$. Мы получим следующий результат:

$$\Gamma(z)=2\int_0^\infty e^{-u^2}u^{2z-1}\,du.$$

Заменяя $z$ на $1-z$, можно написать

$$\Gamma(1-z)=2\int_0^\infty e^{-v^2}v^{1-2z}\,dv.$$

Отсюда, перемножая, получим

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(u^2+v^2)}\left(\frac{u}{v}\right)^{2z-1}du\,dv. \tag{121}$$

Интеграл, стоящий справа, мы можем толковать как двойной интеграл на плоскости $(u, v)$, причем областью интегрирования является первый координатный угол, т. е. та часть плоскости, где $u>0$ и $v>0$. Введем вместо $u$ и $v$ полярные координаты:

$$u=\rho\cos\varphi, \qquad v=\rho\sin\varphi.$$

Формула (121) перепишется в виде

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=4\int_0^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\rho^2}\operatorname{ctg}^{2z-1}\varphi\,\rho\,d\rho\,d\varphi,$$

где интегрирование по $\rho$ надо производить от 0 до $+\infty$ и по $\varphi$ — от 0 до $\frac{\pi}{2}$, т. е.

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{ctg}^{2z-1}\varphi\,d\varphi\int_0^{\infty} e^{-\rho^2}\rho\,d\rho.$$

Как легко видеть,

$$\int_0^{\infty} e^{-\rho^2}\,\rho\,d\rho=\frac{1}{2},$$

и, следовательно,

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{ctg}^{2z-1}\varphi\,d\varphi.$$

Введем вместо $\varphi$ новую переменную $x$ по формуле

$$\varphi=\operatorname{arcctg}\sqrt{x};\quad d\varphi=\frac{-dx}{2\sqrt{x}(1+x)}.$$

Предыдущий результат можно будет при этом переписать в виде

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\int_0^{\infty}\frac{x^{z-1}}{1+x}\,dx.$$

Но, как мы знаем [62], интеграл, стоящий справа, равен $\frac{\pi}{\sin\pi z}$, и, следовательно, окончательно получаем следующую формулу:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}. \tag{122}$$

Эта формула доказана нами лишь для отрезка (0, 1) вещественной оси. Но, как и выше, пользуясь принципом аналитического продолжения, мы можем убедиться, что она справедлива для всех $z$.

Формула (120) позволяет сводить вычисление $\Gamma(z)$ при любом вещественном $z$ к значениям $\Gamma(z)$ на отрезке (0, 1). Формула (122)

дает возможность привести отрезок $(0, 1)$ к отрезку $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Полагая в формуле (122) $z = \frac{1}{2}$, мы получим

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-t} t^{-\frac{1}{2}}\, dt = \sqrt{\pi}. \tag{123}$$

**72. Эйлеров интеграл первого рода.** *Эйлеровым интегралом первого рода* называется интеграл вида

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1 - x)^{q-1}\, dx. \tag{124}$$

Как и в случае интеграла (111), мы будем предполагать, что вещественная часть $p$ и $q$ больше нуля и, кроме того,

$$x^{p-1}(1 - x)^{q-1} = e^{(p-1)\ln x + (q-1)\ln(1-x)},$$

где значения логарифмов берутся вещественными.

Вводя вместо $x$ новую переменную $t$ по формуле $t = 1 - x$, получим вместо (124)

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{q-1} (1 - t)^{p-1}\, dt,$$

т. е.

$$B(p, q) = B(q, p). \tag{125}$$

Выведем еще одну формулу, выясняющую основное свойство функции $B(p, q)$. Интегрируя по частям, можем написать

$$\int_0^1 x^{p-1} (1 - x)^q\, dx = \left[\frac{x^p (1 - x)^q}{p}\right]_{x=0}^{x=1} + \frac{q}{p} \int_0^1 x^p (1 - x)^{q-1}\, dx.$$

В силу сделанных предположенний относительно $p$ и $q$, можно утверждать, что внеинтегральный член равен нулю, и предыдущая формула дает следующее свойство функции $B(p, q)$:

$$B(p, q + 1) = \frac{q}{p} B(p + 1, q). \tag{126}$$

Установим теперь связь функции $B(p, q)$ с функцией (111). Применяя то же преобразование, что и в предыдущем параграфе, мы можем представить произведение $\Gamma(p)\Gamma(q)$ в виде

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 4 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(u^2 + v^2)} u^{2p-1} v^{2q-1}\, du\, dv$$

и, вводя полярные координаты, получим

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=4\int_0^{\infty}e^{-\rho^2}\rho^{2(p+q)-1}\,d\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}\varphi\sin^{2q-1}\varphi\,d\varphi.$$

Вводя вместо $\rho$ новую переменную $t$ по формуле $\rho=\sqrt{t}$, можем написать

$$\int_0^{\infty}e^{-\rho^2}\rho^{2(p+q)-1}\,d\rho=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}e^{-t}t^{p+q-1}\,dt=\frac{1}{2}\Gamma(p+q),$$

и, следовательно,

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=2\Gamma(p+q)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}\varphi\sin^{2q-1}\varphi\,d\varphi.$$

Если теперь ввести вместо $\varphi$ новую переменную интегрирования $x$ по формуле $x=\cos^2\varphi$, то последнее соотношение даст нам

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=\Gamma(p+q)\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx,$$

откуда и получается формула, выражающая $B(p, q)$ через функцию $\Gamma(z)$:

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{127}$$

**73. Бесконечное произведение для функции $[\Gamma(z)]^{-1}$.** Вернемся к основному определению функции $\Gamma(z)$, даваемому формулой (111), и будем для простоты рассуждений считать $z>0$. Множитель $e^{-t}$ является, как мы знаем, пределом выражения [I, 38]

$$e^{-t}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n.$$

Заменяя промежуток $(0, +\infty)$ конечным отрезком $(0, n)$, получаем таким образом следующий интеграл:

$$P_n(z)=\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}\,dt. \tag{128}$$

Надо ожидать, что при беспредельном возрастании $n$ этот интеграл будет стремиться к интегралу, входящему в правую часть формулы (111). В дальнейшем мы точно докажем это утверждение, а сейчас займемся теми следствиями, которые из него вытекают.

Вводя вместо $t$ новую переменную $\tau$ по формуле $t=n\tau$, можем переписать (128) в виде

$$P_n(z)=n^z\int_0^1(1-\tau)^n\tau^{z-1}\,d\tau. \tag{129}$$

Будем считать, что $n$ стремится к $+\infty$, принимая целые положительные значения. Производя интегрирование по частям, получим

$$\int_0^1(1-\tau)^n\tau^{z-1}\,d\tau=\left[\frac{1}{z}\tau^z(1-\tau)^n\right]_{\tau=0}^{\tau=1}+\frac{n}{z}\int_0^1(1-\tau)^{n-1}\tau^z\,d\tau$$

или, принимая во внимание, что внеинтегральный член обращается в нуль ($z>0$),

$$\int_0^1(1-\tau)^n\tau^{z-1}\,d\tau=\frac{n}{z}\int_0^1(1-\tau)^{n-1}\tau^z\,d\tau=\frac{n}{z(z+1)}\int_0^1(1-\tau)^{n-1}\,d\tau^{z+1}.$$

Продолжая дальнейшее интегрирование по частям, будем иметь точно так же

$$\int_0^1(1-\tau)^n\tau^{z-1}\,d\tau=\frac{n(n-1)}{z(z+1)}\int_0^1(1-\tau)^{n-2}\tau^{z+1}\,d\tau$$

и вообще получаем для интеграла (129) следующее выражение:

$$n^z\int_0^1(1-\tau)^n\tau^{z-1}\,d\tau=\frac{1\cdot2\dots n}{z(z+1)\dots(z+n)}n^z.$$

При беспредельном возрастании $n$ это выражение будет иметь пределом $\Gamma(z)$, т. е.

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot2\dots n}{z(z+1)\dots(z+n)}n^z, \tag{130}$$

или

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=\lim_{n\to\infty}\frac{z(z+1)\dots(z+n)}{1\cdot2\dots n}n^{-z}\qquad(n^{-z}=e^{-z\ln n}). \tag{131}$$

Чтобы несколько преобразовать последнее выражение, умножим и разделим его на $e^{z\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)}$. После этого мы можем переписать формулу (131) следующим образом:

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=\lim_{n\to\infty}\left\{e^{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}-\ln n\right)z}\,z\,\frac{z+1}{1}\times\right.$$
$$\left.\times\frac{z+2}{2}\dots\frac{z+n}{n}e^{-z\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}\right)}\right\}$$

или

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=\lim_{n\to\infty}\left\{e^{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}-\ln n\right)z}\,z\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}}\right\}. \tag{132}$$

При беспредельном возрастании целого числа $n$ написанное конечное произведение превратится в бесконечное произведение

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}}. \tag{133}$$

Это бесконечное произведение построено точно по тому правилу, по которому строится бесконечное произведение Вейерштрасса [69], причем в данном случае $a_k=-k$, и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^m}$$

сходится при $m=2$. Таким образом, в первой части (132) последний множитель стремится к определенному конечному пределу (133).

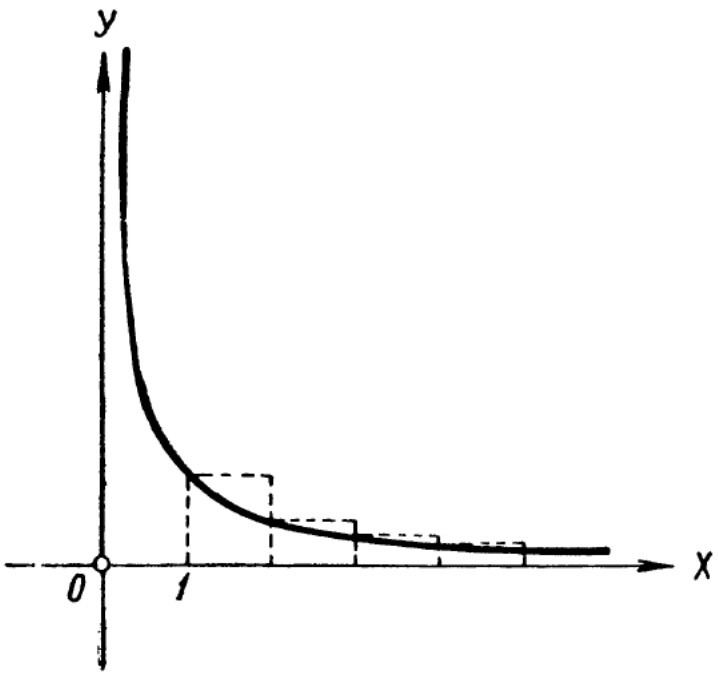



Рис. 62.

Покажем теперь, что и переменная

$$u_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n \tag{134}$$

стремится к определенному пределу. Для этого достаточно показать, что переменная

$$v_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)}-\ln n=u_n-\frac{1}{n} \tag{135}$$

имеет конечный предел. Тот же предел будет, очевидно, и у переменной $u_n$. Рассмотрим ветвь равнобочной гиперболы $y=\frac{1}{x}$, лежащую в первом координатном углу. Число $\frac{1}{k}$ будет ординатой этой ветви при $x=k$. Величина $\ln n$ равна, очевидно, площади, ограниченной нашей гиперболой, осью $OX$ и ординатами $x=1$ и $x=n$, а сумма

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}$$

представляет собою сумму площадей выходящих прямоугольников, основания которых равны единице (рис. 62). Отсюда непосредственно вытекает, что разность (135) возрастает при возрастании $n$. С другой стороны, эта разность будет, очевидно, меньше разности пло-

щадей выходящих и входящих прямоугольников, а эта последняя разность равна, очевидно, $\left(1-\frac{1}{n}\right)$. Таким образом, наша переменная $v_n$ будет возрастающая, ограниченная переменная, и, следовательно, она имеет предел.

Этот предел $C$ называется обычно постоянной Эйлера. Его величина с точностью до седьмого десятичного знака выражается следующим числом:

$$C=0{,}5772157\ldots \tag{136}$$

Окончательно формула (132) дает нам в пределе

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=e^{Cz}z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}}. \tag{137}$$

В правой части последней формулы стоит целая функция от $z$, имеющая простые корни $z=0,\ -1,\ -2,\ \ldots$ Формула (137) установлена нами лишь на положительной части вещественной оси. В силу основного принципа аналитического продолжения можно утверждать, что она справедлива при всех $z$, и, таким образом, *функция* $\frac{1}{\Gamma(z)}$ *есть целая функция, а формула* (137) *дает ее представление в виде бесконечного произведения.*

Мы доказали, что $\frac{1}{\Gamma(z)}$ есть целая функция, и из этого непосредственно следует, что функция $\Gamma(z)$ не обращается нигде в нуль, т. е. не имеет вовсе корней.

Пользуясь бесконечным произведением (137), мы легко можем доказать формулу (122) из [71]. Действительно, формула (137) дает нам непосредственно

$$\frac{1}{\Gamma(z)\,\Gamma(-z)}=-z^2\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right)$$

или, в силу (93) из [67],

$$\frac{1}{\Gamma(z)\,\Gamma(-z)}=-\frac{z\sin\pi z}{\pi}.$$

Далее, формула (119) дает нам, если заменить в ней $z$ на $(-z)$:

$$\Gamma(-z)=-\frac{\Gamma(1-z)}{z}.$$

Подставляя это выражение $\Gamma(-z)$ в предыдущую формулу, получим формулу (122):

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}.$$

Нам остается теперь убедиться в том, что интеграл (128) при беспредельном возрастании целого числа $n$ стремится к интегралу (111), причем достаточно ограничиться тем случаем, когда $z > 0$. Установим прежде всего оценку разности

$$e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n.$$

Нетрудно проверить, что функция

$$-e^v \left(1 - \frac{v}{n}\right)^n$$

является первообразной для функции

$$e^v \left(1 - \frac{v}{n}\right)^{n-1} \frac{v}{n},$$

и, следовательно,

$$1 - e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = \int_0^t e^v \left(1 - \frac{v}{n}\right)^{n-1} \frac{v}{n}\, dv.$$

Если $0 < t < n$, то подинтегральная функция положительна, и, следовательно, то же можно сказать и о левой части. Заменяя под интегралом $e^v$ на $e^t$ и $\left(1 - \frac{v}{n}\right)^{n-1}$ единицей, получим

$$0 < 1 - e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n < e^t \frac{t^2}{2n}$$

или

$$0 < e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n < \frac{t^2}{2n}. \tag{138}$$

Составим разность:

$$\Gamma(z) - P_n(z) = \int_0^n \left[e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right] t^{z-1}\, dt + \int_n^\infty e^{-t}\, t^{z-1}\, dt. \tag{139}$$

При беспредельном возрастании $n$ второй интеграл справа стремится к нулю, так как интеграл

$$\int_0^\infty e^{-t}\, t^{z-1}\, dt$$

сходится. Остается показать, что и первый интеграл стремится к нулю при $n \to \infty$. Фиксируем $n = n_0$ так, чтобы

$$\int_{n_0}^\infty e^{-t}\, t^{z-1}\, dt < \frac{\varepsilon}{2},$$

где $\varepsilon$ — произвольно заданное малое положительное число.

Мы можем написать

$$\int_0^n \left[e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right] t^{z-1}\, dt =$$

$$= \int_0^{n_0} \left[e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right] t^{z-1}\, dt + \int_{n_0}^n \left[e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right] t^{z-1}\, dt,$$

откуда в силу (138)

$$0<\int_0^n\left[e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right]t^{z-1}\,dt<\frac{1}{2n}\int_0^{n_0}t^{z+1}\,dt+\int_{n_0}^n e^{-t}\,t^{z-1}\,dt,$$

причем во втором интеграле справа мы заменили разность одним уменьшаемым. Подинтегральная функция в этом интеграле положительна и, расширяя промежуток интегрирования, получим

$$0<\int_0^n\left[e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right]t^{z-1}\,dt<\frac{1}{2n}\int_0^{n_0}t^{z+1}\,dt+\int_{n_0}^{\infty} e^{-t}\,t^{z-1}\,dt.$$

При больших $n$ первое слагаемое меньше $\frac{\varepsilon}{2}$, и, следовательно, при всех достаточно больших $n$

$$0<\int_0^n\left[e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right]t^{z-1}\,dt<\varepsilon,$$

т. е. ввиду произвольной малости $\varepsilon$ в формуле (139) первое слагаемое справа также стремится к нулю, т. е. действительно

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}\,dt. \tag{140}$$

Отметим еще некоторые следствия доказанных формул. Беря логарифмическую производную от обеих частей формулы (137), получим

$$\frac{d}{dz}\ln\Gamma(z)=-C-\frac{1}{z}+z\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(z+k)}. \tag{141}$$

Дифференцируем обе части:

$$\frac{d^2}{dz^2}\ln\Gamma(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(z+k)^2}. \tag{142}$$

Пользуясь формулой (130), докажем еще так называемую формулу удвоения:

$$2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\,\Gamma(2z). \tag{143}$$

Выражая функции $\Gamma(z)$ и $\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)$ при помощи формулы (130) и функцию $\Gamma(2z)$ при помощи формулы, которая получается из (130) заменой $n$ на $2n$, получим

$$\frac{2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2z)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2z-1}(n!)^2\,2z\,(2z+1)\dots(2z+2n)}{2n!\,z\left(z+\frac{1}{2}\right)(z+1)\left(z+\frac{3}{2}\right)\dots(z+n)\left(z+n+\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{n^{2z+\frac{1}{2}}}{(2n)^{2z}},$$

или

$$\frac{2^{2z-1}\,\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2z)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-1}\,(n!)^2}{2n!\sqrt{n}}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2z+2n+1}. \qquad (144)$$

Но

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2z+2n+1}=\frac{1}{2},$$

и мы видим, что левая часть формулы (144) не зависит от $z$. Полагая $z=\frac{1}{2}$, получаем

$$\frac{2^{2z-1}\,\Gamma(z)\,\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2z)}=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi},$$

откуда и следует формула (143). Совершенно так же, как и выше, может быть доказана следующая более общая формула:

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(z+\frac{2}{m}\right)\ldots\Gamma\left(z+\frac{m-1}{m}\right)=$$
$$=(2\pi)^{\frac{1}{2}(m-1)}\,m^{\frac{1}{2}-mz}\,\Gamma(mz). \qquad (145)$$

**74. Представление $\Gamma(z)$ контурным интегралом.** Укажем представление функции $\Gamma(z)$ в виде контурного интеграла, справедливое при всяком $z$. Если $z$ находится правее мнимой оси, то мы имеем

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}\,t^{z-1}\,dt. \qquad (146)$$

Рассмотрим подинтегральную функцию

$$e^{-t}\,t^{z-1}=e^{-t}\,e^{(z-1)\ln t} \qquad (147)$$

как функцию комплексного переменного $t$. Эта функция имеет точку разветвления $t=0$. Проведем на плоскости $t$ разрез вдоль положительной части вещественной оси $t$. На разрезанной таким образом плоскости функция (147) будет однозначной, причем мы будем считать $\ln t$ вещественным числом на верхнем берегу разреза, т. е. будем считать $\arg t=0$ на этом берегу. Вместо интегрирования по верхнему берегу вещественной оси рассмотрим новый контур интегрирования $l$, изображенный на рис. 63. Этот контур идет из $+\infty$, обходит вокруг начала и возвращается опять на $+\infty$. В силу теоремы Коши мы можем, не меняя величины интеграла

$$\int_l e^{-t}\,t^{z-1}\,dt \qquad (t^{z-1}=e^{(z-1)\ln t}), \qquad (148)$$

произвольным образом деформировать контур $l$, не затрагивая особой точки $t=0$ и удерживая оба конца контура на $+\infty$. Выясним теперь связь интеграла (148) с функцией $\Gamma(z)$, причем будем считать, что $z$ находится справа от мнимой оси. Деформируя контур $l$, мы можем достигнуть того, чтобы путь интегрирования состоял из следующих трех частей: 1) из отрезка $(+\infty, \varepsilon)$ верхнего берега разреза; 2) из окружности $\lambda_\varepsilon$ с центром $z=0$ и радиусом $\varepsilon$ и 3) из отрезка $(\varepsilon, +\infty)$ нижнего берега разреза. На верхнем берегу в подинтегральной функции (147) $\ln t$ имеет вещественные значения. При переходе на нижний берег $\ln t$ приобретет слагаемое $2\pi i$, так что на нижнем берегу подинтегральная функция будет

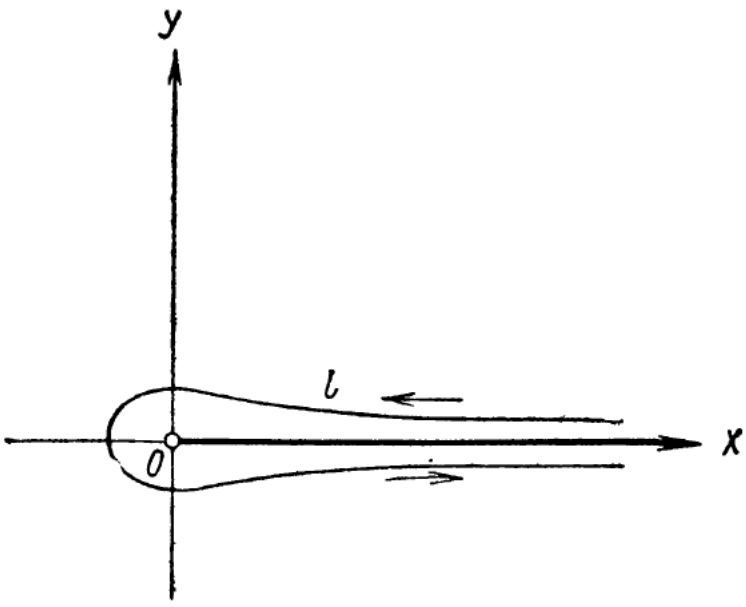


Рис. 63.

$$e^{(z-1)\,2\pi i}\, e^{-t+(z-1)\ln t},$$

где $\ln t$ имеет по-прежнему вещественные значения. Имеем, таким образом,

$$\int_l e^{-t}\, t^{z-1}\, dt = \int_\infty^\varepsilon e^{-t}\, t^{z-1}\, dt + e^{(z-1)\,2\pi i} \int_\varepsilon^\infty e^{-t}\, t^{z-1}\, dt + \int_{\lambda_\varepsilon} e^{-t}\, t^{z-1}\, dt, \quad (149)$$

где $\varepsilon$ — некоторое заданное положительное число. Покажем, что при $\varepsilon \to 0$ интеграл по окружности $\lambda_\varepsilon$ стремится к нулю. Действительно, на этой окружности множитель $e^{-t}$ ограничен по модулю, независимо от $z$, а множитель $t^{z-1}$ имеет оценку

$$|t^{z-1}| = e^{(x-1)\ln|t| - y\arg t} = \varepsilon^{x-1}\, e^{-y\arg t},$$

т. е. будет или величиной бесконечно малой, если $x > 1$, или будет стремиться к бесконечности порядка $\frac{1}{\varepsilon^{1-x}}$. Принимая во внимание, что по предположению $x > 0$ и что длина пути интегрирования будет $2\pi\varepsilon$, мы непосредственно убеждаемся, что упомянутый интеграл действительно стремится к нулю. Таким образом, формула (149) в пределе дает нам

$$(e^{z\,2\pi i} - 1) \int_0^\infty e^{-t}\, t^{z-1}\, dt = \int_l e^{-t}\, t^{z-1}\, dt$$

или, принимая во внимание определение $\Gamma(z)$,

$$\int_l e^{-t}\, t^{z-1}\, dt = (e^{z2\pi i} - 1)\,\Gamma(z). \tag{150}$$

Последнюю формулу можно еще записать в виде

$$\Gamma(z) = \frac{1}{e^{z2\pi i} - 1} \cdot \int_l e^{-t}\, t^{z-1}\, dt. \tag{151}$$

Контур $l$ не проходит через начало координат ($t = 0$), и поэтому мы можем уже не ограничивать себя рассмотрением лишь тех значений $z$, которые лежат справа от мнимой оси. Как и при рассмотрении интеграла (113) из [71], мы можем убедиться, что интеграл (148) представляет целую функцию от $z$. Формула (150) доказана нами лишь для $z$, лежащих правее мнимой оси, но в силу принципа аналитического продолжения она будет справедливой на всей плоскости $z$. Формула (151) дает представление мероморфной функции в виде частного двух целых функций. Знаменатель $(e^{z2\pi i} - 1)$ обращается в нуль при всех целых как положительных, так и отрицательных значениях $z$. Целые отрицательные $z$ и $z = 0$ дают полярность $\Gamma(z)$. Если $z$ равно целому положительному числу, то подинтегральная функция (147) будет однозначной и регулярной функцией от $t$ на всей плоскости (т. е. будет целой функцией от $t$), и по теореме Коши интеграл от нее по замкнутому контуру $l$ будет равен нулю, т. е. при целом положительном $z$ в правой части формулы (151) и числитель и знаменатель обращаются в нуль, и эти значения $z$ не будут полюсами функции $\Gamma(z)$.

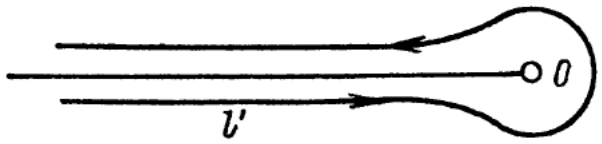



Рис. 64.

Заменим в формуле (150) $z$ на $(1 - z)$:

$$\int_l e^{-t}\, t^{-z}\, dt = (e^{-z2\pi i} - 1)\,\Gamma(1 - z). \tag{152}$$

Введем вместо $t$ новую переменную интегрирования $\tau$, полагая $t = e^{\pi i}\,\tau = -\tau$:

$$\int_l e^{-t}\, t^{-z}\, dt = -\int_{l'} e^{\tau}\,(e^{\pi i}\tau)^{-z}\, d\tau = -e^{-z\pi i} \int_{l'} e^{\tau}\,\tau^{-z}\, d\tau, \tag{153}$$

где $l'$ — контур, изображенный на рис. 64. Плоскость $\tau$ получается из плоскости $t$ вращением около начала на угол $(-\pi)$. Разрез по положительной части вещественной оси плоскости $t$ перешел в разрез по отрицательной части вещественной оси плоскости $\tau$, причем нижний берег нового разреза соответствует верхнему берегу прежнего разреза. На этом нижнем берегу нового разреза мы должны

считать $\arg(e^{\pi i}\tau)=0$, т. е. $\arg\tau=-\pi$. Подставляя выражение (153) в формулу (152) и умножая обе части равенства на $(-e^{\pi zi})$, получим

$$\int_{l'} e^{\tau}\tau^{-z}\,d\tau=(e^{\pi zi}-e^{-\pi zi})\,\Gamma(1-z)$$

или

$$\int_{l'} e^{\tau}\tau^{-z}\,d\tau=2l\sin\pi z\,\Gamma(1-z),$$

откуда, пользуясь формулой (122), получим выражение $\Gamma(z)^{-1}$ в виде контурного интеграла:

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=\frac{1}{2\pi l}\int_{l'} e^{\tau}\tau^{-z}\,d\tau. \tag{154}$$

**75. Формула Стирлинга.** Мы дадим в настоящем номере приближенное выражение $\ln\Gamma(z)$ при больших положительных значениях $z$. Предварительно выведем одну формулу, устанавливающую связь между суммою равноотстоящих значений некоторой функции и интегралом от этой функции.

Пусть $f(x)$ — функция, определенная при $x\geqslant 0$ и имеющая непрерывную производную. Обозначая через $n$ и $k$ — целые неотрицательные числа, причем $k\leqslant n$, можем написать

$$f(n)-f(k)=\int_k^n f'(x)\,dx$$

и, суммируя по $k$ от $k=0$ до $k=n$, получим

$$(n+1)\,f(n)-\sum_{k=0}^{n} f(k)=\sum_{k=0}^{n}\int_k^n f'(x)\,dx. \tag{155}$$

В раскрытом виде правая часть запишется так:

$$\sum_{k=0}^{n}\int_k^n f'(x)\,dx=\int_0^n f'(x)\,dx+\int_1^n f'(x)\,dx+\int_2^n f'(x)\,dx+\ldots+$$

$$+\int_{n-1}^{n} f'(x)\,dx+\int_n^n f'(x)\,dx,$$

причем последнее слагаемое справа, очевидно, равно нулю. Если $m$ — некоторое целое неотрицательное число, меньшее $n$, то в написанной сумме интегрирование по промежутку $(m,\ m+1)$ встретится $m+1$ раз, и мы можем записать формулу (155) в виде

$$(n+1)\,f(n)-\sum_{k=0}^{n} f(k)=\int_0^n\{[x]+1\}\,f'(x)\,dx, \tag{156}$$

где через $[x]$ мы обозначим целую часть положительного числа $x$, так что $[x]=m$ внутри промежутка $(m, m+1)$ и $[m]=m$. Введем в рассмотрение функцию

$$P(x)=[x]-x,$$

которая представляет собою дробную часть числа $x$ со знаком минус. Если прибавить к $x$ единицу, то $[x]$ и $x$ получат слагаемое единицу, а $P(x)$ не изменится, т. е. $P(x)$ имеет период, равный единице. Функция $P(x)$ определена при $x \geqslant 0$, но мы можем, конечно, распространить ее определение и на отрицательные значения $x$ по закону периодичности с периодом единица. Как известно [II, 154], величина интеграла от $P(x)$ по любому промежутку длины единица не зависит от положения этого промежутка. Эта величина дает так называемое *среднее значение* нашей периодической функции. Внутри промежутка (0, 1) мы имеем $P(x)=-x$, и среднее значение $P(x)$ будет

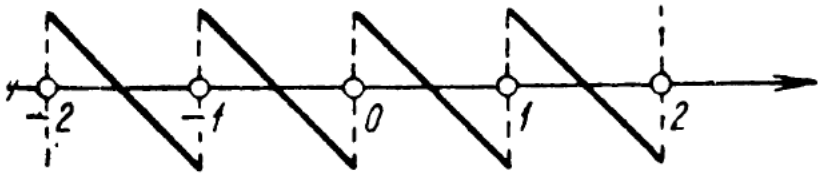


Рис. 65.

$$\int_0^1 P(x)\,dx=-\int_0^1 x\,dx=-\frac{1}{2}.$$

Построим новую функцию с периодом единица:

$$P_1(x)=[x]-x+\frac{1}{2}, \tag{157}$$

среднее значение которой равно нулю. График $P_1(x)$ изображен на рис. 65. Подставим под знак интеграла в формуле (156) вместо $[x]$ его выражение из формулы (157):

$$(n+1)f(n)-\sum_{k=0}^{n} f(k)=\int_0^n \left\{x+\frac{1}{2}+P_1(x)\right\} f'(x)\,dx. \tag{158}$$

Мы имеем, очевидно,

$$\int_0^n \frac{1}{2} f'(x)\,dx=\frac{1}{2}[f(n)-f(0)]$$

и, интегрируя по частям, получим

$$\int_0^n x f'(x)\,dx=nf(n)-\int_0^n f(x)\,dx.$$

Подставляя это в (158), получим следующую формулу:

$$\sum_{k=0}^{n} f(k)=\int_0^n f(x)\,dx+\frac{1}{2}[f(n)+f(0)]-\int_0^n P_1(x) f'(x)\,dx, \tag{159}$$

устанавливающую связь между суммой равноотстоящих значений $f(k)$ функции $f(x)$ и интегралом от этой функции.

Выберем функцию $f(x)$ следующим образом:

$$f(x) = \ln(z+x),$$

где $z$ — некоторое положительное число и значение логарифма берется вещественное. Подставляя в формулу (159) и производя квадратуру в правой части, получим

$$\sum_{k=0}^{n} \ln(z+k) = \left(z+n+\frac{1}{2}\right)\ln(z+n) - \left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z - n - \int_0^n \frac{P_1(x)}{z+x}\,dx.$$

Подставим в эту формулу $z=1$ и полученную новую формулу почленно вычтем из предыдущей. Кроме того, из обеих частей полученного равенства вычтем $(z-1)\ln n$. Таким образом, получим

$$\sum_{k=0}^{n} \ln\frac{z+k}{1+k} - (z-1)\ln n = (z-1)\ln\left(1+\frac{z}{n}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{z-1}{1+n}\right) +$$

$$+ (1+n)\ln\left(1+\frac{z-1}{1+n}\right) - \left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z - \int_0^n \frac{P_1(x)}{z+x}\,dx + \int_0^n \frac{P_1(x)}{1+x}\,dx.$$

При стремлении $n$ к бесконечности первые два слагаемых правой части стремятся к нулю, а третье слагаемое имеет предел

$$\lim_{n\to\infty}(1+n)\ln\left(1+\frac{z-1}{1+n}\right) = \lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{z-1}{1+n}\right)^{1+n} = \ln e^{z-1} = z-1.$$

Мы можем, таким образом, написать

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left[\frac{z(z+1)\ldots(z+n)}{1\cdot 2\ldots n}\,n^{-z}\cdot\frac{n}{n+1}\right] =$$

$$= (z-1) + \left(\frac{1}{2}-z\right)\ln z - \int_0^\infty \frac{P_1(x)}{z+x}\,dx + \int_0^\infty \frac{P_1(x)}{1+x}\,dx$$

или [73]

$$\ln\Gamma(z) = \left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z - z + 1 - \int_0^\infty \frac{P_1(x)}{1+x}\,dx + \int_0^\infty \frac{P_1(x)}{z+x}\,dx. \qquad (160)$$

Принимая во внимание, что среднее значение $P_1(x)$ равно нулю, можно утверждать, что функция

$$Q(x) = \int_0^x P_1(x)\,dx \qquad (161)$$

есть непрерывная периодическая функция с периодом единица и $Q(0)=0$. Эта функция тем самым ограничена. Отметим, что отсюда следует, что оба интеграла, входящие в формулу (160), сходятся [II, 86].

Если $0 \leqslant x < 1$, то $[x]=0$ и формула (157) дает

$$Q(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{2}-x\right)dx = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} \quad (0 \leqslant x \leqslant 1),$$

откуда непосредственно следует

$$0 \leqslant Q(x) \leqslant \frac{1}{8}. \tag{162}$$

Производя интегрирование по частям, получим

$$\int_0^\infty \frac{P_1(x)}{z+x}\,dx = \int_0^\infty \frac{Q'(x)}{z+x}\,dx =$$

$$= \int_0^\infty \frac{Q(x)}{(z+x)^2}\,dx + \left[\frac{Q(x)}{z+x}\right]_{x=0}^{x=\infty} = \int_0^\infty \frac{Q(x)}{(z+x)^2}\,dx, \tag{163}$$

причем внеинтегральный член при $x=\infty$ обращается в нуль.

Эти рассуждения показывают, между прочим, что упомянутые интегралы имеют смысл. Вводя вместо $x$ новую переменную интегрирования $t$ по формуле $x=zt$, получим

$$\int_0^\infty \frac{P_1(x)}{z+x}\,dx = \frac{1}{z}\int_0^\infty \frac{Q(zt)}{(1+t)^2}\,dt.$$

Мы имеем, далее, в силу (162)

$$\left|\int_0^\infty \frac{P_1(x)}{z+x}\,dx\right| \leqslant \frac{1}{z}\int_0^\infty \frac{Q(zt)}{(1+t)^2}\,dt \leqslant \frac{1}{8z}\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t)^2} = \frac{1}{8z}.$$

Введем для краткости некоторое обозначение, которым мы будем часто пользоваться ниже. Пусть $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — две функции, определенные при всех достаточно больших $z$, и отношение $\varphi(z):\psi(z)$ остается ограниченным при $z \to +\infty$. Этот факт мы будем записывать в виде

$$\varphi(z) = O(\psi(z)).$$

Предыдущее утверждение об интеграле (163) запишется при этом в виде

$$\int_0^\infty \frac{P_1(x)}{z+x}\,dx = O\left(\frac{1}{z}\right) \tag{164}$$

и формула (160) — в виде

$$\ln \Gamma(z) = \left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z - z + C + O\left(\frac{1}{z}\right) \tag{165}$$

или

$$\ln \Gamma(z) = \left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z - z + C + \omega(z), \tag{166}$$

где

$$|\omega(z)| \leqslant \frac{1}{8z} \tag{167}$$

и через $C$ мы обозначили постоянную

$$C = 1 - \int_0^\infty \frac{P_1(x)}{1+x}\,dx.$$

Займемся теперь определением значения этой постоянной. Для этого воспользуемся так называемой *формулой Валлиса*, выражающей $\frac{\pi}{2}$ в виде предела некоторой дроби:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \to \infty} \frac{2^2 \cdot 4^2 \dots (2n-2)^2 \cdot 2n}{1^2 \cdot 3^2 \dots (2n-1)^2}. \tag{168}$$

Чтобы не прерывать изложения, докажем эту формулу в конце настоящего номера.

Мы можем переписать формулу (168) в виде

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \lim_{n \to \infty} \frac{2^{2n-\frac{1}{2}} (n!)^2 n^{-\frac{1}{2}}}{(2n)!},$$

откуда, логарифмируя и принимая во внимание, что $m! = \Gamma(m+1)$ при целом положительном $m$, получим

где множитель $\varepsilon(z) = e^{\omega(z)}$ стремится к единице при беспредельном возрастании $z$. Если $z$ равно целому положительному числу $m$, то, умножая обе части равенства на $m$, получим

$$m! = \sqrt{2\pi m}\left(\frac{m}{e}\right)^m \varepsilon_m, \tag{171}$$

где $\varepsilon_m \to 1$ при возрастании $m$.

Как мы знаем, функция $\Gamma(z)$ не имеет корней и $\ln\Gamma(z)$ есть однозначная регулярная функция на плоскости $z$ с разрезом вдоль отрицательной части вещественной оси. Если выделить этот разрез сколь угодно малым сектором с вершиной в начале, то к оставшейся части плоскости применима формула (169). Это утверждение можно доказать совершенно так же, как выше была доказана формула (169) при $z > 0$. При этом мы должны на упомянутой выше плоскости с разрезом брать те значения $\ln z$ и $\ln\Gamma(z)$, которые имеют вещественные значения при $z > 0$.

Формула Валлиса. Докажем теперь формулу Валлиса, которой мы пользовались выше. Мы имели раньше [I, 100] следующие формулы:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} x\,dx = \frac{(2k-1)(2k-3)\ldots 3\cdot 1}{2k(2k-2)\ldots 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+1} x\,dx = \frac{2k(2k-2)\ldots 4\cdot 2}{(2k+1)(2k-1)\ldots 5\cdot 3}.$$

Принимая во внимание, что при увеличении $n$ степень $\sin^n x$ уменьшается, можем написать

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+1} x\,dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} x\,dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k-1} x\,dx,$$

т. е.

$$\frac{2k(2k-2)\ldots 4\cdot 2}{(2k+1)\cdot(2k-1)\ldots 5\cdot 3} < \frac{(2k-1)\cdot(2k-3)\ldots 3\cdot 1}{2k\cdot(2k-2)\ldots 4\cdot 2}\,\frac{\pi}{2} < \frac{(2k-2)(2k-4)\ldots 4\cdot 2}{(2k-1)(2k-3)\ldots 5\cdot 3},$$

откуда следует, если заменить $k$ на $n$:

$$\frac{\pi}{2} > \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1},$$

$$\frac{\pi}{2} < \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n-2}{2n-3}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n-1}.$$

Обозначая

$$P_n = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n-2}{2n-3}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n-1},$$

можно написать

$$P_n\cdot\frac{2n}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < P_n.$$

При $n \to +\infty$ дробь, стоящая слева, стремится к единице, и, следовательно,

$$\lim P_n = \frac{\pi}{2},$$

что и дает формулу Валлиса.

**76. Формула суммирования Эйлера.** Вернемся к рассмотрению формулы (159). Производя в последнем интеграле правой части несколько раз интегрирование по частям, мы можем написать правую часть в развернутом виде. При помощи формулы (161) мы определили функцию $Q(x)$ с периодом единица, такую, что $Q'(x) = P_1(x)$. Добавляя к $Q(x)$ постоянное слагаемое, мы можем добиться того, чтобы среднее значение этой функции, как и у $P_1(x)$, было равно нулю. Меняя еще у полученной функции знак, получим функцию $P_2(x)$ с периодом, равным единице, и со средним значением, равным нулю, такую, что $P_2'(x) = -P_1(x)$. Но $P_1(x) = -x + \frac{1}{2}$ при $0 \leqslant x < 1$, так что

$$P_2(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + C \qquad (0 \leqslant x < 1),$$

и, определяя $C$ из условия

$$\int_0^1 P_2(x)\,dx = 0,$$

получим окончательно

$$P_2(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12} \qquad (0 \leqslant x < 1).$$

В данном случае $P_2(0) = P_2(1) = \frac{1}{12}$; при периодическом повторении $P_2(x)$ дает непрерывную периодическую функцию, и написанная выше формула годится для всего замкнутого промежутка $0 \leqslant x \leqslant 1$. Далее мы можем совершенно так же определить функцию $P_3(x)$ с периодом единица и со средним значением, равным нулю, такую, что $P_3'(x) = P_2(x)$. Мы получим для этой функции следующее выражение в основном промежутке (0, 1):

$$P_3(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{12}.$$

Продолжая так и дальше, мы сможем строить функции $P_n(x)$ с периодом единица и со средним значением, равным нулю, такие, что

$$P_{2m}'(x) = -P_{2m-1}(x); \quad P_{2m+1}'(x) = P_{2m}(x). \tag{172}$$

Можно разложить все эти периодические функции в ряды Фурье; во всех этих рядах Фурье свободные члены будут равны нулю, ибо средние значения функций равны нулю. Из черт. 65 видно, что $P_1(x)$ есть нечетная функция. Определяя ее коэффициенты Фурье по обычному правилу Фурье, получим

$$P_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi x}{n\pi}.$$

Точно так же для следующей функции $P_2(x)$ будем иметь

$$P_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\pi x}{2n^2\pi^2}.$$

Заметим, что этот ряд может быть получен непосредственно почленным интегрированием и переменой знака из ряда $P_1(x)$, что соответствует соотношению $P_2'(x) = -P_1(x)$. Ряд для $P_2(x)$ сходится равномерно при всех вещественных значениях $x$. Принимая во внимание соотношения (172), мы можем получить ряды Фурье для следующих функций $P_n(x)$ при помощи последовательного почленного интегрирования, причем свободные члены этих рядов Фурье надо считать равными нулю.

Таким образом, мы будем иметь

$$P_{2m}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\pi x}{2^{2m-1}n^{2m}\pi^{2m}}, \quad P_{2m+1}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi x}{2^{2m}n^{2m+1}\pi^{2m+1}}. \tag{173}$$

Из этих формул вытекает, между прочим,

$$P_{2m}(0) = \frac{1}{2^{2m-1}\pi^{2m}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m}}, \quad P_{2m+1}(0) = 0.$$

Для удобства дальнейших выкладок обозначим

$$P_{2m}(0) = \frac{1}{2^{2m-1}\pi^{2m}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m}} = \frac{B_m}{(2m)!}, \tag{174}$$

где $B_m$ — так называемые *числа Бернулли*.

Вернемся к формуле (159). Производя интегрирование по частям и принимая во внимание, что

$$P_{2m}(0) = P_{2m}(n) = \frac{B_m}{(2m)!}, \quad P_{2m+1}(0) = P_{2m+1}(n) = 0,$$

получим

$$-\int_0^n P_1(x) f'(x)\,dx = \int_0^n P_2'(x) f'(x)\,dx =$$

$$= \frac{B_1}{2!}[f'(n) - f'(0)] - \int_0^n P_2(x) f''(x)\,dx =$$

$$= \frac{B_1}{2!}[f'(n) - f'(0)] - \int_0^n P_3'(x) f''(x)\,dx = \frac{B_1}{2!}[f'(n) - f'(0)] +$$

$$+ \int_0^n P_3(x) f'''(x)\,dx = \frac{B_1}{2!}[f'(n) - f'(0)] - \int_0^n P_4'(x) f'''(x)\,dx =$$

$$= \frac{B_1}{2!}[f'(n) - f'(0)] - \frac{B_2}{4!}[f'''(n) - f'''(0)] + \int_0^n P_4(x) f^{(IV)}(x)\,dx,$$

продолжая так и дальше, получаем формулу суммирования Эйлера:

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) = \int_0^n f(x)\,dx + \frac{1}{2}[f(0)+f(n)] + \frac{B_1}{2!}[f'(n)-f'(0)] -$$
$$- \frac{B_2}{4!}[f'''(n)-f'''(0)] + \ldots + (-1)^m \frac{B_{m+1}}{(2m+2)!}[f^{(2m+1)}(n)-f^{(2m+1)}(0)] +$$
$$+ (-1)^m \int_0^n P_{2m+3}(x)\, f^{(2m+3)}(x)\,dx. \qquad (175)$$

При этих вычислениях мы предполагали, конечно, что $f(x)$ при $x \geqslant 0$ имеет непрерывные производные до порядка $(2m+3)$ включительно.

Последнее слагаемое правой части дает остаточный член формулы Эйлера. Из формулы (174) легко заключить, что числа $B_n$ быстро растут при возрастании $n$, и соответствующий формуле Эйлера бесконечный ряд обычно оказывается расходящимся. Все же формулой (175) иногда удобно пользоваться для приближенного вычисления суммы, стоящей в левой ее части.

Перепишем формулу (160), подставляя вместо $C$ найденное выше ее значение:

$$\ln\Gamma(z) = \ln\sqrt{2\pi} + \left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z - z + \int_0^\infty \frac{P_1(x)}{z+x}\,dx.$$

Производя в интеграле, как и выше, интегрирование по частям, принимая во внимание, что $P_n(x)$ остаются ограниченными при всех вещественных $x$, и формулы (174), будем иметь при $z>0$

$$\ln\Gamma(z) = \ln\sqrt{2\pi} + \left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z - z + \frac{B_1}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{z} - \frac{B_2}{3\cdot 4}\cdot\frac{1}{z^3} +$$
$$+ \frac{B_3}{5\cdot 6}\cdot\frac{1}{z^5} - \ldots + (-1)^{m-1}\frac{B_m}{(2m-1)\,2m}\cdot\frac{1}{z^{2m-1}} +$$
$$+ (-1)^{m-1}(2m)! \int_0^\infty \frac{P_{2m+1}(x)}{(z+x)^{2m+1}}\,dx.$$

Совершенно так же, как в предыдущем номере, мы можем показать, что последний интеграл, умноженный на $z^{2m+1}$, остается ограниченным при $z \to +\infty$, т. е. что

$$\int_0^\infty \frac{P_{2m+1}(x)}{(z+x)^{2m+1}}\,dx = O\left(\frac{1}{z^{2m+1}}\right),$$

и предыдущую формулу можно записать в виде

$$\ln\Gamma(z) = \ln\sqrt{2\pi} + \left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z - z + \frac{B_1}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{z} - \frac{B_2}{3\cdot 4}\cdot\frac{1}{z^3} + \ldots +$$
$$+ (-1)^{m-1}\frac{B_m}{(2m-1)\,2m}\cdot\frac{1}{z^{2m-1}} + O\left(\frac{1}{z^{2m+1}}\right). \qquad (176)$$

Если мы, вычеркнув остаточный член, напишем соответствующий бесконечный ряд, то он окажется расходящимся при всяком $z$. Если же мы фиксируем $m$, то остаточный член при $z \to +\infty$ будет величиной бесконечно малой более высокого порядка, а именно порядка $\frac{1}{z^{2m+1}}$, чем последний из оставленных членов, который имеет порядок $\frac{1}{z^{2m-1}}$.

Формула (176), как и (169), годится на плоскости комплексного переменного $z$, из которой вырезан любой, сколь угодно малый, но фиксированный сектор с биссектрисой, направленной по отрицательной части вещественной оси. Если $z$ положительно, то можно более точно оценить остаточный член, и имеет место формула

$$\ln \Gamma(z) = \ln \sqrt{2\pi} + \left(z - \frac{1}{2}\right) \ln z - z + \frac{B_1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{z} - \frac{B_2}{3 \cdot 4} \cdot \frac{1}{z^3} + \ldots +$$

$$+ (-1)^{m-1} \frac{B_m}{(2m-1)\,2m} \cdot \frac{1}{z^{2m-1}} + \theta_m (-1)^m \frac{B_{m+1}}{(2m+1)\,(2m+2)} \cdot \frac{1}{z^{2m+1}}, \quad (176_1),$$

где $0 < \theta_m < 1$. На доказательстве этой формулы мы останавливаться не будем.

**77. Числа Бернулли.** Мы определили числа Бернулли при помощи равенств

$$B_m = \frac{(2m)!}{2^{2m-1}\pi^{2m}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m}}. \quad (177)$$

Сейчас покажем, что эти числа могут быть постепенно определены совершенно элементарно и что все они суть рациональные числа.

Напишем разложение $\operatorname{ctg} z$ на простейшие дроби [65]:

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}' \left(\frac{1}{z - k\pi} + \frac{1}{k\pi}\right),$$

или

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - k^2\pi^2},$$

или, переходя к показательным функциям согласно формулам Эйлера,

$$i \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{e^{zi} - e^{-zi}} = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - k^2\pi^2}.$$

Положим $z = \frac{u}{2i}$:

$$\frac{e^{\frac{u}{2}} + e^{-\frac{u}{2}}}{e^{\frac{u}{2}} - e^{-\frac{u}{2}}} = \frac{2}{u} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u}{4k^2\pi^2 + u^2},$$

т. е.

$$\frac{e^u + 1}{e^u - 1} = \frac{2}{u} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u}{4k^2\pi^2 + u^2},$$

или

$$\frac{2}{e^u-1}+1=\frac{2}{u}+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u}{4k^2\pi^2+u^2}.$$

Последнюю формулу можно переписать в виде

$$\frac{u}{e^u-1}-1+\frac{u}{2}=2u^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2\pi^2+u^2}. \tag{178}$$

Мы можем написать

$$\frac{u^2}{4k^2\pi^2+u^2}=-\sum_{p=1}^{\infty}\left(-\frac{u^2}{4k^2\pi^2}\right)^p \qquad (|u|<2k\pi).$$

Подставляя это в формулу (178), получим

$$\frac{u}{e^u-1}-1+\frac{u}{2}=-2\sum_{k=1}^{\infty}\left[\sum_{p=1}^{\infty}\left(-\frac{u^2}{4k^2\pi^2}\right)^p\right].$$

Применяя следствие из теоремы Вейерштрасса о сложении степенных рядов [14], можем правую часть представить в виде ряда по целым положительным степеням $u$ при $|u|<2\pi$:

$$\frac{u}{e^u-1}-1+\frac{u}{2}=2\left[\frac{s_2u^2}{(2\pi)^2}-\frac{s_4u^4}{(2\pi)^4}+\frac{s_6u^6}{(2\pi)^6}-\dots\right],$$

где мы положили для краткости

$$s_p=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\dots$$

Вспоминая формулу (177), можем написать

$$\frac{u}{e^u-1}=1-\frac{u}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}B_m\frac{u^{2m}}{(2m)!}. \tag{179}$$

Функция, стоящая слева, имеет особые точки, ближайшие к началу: $u=\pm 2\pi i$, так что написанный степенной ряд имеет круг сходимости $|u|<2\pi$. Производя деление $u$ на ряд

$$e^u-1=\frac{u}{1!}+\frac{u^2}{2!}+\frac{u^3}{3!}+\dots,$$

сможем получать последовательно числа Бернулли $B_m$. Приведем значения первых из этих чисел:

$$B_1=\frac{1}{6};\quad B_2=\frac{1}{30};\quad B_3=\frac{1}{42};\quad B_4=\frac{1}{30};\quad B_5=\frac{5}{66};\quad B_6=\frac{691}{2730}.$$

**78. Метод скорейшего спуска.** Изложим в следующих номерах метод приближенного вычисления контурных интегралов определенного типа. Предварительно мы выясним некоторые вопросы, связанные с изменением вещественной и мнимой частей регулярной функции. Пусть в области $B$ имеется функция

$$f(z) = u(x, y) + v(x, y)\, i.$$

В каждой точке $B$, в которой производная $f'(z)$ отлична от нуля, будет существовать направление $l$, в котором $u(x, y)$ меняется наиболее быстро. Это направление $l$ есть направление вектора $\operatorname{grad} u(x, y)$, и производная, взятая в этом направлении (и в противоположном направлении), имеет наибольшее по абсолютной величине значение. Производная от $u(x, y)$ в направлении $n$, перпендикулярном к $l$, равна, очевидно, нулю [II, 108]. Поле направлений $n$ определяет линии уровня $u(x, y) = \text{const}$, а ортогональное поле $l$ определяет семейство ортогональных траекторий к этим линиям уровня, т. е. семейство $v(x, y) = \text{const}$ [29]. Таким образом, можно сказать, что в каждой точке, где $f'(z)$ отлично от нуля, $u(x, y)$ изменяется наиболее быстро вдоль линии $v(x, y) = \text{const}$. Отметим, что при этом $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ вдоль упомянутой линии отлично от нуля. Если бы оказалось, что в некоторой точке не только $\dfrac{\partial u}{\partial n}$, но и $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ равно нулю, то в этой точке производная от $u$ по любому направлению была бы равна нулю, а отсюда следует, что в этой точке и производная $f'(z)$ обращается в нуль.

Исследуем теперь расположение наших линий в окрестности точки $z_0$, в которой $f'(z_0) = 0$. Мы имеем в окрестности такой точки

$$f(z) - f(z_0) = (z - z_0)^p [b_0 + b_1 (z - z_0) + \ldots] \quad (p \geqslant 2;\ b_0 \neq 0). \tag{180}$$

Обозначая

$$b_\nu = r_\nu e^{i\beta\nu}, \quad z - z_0 = \rho e^{i\omega} \quad (r_0 \neq 0) \tag{181}$$

и приравнивая вещественную и мнимую части разности $f(z) - f(z_0)$ нулю, получим следующие уравнения линий $u(x, y) = \text{const}$ и $v(x, y) = \text{const}$ в окрестности $z_0$:

$$\Phi_1(\rho, \omega) = r_0 \cos(\beta_0 + p\omega) + r_1\rho \cos[\beta_1 + (p+1)\omega] + r_2\rho^2 \cos[\beta_2 + (p+2)\omega] + \ldots = 0, \tag{182}$$

$$\Phi_2(\rho, \omega) = r_0 \sin(\beta_0 + p\omega) + r_1\rho \sin[\beta_1 + (p+1)\omega] + r_2\rho^2 \sin[\beta_2 + (p+2)\omega] + \ldots = 0. \tag{183}$$

Рассмотрим уравнение (182). При $\rho = 0$ получаем

$$\cos(\beta_0 + p\omega) = 0,$$

т. е.

$$\beta_0 + p\omega = (2m+1)\frac{\pi}{2},$$

где $m$ — любое целое число. Полагая $m = 0, 1, \ldots, 2p-1$, получаем все различные решения уравнения (182) относительно $\omega$ при $\rho = 0$:

$$\omega_m = -\frac{\beta_0}{p} + \frac{2m+1}{2p}\pi \quad (m = 0, 1, 2, \ldots, 2p-1). \tag{184}$$

Нетрудно видеть, что

$$\left.\frac{\partial \Phi_1}{\partial \omega}\right|_{\rho=0,\ \omega=\omega_m} \neq 0,$$

и, следовательно, согласно теореме о неявных функциях [I, 159], уравнение (182) имеет $2p$ решений для $\omega$, непрерывных по отношению к $\rho$ и стремящихся к $\omega_m$ при $\rho = 0$, т. е. уравнению (182) соответствуют $2p$ линий, выходящих из точки $z_0$ и имеющих в этой точке касательные с аргументами $\omega_m$. Но $\omega_{m+p} = \omega_m + \pi$, и мы будем иметь $p$ линий, проходящих через точку $z_0$ и имеющих в этой точке определенную касательную. Эти линии разобьют окрестность $z_0$ на $2p$ криволинейных секторов с одинаковыми углами $\frac{\pi}{p}$ при вершине. Внутри этих секторов, в окрестности $z_0$, мы будем иметь попеременно $\Phi_1(\rho, \omega) < 0$ и $\Phi_1(\rho, \omega) > 0$, а именно:

$$\text{при } \frac{\pi}{2} + m\pi < \beta_0 + p\omega < \frac{\pi}{2} + (m+1)\pi$$

$$\Phi_1(\rho, \omega) \begin{cases} < 0, & \text{если } m \text{ четно,} \\ > 0, & \text{если } m \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Это следует непосредственно из того, что знак левой части уравнения (182) при заданном $\omega$, отличном от (184), и $\rho$ достаточно близком к нулю определяется знаком первого слагаемого.

Рассматривая совершенно так же уравнение (183), мы убедимся в том, что это уравнение определяет $p$ линий, проходящих через точку $z_0$, причем касательные к этим линиям служат биссектрисами углов, определяемых касательными к линиям (182).

Точку $z_0$ назовем седловой точкой, секторы $\Phi_1(\rho, \omega) < 0$ — отрицательными секторами и секторы $\Phi_1(\rho, \omega) > 0$ — положительными секторами.

При нумерации секторов (число $m$) мы, естественно, считаем, что $\beta_0 = \arg f^{(p)}(z_0)$ — фиксированное число. При добавлении к $\beta_0$ слагаемого, кратного $2\pi$, меняется лишь нумерация секторов. Рассмотрим отрицательный сектор с номером $2j$. Линия $l$, имеющая уравнение $v(x, y) - v(x_0, y_0) = 0$, т. е. $v(x, y) = \text{const}$, и расположенная в этом секторе вблизи точки $z_0 = x_0 + iy_0$, имеет в точке $z_0$ касательную, являющуюся биссектрисой угла этого сектора, и угол наклона этой касательной, как нетрудно видеть, равен

$$\omega_j = -\frac{\arg f^{(p)}(z_0)}{p} + \frac{2j+1}{p}\pi. \tag{185}$$

Внутри этого сектора $u(x, y) - u(x_0, y_0) < 0$, а линия $l$ есть линия скорейшего убывания в точке $z_0$ функции $u(x, y)$. Все это относится к некоторой окрестности точки $z_0$.

Применим сказанное выше к вычислению интегралов вида

$$I_n(l) = \int_l (z - z_0)^{\alpha-1} F(z) [\varphi(z)]^n dz = \int_l (z - z_0)^{\alpha-1} F(z) e^{nf(z)} dz, \tag{186}$$

где $\operatorname{Re}\alpha > 0$, функции $F(z)$ и $f(z)$ регулярны в окрестности точки $z_0$ и $n$ — большое положительное число. Положим, что контур $l$ имеет начало в точке $z_0$ и расположен в окрестности $z_0$ в отрицательном секторе с номером $m = 2j$. Согласно теореме Коши мы можем считать, что контур $l$ расположен в окрестности $z = z_0$ вдоль линии $v(x, y) - v(x_0, y_0) = 0$. При этом $|e^{nf(z)}| = e^{nu(x,y)}$ имеет при большом $n$ в точке $z = z_0$ резкий максимум. Линия $l$ есть *линия скорейшего спуска*, т. е. быстрейшего уменьшения $e^{nu(x,y)}$, и надо ожидать, что главную часть интегралу (186) даст интегрирование по малому участку линии $l$ вблизи точки $z_0$.

**79. Асимптотическое разложение интеграла.** Вернемся к рассмотрению интеграла (186). Пусть $F(z)$ и $f(z)$ регулярны в некотором круге

$$|z-z_0|\leqslant R \tag{187}$$

и имеют разложения

$$\begin{aligned} F(z) &= F(z_0)+\frac{F'(z_0)}{1!}(z-z_0)+\frac{F''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+\ldots, \\ f(z) &= f(z_0)+\frac{f^{(p)}(z_0)}{p!}(z-z_0)^p+\frac{f^{(p+1)}(z_0)}{(p+1)!}(z-z_0)^{p+1}+\ldots \quad (f^{(p)}(z_0)\neq 0). \end{aligned} \tag{188}$$

Предположим, далее, что вне круга (187) на контуре интегрирования $l$ выполняется неравенство

$$\operatorname{Re}[f(z_0)-f(z)]\geqslant \Delta>0 \tag{189}$$

и существует такое $n_0$, что

$$\int_l |(z-z_0)^{\alpha-1}F(z)\,e^{n_0 f(z)}|\,ds\leqslant M, \tag{190}$$

где $\Delta$ и $M$ — определенные положительные числа. Из (189) и (190), как мы увидим, следует, что интеграл (186) абсолютно сходится при $n\geqslant n_0$. Конечность или бесконечность пути интегрирования $l$ при этом не играет роли. Отметим еще, что значение функции $(z-z_0)^{\alpha-1}$ будет фиксировано на начальном участке $l$, а тем самым и на всем контуре. Перепишем интеграл (186) в виде

$$I_n(l)=e^{nf(z_0)}\int_l (z-z_0)^{\alpha-1}F(z)\,e^{n[f(z)-f(z_0)]}\,dz. \tag{191}$$

Обозначим через $l_0$ и $l_1$ части $l$, расположенные соответственно внутри и вне круга (187), и оценим интеграл

$$K_n(l_1)=\int_{l_1}(z-z_0)^{\alpha-1}F(z)\,e^{n[f(z)-f(z_0)]}\,dz.$$

Используя (189) и (190) и выбирая $n>n_0$, получаем

$$\begin{aligned} |K_n(l_1)| &\leqslant \int_{l_1}|(z-z_0)^{\alpha-1}F(z)|\,e^{n\operatorname{Re}[f(z)-f(z_0)]}\,ds= \\ &=\int_{l_1}|(z-z_0)^{\alpha-1}F(z)|\,e^{n_0\operatorname{Re}[f(z)-f(z_0)]}\cdot e^{-(n-n_0)\operatorname{Re}[f(z_0)-f(z)]}\,ds\leqslant \\ &\leqslant e^{-n_0\operatorname{Re}f(z_0)}M\cdot e^{-(n-n_0)\Delta}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$K_n(l_1)=O(e^{-n\Delta}),$$

т. е. при $n\to\infty$ интеграл по $l_1$ убывает по показательному закону и тем самым быстрее любой отрицательной степени $n$. В оставшемся интеграле по $l_0$ мы выделим члены различного порядка относительно $n^{-1}$. Введем следующее обозначение:

$$K_n(l_0)=\int_{l_0}(z-z_0)^{\alpha-1}F(z)\,e^{n[f(z)-f(z_0)]}\,dz,$$

и перейдем от переменной $z$ к новой переменной $\tau$, положив

$$\tau^p=f(z_0)-f(z).$$

В силу сказанного выше $f(z_0)-f(z)\geqslant 0$ на $l_0$, так что $\tau>0$ на $l_0$. Принимая во внимание разложение для $f(z)$, получаем [23]

$$\tau=\sqrt[p]{\frac{-f^{(p)}(z_0)}{p!}}(z-z_0)\left[1+\frac{f^{(p+1)}(z_0)}{(p+1)f^{(p)}(z_0)}(z-z_0)+\ldots\right]^{\frac{1}{p}}=$$
$$=\sqrt[p]{\frac{-f^{(p)}(z_0)}{p!}}(z-z_0)\left[1+\frac{f^{(p+1)}(z_0)}{p(p+1)f^{(p)}(z_0)}(z-z_0)+\ldots\right]. \qquad (192)$$

Как упомянуто выше, мы выбираем при определении $\tau$ ту ветвь корня, которая отображает контур $l_0$ на положительную часть вещественной оси плоскости $\tau=s+it$. Для этого надо иметь

$$\sqrt[p]{-\frac{f^{(p)}(z_0)}{p!}}=\sqrt[p]{\frac{|f^{(p)}(z_0)|}{p!}}e^{-i\omega_j},$$

где $\omega_j$ определяется формулой (185) и в правой части надо брать арифметическое значение корня. Степенной ряд (192) имеет однозначное обращение

$$z(\tau)=z_0+a_1\tau+a_2\tau^2+\ldots, \qquad (193)$$

где

$$a_1=\left(\left|\frac{f^{(p)}(z_0)}{p!}\right|\right)^{-\frac{1}{p}}e^{i\omega_j}. \qquad (194)$$

Мы можем считать, что число $R$ в неравенстве (187) было выбрано настолько малым, что круг $|z-z_0|\leqslant R$, согласно формуле (193), получается из некоторой области, содержащейся в круге $|\tau|<\rho$, в котором функция $z(\tau)$ регулярна.

Будем считать, что концу контура $l_0$, расположенному на окружности $|z-z_0|=R$, соответствует значение $\tau=t_1>0$, так что контур $l_0$ отображается в отрезок $0\leqslant\tau\leqslant t_1$ вещественной оси.

Выполняя в интеграле указанную замену переменных, получаем

$$K_n(l_0)=\int_0^{t_1}[z(\tau)-z_0]^{\alpha-1}F[z(\tau)]\,z'(\tau)\,e^{-n\tau^p}d\tau. \qquad (195)$$

На интервале $0\leqslant\tau\leqslant t_1$ множитель, стоящий при экспоненте под знаком интеграла (195), может быть записан в виде

$$[z(\tau)-z_0]^{\alpha-1}F[z(\tau)]\,z'(\tau)=\tau^{\alpha-1}[b_0+b_1\tau+b_2\tau^2+\ldots+b_{N-1}\tau^{N-1}+R_n(\tau)\,\tau^N],$$

причем имеет место равномерная оценка

$$|R_N(\tau)|<C_N\quad(0\leqslant\tau\leqslant t_1) \qquad (196)$$

и $\tau^{\alpha-1}=e^{(\alpha-1)\ln\tau}$, где $\ln\tau$ мы считаем вещественным. В силу (194) $b_0$ определяется формулой

$$b_0=a_1^{\alpha}F(z_0)=\left|\frac{f^{(p)}(z_0)}{p!}\right|^{-\frac{\alpha}{p}}e^{i\omega_j\alpha}F(z_0), \qquad (197)$$

а для остальных коэффициентов получаются, как можно показать, следующие выражения:

$$b_k=\left|\frac{f^{(p)}(z_0)}{p!}\right|^{-\frac{\alpha+k}{p}}e^{i\frac{\alpha+k}{p}\omega_j}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha+k}{p}\right)}\sum_{s=0}^{k}\frac{(-1)^s}{s!}\left[\frac{f^{(p)}(z_0)}{p!}\right]^{-s}\Gamma\left(\frac{\alpha+k}{p}+s\right)g_{ks}, \qquad (198)$$

где $g_{ks}$ — коэффициенты при $(z-z_0)^k$ в разложении

$$\left[F(z_0)+\frac{F'(z_0)}{1!}(z-z_0)+\ldots\right]\left[\frac{f^{(p+1)}(z_0)}{(p+1)!}(z-z_0)+\frac{f^{(p+2)}(z_0)}{(p+2)!}(z-z_0)^2+\ldots\right]^s.$$

Выполняя в формуле (195) почленное интегрирование, получим

$$K_n(l_0)=\sum_{k=0}^{N-1}b_k\int_0^{t_1}\tau^{\alpha+k-1}e^{-n\tau^p}d\tau+\int_0^{t_1}R_N(\tau)\,\tau^{N+\alpha-1}e^{-n\tau^p}d\tau. \qquad (199)$$

Оценим интеграл от остаточного члена и покажем, что он порядка $O\left(n^{-\frac{N+\alpha}{p}}\right)$. Используя неравенство (196), приходим к оценке

$$\left|\int_0^t R_N(\tau)\,\tau^{N+\alpha-1}e^{-n\tau^p}d\tau\right|<C_N\int_0^{t_1}\tau^{N+\alpha-1}e^{-n\tau^p}d\tau<C_N\int_0^{\infty}\tau^{N+\alpha-1}e^{-n\tau^p}d\tau.$$

В последнем интеграле перейдем к новой переменной $x=n\tau^p$:

$$\left|\int_0^{t_1}R_N(\tau)\,\tau^{N+\alpha-1}e^{-n\tau^p}d\tau\right|<\frac{C_N}{pn^{\frac{N+\alpha}{p}}}\int_0^{\infty}x^{\frac{N+\alpha}{p}-1}e^{-x}dx=\frac{C_N}{p}\Gamma\left(\frac{N+\alpha}{p}\right)n^{-\frac{N+\alpha}{p}},$$

и, следовательно, действительно

$$\int_0^{t_1}R_N(\tau)\,\tau^{N+\alpha-1}e^{-n\tau^p}d\tau=O\left(n^{-\frac{N+\alpha}{p}}\right).$$

Рассмотрим теперь интегралы, стоящие под знаком суммы в формуле (199). Прибавляя и вычитая интеграл по промежутку $(t_1, \infty)$, получим

$$\int_0^{t_1}\tau^{\alpha+k-1}e^{-n\tau^p}d\tau=\int_0^{\infty}\tau^{\alpha+k-1}e^{-n\tau^p}d\tau-\int_{t_1}^{\infty}\tau^{\alpha+k-1}e^{-n\tau^p}d\tau. \qquad (200)$$

В первом интеграле перейдем к переменной $x$:

$$\int_0^{\infty}\tau^{\alpha+k-1}e^{-n\tau^p}d\tau=\frac{1}{pn^{\frac{\alpha+k}{p}}}\int_0^{\infty}x^{\frac{\alpha+k}{p}-1}e^{-x}dx=\frac{1}{p}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+k}{p}\right)}{n^{\frac{\alpha+k}{p}}}.$$

Второй интеграл в равенстве (200) оценим и покажем, что он имеет порядок $O(e^{-\Delta_1 n})$. Умножим и разделим подинтегральную функцию на $e^{-n_0\tau^p}$:

$$\int_{t_1}^{\infty}\tau^{\alpha+k-1}e^{-n\tau^p}d\tau=\int_{t_1}^{\infty}\tau^{\alpha+k-1}e^{-n_0\tau^p}e^{-(n-n_0)\tau^p}d\tau.$$

Если $n>n_0$, множитель $e^{-(n-n_0)\tau^p}$ монотонно убывает при $t\to\infty$. Вынося этот множитель на нижнем пределе интегрирования и расширяя затем

промежуток интегрирования, мы придем к следующей оценке:

$$\int_{t_1}^{\infty} \tau^{\alpha+k-1} e^{-n\tau^p} d\tau < e^{-(n-n_0)\, t_1^p} \int_{t_1}^{\infty} \tau^{\alpha+k-1} e^{-n_0\tau^p} d\tau < e^{-(n-n_0)\, t_1^p} \int_0^{\infty} \tau^{\alpha+k-1} e^{-n_0\tau^p} d\tau =$$

$$= \left( \frac{1}{p} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+k}{p}\right)}{n_0^{\frac{\alpha+k}{p}}} e^{n_0 t_1^p} \right) e^{-nt_1^p}.$$

Поскольку множитель в круглых скобках не зависит от $n$, полученная оценка показывает, что действительно

$$\int_{t_1}^{\infty} \tau^{\alpha+k-1} e^{-n\tau^p} d\tau = O\left(e^{-\Delta_1 n}\right) \quad (\Delta_1 > 0),$$

где $\Delta_1 = t_1^p$. Подставляя найденные выражения для интегралов в формулу (199), получаем асимптотическое представление для $K_n(l_0)$:

$$K_n(l_0) = \sum_{k=0}^{N-1} \left[ \frac{1}{p} b_k \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+k}{p}\right)}{n^{\frac{\alpha+k}{p}}} + O\left(e^{-\Delta_1 n}\right) \right] + O\left(n^{-\frac{N+\alpha}{p}}\right).$$

Так как величины $O\left(e^{-\Delta_1 n}\right)$ убывают быстрее любой отрицательной степени $n$, мы вправе объединить их со слагаемым $O\left(n^{-\frac{N+\alpha}{p}}\right)$:

$$K_n(l_0) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k \Gamma\left(\frac{\alpha+k}{p}\right) p^{-1} n^{-\frac{\alpha+k}{p}} + O\left(n^{-\frac{N+\alpha}{p}}\right). \tag{201}$$

Наш исходный интеграл имеет вид

$$I_n(l) = e^{nf(z_0)} [K_n(l_0) + K_n(l_1)], \tag{202}$$

и мы показали, что $K_n(l_1) = O\left(e^{-\Delta n}\right)$. Подставляя разложение (201) в формулу (202) и вновь объединяя величину $O\left(e^{-\Delta n}\right)$ со слагаемым $O\left(n^{-\frac{N+\alpha}{p}}\right)$, мы получаем искомое асимптотическое разложение интеграла $I_n(l)$:

$$I_n(l) = e^{nf(z_0)} \left[ \sum_{k=0}^{N-1} b_k \Gamma\left(\frac{\alpha+k}{p}\right) p^{-1} n^{-\frac{\alpha+k}{p}} + O\left(n^{-\frac{N+\alpha}{p}}\right) \right].$$

Полученное разложение можно записать также в виде

$$I_n(l) = p^{-1} n^{-\frac{\alpha}{p}} e^{nf(z_0)} \left[ \sum_{k=0}^{N-1} b_k \Gamma\left(\frac{\alpha+k}{p}\right) n^{-\frac{k}{p}} + O\left(n^{-\frac{N}{p}}\right) \right]. \tag{203}$$

Мы получили, таким образом, для интеграла $I_n(l)$ асимптотическое разложение по дробным степеням $n^{-1/p}$; причем остаточный член убывает при $n \to \infty$ на $n^{-1/p}$ быстрее по сравнению с последним слагаемым суммы.

Сохраняя в сумме (203) лишь слагаемое, соответствующее $k=0$, мы получим для интеграла $I_n(l)$ формулу первого приближения

$$I_n(l) = F(z_0)\, e^{nf(z_0)}\, \Gamma\left(\frac{\alpha}{p}\right) p^{-1} \left|\frac{f^{(p)}(z_0)}{p!}\right|^{-\frac{\alpha}{p}} e^{i\alpha\omega_j} n^{-\frac{\alpha}{p}} \left[1 + O\left(n^{-\frac{1}{p}}\right)\right].$$

До сих пор мы рассматривали простейший случай, когда контур интегрирования $l$ в интегралах $I_n(l)$ начинался в самой седловой точке $z_0$. В приложениях встречаются интегралы

$$I_n(L) = \int_L (z - z_0)^{\alpha-1} F(z)\, e^{nf(z)} dz, \tag{204}$$

распространенные по контуру $L$, начало и конец которого расположены в отрицательных секторах функции $f(z)$. При этом контур интегрирования может быть как конечным, так и бесконечным. Будем предполагать, что исходный контур интегрирования удается, не меняя величины интеграла, продеформировать так, чтобы он проходил через седловую точку и в некотором круге $|z - z_0| \leqslant R$ с центром в седловой точке совпадал с линиями $v(x, y) - v(x_0, y_0) = 0$ наибыстрейшего убывания функции $e^{nf(z)}$. Будем считать при этом, что контур «входит» в седловую точку в отрицательном секторе с $m = 2j_1$ и «выходит» из седловой точки в отрицательном секторе с $m = 2j_2$.

Кроме того, будем предполагать, как и выше, что в круге $|z - z_0| \leqslant R$ функции $F_1(z)$ и $f(z)$ разлагаются в ряды (188), вне этого круга на контуре интегрирования выполняется неравенство

$$\operatorname{Re}[f(z_0) - f(z)] \geqslant \Delta > 0$$

и при некотором $n = n_0$ интеграл (204) абсолютно сходится. Для получения асимптотического разложения в этом случае, очевидно, интеграл $I_n(L)$ следует представить в виде разности двух интегралов. Пусть $l_{j_1}$ и $l_{j_2}$ — части контура, на которые он разбивается седловой точкой $z_0$. Пусть при этом контур $l_{j_1}$ расположен в отрицательном секторе с номером $m = 2j_1$ и на контуре $l_{j_1}$ определено направление, противоположное направлению интегрирования вдоль $L$, контур $l_{j_2}$ расположен в отрицательном секторе с номером $m = 2j_2$ и на контуре $l_{j_2}$ определено направление, совпадающее с направлением интегрирования вдоль $L$. Введем интегралы

$$I_n(l_{j_\nu}) = \int_{l_{j_\nu}} (z - z_0)^{\alpha-1} F(z)\, e^{nf(z)} dz \quad (\nu = 1, 2). \tag{205}$$

Тогда

$$I_n(L) = I_n(l_{j_2}) - I_n(l_{j_1}). \tag{206}$$

Для каждого из интегралов $I_n(l_{j_\nu})$, очевидно, справедлива формула (203). Фазы коэффициентов $b_k$ в этой формуле зависят от принадлежности контура интегрирования тому или иному сектору. Поэтому впредь коэффициенты $b_k$ в формуле (203) мы будем записывать в виде $b_k^{(j_\nu)}$, указывая при помощи верхнего индекса, для какого сектора вычислен соответствующий коэффициент. Принимая во внимание последнее замечание, для интеграла (206) мы получаем, таким образом, следующее асимптотическое разложение:

$$I_n(L) = e^{nf(z_0)} p^{-1} n^{-\frac{\alpha}{p}} \left[\sum_{k=0}^{N-1} \left(b_k^{(j_2)} - b_k^{(j_1)}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha + k}{p}\right) n^{-\frac{k}{p}} + O\left(n^{-\frac{N}{p}}\right)\right]. \tag{207}$$

В первом приближении мы будем, очевидно, иметь

$$I_n(L) = F(z_0)\, e^{nf(z_0)}\, \Gamma\left(\frac{\alpha}{p}\right) p^{-1} \left|\frac{f^{(p)}(z_0)}{p!}\right|^{-\frac{\alpha}{p}} \times$$
$$\times\, e^{-i\frac{\alpha}{p}\arg f^{(p)}(z_0)} \left\{\frac{e^{i\frac{\alpha}{p}(2j_2+1)\pi} - e^{i\frac{\alpha}{p}(2j_1+1)\pi}}{n^{\alpha/p}}\right\}\left[1 + O\left(n^{-\frac{1}{p}}\right)\right].$$

Рассмотрим случай простой точки перевала и будем считать $\alpha = 1$. В случае простой точки перевала $p = 2$ и существуют только два отрицательных сектора $j = 0$ и $j = 1$. Пусть $j_2 = 0$ и $j_1 = 1$. Нетрудно установить при помощи формулы (198), что при $p = 2$ и $\alpha = 1$ выполняются равенства

$$b_{2s}^{(1)} = -b_{2s}^{(0)} \text{ и } b_{2s+1}^{(1)} = b_{2s+1}^{(0)}.$$

Поэтому в формуле (207) остаются только четные слагаемые, и мы получаем разложение по целым отрицательным степеням $n$:

$$I_n(L) = e^{nf(z_0)}\, n^{-\frac{1}{2}}\left[\sum_{s=0}^{N-1} b_{2s}^{(0)}\, \Gamma\left(\frac{1+k}{2}\right) n^{-s} + O(n^{-N})\right]. \qquad (208)$$

В первом приближении

$$I_n(L) = i\sqrt{\frac{2\pi}{n}}\, F(z_0)\, e^{nf(z_0)} e^{-\frac{i}{2}\arg f^{(2)}(z_0)} |f^{(2)}(z_0)|^{-\frac{1}{2}} [1 + O(n^{-1})]. \qquad (209)$$

**80. Примеры.** 1°. В качестве примера применения формулы (209) получим формулу Стирлинга для гамма-функции $\Gamma(n+1)$. В интеграле Эйлера для функции $\Gamma(z)$:

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty t^n e^{-t} dt \quad (\operatorname{Re} n > 0),$$

перейдем к новой переменной $t = nz$:

$$\Gamma(n+1) = n^{n+1} \int_0^\infty z^n e^{-nz} dz,$$

или

$$\Gamma(n+1) = n^{n+1} \int_0^\infty e^{n(\ln z - z)} dz. \qquad (210)$$

Мы получили интеграл вида (204), в котором

$$\alpha = 1,\ F(z) \equiv 1 \text{ и } f(z) = \ln z - z.$$

Функция $f(z)$ имеет седловую точку $z_0 = 1$ и $f''(1) = -1$. Очевидно, $f(z)$ в точке $z_0 = 1$ достигает максимального значения, равного $(-1)$ и монотонно убывает при удалении от точки максимума в обе стороны. Поскольку интеграл (210) сходится при всяком $n$, у которого $\operatorname{Re} n > -1$, и вне интервала $|z-1| \leqslant R < \frac{1}{2}$ выполняется неравенство

$$-1 - \ln z + z \geqslant R - \ln(1+R) = \Delta > 0,$$

мы можем применить формулу (209). Выполняя необходимые вычисления, получаем

$$\Gamma(n+1)=\sqrt{\frac{2\pi}{n}}\,n^{n+1}e^{-n}\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]. \tag{211}$$

2°. Рассмотрим интеграл вида

$$I_{n,\,\alpha}(L)=\int_L \frac{F(z)}{z_0+\alpha-z}e^{nf(z)}dz, \tag{212}$$

где $z_0$ — седловая точка $f(z)$ и $\alpha$ — числовой параметр. Функции $F(z)$ и $f(z)$ мы будем по-прежнему считать регулярными в некотором круге $|z-z_0|\leqslant R$. При малых значениях $|\alpha|$ подинтегральная функция имеет полюс первого порядка $z=z_0+\alpha$ вблизи седловой точки.

При выводе асимптотической формулы для интеграла (204) использовался тот факт, что функция $F(z)$ и ее производные ограничены в окрестности седловой точки $z=z_0$. В рассматриваемом интеграле (212) подинтегральное выражение стремится к бесконечности при $\alpha\to 0$ и $z\to z_0$. Мы выведем асимптотическую формулу для $I_{n,\,\alpha}$ при $n\to\infty$, справедливую не только при фиксированном $\alpha\neq 0$, но и при $\alpha\to 0$, причем остаточный член будет мал при $n\to\infty$ равномерно по $\alpha$.

Мы рассмотрим ниже частный случай, когда $f''(z_0)\neq 0$, следовательно, $p=2$, и ограничимся выводом только главного члена асимптотического разложения. Мы будем, далее, считать, что при $\alpha\to 0$ имеют место неравенства

$$-\frac{1}{2}\arg f''(z_0)+\frac{\pi}{2}+\varepsilon<\arg\alpha<-\frac{1}{2}\arg f''(z_0)+\frac{3\pi}{2}-\varepsilon \tag{213}$$

или

$$-\frac{1}{2}\arg f''(z_0)-\frac{\pi}{2}+\varepsilon<\arg\alpha<-\frac{1}{2}\arg f''(z_0)+\frac{\pi}{2}-\varepsilon,$$

где $\arg f''(z_0)$ фиксирован определенным образом, как и в [78]. Из указанных неравенств следует, что полюс подинтегральной функции $z_1=z_0+\alpha$ не может приближаться к точке $z_0$ по направлению, касательному к контуру скорейшего спуска, касательная к которому в точке $z_0$ имеет направление $-\frac{1}{2}\arg f''(z_0)\pm\frac{\pi}{2}$. Мы будем предполагать также, что на участках $l'$ и $l''$ контура $L$, расположенных вне круга $|z-z_0|\leqslant R$, выполняется неравенство

$$\operatorname{Re}[f(z_0)-f(z)]\geqslant\Delta>0$$

и что часть $l_0$ контура $L$, принадлежащая этому кругу, совпадает с линией $v(x,y)-v(x_0,y_0)=0$ наибыстрейшего убывания функции $|e^{nf(z)}|$ и идет из отрицательного сектора с номером $m=2j_1=2$ в отрицательный сектор с номером $m=2j_2=0$. Как и в предыдущем пункте можно показать, что

$$I_n(l')=O(e^{-\Delta n})\ \text{и}\ I_n(l'')=O(e^{-\Delta n}). \tag{214}$$

Поэтому главным участком контура интегрирования будет по-прежнему участок контура интегрирования $l_0$, проходящий через седловую точку. В интеграле

$$I_{n,\,\alpha}(l_0)=\int_{l_0}\frac{F(z)}{z_0+\alpha-z}\,e^{n[f(z)-f(z_0)]}dz \tag{215}$$

перейдем к новой переменной $\tau$, положив, как и в [79],

$$\tau = \left|\frac{f''(z_0)}{2}\right|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2}[\arg f''(z_0)-\pi]}(z-z_0)\left[1+\frac{f'''(z_0)}{2\cdot 3f''(z_0)}(z-z_0)+\ldots\right]. \quad (216)$$

При выбранной ветви квадратного корня интегрированию по контуру $l_0$ будет соответствовать интегрирование по отрезку $[-t_2, t_1]$ $(t_2>0)$ вещественной оси плоскости $\tau$. Обращая степенной ряд в равенстве (216), получим

$$z(\tau)-z_0 = a_1\tau + a_2\tau^2+\ldots,$$

где

$$a_1 = \left|\frac{f''(z_0)}{2}\right|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{i}{2}[\arg f''(z_0)-\pi]}.$$

В новой переменной интегрирования интеграл (215) запишется в виде

$$I_{n,\alpha}(l_0) = \int_{-t_2}^{t_1} \frac{F[z(\tau)]\,z'(\tau)}{z_0+\alpha-z(\tau)} e^{-n\tau^2}\,d\tau. \quad (217)$$

На плоскости комплексного переменного $\tau$ подинтегральная функция будет при достаточно малых $|\alpha|$ иметь полюс первого порядка в точке

$$\tau_0 = \left|\frac{f''(z_0)}{2}\right|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2}[\arg f''(z_0)-\pi]}\alpha\left[1+\frac{f'''(z_0)}{2\cdot 3f''(z_0)}\alpha+\ldots\right].$$

Выделяя полярность, представим множитель, стоящий при экспоненте в интеграле (217), в виде

$$\frac{F[z(\tau)]\,z'(\tau)}{z_0+\alpha-z(\tau)} = \frac{F(z_0+\alpha)}{-(\tau-\tau_0)} + F_1(\tau), \quad (218)$$

где $F_1(\tau)$ — регулярная функция $\tau$ в некоторой окрестности точки $\tau=0$. Асимптотическое разложение интеграла

$$I = \int_{-t_2}^{t_1} F_1(\tau)\,e^{-n\tau^2}\,d\tau$$

строится прежним образом, и согласно формуле (209)

$$I = \sqrt{\frac{\pi}{n}}\,F_1(0)\,[1+O(n^{-1})]. \quad (219)$$

В интеграле

$$I' = \int_{-t_2}^{t_1} \frac{e^{-n\tau^2}}{\tau_0-\tau}\,d\tau \quad (220)$$

заменим пределы интегрирования на $-\infty$ и $\infty$. Такое расширение промежутка интегрирования, очевидно, изменит интеграл на величину порядка $O(e^{-\Delta_1 n})$, где $\Delta_1 = \min(t_1, t_2)$. Таким образом,

$$I' = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-n\tau^2}}{\tau_0-\tau}\,d\tau + O(e^{-\Delta_1 n}).$$

Принимая во внимание также формулу (219), для исходного интеграла $I_{n,\alpha}(L)$ получаем

$$I_{n,\alpha}(L) = e^{nf(z_0)}\left\{F(z_0+\alpha)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-n\tau^2}}{\tau_0-\tau}\,d\tau + \sqrt{\frac{\pi}{n}}\,F_1(0)\,[1+O(n^{-1})]\right\}, \tag{221}$$

где

$$F_1(0) = \frac{F(z_0)\,z'(0)}{\alpha} - \frac{F(z_0+\alpha)}{\tau_0}.$$

Интеграл

$$w = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-n\tau^2}}{\tau_0-\tau}\,d\tau$$

сводится к интегралу вероятностей от комплексного аргумента. Положим $\tau = \frac{1}{\sqrt{n}}\,x$, тогда

$$w = w(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-x^2}}{\zeta-x}\,dx, \tag{222}$$

где $\zeta = \sqrt{n}\,\tau_0$. Интеграл (222) протабулирован (В. Н. Фаддеева и Н. М. Терентьев, Таблицы значений интеграла вероятностей от комплексного аргумента, Гостехиздат, 1954).

Пусть $\alpha \to 0$, тогда $\tau_0$ будет также стремиться к нулю. Покажем, что в этом случае с точностью до слагаемых порядка $O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)$ величина $\zeta$ в интеграле (222) может быть заменена первым членом разложения $\sqrt{n}\,\tau_0(\alpha)$ по степеням $\alpha$, т. е. величиной $\zeta_0 = \sqrt{n}\;\tau_0'(0)\,\alpha$.

Оценим разность

$$d = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-x^2}}{\zeta_0-x}\,dx - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-x^2}}{\zeta-x}\,dx.$$

Объединяя интегралы, получим

$$|d| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\zeta-\zeta_0}{(\zeta_0-x)(\zeta-x)}\right| e^{-x^2}\,dx.$$

Мы имеем, далее,

$$\left|\frac{\zeta-\zeta_0}{(\zeta_0-x)(\zeta-x)}\right| \leqslant \frac{|\zeta-\zeta_0|}{|\operatorname{Im}\zeta_0|\cdot|\operatorname{Im}\zeta|} = \frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{|\alpha^2 r(\alpha)|}{|\operatorname{Im}\tau_0'(0)\,\alpha|\cdot|\operatorname{Im}[\tau_0'(0)\,\alpha + \alpha^2 r(\alpha)]|}$$

где

$$r(\alpha) = \frac{1}{2!}\,\tau_0''(0) + \frac{1}{3!}\,\tau_0'''(0)\,\alpha + \ldots$$

и при малых $\alpha$ величина $r(\alpha)$ удовлетворяет неравенству

$$|r(\alpha)| < C. \tag{223}$$

В силу нашего предположения (213) справедливо также неравенство

$$0 < \varepsilon < |\arg \tau_0'(0) \cdot \alpha| < \pi - \varepsilon. \tag{224}$$

Используя неравенства (223) и (224), последовательно получаем

$$\left|\frac{\zeta - \zeta_0}{(\zeta_0 - x)(\zeta - x)}\right| < \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{C|\alpha|^2}{|\tau_0'(0)\alpha|^2 \sin^2 \varepsilon} \cdot \frac{1}{\left|1 - \frac{|\operatorname{Im} \alpha^2 r(\alpha)|}{|\tau_0'(0)\alpha| \sin \varepsilon}\right|} < \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{2C}{|\tau_0'(0)|^2 \sin^2 \varepsilon}, \tag{225}$$

так как

$$\frac{\operatorname{Im} \alpha^2 r(\alpha)}{|\tau_0'(0)\alpha| \sin \varepsilon} < \frac{1}{2}$$

при достаточно малых $|\alpha|$.

Оценка (225) позволяет утверждать, что действительно

$$|d| = O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Таким образом, в рассматриваемом случае

$$I_{n,\alpha}(L) = e^{nf(z_0)}\left[F(z_0 + \alpha)\, w(\zeta_0) + O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)\right],$$

где

$$\zeta_0 = \sqrt{n}\, \tau_0'(0)\, \alpha = \sqrt{n}\, \alpha \left|\frac{f''(z_0)}{2}\right|^{\frac{1}{2}} e^{i[\arg f''(z_0) - \pi]}.$$

**81. Метод стационарной фазы.** Мы кратко изложим теперь асимптотическое представление таких интегралов, в которых один из множителей подинтегральной функции дает колебательный режим с большой частотой $k$. Роль малого параметра при этом будет играть величина $\frac{1}{k}$. Будем рассматривать интегралы вида

$$I(k) = \int_a^b g(x)\, e^{ikh(x)}\, dx, \tag{226}$$

где $k$ — вещественный параметр и $h(x)$ — вещественная функция, которая называется обычно *фазой* соответствующего колебательного режима:

$$e^{ikh(x)} = \cos[kh(x)] + i \sin[kh(x)].$$

Аналитичность функций $g(x)$ и $h(x)$ пока не предполагается, но будет предполагаться, что они имеют на промежутке интегрирования непрерывные производные до определенного порядка или всех порядков.

Как оказывается, существенную роль при оценке интеграла (226) играют два фактора: значение функции $g(x)$ на концах промежутка интегрирования и те значения $x$, при которых $h'(x) = 0$ (точки стационарности фазы). Особо значительное влияние на величину интеграла оказывают точки стационарности фазы. Прежде чем переходить к общим результатам, приведем несколько элементарных примеров. Рассмотрим интеграл

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{ikx}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos(kx)\, dx + i \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \sin(kx)\, dx. \tag{227}$$

Функция $g(x) = e^{-x^2}$ обращается в нуль при $x = \pm\infty$, а производная функции $h(x) = x$ не обращается в нуль. Второй интеграл правой части (227) обращается в нуль в силу нечетности $e^{-x^2}\sin(kx)$, а первый вычисляется при помощи дифференцирования по параметру, и мы получаем

$$I_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{k^2}{4}},$$

т. е. $I_1$ убывает при $k \to \infty$ по показательному закону.

Рассмотрим еще интеграл

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{ikx^2}\, dx,$$

в котором $h(x) = x^2$ и $h'(0) = 0$. Нетрудно показать, что

$$I_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{1+k^2}}{1+k^2}} + i\sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+k^2}}{1+k^2}}\right),$$

откуда следует, что $I_2$ имеет порядок $\frac{1}{\sqrt{k}}$ при $k \to +\infty$.

Перейдем теперь к изложению некоторых общих простых результатов, которые получаются применением интегрирования по частям.

Теорема 1. *Пусть промежуток $a \leqslant x \leqslant b$ конечен, $g(x)$ бесконечно дифференцируема на нем и обращается в нуль со всеми производными на концах промежутка. Пусть, далее, $h(x)$ также бесконечно дифференцируема и ее производная отлична от нуля на промежутке $a \leqslant x \leqslant b$. При этом, если $k \to \infty$, то*

$$I = \int_a^b g(x)\, e^{ikh(x)}\, dx = O(k^{-m})$$

*для любого целого $m > 0$.*

Интегрируя по частям и принимая во внимание, что $g(a) = g(b) = 0$, получим

$$I = \frac{1}{k}\int_a^b g_1(x)\, e^{ikh(x)}\, dx, \quad g_1(x) = i\frac{d}{dx}\left(\frac{g(x)}{h'(x)}\right),$$

$$I = \frac{1}{k^2}\int_a^b g_2(x)\, e^{ikh(x)}\, dx, \quad g_2(x) = i\frac{d}{dx}\left(\frac{g_1(x)}{h'(x)}\right)$$

и т. д. Все функции $g_s(x)$ бесконечно дифференцируемы и равны нулю на концах промежутка. При применении указанной операции $m$ раз получаем

$$I = \frac{1}{k^m}\int_a^b g_m(x)\, e^{ikh(x)}\, dx$$

и

$$\left|\int_a^b g_m(x)\, e^{ikh(x)}\, dx\right| \leqslant \max_{a \leqslant x \leqslant b} |g_m(x)|\,(b-a).$$

Замечание 1. Если предположить непрерывную дифференцируемость лишь до некоторого порядка $N$, то утверждение теоремы будет иметь место при $m = N$.

Замечание 2. При некоторых естественных оговорках утверждение теоремы будет иметь место и для бесконечного промежутка интегрирования.

Предположим теперь, что функция $g(x)$ и все ее производные равны нулю при $x = b$, но могут быть отличны от нуля при $x = a$. Предположение $h'(0) \neq 0$ при $a \leqslant x \leqslant b$ сохраним. При интегрировании по частям сохранятся внеинтегральные члены при $x = a$, и мы получим для интеграла следующее асимптотическое представление при большом $k$:

$$I = e^{ikh(a)}\left[i\frac{g(a)}{kh'(a)} + \frac{d_2}{k^2} + \ldots + \frac{d_m}{k^m} + O(k^{-m-1})\right]. \qquad (228)$$

Легко выразить значения первых коэффициентов $d_s$ через значения $g(x)$, $h(x)$ и их производных при $x = a$. При наличии стационарных точек, т. е. точек, в которых производная $h'(x)$ обращается в нуль, исследование интеграла значительно усложняется, и мы приведем лишь некоторые простейшие результаты по этому поводу. Можно показать, что в случае конечного числа стационарных точек на промежутке интегрирования задача сводится к исследованию промежутка с одной стационарной точкой.

Приведем теорему, доказательство которой можно найти в книге: Э. К о п с о н, Асимптотические разложения, 1966. Предполагается, что $g(x)$ и $h(x)$ регулярны в некоторой области, внутри которой находится промежуток $a \leqslant x \leqslant b$, и $h(x)$ — вещественная функция на вещественной оси.

Теорема 2. *Пусть $h(x)$ имеет на промежутке $a \leqslant x \leqslant b$ единственную стационарную точку $x = a$ и $g(a) \neq 0$. При этом, если $h''(x) > 0$, то*

$$I(k) = \left[\frac{\pi}{2kh''(a)}\right]^{\frac{1}{2}} g(a)\, e^{ikh(a) + \frac{\pi i}{4}} + O(k^{-1}),$$

*а если $h''(x) < 0$, то*

$$I(k) = \left[\frac{\pi}{-2kh''(a)}\right]^{\frac{1}{2}} g(a) e^{ikh(a) - \frac{\pi i}{4}} + O(k^{-1}).$$

Совершенно такая же теорема имеет место, если $h'(b) = 0$.

Результаты получаются иными, если $h'(a) = h''(a) = 0$. Если, например, при этом $h'''(a) > 0$, то

$$I(k) = \Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\left[\frac{6}{kh'''(a)}\right]^{\frac{1}{3}} g(a)\, e^{ikh(a) + \frac{\pi i}{6}} + O\left(k^{-\frac{2}{3}}\right).$$

Более общие результаты по методу стационарной фазы имеются в книге: А. Э р д е й и, Асимптотические разложения, 1962.

ГЛАВА IV

# АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ И ФУНКЦИИ МАТРИЦ

**82. Регулярные функции многих переменных.** Теория аналитических функций многих переменных в своих основных понятиях подобна теории функций одной переменной, но при дальнейшем развитии она существенно отличается от нее. Мы будем заниматься лишь основными понятиями этой теории и более подробно остановимся на теории степенных рядов от нескольких комплексных переменных. Для краткости изложения будем говорить часто лишь о функциях от двух комплексных переменных. Все приводимые ниже определения и доказательства легко переносятся на случай любого числа переменных.

Итак, пусть $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ — две комплексные переменные и

$$f(z_1, z_2) \tag{1}$$

— функция от них. Аналогично случаю одной переменной мы можем рассматривать функцию (1) как функцию в четырехмерном пространстве $E_4$ вещественных переменных $(x_1, y_1, x_2, y_2)$. Положим, что эта функция задана в некоторой области $D$ этого пространства. Говоря об области в $E_4$, мы будем всегда подразумевать открытую область. Положим, что функция (1) однозначна и непрерывна в $D$ и что для любой точки $(z_1, z_2)$ из этой области отношения

$$\frac{f(z_1 + \Delta z_1, z_2) - f(z_1, z_2)}{\Delta z_1} \quad \text{и} \quad \frac{f(z_1, z_2 + \Delta z_2) - f(z_1, z_2)}{\Delta z_2}$$

стремятся к определенным пределам при стремлении комплексных приращений $\Delta z_1$ и $\Delta z_2$ к нулю. При этом функция (1) называется регулярной или голоморфной в $D$. Упомянутые пределы называются частными производными от $f(z_1, z_2)$ по $z_1$ и по $z_2$, и они обозначаются следующим обычным образом:

$$\frac{\partial f(z_1, z_2)}{\partial z_1} \quad \text{и} \quad \frac{\partial f(z_1, z_2)}{\partial z_2}.$$

Аналогичные обозначения дальше будут применяться и для производных высших порядков.

В случае функции $m$ переменных $f(z_1, \ldots, z_m)$, где $z_s = x_s + iy_s$ $(s = 1, \ldots, m)$, область $D$ определения ее находится в $2m$-мерном пространстве с координатами $(x_1, y_1, \ldots, x_m, y_m)$.

Криволинейный интеграл от функции $f(z_1, z_2)$, непрерывной на линии

$$x_k = \varphi_k(t), \quad y_k = \psi_k(t) \quad (k = 1, 2),$$

определяется обычным образом при условии, что функции $\varphi_k(t)$ и $\psi_k(t)$ имеют непрерывные или кусочно непрерывные производные первого порядка.

При обобщении формулы Коши на случай нескольких комплексных переменных встречаются большие трудности. Мы рассмотрим это обобщение лишь для простейшего случая области $D$. Пусть $B_s$ — некоторая открытая область на плоскости комплексного переменного $z_s$ $(s = 1, \ldots, m)$. Совокупность всех точек $(z_1, \ldots, z_m)$ таких, что всякое $z_s$ принадлежит $B_s$, называется полицилиндрической областью $D$ $2m$-мерного пространства $(z_1, \ldots, z_m)$. Если $B_s$ есть круг $|z_s - b_s| < r_s$ $(r_s > 0;\ s = 1, \ldots, m)$, то область $D$ называется круговым цилиндром с центром $(b_1, \ldots, b_m)$. Для двух переменных $(z_1, z_2)$ применяют обычно термины «бицилиндрическая область» и «круговой бицилиндр». В $E_4$ круговая бицилиндрическая область определяется неравенствами $|z_1 - b_1| < r_1$ и $|z_2 - b_2| < r_2$ или

$$(x_1 - \alpha_1)^2 + (y_1 - \beta_1)^2 < r_1^2, \qquad (x_2 - \alpha_2)^2 + (y_2 - \beta_2)^2 < r_2^2,$$

где $b_k = \alpha_k + i\beta_k$.

Можно дать другое определение регулярности функции $f(z_1, z_2)$ в области $D$ общего вида: функция $f(z_1, z_2)$ называется регулярной в области $D$, если она однозначна, непрерывна в этой области и для любой точки $(b_1, b_2)$ этой области существует такая круговая бицилиндрическая окрестность этой точки $|z_l - b_l| < r_l$ $(l = 1, 2)$, что в этой окрестности $f(z_1, z_2)$ представима абсолютно сходящимся степенным рядом

$$f(z_1, z_2) = \sum_{p,\, q = 0}^{\infty} a_{pq} (z_1 - b_1)^p (z_2 - b_2)^q.$$

Мы будем исходить из данного выше определения и докажем его равносильность определению с помощью степенного ряда.

Выше в определение регулярности функции мы включили ее непрерывность по двум переменным $(z_1, z_2)$. В связи с этим отметим, что имеет место следующая общая теорема Гартогса: *если функция $f(z_1, z_2)$ однозначна в бицилиндре $A\{|z_1| < r_1;\ |z_2| < r_2\}$ и такова, что для каждого $z_1^{(0)}$ из круга $|z_1| < r_1$ функция $f(z_1^{(0)}, z_2)$ регулярна в круге $|z_2| < r_2$ и для каждого $z_2^{(0)}$ из круга $|z_2| < r_2$ функция $f(z_1, z_2^{(0)})$ регулярна в круге $|z_1| < r_1$, то $f(z_1, z_2)$ регулярна в бицилиндре $A$.*

**83. Двойной интеграл и формула Коши.** Пусть $f(z_1, z_2)$ регулярна в полицилиндрической области $\{B_1, B_2\}$, определяемой областями $B_s$ на плоскостях $z_s (s = 1, 2)$, а $l_1$ и $l_2$ — гладкие или кусочно гладкие контуры, расположенные соответственно в $B_1$ и $B_2$. Составим повторный интеграл

$$I_1 = \int_{l_2} dz_2 \int_{l_1} f(z_1, z_2)\, dz_1.$$

Меняя порядок интегрирования, придем к двойному интегралу вида

$$I_2 = \int_{l_1} dz_1 \int_{l_2} f(z_1, z_2)\, dz_2.$$

Покажем прежде всего, что интегралы $I_1$ и $I_2$ совпадают. Положим, что уравнение кривой $l_1$ в параметрической форме будет

$$z_1(t) = x_1(t) + iy_1(t) \qquad (a \leqslant t \leqslant b)$$

и уравнение кривой $l_2$ будет

$$z_2(\tau) = x_2(\tau) + iy_2(\tau) \qquad (c \leqslant \tau \leqslant d).$$

Подставляя в выражение функции $f(z_1, z_2)$

$$z_1 = z_1(t) \quad \text{и} \quad z_2 = z_2(\tau),$$

мы приведем интеграл $I_1$ к двум квадратурам по переменным $t$ и $\tau$, причем при первом интегрировании по $t$ мы будем иметь постоянные пределы $a$ и $b$, а при втором интегрировании по $\tau$ — постоянные пределы $c$ и $d$:

$$I_1 = \int_c^d [x_2'(\tau) + iy_2'(\tau)]\, d\tau \int_a^b f[z_1(t), z_2(\tau)]\, [x_1'(t) + iy_1'(t)]\, dt.$$

Написанный интеграл равносилен, очевидно, двойному интегралу на плоскости $(t, \tau)$, взятому по прямоугольнику

$$a \leqslant t \leqslant b; \qquad c \leqslant \tau \leqslant d.$$

В таком интеграле, как известно [II, 59], можно менять порядок интегрирования, сохраняя прежние пределы, т. е. интеграл $I_1$ мы можем переписать в виде

$$I_1 = \int_a^b [x_1'(t) + iy_1'(t)]\, dt \int_c^d f[z_1(t), z_2(\tau)]\, [x_2'(\tau) + iy_2'(\tau)]\, d\tau,$$

а этот последний интеграл, очевидно, равносилен интегралу $I_2$, откуда и вытекает, что интегралы $I_1$ и $I_2$ совпадают. Их общая величина и называется двойным интегралом от функции $f(z_1, z_2)$, взятым по контурам $l_1$ и $l_2$.

Мы могли бы определить интеграл непосредственно как предел суммы. Разделим линию $l_1$ промежуточными точками

$$z_1^{(0)},\ z_1^{(1)},\ z_1^{(2)},\ \ldots,\ z_1^{(m)}$$

на $m$ частей и точно так же линию $l_2$ промежуточными точками

$$z_2^{(0)},\ z_2^{(1)},\ z_2^{(2)},\ \ldots,\ z_2^{(n)}$$

разделим на $n$ частей. Составим, далее, двойную сумму

$$\sum_{p=0}^{m-1}\sum_{q=0}^{n-1} f(\xi_1^{(p)},\ \xi_2^{(q)})(z_1^{(p+1)} - z_1^{(p)})(z_2^{(q+1)} - z_2^{(q)}),$$

где $\xi_1^{(p)}$ — некоторая точка дуги $z_1^{(p)}z_1^{(p+1)}$ линии $l_1$ и $\xi_2^{(q)}$ — некоторая точка дуги $z_2^{(q)}z_2^{(q+1)}$ линии $l_2$. Предел написанной суммы и приведет нас к величине $I_1$ (или $I_2$).

Пусть границы $B_1$ и $B_2$ — простые замкнутые кривые $l_1$ и $l_2$, и положим, что $f(z_1, z_2)$ регулярна в замкнутой бицилиндрической области $(B_1, B_2)$, т. е. $f(z_1, z_2)$ регулярна в бицилиндрической области $(B_1', B_2')$ такой, что $B_1'$ и $B_2'$ содержат соответственно $B_1$ и $B_2$ вместе с их границами внутри себя.

Рассмотрим двойной интеграл

$$I = \int_{l_1} dz_1' \int_{l_2} \frac{f(z_1', z_2')}{(z_1' - z_1)(z_2' - z_2)}\, dz_2'$$

или

$$I = \int_{l_2} dz_2' \int_{l_1} \frac{f(z_1', z_2')}{(z_1' - z_1)(z_2' - z_2)}\, dz_1',$$

где $z_1$ и $z_2$ — некоторые фиксированные точки внутри $B_1$ и $B_2$.

При первом интегрировании по контуру $l_2$ переменная $z_1'$ является параметром и обозначает некоторую фиксированную точку, лежащую на контуре $l_1$. При этом $f(z_1', z_2')$ будет функцией одного комплексного переменного $z_2'$, регулярной в замкнутой области $B_2$. Применение обычной формулы Коши даст нам

$$I = 2\pi i \int_{l_1} \frac{f(z_1', z_2)}{z_1' - z_1}\, dz_1'.$$

Здесь функция $f(z_1', z_2)$ будет регулярной функцией от $z_1'$ в замкнутой области $B_1$. Применяя еще раз обычную формулу Коши, будем иметь

$$I = -4\pi^2 f(z_1, z_2)$$

и, следовательно, в результате получим формулу Коши

$$f(z_1, z_2) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{l_1} dz_1' \int_{l_2} \frac{f(z_1', z_2')}{(z_1' - z_1)(z_2' - z_2)}\, dz_2'. \qquad (2)$$

Для случая $m$ комплексных переменных формула Коши, при соответствующих условиях, имеет для полицилиндрической области вид

$$f(z_1, z_2, \ldots, z_m) = \frac{1}{(2\pi i)^m} \int_{l_1} dz_1' \int_{l_2} dz_2' \ldots \int_{l_m} \frac{f(z_1', \ldots, z_m')}{(z_1' - z_1)(z_2' - z_2) \ldots (z_m' - z_m)} dz_m'.$$

Из формулы (2), как и для случая одной комплексной переменной, следует, что $f(z_1, z_2)$ имеет в соответствующей полицилиндрической области производные всех порядков, которые выражаются формулами

$$\frac{\partial^{p+q} f(z_1, z_2)}{\partial z_1^p \partial z_2^q} = -\frac{p!q!}{4\pi^2} \int_{l_1} \frac{dz_1'}{(z_1' - z_1)^{p+1}} \int_{l_2} \frac{f(z_1', z_2')}{(z_2' - z_2)^{q+1}} dz_2'. \tag{3}$$

Из формулы Коши вытекает, как и в случае функции одного комплексного переменного, принцип модуля: если $|f(z_1', z_2')| \leqslant M$, когда $z_1'$ принадлежит $l_1$ и $z_2'$ принадлежит $l_2$, то $|f(z_1, z_2)| \leqslant M$ в замкнутой соответствующей полицилиндрической области.

Так же, как и для одного комплексного переменного, доказывается теорема Вейерштрасса: *если члены ряда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z_1, z_2)$$

*регулярны в замкнутой бицилиндрической области* (см. выше) *и ряд сходится равномерно в упомянутой замкнутой области, то сумма ряда регулярна внутри бицилиндрической области и ряд можно дифференцировать почленно по $z_1$ и по $z_2$ сколь угодно раз (внутри этой области). При этом продифференцированный ряд равномерно сходится во всякой полицилиндрической области, которая находится строго внутри первоначальной полицилиндрической области.*

**84. Степенные ряды.** Степенной ряд от двух независимых переменных $z_1$ и $z_2$ с центрами $b_1$ и $b_2$ имеет вид

$$\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} a_{pq} (z_1 - b_1)^p (z_2 - b_2)^q, \tag{4}$$

где переменные суммирования $p$ и $q$ независимо друг от друга пробегают все целые положительные значения, начиная с нуля. Ряд (4) является двойным рядом.

Такие ряды мы рассматривали выше [I, 142] для того случая, когда члены ряда суть вещественные числа.

Положим, что сходится ряд, составленный из модулей членов ряда

$$\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}|a_{pq}||z_1-b_1|^p|z_2-b_2|^q. \tag{5}$$

В этом случае, как мы видели в [11], ряды, составленные из вещественных и мнимых частей членов ряда (4), будут абсолютно сходящимися, и суммы этих двойных рядов с вещественными членами не будут зависеть от того, в каком порядке мы производим суммирование этих двойных рядов. Следовательно, в этом случае, т. е. при сходимости ряда (5), ряд (4) будет сходящимся, и его сумма будет вполне определенной при любом порядке суммирования этого двойного ряда. В дальнейшем мы и будем только рассматривать тот случай, когда сходится ряд (5), т. е. когда ряд (4) будет абсолютно сходящимся.

Нетрудно совершенно так же, как и в [13], установить теорему, аналогичную теореме Абеля. Положим, что ряд (4) абсолютно сходится при $z_1=\alpha_1$ и $z_2=\alpha_2$. Отсюда непосредственно следует, что члены этого ряда при указанных значениях независимых переменных должны оставаться ограниченными по модулю, т. е. что существует такое число $M$, что при любых значках $p$ и $q$ имеет место неравенство

$$|a_{pq}||\alpha_1-b_1|^p|\alpha_2-b_2|^q<M$$

или

$$|a_{pq}|<\frac{M}{|\alpha_1-b_1|^p|\alpha_2-b_2|^q}. \tag{6}$$

Рассмотрим теперь два круга $K_1$ и $K_2$ для переменных $z_1$ и $z_2$:

$$|z_1-b_1|<|\alpha_1-b_1|;\ |z_2-b_2|<|\alpha_2-b_2|. \tag{7}$$

Первый из них содержит те точки $z_1$, которые ближе к $b_1$, чем $\alpha_1$, и второй — те точки $z_2$, которые ближе к $b_2$, чем $\alpha_2$.

Возьмем некоторую точку $z_1$ из круга $K_1$ и некоторую точку $z_2$ из круга $K_2$, т. е.

$$|z_1-b_1|=q_1|\alpha_1-b_1|\ \text{и}\ |z_2-b_2|=q_2|\alpha_2-b_2|,$$

где $0<q_j<1$, $(j=1, 2)$. При этом, пользуясь (6), мы получим следующую оценку для модулей членов ряда (4):

$$|a_{pq}||z_1-b_1|^p|z_2-b_2|^q<Mq_1^pq_2^q. \tag{8}$$

Но нетрудно видеть, что двойной ряд с положительными членами

$$\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}Mq_1^pq_2^q$$

будет сходящимся. Действительно, этот ряд получается путем перемножения двух рядов с положительными членами [I, 138]

$$M(1+q_1+q_1^2+\ldots) \text{ и } (1+q_2+q_2^2+\ldots),$$

и его сумма равна, очевидно,

$$\frac{M}{(1-q_1)(1-q_2)}.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае ряд (5) будет сходящимся, а ряд (4) абсолютно сходящимся. Из оценки (8) вытекает также, что ряд (4) будет равномерно-сходящимся в кругах $K_1'$ и $K_2'$, имеющих центры $b_1$ и $b_2$ и радиусы $\rho_1$ и $\rho_2$, меньшие, чем у $K_1$ и $K_2$. По существу мы пользовались при доказательстве не абсолютной сходимостью ряда (4) при $z_1=\alpha_1$ и $z_2=\alpha_2$, а неравенством

$$|a_{pq}(\alpha_1-b_1)^p(\alpha_2-b_2)^q|\leqslant M,$$

т. е. ограниченностью членов этого ряда при $z_1=\alpha_1$ и $z_2=\alpha_2$.

Мы приходим, таким образом, к следующему свойству: *если все члены ряда* (4) *при* $z_1=\alpha_1$, $z_2=\alpha_2$ *ограничены по модулю одним и тем же числом, то ряд* (4) *абсолютно сходится внутри круговой бицилиндрической области* (7) *и равномерно сходится в круговой бицилиндрической области*

$$|z_1-b_1|\leqslant(1-\varepsilon)|\alpha_1-b_1|,\quad |z_2-b_2|\leqslant(1-\varepsilon)|\alpha_2-b_2|\quad (0<\varepsilon<1).$$

Отметим, что если для $z_1=\alpha_1$ и $z_2=\alpha_2$ ряд (4) сходится (не обязательно абсолютно) при каком-либо порядке суммирования, то его члены по мере удаления от начала стремятся к нулю и поэтому ограничены по модулю одним и тем же числом.

Из сказанного выше мы приходим, как и в [13], к понятию о радиусах сходимости ряда. В данном случае мы будем иметь сопряженные радиусы сходимости $R_1$ и $R_2$ ряда (4).

Приведем их точное определение. Два положительных числа $R_1$ и $R_2$ называются *сопряженными радиусами сходимости ряда* (4), если этот ряд сходится в бицилиндре $\{|z_1-b_1|<R_1,\ |z_2-b_2|<R_2\}$ и не сходится в бицилиндре $\{|z_1-b_1|<R_1',\ |z_2-b_2|<R_2'\}$, где $R_1'>R_1$, $R_2'\geqslant R_2$ или $R_1'\geqslant R_1$ и $R_2'>R_2$. При уменьшении одного радиуса другой радиус сходимости может увеличиться. Как и в [13], можно оговорить специальные случаи $R_j=0$ и $R_j=\infty$ $(j=1, 2)$.

В качестве примера рассмотрим ряд

$$\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{(p+q)!}{p!\,q!}z_1^pz_2^q. \tag{9}$$

Рядом (5) будет ряд

$$\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{(p+q)!}{p!\,q!}|z_1|^p|z_2|^q. \tag{10}$$

Соединим в одну группу все члены этого ряда, у которых сумма $p+q$ равна заданному числу $s$. Согласно формуле бинома Ньютона, сумма этих членов будет

$$(|z_1|+|z_2|)^s,$$

и ряд (10) мы можем переписать в виде

$$\sum_{s=0}^{\infty}(|z_1|+|z_2|)^s,$$

откуда непосредственно следует, что он сходится тогда и только тогда, когда $|z_1|+|z_2|<1$. Таким образом, для ряда (9) совместные сопряженные радиусы сходимости определяются равенством $R_1+R_2=1$. Взяв, например, $R_1=\theta$, где $0<\theta<1$, будем иметь $R_2=1-\theta$. Если взять $R_1=0$, т. е. положить в (9) $z_1=0$, то получим ряд

$$\sum_{q=0}^{\infty}z_2^q,$$

для которого $R_2=1$.

В качестве второго примера рассмотрим ряд

$$z_1+z_1^2+\sum_{p=3}^{\infty}\sum_{q=3}^{\infty}z_1^p z_2^q.$$

Как нетрудно видеть, условие сходимости выражается неравенствами $|z_1|<1$ и $|z_2|<1$, и сопряженные радиусы сходимости $R_1=R_2=1$ определяются каждый в отдельности. Но при $z_2=0$ ряд сходится на всей плоскости $z_1$ — он обращается в полином $z_1+z_1^2$.

Рассмотрим ряд (4). В силу равномерной сходимости и теоремы Вейерштрасса сумма ряда (4) внутри совместных кругов сходимости представляет собою регулярную функцию $f(z_1, z_2)$ двух переменных. Так же, как и в [13], ряд (4) можно дифференцировать по обеим переменным сколько угодно раз внутри кругов сходимости, и это дифференцирование не меняет кругов сходимости.

Дифференцируя несколько раз и полагая затем $z_1=b_1$ и $z_2=b_2$, получим, как и в [14], для коэффициентов ряда следующие выражения:

$$a_{pq}=\frac{1}{p!\,q!}\frac{\partial^{p+q}f(z_1, z_2)}{\partial z_1^p\,\partial z_2^q}\Bigg|_{z_1=b_1;\ z_2=b_2}, \tag{11}$$

т. е. ряд (4) представляет собою ряд Тэйлора для функции $f(z_1, z_2)$.

Если $R_1$ и $R_2$ — совместные радиусы сходимости ряда (4), то этот ряд абсолютно и равномерно сходится при $|z_1-b_1|\leqslant R_1-\varepsilon$ и $|z_2-b_2|\leqslant R_2-\varepsilon$, где $\varepsilon$ — любое малое фиксированное положительное число. При этом, согласно (3) и (11), мы будем иметь для коэффициентов ряда оценку

$$|a_{pq}|<\frac{M}{(R_1-\varepsilon)^p\,(R_2-\varepsilon)^q}, \tag{12}$$

где $M$ — некоторая положительная постоянная, значение которой очевидно, зависит от того, каким мы выбрали $\varepsilon$.

Заменим в ряде (4) коэффициенты $a_{pq}$ положительными числами, которые превосходят модули $|a_{pq}|$; при этом мы получим степенной ряд

$$\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{M}{R_1'^{p}R_2'^{q}}(z_1-b_1)^p(z_2-b_2)^q \quad (R_1'=R_1-\varepsilon;\ R_2'=R_2-\varepsilon), \tag{13}$$

который называется обычно *превосходящим или мажорантным для ряда* (4). Ряд (13), как нетрудно видеть, имеет сумму, равную

$$\frac{M}{\left(1-\frac{z_1-b_1}{R_1'}\right)\left(1-\frac{z_2-b_2}{R_2'}\right)}, \tag{14}$$

и эта последняя функция называется *мажорантной функцией для ряда* (4). Ее разложение в степенной ряд по степеням $(z_1-b_1)$ и $(z_2-b_2)$ имеет положительные коэффициенты, большие, чем модули коэффициентов $a_{pq}$.

Нетрудно обобщить на случай двух переменных и результаты [14]. Пусть $f(z_1, z_2)$ — функция, регулярная в кругах $|z_1-b_1|\leqslant R_1$ и $|z_2-b_2|\leqslant R_2$, с центрами $b_1$ и $b_2$, и пусть $l_1$ и $l_2$ — окружности этих кругов. Предполагая регулярность в замкнутых кругах и фиксируя две какие-нибудь точки $z_1$ и $z_2$ внутри упомянутых кругов, мы будем иметь формулу Коши

$$f(z_1, z_2)=-\frac{1}{4\pi^2}\int_{l_1}dz_1'\int_{l_2}\frac{f(z_1', z_2')}{(z_1'-z_1)(z_2'-z_2)}dz_2'. \tag{15}$$

Рассмотрим рациональную дробь

$$\frac{1}{(z_1'-z_1)(z_2'-z_2)}.$$

Как и в [14], мы можем разложить ее по степеням разностей $(z_1-b_1)$ и $(z_2-b_2)$ в ряд

$$\frac{1}{(z_1'-z_1)(z_2'-z_2)}=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{(z_1-b_1)^p(z_2-b_2)^q}{(z_1'-b_1)^{p+1}(z_2'-b_2)^{q+1}},$$

равномерно сходящийся относительно $z_1'$ и $z_2'$, если эти последние находятся на окружностях $l_1$ и $l_2$. Подставляя это выражение в формулу (15) и интегрируя почленно, мы и придем к представлению нашей функции $f(z_1, z_2)$ внутри упомянутых кругов в виде степенного ряда

$$f(z_1, z_2)=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}a_{pq}(z_1-b_1)^p(z_2-b_2)^q. \tag{16}$$

Коэффициенты этого ряда определяются по формулам

$$a_{pq} = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{l_1} dz_1' \int_{l_2} \frac{f(z_1', z_2')}{(z_1'-b_1)^{p+1}(z_2'-b_2)^{q+1}}\, dz_2' =$$

$$= \frac{1}{p!\,q!}\left.\frac{\partial^{p+q} f(z_1, z_2)}{\partial z_1^p \partial z_2^q}\right|_{z_1=b_1;\ z_2=b_2}. \quad (17)$$

Таким образом, *всякая функция $f(z_1, z_2)$, регулярная внутри двух кругов, разлагается внутри этих кругов в степенной ряд.* Нетрудно видеть, как и в [14], что это разложение *единственно*, ибо коэффициенты его определяются обязательно формулой (11).

Мы можем в ряде (4) соединить в одну группу члены одинакового измерения относительно разностей $(z_1 - b_1)$ и $(z_2 - b_2)$, т. е. написать ряд (4) в виде

$$\sum_{s=0}^{\infty} \sum_{p+q=s} a_{pq}(z_1 - b_1)^p (z_2 - b_2)^q, \quad (18)$$

где внутренняя конечная сумма распространяется на те значения $p$ и $q$, сумма которых равна $s$. Формула (18) дает нам внутри кругов сходимости представление функции $f(z_1, z_2)$ в виде суммы однородных полиномов относительно $(z_1 - b_1)$ и $(z_2 - b_2)$. Положим теперь наоборот, что ряд (18), расположенный по однородным полиномам, будет равномерно сходиться в некоторых кругах $|z_1 - b_1| \leqslant R_1$ и $|z_2 - b_2| \leqslant R_2$. Согласно теореме Вейерштрасса, сумма этого ряда будет регулярной функцией $f(z_1, z_2)$ в этих кругах.

Мы можем, кроме того, в данном случае дифференцировать наш ряд (18) сколько угодно раз по обеим переменным. Совершая это дифференцирование и полагая затем $z_1 = b_1$ и $z_2 = b_2$, получим для коэффициентов $a_{pq}$ формулы (11), т. е. эти коэффициенты будут коэффициентами ряда Тейлора для функции $f(z_1, z_2)$, и мы можем переписать ряд (18), расположенный по однородным полиномам, в виде двойного ряда (4), причем этот ряд будет абсолютно и равномерно сходиться внутри упомянутых кругов. Таким образом, мы можем утверждать, что из равномерной сходимости ряда, расположенного по однородным полиномам, внутри некоторых кругов, следует, что мы можем переписать этот ряд просто в виде двойного ряда, который будет обычным степенным рядом, абсолютно сходящимся внутри упомянутых кругов.

Если отделить у $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ вещественную и мнимую части, то в четырехмерном пространстве с координатами $(x_1, y_1, x_2, y_2)$ область равномерной сходимости ряда (18), расположенного по однородным полиномам, может быть более широкой, чем у ряда (4).

В случае (9) ряд (18) будет иметь вид

$$\sum_{s=0}^{\infty}(z_1+z_2)^s,$$

и область его равномерной сходимости определяется неравенством

$$|z_1+z_2|<1,$$

т. е.

$$(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2<1. \tag{19}$$

Для ряда (9) мы должны иметь $R_1+R_2=1$, что приводит в $E_4$ к неравенству

$$x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2+2\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}<1. \tag{20}$$

Нетрудно видеть, что неравенство (19) определяет в $E_4$ более широкую область сходимости, чем (20), т. е. из (20) следует (19), но не наоборот. Мы не рассматриваем общего вопроса об области сходимости ряда (4) в $E_4$. Все сказанное выше легко переносится и на случай степенных рядов от $m$ комплексных переменных.

Напомним, что если функция $f(z)$ регулярна в некотором круге $|z-a|<r$, $f(a)=0$ и $f(z)\not\equiv 0$, то существует такое целое $m>0$, что $f(z)=(z-a)^m f_1(z)$, где $f_1(z)$ регулярна в круге $|z-a|<r$ и отлична в нем от нуля. Для случая многих комплексных переменных имеется аналогичная теорема Вейерштрасса:

Теорема. *Если $f(w, z)$ регулярна в бицилиндре $\{|w|<r_1;\ |z|<r_2\}$, $f(0, 0)=0$ и $f(w, 0)\not\equiv 0$, то существует такое целое $m>0$, что в некотором бицилиндре $A'\{|w|<r_1';\ |z|<r_2'\}$*

$$f(w, z)=[w^m+A_1(z)w^{m-1}+\ldots+A_m(z)]f_1(w, z),$$

*где $A_k(z)(k=1, \ldots, m)$ регулярны в круге $|z|<r_2'$ и $f_1(w, z)$ — в круговом бицилиндре $A'$, причем $A_k(0)=0$ и $f_1(0, 0)\neq 0$.*

**85. Аналитическое продолжение.** Аналитическое продолжение функции $f(z_1, z_2)$, регулярной в некоторой области $D$ пространства $E_4$, может совершаться при помощи цепи областей и вдоль кривой в упомянутом пространстве. Мы кратко остановимся на случае продолжения при помощи цепи круговых бицилиндров.

Пусть функция $f(z_1, z_2)$ задана рядом (4) в некотором круговом бицилиндре $D_1\{|z_1-b_1|<r_1;\ |z_2-b_2|<r_2\}$. Возьмем некоторую точку $(c_1, c_2)$ внутри этого бицилиндра. При помощи ряда (4) определяются частные производные $f(z_1, z_2)$ в точке $(c_1, c_2)$ и ряд Тейлора для $f(z_1, z_2)$ по степеням $(z_1-c_1)$ и $(z_2-c_2)$, сходящийся в некотором бицилиндре $D_2\{|z-c_1|<r_1';\ |z-c_2|<r_2'\}$. Он может в $E_4$ содержать точки, находящиеся вне $D_1$, и при этом в общей части $D_1$ и $D_2$

значения $f(z_1, z_2)$ будут совпадать, а в точках $D_2$, находящихся вне $D_1$, мы получим аналитическое продолжение $f(z_1, z_2)$. Если брать последовательные центры бицилиндров на фиксированной «линии» $z_1(t)$, $z_2(t)$, где $t$ — вещественный параметр, то получится определенное аналитическое продолжение первоначального элемента (4) функции $(z_1, z_2)$. Задание $z_1(t)$, $z_2(t)$ равносильно, очевидно, заданию вещественных и мнимых частей $z_1$ и $z_2$, как функций $t$, т. е. заданию линии в четырехмерном вещественном пространстве $E_4$. Для случая функции одной комплексной переменной этот процесс указан в [18]. На плоскостях комплексных переменных $z_1$ и $z_2$ задание $z_1(t)$, $z_2(t)$ определяет две линии $l_1$ и $l_2$, выходящие из точек $z_1 = a_1$, $z_2 = a_2$, причем параметр $t$ устанавливает биоднозначное соответствие между точками этих линий. Выбирая центры кругов на линиях $l_t[z_1(t), z_2(t)]$ при аналитическом продолжении, мы должны брать одинаковое значение $t$. Задание только линий $l_1$ и $l_2$ на плоскостях $z_1$ и $z_2$ может не определять однозначного аналитического продолжения. При указанном аналитическом продолжении линия $l_t$ в $E_4$ должна находиться внутри некоторой открытой области $D$ из $E_4$ — внутри бицилиндров вида $\{|z_1 - z_1^{(k)}| < r_k;\ |z_2 - z_2^{(k)}| < r_k\}$, где $z_i^{(k)} = z_i(t_k)$ $(i = 1, 2;\ k = 1, 2, \ldots, m)$. Эти бицилиндры и образуют $D$. Совершенно аналогично круги из [18] образуют открытую область плоскости комплексного переменного $z$, внутри которой содержится линия, вдоль которой совершается аналитическое продолжение.

Мы на этом и ограничиваемся в изложении общей теории функций нескольких комплексных переменных. В настоящее время эта часть теории функций очень широко развилась. Более подробное изложение можно найти в книгах: В. С. Владимиров, Методы теории функций многих комплексных переменных, «Наука», 1964; Б. А. Фукс, Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных, Физматгиз, 1962; Б. А. Фукс, Специальные главы теории аналитических функций многих комплексных переменных, Физматгиз, 1963; Б. В. Шабат, Введение в комплексный анализ, «Наука», 1969.

**86. Функции матриц. Предварительные понятия.** Перейдем теперь к рассмотрению случая, когда аргументом функции является одна или несколько матриц, притом начнем со случая одной матрицы. Выше мы уже рассматривали [$III_1$, 44] наиболее простые случаи, а именно полином и рациональную функцию от одной матрицы. Прежде чем переходить к исследованию функций более сложных, установим некоторые основные понятия. В дальнейшем через $n$ обозначается порядок матриц.

Пусть имеется бесконечная последовательность матриц

$$X_1, X_2, \ldots \qquad (21)$$

Будем говорить, что эта последовательность имеет пределом матрицу $X$, если при любых значениях значков $l$ и $k$

$$\lim_{m\to\infty}\{X_m\}_{lk}=\{X\}_{lk}, \tag{22}$$

т. е. элементы матриц $X_m$ имеют своими пределами соответствующие элементы матрицы $X$. При этом мы будем всегда считать, что рассматриваемые матрицы имеют один и тот же порядок.

Введем теперь некоторые новые обозначения, которые будут нам полезны в дальнейшем. Будем обозначать символом $\|a\|$ матрицу, все элементы которой равны числу $a$. Будем обозначать через $|X|$ матрицу, элементы которой равны модулям элементов матрицы $X$, т. е.

$$\{|X|\}_{lk}=|\{X\}_{lk}|. \tag{23}$$

Если некоторая матрица $Y$ имеет положительные элементы, бо́льшие, чем элементы матрицы $|X|$, то будем это записывать в виде неравенства

$$|X|<Y.$$

Иначе говоря, это неравенство равносильно системе следующих $n^2$ неравенств:

$$|\{X\}_{lk}|<\{Y\}_{lk} \qquad (l,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Рассмотрим бесконечный ряд, члены которого суть матрицы

$$Z_1+Z_2+\ldots$$

Он называется сходящимся, если сумма его первых $n$ слагаемых (матрица) стремится к определенной предельной матрице $Z$. При этом матрица $Z$ называется суммой ряда

$$Z=Z_1+Z_2+\ldots \tag{24}$$

Это равенство равносильно, очевидно, следующим $n^2$ равенствам:

$$\{Z\}_{lk}=\{Z_1\}_{lk}+\{Z_2\}_{lk}+\ldots \qquad (l,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{25}$$

Назовем окрестностью матрицы $A$ все матрицы $X$, удовлетворяющие условию

$$|X-A|<\|\rho\|, \tag{26}$$

где $\rho$ — заданное положительное число. Неравенство (26) равносильно следующим $n^2$ неравенствам:

$$|\{X-A\}_{lk}|<\rho.$$

Основную роль при определении функции от матриц будут играть для нас в дальнейшем степенные ряды от этих матриц, и мы переходим сейчас к рассмотрению таких рядов.

**87. Степенные ряды от одной матрицы.** Степенной ряд одной матрицы имеет вид

$$a_0 I + a_1 (X - \alpha I) + a_2 (X - \alpha I)^2 + \ldots, \tag{27}$$

где $a_k$ и $\alpha$ — заданные числа, а $I$ — единичная матрица. Для простоты письма будем считать в дальнейшем, что $\alpha = 0$. Вместо ряда (27) будем иметь ряд

$$a_0 I + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots \tag{28}$$

Согласно правилу умножения матриц имеем

$$\{X^2\}_{ik} = \sum_{s=1}^{n} \{X\}_{is} \{X\}_{sk}$$

и вообще

$$\{X^m\}_{ik} = \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_{m-1}} \{X\}_{ij_1} \{X\}_{j_1 j_2} \ldots \{X\}_{j_{m-2} j_{m-1}} \{X\}_{j_{m-1} k},$$

где суммирование производится по всем значкам $j_k$ независимо, от 1 до $n$. Таким образом, элементы матрицы, которая представляется суммой ряда (28), будут выражаться рядами

$$a_0 \delta_{ik} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_{m-1}} \{X\}_{ij_1} \{X\}_{j_1 j_2} \ldots \{X\}_{j_{m-1} k}, \tag{29}$$

где через $\delta_{ik}$ мы обозначили число, которое определяется формулой

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0 \text{ при } i \neq k, \\ 1 \text{ при } i = k. \end{cases} \tag{30}$$

Последнее обстоятельство непосредственно вытекает из того, что свободный член ряда (28) есть $a_0 I$, т. е. диагональная матрица, все диагональные элементы которой равны $a_0$. Формула (29) показывает нам, что ряд (28) равносилен $n^2$ обычным степенным рядам особого вида относительно $n^2$ переменных $\{X\}_{ik}$. Заметим, что при $m = 1$ слагаемое суммы в формуле (29) имеет вид $a_1 \{X\}_{ik}$, и внутренняя сумма исчезает.

Остановимся теперь на вопросе сходимости ряда (28). Займемся сначала абсолютной сходимостью, т. е. наряду с рядом (28) будем рассматривать также ряд вида

$$|a_0| I + |a_1| |X| + |a_2| |X|^2 + \ldots \tag{31}$$

или ему соответствующие $n^2$ рядов

$$|a_0| \delta_{ik} + \sum_{m=1}^{\infty} |a_m| \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_{m-1}} \{|X|\}_{ij_1} \{|X|\}_{j_1 j_2} \ldots \{|X|\}_{j_{m-1} k}. \tag{32}$$

Если эти ряды сходятся, то ряды (29) и подавно сходятся, т. е. сходимость ряда (31) обеспечивает и сходимость ряда (28), и в этом случае ряд (28) мы назовем абсолютно сходящимся. Согласно определению матрицы $|X|$ имеем

$$\{|X|\}_{ik}=|\{X\}_{ik}|,$$

т. е. выражение (32) получается из (29) заменой всех чисел их модулями.

Выясним теперь достаточное условие абсолютной сходимости ряда (28). Составим степенной ряд обычного комплексного переменного

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots, \tag{33}$$

и пусть радиус сходимости этого ряда равен $n\rho$, где $n$ — порядок наших матриц и $\rho$ — некоторое положительное число. Как известно, для коэффициентов ряда (33) имеем следующую оценку [14]:

$$|a_m|\leqslant\frac{M}{(n\rho-\varepsilon)^m}, \tag{34}$$

где $\varepsilon$ — любое малое фиксированное положительное число и $M$ — некоторое положительное число, зависящее от выбора $\varepsilon$. Возьмем теперь матрицу $\|b\|$, где $b$ — некоторое число, и определим ее целые положительные степени

$$\{\|b\|^2\}_{ik}=bb+bb+\ldots+bb=nb^2, \text{ т. е. } \|b\|^2=\|nb^2\|$$

и вообще

$$\|b\|^m=\|n^{m-1}b^m\|. \tag{35}$$

Будем теперь считать, что $b=\rho_1>0$, и возьмем некоторую матрицу $X$, удовлетворяющую условию $|X|<\|\rho_1\|$. При этом мы будем иметь, очевидно,

$$|X|^m<\|\rho_1\|^m, \text{ т. е. } |X|^m<\|n^{m-1}\rho_1{}^m\|.$$

В силу оценки (34)

$$|a_m||X|^m<\frac{M}{n}\left\|\left(\frac{n\rho_1}{n\rho-\varepsilon}\right)^m\right\|.$$

Если $\rho_1<\rho$, то, взяв $\varepsilon$ достаточно малым, мы будем иметь

$$0<\frac{n\rho_1}{n\rho-\varepsilon}<1,$$

и при этом ряд (31) будет очевидно сходящимся, а ряд (28) абсолютно сходящимся. Если радиус сходимости ряда (33) равен бесконечности, то сумма этого ряда есть целая функция от $z$ [67].

Из предыдущего вытекает, что в этом случае и ряд (28) будет абсолютно сходящимся для любой матрицы $X$. Мы получаем, таким образом, следующую теорему:

Теорема. *Если радиус сходимости ряда* (33) *равен* $\rho$, *то ряд* (28) *абсолютно сходится для всех матриц, находящихся в окрестности начала*

$$|X|<\|\rho\|. \tag{36}$$

***Если ряд*** (33) ***определяет целую функцию, то ряд*** (28) ***будет абсолютно сходиться для всех матриц (целая функция матрицы).***

Укажем примеры таких рядов:

$$e^X = I + \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} + \dots,$$

$$\sin X = \frac{X}{1!} - \frac{X^3}{3!} + \frac{X^5}{5!} - \dots,$$

$$\cos X = I - \frac{X^2}{2!} + \frac{X^4}{4!} - \dots,$$

$$a^X = e^{X \ln a} = I + \frac{X \ln a}{1!} + \frac{X^2 \ln^2 a}{2!} + \dots,$$

где число $a \neq 0$ и $\ln a$ — любое фиксированное значение логарифма числа $a$.

Вместо окрестности начала (36) можно рассматривать окрестность более общего вида

$$|X|<A, \tag{37}$$

где $A$ — матрица с положительными элементами, и легко показать, что если ряд (28) сходится в области (37), то он сходится в этой области абсолютно.

Пусть имеются два степенных ряда, каждый из которых сходится при условии (36), и положим, что суммы этих рядов совпадают:

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m X^m = \sum_{m=0}^{\infty} a'_m X^m.$$

Тем самым мы имеем при $X = z = [z, z, \dots, z]$ равенство

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m = \sum_{m=0}^{\infty} a'_m z^m.$$

Но отсюда следует $a_m = a'_m$ $(m = 0, 1, \dots)$, т. е. мы имеем ***единственность разложения в степенной ряд вида*** (28).

Все сказанное выше будет справедливо и для рядов вида (27), но только везде надо заменить $X$ на $X - \alpha$, т. е. на $X - \alpha I$. Для рядов вида (27) или (28) характерным является тот факт, что они содержат числа $a_k$ и $\alpha$ и только одну матрицу $X$, которая коммутирует с любым числом $\gamma$, т. е. с матрицей $\gamma I$. Отметим, что в связи с этим к выражению вида $(X - \gamma I)^m$, где $m$ — целое положительное число, применима формула бинома Ньютона. Но она неприменима к выражению

вида $(U_1+U_2)^m$, где $U_1$ и $U_2$ — две некоммутирующие матрицы. В связи со сказанным выше к рядам от одной матрицы применимы операции, которые мы имели раньше для степенных рядов одной комплексной переменной.

**88. Умножение степенных рядов. Обращение степенного ряда.** Пусть имеются два степенных ряда

$$f_1(X)=\sum_{m=0}^{\infty} a_m X^m \quad \text{и} \quad f_2(X)=\sum_{m=0}^{\infty} b_m X^m,$$

абсолютно сходящихся в области (36). Составим новую матрицу, которая получается от перемножения их сумм

$$Y=f_2(X)\cdot f_1(X).$$

Элементы этой матрицы будут определяться формулами

$$\{Y\}_{ik}=\sum_{s=1}^{n}\{f_2(X)\}_{is}\{f_1(X)\}_{sk}, \tag{38}$$

где

$$\{f_1(X)\}_{sk}=a_0\delta_{sk}+\sum_{m=1}^{\infty} a_m \sum_{j_1,\ldots,j_{m-1}} \{X\}_{sj_1}\{X\}_{j_1j_2}\ldots\{X\}_{j_{m-1}k},$$

$$\{f_2(X)\}_{is}=b_0\delta_{is}+\sum_{m=1}^{\infty} b_m \sum_{j_1,\ldots,j_{m-1}} \{X\}_{ij_1}\{X\}_{j_1j_2}\ldots\{X\}_{j_{m-1}s}.$$

Ввиду абсолютной сходимости этих последних рядов мы можем перемножить их почленно так, что для элементов матрицы $Y$ будем иметь согласно (38)

$$\{Y\}_{ik}=a_0b_0\delta_{ik}+\sum_{m=1}^{\infty}(a_0b_m+a_1b_{m-1}+\ldots$$

$$\ldots+a_mb_0)\sum_{j_1,\ldots,j_{m-1}}\{X\}_{ij_1}\{X\}_{j_1j_2}\ldots\{X\}_{j_{m-1}k},$$

саму матрицу можно представить в виде

$$Y=a_0b_0I+\sum_{m=1}^{\infty}(a_0b_m+a_1b_{m-1}+\ldots+a_mb_0)X^m.$$

Отсюда следует, что *абсолютно сходящиеся степенные ряды матриц перемножаются, как обычные степенные ряды численных переменных, причем произведение не зависит от порядка сомножителей.*

Перейдем теперь к вопросу о построении функции, обратной заданной функции $f(X)$, определяемой некоторым степенным рядом

$$Y=f(X)=a_0I+a_1X+a_2X^2+\ldots, \tag{39}$$

причем будем считать, что в этом ряде коэффициент $a_1$ отличен от нуля.

Рассмотрим степенной ряд обычной комплексной переменной

$$w=a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots \tag{40}$$

Как мы знаем, при условии $a_1\neq 0$ существует единственный степенной ряд

$$z=c_1(w-a_0)+c_2(w-a_0)^2+\ldots, \tag{41}$$

определяющий функцию, обратную (40) в некоторой окрестности $|w-a_0|<\rho$. Если подставим ряд (41) в правую часть формулы (40):

$$w=a_0+a_1\sum_{k=1}^{\infty}c_k(w-a_0)^k+a_2\left[\sum_{k=1}^{\infty}c_k(w-a_0)^k\right]^2+\ldots,$$

возведем написанные ряды в указанные степени, согласно правилу перемножения рядов, и сделаем приведение подобных членов, собирая вместе члены с одинаковыми степенями $(w-a_0)$, то придем к тождеству $w=w$. Если во всех предыдущих вычислениях заменим $z$ матрицей $X$ и $w$ матрицей $Y$, то все предыдущие вычисления с матричными степенными рядами, расположенными по степеням разности $(Y-a_0I)$, будут такими же, что и операции со степенными рядами от численной переменной $(w-a_0)$, следовательно, и результат будет тем же самым, т. е. *при условии* $a_1\neq 0$ *степенной ряд* (39), *определенный в окрестности* $X=0$, *допускает единственное обращение вида*

$$X=\sum_{k=1}^{\infty}c_k(Y-a_0I)^k, \tag{42}$$

*причем этот последний ряд будет абсолютно сходиться в некоторой окрестности*

$$|Y-a_0I|<\|\rho\|. \tag{43}$$

Эта окрестность определяется, очевидно, по радиусу сходимости ряда (41).

Применим предыдущее рассуждение к частному случаю ряда

$$w=e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\ldots$$

Обращение этого ряда, дающее функцию $\ln w$, приводит, как известно, к степенному ряду

$$\ln w = \ln [1 + (w-1)] = \frac{w-1}{1} - \frac{(w-1)^2}{2} + \dots,$$

сходящемуся в круге $|w-1|<1$.

Таким образом, обращение показательной функции

$$Y = e^X = I + \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} + \dots$$

приводит нас к определению логарифма матрицы в виде степенного ряда

$$\ln Y = \frac{Y-I}{1} - \frac{(Y-I)^2}{2} + \dots, \tag{44}$$

абсолютно сходящегося в области

$$|Y-I| < \left\| \frac{1}{n} \right\|. \tag{45}$$

Матричное уравнение

$$e^X = Y \tag{46}$$

относительно $X$ имеет при заданном $Y$ бесчисленное множество решений. Ряд (44) дает одно из решений этого уравнения, а именно он дает то решение, которое является регулярной функцией от $Y$ в окрестности единичной матрицы и обращается в нулевую матрицу при $Y=I$. Вопрос об остальных решениях уравнения как в окрестности единичной матрицы, так и вне этой окрестности, связан с вопросом об аналитическом продолжении ряда (44), или, что то же, с вопросом об аналитическом продолжении тех $n^2$ обычных степенных рядов, которым эквивалентен ряд (44). Мы будем заниматься этим вопросом в дальнейшем.

Обратимся теперь к определению степенной функции от матрицы. Она определяется с помощью логарифма матрицы следующим образом:

$$X^a = e^{a \ln X}. \tag{47}$$

Если мы имеем численное переменное $z$:

$$z^a = e^{a \ln z},$$

то, подставляя $a \ln z$ в разложение показательной функции

$$e^{a \ln z} = 1 + \frac{a \ln z}{1} + \frac{a^2 \ln^2 z}{2!} + \dots$$

и совершая подстановку

$$\ln z = \ln [1 + (z-1)] = \frac{z-1}{1} - \frac{(z-1)^2}{2} + \frac{(z-1)^3}{3} - \dots,$$

получим степенной ряд вида

$$z^a = [1 + (z-1)]^a = 1 + \frac{a}{1!}(z-1) + \frac{a(a-1)}{2!}(z-1)^2 + \ldots,$$

сходящийся при $|z-1| < 1$. Принимая во внимание упомянутое совпадение формальных операций и для степенных рядов с одной матрицей, получим

$$X^a = e^{a \ln X} = I + \frac{a}{1!}(X-I) + \frac{a(a-1)}{2!}(X-I)^2 + \ldots, \qquad (48)$$

причем это разложение будет абсолютно сходящимся в области

$$|X-I| < \left\| \frac{1}{n} \right\|. \qquad (49)$$

**89. Дальнейшее исследование сходимости.** Как мы уже упоминали, степенной ряд (28) равносилен $n^2$ рядам (29) от $n^2$ переменных $\{X\}_{ik}$. Рассмотрим внутреннюю сумму в рядах (29):

$$\sum_{j_1, \ldots, j_{m-1}} \{X\}_{ij_1} \{X\}_{j_1 j_2} \ldots \{X\}_{j_{m-1} k}. \qquad (50)$$

Собирая в этой сумме подобные члены, мы можем представить ряды (29) как обычные степенные ряды от $n^2$ переменных $\{X\}_{ik}$. Если в суммах (50) заменим все величины их модулями и числа $a_m$ заменим на $|a_m|$, то это, очевидно, вполне равносильно тому, чтобы в только что упомянутых степенных рядах заменить все величины их модулями. Отсюда следует, что *если ряды* (29) *привести к виду обычных степенных рядов, относительно переменных* $\{X\}_{ik}$, *то абсолютная сходимость этих рядов равносильна сходимости рядов* (32), т. е. *равносильна абсолютной сходимости ряда* (28).

Вообще сходимость ряда (28) в самом общем смысле этого слова сводится к существованию предела последовательности матриц

$$a_0 + \sum_{m=1}^{l} a_m X^m \qquad (51)$$

при беспредельном возрастании $l$. Добавление одного слагаемого, соответствующего $m = l+1$, к сумме (51) сводится к добавлению к суммам

$$a_0 \delta_{ik} + \sum_{m=1}^{l} a_m \sum_{j_1, \ldots, j_{m-1}} \{X\}_{ij_1} \{X\}_{j_1 j_2} \ldots \{X\}_{j_{m-1} k} \qquad (52)$$

$$(i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

однородного полинома относительно $\{X\}_{ik}$

$$a_{l+1} \sum_{j_1, \ldots, j_l} \{X\}_{ij_1} \{X\}_{j_1 j_2} \ldots \{X\}_{j_l k} \qquad (53)$$

степени $(l+1)$.

Таким образом, сходимость ряда (28) в указанном только что общем смысле равносильна сходимости $n^2$ рядов (29), причем в этих рядах объединяются в одну группу слагаемые вида (53).

Докажем теперь основную теорему о сходимости или расходимости степенного ряда в смысле предела сумм (51) при $l \to \infty$, т. е. о сходимости $n^2$ соответствующих степенных рядов от $n^2$ элементов $\{X\}_{ik}$ или о расходимости хотя бы одного из этих рядов.

Теорема. *Ряд*

$$a_0 I + a_1 X + a_2 X^2 + \dots \tag{54}$$

***сходится, если все характеристические числа матрицы $X$ лежат внутри круга сходимости ряда***

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \tag{55}$$

*Ряд* (54) ***расходится, если хотя бы одно из этих характеристических чисел лежит вне круга сходимости ряда*** (55).

Введем для краткости письма обозначения

$$f_l(X) = \sum_{m=0}^{l} a_m X^m, \quad f_l(z) = \sum_{m=0}^{l} a_m z^m$$

и суммы рядов обозначим, как и выше, $f(X)$ и $f(z)$.

Докажем сначала теорему для матриц $X$ с простыми элементарными делителями [III$_1$, 27], т. е. для матриц вида

$$X = S[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n] S^{-1}, \tag{56}$$

где $\lambda_k$ — характеристические числа $X$ и $S$ — некоторая неособая матрица, т. е. матрица с определителем, отличным от нуля. Подставляя (56) в $f_l(X)$, получим [III$_1$, 44]

$$f_l(X) = \sum_{m=0}^{l} a_m S[\lambda_1^m, \lambda_2^m, \dots, \lambda_n^m] S^{-1}$$

или

$$f_l(X) = S[f_l(\lambda_1), f_l(\lambda_2), \dots, f_l(\lambda_n)] S^{-1},$$

откуда

$$S^{-1} f_l(X) S = [f_l(\lambda_1), f_l(\lambda_2), \dots, f_l(\lambda_n)]. \tag{57}$$

Если все $\lambda_k$ лежат внутри круга сходимости ряда (55), то правая часть (57) имеет предел при $l \to \infty$, и мы получаем

$$f(X) = S[f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n)] S^{-1}. \tag{57$_1$}$$

Положим теперь, что по крайней мере одно из $\lambda_k$, например $\lambda_1$, лежит вне круга сходимости ряда (57). При этом $f_l(\lambda_1)$ не имеет конечного предела при $l \to \infty$ и из (57) следует, что $f_l(X)$ не имеет конечного предела. Теорема доказана для матриц $X$ вида (56).

Положим теперь, что матрица имеет не простые элементарные делители. Как доказано в добавлении к этому тому и сформулировано в [III$_1$, 27], произвольная матрица приводится к виду

$$X = S\left[J_{s_1}(\lambda_1),\ J_{s_2}(\lambda_2),\ \ldots,\ J_{s_q}(\lambda_q)\right] S^{-1}, \tag{56$_1$}$$

где матрица в квадратных скобках обозначает квазидиагональную матрицу. Обозначая через $s_k$ порядок матрицы $J_{s_k}(\lambda_k)$, имеем

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_q = n. \tag{58}$$

Матрица $J_{s_k}(\lambda_k)$ есть матрица, у которой на главной диагонали стоят числа $\lambda_k$, под главной диагональю — единицы, а остальные элементы равны нулю:

$$J_{s_k}(\lambda_k) = \begin{Vmatrix} \lambda_k & & & & \\ 1 & \lambda_k & & & \\ 0 & 1 & \lambda_k & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \lambda_k \end{Vmatrix}.$$

Если $s_k = 1$, то $J_1(\lambda_k) = \lambda_k$. Среди чисел $\lambda_k$ могут быть и одинаковые. Напомним, что для квазидиагональных матриц одинаковой структуры имеют место обычные формулы сложения и умножения [III$_1$, 26]:

$$S[X_1, \ldots, X_q] S^{-1} + S[Y_1, \ldots, Y_q] S^{-1} = S[X_1 + Y_1, \ldots, X_q + Y_q] S^{-1},$$
$$S[X_1, \ldots, X_q] S^{-1} \cdot S[Y_1, \ldots, Y_q] S^{-1} = S[X_1 Y_1, \ldots, X_q Y_q] S^{-1},$$
$$\left\{S[X_1, \ldots, X_q] S^{-1}\right\}^s = \left\{S[X_1^s, \ldots, X_q^s] S^{-1}\right\},$$

где $s$ — целое положительное. Принимая это во внимание и учитывая, что $f_l(X)$ — многочлен, получим

$$f_l(X) = S\left[f_l(J_1(\lambda_1)),\ f_l(J_2(\lambda_2)),\ \ldots,\ f_l(J_q(\lambda_q))\right] S^{-1}. \tag{59}$$

Переходим к определению вида матриц $f_l(J_k(\lambda_k))$. Можно написать

$$J_{s_k}(\lambda_k) = \lambda_k I_{s_k} + J^{(0)}_{s_k}, \tag{60}$$

где $I_{s_k}$ — единичная матрица порядка $s_k$, а $J^{(0)}_{s_k}$ — матрица порядка $s_k$, у которой под главной диагональю стоят единицы, а все остальные элементы равны нулю. Легко проверить, что $\left[J^{(0)}_{s_k}\right]^p$ при $s_k > p > 0$ и целом $p > 0$ есть матрица, у которой стоят единицы на $p$-й диагонали ниже главной, а на прочих местах стоят нули. В частности, $\left[J^{(0)}_{s_k}\right]^{s_k - 1}$ есть матрица, у которой в левом нижнем углу стоит единица и остальные элементы равны нулю. Матрица $\left[J^{(0)}_{s_k}\right]^p$, где $p \geqslant s_k$ — целое, есть нулевая матрица, т. е. матрица, у которой все элементы

равны нулю. Отметим еще, что к сумме (60) применима формула бинома Ньютона:

$$\left[J_{s_k}(\lambda_k)\right]^s = \lambda_k^s I_{s_k} + \binom{s}{1}\lambda_k^{s-1} J_{s_k}^{(0)} + \binom{s}{2}\lambda_k^{s-2}\left[J_{s_k}^{(0)}\right]^2 + \ldots + \left[J_{s_k}^{(0)}\right]^s,$$

откуда, как легко видеть, следует

$$f_l\left[J_{s_k}(\lambda_k)\right] = f_l(\lambda_k) I_{s_k} + \frac{f_l'(\lambda_k)}{1!} J_{s_k}^{(0)} + \frac{f_l''(\lambda_k)}{2!}\left[J_{s_k}^{(0)}\right]^2 + \ldots,$$

причем, очевидно,

$$\frac{f_l^{(m)}(\lambda_k)}{m!}\left[J_{s_k}^{(0)}\right]^m$$

есть нулевая матрица, если $m$ больше наименьшего из двух чисел $l$ и $(s_k - 1)$. Принимая во внимание вышесказанное, будем иметь

$$f_l\left(J_{s_k}(\lambda_k)\right) = \left\| \begin{array}{ccccc} f_l(\lambda_k) & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{f_l'(\lambda_k)}{1!} & f_l(\lambda_k) & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{f_l''(\lambda_k)}{2!} & \frac{f_l'(\lambda_k)}{1!} & f_l(\lambda_k) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{f_l^{(s_k-1)}(\lambda_k)}{(s_k-1)!} & \frac{f_l^{(s_k-2)}(\lambda_k)}{(s_k-2)!} & & \ldots & f_l(\lambda_k) \end{array} \right\|. \quad (61)$$

Если все $\lambda_k$ находятся внутри круга сходимости ряда (55), то существуют конечные пределы

$$\lim_{l\to\infty} f_l^{(p)}(\lambda_k) = f^{(p)}(\lambda_k), \quad p = 0, 1, \ldots$$

Переходя к пределу $l \to \infty$ в формуле (59), получим

$$f(X) = S\left[f\left(J_{s_1}(\lambda_1)\right), \ldots, f\left(J_{s_q}(\lambda_q)\right)\right] S^{-1}, \quad (61')$$

где $f\left(J_{s_k}(\lambda_k)\right)$ определяются формулой (61), в которой $f_l(z)$ надо заменить на $f(z)$. Если хотя бы одно из $\lambda_k$ расположено вне круга сходимости ряда (55), то расходимость ряда получается так же, как и в случае простых элементарных делителей. Теорема полностью доказана, и установлена формула для суммы ряда (54), когда $\lambda_k$ расположена внутри круга сходимости ряда (55).

Легко проверить, что при $f'(\lambda_k) \neq 0$ матрица $f\left(J_{s_k}(\lambda_k)\right)$ имеет один элементарный делитель $[\lambda - f(\lambda_k)]^{s_k}$. Отсюда следует, что если

$$f'(\lambda_k) \neq 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, q),$$

то элементарные делители $f(X)$ суть

$$[\lambda - f(\lambda_1)]^{s_1}, \ldots, [\lambda - f(\lambda_q)]^{s_q}.$$

Запишем значения функции $f(z)$ и ее производных, которые входят в формулу (61′):

$$f(\lambda_k),\ f'(\lambda_k),\ \ldots,\ f^{(s_k-1)}(\lambda_k) \quad (k=1,\ \ldots,\ q). \tag{62}$$

Здесь, напомним, $q$ — число элементарных делителей матрицы $X$, а группа $s_k$ чисел (62) соответствует элементарному делителю $(\lambda-\lambda_k)^{s_k}$ матрицы $X$. В силу (58) число значений (62) равно порядку $n$ матрицы $X$. Если среди элементарных делителей $(\lambda-\lambda_k)^{sk}$ есть делители с совпадающими числами $\lambda_k$, то и среди значений (62) будут совпадающие. Если, например, $\lambda_1=\lambda_2$, то среди значений (62) будет во всяком случае два раза фигурировать $f(\lambda_1)$, а может быть, и некоторые производные при $\lambda=\lambda_1$. Считая, что среди чисел $\lambda_k$, $k=1,\ \ldots,\ q$, есть совпадающие, выделим из них лишь несовпадающие значения. Обозначим через $\tilde{\lambda}_k$ $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$ все различные собственные значения $X$ и через $p_k$ — наибольший из показателей элементарных делителей, соответствующих собственному значению $\tilde{\lambda}_k$, если таких делителей несколько. Если имеется только один такой делитель, то $p_k$ совпадает с соответствующими $s_k$. При таком обозначении несовпадающие значения из таблицы (62) будут следующие:

$$f(\tilde{\lambda}_k),\ f'(\tilde{\lambda}_k),\ \ldots,\ f^{(p_k-1)}(\tilde{\lambda}_k) \quad (k=1,\ \ldots,\ m). \tag{$63_1$}$$

Если матрица $X$ имеет $n$ различных собственных значений $\tilde{\lambda}_1,\ \tilde{\lambda}_2,\ \ldots,\ \tilde{\lambda}_n$, то вместо $(63_1)$ имеем

$$f(\tilde{\lambda}_1),\ f(\tilde{\lambda}_2),\ \ldots,\ f(\tilde{\lambda}_n). \tag{$63_2$}$$

Если матрица $X$ имеет кратные собственные значения, но всем им соответствуют простые элементарные делители и $\tilde{\lambda}_1,\ \ldots,\ \tilde{\lambda}_m$ — полный набор различных собственных значений $(m<n)$, то вместо $(63_2)$ имеем

$$f(\tilde{\lambda}_1),\ f(\tilde{\lambda}_2),\ \ldots,\ f(\tilde{\lambda}_m). \tag{$63_3$}$$

Значения $(63_1)$, $(63_2)$, $(63_3)$ называются значениями $f(X)$ на спектре матрицы $X$ (Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, «Наука», 1966).

Из формулы (61) после замены $f_l(z)$ на $f(z)$ и из формулы (61′) следует, что для двух степенных рядов $f(z)$ и $\varphi(z)$ матрицы $f(X)$ и $\varphi(X)$ совпадают при указанном выше условии сходимости соответствующих степенных рядов при $\lambda=\tilde{\lambda}_k$, если совпадают значения $f(z)$ и $\varphi(z)$ на спектре $X$. Этим обстоятельством можно воспользоваться для того, чтобы по функции $f(z)$ и матрице $X$ построить полином $P(X)$ такой, что $f(X)=P(X)$. Для этого достаточно построить $P(z)$ так, чтобы его значения совпадали со значениями $f(z)$ на спектре $X$, т. е. со значениями, приведенными в одном из случаев (63). Возникающая задача является задачей интерполирования, к которой мы и перейдем.

**90. Интерполяционные полиномы.** Основная и простейшая задача интерполирования заключается в следующем: требуется построить полином степени не выше $(n-1)$, который принимал бы заданные значения в $n$ точках плоскости комплексного переменного. Положим, что в точках $z_k\,(k=1, 2, \ldots, n)$ он должен принимать значение $w_k$. Заметим прежде всего, что такой полином может быть только один. Действительно, мы знаем [I, 185], что два полинома степени не выше $(n-1)$ совпадают тождественно, если совпадают их значения в различных $n$ точках. Решение задачи интерполирования может быть написано в виде следующей простой формулы:

$$P_{n-1}(z)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_{k-1})(z-z_{k+1})\ldots(z-z_n)}{(z_k-z_1)(z_k-z_2)\ldots(z_k-z_{k-1})(z_k-z_{k+1})\ldots(z-z_n)}w_k. \quad (64)$$

Непосредственно видно, что выражение, стоящее справа, есть полином от $z$ степени не выше $(n-1)$. Если мы положим, например, $z=z_1$, то в правой части все слагаемые, кроме первого, обратятся в нуль, а в первом слагаемом дробь будет очевидно равна единице, т. е. $P_{n-1}(z_1)=w_1$, и точно так же вообще $P_{n-1}(z_k)=w_k$.

Если $f(z)$ есть функция, регулярная в некоторой области, и точки $z_k$ принадлежат этой области, то формула

$$R_{n-1}(z)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(z-z_1)\ldots(z-z_{k-1})(z-z_{k+1})\ldots(z-z_n)}{(z_k-z_1)\ldots(z_k-z_{k-1})(z_k-z_{k+1})\ldots(z_k-z_n)}f(z_k) \quad (65)$$

дает тот единственный полином степени не выше $(n-1)$, значения которого в точках $z_k$ совпадают со значениями функции $f(z)$. Этот полином называется обычно интерполяционным полиномом Лагранжа для точек $z_k$, а формула (65) называется интерполяционной формулой Лагранжа.

Общий полином степени $(n-1)$

$$a_0+a_1z+\ldots+a_{n-1}z^{n-1}$$

содержит всего $n$ параметров $a_s$. В формуле Лагранжа эти параметры определяются из $n$ условий, а именно из тех условий, что в точках $z_k$ значения полинома должны равняться $f(z_k)$. Поставим теперь задачу более общим образом. Положим опять, что $f(z)$ регулярна в некоторой области и что внутри этой области задано $j$ точек $z_1, z_2, \ldots, z_j$, и требуется построить полином степени не выше $(n-1)$, у которого бы в точке $z_k$ совпадали его значение и значения всех его производных до порядка $(p_k-1)$ с соответствующими значениями функции $f(z)$, т. е. $P_{n-1}(z)$ и является искомым интерполяционным полиномом. Мы будем обозначать его в дальнейшем символом $h\begin{pmatrix} z; & z_1, \ldots, z_m \\ & p_1, \ldots, p_m \end{pmatrix}$,

причем все $z_k$ различны. При $n=2$ имеем

$$h\begin{pmatrix} z; & z_1 & z_2 \\ & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} f(z_1) + \frac{z-z_2}{z_1-z_2} f(z_2),$$

$$h\begin{pmatrix} z; & z_1 \\ & 2 \end{pmatrix} = f(z_1) + (z-z_1) f'(z_1).$$

Первая формула получается для $n=2$ из формулы (65). В общем случае имеем, как нетрудно показать,

$$h\begin{pmatrix} z; & z_1, & \ldots, & z_m \\ & p_1, & \ldots, & p_m \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \left[ a_{k,1} + a_{k,2}(z-z_k) + \ldots + a_{k,p_k}(z-z_k)^{p_k-1} \right] Q_k(z), \quad (66)$$

где

$$a_{k,j} = \frac{1}{(j-1)!} \left[ \frac{f(z)}{Q_k(z)} \right]^{(j-1)} \Bigg|_{z=z_k},$$

$$Q_k(z) = \frac{R(z)}{(z-z_k)^{p_k}}; \quad R(z) = (z-z_1)^{p_1} \ldots (z-z_m)^{p_m}.$$

Действительно, легко проверить, что полином $P(z) = h\begin{pmatrix} z; & z_1, & \ldots, & z_m \\ & p_1, & \ldots, & p_m \end{pmatrix}$ имеет степень не выше $p_1 + \ldots + p_m - 1$ и удовлетворяет условиям

$$P(z_j) = f(z_j), \ \ldots, \ P^{(p_j-1)}(z_j) = f^{(p_j-1)}(z_j) \qquad (j=1, \ldots, m).$$

Формула (65) получается при $m=n$, $p_1=p_2=\ldots=p_n=1$.

**91. Тождество Кейли. Формула Сильвестра.** Назовем полином $Q(z)$ со старшим коэффициентом, равным единице, аннулирующим полиномом матрицы $X$, если $Q(X)=0$. Из формул (61), (61'), примененных к $f(z) \equiv Q(z)$, непосредственно следует, что обращение в нуль значений $Q(z)$ на спектре матрицы $X$ является необходимым и достаточным условием того, что $Q(z)$ есть аннулирующий полином матрицы $X$. Используя это и принимая во внимание сказанное в [**90**], легко построить аннулирующий полином минимальной степени. Он имеет вид

$$Q_0(z) = (z-\tilde{\lambda}_1)^{p_1} \ldots (z-\tilde{\lambda}_m)^{p_m},$$

где $\tilde{\lambda}_1, \ldots, \tilde{\lambda}_m$ — полный набор различных собственных значений $X$ и $p_k$ — наибольшая степень элементарного делителя, соответствующего собственному значению $\lambda=\lambda_k$. Если матрица $X$ порядка $n$ имеет $n$ различных собственных значений, то

$$Q_0(z) = (z-\tilde{\lambda}_1) \ldots (z-\tilde{\lambda}_n).$$

Если же у матрицы имеются кратные собственные значения, но всем им соответствуют простые элементарные делители, то

$$Q_0(z)=(z-\tilde{\lambda}_1)\dots(z-\tilde{\lambda}_m).$$

Из изложенного следует, что всякий аннулирующий полином $Q(z)$ должен делиться на $Q_0(z)$, и общий вид аннулирующего полинома следующий: $Q(z)=Q_0(z)R(z)$, где $R(z)$ — любой полином.

Характеристический полином матрицы $X$ имеет вид

$$D(z)=\Delta(zI-X)=\sum_{k=0}^{n}a_kz^k \qquad (a_n=1),$$

где $\Delta(zI-X)$ — определитель матрицы $zI-X$. Он представим в виде

$$D(z)=(z-\lambda_1)^{q_1}\dots(z-\lambda_m)^{q_m}, \tag{67}$$

где $q_k$ — кратность собственного значения $\lambda_k$ и, очевидно, $q_k\geqslant p_k$, т. е. $D(z)=Q_0(z)R_1(z)$, где $R_1(z)$ — полином (или $R_1(z)\equiv 1$). Отсюда следует, что $D(z)$ — аннулирующий полином:

$$D(X)=0. \tag{67$_1$}$$

Это соотношение называется тождеством Кейли. Отметим, что в случае, если для всех собственных значений элементарные делители просты, т. е. если $X=S[\lambda_1,\dots,\lambda_n]S^{-1}$, то тождество Кейли непосредственно следует из (57$_1$). Действительно, $D(\lambda_k)=0$, и отсюда

$$D(X)=S[D(\lambda_1),\dots,D(\lambda_n)]S^{-1}=0.$$

Перейдем к построению полинома $P(X)$, совпадающего с заданной функцией $f(X)$ при условии принадлежности всех $\lambda_k$ открытому кругу сходимости $f(z)$. Полином $P(X)$ минимальной степени, обладающий таким свойством (его мы обозначим через $P_0(X)$), получается путем интерполирования. Из изложенного выше следует, что полином $P_0(X)$ получается из полинома $h\begin{pmatrix} z, & \tilde{\lambda}_1,\dots,\tilde{\lambda}_m \\ & p_1,\dots,p_m \end{pmatrix}$ заменой $z$ на $X$.

Если у матрицы $X$ все характеристические числа различны, то

$$P_0(X)=f(X)=\sum_{k=1}^{n}f(\tilde{\lambda}_k)\frac{(X-\tilde{\lambda}_1I)\dots(X-\tilde{\lambda}_{k-1}I)(X-\tilde{\lambda}_{k+1}I)\dots(X-\tilde{\lambda}_nI)}{(\tilde{\lambda}_k-\tilde{\lambda}_1)\dots(\tilde{\lambda}_k-\tilde{\lambda}_{k-1})(\tilde{\lambda}_k-\tilde{\lambda}_{k+1})\dots(\tilde{\lambda}_k-\tilde{\lambda}_n)}.$$

Эта формула называется формулой Сильвестра. Бесконечный ряд входит в эту формулу лишь посредством $f(\tilde{\lambda}_k)$. Если среди характеристических чисел есть совпадающие, но всем им соответствуют простые элементарные делители, то

$$P_0(X)=f(X)=\sum_{k=1}^{m}f(\tilde{\lambda}_k)\frac{(X-\tilde{\lambda}_1I)\dots(X-\tilde{\lambda}_{k-1}I)(X-\tilde{\lambda}_{k+1}I)\dots(X-\tilde{\lambda}_mI)}{(\tilde{\lambda}_k-\tilde{\lambda}_1)\dots(\tilde{\lambda}_k-\tilde{\lambda}_{k-1})(\tilde{\lambda}_k-\tilde{\lambda}_{k+1})\dots(\tilde{\lambda}_k-\tilde{\lambda}_m)},$$

где $\tilde{\lambda}_1, \ldots, \tilde{\lambda}_m$ — полный набор различных характеристических чисел. В общем случае имеем

$$P_0(X)=f(X)=h\begin{pmatrix} X, & \tilde{\lambda}_1, & \ldots, & \tilde{\lambda}_m \\ & p_1, & \ldots, & p_m \end{pmatrix},$$

где полином $h\begin{pmatrix} z; & \lambda_1, & \ldots, & \lambda_m \\ & p_1, & \ldots, & p_m \end{pmatrix}$ определяется формулой (66).

Пример 1. Для матриц второго порядка при $\lambda_1 \neq \lambda_2$ получаем

$$P_0(X)=\frac{X-\lambda_1 I}{\lambda_2-\lambda_1}f(\lambda_1)+\frac{X-\lambda_2 I}{\lambda_1-\lambda_2}f(\lambda_2).$$

Если $\lambda_1=\lambda_2$ и имеется один элементарный делитель второго порядка, то

$$P_0(x)=f(\lambda_1)I+(X-\lambda_1)f'(\lambda_1).$$

Если же имеется два простых элементарных делителя, т. е.

$$X=\begin{Vmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_1\end{Vmatrix}=\lambda_1 I,$$

то

$$P_0(X)=f(\lambda_1 I)=f(\lambda_1)I.$$

Последнее равенство имеет место и для матриц $X=\lambda_1 I$ любого порядка.

Пример 2. Рассмотрим матрицу третьего порядка, имеющую одно собственное значение $\lambda_1$ кратности два и другое $\lambda_2 \neq \lambda_1$ — простое. Если числу $\lambda_1$ соответствует один элементарный делитель $(\lambda-\lambda_1)^2$, то имеем

$$P_0(X)=\left[\frac{f(\lambda_1)+f'(\lambda_1)(X-\lambda_1 I)}{\lambda_1-\lambda_2}(X-\lambda_2 I)+\frac{f(\lambda_2)}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}(X-\lambda_1 I)^2\right].$$

Если же числу $\lambda_1$ соответствуют два простых элементарных делителя, то

$$(X)=\frac{X-\lambda_1 I}{\lambda_2-\lambda_1}f(\lambda_1)+\frac{X-\lambda_2 I}{\lambda_1-\lambda_2}f(\lambda_2).$$

**92. Определение функций одной матрицы формулой Коши.** Пусть $B$ — совокупность конечного числа $m$ замкнутых, односвязных и непересекающихся областей $B_j$ плоскости комплексного переменного $z$, ограниченных гладкими кривыми $l_j$. Пусть, далее, $X$ — матрица, все собственные значения которой лежат строго внутри областей $B_j$, и $f(z)$ — функция, регулярная в замкнутых областях $B_j$. Определим $f(X)$ формулой, аналогичной формуле Коши для $f(z)$:

$$f(X)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{m}\int_{l_j}(zI-X)^{-1}f(z)\,dz, \qquad (68)$$

причем написанный интеграл применяется поэлементно по отношению к матричной функции, стоящей под знаком интеграла. Отметим, что согласно сказанному выше определитель матрицы $(zI - X)$ не обращается в нуль на $l_j$. Контуры $l_j$ можно деформировать с сохранением этого условия, и, в частности, их можно перевести в окружности достаточно малого радиуса, окружающие различные собственные значения $X$. При этом число $m$ станет равным числу различных собственных значений $X$. В формуле (68) предполагается, что значения $f(z)$ в различных областях $B_j$, вообще говоря, не связаны между собой, т. е. значения $f(z)$, например, в $B_1$ могут не получаться из значений $f(z)$ в $B_2$ никаким аналитическим продолжением. Отметим еще, что для всех матриц, достаточно близких (поэлементно) к $X$, формула (68) также применима, поскольку все собственные значения этих матриц будут по-прежнему лежать внутри $B_j$. При этом элементы $f(X)$ будут регулярными функциями элементов $X$. Кратко будем в дальнейшем говорить, что $f(X)$ — регулярная функция $X$, если элементы $f(X)$ являются регулярными функциями элементов $X$. Отметим еще, что $(zI - X)^{-1}$ есть рациональная функция элементов $X$ и переменной $z$, так что интегралы, входящие в (68), могут быть вычислены по теореме о вычетах, если известны собственные значения $\lambda_k$. При дальнейшем изменении $X$ мы имеем дело с аналитическим продолжением $f(X)$, о чем мы будем говорить далее.

Если $m > 1$, то, как мы упоминали выше, в определении $f(X)$ в различных $B_j$ значения $f(z)$ могут быть никак не связаны между собой. (Например, $f(z) = z^2$ в одной из $B_j$ и $f(z) = \sin z$ — в другой.) Наиболее интересным и важным случаем является тот случай, когда $m = 1$ или $m > 1$, а функция $f(z)$ в различных $B_j$ определяется на основе одной и той же аналитической функции $f(z)$, причем $B_j$ принадлежат некоторой области регулярности $f(z)$ на плоскости $z$. При этом функция $f(X)$ называется аналитической, а в остальных случаях — кусочно-аналитической. Функция $f(X)$, представимая формулой (68), не всегда представима степенным рядом. Но мы покажем сейчас, что всякая функция $f(X)$, представимая степенным рядом, может быть представлена и формулой (68). Уточним это утверждение. Положим, что все собственные значения $\lambda_k$ матрицы $X$ лежат внутри круга $|z| \leqslant \rho$, $f(z)$ регулярна в этом круге:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

Пусть $f(X)$ определяется рядом

$$f(X) = a_0 I + a_1 X + a_2 X^2 + \dots$$

Определим функцию $\varphi(X)$ формулой Коши

$$\varphi(X) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} (zI - X)^{-1} f(z)\, dz$$

и докажем, что $\varphi(X) \equiv f(X)$ при указанных условиях. Положим сначала, что $X$ имеет простые элементарные делители: $X = S[\lambda_1, \ldots, \lambda_n] S^{-1}$. Принимая во внимание очевидную формулу

$$(zI - X)^{-1} = S(zI - [\lambda_1, \ldots, \lambda_n])^{-1} S^{-1},$$

получим

$$\varphi(X) = S\left\{\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} \left[\frac{1}{z-\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{z-\lambda_n}\right] f(z)\, dz\right\} S^{-1}$$

или, согласно формуле Коши,

$$\varphi(X) = S[f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n)] S^{-1}.$$

Ту же формулу мы имели [89] и для функции $f(X)$, представимой степенным рядом в случае (56). Следовательно,

$$\varphi(X) = f(X).$$

Аналогичным образом проводится доказательство в случае формулы ($56_1$), соответствующей непростым элементарным делителям $X$. При этом надо использовать формулу

$$\varphi(X) = S[F_1, \ldots, F_m] S^{-1},$$

где

$$F_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} [zI_{s_k} - J_{s_k}(\lambda_k)]^{-1} f(z)\, dz.$$

Для простоты письма ограничимся построением матрицы, стоящей под знаком интеграла, считая $J_{s_k}(\lambda_k)$ матрицей третьего порядка ($s_k = 3$):

$$\left[zI_3 - \begin{Vmatrix} \lambda_k & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_k & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_k \end{Vmatrix}\right]^{-1} = \begin{Vmatrix} z-\lambda_k & 0 & 0 \\ -1 & z-\lambda_k & 0 \\ 0 & -1 & z-\lambda_k \end{Vmatrix}^{-1}.$$

Но легко проверить, что

$$\begin{Vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & \lambda \end{Vmatrix}^{-1} = \begin{Vmatrix} \lambda^{-1} & 0 & 0 \\ \lambda^{-2} & \lambda^{-1} & 0 \\ \lambda^{-3} & \lambda^{-2} & \lambda^{-1} \end{Vmatrix}.$$

Сказанное выше приводит нас к выражению $\varphi(X)$ согласно формуле (61), в которой $f_l(z)$ заменено на $f(z)$. Такое же выражение было получено и для степенного ряда, т. е. в этом случае

$$\varphi(X) = f(X).$$

Из сказанного выше следует также, что если значения двух функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$ на спектре $X$ совпадают и эти функции регулярны

в окрестности спектра, то совпадают также значения $f_1(X)$ и $f_2(X)$, вычисленные по формуле (68) (где области $B_j$ — малые круги, содержащие спектр). Отсюда следует возможность замены $f(X)$ полиномом, как и в случае представления функции $f(X)$ степенным рядом.

Сформулируем некоторые легко доказываемые свойства функций $f(X)$, представимых формулой Коши. При этом всегда предполагается, что соответствующие функции $f(z)$ регулярны в окрестности $U$ собственных значений $X$.

1°. Если $f_1(z)+f_2(z)=f_3(z)$ в $U$, то $f_1(X)+f_2(X)=f_3(X)$.

2°. Если $f_1(z)\cdot f_2(z)=f_3(z)$ в $U$, то $f_1(X)\cdot f_2(X)=f_3(X)$.

3°. Если $\varphi(z)$ регулярна в $U$, $\psi(w)$ регулярна в окрестности собственных значений $\varphi(X)$ и $f(z)=\psi[\varphi(z)]$, то $f(X)=\psi[\varphi(X)]$, т. е. при последовательном вычислении $Y=\varphi(X)$ и $\psi(Y)$ получится матрица $f(X)$.

4°. Если $w=\varphi(z)$ и $z=\psi(w)$ — обратные функции, регулярные в окрестности соответственно собственных значений матриц $X_0$ и $Y_0$, то обратной к матричной функции $Y=\varphi(X)$ является функция $X=\psi(Y)$. Эти функции определены и выражаются формулой Коши для всех матриц, достаточно близких соответственно к матрицам $X_0$ и $Y_0$.

Отметим в заключение, что если элементы матрицы $Y$ суть аналитические функции элементов $X$, то в общем случае отсюда не следует представимость $Y$ через $X$ ни степенным рядом (28) [или (27)], ни формулой (68).

**93. Аналитическое продолжение.** Выше мы определяли функцию $f(X)$ или степенным рядом, или формулой Коши (68). В первом случае область определения совпадала с областью сходимости этого ряда, и во втором случае она определялась условием, что $f(z)$ регулярна в областях $B_j$ и что все собственные значения $X$ находятся внутри $B_j$. В обоих случаях при соблюдении соответствующих условий элементы $\{f(X)\}_{ik}$ являются аналитическими функциями элементов $\{X\}_{ik}$. Напомним, что степенной ряд, как было указано выше, преобразуется к формуле (68). Мы изложим кратко, без подробных доказательств, основные идеи, связанные с аналитическим продолжением $f(X)$, заданной степенным рядом или формулой (68).

В [**85**] мы указали общий прием аналитического продолжения функции многих комплексных переменных вдоль заданного пути при помощи цепи кругов. Этот прием, очевидно, применим и для одновременного аналитического продолжения элементов матрицы $f(X)$ как функций элементов матрицы $X$. Но в рассматриваемом случае процесс существенно проясняется, если использовать при аналитическом продолжении формулу Коши (68) или формулу Сильвестра [**91**], причем проводимое таким образом аналитическое продолжение совпадает с указанным выше общим приемом аналитического продолжения в силу единственности аналитического продолжения по заданному

пути. Этот последний определяется тем, что матрица $X$ (т. е. ее элементы) задается как функция некоторого вещественного параметра $X(t)$. При значениях $t$, близких к исходным, значения $f(X)$ определяются первоначальным степенным рядом или формулой (68). При изменении $X(t)$ будут меняться и собственные значения $\lambda_k(t)$ матрицы $X(t)$, и характер этого изменения играет существенную роль как при аналитическом продолжении формулы Коши, так и в формуле Сильвестра. Как мы сейчас увидим, дело сводится к аналитическому продолжению $f(z)$ с учетом изменения $\lambda_k$.

Рассмотрим кратко те случаи, которые могут встретиться. Положим вначале, что при аналитическом продолжении $f(z)$ получается однозначная функция в области $B$, в которой находятся все пути $\lambda_j(t)$. (Если $f(z)$ — целая функция, то в качестве $B$ можно взять всю комплексную плоскость.) При этом для некоторых $t=t_0$ возможны совпадения корней, т. е. $\lambda_j(t_0)=\lambda_k(t_0)$. Нумерация корней производится так, что $\lambda_j(t)$ — непрерывные функции. После совпадения нумерация корней произвольна, с сохранением непрерывности. Для аналитического продолжения матричной функции в окрестности матрицы $X(t_0)$ можно воспользоваться формулой Коши (68), где $m$ — число различных корней $\lambda_j(t_0)$, а $l_j$ — окружности достаточно малого радиуса, центрами которых являются различные корни $\lambda_j(t_0)$.

Аналитическое продолжение можно было бы также осуществить формулой Сильвестра. Однако ввиду зависимости этой формулы от жордановой структуры матрицы $X$ значительно труднее установить регулярность $f(X)$ для $X$ с кратными собственными значениями.

Положим теперь, что хотя бы один из путей $\lambda_j(t)$ проходит при $t=t_0$ через особую точку функции $f(z)$. Можно показать, что в этом случае матрица $X(t_0)=X_0$ является особой точкой $f(X)$, т. е. что невозможно аналитическое продолжение $f(X)$ вдоль матричного пути $X(t)$ через матрицу $X$.

Рассмотрим в качестве примера степенной ряд

$$f(X)=I+X+X^2+\ldots,$$

соответствующий функции $f(z)=\frac{1}{1-z}$. Он сходится, если собственные значения $X$ лежат внутри круга $|z|<1$. Особыми точками при аналитическом продолжении $f(X)$ будут те матрицы $X$, среди собственных значений которых будет хоть одно равно единице. Для всех прочих получим

$$f(X)=(I-X)^{-1}.$$

Более сложная картина будет в том случае, когда аналитическое продолжение $f(z)$ приводит к многозначной функции. Это продолжение определяется однозначно на римановой поверхности, соответствующей многозначной функции $f(z)$ [20]. Если при $m>1$ в формуле

Коши значения функции $f(z)$ в разных областях $B_j$ не являются ветвями одной аналитической функции, то под $R$ будем понимать совокупность нескольких римановых поверхностей, построенных для всех регулярных функций $f(z)$ из областей $B_j$. При этом естественно пути $\lambda_j(t)$ считать также расположенными на $R$. Как и выше, особыми точками при аналитическом продолжении $f(X)$ будут те матрицы $X$, у которых хотя бы одно из $\lambda_j(t)$ стремится к особой точке функции $f(z)$ на $R$.

Однако теперь возможны и особые точки других типов. Положим, что первые три корня $\lambda_k(t)$ $(k=1,\ 2,\ 3)$ при $t\to t_0$ имеют общий предел $\lambda_0$, отличный от особой точки $f(z)$, а пределы остальных различны и не совпадают ни с $\lambda_0$, ни с особыми точками $f(z)$. Если предел $\lambda_0$ для всех $\lambda_k(t)$ $(k=1,\ 2,\ 3)$ находится на одном и том же листе $R$, т. е. если при аналитическом продолжении $f(z)$ мы получаем один и тот же функциональный элемент (ряд Тейлора) в точке $\lambda_0$ для всех $\lambda_k(t)$ $(k=1,\ 2,\ 3)$ при $t\to t_0$, то матричное аналитическое продолжение через соответствующую матрицу $X(t_0)$ возможно, как это имело место и для однозначной $f(z)$. Это аналитическое продолжение осуществляется снова формулой Коши, которую теперь удобнее записать в виде

$$f(X)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{m}\int_{l_k}(zI-X)^{-1}f_j(z)\,dz. \tag{69}$$

Здесь $m$ — число различных корней $\lambda_j(t_0)$, $l_j$ — круги достаточно малого радиуса на комплексной плоскости, центрами которых являются различные корни $\lambda_j(t_0)$, а $f_j(z)$ — соответствующие однозначные аналитические элементы функции $f(z)$.

Если же хотя бы две из совпавших точек $\lambda_k(t_0)$, $k=1,\ 2,\ 3$, лежат на разных листах римановой поверхности, т. е. если им соответствуют несовпадающие аналитические элементы $f_k(z)$, $k=1,\ 2,\ 3$, то формулой (69) воспользоваться нельзя. В этом случае, как будет пояснено ниже, $X(t_0)$ является особой матрицей, т. е. невозможно матричное аналитическое продолжение вдоль рассматриваемого пути через матрицу $X(t_0)$.

Поясним это утверждение для случая матриц второго порядка, причем мы считаем $\lambda_1(t)\neq\lambda_2(t)$ до перехода к пределу (и букву $t$ при этом мы не пишем). Для $t\neq t_0$ имеем

$$f(X)=X\frac{f(\lambda_1)-f(\lambda_2)}{\lambda_1-\lambda_2}+\frac{\lambda_1 f(\lambda_2)-\lambda_2 f(\lambda_1)}{\lambda_1-\lambda_2}I, \tag{70}$$

причем $f(\lambda_1)$ и $f(\lambda_2)$ — значения $f(z)$ на том листе $R$, где находятся $\lambda_1$ и $\lambda_2$ в результате продолжения $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$ (на $R$). Если предельные точки для $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$ находятся на разных листах $R$, то функциональные элементы $f_1(z)$ и $f_2(z)$ в точке $\lambda=\lambda_0$ неодинаковы. При

этом либо некоторые (или все) элементы $f(X)$ будут беспредельно возрастать по абсолютной величине при $\lambda \to \lambda_0$, либо в любой малой окрестности $\delta$ матрицы $X(t_0) = X_0$ имеются такие матрицы $X'$, что аналитическое продолжение по прежнему пути вплоть до $\delta$ и дальнейшему продолжению по некоторому новому пути, который не выводит из $\delta$ и вдоль которого $X \to X'$, некоторые (или все) элементы $f(X)$ будут беспредельно возрастать по абсолютной величине. Ни один из этих фактов не мог бы иметь места, если бы матрица $X_0$ не была особой.

Покажем справедливость высказанного утверждения. При $\lambda_1 \neq \lambda_2$ корни $\lambda_1 = \lambda_1(X)$ и $\lambda_2 = \lambda_2(X)$ являются голоморфными функциями матрицы $X$. Поэтому формула (70) может служить для аналитического продолжения $f(X)$ вдоль любого пути, для которого $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Предположим, что возможно аналитическое продолжение $f(X)$ в окрестность матрицы $X_0 = X(t_0)$. Пусть $f(\lambda_1) \to f_1(\lambda_0)$ и $f(\lambda_2) \to f_2(\lambda_0)$ при $t \to t_0$ и предельные значения различны: $f_1(\lambda_0) \neq f_2(\lambda_0)$. Если у матрицы $X_0$ отличен от нуля один из элементов, не лежащий на главной диагонали, то при $t \to t_0$ соответствующий элемент матрицы $f[X(t)]$ беспредельно возрастает. Пусть либо предельные значения одинаковы: $f_1(\lambda_0) = f_2(\lambda_0)$, либо $X(t_0)$ — диагональная матрица. В любой малой окрестности $\delta$ матрицы $X(t_0)$ найдется недиагональная матрица $X'$, имеющая двукратное собственное значение $\lambda_0'$ такое, что $f_1(\lambda_0') \neq f_2(\lambda_0')$. Тогда при $X \to X'$ вдоль пути, для которого $\lambda_1 \neq \lambda_2$, будет, как показано выше, беспредельно возрастать хотя бы один из элементов матрицы $f(X)$. В обоих случаях получается противоречие с существованием регулярного матричного элемента $f(X)$ в окрестности матрицы $X_0$.

Если бы предельная точка $\lambda_0 = \lambda(t_0)$ для $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$ находилась на одном и том же листе $R$ и в этой точке $f(z)$ была бы регулярной функцией, то формула (70) в пределе дала бы $f(X_0) = (X_0 - \lambda_0) f'(\lambda_0) + f(\lambda_0) I$.

Аналогично рассматривается и случай матриц любого порядка. Если при $m > 1$ в формуле Коши значения функции $f(z)$ в разных областях $B_j$ не являются ветвями одной аналитической функции, то для предельной точки $\lambda(t_0)$ совпадение функциональных элементов заведомо невозможно. В этом случае матрица $X(t_0)$ является особой.

Рассмотрим в качестве примера задание $f(X)$ формулой (70) при $m = 2$, когда $X$ — матрица второго порядка, $B_1$ — круг $|z| < \frac{1}{3}$ и $B_2$ — круг $|z - 1| < \frac{1}{3}$. Пусть в первом из них $f(z) \equiv 2$ и во втором $f(z) \equiv 3$. При этом, если $\lambda_1$ находится внутри $B_1$ и $\lambda_2$ — внутри $B_2$, то согласно (70)

$$f(X) = 3\frac{X - \lambda_1 I}{\lambda_2 - \lambda_1} + 2\frac{X - \lambda_2 I}{\lambda_1 - \lambda_2}. \qquad (71)$$

Аналитическое продолжение возможно и определяется формулой (71), пока круги, в которых должны находиться $\lambda_1$ и $\lambda_2$, не имеют общей части. В данном случае $R$ состоит из двух изолированных плоскостей. Поэтому любая матрица $X$, для которой $\lambda_1 = \lambda_2$, является особой матрицей для рассматриваемой функции.

То же самое получится и в общем случае, когда значение $f(z)$ в $B_1$ не получается никаким аналитическим продолжением функции $f(z)$ из $B_2$. Для функций этого типа любая матрица с кратными собственными значениями, расположенными на разных римановых поверхностях, является особой.

Рассмотрим еще один пример. Пусть $f(z)$ — многозначная аналитическая функция, определенная на некоторой римановой поверхности $R$, и начальный элемент определен степенным рядом или формулой Коши, а аналитическое продолжение таково, что вдоль него собственные значения $\lambda_k$ различны и при $t \to t_0$ все они стремятся к $\lambda_0$, причем $\lambda_k(t)$ и $\lambda_0$ — точки регулярности $f(z)$. Пусть матричная кривая $X(t)$ представима в виде

$$X(t) = S[\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t)] S^{-1},$$

причем $S$ — фиксированная матрица, не зависящая от $t$. Мы имеем (букву $t$ не пишем)

$$f(X) = S[f_1(\lambda_1), \ldots, f_n(\lambda_n)] S^{-1},$$

где $f_k(\lambda_k)$ — соответствующие ветви многозначной функции $f(z)$. Предельная матрица $X_0 = \lambda_0 I$ не зависит от $S$. Но если среди чисел $\mu_k = f_k(\lambda_0)$ будут различные, то предельные значения $f(X_0)$ функции $f(X)$ при $t \to t_0$ будут зависеть от $S$:

$$f(X_0) = S[\mu_1, \ldots, \mu_n] S^{-1},$$

и мы можем получить бесчисленное множество (континуум) предельных значений $f(X_0)$. Таким образом, $X_0 = \lambda_0 I$ является при указанном аналитическом продолжении особой матрицей. Этот пример иллюстрирует сформулированное выше утверждение о том, что матрицы $X_0$ с кратными собственными значениями являются особыми точками матричной функции $f(X)$, получаемой аналитическим продолжением, при котором некоторые из совпавших собственных значений оказываются на разных листах римановой поверхности функции $f(z)$. Подчеркнем, что этот вывод существенно использует тот факт, что при аналитическом продолжении функция $f(X)$ должна быть определена на множестве всех матриц фиксированного порядка $n$ в окрестности линии продолжения в вещественном пространстве $E_{2n^2}$. Он теряет силу для функций, определенных на некотором подмножестве матриц, например на некотором подпространстве. Например, для подпространства диагональных матриц

$$X = [\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$$

особыми точками функции

$$f(X)=[f(\lambda_1),\ \ldots,\ f(\lambda_n)]$$

будут лишь те матрицы $X$, для которых хотя бы один из диагональных элементов является особой точкой функции $f(z)$.

**94. Логарифм матриц.** Выше мы определили путем обращения матрицы $e^Y=X$ степенной ряд для логарифма матрицы [88]

$$Y=\ln X=\frac{X-I}{1}-\frac{(X-I)^2}{2}+\frac{(X-I)^3}{3}-\ldots \tag{72}$$

Он будет сходящимся, если все собственные значения $X$ находятся в круге $|z-1|<1$ и значения $\ln z$ в этом круге определяются условием $\ln 1=0$. Сумма ряда $Y$ удовлетворяет уравнению

$$e^Y=X. \tag{73}$$

Для любой матрицы $X$ вида

$$X=S[\lambda_1,\ldots,\ \lambda_n]\,S^{-1}, \tag{74}$$

где $\lambda_k\neq 0$ $(k=1,\ldots,\ n)$, уравнение (73) имеет решение

$$Y=\ln X=S[\ln\lambda_1,\ldots,\ \ln\lambda_n]\,S^{-1}, \tag{75}$$

где для $\ln\lambda_k$ можно брать любое значение. Действительно,

$$e^{S[\ln\lambda_1,\ \ldots,\ \ln\lambda_n]\,S^{-1}}=S[e^{\ln\lambda_1},\ldots,\ e^{\ln\lambda_n}]\,S^{-1}=S[\lambda_1,\ldots,\lambda_n]\,S^{-1}=X.$$

В частности, для матрицы $X=I$ имеем

$$\ln I=S[2\pi p_1 i,\ldots,\ 2\pi p_n i]\,S^{-1},$$

где $p_k$ — целые числа и $S$ — любая неособая матрица. Если среди чисел $p_k$ есть различные, то написанная формула дает бесчисленное множество значений $\ln I$. Если все $p_k$ одинаковы, то правая часть принимает вид $[2\pi pI,\ldots,\ 2\pi pi]=2p\pi iI$, где $p$ — общее значение $p_k$.

Рассмотрим теперь вопрос об определении регулярной функции $Y=\ln X$, притом для матриц, не обязательно представимых в виде (74). Пусть $\lambda_k$ $(k=1,\ 2,\ldots,\ q)$ — все различные собственные значения $X$. Проведем на плоскости $z$ бесконечный разрез из точки $z=0$, не пересекающий точек $z=\lambda_k$. На плоскости с указанным разрезом $\ln z$ есть однозначная регулярная функция. Введем для краткости следующее обозначение для различных значений $\ln z$:

$$(\ln z)_m=\ln|z|+i(\arg z+2m\pi i)\qquad(m=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots).$$

Пусть $B_k$ — замкнутые круги на плоскости с разрезом, не имеющие общих точек с ним и такие, что внутри $B_k$ находится точка $\lambda_k$.

Сопоставим каждому кругу $B_k$ целое число $m_k$ и определим функцию

$$Y = \ln X = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{m} \int_{l_j} (zI - X)^{-1} (\ln z)_{m_j} \, dz, \tag{76}$$

где $l_j$ — граница $B_j$. Эта функция является регулярной функцией, т. е. элементы $Y$ — регулярные функции элементов $X$, если собственные значения $\lambda_k$ находятся внутри $B_j$. Кроме того, по свойству 4° из [92] матрица удовлетворяет уравнению (73), ибо $e^{(\ln z)_m} = z$ при $z \in B_j$.

Положим теперь, что матрицы $X = X_0$ и $Y = Y_0$ удовлетворяют уравнению (73), и рассмотрим задачу об определении в окрестности матрицы $X_0$ регулярной функции $Y = \ln X$ такой, что $Y_0 = \ln X_0$. Пусть $\alpha_k (k = 1, \ldots, m)$ — все различные собственные значения $Y_0$, откуда следует, что среди $\lambda_k^{(0)} = e^{\alpha_k}$ находятся собственные значения $X_0$. Предположим, что

$$\alpha_k - \alpha_l \neq 2p\pi i \qquad (k \neq l), \tag{77}$$

где $p$ — какое-либо целое число, отличное от нуля. При этом числа $\lambda_k^{(0)}$ различны и совокупность этих чисел дает все различные собственные значения $X_0$. Выбирая целые числа $m_k$ так, чтобы выполнялись условия

$$(\ln \lambda_k^{(0)})_{m_k} = \alpha_k, \ (k = 1, \ \ldots, \ m) \tag{78}$$

и строя $\ln X$ по формуле (76), получим решение указанной выше задачи.

Отметим, что если условие (77) не выполнено, т. е. если хотя бы для одной из разностей имеет место формула $\alpha_k - \alpha_l = 2p\pi i$, где $p$ — целое число, отличное от нуля, то число $q$ различных собственных значений у матрицы $X_0$ будет меньше чем $m$, и, следовательно, предыдущее построение провести не удастся. Легко показать, что в этом случае задача построения регулярной функции $Y = \ln X$ такой, что $Y_0 = \ln X_0$, вообще не имеет решения.

Отметим, что всякое значение $\ln X$, определенное как решение уравнения (73) и регулярное в окрестности матрицы $X_0$ (включая $X = X_0$), может быть получено путем аналитического продолжения из любого начального аналитического элемента этой функции, например из ряда (72).

**95. Обращение целой функции от матрицы в случае матриц второго порядка.** Функция $Y = \ln X$ является решением уравнения (73). Аналогичным образом функция $Y = X^{1/m}$, где $m > 0$ — целое число, является обращением уравнения $X = Y^m$. Исследуем общую задачу. Пусть $F(w)$ — целая функция комплексного переменного $w$ и $w = f(z)$ — функция, определенная соотношением $F[f(z)] = z$. Для произвольной матрицы $Y$ определена матричная функция $F(Y)$. Рассмотрим матричное уравнение

$$F(Y) = X \tag{79}$$

и поставим задачу об определении всех решений этого уравнения, не предполагая специально, что решения должны выражаться регулярной функцией $X$. В сводке результатов мы укажем, когда последнее обстоятельство будет иметь место. Все исследование проводится ниже лишь для матриц второго порядка.

В соответствии с теорией элементарных делителей для заданной матрицы $X$ возможны следующие формы:

$$\begin{aligned} X &= S\begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{Vmatrix} S^{-1}, \\ X &= S\begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 1 & \lambda_1 \end{Vmatrix} S^{-1}, \\ X &= \lambda_1 I, \end{aligned} \tag{80}$$

где $S$ — неособая матрица. Для искомой матрицы $Y$ надо рассматривать следующие случаи:

$$\begin{aligned} Y &= S_0\begin{Vmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{Vmatrix} S_0^{-1}, \\ Y &= S_0\begin{Vmatrix} \mu_1 & 0 \\ 1 & \mu_1 \end{Vmatrix} S_0^{-1}, \quad F'(\mu_1) \neq 0, \\ Y &= S_0\begin{Vmatrix} \mu_1 & 0 \\ 1 & \mu_1 \end{Vmatrix} S_0^{-1}, \quad F'(\mu_1) = 0, \\ Y &= \mu_1 I. \end{aligned} \tag{81}$$

Исследование этих случаев сравнительно просто, но довольно громоздко. Мы приведем окончательные результаты, не останавливаясь на их доказательстве.

I. Пусть $X$ имеет различные собственные значения $\lambda_1$ и $\lambda_2$. Если хотя бы одно из уравнений

$$F(\mu) = \lambda_1, \quad F(\mu) = \lambda_2 \tag{82}$$

не имеет решений, то и матричное уравнение (79) не имеет решений. Если оба уравнения (82) разрешимы, то общее решение уравнения (79) имеет вид

$$Y = f(X) = \frac{X - \lambda_2 I}{\lambda_1 - \lambda_2} f(\lambda_1) + \frac{X - \lambda_1 I}{\lambda_2 - \lambda_1} f(\lambda_2), \tag{83}$$

где $f(\lambda_1) = \mu_1$ и $f(\lambda_2) = \mu_2$ — произвольные решения уравнений (82). Если $F'(\mu_j) \neq 0$ $(j = 1, 2)$, то формула (83) определяет регулярное (локально) решение $Y$ уравнения (79), т. е. решение, регулярное в окрестности $X$, включая $X$.

II. Пусть $X$ имеет двукратное собственное значение $\lambda_1$, но $X \neq \lambda_1 I$. Если уравнение $F(\mu) = \lambda_1$ не имеет решений или для всех его решений $F'(\mu) = 0$, то уравнение (79) не имеет решений. Пусть уравнение $F(\mu) = \lambda_1$ имеет решение $\mu_1$, для которого $F'(\mu_1) \neq 0$. При этом общее решение уравнения (79) имеет вид

$$Y = \mu_1 I + (X - \lambda_1 I)\,[F'(\mu_1)]^{-1},$$

где $\mu_1$ — любой из указанных выше корней. Формула определяет регулярное решение $Y = f(X)$ уравнения (79).

III. Пусть $X = \lambda_1 I$. Если уравнение $F(\mu) = \lambda_1$ не имеет решений, то и уравнение (79) не имеет решений. Пусть указанное уравнение разрешимо и $\mu_1$, $\mu_2$ — произвольные различные или совпадающие его решения. Общее

решение уравнения (79) определяется формулами

$$Y = C \begin{Vmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{Vmatrix} C^{-1}, \quad F(\mu_1) = \lambda_1, \quad F(\mu_2) = \lambda_1,$$

а в случае $\mu_1 = \mu_2$ также и формулами

$$Y = C \begin{Vmatrix} \mu_1 & 0 \\ 1 & \mu_1 \end{Vmatrix} C^{-1}, \quad F(\mu_1) = \lambda_1, \quad F'(\mu_1) = 0.$$

В этих формулах $C$ — любая неособая матрица.

Рассмотрим два примера. Если $F(w) = e^w$, то $F'(w) \neq 0$ и при $X \neq \lambda_1 I$ все значения $\ln X$ являются локально регулярными функциями, если собственные значения $X$ отличны от нуля:

$$\ln X = \frac{X - \lambda_2 I}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \lambda_1 + \frac{X - \lambda_1 I}{\lambda_2 - \lambda_1} \ln \lambda_2 \qquad (\lambda_1 \neq \lambda_2), \tag{84}$$

$$\ln X = (\ln \lambda_1) I + (X - \lambda_1 I) \frac{1}{\lambda_1} \qquad (\lambda_1 = \lambda_2). \tag{85}$$

Ветви логарифмов выбираются произвольно, и этот выбор определяет ветвь матричного логарифма.

При $X = \lambda_1 I$ все значения логарифма определяются формулами

$$\ln(\lambda_1 I) = C \begin{Vmatrix} \ln \lambda_1 + 2p\pi i & 0 \\ 0 & \ln \lambda_1 + 2q\pi i \end{Vmatrix} C^{-1}, \tag{86}$$

где $C$ — произвольная неособая матрица, а при $p = q$ получается регулярное значение

$$\ln(\lambda_1 I) = (\ln \lambda_1) I,$$

т. е. значение, совпадающее со значением некоторой определенной в окрестности матрицы $\lambda_1 I$ регулярной ветви функции $\ln X$. Эта ветвь определяется формулой Коши. Можно показать, что все значения (86) при $p \neq q$ не являются регулярными.

Совершенно аналогично для уравнения $Y^m = X$, где $m \geqslant 2$ — целое число, получаем при $X \neq 0$ следующие решения:

$$X^{\frac{1}{m}} = \frac{X - \lambda_2 I}{\lambda_1 - \lambda_2} \lambda_1^{\frac{1}{m}} + \frac{X - \lambda_1 I}{\lambda_2 - \lambda_1} \lambda_2^{\frac{1}{m}} \qquad (\lambda_1 \neq \lambda_2), \tag{87}$$

$$X^{\frac{1}{m}} = \lambda_1^{\frac{1}{m}} \left[ I + (X - \lambda_1 I) \frac{1}{m\lambda_1} \right] \qquad (\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0;\ X \neq \lambda_1 I), \tag{88}$$

$$(\lambda_1 I)^{\frac{1}{m}} = \lambda_1^{\frac{1}{m}} C \begin{Vmatrix} e^{\frac{2p\pi i}{m}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{2q\pi i}{m}} \end{Vmatrix} C^{-1} \qquad (p \neq q \text{ — целые}), \tag{89}$$

$$(\lambda_1 I)^{\frac{1}{m}} = \lambda_1^{\frac{1}{m}} \left[ e^{\frac{2p\pi i}{m}}, \quad e^{\frac{2p\pi i}{m}} \right] = \left( \lambda_1^{\frac{1}{m}} \right) I. \tag{90}$$

Поскольку $F'(0) = 0$, то при $X = 0$, кроме решения $Y = 0$, получаем

$$X^{\frac{1}{m}} = C \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} C^{-1}. \tag{91}$$

В правой части формулы (87) под $\lambda_1^{\frac{1}{m}}$, $\lambda_2^{\frac{1}{m}}$ подразумеваются любые значения корней.

Правая часть формулы (87) определена для матриц $X$ из некоторой полной окрестности исходной матрицы и при $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$ является регулярной функцией матрицы $X$.

Значения (88) и (90) не определены в полной окрестности исходной матрицы, но они являются регулярными, т. е. совпадают со значением некоторой регулярной ветви функции $X^{\frac{1}{m}}$, определенной в полной окрестности исходной матрицы.

Значения (89) не являются регулярными, т. е. не могут быть получены как значения некоторой регулярной ветви функции $X^{\frac{1}{m}}$.

**96. Системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами.** Пусть имеется система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n' &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n, \end{aligned}\right\} \tag{92}$$

где $x_k$ суть функции от независимого переменного $t$ и $x_k'$ — производные этих функций.

Будем считать, что искомые функции $(x_1, \ldots, x_n)$ суть составляющие некоторого вектора

$$\boldsymbol{x}(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Составляющие $x_k$ суть в данном случае функции от $t$, и мы определим дифференцирование вектора $\boldsymbol{x}$ по $t$, как новый вектор с составляющими $(x_1', \ldots, x_n')$:

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}(x_1', \ldots, x_n').$$

Введем, наконец, матрицу $A$ с элементами $a_{ik}$. В результате этих обозначений можно переписать систему (92) следующим образом:

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x}. \tag{93}$$

Пусть ищется решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию

$$x_k|_{t=0} = x_k^{(0)} \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{94}$$

Эти начальные условия образуют некоторый вектор, который мы обозначим через

$$\boldsymbol{x}^{(0)}(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}).$$

Нетрудно проверить, что решение системы (93) при заданных начальных условиях (94) имеет вид

$$x = \left(I + \frac{At}{1!} + \frac{A^2t^2}{2!} + \ldots\right) x^{(0)}, \tag{95}$$

или, вводя матрицу

$$e^{At} = I + \frac{At}{1!} + \frac{A^2t^2}{2!} + \ldots,$$

мы можем переписать решение (95) следующим образом:

$$x = e^{At}x^{(0)}. \tag{96}$$

Действительно, формула (95) дает нам

$$x = x^{(0)} + \frac{t}{1!}Ax^{(0)} + \frac{t^2}{2!}A^2x^{(0)} + \ldots$$

Дифференцируя по $t$, получим

$$\frac{dx}{dt} = Ax^{(0)} + \frac{t}{1!}A^2x^{(0)} + \frac{t^2}{2!}A^3x^{(0)} + \ldots$$

или

$$\frac{dx}{dt} = A\left(I + \frac{t}{1!}A + \frac{t^2}{2!}A^2 + \ldots\right)x^{(0)},$$

откуда в силу (95)

$$\frac{dx}{dt} = Ax.$$

Кроме того, удовлетворены, очевидно, и начальные условия, так как при $t = 0$ формула (95) дает $x|_{t=0} = x^{(0)}$.

Мы можем переписать систему (92), пользуясь матричной записью, и в другой форме. Предварительно выясним *основные правила дифференцирования матрицы.* Положим, что элементы некоторой матрицы $X$ суть функции переменного $t$. Определим производную $\frac{dX}{dt}$ как такую матрицу, элементы которой получаются дифференцированием элементов матрицы $X$ по $t$, т. е.

$$\left\{\frac{dX}{dt}\right\}_{ik} = \frac{d\{X\}_{ik}}{dt}.$$

Из этого определения непосредственно следует обычное правило дифференцирования суммы, а именно: если $X$ и $Y$ — две матрицы, элементы которых суть функции $t$, то

$$\frac{d(X+Y)}{dt} = \frac{dX}{dt} + \frac{dY}{dt}. \tag{97}$$

Точно так же нетрудно доказать и формулу дифференцирования произведения

$$\frac{d}{dt}(XY) = \frac{dX}{dt}Y + X\frac{dY}{dt}, \tag{98}$$

причем надо помнить, что, вообще говоря, нельзя переставлять множители в написанной формуле (98). Согласно определению умножения имеем

$$\{XY\}_{ik} = \sum_{s=1}^{n} \{X\}_{is} \{Y\}_{sk},$$

откуда

$$\frac{d\{XY\}_{ik}}{dt} = \sum_{s=1}^{n} \frac{d\{X\}_{is}}{dt} \{Y\}_{sk} + \sum_{s=1}^{n} \{X\}_{is} \frac{d\{Y\}_{sk}}{dt},$$

что и дает непосредственно формулу (98). Эта формула легко обобщается и на случай любого числа сомножителей. Так, например, для трех сомножителей мы будем иметь

$$\frac{d}{dt}(XYZ) = \frac{dX}{dt} YZ + X \frac{dY}{dt} Z + XY \frac{dZ}{dt}. \tag{99}$$

Выведем еще формулу для дифференцирования обратной матрицы. Положим, что определитель матрицы $X$ отличен от нуля, так что имеется обратная матрица $X^{-1}$:

$$XX^{-1} = I.$$

Дифференцируя это тождество по $t$, получим

$$\frac{dX}{dt} X^{-1} + X \frac{dX^{-1}}{dt} = 0,$$

откуда и вытекает правило дифференцирования обратной матрицы

$$\frac{dX^{-1}}{dt} = -X^{-1} \frac{dX}{dt} X^{-1}. \tag{100}$$

Вернемся теперь к системе (92). Рассмотрим $n$ решений этой системы. Они образуют, очевидно, квадратную таблицу, состоящую из $n^2$ функций:

$$\begin{Vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{Vmatrix}. \tag{101}$$

Мы считаем, что первый значок у функции обозначает номер функции, а второй значок дает номер решения, в которое входит функция, т. е., например, $x_{23}(t)$ обозначает выражение для второй функции $x_2$, входящей в решение с номером 3. Мы должны, таким образом, иметь

$$\frac{dx_{ik}(t)}{dt} = a_{i1}x_{1k}(t) + \dots + a_{in}x_{nk}(t) \quad (i, k = 1, 2, \dots, n),$$

и можно, следовательно, переписать систему (92) в следующей матричной форме:

$$\frac{dX}{dt} = AX, \tag{102}$$

где $X$ — матрица (101). Напомним еще раз, что при такой форме записи матрица $X$ дает $n$ решений системы (93), причем каждый столбец этой матрицы дает некоторое решение системы (93). В данном случае начальным условием будет являться задание матрицы $X$ при $t = 0$:

$$X|_{t=0} = X^{(0)}, \tag{103}$$

где $X^{(0)}$ есть произвольным образом заданная матрица с постоянными элементами. Совершенно так же, как и выше, можно показать, что решение системы (102) при начальном условии (103) будет иметь вид

$$X = e^{At}X^{(0)}. \tag{104}$$

Положим, что определитель матрицы $X^{(0)}$, дающей начальные условия, отличен от нуля. Покажем, что при этом определитель матрицы $X$ будет отличным от нуля при всяком $t$. Принимая во внимание формулу (104), мы видим, что для этого достаточно показать, что определитель матрицы $e^{At}$ будет отличным от нуля, так как определитель произведения двух матриц равен произведению определителей этих матриц.

Но нетрудно вообще показать, что определитель показательной матрицы $e^Y$ всегда отличен от нуля.

Действительно, наряду с матрицей

$$e^Y = I + \frac{Y}{1!} + \frac{Y^2}{2!} + \ldots + \frac{Y^n}{n!} + \ldots \tag{105}$$

составим матрицу

$$e^{-Y} = I - \frac{Y}{1!} + \frac{Y^2}{2!} - \ldots + (-1)^n\frac{Y^n}{n!} + \ldots \tag{106}$$

При перемножении двух рядов, стоящих в правой части написанных формул, мы будем иметь дело лишь с числами и степенями одной матрицы $Y$, так что все сомножители можно переставлять.

Таким образом, формально получится при перемножении тот же результат, который получился бы, если бы мы заменили переменную матрицу $Y$ переменным числом $z$. Но при этом в силу тождества $e^z e^{-z} = 1$ перемножение правых частей формул (105) и (106) дало бы нам единицу, а следовательно, и в данном случае мы будем иметь следующее равенство:

$$e^Y e^{-Y} = I,$$

справедливое для любой матрицы $Y$. Из этого равенства непосредственно вытекает, что матрица $e^{-Y}$ обратна матрице $e^{Y}$ и что определитель матрицы $e^{Y}$ отличен от нуля. Заметим, что если $Y$ и $Z$ — две различные матрицы, которые не коммутируют, то произведение $e^{Y}e^{Z}$ не будет, вообще говоря, равно $e^{Y+Z}$.

Итак, из формулы (104) и доказанного свойства показательной матрицы непосредственно вытекает, что если определитель матрицы $X^{(0)}$, составленной из начальных условий, отличен от нуля, то определитель матрицы $X$ будет отличным от нуля при всяком $t$. В этом случае матрица $X$ будет давать $n$ линейно независимых решений системы (102). Покажем теперь, что если $Y$ есть матрица, которая дает какие-нибудь $n$ решений системы (102), то она выражается через матрицу $X$, упомянутую выше, при помощи формулы

$$Y = XB, \tag{107}$$

где $B$ есть некоторая матрица с постоянными элементами. Формула (107) выражает, очевидно, тот факт, что всякое решение системы выражается линейным образом через $n$ линейно независимых решений системы. Для доказательства формулы (107) заметим прежде всего, что по условию $Y$ должно удовлетворять уравнению (102), т. е.

$$\frac{dY}{dt} = AY. \tag{108}$$

Кроме того, по условию определитель матрицы $X$, также удовлетворяющей уравнению (102), отличен от нуля, а следовательно, существует обратная матрица $X^{-1}$. Согласно правилу дифференцирования обратной матрицы мы будем иметь

$$\frac{dX^{-1}}{dt} = -X^{-1}\frac{dX}{dt}X^{-1}$$

или, принимая во внимание формулу (102), получим

$$\frac{dX^{-1}}{dt} = -X^{-1}AXX^{-1} = -X^{-1}A. \tag{109}$$

Составим теперь производную от произведения

$$\frac{d}{dt}(X^{-1}Y) = \frac{dX^{-1}}{dt}Y + X^{-1}\frac{dY}{dt},$$

откуда в силу (108) и (109)

$$\frac{d}{dt}(X^{-1}Y) = -X^{-1}AY + X^{-1}AY,$$

т. е.

$$\frac{d}{dt}(X^{-1}Y) = 0.$$

Мы видим, таким образом, что произведение $X^{-1}Y$ есть некоторая матрица $B$, элементы которой не зависят от $t$, откуда и вытекает непосредственно формула (107).

**97. Функции нескольких матриц.** Перейдем теперь к выяснению основных понятий и фактов, связанных с функциями нескольких матриц. Ввиду некоммутативности, вся теория функций нескольких переменных матриц представляется гораздо более сложной, чем теория функций одной переменной матрицы, и мы ограничимся лишь рассмотрением самых основных элементов теории функций нескольких матриц.

Начнем со случая полинома. Общий вид однородного полинома второй степени от двух матриц будет

$$aX_1^2 + bX_1X_2 + cX_2X_1 + dX_2^2.$$

Однородный полином второй степени от $l$ переменных матриц будет иметь вид

$$\sum_{i,\ k=1}^{l} a_{ik}X_iX_k,$$

где суммирование производится по переменным $i$ и $k$, которые пробегают независимо друг от друга все целые значения от 1 до $l$. Однородный полином степени $m$ от $l$ переменных матриц будет иметь вид

$$\sum_{j_1,\ \ldots,\ j_m=1}^{l} a_{j_1\ \ldots\ j_m}X_{j_1}\ \ldots\ X_{j_m}. \tag{110}$$

Здесь, как и в предыдущем, $a_{j1\ \ldots\ j_m}$ обозначают некоторые численные коффициенты. В формуле (110) каждая из переменных суммирования $j_k$ пробегает все целые значения от 1 до $l$, так что написанная сумма будет содержать всего $l^m$ слагаемых. Рассмотрим теперь тот частный случай, когда в формуле (110) все коэффициенты $a_{j_1,\ \ldots,\ j_m}$ равны единице:

$$\sum_{j_1,\ \ldots,\ j_m=1}^{l} X_{j_1}\ \ldots\ X_{j_m}. \tag{111}$$

Нетрудно проверить, что сумма (111) представляет собою степень суммы матриц $X_{j_k}$, т. е.

$$(X_1 + \ldots + X_l)^m = \sum_{j_1,\ \ldots,\ j_m=1}^{l} X_{j_1}\ldots X_{j_m}. \tag{112}$$

Так, например,

$$(X_1 + X_2)^2 = (X_1 + X_2)(X_1 + X_2) = X_1^2 + X_1X_2 + X_2X_1 + X_2^2.$$

Перейдем теперь к рассмотрению степенного ряда от $l$ матриц. Такой ряд может быть записан в виде

$$a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j_1, \ldots, j_m=1}^{l} a_{j_1, \ldots, j_m} X_{j_1} \ldots X_{j_m}. \tag{113}$$

Полное исследование сходимости этого ряда представляет гораздо большие трудности, чем в случае степенного ряда от одной матрицы, и мы ограничимся лишь доказательством достаточного условия абсолютной сходимости ряда (113). Заметим при этом, что ряд (113), как и в случае ряда от одной матрицы, называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд

$$|a_0| + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j_1, \ldots, j_m=1}^{l} |a_{j_1, \ldots, j_m}| |X_{j_1}| \ldots |X_{j_m}|, \tag{114}$$

причем сходимость этого последнего ряда гарантирует и сходимость ряда (113) и независимость суммы этого ряда от порядка слагаемых. Фиксируем целое число $m$ и обозначим через $a^{(m)}$ наибольший из модулей $|a_{j_1, \ldots, j_m}|$, т. е.

$$|a_{j_1, \ldots, j_m}| \leqslant a^{(m)}. \tag{115}$$

Составим ряд обычного комплексного переменного

$$\sum_{m=1}^{\infty} a^{(m)} z^m, \tag{116}$$

и пусть $n\rho$ — его радиус сходимости, где $n$ — порядок матриц. Заменяя в ряде (114) коэффициенты $|a_{j_1, \ldots, j_m}|$ бо́льшими, а именно $a^{(m)}$, будем иметь ряд

$$a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a^{(m)} \sum_{j_1, \ldots, j_m=1}^{l} |X_{j_1}| \ldots |X_{j_m}|,$$

который можно переписать, очевидно, в виде

$$a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a^{(m)} (|X_1| + \ldots + |X_l|)^m. \tag{117}$$

Этот ряд можно рассматривать как степенной ряд от одной матрицы

$$Z = |X_1| + \ldots + |X_l|,$$

и, принимая во внимание, что радиус сходимости ряда (116) равен $n\rho$, можем утверждать [87], что ряд (117) будет сходиться при условии

$$|X_1| + \ldots + |X_l| < \|\rho\|. \tag{118}$$

При этом ряд (114) и подавно будет сходящимся. Получаем, таким образом, следующую теорему:

Теорема. *Если положительные числа* $a^{(m)}$ *определяются из условия* (115), *и ряд* (116) *имеет радиус сходимости* $\rho$, *то степенной ряд* (113) *абсолютно сходится при условии* (118).

В частном случае, если радиус сходимости ряда (116) равен бесконечности, то ряд (113) будет абсолютно сходящимся при любом выборе матриц $X_k$.

Заметим еще, что функция $f(X_1, \ldots, X_l)$, определяемая как сумма ряда (113), удовлетворяет очевидному соотношению

$$f(SX_1S^{-1}, \ldots, SX_lS^{-1}) = Sf(X_1, \ldots, X_l)S^{-1},$$

где $S$ — любая матрица с определителем, отличным от нуля. Совершенно аналогичное свойство мы имели раньше для аналитической функции от одной переменной матрицы.

Отметим в заключение, не останавливаясь на доказательстве, одну особенность степенных рядов многих матриц в отношении теоремы единственности. Здесь теорема единственности читается так: если равенство

$$a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j_1, \ldots, j_m = 1}^{l} a_{j_1, \ldots, j_m} X_{j_1} \ldots X_{j_m} = b_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j_1, \ldots, j_m = 1}^{l} b_{j_1, \ldots, j_m} X_{j_1} \ldots X_{j_m}$$

имеет место для всех матриц

$$X_1, \ldots, X_l$$

*любого порядка*, достаточно близких к нулевой матрице, то $b_0 = a_0$ и $b_{j_1, \ldots, j_m} = a_{j_1, \ldots, j_m}$.

Если бы мы опустили в формулировке требование *любого порядка*, то теорема оказалась бы несправедливой. В частности, можно построить однородный полином с коэффициентами, отличными от нуля

$$\sum_{j_1, \ldots, j_m = 1}^{l} c_{j_1, \ldots, j_m} X_{j_1} \ldots X_{j_m},$$

обращающийся тождественно в нуль для всех матриц $X_s$ определенного порядка.

Построение общей теории аналитических функций от матриц и ее приложение к теории систем линейных дифференциальных уравнений было дано в работах И. А. Лаппо-Данилевского, напечатанных в Журнале Ленинградского физико-математического общества. В настоящее время все материалы, оставшиеся после смерти И. А. Лаппо-Данилевского, опубликованы в Трудах Математического института Академии наук.

# ГЛАВА V

# ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

**98. Разложение решения в степенной ряд.** Во втором томе мы рассматривали линейные уравнения второго порядка с переменными коэффициентами и в частности занимались интегрированием таких уравнений при помощи степенных рядов. Там мы ограничились лишь тем, что показали, что можно формально удовлетворить уравнению некоторым степенным рядом, не доказывая сходимости этого ряда. Сейчас мы дадим полное и систематическое исследование линейных уравнений второго порядка, коэффициенты которых суть аналитические функции комплексного переменного. Независимую переменную в дифференциальном уравнении мы будем, таким образом, считать комплексной переменной, а искомую функцию и коэффициенты — аналитическими функциями.

Напишем линейное уравнение второго порядка в виде

$$w'' + p(z)\,w' + q(z)\,w = 0, \tag{1}$$

где $w'$ и $w''$ суть производные искомой функции $w$ по комплексной переменной $z$.

Пусть, кроме того, имеются начальные условия

$$w|_{z=z_0} = c_0; \quad w'|_{z=z_0} = c_1. \tag{2}$$

Положим, что коэффициенты $p(z)$ и $q(z)$ суть регулярные функции в некотором круге $|z - z_0| < R$. Покажем, что внутри этого круга существует решение уравнения (1) (регулярная функция), удовлетворяющее условиям (2). Вводя, кроме $w$, новую искомую функцию $u = w'$, можно переписать уравнение (1) в виде системы двух уравнений первого порядка

$$\frac{du}{dz} = -p(z)\,u - q(z)\,w; \quad \frac{dw}{dz} = u.$$

Для симметрии в формулах мы будем рассматривать общий случай системы двух линейных уравнений с двумя искомыми функциями

$$\frac{du}{dz} = a(z)\,u + b(z)\,v, \quad \frac{dv}{dz} = c(z)\,u + d(z)\,v \tag{3}$$

и покажем, что такая система имеет регулярное решение внутри круга $|z-z_0|<R$, удовлетворяющее любым начальным условиям

$$u|_{z=z_0}=\alpha, \quad v|_{z=z_0}=\beta, \tag{4}$$

если коэффициенты системы (3) суть регулярные функции внутри упомянутого круга.

Воспользуемся при этом тем же методом последовательных приближений, которым мы уже пользовались в томе II. Весь ход доказательства будет совершенно таким же, как и там. Вместо системы (3) с начальными условиями (4) напишем уравнения в интегральной форме:

$$u=\alpha+\int_{z_0}^{z}[a(z)u+b(z)v]\,dz, \quad v=\beta+\int_{z_0}^{z}[c(z)u+d(z)v]\,dz. \tag{5}$$

Рассмотрим круг $K:|z-z_0|<R_1$, где $R_1$ — некоторое положительное число, меньшее $R$. В этом круге вплоть до его контура коэффициенты суть регулярные функции, и, следовательно, имеют место неравенства

$$|a(z)|<M, \quad |b(z)|<M, \quad |c(z)|<M, \quad |d(z)|<M, \tag{6}$$

где $M$ — некоторое определенное положительное число. Применяя метод последовательных приближений, положим

$$u_0(z)=\alpha, \quad v_0(z)=\beta \tag{7}$$

и вообще

$$\left.\begin{aligned} u_{n+1}(z)&=\alpha+\int_{z_0}^{z}[a(z)u_n+b(z)v_n]\,dz,\\ v_{n+1}(z)&=\beta+\int_{z_0}^{z}[c(z)u_n+d(z)v_n]\,dz. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

При каждом из интегрирований под знаком интеграла будут стоять регулярные функции от $z$, и для каждого из интегралов величина интеграла не будет зависеть от пути внутри круга $K$. Пусть, далее, $m$ — положительное число, определяемое неравенствами

$$|\alpha|\leqslant m, \quad |\beta|\leqslant m. \tag{9}$$

Для простоты письма будем считать в дальнейшем $z_0=0$ и будем производить интегрирование от 0 до $z$ по прямой линии. При этом

$$z=\rho e^{i\varphi}, \quad dz=e^{i\varphi}d\rho \qquad (0\leqslant\rho\leqslant R_1). \tag{10}$$

Первая из формул (8) при $n=0$ дает нам

$$u_1(z)-\alpha=\int_0^{\rho}[a(z)\alpha+b(z)\beta]\,e^{i\varphi}d\rho.$$

Заменяя под интегралом все члены их модулями и пользуясь (6) и (7), получим неравенство

$$|u_1(z)-u_0(z)|\leqslant 2Mm\rho \qquad (11_1)$$

и совершенно так же

$$|v_1(z)-v_0(z)|\leqslant 2Mm\rho. \qquad (11_2)$$

Первое из уравнений (8) при $n=1$ будет

$$u_2(z)=\alpha+\int_0^z [a(z)u_1+b(z)v_1]\,dz,$$

и, вычитая из него первое из уравнений (8) при $n=0$, получим

$$u_2(z)-u_1(z)=\int_0^z [a(z)(u_1-u_0)+b(z)(v_1-v_0)]\,dz.$$

Заменяя опять под интегралом все количества их модулями и пользуясь неравенствами $(11_1)$ и $(11_2)$, будем иметь

$$|u_2(z)-u_1(z)|\leqslant (2M)^2 m\int_0^\rho \rho\,d\rho$$

или

$$|u_2(z)-u_1(z)|\leqslant m\frac{(2M\rho)^2}{2!},$$

и совершенно так же

$$|v_2(z)-v_1(z)|\leqslant m\frac{(2M\rho)^2}{2!}.$$

Продолжая таким же образом и дальше, получим следующие оценки:

$$|u_{n+1}(z)-u_n(z)|\leqslant m\frac{(2M\rho)^{n+1}}{(n+1)!},$$

$$|v_{n+1}(z)-v_n(z)|\leqslant m\frac{(2M\rho)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Отсюда непосредственно вытекает, что члены ряда

$$u_0+[u_1(z)-u_0]+[u_2(z)-u_1(z)]+\ldots \qquad (12)$$

в круге $|z-z_0|<R_1$ по модулю меньше положительных чисел

$$m\frac{(2M\rho)^{n+1}}{(n+1)!},$$

которые образуют сходящийся ряд, т. е. ряд (12) сходится абсолютно и равномерно в круге $|z-z_0|<R_1$. Сумма первых $(n+1)$ членов этого ряда есть как раз $u_n(z)$, и, следовательно, $u_n(z)$ в круге $|z-z_0|<R_1$ стремится равномерно к некоторой функции $u(z)$.

Точно так же $v_n(z)$ будет равномерно стремиться к некоторой функции $v(z)$. Согласно теореме Вейерштрасса о равномерно сходящихся рядах эти предельные функции также будут регулярными функциями внутри круга $K$. Обратимся теперь к формулам (8). В первой из этих формул подинтегральное выражение стремится равномерно к предельной функции

$$a(z)u + b(z)v.$$

Но, как известно [**I, 146**], возможность почленного интегрирования равномерно сходящегося ряда есть то же самое, что возможность переходить к пределу под знаком интеграла для равномерно сходящейся последовательности функций, и, таким образом, переходя к пределу в уравнениях (8), мы увидим, что предельные функции $u$ и $v$ должны удовлетворять уравнениям (5). Полагая в этих уравнениях $z = z_0$, мы видим, что наши функции удовлетворяют начальным условиям (4), а дифференцируя уравнения (5), увидим, что они дают решение системы (3).

Возвратимся теперь к уравнению (1), которое, как мы видели, является частным случаем системы (3). Мы показали, что в любом круге с центром $z_0$, находящемся внутри круга $|z - z_0| < R$, существует решение уравнения, удовлетворяющее условиям (2) при любых $c_0$ и $c_1$. Функции $p(z)$ и $q(z)$ разлагаются внутри круга $|z - z_0| < R$ в степенные ряды

$$p(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + \ldots, \quad q(z) = b_0 + b_1(z - z_0) + \ldots$$

Найденное решение также есть регулярная функция, а потому также должна разлагаться в степенной ряд, причем в силу (2) первые два коэффициента разложения должны равняться $c_0$ и $c_1$:

$$w = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \ldots \tag{13}$$

Подставляя этот ряд в уравнение (1), мы должны будем приравнять нулю коэффициенты при различных степенях $z$, и это приведет нас, как мы это уже видели [**II, 45**], к уравнениям вида

$$\begin{aligned} &2 \cdot 1c_2 + a_0c_1 + b_0c_0 = 0, \\ &3 \cdot 2c_3 + 2a_0c_2 + a_1c_1 + b_0c_1 + b_1c_0 = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

из которых последовательно определятся коэффициенты $c_k$. Это показывает нам прежде всего, что искомое решение может быть только одно. Кроме того, из предыдущего доказательства вытекает, что оно существует, т. е. что при подстановке найденных коэффициентов в ряд (13) этот ряд будет сходящимся во всяком круге, находящемся внутри круга $|z - z_0| < R$, т. е., проще говоря, он будет сходиться внутри круга $|z - z_0| < R$. Мы получаем, таким образом, следующую основную теорему:

Теорема I. *Если коэффициенты уравнения* (1) *— регулярные функции в круге* $|z - z_0| < R$, *то в этом круге существует единственное решение уравнения* (1), *удовлетворяющее начальным условиям* (2) *при любых заданных* $c_0$ *и* $c_1$.

Придавая $c_0$ и $c_1$ определенные числовые значения, мы можем построить два решения $w_1$ и $w_2$, удовлетворяющих начальным условиям:

$$w_1|_{z=z_0} = \alpha_1, \quad w_1'|_{z=z_0} = \beta_1,$$
$$w_2|_{z=z_0} = \alpha_2, \quad w_2'|_{z=z_0} = \beta_2.$$

Если

$$\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0, \tag{14}$$

то всякое решение, регулярное в круге $|z - z_0| < R$, будет выражаться через $w_1$ и $w_2$ в виде

$$w = A_1w_1 + A_2w_2. \tag{15}$$

Действительно, если это решение $w$ имеет начальные условия (2), то для постоянных $A_1$ и $A_2$ мы будем иметь систему уравнений вида

$$A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 = c_0, \quad A_1\beta_1 + A_2\beta_2 = c_1,$$

и эта система, в силу (14), дает определенные значения для $A_1$ и $A_2$. Решения $w_1$ и $w_2$, построенные выше, будут линейно независимыми решениями уравнения (1) [**II, 24**].

Замечание. Применение метода последовательных приближений к системе (3) привело нас для функции $u$ к бесконечному ряду (12). Этот ряд не будет, конечно, степенным рядом, но его равномерная сходимость в круге $|z - z_0| < R_1$ гарантировала нам существование регулярного решения в этом круге, представимого степенным рядом. Мы можем построить функции $u_n(z)$ и ряд (12) в любой области, где коэффициенты системы (3) суть регулярные функции, и можно показать рассуждениями, аналогичными предыдущим, что во всякой такой области ряд (12) и аналогичный ряд для $v$ будут равномерно сходиться и будут давать решение системы. Вид этих рядов в некоторых случаях мы выясним в дальнейшем.

**99. Аналитическое продолжение решения.** Положим теперь, что коэффициенты $p(z)$ и $q(z)$ уравнения (1) суть регулярные функции в некоторой области $B$ плоскости комплексного переменного $z$. Возьмем некоторое решение этого уравнения, которое удовлетворяет определенным начальным условиям (2) в некоторой точке $z_0$, находящейся внутри $B$. Такое решение, согласно предыдущему, будет изображаться степенным рядом, сходящимся в круге, с центром $z_0$, который находится целиком в области $B$ (а может быть, и в более широком круге). Это будет некоторый ряд вида (13). Возьмем теперь

внутри круга сходимости этого ряда некоторую точку $z_1$ и перестроим наш ряд по степеням $(z-z_1)$, как это мы делали при аналитическом продолжении функции. Мы получим новый ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k (z-z_1)^k. \tag{16}$$

Его сумма будет совпадать с $w$ в общей части кругов сходимости рядов (13) и (16). Следовательно, в этой общей части сумма $f(z)$ ряда (16) будет являться решением уравнения (1), т. е., иначе говоря, при подстановке $w=f(z)$ в левую часть уравнения (1) эта левая часть будет равна нулю в некоторой части круга сходимости ряда (16). Но тогда, в силу основного принципа аналитического продолжения, она будет равна нулю и во всей той части этого круга, которая принадлежит $B$; ряд (16) будет также давать решение нашего уравнения. Это решение будет вполне определяться своими начальными условиями в точке $z_1$, которые, очевидно, будут

$$f(z_1)=w|_{z=z_1}, \quad f'(z_1)=w'|_{z=z_1},$$

где $w$ определяется исходным рядом (13).

В силу доказанной в предыдущем номере теоремы, ряд (16) будет наверно сходиться в круге, имеющем центр в точке $z_1$ и принадлежащем той области $B$, где $p(z)$ и $q(z)$ — регулярные функции. Мы приходим, таким образом, к следующей теореме:

Теорема II. *Если коэффициенты $p(z)$ и $q(z)$ суть регулярные функции в некоторой области $B$, то любое решение уравнения, изображаемое степенным рядом с центром внутри $B$, может быть аналитически продолжено по любому пути, находящемуся внутри $B$, и такое аналитическое продолжение дает все время решение уравнения* (1).

Сделаем некоторые существенные добавления к доказанной теореме. Заметим, что если $B$ есть односвязная область, то согласно основному свойству аналитического продолжения [18] $w$ будет представлять собою однозначную регулярную функцию в области $B$, которая по доказанному будет решением уравнения (1). Если же $B$ будет многосвязной областью, то $w$ не будет, вообще говоря, однозначной функцией в области $B$.

Если $w_1$ и $w_2$ — два решения уравнения (1), то мы имеем следующую формулу [II, 24]:

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{w_2}{w_1}\right)=\frac{C}{w_1^2}e^{-\int_{z_0}^{z} p(z)\,dz}, \tag{17}$$

где $C$ — некоторая постоянная. Если она отлична от нуля, то левая часть будет отличной от нуля все время при аналитическом продолжении, т. е. аналитическое продолжение линейно независимых реше-

ний все время дает линейно независимые решения, и формула (15) дает тем самым аналитическое продолжение любого решения через аналитическое продолжение двух линейно независимых решений.

Если, например, коэффициенты $p(z)$ и $q(z)$ суть рациональные функции, то всякое решение уравнения может быть аналитически продолжено по любому пути на плоскости, не проходящему через полюсы $p(z)$ и $q(z)$.

**100. Окрестность особой точки.** Исследуем теперь поведение решения в окрестности особой точки коэффициентов $p(z)$ и $q(z)$. Положим, что точка $z=z_0$ является полюсом или существенно особой точкой для коэффициентов $p(z)$ и $q(z)$, так что эти коэффициенты представляются рядами Лорана в некотором кольце $K$ с центром $z_0$ и внутренним радиусом, равным нулю:

$$\left.\begin{aligned} p(z)&=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k(z-z_0)^k,\\ q(z)&=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k(z-z_0)^k \quad (0<|z-z_0|<R). \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Всякое решение уравнения (1) может быть любым образом аналитически продолжено внутри кольца $K$, и при обходе точки $z=z_0$ решение $w$ может приходить уже к новым значениям, т. е. точка $z=z_0$ будет, вообще говоря, точкой разветвления для решения $w$. Выясним более подробно характер этой точки разветвления. Возьмем какие-нибудь два линейно независимых решения уравнения $w_1$ и $w_2$. Если в кольце проведем разрез от центра вдоль какого-нибудь радиуса, то в полученной таким образом односвязной области наши решения $w_1$ и $w_2$ будут регулярными однозначными функциями, но на противоположных берегах разреза эти функции будут принимать различные значения. Иначе говоря, после обхода точки $z=z_0$ функции $w_1$ и $w_2$ превратятся в некоторые новые функции $w_1^+$ и $w_2^+$. Эти новые функции также должны быть решениями уравнения, а следовательно, они должны выражаться линейно через $w_1$ и $w_2$. Таким образом, должны иметь место формулы вида

$$\left.\begin{aligned} w_1^+&=a_{11}w_1+a_{12}w_2,\\ w_2^+&=a_{21}w_1+a_{22}w_2, \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

где $a_{ik}$ — некоторые постоянные. Иначе говоря, при обходе вокруг особой точки линейно независимые решения испытывают некоторое линейное преобразование. Нетрудно видеть, что

$$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0. \tag{20}$$

Действительно, если бы мы имели $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0$, то решения $w_1^+$ и $w_2^+$ отличались бы лишь постоянным множителем и были бы

линейно зависимыми, но этого не может быть, так как мы раньше видели, что аналитическое продолжение линейно независимых решений приводит также к линейно независимым решениям. Вид линейного преобразования (19) зависит, конечно, от выбора решений $w_1$ и $w_2$.

Постараемся построить такое решение, которое при обходе особой точки получает лишь некоторый постоянный множитель, т. е. для которого линейное преобразование имеет наиболее простой вид:

$$w^+ = \lambda w. \tag{21}$$

Такое решение, если оно существует, должно быть линейной комбинацией решений $w_1$ и $w_2$:

$$w = b_1 w_1 + b_2 w_2,$$

и нам надо найти коэффициенты $b_1$ и $b_2$. В силу (21) мы должны иметь

$$b_1 w_1^+ + b_2 w_2^+ = \lambda (b_1 w_1 + b_2 w_2),$$

откуда в силу (19) получаем

$$b_1 (a_{11} w_1 + a_{12} w_2) + b_2 (a_{21} w_1 + a_{22} w_2) = \lambda (b_1 w_1 + b_2 w_2).$$

Сравнивая коэффициенты при линейно независимых решениях, получим систему однородных уравнений для $b_1$ и $b_2$:

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda) b_1 + a_{21} b_2 &= 0, \\ a_{12} b_1 + (a_{22} - \lambda) b_2 &= 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Для того чтобы получить для $b_1$ и $b_2$ решение, отличное от нулевого, мы должны приравнять нулю определитель написанной системы:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{23}$$

Это есть квадратное уравнение для $\lambda$. Взяв некоторый корень $\lambda = \lambda_1$ этого уравнения и подставляя его значение в коэффициенты системы (22), мы сможем найти для $b_1$ и $b_2$ решение, отличное от нулевого. Таким образом, корни уравнения (23) дают возможные значения множителя $\lambda$ в формуле (21), т. е. эти корни равны числам, обладающим тем свойством, что существует решение уравнения (1), которое в результате обхода особой точки $z_0$ в положительном направлении умножается на упомянутое число. Если возьмем за исходные другие линейно независимые решения, то линейное преобразование (19) будет уже другим, но корни уравнения (23) должны остаться прежними, так как эти корни имеют вполне определенный указанный выше смысл, не связанный с выбором основных решений.

Приведем чисто алгебраическое доказательство сказанного. Если вместо $w_1$ и $w_2$ мы рассмотрим другие линейно независимые решения:

$$\tilde{w}_1 = c_{11}w_1 + c_{12}w_2,$$
$$\tilde{w}_2 = c_{21}w_1 + c_{22}w_2,$$

где определитель матрицы $\| c_{ik} \|$ должен быть отличен от нуля, то вместо (19) получим

$$\tilde{w}_1^+ = d_{11}\tilde{w}_1 + d_{12}\tilde{w}_2,$$
$$\tilde{w}_2^+ = d_{21}\tilde{w}_1 + d_{22}\tilde{w}_2,$$

где матрица $\| d_{ik} \|$ подобна $\| a_{ik} \|$ [**III$_1$, 27**]:

$$\| d_{ik} \| = \| c_{ik} \| \cdot \| a_{ik} \| \cdot \| c_{ik} \|^{-1},$$

а подобные матрицы имеют одинаковые характеристические уравнения.

Разберем сначала тот случай, когда квадратное уравнение имеет два различных корня

$$\lambda = \lambda_1 \quad \text{и} \quad \lambda = \lambda_2.$$

Мы имеем при этом два решения, удовлетворяющих условиям

$$w_1^+ = \lambda_1 w_1, \quad w_2^+ = \lambda_2 w_2. \tag{24}$$

Эти два решения будут обязательно линейно независимы. Действительно, в противном случае отношение $\frac{w_2}{w_1}$ было бы постоянной величиной и не менялось бы при обходе особой точки, а в силу (24) это отношение приобретает множитель $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ при обходе особой точки. Заметим еще, что в силу (20) числа $\lambda_1$ и $\lambda_2$ наверно отличны от нуля.

Введем два числа

$$\rho_1 = \frac{1}{2\pi i} \ln \lambda_1, \quad \rho_2 = \frac{1}{2\pi i} \ln \lambda_2, \tag{25}$$

где значения логарифмов берутся произвольными. Составим две функции:

$$(z - z_0)^{\rho_1} = e^{\rho_1 \ln (z - z_0)}, \quad (z - z_0)^{\rho_2} = e^{\rho_2 \ln (z - z_0)}.$$

При обходе особой точки они приобретают множители

$$e^{\rho_1 2\pi i} = e^{\ln \lambda_1} = \lambda_1, \quad e^{\rho_2 2\pi i} = e^{\ln \lambda_2} = \lambda_2.$$

Таким образом, отношения

$$\frac{w_1}{(z - z_0)^{\rho_1}} \quad \text{и} \quad \frac{w_2}{(z - z_0)^{\rho_2}}$$

при обходе особой точки будут оставаться однозначными, т. е. эти отношения будут регулярными и однозначными функциями в окрест-

ности точки $z = z_0$, и, следовательно, в этой окрестности они будут представляться рядами Лорана. Таким образом, для построенных решений мы имеем следующие представления в окрестности особой точки:

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= (z - z_0)^{\rho_1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k' (z - z_0)^k, \\ w_2 &= (z - z_0)^{\rho_2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k'' (z - z_0)^k. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Заметим, что $\ln \lambda$ определен лишь с точностью до слагаемого вида $2m\pi i$, где $m$ — любое целое число. Таким образом, в силу (25) числа $\rho_1$ и $\rho_2$ определены с точностью до слагаемых, которые должны быть целыми числами. Это вполне согласуется и с формулами (26), ибо, умножая ряд Лорана на $(z - z_0)^m$, где $m$ — любое целое число, мы получаем опять некоторый ряд Лорана, и, таким образом, показатели $\rho_1$ и $\rho_2$ в формулах (26) определены лишь с точностью до целого слагаемого.

Рассмотрим теперь тот случай, когда корни уравнения (23) одинаковы, т. е. когда $\lambda_1 = \lambda_2$. Мы можем при этом построить, как и выше, одно решение уравнения, удовлетворяющее условию

$$w_1^+ = \lambda_1 w_1. \tag{27}$$

Возьмем какое-нибудь второе решение $w_2$, линейно независимое от $w_1$. При обходе особой точки оно испытывает линейное преобразование вида

$$w_2^+ = a_{21} w_1 + a_{22} w_2. \tag{28}$$

Квадратное уравнение (23) для построенных решений будет

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda & a_{21} \\ 0 & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Оно по условию должно иметь двойной корень $\lambda = \lambda_1$, откуда непосредственно следует, что $a_{22} = \lambda_1$, т. е. что формула (28) должна иметь вид

$$w_2^+ = \lambda_1 w_2 + a_{21} w_1. \tag{29}$$

В силу (27) и (29) отношение $\frac{w_2}{w_1}$ при обходе особой точки приобретает лишь постоянное слагаемое

$$\left(\frac{w_2}{w_1}\right)^+ = \frac{w_2}{w_1} + \frac{a_{21}}{\lambda_1},$$

т. е. следовательно, разность

$$\frac{w_2}{w_1} - \frac{a_{21}}{2\pi i \lambda_1} \ln (z - z_0) = \frac{w_2}{w_1} - a \ln (z - z_0)$$

при обходе особой точки будет однозначной и будет изображаться рядом Лорана. Таким образом, принимая во внимание, что $w_1$ имеет вид (26) и что произведение ряда Лорана на $w_1$ имеет тот же вид, что и $w_1$, мы видим, что в данном случае наши решения будут иметь вблизи особой точки представление вида

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= (z-z_0)^{\rho_1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k' (z-z_0)^k, \\ w_2 &= (z-z_0)^{\rho_1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k'' (z-z_0)^k + a w_1 \ln (z-z_0). \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Мы получаем, таким образом, следующую теорему:

Теорема III. *Если $z=z_0$ есть полюс или существенно особая точка для коэффициентов $p(z)$ и $q(z)$, то существуют два линейно независимых решения, которые вблизи этой точки представляются в виде* (26) *или* (30). Заметим, что во втором случае, когда корни уравнения (23) одинаковы, может все же оказаться, что постоянная $a_{21}$ и связанная с ней постоянная

$$a = \frac{a_{21}}{2\pi i \lambda_1}$$

будут равны нулю, и тогда будем иметь вблизи этой точки формулы (26).

Всё предыдущее относилось к тому случаю, когда точка $z_0$ находится на конечном расстоянии. Для исследования бесконечно далекой точки плоскости мы должны вместо $z$ ввести новую независимую переменную $t$ по формуле

$$z = \frac{1}{t}, \quad t = \frac{1}{z}.$$

Заменяя дифференцирование по $z$ дифференцированием по $t$, будем иметь

$$\frac{d}{dz} = -t^2 \frac{d}{dt}; \quad \frac{d^2}{dz^2} = t^4 \frac{d^2}{dt^2} + 2t^3 \frac{d}{dt},$$

и уравнение (1) с новой независимой переменной будет иметь вид

$$t^4 \frac{d^2w}{dt^2} + \left[2t^3 - t^2 p\left(\frac{1}{t}\right)\right] \frac{dw}{dt} + q\left(\frac{1}{t}\right) w = 0. \tag{31}$$

Для этого нового уравнения прежняя бесконечно далекая точка превратится в точку $t=0$, и мы должны будем исследовать по предыдущей схеме окрестность этой точки.

Заметим, что все предыдущие рассуждения носили чисто теоретический характер. На самом деле они не дают никакого практического способа построения квадратного уравнения (23) и нахождения

коэффициентов в разложениях (26) и (30). Мы переходим сейчас к исследованию этого практического вопроса нахождения чисел $\rho$ и коэффициентов разложения в формулах (26) или (30). Мы можем это сделать только в одном случае, а именно тогда, когда разложения в этих формулах содержат лишь конечное число членов с отрицательными степенями.

В этом случае особая точка $z=z_0$ называется *регулярной особой точкой*, т. е. *полюс или существенно особая точка коэффициентов уравнения* (1) *называется регулярной особой точкой этого уравнения, если разложения Лорана* (26) *или* (30) *содержат лишь конечное число членов с отрицательными степенями.* Изменяя $\rho_1$ и $\rho_2$ на целое число, мы всегда можем, в случае регулярной особой точки, достигнуть того, чтобы степенные ряды в формулах (26) или (30) вовсе не содержали членов с отрицательными степенями и начинались со свободного члена, т. е., например, вместо (26) в случае регулярной особой точки мы можем написать

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= (z-z_0)^{\rho_1}\sum_{k=0}^{\infty} c_k'(z-z_0)^k, \\ w_2 &= (z-z_0)^{\rho_2}\sum_{k=0}^{\infty} c_k''(z-z_0)^k \end{aligned}\right\} \quad (c_0' \text{ и } c_0'' \neq 0). \tag{26$_1$}$$

В других случаях, когда хоть одно из разложений в формулах (26) или (30) содержит бесчисленное множество членов с отрицательными степенями, особая точка называется *иррегулярной*. Мы должны будем прежде всего указать критерий, согласно которому могли бы судить по коэффициентам уравнения о том — будет ли особая точка регулярной или иррегулярной.

**101. Регулярная особая точка.** Пусть $w_1$ и $w_2$ — две аналитические функции, линейно независимые между собой. Нетрудно построить линейное уравнение, для которого они будут решениями. Действительно, мы должны иметь

$$\begin{aligned} w_1'' + p(z)\,w_1' + q(z)\,w_1 &= 0, \\ w_2'' + p(z)\,w_2' + q(z)\,w_2 &= 0, \end{aligned}$$

и отсюда без труда определяются коэффициенты уравнения, а именно [II, 24]:

$$p(z) = -\frac{w_2''w_1 - w_1''w_2}{w_2'w_1 - w_1'w_2} \tag{32}$$

и

$$q(z) = -\frac{w_1''}{w_1} - p(z)\frac{w_1'}{w_1}. \tag{33}$$

Положим, что точка $z=z_0$ является регулярной особой точкой. Рассмотрим только случай $\rho_1 \neq \rho_2$, так как случай формул (30) может быть разобран совершенно таким же образом. Будем в дальнейшем обозначать через $P_k(z-z_0)$ ряды, расположенные по целым положительным степеням $(z-z_0)$ со свободным членом, отличным от нуля. Имеем в данном случае, по условию регулярности особой точки $z=z_0$, решения вида

$$w_1=(z-z_0)^{\rho_1}P_1(z-z_0), \quad w_2=(z-z_0)^{\rho_2}P_2(z-z_0).$$

Отсюда

$$\frac{w_2}{w_1}=(z-z_0)^{\rho_2-\rho_1}P_3(z-z_0),$$

так как частное двух степенных рядов со свободными членами есть также степенной ряд со свободным членом. Дальше имеем

$$\Delta(z)=w_2'w_1-w_1'w_2=w_1^2\frac{d}{dz}\left(\frac{w_2}{w_1}\right)=$$
$$=(z-z_0)^{2\rho_1}P_4(z-z_0)\left[(z-z_0)^{\rho_2-\rho_1}P_3(z-z_0)\right]$$

или, производя дифференцирование произведения и вынося за скобки $(z-z_0)^{\rho_2-\rho_1-1}$,

$$\Delta(z)=(z-z_0)^{\rho_1+\rho_2-1}P_5(z-z_0)$$

и, дифференцируя по $z$, получим

$$\Delta'(z)=(\rho_1+\rho_2-1)(z-z_0)^{\rho_1+\rho_2-2}P_5(z-z_0)+$$
$$+(z-z_0)^{\rho_1+\rho_2-1}P_5'(z-z_0).$$

Отсюда

$$p(z)=-\frac{\Delta'(z)}{\Delta(z)}=\frac{1-\rho_1-\rho_2}{z-z_0}+\frac{P_5'(z-z_0)}{P_5(z-z_0)},$$

т. е. $p(z)$ может иметь в точке $z=z_0$ полюс не выше первого порядка.

Из выражения $w_1$ путем дифференцирования непосредственно следует, что $\frac{w_1'}{w_1}$ может иметь в точке $z_0$ полюс не выше первого порядка, а $\frac{w_1''}{w_1}$ — полюс не выше второго порядка. Формула (33) при этом показывает, что $q(z)$ может иметь в точке $z_0$ полюс не выше второго порядка.

Мы приходим, таким образом, к следующей теореме:

Теорема I. *Необходимым условием того, чтобы точка $z_0$ была регулярной особой точкой, является то обстоятельство, что коэффициент $p(z)$ имеет точку $z_0$ полюсом не выше первого*

*порядка, а коэффициент $q(z)$ имеет точку $z_0$ полюсом не выше второго порядка,* т. е. *уравнение имеет вид*

$$w'' + \frac{p_1(z)}{z - z_0} w' + \frac{q_1(z)}{(z - z_0)^2} w = 0, \tag{34}$$

*где $p_1(z)$ и $q_1(z)$ — регулярные в точке $z_0$ функции.*

Покажем теперь, что это условие не только необходимо, но и достаточно для регулярности особой точки. Напомним, что уравнения вида (34) суть как раз те уравнения, которые мы рассматривали раньше [**II, 47**] и для которых строили формально решения в виде обобщенного степенного ряда. Но только прежде мы не занимались вопросом о сходимости построенных таким образом рядов. Сейчас мы разберем этот вопрос до конца и докажем, что построенные формально ряды будут сходящимися и будут давать решения уравнения. Для простоты письма будем считать $z_0 = 0$.

Перепишем уравнение (34), умножая его на $z^2$, в виде

$$z^2 w'' + z(a_0 + a_1 z + \ldots) w' + (b_0 + b_1 z + \ldots) w = 0 \tag{35}$$

и будем искать решение этого уравнения в следующей форме:

$$w = z^\rho \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k. \tag{36}$$

Подставляя это в левую часть уравнения (35) и приравнивая нулю коэффициенты при различных степенях $z$, получим уравнения для определения коэффициентов $c_k$. Эти уравнения будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned}
c_0 f_0(\rho) &= 0, \\
c_1 f_0(\rho + 1) + c_0 f_1(\rho) &= 0, \\
c_2 f_0(\rho + 2) + c_1 f_1(\rho + 1) + c_0 f_2(\rho) &= 0, \\
\ldots\ldots\ldots

корень этого уравнения такой, что при всяком целом положительном $n$ имеет место условие

$$f_0(\rho_1+n)\neq 0 \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots). \tag{40}$$

При этом уравнения (37), начиная со второго, дадут нам возможность определить последовательно $c_1$, $c_2$, ... Первый коэффициент $c_0$ останется произвольным и будет, очевидно, играть роль произвольного постоянного множителя, так что мы можем, например, положить $c_0=1$. Мы должны теперь еще показать, что построенный таким образом ряд, входящий в формулу (36), будет рядом, сходящимся в некоторой окрестности точки $z=0$.

Пусть $R$ есть круг сходимости рядов, входящих в коэффициенты уравнения (35). Если $R_1$ есть некоторое положительное число, меньшее $R$, то мы имеем для коэффициентов $a_k$ и $b_k$ этих рядов следующую оценку [14]:

$$|a_k|<\frac{m_1}{R_1^k}, \qquad |b_k|<\frac{m_2}{R_1^k},$$

где $m_1$ и $m_2$ — некоторые постоянные. Отсюда

$$|a_k|+|b_k|<\frac{m_1+m_2}{R_1^k},$$

и, следовательно, взяв $M\geqslant m_1+m_2$, будем иметь оценку вида

$$|a_k|+|b_k|<\frac{M}{R_1^k}. \tag{41}$$

Отношение

$$\frac{|\rho|+n}{f_0(\rho+n)}=\frac{|\rho|+n}{(\rho+n)(\rho+n-1)+(\rho+n)a_0+b_0}$$

при беспредельном возрастании $n$ будет стремиться к нулю, так как числитель есть полином первой степени от $n$, а знаменатель — полином второй степени. Следовательно, можно фиксировать такое целое положительное число $N$, что

$$|f_0(\rho+n)|>|\rho|+n \text{ при } n\geqslant N. \tag{42}$$

Из формул (37) имеем

$$c_n=-\frac{f_1(\rho+n-1)}{f_0(\rho+n)}c_{n-1}-\frac{f_2(\rho+n-2)}{f_0(\rho+n)}c_{n-2}-\ldots-\frac{f_n(\rho)}{f_0(\rho+n)}c_0,$$

откуда

$$|c_n|\leqslant\frac{|f_1(\rho+n-1)|}{|f_0(\rho+n)|}|c_{n-1}|+\frac{|f_2(\rho+n-2)|}{|f_0(\rho+n)|}|c_{n-2}|+$$
$$+\ldots+\frac{|f_n(\rho)|}{|f_0(\rho+n)|}|c_0|. \tag{43}$$

Далее,

$$f_k(\rho+n-k)=b_k+(\rho+n-k)a_k,$$
$$|f_k(\rho+n-k)|<|b_k|+(|\rho|+n)|a_k| \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

поэтому и подавно

$$|f_k(\rho+n-k)|<(|\rho|+n)(|a_k|+|b_k|). \tag{44}$$

Всегда можно выбрать достаточно большое положительное число $P$ так, что для первых $N$ коэффициентов будет иметь место оценка

$$|c_k|\leqslant\frac{P^k}{R_1^k} \quad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ N-1). \tag{45}$$

Напомним, что мы считаем $c_0=1$. Будем, кроме того, считать, что $P$ во всяком случае выбрано так, что

$$P>1+M. \tag{46}$$

Для остальных коэффициентов, начиная с $c_N$, мы уже можем пользоваться неравенством (42). Докажем, пользуясь этим неравенством, что если оценка (45) имеет место для всех $c_k$ от $c_0$ до $c_n$ исключительно, то она имеет место и для $c_n$. Действительно, в силу (42), (43) и (44) будем иметь

$$c_n|<(|a_1|+|b_1|)|c_{n-1}|+(|a_2|+|b_2|)|c_{n-2}|+\ldots+$$
$$+(|a_n|+|b_n|)|c_0|$$

или в силу (41)

$$|c_n|<\frac{M}{R_1}|c_{n-1}|+\frac{M}{R_1^2}|c_{n-2}|+\ldots+\frac{M}{R_1^n}|c_0|,$$

или, предполагая, что для $c_0,\ c_1,\ \ldots,\ c_{n-1}$ имеет место оценка (45):

$$|c_n|<\frac{M}{R_1^n}(P^{n-1}+P^{n-2}+\ldots+1)=\frac{M(P^n-1)}{P-1}\frac{1}{R_1^n}. \tag{47}$$

Покажем теперь, что

$$\frac{M(P^n-1)}{P-1}<P^n. \tag{48}$$

Действительно, это неравенство равносильно следующему:

$$P^{n+1}-(1+M)P^n+M>0$$

или

$$P^n[P-(1+M)]+M>0.$$

Это последнее непосредственно вытекает из (46). Неравенства (47) и (48) дают

$$|c_n| \leqslant \frac{P^n}{R_1^n},$$

и наше утверждение доказано.

Итак, оценки (45) имеют место до значка $k = N - 1$ включительно в силу выбора числа $P$. Для дальнейших значков имеет место неравенство (42), пользуясь которым мы показали, что если оценка (45) имеет место до некоторого значка, то она имеет место и для следующего значка. Таким образом мы доказали, что оценка (45) имеет место для любого значка, т. е. при любом $n$ имеем

$$|c_n| \leqslant \frac{P^n}{R_1^n}.$$

Но ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P^n}{R_1^n} z^n$$

наверно абсолютно сходится в круге $|z| < \frac{R_1}{P}$. Следовательно, в этом круге и ряд, входящий в формулу (36), члены которого по модулю не больше членов предыдущего ряда, также обязательно будет абсолютно сходящимся, и его, конечно, можно почленно дифференцировать, как всякий степенной ряд.

Таким образом, мы показали, что формула (36) дает действительно решение нашего уравнения в некоторой окрестности точки $z = 0$. Покажем теперь, что ряд (36) сходится во всем круге $|z| < R$, где сходятся ряды, входящие в коэффициенты уравнения (35). Действительно, в противном случае функция, определенная в окрестности $z = 0$ степенным рядом, входящим в формулу (36), должна была бы иметь внутри круга $|z| < R$ особую точку при аналитическом продолжении [18] (отличную от точки $z = 0$). Но этого не может быть, так как коэффициенты уравнения (35) суть регулярные функции во всем круге $|z| < R$, кроме точки $z = 0$, и, согласно результату [100], решение не может иметь там особых точек при аналитическом продолжении.

Если разность корней квадратного уравнения (39) не есть целое число, то для каждого из корней выполнено условие (40), и можно таким образом построить два решения вида (36), причем эти решения будут, очевидно, линейно независимыми ($\rho_1 \neq \rho_2$).

Перейдем теперь к разбору такого случая, когда квадратное уравнение (39) имеет одинаковые корни или такие различные корни, разность которых есть целое число.

В первом случае, используя единственный корень уравнения, мы построим указанным выше способом одно решение вида (36), и надо будет находить еще второе решение. Обратимся ко второму случаю. Пусть $\rho_1$ и $\rho_2$ — корни уравнения (39) и $\rho_1 = \rho_2 + m$, где $m$ — некоторое целое положительное число, т. е. $\rho_1$ есть тот из корней уравнения, вещественная часть которого больше, чем вещественная часть другого корня. Для корня $\rho_1$ условие (40) очевидно выполнено, и можно построить, пользуясь этим корнем, решение указанным выше способом. Если мы попытаемся использовать второй корень $\rho_2$ для построения решения, то встретимся со следующим затруднением. Значение $\rho_2 + m$ является корнем уравнения (39), и, следовательно, если мы возьмем $(m+1)$-е уравнение системы (37):

$$c_m f_0(\rho_2 + m) + c_{m-1} f_1(\rho_2 + m - 1) + \ldots + c_0 f_m(\rho_2) = 0,$$

то в этом уравнении коэффициент $f_0(\rho_2 + m)$ при неизвестном $c_m$ будет равен нулю. Сумма остальных членов будет, вообще говоря, от нуля отлична, и мы придем к противоречивому равенству. Таким образом, и в этом случае нам надо будет иначе искать второе решение. Заметим, что если оказалось бы случайно, что в предыдущем уравнении и упомянутая сумма равна нулю, то мы могли бы за $c_m$ взять любое число и продолжать вычисление дальнейших коэффициентов $c_{m+1}, \ldots$ Наши предыдущие оценки показывают, что полученный ряд будет сходящимся, и мы будем иметь, таким образом, и в этом исключительном случае второе решение вида (36).

Установим теперь вид второго решения, считая вообще, что

$$\rho_1 = \rho_2 + m, \tag{49}$$

где $m$ есть целое положительное число или нуль. Напомним, что для линейного уравнения

$$w'' + p(z)\,w' + q(z)\,w = 0$$

мы имели формулу, которая дает второе решение уравнения $w_2$, когда известно его одно решение $w_1$ [II, 24]:

$$w_2 = C w_1 \int e^{-\int p(z)\,dz} \frac{dz}{w_1^2}, \tag{50}$$

где $C$ — произвольная постоянная. В данном случае

$$p(z) = \frac{a_0}{z} + a_1 + a_2 z + \ldots$$

и

$$\int p(z)\,dz = \ln z^{a_0} + C_1 + a_1 z + \frac{1}{2} a_2 z^2 + \ldots,$$

откуда

$$e^{-\int p(z)\,dz} = z^{-a_0} P_1(z),$$

где, как и выше, $P_1(z)$ — ряд Тейлора, расположенный по степеням $z$ со свободным членом, отличным от нуля. Построенное уже решение имеет вид

$$w_1 = z^{\rho_1} P_2(z), \tag{51}$$

откуда

$$w_1^2 = z^{2\rho_1} P_3(z),$$

где $P_s(z)$ — ряды Тейлора со свободным членом, отличным от нуля. Подинтегральная функция в формуле (50) будет, следовательно, иметь вид

$$e^{-\int p(z)\,dz} \frac{1}{w_1^2} = z^{-a_0 - 2\rho_1} P_4(z).$$

Числа $\rho_1$ и $\rho_2$ суть корни квадратного уравнения (39), и, следовательно,

$$\rho_1 + \rho_2 = 1 - a_0.$$

Отсюда в силу (49)

$$-a_0 - 2\rho_1 = \rho_2 - \rho_1 - 1 = -(1+m),$$

т. е. подинтегральное выражение в формуле (50) будет

$$e^{-\int p(z)\,dz} \frac{1}{w_1^2} = z^{-(1+m)} P_4(z) = \frac{\gamma_{-(1+m)}}{z^{1+m}} + \ldots + \frac{\gamma_{-1}}{z} + \gamma_0 + \gamma_1 z + \ldots$$

$$(\gamma_{-(1+m)} \neq 0).$$

Интегрируя это выражение, получим один логарифмический член $\gamma_{-1} \ln z$ и затем ряд, который начнется со степени $z^{-m}$. Умножая это еще на $w_1$, определяемое формулой (51), получим окончательно следующее выражение:

$$w_2 = z^{-m} P_5(z) \cdot z^{\rho_1} P_2(z) + \gamma_{-1} w_1 \ln z$$

или, в силу (49),

$$w_2 = z^{\rho_2} P_6(z) + \gamma_{-1} w_1 \ln z, \tag{52}$$

где $P_6(z)$ — ряд Тейлора со свободным членом. Выражение (52) по форме совпадает со вторым из выражений (30), причем в формуле (52) ряд Лорана не содержит членов с отрицательными степенями. Заметим, что постоянная $\gamma_{-1}$, вообще говоря, отлична от нуля, но может в отдельных случаях оказаться и равной нулю. Это будут те исключительные случаи, о которых мы говорили выше. Таким образом, мы и в этом случае получаем второе решение, характерное для регулярной особой точки, т. е. имеет место следующая теорема:

Теорема II. *Для того чтобы точка $z = z_0$ была регулярной особой точкой, достаточно, чтобы коэффициент $p(z)$ в уравнении* (1) *имел точку $z_0$ полюсом не выше первого порядка, а коэффициент $q(z)$ — полюсом не выше второго порядка.*

Необходимость этого условия была нами установлена выше.

Заметим, что иногда может случиться, что в регулярной особой точке оба решения не имеют никаких особенностей. Это будет тогда, когда $\rho_1$ и $\rho_2$ суть целые не отрицательные числа, причем второе решение не содержит логарифма. Так, например, уравнение

$$w'' - \frac{2}{z} w' + \frac{2}{z^2} w = 0$$

имеет следующие два линейно независимых решения:

$$w_1 = z, \quad w_2 = z^2.$$

Заметим еще, что если $\rho_1 = \rho_2$, то постоянная $\gamma_{-1}$ в формуле (52) наверно отлична от нуля, что следует непосредственно из предыдущих вычислений при $m = 0$.

**102. Уравнения класса Фукса.** Исследование регулярных особых точек было впервые систематически проведено в середине XIX века немецким математиком Фуксом. Мы займемся сейчас уравнениями, все особые точки которых суть регулярные особые точки. Такие уравнения называются обычно *уравнениями класса Фукса*. Напишем наше уравнение в виде

$$w'' + p(z) w' + q(z) w = 0. \tag{53}$$

Совершая замену независимой переменной

$$z = \frac{1}{t},$$

получим, как мы видели выше, уравнение

$$t^4 \frac{d^2w}{dt^2} + \left[2t^3 - t^2 p\left(\frac{1}{t}\right)\right] \frac{dw}{dt} + q\left(\frac{1}{t}\right) w = 0. \tag{53$_1$}$$

По условию точка $t = 0$ должна быть регулярной особой точкой этого уравнения. Принимая во внимание, что после деления на $t^4$ коэффициент при $\frac{dw}{dt}$ не может иметь в точке $t = 0$ полюс выше первого порядка, мы должны иметь для $p\left(\frac{1}{t}\right)$ разложение вида

$$p\left(\frac{1}{t}\right) = d_1 t + d_2 t^2 + \ldots,$$

т. е. $p(z)$ вблизи $z = \infty$ должно иметь разложение вида

$$p(z) = d_1 \frac{1}{z} + d_2 \frac{1}{z^2} + \ldots \tag{54}$$

Точно так же, принимая во внимание, что коэффициент $\frac{1}{t^4} q\left(\frac{1}{t}\right)$ может иметь в точке $t=0$ полюс не выше второго порядка, получим

$$q\left(\frac{1}{t}\right) = d_2' t^2 + d_3' t^3 + \dots,$$

и, следовательно, $q(z)$ должно иметь вблизи $z=\infty$ разложение вида

$$q(z) = d_2' \frac{1}{z^2} + d_3' \frac{1}{z^3} + \dots, \tag{55}$$

т. е. для того чтобы бесконечно далекая точка $z=\infty$ была регулярной особой точкой уравнения (53), необходимо и достаточно, чтобы $p(z)$ имела в точке $z=\infty$ корень, и $q(z)$ — корень не ниже второго порядка. Заметим, что если в разложении (54) $d_1=2$ и в разложении (55) $d_2'=d_3'=0$, то точка $t=0$ не является особой точкой уравнения $(53_1)$. В этом случае в окрестности $z=\infty$ уравнение имеет решение

$$w = c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots + \frac{c_n}{z^n} + \dots,$$

где коэффициенты $c_0$ и $c_1$ — произвольны.

Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — особые точки нашего уравнения, лежащие на конечном расстоянии. Функция $p(z)$ может иметь в этих точках полюсы первого порядка и в силу (54) должна обращаться в нуль на бесконечности, т. е. это будет рациональная дробь вида

$$p(z) = \frac{p_1(z)}{(z-\alpha_1)\dots(z-\alpha_n)},$$

где степень числителя по крайней мере на одну единицу ниже степени знаменателя. Точно так же, принимая во внимание (55), видим, что $q(z)$ должно иметь вид

$$q(z) = \frac{q_1(z)}{(z-\alpha_1)^2\dots(z-\alpha_n)^2},$$

где степень числителя по крайней мере на две единицы ниже степени знаменателя. Разлагая рациональные дроби на простейшие, будем иметь следующие общие выражения для коэффициентов уравнений класса Фукса:

$$\left.\begin{aligned} p(z) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{z-\alpha_k}, \\ q(z) &= \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{B_k}{(z-\alpha_k)^2} + \frac{C_k}{z-\alpha_k}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

В силу (55) мы должны иметь

$$zq(z) \to 0 \text{ при } z \to \infty,$$

и второе из выражений (56) показывает, что постоянные $C_k$ должны удовлетворять условию

$$C_1 + C_2 + \ldots + C_n = 0. \tag{57}$$

*Выражения* (56) *совместно с условием* (57) *и дают необходимые и достаточные условия того, чтобы уравнение* (53) *было уравнением класса Фукса.*

Составим теперь определяющие уравнения для особых точек $z = \alpha_k$ и для точки $z = \infty$. Для точки $\alpha_k$ коэффициент при $(z - \alpha_k)^{-1}$ в выражении $p(z)$ равен $A_k$ и коэффициент при $(z - \alpha_k)^{-2}$ в выражении $q(z)$ равен $B_k$, так что определяющее уравнение в этой точке будет

$$\rho(\rho - 1) + A_k\rho + B_k = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{58}$$

Перейдем теперь к точке $z = \infty$, т. е. к точке $t = 0$ для уравнения $(53_1)$. Коэффициент при $t^{-1}$ в выражении

$$\frac{1}{t^4}\left[2t^3 - t^2 p\left(\frac{1}{t}\right)\right]$$

определится, очевидно, следующим образом:

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t^3}\left[2t^3 - t^2 p\left(\frac{1}{t}\right)\right]$$

или

$$\lim_{z \to \infty} z^3\left[\frac{2}{z^3} - \frac{1}{z^2}p(z)\right] = 2 - \lim_{z \to \infty} zp(z).$$

Принимая во внимание первое из уравнений (56), получим для этого коэффициента следующее выражение:

$$2 - \sum_{k=1}^{n} A_k.$$

Точно так же коэффициент при $t^{-2}$ в выражении

$$\frac{1}{t^4} q\left(\frac{1}{t}\right)$$

будет

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t^2} q\left(\frac{1}{t}\right) = \lim_{z \to \infty} z^2 q(z).$$

Но в силу (56) и (57)

$$q(z)=\sum_{k=1}^{n}\frac{B_k}{(z-\alpha_k)^2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z}\,\frac{C_k}{1-\frac{\alpha_k}{z}}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{B_k}{(z-\alpha_k)^2}+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\alpha_k C_k}{z^2}+\frac{\alpha_k^2 C_k}{z^3}+\ldots\right),$$

откуда

$$\lim_{z\to\infty} z^2 q(z)=\sum_{k=1}^{n}(B_k+\alpha_k C_k).$$

Окончательно для $z=\infty$ определяющее уравнение будет

$$\rho(\rho-1)+\rho\left(2-\sum_{k=1}^{n}A_k\right)+\sum_{k=1}^{n}(B_k+\alpha_k C_k)=0. \qquad (59)$$

Принимая во внимание (58) и (59), нетрудно проверить, что сумма корней определяющих уравнений во всех особых точках будет равна

$$n-\sum_{k=1}^{n}A_k+\sum_{k=1}^{n}A_k-1=n-1,$$

т. е. *эта сумма будет равна числу особых точек, лежащих на конечном расстоянии, уменьшенному на единицу.*

Если бы мы захотели построить уравнение класса Фукса с одной особой точкой, то всегда можем считать, что эта точка находится на бесконечности, так что на конечном расстоянии вовсе нет особых точек. В формулах (56) мы должны будем положить все коэффициенты $A_k$, $B_k$ и $C_k$ равными нулю, и получим таким образом неинтересное уравнение $w''=0$.

Рассмотрим теперь уравнение класса Фукса с двумя особыми точками, одну из которых можно всегда считать находящейся на бесконечности. В этом случае суммы, входящие в формулы (56), должны содержать по одному слагаемому, и, принимая во внимание условие (57), получим

$$w''+\frac{A}{z-\alpha}w'+\frac{B}{(z-\alpha)^2}w=0,$$

где $\alpha$ есть единственная особая точка, лежащая на конечном расстоянии.

Это уравнение есть линейное уравнение Эйлера [II, 42], и оно приводится, как мы знаем, простой подстановкой

$$\tau=\ln(z-\alpha)$$

к уравнению с постоянными коэффициентами.

В следующем номере мы займемся подробным исследованием уравнения класса Фукса с тремя особыми точками.

Напомним читателю уравнение Бесселя [II, 48]

$$z^2w'' + zw' + (z^2 - p^2)w = 0,$$

которым мы занимались раньше. Это уравнение имеет регулярную особую точку в начале $z = 0$. Коэффициент при $w$ в окрестности бесконечно далекой точки не удовлетворяет условию (55), и, следовательно, точка $z = \infty$ будет иррегулярной особой точкой для уравнения Бесселя, т. е. уравнение Бесселя имеет две особые точки: регулярную особенность $z = 0$ и иррегулярную особенность $z = \infty$.

**103. Уравнение Гаусса.** Перейдем к рассмотрению уравнения класса Фукса с тремя особыми точками. Пользуясь дробно-линейным преобразованием плоскости независимого переменного, мы можем, не ограничивая общности, считать, что эти особые точки суть

$$z = 0, \quad z = 1 \quad \text{и} \quad z = \infty.$$

Обозначим корни определяющего уравнения в этих точках следующим образом:

$$\alpha_1, \ \alpha_2; \ \beta_1, \ \beta_2; \ \gamma_1, \ \gamma_2.$$

Для коэффициентов уравнения получим следующие выражения:

$$p(z) = \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z-1},$$

$$q(z) = \frac{B_1}{z^2} + \frac{B_2}{(z-1)^2} + \frac{C_1}{z} + \frac{C_2}{z-1},$$

где

$$C_1 + C_2 = 0. \tag{60}$$

Уравнение

$$\rho(\rho - 1) + A_1\rho + B_1 = 0$$

по условию имеет корни $\alpha_1$ и $\alpha_2$, откуда непосредственно вытекает

$$A_1 = 1 - (\alpha_1 + \alpha_2), \quad B_1 = \alpha_1\alpha_2.$$

Точно так же из определяющего уравнения в точке $z = 1$ получим

$$A_2 = 1 - (\beta_1 + \beta_2), \quad B_2 = \beta_1\beta_2.$$

Определяющее уравнение в точке $z = \infty$ будет иметь вид

$$\rho(\rho - 1) + (\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2)\rho + \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + C_2 = 0.$$

Подставляя сюда один из его корней $\rho = \gamma_1$, найдем выражение для $C_2$:

$$C_2 = -\gamma_1(\gamma_1 - 1) - (\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2)\gamma_1 - (\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2),$$

и условие (60) даст нам, наконец, $C_1 = -C_2$. Таким образом, в случае трех особых точек оказывается, что коэффициенты уравнения вполне определяются по корням определяющих уравнений в особых точках. Из предыдущих вычислений непосредственно вытекает, что можно произвольно задавать эти корни для точек $z=0$ и $z=1$, а для точки $z=\infty$ можно произвольно задать лишь один корень. Второй корень вполне определится из того условия, что в данном случае сумма всех шести корней должна равняться единице (числу особых точек на конечном расстоянии, уменьшенному на единицу).

Всякое решение построенного уравнения обозначают иногда следующим символом:

$$P\begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1;\ z \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix}, \tag{61}$$

который был введен Риманом.

Введем теперь некоторое элементарное преобразование функции $w$ для того, чтобы упростить вид уравнения. Заметим, что если вместо $w$ введем новую искомую функцию $u$ по формуле

$$w = z^p (z-1)^q u, \qquad u = z^{-p}(z-1)^{-q} w,$$

то для новой функции получим также уравнение с тремя регулярными особенностями: $z=0$, $z=1$ и $z=\infty$, но только наличие множителя $z^{-p}(z-1)^{-q}$ даст нам вместо корней $\alpha_1$ и $\alpha_2$ определяющего уравнения в точке $z=0$ для $u$ новые корни $\alpha_1 - p$ и $\alpha_2 - p$. Точно так же в точке $z=1$ новые корни определяющего уравнения будут $\beta_1 - q$ и $\beta_2 - q$. Выбирая $p=\alpha_1$ и $q=\beta_1$, можно достигнуть того, чтобы в особых точках $z=0$ и $z=1$ один из корней определяющего уравнения был равен нулю, что мы и будем считать в дальнейшем.

Введем теперь новые обозначения. Обозначим через $\alpha$ и $\beta$ корни определяющего уравнения в точке $z=\infty$. Для точки $z=0$ будем иметь один корень, равный нулю, а второй корень обозначим через $1-\gamma$. Наконец, для точки $z=1$ будем иметь один корень нуль, а второй корень определится из того условия, что сумма всех шести корней должна равняться единице, и он, следовательно, будет $\gamma - \alpha - \beta$. Таким образом, вместо общего символа (61) можем рассматривать следующий частный случай:

$$P\begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & \alpha;\ z \\ 1-\gamma & \gamma-\alpha-\beta & \beta \end{pmatrix}. \tag{$61_1$}$$

Коэффициенты уравнения определятся из предыдущих вычислений, если положить там

$$\alpha_1 = 0;\ \alpha_2 = 1-\gamma;\ \beta_1 = 0;\ \beta_2 = \gamma - \alpha - \beta;\ \gamma_1 = \alpha;\ \gamma_2 = \beta.$$

Мы получим, таким образом, уравнение вида

$$w'' + \frac{-\gamma + (1+\alpha+\beta)z}{z(z-1)} w' + \frac{\alpha\beta}{z(z-1)} w = 0. \qquad (62)$$

Это уравнение называется *гипергеометрическим дифференциальным уравнением*, или *уравнением Гаусса*. Перейдем теперь к построению его решений вблизи особых точек.

**104. Гипергеометрический ряд.** Построим сначала решения уравнения (62) в окрестности особой точки $z=0$. Эти решения должны иметь вид

$$P_1(z); \quad z^{1-\gamma} P_2(z), \qquad (63)$$

где $P_1(z)$ и $P_2(z)$ — ряды Маклорена со свободным членом. Найдем сначала первое из написанных решений. Перепишем для этого уравнение (62) в виде

$$z(z-1)w'' + [-\gamma + (1+\alpha+\beta)z]w' + \alpha\beta w = 0$$

и подставим в его левую часть

$$w_1 = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$$

Применяя обычный метод неопределенных коэффициентов, получим окончательно решение следующего вида:

$$w_1 = F(\alpha, \beta, \gamma; z) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1!\gamma} z + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\gamma(\gamma+1)} z^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{n!\,\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)} z^n + \ldots, \qquad (64)$$

где через $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$ мы обозначили бесконечный ряд, стоящий справа. Поскольку ближайшая к началу особая точка уравнения есть точка $z=1$, мы можем утверждать, что написанный ряд наверно сходится в круге $|z|<1$. Этот ряд называется обычно гипергеометрическим рядом. При $\alpha=\beta=\gamma=1$ он превращается в геометрическую прогрессию. Мы занимались исследованием этого ряда еще раньше [**I, 141**].

Для определения второго из решений (63) воспользуемся тем элементарным преобразованием функции, о котором мы говорили в предыдущем номере. Введем вместо $w$ новую искомую функцию по формуле

$$w = z^{1-\gamma} u, \quad u = z^{\gamma-1} w = \frac{1}{z^{1-\gamma}} w. \qquad (65)$$

Для новой искомой функции корни 0 и $(1-\gamma)$ определяющего уравнения в точке $z=0$ перейдут в $(\gamma-1)$ и 0. Корни 0 и $(\gamma-\alpha-\beta)$ в точке $z=1$ останутся прежними, и, наконец, в силу второй из формул (65) корни $\alpha$ и $\beta$ в точке $z=\infty$ перейдут в $(\alpha+1-\gamma)$ и $(\beta+1-\gamma)$.

Действительно, до преобразования разложения решений вблизи $z=\infty$ имели вид

$$w_1=\left(\frac{1}{z}\right)^{\alpha}P_1\left(\frac{1}{z}\right) \quad \text{и} \quad w_2=\left(\frac{1}{z}\right)^{\beta}P_2\left(\frac{1}{z}\right),$$

и после преобразования они будут иметь вид

$$u_1=\left(\frac{1}{z}\right)^{\alpha+1-\gamma}P_1\left(\frac{1}{z}\right) \quad \text{и} \quad u_2=\left(\frac{1}{z}\right)^{\beta+1-\gamma}P_2\left(\frac{1}{z}\right).$$

Следовательно, новая искомая функция $u$ будет определяться следующим символом:

$$P\begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \alpha+1-\gamma; & z \\ \gamma-1 & \gamma-\alpha-\beta & \beta+1-\gamma & \end{pmatrix}.$$

Сравнивая этот символ Римана с символом $(61_1)$ и обозначая через $\alpha_1$, $\beta_1$ и $\gamma_1$ значения параметров $(\alpha, \beta, \gamma)$, соответствующие новому символу Римана, получим

$$1-\gamma_1=\gamma-1,\ \alpha_1=\alpha+1-\gamma,\ \beta_1=\beta+1-\gamma,$$

т. е.

$$\alpha_1=\alpha+1-\gamma, \quad \beta_1=\beta+1-\gamma, \quad \gamma_1=2-\gamma.$$

Решение нового уравнения, регулярное в начале $z=0$, будет согласно предыдущему

$$u=F(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; z)=F(\alpha+1-\gamma,\ \beta+1-\gamma,\ 2-\gamma;\ z),$$

откуда в силу (65) получаем

$$w_2=z^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma,\ \beta+1-\gamma,\ 2-\gamma;\ z).$$

Это и будет второе из решений (63).

Перейдем теперь к отысканию решений уравнения (62) в окрестности особой точки $z=1$. Введем для этого новую независимую переменную по формуле

$$z'=1-z.$$

Точка $z=0$ перейдет в $z'=1$, точка $z=1$ перейдет в $z'=0$, и, наконец, $z=\infty$ перейдет в $z'=\infty$. Таким образом, и по отношению к новой независимой переменной мы будем иметь также уравнение Гаусса, и функция $w$ определится следующим символом:

$$P\begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \alpha; & z' \\ \gamma-\alpha-\beta & 1-\gamma & \beta & \end{pmatrix},$$

откуда для параметров $(\alpha, \beta, \gamma)$ получим значения

$$\alpha_1=\alpha, \quad \beta_1=\beta, \quad \gamma_1=1+\alpha+\beta-\gamma.$$

В окрестности $z'=0$ мы будем иметь два решения:

$$F(\alpha,\ \beta,\ 1+\alpha+\beta-\gamma;\ z'),$$
$$z'^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\beta,\ \gamma-\alpha,\ 1+\gamma-\alpha-\beta;\ z'),$$

или, переходя к прежней независимой переменной, получим следующие два решения в окрестности $z=1$:

$$\left.\begin{aligned} w_3&=F(\alpha,\ \beta,\ 1+\alpha+\beta-\gamma;\ 1-z),\\ w_4&=(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\beta,\ \gamma-\alpha,\ 1+\gamma-\alpha-\beta;\ 1-z).\end{aligned}\right\}\qquad(64_1)$$

Для построения интегралов в окрестности $z=\infty$ совершим преобразование независимого переменного:

$$z'=\frac{1}{z},\quad z=\frac{1}{z'},$$

которое сохраняет точку $z=1$ и переставляет точки $z=0$ и $z=\infty$. В новой переменной функция $w$ определится следующим символом:

$$P\begin{pmatrix}0 & 1 & \infty & \\ \alpha & 0 & 0; & z'\\ \beta & \gamma-\alpha-\beta & 1-\gamma & \end{pmatrix}.$$

Совершая дальше замену функции

$$w=z'^{\alpha}u,\quad u=\frac{1}{z'^{\alpha}}w,\qquad(65_1)$$

мы для функции $u$ получим символ, соответствующий уравнению Гаусса:

$$P\begin{pmatrix}0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \alpha; & z\\ \beta-\alpha & \gamma-\alpha-\beta & 1+\alpha-\gamma & \end{pmatrix}.$$

Параметры для этого уравнения Гаусса будут

$$\alpha_1=\alpha,\quad \beta_1=1+\alpha-\gamma,\quad \gamma_1=1+\alpha-\beta,$$

и мы будем иметь для функции $u$ следующие два решения в окрестности $z'=0$:

$$u_1=F(\alpha,\ 1+\alpha-\gamma,\ 1+\alpha-\beta;\ z'),$$
$$u_2=z'^{\beta-\alpha}F(\beta,\ 1+\beta-\gamma,\ 1+\beta-\alpha;\ z'),$$

откуда, принимая во внимание $(65_1)$ и $z'=\frac{1}{z}$, получим два решения уравнения (62) в окрестности $z=\infty$:

$$\left.\begin{aligned} w_5&=\left(\frac{1}{z}\right)^{\alpha}F\left(\alpha,\ 1+\alpha-\gamma,\ 1+\alpha-\beta;\ \frac{1}{z}\right),\\ w_6&=\left(\frac{1}{z}\right)^{\beta}F\left(\beta,\ 1+\beta-\gamma,\ 1+\beta-\alpha;\ \frac{1}{z}\right).\end{aligned}\right\}\qquad(64_2)$$

Таким образом, все шесть решений, которые мы определили в окрестности каждой из особых точек, выражаются через гипергеометрический ряд. Заметим, что во всех предыдущих вычислениях мы считали, что разность корней определяющих уравнений отлична от целого числа. Принимая во внимание расположение особых точек, можем утверждать, что формулы $(64_1)$ имеют место при $|z-1|<1$, а формулы $(64_2)$ — при $|z|>1$. Заметим, что решение (64) имеет смысл и тогда, когда $\gamma$ есть целое положительное число.

В [I, 141] мы исследовали сходимость гипергеометрического ряда при $x=1$ и показали, что он сходится, если выполнено условие

$$\gamma-\alpha-\beta>0, \tag{66}$$

причем $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ считаются вещественными. При этом, согласно второй теореме Абеля [I, 149], мы имеем $F(\alpha, \beta, \gamma; x)\to F(\alpha, \beta, \gamma; 1)$ при $x\to 1-0$, и

$$F(\alpha, \beta, \gamma; 1)=1+\frac{\alpha\beta}{1!\,\gamma}+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\,\gamma(\gamma+1)}+\ldots$$

Докажем формулу

$$F(\alpha, \beta, \gamma; 1)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}. \tag{67}$$

Сравнивая коэффициенты при $x^n$, легко доказать соотношение

$$\gamma[\gamma-1-(2\gamma-\alpha-\beta-1)x]F(\alpha, \beta, \gamma; x)+(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)xF(\alpha, \beta, \gamma+1; x)=$$
$$=\gamma(\gamma-1)(1-x)F(\alpha, \beta, \gamma-1; x)\quad(|x|<1)$$

или

$$\gamma[\gamma-1-(2\gamma-\alpha-\beta-1)x]F(\alpha, \beta, \gamma; x)+(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)xF(\alpha, \beta, \gamma+1; x)=$$
$$=\gamma(\gamma-1)\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}(v_n-v_{n-1})x^n\right], \tag{68}$$

где $v_n$ — коэффициент при $x^n$ в разложении $F(\alpha, \beta, \gamma-1; x)$. Покажем, что при условии (66) $v_n\to 0$ при $n\to\infty$.

Мы имеем [I, 141]

$$\frac{|v_n|}{|v_{n+1}|}=1+\frac{\gamma-\alpha-\beta}{n}+\frac{\omega_n}{n^2},$$

где $\omega_n$ — ограничена по абсолютной величине при $n\to\infty$. Пусть $p$ — такое целое положительное число, что $p(\gamma-\alpha-\beta)>1$. Мы можем написать

$$\frac{|v_n|^p}{|v_{n+1}|^p}=1+\frac{p(\gamma-\alpha-\beta)}{n}+\frac{\omega_n'}{n^2},$$

где $\omega_n'$ ограничена по абсолютной величине. Из этого равенства и неравенства $p(\gamma-\alpha-\beta)>1$ следует, что ряд, составленный из $|v_n|^p$, сходится [I, 141], и, следовательно, $v_n\to 0$ при $n\to\infty$. Устремляя в формуле (68) $x$ к единице и пользуясь второй теоремой Абеля, получаем

$$\gamma(\alpha+\beta-\gamma)F(\alpha, \beta, \gamma; 1)+(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)F(\alpha, \beta, \gamma+1; 1)=0,$$

т. е.

$$F(\alpha, \beta, \gamma; 1)=\frac{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma-\alpha-\beta)}F(\alpha, \beta, \gamma+1; 1).$$

Пользуясь несколько раз этим соотношением, можем написать

$$F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ 1)=\left[\prod_{k=0}^{m-1}\frac{(\gamma-\alpha-k)\,(\gamma-\beta+k)}{(\gamma+k)\,(\gamma-\alpha-\beta+k)}\right]F(\alpha,\ \beta,\ \gamma+m;\ 1). \qquad (69)$$

Произведение, стоящее в квадратных скобках при $m\to\infty$, имеет предел [73]

$$\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)}.$$

Покажем теперь, что $F(\alpha,\ \beta,\ \gamma+m;\ 1)\to 1$ при $m\to\infty$. Обозначая через $u_n(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ коэффициент при $x^n$ в разложении $F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ x)$, можем написать

$$|F(\alpha,\ \beta,\ \gamma+m;\ 1)-1|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(\alpha,\ \beta,\ \gamma+m)|.$$

Заменяя в выражении $u_n(\alpha,\ \beta,\ \gamma+m)$ в числителе $\alpha$ и $\beta$ на $|\alpha|$ и $|\beta|$ и в знаменателе сумму $\gamma+m$ разностью $m-|\gamma|$, причем считается, что $m>|\gamma|$, получим

$$|F(\alpha,\ \beta,\ \gamma+m;\ 1)-1|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}u_n(|\alpha|,\ |\beta|,\ m-|\gamma|),$$

причем справа стоит ряд с положительными членами. Вынося за скобку $\frac{|\alpha|\,|\beta|}{m-|\gamma|}$ и заменяя в знаменателях $m!$ на $(m-1)!$, будем иметь

$$|F(\alpha,\ \beta,\ \gamma+m;\ 1)-1|<\frac{|\alpha|\,|\beta|}{m-|\gamma|}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}u_n(|\alpha|+1,\ |\beta|+1,\ m-|\gamma|+1).$$

При достаточно больших $m$ аргументы $\alpha_1=|\alpha|+1$, $\beta_1=|\beta|+1$ и $\gamma_1=m-|\gamma|+1$ удовлетворяют условию (66), и ряд, стоящий в правой части последнего неравенства, сходится, причем его члены, а потому и вся сумма, убывают при возрастании $m$. Первый множитель $\frac{|\alpha|\,|\beta|}{m-|\gamma|}\to 0$ при $m\to\infty$, и, следовательно, $F(\alpha,\ \beta,\ \gamma+m;\ 1)\to 1$ при $m\to\infty$. Окончательно формула (69) и приводит нас к (67).

Пользуясь формулой (67), можно выразить решение $w_1$ через линейно независимые решения $w_3$ и $w_4$. Все эти три решения имеют место в части плоскости, общей окружностям с центром $z=0$ и $z=1$ и радиусом единица. Мы должны иметь

$$F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ x)=C_1F(\alpha,\ \beta,\ 1+\alpha+\beta-\gamma;\ 1-x)+$$
$$+C_2(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\ \gamma-\beta,\ 1+\gamma-\alpha-\beta;\ 1-x).$$

Считая, что $\alpha$, $\beta$, и $\gamma$ подчиняются неравенствам: $1>\gamma>\alpha+\beta$, мы можем в этом равенстве положить $x=1$ и $x=0$, и таким образом определить $C_1$ и $C_2$. Пользуясь формулой (67), равенством (122) из [71] и легко доказываемой формулой

$$\sin\pi\alpha\sin\pi\beta=\sin\pi(\gamma-\alpha)\sin\pi(\gamma-\beta)-\sin\pi\gamma\sin\pi(\gamma-\alpha-\beta),$$

мы приходим к следующему равенству:

$$\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ x)=$$
$$=\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)F(\alpha,\ \beta,\ 1+\alpha+\beta-\gamma;\ 1-x)+$$
$$+\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\times$$
$$\times F(\gamma-\alpha,\ \gamma-\beta,\ 1+\gamma-\alpha-\beta;\ 1-x). \qquad (70)$$

Мы доказали эту формулу при условии $1>\gamma>\alpha+\beta$. Можно показать, что она имеет место во всех случаях, когда $(\gamma-\alpha-\beta)$ не есть целое число.

**105. Полиномы Лежандра.** Отметим теперь один важный частный случай гипергеометрического ряда. Предварительно установим некоторое общее преобразование для линейных уравнений второго порядка. Пусть имеется уравнение второго порядка вида

$$a(z)w''+b(z)w'+c(z)w=0. \qquad (71)$$

Найдем такой множитель $f(z)$, чтобы

$$a(z)f(z)w''+b(z)f(z)w'=\frac{d}{dz}[a(z)f(z)w'].$$

Мы должны иметь

$$b(z)f(z)=\frac{d}{dz}[a(z)f(z)],$$

откуда

$$a(z)f'(z)+[a'(z)-b(z)]f(z)=0$$

или

$$\frac{f'(z)}{f(z)}+\frac{a'(z)}{a(z)}-\frac{b(z)}{a(z)}=0,$$

т. е. мы можем взять

$$f(z)=\frac{1}{a(z)}e^{\int\frac{b(z)}{a(z)}dz}, \qquad (72)$$

и после этого будем иметь

$$p_1(z)=a(z)f(z)=e^{\int\frac{b(z)}{a(z)}dz};\quad q_1(z)=c(z)f(z)=\frac{c(z)}{a(z)}e^{\int\frac{b(z)}{a(z)}dz}, \qquad (73)$$

а уравнение (71) примет вид

$$\frac{d}{dz}[p_1(z)w']+q_1(z)w=0. \qquad (74)$$

Проделывая, например, это с уравнением Гаусса (62), приведем его к виду

$$\frac{d}{dz}[z^\gamma(z-1)^{\alpha+\beta+1-\gamma}w']+\alpha\beta z^{\gamma-1}(z-1)^{\alpha+\beta-\gamma}w=0. \qquad (75)$$

Перейдем теперь к установлению некоторой общей формулы для гипергеометрического ряда. Дифференцируя ряд (64) $n$ раз, получим

$$w_1^{(n)} = \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)\,\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)} \times \left[1 + \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{1!\,(\gamma+n)} z + \dots\right]$$

или

$$w_1^{(n)} = \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)\,\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)} \times F(\alpha+n, \beta+n, \gamma+n; z), \qquad (76)$$

т. е. производная порядка $n$ от гипергеометрического ряда (64) лишь постоянным множителем отличается от гипергеометрического ряда с параметрами $\alpha+n$, $\beta+n$ и $\gamma+n$. Таким образом, функция $w_1^{(n)}$ удовлетворяет уравнению (75), если в нем заменить $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ на $\alpha+n$, $\beta+n$ и $\gamma+n$, т. е.

$$\frac{d}{dz}\left[z^{\gamma+n}(z-1)^{\alpha+\beta+1-\gamma+n}\frac{dw_1^{(n)}}{dz}\right] + (\alpha+n)(\beta+n)\,z^{\gamma-1+n}(z-1)^{\alpha+\beta-\gamma+n}w_1^{(n)} = 0.$$

Дифференцируя это тождество $n$ раз, получим новое тождество

$$\frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}}\left[z^{\gamma+n}(z-1)^{\alpha+\beta+1-\gamma+n}\frac{dw_1^{(n)}}{dz}\right] = -(\alpha+n)(\beta+n)\frac{d^n}{dz^n}\left[z^{\gamma-1+n}(z-1)^{\alpha+\beta-\gamma+n}w_1^{(n)}\right].$$

Напишем это тождество для значений $n = 0, 1, 2, \dots, k-1$ и перемножим почленно полученные таким путем тождества. Левая и правая части полученного соотношения будут содержать одинаковые множители, и после сокращения мы придем к искомому тождеству

$$\frac{d^k}{dz^k}\left[z^{\gamma+k-1}(z-1)^{\alpha+\beta-\gamma+k}w_1^{(k)}\right] = (-1)^k\,\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+k-1) \times \beta(\beta+1)\dots(\beta+k-1)\,z^{\gamma-1}(z-1)^{\alpha+\beta-\gamma}w_1 \qquad (k=1, 2, 3, \dots). \qquad (77)$$

Напомним, что в этом тождестве буква $w_1$ обозначает гипергеометрический ряд (64).

Заметим, вообще, что гипергеометрический ряд обрывается и обращается в полином, если $\alpha$ или $\beta$, которые входят в гипергеометрический ряд симметрично, равно целому отрицательному числу. Рассмотрим сейчас один частный случай, когда это имеет место, а именно возьмем гипергеометрический ряд

$$F(k+1, -k, 1; z) \qquad (\alpha = k+1,\ \beta = -k,\ \gamma = 1), \qquad (78)$$

где $k$ есть некоторое целое положительное число или нуль. Функция (78) будет просто полиномом степени $k$, и коэффициент при старшем члене $z^k$ в этом полиноме будет

$$\frac{(k+1)(k+2)\dots 2k(-k)(-k+1)\dots(-1)}{k!\,1\cdot 2\dots k}=(-1)^k\frac{2k!}{(k!)^2}.$$

Полагая в формуле (77) $w_1=F(k+1,\ -k,\ 1;\ z)$, т. е. $\alpha=k+1$, $\beta=-k$ и $\gamma=1$, мы получим $w_1^{(k)}=(-1)^k\frac{2k!}{k!}$ и, произведя очевидные сокращения, будем иметь

$$F(k+1,\ -k,\ 1;\ z)=\frac{(-1)^k}{k!}\frac{d^k}{dz^k}[z^k(z-1)^k]. \tag{79}$$

Введем теперь вместо $z$ новую независимую переменную $x$ по формуле

$$z=\frac{1-x}{2}. \tag{80}$$

При этом точки $z=0$ и $z=1$ перейдут в $x=1$ и $x=-1$. Обозначим

$$P_k(x)=F\left(k+1,\ -k,\ 1;\ \frac{1-x}{2}\right). \tag{81}$$

Подставляя (80) в (79), получим следующее выражение для полинома $P_k(x)$:

$$P_k(x)=\frac{1}{k!\,2^k}\frac{d^k}{dx^k}[(x^2-1)^k]. \tag{82}$$

Эти полиномы $P_k(x)$ называются обычно *полиномами Лежандра*. В дальнейшем они нам встретятся при исследовании сферических функций.

Выясним сейчас некоторые основные свойства полиномов Лежандра. Функция (79) удовлетворяет уравнению, которое получается из уравнения (75) заменой

$$\alpha=k+1,\quad \beta=-k,\quad \gamma=1, \tag{83}$$

т. е. функция (79) удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dz}[z(z-1)w']-k(k+1)w=0.$$

Совершая здесь замену независимого переменного по формуле (80), мы увидим, что *полиномы Лежандра $P_k(x)$ являются решениями уравнения*

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_k(x)}{dx}\right]+k(k+1)P_k(x)=0. \tag{84}$$

Напишем более общее уравнение вида

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right]+\lambda y=0, \tag{85}$$

где $\lambda$ — некоторый параметр. Это уравнение в особых точках $x = \pm 1$ имеет оба корня определяющего уравнения равными нулю. Это нетрудно проверить по виду уравнения, это также непосредственно следует и из того, что при условии (83) имеем

$$\gamma - 1 = 0; \quad \gamma - \alpha - \beta = 0.$$

Таким образом, в точках $x = \pm 1$ будет один регулярный интеграл и один интеграл, содержащий логарифм, причем этот последний интеграл будет, например в точке $x = 1$, иметь вид

$$P_1(x-1) + P_2(x-1)\ln(x-1),$$

где $P_1(x-1)$ и $P_2(x-1)$ — ряды Тейлора со свободным членом. Из этого обстоятельства непосредственно вытекает, что интеграл, содержащий логарифм, будет во всяком случае обращаться в бесконечность в соответствующей точке. Заметим при этом, что в случае одинаковых корней определяющего уравнения коэффициент $\gamma_{-1}$, о котором мы упоминали в [**100**], не может быть равен нулю, т. е. в случае одинаковых корней определяющего уравнения будет обязательно существовать решение, содержащее логарифм.

Вернемся к уравнению (85) и возьмем его решение $y_1$, регулярное в точке $x = -1$. При аналитическом продолжении этого решения вдоль отрезка $-1 \leqslant x \leqslant 1$ придем к решению, которое будет, вообще говоря, логарифмическим в точке $x = 1$ и будет обращаться там в бесконечность. Но при исключительных значениях параметра $\lambda$, входящего в уравнение (85), интеграл, регулярный в точке $x = -1$, окажется регулярным и в точке $x = 1$, т. е. мы будем иметь решение уравнения (85), конечное на всем отрезке $(-1, 1)$, включая и его концы. Такими исключительными значениями будут значения

$$\lambda_k = k(k+1), \tag{86}$$

при которых уравнение (85) имеет решение в виде $P_k(x)$. Можно показать, на чем мы не останавливаемся, что *значения* (86) *исчерпывают все значения параметра* $\lambda$, *при которых уравнение* (85) *имеет решение, конечное на отрезке* $(-1, 1)$, *включая его концы.*

Выясним еще некоторые свойства полиномов Лежандра. Напишем уравнение для двух различных полиномов Лежандра:

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)P_m'(x)\right] + \lambda_m P_m(x) = 0,$$

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)P_n'(x)\right] + \lambda_n P_n(x) = 0 \qquad (n \neq m).$$

Умножая первое из этих уравнений на $P_n(x)$, второе — на $P_m(x)$, вычитая и интегрируя по промежутку $(-1, 1)$, получим

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x)\, dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left\{ P_m(x) \frac{d}{dx} [(1 - x^2) P_n'(x)] - P_n(x) \frac{d}{dx} [(1 - x^2) P_m'(x)] \right\} dx.$$

Интегрируя первое слагаемое справа по частям, получим

$$\int_{-1}^{1} P_m(x) \frac{d}{dx} [(1 - x^2) P_n'(x)]\, dx =$$

$$= (1 - x^2) P_m(x) P_n'(x) \Big|_{x=-1}^{x=1} - \int_{-1}^{1} (1 - x^2) P_m'(x) P_n'(x)\, dx$$

или

$$\int_{-1}^{1} P_m(x) \frac{d}{dx} [(1 - x^2) P_n'(x)]\, dx = - \int_{-1}^{1} (1 - x^2) P_m'(x) P_n'(x)\, dx.$$

Точно так же

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) \frac{d}{dx} [(1 - x^2) P_m'(x)]\, dx = - \int_{-1}^{1} (1 - x^2) P_m'(x) P_n'(x)\, dx.$$

Таким образом, получаем

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x)\, dx = 0$$

или

$$\int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x)\, dx = 0 \qquad (m \neq n), \tag{87}$$

т. е. *полиномы Лежандра обладают свойством ортогональности на промежутке* $(-1, 1)$. Если бы мы стали вычислять интеграл от квадрата полинома Лежандра

$$I_n = \int_{-1}^{1} P_n^2(x)\, dx, \tag{88}$$

то оказалось бы, что он отличен от единицы, т. е. полиномы Лежандра образуют ортогональную, но не нормированную систему функций.

Принимая во внимание (82), можем написать, пользуясь формулой Лейбница:

$$P_k(x)=\frac{1}{k!\,2^k}\left\{(x+1)^k\frac{d^k(x-1)^k}{dx^k}+\frac{k}{1}\frac{d(x+1)^k}{dx}\cdot\frac{d^{k-1}(x-1)^k}{dx^{k-1}}+\dots\right\}.$$

Имеем, очевидно,

$$\frac{d^k(x-1)^k}{dx^k}=k!\quad\text{и}\quad\left.\frac{d^{k-s}(x-1)^k}{dx^{k-s}}\right|_{x=1}=0\qquad(s=1,\ 2,\ \dots,\ k),$$

откуда непосредственно следуют равенства

$$P_k(1)=1. \tag{89}$$

Вычислим интеграл $I_n$. Пользуясь формулой (82), можно написать

$$I_n=\frac{1}{(n!)^2 2^{2n}}\int_{-1}^{1}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\cdot\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\,dx.$$

Интегрируя по частям, получим

$$I_n=\frac{1}{(n!)^2 2^{2n}}\left[\left.\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}\cdot\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\right|_{x=-1}^{x=1}-\right.$$
$$\left.-\int_{-1}^{1}\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}\cdot\frac{d^{n+1}(x^2-1)^n}{dx^{n+1}}\,dx\right].$$

Полином $(x^2-1)^n$ имеет корни $x=\pm 1$ кратности $n$. Дифференцируя его $(n-1)$ раз, получим полином, который также имеет корни $x=\pm 1$ (первой кратности). Следовательно, внеинтегральный член в предыдущей формуле обращается в нуль. Продолжая и дальше интегрирование по частям, мы будем иметь каждый раз внеинтегральный член, равный нулю, и придем к формуле

$$\int_{-1}^{1}P_n^2(x)\,dx=\frac{(-1)^n}{(n!)^2 2^{2n}}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\frac{d^{2n}(x^2-1)^n}{dx^{2n}}\,dx.$$

Мы имеем, далее,

$$\frac{d^{2n}(x^2-1)^n}{dx^{2n}}=\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(x^{2n}+\dots)=1\cdot 2\dots 2n=(2n)!$$

и, следовательно,

$$\int_{-1}^{1}P_n^2(x)\,dx=(-1)^n\frac{(n+1)(n+2)\dots 2n}{n!\,2^{2n}}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\,dx.$$

Вводя $x=\cos\varphi$, получим

$$\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\,dx=(-1)^n\int_0^{\pi}\sin^{2n+1}\varphi\,d\varphi=(-1)^n 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}\varphi\,d\varphi,$$

т. е. [I, 100]

$$\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\,dx=(-1)^n 2\,\frac{2\cdot 4\ldots 2n}{3\cdot 5\ldots(2n+1)},$$

и предыдущая формула окончательно дает

$$\int_{-1}^{1}P_n^2(x)\,dx=\frac{2}{2n+1}. \tag{90}$$

Пользуясь выражением (82) и применяя теорему Ролля, нетрудно показать, что все корни полинома $P_n(x)$ различны и находятся внутри промежутка $-1\leqslant x\leqslant 1$. Действительно, полином $\frac{d(x^2-1)^n}{dx}$ степени $(2n-1)$ имеет корни $x=\pm 1$ кратности $(n-1)$ и по теореме Ролля имеет еще один корень $x=\alpha$ внутри промежутка $(-1, 1)$. Этим и исчерпываются все его корни. Затем полином $\frac{d^2(x^2-1)^n}{dx^2}$ степени $(2n-2)$ имеет корни $x=\pm 1$ кратности $(n-2)$ и, кроме того, по теореме Ролля имеет два вещественных корня: один внутри промежутка $(-1, \alpha)$ и другой — внутри промежутка $(\alpha, 1)$. Продолжая так и дальше, мы увидим, что $P_n(x)$ *имеет n различных корней внутри промежутка* $(-1, 1)$.

**106. Полиномы Якоби.** Полиномы Лежандра являются лишь частными случаями тех полиномов, которые получаются, когда гипергеометрический ряд обрывается и превращается в полином. Мы исследуем теперь общий случай. Введем следующее обозначение:

$$\gamma-1=p,\quad \alpha+\beta-\gamma=q, \tag{91}$$

и будем считать, что $p$ и $q$ суть фиксированные числа, большие, чем $(-1)$, причем мы всегда будем предполагать, что параметры $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ суть числа вещественные. Для того чтобы гипергеометрический ряд оборвался и превратился в полином степени $k$, мы должны принять $\alpha$ или $\beta$ равным $(-k)$. Не ограничивая общности, мы можем считать, например, $\beta=-k$, и определить затем из (91) значение $\alpha$ и $\gamma$. Обозначим полученный таким образом полином следующим образом:

$$Q_k^{(p,\,q)}(z)=C_k F(p+q+k+1,\quad -k,\quad p+1;\ z), \tag{92}$$

где $C_k$ — произвольная постоянная.

Применяя к написанному гипергеометрическому ряду формулу (64), убедимся в том, что коэффициент при $z^k$ в полиноме (92) равен

$$(-1)^k \frac{(p+q+k+1)(p+q+k+2)\dots(p+q+2k)}{(p+1)(p+2)\dots(p+k)} C_k.$$

Применяя к полиному (92) формулу (77), будем иметь

$$k!(p+q+k+1)(p+q+k+2)\dots$$
$$\dots(p+q+2k)\,z^p(z-1)^q Q_k^{(p,q)}(z) =$$
$$= (-1)^k \frac{(p+q+k+1)(p+q+k+2)\dots(p+q+2k)\,k!}{(p+1)(p+2)\dots(p+k)} \times$$
$$\times C_k \frac{d^k}{dz^k}[z^{p+k}(z-1)^{q+k}].$$

Определим постоянную $C_k$ формулой

$$C_k = \frac{(p+1)(p+2)\dots(p+k)}{k!}.$$

При этом для построенного полинома получится формула

$$z^p(z-1)^q Q_k^{(p,q)}(z) = \frac{(-1)^k}{k!}\frac{d^k}{dz^k}[z^{p+k}(z-1)^{q+k}].$$

Если вместо $z$ ввести $x$ по формуле (80), то получатся полиномы от $x$, которые называются *полиномами Якоби*:

$$(1-x)^p(1+x)^q P_k^{(p,q)}(x) = \frac{(-1)^k}{k!\,2^k}\frac{d^k}{dx^k}[(1-x)^{p+k}(1+x)^{q+k}]. \quad (93)$$

При $p=q=0$ эти полиномы совпадают с полиномами Лежандра. При $k=0$ $P_0^{(p,q)}(x)=1$.

Из определения $C_k$ непосредственно следует, что коэффициент при $z^k$ в полиноме (92) равен

$$(-1)^k \frac{(p+q+k+1)(p+q+k+2)\dots(p+q+2k)}{k!},$$

а в полиноме $P_k^{(p,q)}(x)$ коэффициент при $x^k$ равен

$$\alpha_k = \frac{(p+q+k+1)(p+q+k+2)\dots(p+q+2k)}{k!\,2^k}.$$

В рассматриваемом случае мы имеем

$$\alpha = p+q+k+1, \quad \beta = -k, \quad \gamma = p+1,$$

и функция (92) является решением уравнения

$$\frac{d}{dz}[z^{p+1}(z-1)^{q+1}w'] - k(p+q+k+1)z^p(z-1)^q w = 0.$$

Совершая замену независимой переменной (80), получим для полиномов Якоби уравнение вида

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x)^{p+1}(1+x)^{q+1}\frac{dP_k^{(p,q)}(x)}{dx}\right] +$$
$$+ k(p+q+k+1)(1-x)^p(1+x)^q P_k^{(p,q)}(x) = 0. \quad (94)$$

В данном случае полиномы Якоби (93) при $p$ и $q \geqslant 0$ являются решением следующей предельной задачи: найти такие значения параметра $\lambda$, при которых дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x)^{p+1}(1+x)^{q+1}\frac{dy}{dx}\right]+\lambda(1-x)^p(1+x)^q y=0 \qquad (95)$$

имеет решение, конечное на отрезке $(-1, 1)$, включая его концы. Эти значения параметра будут

$$\lambda_k = k(p+q+k+1), \qquad (96)$$

а соответствующие решения и суть полиномы Якоби.

Пользуясь уравнением (94) для полиномов Якоби, нетрудно показать, как и в случае полиномов Лежандра, что имеют место следующие равенства

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^p(1+x)^q P_m^{(p,q)}(x)\,P_n^{(p,q)}(x)\,dx=0 \qquad (m\neq n). \qquad (97)$$

Свойства (97) выражают следующим образом: *полиномы Якоби ортогональны на промежутке* $(-1, 1)$ *с весом*

$$r(x)=(1-x)^p(1+x)^q. \qquad (98)$$

Из формулы (93) можно, как и для полиномов Лежандра, заключить, что

$$P_k^{(p,q)}(1)=\frac{(p+k)(p+k-1)\ldots(p+1)}{k!}. \qquad (99)$$

Займемся теперь вычислением интеграла

$$I_k=\int_{-1}^{1}(1-x)^p(1+x)^q\left[P_k^{(p,q)}(x)\right]^2 dx.$$

Пользуясь формулой (93), можем написать

$$I_k=\frac{(-1)^k}{k!\,2^k}\int_{-1}^{1}P_k^{(p,q)}(x)\frac{d^k}{dx^k}\left[(1-x)^{p+k}(1+x)^{q+k}\right]dx.$$

Производя, как и в [**105**], интегрирование по частям, получим

$$I_k=\frac{1}{k!\,2^k}\int_{-1}^{1}(1-x)^{p+k}(1+x)^{q+k}\frac{d^k P_k^{(p,q)}(x)}{dx^k}\,dx,$$

причем внеинтегральные члены обратятся в нуль в силу $p>-1$ и $q>-1$. Обозначая, как и выше, через $\alpha_k$ коэффициент при $x^k$ в полиноме $P_k^{(p,q)}(x)$, получим

$$I_k=\frac{\alpha_k}{2^k}\int_{-1}^{1}(1-x)^{p+k}(1+x)^{q+k}\,dx.$$

Вводим новую переменную интегрирования $t=\frac{1-x}{2}$:

$$I_k=\alpha_k 2^{p+q+k+1}\int_0^1 t^{p+k}(1-t)^{q+k}\,dt,$$

т. е. [72]

$$I_k=\alpha_k 2^{p+q+k+1}B(p+k+1,\ q+k+1)=$$
$$=\alpha_k 2^{p+q+k+1}\frac{\Gamma(p+k+1)\,\Gamma(q+k+1)}{\Gamma(p+q+2k+2)},$$

или, подставляя указанное выше выражение для $\alpha_k$ и пользуясь формулой (120) из [71],

$$I_k=\frac{2^{p+q+1}}{p+q+2k+1}\cdot\frac{\Gamma(p+k+1)\,\Gamma(q+k+1)}{k!\,\Gamma(p+q+k+1)},$$

т. е. имеет место формула

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^p(1+x)^q\left[P_n^{(p,\,q)}(x)\right]^2dx=$$
$$=\frac{2^{p+q+1}}{2n+p+q+1}\cdot\frac{\Gamma(n+p+1)\,\Gamma(n+q+1)}{n!\,\Gamma(n+p+q+1)}\qquad(n=1,\ 2,\ \ldots).\qquad(100)$$

При $n=0$ последнее выражение в силу $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ имеет вид

$$2^{p+q+1}\frac{\Gamma(p+1)\,\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)}.$$

Отметим еще один частный случай, а именно тот, когда $p=q=-\frac{1}{2}$. Введем для этих полиномов особое обозначение

$$T_k(x)=C_kP_k^{\left(-\frac{1}{2},\,-\frac{1}{2}\right)}(x),\qquad(101)$$

где $C_k$ — некоторые постоянные.

В силу (93) они определяются следующим соотношением:

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}T_k(x)=\frac{(-1)^kC_k}{k!\,2^k}\frac{d^k}{dx^k}\left[(1-x^2)^{-\frac{1}{2}+k}\right].\qquad(102)$$

Выведем теперь другое выражение для этих полиномов, для чего воспользуемся тем дифференциальным уравнением, которому они должны удовлетворять. Это уравнение получится из уравнения (94), если там положить $p=q=-\frac{1}{2}$. Будем иметь для $T_k(x)$ уравнение

$$\sqrt{1-x^2}\,\frac{d}{dx}\left[\sqrt{1-x^2}\,\frac{dT_k(x)}{dx}\right]+k^2T_k(x)=0.\qquad(103)$$

Корни определяющего уравнения в особой точке $x=1$ будут 0 и $\frac{1}{2}$. Первому из них и соответствует решение в виде полинома, а второе решение наверно отлично от полинома. Чтобы найти полином, удовлетворяющий уравнению (103) в удобной форме, введем вместо $x$ новую независимую переменную $\varphi$ по формуле

$$x=\cos\varphi. \tag{104}$$

Заменяя дифференцирование по $x$ дифференцированием по $\varphi$, будем иметь по правилу дифференцирования сложных функций

$$\sqrt{1-x^2}\,\frac{d}{dx}=-\frac{d}{d\varphi}.$$

Подставляя это в уравнение (103), получим

$$\frac{d^2T_k(\cos\varphi)}{d\varphi^2}+k^2T_k(\cos\varphi)=0.$$

Решения последнего уравнения суть

$$\cos k\varphi \quad \text{и} \quad \sin k\varphi,$$

или для уравнения (103) получаем решения вида

$$\cos(k\arccos x) \quad \text{и} \quad \sin(k\arccos x).$$

Пользуясь известной формулой [I, 174]

$$\cos k\varphi=\cos^k\varphi-\binom{k}{2}\cos^{k-2}\varphi\sin^2\varphi+\ldots,$$

убеждаемся, что первое из этих решений есть полином от $x$, и, следовательно, с точностью до произвольного множителя решение уравнения, представляющееся полиномом, будет

$$T_k(x)=\cos(k\arccos x), \tag{105}$$

и этот полином называется *полиномом Чебышева*. При $\varphi=0$ мы имеем $x=1$ и, следовательно, $T_k(1)=1$, с другой стороны, по формуле (99)

$$P_k^{\left(-\frac{1}{2},\,-\frac{1}{2}\right)}(1)=\frac{1\cdot3\ldots(2k-1)}{2\cdot4\ldots2k},$$

и отсюда нетрудно определить постоянный множитель в формуле (101):

$$T_k(x)=\frac{2\cdot4\ldots2k}{1\cdot3\ldots(2k-1)}P_k^{\left(-\frac{1}{2},\,-\frac{1}{2}\right)}(x). \tag{106}$$

**107. Конформное преобразование и уравнение Гаусса.** Переходим теперь к выяснению связи уравнения Гаусса с некоторой задачей конформного преобразования, причем, как и в предыдущем параграфе, мы считаем параметры $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ вещественными. Докажем прежде всего, что решение уравнения Гаусса (62) не может иметь кратных корней на плоскости комплексного переменного вне

особых точек. Действительно, если в некоторой точке $z=z_0$ имеется корень выше первой кратности, т. е. если

$$w(z_0)=w'(z_0)=0,$$

то из самого уравнения (62) вытекает, что $w''(z_0)=0$. Дифференцируя уравнение (62) и полагая затем $z=z_0$, мы получим $w'''(z_0)=0$ и т. д. Но аналитическая функция, у которой все производные в некоторой точке равны нулю, как известно, равна нулю тождественно, а мы понимали под $w$, очевидно, решение, отличное от нуля. Приведенное доказательство годится и для любого линейного уравнения второго порядка с аналитическими коэффициентами. Полученный результат вытекает также непосредственно из теоремы существования и единственности [**97**].

Рассмотрим теперь частное двух интегралов уравнения Гаусса

$$\eta(z)=\frac{w_2(z)}{w_1(z)}. \tag{107}$$

Эта функция при аналитическом продолжении может иметь особыми точками лишь точки $z=0$, 1 и $\infty$, а также те значения $z$, которые являются корнями решения $w_1(z)$. Эти значения $z$ будут простыми полюсами функции (107). Если $w_1(z_0)=0$, то можно утверждать, что $w_2(z_0)\neq 0$. Действительно, если бы мы имели

$$w_2(z_0)=0,$$

то наши два решения определялись бы начальными условиями вида

$$\left.\begin{aligned} w_1(z_0)&=0, \quad w_1'(z_0)=\alpha,\\ w_2(z_0)&=0, \quad w_2'(z_0)=\beta \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha \text{ и } \beta\neq 0),$$

и мы имели бы, согласно теореме существования и единственности,

$$w_2(z)=\frac{\beta}{\alpha}w_1(z),$$

т. е. решения $w_1(z)$ и $w_2(z)$ были бы линейно зависимыми, а мы считаем, что в формуле (107) числитель и знаменатель суть линейно независимые решения.

Рассмотрим верхнюю полуплоскость комплексного переменного $z$. В этой односвязной области $B$ аналитические функции $w_1(z)$ и $w_2(z)$ не имеют особых точек при аналитическом продолжении и, следовательно, являются однозначными регулярными функциями $z$. Функция (107) также будет однозначной в верхней полуплоскости и может там иметь особыми точками лишь простые полюсы. Покажем теперь, что производная от функции (107) не может обращаться в нуль вне особых точек. Как известно [**II, 24**], мы имеем для этой производной следующее выражение:

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{w_2(z)}{w_1(z)}\right)=\frac{C}{w_1^2(z)}e^{-\int p(z)\,dz}, \tag{108}$$

где $C$ — некоторая постоянная и $p(z)$ — коэффициент при $w'$ в уравнении (62).

Из формулы (108) и вытекает непосредственно наше утверждение. Принимая во внимание, что в простом полюсе конформность не нарушается, мы можем утверждать, что функция (107) дает некоторое конформное преобразование области $B$ в некоторую новую область $B_1$, не содержащую внутри себя точек разветвления. Определим теперь контур новой области $B_1$.

При приближении точки $z$ из верхней полуплоскости к некоторой точке $z_0$ вещественной оси, отличной от особых точек 0, 1 и $\infty$, функция (107) стремится к определенному пределу и — больше того — даже остается регулярной и в самой точке $z_0$, и она будет регулярной внутри каждого из трех отрезков

$$(-\infty,\ 0),\quad (0,\ 1),\quad (1,\ \infty) \tag{109}$$

вещественной оси. Покажем теперь, что функция (107) стремится к определенному пределу и при стремлении $z$ к одной из особых точек. Для примера рассмотрим лишь точку $z=0$.

Предварительно выясним одно общее обстоятельство, которое будет играть роль в дальнейшем. Положим, что вместо $w_1(z)$ и $w_2(z)$ мы взяли какие-нибудь два других независимых решения уравнения $w_1^*(z)$ и $w_2^*(z)$. Они выражаются через прежние решения линейным образом:

$$w_1^*(z)=a_{11}w_1(z)+a_{12}w_2(z),$$
$$w_2^*(z)=a_{21}w_1(z)+a_{22}w_2(z),$$

где

$$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0.$$

Составим новую функцию $\eta^*(z)$, пользуясь новыми решениями

$$\eta^*(z)=\frac{w_2^*(z)}{w_1^*(z)}=\frac{a_{21}w_1(z)+a_{22}w_2(z)}{a_{11}w_1(z)+a_{12}w_2(z)}$$

или

$$\eta^*(z)=\frac{a_{21}+a_{22}\eta(z)}{a_{11}+a_{12}\eta(z)},$$

т. е. при различном выборе независимых решений в формуле (107) соответствующие функции $\eta(z)$ будут связаны друг с другом просто дробно-линейным преобразованием с определителем, отличным от нуля.

Перейдем теперь к исследованию функции (107) в окрестности точки $z=0$. Выберем независимые решения следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} w_1(z)&=F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ z),\\ w_2(z)&=z^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma,\ \beta+1-\gamma,\ 2-\gamma;\ z),\end{aligned}\right\} \tag{110}$$

при этом

$$\eta(z)=z^{1-\gamma}\frac{F(\alpha+1-\gamma,\ \beta+1-\gamma,\ 2-\gamma;\ z)}{F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ z)}. \tag{111}$$

Последнюю формулу надо понимать следующим образом: в окрестности $z=0$ функция $\eta(z)$ определяется по формуле (111), а дальше на всей полуплоскости $B$ она определяется вполне однозначно при помощи аналитического продолжения. Из формулы (111) непосредственно следует, что, например,

$$\eta(z)\to 0, \quad \text{если} \quad z\to 0 \quad \text{и} \quad \gamma<1.$$

При всяком другом выборе независимых решений новое $\eta(z)$ будет выражаться через (111) дробно-линейным образом и, следовательно, тоже будет иметь определенный предел при $z\to 0$.

Покажем теперь, что функция (107) преобразует отрезки (109) вещественной оси в дуги окружности. Действительно, рассмотрим, например, отрезок (0, 1) и возьмем внутри него некоторую точку $z_0$. Определим решения $w_1(z)$ и $w_2(z)$ по их начальным условиям в точке $z_0$, причем возьмем эти условия так, чтобы $w(z_0)$ и $w'(z_0)$ выражались вещественными числами. Принимая во внимание, что коэффициенты уравнения Гаусса также вещественны, получим для $w_1(z)$ и $w_2(z)$ в окрестности точки $z_0$ ряды Тэйлора с вещественными коэффициентами. Аналитическое продолжение этих решений вдоль отрезка (0, 1) также будет приводить, очевидно, к вещественным рядам Тэйлора, т. е., иными словами, при таком выборе решений функция $\eta(z)$ будет принимать вещественные значения на отрезке (0, 1), т. е. будет преобразовывать этот отрезок также в некоторый отрезок вещественной оси. При всяком другом выборе решений новая функция $\eta(z)$ получится из прежней дробно-линейным преобразованием, а такое преобразование переводит отрезок вещественной оси в дугу окружности. Таким образом, действительно, функция (107) преобразует каждый из отрезков (109) в некоторую дугу окружности (или отрезок прямой).

Возьмем опять тот случай, когда основные решения $w_1(z)$ и $w_2(z)$ вещественны на отрезке (0, 1). Применяя формулу (108) к этому отрезку, мы видим, что производная от функции $\eta(z)$ на этом отрезке сохраняет неизменный знак, т. е. функция $\eta(z)$ есть монотонная функция переменного $z$ на упомянутом отрезке. Иначе говоря, если точка $z$ пробегает отрезок (0, 1) в определенном направлении, то точка $\eta(z)$ двигается по соответствующему отрезку все время в одном и том же направлении. Заметим при этом, что точка $\eta(z)$ может проходить и через бесконечность так, что отрезок, описываемый точкой $\eta(z)$, может быть и бесконечным. Кроме того, в некоторых случаях этот отрезок может и налегать сам на себя. В общем случае, при любом выборе независимых решений в формуле (107), при движении точки $z$ вдоль отрезка (0, 1) в определенном направлении точка $\eta(z)$ будет двигаться по дуге окружности все время в одном и том же направлении и отрезку (0, 1) может в некоторых

случаях соответствовать не часть окружности, а полная окружность, налегающая сама на себя.

Из всех предыдущих рассуждений вытекает следующий результат: *функция* (107), т. е. *частное двух независимых решений уравнения Гаусса, преобразует верхнюю полуплоскость конформно в область, ограниченную тремя дугами окружностей, или, иначе говоря, в круговой треугольник, не имеющий внутри точек разветвления.* Определим теперь углы этого кругового треугольника. Возьмем ту вершину $A$ треугольника, которая соответствует точке $z=0$. Выберем основные решения по формуле (110), причем будем считать $\gamma<1$. Обратимся к формуле (111). В окрестности точки $z=0$ мы будем иметь $\eta(z)>0$ при $z>0$, считая $\arg z=0$. Обойдя точку $z=0$ по верхней полуплоскости, мы получим $\arg z=\pi$ и, следовательно, $\arg z^{1-\gamma}=\pi(1-\gamma)$, и дробь формулы (111) при $z$, близком к нулю, будет вещественна и близка к единице. Таким образом, считая $\gamma<1$, получим на плоскости $\eta(z)$ две прямые, одна из которых идет из начала в направлении положительной части вещественной оси, а другая наклонена к этому направлению под углом $\pi(1-\gamma)$. Если $\gamma>1$, то мы могли бы взять вместо отношения (111) обратное отношение. Таким образом, при сделанном выборе основных решений мы получаем в нашем круговом треугольнике угол $\pi|1-\gamma|$ при вершине, соответствующей точке $z=0$. При всяком другом выборе основных решений будем иметь новый треугольник, который получается из прежнего дробно-линейным преобразованием, а такое преобразование, как известно, не меняет углов, и, следовательно, в общем случае мы получим при вершине $A$ угол, по величине равный $\pi|1-\gamma|$. Точно так же в остальных двух вершинах кругового треугольника, соответствующих точкам $z=1$ и $z=\infty$, будем иметь углы, по величине равные $\pi|\gamma-\alpha-\beta|$ и $\pi|\beta-\alpha|$. Направление отсчета углов, как всегда в конформном преобразовании, определяется из того факта, что при движении точки по вещественной оси в положительном направлении точка двигается по контуру кругового треугольника так, что этот треугольник расположен слева от двигающегося наблюдателя.

Предыдущий результат можно формулировать следующим образом: *величина угла треугольника плоскости* $\eta(z)$ *равна произведению* $\pi$ *на абсолютное значение разности корней определяющего уравнения в соответствующей особой точке уравнения* (62). Заметим, не приводя доказательства, что это свойство имеет место и тогда, когда эта разность равна нулю (дуги окружностей касаются) или целому числу.

Можно показать, что и, наоборот, всякий круговой треугольник, хотя бы и многолистный, но не имеющий внутри и на сторонах точек разветвления, может быть получен из верхней полуплоскости при помощи конформного преобразования, совершаемого частным

двух интегралов уравнения Гаусса при соответствующем подборе параметров $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$. В частности, можно брать обычный прямолинейный треугольник, который является частным случаем треугольника, ограниченного дугами окружности. В этом частном случае мы можем выразить функцию, совершающую конформное преобразование, интегралом Кристоффеля [38].

**108. Преобразование Лапласа.** Изложим теперь новый метод интегрирования линейных дифференциальных уравнений второго порядка, а именно метод интегрирования при помощи контурных интегралов. Далее мы используем этот метод при исследовании некоторых специальных функций, а также при изучении поведения решений вблизи иррегулярной особой точки уравнения (1). Мы подробно изложим упомянутый метод для уравнений вида

$$zw'' + (a_0 z + a_1) w' + (b_0 z + b_1) w = 0. \tag{112}$$

Это уравнение имеет, вообще говоря, регулярную особую точку $z = 0$ и иррегулярную $z = \infty$. Будем искать его решение в виде

$$w(z) = \int_l v(z') e^{zz'} dz', \tag{113}$$

где $v(z')$ — искомая функция и $l$ — искомый, не зависящий от $z$ путь интегрирования. Интегральное преобразование (113) называется обычно *преобразованием Лапласа.*

Дифференцируя (113) по $z$, имеем

$$w'(z) = \int_l v(z') z' e^{zz'} dz', \quad w''(z) = \int_l v(z') z'^2 e^{zz'} dz'. \tag{114}$$

Умножая на $z$ и интегрируя по частям, получим

$$zw(z) = \int_l v(z') de^{zz'} = [v(z') e^{zz'}]_l - \int_l \frac{dv(z')}{dz'} e^{zz'} dz',$$

где символ

$$[\varphi(z')]_l$$

обозначает приращение функции $\varphi(z')$, когда $z'$ описывает контур $l$. Точно так же будем иметь

$$zw'(z) = [v(z') z' e^{zz'}]_l - \int_l \frac{d[v(z') z']}{dz'} e^{zz'} dz'$$

и

$$zw''(z) = [v(z') z'^2 e^{zz'}]_l - \int_l \frac{d[v(z') z'^2]}{dz'} e^{zz'} dz'.$$

Поставим прежде всего условие, чтобы

$$[v(z')(z'^2 + a_0 z' + b_0) e^{z'}]_l = 0. \tag{115}$$

При подстановке предыдущих выражений в левую часть уравнения (112) внеинтегральные члены будут равны нулю в силу (115), и мы приведем это уравнение к виду

$$\int_l \left\{\frac{d[v(z')\,z'^2]}{dz'} + a_0\frac{d[v(z')\,z']}{dz'} + \right.$$

$$\left. + b_0\frac{dv(z')}{dz'} - a_1 z' v(z') - b_1 v(z')\right\} e^{zz'}\,dz' = 0.$$

Оно будет наверно удовлетворено, если определить функцию $v(z')$ из уравнения

$$\frac{d[v(z')\,z'^2]}{dz'} + a_0\frac{d[v(z')\,z']}{dz'} + b_0\frac{dv(z')}{dz'} - a_1 z' v(z') - b_1 v(z') = 0. \qquad (116)$$

Рассмотрим квадратное уравнение

$$z'^2 + a_0 z' + b_0 = 0 \qquad (117)$$

и допустим, что оно имеет различные корни $\alpha_1$ и $\alpha_2$. Уравнение (116) дает нам

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dz'} = \frac{(a_1 - 2)\,z' + (b_1 - a_0)}{(z' - \alpha_1)(z' - \alpha_2)}$$

или, разлагая дробь на простейшие,

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dz'} = \frac{p-1}{z'-\alpha_1} + \frac{q-1}{z'-\alpha_2}, \qquad (118)$$

где

$$p = \frac{(a_1 - 2)\,\alpha_1 + (b_1 - a_0) + (\alpha_1 - \alpha_2)}{\alpha_1 - \alpha_2},$$
$$q = \frac{(a_1 - 2)\,\alpha_2 + (b_1 - a_0) + (\alpha_2 - \alpha_1)}{\alpha_2 - \alpha_1}. \qquad (119)$$

С другой стороны, из квадратного уравнения (117) получаем

$$\alpha_1 + \alpha_2 = -a_0,$$

и предыдущие выражения $p$ и $q$ преобразуются к виду

$$p = \frac{a_1\alpha_1 + b_1}{2\alpha_1 + a_0}, \quad q = \frac{a_1\alpha_2 + b_1}{2\alpha_2 + a_0}. \qquad (120)$$

Интегрируя уравнение (118), получим

$$v(z') = C(z' - \alpha_1)^{p-1}(z' - \alpha_2)^{q-1}, \qquad (121)$$

и, следовательно, *решение уравнения* (112) *можно получить по формуле*

$$w(z) = C\int_l (z' - \alpha_1)^{p-1}(z' - \alpha_2)^{q-1} e^{zz'}\,dz', \qquad (122)$$

*где $C$ — произвольная постоянная, а контур $l$ в силу* (115) *и* (117) *должен удовлетворять условию*

$$[(z'-\alpha_1)^p (z'-\alpha_2)^q e^{zz'}]_l = 0. \qquad (123)$$

Отметим, что $l$ надо выбирать так, чтобы интеграл, входящий в формулу (122), не был тождественно по $z$ равен нулю.

**109. Различный выбор решений.** Укажем некоторые приемы выбора $l$. Определяющее уравнение в регулярной особой точке $z=0$

$$\rho(\rho-1)+a_1\rho=0$$

имеет корни $\rho_1=0$ и $\rho_2=1-a_1$. Если $1-a_1$ не целое положительное, то одно из решений уравнения будет целой функцией, ряд Маклорена которой имеет свободный член, отличный от нуля. Укажем выбор пути $l$, при котором формула (122) дает такое решение.

Подинтегральная функция в выражении (122) имеет особые точки $z'=\alpha_1$ и $z'=\alpha_2$, которые будут точками разветвления, так как $p$ и $q$ будут, вообще говоря, числа не целые. При обходе вокруг точки $z'=\alpha_1$ в положительном направлении, упомянутая подинтегральная функция получит множитель $e^{(p-1)2\pi i}=e^{p2\pi i}$, а при обходе точки $z'=\alpha_2$ она получит множитель $e^{(q-1)2\pi i}=e^{q2\pi i}$. В дальнейшем мы будем считать, что $p$ и $q$ суть числа не целые.

Возьмем некоторую точку $z_0$ плоскости, лежащую на конечном расстоянии и отличную от $\alpha_1$ и $\alpha_2$, и обозначим через $l_1$ и $l_2$ замкнутые контуры, выходящие из $z_0$ и обходящие вокруг точек $\alpha_1$ и $\alpha_2$.

Обозначим символически через $(l_1, l_2)$ контур, который состоит из следующих последовательных обходов: обхода по $l_1$ в положительном направлении, обхода по $l_2$ в положительном направлении, обхода по $l_1$ в отрицательном направлении и обхода по $l_2$ в отрицательном направлении. В результате первого обхода функция (123) получит множитель $e^{p2\pi i}$. После второго обхода она получит множитель $e^{q2\pi i}$, после третьего обхода — множитель $e^{-p2\pi i}$ и, наконец, после четвертого обхода — множитель $e^{-q2\pi i}$. Таким образом, окончательно вернувшись в точку $z_0$, мы будем иметь для левой части (123) ту же самую ветвь, которую мы взяли, отправляясь из $z_0$, и, таким образом, принимая за $l$ контур $(l_1, l_2)$, мы удовлетворим условию (123), и формула (122) даст нам решение уравнения. Заметим при этом, что если бы мы взяли за контур $l$ замкнутый контур, не содержащий внутри себя особых точек $\alpha_1$ и $\alpha_2$ подинтегральной функции, то эта функция, конечно, тоже вернулась бы к исходному значению, но, согласно теореме Коши, интеграл (122) по такому контуру был бы равен нулю и мы не получили бы решения уравнения (112). В данном случае мы подобрали контур так, что, обходя вокруг особых точек, мы все же вернулись к исходной ветви функции.

Имеем, таким образом, решение

$$w(z)=C\int\limits_{(l_1,\ l_2)}(z'-\alpha_1)^{p-1}(z'-\alpha_2)^{q-1}e^{zz'}\,dz'. \tag{124}$$

Переменная $z'$ расположена на контуре, который целиком находится на конечном расстоянии, и, следовательно, мы можем написать разложение в ряд

$$e^{zz'}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\,z'^k,$$

равномерно сходящийся на контуре интегрирования. Подставляя этот ряд и интегрируя почленно, мы представим наше решение в виде

$$w_0(z)=C\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\int\limits_{(l_1,\ l_2)}z'^k(z'-\alpha_1)^{p-1}(z'-\alpha_2)^{q-1}\,dz', \tag{125}$$

где $C$ — произвольная постоянная, т. е. *построенное нами решение и есть как раз регулярное (в начале координат) решение.* Надо только иметь в виду то обстоятельство, что это решение не должно быть равно тождественно нулю, что может произойти лишь в исключительных случаях.

Решение (125) является целой функцией, поскольку второй особой точкой является $z=\infty$. Решение (125) теряет смысл, если $p$ и $q$ — целые положительные числа, ибо в этом случае все интегралы, входящие в эту формулу, равны нулю согласно теореме Коши. Нетрудно видеть, что значения этих интегралов при любых $p$ и $q$ не зависят от выбора начальной точки интегрирования $z_0$ контура $(l_1,\ l_2)$. Важно лишь фиксирование значений многозначных функций $(z'-\alpha_1)^{p-1}$ и $(z'-\alpha_2)^{q-1}$ в какой-либо точке упомянутого контура. Это влияет лишь на постоянный множитель $C$. Независимость от $z_0$ связана с тем, что при полном обходе контура мы возвращаемся к исходному значению подинтегральной функции в интеграле (124).

Отметим, что если вещественные части чисел $p$ и $q$ положительны, то произведение $(z'-\alpha_1)^p(z'-\alpha_2)^q$ обращается в нуль при $z'=\alpha_1$ и $z'=\alpha_2$, и в этом случае упомянутое регулярное решение может быть представлено интегралом по прямолинейному отрезку от $\alpha_1$ к $\alpha_2$:

$$w(z)=C\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2}(z'-\alpha_1)^{p-1}(z'-\alpha_2)^{q-1}e^{zz'}\,dz'. \tag{126}$$

Значение многозначных множителей в подинтегральной функции влияет лишь на постоянную $C$.

Возвращаемся к общему случаю. Будем только предполагать, что числа $\alpha_1$ и $\alpha_2$ имеют различные мнимые части (это несущественно). Проведем из этих точек разрезы $l_1'$ и $l_2'$, параллельные оси $X$ и направленные на $-\infty$. На плоскости $z$ с проведенными разрезами (рис. 66) подинтегральная функция интеграла (122) однозначна. Мы выбираем ту ветвь ее, для которой $\arg(z'-\alpha_1)=0$ при $z'-\alpha_1>0$, т. е. на продолжении первого разреза, и $\arg(z'-\alpha_2)=0$ при $z'-\alpha_2>0$. Указанные на рис. 66 контуры выбираем за контуры интегрирования. Мы получаем, таким образом, два решения уравнения (112):

$$w_1(z)=\int_{l_1'}(z'-\alpha_1)^{p-1}(z'-\alpha_2)^{q-1}e^{zz'}\,dz',$$
$$w_2(z)=\int_{l_2'}(z'-\alpha_1)^{p-1}(z'-\alpha_2)^{q-1}e^{zz'}\,dz'. \qquad (127)$$

Считаем, что при стремлении $z'$ к $(-\infty)$ аргумент $z'-\alpha_k$ стремится к $\pi$ на верхнем берегу разреза. Можно считать, например, что при достаточно больших $|z'|$ контур $l_k'$ идет по нижнему и верхнему берегам разреза. Для сходимости интегралов (127) надо ограничиться такими значениями $z$, при которых $\mathrm{Re}(zz')<0$. Это условие наверное выполнено, если

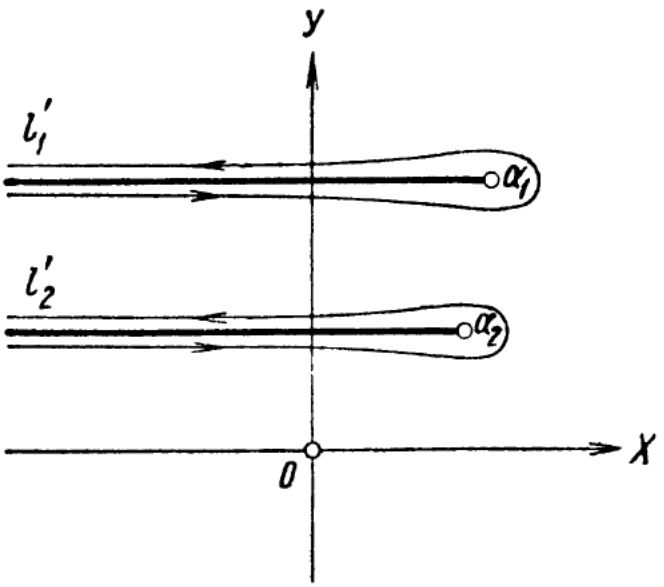


Рис. 66.

$$-\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{\pi}{2}, \qquad (128)$$

так как при этом

$$\frac{\pi}{2}<\arg(zz')<\frac{3\pi}{2}$$

или

$$\frac{\pi}{2}+2\pi<\arg(zz')<\frac{3\pi}{2}+2\pi$$

для всех достаточно больших $|z'|$. Если мы положим $|z|>r$, где $r$ — какое-либо положительное число, и выполнено условие

$$-\frac{\pi}{2}+\varepsilon<\arg z<\frac{\pi}{2}-\varepsilon, \qquad (129)$$

где $\varepsilon$ — любое малое положительное число, то сходимость интегралов (127) будет равномерной по отношению к $z$.

Пользуясь формулой Коши, мы можем поворачивать, например, разрез $l_1'$ вокруг точки $\alpha_1$. При этом надо иметь в виду, чтобы он при указанном повороте не пересекал точки $\alpha_2$ и чтобы вещественная часть $zz'$ была отрицательной при больших $|z'|$ ($z$ задано и $z\neq 0$). При повороте разреза надо считать $\arg(z'-\alpha_1)=0$ при $z'-\alpha_1>0$. Мы приходим, таким образом, к аналитическому продол-

жению решений из сектора (129). Более подробно мы будем говорить об этом ниже в связи с исследованием уравнения Бесселя.

Установим теперь связь решений (127) с тем решением уравнения (112), которое регулярно в начале координат. Имея в виду дальнейшие приложения к уравнению Бесселя, ограничимся случаем, когда $p = q$. В этом случае для получения регулярного (в начале координат) решения можно брать за контур интегрирования не контур $(l_1, l_2)$, упомянутый выше, но более простой контур, а именно контур, выходящий из некоторой точки $z_0$ и обходящий $\alpha_1$ в положительном направлении, а затем $\alpha_2$ в отрицательном направлении. При первом обходе подинтегральная функция получит множитель $e^{p2\pi i}$, а при втором — множитель $e^{-q2\pi i} = e^{-p2\pi i}$, так что она вернется к исходному значению, и условие (123) будет выполнено. Как и выше, построенное решение не зависит от выбора точки $z_0$. Отведем эту точку, не затрагивая точек $\alpha_1$ и $\alpha_2$, на $(-\infty)$, например, по нижнему берегу разреза $r_1$, идущего в точку $\alpha_1$ (рис. 67). Обход точки $\alpha_1$ даст нам при этом решение $w_1$. После этого обхода мы попадем на верхний берег упомянутого разреза и должны будем затем обойти точку $\alpha_2$ в отрицательном направлении. Если бы мы совершили этот обход с нижнего берега разреза $r_1$, то получили бы решение $(-w_2)$. Но при переходе на верхний берег разреза, откуда и совершается обход точки $\alpha_2$, подинтегральная функция приобрела множитель $e^{p2\pi i}$, и, следовательно, обход вокруг $\alpha_2$ в отрицательном направлении даст нам $(-e^{p2\pi i}w_2)$. Окончательно получаем следующее правило: *при $p = q$ регулярный интеграл, получаемый интегрированием по контуру, указанному на рис.* 67, *выражается через решения* (127) *в виде*

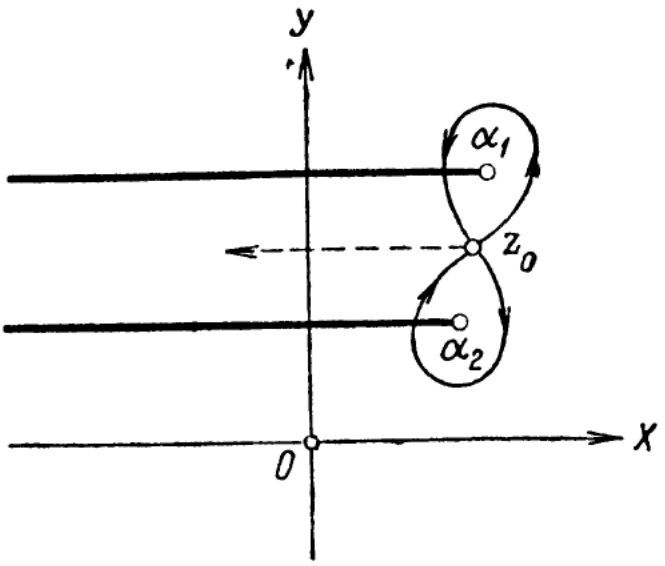


Рис. 67.

$$w_1(z) - e^{p2\pi i}w_2(z). \tag{130}$$

Дальше мы укажем на возможность применения преобразования Лапласа и для уравнений, отличных от уравнений вида (112). Сейчас мы рассмотрим применение указанного преобразования к уравнению Бесселя.

**110. Уравнение Бесселя.** Уравнение Бесселя [II, 48]

$$z^2w'' + zw' + (z^2 - n^2)w = 0 \tag{131}$$

при помощи преобразования

$$w = z^n u \tag{132}$$

приводится к уравнению

$$zu'' + (2n+1)z' + zu = 0, \tag{133}$$

которое имеет вид (112). В данном случае

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 2n+1, \quad b_0 = 1, \quad b_1 = 0.$$

Уравнение (117) имеет вид $z'^2 + 1 = 0$, и мы получаем

$$\alpha_1 = i, \quad \alpha_2 = -i, \quad p = q = \frac{2n+1}{2}. \tag{134}$$

Решения уравнения (133) имеют вид

$$u_1 = \int_{l_1'} (z'^2+1)^{\frac{2n-1}{2}} e^{zz'}\, dz', \quad u_2 = \int_{l_2'} (z'^2+1)^{\frac{2n-1}{2}} e^{zz'}\, dz'. \tag{135}$$

Согласно сказанному в [**106**] $\arg(z'+i) = 0$ при $z'+i > 0$ и $\arg(z'-i) = 0$ при $z'-i > 0$, откуда следует, что $\arg(z'^2+1) = 0$ при вещественных $z'$.

Иногда пишут решения несколько в ином виде, а именно вводят вместо $z'$ новую переменную интегрирования $\tau$ по формуле $z' = i\tau = e^{\frac{\pi}{2}i}\tau$, что соответствует повороту плоскости $z'$ на угол $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$:

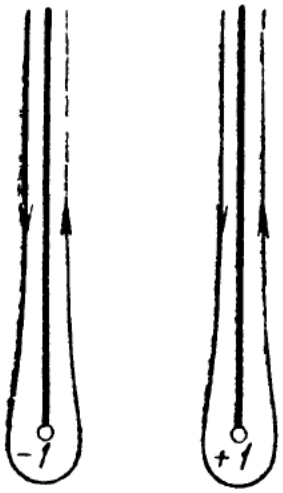



Рис. 68.

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= i\int_{\lambda_1} (1-\tau^2)^{n-\frac{1}{2}} e^{iz\tau}\, d\tau, \\ u_2 &= i\int_{\lambda_2} (1-\tau^2)^{n-\frac{1}{2}} e^{iz\tau}\, d\tau, \end{aligned}\right\} \tag{136}$$

где $\lambda_1$ и $\lambda_2$ — контуры, выходящие из точки $\tau = +i\infty$ и обходящие вокруг точек $\tau = 1$ и $\tau = -1$ (рис. 68), и $\arg(1-\tau^2) = 0$ при чисто мнимых $\tau$, которые соответствуют вещественнным $z'$, или, что то же, $\arg(1-\tau^2) = \pi$ при $\tau > 1$. Полагая $1-\tau^2 = e^{\pi i}(\tau^2-1)$, получим вместо (136)

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= e^{\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)i} i\int_{\lambda_1} (\tau^2-1)^{n-\frac{1}{2}} e^{iz\tau}\, d\tau, \\ u_2 &= e^{\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)i} i\int_{\lambda_2} (\tau^2-1)^{n-\frac{1}{2}} e^{iz\tau}\, d\tau, \end{aligned}\right\} \tag{137}$$

где

$$\arg(\tau^2-1) = 0 \quad \text{при} \quad \tau > 1. \tag{138}$$

Соответствующие решения уравнения (131) будут

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= e^{\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)i}\, iz^n \int_{\lambda_1} (\tau^2-1)^{n-\frac{1}{2}}\, e^{iz\tau}\, d\tau, \\ w_2 &= e^{\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)i}\, iz^n \int_{\lambda_2} (\tau^2-1)^{n-\frac{1}{2}}\, e^{iz\tau}\, d\tau. \end{aligned}\right\} \tag{139}$$

Вместо второго решения введем $w_2^* = e^{(2n+1)\pi i} w_2$, так что

$$w_2^* = e^{\pi\left(3n+\frac{1}{2}\right)i}\, iz^n \int_{\lambda_2} (\tau^2-1)^{n-\frac{1}{2}}\, e^{iz\tau}\, d\tau. \tag{140}$$

Разность $w_1 - w_2^*$ дает решение уравнения Бесселя, имеющее вблизи начала вид [109]

$$z^n \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k z^k \qquad (\beta_0 \neq 0).$$

Мы уже знаем, что такое решение уравнения Бесселя определяется следующим рядом [II, 48]:

$$Cz^n\left[1 - \frac{z^2}{2(2n+2)} + \frac{z^4}{2\cdot 4\cdot (2n+2)\cdot (2n+4)} - \dots\right].$$

При этом считается, что $n$ не есть целое отрицательное число. Если $n \geqslant 0$ — целое, то, как указывалось раньше, полагают $C = \frac{1}{2^n n!}$, причем, как обычно, $0! = 1$. Таким образом, функция Бесселя с целым неотрицательным значком $n$ определяется рядом

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k},$$

или, пользуясь формулой для $\Gamma(z)$, можем написать

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(n+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}. \tag{141}$$

При любом $n$, отличном от целого отрицательного числа, при определении $J_n(z)$ полагают

$$C = \frac{1}{2^n \Gamma(n+1)},$$

т. е.

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)(n+k-1)\dots(n+1)\,\Gamma(n+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k},$$

или, в силу формулы $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$, получаем при указанных значениях $n$ формулу (141). Правая часть этой формулы сохраняет смысл и при целых отрицательных $n$. Заменяя в ней $n$ на $(-n)$ и принимая во внимание, что $\frac{1}{\Gamma(z)}=0$ при $z=0, -1, -2, \ldots$, получаем

$$J_{-n}(z)=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(-n+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2k}.$$

Заменяя переменную суммирования новой: $l=k-n$, и вынося за знак суммы $(-1)^n$, получаем

$$J_{-n}(z)=(-1)^n\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{\Gamma(n+l+1)\Gamma(l+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2l},$$

т. е.

$$J_{-n}(z)=(-1)^n J_n(z) \qquad (n \text{ — целое}). \tag{142}$$

Разность $w_1-w_2^*$ дает нам функцию Бесселя (141) лишь с точностью до постоянного множителя. Мы будем искать теперь тот множитель $a$, на который надо умножить разность $w_1-w_2^*$, чтобы получить в точности функцию Бесселя. Учитывая формулу (132) и тот факт, что $p=\frac{2n+1}{2}$, мы сводим задачу к следующей: найти постоянную $a$ из того условия, чтобы полусумма решений уравнения Бесселя

$$\begin{aligned} H_n^{(1)}(z)&=az^n\int_{\lambda_1}(\tau^2-1)^{n-\frac{1}{2}}e^{iz\tau}\,d\tau,\\ H_n^{(2)}(z)&=-ae^{(2n+1)\pi i}z^n\int_{\lambda_2}(\tau^2-1)^{n-\frac{1}{2}}e^{iz\tau}\,d\tau \end{aligned} \tag{143}$$

давала функцию Бесселя (141). Выше мы предполагали, что $\left(n-\frac{1}{2}\right)$ не есть целое число $m\geqslant 0$. Последний случай мы рассмотрим при подробном изложении функций Бесселя.

**111. Функции Ханкеля и интегральное представление решений уравнения Бесселя.** При указанном выше выборе $a$ формулы (143) дают два решения уравнения Бесселя, которые называются функциями Ханкеля и обозначаются так, как это указано в формулах (143). При сложении этих решений получится решение, которое выражается произведением $\frac{a}{2}$ на интегралы по контуру, имеющему вид восьмерки (рис. 69). Напомним, что рис. 69 получается из рис. 67 при $\alpha_1=i$ и $\alpha_2=-i$ поворотом вокруг начала на угол $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

Принимая во внимание, что полусумма функций (143) должна давать функцию Бесселя (142), получаем

$$\frac{1}{2}az^n\int_C(\tau^2-1)^{n-\frac{1}{2}}e^{iz\tau}d\tau=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(n+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}. \quad (144)$$

Сокращая обе части на $z^n$ и полагая затем $z=0$, приходим к уравнению для определения $a$:

$$\frac{1}{2}a\int_C(\tau^2-1)^{n-\frac{1}{2}}d\tau=\frac{1}{2^n\Gamma(n+1)}, \quad (145)$$

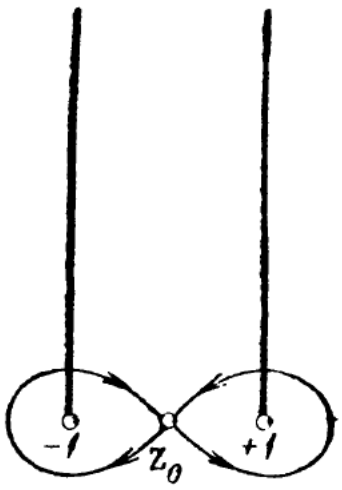


Рис. 69.

и нам остается только вычислить интеграл, стоящий в левой части. Считая $n$ вещественным и $\left(n-\frac{1}{2}\right)$ больше $(-1)$, мы можем привести путь интегрирования $C$ к интегрированию по двойному отрезку $(-1, 1)$, причем надо интегрировать по нижнему берегу отрезка от $(-1)$ к (1) и по верхнему от (1) к $(-1)$. Как было выше упомянуто, $\arg(\tau^2-1)=0$ при $\tau>1$, откуда следует, что $\arg(\tau^2-1)=\pi$ на верхнем берегу отрезка $(-1, 1)$ и $\arg(\tau^2-1)=-\pi$ на нижнем берегу этого отрезка, т. е.

$$(\tau^2-1)^{n-\frac{1}{2}}=e^{i\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}(1-\tau^2)^{n-\frac{1}{2}} \quad \text{(на верхнем берегу)},$$

$$(\tau^2-1)^{n-\frac{1}{2}}=e^{-i\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}(1-\tau^2)^{n-\frac{1}{2}} \quad \text{(на нижнем берегу)},$$

и окончательно, складывая интегралы, получим

$$\int_C(\tau^2-1)^{n-\frac{1}{2}}d\tau=-2i\sin\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi\right]\int_{-1}^{1}(1-\tau^2)^{n-\frac{1}{2}}d\tau,$$

где

$$(1-\tau^2)^{n-\frac{1}{2}}=e^{\left(n-\frac{1}{2}\right)\ln(1-\tau^2)} \qquad (1-\tau^2>0).$$

Принимая во внимание четность подинтегральной функции, можно написать

$$\int_C(\tau^2-1)^{n-\frac{1}{2}}d\tau=-4i\sin\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi\right]\int_0^1(1-\tau^2)^{n-\frac{1}{2}}d\tau$$

или, вводя вместо $\tau$ новую переменную интегрирования $x$ по формуле $\tau^2=x$,

$$\int_C(\tau^2-1)^{n-\frac{1}{2}}d\tau=-2i\sin\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi\right]\int_0^1x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{n-\frac{1}{2}}dx.$$

Но мы видели раньше, что

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

так что интеграл, стоящий в равенстве (145), будет

$$\int_C (\tau^2-1)^{n-\frac{1}{2}}d\tau = -2i\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)} =$$

$$= 2i\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)}.$$

Но мы имели раньше

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin\pi z} \quad \text{и} \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

откуда

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi = \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)},$$

так что окончательно

$$\int_C (\tau^2-1)^{n-\frac{1}{2}}d\tau = \frac{2\pi^{\frac{3}{2}}i}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)\Gamma(n+1)}.$$

Мы вывели эту формулу в предположении, что $n$ вещественно и $n-\frac{1}{2} > -1$. Принимая во внимание, что обе части суть аналитические функции от $n$, можно утверждать, что эта формула остается верной при всяком $n$. Таким образом, из формулы (145) для постоянной $a$ мы получаем следующее значение:

$$a = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)}{2^n\pi^{\frac{3}{2}}i}.$$

Внося это значение в формулы (143), находим выражение для функций Ханкеля:

$$\left.\begin{aligned} H_n^{(1)}(z) &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)}{\pi^{\frac{3}{2}}i}\left(\frac{z}{2}\right)^n\int_{\lambda_1}(\tau^2-1)^{n-\frac{1}{2}}e^{iz\tau}d\tau, \\ H_n^{(2)}(z) &= -\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)}{\pi^{\frac{3}{2}}i}e^{(2n+1)\pi i}\left(\frac{z}{2}\right)^n\int_{\lambda_2}(\tau^2-1)^{n-\frac{1}{2}}e^{iz\tau}d\tau. \end{aligned}\right\} \quad (146)$$

В обоих интегралах мы считаем $\arg(\tau^2-1)=0$ при $\tau>1$. Если во втором интеграле будем считать $\arg(\tau^2-1)=2\pi$ при $\tau>1$, то можно написать

$$\left.\begin{aligned} H_n^{(1)}(z)&=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)}{\pi^{\frac{3}{2}}i}\left(\frac{z}{2}\right)^n\int_{\lambda_1}(\tau^2-1)^{n-\frac{1}{2}}e^{iz\tau}d\tau,\\ H_n^{(2)}(z)&=-\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)}{\pi^{\frac{3}{2}}i}\left(\frac{z}{2}\right)^n\int_{\lambda_2}(\tau^2-1)^{n-\frac{1}{2}}e^{iz\tau}d\tau. \end{aligned}\right\} \quad (147)$$

Если $\tau\to+i\infty$, то вещественная часть $iz\tau$ стремится к $(-\infty)$, если только вещественная часть $z$ больше нуля, и, таким образом, формулы (147) определяют функцию Ханкеля справа от мнимой оси. Напомним, что мы считаем $n-\frac{1}{2}$ отличным от целого неотрицательного числа.

Выражение для $H_n^{(s)}(z)$ $(s=1, 2)$ легко преобразовать при предположении, что вещественная часть $n$ больше $\left(-\frac{1}{2}\right)$, к интегралу по промежутку $(0, \infty)$. В рассматриваемом случае интеграл по $\lambda_1$ можно брать по сторонам разреза $(1, i\infty)$ вплоть до точки $\tau=1$. Учитывая тот факт, что при обходе точки $\tau=1$ подинтегральная функция приобретает множитель $e^{-2\pi i\left(n-\frac{1}{2}\right)}=-e^{-2n\pi i}$, а затем совершая замену переменной интегрирования $\tau=i\frac{x}{z}+1$, получим, используя формулу $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}$,

$$\left.\begin{aligned} H_n^{(1)}(z)&=\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{e^{i\left(z-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\int_0^\infty e^{-x}x^{n-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x}{2iz}\right)^{n-\frac{1}{2}}dx,\\ H_n^{(2)}(z)&=\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{e^{-i\left(z-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\int_0^\infty e^{-x}x^{n-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{x}{2iz}\right)^{n-\frac{1}{2}}dx. \end{aligned}\right\} \quad (148)$$

Первая из этих формул имеет место при $-\frac{\pi}{2}<\arg z<\pi$, а вторая — при $-\pi<\arg z<\frac{\pi}{2}$.

**112. Асимптотические разложения.** Представление решений уравнений вида (112) в виде контурных интегралов дает возможность получать так называемые асимптотические разложения решений. Мы

кратко изложим сначала общие сведения об этих разложениях. Напомним, что раньше мы рассматривали такие разложения при больших $n$ по степеням $n^{-\frac{1}{p}}$, где $p$ — некоторое целое положительное число [79]. Сейчас мы будем рассматривать их на плоскости комплексного переменного $z$ вдоль некоторого луча $z=re^{i\varphi}$ при большом $r$ и чаще в некотором секторе $\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta$. В случае луча, применяя, если надо, поворот плоскости $z$ вокруг начала, всегда можно считать, что луч есть вещественная положительная полуось $z>0$. Мы будем главным образом рассматривать асимптотические разложения вида

$$c_0+\frac{c_1}{z}+\frac{c_2}{z^2}+\ldots \tag{149}$$

Это — так называемые асимптотические степенные ряды. Обозначим $s_m(z)$ сумму первых $m$ членов этого ряда:

$$s_m(z)=c_0+\frac{c_1}{z}+\ldots+\frac{c_{m-1}}{z^{m-1}}.$$

Сходимость ряда (149) в точке $z=z_0$ равносильна существованию предела $s_m(z_0)$ при $m\to\infty$. Совершенно иной подход имеет место при определении асимптотического разложения. Пусть в некотором секторе $B$

$$\alpha<\arg z<\beta \tag{150}$$

или на некотором луче $l$ при $|z|>a$ определена функция $f(z)$. Говорят, что ряд (149) является асимптотическим разложением $f(z)$ в $B$ (или на $l$), если при любом целом $m\geqslant 1$ разность $f(z)-s_m(z)$ при $|z|\to\infty$ в $B$ (или на $l$) есть бесконечно малая более высокого порядка, чем $\frac{1}{z^{m-1}}$, т. е.

$$\lim_{|z|\to\infty}[f(z)-s_m(z)]\,z^{m-1}=0. \tag{151}$$

Это записывается также так:

$$f(z)=s_m(z)+o\left(\frac{1}{z^{m-1}}\right), \tag{152}$$

где $o\left(\frac{1}{z^k}\right)$ обозначает такую величину, что произведение $o\left(\frac{1}{z^k}\right)\cdot z^k\to 0$ при $|z|\to\infty$. Принимая во внимание, что $s_m(z)=s_{m+1}(z)-\frac{c_m}{z^m}$, и условие (151), если в нем заменить $m$ на $(m+1)$, можем вместо (151) написать

$$f(z)=s_m(z)+O\left(\frac{1}{z^m}\right), \tag{153}$$

где $O\left(\frac{1}{z^k}\right)$ — такая величина, что произведение $O\left(\frac{1}{z^k}\right)\cdot z^k$ остается ограниченным при $|z|\to\infty$ в $B$ или на $l$. Обычно асимптотическое разложение функции $f(z)$ обозначают так:

$$f(z)\sim c_0+\frac{c_1}{z}+\frac{c_2}{z^2}+\dots \tag{154}$$

Если $f(z)$ — функция, регулярная в окрестности точки $z=\infty$ и в самой этой точке, т. е. разлагается при $|z|>r$, где $r$ — некоторое неотрицательное число, в ряд

$$f(z)=c_0+\frac{c_1}{z}+\frac{c_2}{z^2}+\dots,$$

то очевидно, что ряд, стоящий справа, будет и асимптотическим разложением $f(z)$ при $|z|>r$. Но при определении асимптотического разложения (154) сходимость ряда не предполагается, и в дальнейшем мы будем иметь в основном дело с расходящимися рядами.

Из определения (153) непосредственно следует, что коэффициенты $c_m$ определяются по функции $f(z)$ единственным образом:

$$\begin{gathered}c_0=\lim_{|z|\to\infty} f(z),\qquad c_1=\lim_{|z|\to\infty}[f(z)-c_0]\,z,\\ c_2=\lim_{|z|\to\infty}\left[f(z)-c_0-\frac{c_1}{z}\right]z^2,\ \dots,\end{gathered} \tag{155}$$

т. е. асимптотическое разложение может быть только одно. В написанных формулах $|z|\to\infty$ в том секторе $\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta$ или на том луче, где имеет место разложение.

Рассмотрим функцию $e^{-z}$. Вещественная часть $(-z)$ отрицательна и по абсолютной величине не меньше $|z|\sin\varepsilon$ в секторе

$$-\frac{\pi}{2}+\varepsilon\leqslant\arg z\leqslant\frac{\pi}{2}-\varepsilon, \tag{156}$$

где $\varepsilon>0$ — малое число. Отсюда следует, что $e^{-z}z^m\to 0$ при любом целом $m\geqslant 0$, и, следовательно, асимптотическое разложение состоит из нулей в секторе (156):

$$e^{-z}\sim 0+\frac{0}{z}+\frac{0}{z^2}+\dots,\ \text{или}\ e^{-z}\sim 0.$$

Таким образом, если некоторая функция $f(z)$ в секторе (156) или на некотором луче из этого сектора имеет разложение (154), то функция $f(z)+e^{-z}$ имеет то же самое разложение. Нетрудно видеть, что в секторе

$$\frac{\pi}{2}+\varepsilon\leqslant\arg z\leqslant\frac{3\pi}{2}-\varepsilon$$

функция $e^{-z}$ не имеет асимптотического разложения. Произведение $e^{-z}z^m$ стремится по модулю к бесконечности на любом луче этого сектора.

Рассмотрим при $z>0$ интеграл

$$f(z)=\int_z^\infty x^{-m}e^{z-x}dx=e^z\int_z^\infty x^{-m}e^{-x}dx, \tag{157}$$

где $m\geqslant 1$ — некоторое целое число. Производя последовательно интегрирование по частям, получаем

$$f(z)=\frac{1}{z^m}-\frac{m}{z^{m+1}}+\frac{m(m+1)}{z^{m+2}}-\ldots+(-1)^n\frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{z^{m+n}}+$$

$$+(-1)^{n+1}m(m+1)\ldots(m+n)\int_z^\infty\frac{e^{z-x}}{x^{m+n+1}}\,dx.$$

Оценим последний интеграл:

$$0<\int_z^\infty\frac{e^{z-x}}{x^{m+n+1}}\,dx<\frac{1}{z^{m+n+1}}\int_z^\infty e^{z-x}dx=\frac{1}{z^{m+n+1}},$$

откуда следует, что на луче $z>0$ для функции (157) имеет место асимптотическое разложение

$$f(z)\sim\frac{1}{z^m}-\frac{m}{z^{m+1}}+\frac{m(m+1)}{z^{m+2}}+\ldots \tag{158}$$

Нетрудно видеть, что это разложение имеет место и в секторе (156), причем в интеграле (157) интегрирование совершается по лучу этого сектора, выходящему из точки $z=0$.

Пользуясь определением (153), легко доказать возможность простейших операций над асимптотическими разложениями. Из (154) следует

$$af(z)\sim ac_0+\frac{ac_1}{z}+\frac{ac_2}{z^2}+\ldots,$$

где $a$ — постоянная. Два асимптотических разложения в одном и том же секторе (или на одном и том же луче) можно почленно складывать и умножать.

Если кроме (154) мы имеем

$$\varphi(z)\sim\sum_{k=0}^\infty\frac{d_k}{z^k}, \tag{159}$$

то

$$f(z)\varphi(z)\sim\sum_{k=0}^\infty\frac{c_kd_0+c_{k-1}d_1+\ldots+c_0d_k}{z^k}.$$

Асимптотические ряды (154) и (159) можно делить почленно, если $d_0 \neq 0$ [ср. 16]. Полученный ряд будет асимптотическим для частного $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$ в том же секторе по $\varphi$ при достаточно больших $|z|$. Если имеем на некотором луче $l$ разложение (154) и $f(z)$ — непрерывная функция на $l$ при $|z| > a$, то $f(z) - c_0 - \frac{c_1}{z}$ интегрируема по лучу $l$ от $z$ до $\infty$ и

$$\int_z^\infty \left[f(z) - c_0 - \frac{c_1}{z}\right] dz \sim \sum_{k=2}^{\infty} \frac{c_k}{(k-1)\, z^{k-1}} \quad (\text{на } l,\ |z| > a). \tag{160}$$

В дальнейшем мы будем иметь дело с функциями $f(z)$, регулярными в соответствующих секторах. Сформулируем для этого случая теорему о возможности почленного дифференцирования разложения (154). Пусть $B$ и $B_1$ — секторы на плоскости, определяемые неравенствами

$$B\{\alpha < \arg z < \beta;\ |z| > a\}, \qquad B_1\{\alpha_1 < \arg z < \beta_1;\ |z| > a_1\},$$

где $a_1 > a$ и $\alpha < \alpha_1 < \beta_1 < \beta$. Если $f(z)$ регулярна в $B$ и в $B$ имеет место разложение (154), равномерное по $\arg z$, то в $B_1$ имеет место разложение

$$f'(z) \sim -\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k-1)\, c_{k-1}}{z^k},$$

равномерное по $\arg z$ в $B_1$. Разложение (154), равномерное по $\arg z$ в $B$, определяется так: при любом заданном $\varepsilon > 0$ существует такое $N$, что

$$\left| f(z) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{c_k}{z^k} \right| \leqslant \varepsilon\, |z|^{1-m}$$

при всех $z$ из $B$, удовлетворяющих условию $|z| \geqslant N$, причем число $N$ может зависеть от $m$. Сформулированное предложение доказывается применением формулы Коши для $f'(z)$ при $z$, принадлежащих $B_1$. Это дает возможность доказать разложимость $f'(z)$ для $z$ из $B_1$ в асимптотический степенной ряд. Отсюда применением формулы (160) для этого ряда получаем формулу для $f'(z)$.

Отметим, что если $f(z)$ регулярна при $|z| > a$, включая точку $z = \infty$, то она разлагается при $|z| > a$ в ряд вида

$$f(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots \tag{161}$$

При этом, очевидно,

$$\lim_{|z| \to \infty} \left| f(z) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{a_k}{z^k} \right| z^{m-1} = 0,$$

т. е. правая часть является и асимптотическим разложением $f(z)$ при $|z|>a$. Положим теперь, что $f(z)$ регулярна при $|z|>a$, но о ее поведении в точке $z=\infty$ нам ничего не известно. Пусть, кроме того, имеет место асимптотическое разложение (161) при всех значениях $|z|>a$. При этом ряд, входящий в формулу (161), сходится при $|z|>a$ и его сумма равна $f(z)$. Это утверждение доказывается при помощи замены $z=\frac{1}{u}$ и применения теоремы из [10] к функции $g(u)=f\left(\frac{1}{u}\right)$ и $g(0)=a_0$. Функция $f(z)$ при этом, очевидно, регулярна и в точке $z=\infty$.

Кратко скажем об асимптотических рядах, отличных от рядов вида (149).

Разложение

$$c_0+c_1z+c_2z^2+\dots$$

называется асимптотическим разложением $f(z)$ в некотором секторе $\alpha\leqslant\arg z\leqslant\beta$ или на луче $\arg z=\alpha$, если

$$\lim_{|z|\to 0}[f(z)-(c_0+c_1z+\dots+c_{m-1}z^{m-1})]\frac{1}{z^{m-1}}=0 \qquad (162)$$

при любом $m=0, 1, \dots$ в секторе или на луче.

Дадим в заключение определение асимптотической последовательности $\varphi_k(z)$ функций при $z\to z_0$: последовательность функций $\varphi_k(z)$, заданных на некотором множестве $M$ точек $z$, имеющем $z=z_0$ предельной точкой (не входящей в $M$) и удовлетворяющих отношениям $\varphi_{k+1}(z):\varphi_k(z)\to 0$ при $z\to z_0$, называется асимптотической последовательностью. В этом определении не исключена возможность и случая $z\to\infty$. В случае формулы (154) $\varphi_k(z)=\frac{1}{z^k}$ и $z_0=\infty$. Подробные сведения об асимптотических разложениях можно найти, например, в упомянутой выше [81] книге А. Эрдейи «Асимптотические разложения».

**113. Асимптотические разложения решений, полученных преобразованием Лапласа.** Мы займемся теперь выводом асимптотических разложений решений уравнений вида (112), представляемых интегралами (128). Напомним, что эти решения были определены нами при

$$-\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{\pi}{2}.$$

Начнем с первого из них. Вводим вместо $z'$ новую переменную интегрирования по формуле $z'-\alpha_1=t$ и полагаем для сокращения $\beta=\alpha_1-\alpha_2$. Мы считали при выводе формул (128), что мнимые части $\alpha_1$, $\alpha_2$ различны и тем самым $\beta$ не есть вещественное число. После

указанных преобразований решение $w_1(z)$ примет вид

$$w_1(z)=\int_{0} t^{p-1}(t+\beta)^{q-1}e^{z(\alpha_1+t)}\,dt \tag{163}$$

где $l_0$ — контур, идущий из $t=-\infty$ и обходящий вокруг начала. Подинтегральная функция имеет точки разветвления $t=0$ и $t=-\beta$. Вместо рис. 68 мы будем иметь на плоскости $t$ два разреза, идущих из $(-\infty)$ к точкам $t=0$ и $t=-\beta=\alpha_2-\alpha_1$, причем $\arg t=0$ при $t>0$ и $\arg(t+\beta)=0$ при $t+\beta>0$, т. е. на продолжениях этих разрезов.

Применяя формулу бинома Ньютона, мы будем иметь при $|t|<|\beta|$

$$(t+\beta)^{q-1}=\beta^{q-1}\left(1+\frac{t}{\beta}\right)^{q-1}=\sum_{k=0}^{\infty}d_k t^k, \tag{164}$$

где

$$d_k=\beta^{q-1}\beta^{-k}\frac{(q-1)(q-2)\dots(q-k)}{k!}\quad(d_0=\beta^{q-1}). \tag{165}$$

В силу указанного выше условия относительно аргумента $(t+\beta)$ на плоскости $t$ с разрезом из $(-\infty)$ к $(-\beta)$, мы должны считать, что в выражении $\beta^{q-1}$, равном значению функции (164) при $t=0$, аргумент $\beta$ заключается в пределах

$$-\pi<\arg\beta<\pi, \tag{166}$$

причем мы считаем, что $\beta$ отлично от вещественного отрицательного числа.

Если $|t|\geqslant|\beta|$, то формулой (164) пользоваться нельзя, и в этом случае мы будем просто писать

$$(t+\beta)^{q-1}=d_0+d_1t+\dots+d_nt^n+R_n(t),$$

где

$$R_n(t)=(t+\beta)^{q-1}-(d_0+d_1t+\dots+d_nt^n). \tag{167}$$

Пользуясь последними формулами, можно написать

$$w_1(z)=e^{\alpha_1 z}\sum_{k=0}^{n}d_k\int_{l_0}e^{zt}t^{p+k-1}\,dt+e^{\alpha_1 z}\int_{l_0}e^{zt}t^{p-1}R_n(t)\,dt. \tag{168}$$

Рассмотрим сумму, стоящую в правой части. Вводя вместо $t$ новую переменную интегрирования $\tau$ по формуле

$$zt=-\tau=e^{-\pi i}\tau,$$

приведем интеграл к виду

$$\int_{l_0} e^{zt} t^{p+k-1}\, dt = e^{-\pi p i} (-1)^k z^{-p-k} \int_{\lambda} e^{-\tau} \tau^{p+k-1}\, d\tau.$$

Кратко опишем идею последующих вычислений. Интегралы, стоящие под знаком суммы, имеют, как мы сейчас покажем, вид $c(-1)^k z^{-p-k}\Gamma(p+k)$, где $c$ — некоторая постоянная (не зависящая от $k$), и эта сумма вместе с множителем $e^{\alpha_1 z}$ будет иметь вид

$$e^{\alpha_1 z} z^{-p} C \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k d_k \Gamma(p+k)}{z^k}. \tag{169}$$

Остается оценить последнее слагаемое. Мы покажем, что оно имеет вид произведения $e^{\alpha_1 z} z^{-p} \varphi_n(z)$, где $z^n \varphi_n(z) \to 0$ при $z \to +\infty$. Существенным при этом доказательстве будет тот факт, что $t^{p-1} R_n(t)$ имеет лишь степенной рост при $t \to \infty$, а множитель $e^{zt}$ убывает по показательному закону при $z > 0$ и $t \to -\infty$. Остается в силу этого оценить соответствующий интеграл, когда переменная интегрирования находится вблизи $t = 0$ (при обходе этой точки). Таким образом, формула (168) перепишется в виде

$$w_1(z) = e^{\alpha_1 z} z^{-p} \left[ C \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k d_k \Gamma(p+k)}{z^k} + \varphi_n(z) \right],$$

где $z^n \varphi_n(z) \to 0$ при $z \to +\infty$. Это приводит к асимптотическому разложению решения $w_1(z)$ или, точнее говоря, к асимптотическому разложению вида

$$e^{-\alpha_1 z} z^p w_1(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{z^k}. \tag{170}$$

Кратко говоря, оно получается, если в интеграле (163) разложить множитель

$$(t+\beta)^{q-1} = \beta^{q-1} \left(1 + \frac{t}{\beta}\right)^{q-1}$$

в ряд по биному Ньютона, не считаясь с тем, что при $|t| > |\beta|$ этот ряд будет расходящимся. Асимптотичность разложения (170) получается за счет множителя $e^{zt}$, убывающего по показательному закону при $z > 0$ и $t \to -\infty$. Проделаем все выкладки и оценки. Вводим в интегралы, входящие в формулу (168), вместо $t$ новую переменную интегрирования $\tau$:

$$zt = -\tau = e^{-\pi i} \tau, \qquad \tau = e^{\pi i} zt. \tag{171}$$

Для упрощения дальнейшего будем считать, что $z$ находится на луче $z>0$, что несущественно. Важно лишь, что $\operatorname{Re} z>0$, т. е. что выполнено условие (170). Преобразованию (171) соответствует поворот плоскости $t$ на угол $\pi$ против часовой стрелки, так что разрез (на плоскости $t$) из $t=0$ к $t=-\infty$ переходит в разрез, идущий из $\tau=0$ к $\tau=+\infty$, и нижний берег первого разреза переходит в верхний берег второго, где надо считать $\arg\tau=0$. Упомянутые интегралы на плоскости $\tau$ берутся по контуру $\lambda$, идущему по упомянутому разрезу из $\tau=+\infty$ с обходом точки $\tau=0$ против часовой стрелки.

Совершая преобразование в интегралах, входящих в формулу (168), получим

$$\int_{l_0} e^{zt}t^{p+k-1}\,dt=e^{-\pi pi}(-1)^k z^{-p-k}\int_{\lambda} e^{-\tau}\tau^{p+k-1}\,d\tau$$

и, используя формулу (150) из [74], будем иметь

$$\int_{l_0} e^{zt}t^{p+k-1}\,dt=(-1)^k e^{-\pi pi}(e^{2(p+k)\pi i}-1)\,\Gamma(p+k),$$

и формула (168) дает

$$w_1(z)=e^{\alpha_1 z}z^{-p}e^{-p\pi i}(e^{2p\pi i}-1)\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{d_k\Gamma(p+k)}{z^k}+$$

$$+e^{\alpha_1 z}\int_{l_0} e^{zt}t^{p-1}R_n(t)\,dt,$$

и для того чтобы доказать, что

$$e^{-\alpha_1 z}z^p w_1(z)\sim e^{-p\pi i}(e^{2p\pi i}-1)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{d_k\Gamma(p+k)}{z^k} \qquad (172)$$

при $z>0$, остается доказать, что

$$\lim_{z\to\infty} z^{n+p}\int_{l_0} e^{zt}t^{p-1}R_n(t)\,dt=0. \qquad (173)$$

Наметим соответствующие оценки. Контур $l_0$ выберем следующим образом: путь от $t=-\infty$ до $t=-r$ вдоль верхнего берега вещественной оси, окружность $C$ с центром $t=0$ и радиусом $r$ и путь от $t=-r$ до $t=-\infty$ вдоль нижнего берега вещественной оси. Положительное число $r$ фиксировано так, что $r<\frac{1}{2}|\beta|$. Принимая во внимание указанный порядок роста $t^{p-1}R_n(t)$ и неравенство $e^{zt}\leqslant e^{-zr}$ на прямолинейных частях $l_0$, для суммы соответствующих интегралов

получаем оценку

$$\left| z^{n+p}\left(\int_{-\infty}^{-r} + \int_{-r}^{-\infty}\right)\right| \leqslant \frac{|z^{n+p}|}{z-\varepsilon} m_1 e^{-(z-\varepsilon)r},$$

где $\varepsilon > 0$ — любая малая постоянная и $m_1$ — некоторая положительная постоянная. Из приведенной оценки видно, что сумма этих интегралов стремится к нулю при $z \to +\infty$. Остается рассмотреть выражение

$$z^{n+p}\int_C e^{zt} t^{p-1} R_n(t)\, dt. \tag{174}$$

На $C$ мы можем использовать разложение (164) и согласно неравенству Коши будем иметь оценку

$$|d_k| < \frac{m_2}{(|\beta| - \varepsilon)^k},$$

где $m_2 > 0$ — постоянная и $|\beta| - \varepsilon$ можно считать, например, равным $\rho = \frac{1}{2}|\beta|$.

Далее имеем

$$R_n(t) = d_{n+1}t^{n+1} + d_{n+2}t^{n+2} + \ldots$$

Обозначая $\theta = \frac{r}{\rho} < 1$, получаем оценку

$$|R_n(t)| \leqslant \frac{m_2 |t|^{n+1}}{\rho^{n+1}(1-\theta)}, \tag{175}$$

которая имеет место, очевидно, при $|t| \leqslant r$. Вводя новую переменную интегрирования $\tau = -zt$, получим

$$z^{n+p}\int_C e^{zt} t^{p-1} R_n(t)\, dt = (-1)^p z^n \int_{C_1} e^{-\tau}\tau^{p-1} R_n\left(-\frac{\tau}{z}\right) d\tau, \tag{176}$$

где $C_1$ — окружность $|\tau| = rz$. Согласно теореме Коши мы можем вместо $C_1$ взять за контур интегрирования любой замкнутый контур, выходящий из точки $rz$ вещественной оси, обходящий вокруг $\tau = 0$ и находящийся внутри $C_1$. При этом для $R_n(t)$ будет иметь место оценка (175). Возьмем следующий контур $C_2$ интегрирования: отрезок вещественной оси от точки $rz$ до фиксированной точки $\tau_0$ ($0 < \tau_0 < z$), окружность $|\tau| = \tau_0$ и отрезок от $\tau_0$ до $rz$.

Оценим выражение (176), пользуясь (175):

$$\left|(-1)^p z^n \int_{C_1} e^{-\tau}\tau^{p-1} R_n\left(-\frac{\tau}{z}\right) d\tau\right| \leqslant \frac{1}{z}\int_{C_2} \frac{m_2 |\tau^{n+p}|}{\rho^{n+1}(1-\theta)} |e^{-\tau}|\, ds, \tag{177}$$

где $ds$ — дифференциал дуги контура, и покажем, что множитель при $\frac{1}{z}$ остается ограниченным при $z \to +\infty$. Действительно, интегрирование по окружности радиуса $\tau_0$ не зависит от $z$. Рассмотрим еще интеграл по отрезку $(\tau_0, rz)$. Это даст следующий множитель при $z^{-1}$ в правой части (177):

$$\frac{m_2}{\rho^{n+1}(1-0)} \int_{\tau_0}^{rz} e^{-\tau} \tau^{n+p} \cdot e^{-p_2 \arg \tau} d\tau, \tag{178}$$

где $p = p_1 + p_2 i$ и $\arg \tau = 0$ или $2\pi$. Написанный интеграл сходится на промежутке $(0, +\infty)$, и, следовательно, интеграл (178) остается ограниченным при $z \to +\infty$. То же, следовательно, можно утверждать и об интеграле из (177).

Таким образом, мы можем утверждать, что интеграл (176) стремится к нулю при $z \to +\infty$ и что на луче $z > 0$ имеет место асимптотическое разложение

$$e^{-\alpha_1 z} z^p w_1(z) \sim e^{-p\pi i} (e^{2p\pi i} - 1) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{d_k \Gamma(p+k)}{z^k}, \tag{179}$$

где

$$d_k = (\alpha_1 - \alpha_2)^{q-1-k} \frac{(q-1)(q-2)\dots(q-k)}{k!}; \tag{180}$$

$$d_0 = (\alpha_1 - \alpha_2)^{q-1},$$

$$-\pi < \arg(\alpha_1 - \alpha_2) < \pi.$$

Мы считаем $p$ отличным от целого числа.

Совершенно аналогично для второго решения получаем

$$e^{-\alpha_2 z} z^q w_2(z) \sim e^{-q\pi i} (e^{2q\pi i} - 1) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{d'_k \Gamma(q+k)}{z^k}, \tag{181}$$

где

$$d'_k = (\alpha_2 - \alpha_1)^{p-1-k} \frac{(p-1)(p-2)\dots(p-k)}{k!}; \tag{182}$$

$$d'_0 = (\alpha_2 - \alpha_1)^{p-1},$$

$$-\pi < \arg(\alpha_2 - \alpha_1) < \pi.$$

Для степеней $z^p$ и $z^q$ надо считать $\arg z = 0$ при $z > 0$. Мы проводили все оценки в предположении $z > 0$. Но нетрудно показать, как мы это упоминали выше, что формулы сохраняются и при предпо-

ложении $\operatorname{Re} z > 0$. Принимая во внимание сказанное в [109] относительно возможности поворота разрезов, нетрудно и дальше расширить область, в которой имеют место упомянутые формулы.

**114. Асимптотические разложения решений уравнения Бесселя.** Сказанное в [110] непосредственно применимо к решениям уравнения (133). Для них получаем

$$e^{-iz} z^{n+\frac{1}{2}} u_1(z) \sim e^{-\frac{\pi}{2}\left(n-\frac{1}{2}\right)i} \left(1+e^{2n\pi i}\right) 2^{n-\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n-\frac{1}{2}}{k} \Gamma\left(n+\frac{1}{2}+k\right) \left(\frac{i}{2z}\right)^k, \qquad (183)$$

$$e^{iz} z^{n+\frac{1}{2}} u_2(z) \sim e^{-\frac{3\pi}{2}\left(n-\frac{1}{2}\right)i} \left(1+e^{2n\pi i}\right) 2^{n-\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n-\frac{1}{2}}{k} \Gamma\left(n+\frac{1}{2}+k\right) \left(-\frac{i}{2z}\right)^k.$$

Символ $\binom{a}{k}$ при целом $k \geqslant 0$ определяется следующим образом:

$$\binom{a}{k} = \frac{a(a-1)\ldots(a-k+1)}{k!},$$

$$\binom{a}{0} = 1.$$

Для решения $u_2^*$ имеем формулу [109]

$$e^{iz} z^{n+\frac{1}{2}} u_2^* \sim e^{\frac{\pi}{2}\left(n-\frac{1}{2}\right)i} \left(1+e^{2n\pi i}\right) 2^{n-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n-\frac{1}{2}}{k} \times$$

$$\times \Gamma\left(n+\frac{1}{2}+k\right) \left(-\frac{i}{2z}\right)^k.$$

Используем сказанное выше о возможности поворота разрезов. Пусть $\alpha$ — угол, образованный разрезом из точки $\tau = 1$ с положительным направлением вещественной оси. Принимая во внимание необходимость того, что показатель $iz\tau$ в формулах (136) должен иметь отрицательную вещественную часть, получаем неравенство

$$\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} + \alpha + \arg z < \frac{3\pi}{2}$$

или

$$-\alpha < \arg z < \pi - \alpha.$$

Далее, учитывая требование, чтобы разрез при повороте не пересекал точки $\tau = -1$, получим $-\pi < \arg\alpha < \pi$ и окончательно для $z$ получаем следующий сектор, в котором имеет место асимптотическая формула для $u_1(z)$:

$$-\pi < \arg z < 2\pi. \tag{184}$$

Совершенно аналогично для $u_2(z)$:

$$-2\pi < \arg z < \pi. \tag{184$_1$}$$

Отметим, что оба сектора имеют угол $3\pi$, т. е. налегают сами на себя. В дальнейшем мы вернемся к объяснению этого. Функция Ханкеля $H_n^{(1)}(z)$, определяемая формулой (146), отличается от $u_1(z)$ множителем

$$-\frac{e^{-\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)}{2^n\pi^{\frac{3}{2}}}z^n.$$

Используя асимптотическое разложение (183), после несложных преобразований и переноса всех множителей при $H_n^{(1)}(z)$ в правую часть, получим

$$H_n^{(1)}(z)\sim\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{e^{i\left(z-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n-\frac{1}{2}}{k}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}+k\right)\left(\frac{l}{2z}\right)^k$$

и аналогично

$$H_n^{(2)}(z)\sim\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{e^{-i\left(z-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n-\frac{1}{2}}{k}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}+k\right)\left(\frac{-l}{2z}\right)^k.$$

Вводя обозначения

$$(a)_k = a(a+1)\ldots(a+k-1)$$

и

$$(n,k)=(-1)^k\frac{\left(\frac{1}{2}-n\right)_k\left(\frac{1}{2}+n\right)_k}{k!}=\frac{\Gamma\left(n+k+\frac{1}{2}\right)}{k!\,\Gamma\left(n-k+\frac{1}{2}\right)}=$$

$$=\frac{[4n^2-1^2][4n^2-3^2]\ldots[4n^2-(2k-1)^2]}{k!\,2^{2k}},$$

можем написать

$$H_n^{(1)}(z)\sim\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\left(z-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(n,k)}{(2iz)^k},$$
$$H_n^{(2)}(z)\sim\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-i\left(z-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n,k)}{(2iz)^k}. \tag{185}$$

Эти формулы имеют место для всех значений $n$, если $z$ заключается в указанных выше секторах.

Отметим, что если $n=\pm\frac{2k+1}{2}$, где $k>0$ — целое число, то ряды обрываются и $H_n^{(s)}(z)$ $(s=1,\ 2)$ выражаются в конечном виде.

Бесконечные суммы надо заменить, например, для $H_n^{(1)}(z)$ на

$$\sum_{k=0}^{p-1}\frac{(-1)^k(n,k)}{(2iz)^k}+O\left(\frac{1}{z^p}\right)$$

и аналогично для $H_n^{(2)}(z)$.

При $p=1$ получаем

$$H_n^{(s)}(z)=\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{(-1)^{s+1}i\left(z-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\left[1+O\left(\frac{1}{z}\right)\right]. \tag{186}$$

Полусумма разложений (185) дает разложение $J_n(z)$. При этом слагаемые с четным $k$ дают $\cos\left(z-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$, а с нечетным дают $\sin\left(z-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$:

$$J_n(z)\sim\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\cos\left(z-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(n,2k)}{(2z)^{2k}}-\right.$$
$$\left.-\sin\left(z-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(n,2k+1)}{(2z)^{2k+1}}\right]. \tag{187}$$

На луче $z>0$ в первом приближении получаем

$$J_n(z)=\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}}\cos\left(z-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{z^{\frac{3}{2}}}\right). \tag{188}$$

При замене $n$ на $(-n)$ надо иметь в виду четность $(n,k)$.

Рассмотрим теперь некоторые особенности полученных асимптотических разложений. Отметим прежде всего, что многозначный множитель $z^{-\frac{1}{2}}$, входящий в асимптотические формулы, не характеризует поведения функции при обходе вокруг точки $z=\infty$. Для уравнения Бесселя, имеющего лишь две особые точки $z=0$ и $z=\infty$, обход точки $z=\infty$ равносилен обходу регулярной особой точки $z=0$, корни определяющего уравнения в которой равны $\pm n$. Если $n$ отлично от целого числа, то линейно независимые решения $J_n(z)$ и $J_{-n}(z)$ приобретают множители $e^{\pm 2n\pi i}$.

Рассмотрим теперь асимптотическую формулу для $H_n^{(1)}(z)$, имеющую место в секторе (184). В этом секторе при обходе вокруг $z=0$ (или, что то же, $z=\infty$) после полного обхода на угол $3\pi$ точка вновь возвращается в третий и четвертый координатный угол. В этом секторе мнимая часть $z$ имеет вид $z=bi$, где $b<0$, и из асимптотической формулы (185) мы видим, что показательный множитель в асимптотической формуле для $H_n^{(1)}(z)$ возрастает, а для $H_n^{(2)}(z)$ убывает по показательному закону при возрастании $|z|$. С другой стороны, можно показать, что при указанном обходе $H_n^{(1)}(z)$ будет иметь в упомянутом секторе следующее выражение через линейно независимые решения $H_n^{(1)}(z)$ и $H_n^{(2)}(z)$:

$$-H_n^{(1)}(z)-(1+e^{-2n\pi i})\,H_n^{(2)}(z).$$

В силу сказанного выше асимптотической формулой для $H_n^{(2)}(z)$ можно пренебречь наряду с $H_n^{(1)}(z)$, так как асимптотическая формула для $H_n^{(2)}(z)$ дает при больших $|z|$ величину более низкого порядка, чем оценка остатка ряда после любого члена разложения в $H_n^{(1)}(z)$. Знак минус при $H_n^{(1)}(z)$ получится при упомянутом обходе от множителя $z^{-\frac{1}{2}}$, входящего в асимптотическую формулу $H_n^{(1)}(z)$.

Отметим еще возможность получения асимптотических разложений для $J_n(z)$ в различных секторах. Напомним, что разложение (187) было получено в секторе $-\pi<\arg z<\pi$. Мы можем получить разложение в секторе $0<\arg z<2\pi$ из очевидной формулы $J_n(z)=e^{n\pi i}J_n(ze^{-\pi i})$, ибо при изменении $z$ в секторе $0<\arg z<2\pi$ мы имеем $-\pi<(\arg ze^{-\pi i})<\pi$. Подставляя в (187) $ze^{-\pi i}$ вместо $z$, после несложных преобразований получим

$$J_n(z)\sim e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi i}\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\cos\left(z+\frac{n\pi}{2}+\frac{1}{4}\pi\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(n,\,2k)}{(2z)^{2k}}-\right.$$

$$\left.-\sin\left(z+\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(n,\,2k+1)}{(2z)^{2k+1}}\right]. \qquad (189)$$

Это разложение в секторе $0<\arg z<\pi$ отличается от (187). Укажем на причину этого. Разложение (187) было получено из формулы

$$J_n(z)=\frac{H_n^{(1)}(z)+H_n^{(2)}(z)}{2},$$

причем разложение $H_n^{(2)}(z)$ имело место в секторе $-2\pi<\arg z<\pi$, не содержащем сектора $0<\arg z<2\pi$. Для получения разложения $H_n^{(2)}(z)$ в этом последнем секторе надо использовать формулу

$$H_n^{(2)}(z)=2\cos n\pi H_n^{(2)}(ze^{-\pi i})+e^{n\pi i}H_n^{(1)}(ze^{-\pi i}).$$

Полученное из этой формулы разложение $H_n^{(2)}(z)$, которое мы не выписываем, будет отлично на общем промежутке $0 < \arg z < \pi$ от (185), но их разность благодаря множителю $e^{iz}$ будет более низкого порядка при большом $|z|$, чем оценка остатка ряда после любого члена разложения $H_n^{(2)}(z)$ в формуле (185). Этим и объясняется разница разложений (187) и (189) в секторе $0 < \arg z < \pi$.

Приведем общий результат, касающийся разложения $J_n(z)$ в различных секторах с углом $2\pi$:

$$J_n(z) \sim c_1 \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\left(z-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (n,\ k)}{(2iz)^k} + \\ + c_2 \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-i\left(z-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n,\ k)}{(2iz)^k},$$

где постоянные $c_1$ и $c_2$ имеют различные значения в различных секторах, а именно:

$$c_1 = \frac{1}{2} e^{2p\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi i}, \qquad c_2 = \frac{1}{2} e^{2p\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi i}$$

при $(2p-1)\pi < \arg z < (2p+1)\pi$,

$$c_1 = \frac{1}{2} e^{2(p+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi i}, \quad c_2 = \frac{1}{2} e^{2p\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi i}$$

при $2p\pi < \arg z < (2p+2)\pi$ ($p$ — целое число).

Указанное скачкообразное изменение $c_1$ и $c_2$ называется обычно явлением Стокса. Оно имеет место не только для функций Бесселя.

**115. Вырождение уравнения Гаусса.** Рассмотренное нами выше уравнение (112) и уравнение Бесселя имеют на плоскости $z$ две особые точки, из которых одна регулярная ($z = 0$), а другая иррегулярная ($z = \infty$). Такого типа уравнения, естественно, получают из уравнения Гаусса, имеющего три регулярные особые точки $z = 0$, $z = 1$, $z = \infty$, при слиянии двух из них. Действительно, уравнение Гаусса (62) при замене $z$ на $\alpha z$ принимает вид

$$z\left(\frac{z}{\alpha} - 1\right) w'' + \left[-\gamma + z + \frac{(1+\beta)z}{\alpha}\right] w' + \beta w = 0,$$

при $\alpha \to \infty$ переходит в уравнение вида

$$zw'' + (b - z)w' - aw = 0, \tag{190}$$

где $b = \gamma$ и $a = -\beta$. Это последнее уравнение имеет регулярную особую точку $z = 0$ и иррегулярную $z = \infty$. В точке $z = 0$ определяющее уравнение имеет корни $\rho_1 = 0$ и $\rho_2 = 1 - b$. Решение уравнения (190), регулярное в точке $z = 0$ и тем самым являющееся целой

функцией, имеет, как нетрудно показать, вид

$$w_1(z)=F(a,\ b;\ z)=1+\frac{a}{b}\,\frac{z}{1!}+\frac{a(a+1)}{b(b+1)}\,\frac{z^2}{2!}+\ldots, \qquad (191)$$

если $b\neq 0,\ -1,\ -2,\ \ldots$, а второе решение

$$w_2(z)=z^{1-b}F(a-b+1,\ 2-b;\ z), \qquad (192)$$

если $2-b\neq 0,\ -1,\ -2\ldots$ Укажем также уравнение Уиттекера

$$w''+\left(-\frac{1}{4}+\frac{k}{2}+\frac{\frac{1}{4}-m^2}{z^2}\right)w=0,$$

которое при помощи преобразования $w=z^{m+\frac{1}{2}}u$ приводится к виду

$$zu''+(1+2m)u'+\left(-\frac{1}{4}z+k\right)u=0.$$

**116. Формальные ряды в окрестности иррегулярной особой точки.** При построении указанных в заглавии рядов будем считать, что иррегулярной особой точкой является точка $z=\infty$. Этого всегда можно достигнуть, совершая дробно-линейное преобразование независимой переменной. Мы будем предполагать, что коэффициенты уравнения регулярны в окрестности $z=\infty$, т. е. что уравнение имеет вид

$$w''+\left(a_0+\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\ldots\right)w'+\left(b_0+\frac{b_1}{z}+\frac{b_2}{z^2}+\ldots\right)w=0, \qquad (193)$$

и написанные ряды сходятся при $|z|>r$. Если $a_0=b_0=b_1=0$, то точка $z=\infty$ или является регулярной особой точкой, или вовсе не является особой точкой [**100**]. Мы считаем, что по крайней мере один из указанных коэффициентов отличен от нуля. Если будем пытаться формально удовлетворить этому уравнению выражением вида

$$w=z^{\rho}\left(c_0+c_1\frac{1}{z}+\ldots\right), \qquad (194)$$

где $c_0\neq 0$, то при подстановке в левую часть уравнения будем иметь единственный член, содержащий $z^{\rho}$, а именно член вида $b_0c_0z^{\rho}$. Отсюда следует, что мы не сможем даже формально удовлетворить нашему уравнению выражением вида (194), если $b_0\neq 0$. Попытаемся освободиться от коэффициента $b_0$, вводя вместо $w$ новую искомую функцию $u$ по формуле

$$w=e^{\alpha z}u.$$

Отсюда

$$w' = e^{\alpha z}u' + \alpha e^{\alpha z}u; \quad w'' = e^{\alpha z}u'' + 2\alpha e^{\alpha z}u' + \alpha^2 e^{\alpha z}u,$$

и, подставляя в уравнение, будем иметь новое уравнение

$$u'' + \left(2\alpha + a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots\right)u' + \\ + \left(\alpha^2 + \alpha a_0 + b_0 + \frac{\alpha a_1 + b_1}{z} + \frac{\alpha a_2 + b_2}{z^2} + \ldots\right)u = 0.$$

Остается теперь выбрать постоянную $\alpha$ согласно условию

$$\alpha^2 + \alpha a_0 + b_0 = 0. \tag{195}$$

В результате получим уравнение вида

$$u'' + \left(2\alpha + a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots\right)u' + \left(\frac{b_1'}{z} + \frac{b_2'}{z^2} + \ldots\right)u = 0 \tag{196}$$

$$(b_k' = \alpha a_k + b_k),$$

где $\alpha$ — некоторый корень уравнения (195). Этому уравнению мы уже сможем формально удовлетворить выражением вида (194). Положим сначала

$$u = z^\rho v,$$

откуда

$$u' = z^\rho v' + \rho z^{\rho-1}v, \quad u'' = z^\rho v'' + 2\rho z^{\rho-1}v' + \rho(\rho-1)z^{\rho-2}v.$$

Подставляя в (196), будем иметь для новой функции $v$ уравнение

$$v'' + p_1(z)v' + q_1(z)v = 0, \tag{197}$$

где

$$\left.\begin{aligned} p_1(z) &= 2\alpha + a_0 + \frac{2\rho + a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3} + \ldots, \\ q_1(z) &= \frac{(2\alpha + a_0)\rho + b_1'}{z} + \frac{\rho(\rho-1) + a_1\rho + b_2'}{z^2} + \\ &\quad + \frac{a_2\rho + b_3'}{z^3} + \frac{a_3\rho + b_4'}{z^4} + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{198}$$

Определим теперь $\rho$ из того условия, чтобы коэффициент $q_1(z)$ не содержал члена с $z^{-1}$, т. е. чтобы

$$(2\alpha + a_0)\rho + b_1' = 0, \quad \rho = -\frac{\alpha a_1 + b_1}{2\alpha + a_0}. \tag{199}$$

При этом мы считаем, что уравнение (195) имеет различные корни, откуда следует, что $2\alpha + a_0 \neq 0$.

Новое уравнение для $v$ будет

$$v'' + \left(2\alpha + a_0 + \frac{2\rho + a_1}{z} + \ldots\right)v' + \\ + \left(\frac{\rho^2 + (a_1 - 1)\rho + b_2'}{z^2} + \frac{a_2\rho + b_3'}{z^3} + \ldots\right)v = 0. \tag{200}$$

Этому уравнению мы сможем формально удовлетворить уже рядом вида

$$v = c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots \tag{201}$$

Дифференцируя, подставляя в левую часть уравнения и применяя метод неопределенных коэффициентов, получим систему уравнений, из которых последовательно определяются $c_1, c_2, \dots$, а $c_0$ будет играть роль произвольного множителя. Напишем первое из этих уравнений:

$$-(2\alpha + a_0)\, c_1 + [\rho^2 + (a_1 - 1)\rho + b_2']\, c_0 = 0,$$

откуда

$$c_1 = \frac{\rho^2 + (a_1 - 1)\,\rho + \alpha a_2 + b_2}{2\alpha + a_0}\, c_0. \tag{202}$$

Окончательно получаем выражение вида

$$w = e^{\alpha z} z^{\rho} \left( c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots \right), \tag{203}$$

которое формально удовлетворяет уравнению (193). Если квадратное уравнение (195) имеет различные корни, то, используя каждый из них, мы построим вышеуказанным образом два выражения вида (203). Но, как оказывается, бесконечный ряд, входящий в выражение (203), будет, вообще говоря, рядом, расходящимся при всяком значении $z$.

Покажем это на одном частном примере. Возьмем уравнение

$$w'' + \left( a_0 + \frac{a_1}{z} \right) w' + \frac{b_2}{z^2}\, w = 0 \qquad (a_0 \neq 0). \tag{204}$$

В данном случае мы можем считать $\alpha = \rho = 0$ и, подставляя в левую часть уравнения (204) ряд вида (201), найдем следующие формулы для определения коэффициентов:

$$[n(n+1) - na_1 + b_2]\, c_n - (n+1)\, a_0 c_{n+1} = 0.$$

Возьмем отношение двух последовательных членов ряда (201). Пользуясь предыдущей формулой, получим для этого отношения следующее выражение:

$$\frac{c_{n+1}}{z^{n+1}} : \frac{c_n}{z^n} = \frac{n(n+1) - na_1 + b_2}{(n+1)\, a_0}\, \frac{1}{z},$$

из которого непосредственно следует, что при любом заданном $z$ упомянутое отношение стремится к бесконечности вместе с $n$, и, следовательно, построенный бесконечный ряд не может сходиться ни при каком $z$.

Рассмотрим теперь тот случай, когда уравнение (195) имеет двукратный корень. При этом $2\alpha + a_0 = 0$ и уравнение (196) имеет вид

$$u'' + \left( \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots \right) u' + \left( \frac{b_1'}{z} + \frac{b_2'}{z^2} + \dots \right) u = 0. \tag{205}$$

Вводя новую независимую переменную $t=\sqrt{z}$, получим уравнение

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\left(\frac{2a_1-1}{t}+\frac{2a_2}{t^2}+\frac{2a_3}{t^3}+\ldots\right)\frac{du}{dt}+$$
$$+\left(4b_1'+\frac{4b_2'}{t}+\frac{4b_3'}{t^2}+\ldots\right)u=0,$$

и для него квадратное уравнение (195) имеет вид $\alpha^2+4b_1'=0$, и если $b_1'\neq 0$, то мы имеем для уравнения рассмотренный выше случай различных корней уравнения (195).

Если же $b_1'=0$, то точка $w=\infty$ является регулярной особой точкой уравнения (205) или же неособой точкой.

Уравнение (112) является частным случаем уравнения (193). Для его решений мы получили асимптотические разложения (179) и (181), причем уравнения (117) для (112) совпадают с уравнением (195), а $p$ и $q$ совпадают с $(-\rho_1)$ и $(-\rho_2)$. Нетрудно показать, что полученные нами разложения (203) совпадают, с точностью до постоянного множителя, с асимптотическими разложениями (179) и (181). Таким образом, в случае уравнения (112) полученные формальные ряды являются асимптотическими представлениями некоторых решений этого уравнения. Это же будет иметь место и для общего уравнения (193). Асимптотические представления решения этого уравнения мы будем строить по методу последовательных приближений.

**117. Построение асимптотических разложений методом последовательных приближений.** Рассмотрим уравнение (200) и будем считать сначала $2\alpha+a_0=-1$. Перепишем его в виде

$$v''-v'=\frac{1}{z}p_1(z)v'+\frac{1}{z^2}q_1(z)v, \tag{206}$$

где $p_1(z)$ и $q_1(z)$ — ряды, расположенные по целым неотрицательным степеням $z^{-1}$, сходящиеся в некоторой области вида $|z|>r$.

Сначала мы будем рассматривать $z$ на луче $z>r$. Отметим следующий факт: уравнение

$$v_0''-v_0'=f(z),$$

где $f(z)$ непрерывна и интеграл

$$\int_{\infty}^{z} f(z)\,dz$$

существует, имеет единственное решение, равное единице при $z=+\infty$, и это решение выражается формулой

$$v_0(z)=1+e^z\int_{\infty}^{z}e^{-x}f(x)\,dx-\int_{\infty}^{z}f(x)\,dx.$$

Интегралы берутся по промежутку $(z, +\infty)$, и $z > r$. Если $f(x) \equiv 0$, то $v_0 \equiv 1$.

Легко видеть, что дифференциальное уравнение (206) вместе с указанным условием при $z = \infty$ равносильно следующему интегро-дифференциальному уравнению:

$$v(z) = 1 + \int_{\infty}^{z} (e^{z-x} - 1)\left[\frac{1}{x} p_1(x) v'(x) + \frac{1}{x^2} q_1(x) v(x)\right] dx. \quad (207)$$

Интегрируя по частям, получаем

$$v(z) - 1 = e^z \int_{\infty}^{z} e^{-x} \frac{1}{x} p_2(x) v(x)\, dx + \int_{\infty}^{z} \frac{1}{x^2} q_2(x) v(x)\, dx, \quad (208)$$

где

$$\begin{aligned} p_2(x) &= \frac{1}{x} q_1(x) - p_1'(x) + \frac{1}{x} p_1(x) + p_1(x), \\ q_2(x) &= -q_1(x) + x p_1'(x) - p_1(x) \end{aligned} \quad (209)$$

и $p_2(x)$, $q_2(x)$ — ряды того же типа, что и $p_1(x)$, $q_1(x)$, сходящиеся при $|z| > r$. Применим к уравнению (208) метод последовательных приближений, обозначая для краткости письма правую часть его через $A[v]$:

$$v_1 = 1, \quad v_n - 1 = A[v_{n-1}]. \quad (210)$$

Нетрудно видеть, что все $v_n(z)$ имеют производные всех порядков при $|z| > r$ и стремятся к единице при $z \to +\infty$. Из (210) следует

$$v_n(z) - v_{n-1}(z) = A[v_{n-1} - v_{n-2}]. \quad (211)$$

Фиксируем какое-либо $r_0 > r$, и пусть $m_k = \max |v_k(z) - v_{k-1}(z)|$ при $z$, меняющемся на промежутке $l_0$ $(r_0 \leqslant z < +\infty)$. Существует, очевидно, такая постоянная $M > 0$, что $|p_2(z)|$ и $|q_2(z)| \leqslant M$ на промежутке $l_0$. Предыдущая формула дает на этом промежутке

$$|v_n(z) - v_{n-1}(z)| \leqslant \frac{e^z M}{z} m_{n-1} \int_{z}^{\infty} e^{-x}\, dx + M m_{n-1} \int_{z}^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx, \quad (212)$$

откуда

$$m_n \leqslant \frac{2M}{z} m_{n-1}. \quad (213)$$

Фиксируя $r_1 > r_0$ так, чтобы иметь $r_1 > 2M$, получим на промежутке $l_1$ $(r_1 \leqslant z < +\infty)$

$$m_n \leqslant q m_{n-1} \quad (0 < q < 1). \quad (214)$$

Отсюда следует, что ряд

$$1 + [v_2(z) - v_1] + [v_3(z) - v_2(z)] + \ldots \quad (215)$$

равномерно сходится на $i_1$, т. е. $v_n(z)$ стремится к некоторой предельной функции $v(z)$ равномерно по $i_1$. Эта непрерывная функция есть сумма равномерно сходящегося ряда (215), и в силу (210) она является решением интегрального уравнения (208). Из этого уравнения следует, что $v(z)$ имеет на $i_1$ производные всех порядков и стремится к единице при $z \to +\infty$. Принимая во внимание (209) и интегрируя в правой части (208) по частям обратно тому, как это мы делали при переходе от (207) к (208), убедимся в том, что $v(z)$ удовлетворяет уравнению (207), а из этого следует, что $v(z)$ есть решение дифференциального уравнения (206) и $v(z) \to 1$ при $z \to +\infty$.

Переходим теперь к построению асимптотического разложения $v(z)$ на луче $z > 0$. Мы будем исходить при этом из формул (210). Выпишем явное выражение обозначения $\psi = A[\varphi]$:

$$\psi(z) = e^z \int_{\infty}^{z} e^{-x} \frac{1}{x} p_2(x) \varphi(x)\, dx + \int_{\infty}^{z} \frac{1}{x^2} q_2(x) \varphi(x)\, dx. \qquad (216)$$

При вычислении $v_2(z) - v_1(z)$ надо положить $\varphi(x) \equiv 1$. Пусть $n > 0$ — некоторое целое число. Докажем следующее утверждение:

Теорема. *Если $\varphi(z)$ имеет на $i_1$ степенное асимптотическое разложение вида*

$$\varphi(z) = \frac{a_k}{z^k} + \frac{a_{k+1}}{z^{k+1}} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{z^{n-1}} + O(z^{-n}) \quad (k \geqslant 1), \qquad (217)$$

*то $\psi(z)$ имеет разложение вида*

$$\psi(z) = \frac{b_{k+1}}{z^{k+1}} + \frac{b_{k+2}}{z^{k+2}} + \ldots + \frac{b_n}{z^n} + O(z^{-n-1}), \qquad (218)$$

*где $b_s$ зависят от $a_s$.*

При подстановке в правую часть (216) вместо $\varphi(x)$ последнего слагаемого выражения (217), имеющего при больших $|x|$ оценку

$$|O(x^{-n})| \leqslant \frac{a}{x^n},$$

где $a$ — постоянная, получим, применяя оценки, аналогичные (212) и (213), величину $O(z^{-n-1})$. При подстановке слагаемых вида $\frac{a_s}{z^s}$ $(s = k, k+1, \ldots, n-1)$ получим

$$\psi_s(z) = a_s e^z \int_{\infty}^{z} e^{-x} \frac{1}{x^{s+1}} p_2(x)\, dx + a_s \int_{\infty}^{z} \frac{1}{x^{s+2}} q_2(x)\, dx. \qquad (219)$$

Во втором интеграле подинтегральная функция есть ряд по целым положительным степеням, начинающийся с члена порядка $\frac{1}{x^{s+2}}$. Почленное интегрирование, очевидно, допустимо, и мы получаем ряд того

же типа, начинающийся с $\frac{1}{z^{s+1}}$. В первом слагаемом формулы (219) мы получаем выражения вида

$$e^z \int_{\infty}^{z} e^{-x} x^{-m}\, dx \qquad (m = s+1,\ s+2, \ldots).$$

Для него мы получили асимптотическое представление в [112], которое начинается с члена порядка $z^{-m}$, причем берем $m = s+1, s+2, \ldots, n$, а члены, имеющие порядок выше $n$, заменяем на $O(z^{-n-1})$. Таким образом, для $\psi(z)$ получаем разложение (218). Коэффициенты $b_s$ зависят от $a_s$ и заданных функций $p_2(z)$ и $q_2(z)$. Теорема доказана.

Из нее следует при $\varphi(z) \equiv 1$, что

$$v_2(z) - 1 = v_2(z) - v_1 = \frac{b_1^{(1)}}{z} + \frac{b_2^{(1)}}{z^2} + \ldots + \frac{b_n^{(1)}}{z^n} + O(z^{-n-1}).$$

Применяя последовательно формулу (210), получаем

$$v_{k+1}(z) - v_k(z) = \frac{b_k^{(k)}}{z^k} + \frac{b_{k+1}^{(k)}}{z^{k+1}} + \ldots + \frac{b_n^{(k)}}{z^n} + O(z^{-n-1}).$$

Складывая, получаем

$$v_{n+1}(z) = 1 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \ldots + \frac{c_n}{z^n} + O(z^{-n-1}), \tag{220}$$

где

$$c_1 = b_1^{(1)};\ c_2 = b_2^{(1)} + b_2^{(2)}; \ldots;\ c_n = b_n^{(1)} + b_n^{(2)} + \ldots + b_n^{(n)}.$$

Далее имеем

$$v_{n+1}(z) - v_n(z) = O(z^{-n-1}),\ \text{т. е.}\ |v_{n+1}(z) - v_n(z)| \leqslant bz^{-n-1},$$

где $b$ — постоянная. Принимая во внимание (213), получаем

$$|v(z) - v_{n+1}(z)| \leqslant |v_{n+2}(z) - v_{n+1}(z)| + |v_{n+3}(z) - v_{n+2}(z)| + \ldots \leqslant \leqslant \frac{K}{1-q} z^{-n-1},$$

т. е. $v(z) - v_{n+1}(z) = O(z^{-n-1})$, и в силу (220) имеем окончательно асимптотическое представление

$$v(z) = 1 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \ldots + \frac{c_n}{z^n} + O(z^{-n-1}) \tag{221}$$

при любом фиксированном целом $n$, или

$$v(z) \sim 1 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \ldots \tag{222}$$

Мы получили это разложение на положительной части вещественной оси. Все вышеприведенные рассуждения применимы в секторе $-\frac{\pi}{2} + \varepsilon <$

$< \arg z < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, в котором при интегрировании, например, вдоль луча с постоянным аргументом от $z$ до $\infty$ вещественная часть показателя $e^{-z}$ отрицательна и беспредельно возрастает по модулю. Последовательные приближения, получаемые по формуле (210), будут регулярными функциями $z$ в указанном секторе, и в нем будет иметь место асимптотическое разложение (222). Можно показать, что этот результат имеет место и в более широком секторе, а именно в секторе, который получается из полной плоскости исключением из нее сектора с углом $2\varepsilon$, биссектрисой которого является отрицательная часть вещественной оси, где $\varepsilon > 0$ — любое малое фиксированное число. В основном сохраняется предыдущее доказательство, но интегрирование в формуле (210) надо проводить сначала по окружности с центром в начале, а затем по лучу $\arg z = \gamma$, содержащемуся в промежутке $-\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \gamma < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$.

Мы рассматривали выше лишь тот случай, когда $2\alpha + a_0 = -1$. Если $2\alpha + a_0$ есть любое отрицательное число, т. е. $2\alpha + a_0 \neq 0$ и $\arg(2\alpha + a_0) = \pi$, то, вводя вместо $z$ новую независимую переменную $z' = az$, где $a > 0$ — подходящим образом выбранная постоянная, мы можем привести уравнение (200) к случаю $2\alpha + a_0 = -1$. Положим, что $\arg(2\alpha + a_0) = \omega$. Совершая замену $z' = -e^{i\omega} z$, которой соответствует поворот плоскости вокруг начала на угол $(\omega + \pi)$, мы заменим $2\alpha + a_0$ на отрицательное число и будем иметь разложение (222). Возвращаясь к исходной плоскости, мы можем утверждать, что асимптотическое разложение (222) будет иметь место в секторе $-\omega + \varepsilon \leqslant \arg z \leqslant 2\pi - \omega - \varepsilon$.

Вернемся к исходному уравнению (193). Обозначая через $\alpha_1$ и $\alpha_2$ корни (различные) уравнения (195) и вводя числа

$$\rho_k = -\frac{a_1\alpha_k + b_1}{2\alpha_k + a_0} \qquad (k = 1,\ 2),$$

мы сможем сформулировать следующий результат: уравнение (193) имеет два решения, имеющих асимптотические представления

$$w_k(z) = e^{\alpha_k z}\, z^{\rho_k}\left[1 + \frac{c_1^{(k)}}{z} + \frac{c_2^{(k)}}{z^2} + \ldots + \frac{c_n^{(k)}}{z^n} + O(z^{-n-1})\right] \qquad (223)$$

в секторах

$$-\omega_k + \varepsilon \leqslant \arg z \leqslant 2\pi - \omega_k - \varepsilon \qquad (224)$$

$$(\omega_k = \arg(2\alpha_k + a_0);\ k = 1,\ 2),$$

иначе говоря, на полной плоскости с выделением из нее сектора с углом $2\varepsilon$, имеющим биссектрисой прямую $\arg z = -\omega_k$. Отметим, что $2\alpha_1 + a_0 = \alpha_1 - \alpha_2$ и $2\alpha_2 + a_0 = \alpha_2 - \alpha_1$. В [116] мы получили формально разложение решения уравнения (193) в ряд вида (203),

которое определялось с точностью до постоянного множителя. Покажем, что полученное выше асимптотическое разложение (223) совпадает с указанным формальным разложением (203) при $c_0 = 1$. Это достаточно сделать для случая $2\alpha + a_0 = -1$. Из (208) следует

$$v'(z) = \frac{1}{z} p_2(z)\, v(z) + \frac{1}{z^2} q_2(z)\, v(z) + e^z \int_{\infty}^{z} e^{-x} \frac{1}{x} p_2(x)\, v(x)\, dx. \quad (225)$$

Рассуждая, как и выше, убедимся в том, что правая часть, а следовательно и $v'(z)$, разлагается в асимптотический ряд вида

$$v'(z) \sim \frac{d_2}{z^2} + \frac{d_3}{z^3} + \ldots \quad (226)$$

Члены порядка $z^{-1}$ входят в первое и третье слагаемые правой части формулы (225) и взаимно сокращаются.

Интегрируя разложение (226) [**112**], получим

$$v(z) \sim 1 - \frac{d_2}{z} - \frac{d_3}{2z^2} + \ldots \quad (227)$$

Из уравнения (206) вытекает разложение $v''(z)$, и из вида правой части этого уравнения следует, что это разложение начинается с члена $z^{-m}$, где $m \geqslant 2$. Но, производя интегрирование этого разложения и принимая во внимание (226) и единственность разложения, можем утверждать, что разложение $v''(z)$ начинается с члена порядка $z^{-3}$. Из сказанного следует, что асимптотическое разложение можно почленно дифференцировать и что полученные таким образом разложения формально удовлетворяют уравнению (206), т. е. асимптотическое разложение (223) совпадает с полученным в [**116**] разложением при $c_0 = 1$. Если мы будем почленно дифференцировать уравнение (206), то убедимся в том, что производные всех порядков функции $v(z)$ имеют асимптотические разложения.

К уравнениям вида (112), к которым мы применяли метод Лапласа, естественно, применим и метод последовательных приближений. При применении метода Лапласа мы получали непосредственно коэффициенты асимптотических рядов для решений, и нетрудно проверить, что они и сами решения совпадают с точностью до произвольного постоянного множителя с теми, которые получаются формальным разложением по методу из [**116**]. Для уравнений вида (112) метод Лапласа и метод последовательных приближений приводят, естественно, к одному и тому же результату. Но представление решения в виде интеграла Лапласа легко приводит, как это мы видели для функций Ханкеля, к сектору с углом $3\pi$, внутри которого асимптотическая формула имеет место. Такое расширение сектора уже не имеет места для функций Бесселя.

Указанное выше применение метода последовательных приближений для луча $z>0$ изложено в курсе Пикара (Picard, Traité d'Analyse, t. III, 1927) и в общем случае в книге: Д. Трикоми Дифференциальные уравнения, 1962.

**118. Функции Эйри.** Преобразование Лапласа имеет применения и к уравнениям, отличным от уравнений вида (112). Рассмотрим уравнение

$$w'' - zw = 0. \tag{228}$$

Всякое его решение есть целая функция от $z$ [98]. Интегрируя с помощью степенного ряда, получаем все его решения в виде

$$w(z) = w(0)\left[1 + \frac{z^3}{2\cdot 3} + \frac{z^6}{(2\cdot 5)(3\cdot 6)} + \frac{z^9}{(2\cdot 5\cdot 8)(3\cdot 6\cdot 9)} + \dots\right] + \\ + w'(0)\left[z + \frac{z^4}{3\cdot 4} + \frac{z^7}{(3\cdot 6)(4\cdot 7)} + \frac{z^{10}}{(3\cdot 6\cdot 9)(4\cdot 7\cdot 10)} + \dots\right]. \tag{229}$$

Применим к уравнению (228) преобразование Лапласа. Проделывая все указанные в [108] вычисления, придем к формуле

$$w(z) = C\int_l e^{-\frac{z'^3}{3} + zz'}\,dz' \tag{230}$$

при условии

$$\left[e^{-\frac{z'^3}{3}} e^{zz'}\right]_l = 0. \tag{231}$$

На плоскости $z'$ функция $e^{-\frac{z'^3}{3}}$ быстро стремится к нулю в секторах

$$|\arg z'| \leqslant \frac{\pi}{6} - \varepsilon; \quad \left|\arg z' - \frac{2\pi}{3}\right| \leqslant \frac{\pi}{6} - \varepsilon; \quad \left|\arg z' - \frac{4\pi}{3}\right| \leqslant \frac{\pi}{6} - \varepsilon, \tag{232}$$

где $\varepsilon > 0$ — любое малое число. В соответствии с этим решения уравнения (228) при любом комплексном $z$ определяются обычно следующим образом:

$$w_k(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{l_k} e^{zz' - \frac{z'^3}{3}}\,dz' \ (k = 1, 2); \quad v(z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\,i}\int_{l_3} e^{zz' - \frac{z'^3}{3}}\,dz'. \tag{233}$$

Контур $l_1$ идет по лучу $\arg z' = \frac{4\pi}{3}$ из бесконечности в точку $z' = 0$, а затем по лучу $\arg z' = 0$ на $(+\infty)$; $l_2$ — из бесконечности по лучу $\arg z' = \frac{2\pi}{3}$ в точку $z' = 0$, а затем из начала по лучу $\arg z' = 0$ на $(+\infty)$; $l_3$ — из бесконечности по лучу $\arg z' = \frac{4\pi}{3}$, а затем по лучу $\arg z' = \frac{2\pi}{3}$ на бесконечность. Как легко видеть,

$$v(z) = \frac{w_1(z) - w_2(z)}{2i}. \tag{234}$$

Из определения $w_k(z)$ следует, что $\overline{w_1(z)} = w_2(\bar{z})$ и, в частности, при $z$ вещественном $\overline{w_1(z)} = w_2(z)$, откуда следует, что функция $v(z)$ вещественна при вещественном $z$. Второе вещественное решение при вещественном $z$ определим формулой

$$u(z) = \frac{w_1(z) + w_2(z)}{2},$$

и отсюда следует при любом $z$

$$w_1(z) = u(z) + v(z)\, i.$$

Функции $u(z)$ и $v(z)$ обычно называются функциями **Эйри**. Иногда они обозначаются следующим образом:

$$u(z) = Bi(z), \quad v(z) = Ai(z).$$

Пользуясь определениями $w_k(z)$, нетрудно получить значения функций и их производных при $z = 0$:

$$w_1(0) = \frac{2\sqrt{\pi}}{3^{\frac{2}{3}}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} e^{i\frac{\pi}{6}}; \quad w'(0) = \frac{2\sqrt{\pi}}{3^{\frac{4}{3}}\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} e^{-i\frac{\pi}{6}}, \tag{235}$$

$$w_2(0) = \overline{w_1(0)}; \quad w_2'(0) = \overline{w_1'(0)},$$
$$w_1(0) = u(0) + v(0)\, i; \quad w_1'(0) = u'(0) + v'(0)\, i.$$

Уравнение (228) можно преобразовать в уравнение Бесселя (131) при $n = \pm\frac{1}{3}$ [II, 42]. Принимая во внимание вид разложения (229) и формулы (141) и (235), получим

$$u(-z) = \sqrt{\frac{\pi}{3} z}\left[J_{-\frac{1}{3}}(x) - J_{\frac{1}{3}}(x)\right], \quad \left(x = \frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}}\right) \tag{236$_1$}$$

$$v(-z) = \frac{1}{3}\sqrt{\pi z}\left[J_{-\frac{1}{3}}(x) + J_{\frac{1}{3}}(x)\right]$$

и

$$u(z) = \sqrt{\frac{\pi}{3} z}\left[I_{-\frac{1}{3}}(x) + I_{\frac{1}{3}}(x)\right], \tag{236$_2$}$$

$$v(z) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi z}\left[I_{-\frac{1}{3}}(x) - I_{\frac{1}{3}}(x)\right],$$

где

$$I_k(x) = e^{-\frac{1}{2}k\pi i} J_k(xi).$$

Из асимптотики функций Бесселя можно получить асимптотику функций Эйри. Выпишем соответствующие результаты, считая $z>0$ и большим:

$$\begin{aligned}
w_1(z) &= z^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{2}{3}z^{3/2}}\left[1+O\left(z^{-\frac{3}{2}}\right)\right],\\
u(z) &= z^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{2}{3}z^{3/2}}\left[1+O\left(z^{-\frac{3}{2}}\right)\right],\\
v(z) &= \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{2}{3}z^{3/2}}\left[1+O\left(z^{-\frac{3}{2}}\right)\right],\\
w_1(-z) &= z^{-\frac{1}{4}} e^{\left(\frac{2}{3}z^{3/2}+\frac{\pi}{4}\right)i}\left[1+O\left(z^{-\frac{3}{2}}\right)\right],\\
u(-z) &= z^{-\frac{1}{4}}\left[\cos\left(\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}+\frac{\pi}{4}\right)+O\left(z^{-\frac{3}{2}}\right)\right],\\
v(-z) &= z^{-\frac{1}{4}}\left[\sin\left(\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}+\frac{\pi}{4}\right)+O\left(z^{-\frac{3}{2}}\right)\right].
\end{aligned} \tag{237}$$

Отметим, что из вида уравнения (228) непосредственно следует, что все его вещественные решения — колеблющиеся при $z<0$ и неколеблющиеся при $z>0$ [II, 31]. Из написанных выше формул следует, что $u(z)\to+\infty$ и $v(z)\to 0$ при $z\to+\infty$. При $z>0$ функции $u(z)$ и $v(z)$ положительны.

Отметим возможность видоизменения контуров интегрирования при определении функций $v(z)$ и $u(z)$ при вещественном $z$. Лучи $\arg z=\frac{4\pi}{3}$ и $\arg z=\frac{2\pi}{3}$, участвующие в контуре $l_3$, интегрирование по которому определяет $v(z)$, можно сместить на мнимую ось. Доказательство этого аналогично доказательству леммы Жордана [60]. Кратко наметим его. Надо доказать, что интегралы

$$\int_{C_{R_1}} e^{zz'-\frac{z'^3}{3}}\,dz' \quad \text{и} \quad \int_{C_{R_2}} e^{zz'-\frac{z'^3}{3}}\,dz'$$

по дугам окружностей $z=R_1e^{i\varphi}$ и $z=R_2e^{i\psi}$, где

$$\frac{4}{3}\pi\leqslant\varphi\leqslant\frac{3\pi}{2} \quad \text{и} \quad \frac{\pi}{2}\leqslant\psi\leqslant\frac{2\pi}{3},$$

стремятся к нулю при $R_1$ и $R_2\to+\infty$. При помощи элементарных преобразований это сводится к тому, что выражение

$$I=R\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{|z|R\sin\omega-\frac{R^3}{3}\sin 3\omega}\,d\omega \tag{238}$$

стремится к нулю при $R\to+\infty$. Используя неравенства

$$\sin\omega\leqslant\sin 3\omega;\quad \cos\omega\geqslant\cos\frac{\pi}{6}\quad\left(0\leqslant\omega\leqslant\frac{\pi}{6}\right),$$

$$I<R\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos\omega}{\cos\frac{\pi}{6}}e^{\left(|z|R-\frac{1}{3}R^3\right)\sin\omega}d\omega=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{6}}\frac{R}{|z|R-\frac{1}{3}R^3}e^{\left(|z|R-\frac{1}{3}R^3\right)\sin\omega}\Bigg|_{\omega=0}^{\omega=\frac{\pi}{6}}$$

непосредственно получаем то, что надо было доказать. Таким образом, имеем при вещественном $z$

$$v(z)=\frac{1}{2\sqrt{\pi i}}\int_{-i\infty}^{+i\infty}e^{\left(zz'-\frac{z'^3}{3}\right)}dz'=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\left(zx+\frac{x^3}{3}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\cos\left(zx+\frac{x^3}{3}\right)dx. \qquad (239)$$

Совершенно аналогично для $u(z)$ при вещественном $z$ получим

$$u(z)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\left[e^{zx-\frac{x^3}{3}}+\sin\left(zx+\frac{x^3}{3}\right)\right]dx. \qquad (240)$$

Можно показать, что все корни $v(z)$ и $v'(z)$ находятся на луче $\arg z=\pi$.

Отметим, что если $w(z)$ есть какое-либо решение уравнения (228), то и $w\left(ze^{\pm\frac{2\pi}{3}i}\right)$ есть также решение этого уравнения. В этом легко убедиться на основании формулы (229) или пользуясь заменой независимой переменной $z=e^{\pm\frac{2\pi}{3}i}\tau$. Иногда вместо уравнения (228) пишут уравнение

$$w_1''(z)+zw_1(z)=0. \qquad (241)$$

Легко видеть, что если $w(z)$ удовлетворяет уравнению (228), то $w(-z)$ удовлетворяет последнему уравнению. Подробное изложение результатов, касающихся функций Эйри, их приложений и таблиц, содержится в книге академика В. А. Фока (V. A. Fock, Elektromagnetic Diffraction and Propagation Problems, London, Pergamon Press, 1965), которой мы пользовались при изложении настоящего материала. В упомянутой книге $w_1(z)$ обозначается через $w(z)$.

**119. Асимптотика при большом значении параметра.** Прежде чем переходить к аналитической теории систем линейных дифференциальных уравнений, мы рассмотрим два вопроса для линейных уравнений второго порядка без предположения аналитичности коэффициентов уравнений, а именно: асимптотику решений уравнений при больших значениях параметра, входящего в уравнения, и уравнения с периодическими коэффициентами. Начнем с первого вопроса, который мы рассмотрим кратко, не останавливаясь на подробных доказательствах.

Мы будем рассматривать уравнение вида

$$y''+[\lambda^2p(x)+r(x)]y=0, \qquad (242)$$

где функции $p(x)$ и $r(x)$ — вещественные функции, определенные на конечном промежутке $i_0$ $(a\leqslant x\leqslant b)$, и $\lambda>0$ — параметр. Отметим, что уравнение более общего вида

$$u''+q(x)u'+[\lambda^2p(x)+r_1(x)]u=0$$

приводится к случаю (242) заменой

$$u=ye^{-\int q(x)\,dx}.$$

В дальнейшем будем предполагать, что $p(x)$ непрерывна с производными до второго порядка на замкнутом промежутке $i_0$ и $r(x)$ — непрерывная функция. Существенную роль при исследовании решений уравнения (242) при больших значениях $\lambda$ играет знак $p(x)$.

Рассмотрим сначала тот случай, когда $p(x) > 0$ на промежутке $i_0$. При больших $\lambda$ коэффициент $\lambda^2 p(x)$ является превалирующим, и целью дальнейшего преобразования уравнения (242) является такое его преобразование, при котором этот превалирующий коэффициент приведется просто к $\lambda^2$. Для этого вместо $x$ введем новую независимую переменную $\tau$ и вместо $y$ — новую функцию $v$ по формулам

$$\tau = \int_a^x p(t)\,dt, \quad v = \sqrt[4]{p(x)}\,y.$$

Интервал $i_0$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ преобразуется в некоторый новый интервал $i_1$ $(\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta)$, а уравнение (242), как нетрудно проверить, приводится к виду

$$\frac{d^2v}{d\tau^2} + \lambda^2 v = s(\tau)\,v, \tag{243}$$

где

$$s(\tau) = \frac{1}{4}\frac{p''(x)}{p^2(x)} - \frac{5}{16}\frac{p'^2(x)}{p^3(x)} - \frac{r(x)}{p(x)}$$

есть непрерывная на $i_1$ функция. Напомним, что неоднородное уравнение

$$\frac{d^2v}{d\tau^2} + \lambda^2 v = f(\tau) \tag{244}$$

имеет общее решение [II, 34]

$$v(\tau) = C_1 \sin\lambda\tau + C_2\cos\lambda\tau + \frac{1}{\lambda}\int_{\tau_0}^{\tau} \sin[\lambda(\tau - t)]\,f(t)\,dt,$$

где $\tau_0$ — любое фиксированное значение из промежутка $i_1$. В случае уравнения (243) роль $f(\tau)$ играет $s(\tau)\,v(\tau)$, и уравнение (244) приводится к интегральному уравнению

$$v(\tau) = C_1 \sin\lambda\tau + C_2\cos\lambda\tau + \frac{1}{\lambda}\int_{\tau_0}^{\tau} \sin[\lambda(\tau - 1)]\,s(t)\,v(t)\,dt, \tag{245}$$

к решению которого можно применить метод последовательных приближений. В качестве нулевого приближения берем

$$v_0(\tau) = C_1 \sin\lambda\tau + C_2\cos\lambda\tau,$$

а последующие поправки определяются формулами

$$v_{n+1}(\tau) = \frac{1}{\lambda}\int_{\tau_0}^{\tau} \sin[\lambda(\tau - 1)]\,s(t)\,v_n(t)\,dt.$$

Непрерывная функция $s(t)$ ограничена на промежутке $i_1$, т. е. $|s(t)| \leqslant M$, где $M > 0$ — некоторая постоянная. По индукции нетрудно доказать неравенство

$$|v_n(\tau)| \leqslant \frac{|C_1| + |C_2|}{n!}\,\frac{M^n\,|\tau - \tau_0|^n}{\lambda}, \tag{246}$$

из которого следует, что ряд

$$v_0(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} v_n(\tau) \tag{247}$$

равномерно сходится на промежутке $i_1$. Его сумма удовлетворяет уравнению (245), т. е. уравнению (243). Далее из оценок (246) следует, что

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} v_n(\tau) \right| = O(\lambda^{-1})$$

равномерно относительно $\tau$. Таким образом, имеем

$$v(\tau) = v_0(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} v_n(\tau) = C_1 \sin \lambda\tau + C_2 \cos \lambda\tau + O(\lambda^{-1})$$

или, возвращаясь к исходным переменным $x$ и $y$, получаем асимптотику решений уравнения (242) при больших $\lambda$:

$$y(x) = \frac{C_1}{\sqrt[4]{p(x)}} \sin\left(\lambda \int_{x_0}^{x} \sqrt{p(t)}\, dt\right) + \frac{C_2}{\sqrt[4]{p(x)}} \cos\left(\lambda \int_{x_0}^{x} \sqrt{p(t)}\, dt\right) + O(\lambda^{-1}). \tag{248}$$

Мы могли бы вместо конечного промежутка $a \leqslant x \leqslant b$ рассматривать и бесконечный промежуток в одну или обе стороны. При этом остаточный член имеет равномерную оценку $|O(\lambda^{-1})| \leqslant \frac{A}{\lambda}$, где $A$ — положительная постоянная во всяком конечном промежутке изменения $x$, но величина $A$ зависит от выбора конечного промежутка и может беспредельно возрастать при его расширении.

В связи со сказанным выше сделаем одно замечание. Рассмотрим уравнение

$$y'' + \lambda^2 p(x)\, y = 0, \tag{249}$$

где $p(x)$ — положительная непрерывная периодическая функция на бесконечном промежутке $(-\infty, +\infty)$. Для любого конечного промежутка мы можем применить формулу (248), но нельзя утверждать, что решения уравнения (249) будут ограниченными функциями на всем бесконечном промежутке, хотя первые два слагаемых правой части дают, очевидно, ограниченную функцию на всем бесконечном промежутке, ибо $p(x) \geqslant m > 0$, где $m$ — некоторая постоянная, на всем бесконечном промежутке в силу периодичности. Оказывается, что в рассматриваемом случае может иметь место следующий факт: при одних значениях $\lambda$ все решения уравнения (249) — ограниченные функции на бесконечном промежутке, а при других значениях $\lambda$ этого свойства ограниченности всех решений уже не будет. Более подробно мы об этом будем говорить в дальнейшем, при исследовании уравнений с периодическими коэффициентами.

Совершенно аналогично случаю $p(x) > 0$ можно рассмотреть и случай $p(x) < 0$ на конечном промежутке $a \leqslant x \leqslant b$, и вместо тригонометрических функций, входящих в формулу (248), получатся показательные функции

$$y_1(x) = \frac{C_1}{\sqrt[4]{-p(x)}} e^{\lambda \int_a^x \sqrt{-p(t)}\, dt} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

$$y_2(x) = \frac{C_2}{\sqrt[4]{-p(x)}} e^{-\lambda \int_a^x \sqrt{-p(t)}\, dt} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right). \tag{250}$$

Переходим теперь к более сложному случаю, когда $p(x)$ в уравнении

$$y'' + [\lambda^2 p(x) + r(x)]\, y = 0 \tag{251}$$

меняет знак на рассматриваемом промежутке. Не ограничивая общности, можем считать, что $x = 0$ находится внутри $(a, b)$ и $p(x) = xp_1(x)$, где $p_1(x) > 0$ при $a \leqslant x \leqslant b$. В данном случае основным «эталонным» уравнением является уравнение Эйри

$$w''(x) - xw(x) = 0. \tag{252}$$

Относительно гладкости $p(x)$ и $r(x)$ делаются прежние предположения. Рассмотрим сначала случай $0 \leqslant x \leqslant b$, т. е. $p(x) \geqslant 0$. Будем искать решение уравнения (251) в виде

$$y(x) = A(x)\, w[\omega_1(x)],$$

где $w(x)$ — любое решение уравнения (252), а функции $A(x)$ и $\omega_1(x)$ выбираются так, чтобы в полученном после подстановки в (251) уравнении сократились члены с положительными степенями большого параметра $\lambda$. Таким путем мы придем к приближенному решению уравнения (251):

$$y = \frac{1}{\sqrt{\omega'(x)}}\, w\left[\lambda^{\frac{2}{3}}\, \omega(x)\right], \tag{253}$$

где

$$\omega(x) = \left[\frac{3}{2}\int_0^x \sqrt{p(x)}\, dx\right]^{\frac{2}{3}}. \tag{$253_1$}$$

Функция (253) в точности удовлетворяет уравнению

$$y'' + [\lambda^2 p(x) + r_0(x)]\, y = 0, \tag{254}$$

где

$$r_0 = \frac{A''(x)}{A(x)} \quad \text{и} \quad A(x) = \frac{1}{\sqrt{\omega'(x)}}.$$

При любом $r(x)$ уравнение (251) можно записать в виде

$$y'' + [\lambda^2 p(x) + r_0(x)]\, y = f(x)\, y, \tag{$251_1$}$$

где

$$f(x) = r_0(x) - r(x).$$

Функция $f(x)$ непрерывна при $0 \leqslant x \leqslant b$.

В дальнейшем мы будем придерживаться и пользоваться результатами и обозначениями из [118].

Теорема 1. *Существуют решения уравнения* (251), *имеющие при* $0 \leqslant x \leqslant b$ *вид*

$$\begin{aligned} Y_1(x, \lambda) &= \frac{1}{\sqrt{\omega'(x)}}\, v\left[\lambda^{\frac{2}{3}}\, \omega(x)\right][1 + e_1(x, \lambda)], \\ Y_2(x, \lambda) &= \frac{1}{\sqrt{\omega'(x)}}\, u\left[\lambda^{\frac{2}{3}}\, \omega(x)\right][1 + e_2(x, \lambda)], \end{aligned} \tag{255}$$

*где* $e_k(x, \lambda)$ *непрерывны при* $0 \leqslant x \leqslant b$, $\lambda > 0$, *и имеют место оценки*

$$|e_k(x, \lambda)| \leqslant \frac{C}{\lambda} \quad (k = 1, 2), \tag{256}$$

*где постоянная* $C$ *не зависит ни от* $x$, *ни от* $\lambda$.

Напомним, что $v(x)$ и $u(x)$ — вещественные решения уравнения (252), причем $v(x) \to 0$ и $u(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$.

Наметим доказательство утверждения для $Y_1(x, \lambda)$. Для $Y_2(x, \lambda)$ оно аналогично. Применяя метод вариации произвольных постоянных к уравнению $(251_1)$, получим для решений уравнения (251), которое совпадает с $(251_1)$, интегральное уравнение

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \int_b^x \frac{y_1(x)\, y_2(t) - y_2(x)\, y_1(t)}{W(y_1, y_2)} f(t)\, y(t)\, dt, \tag{257}$$

где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — решения уравнения (254):

$$y_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\omega'(x)}}\, v\left[\lambda^{\frac{2}{3}}\, \omega(x)\right];$$

$$y_2(x) = \frac{1}{\sqrt{\omega'(x)}}\, u\left[\lambda^{\frac{2}{3}} \omega(x)\right], \tag{257$_1$}$$

и $W(y_1, y_2)$ — определитель Вронского этих двух решений. Для него нетрудно получить $W(y_1, y_2) = \lambda^{\frac{2}{3}}$. Положим $C_1 = 1$, $C_2 = 0$ и введем в уравнение (257) вместо $y(x)$ новую функцию $z(x)$:

$$y(x) = y_1(x)\, z(x). \tag{258}$$

Для $z(x)$ получим уравнение

$$z(x) = 1 + \lambda^{-\frac{2}{3}} \int_b^x \left[y_1(t)\, y_2(t) - y_1^2(t)\, \frac{y_2(x)}{y_1(x)}\right] f(t)\, z(t)\, dt. \tag{259}$$

Выбор нижнего предела интегрирования $(b > x)$ служит для оценки вычитаемого в квадратной скобке. При доказательстве теоремы для $Y_2(x, \lambda)$ в уравнении (257) надо положить $C_1 = 0$, $C_2 = 1$ и выбрать нижний предел интегрирования равным нулю. При дальнейшем доказательстве используется следующая

Лемма. *Если в интегральном уравнении на конечном промежутке*

$$z(x) = F(x) + \int_c^x K(x, t)\, z(t)\, dt \tag{260}$$

*с непрерывным в квадрате* $c \leqslant x \leqslant d$, $c \leqslant t \leqslant d$ *ядром и непрерывной функцией* $F(x)$ *выполнено условие*

$$\int_c^d |K(x, t)|\, dt \leqslant M < 1 \quad (c \leqslant x \leqslant d), \tag{261}$$

*то уравнение* (259) *имеет единственное решение* $z(x)$, *причем*

$$z(x) = F(x) + R(x),$$

*где*

$$|R(x)| \leqslant \frac{M}{1-M} \cdot \max_{c \leqslant x \leqslant d} |F(x)|. \tag{262}$$

*Кроме того, если* $K(x, t)$ *непрерывно зависит от параметра* $\lambda$, *который меняется на конечном или бесконечном промежутке, причем выполнено условие* (261) *и* $M$ *не зависит от* $\lambda$, *то* $z(x)$ *будет непрерывной функцией переменных* $x$ *и* $\lambda$.

Доказательство леммы легко проводится методом последовательных приближений.

Из упомянутой леммы следует, что для доказательства сформулированной теоремы достаточно установить оценку

$$\int_x^b \left| y_1(t) y_2(t) - y_1^2(t) \frac{y_2(x)}{y_1(x)} \right| \cdot |f(t)| \, dt \leqslant C\lambda^{-\frac{1}{3}}, \tag{263}$$

где $C$ не зависит ни от $x$, ни от $\lambda$.

Кратко наметим путь получения этой оценки. Буквой $C$ будем обозначать различные постоянные (не зависящие от $\lambda$). Из определения $\omega(x)$ следует, что $[\omega'(x)]^{-1} \leqslant C_1$, и, принимая во внимание формулы ($257_1$) и (237), получаем

$$|y_1(t) y_2(t)| \leqslant C_2 [\omega(t)]^{-\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{3}},$$

откуда следует

$$\int_x^b |y_1(t) y_2(t) f(t)| \, dt \leqslant \int_0^b C_3 \lambda^{-\frac{1}{3}} [\omega(t)]^{-\frac{1}{2}} dt \leqslant C_4 \lambda^{-\frac{1}{3}}. \tag{264}$$

Интеграл

$$J_1 = \int_x^b \left| \frac{y_2(x)}{y_1(x)} \right| y_1^2(t) |f(t)| \, dt$$

имеет еще меньший порядок по $\lambda$. Переходим к его оценке

$$J_1 \leqslant C_5 \left| \frac{u\left[\lambda^{\frac{2}{3}} \omega(x)\right]}{v\left[\lambda^{\frac{2}{3}} \omega(x)\right]} \right| \int_x^b v^2 \left[\lambda^{\frac{2}{3}} \omega(t)\right] dt.$$

Положив $\lambda^{\frac{2}{3}} \omega(x) = \alpha$, $\lambda^{\frac{2}{3}} \omega(t) = \beta$, получим

$$J_1 \leqslant C_6 \frac{u(\alpha)}{v(\alpha)} \lambda^{-\frac{2}{3}} \int_\alpha^{\lambda^{\frac{2}{3}} \omega(b)} v^2(\beta) \frac{d\beta}{\omega'(t)} \leqslant C_6 \lambda^{-\frac{2}{3}} \frac{\int_\alpha^\infty v^2(\beta) \, d\beta}{\frac{v(\alpha)}{u(\alpha)}}.$$

Легко проверить, что $u'v - v'u = 1$. Используя это и применяя к написанной выше дроби правило Лопиталя, получим, что ее предел при $\alpha \to +\infty$ равен пределу $u^2(\alpha)\, v^2(\alpha)$, а в силу (237) этот предел равен нулю. Из указанных выше оценок непосредственно следует и требуемая оценка. Сформулированная выше лемма дает для решения интегрального уравнения (259)

$$z(x) = 1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

откуда в силу (258) следует утверждение теоремы 1.

Для случая $a \leqslant x \leqslant 0$ $(p(x) \leqslant 0)$ функция $\omega(x)$ определяется равенством

$$\omega(x) = -\left[\frac{3}{2}\int_0^x \sqrt{-p(x)}\, dx\right]^{\frac{2}{3}}. \qquad (253_2)$$

На всем промежутке $a \leqslant x \leqslant b$ функция $\omega(x)$ является гладкой и $\omega'(x) > 0$.

Функции $Y_j(x, \lambda)$ $(j = 1, 2)$, входящие в теорему 1, имеют, очевидно, смысл и на промежутке $a \leqslant x \leqslant 0$. Используя асимптотику, выражаемую формулами (237), получаем:

Теорема 2. *Решения $Y_1(x, \lambda)$, $Y_2(x, \lambda)$ уравнения* (251) *имеют при $a \leqslant x \leqslant b$, $\lambda > 0$ вид*

$$Y_1(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{\omega'(x)}}\left[v(t) + u(t)\, O\left(\frac{1}{\lambda}\right) + v(t)\, O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right],$$

$$Y_2(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{\omega'(x)}}\left[u(t) + u(t)\, O\left(\frac{1}{\lambda}\right) + v(t)\, O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right],$$

*где $t = \lambda^{\frac{2}{3}}\omega(x)$ и $O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ — функции $x$ и $\lambda$, допускающие оценку*

$$\left|O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right| \leqslant \frac{C}{\lambda},$$

*причем $C$ не зависит ни от $x$, ни от $\lambda$.*

Доказательство этой теоремы, основанное на исследовании интегрального уравнения (257), мы подробно приводить не будем. Отметим лишь, что интегральное уравнение для $Y_1(x, \lambda)$ имеет вид

$$Y_1(x, \lambda) = y_1(x) + \int_x^b \frac{y_1(x)\, y_2(t) - y_2(x)\, y_1(t)}{W(y_1, y_2)}\, f(t)\, Y_1(t, \lambda)\, dt$$

и интеграл представляется в виде суммы двух интегралов по промежуткам $(0, b)$ и $(x, 0)$. В первом из интегралов можно использовать асимптотику $Y_1(x, \lambda)$ из теоремы 1, после чего этот интеграл приводит к выражению

$$y_1(x)\left[1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right] + y_2(x)\, O\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

а в интеграле по промежутку $(x, 0)$ вводится вместо $Y_1(x, \lambda)$ новая искомая функция:

$$V_1(x, \lambda) = \frac{Y_1(x, \lambda)}{\sqrt{y_1^2(x) + y_2^2(x)}}.$$

Замечание. Отметим еще, что появление $u(t)$ в остаточном члене $Y_1(x, \lambda)$ связано с тем, что в точках $x$, где $v(t)=0$, первый член формулы для $Y_1(x, \lambda)$ не является главным.

Можно было бы вместо $u(t)$ и $v(t)$ использовать и решения $w_1(t)$ и $w_2(t)$ уравнения Эйри [118], имеющие комплексные значения при вещественном $t$. Результат получился бы следующий:

Теорема 3. *При $a \leqslant x \leqslant b$, $\lambda > 0$ существуют решения уравнения* (251) $Z_1(x, \lambda)$, $Z_2(x, \lambda)$, *непрерывные при $a \leqslant x \leqslant 0$, $\lambda > 0$ и такие, что*

$$Z_j(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{\omega'(x)}} w_j(t)\,[1 + g_j(x, \lambda)], \quad t = \lambda^{\frac{2}{3}}\,\omega(x), \tag{265}$$

*$\omega(x)$ определена формулами* ($253_1$) *и* ($253_2$), *$w_j(t)$ — функции Эйри, и $g_j(x, \lambda)$ имеют оценку*

$$|g_j(x, \lambda)| \leqslant \frac{C}{\lambda}.$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1, но несколько проще.

**120. Уравнения с периодическими коэффициентами.** Рассмотрим линейное уравнение второго порядка, коэффициенты которого суть периодические функции независимого переменного. Теория таких уравнений во многом аналогична изложенной выше теории уравнений с аналитическими коэффициентами. Мы будем пока считать как коэффициенты, так и независимое переменное вещественными. Итак, пусть имеется уравнение

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0, \tag{266}$$

где $p(x)$ и $q(x)$ — вещественные непрерывные функции вещественного переменного $x$, имеющие период $\omega$, т. е.

$$p(x+\omega) = p(x), \quad q(x+\omega) = q(x). \tag{267}$$

Непрерывность коэффициентов гарантирует нам тот факт, что всякое решение уравнения (266), определяемое некоторыми начальными условиями, существует при всех вещественных значениях $x$. Пусть $y_1(x)$ — некоторое решение уравнения, т. е. мы имеем тождество

$$y_1''(x) + p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x) = 0.$$

Заменяя $x$ на $x+\omega$, можем написать

$$y_1''(x+\omega) + p(x+\omega)y_1'(x+\omega) + q(x+\omega)y_1(x+\omega) = 0$$

или, в силу (267),

$$y_1''(x+\omega) + p(x)y_1'(x+\omega) + q(x)y_1(x+\omega) = 0.$$

Отсюда непосредственно вытекает, что $y_1(x+\omega)$ будет также решением уравнения. Возьмем теперь какие-нибудь два линейно неза-

висимых решения уравнения $y_1(x)$ и $y_2(x)$. Функции $y_1(x+\omega)$ и $y_2(x+\omega)$ также должны быть решениями уравнения (266), и, следовательно, они должны выражаться линейно через $y_1(x)$ и $y_2(x)$, т. е.

$$\left.\begin{aligned} y_1(x+\omega) &= a_{11}y_1(x)+a_{12}y_2(x),\\ y_2(x+\omega) &= a_{21}y_1(x)+a_{22}y_2(x), \end{aligned}\right\} \tag{268}$$

где $a_{ik}$ — некоторые постоянные. Мы видим, таким образом, что *если взять два линейно независимых решения уравнения* (266) *и прибавить к аргументу период, то это будет равносильно некоторому линейному преобразованию* (268). Совершенно аналогично при рассмотрении уравнений с аналитическими коэффициентами мы видели, что при обходе вокруг особой точки линейно независимые решения испытывают линейное преобразование, и мы можем дальше рассуждать совершенно так же, как это мы делали в [**100**]. Приведем результаты. Таблица постоянных $a_{ik}$ зависит от выбора линейно независимых решений, но коэффициенты квадратного уравнения относительно $\rho$:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\rho & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}-\rho \end{vmatrix} = 0, \tag{269}$$

будут одинаковыми при любом выборе решений. *Если уравнение* (269) *имеет два различных корня* $\rho_1$ *и* $\rho_2$, *то существуют два линейно независимых решения, которые умножаются на* $\rho_1$ *и* $\rho_2$ *при замене* $x$ *на* $x+\omega$, т. е., обозначая эти решения через $\eta_k(x)$, получим

$$\eta_1(x+\omega)=\rho_1\eta_1(x);\quad \eta_2(x+\omega)=\rho_2\eta_2(x). \tag{270}$$

Если уравнение (269) имеет одинаковые корни, т. е. $\rho_1=\rho_2$, то существует, вообще говоря, только одно решение, приобретающее множитель $\rho_1$ при замене $x$ на $x+\omega$, и в данном случае мы имеем вместо (270) линейное преобразование следующего вида:

$$\eta_1(x+\omega)=\rho_1\eta_1(x);\quad \eta_2(x+\omega)=a_{21}\eta_1(x)+\rho_1\eta_2(x). \tag{271}$$

Напомним еще, что уравнение (269) не может иметь корня, равного нулю, т. е. определитель, составленный из чисел $a_{ik}$, наверно отличен от нуля.

Напомнив эти результаты, перейдем теперь к установлению вида решений в различных случаях. Рассмотрим сначала случай (270). Возьмем две функции:

$$\rho_1^{\frac{x}{\omega}}=e^{\frac{x}{\omega}\ln\rho_1};\quad \rho_2^{\frac{x}{\omega}}=e^{\frac{x}{\omega}\ln\rho_2},$$

где мы берем некоторые определенные значения для $\ln\rho_1$ и $\ln\rho_2$. При замене $x$ на $x+\omega$ эти функции приобретают множители $\rho_1$ и

$\rho_2$, и, таким образом, частные $\eta_1(x):\rho_1^{\frac{x}{\omega}}$ и $\eta_2(x):\rho_2^{\frac{x}{\omega}}$ оказываются периодическими функциями с периодом $\omega$, и, следовательно, в случае (270) можно написать

$$\eta_1(x)=\rho_1^{\frac{x}{\omega}}\varphi_1(x);\quad \eta_2(x)=\rho_2^{\frac{x}{\omega}}\varphi_2(x), \tag{272}$$

где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — периодические функции с периодом $\omega$.

В случае (271) имеем для $\eta_1(x)$ такое же выражение. Для исследования $\eta_2(x)$ введем функцию $\zeta(x)$:

$$\eta_2(x)=\rho_1^{\frac{x}{\omega}}\zeta(x).$$

Подставляя в (271), получим

$$\zeta(x+\omega)=\zeta(x)+c\varphi_1(x)\quad\left(c=\frac{a_{21}}{\omega}\right). \tag{273}$$

Определим теперь функцию $\varphi_2(x)$ соотношением

$$\zeta(x)=\frac{c}{\omega}x\varphi_1(x)+\varphi_2(x).$$

Подставляя в (273) и используя периодичность функции $\varphi_1(x)$, найдем, что $\varphi_2(x+\omega)=\varphi_2(x)$. Таким образом, в случае (271), когда уравнение (269) имеет двукратный корень $\rho_1$, два линейно независимых решения имеют вид

$$\eta_1(x)=\rho_1^{\frac{x}{\omega}}\varphi_1(x);\quad \eta_2(x)=\rho_1^{\frac{x}{\omega}}\left[\frac{c}{\omega}x\varphi_1(x)+\varphi_2(x)\right], \tag{274}$$

где $c$ — некоторая постоянная, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ — периодические функции с периодом $\omega$. Если $c=0$, то второе решение будет иметь вид (272).

Рассмотрим более подробно уравнение Хилла

$$y''+q(x)y=0, \tag{275}$$

т. е. тот частный случай уравнения (239), когда в нем $p(x)\equiv 0$. Определим линейно независимые решения следующими начальными условиями:

$$y_1(0)=1,\ y_1'(0)=0;\ y_2(0)=0,\ y_2'(0)=1. \tag{276}$$

Полагая в тождествах (268) $x=0$ и принимая во внимание (276), получим $a_{11}=y_1(\omega)$, $a_{21}=y_2(\omega)$. Дифференцируя тождества (268) и полагая затем $x=0$, точно так же найдем, что $a_{12}=y_1'(\omega)$, $a_{22}=y_2'(\omega)$. Таким образом, при сделанном выборе линейно независимых решений квадратное уравнение (269) записывается в виде

$$\begin{vmatrix} y_1(\omega)-\rho & y_1'(\omega) \\ y_2(\omega) & y_2(\omega)-\rho \end{vmatrix}=0. \tag{277}$$

Свободным членом этого уравнения является значение определителя Вронского $\Delta(x)=y_1(x)y_2'(x)-y_2(x)y_1'(x)$ при $x=\omega$. Для $\Delta(x)$ была получена следующая формула [II, 24]:

$$\Delta(x)=\Delta(0)\,e^{-\int_0^x p(t)\,dt},$$

и, следовательно, в данном случае, когда $p(x)\equiv 0$, имеем $\Delta(x)\equiv\Delta(0)$. Из (276) следует, что $\Delta(0)\equiv 1$. Таким образом, свободный член $\Delta(\omega)$ в уравнении (277) равен единице, а само уравнение (277) имеет вид

$$\rho^2-2A\rho+1=0, \tag{278}$$

где

$$2A=y_1(\omega)+y_2'(\omega). \tag{279}$$

Поскольку $q(x)$ — вещественная функция, то решения $y_1(x)$, $y_2(x)$, определенные условиями (276), будут также вещественными функциями. Следовательно, число $A$, называемое характеристической постоянной Ляпунова, будет вещественным числом.

Если число $A$ удовлетворяет условию $|A|>1$, то уравнение (278) имеет различные вещественные корни, произведение которых равно единице, т. е. один из этих корней будет по абсолютной величине больше единицы, а другой — меньше единицы. Если $|A|<1$, то уравнение (278) имеет невещественные, комплексно сопряженные корни по модулю равные единице. Наконец, если $A=\pm 1$, то уравнение (278) имеет двойной корень, равный $\pm 1$. Значения $A$ существенным образом сказываются на поведении решения при беспредельном возрастании переменного $x$. Разберем указанные выше случаи.

В выражениях (272) множители $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ суть периодические функции, а потому они остаются ограниченными при беспредельном возрастании $x$, и характер поведения решений при возрастании $x$ существенным образом определяется первыми множителями:

$$\rho_1^{\frac{x}{\omega}}=e^{\frac{x}{\omega}\ln\rho_1},\quad \rho_2^{\frac{x}{\omega}}=e^{\frac{x}{\omega}\ln\rho_2}. \tag{280}$$

Вещественная часть $\ln\rho$ равна, как известно, $\ln|\rho|$, и, следовательно, если $|A|>1$, то эта вещественная часть для одного из корней, например $\rho_1$, будет положительной, а для другого — отрицательной, и, таким образом, первая из функций (280) будет беспредельно возрастать по модулю при $x\to+\infty$, а вторая — стремиться к нулю. Возвращаясь к решениям (272), можно утверждать, что первое из этих решений не будет оставаться ограниченным при $x\to\infty$, а второе будет стремиться к нулю. Общий интеграл уравнения

$$C_1\eta_1(x)+C_2\eta_2(x) \tag{281}$$

в данном случае также не будет, вообще говоря ($C_1 \neq 0$), оставаться ограниченным (случай неустойчивости). Если $|A| < 1$, то вещественные части $\ln \rho_1$ и $\ln \rho_2$ равны нулю, а функции (280) при всех вещественных $x$ равны по модулю единице. В данном случае оба решения (272) и общий интеграл (281) остаются ограниченными при $x \to +\infty$. Если начальные условия

$$y(0) = a, \quad y'(0) = b$$

определяются числами $a$ и $b$, достаточно малыми по абсолютной величине, то постоянные $C_1$ и $C_2$ также будут малыми, а следовательно, и решение будет оставаться малым по абсолютной величине при всяком положительном $x$ (случай устойчивости).

Остается разобрать только исключительный случай $A = \pm 1$, когда уравнение (278) имеет кратные корни. Положим сначала $A = 1$, т. е. $\rho_1 = \rho_2 = 1$. В данном случае мы можем взять решения так, чтобы они имели вид (274), т. е.

$$\eta_1(x) = \varphi_1(x); \quad \eta_2(x) = \varphi_2(x) + \frac{c}{\omega} x\varphi_1(x), \tag{282}$$

где $\varphi_k(x)$ суть периодические функции. Первое из написанных решений будет чисто периодическим, а второе будет, вообще говоря, неограниченным ввиду присутствия множителя $x$. Только в исключительном случае, когда $c = 0$, и второе решение будет чисто периодическим. Наконец, если $A = -1$, т. е. если $\rho_1 = \rho_2 = -1$, то мы можем взять $\ln \rho_1 = \pi i$ и вместо (282) будем иметь

$$\eta_1(x) = e^{i\frac{\pi x}{\omega}} \varphi_1(x); \quad \eta_2(x) = e^{i\frac{\pi x}{\omega}} \left[\varphi_2(x) + \frac{c}{\omega} \varphi_1(x)\right].$$

В данном случае мы имеем

$$\eta_1(x + \omega) = e^{i\pi} e^{i\frac{\pi x}{\omega}} \varphi_1(x) = -\eta(x)$$

и, следовательно, решение $\eta_1(x)$ будет периодическим с периодом $2\omega$, а второе решение, как и в предыдущем случае, будет, вообще говоря, неограниченным. Решения уравнения, удовлетворяющие тождеству $y(x + \omega) = -y(x)$, называются обычно $\omega$-антипериодическими. Из предыдущих рассуждений легко следует

Теорема. *Пусть $q(x)$ — вещественная $\omega$-периодическая функция. Если при этом уравнение* (275) *имеет $\omega$-периодическое решение, то $A = 1$; если же оно имеет $\omega$-антипериодическое решение, то $A = -1$.*

В первом случае из сказанного выше следует, что уравнение (278) имеет корень $\rho = 1$, а во втором — корень $\rho = -1$, откуда и следует утверждение теоремы.

Для иллюстрации изложенного рассмотрим уравнение Хилла с постоянным коэффициентом

$$y'' + qy = 0. \tag{283}$$

Постоянную $q$ можно считать периодической функцией с произвольным периодом $\omega$. Положим сначала, что постоянная $q$ отрицательна. Обозначая $q = -k^2$, получим два линейно независимых решения уравнения (283):

$$\eta_1(x) = e^{kx}, \quad \eta_2(x) = e^{-kx};$$

при замене $x$ на $x + \omega$ они получают вещественные множители $\rho_1 = e^{k\omega}$ и $\rho_2 = e^{-k\omega}$, что соответствует случаю $|A| > 1$.

Если постоянная $q$ положительна, то, обозначая $q = k^2$, мы будем иметь следующие два решения уравнения (283):

$$\eta_1(x) = e^{ikx}, \quad \eta_2(x) = e^{-ikx}. \tag{284}$$

При замене $x$ на $x + \omega$ эти решения получают множители $\rho_1 = e^{ik\omega}$, $\rho_2 = e^{-ik\omega}$, по модулю равные единице. Эти корни различны при $e^{2ik\omega} \neq 1$, т. е. при $k\omega \neq n$, где $n$ — целое число. Это соответствует случаю $|A| = 1$. Для равных корней, когда $k\omega = n\pi$, решения (284) линейно независимы. Это соответствует случаю $|A| = 1$, когда решения представимы в виде (274), причем для рассматриваемого случая $c = 0$.

Наконец, при $q = 0$ имеется два линейно независимых решения

$$\eta_1(x) = 1, \qquad \eta_2(x) = x,$$

что совпадает с (274) для $\rho_1 = 1$, $\varphi_1(x) \equiv 1$, $\varphi_2(x) \equiv 1$, $c = \omega$ и соответствует случаю $A = 1$.

Отметим, что для уравнения (283) значение постоянной $A$, найденное по формуле (279), есть $A = \cos \sqrt{q}\omega$ (здесь $q$ может быть числом любого знака).

**121. Условия устойчивости и неустойчивости для уравнения Хилла.** Выше было показано, что для уравнения Хилла имеет место устойчивость (все решения ограничены при $x \to +\infty$), если для постоянной Ляпунова $A$ выполнено неравенство $|A| < 1$, или неустойчивость показательного типа, если $|A| > 1$. Однако обычно нельзя различить эти случаи без численного интегрирования, так как $A$ выражается лишь через решения уравнения (275) по формуле (279).

Далее мы выведем простые достаточные условия устойчивости и неустойчивости, принадлежащие А. М. Ляпунову и Н. Е. Жуковскому, выраженные непосредственно через функцию $q(x)$. Для этого нам понадобятся некоторые леммы, первая из которых непосредственно связана с содержанием [II, 31].

Лемма 1. *Пусть в уравнениях*

$$y_1'' + q_1(x)\,y_1 = 0, \qquad y_2'' + q_2(x)\,y_2 = 0 \tag{285}$$

*коэффициенты — вещественные непрерывные функции на всей оси* $x$ *и* $q_1(x) > q_2(x)$. *Тогда между двумя корнями любого решения второго из уравнений лежит по крайней мере один корень любого решения первого из уравнений* (285). *Пусть, далее, имеются начальные условия*

$$y_1(a) = y_2(a) = 0, \qquad y_1'(a) = y_2'(a) > 0 \tag{286}$$

*и при* $a < x < b$ *решение* $y_1(x)$ *положительно. Тогда на указанном промежутке* $y_2(x) > y_1(x)$.

Доказательство первого утверждения указано в [II, 31]. Переходим к доказательству второго утверждения.

Умножая первое из уравнений на $y_2$, второе на $y_1$ и вычитая полученные уравнения почленно, получим

$$\frac{d}{dx}(y_2'y_1 - y_1'y_2) = [q_1(x) - q_2(x)]\,y_1y_2. \tag{286'}$$

На промежутке $a < x < b$ решения $y_k(x)$, удовлетворяющие условиям (286), положительны в силу первого утверждения, и отношение $\frac{y_2}{y_1}$, равное единице при $x = a$, в силу (286′) возрастает, откуда и следует второе утверждение леммы.

Лемма 2. *Если* $q(x) \not\equiv 0$ *и уравнение Хилла имеет не обращающееся в нуль* $\omega$*-периодическое решение* $y(x)$, *то*

$$\int_0^\omega q(x)\,dx < 0. \tag{287}$$

Доказательство. Подставляя $q(x) = -\frac{y''}{y}$ и интегрируя по частям, получим

$$\int_0^\omega q(x)\,dx = -\int_0^\omega \frac{1}{y}\,dy' = -\frac{y'}{y}\Big|_0^\omega - \int_0^\omega \left(\frac{y'}{y}\right)^2 dx.$$

В силу периодичности $y(x)$ внеинтегральный член исчезает, и из полученной формулы следует (287).

Введем понятие выпуклого множества функций. Множество $M$ вещественных непрерывных функций $q(x)$ называется выпуклым при соблюдении следующего условия: если функции $q_1(x)$ и $q_2(x)$ принадлежат $M$, то и функция

$$q(x) = sq_1(x) + (1 - s)\,q_2(x)$$

при всех $s$, удовлетворяющих условию $0 < s < 1$, также принадлежит $M$. Переходим к основной для дальнейших доказательств лемме.

Лемма 3. *Пусть* $M$ *— некоторое выпуклое множество* $\omega$*-периодических, вещественных и непрерывных функций* $q(x)$ *такое, что*

(I) *для* $q(x)$ *из* $M$ *уравнение* (275) *не имеет* $\omega$*-периодических и* $\omega$*-антипериодических решений*; (II) *множество* $M$ *содержит функцию* $q(x)\equiv c^2$, *тождественно равную положительной постоянной. Тогда при* $q(x)$ *из* $M$ *для соответствующей характеристической постоянной Ляпунова выполнено неравенство* $|A|<1$.

Доказательство. Пусть $q(x)$ из $M$. Положим $q_s(x)=(1-s)c^2+sq(x)$. Выпуклость множества $M$ означает, что $q_s(x)$ тоже из $M$ при $0\leqslant s\leqslant 1$. Для уравнения (275) с коэффициентом $q_s(x)$ постоянная $A=A(s)$ является функцией $s$. Покажем, что $A(s)$ будет непрерывной функцией $s$. Любое решение $y(x, s)$ уравнения (275) с начальными значениями $y(0)$, $y'(0)$, не зависящими от $s$, будет непрерывной (и даже целой) функцией $s$. Это сразу следует из равномерной при $0\leqslant x\leqslant\omega$, $0\leqslant s\leqslant 1$ сходимости к решению $y(x, s)$ последовательности $y_n(x, s)$, определенной соотношениями [II, 50]

$$y_0(x, s)\equiv y(0), \qquad y''_{n+1}(x, s)=-q_s(x)y_n(x),$$
$$y_{n+1}(0, s)=y(0), \qquad y'_{n+1}(0, s)=y'(0)$$
$$(n=0, 1, 2, \ldots).$$

При этом $y_n(\omega, s)$, $y'_n(\omega, s)$ будут непрерывными (и даже целыми) функциями $s$. Следовательно, непрерывными (и даже целыми) функциями $s$ будут $y(\omega, s)$, $y'(\omega, s)$, а значит, и определенная формулой (279) функция $A=A(s)$.

Как было показано в предыдущем пункте, из предположения (I) следует, что при $0\leqslant s\leqslant 1$ выполнено $A(s)\neq\pm 1$. Из предположений (I) и (II) следует, что $c^2\neq\frac{n^2\pi^2}{\omega^2}$, так как для уравнения (275) с коэффициентом $q(x)=\frac{n^2\pi^2}{\omega^2}$ имеем $A=(-1)^n$. Выше было показано, что для уравнения с коэффициентом $q(x)=c^2\neq\frac{n^2\pi^2}{\omega^2}$ выполнено $|A|<1$. Итак, $|A(0)|<1$ и $A(s)\neq\pm 1$ при $0\leqslant s\leqslant 1$. Следовательно, $|A(s)|<1$ при $0\leqslant s\leqslant 1$ и, в частности, $|A(1)|<1$, что и утверждалось.

Отметим, что утверждение леммы 3 остается справедливым при более общих предположениях, например, когда условие выпуклости множества $M$ заменено условием связности. Для дальнейшего, однако, достаточно сформулированного утверждения.

Критерий Н. Е. Жуковского. *Если для некоторого* $n=0, 1, 2, \ldots$ *выполнено*

$$\frac{n^2\pi^2}{\omega^2}<q(x)<\frac{(n+1)^2\pi^2}{\omega^2}, \tag{288}$$

*то все решения уравнения* (275) *ограничены при* $-\infty<x<+\infty$ *и для этого уравнения* $|A|<1$.

Доказательство. Множество $M$ вещественных $\omega$-периодических функций $q(x)$, удовлетворяющих соотношениям (288), очевидно,

выпукло, и выполнено также условие (II) леммы 3. Покажем, что выполнено условие (I). Пусть $\eta(x)$ — решение уравнения (275) для некоторого $q(x)$ из $M$ такое, что $\eta(x+\omega)=\pm\eta(x)$. Решение $\eta(x)$ непременно имеет нули. Действительно, если $\eta(x+\omega)=-\eta(x)$, то $\eta(x)$ меняет знак и, следовательно, имеет нули. Если $\eta(x+\omega)=\eta(x)$, то $\eta(x)$ имеет нули по лемме 2. Пусть $x_1<x_2$ — какие-либо два последовательных нуля функции $\eta(x)$. Будем считать для определенности, что $\eta(x)>0$ при $x_1<x<x_2$. Построим решения $\eta_n(x)$ и $\eta_{n+1}(x)$ уравнения (275) с коэффициентами $q(x)\equiv\frac{n^2\pi^2}{\omega^2}$ и $q(x)\equiv$ $\equiv\frac{(n+1)^2\pi^2}{\omega^2}$ и с начальными условиями

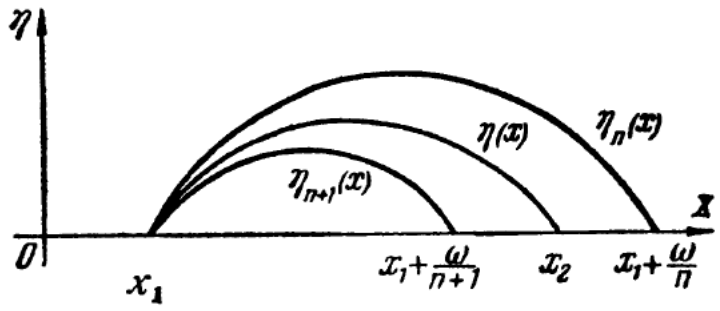



Рис. 70.

$$\eta_n(x_1)=\eta_{n+1}(x_1)=0;$$
$$\eta_n'(x_1)=\eta_{n+1}'(x_1)=\eta'(x_1)>0.$$

Расстояния между соседними нулями у решений $\eta_n(x)$, $\eta_{n+1}(x)$ будут, очевидно, $\frac{\omega}{n}$ и $\frac{\omega}{(n+1)}$. По лемме 1 графики функций $\eta_{n+1}(x)$, $\eta(x)$, $\eta_n(x)$ расположены так, как показано на рис. 70, т. е.

$$x_1+\frac{\omega}{n+1}<x_2<x_1+\frac{\omega}{n}.$$

Таким образом, расстояние $d$ между любыми соседними нулями решения $\eta(x)$ удовлетворяет неравенству

$$\frac{\omega}{n+1}<d<\frac{\omega}{n}. \tag{289}$$

Поскольку $\eta(x_1+\omega)=0$, то на интервале $x_1\leqslant x\leqslant x_1+\omega$ длины $\omega$ укладывается целое число (обозначим его через $k$) отрезков между соседними нулями решения $\eta(x)$. Длины $d_j$ этих отрезков должны удовлетворять соотношению (289). Легко убедиться в том, что это невозможно. Действительно, имеем $d_1+d_2+\ldots+d_k=\omega$. Складывая соответствующие неравенства (289), получим $\frac{k\omega}{n+1}<\omega<\frac{k\omega}{n}$, $n<k<$ $<n+1$, что невозможно, так как $k$ — целое число.

Итак, выполнено условие (I) леммы 3. Из леммы 3 поэтому следует справедливость критерия Жуковского.

Отметим, что, несколько уточняя приведенные рассуждения, легко заменить (288) более общим условием, а именно заменить в (288) знаки $<$ на $\leqslant$, но при этом потребовать, чтобы $q(x)\not\equiv\frac{n^2\pi^2}{\omega^2}$ и $q(x)\not\equiv\frac{(n+1)^2\pi^2}{\omega^2}$. При этом по-прежнему $|A|<1$.

В работе В. А. Якубовича (Матем. сб., т. 37 (79), вып. 1, 1965) установлено следующее обобщение критерия Н. Е. Жуковского: неравенство $|A|<1$ имеет место, если выполнено неравенство

$$\frac{n^2\pi^2}{r_1^4(x)}-\frac{r_1''(x)}{r_1(x)}\leqslant q(x)\leqslant\frac{(n+1)^2\pi^2}{r_2^4(x)}-\frac{r_2''(x)}{r_2(x)}, \tag{290}$$

где $r_1(x)$, $r_2(x)$ — какие-либо произвольные, дважды непрерывно дифференцируемые $\omega$-периодические положительные функции, нормированные условием

$$\int_0^\omega\frac{dx}{r_1^2(x)}=\int_0^\omega\frac{dx}{r_2^2(x)}=1.$$

При этом предполагается, что $q(x)$ не совпадает тождественно ни с левой, ни с правой частью неравенства (290). Исторически первым достаточным условием устойчивости для уравнения Хилла было следующее условие, установленное А. М. Ляпуновым (см. А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, 1894):

Неравенство $|A|<1$ имеет место, если

$$q(x)\geqslant 0,\quad \omega\int_0^\omega q(x)\,dx\leqslant 4. \tag{291}$$

При этом считается, что $q(x)\not\equiv 0$.

Лемма 4. *Пусть $a<b$ — последовательные нули произвольного решения уравнения* (275), *в котором $q(x)\geqslant 0$. Тогда*

$$(b-a)\int_a^b q(x)\,dx>4. \tag{292}$$

Доказательство. Предполагается, очевидно, что $y(x)\not\equiv 0$. Можно считать, что $y(x)>0$ при $a<x<b$, и пусть $y(c)=\max\limits_{a<x<b}y(x)$. Существуют точки $x_1$ и $x_2$, принадлежащие промежуткам $a<x_1<c$ и $c<x_2<b$ и такие, что

$$\frac{y(c)}{c-a}=\frac{y(c)-y(a)}{c-a}=y'(x_1);\qquad \frac{-y(c)}{b-c}=\frac{y(b)-y(c)}{b-c}=y'(x_2). \tag{293}$$

При $a\leqslant x\leqslant b$ имеем $(-y'')=q(x)y\geqslant 0$ и, интегрируя, получим

$$\int_{x_1}^{x_2}q(x)\,dx=\int_{x_1}^{x_2}\frac{(-y'')}{y}\,dx>\frac{1}{y(c)}\int_{x_1}^{x_2}(-y'')\,dx=\frac{y'(x_1)-y'(x_2)}{y(c)}. \tag{294}$$

В подинтегральном выражении $(-y'')\geqslant 0$ и $y>0$, а знаменатель мы заменили его максимумом $y(c)$. При этом вместо $\geqslant$ мы поставили $>$. Оправдаем это. Если бы вместо $>$ стоял знак $=$, то в силу

непрерывности $y'$ и $y$ мы должны были бы иметь $\frac{y'(x)}{y(c)} \equiv \frac{y'(x)}{y(x)}$ в промежутке $i$ $(x_1 \leqslant x \leqslant x_2)$, и надо привести это тождество к противоречию. Из указанного тождества следует, что в точках промежутка $i$ или $y' \equiv 0$, или $y(x) \equiv y(c)$. Докажем, что $y' = 0$ внутри $i$, а тем самым и на концах. Пусть существует такая точка $x = x_0$ $(x_1 < x_0 < x_2)$, в которой $y'(x_0) < 0$. Мы должны при этом иметь $y(x_0) = y(c)$, $y'(x_0) = 0$ и $y'(x) < 0$ при всех $x$, достаточно близких к $x_0$. При этом из формулы Тейлора $y(x) = y(x_0) + \frac{1}{2} y''(x')$, $x_0 < x' < x$, следует, что при $x$, близких к $x_0$ и отличных от $x_0$, мы имеем $y'(x) \neq 0$ и $y(x) \neq y(x_0) = y(c)$, что противоречит указанному выше тождеству, и, следовательно, из него следует, что $y'(x) = 0$ при $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, т. е. в этом промежутке $y'(x) = \text{const}$, что противоречит (293). Таким образом, доказано наличие знака $>$ в (294).

Используя (293) и (294), получим

$$\int_a^b q(x)\,dx \geqslant \int_{x_1}^{x_2} q(x)\,dx > \frac{1}{c-a} + \frac{1}{b-c}.$$

При изменении $c$ в промежутке $a < c < b$ правая часть достигает минимального значения $4/(b-a)$ в случае $c - a = b - c$, т. е.

$$\frac{1}{c-a} + \frac{1}{b-c} \geqslant \frac{4}{b-a},$$

откуда и следует (292).

Переходим к доказательству критерия (291). Применим лемму 3. Множество функций $q(x)$, удовлетворяющих условиям (291), очевидно, выпукло. Условие (II) леммы выполнено. Покажем, что и условие (I) выполнено. Предположим, что имеется $\omega$-периодическое или $\omega$-антипериодическое решение $y(x)$, и приведем это предположение к противоречию. Согласно лемме 2 $y(x)$ имеет нули и расстояние $d$ между соседними нулями $a$ и $b$ удовлетворяет неравенству $d \leqslant \omega$. Согласно лемме 4

$$d = b - a > \frac{4}{\int_a^b q(x)\,dx} \geqslant \frac{4}{\int_0^\omega q(x)\,dx}.$$

По второму из условий (291) правая часть не меньше $\omega$, откуда $d > \omega$. Это противоречие указывает на выполнение условия (II) леммы 3, и из последней следует достаточность критерия (291) для выполнения условия $|A| < 1$.*)

*) Приведенное доказательство близко к доказательству Ж. Борга (Amer. J. of Math., v. 69, №1 (1949), который установил, что $|A| < 1$ при $q(x) \not\equiv 0$,

$$\int_0^\omega q(x)\,dx \geqslant 0, \qquad \omega \int_0^\omega |q(x)|\,dx \leqslant 4.$$

Как показал М. Г. Крейн, для выполнения неравенства $|A|<1$ вместо (291) достаточны следующие менее ограничительные условия:

$$\int_0^\omega q(x)\,dx \geqslant 0, \qquad \omega \int_0^\omega [q(x)]_+\,dx \leqslant 4,$$

где

$$[q(x)]_+ = \begin{cases} q(x), & \text{если } q(x) \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } q(x) < 0, \end{cases}$$

и предполагается, что $q(x) \not\equiv 0$. Этот критерий доказывается по той же схеме, что и выше.

Приведем еще следующие критерии (В. А. Якубович, ДАН СССР, т. 74, № 5, 1950), являющиеся по своему характеру промежуточными между критериями А. М. Ляпунова и Н. Е. Жуковского: *если для некоторого* $n = 0, 1, 2, \ldots,$ *выполнено*

$$q(x) \geqslant \frac{n^2\pi^2}{\omega^2}; \qquad \omega \int_0^\omega \left[q(x) - \frac{n^2\pi^2}{\omega^2}\right] dx \leqslant 2n(n+1)\pi \operatorname{tg} \frac{\pi}{2(n+1)}$$

*или*

$$q(x) \leqslant \frac{\pi^2(n+1)^2}{\omega^2}; \qquad \omega \int_0^\omega \left[\frac{(n+1)^2\pi^2}{\omega^2} - q(x)\right] dx \leqslant (n+1)\pi^2,$$

*и*

$$q(x) \not\equiv \frac{n^2\pi^2}{\omega^2}, \quad q(x) \not\equiv \frac{(n+1)^2\pi^2}{\omega^2},$$

*то* $|A|<1$. Для $n=0$ первый из критериев переходит в критерий А. М. Ляпунова. Можно показать, что эти критерии являются точными: при сколь угодно малом увеличении постоянных в правых частях неравенств, содержащих интегралы, всегда можно найти функцию $q(x)$, для которой выполнены соответствующие условия, но $|A|>1$.

Другие критерии устойчивости уравнения Хилла получены М. Г. Крейном, М. Г. Нейгауз, В. Б. Лидским, Ж. Боргом и В. А. Якубовичем. Эти условия можно найти в обзоре В. М. Старжинского (ПММ, т. 18, в. 4, 1954).

Условий неустойчивости уравнения Хилла, достаточно эффективных и просто формулируемых, известно немного. Приведем следующий простой критерий, установленный А. М. Ляпуновым:

*Если в уравнении Хилла* $q(x)<0$, *то* $A>1$ *и, следовательно, числа* $\rho_1$, $\rho_2$ *различны и положительны.*

Доказательство. Пусть $y_1(x)$ — решение нашего уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y_1(0)=1$ и $y_1'(0)=0$. Интегрируя уравнение Хилла и принимая во внимание последнее начальное условие, мы можем написать

$$y_1'(x) = -\int_0^x q(x)\,y_1(x)\,dx. \tag{295}$$

При значениях $x$, близких к нулю и положительных, $y_1(x)$ близко к единице, и, следовательно, $y_1'(x) > 0$ в силу $q(x) < 0$, т. е. $y_1(x)$ возрастает. В силу соотношения (295)* $y_1'(x)$ могло бы стать отрицательным только после того, как $y_1(x)$ станет отрицательным. Но, с другой стороны, для того чтобы $y_1(x)$ стало отрицательным, необходимо, чтобы оно предварительно начало убывать, т. е. необходимо, чтобы до этого $y_1'(x)$ стало отрицательным. Мы приходим, таким образом, к противоречию и можем утверждать, что при всяком $x > 0$ будет $y_1'(x) > 0$ и $y_1(x) > 1$, и, в частности, имеем $y_1(\omega) > 1$. Возьмем теперь решение $y_2(x)$, удовлетворяющее начальным условиям $y_2(0) = 0$ и $y_2'(0) = 1$. Интегрируя уравнение Хилла, получим

$$y_2'(x) = 1 - \int_0^x q(x)\, y_2(x)\, dx. \tag{296}$$

При $x$, близких к нулю, $y_2'(x)$ близко к единице и, следовательно, положительно, а потому $y_2(x)$ возрастает и больше нуля, ибо $y_2(0) = 0$. Формула (296) показывает, что $y_2'(x)$ может стать отрицательным только после того, как $y_2(x)$ станет отрицательным. Но, с другой стороны, $y_2(x)$ может стать отрицательным, лишь предварительно убывая, т. е. после того, как $y_2'(x)$ станет отрицательным. Это противоречие показывает нам, что при всяком положительном $x$ мы имеем $y_2(x) > 0$ и $y_2'(x) > 1$ и, в частности, $y_2'(\omega) > 1$. Доказанные неравенства для $y_1(\omega)$ и $y_2'(\omega)$ дают нам

$$2A = y_1(\omega) + y_2'(\omega) > 2, \quad \text{т. е. } A > 1,$$

что и утверждалось.

Несколько уточняя предыдущие рассуждения, мы могли бы условие $q(x) < 0$ заменить условием $q(x) \leqslant 0$, $q(x) \not\equiv 0$.

Рассмотрим в заключение уравнение Хилла, содержащее параметр $\lambda$:

$$y'' + \lambda q(x)\, y = 0, \tag{297}$$

где, как и раньше, $q(x) \geqslant 0$, $q(x) \not\equiv 0$, $q(x)$ — $\omega$-периодическая функция и $\lambda$ — комплексный параметр. Как мы видели раньше, вопрос об ограниченности или неограниченности решений уравнения (297) при вещественных значениях $\lambda$ решается величиной характеристической постоянной Ляпунова

$$A = \frac{y_1(\omega) + y_2'(\omega)}{2}.$$

Эта постоянная в случае уравнения (297) зависит от параметра $\lambda$, и мы ее обозначим через $A(\lambda)$. Учитывая равномерную сходимость метода последовательных приближений при построении решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ [II, 50], можно утверждать, что $A(\lambda)$ — целая функция $\lambda$, вещественная при вещественных $\lambda$. Как известно, при этом, если $|A(\lambda)| < 1$, то все решения уравнения ограничены при $-\infty < x < +\infty$; если $|A(\lambda)| > 1$, то общее решение уравнения не ограничено, а при $|A(\lambda)| = \pm 1$ общее решение может быть как ограниченным, так и неограниченным.

Сформулируем некоторые общие результаты, касающиеся промежутков изменения $\lambda$, для которых будет иметь место ограниченность или неограни-

ченность общего решения уравнения (297) на бесконечном промежутке $-\infty < x < +\infty$. (Близкие утверждения установлены впервые А. М. Ляпуновым, Собр. соч., т. 2, изд. АН СССР, 1956, стр. 401—403.)

1°. Каждое из уравнений

$$A(\lambda) = 1, \tag{298$_1$}$$

$$A(\lambda) = -1 \tag{298$_2$}$$

имеет бесчисленное множество корней. Все они вещественны, и их кратность не выше двух.

2°. Эти корни могут быть пронумерованы так, что

$$0 < \lambda_1' \leqslant \lambda_1'' < \lambda_2' \leqslant \lambda_2'' < \lambda_3' \leqslant \lambda_3'' < \dots, \tag{299}$$

где $0, \lambda_2', \lambda_2'', \lambda_4', \lambda_4'', \dots$ — корни уравнения (298$_1$), а $\lambda_1', \lambda_1'', \lambda_3', \lambda_3'', \dots$ — корни уравнения (298$_2$). Открытые интервалы $(0, \lambda_1')$, $(\lambda_1'', \lambda_2')$, $(\lambda_2'', \lambda_3')$, ... являются интервалами ограниченности (в них $|A(\lambda)| < 1$), а те из открытых интервалов $(-\infty, 0)$, $(\lambda_1', \lambda_1'')$, $(\lambda_2', \lambda_2'')$, ..., которые не вырождаются в точку, являются интервалами неограниченности (в них $|A(\lambda)| > 1$).

3°. Если $\lambda = \lambda_i'$ или $\lambda = \lambda_i''$ и $\lambda_1' = \lambda_i''$, то существуют два линейно независимых решения $y_1(x)$, $y_2(x)$ таких, что

$$y_1(x+\omega) = (-1)^i y_1(x);$$
$$y_2(x+\omega) = (-1)^i y_2(x) + y_1(x).$$

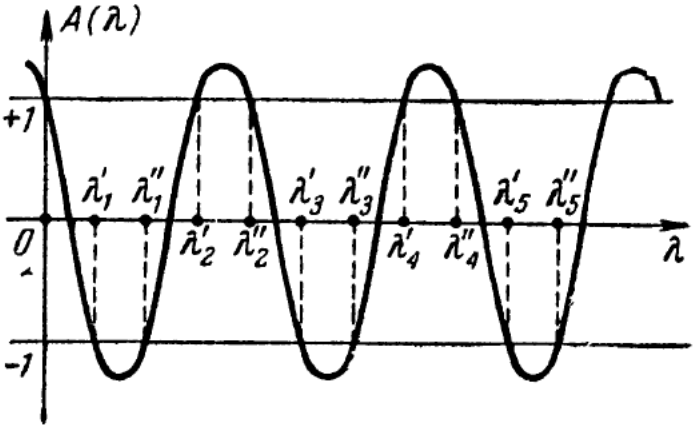



Рис. 71.

В этом случае

$$y_2(x) = (-1)^i \frac{x}{\omega} y_1(x) + z(x)$$

и

$$z(x+\omega) = (-1)^i z(x) \tag{300}$$

и общее решение уравнения (297) растет, как $x$.

Если $\lambda = \lambda_i' = \lambda_2''$, то

$$y_k(x+\omega) = (-1)^i y_k(x) \quad (k = 1, 2).$$

4°. На каждом из интервалов ограниченности ($|A(\lambda)| < 1$) функция $A(\lambda)$ меняется монотонно ($A'(\lambda) > 0$ или $A'(\lambda) < 0$). При вещественном $\alpha$, $|\alpha| \leqslant 1$, уравнение $A(\lambda) = \alpha$ имеет лишь вещественные корни.

Аналогичные предложения имеют место и для знакопеременной функции $q(x)$, но при этом промежутки ограниченности и неограниченности расположены как на положительной, так и на отрицательной полуоси $\lambda$.

На рис. 71 изображен график $A(\lambda)$ и проведены две прямые, параллельные оси $\lambda$ и отстоящие от нее на расстоянии единицы. Точки пересечения графика $A(\lambda)$ с этими прямыми дают значения $\lambda_i'$ и $\lambda_i''$.

**122. Системы линейных дифференциальных уравнений.** До сих пор мы рассматривали одно линейное дифференциальное уравнение второго порядка. Оно является частным случаем системы двух линейных уравнений первого порядка. Вообще одно линейное уравнение порядка $n$ может быть представлено, если принять производные за новые искомые функции, в виде системы линейных уравнений первого порядка. Мы обратимся к рассмотрению общего случая системы линейных уравнений первого порядка вида

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= p_{11}(x) y_1 + p_{21}(x) y_2 + \dots + p_{n1}(x) y_n, \\ y_2' &= p_{12}(x) y_1 + p_{22}(x) y_2 + \dots + p_{n2}(x) y_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' &= p_{1n}(x) y_1 + p_{2n}(x) y_2 + \dots + p_{nn}(x) y_n, \end{aligned}\right\} \tag{301}$$

где $y_i$ — искомые функции, $y_i'$ — их производные и $p_{ik}(x)$ — таблица заданных коэффициентов, причем, в отличие от прежних обозначений [96], мы считаем, что первый значок показывает, при каком из неизвестных стоит коэффициент, а второй значок показывает, в каком из уравнений этот коэффициент находится. К написанной системе применим дословно метод последовательных приближений, описанный нами в [98], и, следовательно, применимы и все те следствия, которые мы там имели в результате применения этого метода. Напомним эти следствия. *Если все коэффициенты* $p_{ik}(x)$ *регулярны в некотором круге* $|x-a|<r$, *то система* (301) *имеет единственное решение, удовлетворяющее в точке* $x=a$ *любым заданным начальным условиям:*

$$y_1(a)=\alpha_1;\ \ldots;\ y_n(a)=\alpha_n,$$

*и это решение будет регулярно в упомянутом круге* $|x-a|<r$. *Такое решение можно аналитически продолжать по любому пути, не проходящему через особые точки коэффициентов* $p_{ik}(x)$, *и при этом продолжении оно все время остается решением.*

Решение системы состоит из $n$ функций. Положим, что мы имеем $n$ решений системы. Эти решения образуют квадратную таблицу функций

$$Y=\begin{Vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{Vmatrix},$$

причем первый значок дает номер решения, а второй значок — номер функции, входящей в решение. Назовем теперь решением системы квадратную таблицу указанного вида, состоящую из $n$ решений, обозначим через $P$ таблицу, состоящую из коэффициентов $p_{ik}(x)$, и через $Y$ — таблицу, определяющую решение. Пользуясь правилом перемножения матриц, можно записать систему линейных уравнений совершенно так же, как это мы делали в [96], в следующем виде:

$$\frac{dY}{dx}=YP. \tag{302}$$

Заметим только, что в данном случае мы применили иное обозначение для значков, чем в [96], а потому получили и другую последовательность сомножителей в правой части формулы (302). Обозначая, как всегда, через $D(A)$ определитель матрицы $A$, мы можем вывести следующее уравнение для определителя $D(Y)$ решения $Y$:

$$D(Y)=D(Y)\Big|_{x=b} e^{\int_b^x [p_{11}(x)+p_{22}(x)+\ldots+p_{nn}(x)]\,dx}, \tag{303}$$

где $b$ есть некоторая обыкновенная точка для системы, т. е. такая точка, в которой все коэффициенты $p_{ik}(x)$ регулярны. Формула (303), называемая обычно *формулой Якоби*, является обобщением той формулы, которую мы раньше имели для определителя Вронского.

Принимая во внимание основное определение определителя в виде суммы произведения его элементов, мы можем утверждать, что при дифференцировании определителя достаточно продифференцировать в отдельности каждый его столбец и затем сложить все полученные определители, т. е.

$$\frac{dD(Y)}{dx}=\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y_{11}' & y_{12} \\ y_{21}' & y_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12}' \\ y_{21} & y_{22}' \end{vmatrix},$$

причем для простоты письма мы считаем $n=2$. Заменяя производные их выражениями из уравнений системы, будем иметь

$$\frac{dD(Y)}{dx}=\begin{vmatrix} p_{11}y_{11}+p_{21}y_{12} & y_{12} \\ p_{11}y_{21}+p_{21}y_{22} & y_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} y_{11} & p_{12}y_{11}+p_{22}y_{12} \\ y_{21} & p_{12}y_{21}+p_{22}y_{22} \end{vmatrix}.$$

Разлагая определители на сумму определителей и вынося за знак определителя $p_{ik}$, мы замечаем, что в некоторых слагаемых будут стоять определители с одинаковыми столбцами, равные нулю, так что предыдущая формула даст нам

$$\frac{dD(Y)}{dx}=p_{11}\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix}+p_{22}\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix}$$

или

$$\frac{dD(Y)}{dx}=(p_{11}+p_{22})D(Y),$$

откуда и вытекает формула Якоби. Эта формула показывает, что если в некоторой точке $x=b$ определитель $D(Y)$ отличен от нуля, то он будет отличным от нуля и при всяком $x$, который является обыкновенной точкой для системы, т. е. точкой регулярности всех коэффициентов этой системы. Если это обстоятельство имеет место, то назовем решение $Y$ полным решением (соответствующие $n$ решений, образующих решение $Y$, будут в этом случае линейно независимыми). Если это так, то мы можем рассматривать и обратную матрицу $Y^{-1}$, причем, как известно [96],

$$\frac{dY^{-1}}{dx}=-Y^{-1}\frac{dY}{dx}Y^{-1},$$

откуда в силу (302) эта обратная матрица удовлетворяет следующей системе:

$$\frac{dY^{-1}}{dx}=-PY^{-1}. \tag{304}$$

Пусть $Z$ — какое-нибудь решение нашей системы, т. е.

$$\frac{dZ}{dx}=ZP. \tag{305}$$

Составим матрицу

$$A=ZY^{-1}.$$

Отсюда, пользуясь обычным правилом дифференцирования произведения [96], а также уравнениями (305) и (304), получим

$$\frac{dA}{dx}=0,$$

т. е. матрица $A$ есть некоторая постоянная матрица $C$, элементы которой уже не зависят от $x$. Отсюда

$$Z=CY,$$

или, иначе говоря, всякое решение системы может быть получено из полного решения умножением слева на постоянную матрицу. Наоборот, из вида уравнения (302) непосредственно вытекает, что, умножая решение слева на любую постоянную матрицу, мы также получаем решение. Принимая во внимание, что

$$D(Z)=D(C)D(Y),$$

мы видим, что $D(Z) \neq 0$ в том и только в том случае, если $D(C) \neq 0$, т. е., умножая полное решение $Y$ слева на постоянную матрицу $C$, мы получаем полное решение в том и только в том случае, когда $D(C) \neq 0$. Из формулы (303) следует, между прочим, что при аналитическом продолжении полного решения $Y$ оно все время остается полным решением, как мы об этом уже говорили выше при определении полного решения. Заметим, что при той форме записи, которой мы пользовались раньше [96], мы должны были решение умножать на постоянную матрицу не слева, а справа, чтобы получить другое решение.

Положим, что $x = a$ есть точка плоскости, которая является полюсом или существенно особой точкой для коэффициентов $p_{ik}(x)$. Если мы обойдем вокруг этой точки, то коэффициенты вернутся к прежним значениям, но решение $Y$ при аналитическом продолжении перейдет, вообще говоря, в некоторое новое решение, которое получается из прежнего умножением слева на некоторую постоянную матрицу $V$:

$$Y^+ = VY.$$

Назовем матрицу $V$ *интегральной матрицей* при обходе точки $x = a$. Принимая во внимание, что

$$D(Y^+) = D(V)\, D(Y)$$

и что при аналитическом продолжении полное решение все время остается полным, мы можем утверждать, что определитель матрицы $V$ наверно отличен от нуля. Матрица $V$ зависит от того, какое именно полное решение $Y$ мы взяли. Если вместо $Y$ мы возьмем другое полное решение $Z = CY$, где $C$ — постоянная матрица с определителем, отличным от нуля, то мы будем иметь

$$Z^+ = CVY = CVC^{-1}Z,$$

т. е. интегральной матрицей для нового решения будет матрица, подобная матрице $V$. Короче говоря, *различные полные решения имеют подобные интегральные матрицы.*

**123. Регулярная особая точка.** Рассмотрим такую особую точку системы, которая является полюсом не выше первого порядка для коэффициентов. Считая для простоты письма, что эта точка есть начало $x = 0$, мы можем написать нашу систему в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} xy_1' &= q_{11}(x)\, y_1 + q_{21}(x)\, y_2 + \ldots + q_{n1}(x)\, y_n, \\ xy_2' &= q_{12}(x)\, y_1 + q_{22}(x)\, y_2 + \ldots + q_{n2}(x)\, y_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ xy_n' &= q_{1n}(x)\, y_1 + q_{2n}(x)\, y_2 + \ldots + q_{nn}(x)\, y_n, \end{aligned}\right\} \tag{306}$$

где $q_{ik}(x)$ — регулярные функции в точке $x = 0$:

$$q_{ik}(x) = a_{ik} + a_{ik}'x + a_{ik}''x^2 + \ldots \tag{307}$$

Будем искать решение системы (306) в виде

$$y_i = x^\rho (c_0^{(i)} + c_1^{(i)}x + \ldots). \tag{308}$$

Подставляя в систему и сравнивая коэффициенты при $x^\rho$, мы получим систему однородных уравнений для определения коэффициентов $c_0^{(i)}$:

$$\left.\begin{aligned} (a_{11} - \rho)\, c_0^{(1)} + a_{21}c_0^{(2)} + \ldots + a_{n1}c_0^{(n)} &= 0, \\ a_{12}c_0^{(1)} + (a_{22} - \rho)\, c_0^{(2)} + \ldots + a_{n2}c_0^{(n)} &= 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}c_0^{(1)} + a_{2n}c_0^{(2)} + \ldots + (a_{nn} - \rho)\, c_0^{(n)} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{309}$$

и дальше, сравнивая коэффициенты при $x^{\rho+k}$, будем иметь систему уравнений для определения коэффициентов $c_k^{(i)}$, когда предыдущие коэффициенты $c_m^{(i)}$ при $m<k$ известны:

$$\left.\begin{aligned}
&(a_{11}-\rho-k)\,c_k^{(1)}+a_{21}c_k^{(2)}+\ldots+a_{n1}c_k^{(n)}=H_{1k},\\
&a_{12}c_k^{(1)}+(a_{22}-\rho-k)\,c_k^{(2)}+\ldots+a_{n2}c_k^{(n)}=H_{2k},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{1n}c_k^{(1)}+a_{2n}c_k^{(2)}+\ldots+(a_{nn}-\rho-k)\,c_k^{(n)}=H_{nk},
\end{aligned}\right\} \tag{310}$$

где $H_{sk}$ суть линейные однородные функции коэффициентов $c_m^{(i)}$ при $m<k$. Все эти вычисления совершенно аналогичны вычислениям из [101]. Обозначим через $f(\rho)$ определитель однородной системы:

$$f(\rho)=\begin{vmatrix}
a_{11}-\rho & a_{21} & \ldots & a_{n1}\\
a_{12} & a_{22}-\rho & \ldots & a_{n2}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn}-\rho
\end{vmatrix}. \tag{311}$$

Для того чтобы получить решение системы (309), отличное от нулевого, мы должны приравнять этот определитель нулю:

$$f(\rho)=0; \tag{312}$$

при дальнейшем решении неоднородных систем нам надо, чтобы определитель этих систем был отличен от нуля. Этот определитель получается из определителя системы (309) заменой $\rho$ на $\rho+k$, т. е. он равен $f(\rho+k)$. Пусть $\rho_1$ — некоторый корень уравнения (312) такой, что числа $\rho_1+k$, где $k$ — любое целое положительное число, уже не являются корнями уравнения (312). При этом наши предыдущие вычисления окажутся формально выполнимыми, и мы сможем построить ряды, формально удовлетворяющие системе. Можно показать, как и в [101], что эти ряды будут сходиться в том круге $|x|<r$, где сходятся ряды (307).

Если корни уравнения (312) различны и отличаются друг от друга не на целое число, то предыдущий прием дает нам возможность построить $n$ линейно независимых решений системы (306). В противном случае, как и в [101], мы будем, вообще говоря, кроме решений вида (308) иметь еще решения, содержащие $\ln x$.

Запишем систему в матричной форме:

$$x\frac{dY}{dx}=YQ,$$

где $Q$ есть матрица, состоящая из функций $q_{ik}(x)$, регулярных при $x=0$. Мы можем представить эту матрицу в виде ряда, расположенного по целым положительным степеням $x$:

$$Q=A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots,$$

где $A_s$ — матрицы с постоянными элементами, в частности, матрица $A_0$ состоит из элементов $a_{ik}$, матрица $A_1$ — из элементов $a'_{ik}$ и т. д. Система (306) перепишется в виде

$$x\frac{dY}{dx}=Y(A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots). \tag{313}$$

Будем искать решение этой системы в виде

$$Y = x^W (I + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots),$$

где $W$ и $C_s$ — искомые матрицы. Мы имеем

$$\frac{dY}{dx} = W x^{W-1} (I + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots) + x^W (C_1 + 2C_2 x + \ldots).$$

Подставляя в уравнение (313) и умножая слева на $x^{-W}$, получим

$$W (I + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots) + x (C_1 + 2C_2 x + \ldots) = \\ = (I + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots) (A_0 + A_1 x + \ldots),$$

Сравнение свободных членов дает

$$W = A_0,$$

и далее, сравнивая коэффициенты при $x^k$, будем иметь систему матричных уравнений для последовательного определения матриц $C_k$:

$$A_0 C_k + k C_k = C_k A_0 + C_{k-1} A_1 + \ldots + C_1 A_{k-1} + A_k$$

или

$$A_0 C_k - C_k A_0 + k C_k = C_{k-1} A_1 + \ldots + C_1 A_{k-1} + A_k.$$

Не останавливаясь на исследовании этой системы в общем случае, мы разберем лишь тот частный случай, когда матрица $A_0$ приводится к диагональной матрице, т. е. когда существует такая матрица $S$ с постоянными элементами и определителем, отличным от нуля, что

$$S A_0 S^{-1} = [\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n],$$

причем $\rho_s$ суть как раз корни уравнения (312).

Введем вместо $Y$ новую искомую матрицу $Y_1$ по формуле

$$Y = Y_1 S. \tag{314}$$

Подставляя в уравнение (313) и умножая справа на $S^{-1}$, получим для матрицы $Y_1$ систему вида

$$x \frac{dY_1}{dx} = Y_1 (B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots), \tag{315}$$

где

$$B_k = S A_k S^{-1}$$

и, в частности,

$$B_0 = [\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n]. \tag{316}$$

Ищем, как и выше, решение системы (315) в виде

$$Y_1 = x^{W_1} (I + D_1 x + D_2 x^2 + \ldots).$$

Подставляя, получим $W_1 = B_0$, а следующие коэффициенты определяются из уравнений вида

$$B_0 D_k - D_k B_0 + k D_k = E_k, \tag{317}$$

где $E_k$ — матрица, которая выражается через предыдущие матрицы $D_m$ при $m < k$. Принимая во внимание, что $B_0$ есть диагональная матрица (316), мы получим, согласно уравнению (317), для элементов матрицы $D_k$

$$\rho_i \{D_k\}_{ij} - \{D_k\}_{ij} \rho_j + k \{D_k\}_{ij} = \{E_k\}_{ij},$$

т. е.

$$\{D_k\}_{ij} = \frac{1}{\rho_i - \rho_j + k} \{E_k\}_{ij}.$$

Если разность корней $(\rho_i - \rho_j)$ уравнения (312) не есть целое число, то это и дает возможность определения всех коэффициентов. Заметим, что если среди корней уравнения (312) есть равные, но матрица $A_0$ приводится к диагональной форме (имеет простые элементарные делители), то предыдущие вычисления сохраняют свою силу.

Мы не касались в наших рассуждениях вопросов сходимости, которые, как мы уже упоминали, можно провести аналогично тому, как это было сделано в [101]. Заметим, кроме того, что мы считали выше, что свободный член в искомом решении уравнения (313)

$$Y = x^W (I + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots)$$

равен единичной матрице. Это не является существенным. Важно лишь, чтобы он был матрицей с определителем, отличным от нуля. Действительно, пусть

$$Y = x^{W'} (C_0' + C_1' x + C_2' x^2 + \ldots),$$

где $D(C_0') \neq 0$. Возьмем новое решение

$$C_0'^{-1} Y = C_0'^{-1} x^{W'} C_0' C_0'^{-1} (C_0' + C_1' x + C_2' x^2 + \ldots).$$

Но для любой аналитической функции от матрицы, как мы знаем,

$$C_0'^{-1} f(W') C_0' = f(C_0'^{-1} W' C_0'),$$

так что, например,

$$C_0'^{-1} e^{W'} C_0' = e^W \qquad (W = C_0'^{-1} W' C_0'),$$

и, следовательно, новое решение будет

$$C_0'^{-1} Y = x^W (I + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots) \quad (C_k = C_0'^{-1} C_k').$$

Аналогично можно рассуждать и при решении уравнения (315).

**124. Регулярные системы.** Рассмотрим систему уравнений простейшего вида, коэффициенты которых суть рациональные функции, имеющие полюсы первого порядка на конечном расстоянии и равные нулю на бесконечности. Пусть $x = a_j$ есть полюс первого порядка некоторых коэффициентов. Каждый из коэффициентов $p_{ik}(x)$ имеет в этом полюсе некоторый вычет $u_{ik}^{(j)}$, и эти вычеты образуют некоторую квадратную таблицу $U_j$. Мы можем, таким образом, записать нашу систему в следующем виде:

$$\frac{dY}{dx} = Y \sum_{j=1}^{m} \frac{U_j}{x - a_j}, \tag{318}$$

где $U_j$ — матрицы, состоящие из постоянных элементов. Будем искать такое решение системы (318), которое в некоторой точке $x = b$, отличной от точек $a_j$, обращается в единичную матрицу, и обозначим такое решение символом

$$Y(b;\ x).$$

Принимая во внимание это начальное условие, можно переписать систему в следующей интегральной форме:

$$Y(b;\ x) = I + \int_b^x Y(b;\ x) \sum_{j=1}^{m} \frac{U_j}{x - a_j} dx, \tag{319}$$

где интегрирование матрицы равносильно интегрированию каждого ее элемента.

Применим теперь, как всегда, метод последовательных приближений, а именно положим $Y_0 = I$, а следующее приближение определим обычной формулой

$$Y_n(x) = I + \int_b^x Y_{n-1}(x) \sum_{j=1}^{m} \frac{U_j}{x - a_j}\, dx. \tag{320}$$

Мы будем иметь, согласно методу последовательных приближений,

$$Y(b;\ x) = Y_0 + (Y_1(x) - Y_0) + (Y_2(x) - Y_1(x)) + \ldots,$$

или, полагая для краткости

$$Z_n(x) = Y_n(x) - Y_{n-1}(x) \quad (Z_0 = I),$$

причем в силу (320) мы имеем

$$Z_n(x) = \int_b^x Z_{n-1}(x) \sum_{j=1}^{m} \frac{U_j}{x - a_j}\, dx, \tag{321}$$

можно написать

$$Y(b;\ x) = I + Z_1(x) + Z_2(x) + \ldots \tag{322}$$

Определим первые члены этого разложения, пользуясь общей формулой (321). Вводя обозначение

$$L_b(a_{j_1};\ x) = \int_b^x \frac{dx}{x - a_{j_1}} = \ln \frac{x - a_{j_1}}{b - a_{j_1}},$$

имеем

$$Z_1(x) = \int_b^x \sum_{j=1}^{m} \frac{U_j}{x - a_j}\, dx = \sum_{j_1=1}^{m} U_{j_1} L_b(a_{j_1};\ x).$$

Точно так же, вводя обозначение

$$L_b(a_{j_1},\ a_{j_2};\ x) = \int_b^x \frac{L_b(a_{j_1};\ x)}{x - a_{j_2}}\, dx,$$

получим

$$Z_2(x) = \int_b^x \sum_{j_1=1}^{m} U_{j_1} L_b(a_{j_1};\ x) \sum_{j_2=1}^{m} \frac{U_{j_2}}{x - a_{j_2}}\, dx,$$

или

$$Z_2(x) = \sum_{j_1,\ j_2}^{1,\ \ldots,\ m} U_{j_1} U_{j_2} L_b(a_{j_1},\ a_{j_2};\ x),$$

где суммирование распространяется на значки $j_1$ и $j_2$ независимо от 1 до $m$. Продолжая так же и дальше и вводя формулы

$$L_b(a_{j_1};\ x)=\ln\frac{x-a_{j_1}}{b-a_{j_1}},$$

$$L_b(a_{j_1},\ \ldots,\ a_{j_\nu};\ x)=\int_b^x\frac{L_b(a_{j_1},\ \ldots,\ a_{j_{\nu-1}};\ x)}{x-a_{j_\nu}}dx, \tag{323}$$

определяющие последовательно коэффициенты $L_b(a_{j_1},\ \ldots,\ a_{j_\nu};\ x)$, получим

$$Z_\nu(x)=\sum_{j_1,\ \ldots,\ j_\nu}^{1,\ \ldots,\ m}U_{j_1}\ldots U_{j_\nu}L_b(a_{j_1},\ \ldots,\ a_{j_\nu};\ x),$$

где суммирование распространяется на все значки, указанные под знаком суммы, причем каждый значок, независимо от других, пробегает целые значения от 1 до $m$. Окончательно в силу (322) будем иметь следующее представление для нашего решения в виде степенного ряда от матриц $U_j$:

$$Y(b;\ x)=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\ \ldots,\ j_\nu}^{1,\ \ldots,\ m}U_{j_1}\ldots U_{j_\nu}L_b(a_{j_1},\ \ldots,\ a_{j_\nu};\ x), \tag{324}$$

причем коэффициенты этого ряда определяются рекуррентными соотношениями (323).

Решение $Y(b;\ x)$ может быть аналитически продолжено по любому пути, не проходящему через особые точки $a_j$, и ряд (324) дает это решение во всей области его существования, т. е. при любом аналитическом продолжении. Действительно, покажем сначала, что ряд (324) сходится при любом аналитическом продолжении коэффициентов $L_b(a_{j_1},\ \ldots,\ a_{j_\nu};\ x)$. Пусть $l$ — некоторая кривая, выходящая из точки $x=b$ и отстоящая на конечном расстоянии от точек $a_j$. Пусть $\delta$ — кратчайшее расстояние от точек $a_j$ до кривой $l$ и $s$ — длина дуги на этой кривой, отсчитываемая от точки $b$. Применяя обычную оценку интеграла по контуру $l$, мы получаем следующую оценку для коэффициентов ряда (324) на $l$ [4]:

$$|L_b(a_{j_1};\ x)|\leqslant\int_0^s\frac{ds}{\delta}=\frac{s}{\delta},$$

откуда

$$|L_b(a_{j_1},\ a_{j_2};\ x)|\leqslant\int_0^s\frac{|L_b(a_{j_1};\ x)|}{\delta}ds\leqslant\int_0^s\frac{s\,ds}{\delta^2}=\frac{1}{2!}\left(\frac{s}{\delta}\right)^2,$$

и вообще на $l$

$$|L_b(a_{j_1},\ \ldots,\ a_{j_\nu};\ x)|\leqslant\frac{1}{\nu!}\left(\frac{s}{\delta}\right)^\nu.$$

Но степенной ряд

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\left(\frac{s}{\delta}\right)^\nu z^\nu=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\left(\frac{sz}{\delta}\right)^\nu$$

сходится при всяком $z$, и, следовательно, мы можем утверждать, что ряд (324) сходится абсолютно для любых матриц $U_j$ и при любом аналитическом продолжении его коэффициентов [99]. Из предыдущих оценок вытекает также, что сходимость будет и равномерной во всякой конечной области (вообще говоря, многолистной), отстоящей от точек $a_j$ на расстоянии большем нуля. Наконец, дифференцируя ряд (324) почленно по $x$, нетрудно убедиться, что он удовлетворяет и системе. Действительно, мы можем переписать его следующим образом, выделяя одно из суммирований:

$$Y(b;\ x) = I + \sum_{j=1}^{m} U_j L_b(a_j;\ x) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m} \sum_{j_1, \ldots, j_\nu}^{1, \ldots, m} U_{j_1} \ldots U_{j_\nu} U_j L_b(a_{j_1}, \ldots, a_{j_\nu}, a_j;\ x).$$

Дифференцируя по $x$ и принимая во внимание, что в силу определения

$$\frac{dL_b(a_j;\ x)}{dx} = \frac{1}{x - a_j}$$

и

$$\frac{dL_b(a_{j_1}, \ldots, a_{j_\nu}, a_j;\ x)}{dx} = \frac{L_b(a_{j_1}, \ldots, a_{j_\nu};\ x)}{x - a_j},$$

получим в результате дифференцирования

$$\frac{dY(b;\ x)}{dx} = \sum_{j=1}^{m} \frac{U_j}{x - a_j} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, \ldots, j_\nu}^{1, \ldots, m} [U_{j_1} \ldots U_{j_\nu} L_b(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu};\ x)] \sum_{j=1}^{m} \frac{U_j}{x - a_j}$$

или

$$\frac{dY(b;\ x)}{dx} = \left[ I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, \ldots, j_\nu}^{1, \ldots, m} U_{j_1} \ldots U_{j_\nu} L_b(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu};\ x) \right] \sum_{j=1}^{m} \frac{U_j}{x - a_j},$$

т. е.

$$\frac{dY(b;\ x)}{dx} = Y(b,\ x) \sum_{j=1}^{m} \frac{U_j}{x - a_j}.$$

Наконец, непосредственно ясно, что построенное решение обращается в единичную матрицу при $x = b$, так как в силу определения коэффициенты ряда обращаются в нуль при $x = b$. Предыдущие рассуждения приводят нас к следующей теореме:

Теорема. *Решение системы* (318), *которое обращается в единичную матрицу при* $x = b$, *определяется рядом* (324) *во всей области его существования по отношению к* $x$ *и при любом выборе матриц* $U_j$.

Если на плоскости $x$ проведем из точек $a_j$ на бесконечность разрезы $l_j$ так, чтобы они не пересекали друг друга, то на разрезанной таким образом плоскости, которая будет односвязной областью, решение (324) будет однозначной функцией $x$, но на противоположных берегах разреза оно будет иметь различные значения, а именно: в результате обхода вокруг каждой точки $a_j$ в положительном направлении наше решение будет умножаться слева на некоторую постоянную матрицу $V_j$, которую мы назвали выше ин-

тегральной матрицей, соответствующей особой точке $a_j$. Выведем теперь выражения для интегральных матриц $V_j$ через матрицы $U_j$, входящие в коэффициенты заданной системы. В исходной точке $x=b$ наше решение имеет значение $I$, т. е. обращается в единичную матрицу, и, следовательно, чтобы получить интегральную матрицу $V_j$, нам надо определить значение нашего решения, которое получится при аналитическом продолжении вдоль замкнутого контура $l_j$, обходящего вокруг точки $a_j$ и возвращающегося в точку $b$.

Это значение может быть получено непосредственно по формуле (324), причем надо только в формулах (323) производить интегрирование по вышеуказанному замкнутому контуру $l_j$, и при этом, конечно, полученные коэффициенты не будут уже зависеть от $x$.

Введем для них следующие обозначения:

$$P_j(a_{j_1};\ b)=\int\limits_{l_j}\frac{dx}{x-a_{j_1}}=\begin{cases}2\pi i & \text{при } j=j_1,\\ 0 & \text{при } j\neq j_1\end{cases} \tag{325}$$

и

$$P_j(a_{j_1},\ \ldots,\ a_{j_\nu};\ b)=\int\limits_{l_j}\frac{L_b(a_{j_1},\ \ldots,\ a_{j_{\nu-1}};\ x)}{x-a_{j_\nu}}\,dx. \tag{326}$$

При этом мы будем иметь представление $V_j$ в виде степенного ряда от матриц $U_j$, абсолютно сходящегося при любом выборе этих матриц:

$$V_j=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\ \ldots,\ j_\nu}^{1,\ \ldots,\ m}U_{j_1}\ldots U_{j_\nu}P_j(a_{j_1},\ \ldots,\ a_{j_\nu};\ b). \tag{327}$$

Теорема. *Интегральные матрицы $V_j$ суть целые функции матриц $U_j$, определяемые рядом* (327), *коэффициенты которого определяются формулами* (325) *и* (326).

Вместо формул (326) можно доказать следующие формулы, связывающие величины $P_j$ для соседних значений $\nu$:

$$P_j(a_{j_1},\ \ldots,\ a_{j_\nu};\ b)=\int\limits_{a_j}^{b}\left[\frac{P_j(a_{j_1},\ \ldots,\ a_{j_{\nu-1}};\ b)}{b-a_{j_\nu}}-\frac{P_j(a_{j_2},\ \ldots,\ a_{j_\nu};\ b)}{b-a_{j_1}}\right]db. \tag{328}$$

Доказательство этих формул мы приводить не будем.

Если совершим аналитическое продолжение построенного решения по какому-либо контуру, выходящему из некоторой точки $x$ и возвращающемуся в эту же точку, то такой замкнутый контур в смысле аналитического продолжения равносилен нескольким обходам вокруг точек $a_j$ в положительном или отрицательном направлении. Следовательно, при возвращении в точку $x$ наше решение умножится слева на постоянную матрицу, которая представляется в виде произведения множителей $V_j$ или $V_j^{-1}$. В этом смысле говорят, что интегральные матрицы $V_j$ образуют группу уравнения (318).

Разъясним сказанное на простом примере. На рис. 72 отмечены особые точки $a_1$, $a_2$ и $a_3$ и сплошной линией указан контур аналитического продолжения. Пунктирные линии сводят этот контур к равносильному в отношении аналитического продолжения контуру, состоящему из ряда обходов вокруг точек $a_i$, причем взято $x=b$.

Первый обход относится к точке $a_1$, и в результате этого обхода мы придем в точку $b$ с решением $V_1 Y(b; x)$. Последующий обход относится к точке $a_3$, и в результате этого обхода постоянная матрица $V_1$ останется без изменения, а матрица $Y(b; x)$ умножится слева на $V_3$, т. е. после второго обхода мы придем в точку $b$ со следующим решением $V_1 V_3 Y(b; x)$; и, наконец, в результате третьего обхода мы вернемся окончательно в точку $b$ с решением

$$V_1 V_3 V_2^{-1} Y(b; x).$$

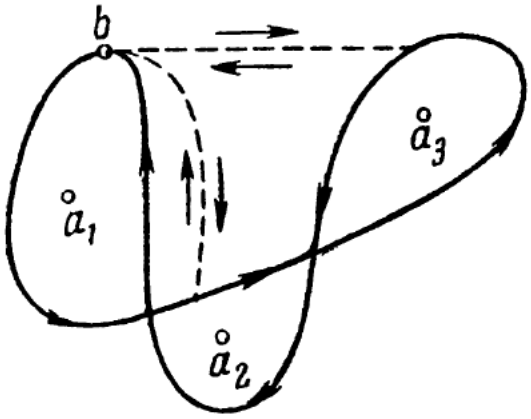


Рис. 72.

Любое решение $Y(x)$ системы (318) отличается от решения $Y(b; x)$ на постоянную матрицу

$$Y(x) = CY(b; x),$$

и его интегральные матрицы будут, как известно [122],

$$CV_j C^{-1}.$$

Рассмотрим теперь матрицу $[Y(b; x)]^{-1}$, которая является обратной матрицей для $Y(b; x)$. Эта матрица, как мы видели раньше, удовлетворяет системе линейных уравнений

$$\frac{d[Y(b; x)]^{-1}}{dx} = -\sum_{j=1}^{m} \frac{U_j}{x - a_j} [Y(b; x)]^{-1}.$$

Применяя к этой системе уравнений метод последовательных приближений, мы получим следующее представление этой матрицы в виде степенного ряда от матриц $U_j$:

$$[Y(b; x)]^{-1} = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, \ldots, j_\nu}^{1, \ldots, m} U_{j_1}, \ldots, U_{j_\nu} L_b^*(a_{j_1}, \ldots, a_{j_\nu}; x), \tag{329}$$

где коэффициенты определяются по формулам

$$L_b^*(a_{j_1}; x) = -\int_b^x \frac{dx}{x - a_{j_1}} = -\ln \frac{x - a_{j_1}}{b - a_{j_1}} \tag{330}$$

и

$$L_b^*(a_{j_1}, \ldots, a_{j_\nu}; x) = -\int_b^x \frac{L_b^*(a_{j_2}, \ldots, a_{j_\nu}; x)}{x - a_{j_1}} dx. \tag{331}$$

Разложение (329) сходится абсолютно для любых матриц $U_j$ и при любом аналитическом продолжении относительно переменной $x$. Эти результаты получаются совершенно так же, как и выше. Принимая во внимание, что

$$[V_j Y(b; x)]^{-1} = [Y(b; x)]^{-1} V_j^{-1},$$

мы видим, что матрица $[Y(b; x)]^{-1}$ при обходе вокруг особой точки $a_j$ помножается справа на матрицу $V_j^{-1}$, и таким образом можно получить представление $V_j^{-1}$ в виде степенного ряда от матриц $U_l$, пользуясь рядом (329) и

совершая аналитическое продолжение его коэффициентов по замкнутому контуру $l_j$, обходящему вокруг особой точки $a_j$. Это даст нам ряд вида

$$V_j^{-1} = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, \ldots, j_\nu}^{1, \ldots, m} U_{j_1} \ldots U_{j_\nu} P_j^* (a_{j_1}, \ldots, a_{j_\nu}; b), \tag{332}$$

где коэффициенты определяются последовательно по формулам

$$P_j^* (a_{j_1}; b) = -\int_{l_j} \frac{dx}{x - a_{i_1}}, \tag{333}$$

$$P_j^* (a_{j_1}, \ldots, a_{j_\nu}; b) = -\int_{l_j} \frac{L_b (a_{j_2}, \ldots, a_{j_\nu}; x)}{x - a_{j_\nu}} dx.$$

Отметим особо один частный случай, *когда систему* (318) *можно проинтегрировать в конечном виде, а именно предположим, что матрицы* $U_j$ *попарно коммутируют, т. е. для любых значков* $i$ *и* $j$ *имеем*

$$U_i U_j = U_j U_i.$$

Покажем, что в этом случае решение $Y(b; x)$ системы может быть записано в конечном виде следующим образом:

$$Y(b; x) = \left(\frac{x - a_1}{b - a_1}\right)^{U_1} \ldots \left(\frac{x - a_m}{b - a_m}\right)^{U_m}. \tag{334}$$

Нетрудно видеть, что написанная функция обращается в единичную матрицу при $x = b$. Проверим, что она удовлетворяет и системе уравнений. Дифференцируя по обычному правилу дифференцирования произведения и принимая во внимание, что

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x - a_j}{b - a_j}\right)^{U_j} = \frac{d}{dx} e^{U_j \ln \frac{x - a_j}{b - a_j}} = \left(\frac{x - a_j}{b - a_j}\right)^{U_j} \frac{U_j}{x - a_j}, \tag{335}$$

получим

$$\frac{dY(b; x)}{dx} = \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{x - a_1}{b - a_1}\right)^{U_1} \ldots \left(\frac{x - a_{j-1}}{b - a_{j-1}}\right)^{U_{j-1}} \frac{U_j}{x - a_j} \left(\frac{x - a_j}{b - a_j}\right)^{U_j} \ldots \left(\frac{x - a_m}{b - a_m}\right)^{U_m}.$$

Раз матрица $U_j$ коммутирует с $U_i$, то она коммутирует и с любой функцией $f(U_i)$, представляемой степенным рядом от $U_i$. Мы можем поэтому написать предыдущую формулу следующим образом:

$$\frac{dY(b; x)}{dx} = \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{x - a_1}{b - a_1}\right)^{U_1} \ldots \left(\frac{x - a_m}{b - a_m}\right)^{U_m} \frac{U_j}{x - a_j},$$

$$\frac{dY(b; x)}{dx} = Y(b; x) \sum_{j=1}^{m} \frac{U_j}{x - a_j},$$

т. е. матрица (334) действительно удовлетворяет системе. Формула (334) может быть получена из системы, если мы в этой системе совершим чисто формально разделение переменных, не обращая внимания на то, что мы имеем дело с матрицами, а не с численными переменными. В данном случае

это оказывается возможным вследствие того, что матрицы $U_j$ попарно коммутируют. Правая часть формулы (334) представляет собой просуммированный ряд (324) в предположении, что матрицы $U_j$ попарно коммутируют. Из формулы (334) вытекает, между прочим, что в рассматриваемом случае при обходе точки $a_j$ матрица $Y(b; x)$ получает слева постоянный множитель

$$e^{2\pi i U_j} U_j.$$

Это становится ясно, если написать формулу

$$\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{U_j} = e^{U_j \ln \frac{x-a_j}{b-a_j}}$$

и воспользоваться известной многозначностью логарифма.

Отметим еще, что в формуле (335) порядок множителей справа не играет роли, так как оба множителя содержат только одну матрицу $U_j$, а потому коммутируют.

**125. Представление решения в окрестности особой точки.** Рассмотрим логарифмы интегральных матриц с дополнительным численным множителем

$$W_j = \frac{1}{2\pi i} \ln V_j = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} (V_j - I)^{\nu}. \tag{336}$$

Мы взяли главное значение логарифма, которое представляется степенным рядом, сходящимся, если матрица $V_j$ достаточно близка к единичной матрице. Из формулы (327) непосредственно вытекает, что это условие будет наверно выполнено, если матрицы $U_s$ близки к нулевой матрице, что мы и будем пока считать. В дальнейшем мы дадим представление для $W_j$ при всех $U_s$ и покажем, что $W_j$, как функция $U_s$, будет иметь особенность лишь в том случае, когда среди характеристических чисел $U_j$ есть такие, разность между которыми равна целому числу, отличному от нуля.

Подставляя в ряд вместо $(V_j - I)$ его выражение по формуле (327) и собирая подобные члены, получим для $W_j$ представление в виде степенного ряда от матрицы $U_s$, сходящегося, если эти матрицы достаточно близки к нулевой матрице:

$$W_j = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, \ldots, j_\nu}^{1, \ldots, m} U_{j_1} \ldots U_{j_\nu} Q_{j_1}(a_{j_1}, \ldots, a_{j_\nu}; b). \tag{337}$$

Мы не останавливаемся на вычислении коэффициентов этого разложения, что может быть легко сделано при помощи непосредственной подстановки ряда в ряд. Рассмотрим теперь элементарную функцию

$$\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{W_j} = e^{W_j \ln \frac{x-a_j}{b-a_j}}. \tag{338}$$

Беря соответствующее значение логарифма, которое обращается в нуль при $x = b$, мы видим, что функция (338) обращается в единичную матрицу при $x = b$, а в результате обхода вокруг $a_j$ логарифм приобретает слагаемое $2\pi i$, и функция (338) превратится в новую функцию:

$$e^{W_j\left(2\pi i + \ln \frac{x-a_j}{b-a_j}\right)} = e^{2\pi i W_j} \left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{W_j} = V_j \left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{W_j},$$

причем порядок множителей в этом выражении не играет роли, так как оба множителя суть степенные ряды одной и той же матрицы $W_j$, а следовательно, коммутируют друг с другом. Мы видим, таким образом, что элементарная функция (338) в результате обхода вокруг $a_j$ приобретает слева тот же самый множитель $V_j$, что и наше решение $Y(b; x)$, и также обращается в единичную матрицу при $x=b$. Мы можем, следовательно, написать

$$Y(b; x)=\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{W_j}\tilde{Y}^{(j)}(b; x), \tag{339}$$

где $\tilde{Y}^{(j)}(b; x)$ есть матрица, равная единичной матрице при $x=b$ и однозначная в окрестности точки $x=a_j$. Мы покажем сейчас, что она будет не только однозначной в окрестности точки $x=b$, но будет и регулярной в самой точке $x=b$, т. е. что *множитель* $\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{W_j}$ *включает в себя не только разветвление нашего решения, но и вообще всю особенность решения в точке* $a_j$, как это было и при исследовании регулярных особых точек уравнений второго порядка.

Имеем согласно (339)

$$\tilde{Y}^{(j)}(b; x)=\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{-W_j}Y(b; x), \tag{340}$$

откуда, дифференцируя по $x$, получаем

$$\frac{d\tilde{Y}^{(j)}(b; x)}{dx}=-\frac{W_j}{x-a_j}\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{-W_j}Y(b; x)+\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{-W_j}\frac{dY(b; x)}{dx}$$

или, пользуясь уравнениями (318) и (340),

$$\frac{d\tilde{Y}^{(j)}(b; x)}{dx}=-\frac{W_j}{x-a_j}\tilde{Y}(b; x)+\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{-W_j}Y(b; x)\sum_{s=1}^{m}\frac{U_s}{x-a_s},$$

т. е. матрица $\tilde{Y}^{(j)}(b; x)$ является решением системы уравнений

$$\frac{d\tilde{Y}^{(j)}(b; x)}{dx}=\tilde{Y}^{(j)}(b; x)\sum_{s=1}^{m}\frac{U_s}{x-a_s}-\frac{W_j\tilde{Y}^{(j)}(b; x)}{x-a_j}. \tag{341}$$

Обращаясь к правой части формулы (340), мы видим, что оба сомножителя представляются степенными рядами от матриц $U_s$, и, следовательно, то же можем сказать и об их произведении, причем если все $U_s$ равны нулю, то $W_j$ также равно нулю, и первый множитель слева в правой части (340) обращается в единичную матрицу. То же можно утверждать относительно $Y(b; x)$, а следовательно, и относительно $\tilde{Y}^{(j)}(b; x)$ Поэтому можно искать $\tilde{Y}^{(j)}(b; x)$ в виде степенного ряда следующего вида:

$$\tilde{Y}^{(j)}(b; x)=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1, \ldots, j_\nu}^{1, \ldots, m_\nu}U_{j_1}\ldots U_{j_\nu}\tilde{L}_b^{(j)}(a_{j_1}, \ldots, a_{j_\nu}; x). \tag{342}$$

Подставляя в уравнение (341) ряды (337) и (342) и сравнивая коэффициенты при произведении $U_{j_1}\ldots U_{j_\nu}$, получим

$$\frac{d\tilde{L}_b^{(j)}(a_{j_1}, \ldots, a_{j_\nu}; x)}{dx}=$$

$$=\frac{\tilde{L}_b^{(j)}(a_{j_1}, \ldots, a_{j_{\nu-1}}; x)}{x-a_{j_\nu}}-\frac{1}{x-a_j}\sum_{k=1}^{\nu}Q_j(a_{j_1}, \ldots, a_{j_k}; b)\,\tilde{L}_b^{(j)}(a_{j_{k+1}}, \ldots, a_{j_\nu}; x)$$

и, в частности,

$$\frac{d\tilde{L}_b^{(j)}(a_{j_1};\ x)}{dx} = \frac{1}{x-a_{j_1}} - \frac{Q_j(a_{j_1};\ b)}{x-a_j}.$$

Заметим, что в написанной сумме по $k$ второй множитель слагаемого теряет смысл при $k=\nu$, и его надо заменить при этом единицей. В дальнейшем мы часто будем встречаться с аналогичными суммами, в которых сомножители крайних слагаемых теряют смысл при принятой записи, и надо помнить, что они заменяются при этом единицей.

Как мы уже упоминали выше, матрица $\tilde{Y}^{(j)}(b;\ x)$ должна обращаться в единичную матрицу при $x=b$ для любых матриц $U_j$, достаточно близких нулю, т. е. все коэффициенты в разложении (342) должны обращаться в нуль при $x=b$. Принимая это во внимание и пользуясь предыдущими формулами, мы можем написать следующую формулу, определяющую последовательно коэффициенты в разложении (342):

$$\tilde{L}_b^{(j)}(a_{j_1},\ldots,a_{j_\nu};\ x) = \int_b^x \left[\frac{\tilde{L}_b^{(j)}(a_{j_1},\ldots,a_{j_{\nu-1}};\ x)}{x-a_{j_\nu}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{x-a_j}\sum_{k=1}^{\nu} Q_j(a_{j_1},\ldots,a_{j_k};\ b)\,\tilde{L}_b^{(j)}(a_{j_{k+1}},\ldots,a_{j_\nu};\ x)\right] dx. \quad (343)$$

В частности, при $\nu=1$ мы имеем

$$\tilde{L}_b^{(j)}(a_{j_1};\ x) = \int_b^x \left[\frac{1}{x-a_{j_1}} - \frac{Q_j(a_{j_1};\ b)}{x-a_j}\right] dx. \quad (344)$$

Эти коэффициенты в разложении (342) должны быть однозначными функциями в окрестности $x=a_j$, поскольку вся сумма ряда (342) должна быть однозначной функцией, как мы это видели выше. Отсюда непосредственно следует, что в выражении (344) под знаком интеграла вычет в полюсе $x=a_j$ должен обращаться в нуль, и, следовательно, функция (344) оказывается регулярной в самой точке $x=a_j$. Будем теперь дальше проводить доказательство от $(\nu-1)$ к $\nu$. Положим, что все функции

$$\tilde{L}_b^{(j)}(a_{j_1},\ldots,a_{j_s};\ x) \quad (345)$$

регулярны в точке $x=a_j$ при $s<\nu$. Докажем, что этим же свойством будут обладать функции (345) и при $s=\nu$. Для этих функций мы имеем формулу (343). В силу упомянутой выше регулярности функций (345) при $s<\nu$ подинтегральная функция формулы (343) может иметь в точке $x=a_j$ лишь полюс первого порядка. Но если бы вычет в этом полюсе оказался отличным от нуля, то функция (343) оказалась бы многозначной в окрестности точки $x=a_j$, чего не может быть. Отсюда следует, что подинтегральная функция в формуле (343) и сам интеграл будут регулярны в точке $x=a_j$. Мы не останавливаемся на более подробном определении коэффициентов в разложении (342).

Все предыдущие рассуждения относились лишь к тому случаю, когда матрицы $U_s$ достаточно близки к нулю. В дальнейшем мы дадим представление матрицы $W_j$ и связанных с нею матриц, годное для любых матриц, причем окажется, что особыми точками в таком представлении будут те матрицы $U_s$, среди характеристических чисел которых имеются такие, которые отличаются на целое число, отличное от нуля.

**126. Канонические решения.** Решение $Y(b;\ x)$ зависит от выбора точки $b$, в которой производится нормирование матрицы к единичной матрице. Поэтому матрица $Y(b;\ x)$ называется матрицей (решением), нормальной в точке $x=b$. Эта последняя точка должна быть отличной от особых точек $a_j$. Мы не можем, очевидно, задавать начальные условия в особой точке $x=a_j$, но мы можем стараться построить такое решение, которое имело бы наиболее простую форму в окрестности особой точки $x=a_j$, совершенно так же, как это нами делалось при построении решения в окрестности регулярной особой точки уравнения второго порядка. Мы и займемся сейчас построением такого решения. Назовем его *каноническим решением в особой точке* $x=a_j$.

Мы можем написать

$$Y(b;\ x)=\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{W_j}\tilde{Y}^{(j)}(b;\ x)=(x-a_j)^{W_j}(b-a_j)^{-W_j}\tilde{Y}^{(j)}(b;\ x),$$

причем порядок первых двух множителей в правой части не играет роли, поскольку оба множителя содержат только одну матрицу $W_j$. Относя множитель $(b-a_j)^{-W_j}$ к множителю $\tilde{Y}^{(j)}(b;\ x)$, можно написать

$$Y(b;\ x)=(x-a_j)^{W_j}\overline{Y}^{(j)}(b;\ x), \tag{346}$$

где

$$\overline{Y}^{(j)}(b;\ x)=(b-a_j)^{-W_j}\tilde{Y}^{(j)}(b;\ x)$$

есть матрица, регулярная в точке $x=a_j$. Если все $U_s$ равны нулю, то $\tilde{Y}^{(j)}(b;\ x)$ обращается в единичную матрицу, и, следовательно, определитель этой матрицы отличен от нуля, если $U_s$ достаточно близки к нулю. Определитель матрицы $(b-a_j)^{-W_j}=e^{-W_j\ln(b-a_j)}$ отличен от нуля как определитель показательной функции от матрицы [96], и, следовательно, определитель матрицы $\overline{Y}^{(j)}(b;\ x)$ отличен от нуля в точке $x=a_j$, если все $U_s$ близки к нулю, т. е. при этом и матрица $\overline{Y}^{(j)}(b;\ x)^{-1}$ будет регулярной в точке $x=a_j$. Всякое решение нашей системы отличается от решения $Y(b;\ x)$ постоянным множителем $C$ (матрица слева):

$$Y(x)=CY(b;\ x), \tag{347}$$

причем мы считаем, что определитель $C$ отличен от нуля для того, чтобы получить полное решение. Вместо формулы (347) можно написать

$$Y(x)=C(x-a_j)^{W_j}C^{-1}C\overline{Y}^{(j)}(b;\ x);$$

но, как мы видели в [123],

$$C(x-a_j)^{W_j}C^{-1}=(x-a_j)^{W_j'},$$

где

$$W_j'=CW_jC^{-1}. \tag{348}$$

Выберем теперь матрицу $C$ равной

$$C=[\overline{Y}^{(j)}(b;\ a_j)]^{-1}, \tag{349}$$

так что мы будем иметь

$$C\overline{Y}^{(j)}(b;\ x)=1 \text{ при } x=a_j.$$

При этом мы получим решение, которое обозначим через $\theta_j(x)$ и которое назовем *каноническим в точке* $x=a_j$. Это решение представляется в виде

$$\theta_i(x)=(x-a_j)^{W'_j}\bar{\theta}_j(x),$$

где $\bar{\theta}_j(x)$ — матрица, регулярная в точке $x=a_j$ и равная единичной матрице в этой точке. Мы покажем сейчас, что *в этом каноническом решении матрица* $W'_j$ *должна совпадать с матрицей* $U_j$.

Заметим прежде всего, что все матрицы, которые мы выше строили, представляются степенными рядами от матриц $U_s$, если эти последние матрицы достаточно близки к нулю. При этом матрица $W'_j$ так же, как и $W_j$, не должна содержать свободного члена в своем разложении, т. е. мы должны иметь разложение вида

$$W'_j=\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\ldots,j_\nu}^{1,\ldots,m}U_{j_1}\ldots U_{j_\nu}J_j(a_{j_1},\ldots,a_{j_\nu}). \tag{350}$$

Дифференцируя по $x$ формулу

$$\theta_j(x)=(x-a_j)^{-W'_j}\theta_j(x),$$

мы, как и в предыдущем пункте, получим следующую систему уравнений для элементов матрицы $\bar{\theta}_j(x)$:

$$\frac{d\bar{\theta}_j(x)}{dx}=\theta_j(x)\sum_{s=1}^{m}\frac{U_s}{x-a_s}-\frac{W_j\bar{\theta}_j(x)}{x-a_j}. \tag{351}$$

Если все $U_s$ равны нулю, то $\bar{\theta}_j(x)$ должна обращаться в постоянную матрицу, причем в силу условия в точке $x=a_j$ это должна быть единичная матрица, т. е. мы должны иметь разложение вида

$$\bar{\theta}_j(x)=1+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\ldots,j_\nu}^{1,\ldots,m}U_{j_1}\ldots U_{j_\nu}N_j(a_{j_1}\ldots a_{j_\nu};\ x). \tag{352}$$

В этом разложении все коэффициенты должны быть регулярными в точке $a_j$ и должны обращаться в нуль в этой точке, поскольку вся сумма ряда должна при любых $U_s$ обращаться в точке $x=a_j$ в единичную матрицу. Подставляя разложения (350) и (352) в уравнение (351), мы, как и выше, придем к следующему равенству:

$$N_j(a_{j_1},\ldots,a_{j_\nu};\ x)=\int_{a_j}^{x}\left[\frac{N_j(a_{j_1},\ldots,a_{j_{\nu-1}};\ x)}{x-a_{j_\nu}}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{x-a_j}\sum_{k=1}^{\nu}J_j(a_{j_1},\ldots,a_{j_k})\,N_j(a_{j_{k+1}}\ldots a_{j_\nu};\ x)\right]dx, \tag{353}$$

и, в частности,

$$N_i(a_{j_1};\ x)=\int_{a_j}^{x}\left[\frac{1}{x-a_{i_1}}\cdot-\frac{J_j(a_{j_1})}{x-a_{j_1}}\right]dx,$$

Последнее равенство в силу регулярности левой части показывает, что

$$J_j(a_{j_1}) = \begin{cases} 1 & \text{при } j_1 = j, \\ 0 & \text{при } j_1 \neq j. \end{cases} \tag{354}$$

Напишем равенство (353) при $\nu = 2$:

$$N_j(a_{j_1}, a_{j_2}; x) = \int_{a_j}^{x} \left\{ \frac{N_j(a_{j_1}; x)}{x - a_{j_2}} - \frac{1}{x - a_j} [J_j(a_{j_1}) N(a_{j_2}; x) + J_j(a_{j_1}, a_{j_2})] \right\} dx.$$

По условию мы должны иметь $N_j(a_{j_s}; a_j) = 0$, и, следовательно, первое слагаемое под знаком интеграла не имеет полярности в точке $x = a_j$. Отсюда вытекает, что и второе слагаемое не должно иметь полярности в этой точке, и из этого обстоятельства непосредственно следует, что квадратная скобка должна обращаться в нуль при $x = a_j$ и, следовательно, все коэффициенты $J_j(a_{j_1}, a_{j_2})$ должны быть равны нулю. Совершенно так же, написав равенство (313) при $\nu = 3$, мы убедимся, что все коэффициенты $J_j(a_{j_1}, a_{j_2}, a_{j_3})$ должны быть равны нулю и т. д. Так что действительно разложение (350) в силу (354) приводится к простому равенству $W'_j = U_j$, и мы имеем следующее представление для решения, канонического в точке $x = a_j$:

$$\theta_j(x) = (x - a_j)^{U_j} \bar{\theta}_j(x). \tag{355}$$

Формула (353) дает возможность последовательного определения коэффициентов в разложении (352). Принимая во внимание, что

$$J_j(a_{j_1}) = \begin{cases} 1 & \text{при } j_1 = j, \\ 0 & \text{при } j_1 \neq j; \end{cases}$$

$$J_j(a_{j_1}, \ldots, a_{j_\nu}) = 0 \text{ при } \nu \geqslant 2,$$

получим

$$N_j(a_{j_1}; x) = \int_{a_j}^{x} \left[ \frac{1}{x - a_{j_1}} - \frac{\delta_{j_1 j}}{x - a_j} \right] dx,$$

$$N_j(a_{j_1}, \ldots, a_{j_\nu}; x) = \int_{a_j}^{x} \left[ \frac{N_j(a_{j_1} \ldots a_{j_{\nu-1}}; x)}{x - a_{j_\nu}} - \frac{\delta_{j_1 j} N_j(a_{j_2} \ldots a_{j_\nu}; x)}{x - a_j} \right] dx,$$

где $\delta_{pq} = 1$ при $p = q$ и $\delta_{pq} = 0$ при $p \neq q$.

При обходе вокруг точки $a_j$ решение (355) приобретает слева множитель $e^{2\pi i U_j}$. Всякое другое решение, как мы знаем, будет иметь интегральную матрицу, подобную $e^{2\pi i U_j}$, т. е. *при обходе вокруг особой точки $a_j$ любое решение системы приобретает слева множитель, который представляет собой матрицу, подобную матрице $e^{2\pi i U_j}$.*

Вернемся к формуле (355). Второй множитель, как мы указали, регулярен в точке $x = a_j$. Обратная матрица

$$\bar{\theta}_j(x)^{-1}$$

будет также, очевидно, регулярной в точке $x = a_j$, так как определитель матрицы $\bar{\theta}_j(x)$ равен единице в точке $x = a_j$. Вообще, если некоторое решение $Y(x)$ может быть представлено в окрестности точки $a_j$ в виде

$$Y(x) = (x - a_j)^{W''_j} \bar{Y}(x),$$

где матрица $\bar{Y}(x)$ регулярна в точке $a_j$ и ее определитель отличен там от нуля, то матрица $W_j''$ называется показательной матрицей взятого решения. Можно доказать, что такая матрица определяется по заданному решению единственным образом, если $U_s$ близки к нулю. В частности, для канонического в точке $a_j$ решения это будет сама матрица $U_j$, и вообще для всякого решения она будет подобна матрице $U_j$

Замечание. Во всех предыдущих рассуждениях мы пользовались по существу тем, что представление некоторой функции от матриц в виде степенного ряда этих матриц единственно. Эта теорема единственности лежит в основе метода сравнения коэффициентов, который мы применяли, подставляя ряд с неизвестными коэффициентами в обе части уравнения и сравнивая коэффициенты при одинаковых членах. На той же теореме единственности основано, например, утверждение, что если сумма степенного ряда от матриц $U_s$ есть однозначная функция от $x$ вблизи $x=a_j$, то и все коэффициенты этого ряда должны быть однозначны.

Как мы упоминали раньше [97], теорема единственности верна, если суммы степенных рядов совпадают для матриц любого порядка. Во всех наших рассуждениях порядок матриц не играл никакой роли, а потому, согласно только что сказанному, мы и имели право пользоваться теоремой единственности.

**127. Связь с регулярными решениями типа Фукса.** Вернемся к рассмотрению канонического решения в особой точке $x=a_j$:

$$\theta_j(x)=(x-a_j)^{U_j}\bar{\theta}_j(x).$$

Для отчетливости будем считать, что порядок матриц $n=2$, т. е. что имеется система двух уравнений с двумя искомыми функциями. Пусть $S_j$ — матрица, приводящая $U_j$ к диагональной форме:

$$S_jU_jS_j^{-1}=[\rho_1,\ \rho_2].$$

Рассмотрим интегральную матрицу

$$Z_j(x)=S_j\theta_j(x)=(x-a_j)^{S_jU_jS_j^{-1}}S_j\theta_j(x)$$

или

$$Z_j(x)=(x-a_j)^{[\rho_1,\ \rho_2]}\bar{Z}_j(x),$$

где $\bar{Z}_j(x)=S_j\bar{\theta}_j(x)$ регулярна в точке $x=a_j$. Обозначим $\bar{Z}_{pq}^{(j)}(x)$ элементы этой последней матрицы:

$$\bar{Z}_j(x)=\begin{Vmatrix}\bar{Z}_{11}^{(j)}(x) & \bar{Z}_{12}^{(j)}(x)\\ \bar{Z}_{21}^{(j)}(x) & \bar{Z}_{22}^{(j)}(x)\end{Vmatrix},$$

где $\bar{Z}_{pq}^{(j)}(x)$ — функции, регулярные при $x=a_j$. Принимая во внимание, что

$$(x-a_j)^{[\rho_1,\ \rho_2]}=\begin{Vmatrix}(x-a_j)^{\rho_1} & 0\\ 0 & (x-a_j)^{\rho_2}\end{Vmatrix},$$

мы будем иметь

$$Z_j(x)=\begin{Vmatrix}(x-a_j)^{\rho_1} & 0\\ 0 & (x-a_j)^{\rho_2}\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}\bar{Z}_{11}^{(j)}(x) & \bar{Z}_{12}^{(j)}(x)\\ \bar{Z}_{21}^{(j)}(x) & \bar{Z}_{22}^{(j)}(x)\end{Vmatrix}=$$

$$=\begin{Vmatrix}(x-a_j)^{\rho_1}\bar{Z}_{11}^{(j)}(x) & (x-a_j)^{\rho_1}\bar{Z}_{12}^{(j)}(x)\\ (x-a_j)^{\rho_2}\bar{Z}_{21}^{(j)}(x) & (x-a_j)^{\rho_2}\bar{Z}_{22}^{(j)}(x)\end{Vmatrix}.$$

Каждая строка этой матрицы содержит решение написанной системы [122]. Мы имеем, таким образом, два решения системы, имеющих такой же вид, как и решения одного регулярного уравнения в теореме Фукса [101]:

$$Y_{11}(x) = (x-a_j)^{\rho_1}\overline{Z}_{11}^{(j)}(x);\ Y_{12}(x) = (x-a_j)^{\rho_1}\overline{Z}_{12}^{(j)}(x);$$
$$Y_{21}(x) = (x-a_j)^{\rho_2}\overline{Z}_{21}^{(j)}(x);\ Y_{22}(x) = (x-a_j)^{\rho_2}\overline{Z}_{22}^{(j)}(x).$$

В этих формулах первый значок $Y(x)$ дает номер решения, а второй — номер функции. Заметим еще, что из определения $\overline{Z}_j(x)$ и $\theta_j(a_j) = 1$ следует, что

$$\overline{Z}_j(a_j) = \begin{Vmatrix} \overline{Z}_{11}^{(j)}(a_j) & \overline{Z}_{12}^{(j)}(a_j) \\ \overline{Z}_{21}^{(j)}(a_j) & \overline{Z}_{22}^{(j)}(a_j) \end{Vmatrix} = S_j,$$

где $S_j$ есть матрица с определителем, отличным от нуля. Число $\overline{Z}_{pq}^{(j)}(a_j)$ есть, очевидно, свободный член в разложении $\overline{Z}_{pq}^{(j)}(x)$ в ряд Тейлора по степеням $(x-a_j)$.

Числа $\rho_1$ и $\rho_2$, которые в [101] являлись корнями определяющего уравнения, в настоящем случае определяются из характеристического уравнения матрицы $U_j$. В работах И. А. Лаппо-Данилевского интегральная матрица $\theta_j(x)$ называется не канонической, а метаканонической в особой точке $x = a_j$. При такой терминологии матрицу $Z_j(x)$ можно назвать канонической в точке $x = a_j$.

**128. Случай любых $U_s$.** Формула (337) из [125] дает нам представление показательной подстановки $W_j$ интегральной матрицы $Y(b; x)$ в виде степенного ряда по $U_s$, сходящегося лишь в том случае, когда $U_s$ близки к нулевой матрице. Точно так же формула (352) из [126] дает аналогичное представление для регулярного множителя канонической матрицы $\theta_j(x)$. Мы переходим теперь к вопросу о представлении этих матриц при любых $U_s$.

По определению для $U_s$, близких к нулевой матрице, мы имеем [125]

$$W_j = \frac{1}{2\pi i}\ln V_j = \frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}-1}{\nu}(V_j-1)^{\nu}.$$

Обозначим через $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ характеристические числа матрицы $U_j$. Как мы видели [126], матрица $V_j$ подобна матрице $e^{2\pi i U_j}$, и, следовательно, характеристические числа матрицы $V_j$ будут

$$\eta_1 = e^{2\pi i\rho_1}, \quad \eta_2 = e^{2\pi i\rho_2}, \quad \ldots, \quad \eta_n = e^{2\pi i\rho_n}.$$

Считая $\eta_k$ различными и пользуясь формулой Сильвестра, можем написать

$$W_j = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{n}\frac{(V_j-\eta_1)\ldots(V_j-\eta_{k-1})(V_j-\eta_{k+1})\ldots(V_j-\eta_n)}{(\eta_k-\eta_1)\ldots(\eta_k-\eta_{k-1})(\eta_k-\eta_{k+1})\ldots(\eta_k-\eta_n)}\ln\eta_k.$$

В дальнейшем для отчетливости ограничимся случаем $n = 2$. Подставляя выражение $\eta_k$ через $\rho_k$, получим

$$W_j = \frac{V_j - e^{2\pi i\rho_2}}{e^{2\pi i\rho_1} - e^{2\pi i\rho_2}}\rho_1 + \frac{V_j - e^{2\pi i\rho_1}}{e^{2\pi i\rho_2} - e^{2\pi i\rho_1}}\rho_2,$$

или

$$W_j = \frac{e^{2\pi i\rho_2}\rho_1 - e^{2\pi i\rho_1}\rho_2}{e^{2\pi i\rho_2} - e^{2\pi i\rho_1}} + \frac{\rho_2-\rho_1}{e^{2\pi i\rho_2} - e^{2\pi i\rho_1}}V_j. \qquad (356)$$

Если $\rho_1 = \rho_2$, то эта формула превращается в следующую:

$$W_j = \left(\rho_1 - \frac{1}{2\pi i}\right) + \frac{1}{2\pi i e^{2\pi i \rho_1}} V_j. \tag{357}$$

Выше мы имели представление $V_j$ в виде степенного ряда по $U_s$ для любых $U_s$. Тем самым предыдущая формула (356) дает нам выражение для $W_j$ при любых $U_s$. Эта формула теряет смысл, если $\rho_1$ и $\rho_2$ отличаются на целое число, отличное от нуля, так как при этом знаменатель в правой части (356) обратится в нуль, а числители будут отличны от нуля. Таким образом, для $W_j$, как функции от $U_s$, особыми будут те матрицы $U_j$, характеристические числа которых отличаются на целое число, отличное от нуля. В отношении остальных матриц $U_s$ функция $W_j$ никаких особенностей не имеет. Наличие указанных особенностей и является причиною того, что ряд (337) сходится лишь в том случае, когда $U_s$ близки к нулевой матрице.

Наметим, каким образом можно, используя ряд (337), получить $W_j$ в виде частного двух степенных рядов, сходящихся для любых $U_s$. Составим численную функцию от $U_j$, т. е. такую функцию, которая при заданном $U_j$ имеет определенное численное значение:

$$\Delta(U_j) = e^{-\pi i(\rho_1+\rho_2)} \frac{e^{2\pi i\rho_1} - e^{2\pi i\rho_2}}{2\pi i(\rho_1 - \rho_2)} = \frac{\sin\pi(\rho_1 - \rho_2)}{\pi(\rho_1 - \rho_2)}. \tag{358}$$

Мы можем представить ее в виде степенного ряда, сходящегося при любых $\rho_1$ и $\rho_2$:

$$\Delta(U_j) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)!} \pi^{2\nu} (\rho_1 - \rho_2)^{2\nu}. \tag{359}$$

Обозначая через $\{U_j\}_{pq}$ элементы матрицы $U_j$, мы можем написать то квадратное уравнение, которому удовлетворяют $\rho_1$ и $\rho_2$:

$$\begin{vmatrix} \{U_j\}_{11} - \rho & \{U_j\}_{12} \\ \{U_j\}_{21} & \{U_j\}_{22} - \rho \end{vmatrix} = 0.$$

Далее мы имеем

$$(\rho_1 - \rho_2)^2 = (\rho_1 + \rho_2)^2 - 4\rho_1\rho_2$$

и, принимая во внимание свойство суммы и произведения корней квадратного уравнения, получим выражение $(\rho_1 - \rho_2)^2$ через элементы матрицы $U_j$:

$$(\rho_1 - \rho_2)^2 = (\{U_j\}_{11} + \{U_j\}_{22})^2 - 4(\{U_j\}_{11}\{U_j\}_{22} - \{U_j\}_{12}\{U_j\}_{21}).$$

Подставляя это в (359), получим выражение $\Delta(U_j)$ через элементы матрицы $U_j$:

$$\Delta(U_j) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)!} \pi^{2\nu} [(\{U_j\}_{11} + \{U_j\}_{22})^2 - 4(\{U_j\}_{11}\{U_j\}_{22} - \{U_j\}_{12}\{U_j\}_{21})]^\nu,$$

причем этот ряд сходится при любом выборе $U_j$, т. е. есть целая функция элементов матрицы $U_j$.

Обозначим для краткости через $\delta_\nu(U_j)$ слагаемые написанной суммы:

$$\Delta(U_j) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \delta_\nu(U_j), \tag{360}$$

причем $\delta_0(U_j) = 1$ и $\delta_\nu(U_j)$ при $\nu > 0$ есть однородный полином степени $\nu$ от элементов $U_j$. Из формул (356) и (358) следует, что элементы произведения $\Delta(U_j) W_j$ суть целые функции элементов $U_j$ и, вообще, целые функции элементов всех матриц $U_s$. Такая целая функция может быть разложена по однородным полиномам от элементов $U_s$ [84]. Принимая во внимание разложения (337) и (360), можем написать разложение по этим однородным полиномам:

$$\Delta(U_j) W_j = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\nu} \left( \sum_{j_1, \ldots, j_s}^{1, \ldots, m} U_{j_1} \ldots U_{j_s} \delta_{\nu-s}(U_j) Q_j(a_{j_1} \ldots a_{j_s}; b) \right).$$

Написанный ряд сходится уже для любых $U_s$. Таким образом, мы получаем представление $W_j$ в виде частного двух целых функций от элементов $U_s$:

$$W_j = \frac{\sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\nu} \left( \sum_{j_1, \ldots, j_s}^{1, \ldots, m} U_{j_1} \ldots U_{j_s} \delta_{\nu-s}(U_j) Q_j(a_{j_1} \ldots a_{j_s}; b) \right)}{\sum_{\nu=0}^{\infty} \delta_\nu(U_j)}. \tag{361}$$

Заметим, что ряд, стоящий в знаменателе, есть ряд с численными членами, зависящими только от элементов матрицы $U_j$. Рассуждая совершенно так же, как и выше, мы можем показать, что произведения

$$\Delta(U_j)(x - a_j)^{W_j} \text{ и } \Delta(U_j)(x - a_j)^{-W_j}$$

суть целые функции элементов $U_s$. Из формулы (346) следует, что

$$\Delta(U_j)[\bar{Y}^{(j)}(b; x)]^{-1} = [Y(b; x)]^{-1} \Delta(U_j)(x - a_j)^{W_j}.$$

Матрицы $Y(b; x)$ и $Y(b; x)^{-1}$, как мы знаем, суть целые функции матриц $U_s$, и, следовательно, произведение $\Delta(U_j)[\bar{Y}^{(j)}(b; x)]^{-1}$ есть целая функция элементов $U_s$. Каноническая матрица $\theta_j(x)$ имеет представление вида [126]

$$\theta_j(x) = [\bar{Y}^{(j)}(b; a_j)]^{-1} Y(b; x),$$

и, следовательно, $\Delta(U_j)\theta_j(x)$ есть целая функция элементов $U_s$. То же можно утверждать и о произведении

$$\Delta(U_j)\bar{\theta}_j(x) = (x - a_j)^{-U_j} \Delta(U_j)\theta_j(x),$$

поскольку $(x - a)^{-U_j}$ есть целая функция $U_j$. Пользуясь разложением (352), мы можем представить и каноническую матрицу $\theta_j(x)$ в виде частного двух целых функций элементов $U_s$:

$$\theta_j(x) = \frac{(x - a_j)^{U_j} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\nu} \left( \sum_{j_1, \ldots, j_s}^{1, \ldots, m} U_{j_1} \ldots U_{j_s} \delta_{\nu-s}(U_j) N_j(a_{j_1} \ldots a_{j_s}; x) \right)}{\sum_{\nu=1}^{\infty} \delta_\nu(U_j)}. \tag{362}$$

Заметим, что во всех предыдущих формулах число $\Delta(U_j)$ коммутирует с любой матрицей. В рядах, стоящих в числителях формул (361) и (362),

члены суть матрицы, зависящие от элементов $U_s$ как через посредство множителей $U_j$, так и через посредство численного множителя $\delta_{\nu-s}(U_j)$.

Формулы (352) и (362) дают нам представление канонической матрицы в виде степенного ряда или частного степенных рядов, расположенных по элементам матриц $U_s$. При этом коэффициенты $N_j(a_{j_1} \dots a_{j_s}; x)$ зависят от $x$. Можно, наоборот, строить $\theta_j(x)$ в виде ряда Тэйлора по степеням $(x-a_j)$. Коэффициенты этого ряда окажутся зависящими от элементов $U_s$. Этот ряд будет сходящимся в круге $|x-a_j|<R$, не содержащем других особых точек, кроме $x=a_j$.

Для $\bar{\theta}_j(x)$ мы имели уравнение (351), причем, как мы показали, $W'_j=U_j$, т. е.

$$\frac{d\bar{\theta}_j(x)}{dx}=\bar{\theta}_j(x)\sum_{s=1}^{n}\frac{U_s}{x-a_s}-\frac{U_j\bar{\theta}_j(x)}{x-a_j}.$$

Подставляя в это уравнение

$$\bar{\theta}_j(x)=1+\sum_{p=1}^{\infty}A_j^{(p)}(x-a_j)^p, \tag{363}$$

где $A_j^{(p)}$ — искомые матрицы, не зависящие от $x$, и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $(x-a_j)$, получим уравнения для последовательного определения матриц $A_j^{(p)}$:

$$U_jA_j^{(p)}+pA_j^{(p)}-A_j^{(p)}U_j=-\sum_{h\neq j}\sum_{q=0}^{p-1}\frac{A_j^{(q)}U_h}{(a_h-a_j)^{p-q}}\quad(p=1,\ 2,\ \dots). \tag{364}$$

С подобными системами мы уже встречались в [123]. Мы не останавливаемся на решении уравнений (364) и доказательстве сходимости ряда (363). Здесь применим тот же метод доказательства, которым мы пользовались в [101]. Отметим лишь, что произведение $\Delta(U_j)A_j^{(p)}$ есть целая функция элементов матриц $U_s$.

**129. Формальные разложения в окрестности иррегулярной особой точки.** Мы рассмотрим для случая систем вопрос о построении формальных разложений решений в окрестности иррегулярной особой точки простейшего типа. Мы будем считать, что иррегулярная точка есть $z=\infty$. Аналогичный вопрос для одного уравнения второго порядка был рассмотрен нами в [116].

Пользуясь матричной формой записи, напишем систему в виде

$$\frac{dY}{dz}=Y(A_0+A_1z^{-1}+A_2z^{-2}+\dots), \tag{365}$$

где $A_k$ — заданные матрицы порядка $n$. Положим, что ряд, стоящий в правой части, сходится в области $|z|>r$. Предположим, что характеристические числа $\lambda_i$ матрицы $A_0$ различны. Переходя от $Y$ к подобной матрице $SYS^{-1}$ [123], мы можем выбрать неособую матрицу так, чтобы $A_0$ имела диагональный вид. Будем считать, что это имеет место в уравнении (365):

$$A_0=[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n].$$

Решение уравнения (365) будем искать в виде

$$Y=e^{Bz}z^D(P_0+P_1z^{-1}+P_2z^{-2}+\dots), \tag{366}$$

где $B$ и $D$ — диагональные матрицы.

Из (366) следует

$$\frac{dY}{dz} = (Be^{Bz}z^D + e^{Bz}Dz^{D-I})\sum_{k=0}^{\infty} P_k z^{-k} - e^{Bz}z^D \sum_{k=1}^{\infty} P_k k z^{-k-1}, \quad (367)$$

и, подставляя $\frac{dY}{dz}$ в (365), получаем следующее тождество для нахождения матриц $B$, $D$ и $P_k$ (из которых первые две, по условию, диагональные матрицы):

$$(B + Dz^{-1})\sum_{k=0}^{\infty} P_k z^{-k} - \sum_{k=1}^{\infty} P_k k z^{-k-1} - \sum_{k=0}^{\infty} P_k z^{-k} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^{-k} = 0. \quad (368)$$

Собирая члены, не содержащие $z$, получим

$$BP_0 - P_0A_0 = 0 \quad (369)$$

и в качестве решения этого уравнения берем

$$P_0 = I, \quad B = A_0. \quad (370)$$

Для дальнейших вычислений полезно сделать некоторые общие замечания. Пусть $A$ — диагональная матрица и $F$ — любая. Нетрудно проверить, что разность $AF - FA$ есть матрица с нулевой главной диагональю, т. е. $\{AF - FA\}_{ii} = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Отметим еще, что если $A$ — диагональная матрица и $G$ — матрица с нулевой главной диагональю, то и матрицы $AG$ и $GA$ — с нулевой главной диагональю.

Возвращаемся к уравнению (368). Собирая члены с $z^{-1}$ и принимая во внимание (370), получим

$$A_0P_1 - P_1A_0 = A_1 - D. \quad (371)$$

Матрица левой части есть матрица с нулевой главной диагональю, и, следовательно, элементы диагональной матрицы $D$ определяются равенствами

$$\{D\}_{ii} = \{A_1\}_{ii}. \quad (372)$$

Недиагональные элементы $A_1$ определяются, в силу (371), равенствами

$$\{P_1\}_{ij} = \frac{\{A_1\}_{ij}}{\lambda_i - \lambda_j}. \quad (373)$$

Диагональные элементы $\{P_1\}_{ii}$ пока не определены. Собирая члены при $z^{-2}$, получим

$$A_0P_2 - P_2A_0 = -DP_1 + P_1 + P_1A_1 + A_2.$$

Положим $P_k = \tilde{P}_k + D_k$ $(k = 1, 2)$, где $\tilde{P}_k$ — часть $P_k$ с нулевой главной диагональю и $D_k$ — диагональная матрица. Приходим к равенству

$$A_0\tilde{P}_2 - \tilde{P}_2A_0 = (-D\tilde{P}_1 + \tilde{P}_1 + \tilde{P}_1A_1 + A_1) + D_1(A_1 - D) + D_1. \quad (374)$$

При преобразованиях, приведших к этому равенству, мы воспользовались коммутативностью произведения диагональных матриц. В правой части первое слагаемое известно, а второе, в силу (371), есть матрица с нулевой главной диагональю, и такой же является левая часть равенства. Отсюда следует, что равенство (374) дает возможность определить $D_1$ и $P_2$. Дальше рассуждаем по индукции. Пусть определены $P_1, P_2, \ldots, P_{k-2}$ и $\tilde{P}_{k-1}$. Собираем в равенстве (368) члены при $z^{-k}$ $(k > 2)$ и полагаем, как и выше,

$P_k = \tilde{P}_k + D_k$. Нам надо показать, что полученное равенство дает возможность определить $D_{k-1}$ и $\tilde{P}_k$. Оно имеет вид

$$A_0\tilde{P}_k - \tilde{P}_k A_0 = -DP_{k-1} + (k-1)P_{k-1} + \\ + (A_k + P_1 A_{k-1} + \ldots + P_{k-2}A_2) + P_{k-1}A_1$$

или, после подстановки $P_{k-1} = \tilde{P}_{k-1} + D_{k-1}$ и перестановки $DD_{k-1} = D_{k-1}D$,

$$A_0\tilde{P}_k - \tilde{P}_k A_0 = (-D\tilde{P}_{k-1} + (k-1)\tilde{P}_{k-1} + A_k + P_1 A_{k-1} + \ldots \\ \ldots + P_{k-2}A_2 + \tilde{P}_{k-1}A_1) + D_{k-1}(A_1 - D) + (k-1)D_{k-1}.$$

В круглых скобках стоят известные матрицы, $D_{k-1}(A_1 - D)$ есть матрица с нулевой главной диагональю, и совершенно так же, как и в случае $k = 2$, последнее равенство дает возможность определить $D_{k-1}$ и $\tilde{P}_k$. Таким образом, доказано, что при выборе решений уравнения (369) в виде (370) можно однозначно построить формальное решение уравнения (365) в виде

$$Y(z) = e^{A_0 z} z^D (I + P_1 z^{-1} + P_2 z^{-2} + \ldots) \qquad (375)$$

при условии, что $A_0$ в уравнении (365) есть диагональная матрица с различными характеристическими числами. Матрица $D$ есть диагональная матрица, определяемая формулой (372).

Выше в [117] мы доказали, что всякому формальному решению уравнения (193) соответствует и некоторое действительное решение этого уравнения, для которого это формальное решение является асимптотическим в некотором секторе. Аналогичное утверждение имеет место и для системы (365) при сделанных предположениях. Мы только сформулируем соответствующий результат.

Пусть $\lambda_i$ и $b_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — диагональные элементы диагональных матриц $A_0$ и $D$. Каждая строка матрицы $Y(z)$, определяемой формулой (375), имеет вид

$$\tilde{y}_i(z) = e^{\lambda_i z} z^{b_i} (\delta_{ik} + c_{ik}^{(1)} z^{-1} + c_{ik}^{(2)} z^{-2} + \ldots) \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \qquad (376)$$

где $i$ — фиксированный номер строки, $k$ — номер столбца $Y(z)$, $c_{ik}^{(m)} = \{P_m\}_{ik}$, $\delta_{ik} = 0$ при $i \neq k$ и $\delta_{ii} = 1$.

Обозначим, далее, через $s_i$ сектор $\alpha_i \leqslant \arg z \leqslant \beta_i$ такой, что все направления $\arg z = \theta$, определяемые равенством $\cos[\arg(\lambda_i - \lambda_j) + \theta] = 0$, находятся вне $s_i$. При этом в секторе $s_i$ при достаточно больших значениях $|z|$ существует такое решение $y_i(z)$ $(y_{i1}(z), y_{i2}(z), \ldots, y_{in}(z))$ системы, что $y_i(z) \sim \tilde{y}_i(z)$, т. е.

$$y_{ik}(z)\, e^{-\lambda_i z} z^{-b_i} \sim \delta_{ik} + c_{ik}^{(1)} z^{-1} + c_{ik}^{(2)} z^{-2} + \ldots$$

Доказательство этой теоремы имеется в книге: Э. А. Коддингтон и Н. Левинсон, Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, 1958. Там же рассмотрен более общий случай систем вида

$$\frac{dY}{dz} = z^r (A_0 + A_1 z^{-1} + A_2 z^{-2} + \ldots),$$

где $r$ — целое положительное число, а также случай, когда $A_0$ имеет кратные характеристические числа.

При доказательстве сформулированного выше результата существенную роль играет применение метода последовательных приближений.

Метод последовательных приближений для линейных систем, приводящий к равномерной сходимости на бесконечном промежутке, содержится в заметке В. В. Хорошилова (ДАН СССР, 1949) и в работе: Н. П. Еругин, Приводимые системы, 1946, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова.

# ГЛАВА VI

# СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

## § 1. СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ФУНКЦИИ ЛЕЖАНДРА

**130. Определение сферических функций.** В настоящей главе мы будем изучать некоторые специальные классы функций, которые встречаются при интегрировании уравнений математической физики. Все эти функции определяются обычно как решения некоторых линейных уравнений с переменными коэффициентами. В частности, в задаче колебания струны мы встретились с тригонометрическими функциями и в задаче колебания круглой мембраны — с бесселевыми функциями.

Мы начнем с изучения так называемых *сферических функций*, которые тесно связаны с уравнением Лапласа. Об этом уравнении мы уже много говорили раньше. В декартовых координатах оно имеет вид

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0. \tag{1}$$

Будем искать такие решения этого уравнения, которые имеют вид однородных полиномов переменных $x$, $y$ и $z$.

Начнем с разбора простейших частных случаев. Единственный однородный полином нулевой степени есть произвольная постоянная $a$, которая, очевидно, удовлетворяет уравнению (1). Общий вид однородных полиномов первой степени будет

$$U_1 = ax + by + cz.$$

Такой полином также удовлетворяет уравнению (1) при любом выборе постоянных коэффициентов $a$, $b$ и $c$. Иначе говоря, мы имеем здесь три линейно независимых решения уравнения (1), а именно $x$, $y$ и $z$, и их линейная комбинация с произвольными постоянными коэффициентами дает общее решение уравнения (1), имеющее вид однородного полинома первой степени. Рассмотрим однородные полиномы второй степени

$$U_2 = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + eyz + fzx.$$

Подставляя $U_2$ в уравнение (1), мы получим одно соотношение для коэффициентов, а именно: $a+b+c=0$. Мы можем, например, считать $c=-a-b$, и, следовательно, общий вид однородных полиномов второй степени, удовлетворяющих уравнению (1), будет

$$U_2=a(x^2-z^2)+b(y^2-z^2)+dxy+eyz+fzx.$$

Здесь мы имеем пять линейно-независимых решений уравнения, а именно $x^2-z^2$, $y^2-z^2$, $xy$, $yz$ и $zx$, и линейная комбинация таких решений с произвольными постоянными коэффициентами дает общее решение уравнения, изображаемое однородным полиномом второй степени.

Возьмем однородный полином третьей степени

$$U_3=ax^3+by^3+cz^3+dx^2y+ex^2z+fy^2x+gy^2z+hz^2x+kz^2y+lxyz.$$

Подставляя $U_3$ в уравнение (1), получим

$$6(ax+by+cz)+2dy+2ez+2fx+2gx+2hx+2ky=0.$$

Приравнивая нулю коэффициенты при $x$, $y$, $z$, будем иметь три уравнения, связывающих коэффициенты:

$$\begin{aligned} &3a+f+h=0 && a=-\tfrac{1}{3}(f+h),\\ &3b+d+k=0 \quad \text{или} && b=-\tfrac{1}{3}(d+k),\\ &3c+e+g=0 && c=-\tfrac{1}{3}(e+g), \end{aligned}$$

так что общий вид решений уравнения (1), имеющих форму однородных полиномов третьей степени, будет

$$\begin{aligned} U_3=d\left(x^2y-\tfrac{1}{3}y^3\right)+e\left(x^2z-\tfrac{1}{3}z^3\right)+f\left(y^2x-\tfrac{1}{3}x^3\right)+\\ +g\left(y^2z-\tfrac{1}{3}z^3\right)+h\left(z^2x-\tfrac{1}{3}x^3\right)+k\left(z^2y-\tfrac{1}{3}y^3\right)+lxyz. \end{aligned}$$

В данном случае мы будем иметь семь линейно-независимых решений уравнения.

Покажем теперь, что в общем случае *существует* $(2n+1)$ *линейно независимых однородных полиномов степени* $n$, *удовлетворяющих уравнению* (1). Займемся подсчетом числа коэффициентов в однородном полиноме и числа уравнений, которым они должны удовлетворять. Однородный полином степени $n$ с двумя переменными

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}y+\ldots+a_ny^n$$

содержит $(n+1)$ коэффициентов. Однородный полином степени $n$ с тремя переменными может быть записан в виде

$$a_0z^n+\varphi_1(x,y)\,z^{n-1}+\ldots+\varphi_{n-1}(x,y)\,z+\varphi_n(x,y), \qquad (2)$$

где $\varphi_k(x, y)$ — однородные полиномы степени $k$. Следовательно, общее число коэффициентов в однородном полиноме (2) будет

$$1+2+\ldots+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

При подстановке полинома (2) в левую часть уравнения (1) получится однородный полином степени $(n-2)$, содержащий всего $\frac{(n-1)n}{2}$ членов. Таким образом, $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ коэффициентов полинома (2) будут связаны $\frac{(n-1)n}{2}$ однородными уравнениями. Если эти уравнения независимы, то число коэффициентов, остающихся произвольными, будет

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}-\frac{(n-1)n}{2}=2n+1,$$

что мы и хотели доказать. Но при этом все же остается невыясненным, будут ли упомянутые выше уравнения действительно независимыми. Мы дадим поэтому другое полное доказательство высказанного предложения. Полином (2) мы можем записать в следующей форме:

$$U_n=\sum_{p+q+r=n} a_{pqr}x^p y^q z^r,$$

где, очевидно,

$$a_{pqr}=\frac{1}{p!q!r!}\frac{\partial^{p+q+r}U_n}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r}. \tag{3}$$

Уравнение (1) можно переписать в виде

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=-\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}.$$

Пользуясь этим уравнением, мы можем в выражениях (3) исключить дифференцирование по переменной $z$ выше первого порядка; например, мы можем написать

$$\frac{\partial^6 U}{\partial x\,\partial y\,\partial z^4}=-\frac{\partial^4}{\partial x\,\partial y\,\partial z^2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial^4}{\partial x^3\,\partial y}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)+$$
$$+\frac{\partial^4}{\partial x\,\partial y^3}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial^6 U}{\partial x^5\,\partial y}+2\frac{\partial^6 U}{\partial x^3\,\partial y}+\frac{\partial^6 U}{\partial x\,\partial y^5}.$$

Таким образом, останутся произвольными лишь те коэффициенты $a_{pqr}$, в которых или вовсе нет дифференцирования по $z$, или где это дифференцирование производится один раз. Это будут коэффициенты: $a_{pq0}(p+q=n)$ или $a_{pq1}(p+q=n-1)$, и их общее число равно как раз $(2n+1)$, что мы и хотели доказать.

**131. Явные выражения сферических функций.** Мы установим теперь явные выражения для тех однородных полиномов, о которых мы говорили в предыдущем параграфе. Введем сферические координаты

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta. \tag{4}$$

При этом однородный гармонический полином степени $n$ представится в виде

$$U_n(x, y, z) = r^n Y_n(\theta, \varphi). \tag{5}$$

Такой полином, являющийся решением уравнения (1), называется обычно *объемной сферической функцией*, а множитель $Y_n(\theta, \varphi)$, который будет, очевидно, полиномом от $\cos\theta$, $\sin\theta$, $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$, называется *поверхностной сферической функцией*, или просто *сферической функцией порядка n*. Нашей задачей и является нахождение $(2n+1)$ линейно независимых сферических функций.

Предварительно отметим один простой факт, связанный с решением уравнения (1). Напишем следующий интеграл, зависящий от параметров $x$, $y$ и $z$:

$$U(x, y, z) = \int_{-\pi}^{\pi} f(z + ix\cos t + iy\sin t,\ t)\,dt, \tag{6}$$

причем мы предполагаем, что написанный интеграл можно дифференцировать под знаком интеграла по $x$, $y$ и $z$. Произведя дифференцирование, мы убедимся без труда, что функция $U(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению (1) при любом выборе функции $f(\tau, t)$, лишь бы было законно указанное дифференцирование. Действительно,

$$\Delta U(x, y, z) = \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos^2 t - \sin^2 t) f''(z + ix\cos t + iy\sin t,\ t)\,dt,$$

где через $f''(\tau, t)$ мы обозначили вторую производную от $f(\tau, t)$ по первому аргументу. Отметим, что этот аргумент является комплексной величиной. Теперь уже нетрудно, пользуясь формулой (6), построить $(2n+1)$ однородных полиномов степени $n$, удовлетворяющих уравнению (1).

Напишем их в следующем виде:

$$\int_{-\pi}^{\pi} (z + ix\cos t + iy\sin t)^n \cos mt\,dt \quad (m = 0, 1, 2, \ldots, n), \tag{7}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (z + ix\cos t + iy\sin t)^n \sin mt\,dt \quad (m = 1, 2, \ldots, n). \tag{8}$$

Вводя сферические координаты, получим, пользуясь интегралом (7), следующие выражения для сферических функций:

$$\int_{-\pi}^{\pi} [\cos\theta + i\sin\theta\cos(t-\varphi)]^n \cos mt\, dt =$$

$$= \int_{-\pi-\varphi}^{\pi-\varphi} (\cos\theta + i\sin\theta\cos\psi)^n \cos m(\varphi+\psi)\, d\psi.$$

Принимая во внимание, что подинтегральная функция имеет период $2\pi$ по $\psi$, можем брать любой промежуток интегрирования длины $2\pi$ [**II, 142**]. Таким образом, последний интеграл переписывается в виде

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\cos\theta + i\sin\theta\cos\psi)^n \cos m(\varphi+\psi)\, d\psi.$$

Раскрывая $\cos m(\varphi+\psi)$ и принимая во внимание нечетность функции $\sin m\psi$, можем переписать эту сферическую функцию в виде

$$\cos m\varphi \int_{-\pi}^{\pi} (\cos\theta + i\sin\theta\cos\psi)^n \cos m\psi\, d\psi \quad (m = 0, 1, 2, \ldots, n). \quad (9)$$

Совершенно так же интеграл (8) приведет нас к следующим $n$ сферическим функциям:

$$\sin m\varphi \int_{-\pi}^{\pi} (\cos\theta + i\sin\theta\cos\psi)^n \cos m\psi\, d\psi \quad (m = 1, 2, \ldots, n). \quad (10)$$

Линейная независимость всех $(2n+1)$ функций (9) и (10) непосредственно следует из того, что зависимость этих функций от $\varphi$ содержится в множителях $\cos m\varphi$ и $\sin m\varphi$ и что не может существовать линейной зависимости между этими последними функциями, поскольку они ортогональны между собой на промежутке $(-\pi, \pi)$ [**II, 142**]. Таким образом, мы построили все $(2n+1)$ сферических функций порядка $n$. Коэффициенты при $\cos m\varphi$ и $\sin m\varphi$ в выражениях (9) и (10) суть одни и те же функции от $\theta$. Мы их выразим через полиномы Лежандра.

Мы имели следующие выражения для полиномов Лежандра [**105**]:

$$P_n(x) = \frac{1}{n!\,2^n}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]. \quad (11)$$

Введем еще функции $P_{n,m}(x)$, которые выражаются через полиномы Лежандра следующим образом:

$$P_{n,m}(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m P_n(x)}{dx^m} = \frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{n!\,2^n}\frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}[(x^2-1)^n]. \quad (12)$$

При нечетном $m$ множитель $(1-x^2)^{\frac{m}{2}}$ определен лишь с точностью до знака. В дальнейшем мы будем рассматривать $x$ из промежутка $-1 \leqslant x \leqslant 1$ и будем полагать $x = \cos\theta$, где $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. При этом мы будем считать для определенности в выражении $P_{n,m}(\cos\theta)$ множитель $(1-\cos^2\theta)^{\frac{m}{2}}$ равным $\sin^m\theta$, т. е. неотрицательным, ибо $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

Введем теперь другие выражения для $P_n(x)$ и $P_{n,m}(x)$. Согласно формуле Коши можем написать

$$(x^2-1)^n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{(z^2-1)^n}{z-x}\,dz,$$

где $C$ — любой замкнутый контур, внутри которого находится точка $z=x$, причем этот контур обходится против часовой стрелки. Отсюда в силу (11) получаем

$$P_n(x) = \frac{1}{2^{n+1}\pi i}\int_C \frac{(z-1)^n(z+1)^n}{(z-x)^{n+1}}\,dz. \tag{13}$$

Возьмем в качестве контура $C$ окружность с центром $z=x$ и радиусом $|x^2-1|^{\frac{1}{2}}$ (считается, что $x \neq \pm 1$). При этом переменная интегрирования $z$ запишется в виде

$$z = x + (x^2-1)^{\frac{1}{2}}e^{i\psi},$$

где выбор значения $(x^2-1)^{\frac{1}{2}}$ безразличен, и можно считать, что $\psi$ меняется от $-\pi$ до $\pi$. Совершая в интеграле (13) замену переменных, получим

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\frac{[x-1+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}e^{i\psi}]\,[x+1+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}e^{i\psi}]}{2(x^2-1)^{\frac{1}{2}}e^{i\psi}}\right\}^n d\psi.$$

Производя элементарные вычисления и принимая во внимание четность подинтегральной функции, получим

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\psi]^n\,d\psi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\psi]^n\,d\psi. \tag{14}$$

Если мы в правой части разложим $[x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\psi]^n$ по формуле бинома Ньютона, то, принимая во внимание, что интеграл от нечетной степени $\cos\psi$ по промежутку $(-\pi, \pi)$ равен нулю, мы видим, что все члены с нечетными степенями $(x^2-1)^{\frac{1}{2}}$ в правой части пропадут.

Проведем аналогичные вычисления для $P_{n,m}(x)$. Вместо (13) имеем

$$P_{n,m}(x)=\frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}(n+1)(n+2)\dots(n+m)}{2^{n+1}\pi i}\int_C\frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+m+1}}\,dz.$$

Будем для определенности считать, что $-1<x<1$. Совершая прежнюю замену переменных и считая в формуле $z=x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}e^{i\psi}$ выражение $(x^2-1)^{\frac{1}{2}}$ положительно мнимым, т. е. вида $pi$, где $p>0$, получим

$$P_{n,m}(x)=i^m\frac{(n+1)(n+2)\dots(n+m)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\psi]^n e^{-im\psi}d\psi$$

или, принимая во внимание нечетность $\sin m\psi$,

$$P_{n,m}(x)=$$
$$=i^m\frac{(n+1)(n+2)\dots(n+m)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\psi]^n\cos m\psi\,d\psi. \quad (15)$$

Если мы в интеграле (14) или (15) положим $x=\cos\theta$, то получим интегралы, входящие в формулы (9) и (10). Принимая во внимание, что постоянный множитель при гармоническом полиноме или сферической функции не играет роли, мы приходим к следующему заключению: $(2n+1)$ *сферических функций порядка* $n$ *могут быть написаны в виде*

$$P_n(\cos\theta),\quad P_{n,m}(\cos\theta)\cos m\varphi,\quad P_{n,m}(\cos\theta)\sin m\varphi \quad (16)$$
$$(m=1,\ 2,\dots,\ n),$$

*где* $P_n(x)$ *суть полиномы Лежандра, определяемые формулой* (11), *и* $P_{n,m}(x)$ *определяются по формулам* (12). Напомним, что множитель $(1-x^2)^{\frac{m}{2}}$ при подстановке $x=\cos\theta$ считается равным $\sin^m\theta$. Умножая решения (16) на произвольные постоянные и складывая, получим общий вид сферической функции порядка $n$:

$$Y_n(\theta,\varphi)=a_0P_n(\cos\theta)+\sum_{m=1}^{n}(a_m\cos m\varphi+b_m\sin m\varphi)P_{n,m}(\cos\theta). \quad (17)$$

Вместо тригонометрических функций мы можем, составляя линейные комбинации решений (16), брать показательные функции, так что вместо набора сферических функций (16) порядка $n$ мы можем взять следующий набор сферических функций порядка $n$:

$$P_n(\cos\theta),\ P_{n,m}(\cos\theta)\,e^{im\varphi},\ P_{n,m}(\cos\theta)\,e^{-im\varphi}\ (m=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \quad (18)$$

Согласно построению *общий вид однородных полиномов степени $n$ от переменных $(x, y, z)$, удовлетворяющих уравнению Лапласа, будет $r^n Y_n(\theta, \varphi)$, где $Y_n(\theta, \varphi)$ определяется формулой* (17).

**132. Свойство ортогональности.** Докажем теперь ортогональность сферических функций (16) на единичной сфере и вычислим интеграл от квадрата этих функций по единичной сфере. Предварительно займемся вычислением интегралов

$$I_m=\int_{-1}^{1}[P_{n,m}(x)]^2\,dx.$$

Мы имеем согласно определению этих функций

$$I_m=\int_{-1}^{1}[P_{n,m}(x)]^2\,dx=\int_{-1}^{1}(1-x^2)^m\frac{d^mP_n(x)}{dx^m}\frac{d^mP_n(x)}{dx^m}\,dx,$$

причем при $m=0$ получаем интеграл от квадрата полинома Лежандра

$$I_0=\int_{-1}^{1}[P_n(x)]^2\,dx.$$

Мы выше показали [**105**], что

$$I_0=\int_{-1}^{1}[P_n(x)]^2\,dx=\frac{2}{2n+1}. \quad (19)$$

В конце настоящего номера мы приведем еще раз доказательство этой формулы, а пока приступим к вычислению интеграла $I_m$, пользуясь формулой (19).

Производя интегрирование по частям, можно написать

$$I_m=(1-x^2)^m\frac{d^mP_n(x)}{dx^m}\frac{d^{m-1}P_n(x)}{dx^{m-1}}\Bigg|_{x=-1}^{x=+1}-\int_{-1}^{1}\frac{d^{m-1}P_n(x)}{dx^{m-1}}\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)^m\frac{d^mP_n(x)}{dx^m}\right]dx$$

или

$$I_m=-\int_{-1}^{1}\frac{d^{m-1}P_n(x)}{dx^{m-1}}\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)^m\frac{d^mP_n(x)}{dx^m}\right]dx. \quad (20)$$

Но функция

$$z=\frac{d^{m-1}P_n(x)}{dx^{m-1}}=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^{n+m-1}(x^2-1)^n}{dx^{n+m-1}},$$

как нетрудно проверить, пользуясь уравнением (84) из [105], удовлетворяет уравнению

$$(1-x^2)\frac{d^{m+1}P_n(x)}{dx^{m+1}}-2mx\frac{d^mP_n(x)}{dx^m}+(n+m)(n-m+1)\frac{d^{m-1}P_n(x)}{dx^{m-1}}=0.$$

Умножая на $(1-x^2)^{m-1}$, можно переписать его в виде

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)^m\frac{d^mP_n(x)}{dx^m}\right]=-(n+m)(n-m+1)(1-x^2)^{m-1}\frac{d^{m-1}P_n(x)}{dx^{m-1}}.$$

Подставляя в формулу (20), будем иметь

$$I_m=(n+m)(n-m+1)\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{m-1}\frac{d^{m-1}P_n(x)}{dx^{m-1}}\frac{d^{m-1}P_n(x)}{dx^{m-1}}dx$$

или

$$I_m=(n+m)(n-m+1)I_{m-1}.$$

Понижая число $m$ постепенно на единицу, получим

$$\begin{aligned}I_m&=(n+m)(n-m+1)(n+m-1)(n-m+2)I_{m-2}=\ldots=\\&=(n+m)(n-m+1)(n+m-1)(n-m+2)\ldots(n+1)nI_0=\\&=(n+m)(n+m-1)(n+m-2)\ldots(n-m+1)I_0=\frac{(n+m)!}{(n-m)!}I_0.\end{aligned}$$

Откуда в силу (19) будем иметь следующее окончательное выражение для интегралов от квадратов функций $P_{n,m}(x)$:

$$\int_{-1}^{1}[P_{n,m}(x)]^2dx=\frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}. \tag{21}$$

Полученные результаты дадут возможность вычислить интеграл от квадрата сферических функций. Сферические функции $Y_n(\theta,\varphi)$ можно считать определенными на поверхности сферы единичного радиуса; $\theta$ и $\varphi$ являются обычными географическими координатами точек этой поверхности, причем $\varphi=\text{const}$ суть меридианы и $\theta=\text{const}$ суть параллели. При таком выборе координатных линий элемент площади поверхности выражается, как известно, следующей формулой [II, 59]:

$$d\sigma=\sin\theta\,d\theta\,d\varphi. \tag{22}$$

Докажем прежде всего, что две различные сферические функции $Y_p(\theta,\varphi)$ и $Y_q(\theta,\varphi)$ различных порядков, т. е. при $p\neq q$, будут ортогональными на поверхности $s$ единичной сферы, т. е.

$$\iint_s Y_p(\theta,\varphi)\,Y_q(\theta,\varphi)\,d\sigma=0. \tag{23}$$

Пусть $v$ — объем, ограниченный этой сферой, и $s$ — поверхность этой сферы. Применим к гармоническим функциям

$$U_p = r^p Y_p(\theta, \varphi) \quad \text{и} \quad U_q = r^q Y_q(\theta, \varphi) \tag{24}$$

формулу Грина [**II, 193**]

$$\iint_s \left( U_p \frac{\partial U_q}{\partial n} - U_q \frac{\partial U_p}{\partial n} \right) d\sigma = \iiint_v (U_p \Delta U_q - U_q \Delta U_p)\, dv,$$

причем $\Delta U_p = \Delta U_q = 0$.

В данном случае дифференцирование по нормали совпадает с дифференцированием по радиусу $r$, так что последняя формула в силу (24) дает нам

$$\iint_s [q Y_p(\theta, \varphi) Y_q(\theta, \varphi) - p Y_q(\theta, \varphi) Y_p(\theta, \varphi)]\, d\sigma = 0,$$

откуда и вытекает непосредственно формула (23).

Покажем, что сферические функции (16), соответствующие одному и тому же значению $n$, также будут взаимно ортогональными. Действительно, интегрирование по единичной сфере сводится, между прочим, к интегрированию по $\varphi$ в промежутке $(0, 2\pi)$. Но функции (16) содержат следующие множители, зависящие от $\varphi$:

$$1, \cos\varphi, \sin\varphi, \cos 2\varphi, \sin 2\varphi, \ldots, \cos n\varphi, \sin n\varphi,$$

и произведение любых двух из этих множителей, проинтегрированное в промежутке $(0, 2\pi)$, дает нуль [**II, 142**]. Точно так же можно проверить, что функции (18) также образуют ортогональную систему.

Вычислим, наконец, интеграл от квадрата каждой из построенных нами функций. Возьмем сначала сферическую функцию $P_n(\cos\theta)$, не зависящую от $\varphi$, и составим интеграл от ее квадрата по поверхности единичной сферы:

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} P_n^2(\cos\theta) \sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

Вводя новую переменную интегрирования $x = \cos\theta$ и принимая во внимание формулу (19), будем иметь

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} P_n^2(\cos\theta) \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = 2\pi \int_{-1}^{1} P_n^2(x)\, dx = \frac{4\pi}{2n+1}.$$

Точно так же для других функций

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} [P_{n,m}(\cos\theta)]^2 \sin^2 m\varphi \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \pi \int_{-1}^{1} [P_{n,m}(x)]^2\, dx.$$

Отсюда, принимая во внимание (21), будем иметь окончательно

$$\left.\begin{aligned}
\iint_S [P_n(\cos\theta)]^2\, d\sigma &= \frac{4\pi}{2n+1},\\
\iint_S [P_{n,m}(\cos\theta)\cos m\varphi)]^2\, d\sigma &= \frac{2\pi}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!},\\
\iint_S [P_{n,m}(\cos\theta)\sin m\varphi]^2\, d\sigma &= \frac{2\pi}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}.
\end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

В дальнейшем эти формулы мы используем при решении задачи о разложении произвольной функции, заданной на поверхности сферы, по сферическим функциям.

Приведем доказательство формулы (19). Пользуясь определением (11) полиномов Лежандра, можем написать

$$I_0 = \frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\,\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\,dx.$$

Интегрируя по частям, получим

$$I_0 = \frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\left[\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}\cdot\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\right]_{x=-1}^{x=+1} - \\ - \frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}\frac{d^{n+1}(x^2-1)^n}{dx^{n+1}}\cdot\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}\,dx.$$

Полином $(x^2-1)^n$ имеет корни $x=\pm 1$ кратности $n$. Его производная порядка $(n-1)$ имеет эти же корни первой кратности [I, 186], и, следовательно, внеинтегральный член в написанном уравнении равен нулю. Продолжая таким образом интегрировать по частям и дальше, получим

$$I_0 = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}\frac{d^{2n}(x^2-1)^n}{dx^{2n}}\cdot(x^2-1)^n\,dx.$$

Но

$$\frac{d^{2n}(x^2-1)^n}{dx^{2n}} = \frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(x^{2n}+\ldots) = (2n)!,$$

и, следовательно,

$$I_0 = (-1)^n\frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{n!\,2^{2n}}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\,dx.$$

Вводя новую переменную интегрирования $\varphi$ по формуле $x=\cos\varphi$, получим

$$I_0=\frac{(n+1)(n+2)\dots 2n}{n!\,2^{2n}}\int_0^{\pi}\sin^{2n+1}\varphi\,d\varphi=$$

$$=\frac{(n+1)(n+2)\dots 2n}{n!\,2^{2n}}\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}\varphi\,d\varphi,$$

и, пользуясь формулой (28) из [I, 100], получаем формулу (19).

**133. Полиномы Лежандра.** Мы изучим сейчас более подробно полиномы Лежандра. Заметим прежде всего, что если воспользоваться определением (11) и применить формулу Лейбница для производной порядка $n$ от произведения $(x^2-1)^n=(x+1)^n(x-1)^n$, то получим

$$P_n(x)=\frac{1}{n!\,2^n}\left[(x+1)^n\frac{d^n(x-1)^n}{dx^n}+\frac{n}{1}\frac{d(x+1)^n}{dx}\frac{d^{n-1}(x-1)^n}{dx^{n-1}}+\dots+\right.$$

$$\left.+\frac{d^n(x+1)^n}{dx^n}\cdot(x-1)^n\right].$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{d^n(x-1)^n}{dx^n}=n!\quad\text{и}\quad\frac{d^k(x-1)^n}{dx^k}\Big|_{x=1}=0\quad\text{при}\quad k<n,$$

получим непосредственно из предыдущей формулы

$$P_n(1)=1. \tag{26}$$

Мы переходим сейчас к особому методу — методу производящей функции — для изучения дальнейших свойств полиномов Лежандра. В дальнейшем мы будем пользоваться этим методом и при изучении других специальных функций.

Поместим в северном полюсе $N$ единичной сферы положительный заряд $(+1)$, и пусть $M$ — переменная точка, имеющая сферические координаты $r$, $\theta$ и $\varphi$. Кулоново поле упомянутого заряда будет иметь в точке $M$ следующий потенциал:

$$\frac{1}{d}=\frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\theta+r^2}}, \tag{27}$$

где $d$ есть расстояние от заряда до переменной точки $M$.

Функция (27) будет регулярной функцией переменной $r$ в точке $r=0$, и мы можем разложить ее по целым положительным степеням $r$:

$$\frac{1}{d}=a_0(\theta)+a_1(\theta)\,r+a_2(\theta)\,r^2+\dots, \tag{28}$$

причем коэффициенты разложения будут полиномами от $\cos\theta$. Мы могли бы точно подсчитать эти коэффициенты, применяя к функции

$$\frac{1}{d} = [1 + (r^2 - 2r\cos\theta)]^{-\frac{1}{2}}$$

формулу бинома Ньютона и собирая затем члены, содержащие одинаковые степени $r$. Мы будем поступать несколько иначе.

Функцию (27) мы можем выразить через декартовы координаты

$$\frac{1}{d} = [1 + (x^2 + y^2 + z^2 - 2z)]^{-\frac{1}{2}}. \tag{29}$$

Мы получим ряд (28), если применим к функции (29) формулу Ньютона и затем в полученном бесконечном ряде соберем члены одинакового измерения относительно $x$, $y$ и $z$, т. е. члены ряда (28) суть однородные полиномы относительно $x$, $y$ и $z$. Как известно, сама функция $\frac{1}{d}$ является решением уравнения Лапласа [**II, 119**], и, следовательно, то же самое можно утверждать и относительно отдельных слагаемых ряда (28), т. е. члены этого ряда должны быть объемными сферическими функциями. Но они не зависят от угла $\varphi$, и, следовательно, каждый член этого ряда должен представляться в виде произведения $c_n P_n(\cos\theta)$, где $c_n$ есть некоторая постоянная, которую нам и надо определить. Имеем, таким образом,

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2r\cos\theta + r^2}} = c_0 + c_1 P_1(\cos\theta)\, r + c_2 P_2(\cos\theta)\, r^2 + \ldots$$

Полагая $\theta = 0$, получим в силу $P_n(1) = 1$

$$\frac{1}{1 - r} = c_0 + c_1 r + c_2 r^2 + \ldots,$$

откуда непосредственно следует, что $c_n = 1$ при любом значке $n$, и, таким образом, мы получаем следующее окончательное разложение нашего элементарного потенциала по степеням $r$:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2r\cos\theta + r^2}} = 1 + P_1(\cos\theta)\, r + P_2(\cos\theta)\, r^2 + \ldots \tag{30}$$

Заменяя $\cos\theta$ на $x$ и $r$ на $z$, можем написать

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, z^n. \tag{31}$$

Эта формула может служить определением полиномов Лежандра, а именно: можно сказать, что *полином Лежандра $P_n(x)$ является коэффициентом при $z^n$ в разложении функции*

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}} \tag{32}$$

*по целым положительным степеням $z$.* Иначе говорят, что *функция* (32) *является производящей функцией полиномов Лежандра.*

Определим радиус сходимости степенного ряда (31). Особыми точками функции (32) будут те значения $z$, при которых подрадикальное выражение обращается в нуль. Решая соответствующее квадратное уравнение, получаем следующие его корни:

$$z = x \pm \sqrt{x^2 - 1} = x \pm \sqrt{1 - x^2}\, i. \tag{33}$$

Поскольку $x = \cos\theta$, мы будем считать, что $x$ является вещественным и находится в промежутке $-1 < x < 1$. При этом корни (33) будут мнимыми сопряженными, и квадрат модуля каждого из них будет равен

$$x^2 + \left(\sqrt{1 - x^2}\right)^2 = 1.$$

При $x = \pm 1$ корни (33) совпадают и равны оба $\pm 1$. Таким образом, при условии $-1 \leqslant x \leqslant 1$ особые точки функции (32) будут отстоять от начала координат на расстоянии единица, и, следовательно, ряд (31) будет сходящимся при $|z| < 1$. В частности, разложение (30) будет справедливо при $r < 1$, т. е. для всех точек, находящихся внутри единичной сферы. Для точек вне единичной сферы мы получим уже другое разложение. Действительно, функцию (27) можно переписать при $r > 1$ следующим образом:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2r\cos\theta + r^2}} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{1}{r}\cos\theta + \left(\frac{1}{r}\right)^2}},$$

При этом $\frac{1}{r} < 1$, так что можно применить уже предыдущее разложение, и мы получим окончательно следующее представление потенциала (27) вне единичной сферы:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2r\cos\theta + r^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(\cos\theta)}{r^{n+1}}. \tag{34}$$

Каждое из слагаемых этой суммы не имеет вне сферы никаких особенностей и обращается в нуль на бесконечности.

До сих пор мы рассматривали сферу единичного радиуса. Для сферы любого радиуса $R$ будем иметь, вынося $R^2$ или $r^2$ из-под знака радикала:

$$\frac{1}{\sqrt{R^2 - 2rR\cos\theta + r^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta) \frac{r^n}{R^{n+1}} \quad (r < R), \tag{35}$$

$$\frac{1}{\sqrt{R^2 - 2rR\cos\theta + r^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta) \frac{R^n}{r^{n+1}} \quad (r > R). \tag{36}$$

Из формулы (31) легко вывести основные свойства полиномов Лежандра. Дифференцируя эту формулу по $x$ и умножая затем на $(1-2xz+z^2)$, получим

$$\frac{x-z}{\sqrt{1-2xz+z^2}}=(1-2xz+z^2)\sum_{n=0}^{\infty}nP_n(x)\,z^{n-1}$$

или

$$(x-z)\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)\,z^n=(1-2xz+z^2)\sum_{n=1}^{\infty}nP_n(x)\,z^{n-1}.$$

Отсюда, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $z$, будем иметь соотношение между последовательными полиномами Лежандра:

$$(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)+nP_{n-1}(x)=0 \qquad (37)$$
$$(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$
$$P_1(x)-xP_0(x)=0.$$

Точно так же дифференцируя формулу (31) по $x$ и умножая затем на $(1-2xz+z^2)$, будем иметь

$$P_n(x)=\frac{dP_{n+1}(x)}{dx}+\frac{dP_{n-1}(x)}{dx}-2x\frac{dP_n(x)}{dx} \qquad (38)$$

или, подставляя $P_{n+1}(x)$ из (37),

$$x\frac{dP_n(x)}{dx}-\frac{dP_{n-1}(x)}{dx}=nP_n(x). \qquad (39)$$

Исключая из (38) и (39) $x\frac{dP_n(x)}{dx}$, получим

$$\frac{dP_{n+1}(x)}{dx}-\frac{dP_{n-1}(x)}{dx}=(2n+1)P_n(x). \qquad (40)$$

Эта формула остается справедливой и при $n=0$, если положить $P_{-1}(x)=0$. Полагая в формуле (40) значок $n$ равным $0, 1, \ldots, n$ и складывая, получаем новое соотношение

$$P_0(x)+3P_1(x)+\ldots+(2n+1)P_n(x)=\frac{dP_{n+1}(x)}{dx}+\frac{dP_n(x)}{dx}. \qquad (41)$$

Напишем формулу (40), заменяя $n$ на $n-2k+1$:

$$\frac{dP_{n-2k+2}(x)}{dx}-\frac{dP_{n-2k}(x)}{dx}=(2n-4k+3)P_{n-2k+1}(x).$$

Суммируя по $k$ от $k=1$ до $k=N$, где $N=\frac{1}{2}n$ при $n$ — четном и $N=\frac{1}{2}(n+1)$ при $n$ — нечетном, получаем формулу

$$\frac{dP_n(x)}{dx}=\sum_{k=1}^{N}(2n-4k+3)P_{n-2k+1}(x). \qquad (42)$$

Из определения (11) непосредственно вытекает, что $P_n(x)$ содержит только четные степени $x$, если $n$ — четное число, и только нечетные степени $x$, если $n$ — нечетное число. Точно так же из этой же формулы непосредственно вытекает

$$P_{2n}(0)=(-1)^n\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n},\quad P_{2n+1}(0)=0,$$
$$P_n(-1)=(-1)^n. \tag{43}$$

Применяя формулу бинома Ньютона, можем написать

$$\frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\theta+r^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-e^{i\theta}r}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-e^{-i\theta}r}}=$$
$$=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}e^{in\theta}r^n\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\ldots(2m-1)}{2\cdot 4\ldots 2m}e^{-im\theta}r^m\right),$$

где при $n=0$ и $m=0$ члены ряда надо считать равными единице. Перемножая ряды и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $r$, получим следующее выражение для полиномов Лежандра:

$$P_n(\cos\theta)=a_0a_n\cos n\theta+a_1a_{n-1}\cos(n-2)\theta+\ldots+a_na_0\cos n\theta, \tag{44}$$

где все коэффициенты $a_k$ положительны и определяются формулами

$$a_0=1,\quad a_k=\frac{1\cdot 3\ldots(2k-1)}{2\cdot 4\ldots 2k}\quad(k=1,\ 2,\ \ldots). \tag{45}$$

Отсюда, между прочим, непосредственно следует

$$|P_n(\cos\theta)|\leqslant a_0a_n+a_1a_{n-1}+\ldots+a_na_0=P_n(1)=1. \tag{46}$$

Формулы (37) дают возможность последовательно определять полиномы Лежандра. Выпишем первые пять полиномов:

$$\left.\begin{aligned}&P_0(x)=1,\quad P_1(x)=x,\quad P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1),\\&P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x),\qquad P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3).\end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Если $f(x)$ есть некоторая функция, определенная в промежутке $(-1,\ 1)$, то возникает вопрос о представлении ее в виде ряда, расположенного по полиномам Лежандра:

$$f(x)=a_0+a_1P_1(x)+a_2P_2(x)+\ldots \tag{48}$$

Пользуясь ортогональностью $P_n(x)$ и формулой (19), мы, как и в теории тригонометрических рядов, убеждаемся, что коэффициенты $a_n$ должны определяться по формулам

$$a_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_n(x)\,dx. \tag{49}$$

Можно показать, что при таком выборе коэффициентов ряд (48) сходится в промежутке $(-1, 1)$ и его сумма равна $f(x)$, если только эта последняя функция удовлетворяет некоторым, весьма общим условиям.

**134. Разложение по сферическим функциям.** Всякая функция, определенная на поверхности сферы любого радиуса, является функцией географических координат $\theta$ и $\varphi$ на этой сфере, так что мы можем ее обозначить в виде $f(\theta, \varphi)$. Положим, что она разлагается по сферическим функциям, т. е. может быть представлена на сфере в виде ряда, аналогичного ряду Фурье:

$$f(\theta, \varphi) = a_0^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_0^{(n)} P_n(\cos\theta) + \right.$$
$$\left. + \sum_{m=1}^{n} \left( a_m^{(n)} \cos m\varphi + b_m^{(n)} \sin m\varphi \right) P_{n,m}(\cos\theta) \right\}. \quad (50)$$

Пользуясь ортогональностью сферических функций, а также формулами (25), мы, как и в ряде Фурье, получим следующие выражения для коэффициентов ряда:

$$\left.\begin{aligned} a_m^{(n)} &= \frac{(2n+1)(n-m)!}{2\delta_m \pi (n+m)!} \iint_s f(\theta, \varphi) P_{n,m}(\cos\theta) \cos m\varphi \, d\sigma, \\ b_m^{(n)} &= \frac{(2n+1)(n-m)!}{2\delta_m \pi (n+m)!} \iint_s f(\theta, \varphi) P_{n,m}(\cos\theta) \sin m\varphi \, d\sigma \end{aligned}\right\} \quad (51)$$

$(\delta_m = 2$ при $m = 0$ и $\delta_m = 1$ при $m > 0$; $P_{n,0}(x) = P_n(x))$.

Строго говоря, такое рассуждение является только некоторым предварительным соображением при определении коэффициентов ряда (50). Мы должны затем подставить значения коэффициентов, полученные по формулам (51), в ряд (50) и доказать, что при некоторых предположениях относительно функции $f(\theta, \varphi)$ этот ряд будет сходящимся, и его сумма будет равна $f(\theta, \varphi)$. В следующем параграфе мы проведем такое доказательство.

Выясним предварительно некоторые соотношения интегрального вида, которым должны удовлетворять сферические функции. Пусть $S_R$ — поверхность сферы радиуса $R$ и $Y_n(\theta, \varphi)$ — некоторая сферическая функция порядка $n$. Функция

$$U_n(M) = r^n Y_n(\theta, \varphi)$$

будет гармонической, и мы можем применить к ней известную формулу Грина [II, 193]:

$$U_n(M) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_R} \left( \frac{\partial U_n}{\partial \nu} \frac{1}{d} - U_n \frac{\partial \frac{1}{d}}{\partial \nu} \right) ds, \quad (52)$$

где $d$ — расстояние переменной точки $M'$ сферы $S_R$ до точки $M$, находящейся внутри сферы, $ds$ — элемент площади поверхности сферы и $\nu$ — направление внешней нормали к сфере $S_R$, так что в данном случае $\frac{\partial}{\partial \nu} = \frac{\partial}{\partial R}$. Мы имеем, очевидно,

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{\sqrt{R^2 - 2Rr\cos\gamma + r^2}}$$

и, далее, в силу (36),

$$\frac{1}{d} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\cos\gamma)\frac{r^k}{R^{k+1}} \qquad (r < R),$$

так что

$$\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{d}\right) = \frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{d}\right) = -\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)P_k(\cos\gamma)\frac{r^k}{R^{k+2}}$$

и

$$\frac{\partial U_n}{\partial \nu} = nR^{n-1}Y_n(\theta, \varphi).$$

В этих формулах $\gamma$ есть угол, образованный радиусами-векторами $OM$ и $OM'$. Подставляя всё это в формулу (52), получим, считая радиус $R$ равным единице:

$$r^n Y_n(\theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi}\iint_s \left\{ nY_n(\theta', \varphi')\sum_{k=0}^{\infty} P_k(\cos\gamma)\, r^k + \right.$$

$$\left. + Y_n(\theta', \varphi')\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)P_k(\cos\gamma)\, r^k \right\} d\sigma,$$

где через $\theta'$ и $\varphi'$ мы обозначили географические координаты переменной точки $M'$ единичной сферы. Написанные ряды сходятся равномерно относительно $\theta'$ и $\varphi'$, так как $r < 1$ и полиномы Лежандра удовлетворяют неравенству (46). Производя почленное интегрирование рядов, будем иметь

$$r^n Y_n(\theta, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^k}{4\pi}\iint_s (k+n+1)\, Y_n(\theta', \varphi')P_k(\cos\gamma)\, d\sigma.$$

Из этой формулы непосредственно вытекает, что все слагаемые суммы должны обратиться в нуль, кроме слагаемого, соответствующего $k = n$, что и дает нам следующие интегральные формулы, имеющие важное применение в приложениях сферических функций:

$$\iint_s Y_n(\theta', \varphi')P_m(\cos\gamma)\, d\sigma = 0 \qquad \text{при } m \neq n, \tag{53}$$

$$\iint_s Y_n(\theta', \varphi')P_n(\cos\gamma)\, d\sigma = \frac{4\pi}{2n+1}\, Y_n(\theta, \varphi). \tag{54}$$

Выведем теперь формулу, выражающую $\cos\gamma$ через тригонометрические функции $\theta$, $\varphi$, $\theta'$ и $\varphi'$. Проведем для этого два радиуса $OM''$ и $OM'$ единичной сферы, концы которых имеют географические координаты $(\theta, \varphi)$ и $(\theta', \varphi')$. Проекции этих радиусов на координатные оси будут, очевидно,

$$\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta \text{ и } \sin\theta'\cos\varphi',\ \sin\theta'\sin\varphi',\ \cos\theta',$$

и косинус угла, образованного этими двумя радиусами, будет выражаться суммой произведений этих проекций, т. е. получаем для $\cos\gamma$ следующую формулу:

$$\cos\gamma = \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi - \varphi') + \cos\theta\cos\theta'. \tag{55}$$

Вернемся вновь к ряду (50). Если этот ряд равномерно сходится и его сумма равна $f(\theta, \varphi)$, то для его коэффициентов мы получаем формулы (51) так же, как и в теории тригонометрических рядов. Объединим теперь в сумме (50) в одно слагаемое те члены ряда, которые представляют собою сферическую функцию заданного порядка $n$, т. е. положим

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta, \varphi). \tag{56}$$

Заменяя в этом разложении $\theta$ и $\varphi$ на $\theta'$ и $\varphi'$, умножая на $P_n(\cos\gamma)$ и интегрируя по переменным $\theta'$ и $\varphi'$, будем иметь, согласно (53) и (54), следующую формулу для членов ряда (56):

$$Y_n(\theta, \varphi) = \frac{2n+1}{4\pi}\iint_s f(\theta', \varphi')\,P_n(\cos\gamma)\,d\sigma. \tag{57}$$

Эта формула дает сумму тех членов ряда (50), которые стоят под знаком суммирования по $n$ и относятся к заданному значению $n$.

Подставляя значения коэффициентов (51) в отдельное слагаемое суммы (50), получим

$$Y_n(\theta, \varphi) = \sum_{m=0}^{n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}\frac{2n+1}{2\delta_m\pi}\left[\cos m\varphi \iint_s f(\theta', \varphi')\cos m\varphi' P_{n,m}(\cos\theta')\,d\sigma + \right.$$
$$\left. + \sin m\varphi \iint_s f(\theta', \varphi')\sin m\varphi' P_{n,m}(\cos\theta')\,d\sigma\right] P_{n,m}(\cos\theta),$$

или

$$Y_n(\theta, \varphi) =$$
$$= \iint_s f(\theta', \varphi') \sum_{m=0}^{n} \frac{(n-m)!\,(2n+1)}{(n+m)!\,(2\delta_m\pi)} P_{n,m}(\cos\theta')\,P_{n,m}(\cos\theta)\cos m(\varphi' - \varphi)\,d\sigma. \tag{58}$$

Сравнение формул (57) и (58) дает нам

$$\iint_S f(\theta', \varphi') \left[ P_n(\cos\gamma) - \right.$$

$$\left. - \sum_{m=0}^{n} \frac{(n-m)!\,2}{(n+m)!\,\delta_m} P_{n,m}(\cos\theta') P_{n,m}(\cos\theta) \cos m(\varphi' - \varphi) \right] d\sigma = 0. \quad (59)$$

Строго говоря, мы вывели эту формулу лишь в предположении, что $f(\theta, \varphi)$ есть сумма равномерно сходящегося ряда (50). В частности, она будет наверно справедливой, если ряд (50) приведется к конечной сумме. Заметим, что угол $\gamma$ есть одна из географических координат (широта), если за полюс взять точку с географическими координатами $\theta$ и $\varphi$. Таким образом, $r^n P_n(\cos\gamma)$ есть однородный гармонический полином степени $n$, и, следовательно, $P_n(\cos\gamma)$ является некоторой сферической функцией порядка $n$ переменных $\theta'$ и $\varphi'$. Мы видим, что квадратная скобка в формуле (59) есть конечная сумма сферических функций, и, следовательно, можно в частности считать, что $f(\theta', \varphi')$ равна этой конечной сумме сферических функций. Таким образом, получаем при таком выборе функции, что интеграл от квадрата упомянутой выше квадратной скобки равен нулю, а потому и всё выражение, стоящее в квадратных скобках, должно равняться нулю:

$$P_n(\cos\gamma) = \sum_{m=0}^{n} \frac{(n-m)!\,2}{(n+m)!\,\delta_m} P_{n,m}(\cos\theta') P_{n,m}(\cos\theta) \cos m(\varphi' - \varphi). \quad (60)$$

Эта формула называется обычно *теоремой сложения для полиномов Лежандра.*

**135. Доказательство сходимости.** Докажем теперь, что произвольная функция $f(\theta, \varphi)$, заданная на поверхности сферы и удовлетворяющая там некоторым условиям, разлагается в ряд (56) по сферическим функциям.

Принимая во внимание формулу (57), получим следующее выражение для суммы первых $(n+1)$ слагаемых ряда (56):

$$S_n = \frac{1}{4\pi} \iint_S f(\theta', \varphi') \sum_{k=0}^{n} (2k+1) P_k(\cos\gamma)\, d\sigma.$$

Введем новые географические координаты $\gamma$ и $\beta$, помещая северный полюс в точку, которая раньше имела географические координаты $\theta$ и $\varphi$. При этом функция $f(\theta', \varphi')$ будет в новой системе координат некоторой функцией $F(\gamma, \beta)$ новых координат, и мы будем иметь

$$S_n = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} F(\gamma, \beta) \sum_{k=0}^{n} (2k+1) P_k(\cos\gamma) \sin\gamma\, d\gamma\, d\beta. \quad (61)$$

Введем новую функцию $\Phi(\gamma)$, которая представляет собою среднее значение функции $F(\gamma, \beta)$ на различных параллелях в новой системе координат:

$$\Phi(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\gamma, \beta)\, d\beta. \quad (62)$$

Введем новую переменную $x = \cos\gamma$ и положим

$$\Phi(\gamma) = \Psi(x). \tag{63}$$

Интегрируя в формуле (61) по переменной $\beta$, мы можем переписать ее в виде

$$S_n = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \Phi(\gamma) \sum_{k=0}^{n} (2k+1) P_k(\cos\gamma) \sin\gamma \, d\gamma$$

или

$$S_n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \Psi(x) \sum_{k=0}^{n} (2k+1) P_k(x) \, dx,$$

т. е. в силу (41)

$$S_n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \Psi(x) \left( \frac{dP_{n+1}(x)}{dx} + \frac{dP_n(x)}{dx} \right) dx.$$

Будем считать, что функция $f(\theta, \varphi)$ такова, что $\Psi(x)$ имеет непрерывную производную в промежутке $(-1, 1)$. Интегрируя при этом по частям, получим

$$S_n = \frac{1}{2}\left[\Psi(x)\left(P_{n+1}(x) + P_n(x)\right)\right]_{x=-1}^{x=1} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \left[P_{n+1}(x) + P_n(x)\right] \Psi'(x) \, dx$$

или, принимая во внимание

$$P_n(1) = P_{n+1}(1) = 1, \; P_n(-1) = -P_{n+1}(-1) = (-1)^n,$$

будем иметь

$$S_n = \Psi(1) - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \left[P_{n+1}(x) + P_n(x)\right] \Psi'(x) \, dx. \tag{64}$$

Выясним теперь значение первого слагаемого $\Psi(1)$ справа. В силу (62) и (63) мы имеем

$$\Psi(1) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(0, \beta) \, d\beta. \tag{65}$$

Но точка при $\gamma = 0$ при произвольном $\beta$ представляет собой северный полюс сферы или, что то же, прежнюю точку с географическими координатами $\theta$ и $\varphi$. Иначе говоря, $F(0, \beta) = f(\theta, \varphi)$ не зависит от $\beta$, и формула (65) дает

$$\Psi(1) = f(\theta, \varphi).$$

Таким образом, мы можем переписать формулу (61) в виде

$$S_n = f(\theta, \varphi) - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \left[P_{n+1}(x) + P_n(x)\right] \Psi'(x) \, dx. \tag{66}$$

Нам надо доказать, что

$$\lim_{n \to \infty} S_n = f(\theta, \varphi),$$

т. е. нам надо доказать, что интеграл, стоящий в формуле (66), стремится к нулю при беспредельном возрастании $n$. Пусть $M$ — наибольшая величина абсолютного значения непрерывной функции $\Psi'(x)$ в промежутке $(-1, 1)$. Упомянутый интеграл по абсолютному значению будет меньше следующего выражения:

$$\frac{M}{2}\int_{-1}^{1}|P_{n+1}(x)|\,dx+\frac{M}{2}\int_{-1}^{1}|P_n(x)|\,dx.$$

Нам остается, следовательно, только показать, что интеграл

$$\int_{-1}^{1}|P_n(x)|\,dx \tag{67}$$

стремится к нулю при возрастании $n$. Применяя неравенство Буняковского [**III$_1$, 29,**] получим

$$\left(\int_{-1}^{1}|P_n(x)|\,dx\right)^2\leqslant\int_{-1}^{1}P_n^2(x)\,dx\int_{-1}^{1}1^2\,dx=2\int_{-1}^{1}P_n^2(x)\,dx$$

или, в силу (19),

$$\int_{-1}^{1}|P_n(x)|\,dx\leqslant\frac{2}{\sqrt{2n+1}},$$

откуда и вытекает непосредственно, что интеграл (67) стремится к нулю при $n\to\infty$.

Указанный прием доказательства теоремы разложения по сферическим функциям взят нами из книги Вебстер-Сеге «Дифференциальные уравнения в частных производных математической физики». Тот факт, что произвольная функция, удовлетворяющая указанным выше условиям общего характера [$\Psi(x)$ имеет непрерывную производную], разлагается по сферическим функциям, указывает на то, что сферические функции образуют замкнутую систему [**II, 155**] на поверхности единичной сферы. Впервые эта замкнутость системы сферических функций была доказана А. М. Ляпуновым (1899 г.).

**136. Связь сферических функций с предельными задачами.** Сейчас мы укажем на связь теории сферических функций с некоторыми предельными задачами для дифференциальных уравнений. Напишем уравнение Лапласа в сферических координатах [**II, 119**]:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2U}{\partial\varphi^2}=0. \tag{68}$$

Будем искать его решение, имеющее вид произведения функции только от $r$ на функцию только от $\theta$ и $\varphi$:

$$U=f(r)\,Y(\theta,\varphi).$$

Подставим в уравнение (68)

$$Y(\theta, \varphi)\frac{d}{dr}[r^2 f'(r)] + f(r)\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial Y(\theta,\varphi)}{\partial\theta}\right] + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y(\theta,\varphi)}{\partial\varphi^2}\right\} = 0;$$

это можно переписать, разделяя переменные, в виде

$$\frac{\frac{d}{dr}[r^2 f'(r)]}{f(r)} = -\frac{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial Y(\theta,\varphi)}{\partial\theta}\right] + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}}{Y}.$$

Левая часть содержит только $r$, а правая только $\theta$ и $\varphi$, и обе части должны равняться одной и той же постоянной. Обозначая эту постоянную через $\lambda$, будем иметь два уравнения:

$$r^2 f''(r) + 2rf'(r) - \lambda f(r) = 0 \tag{69}$$

и

$$\Delta_1 Y + \lambda Y = 0, \tag{70}$$

где мы для сокращения обозначили

$$\Delta_1 Y = \frac{1}{\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\right]. \tag{71}$$

Множитель $f(r)$ мы уже знаем, а именно, в силу (5), он должен равняться $r^n$, и, таким образом, наше внимание должно сосредоточиться на уравнении (70). Функция $Y(\theta, \varphi)$, как мы видели, есть тригонометрический полином, и, следовательно, во всяком случае она должна быть конечной и непрерывной на всей единичной сфере, т. е. при любом выборе углов $\theta$ и $\varphi$, и, в частности, при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$, когда $\sin\theta$ обращается в нуль. Приходим таким образом к следующей предельной задаче: *найти такие значения параметра* $\lambda$, *при которых уравнение* (70) *имеет решения, непрерывные на всей единичной сфере, и построить эти решения.* Первая часть задачи не представляет никакого труда, ибо мы знаем, что $f(r)$ должно равняться $r^n$, и, подставляя это в уравнение (69), получим бесчисленное множество значений параметра $\lambda$, а именно:

$$\lambda_n = n(n+1) \qquad (n = 0,\ 1,\ 2, \ldots). \tag{72}$$

При этом уравнение

$$r^2 f_n''(r) + 2rf_n'(r) - n(n+1) f_n(r) = 0 \tag{73}$$

будет иметь одно решение $f_n(r) = r^n$ и второе решение $f_n(r) = r^{-n-1}$. Подставляя $\lambda = n(n+1)$ в уравнение (70), получим уравнение для сферических функций

$$\frac{1}{\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y_n}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2 Y_n}{\partial\varphi^2}\right] + n(n+1)\, Y_n = 0. \tag{74}$$

В данном случае собственному значению $\lambda_n = n(n+1)$ соответствует $(2n+1)$ собственных функций. Это будут сферические функции

порядка $n$. Поскольку сферические функции образуют замкнутую систему на единичной сфере, ими исчерпываются все собственные функции уравнения (70). Подставляя выражения (16) в уравнение (74) и полагая $x = \cos\theta$, получаем для $P_{n,m}(x)$ следующее уравнение второго порядка:

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_{n,m}(x)}{dx}\right]+\left(\lambda_n-\frac{m^2}{1-x^2}\right)P_{n,m}(x)=0. \qquad (75)$$

При $m=0$ получается уравнение для полиномов Лежандра $P_n(x)$. Собственные значения и соответствующие собственные функции $P_{n,m}(x)$ решают следующую предельную задачу: найти такие значения $\lambda_n$, при которых уравнение (75) имеет решение, которое остается конечным во всем промежутке $-1 \leqslant x \leqslant 1$, включая и его концы. Отметим, что уравнение (75) имеет в особых точках $x=\pm 1$ определяющее уравнение $\rho(\rho-1)+\rho-\frac{m^2}{4}=0$ с корнями $\rho=\pm\frac{m}{2}$.

Решение, соответствующее корню $\rho=-\frac{m}{2}$, обращается в бесконечность в соответствующей особой точке.

Указанная задача сводится к нахождению таких значений $\lambda_n$, при которых решение, принадлежащее корню $\rho=\frac{m}{2}$ в точке $x=-1$, принадлежало бы тому же корню и в точке $x=1$.

Решением этой задачи и являются значения $\lambda_n=n(n+1)$, а соответствующие собственные функции определяются формулой (12).

Свойство ортогональности сферических функций непосредственно связано с тем, что они решают указанную выше предельную задачу для уравнения (70). Совершенно так же функции $P_{n,m}(x)$ обладают свойством ортогональности на отрезке $(-1, 1)$:

$$\int_{-1}^{1} P_{p,m}(x)\,P_{q,m}(x)\,dx=0 \quad \text{при } p\neq q. \qquad (76)$$

Это доказывается на основании уравнения (75) совершенно так же, как это было сделано в [**102**] для полиномов Лежандра. Отметим еще один факт, связанный с теорией сферических функций. Если мы используем решение $f_n(r)=r^n$ уравнения (73), то получим решение $r^n Y_n(\theta,\varphi)$ уравнения Лапласа. Это будет гармонический полином степени $n$. Если мы используем второе решение $f_n(r)=r^{-n-1}$ уравнения (73), то приходим к следующему заключению: *функция*

$$\frac{Y_n(\theta,\varphi)}{r^{n+1}}, \qquad (77)$$

*где $Y_n(\theta,\varphi)$ — сферическая функция порядка $n$, является решением уравнения Лапласа.* Это решение обращается в бесконечность при $r=0$ и не является, конечно, полиномом от $x$, $y$, $z$.

**137. Задачи Дирихле и Неймана.** Сферические функции применяются в задачах математической физики, связанных с уравнением Лапласа и относящихся к случаю сферы. Для примера рассмотрим задачи Дирихле и Неймана, о которых мы говорили раньше [II, **192**], для случая сферы. Требуется определить гармоническую функцию внутри сферы радиуса $R$, если заданы ее предельные значения на поверхности этой сферы (внутренняя задача Дирихле). Разложим заданные предельные значения по сферическим функциям:

$$f(\theta,\ \varphi)=\sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta,\ \varphi). \tag{78}$$

Составим новый ряд, умножая общий член написанного ряда на $\left(\frac{r}{R}\right)^n$, где $r$ — расстояние переменной точки до центра сферы

$$U(r,\ \theta,\ \varphi)=\sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta,\ \varphi)\left(\frac{r}{R}\right)^n \quad (r<R). \tag{79}$$

Принимая во внимание, что $\frac{1}{R^n}\ Y_n(\theta,\ \varphi)\, r^n$ есть гармонический полином, мы видим, что функция (79) будет гармонической внутри сферы и, кроме того, непосредственно ясно, что при $r=R$ ряд (79) обращается в ряд (78), так что эта гармоническая функция удовлетворяет требуемым предельным условиям.

Рассмотрим теперь *внешнюю задачу Дирихле*, т. е. положим, что требуется определить функцию, гармоническую вне сферы и равную нулю на бесконечности [II, **192**] по ее предельным значениям (78) на поверхности сферы. Принимая во внимание, что $Y_n(\theta,\ \varphi)\, r^{-n-1}$ суть гармонические функции, не имеющие особенностей вне сферы и равные нулю на бесконечности, мы получаем решение внешней задачи Дирихле в виде

$$U(r,\ \theta,\ \varphi)=\sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta,\ \varphi)\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}. \tag{80}$$

Переходим теперь к решению *внутренней задачи Неймана*. Положим, что требуется определить внутри сферы гармоническую функцию $U(r,\ \theta,\ \varphi)$ по значениям ее нормальной производной на поверхности сферы

$$\frac{\partial U}{\partial \nu}=f(\theta,\ \varphi) \qquad (r=R). \tag{81}$$

Мы знаем, что для гармонической функции интеграл от нормальной производной должен обращаться в нуль [II, **194**]:

$$\iint_S \frac{\partial U}{\partial \nu}\, d\sigma=0,$$

т. е. заданная функция $f(\theta, \varphi)$, входящая в условие (81), должна обязательно быть такой, что

$$\iint_S f(\theta, \varphi)\, d\sigma = 0. \tag{82}$$

Вспоминая формулу (57), определяющую сферические функции, получаемые в разложении $f(\theta, \varphi)$, и принимая во внимание, что $P_n(\cos\gamma)$ есть постоянная при $n=0$, мы видим, что условие (82) равносильно тому факту, что в разложении $f(\theta, \varphi)$ по сферическим функциям отсутствуют сферические функции нулевого порядка. Таким образом, в данном случае мы будем иметь

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(\theta, \varphi). \tag{83}$$

Нетрудно видеть, что решение задачи Неймана будет даваться следующей формулой:

$$U(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} Y_n(\theta, \varphi) \frac{r^n}{R^{n-1}} + C, \tag{84}$$

где $C$ — произвольная постоянная.

Действительно, этот ряд определяет гармоническую функцию, и дифференцирование по нормали совпадает в данном случае с дифференцированием по $r$. Нетрудно проверить, что, дифференцируя ряд (84) по $r$ и полагая затем $r=R$, мы и получим ряд (83), т. е. будет удовлетворено предельное условие (81). В случае *внешней задачи Неймана* функция $f(\theta, \varphi)$, входящая в условие (81), уже не должна удовлетворять условию (82), так что мы имеем для нее разложение общего вида (78). Легко видеть, что при этом решение внешней задачи Неймана представится в виде ряда

$$U(r, \theta, \varphi) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} Y_n(\theta, \varphi) \frac{R^{n+2}}{r^{n+1}}, \tag{85}$$

причем направление нормали $\nu$ мы считаем совпадающим с направлением радиуса $r$.

Рассмотрим один специальный случай внешней задачи Неймана. Положим, что сфера радиуса $R$ движется с направленной по оси $Z$ скоростью $a$ в безграничной жидкости, покоящейся на бесконечности. Возьмем движущуюся со сферой систему координат, помещая начало координат в центре сферы. При этом нормальная составляющая скорости жидкости на поверхности сферы будет определяться формулой

$$\frac{az}{r} = a\cos\theta.$$

Предполагая движение жидкости стационарным и с потенциалом скорости, мы будем иметь задачу нахождения функции $U$ по следующим условиям: 1) вне сферы $U$ должно быть гармонической функцией; 2) на бесконечности составляющие скорости, т. е. производные от функции $U$ по координатам, должны обращаться в нуль и 3) на поверхности сферы функция $U$ должна удовлетворять условию

$$\frac{\partial U}{\partial r} = -a\cos\theta.$$

В данном случае $f(\theta, \varphi) = -a\cos\theta$ или, вспоминая выражение для полиномов Лежандра, имеем

$$f(\theta, \varphi) = -aP_1(\cos\theta),$$

т. е. в данном случае функция $f(\theta, \varphi)$ представляется одной сферической функцией первого порядка. Решение задачи будет определяться формулой

$$U(r, \theta, \varphi) = \frac{a}{2}P_1(\cos\theta)\frac{R^3}{r^2} = \frac{aR^3}{2r^2}\cos\theta.$$

**138. Потенциал объемных масс.** Положим, что в пространстве имеется ограниченный объем $V$, заполненный материей с плотностью $\rho(M')$. Потенциал от такого распределения будет выражаться тройным интегралом вида

$$U(M) = \iiint_V \frac{\rho(M')}{d}\,dV, \tag{86}$$

где $d$ есть расстояние переменной точки $M'$ объема $V$ до точки $M$, в которой определяется значение потенциала. Пусть $O$ есть начало координат, и введем в рассмотрение длины радиусов-векторов

$$r = |\overline{OM}|, \quad r' = |\overline{OM'}|$$

и угол $\gamma$, образованный этими радиусами-векторами. Возьмем достаточно далекие точки $M$, для которых величина $r$ больше наибольшей из величин $r'$. Для таких точек мы будем иметь следующее разложение [133]:

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr'\cos\gamma + r'^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\gamma)\frac{r'^n}{r^{n+1}},$$

равномерно сходящееся относительно $r'$ в силу $|P_n(\cos\gamma)| < 1$. Подставляя его в интеграл (86), получим разложение потенциала $U(M)$ по целым отрицательным степеням $r$:

$$U(M) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y_n(\theta, \varphi)}{r^{n+1}}, \tag{87}$$

где

$$Y_n(\theta, \varphi) = \iiint_V \rho(M')\, r'^n P_n(\cos\gamma)\,dV. \tag{88}$$

Определим первые три члена разложения (87). Вспоминая выражение для первых трех полиномов Лежандра, а также принимая во внимание очевидную формулу

$$\cos\gamma = \frac{xx' + yy' + zz'}{rr'},$$

можно написать

$$P_0(\cos\gamma)=1;\quad r'P_1(\cos\gamma)=\frac{xx'+yy'+zz'}{r},$$

$$r'^2P_2(\cos\gamma)=\frac{1}{2}\,\frac{3(xx'+yy'+zz')^2-r'^2r^2}{r^2}.$$

Подставляя это в формулу (88), будем иметь

$$Y_0(\theta,\varphi)=\iiint_V\rho(M')\,dV=m,$$

т. е. коэффициент при $\frac{1}{r}$ в разложении (87) равен общей массе $m$, заключающейся в объеме $V$. Далее получаем

$$Y_1(\theta,\varphi)=\iiint_V\rho(M')\,r'P_1(\cos\gamma)\,dV=$$

$$=\frac{x}{r}\iiint_V\rho(M')\,x'\,dV+\frac{y}{r}\iiint_V\rho(M')\,y'\,dV+\frac{z}{r}\iiint_V\rho(M')\,z'\,dV$$

Написанные интегралы выражают произведения массы $m$ на координаты центра тяжести. Будем считать, что за начало координат выбран центр тяжести массы. При этом мы будем иметь, очевидно, $Y_1(\theta,\varphi)=0$. Переходим, наконец, к вычислению $Y_2(\theta,\varphi)$. Для этого введем в рассмотрение моменты инерции нашей массы относительно осей

$$A=\iiint_V\rho(M')(y'^2+z'^2)\,dV,\qquad B=\iiint_V\rho(M')(z'^2+x'^2)\,dV,$$

$$C=\iiint_V\rho(M')(x'^2+y'^2)\,dV, \tag{89}$$

а также центробежные моменты относительно осей

$$D=\iiint_V\rho(M')\,y'z'\,dV,\qquad E=\iiint_V\rho(M')\,z'x'\,dV,$$

$$F=\iiint_V\rho(M')\,x'y'\,dV. \tag{90}$$

Можно показать, на чем мы не останавливаемся, что координатную систему можно всегда расположить таким образом, чтобы центробежные моменты (90) обратились в нуль. Мы будем считать, что координатные оси и выбраны именно таким образом. Подставляя выражение $r'^2P_2(\cos\gamma)$ в формулу (88), мы, как нетрудно проверить, получаем следующее выражение для $Y_2(\theta,\varphi)$:

$$Y_2(\theta,\varphi)=\frac{1}{2}\,\frac{(B+C-2A)\,x^2+(C+A-2B)\,y^2+(A+B-2C)\,z^2}{r^2},$$

и для потенциала $U(M)$ будем иметь с точностью до членов порядка $\frac{1}{r^3}$

$$U(M)=$$

$$=\frac{m}{r}+\frac{1}{2}\,\frac{(B+C-2A)\,x^2+(C+A-2B)\,y^2+(A+B-2C)\,z^2}{r^5}+\ldots \tag{91}$$

Вводя сферические координаты вместо $x$, $y$ и $z$, можем переписать это выражение следующим образом:

$$U(M) = \frac{m}{r} + \frac{(B+C-2A)\cos^2\varphi\sin^2\theta + (C+A-2B)\sin^2\varphi\sin^2\theta + (A+B-2C)\cos^2\theta}{2r^3} + \ldots \tag{92}$$

**139. Потенциал сферического слоя.** Положим, что на поверхности $S_R$ сферы радиуса $R$ распределена некоторая масса с поверхностной плотностью $\rho(M')$. Потенциал такого простого слоя $U(M)$ будет выражаться интегралом по поверхности сферы

$$U(M) = \int\int_{S_R} \frac{\rho(M')}{d}\, ds, \tag{93}$$

где $d$ есть расстояние точки $M$ до переменной точки $M'$ поверхности сферы. Выражение $\frac{1}{d}$ будет иметь разложения различного вида внутри сферы $S_R$ и вне сферы $S_R$.

Будем сначала считать $r < R$, при этом мы получим **[133]**

$$\frac{1}{d} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\gamma)\frac{r^n}{R^{n+1}}, \tag{94}$$

где $\gamma$ есть угол, образованный радиусами-векторами $\overline{OM}$ и $\overline{OM'}$ из центра сферы. Плотность $\rho(M')$ мы должны считать заданной функцией $f(\theta', \varphi')$ географических координат на сфере.

Подставляя разложение (94) в интеграл (93), будем иметь, вспоминая, что $ds = R^2\, d\sigma = R^2 \sin\theta'\, d\theta'\, d\varphi'$:

$$U(M) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{R^{n-1}} \int\int_{S_R} f(\theta', \varphi')\, P_n(\cos\gamma)\, d\sigma. \tag{95}$$

Написанные интегралы непосредственно связаны с членами разложения функции $f(\theta, \varphi)$ по сферическим функциям, а именно, если

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta, \varphi), \tag{96}$$

то, как известно,

$$Y_n(\theta, \varphi) = \frac{2n+1}{4\pi} \int\int_{S_R} f(\theta', \varphi')\, P_n(\cos\gamma)\, d\sigma,$$

и, следовательно, разложение (95) мы можем написать в следующем виде:

$$U(M) = 4\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{(2n+1)\, R^{n-1}}\, Y_n(\theta, \varphi) \quad (r < R). \tag{97}$$

Совершенно так же, пользуясь разложением (36), получим

$$U(M)=4\pi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{R^{n+2}}{(2n+1)\,r^{n+1}}\,Y_n(\theta,\varphi)\ (r>R). \tag{98}$$

Пользуясь этими разложениями, отметим некоторые свойства потенциала простого слоя. Заметим прежде всего, что разложения (97) и (98) совпадают, если точка $M$ попадает на поверхность сферы. В данном случае мы должны положить $r=R$ и получим следующий результат:

$$U(M_0)=4\pi R\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\,Y_n(\theta,\varphi), \tag{99}$$

где $\theta$ и $\varphi$ — географические координаты точки $M_0$, лежащей на поверхности сферы. Мы видим, таким образом, что *потенциал простого слоя меняется непрерывно, когда точка $M$ проходит через поверхность сферы.* Это свойство потенциала простого слоя имеет место не только для сферы, но и для поверхностей общего вида.

Исследуем теперь поведение нормальной производной от потенциала (нормальная составляющая силы) при переходе точки $M$ через поверхность сферы.

Обозначим через $\left(\frac{\partial U(M_0)}{\partial \nu}\right)_i$ предел нормальной производной при стремлении точки $M$ по радиусу к точке $M_0$ изнутри сферы, а через $\left(\frac{\partial U(M_0)}{\partial \nu}\right)_e$ — такой же предел при стремлении точки $M$ к той же точке поверхности $M_0$ извне сферы. Через $\nu$ мы обозначаем направление внешней нормали к сфере в точке $M_0$. В данном случае это направление совпадает с направлением радиуса $\overline{OM_0}$. Дифференцируя формулы (97) и (98) по направлению $\nu$, т. е. по $r$, и полагая затем $r=R$, мы получаем выражения для упомянутых выше пределов:

$$\left(\frac{\partial U(M_0)}{\partial \nu}\right)_i=4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+1}\,Y_n(\theta,\varphi), \tag{100}$$

$$\left(\frac{\partial U(M_0)}{\partial \nu}\right)_e=-4\pi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2n+1}\,Y_n(\theta,\varphi). \tag{101}$$

Отсюда видно, что нормальная производная потенциала простого слоя имеет, вообще говоря, разрыв при прохождении через поверхность.

Из формул (100) и (101) непосредственно вытекают следующие формулы:

$$\left(\frac{\partial U(M_0)}{\partial \nu}\right)_e - \left(\frac{\partial U(M_0)}{\partial \nu}\right)_i = -4\pi \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta, \varphi),$$

$$\left(\frac{\partial U(M_0)}{\partial \nu}\right)_e + \left(\frac{\partial U(M_0)}{\partial \nu}\right)_i = -4\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} Y_n(\theta, \varphi),$$

откуда в силу (96) и (99) мы можем написать

$$\left(\frac{\partial U(M_0)}{\partial \nu}\right)_e - \left(\frac{\partial U(M_0)}{\partial \nu}\right)_i = -4\pi\rho(M_0), \tag{102}$$

$$\left(\frac{\partial U(M_0)}{\partial \nu}\right)_e + \left(\frac{\partial U(M_0)}{\partial \nu}\right)_i = -\frac{U(M_0)}{R}. \tag{103}$$

Формула (102) показывает, между прочим, что *величина скачка нормальной производной равна произведению* $(-4\pi)$ *на значение плотности в рассматриваемой точке поверхности.*

Выясним теперь значение правой части формулы (103). Обозначая, как и выше, через $\nu$ определенное направление, а именно направление радиуса $OM_0$, и принимая во внимание, что в интеграле (93) только множитель $\frac{1}{d}$ зависит от координат точки $M$, получим

$$\frac{\partial U(M)}{\partial \nu} = \int\int_{S_R} \rho(M') \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{d}\right) ds. \tag{104}$$

Но мы имеем

$$\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{d}\right) = -\frac{1}{d^2}\cos\omega,$$

где $\omega$ есть угол между радиусом-вектором $\overline{M'M}$ и направлением $\nu$. Определим значение интеграла (104), предполагая, что точка $M$ находится на самой сфере и именно в точке $M_0$. При этом мы будем иметь $d = 2R\cos\omega$ и, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{d}\right) = -\frac{1}{2Rd}.$$

Для интеграла (104) получим следующее значение:

$$-\frac{1}{2R}\int\int_{S_R} \rho(M')\frac{1}{d}\, ds = -\frac{1}{2R} U(M_0).$$

Обозначим эту величину через $\frac{\partial U(M_0)}{\partial \nu}$. При этом формулу (103) можно переписать в следующем виде:

$$\left(\frac{\partial U(M_0)}{\partial \nu}\right)_e + \left(\frac{\partial U(M_0)}{\partial \nu}\right)_i = 2\frac{\partial U(M_0)}{\partial \nu}.$$

Отсюда вытекают, между прочим, следующие выражения для пределов нормальной производной потенциала простого слоя:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial U(M_0)}{\partial \nu}\right)_i &= \frac{\partial U(M_0)}{\partial \nu} + 2\pi\rho(M_0),\\ \left(\frac{\partial U(M_0)}{\partial \nu}\right)_e &= \frac{\partial U(M_0)}{\partial \nu} - 2\pi\rho(M_0).\end{aligned}\right\} \tag{105}$$

Эти формулы оказываются также справедливыми не только для сферы.

**140. Электрон в центральном поле.** При рассмотрении электрона в поле, образованном некоторым положительным ядром, мы имеем, согласно теории Шредингера, следующее уравнение:

$$-\frac{h^2}{2\mu}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)-eV(r)\,\psi = E\psi, \tag{106}$$

где $h$ — постоянная Планка, $\mu$ — масса электрона, $e$ — его заряд, $V(r)$ — заданная функция, зависящая только от расстояния $r$ от начала и определяющая потенциал поля, $\psi(x, y, z)$ — волновая функция и, наконец, $E$ — постоянное число, определяющее уровень энергии рассматриваемой физической системы. Уравнение (106) должно иметь решение, определенное во всем бесконечном пространстве и остающееся ограниченным на бесконечности. Будем искать решения уравнения (106) в виде произведения функции только от $r$ на функцию только от $\theta$ и $\varphi$. Выражая операторы Лапласа $\Delta\psi$ в сферических координатах, можем написать

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\Delta_1\psi,$$

где, как и выше [136],

$$\Delta_1\psi = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}.$$

Уравнение (106) перепишется в виде

$$\frac{h^2}{2\mu}\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\Delta_1\psi\right]+eV(r)\,\psi+E\psi=0.$$

Подставляя выражение $\psi = f(r)\,Y(\theta, \varphi)$ и разделяя переменные, мы будем иметь

$$\frac{\Delta_1 Y}{Y} = \frac{-\frac{h^2}{2\mu}\left[f''(r)+\frac{2}{r}f'(r)\right]-eV(r)f(r)-Ef(r)}{\frac{h^2}{2\mu r^2}f(r)}.$$

Обе части написанного равенства должны равняться одной и той же постоянной, которую мы обозначим через $\lambda$. Это даст нам два уравнения:

$$\Delta_1 Y-\lambda Y=0, \tag{107}$$

$$-\frac{h^2}{2\mu}\left[f''(r)+\frac{2}{r}f'(r)+\frac{\lambda}{r^2}f(r)\right]-eV(r)f(r)-Ef(r)=0. \tag{108}$$

Уравнение (107) должно иметь решение, непрерывное на всей поверхности сферы. Мы уже знаем, что при этом параметр $\lambda$ должен принимать

значение $-l(l+1)$, и в качестве решения будем иметь сферические функции $Y_l(\theta, \varphi)$. Подставляя указанное значение $\lambda$ в уравнение (108), будем иметь уравнение для определения множителя, зависящего от $r$, который мы обозначим теперь через $f_l(r)$:

$$\frac{h^2}{2\mu} f_l''(r) + \frac{h^2}{\mu r} f_l'(r) + \left[E + eV(r) - \frac{h^2 l(l+1)}{2\mu r^2}\right] f_l(r) = 0. \qquad (109)$$

Значения параметра $E$ определятся из условия, что уравнение (109) должно иметь решение, ограниченное как при $r=0$, так и при стремлении $r$ к $+\infty$. Вообще говоря, мы получим бесчисленное множество таких значений $E$. Они обычно нумеруются, начиная с целого числа $(l+1)$, т. е. они нумеруются по порядку следующими целыми числами:

$$n = l+1, \quad l+2, \quad l+3, \quad \ldots$$

Таким образом, значение $E$ будет зависеть от двух значков, а именно — от значения целого числа $l$ и номера $n$. Число $l$ называется *азимутальным квантовым числом* и число $n$ называется *главным квантовым числом*. При заданных $l$ и $n$ мы имеем, вообще говоря, определенную функцию $f_{nl}(r)$, удовлетворяющую уравнению (109) и указанным выше предельным условиям при $r=0$ и $r=+\infty$. Что же касается функций $Y_l(\theta, \varphi)$, то их будет всего $(2l+1)$:

$$Y_l^{(m)}(\theta, \varphi) \qquad (m = -l, \ -l+1, \ \ldots, \ l-1, \ l),$$

и для полной характеристики волновой функции мы должны указать значение и для третьего значка $m$. Это значение называется обычно *магнитным квантовым числом*. Оно играет существенную роль при рассмотрении возмущения рассматриваемой физической системы, вызываемого включением магнитного поля, направленного по оси $Z$.

Рассмотрим теперь тот частный случай, когда потенциал является кулоновским потенциалом

$$V(r) = \frac{ke}{r},$$

где $k$ — некоторое целое число, равное, например, для случая атома водорода, единице. Подставляя выражение потенциала в уравнение (109), придем к уравнению следующего вида $(k=1)$:

$$\frac{h^2}{2\mu} f''_l(r) + \frac{h^2}{\mu r} f_l'(r) + \left[E + \frac{e^2}{r} - \frac{h^2 l(l+1)}{2\mu r^2}\right] f_l(r) = 0. \qquad (110)$$

Введем вместо $r$ новую переменную $z$:

$$z = \frac{\mu e^2 r}{h^2},$$

и положим

$$\varepsilon = \frac{Eh^2}{\mu e^4} \quad \text{и} \quad s = 2l+1. \qquad (111)$$

Кроме того, вместо $f_l(r)$ введем новую искомую функцию $y$:

$$f_l(r) = \frac{1}{\sqrt{z}} y.$$

Подставляя все это в (110), придем к уравнению

$$\frac{d^2y}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dy}{dz}+\left(2\varepsilon+\frac{2}{z}-\frac{s^2}{4z^2}\right)y=0,$$

которое мы рассматривали в [115].

Остановимся на рассмотрении отрицательных значений параметра $E$. При этом, как мы видели выше, получим бесчисленное множество дискретных значений для постоянной $E$, а именно, обозначая

$$\lambda=\frac{1}{\sqrt{-2\varepsilon}},$$

мы имели следующие значения для параметра $\lambda$:

$$\lambda_p=\frac{s+1}{2}+p \quad (p=0, 1, 2, \ldots),$$

откуда

$$\frac{1}{-2\varepsilon_p}=\left(\frac{s+1}{2}+p\right)^2 \quad \text{и} \quad \varepsilon_p=-\frac{1}{\left(\frac{s+1}{2}+p\right)^2}=-\frac{1}{2(p+l+1)^2},$$

и, следовательно, в силу (111) для параметра $E$ мы имеем следующие значения:

$$E_{nl}=-\frac{\mu e^4}{2\hbar^2(p+l+1)^2}=-\frac{\mu e^4}{2\hbar^2 n^2}, \tag{112}$$

где $n$ — главное квантовое число, равное $(p+l+1)$.

Мы видим отсюда, что для случая поля Кулона значения параметра $E$ не зависят от азимутального квантового числа $l$. Если фиксировать $n$ и тем самым значение параметра $E$, то, поскольку $n=p+l+1$, можно придавать $l$ следующие значения:

$$l=n-1,\ n-2, \ldots, 0.$$

Каждому такому значению $l$ соответствует $(2l+1)$ собственных функций $\psi$. Таким образом, для значения (112) параметра $E$ будем иметь следующее общее число собственных функций:

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2.$$

Если вместо уравнения Шредингера мы взяли бы для случая одного электрона уравнение Дирака, то пришли бы к функциям, аналогичным шаровым функциям. Эти *«шаровые функции со спином»* рассмотрены, например, в книге: В. А. Фок, Начала квантовой механики.

**141. Шаровые функции и линейные представления группы вращения.** Как мы уже упоминали раньше, однородные полиномы переменных $(x, y, z)$, удовлетворяющие уравнению Лапласа, дают некоторое линейное представление группы $R$ вращения пространства вокруг начала.

Мы видим, таким образом, что совокупность сферических функций порядка $l$ дает линейное представление группы $R$, и это представление будет представлением порядка $(2l+1)$. Рассмотрим этот вопрос несколько подробнее.

Возьмем сферические функции порядка $l$ в том виде, в каком они указаны формулами (18), и введем для них специальные обозначения:

$$Q_l^{(m)}(\varphi, \theta)=e^{lm\varphi}P_{l,m}(\cos\theta) \qquad (m=-l, -l+1, \ldots, l-1, l), \tag{113}$$

где

$$P_{l,-m}(\cos\theta)=P_{l,m}(\cos\theta),$$

Пусть $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ — некоторое вращение из группы $R$ с углами Эйлера $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$. В результате этого вращения точка сферы с координатами $(\varphi, \theta)$ перейдет в новое положение $(\varphi', \theta')$, и функции $Q_l^{(m)}(\varphi', \theta')$ будут линейно выражаться через функции $Q_l^{(m)}(\varphi, \theta)$. Матрица этого линейного преобразования и будет соответствовать вращению $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ в том линейном представлении группы $R$, которое определяется функциями (113). Простая зависимость этих функций от угла $\varphi$ показывает, что вращению вокруг оси $Z$ на угол $\alpha$, т. е. вращению $\{\alpha, 0, 0\}$, соответствует при этом диагональная матрица

$$\begin{Vmatrix} e^{-il\alpha} & 0, & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{-i(l-1)\alpha} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i(l-2)\alpha} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{il\alpha} \end{Vmatrix}. \tag{114}$$

Обозначим вообще через $\{D_l(R_0)\}_{ik}$ элементы матрицы, соответствующей определенному вращению $R_0$, причем значки $i$ и $k$ пробегают ряд значений $-l, -l+1, \dots, l$.

Возьмем за $R_0$ вращение вокруг оси $Y$ на угол $\beta$, в результате которого точки сферы с координатами $\varphi = 0$ и $\theta$ перейдут в точки $\varphi = 0$ и $\theta + \beta$. Принимая во внимание вид функций (113), можно утверждать, что при сделанном выборе $R_0$ матрица $D_l(R_0)$ преобразует функции $P_{l,m}(\cos\theta)$ в функции $P_{l,m}[\cos(\theta+\beta)]$, т. е.

$$P_{l,m}[\cos(\theta+\beta)] = \sum_{s=-l}^{l} \{D_l(R_0)\}_{ms} P_{l,s}(\cos\theta) \qquad (m = -l, -l+1, \dots, l).$$

Обращаясь к формулам (12), мы видим, что $P_{l,s}(\cos\theta)$ обращаются в нуль при $\theta = 0$, если $s \neq 0$. Полагая в предыдущих формулах $\theta = 0$, будем иметь, таким образом,

$$P_{l,m}(\cos\beta) = \{D_l(R_0)\}_{m0} P_l(1) = \{D_l(R_0)\}_{m0}.$$

Отсюда видно, что элементы столбца матрицы $D_l(R_0)$ с номером $k = 0$, вообще говоря, все отличны от нуля, т. е. среди них есть равные нулю только при исключительных значениях $\beta$.

Итак, среди матриц $D_l(R)$ есть диагональные матрицы (114) с различными элементами и есть матрицы, у которых элементы некоторого столбца все отличны от нуля. Как мы видели в [**III**$_1$, **69**], при этом матрицы дают неприводимое представление группы $R$, и можно поэтому утверждать неприводимость представления, доставляемого матрицами $D_l(R)$. Функции (113) попарно ортогональны, но не нормированы к единице для интегралов от квадрата модуля. Приписывая к функциям подходящим образом выбранные постоянные множители, можно построить и нормированные функции:

$$C_l^{(m)} Q_l^{(m)}(\varphi, \theta). \tag{115}$$

Они дадут уже унитарное неприводимое представление $D_l'(R)$ [**III**$_1$, **63**], эквивалентное $D_l(R)$, причем в этом новом представлении вращению $\{\alpha, 0, 0\}$ будет соответствовать прежняя матрица (114), так как постоянные множители, приписанные нами, не изменят характера зависимости функций (113) от $\varphi$.

Умножая функции (115) на любые множители, по модулю равные единице, мы получаем также унитарные представления с тою же матрицей

(114), соответствующей вращению $\{\alpha, 0, 0\}$. Одно из этих представлений в точности совпадает с тем, которые мы построили другим путем в [$\mathbf{III_1}$, 62].

Собственные функции уравнения Шредингера, рассмотренные ранее, распадаются на группы в соответствии со значением числа $l$, причем в такую группу входит $(2l+1)$ собственных функций ($l$ — азимутальное квантовое число). Нумерация функций, входящих в такую группу, производится числом $m$ ($m$ — магнитное квантовое число), принимающим значения $m = -l, -l+1, \ldots, l$. Из вида функций (113) непосредственно следует, что

$$\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}Q_l^{(m)}(\varphi, \theta) = mQ_l^{(m)}(\varphi, \theta),$$

т. е. $m$-я функция нашей группы является собственной функцией оператора

$$L_z = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}, \tag{116}$$

и число $m$ есть соответствующее собственное значение. Кроме того, каждая из функций (113), как мы знаем, удовлетворяет уравнению

$$-\Delta_1 Q_l^{(m)}(\varphi, \theta) = l(l+1)Q_l^{(m)}(\varphi, \theta),$$

т. е. каждая из функций, входящих в упомянутую группу $(2l+1)$ функций, является собственной функцией оператора

$$L^2 = -\Delta_1 = -\frac{1}{\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right], \tag{117}$$

и соответствующее собственное значение равно $l(l+1)$. Оператор $L_z$ лишь множителем $h$ отличается от оператора составляющей количества движения на ось $Z$. Точно так же оператор (117) лишь множителем $h^2$ отличается от оператора квадрата момента количества движения.

**142. Функция Лежандра.** Напишем уравнение Лежандра:

$$(1-x^2)\frac{d^2u}{dx^2} - 2x\frac{du}{dx} + n(n+1)u = 0, \tag{118}$$

и будем считать $x$ комплексным переменным, причем $n$ может обозначать любое число. Уравнение (118) имеет в особых точках $x = \pm 1$ оба корня определяющего уравнения, равные нулю [**105**]. Таким образом, в обеих этих точках будет один регулярный интеграл и один интеграл, содержащий логарифм, причем этот последний интеграл не ограничен в окрестности, соответствующей особой точке.

Попытаемся удовлетворить уравнению (118) интегралом вида (13), который давал полином Лежандра при целом положительном $n$:

$$u(x) = \frac{1}{2^{n+1}\pi i}\int_C \frac{(t^2-1)^n}{(t-x)^{n+1}}dt. \tag{119}$$

Подставляя в уравнение (118), получим

$$(1-x^2)\frac{d^2u}{dx^2} - 2x\frac{du}{dx} + n(n+1)u =$$

$$= \frac{n+1}{2^{n+1}\pi i}\int_C \frac{(t^2-1)^n}{(t-x)^{n+3}}[-(n+2)(t^2-1) + 2(n+1)t(t-x)]\,dt =$$

$$= \frac{n+1}{2^{n+1}\pi i}\int_C \frac{d}{dt}\left[\frac{(t^2-1)^{n+1}}{(t-x)^{n+2}}\right]dt,$$

откуда видно, что формула (119) дает решение уравнения (118), если при обходе переменной $t$ по контуру $G$ выражение

$$\frac{(t^2-1)^{n+1}}{(t-x)^{n+2}} \tag{120}$$

возвращается к исходному значению. При нецелом $n$ подинтегральная функция в интеграле (119) имеет три точки разветвления: $t=x$ и $t=\pm 1$. При обходе вокруг точки $t=1$ или $t=-1$ против часовой стрелки числитель $(t^2-1)^{n+1}$ приобретает множитель $e^{(n+1)\,2\pi i}$ и при обходе точки $t=x$ знаменатель приобретает множитель $e^{(n+2)\,2\pi i}$. Проведем на плоскости комплексного переменного $t$ разрез от $t=-1$ до $t=-\infty$ вдоль вещественной оси и в качестве контура $C$

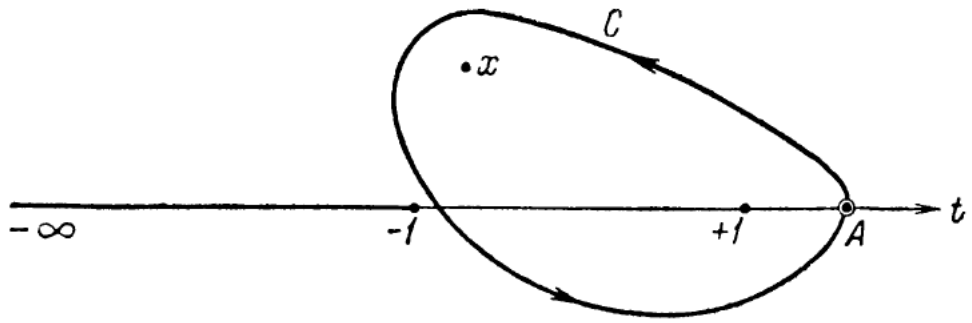



Рис. 73.

возьмем замкнутый контур, выходящий из некоторой точки $A$ (лежащей на вещественной оси правее точки $t=1$) и обходящий против часовой стрелки вокруг точек $t=1$ и $t=x$ (рис. 73).

Мы считаем, что $x$ не находится на разрезе и что контур $C$ не пересекает разреза. Исходное значение многозначной подинтегральной функции определяется из условий $\arg(t-1)=\arg(t+1)=0$ и $|\arg(t-x)|<\pi$ при $t>1$. В силу сказанного выше выражение (120) возвращается к исходному значению, когда $t$ пробегает контур $C$. Отметим еще, что, в силу теоремы Коши, величина интеграла не зависит от выбора точки $A$ на вещественной оси правее $t=1$ и от вида контура. Существенно лишь, что контур не пересекает упомянутого выше разреза.

Таким образом, мы получаем решение уравнения (118)

$$P_n(x)=\frac{1}{2^{n+1}\pi i}\int_C \frac{(t^2-1)^n}{(t-x)^{n+1}}\,dt, \tag{121}$$

где $C$ — описанный выше контур. Это решение есть регулярная функция от $x$ на всей разрезанной указанным выше образом плоскости и, в частности, в точке $x=1$. Но, как мы видели [**105**], уравнение (118) получается из уравнения Гаусса при $\alpha=n+1$, $\beta=-n$ и $\gamma=1$, если заменить независимую переменную $z$ уравнения Гаусса на $\frac{1-x}{2}$. Поскольку решение (121) регулярно при $x=1$,

т. е. при $z=0$, оно должно совпадать с точностью до множителя с гипергеометрическим рядом

$$P_n(x)=CF\left(n+1,\ -n,\ 1;\ \frac{1-x}{2}\right). \tag{122}$$

Для определения $C$ вычислим $P_n(1)$:

$$P_n(1)=\frac{1}{2^{n+1}\pi i}\int_C \frac{(t^2-1)^n}{(t-1)^{n+1}}\,dt=\frac{1}{2^{n+1}\pi i}\int_C \frac{(t+1)^n}{t-1}\,dt,$$

и, вычисляя последний интеграл по теореме о вычетах, получим $P_n(1)=1$, после чего формула (122) при $x=1$ дает $C=1$, т. е.

$$P_n(x)=F\left(n+1,\ -n,\ 1;\ \frac{1-x}{2}\right). \tag{123}$$

При целом положительном $n$ мы получаем полином Лежандра. Кроме того, из формулы (123) в силу того, что $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$ не меняется при перестановке $\alpha$ и $\beta$, следует, что при любом $n$

$$P_n(x)=P_{-n-1}(x).$$

Пользуясь формулой (121), можно непосредственно проверить соотношения (37), (39) и (40) из [**133**]. Функция $P_n(x)$ как решение уравнения (118) имеет, вообще говоря, особые точки $x=-1$ и $x=\infty$. Формула (121) дает представление этой функции на всей плоскости с указанным разрезом.

**143. Функция Лежандра второго рода.** Мы построили одно из решений уравнения (118). Займемся теперь построением второго решения. Мы знаем, что если $y_1(x)$ — одно из решений уравнения

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0,$$

то второе решение может быть построено по формуле

$$y_2(x)=Cy_1(x)\int e^{-\int p(x)\,dx}\frac{dx}{[y_1(x)]^2}, \tag{124}$$

где $C$ — произвольная постоянная. Рассмотрим сначала случай целого положительного $n$. В особой точке $x=\infty$ уравнения (118) определяющее уравнение имеет корни $\rho_1=n+1$ и $\rho_2=-n$. Решение уравнения, соответствующее первому корню, обращается в нуль при $x=\infty$. Пользуясь формулой (124), мы можем представить это решение в виде

$$Q_n(x)=P_n(x)\int_\infty^x \frac{dx}{(1-x^2)\,[P_n(x)]^2}. \tag{125}$$

Функция $Q_n(x)$ имеет особые точки $x=\pm 1$ и регулярна на плоскости комплексного переменного $x$ с разрезом от $x=-1$ до $x=1$.

Формула (125) дает $Q_n(x)$ на всей этой плоскости. Отметим, что корни $P_n(x)$ лежат внутри промежутка $(-1, 1)$.

Выразим $Q_n(x)$ через полиномы Лежандра и логарифмы. Для этого в уравнение (118) введем вместо $u(x)$ новую функцию $v(x)$ по формуле

$$u(x)=\frac{1}{2}P_n(x)\ln\frac{x+1}{x-1}-v(x). \tag{126}$$

Для $v(x)$ получаем уравнение

$$(1-x^2)\frac{d^2v}{dx^2}-2x\frac{dv}{dx}+n(n+1)v=2P_n'(x).$$

В силу (42) можем переписать это уравнение в виде

$$(1-x^2)\frac{d^2v}{dx^2}-2x\frac{dv}{dx}+n(n+1)v=$$
$$=2\sum_{k=1}^{N}(2n-4k+3)P_{n-2k+1}(x), \tag{127}$$

где $N=\frac{1}{2}n$ при $n$ четном и $N=\frac{1}{2}(n+1)$ при $n$ нечетном. Принимая во внимание, что $P_{n-2k+1}(x)$ удовлетворяет уравнению

$$(1-x^2)P_{n-2k+1}''(x)-2xP_{n-2k+1}'(x)+$$
$$+(n-2k+1)(n-2k+2)P_{n-2k+1}(x)=0,$$

убедимся в том, что уравнение

$$(1-x^2)\frac{d^2w}{dx^2}-2x\frac{dw}{dx}+n(n+1)w=2(2n-4k+3)P_{n-2k+1}(x)$$

имеет частное решение

$$w(x)=\frac{2n-4k+3}{(2k-1)(n-k+1)}P_{n-2k+1}(x).$$

Отсюда, в силу (126) и (127), получаем следующее решение уравнения Лежандра (118):

$$u_0(x)=\frac{1}{2}P_n(x)\ln\frac{x+1}{x-1}-\sum_{k=1}^{N}\frac{2n-4k+3}{(2k-1)(n-k+1)}P_{n-2k+1}(x). \tag{128}$$

Оно должно выражаться через $P_n(x)$ и $Q_n(x)$:

$$u_0(x)=C_1P_n(x)+C_2Q_n(x). \tag{129}$$

Из (128) и очевидного разложения

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}=\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{5x^5}+\dots \qquad (|x|>1)$$

следует, что при $x \to \infty$ величина $\frac{u_0(x)}{x^{n-2}}$ остается ограниченной. С другой стороны, в правой части (129) $P_n(x)$ есть полином степени $n$, а $Q_n(x)$ стремится к нулю при $x \to \infty$, как $\frac{1}{x^{n+1}}$. Сопоставляя это, можем утверждать, что $C_1 = 0$, т. е.

$$C_2 Q_n(x) = u_0(x) = \frac{1}{2} P_n(x) \ln \frac{x+1}{x-1} - R_n(x), \tag{130}$$

где $R_n(x)$ — полином степени $(n-1)$. Отсюда следует

$$C_2 \frac{d}{dx}\left[\frac{Q_n(x)}{P_n(x)}\right] = \frac{1}{1-x^2} + \frac{S_n(x)}{[P_n(x)]^2},$$

где $S_n(x)$ — полином от $x$. С другой стороны, в силу (125)

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{Q_n(x)}{P_n(x)}\right] = \frac{1}{(1-x^2)[P_n(x)]^2}.$$

Сравнивая это равенство с предыдущим, получим

$$\frac{C_2}{(1-x^2)[P_n(x)]^2} = \frac{1}{1-x^2} + \frac{S_n(x)}{[P_n(x)]^2},$$

откуда

$$C_2 = [P_n(x)]^2 + (1-x^2) S_n(x),$$

и, полагая $x = 1$, получаем $C_2 = 1$, т. е. на основании (128) и (129) окончательно имеем

$$Q_n(x) = \frac{1}{2} P_n(x) \ln \frac{1+x}{1-x} - \sum_{k=1}^{N} \frac{2n-4k+3}{(2k-1)(n-k+1)} P_{n-2k+1}(x). \tag{131}$$

Функция $Q_n(x)$ называется обычно *функцией Лежандра второго рода.*

Наличие логарифмических членов связано с характером особых точек $x = \pm 1$ уравнения (118). Легко представить $Q_n(x)$ в виде определенного интеграла. Отметим, что при целом положительном $n$ выражение (120) обращается в нуль при $t = \pm 1$. В соответствии с этим, при составлении решения уравнения (118) в виде (119) мы можем за контур $C$ взять просто отрезок $-1 \leqslant t \leqslant 1$ и получим

$$u_1(x) = C \int_{-1}^{1} \frac{(1-t^2)^n}{(x-t)^{n+1}}\, dt, \tag{132}$$

где $C$ — любая постоянная. Этот интеграл при $x \to \infty$ стремится к нулю, как $\frac{1}{x^{n+1}}$, и потому написанное решение лишь постоянным множителем отличается от $Q_n(x)$. Определим постоянную $C$ так, чтобы решение (132) совпало с $Q_n(x)$. Из формулы (11) следует, что коэффициент при $x^n$ у $P_n(x)$ равен

$$a_n = \frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{n!\,2^n} = \frac{2n!}{(n!)^2 2^n}. \tag{133}$$

Обращаясь к формуле (125), мы видим, что разложение подинтегральной функции по целым положительным степеням $x^{-1}$ начинается с члена $\left(-\frac{1}{a_n^2\, x^{2n+2}}\right)$, а разложение $Q_n(x)$ начинается с члена $\frac{1}{(2n+1)\, a_n x^{n+1}}$. Сравнивая с формулой (132), получаем следующее уравнение для $C$:

$$C\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n\,dt=\frac{1}{a_n\,(2n+1)}$$

или

$$2C\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}\varphi\,d\varphi=\frac{1}{a_n\,(2n+1)},$$

откуда [**I, 100**]

$$2C\,\frac{2n\,(2n-2)\ldots 4\cdot 2}{(2n+1)\,(2n-1)\ldots 5\cdot 3}=\frac{1}{a_n\,(2n+1)},$$

и, принимая во внимание (133), получаем $C=\frac{1}{2^{n+1}}$. Подставляя в (132), получаем выражение $Q_n(x)$ в виде интеграла

$$Q_n(x)=\frac{1}{2^{n+1}}\int_{-1}^{1}\frac{(1-t^2)^n}{(x-t)^{n+1}}\,dt. \tag{134}$$

Это выражение годится на всей плоскости комплексного переменного $x$, кроме отрезка $-1\leqslant x\leqslant 1$. Дадим теперь представление $Q_n(x)$ через гипергеометрический ряд. Предварительно запишем формулу (133) при помощи функции $\Gamma(z)$, причем используем соотношения (143) из [**73**] при $z=n+1$ и формулу $\Gamma(2n+2)=(2n+1)\,\Gamma(2n+1)$:

$$a_n=\frac{\Gamma(2n+1)}{[\Gamma(n+1)]^2\,2^n}=\frac{2^{n+1}\,\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{(2n+1)\,\sqrt{\pi}\,\Gamma(n+1)}. \tag{135}$$

Отметим далее, что преобразование $t=x^2$ переводит уравнение Лежандра (118) в уравнение

$$t(t-1)\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{3t-1}{2}\frac{du}{dt}-\frac{n\,(n+1)}{4}u=0,$$

а это последнее уравнение есть уравнение Гаусса с параметрами $\alpha=\frac{n}{2}+\frac{1}{2}$, $\beta=-\frac{n}{2}$, $\gamma=1$. Пользуясь первой из формул при $z=t$ и заменяя $t$ на $x^2$, мы получим решение уравнения (118)

$$u(x)=\frac{C}{x^{n+1}}\,F\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2},\ \frac{n}{2}+1,\ n+\frac{3}{2};\ \frac{1}{x^2}\right)\quad(|x|>1), \tag{136}$$

которое в бесконечно далекой точке ведет себя так же, как и $Q_n(x)$, а потому отличается от $Q_n(x)$ лишь постоянным множителем. Остается выбрать $C$ так, чтобы решение (136) совпало с $Q_n(x)$, разложение которого по степеням $\frac{1}{x}$ начинается с члена $\frac{1}{(2n+1)\,a_n x^{n+1}}$. Это дает $C=\frac{1}{(2n+1)\,a_n}$, и мы получаем

$$Q_n(x)=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n+1)}{2^{n+1}\,\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}\cdot\frac{1}{x^{n+1}}F\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2},\ \frac{n}{2}+1,\ \frac{n}{2}+\frac{3}{2};\ \frac{1}{x^2}\right). \quad (137)$$

До сих пор речь шла о функции $Q_n(x)$ при целом положительном $n$. Можно определить $Q_n(x)$ как второе решение уравнения (118) и для любых значений $n$, как это мы делали для $P_n(x)$. Обратимся к интегралу (134). Он имеет смысл, если вещественная часть $(n+1)$ положительна, и может служить определением $Q_n(x)$ при указанном для $n$ условии. В общем случае можно определить $Q_n(x)$ контурным интегралом (119) при подходящем выборе контура. Выражение (137) годится для $n$, отличных от целых отрицательных значений. Надо при этом иметь в виду, что если $n$ — не целое положительное число, то функция $Q_n(x)$ имеет точку $x=\infty$ точкой разветвления. Она определена в плоскости с разрезом от $x=-\infty$ до $x=1$. Если $n$ — целое отрицательное число, то, полагая $n=-m-1$, где $m$ — целое положительное число или нуль, мы видим, что уравнение (118) переходит в уравнение

$$(1-x^2)\frac{d^2u}{dx^2}-2x\frac{du}{dx}+m(m+1)u=0,$$

и в качестве решений уравнения (118) можно взять $P_m(x)$ и $Q_m(x)$. Для функций $Q_n(x)$ легко проверяются формулы (37), (39) и (40) из [**133**].

## § 2. ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ

**144. Определение функций Бесселя.** Мы впервые встретились с функциями Бесселя при решении задачи о колебании круглой мембраны [**II, 178**]. Формулируем те результаты, которые были там получены, устанавливая связь между волновым уравнением и функциями Бесселя.

Волновое уравнение в плоском случае имеет вид

$$\frac{\partial^2U}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2U}{\partial y^2}\right). \quad (1)$$

Разбирая колебание круглой мембраны, мы ввели полярные координаты на плоскости

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,$$

и нашли те решения уравнения (1), которые представляются в виде произведения трех функций, из которых одна зависит от $t$, другая — от $r$ и третья — от $\varphi$. Такие решения имеют следующую форму:

$$(\alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t)(C \cos p\varphi + D \sin p\varphi) Z_p(kr), \tag{2}$$

где $\alpha$, $\beta$, $C$ и $D$ — произвольные постоянные, а постоянные $\omega$, $k$ и $a$ должны быть связаны соотношением

$$\omega^2 = k^2 a^2. \tag{3}$$

Через $Z_p(z)$ в предыдущей формуле мы обозначаем любое решение уравнения Бесселя

$$Z_p''(z) + \frac{1}{z} Z_p'(z) + \left(1 - \frac{p^2}{z^2}\right) Z_p(z) = 0. \tag{4}$$

Заметим еще, что постоянная $p$ в выражении (2) может также иметь любое значение. Мы ее брали равной целому числу, поскольку хотели получить решение, обладающее периодом $2\pi$ по отношению к переменной $\varphi$. Кроме того, желая получить решение, которое остается конечным при $r = 0$, мы брали за $Z_p(z)$ то решение уравнения (4), которое остается конечным при $z = 0$, т. е. решение $J_p(z)$ $(p \geqslant 0)$, которое представляет собою функцию Бесселя. Значение постоянной $k$, а вместе с тем в силу (3) и постоянной $\omega$, определялось из предельного условия. В дальнейшем будем иметь еще применение функций Бесселя. В настоящее время займемся изучением свойств функций, определяемых уравнением (4), и начнем с изучения функции Бесселя, о которой говорилось выше.

Функция Бесселя с точностью до постоянного множителя определяется разложением вида [**II, 48**]

$$J_p(z) = Cz^p \left[1 - \frac{z^2}{2(2p+2)} + \frac{z^4}{2 \cdot 4 \cdot (2p+2)(2p+4)} - \dots\right]. \tag{5}$$

Если $p = n$ есть целое положительное число или нуль, то мы выбирали постоянный множитель $C$ равным $\frac{1}{2^n n!}$, причем, как всегда, $0! = 1$. Таким образом, для функции Бесселя с целым положительным значком мы имели выражение вида

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}. \tag{6}$$

Если $p$ не есть целое число, то в формуле (5) принимаем постоянный множитель $C$ равным

$$C = \frac{1}{2^p \Gamma(p+1)}$$

и, таким образом, придем к следующему выражению для функции Бесселя:

$$J_p(z)=\frac{z^p}{2^p\Gamma(p+1)}\left[1-\frac{1}{1!\,(p+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^2+\frac{1}{2!\,(p+1)\,(p+2)}\left(\frac{z}{2}\right)^4-\cdots\right]$$

или, в силу основного свойства функции $\Gamma(z)$,

$$J_p(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(p+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{p+2k}. \tag{7}$$

Можно показать, что *функция Бесселя с целым отрицательным значком* $(-n)$ *лишь постоянным множителем* $(-1)^n$ *отличается от функции Бесселя с таким же целым, но положительным значком.*

Если $p$ отлично от целого числа, то функции $J_p(z)$ и $J_{-p}(z)$ дают, очевидно, два линейно независимых решения уравнения Бесселя [**II, 48**]. Ряд (7) сходится, как мы это видели, при всех конечных значениях $z$.

**145. Соотношения между функциями Бесселя.** Выведем теперь некоторые основные соотношения, которыми связаны функции Бесселя с различными значками. Производя дифференцирование степенного ряда (7), получим

$$\frac{d}{dz}\frac{J_p(z)}{z^p}=\frac{d}{dz}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(p+k+1)}\frac{z^{2k}}{2^{p+2k}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot 2k}{k!\Gamma(p+k+1)}\frac{z^{2k-1}}{2^{p+2k}} \tag{8}$$

или, заменяя переменную суммирования $k$ на $k+1$ и начиная суммировать с $k=0$,

$$\frac{d}{dz}\frac{J_p(z)}{z^p}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\,2\,(k+1)}{(k+1)!\,\Gamma(k+p+2)}\cdot\frac{z^{2k+1}}{2^{p+2k+2}}$$

или

$$\frac{d}{dz}\frac{J_p(z)}{z^p}=-\frac{1}{z^p}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(p+1+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{p+1+2k}.$$

Мы получаем, таким образом, сравнивая с (7), следующую формулу:

$$\frac{d}{dz}\frac{J_p(z)}{z^p}=-\frac{J_{p+1}(z)}{z^p}. \tag{9}$$

Производя дифференцирование дроби, можно переписать эту формулу в таком виде:

$$J_p'(z)=-J_{p+1}(z)+\frac{pJ_p(z)}{z}\qquad(J_0'(z)=-J_1(z)). \tag{10}$$

Разделим обе части формулы (9) на $z$:

$$\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\frac{J_p(z)}{z^p}=-\frac{J_{p+1}(z)}{z^{p+1}}.$$

Написанное соотношение можно формулировать словами следующим образом: дифференцирование дроби $\frac{J_p(z)}{z^p}$ с последующим делением на $z$ равносильно увеличению $p$ на единицу и изменению знака у упомянутой дроби.

Применяя это правило несколько раз, получаем следующую формулу, справедливую при любом целом положительном $m$:

$$\frac{d^m}{(z\,dz)^m}\frac{J_p(z)}{z^p}=(-1)^m\frac{J_{p+m}(z)}{z^{p+m}}. \tag{11}$$

Формулу эту можно еще переписать следующим образом:

$$\frac{d^m}{d(z^2)^m}\frac{J_p(z)}{z^p}=(-1)^m\frac{J_{p+m}(z)}{2^m z^{p+m}}. \tag{12}$$

Продифференцируем теперь произведение $z^pJ_p(z)$ по $z$:

$$\frac{d}{dz}z^pJ_p(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 2(p+k)}{k!\Gamma(p+k+1)}\frac{z^{2p+2k-1}}{2^{p+2k}},$$

или, принимая во внимание, что $\Gamma(p+k+1)=(p+k)\Gamma(p+k)$, получим

$$\frac{d}{dz}z^pJ_p(z)=z^p\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(p-1+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{p-1+2k},$$

т. е., в силу (7), приходим к формуле, аналогичной формуле (9):

$$\frac{d}{dz}z^pJ_p(z)=z^pJ_{p-1}(z). \tag{13}$$

Дифференцируя произведение, можем переписать эту формулу следующим образом:

$$J_p'(z)=J_{p-1}(z)-\frac{pJ_p(z)}{z}. \tag{14}$$

Разделим обе части формулы (13) на $z$:

$$\frac{d}{z\,dz}z^pJ_p(z)=z^{p-1}J_{p-1}(z).$$

Применяя несколько раз эту формулу, приходим к формуле, аналогичной (11):

$$\frac{d^m}{(z\,dz)^m}z^pJ_p(z)=z^{p-m}J_{p-m}(z) \tag{15}$$

или

$$\frac{d^m}{(dz^2)^m}z^pJ_p(z)=\frac{z^{p-m}J_{p-m}(z)}{2^m}. \tag{16}$$

В формулах (11) и (15) мы пользовались следующим обозначением:

$$\frac{d^m}{(z\,dz)^m} f(z) = \frac{d}{z\,dz}\frac{d}{z\,dz}\cdots\frac{d}{z\,dz} f(z),$$

где число дифференцирований по $z$ с последующим делением на $z$ равно $m$.

Сопоставляя формулы (10) и (14), получаем соотношение между тремя последовательными функциями Бесселя

$$\frac{pJ_p(z)}{z} - J_{p+1}(z) = J_{p-1}(z) - \frac{pJ_p(z)}{z}$$

или

$$\frac{2pJ_p(z)}{z} = J_{p-1}(z) + J_{p+1}(z). \tag{17}$$

Пользуясь предыдущими формулами, покажем теперь, что функции Бесселя, значок которых равен половине целого нечетного числа, т. е. имеет вид $\pm\frac{2m+1}{2}$, где $m$ — целое число, выражаются через элементарные функции. Применим для этого формулу (7) к случаю $p=\frac{1}{2}$:

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{2}+2k}.$$

Применяя несколько раз основное свойство функций $\Gamma(z)$, будем иметь

$$\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right) = \left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right) = \left(k+\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(k-\frac{1}{2}\right) =$$
$$= \left(k+\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{1}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2k+1)(2k-1)\ldots 3\cdot 1}{2^{k+1}}\sqrt{\pi}$$

и, таким образом, получим

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!2^k\cdot 1\cdot 3\ldots(2k+1)\sqrt{\pi}}\frac{z^{\frac{1}{2}+2k}}{2^{-\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

т. е.

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z. \tag{18}$$

Применяя теперь формулу (11), будем иметь при любом целом положительном $m$

$$J_{\frac{2m+1}{2}}(z) = (-1)^m\sqrt{\frac{2}{\pi}}z^{\frac{2m+1}{2}}\frac{d^m}{(z\,dz)^m}\left(\frac{\sin z}{z}\right). \tag{19}$$

Аналогичные результаты получаются и для отрицательных значков. Формула (7) при $p=-\frac{1}{2}$ дает

$$J_{-\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z, \tag{20}$$

и, применяя затем формулу (15), получим при любом целом положительном $m$

$$J_{-\frac{2m+1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}z^{\frac{2m+1}{2}}\frac{d^m}{(z\,dz)^m}\left(\frac{\cos z}{z}\right). \tag{21}$$

Мы выписали выше **[II, 48]** в раскрытом виде выражение бесселевых функций для значков $p=\pm\frac{3}{2}$ и $p=\pm\frac{5}{2}$.

**146. Ортогональность функций Бесселя и их корни.** Как мы уже говорили, функции Бесселя применялись нами раньше при рассмотрении колебаний круглой мембраны. При этом мы использовали обычный метод Фурье и, для того чтобы удовлетворить начальным условиям задачи, нам пришлось разлагать заданную функцию в ряд по бесселевым функциям. Мы получили таким образом ряды, аналогичные рядам Фурье, причем оказалось, что функции Бесселя, в известном смысле, обладают свойством ортогональности **[II, 178]**. Сейчас мы рассмотрим этот вопрос с более общей точки зрения и выясним некоторые дополнительные обстоятельства.

Как известно, функция $J_p(kz)$ удовлетворяет уравнению **[II, 48]**

$$\frac{d^2J_p(kz)}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dJ_p(kz)}{dz}+\left(k^2-\frac{p^2}{z^2}\right)J_p(kz)=0,$$

или, умножая на $z$, можем написать уравнение в виде

$$\frac{d}{dz}\left[z\frac{dJ_p(kz)}{dz}\right]+\left(k^2z-\frac{p^2}{z}\right)J_p(kz)=0.$$

Мы будем в дальнейшем считать, что значок $p$ — вещественный и, кроме того, $p\geqslant 0$.

Возьмем два различных значения числа $k$ и напишем соответствующие дифференциальные уравнения:

$$\frac{d}{dz}\left[z\frac{dJ_p(k_1z)}{dz}\right]+\left(k_1^2z-\frac{p^2}{z}\right)J_p(k_1z)=0,$$

$$\frac{d}{dz}\left[z\frac{dJ_p(k_2z)}{dz}\right]+\left(k_2^2z-\frac{p^2}{z}\right)J_p(k_2z)=0.$$

Умножим первое уравнение на $J_p(k_2z)$, второе — на $J_p(k_1z)$, вычтем и проинтегрируем по некоторому конечному промежутку $(0, l)$:

$$\int_0^l \left\{J_p(k_2z)\frac{d}{dz}\left[z\frac{dJ_p(k_1z)}{dz}\right] - J_p(k_1z)\frac{d}{dz}\left[z\frac{dJ_p(k_2z)}{dz}\right]\right\}dz + \\ + (k_1^2 - k_2^2)\int_0^l zJ_p(k_1z)J_p(k_2z)\,dz = 0.$$

Выражение, стоящее под знаком первого интеграла, представляет собою полную производную по $z$ от разности

$$\frac{d}{dz}\left[z\frac{dJ_p(k_1z)}{dz}J_p(k_2z) - z\frac{dJ_p(k_2z)}{dz}J_p(k_1z)\right];$$

можно, таким образом, написать

$$\left[z\frac{dJ_p(k_1z)}{dz}J_p(k_2z) - z\frac{dJ_p(k_2z)}{dz}J_p(k_1z)\right]_{z=0}^{z=l} + \\ + (k_1^2 - k_2^2)\int_0^l zJ_p(k_1z)J_p(k_2z)\,dz = 0.$$

Но мы имеем, очевидно,

$$\frac{dJ_p(kz)}{dz} = kJ_p'(kz),$$

где обозначаем вообще

$$J_p'(x) = \frac{d}{dx}J_p(x),$$

и, следовательно, предыдущая формула может быть записана в виде

$$[k_1zJ_p'(k_1z)J_p(k_2z) - k_2zJ_p'(k_2z)J_p(k_1z)]_{z=0}^{z=l} + \\ + (k_1^2 - k_2^2)\int_0^l zJ_p(k_1z)J_p(k_2z)\,dz = 0. \quad (22)$$

Напомним разложение бесселевой функции

$$J_p(z) = z^p\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(p+k+1)}\frac{z^{2k}}{2^{p+2k}}. \quad (23)$$

Отсюда в силу $p \geqslant 0$ непосредственно вытекает, что внеинтегральный член обращается в нуль при $z = 0$, и мы приходим окончательно к следующей основной для дальнейшего формуле:

$$l[k_1J_p'(k_1l)J_p(k_2l) - k_2J_p'(k_2l)J_p(k_1l)] + \\ + (k_1^2 - k_2^2)\int_0^l zJ_p(k_1z)J_p(k_2z)\,dz = 0. \quad (24)$$

При $l=1$ эта формула принимает вид

$$k_1 J_p'(k_1) J_p(k_2) - k_2 J_p'(k_2) J_p(k_1) + \\ + (k_1^2 - k_2^2) \int_0^1 z J_p(k_1 z) J_p(k_2 z)\, dz = 0. \quad (25)$$

Мы предполагали при предыдущих вычислениях, что $p \geqslant 0$. Нетрудно непосредственно проверить, что интегралы имеют смысл, и внеинтегральный член в формуле (22) обращается в нуль для $z=0$ и при более общем предположении $p > -1$.

Покажем прежде всего, что функция Бесселя не может иметь комплексных корней. Положим сначала, что она имеет такой корень $a+ib$, причем $a \neq 0$. Разложение (7) имеет все коэффициенты вещественными, и, следовательно, функция $J_p(z)$, кроме корня $a+ib$, должна иметь и сопряженный корень $a-ib$. Обратимся к формуле (25) и положим $k_1 = a+ib$ и $k_2 = a-ib$. При этом $k_1^2 \neq k_2^2$, и эта формула даст нам

$$\int_0^1 z J_p(k_1 z) J_p(k_2 z)\, dz = 0.$$

Величины $J_p(k_1 z)$ и $J_p(k_2 z)$ будут мнимыми сопряженными, следовательно, в предыдущей формуле под знаком интеграла стоит положительная величина, и эта формула не может иметь места. Остается теперь рассмотреть случай $a=0$, т. е. показать, что функция $J_p(z)$ не может иметь и чисто мнимых корней $\pm ib$. Действительно, подставляя в формулу (23), мы получим разложение, содержащее положительные члены:

$$J_p(ib) = (ib)^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\,\Gamma(p+k+1)} \frac{b^{2k}}{2^{p+2k}}.$$

Это обстоятельство непосредственно вытекает из того, что, согласно формуле (111) из [**71**], функция $\Gamma(z)$ положительна при $z > 0$. Мы приходим, таким образом, к следующему результату: *если $p$ вещественно и $p > -1$, то функция $J_p(z)$ имеет все корни вещественные.* Заметим, кроме того, что из разложения (23), содержащего только четные степени, непосредственно вытекает, что корни $J_p(z)$ будут попарно одинаковыми по абсолютной величине и обратными по знаку, так что достаточно рассматривать только положительные корни. В дальнейшем мы и будем подразумевать только такие корни. Напишем асимптотическое представление функций Бесселя [**112**]:

$$J_p(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(z^{-\frac{3}{2}}\right)$$

или

$$J_p(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left[\cos\left(z - \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(z^{-1})\right].$$

При беспредельном удалении $z$ вдоль положительной части вещественной оси второе слагаемое в квадратных скобках стремится к нулю, а первое бесчисленное множество раз переходит от $-1$ к $+1$. Отсюда непосредственно вытекает, что *функция $J_p(z)$ имеет бесчисленное множество вещественных корней.*

Если $z=k_1$ и $z=k_2$ — два различных положительных корня уравнения

$$J_p(zl)=0, \tag{26}$$

то формула (24) дает нам непосредственно следующее *свойство ортогональности функции Бесселя*:

$$\int_0^l zJ_p(k_1z)\,J_p(k_2z)\,dz=0. \tag{27}$$

Согласно теореме Ролля функция $J_p'(z)$ также должна иметь бесчисленное множество вещественных положительных корней, и если мы обозначим теперь через $k_1$ и $k_2$ два различных положительных корня уравнения

$$J_p'(zl)=0, \tag{28}$$

то в силу (24) будем иметь точно такие же условия ортогональности (27).

Рассмотрим теперь уравнение более общее, чем написанное выше, а именно уравнение вида

$$\alpha J_p(zl)+\beta zJ_p'(zl)=0, \tag{29}$$

где $\alpha$ и $\beta$ — заданные вещественные числа. Пусть $z=k_1$ и $z=k_2$ — два различных корня уравнения (29), т. е.

$$\alpha J_p(k_1l)+\beta k_1J_p'(k_1l)=0, \quad \alpha J_p(k_2l)+\beta k_2J_p'(k_2l)=0.$$

Отсюда непосредственно следует

$$k_1J_p'(k_1l)\,J_p(k_2l)-k_2J_p'(k_2l)\,J_p(k_1l)=0,$$

а следовательно, и в этом случае внеинтегральный член в формуле (24) обращается в нуль, и мы имеем по-прежнему условия ортогональности (27). Частным случаем уравнения (29) являются, очевидно, уравнения (26) и (28). Из условия ортогональности, как и выше, непосредственно вытекает, что уравнение (29) не может иметь комплексных корней $a+ib$, где $a\neq 0$.

Кроме того, так же как и выше, можно показать, что уравнение (29) не имеет и чисто мнимых корней, если только $\alpha>0$ и $\beta>0$.

Напомним два известных нам соотношения:

$$\frac{d}{dz}\frac{J_p(z)}{z^p}=-\frac{J_{p+1}(z)}{z^p}, \quad \frac{d}{dz}\left[z^{p+1}J_{p+1}(z)\right]=z^{p+1}J_p(z). \tag{30}$$

Первое из них, в силу теоремы Ролля, показывает, что между двумя последовательными корнями $J_p(z)$ лежит по крайней мере

один корень $J_{p+1}(z)$. Второе соотношение показывает, что между двумя последовательными корнями $J_{p+1}(z)$ лежит по крайней мере один корень $J_p(z)$. Сопоставляя это, непосредственно убеждаемся в том, что положительные корни $J_p(z)$ и $J_{p+1}(z)$ разделяют друг друга, т. е. что *между двумя последовательными положительными корнями* $J_p(z)$ *находится один и только один корень* $J_{p+1}(z)$, *и наоборот.*

Пусть $a$ и $b$ — наименьшие положительные корни $J_p(z)$ и $J_{p+1}(z)$. Принимая во внимание, что $z^{p+1}J_{p-1}(z)$ имеет корень $z=0$ и применяя ко второй из формул (30) теорему Ролля, мы видим, что $J_p(z)$ должна иметь корень внутри промежутка $(0, b)$, т. е. $a<b$.

Таким образом, мы видим, что *наименьший положительный корень функции* $J_p(z)$ *будет ближе к началу, чем у* $J_{p+1}(z)$. Заметим, кроме того, что функция $z^{-p}J_p(z)$ есть решение уравнения [**110**]

$$z\frac{d^2y}{dz^2}+(2p+1)\frac{dy}{dz}+zy=0,$$

и, следовательно, функции $z^{-p}J_p(z)$ и $\frac{d}{dz}[z^{-p}J_p(z)]$ не могут иметь общих положительных корней [**107**]. Следовательно, то же самое можно сказать, в силу (30), и относительно функций $J_p(z)$ и $J_{p+1}(z)$.

Свойство ортогональности функций Бесселя играет важную роль при разложении заданной функции по функциям Бесселя, как это имело, например, место в задаче колебания круглой мембраны.

При этом представляется существенным уметь также вычислять интегралы вида

$$\int_0^l zJ_p^2(kz)\,dz,$$

где $z=k$ есть корень уравнения вида (29). Рассмотрим тот случай, когда $k$ есть просто корень уравнения (26). Возьмем формулу (24), в которой мы положим $k_2=k$ и $k_1$ будем считать переменным и стремящимся к $k$. Формула даст нам

$$(k_1+k)\int_0^l zJ_p(k_1z)J_p(kz)\,dz=\frac{lkJ_p'(kl)\,J_p(k_1l)}{k_1-k}.$$

При $k_1\to k$ не только знаменатель дроби, но и числитель обратятся в нуль, так как $J_p(k_1l)$ будет стремиться к $J_p(kl)=0$. Раскрывая неопределенность по обычному правилу, получим в пределе

$$2k\int_0^l zJ_p^2(kz)\,dz=l^2kJ_p'^2(kl)$$

или

$$\int_0^l zJ_p^2(kz)\,dz=\frac{l^2}{2}J_p'^2(kl). \qquad (31)$$

Возьмем известное нам соотношение

$$\frac{d}{dz}\frac{J_p(z)}{z^p} = -\frac{J_{p+1}(z)}{z^p}$$

и положим здесь $z = kl$. При этом получится

$$J_p'(kl) = -J_{p+1}(kl),$$

так что предыдущую формулу можно записать еще следующим образом:

$$\int_0^l zJ_p^2(kz)\,dz = \frac{l^2}{2}J_{p+1}^2(kl). \tag{32}$$

Совершенно аналогично мы получаем для того случая, когда $z = k$ есть корень уравнения (28):

$$\int_0^l zJ_p^2(kz)\,dz = -\frac{l^2}{2}J_p''(kl)\,J_p(kl). \tag{33}$$

Но мы имеем

$$J_p''(kl) + \frac{1}{kl}J_p'(kl) + \left(1 - \frac{p^2}{k^2l^2}\right)J_p(kl) = 0$$

и, пользуясь равенством $J_p'(kl) = 0$, можем переписать формулу (33) в виде

$$\int_0^l zJ_p^2(kz)\,dz = \frac{1}{2}\left(l^2 - \frac{p^2}{k^2}\right)J_p^2(kl). \tag{34}$$

**147. Производящая функция и интегральное представление.** Рассмотрим аналитическую функцию комплексного переменного $t$

$$e^{\frac{1}{2}z\left(t-\frac{1}{t}\right)}. \tag{35}$$

Она имеет существенно особые точки $t = 0$ и $t = \infty$ и разлагается, следовательно, в ряд Лорана на всей плоскости комплексного переменного $t$, причем коэффициенты этого разложения будут функциями параметра $z$, входящего в выражение (35):

$$e^{\frac{1}{2}z\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z)\,t^n. \tag{36}$$

Покажем теперь, что эти коэффициенты и будут функциями Бесселя $J_n(z)$. Действительно, мы имеем для коэффициентов разложения (36) следующее представление контурным интегралом [15]:

$$a_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{l_0} u^{-n-1}e^{\frac{1}{2}z\left(u-\frac{1}{u}\right)}du,$$

где $l_0$ — любой простой замкнутый контур, обходящий вокруг начала в положительном направлении. Введем вместо $u$ новую переменную интегрирования $t$ по формуле $u=\frac{2t}{z}$, где $z$ — некоторое фиксированное значение, отличное от нуля. Точке $u=0$ соответствует $t=0$ и контур $l_0$ перейдет на плоскости $t$ также в некоторый контур, обходящий вокруг начала в положительном направлении. Совершая замену переменных, получим следующее выражение для коэффициентов:

$$a_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{z}{2}\right)^n\int_{l_0} t^{-n-1}e^{t-\frac{z^2}{4t}}dt.$$

На контуре $l_0$ мы можем представить показательную функцию в виде степенного ряда, равномерно сходящегося по отношению к $t$:

$$e^{-\frac{z^2}{4t}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{z^{2k}}{2^{2k}t^k}.$$

Подставляя это в предыдущую формулу, получим

$$a_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}\int_{l_0} t^{-n-k-1}e^t dt.$$

Если $n+k$ есть целое отрицательное число, то подинтегральная функция в последнем интеграле не имеет точку $t=0$ особой, и величина интеграла будет равна нулю. Если же $(n+k)$ есть целое положительное число или нуль, то, вспоминая разложение $e^t$, мы убеждаемся, что вычет подинтегральной функции в точке $t=0$ будет равен $\frac{1}{(n+k)!}$. Следовательно, при целом положительном значении значка $n$ мы получаем

$$a_n(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k},$$

т. е. $a_n(z)$ действительно совпадает с $J_n(z)$. Если заменим в формуле (36) $t$ на $\left(-\frac{1}{t}\right)$, то левая часть останется неизменной, и это показывает нам, что $a_{-n}(z)=(-1)^n a_n(z)$, т. е. при отрицательном значении $n$ имеем в силу (8)

$$a_{-n}(z)=(-1)^n J_n(z)=J_{-n}(z).$$

Таким образом, вместо формулы (36) можно написать следующее разложение:

$$e^{\frac{1}{2}z\left(t-\frac{1}{t}\right)}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}J_n(z)\,t^n. \qquad (37)$$

Иначе говоря, *функция* (35) *является производящей функцией для бесселевых функций с целым значком.* Формулой (37) удобно пользоваться для выяснения свойств функций Бесселя с целым значком. В частности, используем эту формулу для вывода интегрального представления функции Бесселя с целым значком.

Полагая в формуле (37) $t = e^{i\varphi}$, получим

$$e^{iz\sin\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z)\, e^{in\varphi}$$

или, разделяя вещественную и мнимую части, причем $z$ и $\varphi$ мы считаем вещественными,

$$\cos(z\sin\varphi) = J_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(z)\cos n\varphi + \sum_{n=-1}^{-\infty} J_n(z)\cos n\varphi,$$

$$\sin(z\sin\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} J_n(z)\sin n\varphi + \sum_{n=-1}^{-\infty} J_n(z)\sin n\varphi,$$

или, принимая во внимание (8), получим

$$\left.\begin{aligned} \cos(z\sin\varphi) &= J_0(z) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(z)\cos 2n\varphi, \\ \sin(z\sin\varphi) &= 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(z)\sin(2n-1)\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

Формулы (38) представляют собою разложение функций в ряд Фурье; применяя обычный способ определения коэффициентов, получаем следующие интегральные представления для функций Бесселя:

$$\left.\begin{aligned} J_{2n}(z) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(z\sin\varphi)\cos 2n\varphi\, d\varphi \qquad (n = 0,\ 1,\ \ldots), \\ J_{2n-1}(z) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(z\sin\varphi)\sin(2n-1)\varphi\, d\varphi \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots). \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Тот же способ определения коэффициентов дает нам следующие два равенства:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(z\sin\varphi)\cos(2n-1)\varphi\, d\varphi = 0,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(z\sin\varphi)\sin 2n\varphi\, d\varphi = 0.$$

Можно объединить формулы (39) в одну формулу, справедливую как при четном, так и при нечетном значке. Рассмотрим для этого интеграл

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\varphi - z\sin\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(z\sin\varphi)\cos n\varphi\,d\varphi + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(z\sin\varphi)\sin n\varphi\,d\varphi.$$

При четном $n$ первое слагаемое справа есть $J_n(z)$, а второе равно нулю, так что вся сумма равна $J_n(z)$. При нечетном $n$ первое слагаемое будет нуль, а второе даст $J_n(z)$, так что при любом целом положительном значке $n$ мы имеем интегральное представление

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\varphi - z\sin\varphi)\,d\varphi \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{40}$$

Строго говоря, последнее равенство доказано нами лишь для вещественных значений $z$. В силу принципа аналитического продолжения можем утверждать, что оно справедливо и при любом комплексном $z$. Принимая во внимание четность подинтегральной функции, мы можем записать эту формулу следующим образом:

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n\varphi - z\sin\varphi)\,d\varphi. \tag{41}$$

Эту последнюю формулу можно еще записать так:

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(n\varphi - z\sin\varphi)}\,d\varphi. \tag{42}$$

Действительно, применяя формулу Эйлера к показательной функции, получим два слагаемых, из которых одно будет равно интегралу (41), а второе будет равно нулю, в силу нечетности подинтегральной функции.

Заметим, что формула (40) уже не имеет места, если значок $n$ не есть целое число. В данном случае мы имеем более сложную формулу, а именно:

$$J_p(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(p\varphi - z\sin\varphi)\,d\varphi - \frac{\sin p\pi}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-p\varphi - z\,\mathrm{sh}\,\varphi}\,d\varphi, \tag{43}$$

причем эта формула справедлива для значений $z$, лежащих справа от мнимой оси. Напомним при этом определение гиперболического синуса:

$$\mathrm{sh}\,\varphi = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2}.$$

Доказательство этой формулы дано в [152].

Применяя формулу (37) и пользуясь очевидным равенством

$$e^{\frac{1}{2}a\left(t-\frac{1}{t}\right)}\,e^{\frac{1}{2}b\left(t-\frac{1}{t}\right)}=e^{\frac{1}{2}(a+b)\left(t-\frac{1}{t}\right)},$$

имеем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(a+b)\,t^n=\sum_{k=-\infty}^{\infty}J_k(a)\,t^k\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}J_k(b)\,t^k.$$

Перемножая степенные ряды, стоящие направо, и собирая члены с $t^n$, получим

$$J_n(a+b)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}J_k(a)\,J_{n-k}(b). \tag{44}$$

Эта формула выражает *теорему сложения бесселевых функций с целым значком.*

Для значка, равного нулю, существует более общая теорема сложения, а именно:

$$J_0\left(\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}\right)=J_0(a)\,J_0(b)+2\sum_{k=1}^{\infty}J_k(a)\,J_k(b)\cos k\alpha. \tag{45}$$

**148. Формула Фурье — Бесселя.** Для произвольных функций, определенных в промежутке $(0, \infty)$ и удовлетворяющих там некоторому дополнительному условию, существует интегральное представление, аналогичное интегралу Фурье, но содержащее вместо тригонометрических функций функцию Бесселя, а именно: если $f(\rho)$ непрерывна в промежутке $(0, \infty)$ и удовлетворяет условиям Дирихле [**II, 155**] во всяком конечном промежутке и, кроме того, существует интеграл

$$\int_0^{\infty}\rho\,|f(\rho)|\,d\rho,$$

то имеет место при любом целом $n$ и при $\rho>0$ следующая формула:

$$f(\rho)=\int_0^{\infty}sJ_n(s\rho)\,ds\int_0^{\infty}tf(t)\,J_n(st)\,dt. \tag{46}$$

Приведем формальный вывод соотношения (46), не останавливаясь на некоторых деталях доказательства. Будем считать $\rho$ радиусом-вектором, введем полярные координаты и применим к функции

$$g(x, y)=f(\rho)\,e^{in\varphi}\qquad\begin{pmatrix}x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi\end{pmatrix} \tag{47}$$

формулу Фурье [**II, 173**], переставляя порядок внутренних интегралов:

$$g(x, y)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i(ux+vy)}\,du\,dv\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(\xi,\eta)\,e^{-i(u\xi+v\eta)}\,d\xi\,d\eta.$$

Введем теперь вместо переменных $(u, v)$ и $(\xi, \eta)$ полярные координаты

$$\xi=s\cos\alpha,\qquad u=t\cos\beta,$$
$$\eta=s\sin\alpha,\qquad v=t\sin\beta.$$

Пользуясь (47), можем написать

$$f(\rho)\,e^{in\varphi}=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty t\,dt\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\,\rho t\cos(\beta-\varphi)}\,d\beta\int_0^\infty sf(s)\,ds\int_{-\pi}^{\pi}e^{in\alpha}\,e^{-ist\cos(\alpha-\beta)}\,d\alpha.$$

Введя вместо $\beta$ новую переменную интегрирования $\beta'$ по формуле

$$\beta-\varphi=\frac{\pi}{2}+\beta',$$

получим

$$f(\rho)\,e^{in\varphi}=$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty t\,dt\int_{-\frac{3\pi}{2}-\varphi}^{\frac{\pi}{2}-\varphi}e^{-i\rho t\sin\beta'}\,d\beta'\int_0^\infty sf(s)\,ds\int_{-\pi}^{\pi}e^{in\alpha}\,e^{-ist\cos\left(\alpha-\varphi-\beta'-\frac{\pi}{2}\right)}\,d\alpha.$$

Принимая во внимание периодичность тригонометрических функций, можем привести промежуток интегрирования к прежнему промежутку $(-\pi,\ \pi)$. Точно так же, вводя вместо $\alpha$ новую переменную $\alpha'$ по формуле

$$\alpha-\varphi-\beta'=\alpha',$$

получим

$$f(\rho)\,e^{in\varphi}=\frac{e^{in\varphi}}{4\pi^2}\int_0^\infty t\,dt\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i\rho t\sin\beta'+in\beta'}\,d\beta'\int_0^\infty sf(s)\,ds\int_{-\pi}^{\pi}e^{-ist\sin\alpha'+in\alpha'}d\alpha',$$

откуда, принимая во внимание формулу (42), будем иметь формулу (46).

В случае функции, заданной в конечном промежутке $(0,\ l)$, вместо формулы (46) можно рассматривать разложение в ряд, аналогичный ряду Фурье, по ортогональным функциям, о которых мы говорили в предыдущем параграфе.

Заметим, что формулу (46) можно доказать и для любых вещественных значков $n$, больших $\left(-\frac{1}{2}\right)$, а также при меньших предположениях относительно функции $f(\rho)$.

**149. Функции Ханкеля и Неймана.** Мы определили выше [111] два решения уравнения Бесселя

$$\frac{d^2w}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dw}{dz}+\left(1-\frac{p^2}{z^2}\right)w=0 \tag{48}$$

следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned}H_p^{(1)}(z)&=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-p\right)}{\pi^{\frac{3}{2}}i}\left(\frac{z}{2}\right)^p\int_{\lambda_1}(\tau^2-1)^{p-\frac{1}{2}}\,e^{iz\tau}\,d\tau,\\ H_p^{(2)}(z)&=-\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-p\right)}{\pi^{\frac{3}{2}}i}\left(\frac{z}{2}\right)^p\int_{\lambda_2}(\tau^2-1)^{p-\frac{1}{2}}e^{iz\tau}\,d\tau.\end{aligned}\right\} \tag{49}$$

В этих формулах подинтегральная функция определена однозначным образом на плоскости комплексной переменной $\tau$ с разрезами, проведенными из точек $\tau = \pm 1$ параллельно мнимой оси на $+i\infty$, а именно — в первой из формул мы считаем $\arg(\tau^2 - 1) = 0$ при $\tau > 1$ и во второй формуле мы считаем $\arg(\tau^2 - 1) = 2\pi$ при $\tau > 1$. Переходя с отрезка $(1, +\infty)$ вещественной оси на отрезок $(-\infty, -1)$ по нижней полуплоскости, минуя разрезы, мы совершаем полуобход в отрицательном направлении относительно точек $\tau = \pm 1$, и, таким образом, аргумент выражения $(\tau^2 - 1) = (\tau - 1)(\tau + 1)$ получает приращение $(-2\pi)$, т. е., иными словами, во второй из формул (49) мы должны считать $\arg(\tau^2 - 1) = 0$ при $\tau < -1$. Формулы (49) определяют *функции Ханкеля* для значений $z$, лежащих справа от мнимой оси, т. е. имеющих вещественную часть больше нуля. Заметим, кроме того, что подинтегральная функция в интегралах (49) при фиксированном значении $z$ является целой функцией параметра $p$ и, принимая во внимание быстрое затухание подинтегральной функции на бесконечности, мы можем утверждать, что и функции Ханкеля $H_p^{(k)}(z)$ при фиксированном $z$ являются целыми функциями параметра $p$. Из асимптотических выражений функций Ханкеля [**111**] непосредственно вытекает, что эти функции представляют собою два линейно независимых решения уравнения Бесселя. Мы видели также, что функция Бесселя является полусуммой функций Ханкеля

$$J_p(z) = \frac{H_p^{(1)}(z) + H_p^{(2)}(z)}{2}. \tag{50}$$

Можно провести тесную аналогию между уравнением Бесселя (48) и уравнением

$$\frac{d^2w}{dz^2} + p^2 w = 0, \tag{51}$$

определяющим обычные тригонометрические функции $\cos pz$ и $\sin pz$. При этом функции Ханкеля являются аналогами его решений $e^{ipz}$ и $e^{-ipz}$, а функции Бесселя $J_p(z)$ являются аналогом решения $\cos pz$ уравнения (51). Введем теперь еще решение уравнения (48), равное разности функций Хенкеля, деленной на $2i$:

$$N_p(z) = \frac{H_p^{(1)}(z) - H_p^{(2)}(z)}{2i}. \tag{52}$$

Это решение, называемое обычно *функцией Неймана*, будет аналогом решения $\sin pz$ уравнения (51). Из формул (50) и (52) непосредственно получаем следующие выражения функций Ханкеля через функции Бесселя и Неймана:

$$H_p^{(1)}(z) = J_p(z) + iN_p(z), \quad H_p^{(2)}(z) = J_p(z) - iN_p(z). \tag{53}$$

Отсюда видно сразу, что функции $J_p(z)$ и $N_p(z)$ определяют два линейно независимых решения уравнения (48).

Для функций Ханкеля мы имели следующие асимптотические представления:

$$\left.\begin{aligned} H_p^{(1)}(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{i\left(z-\frac{p\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\left[1+O(z^{-1})\right], \\ H_p^{(2)}(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{-i\left(z-\frac{p\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\left[1+O(z^{-1})\right], \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

которые были нами доказаны при $z>0$. Пользуясь формулой (50), можно, как было уже указано раньше [**114**], получить асимптотическое представление функций Бесселя

$$J_p(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[\cos\left(z-\frac{p\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O(z^{-1})\right], \tag{55}$$

и точно так же, пользуясь формулой (52), мы получаем асимптотическое представление функций Неймана при $z>0$:

$$N_p(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[\sin\left(z-\frac{p\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O(z^{-1})\right]. \tag{56}$$

Во всех написанных формулах надо считать $z>0$ и радикал брать положительным.

Выведем теперь формулу, выражающую функцию Неймана через функции Бесселя. Сначала рассмотрим тот случай, когда значок $p$ отличен от целого числа. В этом случае, как мы знаем, уравнение (48) имеет два линейно независимых решения $J_p(z)$ и $J_{-p}(z)$. Второе из этих решений должно выражаться линейно через решения $J_p(z)$ и $N_p(z)$, которые, как было выше указано, тоже являются линейно-независимыми решениями, т. е. мы должны иметь формулу вида

$$J_{-p}(z)=C_1J_p(z)+C_2N_p(z), \tag{57}$$

где $C_1$ и $C_2$ — постоянные коэффициенты, которые мы сейчас и определим. Принимая во внимание асимптотические выражения (55) и (56), можно написать

$$\cos\left(z+\frac{p\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=C_1\cos\left(z-\frac{p\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+$$
$$+C_2\sin\left(z-\frac{p\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+C_1O(z^{-1})+C_2O(z^{-1}).$$

Заметим, что произведение постоянной или вообще ограниченной функции на величину $O(z^{-1})$ порядка $\frac{1}{z}$ дает также величину $O(z^{-1})$ порядка $\frac{1}{z}$. Мы получаем, таким образом,

$$\cos\left(z+\frac{p\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=$$
$$=C_1\cos\left(z-\frac{p\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+C_2\sin\left(z-\frac{p\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O(z^{-1}). \tag{58}$$

Отсюда можно вывести значение постоянных, сравнивая главные члены в написанных разложениях. Действительно, положим

$$C_1 = \cos p\pi - A_1, \qquad C_2 = -\sin p\pi - A_2,$$

где $A_1$ и $A_2$ — новые искомые постоянные. Подставляя в формулу (58), получим

$$\cos\left(z + \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(z + \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - A_1 \cos\left(z - \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \\ - A_2 \sin\left(z - \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(z^{-1})$$

или

$$A_1 \cos\left(z - \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + A_2 \sin\left(z - \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = O(z^{-1}),$$

т. е. левая часть написанного равенства, являющаяся периодической функцией с периодом $2\pi$, должна стремиться к нулю при $z \to +\infty$. Отсюда непосредственно следует, что мы должны иметь $A_1 = A_2 = 0$, т. е.

$$C_1 = \cos p\pi, \qquad C_2 = -\sin p\pi.$$

Подставляя эти значения постоянных в формулу (57) и решая относительно $N_p(z)$, придем к искомому *выражению функции Неймана через функции Бесселя:*

$$N_p(z) = \frac{J_p(z)\cos p\pi - J_{-p}(z)}{\sin p\pi}. \tag{59}$$

Функции Неймана, как и функции Ханкеля, суть целые функции параметра $p$. Формула (59) справедлива, если $p$ отлично от целого числа. Если $p$ равно целому числу, то знаменатель формулы (59) обращается в нуль. Но, очевидно, и числитель будет равен нулю, в силу соотношения (8). Таким образом, чтобы получить значение дроби (59) при целом $p$, мы должны будем просто раскрыть неопределенность, заменяя числитель и знаменатель их производными по параметру $p$ и полагая затем $p$ равным целому числу $n$:

$$N_n(z) = \left.\frac{\dfrac{\partial J_p(z)}{\partial p}\cos p\pi - \pi J_p(z)\sin p\pi - \dfrac{\partial J_{-p}(z)}{\partial p}}{\pi\cos p\pi}\right|_{p=n}.$$

Получаем, таким образом, следующее выражение функции Неймана с целым значком:

$$N_n(z) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_p(z)}{\partial p} - (-1)^n \frac{\partial J_{-p}(z)}{\partial p}\right]_{p=n}. \tag{60}$$

Подставляя выражение (59) в формулы (53), получим формулы, выражающие функции Ханкеля через функции Бесселя для случая нецелого $p$:

$$\left.\begin{aligned} H_p^{(1)}(z) &= i\,\frac{J_p(z)\,e^{-ip\pi} - J_{-p}(z)}{\sin p\pi}, \\ H_p^{(2)}(z) &= -i\,\frac{J_p(z)\,e^{ip\pi} - J_{-p}(z)}{\sin p\pi}. \end{aligned}\right\} \tag{61}$$

Из этого соотношения непосредственно вытекает следующая зависимость между функциями Ханкеля, значок которых отличается лишь знаком:

$$H^{(1)}_{-p}(z) = e^{ip\pi} H_p^{(1)}(z);\quad H^{(2)}_{-p}(z) = e^{-ip\pi} H_p^{(2)}(z). \tag{62}$$

Строго говоря, эта формула доказана нами в предположении, что $p$ отлично от целого числа. Но левая и правая части формулы (62) суть целые функции от $p$, и, следовательно, формула справедлива при любом $p$. Если $p$ есть целое число, то числитель и знаменатель формул (61) обращаются в нуль. Раскрывая неопределенность, как и выше, можем получить формулу и для целого $p = n$.

Рассмотрим, наконец, тот случай, когда значок $p$ имеет вид $p = \frac{2m+1}{2}$, где $m$ — целое положительное число или нуль. Если мы подставим такое значение $p$ в формулы (49), определяющие функции Ханкеля, то под знаком интеграла будем иметь функцию, регулярную на всей плоскости, включая точки $\tau = \pm 1$, и, следовательно, интегралы обратятся в нуль. Но при этом множитель $\Gamma\left(\frac{1}{2} - p\right)$ обратится в бесконечность, и формулы (49) потеряют смысл. Вместо этих формул обратимся к разложениям из [**114**]. Вообще говоря, эти разложения были расходящимися, но формально удовлетворяли уравнениям, как это мы показали раньше. В рассматриваемом случае они не только будут сходящимися, но просто превратятся в конечные суммы и дадут нам выражение функции Ханкеля в конечном виде. Рассмотрим, например, первую функцию Ханкеля со значком $p = \frac{2m+1}{2}$:

$$H^{(1)}_{\frac{2m+1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,\frac{e^{i\left(z - \frac{(m+1)\pi}{2}\right)}}{\Gamma(m+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k} \Gamma(m+1+k) \left(\frac{i}{2z}\right)^k$$

или

$$H^{(1)}_{\frac{2m+1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,\frac{e^{i\left(z - \frac{(m+1)\pi}{2}\right)}}{m!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{k!}\,(m+k)! \left(\frac{i}{2z}\right)^k.$$

Отсюда непосредственно видно, что все слагаемые, соответствующие $k \geqslant m+1$, обратятся в нуль, и мы будем иметь следующее представление функции Ханкеля:

$$H^{(1)}_{\frac{2m+1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,\frac{e^{i\left(z-\frac{(m+1)\pi}{2}\right)}}{m!}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(m+k)!\left(\frac{i}{2z}\right)^k. \quad (63)$$

Точно так же для второй функции Ханкеля будем иметь конечное представление в виде

$$H^{(2)}_{\frac{2m+1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,\frac{e^{-i\left(z-\frac{m+1}{2}\pi\right)}}{m!}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(m+k)!\left(-\frac{i}{2z}\right)^k. \quad (64)$$

Формулы (59), (61) и (62) остаются справедливыми и для значков $p=\frac{2m+1}{2}$. Заметим, что можно принять формулы (61) за определение функции Ханкеля при $p=\frac{2m+1}{2}$; принимая во внимание (19) и (21), получим

$$H^{(1)}_{\frac{2m+1}{2}}(z) =$$

$$= \frac{i}{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,z^{\frac{2m+1}{2}}\frac{d^m}{(z\,dz)^m}\left[(-1)^m e^{-i\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi}\frac{\sin z}{z}-\frac{\cos z}{z}\right]$$

или

$$H^{(1)}_{\frac{2m+1}{2}}(z) = (-1)^m i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,z^{\frac{2m+1}{2}}\frac{d^m}{(z\,dz)^m}\left(\frac{-i\sin z-\cos z}{z}\right),$$

так что окончательно можно написать

$$H^{(1)}_{\frac{2m+1}{2}}(z) = (-1)^{m+1} i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,z^{\frac{2m+1}{2}}\frac{d^m}{(z\,dz)^m}\left(\frac{e^{iz}}{z}\right) \quad (65)$$

и совершенно аналогично

$$H^{(2)}_{\frac{2m+1}{2}}(z) = (-1)^m i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,z^{\frac{2m+1}{2}}\frac{d^m}{(z\,dz)^m}\left(\frac{e^{-iz}}{z}\right). \quad (66)$$

Отсюда можно получить, между прочим, и разложения (63) и (64). При $p=\frac{1}{2}$, пользуясь (61), а также выражениями

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z; \quad J_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z,$$

получаем

$$H^{(1)}_{\frac{1}{2}}(z) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{iz}; \quad H^{(2)}_{\frac{1}{2}}(z) = i\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{-iz}.$$

Для функций Ханкеля можно легко доказать ряд соотношений, аналогичных тем, которые мы имели выше для функций Бесселя. Приведем некоторые из них:

$$\frac{d^m}{(z\,dz)^m}\left(\frac{H_p^{(1)}(z)}{z^p}\right)=(-1)^m\frac{H_{p+m}^{(1)}(z)}{z^{p+m}};\quad \frac{d^m}{(z\,dz)^m}\left(\frac{H_p^{(2)}(z)}{z^p}\right)=(-1)^m\frac{H_{p+m}^{(2)}(z)}{z^{p+m}},$$

$$\frac{2p}{z}H_p^{(1)}(z)=H_{p-1}^{(1)}(z)+H_{p+1}^{(1)}(z);\quad \frac{2p}{z}H_p^{(2)}(z)=H_{p-1}^{(2)}(z)+H_{p+1}^{(2)}(z).$$

Заметим, что из определения $J_p(z)$ следует, что $J_p(z)$ и $N_p(z)$ *вещественны, а* $H_p^{(1)}(z)$ *и* $H_p^{(2)}(z)$ *суть мнимые сопряженные при вещественных* $p$ *и* $z$.

**150. Разложение функций Неймана с целым значком.** При целом значке решения $J_n(z)$ и $J_{-n}(z)$ будут линейно зависимыми, и за второе линейно независимое решение мы можем взять $N_n(z)$. Представляет интерес поэтому вывести разложение для этого решения, справедливое на всей плоскости. Согласно общей теории Фукса, это разложение должно, кроме целых степеней $z$, содержать еще $\ln z$.

Предварительно выясним некоторые формулы, относящиеся к функции $\Gamma(z)$. Мы имели для этой функции следующее бесконечное произведение Вейерштрасса:

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=e^{Cz}\,z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}}\qquad (C=0{,}57\ldots),$$

где $C$ — постоянная Эйлера. Как известно [68], мы можем написать логарифмическую производную для этого произведения по тем же правилам, что и для конечного произведения. Отсюда

$$-\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=\frac{1}{z}+C+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+k}-\frac{1}{k}\right);$$

полагая $z=n$, где $n$ — некоторое целое положительное число, получим

$$\frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)}=-\frac{1}{n}-C-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+k}-\frac{1}{k}\right)=$$

$$=-\frac{1}{n}-C+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{n+3}\right)+\ldots$$

или

$$\frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)}=\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-2}+\ldots+1-C\qquad (n=2,\ 3,\ \ldots).$$

Далее имеем $\Gamma(n)=(n-1)!$ и, следовательно,

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{\Gamma(t)}=-\frac{\Gamma'(t)}{\Gamma^2(t)}=-\frac{1}{(t-1)!}\left(\frac{1}{t-1}+\frac{1}{t-2}+\ldots+1-C\right)\quad (t=2,\ 3,\ \ldots),\tag{67}$$

и при $t=1$ получим $\Gamma(1)=1$ и $\Gamma'(1)=-C$, а потому

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{\Gamma(t)}=C\qquad (t=1).\tag{68}$$

Займемся теперь тем случаем, когда $t$ равно целому отрицательному числу или нулю. Мы знаем, что $\Gamma(z)$ имеет в точке $z=-n$ полюс первого порядка с вычетом $\frac{(-1)^n}{n!}$, т. е. мы имеем вблизи этой точки разложение

$$\Gamma(z)=\frac{(-1)^n}{n!\,(z+n)}+\alpha_0+\alpha_1(z+n)+\ldots$$

или

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=(-1)^n n!\,\frac{z+n}{1+\beta_1(z+n)+\beta_2(z+n)^2\ldots}.$$

Отсюда при помощи простого дифференцирования находим

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{\Gamma(t)}\Big|_{t=-n}=(-1)^n n! \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{69}$$

Обратимся теперь к нахождению разложения решения $N_n(z)$, определяемого формулой (60). Мы имеем

$$J_{\pm p}(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^{\pm p}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}\frac{1}{\Gamma(\pm p+k+1)}$$

и, дифференцируя по параметру $p$, получим

$$\frac{\partial J_p(z)}{\partial p}=\ln\frac{z}{2}J_p(z)+\left(\frac{z}{2}\right)^p\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}\left(\frac{d}{dt}\frac{1}{\Gamma(t)}\right)_{t=p+k+1},$$

$$\frac{\partial J_{-p}(z)}{\partial p}=-\ln\frac{z}{2}J_{-p}(z)-\left(\frac{z}{2}\right)^{-p}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}\left(\frac{d}{dt}\frac{1}{\Gamma(t)}\right)_{t=-p+k+1}.$$

Мы должны положить затем $p=n$, причем будем иметь

$$\frac{\partial J_p(z)}{\partial p}\Big|_{p=n}=\ln\frac{z}{2}J_n(z)+\left(\frac{z}{2}\right)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}\left(\frac{d}{dt}\frac{1}{\Gamma(t)}\right)_{t=n+k+1}$$

и

$$\frac{\partial J_{-p}(z)}{\partial p}\Big|_{p=n}=-\ln\frac{z}{2}J_{-n}(z)-\left(\frac{z}{2}\right)^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}\left(\frac{d}{dt}\frac{1}{\Gamma(t)}\right)_{t=-n+k+1}.$$

Подставляя в формулу (60) и пользуясь формулами (67) и (69), получим окончательно при $n\geqslant 1$

$$\pi N_n(z)=2J_n(z)\left(\ln\frac{z}{2}+C\right)-\left(\frac{z}{2}\right)^{-n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}-$$

$$-\left(\frac{z}{2}\right)^n\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\ldots+1\right)-\left(\frac{z}{2}\right)^n\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{n+k}+\frac{1}{n+k-1}+\ldots+1+\frac{1}{k}+\frac{1}{k-1}+\ldots+1\right) \tag{70}$$

и для $n=0$

$$\pi N_0(z)=2J_0(z)\left(\ln\frac{z}{2}+C\right)-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k-1}+\ldots+1\right). \quad (71)$$

**151. Случай чисто мнимого аргумента.** Если $Z_p(z)$ есть некоторое решение уравнения Бесселя, то, как мы знаем, $Z_p(kz)$ является решением уравнения [II, 49]

$$\frac{d^2w}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dw}{dz}+\left(k^2-\frac{p^2}{z^2}\right)w=0. \quad (72)$$

Полагая здесь $k=i$, мы видим, что функция $Z_p(iz)$ есть решение уравнения

$$\frac{d^2w}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dw}{dz}-\left(1+\frac{p^2}{z^2}\right)w=0. \quad (73)$$

Возьмем сначала $Z_p(z)$ равной $J_p(z)$:

$$J_p(iz)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k i^p i^{2k}}{k!\,\Gamma(p+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{p+2k}=i^p\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,\Gamma(p+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{p+2k}.$$

Чтобы получить решение уравнения (73), вещественное при вещественном $p$ и $z>0$, умножим написанное решение на постоянную $i^{-p}=e^{-\frac{1}{2}p\pi i}$. Таким образом мы получим следующее решение уравнения (73):

$$I_p(z)=e^{-\frac{1}{2}p\pi i}J_p(iz)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,\Gamma(p+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{p+2k}. \quad (74)$$

Функция $I_{-p}(z)$ также является решением уравнения (73), и если $p$ отлично от целого числа, то $I_p(z)$ и $I_{-p}(z)$ суть два линейно независимых решения уравнения (73).

Если мы теперь возьмем $Z_p(z)$ равной первой функции Ханкеля $H_p^{(1)}(z)$, то, добавляя еще некоторый постоянный множитель, придем к следующему решению уравнения (73):

$$K_p(z)=\frac{1}{2}\pi i e^{\frac{1}{2}p\pi i}H_p^{(1)}(iz). \quad (75)$$

Принимая во внимание (62), можно переписать эту формулу следующим образом:

$$K_p(z)=\frac{1}{2}\pi i e^{-\frac{1}{2}p\pi i}H_{-p}^{(1)}(iz). \quad (76)$$

Пользуясь первой из формул (61), мы можем выразить $K_p(z)$ через $I_{\pm p}(z)$. Действительно, эта формула дает

$$K_p(z)=-\frac{1}{2}\pi e^{\frac{1}{2}p\pi i}\frac{J_p(iz)e^{-ip\pi}-J_{-p}(iz)}{\sin p\pi}$$

или, пользуясь (74),

$$K_p(z)=-\frac{1}{2}\pi e^{\frac{1}{2}p\pi i}\frac{I_p(z)e^{-\frac{1}{2}p\pi i}-I_{-p}(z)e^{\frac{1}{2}p\pi i}}{\sin p\pi},$$

и окончательно

$$K_p(z)=\frac{1}{2}\pi\frac{I_{-p}(z)-I_p(z)}{\sin p\pi}. \tag{77}$$

Функции $I_p(z)$ и $K_p(z)$ удовлетворяют соотношениям, аналогичным тем, которые мы в [**145**] вывели для $J_p(z)$.

Пользуясь определением (74) и свойством $J_{-n}(z)=(-1)^n J_n(z)$ функций Бесселя с целым значком, нетрудно показать, что

$$I_{-n}(z)=I_n(z). \tag{78}$$

Выражение функции $K_n(z)$ с целым значком можно получить из (77), переходя к пределу при $p\to n$ и раскрывая неопределенность:

$$K_n(z)=\frac{(-1)^n}{2}\left[\frac{\partial I_{-p}(z)}{\partial p}-\frac{\partial I_p(z)}{\partial p}\right]_{p=n}. \tag{79}$$

Как мы упоминали в [**111**], асимптотическая формула

$$H_p^{(1)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{i\left(z-\frac{p\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}[1+O(z^{-1})]$$

справедлива при $-\pi+\varepsilon<\arg z<\pi-\varepsilon$, а потому можно вместо $z$ подставить $iz$, считая $z$ вещественным положительным и $\arg(iz)=\frac{\pi}{2}$. Применяя формулу (75), получим асимптотическое выражение $K_p(z)$ при $z>0$:

$$K_p(z)=\frac{1}{2}\pi i e^{\frac{1}{2}p\pi i}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{-\frac{\pi}{4}i}e^{i\left(iz-\frac{p\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}[1+O(z^{-1})],$$

или

$$K_p(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}e^{-z}[1+O(z^{-1})]\quad(z>0), \tag{80}$$

т. е. функция $K_p(z)$ убывает по показательному закону при $z\to+\infty$.

Уравнение (73) часто встречается в математической физике, и при этом решение $K_p(z)$ с упомянутым законом убывания имеет большое значение в приложениях к физическим задачам.

Иногда символом $K_p(z)$ обозначают функцию, которая в приведенных нами обозначениях равна $\cos p\pi K_p(z)$.

Если в уравнении (72) заменить $k$ на $ik$, то мы увидим, что функции $I_p(kz)$ и $K_p(kz)$ являются решениями уравнения

$$\frac{d^2w}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dw}{dz}-\left(k^2+\frac{p^2}{z^2}\right)w=0. \tag{81}$$

Эти решения будут линейно независимыми так же, как $J_p(z)$ и $H_p^{(1)}(z)$ для уравнения Бесселя.

Существуют в большом числе таблицы функций Бесселя. Укажем, например, на книгу Р. О. Кузьмина «Бесселевы функции», в которой имеются и таблицы.

**152. Новые интегральные представления.** Для выяснения ряда свойств функций Бесселя удобно пользоваться интегральными представлениями, отличающимися от тех, которые мы вывели раньше. Эти представления могут быть получены или суперпозицией плоских волн [1]), или методом интегральных преобразований [2]), или же, наконец, методом прямого преобразования введенных выше явных выражений для функций Бесселя. Мы будем следовать третьему пути рассуждений. Подставим в формулу (7) вместо $\frac{1}{\Gamma(p+k+1)}$ ее выражение через контурный интеграл [74], т. е.

$$\frac{1}{\Gamma(p+k+1)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{l'}e^{\tau}\tau^{-(p+k+1)}\,d\tau,$$

где $l'$ — контур, охватывающий отрицательную часть вещественной оси. Мы получим

$$J_p(z)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\int_{l'}e^{\tau}\tau^{-(p+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{p+2k}d\tau=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{l'}e^{\tau}\tau^{-(p+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{p}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\tau^{-k}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}d\tau.$$

Выполняя суммирование, найдем

$$J_p(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{l'}\left(\frac{z}{2}\right)^{p}\tau^{-(p+1)}e^{-\frac{z^2}{4\tau}+\tau}\,d\tau.$$

Будем считать, что комплексное число $z$ удовлетворяет условию

$$|\arg z|<\frac{\pi}{2}, \tag{82}$$

и сделаем замену переменных по формуле $\tau=\frac{1}{2}zt$. Тогда мы получим

$$J_p(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{l}t^{-p-1}e^{\frac{1}{2}z\left(t-\frac{1}{t}\right)}dt, \tag{83}$$

---

[1]) Ф. Франк, Р. Мизес, Уравнения математической физики, 1937.

[2]) Р. Курант, Д. Гильберт, Методы математической физики, 1951.

причем в качестве пути интегрирования $l$ можно взять прежний же петлеобразный контур $l'$. Формула (83) была указана Н. Я. Сониным (1870 г.).

Выберем в качестве $l$ контур, состоящий из нижнего берега разреза по отрицательной части вещественной оси, круга $|t|=1$ и верхнего берега упомянутого разреза. Перейдем к новой переменной интегрирования по формуле $t=e^w$. Тогда путь интегрирования $l$ перейдет в контур $C_0$, изображенный на рис. 74, а функция $J_p(z)$ представится следующим окончательным выражением:

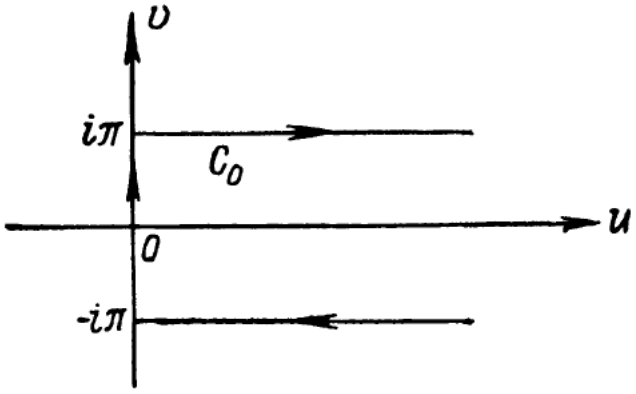



Рис. 74.

$$J_p(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} e^{z\,\mathrm{sh}\,w-pw}\,dw. \qquad (84)$$

Заметим, что все участки контура $C_0$, расположенные на конечном расстоянии от начала координат, можно деформировать любым образом. Для получения дальнейших результатов удобно преобразовать интеграл (84). Это легко сделать, если считать, что $C_0$ имеет вид, указанный на рис. 74 и положить $w=\varphi-\pi i$.

Пользуясь соотношением $\mathrm{sh}\,(\varphi+2\pi i)=\mathrm{sh}\,\varphi$, нетрудно получить следующую формулу (ср. [147]):

$$J_p(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(p\varphi-z\sin\varphi)\,d\varphi-\frac{\sin p\pi}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-p\varphi-z\,\mathrm{sh}\,\varphi}\,d\varphi. \qquad (85)$$

Построим теперь интегральные представления типа (84) для остальных цилиндрических функций.

Если воспользоваться формулой (85), а также соотношением [149]

$$N_p(z)=\frac{J_p(z)\cos p\pi-J_{-p}(z)}{\sin p\pi},$$

то можно получить равенство

$$\pi N_p(z)=\mathrm{ctg}\,p\pi\int_0^{\pi}\cos(p\varphi-z\sin\varphi)\,d\varphi-\frac{1}{\sin p\pi}\int_0^{\pi}\cos(p\varphi+z\sin\varphi)\,d\varphi-$$
$$-\int_0^{\infty}e^{p\varphi-z\,\mathrm{sh}\,\varphi}\,d\varphi-\cos p\pi\int_0^{\infty}e^{-p\varphi-z\,\mathrm{sh}\,\varphi}\,d\varphi$$

или

$$N_p(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(z\sin\varphi-p\varphi)\,d\varphi-\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}(e^{p\varphi}+e^{-p\varphi}\cos p\pi)\,e^{-z\,\mathrm{sh}\,\varphi}\,d\varphi. \qquad (86)$$

Последняя же формула, вместе с формулой (85), позволяет найти и интегральные представления для функций Ханкеля:

$$H_p^{(1)}(z)=J_p(z)+iN_p(z),\quad H_p^{(2)}(z)=J_p(z)-iN_p(z).$$

Мы получаем

$$\left.\begin{aligned} H_p^{(1)}(z) &= \frac{1}{\pi i}\int_{C_1} e^{z\,\mathrm{sh}\,w - pw}\,dw, \\ H_p^{(2)}(z) &= -\frac{1}{\pi i}\int_{C_2} e^{z\,\mathrm{sh}\,w - pw}\,dw, \end{aligned}\right\} \tag{87}$$

где $C_1$ и $C_2$ являются бесконечными контурами, соединяющими точку $(-\infty)$, соответственно, с точками $(\infty, \pi i)$ и $(\infty, -\pi i)$. Распространение формул (85) и (87) на случай произвольных значений $z$ можно произвести методом аналитического продолжения.

**153. Асимптотические представления.** Полученные интегральные представления (84) и (87) удобно применить для нахождения приближенных выражений цилиндрических функций в случае больших значений $|z|$ или $|p|$. Обозначим

$$\frac{p}{z} = \xi \tag{88}$$

и введем в рассмотрение функцию

$$f(w) = \mathrm{sh}\,w - \xi w. \tag{89}$$

Тогда интегралы из формул (84) и (87) примут следующий вид:

$$\int_{C_\nu} e^{zf(w)}\,dw. \tag{90}$$

Будем считать, что $p$ и $z$ суть положительные вещественные числа и воспользуемся методом скорейшего спуска.

Для проведения этого метода прежде всего необходимо выяснить положение седловых точек $w_0$, определяемых из условия

$$f'(w_0) = \mathrm{ch}\,w_0 - \xi = 0,$$

установить расположение контуров

$$Im\,(\mathrm{sh}\,w - \xi w) = Im\,(\mathrm{sh}\,w_0 - \xi w_0)$$

и убедиться в том, что контуры $C_1$, $C_2$ и $C_0$ могут быть приведены к линиям наибыстрейшего изменения функции (89).

Мы рассмотрим все эти вопросы, причем будем различать три случая в зависимости от значения числа $\xi = \frac{p}{z}$.

1. Случай $0 < \xi < 1$; $z \to +\infty$.

Седловые точки имеют значения $\pm \beta i$, где $\cos\beta = \xi$. Будем считать, что $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, и выясним расположение стационарных контуров.

Рассмотрим вначале полуполосу $0 \leqslant v \leqslant \pi$; $u \geqslant 0$ $(w = u + iv)$. В седловой точке

$$\xi = \cos\beta \quad \left(0 < \beta < \frac{\pi}{2}\right); \quad f''(i\beta) = i\sin\beta; \quad \sin\beta > 0. \tag{91}$$

Как следует из построений [79], направление стационарного контура, вдоль которого $\mathrm{Re}\,f$ убывает (соответственно возрастает), определяется равенством $\arg(w - \beta i) = \frac{\pi}{4}$ $\left(\text{соответственно } \arg(w - \beta i) = -\frac{\pi}{4}\right)$.

Уравнению стационарных контуров $\operatorname{Im} f(w) = \operatorname{Im} f(\beta i)$, проходящих через стационарную точку $\beta i \left(0 < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$, можно придать вид

$$\operatorname{ch} u = \frac{(v - \beta)\cos\beta + \sin\beta}{\sin v}, \tag{92}$$

откуда

$$\frac{du}{dv} = \frac{\sin v \cos\beta - \cos v \sin\beta - (v-\beta)\cos v \cos\beta}{\operatorname{sh} u \sin^2 v} =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{sh} u \sin^2 v} \int_{\beta}^{v} \sin v \left[ v\cos\beta + \int_{0}^{\beta} \gamma \sin\gamma \, d\gamma \right] dv. \tag{93}$$

Таким образом, $\frac{dv}{du} > 0$ или $< 0$ в соответствии со знаком $v - \beta$.

Из [92] следует, что при $v \to 0$ и при $v \to \pi$ $u \to +\infty$. Следовательно, стационарный контур, вдоль которого $\operatorname{Re} f(w)$ убывает, выходит из седловой

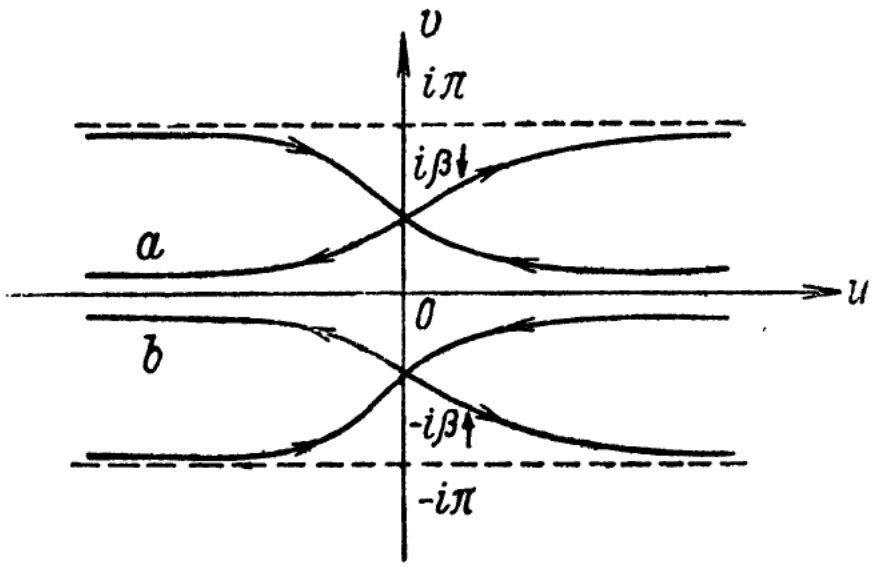



Рис. 75.

точки $w = \beta i$ под углом $\frac{\pi}{4}$ к вещественной оси и монотонно удаляется от нее $\left(\frac{dv}{du} > 0\right)$, приближаясь к своей асимптоте $v = \pi$, $u > 0$ (при $u \to +\infty$, $v \to \pi$). Стационарный контур, вдоль которого $\operatorname{Re} f(w)$ возрастает, выходит из стационарной точки $w = \beta i$ под углом $\arg(w - \beta i) = -\frac{\pi}{4}$ и при $u \to \infty$ приближается к вещественной оси $v = 0$, имея ее своей асимптотой.

Стационарные контуры в полосе $-\infty < u < 0$, $0 < v < \pi$ и в полосе $-\infty < u < +\infty$, $-\pi < v < 0$ нетрудно построить, зеркально отражая построенные нами контуры сначала от мнимой оси, потом от вещественной. Это легко следует из четности по $u$ левой части формулы $\operatorname{Im} f(w) - \operatorname{Im} f(\beta i) = 0$ и уравнения

$$\operatorname{ch} u = \frac{(v + \beta)\cos\beta - \sin\beta}{\sin v} \tag{94}$$

стационарных контуров, проходящих через седловую точку $-\beta i$. На рис. 75 стрелками на стационарных контурах указано направление убывания $\operatorname{Re} f(w)$. В качестве контуров $C_1$ и $C_2$ в формулах (87) для функций Ханкеля можно взять стационарные контуры $a$ и $b$ (рис. 75).

Применяя обычную схему метода скорейшего спуска к интегралам

$$H_p^{(1)}(z) = H_{z\xi}^{(1)}(z) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{(a)} e^{z(\operatorname{sh} w - \xi w)}\,dw, \tag{95}$$

$$0 < \xi < 1,$$

$$H_p^{(2)}(z) = H_{z\xi}^{(2)}(z) = -\frac{1}{\pi i}\int\limits_{(b)} e^{z(\operatorname{sh} w - \xi w)}\,dw, \tag{96}$$

получим

$$H_p^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,\frac{e^{-\frac{\pi}{4}i}}{\sqrt[4]{1-\xi^2}}\,e^{iz\left[-\xi\arccos\xi+\sqrt{1-\xi^2}\right]}\left(1+O\left(\frac{1}{z}\right)\right), \tag{97}$$

$$H_p^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,\frac{e^{\frac{\pi}{4}i}}{\sqrt[4]{1-\xi^2}}\,e^{iz\left[\xi\arccos\xi-\sqrt{1-\xi^2}\right]}\left(1+O\left(\frac{1}{z}\right)\right), \tag{98}$$

$$\left(\xi = \frac{p}{z};\ 0 < \arccos\xi < \frac{\pi}{2};\ \sqrt[4]{1-\xi^2} > 0;\ \sqrt{1-\xi^2} > 0\right).$$

Асимптотику функции Бесселя $J_p(z)$ нетрудно найти, пользуясь формулой

$$J_p(z) = \frac{1}{2}\left(H_p^{(1)}(z) + H_p^{(2)}(z)\right).$$

Если в формулах (97) зафиксировать $p = z\xi$, то они переходят в полученные нами уже асимптотические формулы (187) и (188) из [114].

При $\xi = 1$ интегралы (95) и (96) тоже можно вычислить по методу перевала, однако при $\xi = 1$ в седловой точке $w = 0$, $f(0) = f'(0) = f''(0)$, $f'''(0) \neq 0$ и формулы из [79] приходится применять уже в случае $p = 3$.

При $\xi \to 1$ правые части формул (97), (98) стремятся к бесконечности и не переходят в асимптотические формулы для функций $H_z^{(1)}(z)$ и $H_z^{(2)}(z)$. Случай, когда $\xi = \frac{p}{z}$ меняется в окрестности точки $\xi = 1$, будет далее специально рассмотрен.

Если проанализировать процесс оценки остатка при проведении метода скорейшего спуска [79], то нетрудно видеть, что функции $O\left(\frac{1}{z}\right)$ в формулах (97) и (98) удовлетворяют неравенству

$$\left|O\left(\frac{1}{z}\right)\right| \leqslant \frac{C}{z}, \tag{99}$$

где $C$ на любом интервале $0 < \xi \leqslant 1 - \varepsilon$ $(0 < \varepsilon < 1$, $\varepsilon$ фиксировано) можно выбрать не зависящей от $\xi$.

2. Случай $\xi > 1$, $p \to +\infty$. Седловые точки $\pm\alpha$ $(\alpha > 0)$ находятся из равенства $\operatorname{ch}\alpha = \xi$. Уравнение стационарных контуров имеет вид

$$\operatorname{Im}(\operatorname{sh} w - \xi w) = \operatorname{Im}(\operatorname{sh}\alpha - \alpha\operatorname{ch}\alpha) = 0 \tag{100}$$

или

$$\operatorname{ch} u \sin v = v \operatorname{ch}\alpha. \tag{101}$$

Они распадаются на вещественную ось $v = 0$ и на кривую $\operatorname{ch} u = \frac{v\operatorname{ch}\alpha}{\sin v}$, симметричную относительно координатных осей и имеющую две ветви.

Стационарные контуры изображены на рис. 76. Направления, при движении вдоль которых вещественная часть $\operatorname{Re} f(w)$ уменьшается, помечены стрелками.

В качестве $C_1$ и $C_2$ (в формулах (87)) можно взять соответственно контуры, идущие вдоль вещественной оси из $-\infty$ до точки $\alpha$ и далее по стационарному пути в точку $+\infty+\pi i$ или $-\infty-\pi i$ (рис. 76). При $p\to+\infty$ главный вклад в интегралы (87) дает интегрирование по окрестности точки $-\alpha$. Таким образом, асимптотические разложения первой и второй функций Ханкеля отличаются только знаком. Для получения асимптотики функции Бесселя $J_p(z)$ $\left(\frac{p}{z}=\xi>1;\ p\to+\infty\right)$ контур $C_0$ (в формуле (84)) можно деформировать в стационарный контур, идущий из $+\infty-\pi i$ в точку $\alpha$ и далее в $+\infty+\pi i$ (рис. 76). Главный вклад в интеграл (84) при $p\to+\infty$ дает интегрирование по окрестности точки $\alpha$.

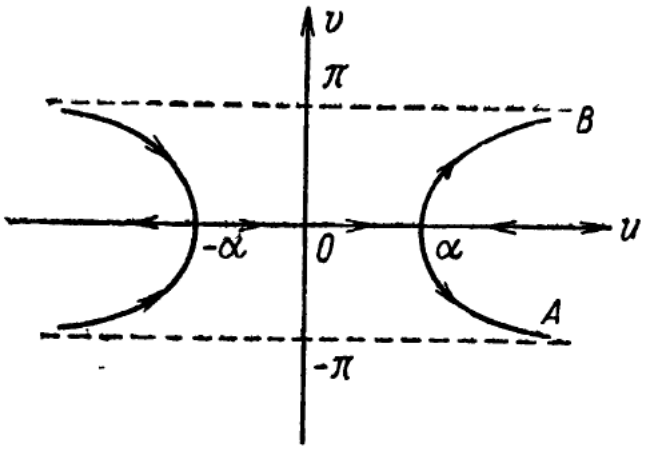


Рис. 76.

Применяя основную формулу из [79], получим

$$H_p^{(1)}(z)=-\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\frac{i}{\sqrt[4]{\xi^2-1}}e^{z[\xi\ln(\xi+\sqrt{\xi^2-1})-\sqrt{\xi^2-1}]}\left(1+O\left(\frac{1}{p}\right)\right), \quad (102)$$

$$H_p^{(2)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\frac{i}{\sqrt[4]{\xi^2-1}}e^{z[\xi\ln(\xi+\sqrt{\xi^2-1})-\sqrt{\xi^2-1}]}\left(1+O\left(\frac{1}{p}\right)\right), \quad (103)$$

$$J_p(z)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\frac{1}{\sqrt[4]{\xi^2-1}}e^{-z[\xi\ln(\xi+\sqrt{\xi^2-1})-\sqrt{\xi^2-1}]}\left(1+O\left(\frac{1}{p}\right)\right) \quad (104)$$

$$\left(\xi=\frac{p}{z},\ \sqrt{\xi^2-1}>0,\ \sqrt[4]{\xi^2-1}>0\right).$$

Через $O\left(\frac{1}{p}\right)$ в формулах (102), (103), (104) обозначены функции $z$ и $p$, допускающие при $\xi=\frac{p}{z}>1$ и $p\to\infty$ оценку

$$\left|O\left(\frac{1}{p}\right)\right|\leqslant\frac{C}{p}. \quad (105)$$

Тщательное проведение оценок метода скорейшего спуска показывает, что постоянную $C$ здесь можно выбрать не зависящей ни от $z$, ни от $p$ на полуоси $\xi\geqslant 1+\varepsilon$ ($\varepsilon>0$ — произвольное фиксированное число).

При переходе $\xi$ с отрезка $0\leqslant\xi<1$ на полуось $\xi>1$ характер асимптотики функций Бесселя и Ханкеля существенно меняется. При $0\leqslant\xi<1$, $z\to+\infty$ эти функции осциллируют, при $\xi>1$, $z\to+\infty$ функция Бесселя экспоненциально убывает, функции Ханкеля экспоненциально растут.

3. Случай $1-\varepsilon\leqslant\xi\leqslant 1+\varepsilon$.

Пусть $\xi$, возрастая, пробегает отрезок $1-\varepsilon\leqslant\xi\leqslant 1+\varepsilon$. Как следует из предыдущего, две стационарные точки при $1-\varepsilon\leqslant\xi<1$, $w=\pm i\arccos\xi$ функции

$$f(w)=\operatorname{sh} w-\xi w$$

будут при возрастании $\xi$ двигаться к началу координат и сольются в одну точку $w=0$ при $\xi=1$. Дальше при возрастании $\xi$ седловые точки опять расходятся от начала координат, двигаясь уже и по вещественной оси влево и вправо ($w=\pm\ln(\xi+\sqrt{\xi^2-1})$, $\xi>1$).

Точка $\xi=1$ — точка смены форм асимптотик. Поведение функций $H_p^{(1)}(z)$, $H_p^{(2)}(z)$, $J_p(z)$ при $\frac{p}{z}=\xi$, меняющемся в окрестности точки $\xi=1$, удается описать с помощью функций Эйри [118], а именно: для любых целых $m_1$, $m_2>0$ имеют место формулы

$$H_p^{(1)}(z)=\frac{w_1\left(z^{\frac{2}{3}}t(\xi)\right)}{-iz^{\frac{1}{3}}}\left[\sum_{m=0}^{m_1-1}\frac{c_m(\xi)}{z^{2m}}+O\left(\frac{1}{z^{2m_1}}\right)\right]+$$

$$+\frac{w_1'\left(z^{\frac{2}{3}}t(\xi)\right)}{-iz^{\frac{4}{3}}}\left[\sum_{m=0}^{m_2-1}\frac{d_m(\xi)}{z^{2m}}+O\left(\frac{1}{z^{2m_2}}\right)\right], \qquad (106)$$

$$H_p^{(2)}(z)=\frac{w_2\left(z^{\frac{2}{3}}t(\xi)\right)}{iz^{\frac{1}{3}}}\left[\sum_{m=0}^{m_1-1}\frac{c_m(\xi)}{z^{2m}}+O\left(\frac{1}{z^{2m_1}}\right)\right]+$$

$$+\frac{w_2'\left(z^{\frac{2}{3}}t(\xi)\right)}{iz^{\frac{4}{3}}}\left[\sum_{m=0}^{m_2-1}\frac{d_m(\xi)}{z^{2m}}+O\left(\frac{1}{z^{2m_2}}\right)\right], \qquad (107)$$

$$J_p(z)=\frac{v\left(z^{\frac{2}{3}}t(\xi)\right)}{z^{\frac{1}{3}}}\left[\sum_{m=0}^{m_1-1}\frac{c_m(\xi)}{z^{2m}}+O\left(\frac{1}{z^{2m_1}}\right)\right]+$$

$$+\frac{v'\left(z^{\frac{2}{3}}t(\xi)\right)}{z^{\frac{4}{3}}}\left[\sum_{m=0}^{m_2-1}\frac{d_m(\xi)}{z^{2m}}+O\left(\frac{1}{z^{2m_2}}\right)\right]. \qquad (108)$$

Здесь $t$, $c_m$ и $d_m$ ($m=0, 1, 2, \ldots$) — функции $\xi$, не зависящие от $m_1$ и $m_2$, регулярные и вещественные при $\xi>0$, причем

$$\xi=\frac{p}{z},\quad \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}(\xi)=\xi\ln(\xi+\sqrt{\xi^2-1})-\sqrt{\xi^2-1},$$

$$t(\xi)=\sqrt[3]{2}\,(\xi-1)+O((\xi-1)^2)\qquad(\xi\to 1),$$

$$c_0(\xi)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{t(\xi)}{\xi^2-1}\right)^{\frac{1}{4}},\qquad c_0(\xi)>0.$$

Через $O\left(\frac{1}{z^{2m_1}}\right)$ и $O\left(\frac{1}{z^{2m_2}}\right)$ обозначены функции от $p$ и $z$, допускающие оценки

$$\left|O\left(\frac{1}{z^{2m_1}}\right)\right|\leqslant\frac{c_{m_1}}{z^{2m_1}},\qquad \left|O\left(\frac{1}{z^{2m_2}}\right)\right|\leqslant\frac{c_{m_2}}{z^{2m_2}}.$$

На любом интервале $1-\varepsilon \leqslant \xi \leqslant 1+\varepsilon$ $(0<\varepsilon<1$, $\varepsilon$ фиксировано) постоянные $c_{m_1}$ и $c_{m_2}$ можно выбрать не зависящими ни от $z$, ни от $\xi$.

Для функций $c_m(\xi)$, $d_m(\xi)$ получены рекуррентные соотношения, позволяющие в принципе найти в явном виде эти функции при любом целом $m$.

Вывод формул (106), (107) довольно сложен. Он требует распространения классического метода скорейшего спуска на тот случай, когда у «фазовой» функции две стационарные точки близки (в нашем случае, как мы отмечали, при $\xi \to 1$ две стационарные точки стремятся к точке $w=0$).

С этой модификацией метода скорейшего спуска и выводом формул (106), (107) можно познакомиться по статье C. Chester, B. Friedman, F. Ursell (Proc. Cambr. Philos. Soc. 1957, v. 53, № 3, 599, 611).

Равномерные асимптотические формулы для функций Бесселя и Ханкеля впервые были получены акад. В. А. Фоком в 1934 г. (ДАН, т. 1, № 3, 97—99).

Изложение настоящего пункта принадлежит В. М. Бабичу.

**154. Функции Бесселя и уравнение Лапласа.** Уравнение Бесселя встречается весьма часто при решении задач математической физики. Мы не можем за недостатком места рассматривать сколько-нибудь полно применение функций Бесселя и ограничимся лишь основными фактами, устанавливающими связь уравнения Бесселя с основными уравнениями математической физики.

Начнем с уравнения Лапласа. Мы исследовали раньше уравнение Лапласа в сферических координатах и пришли, таким образом, к сферическим функциям. Точно так же, написав уравнение Лапласа в цилиндрических координатах и применяя метод разделения переменных, мы придем к функциям Бесселя.

Уравнение Лапласа в цилиндрических координатах имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial U}{\partial \rho}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}+\rho \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0.$$

Будем искать решение этого уравнения в виде произведения трех функций: одной — только от $\rho$, второй — от $\varphi$ и третьей — от $z$:

$$U=R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z).$$

Подставляя в уравнение и разделяя переменные, получим

$$\frac{\frac{d}{d\rho}\left[\rho \frac{dR(\rho)}{d\rho}\right]}{R(\rho)}+\frac{1}{\rho}\frac{\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2}}{\Phi(\varphi)}+\rho\frac{\frac{d^2Z(z)}{dz^2}}{Z(z)}=0.$$

Каждая из двух последних написанных дробей должна равняться постоянной величине, так как независимая переменная $\varphi$ входит только в первую из этих дробей, а $z$ — только во вторую. Приравнивая вторую из дробей постоянной $(-p^2)$ и третью — постоянной $k^2$, получим следующие три уравнения:

$$\Phi''(\varphi)+p^2\Phi(\varphi)=0, \qquad Z''(z)-k^2Z(z)=0,$$

$$\frac{d}{d\rho}[\rho R'(\rho)]-\frac{p^2}{\rho}R(\rho)+k^2\rho R(\rho)=0$$

или

$$R''(\rho)+\frac{1}{\rho}R'(\rho)+\left(k^2-\frac{p^2}{\rho^2}\right)R(\rho)=0.$$

Будем пока считать постоянные $\rho$ и $k$ отличными от нуля. Первые два уравнения дают нам

$$\Phi(\varphi)=e^{\pm ip\varphi} \quad \text{или} \quad \Phi(\varphi)=\begin{matrix}\cos p\varphi\\ \sin p\varphi\end{matrix},$$

$$Z(z)=e^{\pm kz}.$$

Наконец, третье уравнение дает $Z_p(k\rho)$, где $Z_p(z)$ есть любое решение уравнения Бесселя с параметром $p$. Если хотим иметь решение однозначное, то постоянную $p$ мы должны считать целым числом $n$.

Получим, таким образом, решения уравнения Лапласа следующего вида:

$$e^{\pm kz}\begin{matrix}\cos n\varphi\\ \sin n\varphi\end{matrix}[C_1J_n(k\rho)+C_2N_n(k\rho)], \tag{109}$$

где $n$ — любое целое число и постоянная $k$ может иметь любое значение.

Если $k=0$, то мы должны вместо $Z(z)=e^{\pm kz}$ считать $Z(z)=1$, или $Z(z)=z$, и уравнение для $R(\rho)$ даст нам $R(\rho)=\rho^{\pm p}$. Наконец, при $p=0$ надо считать $\Phi(\varphi)=A+B\varphi$ и при $p=k=0$ надо считать $R(\rho)=C+D\lg\rho$. При $n=0$ формула (129) дает нам решения следующего вида:

$$e^{\pm kz}[C_1J_0(k\rho)+C_2N_0(k\rho)], \tag{110}$$

не зависящие от угла $\varphi$. Такие решения играют существенную роль при рассмотрении потенциала масс, имеющих осевую симметрию. Если мы хотим получить решение, конечное при $\rho=0$, то в формуле (110) должны положить постоянную $C_2$ равной нулю, и будем иметь решения вида

$$e^{\pm kz}J_0(k\rho). \tag{111}$$

Из решений уравнения Лапласа такого типа может быть получено решение $\frac{1}{r}$, являющееся основным в теории ньютоновского потенциала, а именно имеет место формула

$$\int_0^\infty e^{-kz}J_0(k\rho)\,dk=\frac{1}{\sqrt{\rho^2+z^2}}=\frac{1}{r} \qquad (z>0), \tag{112}$$

имеющая многочисленное применение в теории потенциала. Чтобы доказать эту формулу, обратимся к формуле (42), которая даст нам

$$e^{-kz}J_0(k\rho)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-kz-ik\rho\sin\varphi}\,d\varphi,$$

откуда, интегрируя по $k$, получим

$$\int_0^\infty e^{-kz} J_0(k\rho)\, dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{e^{-kz - ik\rho\sin\varphi}}{-z - i\rho\sin\varphi}\right]_{k=0}^{k=\infty} d\varphi$$

или, подставляя пределы,

$$\int_0^\infty e^{-kz} J_0(k\rho)\, dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{z + i\rho\sin\varphi}\, d\varphi.$$

Последний интеграл легко вычисляется методом, указанным в [57], откуда и вытекает непосредственно формула (112).

Если вместо постоянной $k^2$ ввести постоянную $(-k^2)$, то $e^{\pm kz}$ перейдет в $\cos kz$ и $\sin kz$, а $J_p(k\rho)$ и $N_p(k\rho)$ могут быть заменены на $I_p(k\rho)$ и $K_p(k\rho)$.

**155. Волновое уравнение в цилиндрических координатах.** Рассмотрим теперь волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \Delta U, \tag{113}$$

где

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2},$$

и будем искать его решение в виде произведения

$$U = e^{-i\omega t} V(x, y, z). \tag{114}$$

Подставляя в уравнение (113), получаем для $V$ уравнение вида

$$\Delta V + k^2 V = 0, \tag{115}$$

где

$$k^2 = \frac{\omega^2}{a^2}. \tag{116}$$

Уравнение (115) называется иногда *уравнением Гельмгольца*. Если мы возьмем какое-нибудь его решение, подставим в формулу (114) и отделим вещественную часть, то она даст вещественное решение волнового уравнения, которое в отношении зависимости от времени представляет собою гармоническое колебание частоты $\omega$. В отдельных случаях это решение может изображать *стоячую волну*, а в других случаях — *распространяющуюся волну*. Выясним сначала эти понятия на простейших случаях. Если взять, например, произведение $e^{-i\omega t}\sin kx$, то его вещественная часть $\cos\omega t \sin kx$ даст стоячую волну. Точно так же произведение $e^{-i\omega t}\cos kx$ дает тоже стоячую волну. Если же взять произведение $e^{-i\omega t} e^{ikx}$, то его вещественная часть $\cos(kx - \omega t)$ даст синусоидальную волну, которая

распространяется в направлении оси $X$ со скоростью $\frac{\omega}{k}$. При применении функций Бесселя роль $\cos kx$ и $\sin kx$ будут играть $J_p(k\rho)$ и $N_p(k\rho)$, а роль $e^{ikx}$ и $e^{-ikx}$ будут играть $H_p^{(1)}(k\rho)$ и $H_p^{(2)}(k\rho)$.

Вернемся к уравнению (115) и напишем оператор Лапласа в цилиндрических координатах, считая пока, что $V$ не зависит от $z$ [II, 131]:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + k^2 V = 0.$$

Мы уже интегрировали такое уравнение при помощи разделения переменных раньше и знаем, что его решения имеют вид $Z_p(k\rho)\begin{matrix}\cos p\varphi \\ \sin p\varphi\end{matrix}$, где $Z_p(z)$ — любое решение уравнения Бесселя с параметром $p$.

Считая $p = n$ целым, получаем однозначные решения. Если возьмем функцию Бесселя, то получим решения

$$e^{-i\omega t} J_n(k\rho)\begin{matrix}\cos n\varphi \\ \sin n\varphi\end{matrix},$$

вещественная часть которых

$$\cos \omega t J_n(k\rho)\begin{matrix}\cos n\varphi \\ \sin n\varphi\end{matrix}$$

дает стоячую волну. Если для решения возьмем первую функцию Ханкеля, то, принимая во внимание асимптотическое выражение функции Ханкеля при большом аргументе, будем иметь, ограничиваясь первыми членами, следующее асимптотическое представление:

$$e^{-i\omega t} H_p^{(1)}(k\rho) = e^{i\left(k\rho - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - \omega t\right)} \sqrt{\frac{2}{\pi k\rho}} [1 + O(\rho^{-1})],$$

т. е. *на бесконечности мы имеем распространяющуюся волну, фаза которой уходит на бесконечность.* Про такие решения будем говорить, что они *удовлетворяют принципу излучения.* Если же мы вместо множителя $e^{-i\omega t}$ взяли бы множитель $e^{i\omega t}$, то должны были бы для того, чтобы удовлетворить принципу излучения, в качестве второго множителя брать вторую функцию Ханкеля, так как согласно асимптотическому выражению мы имеем следующее асимптотическое равенство:

$$e^{i\omega t} H_n^{(2)}(k\rho) = e^{i\left(\omega t - k\rho + \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \sqrt{\frac{2}{\pi k\rho}} [1 + O(\rho^{-1})].$$

Рассмотрим теперь общий случай, когда функция $V$ зависит и от координаты $z$. Уравнение (115) будет при этом иметь вид [II, 131]

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + k^2 V = 0.$$

Ищем его решение в виде

$$V = R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z).$$

Применяя обычный метод разделения переменных, найдем решение уравнения

$$Z_p\left(\sqrt{k^2-h^2}\,\rho\right) e^{\pm ihz} \begin{matrix}\cos p\varphi \\ \sin p\varphi\end{matrix}, \tag{117}$$

где $Z_p(z)$ — любое решение уравнения Бесселя. Полагая $k^2-h^2=\lambda^2$ и рассматривая случай однозначных решений ($p=n$ — целому положительному числу), мы будем иметь следующие решения:

$$J_n(\lambda\rho)\, e^{\sqrt{\lambda^2-k^2}\cdot z} \begin{matrix}\cos n\varphi \\ \sin n\varphi\end{matrix} \tag{118}$$

и

$$H_n^{(1)}(\lambda\rho)\, e^{\sqrt{\lambda^2-k^2}\cdot z} \begin{matrix}\cos n\varphi \\ \sin n\varphi\end{matrix}. \tag{119}$$

Первое из этих решений остается конечным при $\rho=0$ и дает стоячую волну. Второе решение удовлетворяет принципу излучения. Решениями первого типа обычно пользуются в том случае, когда область, в которой происходят колебания, есть внутренняя часть цилиндра, содержащая ось $\rho=0$. Решения второго типа применяются для части пространства, находящегося вне цилиндра. В задачах дифракции приходится часто пользоваться и многозначными решениями, для которых $p$ не есть целое число.

Рассмотрим одну задачу частного вида. Уравнение (115) имеет очевидное решение $e^{ikx}=e^{ik\rho\cos\varphi}$. Умножая его на $e^{-i\omega t}$, получим решение $e^{i(kx-\omega t)}$, которое представляет собою элементарную плоскую волну, распространяющуюся вдоль оси $X$. Положим, что эта плоская волна имеет место не во всем безграничном пространстве, но лишь вне цилиндра $\rho=a$, причем на этом цилиндре должно быть выполнено предельное условие:

$$V=0 \quad (\text{при } \rho=a).$$

Чтобы удовлетворить этому предельному условию, мы должны добавить к решению $e^{ikx}$ уравнения (115) еще некоторое другое решение этого уравнения (добавочное возмущение, получаемое в результате дифракции), причем это добавочное решение должно обязательно удовлетворить принципу излучения и быть однозначным решением. Принимая во внимание сказанное выше и независимость основного решения от $z$, мы будем искать это добавочное решение, пользуясь показательными функциями вместо тригонометрических, в виде линейной комбинации решений вида (119) при $\lambda=k$:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n H_n^{(1)}(k\rho)\, e^{in\varphi} \qquad (\rho>a). \tag{120}$$

Нам надо только определить коэффициенты $a_n$ из предельного условия. Вспоминая формулу (37) и полагая там $t=ie^{i\varphi}$ и $z=k\rho$, мы можем написать основное заданное решение в виде

$$e^{ikx}=e^{ik\rho\cos\varphi}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n J_n(k\rho)\, e^{in\varphi}. \tag{121}$$

В силу предельного условия мы должны иметь

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(ka)\, e^{in\varphi} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n H_n^{(1)}(ka)\, e^{in\varphi} = 0,$$

и мы получаем для коэффициентов $a_n$ следующие выражения:

$$a_n = -i^n \frac{J_n(ka)}{H_n^{(1)}(ka)}.$$

Окончательное решение задачи будет, следовательно, иметь форму:

$$V = e^{ikx} - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n \frac{J_n(ka)}{H_n^{(1)}(ka)} H_n^{(1)}(k\rho)\, e^{in\varphi} \qquad (\rho > a).$$

Рассмотренная задача имеет применение в некоторых частных случаях дифракции электромагнитных волн относительно бесконечного проводящего цилиндра. Полученные ряды представляются практически удобными лишь в случае сравнительно большой длины волны.

Представляется интересным сравнить решение задачи о дифракции элементарной плоской волны с решением задачи о колебании круглой мембраны [II, 182]. Отметим прежде всего, что в рассмотренной только что задаче о дифракции плоской волны число $k$ является данным (оно определяется частотой падающей волны $\omega$), тогда как в задаче колебания мембраны оно определялось из предельных условий. В задаче дифракции коэффициенты разложения определяются из предельного условия, а в задаче колебания мембраны коэффициенты разложения определялись из начального условия, т. е. из картины колебаний при $t = 0$. В задаче дифракции мы вовсе не имеем начального условия, так как мы рассматриваем не общую задачу дифракции любого начального возмущения, но лишь установившийся синусоидальный режим в отношении времени с заданной частотой $\omega$.

**156. Волновое уравнение в сферических координатах.** Рассмотрим теперь уравнение (115) в сферических координатах. Оно будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_1 V + k^2 V = 0.$$

Ищем его решение в обычной форме:

$$V = f(r)\, Y(\theta, \varphi). \tag{122}$$

Подставляя в уравнение и разделяя переменные, получим

$$\frac{f''(r)}{f(r)} + \frac{2}{r}\frac{f'(r)}{f(r)} + \frac{1}{r^2}\frac{\Delta_1 Y(\theta, \varphi)}{Y(\theta, \varphi)} + k^2 = 0,$$

где $\Delta_1 Y$ определяется формулой (71) из [136]. Мы приходим, таким образом, к двум уравнениям следующего вида:

$$\Delta_1 Y + \lambda Y = 0 \tag{123}$$

и

$$f''(r) + \frac{2}{r} f'(r) + \left(k^2 - \frac{\lambda}{r^2}\right) f(r) = 0. \tag{124}$$

Уравнение (123) совпадает с тем, которое мы имели при изучении сферических функций. Считая решение однозначным и непрерывным

получаем для постоянной $\lambda$ следующие возможные значения:

$$\lambda_n = n(n+1) \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

и им будут соответствовать решения уравнения (123), представляющие собою обычные сферические функции $Y_n(\theta, \varphi)$. Уравнение (124) переписывается в виде

$$f_n''(r) + \frac{2}{r} f_n'(r) + \left(k^2 - \frac{n(n+1)}{r^2}\right) f_n(r) = 0. \qquad (125)$$

Введем вместо $f(r)$ новую искомую функцию $R(r)$ по формуле

$$f_n(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} R_n(r).$$

Подставляя в уравнение (125), мы получим для $R_n(r)$ уравнение вида

$$R_n''(r) + \frac{1}{r} R_n'(r) + \left(k^2 - \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{r^2}\right) R_n(r) = 0,$$

и, таким образом, $R_n(r)$ есть $Z_{n+\frac{1}{2}}(kr)$, где $Z_{n+\frac{1}{2}}(r)$ есть решение уравнения Бесселя с параметром $p = n + \frac{1}{2}$, и согласно (122) мы имеем

$$V = \frac{Z_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{r}} Y_n(\theta, \varphi) \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \qquad (126)$$

Заметим, что мы имеем здесь как раз тот случай уравнения Бесселя, когда его решения выражаются в конечном виде через элементарные функции. Выбор решения $Z_{n+\frac{1}{2}}(kr)$ определяется, как и в предыдущем номере, физическими условиями задачи. Обычно вводят в рассмотрение следующие три функции:

$$\left.\begin{aligned} &\zeta_n^{(1)}(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(\rho), \quad \zeta_n^{(2)}(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(\rho), \\ &\psi_n(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} J_{n+\frac{1}{2}}(\rho) = \frac{1}{2}\left[\zeta_n^{(1)}(\rho) + \zeta_n^{(2)}(\rho)\right], \end{aligned}\right\} \qquad (127)$$

причем постоянный множитель $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ добавлен для удобства вычислений. В частности, при $n = 0$ мы получаем согласно [149]

$$\zeta_0^{(1)}(\rho) = -i\frac{e^{i\rho}}{\rho}, \quad \zeta_0^{(2)} = i\frac{e^{-i\rho}}{\rho}, \quad \psi_0(\rho) = \frac{\sin\rho}{\rho}.$$

Те частные решения, которые не зависят от $\varphi$, имеют вид

$$\frac{Z_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{r}} P_n(\cos\theta),$$

и при $n=0$ имеем

$$\frac{Z_{\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{r}}.$$

Чтобы получить решения основного уравнения (113), мы должны еще помножить решения (126) на $e^{\pm i\omega t}$ или, что то же, на $\cos\omega t$ и $\sin\omega t$, где $\omega$ и $k$ связаны соотношением (116). Если применим к уравнению (113) обычное разделение переменных, полагая $U=T(t)\times$ $\times V(x, y, z)$, то для $V$ получим уравнение (115), а для $T(t)$ будем иметь

$$T''(t)+a^2k^2T(t)=0 \qquad (a^2k^2=\omega^2),$$

что и дает нам указанные выше функции, зависящие от $t$. Но до сих пор мы считали, что $k$ (или $\omega$) отлично от нуля. Если $k=0$, то мы должны брать $T(t)=A+Bt$ и для $V$ получаем просто уравнение Лапласа $\Delta V=0$. Это приводит нас, таким образом, еще к решениям вида

$$(A+Bt)\,r^nY_n(\theta, \varphi), \tag{128}$$

которые надо присоединить к решениям (126).

Здесь, как и в предыдущем случае цилиндрических координат, можно провести до конца решение задачи относительно колебаний внутри сферы при заданных предельных и начальных условиях, а также задачу дифракции плоской волны относительно сферы.

Положим сначала, что требуется найти решение волнового уравнения

$$\frac{\partial^2U}{\partial t^2}=a^2\,\Delta U, \tag{129}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$U\Big|_{t=0}=f_1(r, \theta, \varphi), \quad \frac{\partial U}{\partial t}\Big|_{t=0}=f_2(r, \theta, \varphi), \ (r<a) \tag{130}$$

и предельному условию

$$\frac{\partial U}{\partial r}\Big|_{r=a}=0. \tag{131}$$

Обращаясь к решениям (126) и принимая во внимание требования конечности решения при $r=0$, берем $Z_{n+\frac{1}{2}}(kr)$ равным $J_{n+\frac{1}{2}}(kr)$ и определяем при заданном $n$ числа $k$ из предельного условия

$$\frac{d}{dr}\frac{J_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{r}}\Bigg|_{r=0}=0 \text{ или } J_{n+\frac{1}{2}}(ka)-2kaJ'_{n+\frac{1}{2}}(ka)=0. \tag{132}$$

В дальнейшем обозначим положительные корни этого уравнения через

$$k_m^{(n)} \qquad (m=0, 1, 2, \ldots).$$

Кроме того, решения (128) удовлетворяют предельному условию (131) при $n=0$. Согласно методу Фурье мы должны искать решение нашей задачи в виде

$$U=A+Bt+ \\ +\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left[Y_n^{(1)}(\theta,\varphi)\cos ak_m^{(n)}t+Y_n^{(2)}(\theta,\varphi)\sin ak_m^{(n)}t\right]\frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(k_m^{(n)}r\right)}{\sqrt{r}}. \quad (133)$$

Остается определить еще сферические функции $Y_n^{(1)}(\theta,\varphi)$ и $Y_n^{(2)}(\theta,\varphi)$ порядка $n$ из начальных условий (130). Заметим при этом, что уравнение (132) имеет как раз ту форму, которую мы рассматривали в [151], и мы сможем определить упомянутые сферические функции, пользуясь ортогональностью функций Бесселя. Более подробно мы не будем этого выяснять.

Обратимся теперь к задаче дифракции элементарной плоской волны, определяемой решением $e^{i(kz-\omega t)}$ уравнения (129), относительно сферы $r=a$ при предельном условии

$$U|_{r=a}=0.$$

В данном случае мы взяли волну, распространяющуюся вдоль оси $Z$. Вместо формулы (121) в сферических координатах имеет место формула

$$e^{ikz}=e^{ikr\cos\theta}=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\,i^n\psi_n(kr)\,P_n(\cos\theta), \quad (134)$$

где $P_n(x)$ — обычные полиномы Лежандра. Доказательства этой формулы мы приводить не будем. Принимая во внимание принцип излучения, мы будем искать дополнительное возмущение в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\zeta_n^{(1)}(kr)\,P_n(\cos\theta). \quad (135)$$

Коэффициенты $a_n$ определяются из того условия, что сумма решений (134) и (135) должна обращаться в нуль при $r=a$, что даст нам

$$a_n=-\frac{(2n+1)\,i^n\psi_n(ka)}{\zeta_n^{(1)}(ka)}.$$

## § 3. ПОЛИНОМЫ ЭРМИТА И ЛАГЕРРА

**157. Линейный осциллятор и полиномы Эрмита.** Уравнение Шредингера, как известно, имеет вид

$$\frac{h^2}{2m}\Delta\psi+(E-V)\psi=0.$$

Будем считать, что функция $\psi$ зависит только от $x$ и что потенциал $V$ определяется формулой $V=\frac{k}{2}x^2$, что соответствует случаю упругой силы $f=-kx$. Мы приходим, таким образом, к уравнению вида

$$\frac{h^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}+\left(E-\frac{k}{2}x^2\right)\psi=0,$$

и значения параметра $E$ должны определяться из того условия, что решение уравнения остается конечным во всем промежутке $-\infty < x < +\infty$. Введем две новые постоянные:

$$\alpha^2 = \frac{mk}{h^2}, \quad \lambda = \frac{2mE}{h^2} \qquad (\alpha > 0). \tag{1}$$

Из них $\alpha^2$ является заданной и $\lambda$ играет роль параметра вместо $E$. Уравнение перепишется в виде

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + (\lambda - \alpha^2 x^2)\,\psi = 0. \tag{2}$$

Это линейное уравнение имеет иррегулярную особую точку $x = \infty$. Будем поступать так же, как это мы делали в [116], а именно положим

$$\psi = e^{\omega(x)}\, u(x)$$

и определим функцию $\omega(x)$ из того условия, чтобы в коэффициенте при искомой функции $u(x)$ в дифференциальном уравнении уничтожился член, содержащий $x^2$. Дифференцируя и подставляя в уравнение (2), получим для $u(x)$ уравнение

$$u''(x) + 2\omega'(x)\,u'(x) + [\omega''(x) + \omega'^2(x) + \lambda - \alpha^2 x^2]\,u(x) = 0,$$

и, чтобы избавиться от слагаемого $-\alpha^2 x^2$, мы положим

$$\omega(x) = -\frac{\alpha}{2}\,x^2,$$

причем знак минус выбран нами для того, чтобы получить затухание при $x \to \pm\infty$. Получаем, таким образом,

$$\psi(x) = e^{-\frac{\alpha}{2}x^2}\, u(x), \tag{3}$$

где для $u(x)$ имеет место уравнение

$$\frac{d^2u}{dx^2} - 2\alpha x\,\frac{du}{dx} + (\lambda - \alpha)\,u = 0. \tag{4}$$

Если при некотором выборе значений параметра $\lambda$ это уравнение будет иметь решение в виде полинома, то при этом функция $\psi(x)$ будет, очевидно, затухать на бесконечности и, следовательно, удовлетворять поставленным предельным условиям. Мы будем, таким образом, искать решение уравнения (4) в виде полиномов. Введем вместо $x$ новую независимую переменную

$$\xi = \sqrt{\alpha}\,x,$$

отсюда

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{d\xi}\sqrt{\alpha}; \quad \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2u}{d\xi^2}\,\alpha,$$

и, подставляя в уравнение (4), будем иметь следующее уравнение для $u$:

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} - 2\xi\frac{du}{d\xi} + \left(\frac{\lambda}{\alpha} - 1\right)u = 0. \tag{5}$$

Начало координат является обыкновенной точкой для этого уравнения, и можно искать решение его в виде обычного степенного ряда:

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^k$$

с произвольными двумя первыми коэффициентами $a_0$ и $a_1$. Подставляя в уравнение (5), получаем соотношение для последовательного определения коэффициентов

$$(k+2)(k+1)\,a_{k+2} - 2ka_k + \left(\frac{\lambda}{\alpha} - 1\right)a_k = 0,$$

откуда

$$a_{k+2} = \frac{2k - \left(\frac{\lambda}{\alpha} - 1\right)}{(k+2)(k+1)}\,a_k \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{6}$$

Покажем теперь, каким образом можно получить решение уравнения в виде полинома степени $n$. Будем считать, что параметр $\lambda$ выбран из условия

$$\frac{\lambda}{\alpha} - 1 = 2n,$$

т. е.

$$\lambda_n = (2n+1)\,\alpha. \tag{7}$$

При этом формула (6) даст нам последовательно

$$a_{n+2} = a_{n+4} = a_{n+6} = \ldots = 0. \tag{8}$$

Если $n$ — число четное, то мы положим, кроме того, $a_1 = 0$ и $a_0 \neq 0$. В силу (6) мы будем иметь при этом $a_1 = a_3 = a_5 = \ldots = 0$, а все $a_k$ с четными значками до $k = n$ включительно будут отличны от нуля, а остальные — нули в силу (8). Если же $n$ — нечетно, то надо, наоборот, положить $a_0 = 0$ и $a_1 \neq 0$. Мы получаем таким образом решение в виде полиномов, причем формула (7) дает соответствующие собственные значения параметра $\lambda$. Подставляя эти собственные значения в уравнение (5) и обозначая через $H_n(\xi)$ введенные полиномы, получаем для них дифференциальное уравнение вида

$$H_n''(\xi) - 2\xi H_n'(\xi) + 2nH_n(\xi) = 0. \tag{9}$$

Согласно (3), для функций $\psi_n(\xi)$ будем иметь

$$\psi_n(\xi) = e^{-\frac{1}{2}\xi^2} H_n(\xi). \tag{10}$$

Полиномы $H_n(\xi)$ называются обычно *полиномами Эрмита*, а функции (10) — *функциями Эрмита*.

Для функций Эрмита мы имеем уравнение (2), где мы должны только перейти от переменной $x$ к переменной $\xi$. После этого уравнение примет вид

$$\frac{d^2\psi_n(\xi)}{d\xi^2} + \left(\frac{\lambda_n}{\alpha} - \xi^2\right)\psi_n(\xi) = 0 \qquad \left(\frac{\lambda_n}{\alpha} = 2n+1\right). \tag{11}$$

Выведем теперь одну простую формулу для полиномов Эрмита. Положим $v = e^{-\xi^2}$, откуда $v' = -2\xi v$. Дифференцируя это равенство $(n+1)$ раз и применяя к производной произведения формулу Лейбница, будем иметь

$$v^{(n+2)} = -2\xi v^{(n+1)} - (n+1)\,2v^{(n)}$$

или

$$v^{(n+2)} + 2\xi v^{(n+1)} + 2(n+1)\,v^{(n)} = 0. \tag{12}$$

Введем новую функцию $K_n(\xi) = e^{\xi^2}v^{(n)}$ и покажем, что для нее имеет место уравнение (9). Функция $K_n(\xi)$ есть, очевидно, полином степени $n$ от $\xi$:

$$K_n(\xi) = e^{\xi^2}\frac{d^n}{d\xi^n}(e^{-\xi^2}). \tag{13}$$

Подставляя выражение

$$v^{(n)} = e^{-\xi^2}K_n(\xi)$$

в уравнение (12), получаем действительно для $K_n(\xi)$ уравнение (9).

Таким образом, полиномы Эрмита, определенные пока лишь с точностью до произвольного постоянного множителя, совпадают с функциями (13). Заметим, что второе решение уравнения (9) не может быть полиномом, так как это уравнение имеет точку $\xi = \infty$ иррегулярной особой точкой. Для того чтобы получить положительный старший коэффициент, припишем к выражению (13) постоянный множитель $(-1)^n$ и определим полином Эрмита следующей формулой:

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2}\frac{d^n}{d\xi^n}(e^{-\xi^2}). \tag{14}$$

Выпишем первые три полинома Эрмита:

$$H_0(\xi) = 1, \quad H_1(\xi) = 2\xi, \quad H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2.$$

Вообще $H_n(\xi)$ будет содержать только четные степени $\xi$ при четном $n$ и только нечетные степени при нечетном $n$. Это вытекает непосредственно из описанного выше метода определения коэффициентов $a_k$. Из формулы (14) вытекает, что старший коэффициент при $\xi^n$ в полиноме $H_n(\xi)$ равен $2^n$. Это непосредственно следует из того, что дифференцирование показателя $(-\xi^2)$ дает $(-2\xi)$.

Можно показать, на чем мы не останавливаемся, что функции Эрмита представляют собой совокупность всех решений уравнения (2), удовлетворяющих предельным условиям.

**158. Свойство ортогональности.** Рассмотрим две различные функции Эрмита $\psi_n(\xi)$ и $\psi_m(\xi)$. Мы имеем для них уравнения

$$\frac{d^2\psi_n(\xi)}{d\xi^2} + \left(\frac{\lambda_n}{\alpha} - \xi^2\right)\psi_n(\xi) = 0,$$
$$\frac{d^2\psi_m(\xi)}{d\xi^2} + \left(\frac{\lambda_m}{\alpha} - \xi^2\right)\psi_m(\xi) = 0.$$

Умножая первое из них на $\psi_m(\xi)$, второе — на $\psi_n(\xi)$, вычитая и интегрируя по промежутку $(-\infty, +\infty)$, получим, как всегда, свойство ортогональности функций Эрмита:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n(\xi)\,\psi_m(\xi)\,d\xi = 0 \qquad (n \neq m) \tag{15}$$

или, в силу (10),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} H_n(\xi)\,H_m(\xi)\,d\xi = 0 \qquad (n \neq m), \tag{16}$$

т. е. можно сказать, что *полиномы Эрмита ортогональны в промежутке* $(-\infty, +\infty)$ с весом $e^{-\xi^2}$. Вычислим теперь интеграл (16) при $n = m$. Согласно формуле (14) будем иметь

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} H_n^2(\xi)\,d\xi = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(\xi)\frac{d^n(e^{-\xi^2})}{d\xi^n}\,d\xi$$

или, интегрируя по частям,

$$I_n = (-1)^n H_n(\xi)\frac{d^{n-1}(e^{-\xi^2})}{d\xi^{n-1}}\Bigg|_{\xi=-\infty}^{\xi=+\infty} + (-1)^{n+1}\int_{-\infty}^{+\infty} H_n'(\xi)\frac{d^{n-1}(e^{-\xi^2})}{d\xi^{n-1}}\,d\xi.$$

Внеинтегральный член представляет собою произведение $e^{-\xi^2}$ на полином, а потому он обращается в нуль при $\xi = \pm\infty$. Произведя дальнейшее интегрирование по частям, получим

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} H_n^{(n)}(\xi)\,e^{-\xi^2}\,d\xi$$

или, принимая во внимание, что старший коэффициент полинома $H_n(\xi)$ равен $2^n$,

$$I_n = 2^n n! \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2}\,d\xi$$

и окончательно будем иметь [II, 78]

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} H_n^2(\xi)\, d\xi = 2^n n! \sqrt{\pi}. \tag{17}$$

Можно построить ряды, аналогичные рядам Фурье и расположенные по полиномам Эрмита так же, как это мы делали и для полиномов Лежандра [133]. Но только в данном случае вместо конечного промежутка $(-1, 1)$ мы будем иметь бесконечный промежуток $(-\infty, +\infty)$. В этом промежутке получится разложение вида

$$f(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n H_n(\xi), \tag{18}$$

где коэффициенты $a_n$, в силу предыдущего условия ортогональности и формулы (17), определяются следующим образом:

$$a_n = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, e^{-\xi^2} H_n(\xi)\, d\xi. \tag{19}$$

Для того чтобы разложение (18) имело место, необходимо, конечно, чтобы функция $f(\xi)$ удовлетворяла некоторым условиям.

**159. Производящая функция.** Принимая во внимание (14) и пользуясь формулой Коши, выражающей производную функции $e^{-z^2}$ в виде контурного интеграла, мы можем написать

$$e^{-\xi^2} H_n(\xi) = (-1)^n \frac{n!}{2\pi i} \int_{l_\xi} \frac{e^{-z^2}}{(z-\xi)^{n+1}}\, dz,$$

где $l_\xi$ есть любой простой замкнутый контур, обходящий вокруг точки $z = \xi$. Введем вместо $z$ новую переменную интегрирования $t$ по формуле

$$z = \xi - t.$$

Совершая замену переменных в интеграле и сокращая обе части на множитель $e^{-\xi^2}$, получим

$$\frac{1}{n!} H_n(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l_0'} \frac{e^{-t^2+2t\xi}}{t^{n+1}}\, dt,$$

где $l_0'$ есть простой замкнутый контур, обходящий вокруг начала. Из этой формулы непосредственно вытекает, что $\frac{1}{n!} H_n(\xi)$ есть коэффициент при $t^n$ в разложении функции

$$e^{-t^2+2t\xi} \tag{20}$$

в ряд Маклорена, т. е. *функция* (20) *является производящей функцией для полиномов Эрмита, умноженных на постоянный множитель* $\frac{1}{n!}$:

$$e^{-t^2+2t\xi}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}H_n(\xi)\,t^n. \tag{21}$$

Из этой формулы легко получаются основные соотношения для полиномов Эрмита. Дифференцируя тождество (21) по $\xi$, будем иметь

$$e^{-t^2+2t\xi}\cdot 2t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}H_n'(\xi)\,t^n$$

или

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{n!}H_n(\xi)\,t^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}H_n'(\xi)\,t^n$$

и, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $t$, получаем соотношение

$$H_n'(\xi)=2nH_{n-1}(\xi). \tag{22}$$

Продифференцируем теперь тождество (21) по $t$:

$$e^{-t^2+2t\xi}\cdot(2\xi-2t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}H_n(\xi)\,t^{n-1}$$

или

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\xi}{n!}H_n(\xi)\,t^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{n!}H_n(\xi)\,t^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}H_n(\xi)\,t^{n-1},$$

откуда опять сравнением коэффициентов получаем еще следующее соотношение:

$$H_{n+1}(\xi)=2\xi H_n(\xi)-2nH_{n-1}(\xi). \tag{23}$$

Определим, наконец, свободный член в полиномах Эрмита, т. е. $H_n(0)$. При нечетном $n$ это будет, очевидно, нуль, так как нечетный полином Эрмита содержит только нечетные степени $\xi$. Для четного $n$ имеем прежде всего $H_0(0)=1$. Затем формула (23) при $n=1$ и $\xi=0$ дает

$$H_2(0)=-2H_0(0)=-2.$$

Та же формула при $n=3$ и $\xi=0$ дает

$$H_4(0)=-2\cdot 3H_2(0)=2^2\cdot 1\cdot 3.$$

Далее, при $n=5$ и $\xi=0$ получаем

$$H_6(0)=-2^3\cdot 1\cdot 3\cdot 5$$

и вообще

$$H_{2n}(0)=(-1)^n\cdot 2^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1). \tag{24}$$

Отметим еще, что если применить к формуле (14) несколько раз теорему Ролля, то можно показать, что все корни $H_n(\xi)$ вещественны и различны. Совершенно аналогичные рассуждения мы применяли в [105], чтобы показать, что все корни $P_n(x)$ различны и находятся в промежутке $(-1, 1)$.

Иногда вводят полиномы Эрмита несколько иначе, чем это мы сделали выше, а именно вместо формулы (14) определяют полиномы Эрмита формулой

$$\tilde{H}_n(\xi)=\frac{1}{n!}e^{\frac{\xi^2}{2}}\frac{d^n}{d\xi^n}e^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

Разница получается лишь в постоянных множителях, из которых один стоит перед полиномом, а другой относится к аргументу $\xi$.

**160. Параболические координаты и функции Эрмита.** Отметим один частный случай замены переменных в волновом уравнении

$$\frac{\partial^2U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2U}{\partial y^2}+k^2U=0. \tag{25}$$

Введем вместо $x$ и $y$ новые переменные $\xi$ и $\eta$ и положим, что преобразование переменных совершается при помощи формулы

$$x+iy=f(\zeta)=\varphi(\xi,\ \eta)+i\psi(\xi,\ \eta)\qquad(\zeta=\xi+i\eta),$$

где $f(\zeta)$ — регулярная функция комплексного переменного $\zeta$. По правилу дифференцирования сложных функций будем иметь

$$\frac{\partial U}{\partial\xi}=\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial\xi};\quad\frac{\partial U}{\partial\eta}=\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}$$

и, далее,

$$\frac{\partial^2U}{\partial\xi^2}=\frac{\partial^2U}{\partial x^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)^2+2\frac{\partial^2U}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}+\frac{\partial^2U}{\partial y^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)^2+\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2},$$

$$\frac{\partial^2U}{\partial\eta^2}=\frac{\partial^2U}{\partial x^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)^2+2\frac{\partial^2U}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}+\frac{\partial^2U}{\partial y^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)^2+\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}.$$

Пользуясь уравнениями Коши — Римана

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}=\frac{\partial\psi}{\partial\eta},\quad\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}=-\frac{\partial\psi}{\partial\xi},$$

а также тем, что $\varphi(\xi, \eta)$ и $\psi(\xi, \eta)$ удовлетворяют уравнению Лапласа, нетрудно проверить следующую формулу:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi}\right)^2\right]$$

или

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)|f'(\zeta)|^2.$$

Рассмотрим частный случай

$$f(\zeta) = \frac{1}{2}(\xi + i\eta)^2; \quad f'(\zeta) = \xi + i\eta$$

или

$$\varphi(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2); \quad \psi(\xi, \eta) = \xi\eta.$$

Координатные линии $\xi = C_1$ и $\eta = C_2$ будут на плоскости $(x, y)$ изображаться параболами [**34**], а потому новые координаты $\xi$ и $\eta$ называются параболическими. Совершая преобразование в волновом уравнении указанным выше способом, будем иметь

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + k^2 |f'(\zeta)|^2 U = 0,$$

и, следовательно, уравнение (25) в новых переменных будет в данном случае выглядеть следующим образом:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + k^2(\xi^2 + \eta^2) U = 0. \tag{26}$$

Будем искать его решение в виде произведения двух множителей, из которых один зависит от $\xi$, а другой — от $\eta$:

$$U = X(\xi)\, Y(\eta).$$

Подставляя в уравнение (26) и разделяя переменные обычным образом, получим

$$\frac{X''(\xi)}{X(\xi)} + k^2\xi^2 = -\frac{Y''(\eta)}{Y(\eta)} - k^2\eta^2.$$

Обе части полученного тождества должны равняться одной и той же постоянной, которую мы обозначим через $(-\beta^2)$. Таким образом, мы придем к следующим двум уравнениям:

$$X''(\xi) + (k^2\xi^2 + \beta^2) X(\xi) = 0, \qquad Y''(\eta) + (k^2\eta^2 - \beta^2)\, Y(\eta) = 0. \tag{27}$$

Напомним дифференциальное уравнение (11), которому удовлетворяли функции Эрмита

$$\psi_n''(\xi) + (2n + 1 - \xi^2)\, \psi_n(\xi) = 0, \tag{28}$$

где для функции Эрмита имеем следующую формулу:

$$\psi_n(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}} H_n(\xi) = (-1)^n e^{\frac{\xi^2}{2}} \frac{d^n}{d\xi^n}(e^{-\xi^2}). \tag{29}$$

Рассмотрим первое из уравнений (27) и введем вместо $\xi$ новую переменную $\xi_1$ по формуле

$$\xi_1 = \sqrt{ik}\,\xi.$$

Отсюда

$$\frac{d}{d\xi} = \sqrt{ik}\,\frac{d}{d\xi_1}, \quad \frac{d^2}{d\xi^2} = ik\,\frac{d^2}{d\xi_1^2},$$

и, подставляя в (27), придем к уравнению

$$\frac{d^2X}{d\xi_1^2} + \left(\frac{\beta^2}{ik} - \xi_1^2\right) X = 0. \tag{30}$$

Если мы определим постоянную $\beta^2$ равенством

$$\beta_n^2 = (2n+1)\,ik,$$

где $n$ — некоторое целое положительное число или нуль, то преобразуем уравнение (30) к виду (28). Таким образом, в новой переменной $\xi_1$ за функцию $X$ мы можем взять функцию Эрмита

$$X_n = C_n\psi_n(\xi_1) = C_n e^{-\frac{\xi_1^2}{2}} H_n(\xi_1)$$

или, возвращаясь к старой переменной, получим

$$X_n = C_n\psi_n(\sqrt{ik}\,\xi) = C_n e^{-\frac{ik\,\xi^2}{2}} H_n(\sqrt{ik}\,\xi),$$

где $C_n$ — произвольная постоянная.

Точно так же, рассматривая второе из уравнений (27) и вводя вместо $\eta$ новую переменную

$$\eta_1 = i\sqrt{ik}\,\eta,$$

мы приведем и второе уравнение к виду (28) при том же самом значении параметра $\beta_n$. Возвращаясь к старой переменной, будем иметь

$$Y_n = D_n\psi_n(\eta_1) = D_n e^{\frac{ik\eta^2}{2}} H_n(i\sqrt{ik}\,\eta).$$

Таким образом, мы получаем бесчисленное можество решений волнового уравнения (25) следующего вида:

$$U_n = A_n\psi_n(\sqrt{ik}\,\xi)\,\psi_n(i\sqrt{ik}\,\eta) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{31}$$

Эти решения образуют полную систему функций и являются аналогом функций Бесселя для случая цилиндрических координат. Здесь так же, как и там, можно построить аналог и функциям Ханкеля, что дает возможность, например, решать задачи дифракции относительно параболического цилиндра.

**161. Полиномы Лагерра.** Исследование состояния электрона, находящегося в кулоновом поле, а также некоторые другие задачи современной физики приводят к линейному уравнению второго порядка следующего вида:

$$w'' + \frac{1}{z}w' + \left(2\varepsilon + \frac{2}{z} - \frac{s^2}{4z^2}\right) w = 0. \tag{32}$$

Здесь $s$ — заданное вещественное неотрицательное число и $\varepsilon$ — вещественный параметр. Задача состоит в нахождении таких значений этого параметра, при которых уравнение (32) допускает решение, которое остается ограниченным на всем отрезке $0 \leqslant z < +\infty$ вещественной оси.

Разберем область отрицательных значений параметра $\varepsilon$ и введем в этом случае вместо $z$ новую независимую переменную по формуле

$$x = z\sqrt{-8\varepsilon}$$

и вместо параметра $2\varepsilon$ введем новый положительный параметр по формуле

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{-2\varepsilon}}.$$

После таких преобразований уравнение (32), как нетрудно проверить, приводится к виду

$$x\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{dw}{dx} + \left(-\frac{x}{4} + \lambda - \frac{s^2}{4x}\right)w = 0. \tag{33}$$

Точка $x = 0$ является регулярной особой точкой для этого уравнения, и определяющее уравнение в этой точке будет иметь вид

$$\sigma(\sigma - 1) + \sigma - \frac{s^2}{4} = 0.$$

Это последнее уравнение имеет корни $\sigma = \pm\frac{s}{2}$. Принимая во внимание требование ограниченности решений в начале координат, мы должны будем взять корень $\sigma = \frac{s}{2}$, т. е. выделить из нашего решения множитель $x^{\frac{s}{2}}$, и наше решение вблизи начала должно иметь вид

$$w = x^{\frac{s}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \quad (b_0 \neq 0). \tag{34}$$

В окрестности бесконечно далекой точки мы, согласно [116], будем пытаться формально удовлетворить уравнению (33) выражением вида

$$e^{\alpha x} x^{\rho} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{x^k} \quad (c_0 \neq 0).$$

Квадратное уравнение для $\alpha$ будет

$$\alpha^2 - \frac{1}{4} = 0.$$

Оно даст нам два значения $\alpha = \pm\frac{1}{2}$, и соответствующие значения постоянной $\rho$ будут

$$\rho_1 = -\left(\lambda + \frac{1}{2}\right), \quad \rho_2 = \lambda - \frac{1}{2}.$$

Принимая во внимание условия ограниченности решения на бесконечности, мы должны взять то решение, которое на бесконечности имеет асимптотическое представление вида

$$e^{-\frac{x}{2}} x^{\lambda - \frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{x^k}. \tag{35}$$

Таким образом, задача сводится к определению тех значений $\lambda$, для которых решение вида (34) при аналитическом продолжении вдоль отрезка $(0, +\infty)$ имеет на бесконечности представление (35).

Предыдущие соображения, естественно, приводят к тому, чтобы вместо $w$ ввести новую искомую функцию $y$ по формуле

$$w = e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{s}{2}} y. \tag{36}$$

Подставляя $w$ в уравнение (33), мы получим для $y$ уравнение

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + (s + 1 - x)\frac{dy}{dx} + \left(\lambda - \frac{s+1}{2}\right)y = 0. \tag{37}$$

Это уравнение имеет вид уравнения из [**115**]. Принимая во внимание наши предыдущие соображения, мы должны найти решение уравнения (37), регулярное в начале и такое, что $w$ ограничено на бесконечности.

Если положим для краткости

$$\frac{s+1}{2} - \lambda = p, \tag{38}$$

то уравнение (37) сможем записать так:

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + (s + 1 - x)\frac{dy}{dx} - py = 0. \tag{39}$$

Если обозначить

$$F(\alpha, \gamma; x) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma}\frac{x}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{x^2}{2!} + \ldots, \tag{40}$$

то решение уравнения (39), регулярное в начале, будет [**115**]

$$y = C \cdot F(p, s + 1; x), \tag{41}$$

где $C$ — произвольная постоянная. Очевидно, что ряд (40) обрывается, если $\alpha$ равно нулю или целому отрицательному числу, и в этом случае наше решение будет удовлетворять требуемому условию на

бесконечности. Принимая во внимание (38), мы получаем, таким образом, следующее уравнение для определения параметра $\lambda$:

$$\frac{s+1}{2} - \lambda_n = -n,$$

откуда

$$\lambda_n = \frac{s+1}{2} + n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{42}$$

При таком значении параметра искомое решение уравнения (39) будет

$$Q_n(x) = C_n F(-n, s+1; x) = C_n\left[1 - \frac{n}{1!}\frac{x}{s+1} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{x^2}{(s+1)(s+2)}\cdots\right].$$

Выберем постоянную $C_n$ следующим образом:

$$C_n = (s+1)(s+2)\ldots(s+n) = \frac{\Gamma(s+n+1)}{\Gamma(s+1)},$$

откуда окончательно получаем следующее решение уравнения (39) в виде полинома от $x$ и $s$:

$$Q_n^{(s)}(x) = \frac{\Gamma(s+n+1)}{\Gamma(s+1)} F(-n, s+1; x) \tag{43}$$

или

$$Q_n^{(s)}(x) = (-1)^n\left[x^n - \frac{n}{1!}(s+n)x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}(s+n)(s+n-1)x^{n-1} - \ldots + (-1)^n(s+n)(s+n-1)\ldots(s+1)\right]. \tag{44}$$

Эти полиномы называются *обобщенными полиномами Лагерра.*

Можно показать, что формула (42) дает все значения параметра, при которых наша задача имеет решение, удовлетворяющее поставленным условиям в точках $x = 0$ и $x = +\infty$.

Пользуясь рассуждениями, совершенно аналогичными рассуждениям из [**105**], мы можем дать простое выражение обобщенных полиномов Лагерра. Ряд (40) является решением уравнения

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + (\gamma - x)\frac{dy}{dx} - \alpha y = 0. \tag{45}$$

Если продифференцировать его $m$ раз, то получим ряд

$$\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+m-1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+m-1)} F(\alpha+m, \gamma+m; x)$$

и, обозначая $F(\alpha, \gamma; x) = y_1$, видим, что производная порядка $m$:

$$y_1^{(m)} = F^{(m)}(\alpha, \gamma; x), \tag{46}$$

является решением уравнения (45), в котором $\alpha$ и $\gamma$ заменены на $\alpha+m$ и $\gamma+m$, т. е.

$$x\frac{d^2y_1^{(m)}}{dx^2}+(\gamma+m-x)\frac{dy_1^{(m)}}{dx}-(\alpha+m)y_1^{(m)}=0.$$

Умножая обе части этого уравнения на $x^{\gamma+m-1}e^{-x}$, мы можем переписать его в следующей форме:

$$\frac{d}{dx}\left[x^{\gamma+m}e^{-x}\frac{dy_1^{(m)}}{dx}\right]-(\alpha+m)x^{\gamma+m-1}e^{-x}y_1^{(m)}=0.$$

Дифференцируя это тождество $m$ раз, получим

$$\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}\left[x^{\gamma+m}e^{-x}\frac{dy_1^{(m)}}{dx}\right]=(\alpha+m)\frac{d^m}{dx^m}\left[x^{\gamma+m-1}e^{-x}y_1^{(m)}\right].$$

Образуя подобные равенства для $m=0, 1, \ldots, k-1$, перемножая их почленно и производя очевидные сокращения, будем иметь

$$\frac{d^k}{dx^k}\left[x^{\gamma+\alpha-1}e^{-x}y_1^{(k)}\right]=\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)x^{\gamma-1}e^{-x}y_1. \qquad (47)$$

Положим, что $\alpha$ равняется целому отрицательному числу $\alpha=-k$, так что ряд (40) представляет собою полином степени $k$, а $y_1^{(k)}$ есть постоянная

$$F^{(k)}(-k,\ \gamma;\ x)=\frac{-k(-k+1)(-k+2)\ldots(-k+k-1)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\ldots(\gamma+k-1)}=$$
$$=(-1)^k\frac{k!}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+k-1)}.$$

Формула (47) дает при этом

$$(-1)^k\frac{k!}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+k-1)}\frac{d^k}{dx^k}(x^{\gamma+k-1}e^{-x})=$$
$$=(-1)^k k!x^{\gamma-1}e^{-x}F(-k,\ \gamma;\ x),$$

так что окончательно получим

$$F(-k,\ \gamma;\ x)=\frac{x^{1-\gamma}e^x}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+k-1)}\frac{d^k}{dx^k}(x^{\gamma+k-1}e^{-x}).$$

В силу $\gamma=s+1$ будем иметь, таким образом, следующее выражение для обобщенных полиномов Лагерра:

$$Q_n^{(s)}(x)=x^{-s}e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^{s+n}e^{-x}). \qquad (48)$$

Эти полиномы являются решениями уравнения

$$x\frac{d^2y_n}{dx^2}+(s+1-x)\frac{dy_n}{dx}+ny_n=0.$$

Число $s$ мы считаем теперь вещественным и $>-1$.

Полиномы Лагерра совершенно аналогичны полиномам Эрмита, но только для них основным промежутком является не промежуток $(-\infty, +\infty)$, а промежуток $(0, +\infty)$. Формула (36) дает нам функции Лагерра, аналогичные функциям Эрмита:

$$\omega_n^{(s)}(x) = e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{s}{2}} Q_n^{(s)}(x) = x^{-\frac{s}{2}} e^{\frac{x}{2}} \frac{d^n}{dx^n}(x^{s+n}e^{-x}). \tag{49}$$

Эти функции являются решениями уравнения

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{d\omega}{dx}\right] + \left(\lambda_n - \frac{x}{4} - \frac{s^2}{4x}\right)\omega = 0. \tag{50}$$

Как всегда, нетрудно вывести свойства ортогональности этих функций:

$$\int_0^\infty \omega_m^{(s)}(x)\,\omega_n^{(s)}(x)\,dx = 0 \quad (m \neq n) \tag{51}$$

или, в силу (49),

$$\int_0^\infty x^s e^{-x} Q_m^{(s)}(x)\,Q_n^{(s)}(x)\,dx = 0 \quad (m \neq n). \tag{52}$$

Займемся теперь вычислением интеграла (52) при $m = n$. Согласно определению полиномов Лагерра, мы имеем

$$I_n = \int_0^\infty x^s e^{-x}\,[Q_n^{(s)}(x)]^2\,dx = \int_0^\infty Q_n^{(s)}(x)\,\frac{d^n}{dx^n}(x^{s+n}e^{-x})\,dx.$$

Интегрируя по частям, получим

$$I_n = Q_n^{(s)}(x)\,\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^{s+n}e^{-x})\Big|_{x=0}^{x=\infty} - \int_0^\infty \frac{dQ_n^{(s)}(x)}{dx}\,\frac{d^{n-1}(x^{s+n}e^{-x})}{dx^{n-1}}\,dx,$$

причем, как и для полиномов Эрмита, внеинтегральный член обращается в нуль. Производя многократное интегрирование по частям, придем окончательно к интегралу

$$I_n = (-1)^n \int_0^\infty x^{s+n}e^{-x}\,\frac{d^nQ_n^{(s)}(x)}{dx^n}\,dx.$$

Но $\frac{d^nQ_n^{(s)}(x)}{dx^n}$ есть произведение $n!$ на старший коэффициент полинома $Q_n^{(s)}(x)$. Применяя формулу Лейбница к производной, стоящей в формуле (48), нетрудно видеть, что этот старший коэффициент

равен $(-1)^n$, и, таким образом, мы можем написать

$$I_n = n! \int_0^\infty x^{s+n} e^{-x}\, dx$$

или, вспоминая определение функции $\Gamma(z)$, получаем окончательно

$$\int_0^\infty x^s e^{-x} [Q_n^{(s)}(x)]^2\, dx = n!\ \Gamma(s+n+1). \tag{53}$$

Можно рассматривать, так же как и для полиномов Эрмита, разложение произвольной функции $f(x)$ в ряд по полиномам Лагерра в промежутке $(0, +\infty)$.

Построим теперь производящую функцию для полиномов Лагерра. Согласно формуле (48) и теореме Коши, выражающей производную порядка $n$ от функции $z^{s+n}e^{-z}$ при $z = x$, можно написать

$$x^s e^{-x} Q_n^{(s)}(x) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{l_x} \frac{z^{s+n} e^{-z}}{(z-x)^{n+1}}\, dz,$$

где $l_x$ — малый замкнутый контур, обходящий вокруг точки $z = x$. Заметим, что функция $z^{s+n}e^{-z}$ будет регулярна на всей плоскости, кроме точки $z = 0$, где она имеет точку разветвления, если $s$ не есть целое число. Вводя вместо $z$ новую переменную интегрирования

$$t = \frac{z-x}{z}, \quad z = \frac{x}{1-t} = \frac{xt}{1-t} + x,$$

подставляя в интеграл и сокращая на $x^s e^{-x}$, мы получим

$$\frac{1}{n!} Q_n^{(s)}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l_0} e^{-\frac{xt}{1-t}} \frac{1}{(1-t)^{s+1}} \frac{dt}{t^{n+1}},$$

где $l_0$ — малый замкнутый контур, обходящий вокруг $t = 0$.

Отсюда видно, что $\frac{1}{n!} Q_n^{(s)}(x)$ суть коэффициенты в разложении функции

$$e^{-\frac{xt}{1-t}} \frac{1}{(1-t)^{s+1}}$$

в ряд Маклорена по степеням $t$, т. е.

$$e^{-\frac{xt}{1-t}} \frac{1}{(1-t)^{s+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} Q_n^{(s)}(x)\, t^n. \tag{54}$$

Из этой формулы можно вывести ряд простых соотношений для полиномов Лагерра. Дифференцируя обе части (54) по $x$, получим

$$-e^{-\frac{xt}{1-t}}\frac{t}{(1-t)^{s+2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{dQ_n^{(s)}(x)}{dx}t^n$$

или

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}Q_n^{(s+1)}(x)\,t^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{dQ_n^{(s)}(x)}{dx}t^n,$$

откуда, сравнивая коэффициенты при $t^n$, имеем

$$\frac{dQ_n^{(s)}(x)}{dx}=-nQ_{n-1}^{(s+1)}(x). \tag{55}$$

Совершенно аналогично, дифференцируя обе части (54) по $t$, придем к соотношению

$$xQ_n^{(s)}(x)=(n+s)\,Q_n^{(s-1)}(x)-Q_{n+1}^{(s-1)}(x). \tag{56}$$

Наконец, если умножим обе части (54) на $(1-t)$, то получим еще следующее соотношение:

$$Q_n^{(s-1)}(x)=Q_n^{(s)}(x)-nQ_{n-1}^{(s)}(x). \tag{57}$$

Часто вместо полиномов $Q_n^{(s)}(x)$ рассматривают полиномы $\frac{1}{n!}Q_n^{(s)}(x)$.

Применяя к формуле (48) несколько раз теорему Ролля, можно показать, что все корни $Q_n^{(s)}(x)$ вещественны, различны и находятся внутри промежутка $(0, +\infty)$.

**162. Связь полиномов Эрмита и Лагерра.** Полиномы Эрмита просто выражаются через полиномы Лагерра $Q_n^{(s)}(x)$. Эти последние при $s=-\frac{1}{2}$, как мы знаем, суть решения уравнения

$$x\frac{d^2y_n}{dx^2}+\left(\frac{1}{2}-x\right)\frac{dy_n}{dx}+ny_n=0. \tag{58}$$

Введем вместо $x$ новую переменную $\xi$ по формуле $x=\xi^2$, откуда

$$\frac{d}{dx}=\frac{1}{2\xi}\frac{d}{d\xi};\quad \frac{d^2}{dx^2}=\frac{1}{2\xi}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{2\xi}\frac{d}{d\xi}\right)=\frac{1}{4\xi^2}\frac{d^2}{d\xi^2}-\frac{1}{4\xi^3}\frac{d}{d\xi}.$$

Подставляя в уравнение (58), придем к уравнению

$$\frac{d^2y_n}{d\xi^2}-2\xi\frac{dy_n}{d\xi}+4ny_n=0, \tag{59}$$

которое совпадает с уравнением (9), если в этом последнем заменить $n$ на $2n$. Как мы уже упоминали, второе решение уравнения (9) не есть уже

полином, а потому можно утверждать, что $Q_n^{\left(-\frac{1}{2}\right)}(\xi^2)$ с точностью до постоянного множителя совпадает с $H_{2n}(\xi)$, т. е.

$$H_{2n}(\xi) = C_n Q_n^{\left(-\frac{1}{2}\right)}(\xi^2).$$

Для определения постоянной $C_n$ сравним старшие коэффициенты в обеих частях написанного равенства. В левой части старший коэффициент, как мы видели [157], равен $2^{2n}$, а в правой части он равен $(-1)^n C_n$ [161], так что $C_n = (-1)^n 2^{2n}$, и окончательно

$$H_{2n}(\xi) = (-1)^n 2^{2n} Q_n^{\left(-\frac{1}{2}\right)}(\xi^2). \tag{60}$$

Перейдем теперь к выводу аналогичной формулы для $H_{2n+1}(\xi)$. Функция $Q_n^{\left(\frac{1}{2}\right)}(x)$ удовлетворяет уравнению

$$x\frac{d^2y_n}{dx^2} + \left(\frac{3}{2} - x\right)\frac{dy_n}{dx} + ny_n = 0,$$

которое при помощи преобразования $x = \xi^2$ переходит к виду

$$\frac{d^2y_n}{d\xi^2} + \left(\frac{2}{\xi} - 2\xi\right)\frac{dy_n}{d\xi} + 4ny_n = 0.$$

Введем еще вместо $y_n$ новую функцию $z_n$ по формуле

$$y_n = \frac{1}{\xi} z_n.$$

Дифференцируя по $\xi$ и подставляя в уравнение, получим уравнение для $z_n$:

$$\frac{d^2z_n}{d\xi^2} - 2\xi\frac{dz_n}{d\xi} + (4n+2)\, z_n = 0.$$

Это уравнение совпадает с (9), если в этом последнем заменить $n$ на $(2n+1)$. Из предыдущих преобразований непосредственно получаем

$$H_{2n+1}(\xi) = D_n \xi Q_n^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\xi^2).$$

Сравнение старших коэффициентов дает $D_n = (-1)^n 2^{2n+1}$, и окончательно

$$H_{2n+1}(\xi) = (-1)^n 2^{2n+1} \xi Q_n^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\xi^2). \tag{61}$$

**163. Асимптотическое выражение полиномов Эрмита.** Функция Эрмита

$$\psi_n(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2} H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{1}{2}x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}) \tag{62}$$

удовлетворяет уравнению (11):

$$\psi_n''(x) + (2n + 1 - x^2)\,\psi_n(x) = 0. \tag{63}$$

Рассмотрим случай четного значка. При этом мы получим

$$\psi_{2n}''(x) + (4n + 1 - x^2)\,\psi_{2n}(x) = 0. \tag{64}$$

Кроме того, в силу (24), а также того обстоятельства, что $H_{2n}(x)$ есть полином от $x^2$, получим следующие начальные условия:

$$\psi_{2n}(0) = (-1)^n \cdot 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1); \quad \psi'_{2n}(0) = 0. \tag{65}$$

Уравнение (64) совместно с начальными условиями (65) даст нам возможность получить асимптотическое выражение полиномов Эрмита при большом $n$. Напомним прежде всего, что решение уравнения

$$y'' + k^2 y = f(x), \tag{66}$$

удовлетворяющее нулевым начальным условиям $y(0) = y'(0) = 0$, имеет вид [II, 34]

$$y = \frac{1}{k} \int_0^x f(u) \sin k(x-u)\, du. \tag{67}$$

Если вместо нулевых начальных условий имеем начальные условия

$$y(0) = a, \quad y'(0) = b, \tag{68}$$

то мы должны к решению (67) добавить решение однородного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям (68), и окончательно решение уравнения (66), удовлетворяющее начальным условиям (68), будет

$$y = a \cos kx + \frac{b}{k} \sin kx + \frac{1}{k} \int_0^x f(u) \sin k(x-u)\, du. \tag{69}$$

Обратимся к уравнению (64) и перепишем его в следующем виде:

$$\psi''_{2n}(x) + (4n+1)\, \psi_{2n}(x) = x^2 \psi_{2n}(x).$$

Положим в данном случае $k^2 = 4n+1$ и $f(x) = x^2 \psi_{2n}(x)$. Мы получим согласно формуле (69)

$$\psi_{2n}(x) = \psi_{2n}(0) \cos \sqrt{4n+1}\, x + \\ + \frac{1}{\sqrt{4n+1}} \int_0^x u^2 \psi_{2n}(u) \sin \sqrt{4n+1}\, (x-u)\, du. \tag{70}$$

Можно показать, что при больших $n$ первое слагаемое, стоящее справа, дает главное значение функции $\psi_{2n}(x)$. Чтобы показать это, оценим интегральный член, стоящий справа, считая $x > 0$. Применяя неравенство Буняковского, получим в силу (17)

$$\left| \int_0^x u^2 \psi_{2n}(u) \sin \sqrt{4n+1}\, (x-u)\, du \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\int_0^x \psi_{2n}^2(u)\, du} \sqrt{\int_0^x u^4 \sin^2 \sqrt{4n+1}\, (x-u)\, du} <$$

$$< \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{2n}^2(u)\, du} \sqrt{\int_0^x u^4\, du} = \sqrt{2^{2n}(2n)!\, \sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{x^5}{5}}$$

и, подставляя в (70), будем иметь

$$\psi_{2n}(x) = \psi_{2n}(0)\cos\sqrt{4n+1}\,x + \frac{2^n\sqrt{(2n)!}\sqrt[4]{\pi}x^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{5}\sqrt{4n+1}}\theta_n(x),$$

где $\theta_n(x)$ — некоторая функция от $x$, удовлетворяющая условию

$$-1 < \theta_n(x) < 1.$$

Вынося за скобки $\psi_{2n}(0)$ и принимая во внимание его выражение (65), будем иметь

$$\psi_{2n}(x) = \psi_{2n}(0)\left[\cos\sqrt{4n+1}\,x + \frac{(-1)^n\sqrt{(2n)!}\sqrt[4]{\pi}x^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{5}\sqrt{4n+1}\,1\cdot 3\ldots(2n-1)}\theta_n(x)\right]. \qquad (71)$$

Рассмотрим ближе множитель, стоящий при $\theta_n(x)$:

$$\frac{\sqrt[4]{\pi}x^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{1\cdot 2\cdot 3\ldots 2n}}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)} = \frac{\sqrt[4]{\pi}x^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{5}}\sqrt{\frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}}.$$

Если положить

$$I_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^k x\,dx,$$

то, как известно [1, 100],

$$I_{2n} = \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 1}{2n(2n-2)\ldots 2}\frac{\pi}{2}, \quad I_{2n+1} = \frac{2n(2n-2)\ldots 2}{(2n+1)(2n-1)\ldots 3},$$

причем, очевидно, $I_{2n+1} < I_{2n}$, т. е.

$$\frac{2n(2n-2)\ldots 2}{(2n+1)(2n-1)\ldots 3} < \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 1}{2n(2n-2)\ldots 2}\frac{\pi}{2},$$

или

$$\left(\frac{2n(2n-2)\ldots 2}{(2n-1)(2n-3)\ldots 1}\right)^2 < (2n+1)\frac{\pi}{2},$$

откуда

$$\sqrt{\frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}} < \frac{\sqrt[4]{\pi}}{\sqrt[4]{2}}\sqrt[4]{2n+1},$$

и окончательно коэффициент при $\theta_n(x)$ будет

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{50}}\sqrt[4]{\frac{2n+1}{4n+1}}\,x^{\frac{5}{2}}\frac{1}{\sqrt[4]{4n+1}}\theta_n',$$

где $0 < \theta_n' < 1$. Отбрасывая множитель, меньший единицы, можно написать предыдущее выражение в виде

$$x^{\frac{5}{2}}\frac{1}{\sqrt[4]{4n+1}}\theta_n'',$$

где $0<\theta_n''<1$. Подставляя это выражение в формулу (71), будем иметь следующее асимптотическое представление функций Эрмита с четным значком:

$$\psi_{2n}(x)=\psi_{2n}(0)\left[\cos\sqrt{4n+1}\,x+x^{\frac{5}{2}}\frac{1}{\sqrt[4]{4n+1}}\theta_n'''(x)\right],$$

где $-1<\theta_n'''(x)<1$. Таким образом, при заданном $x$ второе слагаемое в квадратных скобках стремится к нулю при возрастании значка $n$. Допущение $x>0$, как нетрудно проверить, — несущественно. Добавляя множитель $e^{\frac{1}{2}x^2}$, получим асимптотическое выражение полиномов Эрмита с четным значком:

$$H_{2n}(x)=(-1)^n 2^n 1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)\,e^{\frac{1}{2}x^2}\left[\cos\sqrt{4n+1}\,x+O\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)\right].$$

Для случая нечетного значка точно так же можно получить

$$H_{2n+1}(x)=(-1)^n 2^{n+\frac{1}{2}}\times$$
$$\times 1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)\sqrt{2n+1}\;e^{\frac{1}{2}x^2}\left[\sin\sqrt{4n+3}\,x+O\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)\right].$$

В этих формулах $O\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)$ обозначает такую величину, что $\sqrt[4]{n}\,O\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)$ остается ограниченным при возрастании $n$, если $x$ находится в любом ограниченном промежутке своего изменения. Заметим, что под знаком тригонометрических функций мы можем брать любой аргумент $\sqrt{4n+\alpha}\,x$, где $\alpha$ — заданное вещественное число. Действительно, мы имеем, например:

$$\cos\sqrt{4n+1}\,x-\cos\sqrt{4n+\alpha}\,x=$$
$$=2\sin\frac{\sqrt{4n+1}+\sqrt{4n+\alpha}}{2}x\sin\frac{\sqrt{4n+\alpha}-\sqrt{4n+1}}{2}x=$$
$$=2\sin\frac{\sqrt{4n+1}+\sqrt{4n+\alpha}}{2}x\sin\frac{\alpha-1}{2\left(\sqrt{4n+\alpha}+\sqrt{4n+1}\right)}x.$$

Если $x$ находится в ограниченном промежутке, то это последнее произведение будет величина $O\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)$, и, следовательно, с точностью до такой величины можно заменить $\cos\sqrt{4n+1}\,x$ на $\cos\sqrt{4n+\alpha}\,x$. Пользуясь предыдущими вычислениями, можно дать и более точную оценку дополнительных членов $O\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)$.

**164. Асимптотическое выражение полиномов Лежандра.** Совершенно аналогичным путем можно вывести асимптотическое выражение полиномов Лежандра $P_n(x)$ при большом $n$. Мы имеем дифференциальное уравнение

$$(1-x^2)P_n''(x)-2xP_n'(x)+n(n+1)P_n(x)=0.$$

Введем вместо $x$ новую переменную $t$ по формуле $x=\cos t$, а вместо $P_n(x)$ — новую функцию:

$$v_n(t)=\sqrt{\sin t}\,P_n(\cos t) \quad \text{или} \quad P_n(\cos t)=\frac{v_n(t)}{\sqrt{\sin t}}. \tag{72}$$

Подставляя все это в уравнение, получим после несложных преобразований уравнение для $v_n(t)$:

$$v_n''(t)+\left[n(n+1)+\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\cos^2 t}{\sin^2 t}\right]v_n(t)=0,$$

которое мы перепишем в виде

$$v_n''(t)+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 v_n(t)=-\frac{1}{4\sin^2 t}\,v_n(t).$$

Для $x$ мы имеем промежуток $-1\leqslant x\leqslant 1$, которому соответствует $0\leqslant t\leqslant\pi$. За начальное значение возьмем $t=\frac{\pi}{2}$, которому соответствует $x=0$. Рассмотрим случай четного значка:

$$v_{2n}''(t)+\left(2n+\frac{1}{2}\right)^2 v_{2n}(t)=-\frac{1}{4\sin^2 t}\,v_{2n}(t). \tag{73}$$

Принимая во внимание формулу (72), а также то обстоятельство, что

$$P_{2n}(0)=(-1)^n\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n} \quad \text{и} \quad P_{2n}'(0)=0,$$

будем иметь следующие начальные условия для $v_{2n}(t)$:

$$v_{2n}\left(\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^n\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}; \quad v_{2n}'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0. \tag{74}$$

Если в уравнении (73) отбросить правую часть, то полученное однородное уравнение будет иметь общий интеграл:

$$C_1\cos\left(2n+\frac{1}{2}\right)t+C_2\sin\left(2n+\frac{1}{2}\right)t. \tag{75}$$

Подберем $C_1$ и $C_2$ так, чтобы удовлетворялись условия (74):

$$C_1\cos\left(2n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}+C_2\sin\left(2n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}=v_{2n}\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

$$-C_1\sin\left(2n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}+C_2\cos\left(2n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}=0,$$

или, пользуясь формулами $\cos(n\pi+\varphi)=(-1)^n\cos\varphi$ и $\sin(n\pi+\varphi)=(-1)^n\times$ $\times\sin\varphi$, будем иметь

$$C_1\cos\frac{\pi}{4}+C_2\sin\frac{\pi}{4}=(-1)^n v_{2n}\left(\frac{\pi}{2}\right); \quad -C_1\sin\frac{\pi}{4}+C_2\cos\frac{\pi}{4}=0,$$

откуда

$$C_1 = C_2 = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2}} v_{2n}\left(\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n v_{2n}\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin\frac{\pi}{4},$$

и, подставляя в (75), получим выражение

$$(-1)^n v_{2n}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos\left[\left(2n+\frac{1}{2}\right)t - \frac{\pi}{4}\right].$$

Таким образом, решение уравнения (73) при начальных условиях (74) будет

$$v_{2n}(t) = (-1)^n v_{2n}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos\left[\left(2n+\frac{1}{2}\right)t - \frac{\pi}{4}\right] -$$

$$- \frac{1}{\left(2n+\frac{1}{2}\right)} \int_{\frac{\pi}{2}}^{t} \frac{1}{4\sin^2 u} v_{2n}(u) \sin\left(2n+\frac{1}{2}\right)(t-u)\, du, \quad (76)$$

где мы считаем $0 \leqslant x < 1$ и $0 < t \leqslant \frac{\pi}{2}$. Заметим при этом, что решение уравнения (66), удовлетворяющее начальным условиям $y(a) = y'(a) = 0$ имеет вид (67), где только нижний предел интеграла равен не нулю, но $a$.

Рассмотрим интеграл, стоящий справа, и воспользуемся формулой (72):

$$K_{2n} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{t} \frac{1}{4\sin^2 u} \sin\left(2n+\frac{1}{2}\right)(t-u)\, P_{2n}(\cos u) \sqrt{\sin u}\, du,$$

откуда, применяя неравенство Буняковского, получим

$$K_{2n}^2 \leqslant \int_{t}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\left(2n+\frac{1}{2}\right)(t-u)}{16\sin^4 u}\, du \int_{t}^{\frac{\pi}{2}} P_{2n}^2(\cos u) \sin u\, du.$$

Первый из сомножителей, стоящих справа, будет меньше, чем

$$\int_{t}^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{16\sin^4 u} = \beta(t),$$

где $\beta(t)$ имеет конечное определенное значение при заданном $t$ и остается ограниченным при $0 < \varepsilon_1 < t \leqslant \frac{\pi}{2}$, где $\varepsilon_1$ — заданное положительное число. Второй из сомножителей меньше

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} P_{2n}^2(\cos u) \sin u\, du = \int_{0}^{1} P_{2n}^2(x)\, dx = \frac{1}{4n+1}.$$

Окончательно получаем оценку

$$|K_{2n}| < \frac{\alpha(x)}{\sqrt{4n+1}},$$

где $\alpha(x)$ не зависит от $n$ и остается ограниченным при $0 \leqslant x < 1-\varepsilon$, где $\varepsilon$ — любое заданное положительное число. Подставляя в формулу (76), получим

$$v_{2n}(t) = (-1)^n v_{2n}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left[\left(2n+\frac{1}{2}\right)t - \frac{\pi}{4}\right] + \frac{\gamma(x)}{(4n+1)^{\frac{3}{2}}},$$

где $\gamma(x)$ остается ограниченным для промежутка $0 \leqslant x < 1-\varepsilon$ при возрастании $n$. Принимая во внимание выражение (74), получим

$$v_{2n}(t) = \frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}\left\{\cos\left[\left(2n+\frac{1}{2}\right)t - \frac{\pi}{4}\right] + (-1)^n \frac{2\cdot 4\ldots 2n}{1\cdot 3\ldots(2n-1)\,(4n+1)^{\frac{3}{2}}}\gamma(x)\right\}.$$

Воспользуемся неравенством

$$\frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)} < \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\sqrt{2n+1},$$

которое мы доказали выше. Оно даст нам

$$v_{2n}(t) = \frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}\left\{\cos\left[\left(2n+\frac{1}{2}\right)t - \frac{\pi}{4}\right] + \sqrt{\frac{2n+1}{4n+1}}\,\frac{\delta(x)}{4n+1}\right\}$$

или

$$v_{2n}(t) = \frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}\left\{\cos\left[\left(2n+\frac{1}{2}\right)t - \frac{\pi}{4}\right] + \frac{\eta(x)}{4n+1}\right\},$$

где $\delta(x)$ и $\eta(x)$ — функции от $x$, которые при $0 \leqslant x < 1-\varepsilon$ остаются ограниченными при возрастании $n$. Этим функциям можно дать и более точную оценку, основываясь на предыдущих вычислениях.

Наконец, пользуясь формулой (72), получим

$$P_{2n}(\cos t) = \frac{1}{\sqrt{\sin t}}\,\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}\left\{\cos\left[\left(2n+\frac{1}{2}\right)t - \frac{\pi}{4}\right] + O\left(\frac{1}{n}\right)\right\}. \quad (77)$$

Совершенно аналогично для нечетного значка:

$$P_{2n+1}(\cos t) = \frac{1}{\sqrt{\sin t}}\,\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}\left\{\cos\left[\left(2n+\frac{3}{2}\right)t - \frac{\pi}{4}\right] + O\left(\frac{1}{n}\right)\right\}. \quad (78)$$

Полученный результат распространяется и на отрицательные значения $x = \cos t$, и символ $O\left(\frac{1}{n}\right)$ в предыдущих формулах обозначает такую величину, что произведение $nO\left(\frac{1}{n}\right)$ остается ограниченным при возрастании $n$ независимо от $x$, если $x$ находится где угодно в промежутке $-1+\varepsilon < x < 1-\varepsilon$, причем $\varepsilon$ обозначает любое фиксированное малое положительное число.

Мы можем написать предыдущие формулы в более простом виде. Для этого воспользуемся формулой Валлиса [75]

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^2\cdot 4^2\ldots(2n-2)^2\cdot 2n}{1^2\cdot 3^2\ldots(2n-1)^2}.$$

Она дает

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}\sqrt{2n}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

или

$$\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}\sqrt{2n}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}+\eta_n,$$

где $\eta_n\to 0$ при $n\to\infty$, т. е.

$$\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}=\sqrt{\frac{1}{n\pi}}+\frac{\eta_n}{\sqrt{2n}}.$$

После этого формулу (77) можно переписать так:

$$P_{2n}(\cos t)=\sqrt{\frac{1}{n\pi\sin t}}\left\{\cos\left[\left(2n+\frac{1}{2}\right)t-\frac{\pi}{4}\right]+\eta''_{2n}\right\}.$$

Аналогичным образом поступая и с формулой (68), можно убедиться, что при любом значке имеет место формула

$$P_n(\cos t)=\sqrt{\frac{2}{n\pi\sin t}}\left\{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t-\frac{\pi}{4}\right]+\eta''_n\right\}, \tag{79}$$

где $\eta''_n\to 0$ при $n\to\infty$ равномерно относительно $t$, если $\varepsilon<t<\pi-\varepsilon$, где $\varepsilon>0$.

Приведем еще без доказательства асимптотические выражения полиномов Лагерра. Если $x$ изменяется в промежутке $0<a\leqslant x\leqslant b$, где $a$ и $b$ — любые конечные числа, то имеет место асимптотическая формула

$$Q_n^{(s)}(x)=$$

$$=\pi^{-\frac{1}{2}}n^{\frac{s}{2}-\frac{1}{4}}\cdot n!\,x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{4}}e^{\frac{x}{2}}\left\{\cos\left(2\sqrt{n}x-\frac{s\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right\}. \tag{80}$$

## § 4. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ И ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

**165. Приведение эллиптических интегралов к нормальному виду.** Мы будем рассматривать в настоящем параграфе некоторые функции комплексного переменного, которые не связаны с линейными дифференциальными уравнениями, а имеют несколько иное происхождение: эти функции в основном связаны с некоторыми интегралами, которые не выражаются в конечном виде, именно с так называемыми *эллиптическими интегралами*. Мы уже упоминали о таких интегралах раньше [I, 199]. Здесь мы начнем с рассмотрения этих интегралов.

Раньше мы рассматривали интегралы вида

$$\int R\left(x,\sqrt{P(x)}\right)dx, \tag{1}$$

где $R(x,y)$ — рациональная функция своих аргументов и $P(x)$ — некоторый полином второй степени. Мы видели, что такие интегралы выражаются через элементарные функции. *Если же $P(x)$ есть поли-*

*ном третьей или четвертой степени, то интеграл вида* (1) *называется эллиптическим интегралом* и он не выражается, вообще говоря, в конечном виде. В исключительных случаях он может все же выражаться через элементарные функции. Так, например, если мы возьмем интеграл

$$\int \frac{x^{2n+1}\,dx}{\sqrt{x^4+bx^2+c}},$$

где $n$ — некоторое целое число, то, вводя новую переменную $t=x^2$, мы придем к интегралу вида

$$\frac{1}{2}\int \frac{t^n\,dt}{\sqrt{t^2+bt+c}},$$

который, как мы знаем, выражается через элементарные функции. Если интеграл вида (1), где $P(x)$ — полином третьей или четвертой степени, выражается через элементарные функции, то его называют иногда *псевдоэллиптическим.*

Перейдем к исследованию эллиптических интегралов. Заметим прежде всего, что случай, когда $P(x)$ есть полином третьей степени, не отличается принципиально от того случая, когда этот полином будем полиномом четвертой степени. Один случай переходит в другой при помощи простой замены переменной интегрирования. Действительно, положим, что $P(x)$ есть полином четвертой степени

$$P(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e, \tag{2}$$

и пусть $x=x_1$ есть один из корней этого полинома. Введем вместо $x$ новую переменную $t$ по формуле

$$x=x_1+\frac{1}{t}. \tag{3}$$

Подставляя в выражение (2), получим

$$P(x)=a\left(x_1+\frac{1}{t}\right)^4+b\left(x_1+\frac{1}{t}\right)^3+c\left(x_1+\frac{1}{t}\right)^2+d\left(x_1+\frac{1}{t}\right)+e.$$

Раскрывая скобки и принимая во внимание, что $x=x_1$ есть корень полинома (2), будем иметь

$$P(x)=\frac{P_1(t)}{t^4},$$

где $P_1(t)$ есть некоторый полином третьей степени. Таким образом мы можем переходить от случая полинома четвертой степени к случаю полинома третьей степени. Заметим, что преобразование (3) состоит, собственно, в том, что один из корней полинома (2), а именно корень $x=x_1$, в новой переменной обращается в корень $t=\infty$.

Наоборот, если $P(x)$ — полином третьей степени, то в результате дробно-линейного преобразования

$$x = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}$$

мы получаем

$$P(x) = \frac{P_2(t)}{(\gamma t + \delta)^4},$$

где $P_2(t)$ — некоторый полином, вообще говоря, четвертой степени.

Рассуждая совершенно так же, как и в [I, 199], мы можем показать, что эллиптический интеграл (1) приводится к интегралам следующего вида:

$$\int \frac{\varphi(x)}{\sqrt{P(x)}}\,dx \tag{4}$$

и

$$\int \frac{dx}{(x-a)^k \sqrt{P(x)}}, \tag{5}$$

где $\varphi(x)$ — некоторый полином. Предполагая, что $P(x)$ есть полином третьей степени, мы покажем сейчас, что интегралы написанного выше вида приводятся к трем типам интегралов. Рассмотрим для этого интегралы вида

$$I_k = \int \frac{x^k}{\sqrt{P(x)}}\,dx, \tag{6}$$

где $k$ — некоторое целое число, положительное или отрицательное. Положим

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Производя дифференцирование, будем иметь

$$(x^m \sqrt{P(x)})' = mx^{m-1}\sqrt{P(x)} + x^m \frac{3ax^2 + 2bx + c}{2\sqrt{P(x)}} =$$

$$= \frac{mx^{m-1}(ax^3 + bx^2 + cx + d)}{\sqrt{P(x)}} + \frac{x^m(3ax^2 + 2bx + c)}{2\sqrt{P(x)}},$$

откуда, интегрируя и принимая во внимание обозначение (6), получим

$$x^m \sqrt{P(x)} + C = maI_{m+2} + mbI_{m+1} + mcI_m + mdI_{m-1} +$$

$$+ \frac{3a}{2} I_{m+2} + bI_{m+1} + \frac{c}{2} I_m$$

($C$ — произвольная постоянная), или

$$a\left(m + \frac{3}{2}\right) I_{m+2} + b(m+1) I_{m+1} + c\left(m + \frac{1}{2}\right) I_m +$$

$$+ dmI_{m-1} = x^m \sqrt{P(x)} + C. \tag{7}$$

При $m=0$ и $m=1$ будем иметь

$$\frac{3}{2}aI_2+bI_1+\frac{c}{2}I_0=\sqrt{P(x)}+C,$$

$$\frac{5}{2}aI_3+2bI_2+\frac{3}{2}cI_1+dI_0=x\sqrt{P(x)}+C.$$

Эти последние формулы позволяют выразить последовательно $I_2$ и $I_3$ через $I_0$ и $I_1$. Полагая в формуле (7) $m=2$, имеем

$$\frac{7}{2}aI_4+3bI_3+\frac{5}{2}cI_2+2dI_1=x^2\sqrt{P(x)}+C,$$

откуда можем определить $I_4$ и т. д. Итак, все интегралы вида (6) при целом положительном $k$ выражаются через $I_0$ и $I_1$. Таким же свойством обладает, очевидно, и интеграл (4).

Обратимся теперь к интегралу (5). Вводя вместо $x$ новую переменную $x-a=t$, мы придем к интегралам вида

$$I'_k=\int\frac{t^k}{\sqrt{P_1(t)}}\,dt\quad(k=-1,\ -2,\ \ldots),\tag{8}$$

где $P_1(t)$ — некоторый полином третьей степени и $k$ — целое отрицательное число. Полагая в формуле (7) $m=-1$, получим

$$\frac{1}{2}a'I'_1-\frac{1}{2}c'I'_{-1}-d'I'_{-2}=t^{-1}\sqrt{P_1(t)}+C,$$

где $a'$, $b'$, $c'$ и $d'$ — коэффициенты $P_1(t)$.

Полагая затем $m=-2$, получим

$$-\frac{1}{2}a'I'_0-b'I'_{-1}-\frac{3}{2}c'I'_{-2}-2d'I'_{-3}=t^{-2}\sqrt{P_1(t)}+C$$

и т. д. Отсюда видно, непосредственно, что все интегралы вида (8) выразятся через $I'_1$, $I'_0$ и $I'_{-1}$, т. е. в прежних обозначениях — через интегралы

$$\int\frac{x-a}{\sqrt{P(x)}}\,dx,\quad\int\frac{dx}{\sqrt{P(x)}},\quad\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{P(x)}}.$$

Таким образом, окончательно можем утверждать, что если $P(x)$ есть полином третьей степени, то всякий эллиптический интеграл сводится к интегралам следующих трех типов:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{P(x)}},\quad\int\frac{x\,dx}{\sqrt{P(x)}},\quad\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{P(x)}}.\tag{9}$$

Первые из этих интегралов называются *эллиптическими интегралами первого рода*, вторые — *эллиптическими интегралами второго рода* и, наконец, третьи — *эллиптическими интегралами третьего рода*.

Заметим, что если исходный интеграл был вещественным, то предыдущие вычисления могли привести нас к формулам, содержащим комплексные числа. Так, при пользовании формулой (3) число $x_1$ могло оказаться и комплексным, если, например, полином $P(x)$ имеет все четыре корня комплексными. Точно так же при разложении рациональной дроби на простейшие и приведении интеграла к виду (5) мы могли получить для $a$ и комплексное значение. Мы не будем останавливаться на подробном выяснении того, как надо производить вычисление для того, чтобы иметь дело лишь с вещественными количествами. В дальнейшем мы будем отчасти учитывать это обстоятельство.

**166. Приведение интегралов к тригонометрической форме.** Мы будем рассматривать сейчас лишь эллиптические интегралы первого и второго рода и покажем, что их можно привести к новой форме, в которой подинтегральная функция содержит тригонометрические функции. Начнем с интеграла первого рода. Мы можем, конечно, считать, что старший коэффициент у $P(x)$ равен $\pm 1$:

$$P(x) = \pm x^3 + bx^2 + cx + d.$$

Положим сначала, что этот полином с вещественными коэффициентами имеет три вещественных корня: $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$. Мы должны, конечно, считать, что среди этих корней нет одинаковых, так как в противном случае полином $P(x)$ содержал бы квадратный множитель $(x-a)^2$, который мы могли бы вынести за знак квадратного радикала, и, таким образом, у нас остался бы под знаком радикала лишь полином первой степени. Будем считать, что $\alpha$ есть наименьший корень, если при $x^3$ стоит знак $(+)$, и наибольший корень, если при $x^3$ стоит знак $(-)$. Пусть, далее, $\beta$ обозначает средний по величине корень. Вместо $x$ введем новую переменную $\varphi$ по формуле

$$x = \alpha + (\beta - \alpha)\sin^2\varphi. \tag{10}$$

Подставляя это выражение в наш полином

$$P(x) = \pm x^3 + bx^2 + cx + d = \pm(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma),$$

будем иметь после несложных вычислений

$$P(x) = |\gamma - \alpha|(\beta-\alpha)^2(1 - k^2\sin^2\varphi)\sin^2\varphi\cos^2\varphi,$$

где

$$k^2 = \frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}, \tag{11}$$

причем, согласно нашему выбору корней, это число $k^2$ заключается всегда между 0 и 1, и мы всегда считаем $k > 0$. Мы имеем, далее, в силу (10)

$$dx = 2(\beta-\alpha)\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi,$$

и, следовательно, выражение

$$\frac{dx}{\sqrt{P(x)}} \tag{12}$$

лишь постоянным множителем отличается от выражения

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}. \tag{13}$$

Покажем, что мы можем прийти к тому же результату, когда полином $P(x)$ с вещественными коэффициентами имеет только один вещественный корень $x=\alpha$. В этом случае можно представить этот полином в виде

$$P(x)=\pm(x-\alpha)(x^2+px+q),$$

где трехчлен $(x^2+px+q)$ с вещественными коэффциентами не имеет вещественных корней и, следовательно, остается всегда положительным при вещественных значениях $x$. В данном случае введем вместо $x$ новую переменную $\varphi$ по формуле

$$x=\alpha\pm\sqrt{\alpha^2+p\alpha+q}\,\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}. \tag{14}$$

Производя подстановку, будем иметь

$$\pm(x-\alpha)(x^2+px+q)=(\alpha^2+p\alpha+q)^{\frac{3}{2}}(1-k^2\sin^2\varphi)\frac{\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}{\cos^4\frac{\varphi}{2}},$$

где

$$k^2=\frac{1}{2}\left(1\mp\frac{\alpha+\frac{p}{2}}{\sqrt{\alpha^2+p\alpha+q}}\right). \tag{15}$$

Покажем, что это число заключается между 0 и 1. Для этого достаточно показать, что второе слагаемое внутри круглых скобок в выражении (15) по абсолютной величине будет меньше единицы, т. е. достаточно показать, что квадрат знаменателя будет больше квадрата числителя. Мы имеем, очевидно,

$$\alpha^2+p\alpha+q=\left(\alpha+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{1}{4}p^2\right).$$

Но второе слагаемое справа будет наверно положительным, так как по условию трехчлен $x^2+px+q$ имеет мнимые корни, и, таким образом, мы получаем

$$\alpha^2+p\alpha+q>\left(\alpha+\frac{p}{2}\right)^2.$$

Далее из выражения (14) вытекает

$$dx = \pm \sqrt{\alpha^2 + p\alpha + q}\, \frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}\, d\varphi,$$

и, следовательно, и в данном случае в результате преобразования выражение (12) будет лишь постоянным множителем отличаться от выражения (13).

Итак, мы видим, что *всякий вещественный интеграл первого рода при помощи вещественного преобразования может быть приведен к виду*

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \qquad (0 < k^2 < 1). \tag{16}$$

Обратимся теперь к интегралу второго рода

$$\int \frac{x}{\sqrt{P(x)}}\, dx.$$

Применяя одно из предыдущих преобразований, мы приведем этот интеграл к интегралу (16) и интегралу одного из следующих двух видов:

$$\int \frac{\sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}\, d\varphi \quad \text{и} \quad \int \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}\, d\varphi. \tag{17}$$

Добавляя к первому интегралу постоянный множитель $k^2$, можно представить его в виде

$$k^2 \int \frac{\sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}\, d\varphi = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} - \int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi,$$

и, таким образом, он сводится к интегралу вида (16) и еще к интегралу следующего вида:

$$\int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi. \tag{18}$$

Покажем, что второй из интегралов (17) приводится к первому интегралу (17). Воспользуемся для этого следующей формулой, которую нетрудно проверить простым дифференцированием:

$$2d\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}\right) = \left[\left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}\right) - 2k^2 \sin^2 \varphi\right] \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Интегрируя это тождество, мы получаем искомый результат:

$$\int \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}\, d\varphi = 2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} +$$

$$+ 2k^2 \int \frac{\sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}\, d\varphi - \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Мы видим, таким образом, что *эллиптические интегралы первого и второго рода приводят к интегралам следующих двух типов:*

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \qquad \int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi. \tag{19}$$

Эти интегралы называются иногда *эллиптическими интегралами первого и второго рода в форме Лежандра.*

Можно написать интегралы (19) несколько в иной форме, если ввести вместо $\varphi$ новую переменную $t$ по формуле

$$t=\sin\varphi.$$

При этом

$$d\varphi=\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

первый из интегралов (19) приводится к следующему виду:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}.$$

Здесь мы имеем под знаком радикала полином четвертой степени особого вида. Мы могли бы, исходя из эллиптического интеграла общего вида, прийти именно к такому полиному под знаком радикала, если бы воспользовались заменой независимой переменной в виде общего дробно-линейного преобразования

$$x=\frac{\alpha t+\beta}{\gamma t+\delta}.$$

Напишем интегралы (19) с нижним пределом, равным нулю, и с переменным верхним пределом, вводя специальные обозначения:

$$F(k,\ \varphi)=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},\quad E(k,\ \varphi)=\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi. \tag{20}$$

Если верхний предел имеет значение $\varphi=\frac{\pi}{2}$, то величины этих интегралов будут функциями только от $k$:

$$F(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},\quad E(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi, \tag{21}$$

и эти интегралы называются обычно *полными эллиптическими интегралами первого и второго рода.*

Существуют таблицы для значений как интегралов (20), так и интегралов (21). Первыми по времени являются таблицы Лежандра,

опубликованные в 1826 г. Между прочим, в этих таблицах имеются значения логарифмов величин (21) при различных значениях $k$; при этом полагают $k=\sin\theta$, и значения $\theta$ даются через каждую десятую часть градуса. Основная таблица с двойным входом дает значение интегралов (20), где, как и выше, положено $k=\sin\theta$. Эта таблица содержит значение интегралов с девятью десятичными знаками для $\varphi$ и $\theta$ от 0 до 90° через один градус. Укажем еще на книгу Янке и Эмде «Таблицы функций с формулами и кривыми», содержащую также таблицы эллиптических интегралов.

**167. Примеры.** 1. Время полного колебания простого маятника с длиной $l$ и амплитудой колебания $2\alpha$ выражается формулой

$$T=\sqrt{\frac{2l}{g}}\int_0^{\alpha}\frac{d\tau}{\sqrt{\cos\tau-\cos\alpha}}, \tag{22}$$

где $g$ — ускорение силы тяжести. Нетрудно выразить интеграл (22) в виде полного эллиптического интеграла первого рода. Для этого введем постоянную $k=\sin\frac{\alpha}{2}$ и вместо $\tau$ введем новую переменную по формуле $\sin\frac{\tau}{2}=k\sin\varphi$. Мы получим

$$\cos\tau-\cos\alpha=2\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\tau}{2}\right)=2k^2\cos^2\varphi$$

и, кроме того,

$$\cos\frac{\tau}{2}\,d\tau=2k\cos\varphi\,d\varphi \quad\text{или}\quad d\tau=\frac{2k\cos\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

откуда окончательно будем иметь, принимая во внимание, что в силу $\sin\frac{\tau}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}\sin\varphi$ переменная $\varphi$ должна меняться от 0 до $\frac{\pi}{2}$:

$$T=2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=2\sqrt{\frac{l}{g}}\,F(k).$$

2. Рассмотрим эллиптический интеграл

$$\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

где $k^2>1$, и положим, что верхний предел $\varphi_0$ заключается в промежутке $(0,\ \alpha)$, где $\alpha$ определяется из уравнения $\sin\alpha=\frac{1}{k}$. Введем вместо $\varphi$ новую переменную $\psi$ по формуле $\sin\psi=k\sin\varphi$. Изменения $\psi$ будут ограничиваться некоторым промежутком $(0,\ \psi_0)$, где $\sin\psi_0=k\sin\varphi_0$, и после элементарных преобразований получим

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\frac{1}{k}\frac{d\psi}{\sqrt{1-\frac{1}{k^2}\sin^2\psi}},$$

откуда

$$\int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{1}{k} F\left(\frac{1}{k}, \psi_0\right).$$

Если верхний предел $\varphi_0 = \alpha$, то $\psi_0 = \frac{\pi}{2}$, и мы получаем, согласно обозначениям (21),

$$\int_0^{\alpha} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{1}{k} F\left(\frac{1}{k}\right).$$

Совершенно так же можно рассмотреть и интеграл

$$\int_0^{\varphi_0} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi$$

при $k^2 > 1$. В частности, мы будем иметь

$$\int_0^{\alpha} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi = \frac{1}{k} F\left(\frac{1}{k}\right) + kE\left(\frac{1}{k}\right) - kF\left(\frac{1}{k}\right).$$

3. Рассмотрим интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

Положив $x = \cos\varphi$, приведем его к нормальному виду

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}.$$

Точно так же, при помощи той же подстановки, получим

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}} - \sqrt{2} \int \sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}\, d\varphi.$$

4. К интегралу

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$$

применимо то, что мы говорили в [166], и в соответствии с этим, вводя вместо $x$ новую переменную $\varphi$ по формуле

$$x = -1 + \sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2\frac{\varphi}{2},$$

будем иметь

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2\sin^2\varphi}}.$$

5. Более сложным является приведение интеграла

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}} \tag{23}$$

к простейшему виду. В данном случае подрадикальный полином разлагается на два вещественных множителя второй степени

$$x^4+1=(x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2=(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1).$$

Вообще, если подрадикальный полином четвертой степени имеет все корни мнимые и разлагается на вещественные множители второй степени

$$P(x)=(x^2+px+q)(x^2+p'x+q'),$$

то надо определить числа $\lambda$ и $\mu$ по формулам

$$(p-p')\lambda=q-q'-\sqrt{(q-q')^2+(p-p')(pq'-qp')},$$
$$(p-p')\mu=q-q'+\sqrt{(q-q')^2+(p-p')(pq'-qp')}$$

и совершить замену переменной

$$x=\frac{\lambda+\mu m\operatorname{tg}\varphi}{1+m\operatorname{tg}\varphi},$$

где $m$ — наименьшее из двух чисел

$$\sqrt{\frac{\lambda^2-p\lambda+p}{\mu^2-p\mu+q}} \quad \text{и} \quad \sqrt{\frac{\lambda^2-q'\lambda+q'}{\mu^2-p'\mu+q'}}.$$

В данном случае замена переменных будет иметь вид

$$x=\frac{\operatorname{tg}\varphi-(1+\sqrt{2})}{\operatorname{tg}\varphi+(1+\sqrt{2})},$$

и в результате такого преобразования интеграл (23) примет вид

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}=\int \frac{(2+\sqrt{2})\,d\varphi}{\sqrt{\sin^4\varphi+6(3+2\sqrt{2})\sin^2\varphi\cos^2\varphi+(3+2\sqrt{2})^2\cos^4\varphi}}.$$

Нетрудно проверить, что выражение, стоящее под радикалом, является произведением

$$\sin^2\varphi+(3+2\sqrt{2})^2\cos^2\varphi=(3+2\sqrt{2})^2\left(1-\frac{4\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}\sin^2\varphi\right)$$

на $\sin^2\varphi+\cos^2\varphi$, и мы получаем окончательно следующую формулу, дающую приведение интеграла (23) к нормальному виду:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}=\int \frac{(2-\sqrt{2})\,d\varphi}{\sqrt{1-\frac{4\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}\sin^2\varphi}}.$$

**168. Обращение эллиптического интеграла.** Рассмотрев эллиптический интеграл, мы выясним теперь понятие об эллиптической функции. В некотором отношении эллиптические функции подобны

известным тригонометрическим функциям и являются их обобщением. Выясним прежде всего тот факт, что основные тригонометрические функции, например $x = \sin u$, можно получить при помощи так называемого обращения интегралов. Рассмотрим элементарный интеграл

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x. \tag{24}$$

Величина интеграла $u$ является функцией верхнего предела интеграла $x$. Будем рассматривать обратную функцию, т. е. будем рассматривать верхний предел $x$ как функцию величины интеграла $u$. Мы получаем, таким образом, однозначную, регулярную и периодическую функцию $x = \sin u$. Говорят, что эта функция получается в результате обращения интеграла (24). Точно так же, если мы возьмем эллиптический интеграл первого рода

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{P(x)}},$$

то в результате его обращения, как оказывается, получается аналитическая однозначная функция $x = f(u)$. Эта функция не будет уже целой. Она будет дробной функцией, и, кроме того, она будет обладать уже не одним, а двумя существенно различными периодами. Мы выясним дальше этот вопрос более подробно. Сейчас мы остановимся на рассмотрении эллиптического интеграла первого рода в форме Лежандра

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \tag{25}$$

причем будем предполагать $k$ числом вещественным и удовлетворяющим неравенству $0 < k < 1$.

Мы уже встречались с интегралом (25) при рассмотрении задачи конформного преобразования верхней полуплоскости $z$ на прямоугольник плоскости $u$ [**37**]. Напомним относящиеся сюда основные результаты, лишь с некоторым изменением обозначений. Формула (25) дает конформное преобразование верхней полуплоскости $z$ в некоторый прямоугольник $ABCD$ плоскости $u$. Его сторона $AB$ лежит на вещественной оси, и вершины $A$ и $B$ имеют координаты

$$\pm K = \pm \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \tag{26}$$

и

$$\text{длина } AB = 2\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = 2K. \tag{27}$$

Длина стороны $BC$ определяется по формуле

$$\text{длина } BC = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)(1-k^2z^2)}}.$$

Если мы в этой формуле введем вместо $z$ новую переменную интегрирования $x$ по формуле $z = \frac{1}{\sqrt{1-k'^2x^2}}$, где $k'^2 = 1-k^2$, то, произведя замену, получим новое выражение для длины стороны $BC$, которая, как и длина $AB$, будет выражаться полным эллиптическим интегралом первого рода:

$$\text{длина } BC = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}} = K', \tag{28}$$

где число $k'^2$ определяется из формулы

$$k^2 + k'^2 = 1. \tag{29}$$

Число $k$ называется обычно *модулем интеграла* (25), а число $k'$ — *дополнительным модулем*, причем имеем (29).

Будем совершать теперь аналитическое продолжение функции (25). Если, например, совершим аналитическое продолжение из верхней полуплоскости в нижнюю, через отрезок $\left(1, \frac{1}{k}\right)$ вещественной оси, то полученная функция будет преобразовывать нижнюю полуплоскость тоже в прямоугольник, который получится из основного прямоугольника $ABCD$ отображением в стороне $BC$, получаемой из упомянутого отрезка вещественной оси. Точно так же и дальнейшие аналитические продолжения из одной полуплоскости в другую будут давать нам значения $u$ в виде прямоугольника плоскости $u$, получаемого из предыдущего прямоугольника при помощи отображения в той его стороне, которая соответствует отрезку вещественной оси, через который мы совершали аналитическое продолжение. Таким образом, вообще всевозможные аналитические продолжения функции (25) на плоскости $z$ дадут на плоскости $u$ сетку одинаковых прямоугольников, которые заполнят всю плоскость $u$, нигде не налегая друг на друга. Каждому такому прямоугольнику будет соответствовать или верхняя или нижняя полуплоскость $z$. На рис. 77 изображена эта сетка, при-

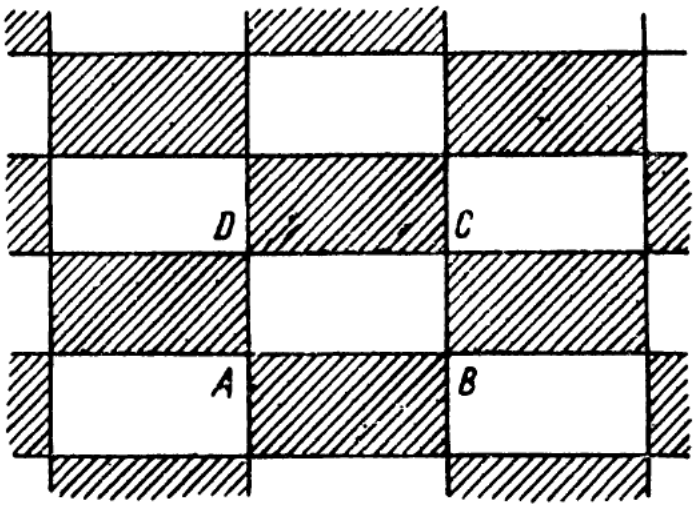



Рис. 77.

чем незаштрихованным прямоугольникам отвечает верхняя полуплоскость, а заштрихованным — нижняя полуплоскость. Наоборот, совершая аналитическое продолжение функции $z=f(u)$, получаемой в результате обращения (25) вдоль некоторой линии $l$, мы должны лишь обращать внимание на то, какие стороны прямоугольника пересекает эта линия, и получаем на плоскости $z$ переход из одной полуплоскости в другую через соответствующие отрезки вещественной оси. Если мы, например, на плоскости $u$ обойдем вокруг какой-либо вершины нашей сетки прямоугольников, то на плоскости $z$ придем к прежним значениям $z$. Таким образом, мы видим, что функция $f(u)$ есть однозначная аналитическая функция на всей плоскости $u$.

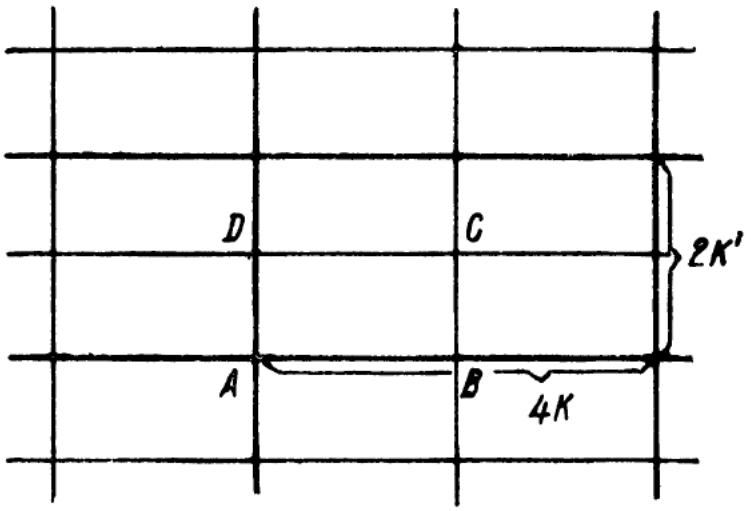


Рис. 78.

Точке $u=iK'$, лежащей на середине стороны $CD$ основного прямоугольника, соответствует значение $z=\infty$ [37], причем однолистная окрестность точки $u=iK'$ переходит в однолистную окрестность точки $z=\infty$, и отсюда видно [23], что наша функция $f(u)$ имеет в точке $iK'$ простой полюс. Аналогичные точки будут в каждом прямоугольнике нашей сетки, т. е. $f(u)$ есть дробная функция.

Покажем, наконец, что функция $f(u)$ имеет вещественный период $4K$ и чисто мнимый период $i2K'$. Возьмем нашу сетку прямоугольников и составим из нее новую сетку более крупных прямоугольников, объединяя в один прямоугольник четыре прямоугольника, имеющих общую вершину (рис. 78). Этот большой прямоугольник имеет сторону, параллельную вещественной оси, длины $4K$ и сторону, параллельную мнимой оси, длины $2K'$.

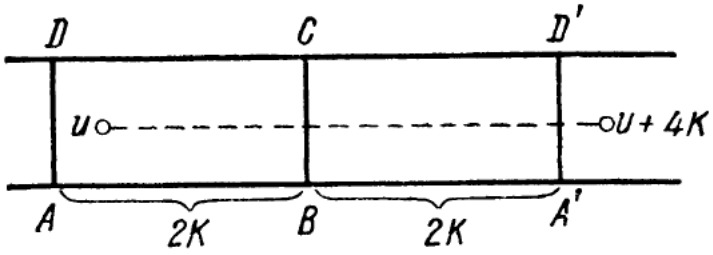


Рис. 79.

Переход от $u$ к $u+4K$ или от $u$ к $u+i2K'$ равносилен геометрически переходу в соседний четырехугольник, причем значение $f(u)$ при этом переходе не меняется. Например (рис. 79), переход от $u$ к $u+4K$ равносилен последовательным отображениям в прямых $BC$ и $A'D'$, что дает на плоскости $z$ два отображения в вещественной оси и приводит к прежнему значению $z$. Таким образом, мы имеем действительно двоякую периодичность функции $f(u)$, выражаемую следующими формулами:

$$f(u+4K)=f(u), \qquad f(u+i2K')=f(u).$$

Полученная нами однозначная функция, ввиду ее некоторой аналогии с $\sin u$, обозначается обычно следующим образом:

$$z = \operatorname{sn}(u).$$

Мы встретим ее в дальнейшем. В результате обращения других эллиптических интегралов первого вида мы будем получать другие дробные двояко-периодические функции. Мы займемся сейчас общей теорией таких функций и некоторых связанных с ними функций, причем несколько изменим предыдущие обозначения.

**169. Общие свойства эллиптических функций.** Пусть $\omega_1$ и $\omega_2$ — какие-нибудь два комплексных числа, отношение которых не есть число вещественное. *Функция $f(u)$ называется эллиптической, если $f(u)$ есть дробная функция с двумя периодами* $\omega_1$ и $\omega_2$, т. е.

$$f(u+\omega_1) = f(u),$$
$$f(u+\omega_2) = f(u) \qquad (30)$$

тождественно при всяком $u$. Иначе говоря, прибавление к аргументу $\omega_1$ или $\omega_2$ не меняет значения функции. Из формулы (30) следует и более общая формула

$$f(u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2) = f(u), \qquad (31)$$

где $m_1$ и $m_2$ — любые целые числа, положительные или отрицательные.

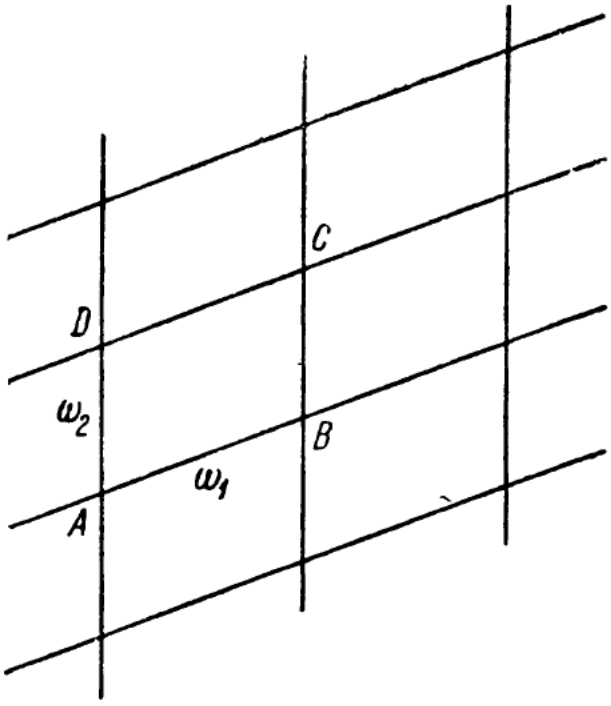


Рис. 80.

Поясним геометрически свойства двоякой периодичности. Отложим от какой-либо точки $A$ плоскости $u$ два вектора $AB$ и $AD$, соответствующие комплексным числам $\omega_1$ и $\omega_2$. Ввиду того, что отношение $\omega_2 : \omega_1$ по условию не вещественно, эти векторы лежат на различных прямых, и мы можем построить на них параллелограмм $ABCD$. Совершая параллельный перенос этого параллелограмма на вектор $\omega_1$ и $\omega_2$, мы покроем всю плоскость сеткой одинаковых параллелограммов (рис. 80). Переход от любого параллелограмма в соседний равносилен переходу от $u$ к $u \pm \omega_1$ или $u \pm \omega_2$, и в силу двоякой периодичности значения $f(u)$ в соответствующих точках построенных параллелограммов будут одинаковы. Каждый из упомянутых параллелограммов называется параллелограммом периодов функции $f(u)$. Заметим, что выбор упомянутой выше основной вершины $A$ может быть сделан совершенно произвольно. Если мы возьмем, например, за основную вершину начало координат $O$, то вершины нашей сетки параллелограммов будут иметь комплексные координаты $m_1\omega_1 + m_2\omega_2$, т. е. эти

вершины будут давать совокупность периодов функции $f(u)$, указанных формулой (31) (рис. 81). Если мы возьмем какую-нибудь точку $M$ плоскости $u$ и через нее проведем прямые, параллельные нашим векторам $\omega_1$ и $\omega_2$, то радиус-вектор, идущий из $O$ в $M$, будет геометрической суммой двух векторов, из которых один параллелен $\omega_1$, а другой — $\omega_2$, и, таким образом, всякое комплексное число можно единственным образом представить в виде

$$u = k\omega_1 + l\omega_2,$$

где $k$ и $l$ — числа вещественные. Эти числа будут косоугольными координатами точки $u$, если за основные орты принять векторы,

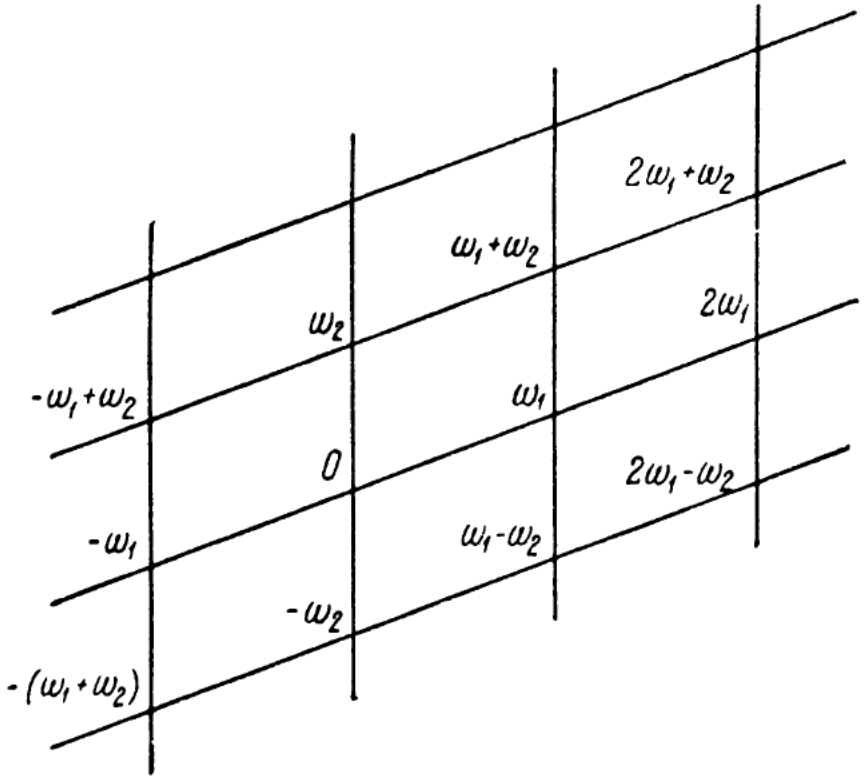



Рис. 81.

соответствующие комплексным числам $\omega_1$ и $\omega_2$. Выше мы пользовались термином *соответствующей точки двух параллелограммов сетки*. Это суть такие две точки, разность комплексных координат которых есть период, т. е. выражается числом $m_1\omega_1 + m_2\omega_2$, где $m_1$ и $m_2$ — числа целые. В этом смысле всякой точке плоскости $u$ соответствует некоторая точка из основного параллелограмма сетки. Если мы возьмем, например, сетку, изображенную на рис. 81, в которой основной вершиной является начало координат, то можем представить координату любой точки $u$ в виде

$$u = (k_1\omega_1 + k_2\omega_2) + m_1\omega_1 + m_2\omega_2,$$

где $k_1$ и $k_2$ — вещественные числа, удовлетворяющие условию $0 \leqslant k_1 < 1$ и $0 \leqslant k_2 < 1$, а $m_1$ и $m_2$ — числа целые. Заметим, что мы причисляем к каждому параллелограмму одну из его вершин и две

стороны, выходящие из этой вершины. Остальные стороны и вершины получаются из указанных добавлением периода.

Переходим теперь к выяснению основных свойств эллиптических функций. Дифференцируя тождество (31) $n$ раз, получим

$$f^{(n)}(u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2) = f^{(n)}(u),$$

т. е. *производные эллиптической функции будут тоже эллиптическими функциями с теми же периодами.* Предположим дальше, что $f(u)$ не имеет вовсе полюсов, т. е. является по существу целой функцией. Ее параллелограмм периодов есть ограниченная часть плоскости, и в этом параллелограмме, включая его контур, она регулярна, а следовательно, и подавно непрерывна, а потому и ограничена, т. е. существует такое положительное число $N$, что в основном параллелограмме периодов выполняется неравенство $|f(u)| < N$. В остальных параллелограммах сетки значения $f(u)$ повторяются, и, следовательно, написанное неравенство выполнено на всей плоскости, т. е. $f(u)$ есть целая функция, ограниченная на всей плоскости. Согласно теореме Лиувилля, мы можем утверждать, что такая функция должна быть постоянной величиной, т. е. мы имеем следующую теорему:

Теорема I. *Если $f(u)$ есть целая, двояко-периодическая функция, то $f(u)$ есть величина постоянная.*

Высказанная теорема представляется весьма важной по тем двум следствиям из нее, которые мы сейчас установим. Пусть $f_1(u)$ и $f_2(u)$ — две эллиптические функции с одинаковыми периодами $\omega_1$ и $\omega_2$. Положим, что они имеют в параллелограмме периодов одинаковые полюсы, с одинаковыми бесконечными частями. При этом разность $f_2(u) - f_1(u)$ будет двояко-периодической функцией без полюсов, т. е. эта разность будет целой двояко-периодической функцией, и из теоремы вытекает, что эта разность должна быть постоянной величиной. Итак, мы имеем:

Следствие I. *Если две эллиптические функции $f_1(u)$ и $f_2(u)$ с одинаковыми периодами имеют в параллелограмме периодов одни и те же полюсы, с одинаковыми бесконечными частями, то они отличаются лишь постоянным слагаемым.*

Положим теперь, что $f_1(u)$ и $f_2(u)$ имеют в параллелограмме периодов одни и те же полюсы, одинаковой кратности, и одни и те же корни, одинаковой кратности. При этом отношение $f_2(u) : f_1(u)$ не будет вовсе иметь в параллелограмме ни корней, ни полюсов и должно равняться постоянной величине, т. е. мы имеем:

Следствие II. *Если две эллиптические функции $f_1(u)$ и $f_2(u)$ с одинаковыми периодами имеют в параллелограмме периодов одинаковые корни и полюсы, одной и той же кратности у обеих функций, то эти функции отличаются лишь постоянным множителем.*

Расположим параллелограмм периодов функции $f(u)$ так, чтобы полюсы этой функции не находились на его сторонах, и рассмотрим контурный интеграл от функции $f(u)$ по контуру параллелограмма

$$\int\limits_{ABCD} f(u)\,du = \int\limits_{AB} f(u)\,du + \int\limits_{BC} f(u)\,du + \int\limits_{CD} f(u)\,du + \int\limits_{DA} f(u)\,du. \qquad (32)$$

Возьмем интеграл по стороне $CD$ и введем вместо $u$ новую переменную интегрирования $u = v + \omega_2$. При этом на плоскости $v$ сторона $CD$ перейдет в сторону $BA$, и в силу периодичности функции будем иметь

$$\int\limits_{CD} f(u)\,du = \int\limits_{BA} f(v+\omega_2)\,dv = \int\limits_{BA} f(v)\,dv = -\int\limits_{AB} f(v)\,dv,$$

т. е. в правой части формулы (32) сумма первого и третьего слагаемого даст нуль. То же самое можно утверждать и относительно суммы второго и четвертого слагаемого, и мы имеем, следовательно,

$$\int\limits_{ABCD} f(u)\,du = 0, \qquad (33)$$

т. е. если на контуре параллелограмма не лежат полюсы эллиптической функции $f(u)$, то контурный интеграл от этой функции по контуру параллелограмма равен нулю.

Рассмотрим такое комплексное число $\alpha$, что уравнение $f(u) - \alpha = 0$ не имеет корней на контуре параллелограмма. Применим предыдущий результат к эллиптической функции

$$\varphi(u) = \frac{f'(u)}{f(u) - \alpha}.$$

Мы получим, таким образом,

$$\int\limits_{ABCD} \frac{f'(u)}{f(u) - \alpha}\,du = 0.$$

Написанный интеграл выражает, как известно, разность между числом корней и числом полюсов функции $f(u) - \alpha$ [**22**], и, следовательно, можно утверждать, что число корней уравнения $f(u) = \alpha$ равно числу полюсов $f(u) - \alpha$, или, что то же, числу полюсов $f(u)$, т. е. функция $f(u)$ внутри параллелограмма принимает одинаковое число раз значение $\alpha$ и значение бесконечность.

Это доказано нами для любого $\alpha$ в предположении, что уравнение $f(u) = \alpha$ не имеет корней на контуре параллелограмма. Если это не так, то сдвинем немножко наш параллелограмм так, чтобы корни упомянутого уравнения пошли внутрь параллелограмма, а полюсы попрежнему бы оставались внутри его. Для сдвинутого параллелограмма наш предыдущий результат будет справедливым. Нетрудно видеть, что он будет справедливым и для первоначального паралле-

лограмма, если только при счете числа корней уравнения мы будем присоединять к параллелограмму одну его вершину и две стороны, выходящие из этой вершины. Заметим, кроме того, что если уравнение $f(u)=\alpha$ имеет корень $u=u_0$ и вблизи этого значения имеет место разложение вида

$$f(u)=\alpha+c_k(u-u_0)^k+c_{k+1}(u-u_0)^{k+1}+\ldots \qquad (c_k\neq 0),$$

то такой корень надо считать корнем кратности $k$ для функции $f(u)-\alpha$ или для упомянутого выше уравнения. При всех этих оговорках мы получаем из предыдущих рассуждений следующую теорему:

Теорема II. *Эллиптическая функция принимает в параллелограмме периодов всякое значение (конечное или бесконечное) одинаковое число раз.*

Если $f(u)$ принимает в параллелограмме периодов всякое значение $m$ раз, то она называется *эллиптической функцией порядка m.* Такая функция преобразует параллелограмм периодов в $m$-листную риманову плоскость. Конформность преобразования может при этом нарушиться лишь в тех точках, где $f'(u)$ обращается в нуль, или там, где $f(u)$ имеет кратные полюсы. Этим значениям $u$ будут соответствовать точки разветвления упомянутой выше римановой поверхности.

Мы покажем сейчас, что целое положительное число $m$ не может равняться единице. Действительно, из формулы (33) непосредственно вытекает, что *сумма вычетов эллиптической функции в ее полюсах, находящихся в параллелограмме периодов, должна равняться нулю.* Если бы мы имели $m=1$, то $f(u)$ имела бы в параллелограмме один простой полюс, что прямо противоречит только что высказанному результату. Таким образом, мы видим, *что не существует эллиптических функций первого порядка.* Дальше мы построим фактически эллиптические функции второго порядка. Можно показать, что эллиптические функции второго порядка суть как раз те эллиптические функции, которые получаются в результате обращения эллиптического интеграла первого рода. Существуют, конечно, и эллиптические функции более высокого порядка.

**170. Основная лемма.** Рассмотрим элементарную функцию $\sin u$. Это есть целая функция, имеющая простые корни в точках $u=k\pi$ ($k=0, \pm 1, \ldots$), расположенных на вещественной оси и отстоящих друг от друга на расстоянии $\pi$. Две другие основные функции,

$$\operatorname{ctg} u=\frac{(\sin u)'}{\sin u}=\frac{\cos u}{\sin u} \quad \text{и} \quad -(\operatorname{ctg} u)'=\frac{1}{\sin^2 u}, \qquad (34)$$

имеют в этих точках простые и двойные полюсы. Для функции $\sin u$ мы имели представление в виде бесконечного произведения, а для

функций (34) мы имели представление в виде разложения на простейшие дроби. Совершенно аналогично мы построим в следующем номере целую функцию, которая имеет простые корни в точках

$$m_1\omega_1 + m_2\omega_2, \tag{35}$$

где $\omega_1$ и $\omega_2$ — комплексные числа, отношение которых не вещественно, а $m_1$ и $m_2$ — любые целые числа. Эти точки (35) суть вершины сетки параллелограммов, изображенной на рис. 81. Для построения этой целой функции мы воспользуемся формулой Вейерштрасса, выражающей целую функцию в виде бесконечного произведения. Для применения этой формулы нам надо найти такое целое число $p$, чтобы ряд

$$\sum_{m_1,\ m_2}{}' \frac{1}{|m_1\omega_1 + m_2\omega_2|^p} \tag{36}$$

был сходящимся. Штрих у знака суммы показывает, что суммирование производится по всем целым значениям $m_1$ и $m_2$, кроме значения $m_1 = m_2 = 0$. Аналогичное условие будет иметь место и в дальнейшем при наличии штриха у знака суммы или произведения. Мы можем переписать сумму (36) в виде

$$\sum_{m_1,\ m_2}{}' \frac{1}{\delta^p_{m_1,\ m_2}}, \tag{37}$$

где $\delta_{m_1,\ m_2}$ — расстояние от начала до той вершины сетки рис. 81, которой соответствует комплексная координата $m_1\omega_1 + m_2\omega_2$. Пусть $2\delta$ — кратчайшее расстояние до начала вершин упомянутой сетки, отличных от начала. Это число $2\delta$ будет в то же время, очевидно, и кратчайшим расстоянием между двумя вершинами упомянутой сетки. Проведем мысленно на плоскости рис. 81 две окружности с центром в начале и радиусами $n$ и $(n+1)$, где $n$ — целое число, удовлетворяющее условию $n > \delta$. Пусть $K_n$ есть кольцо, образованное этими двумя окружностями. Оценим приближенно число вершин сетки, находящихся в кольце $K_n$.

Пусть это число равно $t_n$. Проведем кружки с центрами в вершинах сетки, принадлежащих кольцу $K_n$, и радиусом $\delta$. В силу определения числа $\delta$ эти круги не будут налегать друг на друга, и их общая площадь $\pi\delta^2 t_n$ будет меньше площади кольца, с внутренним радиусом $(n-\delta)$ и внешним радиусом $(n+1+\delta)$, т. е.

$$\pi(n+1+\delta)^2 - \pi(n-\delta)^2 > \pi\delta^2 t_n$$

или, после элементарных вычислений,

$$t_n < A_1 n + A_2 \quad \left(A_1 = \frac{4\delta+2}{\delta^2};\ A_2 = \frac{2\delta+1}{\delta^2}\right).$$

Для каждой из вершин, находящихся в кольце $K_n$, расстояние $\delta_{m_1, m_2}$ будет не меньше $n$, и, следовательно, сумма слагаемых ряда (37), соответствующих вершинам, находящимся в кольце $K_n$, будет во всяком случае меньше

$$\frac{A_1 n + A_2}{n^p} = \frac{A_1}{n^{p-1}} + \frac{A_2}{n^p}.$$

Эта оценка будет справедлива для слагаемых суммы (37), у которых $\delta_{m_1, m_2}$ будет достаточно большим по сравнению с $\delta_1$, например, $\delta_{m_1, m_2} > \delta + 1$. При этом соответствующие точки будут наверно находиться в кольце $K_n$, для которого $n > \delta$. Отбрасывая в ряде (37) конечное число слагаемых и заменяя оставшиеся слагаемые бóльшими, получим, согласно предыдущему, превосходящий ряд

$$\sum_n \left( \frac{A_1}{n^{p-1}} + \frac{A_2}{n^p} \right).$$

Этот ряд, как известно [I, **122**], сходится при $p > 2$ и в частности при $p = 3$, и поэтому можно сделать вывод:

Основная лемма. *Ряд* (36) *сходится при* $p > 2$ *и, в частности, при* $p = 3$.

**171. Функции Вейерштрасса.** Для сокращения письма обозначим

$$w = m_1\omega_1 + m_2\omega_2. \tag{38}$$

Принимая во внимание основную лемму, можно непосредственно построить целую функцию, имеющую простые корни в точках (38). Эта функция определится следующей формулой [**69**]:

$$\sigma(u) = u \prod_{m_1, m_2}{}' \left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w} + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{w}\right)^2}, \tag{39}$$

где бесконечное произведение распространяется на все пары целых значений $m_1$ и $m_2$ как положительных, так и отрицательных, кроме $m_1 = m_2 = 0$.

Как известно [**68**], мы можем вычислять логарифмическую производную от написанного произведения так же, как и от конечного произведения, причем логарифмическая производная от отдельного сомножителя написанного произведения будет

$$\frac{1}{w} + \frac{u}{w^2} - \frac{1}{w} \frac{1}{1 - \frac{u}{w}} = \frac{1}{u - w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2}.$$

Таким образом, мы получаем вторую функцию

$$\zeta(u) = \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} = \frac{1}{u} + \sum_{m_1, m_2}{}' \left( \frac{1}{u - w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2} \right), \tag{40}$$

которая имеет в точках (38) простые полюсы. Эта функция получается из $\sigma(u)$, как $\operatorname{ctg} u$ из $\sin u$. Принимая во внимание сходимость ряда

$$\sum_{m_1,\ m_2}{}' \frac{1}{|w|^3},$$

нетрудно показать, что ряд (40) сходится равномерно во всякой конечной области, если отбросить конечное число слагаемых, имеющих в этой области полюсы. Дифференцируя функцию (40) и меняя знак, получаем новую функцию

$$\wp(u) = -\zeta'(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{m_1,\ m_2}{}' \left[\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right]. \tag{41}$$

Эта новая функция получается из $\zeta(u)$ совершенно так же, как $\frac{1}{\sin^2 u}$ из $\operatorname{ctg} u$. Она имеет в точках $w$ полюсы второй кратности. Ряд (41) сходится также равномерно в области указанного выше вида [12].

Выясним теперь некоторые основные свойства введенных функций. Напишем формулу для $\sigma(-u)$:

$$\sigma(-u) = -u \prod_{m_1,\ m_2}{}' \left(1 + \frac{u}{w}\right) e^{-\frac{u}{w} + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{w}\right)^2}.$$

Поскольку произведение распространяется на все пары целых $m_1$ и $m_2$, кроме $m_1 = m_2 = 0$, мы можем переменить знаки у $m_1$ и $m_2$, т. е. переменить знак у $w$, и таким образом получим

$$\sigma(-u) = -u \prod_{m_1,\ m_2}{}' \left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w} + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{w}\right)^2} = -\sigma(u),$$

т. е. $\sigma(u)$ *есть функция нечетная.* Совершенно так же можно показать, *что* $\zeta(u)$ *есть также функция нечетная, а* $\wp(u)$ *есть функция четная.* Это, впрочем, может быть получено и непосредственно из формул

$$\zeta(u) = \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}, \quad \wp(u) = -\zeta'(u), \tag{42}$$

поскольку дифференцирование нечетной функции дает четную функцию, и наоборот. Кроме того, из формул, определяющих введение функции, непосредственно следует:

$$\left.\frac{\sigma(u)}{u}\right|_{u=0} = 1, \quad \left.u\zeta(u)\right|_{u=0} = 1, \quad \left.u^2\wp(u)\right|_{u=0} = 1. \tag{43}$$

Функции $\sigma(u)$ и $\zeta(u)$ не могут иметь периодов $\omega_1$ и $\omega_2$, так как первая есть целая функция, а вторая имеет в параллелограмме один

простой полюс. Покажем, что функция $\wp(u)$ имеет периоды $\omega_1$ и $\omega_2$. Для этого образуем сначала

$$\wp'(u) = -\frac{2}{u^3} - \sum_{m_1,\ m_2}{}' \frac{1}{(u-w)^3}$$

или

$$\wp'(u) = -2\sum_{m_1,\ m_2}{}' \frac{1}{(u-w)^3} = -2\sum_{m_1,\ m_2}{}' \frac{1}{(u-m_1\omega_1-m_2\omega_2)^3},$$

где суммирование распространяется на все целые $m_1$ и $m_2$ без исключения. Отсюда

$$\wp'(u+\omega_1) = -2\sum_{m_1,\ m_2}{}' \frac{1}{(u_1+\omega_1-m_1\omega_1-m_2\omega_2)^3} =$$

$$= -2\sum_{m_1,\ m_2}{}' \frac{1}{[u-(m_1-1)\,\omega_1-m_2\omega_2]^3}.$$

Если $m_1$ пробегает все целые значения, то то же можно сказать и относительно $(m_1-1)$. Таким образом, имеем

$$\wp'(u+\omega_1) = \wp'(u),$$

и аналогично можно сказать, что $\wp'(u+\omega_2) = \wp'(u)$. Итак,

$$\wp'(u+\omega_k) = \wp'(u) \qquad (k=1,\ 2). \tag{44}$$

Посмотрим теперь, как изменяется функция $\wp(u)$ при прибавлении к аргументу чисел $\omega_1$ или $\omega_2$. Интегрируя (44), имеем

$$\wp(u+\omega_k) = \wp(u) + C_k,$$

где $C_k$ — некоторая постоянная. Положим в этом тождестве $u = -\frac{\omega_k}{2}$, причем напомним, что $\frac{\omega_k}{2}$ не есть полюс $\wp(u)$:

$$\wp\left(\frac{\omega_k}{2}\right) = \wp\left(-\frac{\omega_k}{2}\right) + C_k.$$

В силу четности функции $\wp(u)$ имеем $\wp\left(-\frac{\omega_k}{2}\right) = \wp\left(\frac{\omega_k}{2}\right)$, и, следовательно, $C_k = 0$, т. е.

$$\wp(u+\omega_k) = \wp(u) \qquad (k=1,\ 2). \tag{45}$$

Посмотрим теперь, как меняется функция $\zeta(u)$ при прибавлении к аргументу чисел $\omega_k$. На основании (45) и (42) имеем

$$\zeta'(u+\omega_k) = \zeta'(u).$$

Откуда, интегрируя, получим

$$\zeta(u+\omega_k) = \zeta(u) + \eta_k \qquad (k=1,\ 2), \tag{46}$$

где $\eta_k$ — некоторая постоянная, т. е. *функция* $\zeta(u)$ *получает постоянное слагаемое* $\eta_k$ *при прибавлении к аргументу числа* $\omega_k$. Из формулы (46) вытекает и более общая формула:

$$\zeta(u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2) = \zeta(u) + m_1\eta_1 + m_2\eta_2, \tag{47}$$

где $m_1$ и $m_2$ — любые целые числа.

Можно число $\eta_k$ представить как частное значение функции $\zeta(u)$, а именно: полагая в формуле (46) $u = -\frac{\omega_k}{2}$ и принимая во внимание нечетность функции $\zeta(u)$, получим

$$\eta_k = 2\zeta\left(\frac{\omega_k}{2}\right) \qquad (k = 1,\ 2). \tag{48}$$

Обратимся теперь к функции $\sigma(u)$. В силу (46) и (42) можем написать

$$\frac{\sigma'(u + \omega_k)}{\sigma(u + \omega_k)} = \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} + \eta_k.$$

Интегрируя, получим

$$\ln \sigma(u + \omega_k) = \ln \sigma(u) + \eta_k u + D_k$$

или

$$\sigma(u + \omega_k) = C_k e^{\eta_k u}\sigma(u),$$

где $C_k = e^D$ — некоторая постоянная. Для определения этой постоянной положим в написанном тождестве $u = -\frac{\omega_k}{2}$:

$$\sigma\left(\frac{\omega_k}{2}\right) = C_k e^{-\frac{\eta_k\omega_k}{2}}\sigma\left(-\frac{\omega_k}{2}\right).$$

Принимая во внимание нечетность $\sigma(u)$ и сокращая на множитель $\sigma\left(\frac{\omega_k}{2}\right)$, отличный от нуля, получим

$$C_k = -e^{\frac{\eta_k\omega_k}{2}},$$

и окончательно

$$\sigma(u + \omega_k) = -e^{\eta_k\left(u + \frac{\omega_k}{2}\right)}\sigma(u) \qquad (k = 1,\ 2). \tag{49}$$

Вывод: *функция* $\sigma(u)$ *приобретает множитель показательного типа при прибавлении к аргументу числа* $\omega_k$. Вместо формулы (49) можно получить более общую формулу, аналогичную формуле (47), а именно:

$$\sigma(u + w) = \varepsilon e^{\eta\left(u + \frac{w}{2}\right)}\sigma(u), \tag{50}$$

где

$$w = m_1\omega_1 + m_2\omega_2; \quad \eta = m_1\eta_1 + m_2\eta_2$$

и $\varepsilon = 1$ или $\varepsilon = -1$, смотря по тому, будут ли целые числа $m_1$ и $m_2$ оба четные или нет. В последнем случае соотношение (50) непосредственно вытекает из (47) так же, как (49) из (46). Этим только случаем нам и придется пользоваться в дальнейшем при $m_1 = m_2 = 1$.

В заключение настоящего параграфа выведем одно соотношение, связывающее постоянные $\omega_k$ и $\eta_k$. Предварительно установим некоторый порядок в обозначении периодов $\omega_1$ и $\omega_2$. Рассмотрим основной параллелограмм $ABCD$ (рис. 80). Одна из его сторон $AD$ образует с другой его стороной $AB$ положительный угол, меньший $\pi$. Мы всегда будем считать, что число $\omega_1$ соответствует той стороне $AB$, от которой угол отсчитывается, а число $\omega_2$ — той стороне $AD$ параллелограмма, до которой производится отсчет положительного угла, меньшего $\pi$; при этом аргумент дроби $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ будет представлять собою некоторый угол, заключающийся между 0 и $\pi$, т. е. мнимая часть упомянутой дроби будет обязательно положительной. У обратной дроби $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ мнимая часть будет, очевидно, отрицательной. Таким образом, *мы всегда будем обозначать числа $\omega_k$ так, чтобы отношение $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ имело положительный коэффициент при мнимой единице.* Построим теперь параллелограмм с основной вершиной $A(u = u_0)$ так, чтобы полюс $\zeta(u)$ находился внутри него. Этот единственный полюс имеет в силу (40) вычет, равный единице, и согласно основной теореме о вычетах интеграл от функции $\zeta(u)$ по контуру параллелограмма будет равен $2\pi i$, т. е.

$$\int_{u_0}^{u_0+\omega_1} \zeta(u)\,du + \int_{u_0+\omega_1}^{u_0+\omega_1+\omega_2} \zeta(u)\,du + \int_{u_0+\omega_1+\omega_2}^{u_0+\omega_2} \zeta(u)\,du + \int_{u_0+\omega_2}^{u_0} \zeta(u)\,du = 2\pi i.$$

Заменяя во втором из написанных интегралов переменную $u$ новой переменной $u = v_1 + \omega_1$ и в третьем — переменную $u$ новой переменной $u = v_2 + \omega_2$, получим

$$\int_{u_0}^{u_0+\omega_1} \zeta(u)\,du + \int_{u_0}^{u_0+\omega_2} \zeta(v_1+\omega_1)\,dv_1 + \int_{u_0+\omega_1}^{u_0} \zeta(v_2+\omega_2)\,dv_2 + \int_{u_0+\omega_2}^{u_0} \zeta(u)\,du = 2\pi i,$$

где интегрирование совершается по отрезкам прямых, или, меняя обозначение переменной интегрирования,

$$\int_{u_0}^{u_0+\omega_2} [\zeta(u+\omega_1) - \zeta(u)]\,du - \int_{u_0}^{u_0+\omega_1} [\zeta(u+\omega_2) - \zeta(u)]\,du = 2\pi i.$$

Отсюда в силу (46) и получаем искомое соотношение между числами $\omega_k$ и $\eta_k$:

$$\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = 2\pi i. \tag{51}$$

Это соотношение называется обычно *соотношением Лежандра.*

Функции $\sigma(u)$, $\zeta(u)$ и $\wp(u)$ были введены впервые Вейерштрассом. Как видно из их определения, для их построения можно пользоваться любыми двумя комплексными числами $\omega_1$ и $\omega_2$ при единственном ограничении, чтобы их отношение было невещественным, и эти функции Вейерштрасса являются не только функциями аргумента $u$, но и функциями тех комплексных параметров $\omega_1$ и $\omega_2$, о которых мы только что упоминали. Поэтому иногда их обозначают следующим образом:

$$\sigma(u;\ \omega_1,\ \omega_2),\quad \zeta(u;\ \omega_1,\ \omega_2),\quad \wp(u;\ \omega_1,\ \omega_2). \tag{52}$$

**172. Дифференциальное уравнение для $\wp(u)$.** Установив основные свойства функций Вейерштрасса, перейдем сейчас к более подробному изучению функции $\wp(u)$ и, в частности, к установлению дифференциального уравнения первого порядка, которому эта функция удовлетворяет. Прежде всего выясним вид разложения функции $\wp(u)$ вблизи точки $u=0$, которая является полюсом второго порядка для $\wp(u)$. Для этого обращаемся к основной формуле (41). Имеем вблизи $u=0$

$$\frac{1}{w-u} = \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2} + \ldots + \frac{u^n}{w^{n+1}} + \ldots$$

и, дифференцируя по $u$, получим

$$\frac{1}{(w-u)^2} = \frac{1}{w^2} + \frac{2u}{w^3} + \ldots + \frac{(n+1)\,u^n}{w^{n+2}} + \ldots$$

Отсюда в силу (41) будем иметь следующее разложение для $\wp(u)$ вблизи начала:

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\,u^n \sum_{m_1,\ m_2}{}' \frac{1}{w^{n+2}}.$$

При нечетном $n$ суммирование по $m_1$ и $m_2$ будет содержать члены, попарно равные по величине и обратные по знаку, так что получим

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + c_2u^2 + c_3u^4 + \ldots + c_nu^{2n-2} + \ldots, \tag{53}$$

где

$$c_n = (2n-1) \sum_{m_1,\ m_2}{}' \frac{1}{w^{2n}} \quad (n=2,\ 3,\ \ldots). \tag{54}$$

Установим теперь вид разложений для $\wp'^2(u)$ и $\wp^3(u)$. Мы имеем, очевидно,

$$\wp'(u) = -\frac{2}{u^3} + 2c_2u + 4c_3u^3 + \dots,$$

$$\wp'^2(u) = \frac{4}{u^6} - \frac{8c_2}{u^2} - 16c_3 + \dots,$$

$$\wp^3(u) = \frac{1}{u^6} + \frac{3c_2}{u^2} + 3c_3 + \dots,$$

где в последних двух выражениях не выписанные члены содержат положительные степени $u$. Отсюда

$$\wp'^2(u) - 4\wp^3(u) + 20c_2\wp(u) = -28c_3 + \dots, \tag{55}$$

где опять невыписанные члены содержат положительные степени $u$. Таким образом, для выражения, стоящего в левой части, точка $u=0$ уже не будет полюсом. Следовательно, это выражение будет эллиптической функцией, не имеющей вовсе полюсов в параллелограмме периодов, ибо единственными полюсами функции $\wp(u)$ были точка $u=0$ и соответствующие вершины других параллелограммов. Поэтому выражение (55) (эллиптическая функция без полюсов) должно быть постоянной величиной. Но правая часть обращается в $-28c_3$ при $u=0$, и, следовательно, она тождественно равна $-28c_3$, т. е.

$$\wp'^2(u) = 4\wp^3(u) - 20c_2\wp(u) - 28c_3.$$

Введем обозначения:

$$g_2 = 20c_2 = 60 \sum_{m_1,\, m_2}{}' \frac{1}{w^4}; \quad g_3 = 28c_3 = 140 \sum_{m_1,\, m_2}{}' \frac{1}{w^6}. \tag{56}$$

Предыдущие вычисления приводят нас к следующей теореме:

Теорема. *Функция $\wp(u)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$\wp'^2(u) = 4\wp^3(u) - g_2\wp(u) - g_3. \tag{57}$$

Числа $g_2$ и $g_3$ называются *инвариантами функции $\wp(u)$*.

Функция $\wp(u)$ имеет в параллелограмме периодов с основной вершиной $u=0$ один двойной полюс $u=0$. Остальные вершины параллелограмма мы уже не должны причислять к этому параллелограмму, и, следовательно, $\wp(u)$ есть эллиптическая функция второго порядка, так что всякое уравнение $\wp(u)=\alpha$ при любом заданном значении комплексного числа $\alpha$ имеет два корня в параллелограмме периодов.

Если $\wp(u_0)=\alpha$ и $\wp'(u_0)=0$, то корень $u=u_0$ надо считать по крайней мере двойным. Но выше двойного он и не может быть, поскольку $\wp(u)$ есть функция второго порядка, и, следовательно, в этом случае функция $\wp(u)$ будет принимать значение $\alpha$ только в одной точке $u=u_0$, принадлежащей параллелограмму. Если $\wp'(u_0)\neq 0$, то

уравнение $\wp(u)=\alpha$ будет иметь два различных простых корня в параллелограмме. Посмотрим теперь, где будут лежать те значения $u$, в которых $\wp'(u)=0$. Полагая в тождестве

$$\wp'(u+\omega_k)=\wp'(u) \quad \text{или} \quad \wp'(u+\omega_1+\omega_2)=\wp'(u)$$

$u=-\frac{\omega_k}{2}$ или $u=-\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$, получаем в силу нечетности $\wp'(u)$

$$\wp'\left(\frac{\omega_k}{2}\right)=0 \ (k=1,2) \quad \text{и} \quad \wp'\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)=0, \tag{58}$$

т. е. $\wp'(u)$ обращается в нуль на серединах сторон и на середине диагонали параллелограмма с основной вершиной $u=0$. Введем в рассмотрение значение самой функции $\wp(u)$ в этих точках:

$$\wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right)=e_1, \quad \wp\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)=e_2, \quad \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right)=e_3. \tag{59}$$

Каждое из уравнений $\wp(u)=e_k$ имеет двойной корень в соответствующей точке. Принимая во внимание, что $\wp(u)$ есть функция второго порядка, можно утверждать, что числа $e_k$ различны.

Обратимся теперь к формуле (57). Правая часть этой формулы есть полином третьей степени от $\wp(u)$. Полагая $u=\frac{\omega_k}{2}$ или $u=\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$, мы видим, что этот полином обращается в нуль, если $\wp(u)=e_k$, так как при указанной подстановке левая часть равенства (57) обращается в нуль, а $\wp(u)$ обращается в $e_k$. Разлагая полином на множители, можно, таким образом, переписать формулу (57) в виде

$$\wp'^2(u)=4(\wp(u)-e_1)(\wp(u)-e_2)(\wp(u)-e_3). \tag{60}$$

Сравнивая правые части формул (57) и (60), получаем связь между числами $e_k$ и инвариантами $g_2$ и $g_3$:

$$e_1+e_2+e_3=0, \quad e_1e_2+e_2e_3+e_3e_1=-\frac{1}{4}g_2, \quad e_1e_2e_3=\frac{1}{4}g_3. \tag{61}$$

Если положим $x=\wp(u)$, то уравнение (57) можно переписать в виде

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2=4x^3-g_2x-g_3.$$

Принимая во внимание, что при $u=0$ мы имеем $x=\infty$, получим, разделяя переменные и интегрируя,

$$u=\int_{\infty}^{x}\frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}}, \tag{62}$$

т. е. *функция $\wp(u)$ получается в результате обращения эллиптического интеграла первого рода* (62). Можно показать и наоборот,

что при любом выборе постоянных $g_2$ и $g_3$ таких, что подрадикальный полином не имеет кратных корней, обращение интеграла (62) приводит к функции Вейерштрасса $\wp(u)$.

Можно показать далее, что всякая эллиптическая функция с периодами $\omega_1$ и $\omega_2$ является рациональной функцией от $\wp(u)$ и $\wp'(u)$, так что совокупность рациональных функций от $\wp'(u)$ и $\wp(u)$ и представляет собою всю совокупность эллиптических функций с периодами $\omega_1$ и $\omega_2$.

**173. Функции $\sigma_k(u)$.** Из формулы (60) непосредственно вытекает, что произведение, стоящее в правой части, представляет собою полный квадрат однозначной аналитической функции $\wp'(u)$. Оказывается, что то же самое можно утверждать и относительно каждого из сомножителей $\wp(u) - e_k$. Совершенно аналогично для случая тригонометрических функций

$$(\cos u)'^2 = \sin^2 u = (1 - \cos u)(1 + \cos u),$$

и каждый из сомножителей в правой части есть полный квадрат однозначной аналитической функции

$$1 - \cos u = 2\sin^2\frac{u}{2} \quad \text{и} \quad 1 + \cos u = 2\cos^2\frac{u}{2}.$$

Чтобы доказать наше утверждение относительно разности $\wp(u) - e_k$, мы установим одну вспомогательную формулу. Рассмотрим разность

$$\wp(u) - \wp(v) \tag{63}$$

как функцию аргумента $u$. Она имеет в параллелограмме с основной вершиной $u = 0$ двойной полюс $u = 0$. В силу четности функции $\wp(u)$ корнями функции (63) будут те две точки параллелограмма, которые соответствуют комплексным числам $u = \pm v$, т. е., точнее говоря, это будут те точки параллелограмма, которые отличаются от $\pm v$ на период. Если такая точка параллелограмма окажется полупериодом, то упомянутые две точки сольются в одну двойную точку, как это было разъяснено выше. Наряду с функцией (63) рассмотрим функцию

$$f(u) = \frac{\sigma(u - v)\,\sigma(u + v)}{\sigma^2(u)}. \tag{64}$$

Докажем прежде всего, что эта последняя функция также имеет периоды $\omega_1$ и $\omega_2$. Действительно, мы имеем в силу (49)

$$f(u + \omega_k) = \frac{\sigma(u - v + \omega_k)\,\sigma(u + v + \omega_k)}{\sigma^2(u + \omega_k)} =$$

$$= \frac{e^{\eta_k\left(u - v + \frac{\omega_k}{2}\right)}\sigma(u - v)\, e^{\eta_k\left(u + v + \frac{\omega_k}{2}\right)}\sigma(u + v)}{e^{2\eta_k\left(u + \frac{\omega_k}{2}\right)}\sigma^2(u)} = \frac{\sigma(u - v)\,\sigma(u + v)}{\sigma^2(u)} = f(u).$$

Таким образом, действительно, функция (64) имеет периоды $\omega_1$ и $\omega_2$. Из формулы (64) непосредственно вытекает, что в основном параллелограмме она имеет двойной полюс $u=0$ и два корня, которые будут изображаться теми точками параллелограмма, которые отличаются от $\pm v$ на период. Все эти утверждения непосредственно вытекают из расположения корней функции $\sigma(u)$, а именно из того, что эти корни суть $w=m_1\omega_1+m_2\omega_2$, причем все они простые. Таким образом, функции (63) и (64), обе с периодами $\omega_1$ и $\omega_2$, имеют в основном параллелограмме одинаковые полюсы и одинаковые корни, с одной и той же для обеих функций кратностью. Мы можем утверждать, следовательно, что эти функции отличаются лишь постоянным множителем [**169**]:

$$\wp(u)-\wp(v)=C\,\frac{\sigma(u-v)\,\sigma(u+v)}{\sigma^2(u)}.$$

Для определения постоянной $C$ умножим обе части на $u^2$ и положим затем $u=0$:

$$u^2\wp(u)-u^2\wp(v)\Big|_{u=0}=\frac{C\sigma(u-v)\,\sigma(u+v)}{\left[\frac{\sigma(u)}{u}\right]^2}\Bigg|_{u=0}.$$

В силу (43) будем иметь

$$1=C\sigma(-v)\,\sigma(v)=-C\sigma^2(v)$$

и окончательно получаем искомую формулу

$$\wp(u)-\wp(v)=-\frac{\sigma(u-v)\,\sigma(u+v)}{\sigma^2(v)\,\sigma^2(u)}. \tag{65}$$

Для того чтобы исследовать разности $\wp(u)-e_k$, нам остается только в формуле (65) положить

$$v=\frac{\omega_1}{2},\quad v=\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\quad\text{и}\quad v=\frac{\omega_2}{2}.$$

Так, например,

$$\wp(u)-e_1=\wp(u)-\wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right)=-\frac{\sigma\left(u-\frac{\omega_1}{2}\right)\sigma\left(u+\frac{\omega_1}{2}\right)}{\sigma^2\left(\frac{\omega_1}{2}\right)\sigma^2(u)}, \tag{66}$$

или, принимая во внимание, что в силу (49) имеем

$$\sigma\left(u+\frac{\omega_1}{2}\right)=\sigma\left(u-\frac{\omega_1}{2}+\omega_1\right)=-e^{\eta_1\left(u-\frac{\omega_1}{2}+\frac{\omega_1}{2}\right)}\sigma\left(u-\frac{\omega_1}{2}\right),$$

т. е.

$$\sigma\left(u+\frac{\omega_1}{2}\right)=-e^{\eta_1 u}\sigma\left(u-\frac{\omega_1}{2}\right), \tag{67}$$

можем написать вместо (66)

$$\wp(u) - e_1 = e^{\eta_1 u} \frac{\sigma^2\left(u - \frac{\omega_1}{2}\right)}{\sigma^2\left(\frac{\omega_1}{2}\right)\sigma^2(u)}$$

или

$$\wp(u) - e_1 = \left[\frac{e^{\frac{1}{2}\eta_1 u}\,\sigma\left(\frac{\omega_1}{2} - u\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{2}\right)\sigma(u)}\right]^2.$$

Точно так же можно разобрать и две другие разности. Мы получаем, таким образом, следующие представления $\wp(u) - e_k$ в виде квадрата частного двух целых функций:

$$\wp(u) - e_k = \left[\frac{\sigma_k(u)}{\sigma(u)}\right]^2, \tag{68}$$

где ввели следующие обозначения:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1(u) &= e^{\frac{1}{2}\eta_1 u}\,\frac{\sigma\left(\frac{\omega_1}{2} - u\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{2}\right)}, \\ \sigma_2(u) &= e^{\frac{1}{2}(\eta_1+\eta_2)u}\,\frac{\sigma\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2} - u\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)}, \qquad \sigma_3(u) = e^{\frac{1}{2}\eta_2 u}\,\frac{\sigma\left(\frac{\omega_2}{2} - u\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_2}{2}\right)}. \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

Установим некоторые свойства функций $\sigma_k(u)$. Эти функции суть, очевидно, *целые функции*, и, полагая $u = 0$, мы имеем

$$\sigma_k(0) = 1 \qquad (k = 1,\ 2,\ 3). \tag{70}$$

Переписывая соотношение (67) в виде

$$\sigma\left(\frac{\omega_1}{2} - u\right) = e^{-\eta_1 u}\,\sigma\left(\frac{\omega_1}{2} + u\right),$$

получаем

$$\sigma_1(u) = e^{-\frac{1}{2}\eta_2 u}\,\frac{\sigma\left(\frac{\omega_1}{2} + u\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{2}\right)} = \sigma_1(-u)$$

и то же самое для двух других функций $\sigma_k(u)$, т. е. *функции* $\sigma_k(u)$ *суть четные функции.*

Подставляя выражения (68) в правую часть формулы (60) и извлекая корень, имеем

$$\wp'(u) = \pm 2\,\frac{\sigma_1(u)\,\sigma_2(u)\,\sigma_3(u)}{\sigma^3(u)}.$$

Для определения знака помножим обе части на $u^3$ и положим затем $u=0$. Принимая во внимание разложение

$$\wp'(u)=-\frac{2}{u^3}+2c_2u+4c_3u^3+\ldots,$$

а также формулы (70) и (43), убеждаемся, что в предыдущей формуле мы должны брать знак (—), т. е.

$$\wp'(u)=-2\frac{\sigma_1(u)\,\sigma_2(u)\,\sigma_3(u)}{\sigma^3(u)}. \qquad (71)$$

**174. Разложение целой периодической функции.** Целая функция $\sigma(u)$ не имеет вовсе периодов. Дальше мы покажем, что, присоединяя к ней некоторый множитель показательного типа, мы можем получить целую функцию, обладающую периодом. Сейчас мы рассмотрим общий случай целой функции с периодом и выведем разложение для такой функции. Это разложение может быть написано или в виде степенного ряда или в виде ряда Фурье [ср. **119**].

Положим, что целая функция $\varphi(u)$ имеет период $\omega$, т. е. при любом комплексном $u$

$$\varphi(u+\omega)=\varphi(u). \qquad (72)$$

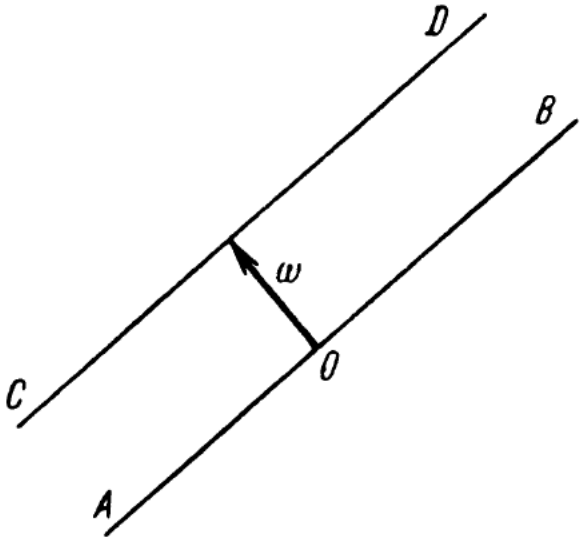



Рис. 82.

Проведем через начало вектор $\omega$ и две прямые, перпендикулярные к этому вектору и проходящие через его начало и его конец (рис. 82). Эти две прямые образуют полосу периода функции $\varphi(u)$. Прямая $CD$ получается из прямой $AB$ при помощи преобразования $u'=u+\omega$. Совершим над плоскостью $u$ преобразование $\tau=\frac{u\cdot 2\pi i}{\omega}$. На плоскости $\tau=\tau_1+i\tau_2$ наша полоса перейдет в полосу, ограниченную прямыми $\tau_2=0$ и $\tau_2=2\pi$. Если мы затем совершим преобразование

$$\zeta=e^{\tau}=e^{\frac{2\pi iu}{\omega}},$$

то на новой плоскости $\zeta$ наша полоса изобразится всей плоскостью с исключенной точкой $\zeta=0$ [**19**] и с разрезом вдоль положительной части вещественной оси $\zeta$. Два берега разреза соответствуют прямым, образующим первоначальную полосу на плоскости $u$, причем соответствующим точкам на этих двух берегах отвечают значения $u$, связанные соотношением $u'=u+\omega$. В силу (72) наша функция имеет одинаковые значения на обоих берегах разреза, а следовательно, одинаковыми будут и значения производных всех порядков, т. е., короче

говоря, наша функция будет регулярной и однозначной не только на разрезанной плоскости $\zeta$, но просто на всей плоскости $\zeta$ с исключенной точкой $\zeta = 0$. Мы можем поэтому утверждать, что она должна разлагаться на этой плоскости в ряд Лорана

$$\varphi(u) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \zeta^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{\frac{2\pi i u}{\omega} n}. \tag{73}$$

Приходим, таким образом, к следующей теореме:

Теорема. *Всякая целая функция $\varphi(u)$ с периодом $\omega$ может быть представлена на всей плоскости переменной и рядом вида*

$$\varphi(u) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{\frac{2\pi i u}{\omega} n}. \tag{74}$$

Написанный ряд сходится, очевидно, равномерно во всякой ограниченной части плоскости. Если мы воспользуемся формулами Эйлера и сгруппируем члены, соответствующие значениям $n$, одинаковым по величине и противоположным по знаку, то получим представление функции $\varphi(u)$ в виде тригонометрического ряда

$$\varphi(u) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a'_n \cos \frac{2\pi u n}{\omega} + b'_n \sin \frac{2\pi u n}{\omega} \right), \tag{75}$$

где

$$a'_n = a_n + a_{-n}; \quad b'_n = i(a_n - a_{-n}) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{76}$$

**175. Новые обозначения.** Теория эллиптических функций при подробном изложении содержит весьма обширный формальный аппарат, которым и приходится пользоваться при приложении этих функций. К сожалению, не все авторы при изложении придерживаются одних и тех же обозначений. Мы излагаем лишь самые основы теории и не будем приводить многочисленных и часто весьма полезных формул, встречающихся в теории эллиптических функций. Все же в дальнейшем нам надо будет иметь дело с более сложным формальным аппаратом, чем это было до сих пор. Мы остановимся при этом на обозначениях, которые ведут свое происхождение в существенном от Якоби и которые систематически проведены в книге Гурвица [1]. Мы следуем изложению этой книги в нескольких следующих пунктах.

В дальнейшем нам придется часто иметь дело с половинами чисел $\omega_1$ и $\omega_2$, а потому, чтобы избежать дробей, мы вместо $\omega_1$ и $\omega_2$ введем обозначение

$$\omega_1 = 2\omega, \quad \omega_2 = 2\omega'. \tag{77}$$

---

[1]) А. Гурвиц, Р. Курант, Теория функций, «Наука», 1968.

В соответствии с этим мы положим также

$$\eta_1 = 2\eta, \quad \eta_2 = 2\eta'. \tag{78}$$

Основным элементом построения дальнейших функций будут не сами числа $\omega_1$ и $\omega_2$, как это, например, было для функции $\wp(u)$, а их отношение

$$\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\omega'}{\omega} \tag{79}$$

или другая величина, непосредственно связанная с этим отношением:

$$h = e^{i\pi\tau}. \tag{80}$$

Введем также вместо аргумента $u$ два новых аргумента:

$$v = \frac{u}{2\omega}, \quad z = e^{i\pi v} = e^{\frac{i\pi u}{2\omega}}. \tag{81}$$

Предыдущие обозначения нарушают симметрию чисел $\omega$ и $\omega'$, т. е. эти числа играют различную роль в предыдущих обозначениях. Мы будем всегда считать, как и раньше, что отношение $\frac{\omega'}{\omega}$ имеет положительный коэффициент при $i$, т. е. если положить $\frac{\omega'}{\omega} = r + is$, то $s > 0$, и, следовательно,

$$|h| = e^{-\pi s} < 1. \tag{82}$$

При таком выборе $\omega_1$ и $\omega_2$ мы имели соотношение Лежандра (51), которое при новых обозначениях перепишется в следующей форме:

$$\eta\omega' - \eta'\omega = \frac{1}{2}\pi i. \tag{83}$$

Отметим некоторые следствия, вытекающие из принятых обозначений. Имеем согласно (81)

$$\frac{u+\omega}{2\omega} = v + \frac{1}{2}; \quad \frac{u+2\omega}{2\omega} = v + 1; \quad e^{i\pi\left(v+\frac{1}{2}\right)} = iz; \quad e^{i\pi(v+1)} = -z,$$

и точно так же

$$\frac{u+\omega'}{2\omega} = v + \frac{\tau}{2}; \quad \frac{u+2\omega'}{2\omega} = v + \tau; \quad e^{i\pi\left(v+\frac{\tau}{2}\right)} = h^{\frac{1}{2}} z; \quad e^{i\pi(v+\tau)} = hz,$$

т. е., например, добавление числа $\omega$ к $u$ равносильно добавлению числа $\frac{1}{2}$ к $v$ или умножению $z$ на $i$, а добавление к $u$ числа $\omega'$ равносильно добавлению $\frac{\tau}{2}$ к $v$ или умножению $z$ на $h^{\frac{1}{2}}$. Заметим еще, что мы будем всегда определять степени $h^\rho$ и $z^\rho$ как $e^{i\pi\tau\rho}$ и $e^{i\pi v\rho}$.

**176. Функция $\vartheta_1(v)$.** В новых обозначениях мы имеем следующую форму основного свойства функции $\sigma(u)$:

$$\sigma(u+2\omega) = -e^{2\eta(u+\omega)}\sigma(u); \quad \sigma(u+2\omega') = -e^{2\eta'(u+\omega')}\sigma(u). \tag{84}$$

Добавим к функции $\sigma(u)$ показательный множитель

$$\varphi(u) = e^{au^2+bu}\sigma(u) \tag{85}$$

и выберем числа $a$ и $b$ так, чтобы новая функция $\varphi(u)$ имела период $2\omega$. Мы имеем в силу (84)

$$\varphi(u+2\omega) = -e^{a(u+2\omega)^2+b(u+2\omega)+2\eta(u+\omega)}\sigma(u) =$$
$$= -e^{4a\omega u+4a\omega^2+2b\omega+2\eta(u+\omega)}e^{au^2+bu}\sigma(u),$$

или

$$\frac{\varphi(u+2\omega)}{\varphi(u)} = -e^{2(2a\omega+\eta)(u+\omega)+2b\omega}, \tag{86}$$

и точно так же

$$\frac{\varphi(u+2\omega')}{\varphi(u)} = -e^{2(2a\omega'+\eta')(u+\omega')+2b\omega'}. \tag{87}$$

В формуле (86) показатель степени правой части есть полином первой степени от $u$. Для того чтобы правая часть была равна единице при всяком $u$, необходимо приравнять нулю коэффициент при $u$ в показателе, а свободный член в показателе приравнять выражению вида $k\pi i$, где $k$ — целое нечетное число. Мы положим в соответствии с этим

$$a = -\frac{\eta}{2\omega}, \quad b = \frac{\pi i}{2\omega}.$$

Подставляя это в правую часть формулы (87), будем иметь в силу (83)

$$\frac{\varphi(u+2\omega')}{\varphi(u)} = -e^{-\frac{\pi i}{\omega}(u+\omega')+\pi i\frac{\omega'}{\omega}} = -e^{-\frac{\pi i n}{\omega}} = -z^{-2}.$$

Мы видим, таким образом, что для функции

$$\varphi(u) = e^{-\frac{\eta u^2}{2\omega}+\frac{i\pi u}{2\omega}}\sigma(u) = e^{-\frac{\eta u^2}{2\omega}}z\sigma(u) \tag{88}$$

имеют место равенства

$$\varphi(u+2\omega) = \varphi(u), \quad \varphi(u+2\omega') = -z^{-2}\varphi(u). \tag{89}$$

Так как $\varphi(u)$ есть целая функция с периодом $2\omega$, то для нее имеем разложение вида [**172**]

$$\varphi(u) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{\frac{2\pi i u}{2\omega}n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^{2n}.$$

Кроме того, добавление к $u$ числа $2\omega'$ равносильно умножению $z$ на $h$, т. е.

$$\varphi(u+2\omega')=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n h^{2n} z^{2n},$$

и вторая из формул (89) дает нам

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n h^{2n} z^{2n} = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^{2n-2},$$

или, заменяя в последней сумме переменную суммирования $n$ на $n+1$,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n h^{2n} z^{2n} = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_{n+1} z^{2n}.$$

Отсюда, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $z$, получаем

$$a_{n+1} = -h^{2n} a_n = -h^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} a_n,$$

что может быть записано также следующим образом:

$$(-1)^{n+1} h^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} a_{n+1} = (-1)^n h^{-\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} a_n.$$

Мы видим, таким образом, что выражение

$$(-1)^n h^{-\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} a_n$$

должно сохранять одно и то же значение при всех целых значениях $n$. Положим

$$(-1)^n h^{-\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} a_n = Ci,$$

где $C$ — некоторая постоянная. Отсюда получаем следующее выражение для коэффициентов разложения функции $\varphi(u)$:

$$a_n = (-1)^n h^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} Ci,$$

и, следовательно,

$$\varphi(u) = Ci \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n h^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} z^{2n}. \tag{90}$$

Формула (88) дает нам при этом следующее выражение для функции Вейерштрасса $\sigma(u)$:

$$\sigma(u) = e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}} z^{-1} \varphi(u). \tag{91}$$

Это приводит нас, естественно, к введению новой функции

$$\vartheta_1(v)=i\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n h^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} z^{2n-1}, \tag{92}$$

которая связана с функцией $\sigma(u)$ следующим соотношением:

$$\sigma(u)=e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}} C\vartheta_1(v). \tag{93}$$

Определим теперь постоянную $C$. Принимая во внимание, что $u=2\omega v$, что в силу (93) $\vartheta_1(0)=0$ и что отношение $\frac{\vartheta_1(v)}{v}$ при $v=0$ равно $\vartheta_1'(0)$, получим, деля обе части формулы (93) на $u$ и полагая затем $u=0$,

$$1=\frac{1}{2\omega} C\vartheta_1'(0),$$

и окончательно

$$\sigma(u)=e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}} \frac{2\omega}{\vartheta_1'(0)} \vartheta_1(v). \tag{94}$$

Преобразуем теперь степенной ряд (92) для функции $\vartheta_1(v)$ в тригонометрический ряд. Для этого нам надо будет в упомянутом разложении сгруппировать члены, относящиеся к показателям степени, одинаковым по величине и обратным по знаку. Обозначим через $\nu$ положительное нечетное число $\nu=2n-1$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$, откуда $n=\frac{\nu+1}{2}$. Для $n=0, -1, -2, \ldots$ положим $\nu=-2n+1$, откуда $n=\frac{-\nu+1}{2}$, и мы можем написать

$$\vartheta_1(v)=i\left[\sum_{\nu}^{1, 3, 5, \ldots}(-1)^{\frac{\nu+1}{2}} h^{\frac{\nu^2}{4}} z^{\nu}+\sum_{\nu}^{1, 3, 5, \ldots}(-1)^{\frac{-\nu+1}{2}} h^{\frac{\nu^2}{4}} z^{-\nu}\right],$$

где суммирование в каждой из сумм производится по нечетным положительным числам, т. е. $\nu=1, 3, 5, \ldots$ Принимая во внимание, что

$$(-1)^{\frac{\nu+1}{2}}=(-1)^{\nu}(-1)^{\frac{-\nu+1}{2}}=-(-1)^{\frac{-\nu+1}{2}}=-(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}$$

и

$$z^{\nu}-z^{-\nu}=e^{i\nu\pi v}-e^{-i\nu\pi v}=2i\sin\nu\pi v,$$

можно переписать предыдущую формулу в следующем виде:

$$\vartheta_1(v)=i\sum_{\nu}^{1, 3, 5, \ldots}(-1)^{\frac{\nu-1}{2}} h^{\frac{\nu^2}{4}}(z^{-\nu}-z^{\nu}),$$

или

$$\vartheta_1(v) = 2\sum_{\nu}^{1,\,3,\,5\,\ldots}(-1)^{\frac{\nu-1}{2}} h^{\frac{\nu^2}{4}} \sin \nu\pi v = $$

$$= 2\left[h^{\frac{1}{4}} \sin \pi v - h^{\frac{9}{4}} \sin 3\pi v + h^{\frac{25}{4}} \sin 5\pi v - \ldots\right]. \quad (95)$$

Функция $\vartheta_1(v)$, называемая обычно *первой тэта-функцией,* есть *целая нечетная функция от* $v$. При построении этой функции мы пользуемся только одним комплексным числом $\tau$, которое по условию должно лежать в верхней полуплоскости, т. е. иметь положительную мнимую часть, причем $h = e^{i\pi\tau}$. Поэтому тэта-функцию иногда обозначают через $\vartheta_1(v;\ \tau)$.

**177. Функции $\vartheta_k(v)$.** Выше мы ввели наряду с функцией $\sigma(u)$ еще три целые функции $\sigma_k(u)$. Это приведет нас естественно к тому, чтобы наряду с функцией $\vartheta_1(v)$ ввести еще три функции тэта.

Мы имеем согласно нашим обозначениям

$$\sigma_3(u) = e^{\eta' u}\frac{\sigma(\omega' - u)}{\sigma(\omega')}$$

или в силу (93)

$$\sigma_3(u) = \frac{C}{\sigma(\omega')} e^{\eta' u + \frac{\eta(\omega' - u)^2}{2\omega}} \vartheta_1\left(\frac{\omega' - u}{2\omega}\right).$$

Раскрывая скобки показателя степени и заменяя $\frac{u}{2\omega}$ на $v$, а $\frac{\omega'}{\omega}$ на $\tau$, получим

$$\sigma_3(u) = C_3 e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}} e^{(\eta'\omega - \eta\omega')\frac{u}{\omega}} \vartheta_1\left(\frac{\tau}{2} - v\right),$$

где $C_3$ — некоторая новая постоянная. Наконец, пользуясь соотношением (83), получим выражение функции $\sigma_3(u)$ через первую функцию тэта:

$$\sigma_3(u) = C_3 e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}} z^{-1} \vartheta_1\left(\frac{\tau}{2} - v\right). \quad (96)$$

Аналогично получим для $\sigma_2(u)$

$$\sigma_2(u) = e^{\tilde{\eta} u}\frac{\sigma(\tilde{\omega} - u)}{\sigma(\tilde{\omega})},$$

где для сокращения письма мы положили

$$\tilde{\eta} = \eta + \eta',\ \tilde{\omega} = \omega + \omega'.$$

Формула (93) дает нам при этом

$$\sigma_2(u) = \frac{C}{\sigma(\tilde{\omega})} e^{\tilde{\eta} u + \eta\frac{(\tilde{\omega} - u)^2}{2\omega}} \vartheta_1\left(\frac{\tilde{\omega} - u}{2\omega}\right),$$

и мы получаем, окончательно проделывая вычисления, аналогичные предыдущим:

$$\sigma_2(u) = C_2 e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}} z^{-1} \vartheta_1\left(\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2} - v\right). \tag{97}$$

Точно так же будем иметь

$$\sigma_1(u) = C_1 e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}} \vartheta_1\left(\frac{1}{2} - v\right). \tag{98}$$

Выведем теперь разложение в степенной ряд для значений функций тэта, стоящих в выражениях функций $\sigma_k(u)$. Мы имеем

$$\vartheta_1\left(\frac{1}{2} - v\right) = -\vartheta_1\left(v - \frac{1}{2}\right).$$

Но в силу (81) вычитание из $v$ числа $\frac{1}{2}$ равносильно умножению $z$ на $(-i)$, и, следовательно, принимая во внимание (92),

$$\vartheta_1\left(\frac{1}{2} - v\right) = -i \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n h^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} (-iz)^{2n-1} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} z^{2n-1}. \tag{99}$$

Точно так же

$$\vartheta_1\left(\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2} - v\right) = -\vartheta_1\left(v - \frac{1}{2} - \frac{\tau}{2}\right),$$

и вычитание из числа $v$ числа $\left(\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}\right)$ равносильно умножению $z$ на $-i \cdot h^{-\frac{1}{2}}$.

Отсюда следует

$$\vartheta_1\left(\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2} - v\right) = -i \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n h^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} (-ih^{-\frac{1}{2}} z)^{2n-1} =$$

$$= h^{-\frac{1}{4}} z \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h^{(n-1)^2} z^{2n-2}$$

или заменяя переменную суммирования $n$ на $n+1$,

$$\vartheta_1\left(\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2} - v\right) = h^{-\frac{1}{4}} z \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h^{n^2} z^{2n}, \tag{100}$$

и точно так же

$$\vartheta_1\left(\frac{\tau}{2} - v\right) = h^{\frac{1}{4}} iz \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n h^{n^2} z^{2n} \tag{101}$$

Введем три новые функции тэта:

$$\left.\begin{aligned}\vartheta_2(v) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} z^{2n-1},\\ \vartheta_3(v) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h^{n^2} z^{2n},\\ \vartheta_4(v) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n h^{n^2} z^{2n}.\end{aligned}\right\} \tag{102}$$

При этом предыдущие формулы для $\sigma_k(u)$ могут быть написаны в виде

$$\sigma_1(u) = C_1 e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}} \vartheta_2(v);\ \sigma_2(u) = \tilde{C}_2 e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}} \vartheta_3(v);\ \sigma_3(u) = \tilde{C}_3 e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}} \vartheta_4(v),$$

где $\tilde{C}_2$ и $\tilde{C}_3$ — некоторые новые постоянные. Для определения постоянных мы положим $v = 0$. При этом $u = 0$ и $\sigma_k(0) = 1$, откуда

$$C_1 = \frac{1}{\vartheta_2'(0)};\quad \tilde{C}_2 = \frac{1}{\vartheta_3'(0)};\quad \tilde{C}_3 = \frac{1}{\vartheta_4'(0)},$$

и окончательно имеем

$$\sigma_1(u) = e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}} \frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_2'(0)};\ \sigma_2(u) = e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}} \frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_3'(0)};\ \sigma_3(u) = e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}} \frac{\vartheta_4(v)}{\vartheta_4'(0)}. \tag{103}$$

Иногда вместо $\vartheta_4(v)$ пишут $\vartheta_0(v)$.

Степенные разложения (102) для функций тэта могут быть легко преобразованы в тригонометрические ряды, как это мы уже делали для функций $\vartheta_1(v)$. Мы получим, таким образом,

$$\left.\begin{aligned}\vartheta_2(v) &= 2h^{\frac{1}{4}} \cos \pi v + 2h^{\frac{9}{4}} \cos 3\pi v + 2h^{\frac{25}{4}} \cos 5\pi v + \ldots,\\ \vartheta_3(v) &= 1 + 2h \cos 2\pi v + 2h^4 \cos 4\pi v + 2h^9 \cos 6\pi v + \ldots,\\ \vartheta_4(v) &= 1 - 2h \cos 2\pi v + 2h^4 \cos 4\pi v - 2h^9 \cos 6\pi v + \ldots\end{aligned}\right\} \tag{104}$$

В дальнейшем для сокращения письма мы не будем писать аргумента $v = 0$, т. е. вместо $\vartheta_1'(0)$ будем просто писать $\vartheta_1'$ и вместо $\vartheta_k(0)$ будем писать $\vartheta_k$. Принимая во внимание (95) и (104), можем написать для этих величин следующие разложения:

$$\left.\begin{aligned}\vartheta_1' &= 2\pi (h^{\frac{1}{4}} - 3h^{\frac{9}{4}} + 5h^{\frac{25}{4}} - 7h^{\frac{49}{4}} + \ldots),\\ \vartheta_2 &= 2h^{\frac{1}{4}} + 2h^{\frac{9}{4}} + 2h^{\frac{25}{4}} + 2h^{\frac{49}{4}} + \ldots,\\ \vartheta_3 &= 1 + 2h + 2h^4 + 2h^9 + \ldots,\\ \vartheta_4 &= 1 - 2h + 2h^4 - 2h^9 + \ldots\end{aligned}\right\} \tag{105}$$

Эти ряды весьма быстро сходятся, так как по условию $|h|<1$, и суммы этих рядов суть функции, регулярные от $\tau$, определенные в верхней полуплоскости.

Нетрудно теперь установить и связь функции Вейерштрасса $\wp(u)$ с функциями тэта. Мы имели раньше

$$\sqrt{\wp(u)-e_k}=\frac{\sigma_k(u)}{\sigma(u)},$$

и, следовательно, принимая во внимание выражение функций $\sigma(u)$ и $\sigma_k(u)$ через функции тэта, будем иметь

$$\sqrt{\wp(u)-e_k}=\frac{1}{2\omega}\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_{k+1}}\frac{\vartheta_{k+1}(v)}{\vartheta_1(v)}. \tag{106}$$

**178. Свойства функций тэта.** Все функции тэта суть целые функции аргумента $v$, и основным элементом при их построении было комплексное число $\tau$ из верхней полуплоскости. Чтобы отметить последнее обстоятельство, иногда пишут $\vartheta_k(v;\tau)$. Из них функция $\vartheta_1(v)$, как было уже упомянуто, нечетная, а остальные — четные. Посмотрим теперь, как изменяются функции тэта при прибавлении к аргументу $v$ числа $\frac{1}{2}$. Принимая во внимание разложение функций тэта в тригонометрические ряды и пользуясь формулами приведения тригонометрических функций, мы непосредственно получим

$$\vartheta_1\left(v+\frac{1}{2}\right)=\vartheta_2(v),\quad \vartheta_2\left(v+\frac{1}{2}\right)=-\vartheta_1(v),$$
$$\vartheta_3\left(v+\frac{1}{2}\right)=\vartheta_4(v),\quad \vartheta_4\left(v+\frac{1}{2}\right)=\vartheta_3(v).$$

Исследуем теперь изменение функции тэта при прибавлении к аргументу $v$ числа $\frac{\tau}{2}$. Это, как известно, равносильно умножению $z$ на $h^{\frac{1}{2}}$. Пользуясь представлениями функций тэта в виде степенных рядов, получим таким образом, например, в силу (92)

$$\vartheta_1\left(v+\frac{\tau}{2}\right)=i\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n h^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}h^{\frac{2n-1}{2}}z^{2n-1}=$$
$$=ih^{-\frac{1}{4}}z^{-1}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n h^{n^2}z^{2n}$$

или в силу (102)

$$\vartheta_1\left(v+\frac{\tau}{2}\right)=im\vartheta_4(v),$$

где

$$m=h^{-\frac{1}{4}}z^{-1}=h^{-\frac{1}{4}}e^{-i\pi v}, \tag{107}$$

и точно так же можно показать, что

$$\vartheta_2\left(v+\frac{\tau}{2}\right)=m\vartheta_3(v);\qquad \vartheta_3\left(v+\frac{\tau}{2}\right)=m\vartheta_2(v);\qquad \vartheta_4\left(v+\frac{\tau}{2}\right)=im\vartheta_1(v).$$

Отсюда можно получить и более общие формулы преобразования. Так, например:

$$\vartheta_1(v+\tau)=\vartheta_1\left(v+\frac{\tau}{2}+\frac{\tau}{2}\right)=ih^{-\frac{1}{4}}e^{-i\pi\left(v+\frac{\tau}{2}\right)}\vartheta_4\left(v+\frac{\tau}{2}\right)=$$

$$=ih^{-\frac{1}{4}}e^{-i\pi\left(v+\frac{\tau}{2}\right)}ih^{-\frac{1}{4}}e^{-i\pi v}\vartheta_1(v)=-l\vartheta_1(v),$$

где

$$l=h^{-1}z^{-2}. \tag{108}$$

Полученные результаты могут быть записаны в виде следующей таблицы:

| | $v+\frac{1}{2}$ | $v+\frac{\tau}{2}$ | $v+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}$ | $v+1$ | $v+\tau$ | $v+1+\tau$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\vartheta_1$ | $\vartheta_2$ | $im\vartheta_4$ | $m\vartheta_3$ | $-\vartheta_1$ | $-l\vartheta_1$ | $l\vartheta_1$ |
| $\vartheta_2$ | $-\vartheta_1$ | $m\vartheta_3$ | $-im\vartheta_4$ | $-\vartheta_2$ | $l\vartheta_2$ | $-l\vartheta_2$ |
| $\vartheta_3$ | $\vartheta_4$ | $m\vartheta_2$ | $im\vartheta_1$ | $\vartheta_3$ | $l\vartheta_3$ | $l\vartheta_3$ |
| $\vartheta_4$ | $\vartheta_3$ | $im\vartheta_1$ | $m\vartheta_2$ | $\vartheta_4$ | $-l\vartheta_4$ | $-l\vartheta_4$ |

(109)

Если мы хотим выразить, например, $\vartheta_3\left(v+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}\right)$ через функцию тэта от основного аргумента $v$, то должны в первом столбце найти $\vartheta_3$ и в соответствующей строке взять выражение, стоящее под $v+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}$, т. е.

$$\vartheta_3\left(v+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}\right)=im\vartheta_1(v).$$

Дадим еще таблицу корней функции тэта. Функция $\vartheta_1(v)$ отличается от функции $\sigma(u)$ множителем показательного типа, который никогда в нуль не обращается, и, следовательно, $\vartheta_1(v)$ обращается в нуль тогда и только тогда, когда $\sigma(u)$ обращается в нуль, а это последнее обстоятельство имеет место, если

$$u=n2\omega+n'2\omega',$$

где $n$ и $n'$ — любые целые числа. Деля на $2\omega$, получаем следующее выражение для корней функции $\vartheta_1(v)$:

$$v=n+n'\tau.$$

Корни остальных функций тэта можно получить, пользуясь первой строкой предыдущей таблицы. Так, например, мы имеем

$\vartheta_3(v) = m^{-1}\vartheta_1\left(v + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}\right)$, и, следовательно, корни $\vartheta_3(v)$ будут определяться из условия

$$v + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2} = n + n'\tau,$$

ибо $m^{-1} = h^{\frac{1}{4}} e^{i\pi v}$ в нуль не обращается, или

$$v = \left(n - \frac{1}{2}\right) + \left(n' - \frac{1}{2}\right)\tau,$$

где $n$ и $n'$ — любые целые числа. Мы получаем, таким образом, следующую таблицу для корней функции тэта:

| | $v$ |
|---|---|
| $\vartheta_1$ | $n + n'\tau$ |
| $\vartheta_2$ | $n + n'\tau + \frac{1}{2}$ |
| $\vartheta_3$ | $n + n'\tau + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}$ |
| $\vartheta_4$ | $n + n'\tau + \frac{\tau}{2}$ |

(110)

Отметим еще, что из пятого столбца таблицы (109) непосредственно следует, что функции $\vartheta_3$ и $\vartheta_4$ имеют период 1, а функции $\vartheta_1$ и $\vartheta_2$ имеют период 2. Последняя таблица показывает, что различные функции тэта не имеют одинаковых корней.

Функции тэта мы можем считать функциями от двух аргументов $v$ и $\tau$. При всяком заданном $\tau$ из верхней полуплоскости это суть целые функции от $v$ и при всяком заданном $v$ это суть регулярные функции от $\tau$ в верхней полуплоскости. Это последнее обстоятельство непосредственно следует из того, что ряды (92) и (102) сходятся равномерно при условии $|h| < \rho < 1$. Покажем теперь, что все четыре функции тэта, как функции двух аргументов, удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению второго порядка:

$$\frac{\partial^2 \vartheta_k(v)}{\partial v^2} = 4\pi i \frac{\partial \vartheta_k(v)}{\partial \tau}. \tag{111}$$

Это уравнение имеет формальное сходство с уравнением теплопроводности, о котором мы говорили раньше [**II, 203**]. Проверим уравнение (111) хотя бы для функции $\vartheta_3(v)$. Дифференцируя общий член ряда (104), который равен $2h^{n^2}\cos 2n\pi v = 2e^{i\pi\tau n^2}\cos 2n\pi v$, два раза по $v$, получим

$$-8n^2\pi^2 e^{i\pi\tau n^2}\cos 2n\pi v,$$

и тот же результат мы получим, дифференцируя один раз по $\tau$ и умножая на $4\pi i$:

$$4\pi i\,(2i\pi n^2 e^{i\pi\tau n^2}\cos 2n\pi v) = -8n^2\pi^2 e^{i\pi\tau n^2}\cos 2n\pi v.$$

Аналогично проверяется уравнение и для остальных функций тэта.

**179. Выражение чисел $e_k$ через $\vartheta_s$.** При изучении функции Вейерштрасса $\wp(u)$ мы ввели числа $e_k$, которые при наших новых обозначениях определяются следующим образом:

$$e_1 = \wp(\omega),\quad e_2 = \wp(\omega+\omega'),\quad e_3 = \wp(\omega'), \tag{112}$$

причем мы имели для функции $\wp(u)$ основное соотношение

$$\wp'^2(u) = 4(\wp(u)-e_1)(\wp(u)-e_2)(\wp(u)-e_3). \tag{113}$$

Числа $e_k$, как мы видели, удовлетворяют условию

$$e_1+e_2+e_3 = 0 \tag{114}$$

и различны. Эти числа играют основное значение в теории функции $\wp(u)$. Их можно принять за основу при построении функции $\wp(u)$ вместо чисел $2\omega$ и $2\omega'$. При этом функция $\wp(u)$ будет определяться как обращение эллиптического интеграла первого рода

$$u = \int_{\infty}^{x} \frac{dx}{\sqrt{4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}}. \tag{115}$$

Выразим теперь числа $e_k$ через значение функций тэта при аргументе, равном нулю. Возьмем формулу (106)

$$\sqrt{\wp(u)-e_k} = \frac{1}{2\omega}\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_{k+1}}\frac{\vartheta_{k+1}(v)}{\vartheta_1(v)} \qquad \left(v=\frac{u}{2\omega}\right)$$

и положим в этой формуле $u=\omega$, т. е. $v=\frac{1}{2}$, и затем $u=\omega+\omega'$, т. е. $v=\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}$. Мы получим, таким образом, в силу (112)

$$\sqrt{e_1-e_k} = \frac{1}{2\omega}\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_{k+1}}\frac{\vartheta_{k+1}\left(\frac{1}{2}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{1}{2}\right)},$$

$$\sqrt{e_2-e_k} = \frac{1}{2\omega}\frac{\vartheta_1}{\vartheta_{k+1}}\frac{\vartheta_{k+1}\left(\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}\right)}.$$

Пользуясь таблицей (109), дающей формулы приведения для функций тэта, будем иметь

$$\sqrt{e_1 - e_2} = \frac{1}{2\omega}\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_3}\frac{\vartheta_4}{\vartheta_2},$$
$$\sqrt{e_1 - e_3} = \frac{1}{2\omega}\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_4}\frac{\vartheta_3}{\vartheta_2},$$
$$\sqrt{e_2 - e_3} = \frac{1}{2\omega}\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_4}\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}.$$

Мы докажем дальше следующее важное тождество

$$\vartheta_1' = \pi\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4, \tag{116}$$

применение которого дает возможность переписать предыдущие формулы в очень простой форме:

$$\sqrt{e_1 - e_2} = \frac{\pi}{2\omega}\vartheta_4^2, \quad \sqrt{e_1 - e_3} = \frac{\pi}{2\omega}\vartheta_3^2, \quad \sqrt{e_2 - e_3} = \frac{\pi}{2\omega}\vartheta_2^2. \tag{117}$$

Займемся теперь доказательством тождества (116). Мы имеем согласно (106)

$$\sqrt{\wp(2\omega v) - e_k} = \frac{1}{2\omega}\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_{k+1}}\frac{\vartheta_{k+1}(v)}{\vartheta_1(v)},$$

откуда, разлагая функции $\vartheta_1(v)$ и $\vartheta_{k+1}(v)$ в ряд Маклорена и принимая во внимание нечетность $\vartheta_1(v)$ и четность остальных функций, получим

$$\sqrt{\wp(2\omega v) - e_k} = \frac{1}{2\omega}\frac{1 + \frac{\vartheta_{k+1}''}{\vartheta_{k+1}}\frac{v^2}{2} + \cdots}{v + \frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'}\frac{v^3}{6} + \cdots}$$

или, выделяя в знаменателе множитель $v$ и производя деление ряда на ряд,

$$\sqrt{\wp(2\omega v) - e_k} = \frac{1}{2\omega v}\left[1 + \left(\frac{\vartheta_{k+1}''}{\vartheta_{k+1}} - \frac{1}{3}\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'}\right)\frac{v^2}{2} + \cdots\right],$$

или

$$\wp(2\omega v) - e_k = \frac{1}{4\omega^2 v^2}\left[1 + \left(\frac{\vartheta_{k+1}''}{\vartheta_{k+1}} - \frac{1}{3}\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'}\right)\frac{v^2}{2} + \cdots\right]^2.$$

Как известно, разложение $\wp(u)$ в окрестности $u = 0$ не содержит свободного члена, и, следовательно, возводя квадратную скобку правой части в квадрат и собирая в правой части свободные члены, мы должны получить $(-e_k)$, что дает нам

$$e_k = \frac{1}{4\omega^2}\left(\frac{1}{3}\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} - \frac{\vartheta_{k+1}''}{\vartheta_{k+1}}\right). \tag{118}$$

Отсюда, принимая во внимание (114), имеем следующее соотношение

$$\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} = \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} + \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} + \frac{\vartheta_4''}{\vartheta_4}. \tag{119}$$

Во всех написанных формулах штрихи у $\vartheta$ показывают дифференцирование по переменной $v$, так что, например, $\vartheta_1'''$ есть $\frac{\partial^3 \vartheta_1(v)}{\partial v^3}$ при $v=0$. Уравнение (111) при $v=0$ дает нам

$$\vartheta_k'' = 4\pi l \frac{\partial \vartheta_k}{\partial \tau} \qquad (k=2, 3, 4)$$

и точно так же, полагая в уравнении (111) $k=1$, дифференцируя по $v$ и полагая затем $v=0$, получим

$$\vartheta_1''' = 4\pi l \frac{\partial \vartheta_1'}{\partial \tau}.$$

Пользуясь последними двумя соотношениями, мы можем переписать формулу (119) в виде

$$\frac{1}{\vartheta_1'}\frac{\partial \vartheta_1'}{\partial \tau} = \frac{1}{\vartheta_2}\frac{\partial \vartheta_2}{\partial \tau} + \frac{1}{\vartheta_3}\frac{\partial \vartheta_3}{\partial \tau} + \frac{1}{\vartheta_4}\frac{\partial \vartheta_4}{\partial \tau}.$$

Интегрируя это по $\tau$, будем иметь

$$\vartheta_1' = C\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4,$$

где $C$ — постоянная, не зависящая уже от $\tau$, т. е. от $h$. Для того чтобы определить эту постоянную, подставим в обе части предыдущего тождества разложения (105), выписывая лишь первые члены разложения,

$$2\pi(h^{\frac{1}{4}} - \ldots) = C(2h^{\frac{1}{4}} + \ldots)(1 + \ldots)(1 - \ldots).$$

Сравнивая коэффициенты при младших членах, содержащих $h^{\frac{1}{4}}$, мы получим $C=\pi$, что и приводит нас к тождеству (116).

**180. Эллиптические функции Якоби.** Вместо эллиптической функции Вейерштрасса $\wp(it)$ пользуются часто другими эллиптическими функциями, которые исторически появились раньше функций Вейерштрасса еще у Якоби. Пусть, как всегда, $\tau$ — любое число из верхней полуплоскости, а $\omega$ и $\omega'$ — два числа, отношение которых равно $\frac{\omega'}{\omega} = \tau$. Пользуясь этими элементами построения, мы можем построить функции тэта. Определим три новые функции, которые

являются отношением двух целых функций, т. е. будут дробными функциями:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sn}(u) &= \frac{\sigma(u)}{\sigma_3(u)} = 2\omega \frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1} \frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_4(v)}, \\ \operatorname{cn}(u) &= \frac{\sigma_1(u)}{\sigma_3(u)} = \frac{\vartheta_4}{\vartheta_2} \frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_4(v)}, \qquad \left(v = \frac{u}{2\omega}\right). \\ \operatorname{dn}(u) &= \frac{\sigma_2(u)}{\sigma_3(u)} = \frac{\vartheta_4}{\vartheta_3} \frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_4(v)} \end{aligned}\right\} \qquad (120)$$

Согласно известным формулам

$$\sqrt{\wp(u) - e_k} = \frac{\sigma_k(u)}{\sigma(u)},$$

эти новые функции связаны с функцией Вейерштрасса $\wp(u)$ следующими тремя соотношениями:

$$\sqrt{\wp(u) - e_3} = \frac{1}{\operatorname{sn}(u)}; \quad \sqrt{\wp(u) - e_1} = \frac{\operatorname{cn}(u)}{\operatorname{sn}(u)}; \quad \sqrt{\wp(u) - e_2} = \frac{\operatorname{dn}(u)}{\operatorname{sn}(u)}. \qquad (121)$$

Исключая из этих соотношений функцию $\wp(u)$, получим два соотношения, связывающих новые функции:

$$\operatorname{cn}^2(u) + (e_1 - e_3)\operatorname{sn}^2(u) = 1; \quad \operatorname{dn}^2(u) + (e_2 - e_3)\operatorname{sn}^2(u) = 1. \qquad (122)$$

Формулы (117) предыдущего номера дают нам при этом

$$e_1 - e_2 = \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 \vartheta_4^4; \quad e_1 - e_3 = \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 \vartheta_3^4; \quad e_2 - e_3 = \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 \vartheta_2^4. \qquad (123)$$

До сих пор комплексные числа $\omega$ и $\omega'$ оставались совершенно произвольными. Существенным было лишь то обстоятельство, чтобы отношение $\frac{\omega'}{\omega} = \tau$ находилось в верхней полуплоскости. В теории функций Вейерштрасса эти числа не подчинены никаким дальнейшим ограничениям. В теории функций Якоби число $\omega$ при заданном $\tau$ определяется из того условия, чтобы разность $e_1 - e_3$ была равна единице. Второе из соотношений (123) дает нам при этом число $\omega$:

$$\omega = \frac{\pi}{2}\vartheta_3^2 = \frac{\pi}{2}(1 + 2h + 2h^4 + 2h^9 + \ldots)^2 \quad (h = e^{i\pi\tau}), \qquad (124)$$

которое вполне определяется этой формулой при заданном $\tau$, а затем $\omega'$ определяется формулой $\omega' = \omega\tau$. Подставляя выражение (124) в соотношения (123), получаем

$$e_1 - e_2 = \frac{\vartheta_4^4}{\vartheta_3^4}, \quad e_1 - e_3 = 1, \quad e_2 - e_3 = \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4}, \qquad (125)$$

причем правые части зависят только от $\tau$. Соотношения (122) можно переписать при этом следующим образом:

$$\operatorname{sn}^2(u) + \operatorname{cn}^2(u) = 1, \quad \operatorname{dn}^2(u) + k^2\operatorname{sn}^2(u) = 1, \qquad (126)$$

где для краткости положено

$$k^2 = \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4}. \tag{127}$$

Функции Якоби строятся по одному числу $\tau$, а потому иногда пользуются следующими обозначениями:

$$\operatorname{sn}(u;\ \tau),\ \operatorname{cn}(u;\ \tau),\ \operatorname{dn}(u;\ \tau).$$

Число $k$, определяемое формулой (127), называется *модулем функций Якоби*. Введем еще так называемый дополнительный модуль, определяемый формулой

$$k'^2 = \frac{\vartheta_4^4}{\vartheta_3^4}. \tag{128}$$

Складывая первое и третье из соотношений (125), получим

$$k^2 + k'^2 = 1. \tag{129}$$

Формулы (127) и (128) определяют $k^2$ и $k'^2$ в виде полных квадратов некоторых однозначных функций от $\tau$, и мы можем написать, беря определенные значения радикалов:

$$k = \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2},\quad k' = \frac{\vartheta_4^2}{\vartheta_3^2}. \tag{130}$$

Вернемся к формулам (120). Мы можем выразить множители, стоящие направо и не зависящие от $v$, через $k$ и $k'$. Действительно, согласно (130), имеем

$$\sqrt{k} = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_3},\ \sqrt{k'} = \frac{\vartheta_4}{\vartheta_3},\quad \sqrt{\frac{k'}{k}} = \frac{\vartheta_4}{\vartheta_2}$$

откуда в силу (124) и (116)

$$2\omega\frac{\vartheta_4}{\vartheta_1'} = \pi\vartheta_3^2\frac{\vartheta_4}{\vartheta_1'} = \frac{\vartheta_3}{\vartheta_2} = \frac{1}{\sqrt{k}},$$

и, следовательно, формулы (120) можно переписать в следующем виде:

$$\operatorname{sn}(u) = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_4(v)},\quad \operatorname{cn}(u) = \sqrt{\frac{k'}{k}}\frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_4(v)},\quad \operatorname{dn}(u) = \sqrt{k'}\frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_4(v)} \tag{131}$$

$$\left(v = \frac{u}{2\omega}\right).$$

**181. Основные свойства функций Якоби.** Формулы (131) дают представление функций Якоби в виде частного двух целых функций. Пользуясь нечетностью $\vartheta_1(v)$ и четностью остальных функций $\vartheta_k(v)$, мы можем заключить, что $\operatorname{sn}(u)$ *есть нечетная функция*, а $\operatorname{cn}(u)$ и $\operatorname{dn}(u)$ — *четные функции*.

Кроме того, $\vartheta_1(0)=0$, и мы имеем

$$\left.\frac{\vartheta_1(v)}{u}\right|_{v=0}=\left.\frac{\vartheta_1(v)}{2\omega v}\right|_{v=0}=\frac{1}{2\omega}\vartheta_1',$$

а формулы (120) дают

$$\left.\frac{\operatorname{sn}(u)}{u}\right|_{u=0}=1,\quad \operatorname{cn}(0)=\operatorname{dn}(0)=1. \tag{132}$$

Вернемся теперь к таблице (109), дающей формулы приведения функций тэта. Принимая во внимание, что прибавление к $v$ слагаемого $\frac{1}{2}$ или $\frac{\tau}{2}$ равносильно прибавлению к $u$ слагаемого $\omega$ или $\omega'$ и пользуясь основными соотношениями (131), мы получаем следующую таблицу, дающую формулы приведения функций Якоби:

| | $u+\omega$ | $u+\omega'$ | $u+\omega+\omega'$ | $u+2\omega$ | $u+2\omega'$ | $u+2\omega+2\omega'$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| sn | $\frac{\operatorname{cn}(u)}{\operatorname{dn}(u)}$ | $\frac{1}{k}\frac{1}{\operatorname{sn}(u)}$ | $\frac{1}{k}\frac{\operatorname{dn}(u)}{\operatorname{cn}(u)}$ | $-\operatorname{sn}(u)$ | $\operatorname{sn}(u)$ | $-\operatorname{sn}(u)$ |
| cn | $-k'\frac{\operatorname{sn}(u)}{\operatorname{dn}(u)}$ | $-\frac{i}{k}\frac{\operatorname{dn}(u)}{\operatorname{sn}(u)}$ | $-i\frac{k'}{k}\frac{1}{\operatorname{cn}(u)}$ | $-\operatorname{cn}(u)$ | $-\operatorname{cn}(u)$ | $\operatorname{cn}(u)$ |
| dn | $k'\frac{1}{\operatorname{dn}(u)}$ | $-i\frac{\operatorname{cn}(u)}{\operatorname{sn}(u)}$ | $ik'\frac{\operatorname{sn}(u)}{\operatorname{cn}(u)}$ | $\operatorname{dn}(u)$ | $-\operatorname{dn}(u)$ | $-\operatorname{dn}(u)$ |

(133)

Три последних столбца этой таблицы показывают, что функция $\operatorname{sn}(u)$ имеет периоды $4\omega$ и $2\omega'$, функция $\operatorname{cn}(u)$ имеет периоды $4\omega$ и $2\omega+2\omega'$ и, наконец, функция $\operatorname{dn}(u)$ имеет периоды $2\omega$ и $4\omega'$.

Таблица (110), определяющая нули функций тэта, приводит нас непосредственно к таблице, определяющей нули и полюсы функций Якоби. Присоединяя сюда еще и указание на периоды, мы получаем следующую таблицу:

| | Нули | Полюсы | Периоды |
|---|---|---|---|
| $\operatorname{sn}(u)$ | $2n\omega+2n'\omega'$ | $2n\omega+(2n'+1)\omega'$ | $4\omega$ и $2\omega'$ |
| $\operatorname{cn}(u)$ | $(2n+1)\omega+2n'\omega'$ | $2n\omega+(2n'+1)\omega'$ | $4\omega$ и $2\omega+2\omega'$ |
| $\operatorname{dn}(u)$ | $(2n+1)\omega+(2n'+1)\omega'$ | $2n\omega+(2n'+1)\omega'$ | $2\omega$ и $4\omega'$ |

(134)

На рис. 83 изображены параллелограммы периодов функций Якоби, причем кружками обозначены корни и крестиками — полюсы соответствующей функции. Поскольку функции тэта, как и функции $\sigma(u)$, имеют простые корни, мы можем утверждать, что функции

Якоби имеют простые полюсы. В каждом из изображенных параллелограммов этих полюсов будет два, т. е. все функции Якоби суть эллиптические функции второго порядка с простыми полюсами.

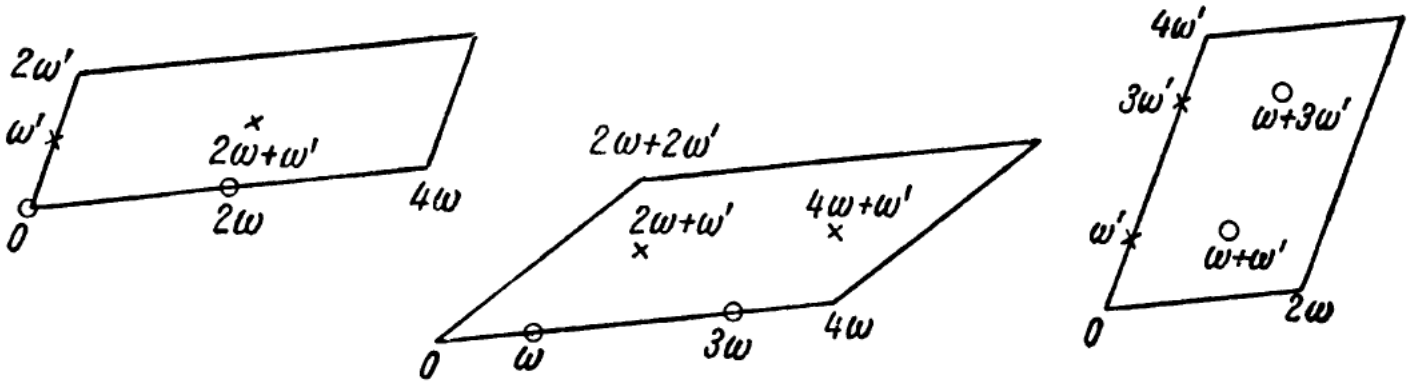



Рис. 83.

Этот факт непосредственно связан с тем, что все эти функции могут быть получены в результате обращения некоторых эллиптических интегралов первого вида, содержащих полином четвертой степени под знаком радикала. Мы и переходим сейчас к выяснению этого обстоятельства.

**182. Дифференциальные уравнения для функций Якоби.** Из формул (113) и (121) непосредственно следует

$$\wp'(u) = \pm \frac{2\,\mathrm{cn}(u)\,\mathrm{dn}(u)}{\mathrm{sn}^3(u)}.$$

Чтобы определить знак правой части, помножим обе части написанного равенства на $u^3$ и положим затем $u = 0$. Принимая во внимание, что произведение $u^3\wp'(u)$ при $u = 0$ дает $(-2)$, а также пользуясь формулами (132), находим, что в правой части предыдущей формулы мы должны брать знак $(-)$. Этот знак, очевидно, остается неизменным и при аналитическом продолжении функции, т. е. мы имеем

$$\wp'(u) = -\frac{2\,\mathrm{cn}(u)\,\mathrm{dn}(u)}{\mathrm{sn}^3(u)}.$$

С другой стороны, дифференцируя соотношение

$$\wp(u) - e_3 = \frac{1}{\mathrm{sn}^2(u)},$$

получим

$$\wp'(u) = -\frac{2\,(\mathrm{sn}(u))'}{\mathrm{sn}^3(u)},$$

и сравнение этих двух выражений для $\wp'(u)$ дает нам

$$[\mathrm{sn}(u)]' = \mathrm{cn}(u)\,\mathrm{dn}(u). \qquad (135)$$

Дифференцируя затем равенства (126) и пользуясь (135), получим формулы производных для двух других функций Якоби:

$$(\operatorname{cn}(u))' = -\operatorname{sn}(u)\operatorname{dn}(u), \quad (\operatorname{dn}(u))' = -k^2 \operatorname{sn}(u)\operatorname{cn}(u). \tag{136}$$

Отсюда, возводя в квадрат и пользуясь (126), мы получим окончательно следующие дифференциальные уравнения для функций Якоби:

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{d\operatorname{sn}(u)}{du}\right)^2 &= (1-\operatorname{sn}^2(u))(1-k^2\operatorname{sn}^2(u)), \\ \left(\frac{d\operatorname{cn}(u)}{du}\right)^2 &= (1-\operatorname{cn}^2(u))(k'^2+k^2\operatorname{cn}^2(u)), \\ \left(\frac{d\operatorname{dn}(u)}{du}\right)^2 &= -(1-\operatorname{dn}^2(u))(k'^2-\operatorname{dn}^2(u)). \end{aligned}\right\} \tag{137}$$

Остановимся несколько ближе на дифференциальном уравнении для функции $\operatorname{sn}(u)$. Полагая $x=\operatorname{sn}(u)$, можем написать

$$\frac{dx}{du} = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)},$$

причем при $u=0$ надо считать $x=0$ и радикал, стоящий справа, равным единице, так как $\operatorname{sn}'(0)=1$ в силу (132). Разделяя переменные и интегрируя, получаем

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}. \tag{138}$$

Отсюда видно, что *функция* $\operatorname{sn}(u)$ *получается в результате обращения эллиптического интеграла первого рода в форме Лежандра.* Можно показать и наоборот, что, задавая произвольное комплексное значение для числа $k^2$, отличное только от 0 и 1, получим в результате обращения интеграла (138) функцию Якоби $\operatorname{sn}(u)$. Таким образом, элементом построения для функции Якоби вместо $\tau$ может служить число $k$. Мы подробно исследовали интеграл (138) с точки зрения конформного преобразования для того частного случая, когда число $k^2$ вещественно и заключается между нулем и единицей. В этом случае имеем один вещественный период, который мы в [168] обозначили через $4K$, и другой чисто мнимый период $2iK'$. Сравнивая с теперешними обозначениями, получим

$$K = \omega = \frac{\pi}{2}\vartheta_3^2, \quad iK' = \omega' = \omega\tau = \frac{\pi}{2}\vartheta_3^2\tau.$$

**183. Формулы сложения.** Рассмотрим три функции переменного $u$: $\varphi_1(u)=\operatorname{sn}(u)\operatorname{sn}(u+v)$; $\varphi_2(u)=\operatorname{cn}(u)\operatorname{cn}(u+v)$; $\varphi_3(u)=\operatorname{dn}(u)\operatorname{dn}(u+v)$, где $v$ — произвольное фиксированное число. Пользуясь таблицей (133), нетрудно убедиться, что все эти функции имеют периоды $2\omega$ и $2\omega'$.

Функция $\varphi_1(u)$ имеет простые полюсы там, где $\operatorname{sn}(u)$ или $\operatorname{sn}(u+v)$ имеют полюсы. Пользуясь таблицей (134), мы видим, что это будут точки, которые отличаются от $\omega'$ или $-v+\omega'$ на период, т. е. на выражение вида $n2\omega+n'2\omega'$, где $n$ и $n'$ — любые целые числа. В основном параллелограмме периодов, построенном на векторах $2\omega$ и $2\omega'$, таких точек, следовательно, будет только две. Тот же результат получится и для остальных функций $\varphi_k(u)$, т. е. все эти функции суть эллиптические функции второго периода с периодами $2\omega$ и $2\omega'$ и с двумя простыми полюсами в параллелограмме периодов, из которых один равен $\omega'$. Можно подобрать постоянные $A$ и $B$ так, чтобы две функции

$$\varphi_2(u)+A\varphi_1(u) \quad \text{и} \quad \varphi_3(u)+B\varphi_1(u) \tag{139}$$

уже не имели полюса $u=\omega'$. При таком выборе постоянных функции (139) будут иметь в параллелограмме периодов только один полюс первого порядка, откуда непосредственно следует, что эти функции будут просто постоянными, так как не существует эллиптических функций первого порядка [**169**]. Таким образом, можно утверждать, что при определенном выборе постоянных $A$ и $B$ имеют место соотношения

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{cn}(u)\operatorname{cn}(u+v)+A\operatorname{sn}(u)\operatorname{sn}(u+v)&=A_1,\\ \operatorname{dn}(u)\operatorname{dn}(u+v)+B\operatorname{sn}(u)\operatorname{sn}(u+v)&=B_1. \end{aligned}\right\} \tag{140}$$

Постоянные $A$, $B$, $A_1$ и $B_1$ являются постоянными в отношении аргумента $u$, но их величина зависит от выбора $v$. Приступим к определению этих постоянных. Полагая в формулах (140) $u=0$, мы непосредственно получим

$$A_1=\operatorname{cn}(v); \qquad B_1=\operatorname{dn}(v).$$

Дифференцируя соотношения (140) и полагая затем $u=0$, будем иметь в силу (135), (136) и (132)

$$(\operatorname{cn}(v))'+A\operatorname{sn}(v)=0, \quad (\operatorname{dn}(v))'+B\operatorname{sn}(v)=0,$$

откуда опять-таки в силу (136)

$$A=\operatorname{dn}(v), \quad B=k^2\operatorname{cn}(v).$$

Подставляя в формулу (140) значения постоянных, получаем окончательно следующие два соотношения:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{cn}(u)\operatorname{cn}(u+v)+\operatorname{dn}(v)\operatorname{sn}(u)\operatorname{sn}(u+v)&=\operatorname{cn}(v),\\ \operatorname{dn}(u)\operatorname{dn}(u+v)+k^2\operatorname{cn}(v)\operatorname{sn}(u)\operatorname{sn}(u+v)&=\operatorname{dn}(v), \end{aligned}\right\} \tag{141}$$

которые мы можем считать тождествами относительно $u$ и $v$. Заменяя $u$ на $(-u)$ и $v$ на $v+u$, получим отсюда

$$\begin{aligned} \operatorname{cn}(u)\operatorname{cn}(v)-\operatorname{dn}(u+v)\operatorname{sn}(u)\operatorname{sn}(v)&=\operatorname{cn}(u+v),\\ \operatorname{dn}(u)\operatorname{dn}(v)-k^2\operatorname{cn}(u+v)\operatorname{sn}(u)\operatorname{sn}(v)&=\operatorname{dn}(u+v). \end{aligned}$$

Из последних двух формул мы можем найти $\operatorname{cn}(u+v)$ и $\operatorname{dn}(u+v)$, а подставляя в первое из равенств (141), получаем $\operatorname{sn}(u+v)$. Это приводит нас к следующим *формулам сложения*, выражающим значение функций Якоби от суммы двух аргументов через значение функций Якоби от отдельных аргументов:

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{sn}(u+v) &= \frac{\operatorname{sn}(u)\operatorname{cn}(v)\operatorname{dn}(v)+\operatorname{sn}(v)\operatorname{cn}(u)\operatorname{dn}(u)}{1-k^2\operatorname{sn}^2(u)\operatorname{sn}^2(v)},\\
\operatorname{cn}(u+v) &= \frac{\operatorname{cn}(u)\operatorname{cn}(v)-\operatorname{sn}(u)\operatorname{dn}(u)\operatorname{sn}(v)\operatorname{dn}(v)}{1-k^2\operatorname{sn}^2(u)\operatorname{sn}^2(v)},\\
\operatorname{dn}(u+v) &= \frac{\operatorname{dn}(u)\operatorname{dn}(v)-k^2\operatorname{sn}(u)\operatorname{cn}(u)\operatorname{sn}(v)\operatorname{cn}(v)}{1-k^2\operatorname{sn}^2(u)\operatorname{sn}^2(v)}.
\end{aligned}\right\} \qquad (142)$$

Первые две из написанных формул напоминают формулы сложения для обычных тригонометрических функций — синуса и косинуса. Эти последние функции действительно оказываются вырождением для функции Якоби при $k=0$. Действительно, если в интеграле (138) положим $k=0$, то его обращение даст нам $x=\sin u$, а из формул (126) и (132) вытекает, что $\operatorname{cn}(u)$ превратится в $\cos u$. Наконец, вторая из формул (126) показывает, что при $k=0$ функция $\operatorname{dn}(u)$ вырождается просто в единицу, а потому не имеет своего аналога среди тригонометрических функций.

**184. Связь функций $\wp(u)$ и $\operatorname{sn}(u)$.** Установим теперь непосредственную связь между эллиптическими функциями $\wp(u)$ и $\operatorname{sn}(u)$. Возьмем функцию $\wp(u)$ с какими-либо периодами $2\omega$ и $2\omega'$. Введем в рассмотрение число $\frac{\omega'}{\omega}=\tau$ из верхней полуплоскости и, пользуясь этим числом, построим функции тэта и функцию $\operatorname{sn}(u)$ согласно первым из формул (130) и (131). Числа $2\omega$ и $2\omega'$, связанные с упомянутой выше функцией Вейерштрасса, не будут, вообще говоря, удовлетворять условию $e_1-e_3=1$. Согласно приведенным выше формулам, будем иметь следующие соотношения (117):

$$\left.\begin{aligned}
&e_1-e_2=\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\vartheta_4^4, \quad e_1-e_3=\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\vartheta_3^4, \quad e_2-e_3=\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\vartheta_2^4,\\
&k^2=\frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4}=\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}.
\end{aligned}\right\} \qquad (143)$$

Для функции $\operatorname{sn}(u)$ вместо $2\omega$ и $2\omega'$ будем иметь новые числа $2\tilde{\omega}$ и $2\tilde{\omega}'$, которые, как известно, определяются из условий

$$2\tilde{\omega}=\pi\vartheta_3^2, \quad 2\tilde{\omega}'=2\tilde{\omega}\tau. \qquad (144)$$

Обозначим через $\lambda$ отношение $\lambda=\frac{\tilde{\omega}}{\omega}=\frac{\tilde{\omega}'}{\omega'}$ и рассмотрим функцию

$$f(u)=\frac{\lambda^2}{\operatorname{sn}^2(\lambda u)}.$$

Имеем $\lambda 2\omega = 2\tilde{\omega}$ и $\lambda 2\omega' = 2\tilde{\omega}'$, и согласно таблице (133) функция $f(u)$ имеет периоды $2\omega$ и $2\omega'$. Из таблицы (134) мы видим, что полюсы функции $f(u)$ будут $n2\omega + n'2\omega'$, где $n$ и $n'$ — любые целые числа.

Таким образом, функция $f(u)$, как и функция $\wp(u)$, имеет периоды $2\omega$ и $2\omega'$ и имеет в основном параллелограмме периодов единственный полюс второго порядка $u = 0$. Покажем, что бесконечная часть в этом полюсе у $f(u)$, как и у функции $\wp(u)$, будет $\frac{1}{u^2}$. Действительно, принимая во внимание нечетность функции $\operatorname{sn}(u)$ и (132), имеем вблизи $u = 0$ разложение вида

$$\operatorname{sn}(u) = u + c_3u^3 + c_5u^5 + \ldots,$$

откуда

$$\frac{1}{\operatorname{sn}^2(u)} = \frac{1}{u^2} \cdot \frac{1}{(1 + c_3u^2 + c_5u^4 + \ldots)^2} = \frac{1}{u^2} + d_0 + d_2u^2 + \ldots,$$

или имеем вблизи $u = 0$

$$f(u) = \frac{\lambda^2}{\operatorname{sn}^2(\lambda u)} = \frac{1}{u^2} + \lambda^2 d_0 + \lambda^4 d_2 u^2 + \ldots,$$

что мы и хотели показать. Итак, окончательно функция $f(u)$ имеет в общем с функцией $\wp(u)$ параллелограмме периодов одинаковые полюсы с одинаковыми бесконечными частями, откуда следует, что эти две функции отличаются лишь постоянным слагаемым, т. е.

$$\wp(u) = \frac{\lambda^2}{\operatorname{sn}^2(\lambda u)} + C. \tag{145}$$

Определим постоянную $C$, полагая $u = \omega$. Имеем: $\wp(\omega) = e_1$, и в силу таблицы (133)

$$\operatorname{sn}(\lambda\omega) = \operatorname{sn}(\tilde{\omega}) = \frac{\operatorname{cn}(0)}{\operatorname{dn}(0)} = 1,$$

и формула (145) дает

$$C = e_1 - \lambda^2. \tag{146}$$

Согласно формулам (143) и (144), можем написать

$$2\tilde{\omega} = 2\omega\sqrt{e_1 - e_3},\quad 2\tilde{\omega}' = 2\omega'\sqrt{e_1 - e_3},$$

т. е.

$$\lambda = \frac{\tilde{\omega}}{\omega} = \frac{\tilde{\omega}'}{\omega'} = \sqrt{e_1 - e_3},$$

откуда, пользуясь (146), будем иметь $C = e_3$.

Пользуясь равенствами (143) и (114), можно постоянную $C$ записать следующим образом:

$$C = -\frac{(1 + k^2)\lambda^2}{3}.$$

Таким образом, окончательно получаем следующую связь между функциями $\wp(u)$ и $\operatorname{sn}(u)$:

$$\wp(u)=\frac{e_1-e_3}{\operatorname{sn}^2(\sqrt{e_1-e_3}\,u)}+e_3 \tag{147}$$

или

$$\wp(u)=\frac{\lambda^2}{\operatorname{sn}^2(\lambda u)}-\frac{(1+k^2)\lambda^2}{3} \qquad (\lambda=\sqrt{e_1-e_3}). \tag{148}$$

**185. Эллиптические координаты.** Эллиптические функции применяются очень часто главным образом в задачах механики. Остановимся лишь на самых основных и простых приложениях этих функций. Первым приложением будет применение эллиптических функций при рассмотрении эллиптических координат в пространстве. Мы уже встречались с эллиптическими координатами раньше [II, 137]. Сейчас повторим то, что нам было о них известно, а также укажем некоторые дополнительные их свойства. Изменим несколько обозначение, которым мы пользовались раньше, а именно числа $a^2$, $b^2$ и $c^2$ заменим на $-a^2$, $-b^2$ и $-c^2$. Напишем уравнение

$$\frac{x^2}{\rho-a^2}+\frac{y^2}{\rho-b^2}+\frac{z^2}{\rho-c^2}-1=0. \tag{149}$$

Это есть уравнение третьей степени относительно $\rho$. В любой заданной точке с декартовыми координатами $(x, y, z)$ уравнение (149) имеет три вещественных корня: $\lambda$, $\mu$ и $\nu$, которые удовлетворяют неравенству

$$\lambda>a^2>\mu>b^2>\nu>c^2, \tag{150}$$

и эти три числа и называются *эллиптическими координатами упомянутой точки*. Чтобы не оговаривать знаков (=), мы считаем $x$, $y$ и $z$ отличными от нуля, например положительными. Если в уравнение (149) подставить $\rho=\lambda$, то получим эллипсоид, проходящий через заданную точку, при $\rho=\mu$ это будет однополый гиперболоид, а при $\delta=\nu$ — двуполый гиперболоид. Мы видели раньше, что координатные поверхности $\lambda=$ пост., $\mu=$ пост. и $\nu=$ пост. взаимно ортогональны, т. е. эллиптические координаты суть ортогональные координаты. Выведем формулы, выражающие декартовы координаты через эллиптические. Приводя левую часть уравнения (149) к одному знаменателю и принимая во внимание, что числитель будет полиномом третьей степени от $\rho$, со старшим коэффициентом $(-1)$ и корнями $\lambda$, $\mu$ и $\nu$, можно написать тождество относительно $\rho$:

$$\frac{x^2}{\rho-a^2}+\frac{y^2}{\rho-b^2}+\frac{z^2}{\rho-c^2}-1=\frac{-(\rho-\lambda)(\rho-\mu)(\rho-\nu)}{(\rho-a^2)(\rho-b^2)(\rho-c^2)}. \tag{151}$$

Умножая на $(\rho-a^2)$ и полагая затем $\rho=a^2$, получим выражение для $x^2$ и так же найдем выражения $y^2$ и $z^2$:

$$\left.\begin{aligned} x^2&=\frac{(\lambda-a^2)(\mu-a^2)(\nu-a^2)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)},\\ y^2&=\frac{(\lambda-b^2)(\mu-b^2)(\nu-b^2)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)},\\ z^2&=\frac{(\lambda-c^2)(\mu-c^2)(\nu-c^2)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}. \end{aligned}\right\} \tag{152}$$

Выведем теперь формулу для квадрата элемента дуги в эллиптических координатах. Формулы (152) в результате логарифмирования и последующего дифференцирования дадут нам

$$2\frac{dx}{x}=\frac{d\lambda}{\lambda-a^2}+\frac{d\mu}{\mu-a^2}+\frac{d\nu}{\nu-a^2},$$
$$2\frac{dy}{y}=\frac{d\lambda}{\lambda-b^2}+\frac{d\mu}{\mu-b^2}+\frac{d\nu}{\nu-b^2},$$
$$2\frac{dz}{z}=\frac{d\lambda}{\lambda-c^2}+\frac{d\mu}{\mu-c^2}+\frac{d\nu}{\nu-c^2}.$$

Отсюда, умножая на $x$, $y$, $z$, возводя их почленно в квадрат и складывая, будем иметь

$$ds^2=L^2d\lambda^2+M^2d\mu^2+N^2d\nu^2, \tag{153}$$

где, например,

$$4L^2=\frac{x^2}{(\lambda-a^2)^2}+\frac{y^2}{(\lambda-b^2)^2}+\frac{z^2}{(\lambda-c^2)^2}. \tag{154}$$

Заметим, что правая часть формулы (153) не должна содержать произведений $d\lambda\,d\mu$ и т. д., так как эллиптические координаты суть ортогональные координаты [**II, 130**]. Правая часть формулы (154) может быть получена, если мы продифференцируем левую часть тождества (151) по $\rho$, переменим знак и положим затем $\rho=\lambda$, т. е.

$$4L^2=\frac{d}{d\rho}\frac{(\rho-\lambda)(\rho-\mu)(\rho-\nu)}{(\rho-a^2)(\rho-b^2)(\rho-c^2)}\Bigg|_{\rho=\lambda}.$$

Мы можем написать, таким образом, следующую формулу для $ds^2$:

$$4ds^2=\frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{(\lambda-a^2)(\lambda-b^2)(\lambda-c^2)}d\lambda^2+\frac{(\mu-\lambda)(\mu-\nu)}{(\mu-a^2)(\mu-b^2)(\mu-c^2)}d\mu^2+$$
$$+\frac{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}{(\nu-a^2)(\nu-b^2)(\nu-c^2)}d\nu^2. \tag{155}$$

Зная выражение элемента длины, мы можем написать уравнение Лапласа в эллиптических координатах [**II, 119**]. Для сокращения письма введем следующее обозначение:

$$f(\rho)=(\rho-a^2)(\rho-b^2)(\rho-c^2).$$

В обозначениях из [**II, 119**] мы имеем

$$2H_1=\sqrt{\frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{f(\lambda)}};\quad 2H_2=\sqrt{\frac{(\mu-\lambda)(\mu-\nu)}{f(\mu)}};\quad 2H_3=\sqrt{\frac{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}{f(\nu)}},$$

причем $H_k$ надо брать положительными и надо помнить, что $f(\lambda)$ и $f(\nu)$ — положительны, а $f(\mu)<0$. Уравнение Лапласа в эллиптических координатах будет

$$\frac{\nu-\mu}{\sqrt{f(\mu)f(\nu)}}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\sqrt{f(\lambda)}\frac{\partial U}{\partial\lambda}\right)+\frac{\lambda-\nu}{\sqrt{f(\nu)f(\lambda)}}\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\sqrt{f(\mu)}\frac{\partial U}{\partial\mu}\right)+$$
$$+\frac{\mu-\lambda}{\sqrt{f(\lambda)f(\mu)}}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\sqrt{f(\nu)}\frac{\partial U}{\partial\nu}\right)=0, \tag{156}$$

где два последних слагаемых получаются из первого циклической перестановкой букв $\lambda$, $\mu$ и $\nu$.

**186. Введение эллиптических функций.** Вместо переменных $\lambda$, $\mu$ и $\nu$ введем новые переменные $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ по формулам

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}} = d\alpha, \quad \frac{d\mu}{\sqrt{f(\mu)}} = d\beta, \quad \frac{d\nu}{\sqrt{f(\nu)}} = d\gamma, \tag{157}$$

т. е. $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ выражаются в виде эллиптических интегралов первого рода через $\lambda$, $\mu$ и $\nu$, а, наоборот, последние являются эллиптическими функциями от первых. В силу (157) мы имеем, например,

$$\sqrt{f(\lambda)}\,\frac{\partial}{\partial\lambda} = \frac{\partial}{\partial\alpha},$$

и уравнение (156) мы можем переписать следующим образом:

$$(\nu-\mu)\frac{\partial^2 U}{\partial\alpha^2} + (\lambda-\nu)\frac{\partial^2 U}{\partial\beta^2} + (\mu-\lambda)\frac{\partial^2 U}{\partial\gamma^2} = 0. \tag{158}$$

Обратимся теперь к формулам (152) и покажем, что $x$, $y$ и $z$ суть однозначные функции от новых переменных $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$. Действительно, рассмотрим радикал

$$\sqrt{f(\rho)} = \sqrt{(\rho-a^2)(\rho-b^2)(\rho-c^2)},$$

который входит в выражения (157). Введем вместо $\rho$ новую переменную $t$ по формуле

$$\rho = p + qt,$$

где $p$ и $q$ — некоторые постоянные. Мы получим

$$(\rho-a^2)(\rho-b^2)(\rho-c^2) = q^3(t-e_1)(t-e_2)(t-e_3),$$

где $e_k$ — корни полинома относительно $t$, так что имеем

$$a^2 = p + qe_1; \quad b^2 = p + qe_2; \quad c^2 = p + qe_3.$$

Выберем прежде всего число $p$ так, чтобы сумма чисел $e_k$ равнялась нулю, т. е.

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0,$$

откуда

$$p = \frac{a^2+b^2+c^2}{3}.$$

После этого предыдущие формулы определят нам числа $e_k$ с точностью до множителя $q$, который мы будем считать положительным и обозначим через $s^2$. Таким образом, имеем

$$\left.\begin{aligned} s^2e_1 &= a^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{3}, \\ s^2e_2 &= b^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{3}, \\ s^2e_3 &= c^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{3}. \end{aligned}\right\} \tag{159}$$

Отсюда вытекает, между прочим,

$$a^2-b^2 = s^2(e_1-e_2); \quad a^2-c^2 = s^2(e_1-e_3); \quad b^2-c^2 = s^2(e_2-e_3). \tag{160}$$

Подставляя $\rho = p + qt$, будем иметь

$$\rho - a^2 = s^2 (t - e_1); \quad \rho - b^2 = s^2 (t - e_2); \quad \rho - c^2 = s^2 (t - e_3).$$

Полином $f(\rho)$ в новой переменной запишется в виде

$$f(\rho) = s^6 (t - e_1)(t - e_2)(t - e_3).$$

Полагая

$$\lambda = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} + s^2 t, \tag{161}$$

можно первую из формул переписать в виде

$$\frac{2}{s} \int_{\infty}^{t} \frac{dt}{\sqrt{4 (t - e_1)(t - e_2)(t - e_3)}} = \alpha,$$

причем мы опускаем произвольное постоянное слагаемое справа, которое не играет существенной роли.

Полагая для простоты письма $s = 2$, мы получаем в результате обращения интеграла $t = \wp(\alpha)$, так как радикальный полином в силу $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ имеет как раз вид, указанный в [**179**].

Формула (161) дает нам

$$\lambda = \frac{a^2 + a^2 + c^2}{3} + 4\wp(\alpha), \tag{162}$$

и совершенно аналогично получим

$$\mu = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} + 4\wp(\beta); \qquad \nu = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} + 4\wp(\gamma). \tag{163}$$

Подставляя эти выражения в формулы (152) и принимая во внимание (159), (162) и (163), будем иметь

$$\left.\begin{aligned} x^2 &= 4 \frac{(\wp(\alpha) - e_1)(\wp(\beta) - e_1)(\wp(\gamma) - e_1)}{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}, \\ y^2 &= 4 \frac{(\wp(\alpha) - e_2)(\wp(\beta) - e_2)(\wp(\gamma) - e_2)}{(e_2 - e_3)(e_2 - e_1)}, \\ z^2 &= 4 \frac{(\wp(\alpha) - e_3)(\wp(\beta) - e_3)(\wp(\gamma) - e_3)}{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)}. \end{aligned}\right\} \tag{164}$$

Все разности, стоящие в числителях, как известно [**173**], суть квадраты однозначных функций $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, так что действительно из предыдущих формул $x$, $y$ и $z$ определяются как однозначные аналитические функции $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$. Уравнение Лапласа (158) в новых переменных, согласно (162) и (163), будет

$$(\wp(\gamma) - \wp(\beta)) \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} + (\wp(\alpha) - \wp(\gamma)) \frac{\partial^2 U}{\partial \beta^2} + (\wp(\beta) - \wp(\alpha)) \frac{\partial^2 U}{\partial \gamma^2} = 0. \tag{165}$$

**187. Уравнение Лямэ.** Применим к уравнению Лапласа обычный метод разделения переменных и будем искать решение этого уравнения в виде произведения трех функций, из которых одна зависит только от $\alpha$, вторая от $\beta$ и третья от $\gamma$:

$$U = A(\alpha) B(\beta) C(\gamma). \tag{166}$$

Подставляя в уравнение (165) и деля на $A(\alpha)B(\beta)C(\gamma)$, будем иметь

$$(\wp(\gamma)-\wp(\beta))\frac{A''(\alpha)}{A(\alpha)}+(\wp(\alpha)-\wp(\gamma))\frac{B''(\beta)}{B(\beta)}+(\wp(\beta)-\wp(\alpha))\frac{C''(\gamma)}{C(\gamma)}=0.$$

Мы удовлетворим этому уравнению, если будем считать, что сомножители в выражении (166) суть решения уравнения одного и того же вида, а именно:

$$\frac{A''(\alpha)}{A(\alpha)}=-a\wp(\alpha)-b;\quad \frac{B''(\beta)}{B(\beta)}=-a\wp(\beta)-b;\quad \frac{C''(\gamma)}{C(\gamma)}=-a\wp(\gamma)-b,$$

где $a$ и $b$ — некоторые постоянные. Мы приходим таким образом к рассмотрению уравнения второго порядка с двояко-периодическим коэффициентом

$$\frac{d^2R(u)}{du^2}+[a\wp(u)+b]R(u)=0. \tag{167}$$

Определим прежде всего постоянную $a$ так, чтобы общий интеграл уравнения (167) был однозначной функцией от $u$. Вблизи точки $u=0$ коэффициент $a\wp(u)+b$ имеет разложение вида

$$\frac{a}{u^2}+b+\dots,$$

и, следовательно, определяющее уравнение в этой регулярной особой точке будет

$$\rho(\rho-1)+a=0. \tag{168}$$

Для однозначности необходимо, чтобы корни этого уравнения были целыми числами. Поскольку сумма корней этого уравнения равна $+1$, мы должны иметь для уравнения (168) корни $-n$ и $n+1$, где $n$ — некоторое целое положительное число или нуль. Таким образом, для постоянной $a$ получаем следующие возможные значения:

$$a_n=-n(n+1)\qquad (n=0,\ 1,\ 2,\dots). \tag{169}$$

Строго говоря, в предыдущем мы показали лишь, что равенство (169) является необходимым условием однозначности общего интеграла. Покажем теперь, что оно и достаточно. Из общей теории вытекает, что одно из решений уравнения (167) при $a=-n(n+1)$ будет иметь вблизи начала разложение вида

$$R(u)=u^{n+1}(c_0+c_1u+c_2u^2+\dots)\qquad (c_0\neq 0). \tag{170}$$

Но уравнение (167) не меняется, если в нем заменить $u$ на $(-u)$, а следовательно, если в формуле (170) совершим такую же замену, то мы должны получить также решение. Это новое решение должно отличаться от решения (170) только постоянным множителем, ибо второе решение, линейно-независимое с (170), уже имеет совершенно иную форму вблизи $u=0$. Из этих рассуждений непосредственно вытекает, что степенной ряд, входящий в формулу (170), содержит лишь четные степени $u$, т. е.

$$R_1(u)=u^{n+1}(c_0+c_2u^2+c_4u^4+\dots)\qquad (c_0\neq 0). \tag{171}$$

Второе решение уравнения (167), как известно, может быть получено по формуле **[II, 24]**

$$R_2(u)=R_1(u)\int\frac{du}{R_1^2(u)}$$

или

$$R_2(u)=R_1(u)\int\frac{1}{u^{2n+2}}(c_0+c_2u^2+c_4u^4+\dots)^{-2}\,du.$$

Подинтегральная функция будет иметь вблизи $u=0$ разложение, содержащее лишь четные степени $u$, а потому член с $u^{-1}$ будет отсутствовать,

и второе решение $R_2(u)$ не будет содержать $\ln u$. Таким образом, мы видим, что оба решения будут однозначными вблизи $u=0$. Предыдущее рассуждение можно буквально повторить и для любой особой точки уравнения (167). Эти особые точки будут $u=m_1\omega_1+m_2\omega_2$, где $\omega_1$ и $\omega_2$ — периоды $\wp(u)$, а $m_1$ и $m_2$ — любые целые числа. Таким образом, всякое решение уравнения (167) может иметь в особых точках этого уравнения лишь полюсы, а потому является действительно однозначной функцией от $u$.

Подставляя в уравнение (167) значение постоянной (169), получим уравнение

$$\frac{d^2R(u)}{du^2}+[-n(n+1)\wp(u)+b]R(u)=0, \tag{172}$$

которое называется обычно *уравнением Ламэ*. Постоянная $b$ определяется дальше из того условия, чтобы уравнение (172) имело решение или в виде полинома от $\wp(u)$ или в виде произведения такого полинома на множители вида

$$\sqrt{\wp(u)-e_1},\quad \sqrt{\wp(u)-e_2},\quad \sqrt{\wp(u)-e_3},$$

причем таких дополнительных множителей может быть один, два или три. Оказывается, что существует $(2n+1)$ значений для постоянной $b$, удовлетворяющих этому условию. Если $R_0(u)$ есть решения уравнения (172) упомянутого выше вида, то произведение

$$R_0(\alpha)\,R_0(\beta)\,R_0(\gamma),$$

являющееся решением уравнения Лапласа, как оказывается, является полиномом от декартовых координат $x$, $y$ и $z$ степени $n$. При заданном $n$ таких решений, как было упомянуто выше, будет $(2n+1)$, и они называются обычно функциями Ламэ. Эти полиномы имеют, очевидно, непосредственную связь со сферическими функциями, о которых мы говорили раньше.

**188. Простой маятник.** В качестве наиболее простого примера применения функций Якоби рассмотрим простой маятник. Положим, что тяжелая материальная точка массы единица движется по гладкой окружности. Возьмем координатные оси $X$ и $Z$ в плоскости этой окружности, причем ось $Z$ направим вертикально вверх; и пусть $l$ — радиус окружности. Положим, что наша точка при $t=0$ пущена из самой нижней точки $M_0$ $(z=-l)$ с некоторой начальной скоростью $v_0$. Приращение кинетической энергии будет равно работе силы тяжести, и мы получим, таким образом, формулу

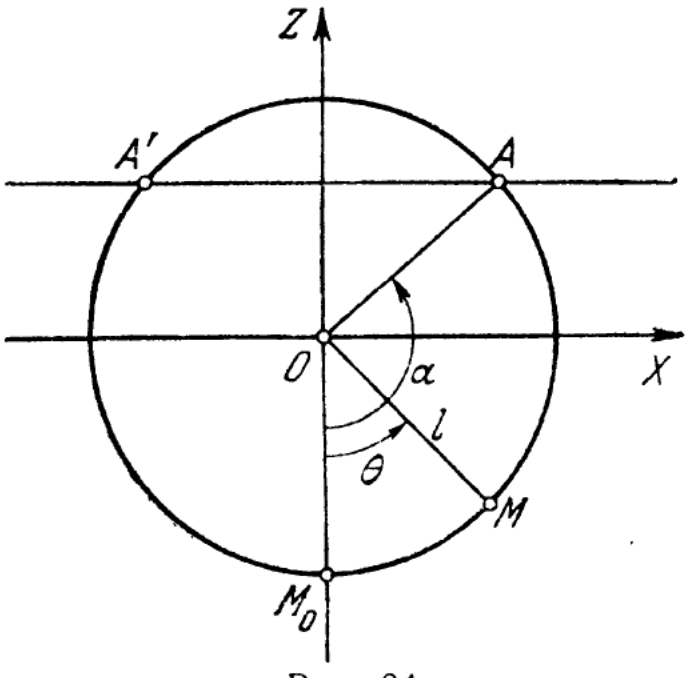


Рис. 84.

$$\frac{1}{2}v^2-\frac{1}{2}v_0^2=-gz-gl,$$

или

$$v^2=2g(a-z)\qquad\left(a=-l+\frac{v_0^2}{2g}\right). \tag{173}$$

Предположим, что прямая $z=a$ пересекает нашу окружность в некоторых точках $A$ и $A'$, т. е. что $a<l$ или $v_0<2\sqrt{lg}$. Из формулы (173) вытекает, что $z\leqslant a$, и, следовательно, движение будет совершаться на дуге $AM_0A'$ (рис. 84) нашей окружности. Мы имеем $z=-l\cos\theta$ и введем угол $\alpha$

такой, чтобы $a = -l\cos\alpha$ $(0 < \alpha < \pi)$. Величина скорости будет выражаться формулой

$$v = \frac{ds}{dt} = l\left|\frac{d\theta}{dt}\right|,$$

и, следовательно, уравнение (173) может быть переписано в виде

$$l^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2gl\,(\cos\theta - \cos\alpha)$$

или, вводя половинные углы,

$$l\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 4g\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right),$$

откуда

$$2\sqrt{\frac{g}{l}}\,dt = \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}}. \tag{174}$$

Мы считаем при этом, что $\theta$ возрастает при возрастании $t$. Введем вместо $\theta$ новую переменную $\tau$ по формуле

$$\sin\frac{\theta}{2} = \tau\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Дифференцируя это соотношение, получим без труда

$$d\theta = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\,d\tau}{\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\,d\tau}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\theta}{2}}}, \quad \text{т. е.} \quad d\theta = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\,d\tau}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\,\tau^2}},$$

и, следовательно, подставляя в (174) и принимая во внимание, что при $t = 0$ мы имеем $\theta = \tau = 0$:

$$\sqrt{\frac{g}{l}}\,t = \int_0^{\tau}\frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k^2\tau^2)}} \qquad \left(k^2 = \sin^2\frac{\alpha}{2}\right),$$

откуда

$$\tau = \operatorname{sn}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right), \tag{175}$$

и, пользуясь известными свойствами функций Якоби, получим

$$\left.\begin{aligned}\sin\frac{\theta}{2} &= \sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{sn}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right) = k\operatorname{sn}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right),\\ \cos\frac{\theta}{2} &= \sqrt{1-k^2\operatorname{sn}^2\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right)} = \operatorname{dn}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right),\end{aligned}\right\} \tag{176}$$

причем, извлекая корень, мы принимаем во внимание, что при $t = 0$ мы имеем $\theta = 0$. Последние формулы дают возможность выразить координаты $x$ и $z$ в виде однозначных функций $t$.

Рассмотрим теперь тот случай, когда постоянная $a$, входящая в формулу (173), больше $l$. Мы можем переписать эту формулу следующим образом:

$$l^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2g(a + l\cos\theta) = 2g\left(a + l - 2l\sin^2\frac{\theta}{2}\right),$$

или

$$l^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2g(a+l)\left(1 - k^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right), \tag{177}$$

где

$$k^2 = \frac{2l}{a+l}, \tag{178}$$

причем, очевидно, $k^2 < 1$. Интегрируя соотношение (177), получим

$$\lambda t = \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\frac{\theta}{2}}}, \quad \text{где} \quad \lambda = \frac{\sqrt{2g(a+l)}}{l}.$$

Вводя вместо $\theta$ новую переменную $\tau = \sin\frac{\theta}{2}$, будем иметь

$$\lambda t = \int_0^\tau \frac{2d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k^2\tau^2)}}, \quad \text{откуда} \quad \tau = \sin\frac{\theta}{2} = \operatorname{sn}\left(\frac{1}{2}\lambda t\right),$$

и точно так же

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2\left(\frac{1}{2}\lambda t\right)} = \operatorname{cn}\left(\frac{1}{2}\lambda t\right).$$

Эти формулы дают возможность и в этом случае выразить координаты в виде однозначных функций времени.

**189. Пример конформного преобразования.** Как мы видели выше, при $0 < k < 1$ функция

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \tag{179}$$

преобразует верхнюю полуплоскость $z$ на прямоугольник плоскости $u$, и, следовательно, обратная функция $z = \operatorname{sn}(u; k)$ преобразует прямоугольник на плоскость. Длины сторон прямоугольника определяются интегралами [168]

$$2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad \text{и} \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}},$$

где $k^2 + k'^2 = 1$. Таким путем можно получить прямоугольник с любым отношением сторон. Добавляя к правой части формулы (179) постоянный множитель $\frac{1}{\lambda}$, можно получить прямоугольник с любыми сторонами, и такой прямоугольник будет преобразовываться на полуплоскость функцией $z = \operatorname{sn}(\lambda u; k)$. Покажем теперь, что функция, преобразующая прямоугольник

в круг, просто выражается также через функцию $\sigma(u)$ Вейерштрасса. Возьмем на плоскости прямоугольник $K_1$, вершины которого имеют координаты $(0, 0)$, $(0, a)$, $(a, b)$ и $(0, b)$. Пусть $z=f(u)$ — функция, преобразующая $K_1$ в единичный круг, причем некоторая точка $(\xi, \eta_1)$, находящаяся внутри $K_1$, переходит в центр круга. Если мы аналитически продолжим $f(u)$ через ту сторону, которая соединяет вершины $(0, 0)$ и $(0, a)$, то в силу принципа симметрии $f(u)$ будем преобразовывать прямоугольник $K_2$, симметричный с $K_1$, относительно упомянутой стороны, во внешнюю часть единичного круга, т. е. в область $|z|>1$, причем точка $(\xi, -\eta_1)$, симметричная с точкой $(\xi, \eta_1)$, перейдет в бесконечно далекую точку. Принимая во внимание однолистность отображения, можем утверждать, что $f(u)$ имеет в точке $\xi+i\eta_1$ простой корень, а в точке $\xi-i\eta_1$ — простой полюс. Если мы построим еще два прямоугольника $K_3$ и $K_4$, симметричных с $K_1$ и $K_2$ относительно мнимой оси, то один из них будет преобразовываться в область $|z|<1$, а другой — в область $|z|>1$, причем в точке $z=-\xi-i\eta_1$ функция $f(u)$ будет иметь простой корень, а в точке $z=-\xi+i\eta_1$ — простой полюс.

Рассуждая совершенно так же, как и в [168], можно убедиться, что $f(u)$ есть эллиптическая функция с периодами $2a$ и $2bi$. Основной параллелограмм (прямоугольник) периодов будет состоять из четырех вышеуказанных прямоугольников, причем выше мы отметили все нули и полюсы $f(u)$ в этом параллелограмме периодов.

Полагая $\omega_1=2a$ и $\omega_2=2bi$, построим функцию Вейерштрасса $\sigma(u)$ и составим новую функцию:

$$\varphi(u)=\frac{\sigma(u-\xi-i\eta_1)\,\sigma(u+\xi+i\eta_1)}{\sigma(u-\xi+i\eta_1)\,\sigma(u+\xi-i\eta_1)}. \tag{180}$$

Она имеет те же простые нули и полюсы, что и наша функция $f(u)$ в упомянутом выше параллелограмме периодов. Мы покажем сейчас, что функция (180) имеет периоды $\omega_1$ и $\omega_2$, и отсюда будет непосредственно следовать, что $f(u)$ и $\varphi(u)$ отличаются лишь постоянным множителем. Пользуясь свойством функции $\sigma(u)$, выраженным равенством (49), можем написать

$$\varphi(u+\omega_k)=\frac{e^{\eta_k\left(u-\xi-i\eta_1+\frac{\omega_k}{2}\right)+\eta_k\left(u+\xi+i\eta_1+\frac{\omega_k}{2}\right)}}{e^{\eta_k\left(u-\xi+i\eta_1+\frac{\omega_k}{2}\right)+\eta_k\left(u+\xi-i\eta_1+\frac{\omega_k}{2}\right)}}\times$$

$$\times\frac{\sigma(u-\xi-i\eta_1)\,\sigma(u+\xi+i\eta_1)}{\sigma(u-\xi+i\eta_1)\,\sigma(u+\xi-i\eta_1)}=$$

$$=\frac{\sigma(u-\xi-i\eta_1)\,\sigma(u+\xi+i\eta_1)}{\sigma(u-\xi+i\eta_1)\,\sigma(u+\xi-i\eta_1)}=\varphi(u)\qquad(k=1,\ 2),$$

что мы и хотели показать. Таким образом,

$$f(u)=C\frac{\sigma(u-\xi-i\eta_1)\,\sigma(u+\xi+i\eta_1)}{\sigma(u-\xi+i\eta_1)\,\sigma(u+\xi-i\eta_1)}.$$

Для определения постоянной $C$ положим $u=0$ и перепишем предыдущую формулу в виде

$$f(0)=C\frac{\sigma(-\xi-i\eta_1)}{\sigma(-\xi+i\eta_1)}\cdot\frac{\sigma(\xi+i\eta)}{\sigma(\xi-i\eta)}. \tag{181}$$

Определение функции $\sigma(u)$ дает

$$\sigma(u)=u\prod_{m_1,\ m_2}{}'\left(1-\frac{u}{w}\right)e^{\frac{u}{w}+\frac{1}{2}\left(\frac{u}{w}\right)^2},$$

где $w = m_1 2a + m_2 2bi$. Будем считать $u$ — вещественным. Поскольку произведение распространяется на все целые значения $m_1$ и $m_2$, кроме $m_1 = m_2 = 0$, мы будем иметь попарно сопряженные сомножители, а именно те, у которых $m_1$ одинаковы, а $m_2$ отличаются знаком. Если $m_2 = 0$, то соответствующие множители вещественны.

Таким образом, в рассматриваемом случае, когда $\omega_1$ — вещественно, $\omega_2$ — чисто мнимое, функция $\sigma(u)$ будет вещественной при вещественном $u$. В силу принципа симметрии она будет иметь сопряженные значения при сопряженных значениях $u$. Отсюда следует, что числитель и знаменатель в обеих дробях правой части формулы (181) будут сопряженными, так что модуль каждой из дробей равен единице. Обратимся к левой части. Точка $u = 0$ находится на контуре основного прямоугольника $K_1$ (в его вершине), и, следовательно, $f(0)$ находится на единичной окружности, т. е. $|f(0)| = 1$. Таким образом, формула (181) показывает, что $|C| = 1$, т. е. $C = e^{i\vartheta}$, где $\vartheta$ — некоторое вещественное число. Окончательно получаем следующую формулу для функции, преобразующей прямоугольник $K_1$ в единичный круг:

$$f(u) = e^{i\vartheta} \frac{\sigma(u - \xi - i\eta)\,\sigma(u + \xi + i\eta)}{\sigma(u - \xi + i\eta)\,\sigma(u + \xi - i\eta)}. \tag{182}$$

Выбор числа $\vartheta$ не играет роли. При изменении значения $\vartheta$ единичный круг поворачивается вокруг центра.

## ДОБАВЛЕНИЕ

# ПРИВЕДЕНИЕ МАТРИЦ К КАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

**190. Вспомогательные предложения.** Целью настоящего добавления является доказательство предложения, приведенного нами без доказательства в [**III$_1$, 27**]. Прежде всего, сформулируем это предложение. Если $A$ есть некоторая матрица, то всегда можно найти такую матрицу $V$ с определителем, отличным от нуля, что матрица $VAV^{-1}$, подобная матрице $A$, будет иметь квазидиагональную (или диагональную) форму

$$VAV^{-1} = [I_{\rho_1}(\lambda_1),\ I_{\rho_2}(\lambda_2),\ \ldots,\ I_{\rho_p}(\lambda_p)], \tag{1}$$

где матрицы $I_\rho(\lambda)$ имеют вид

$$I_\rho(\lambda) = \begin{Vmatrix} \lambda & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \lambda \end{Vmatrix}. \tag{2}$$

Нижний значок $\rho$ указывает порядок матрицы и аргумент $\lambda$ дает число, стоящее на главной диагонали. Если $\rho = 1$, то матрица $I_1(\lambda)$ приводится к числу $\lambda$. В результате доказательства этого предложения мы дополним его в некоторых существенных пунктах.

Напомним, прежде всего, геометрический смысл перехода к подобной матрице. Матрица $A$ порядка $n$ является оператором в $n$-мерном пространстве в том смысле, что она совершает некоторое линейное преобразование этого пространства. Вид матрицы $A$ зависит, как мы видели [**III$_1$, 21**], от выбора координат, т. е. основных ортов. Если матрица $A$ выражает линейное преобразование при определенном выборе ортов и если мы совершаем преобразование координат, при котором новые составляющие каждого вектора выражаются через его прежние составляющие при помощи преобразования $V$, то в новой координатной системе наше линейное преобразование будет

выражаться матрицей $VAV^{-1}$. Таким образом, формулированная нами задача сводится, по существу, к выбору ортов, в некотором смысле наиболее естественных для линейного преобразования, осуществляемого в прежней системе координат матрицей $A$, а именно к такому выбору ортов, при котором наше линейное преобразование выражается матрицей, имеющей форму, указанную в правой части равенства (1).

Прежде чем переходить к решению этой задачи, мы предварительно выясним некоторые вспомогательные предложения, которыми нам придется пользоваться. Большая часть этих предложений выяснена ранее, но для цельности картины мы соберем их здесь в одном месте.

Прежде всего мы остановимся на выяснении понятия подпространства, с которым мы часто имели дело и раньше. Если $x_1, \ldots, x_k$ суть $k$ линейно независимых векторов пространства, причем $k \leqslant n$, то совокупность векторов, определяемых формулой

$$c_1 x_1 + \ldots + c_k x_k, \tag{3}$$

где $c_s$ — произвольные числа, мы называли *подпространством* измерения $k$, образованным вышеуказанными векторами. В случае $k = n$ подпространство совпадает со всем пространством. Можно дать другое определение подпространства, эквивалентное только что указанному, а именно: подпространством называется совокупность векторов, обладающих следующими двумя свойствами. Если некоторый вектор $x$ принадлежит этой совокупности, то и вектор $cx$, где $c$ — произвольное число, также принадлежит совокупности, и если два вектора $x_1$ и $x_2$ принадлежат совокупности, то и их сумма $x_1 + x_2$ также принадлежит совокупности. Иначе говоря, совершая действие умножения на число и сложение над векторами совокупности, мы не выходим из этой совокупности.

В дальнейшем мы будем иметь дело с двумя способами определения подпространства, которые мы сейчас и укажем. Пусть $P$ — некоторая матрица порядка $n$ и $x$ — произвольный переменный вектор в $n$-мерном пространстве. Совокупность векторов, определяемых формулой

$$\xi = Px, \tag{4}$$

является, очевидно, некоторым подпространством, которое может совпадать и с полным пространством. Действительно, если к указанной совокупности принадлежит некоторый вектор $\xi_1 = Px_1$, то к этой же совокупности принадлежит и вектор $c_1\xi_1 = P(c_1x_1)$, и если к нашей совокупности принадлежат два вектора $\xi_1 = Px_1$ и $\xi_2 = Px_2$, то к этой совокупности принадлежит, очевидно, и вектор $\xi_1 + \xi_2 = P(x_1 + x_2)$, и, таким образом, формула (4) при произвольном переменном векторе $x$ действительно определяет некоторое подпространство. Как мы уже упоминали [$III_1$, 15], число измерений этого подпространства равно рангу матрицы $P$.

Укажем теперь второй способ определения подпространства. Пусть $Q$ есть некоторая матрица порядка $n$, и мы рассматриваем совокупность векторов, удовлетворяющих уравнению

$$Qx = 0. \tag{5}$$

Совершенно так же, как и выше, можно показать, что эта совокупность векторов образует некоторое подпространство. Как мы видели выше [**III$_1$, 14**], это подпространство будет иметь измерение $k$, где $(n - k)$ — ранг матрицы $Q$.

Говоря о подпространстве, мы, конечно, всегда предполагаем, что оно не пустое, т. е. что оно содержит действительно векторы, отличные от нуля. Посмотрим, в каком случае формула (4) определяет пустое подпространство, т. е. в каком случае для любого $x$ из нашего пространства формула (4) дает вектор, равный нулю. Принимая во внимание самый вид линейного преобразования, мы можем утверждать, что это будет иметь место в том и только в том случае, когда матрица $P$ равна нулю, т. е. когда все ее элементы равны нулю.

Пусть $E_1, \ldots, E_m$ — некоторые подпространства. Мы будем говорить, что они образуют полную систему подпространств, если всякий вектор $x$ нашего пространства может быть представлен единственным образом в виде суммы векторов

$$x = \xi_1 + \ldots + \xi_m, \tag{6}$$

принадлежащих указанным выше подпространствам. Отметим значение условия единственности представления. Из этого условия непосредственно вытекает, что вектор, равный нулю, не может быть представлен в виде суммы (6), среди слагаемых которой есть отличные от нуля, а это в свою очередь равносильно тому факту, что между векторами упомянутых выше подпространств не может существовать линейной зависимости. В качестве примера рассмотрим обычное вещественное трехмерное пространство, образованное векторами, имеющими начало в некоторой точке $O$. В качестве полной системы подпространств мы можем взять некоторую плоскость $L$, проходящую через $O$, и некоторую прямую $l$, проходящую через $O$ и не лежащую в плоскости $L$. Первое подпространство будет двух измерений и может быть образовано двумя произвольными векторами, лежащими в плоскости $L$ и не находящимися на одной прямой. Второе подпространство будет одного измерения и может быть образовано любым вектором, лежащим на прямой $l$. Всякий вектор нашего трехмерного пространства может быть единственным образом представлен как сумма векторов, лежащих в плоскости $L$ и на прямой $l$.

Пусть $A$ есть некоторая матрица, осуществляющая линейное преобразование пространства. Положим, что нам удалось найти такую полную систему подпространств $E_1, \ldots, E_m$ измерения $\rho_1, \ldots, \rho_m$, что каждое из этих подпространств будет инвариантным по отно-

шению к линейному преобразованию, осуществляемому матрицей $A$, т. е., иначе говоря, любой вектор подпространства $E_s (s = 1, \ldots, m)$ в результате линейного преобразования, осуществляемого матрицей $A$, перейдет в вектор того же подпространства. В данном случае мы имеем следующий естественный выбор ортов, при котором матрица $A$ принимает квазидиагональную форму структуры $\{\rho_1, \ldots, \rho_m\}$. Берем за первые $\rho_1$ ортов какие-либо $\rho_1$ линейно независимых векторов, образующих подпространство $E_1$, за следующие $\rho_2$ ортов выбираем какие-нибудь $\rho_2$ линейно независимых векторов, образующих подпространство $E_2$, и т. д. Раз $E_s$ образует полную систему подпространств, мы имеем, очевидно, $\rho_1 + \ldots + \rho_m = n$. Нетрудно видеть, что при таком выборе ортов наша матрица $A$ действительно будет квазидиагональной формы. Остановимся на этом подробнее и для простоты письма ограничимся случаем $m = 2$. Пусть $(x_1, \ldots, x_n)$ — некоторый вектор и $(x_1', \ldots, x_n')$ — новый вектор, получаемый из него при помощи нашего линейного преобразования. В силу инвариантности подпространства $E_1$ и сделанного выбора ортов мы должны иметь при $x_{\rho_1+1} = x_{\rho_1+2} \ldots = x_n = 0$ и $x'_{\rho_1+1} = x'_{\rho_1+2} = \ldots = x'_n = 0$ и точно так же, в силу инвариантности $E_2$, если $x_1 = \ldots = x_{\rho_1} = 0$, то $x_1' = \ldots = x'_{\rho_1} = 0$. Отсюда непосредственно следует, что при сделанном выборе ортов наше линейное преобразование осуществляется квазидиагональной матрицей вида

$$\left\|\begin{array}{cccccccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1\rho_1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2\rho_1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{\rho_1 1} & a_{\rho_1 2} & \ldots & a_{\rho_1\rho_1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1\rho_2} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2\rho_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & b_{\rho_2 1} & b_{\rho_2 2} & \ldots & b_{\rho_2\rho_2} \end{array}\right\| = [A', B']. \qquad (7)$$

Отметим еще, что выбор основных ортов внутри каждого подпространства остается совершенно произвольным, и в дальнейшем мы используем этот произвол для того, чтобы привести каждую из отдельных матриц $A'$ и $B'$, входящих в квазидиагональную матрицу (7), к наиболее простой в некотором смысле форме.

Мы переходим сейчас к следующим предложениям, которыми нам придется пользоваться в дальнейшем.

Пусть $f(z)$ есть некоторый полином

$$f(z) = a_0 z^p + a_1 z^{p-1} + \ldots + a_{p-1} z + a_p.$$

Подставляя вместо $z$ некоторую матрицу $A$, мы получаем полином от матрицы

$$f(A) = a_0 A^p + a_1 A^{p-1} + \ldots + a_{p-1} A + a_p. \qquad (8)$$

В результате действий, указанных в правой части, мы получим некоторую новую матрицу, т. е. всякий полином от матрицы $f(A)$ есть также некоторая матрица. Отметим, что коэффициенты полинома $a_s$ суть некоторые числа. Поскольку целые положительные степени одной и той же матрицы $A^k$ коммутируют друг с другом и с любыми числами, мы можем утверждать, что не только сложение, но и умножение полиномов от одной и той же матрицы $A$ производится по правилам обычной алгебры так же, как это делается с полиномами от численного аргумента. Таким образом, если мы имеем некоторое тождество, связывающее несколько полиномов от численного аргумента и содержащее действия сложения и умножения, то же самое тождество будет иметь место, если вместо аргумента $z$ мы подставим любую матрицу $A$.

Основную роль в вопросе приведения матриц к каноническому виду играет характеристическое уравнение

$$\varphi(\lambda)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0, \tag{9}$$

где $a_{ik}$ — элементы матрицы $A$. Это уравнение может быть записано в виде

$$D(A-\lambda)=0, \tag{10}$$

где символ $D(U)$ означает определитель матрицы $U$. Как мы показали выше [**91**], имеет место следующее тождество Кейли:

$$\varphi(A)=0, \tag{11}$$

т. е. если в характеристический полином $\varphi(\lambda)$ матрицы $A$ вместо аргумента $\lambda$ вставить матрицу $A$, то в результате получится матрица, равная нулю.

Нам остается еще отметить два простых предложения. Как известно, корни уравнения (9) называются *характеристическими числами матрицы A*. Докажем следующую теорему: *если* $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ *суть характеристические числа матрицы A, то у матрицы* $A^s$, *где s — целое положительное число, характеристические числа будут* $\lambda_1^s, \dots, \lambda_n^s$.

Принимая во внимание, что в полиноме $\varphi(\lambda)$ старший член равен $(-\lambda)^n$, мы можем написать тождество относительно $\lambda$:

$$D(A-\lambda)=\prod_{k=1}^{n}(\lambda_k-\lambda). \tag{12}$$

Пусть $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{s}}$ — корень степени $s$ из единицы. Мы имеем очевидное тождество [I, 175]:

$$(z-\lambda)(z-\varepsilon\lambda)\ldots(z-\varepsilon^{s-1}\lambda)=z^s-\lambda^s. \tag{13}$$

Принимая во внимание, что определитель произведения матриц равен произведению определителей и тождеств (12) и (13), мы можем написать

$$D(A^s-\lambda^s)=\prod_{k=1}^{n}(\lambda_k-\lambda)\prod_{k=1}^{n}(\lambda_k-\varepsilon\lambda)\ldots\prod_{k=1}^{n}(\lambda_k-\varepsilon^{s-1}\lambda)$$

или

$$D(A^s-\lambda^s)=\prod_{k=1}^{n}[(\lambda_k-\lambda)(\lambda_k-\varepsilon\lambda)\ldots(\lambda_k-\varepsilon^{s-1}\lambda)].$$

Отсюда, в силу тождества (13), получим

$$D(A^s-\lambda^s)=\prod_{k=1}^{n}(\lambda_k^s-\lambda^s),$$

т. е.

$$D(A^s-\mu)=\prod_{k=1}^{n}(\lambda_k^s-\mu),$$

что и доказывает высказанную теорему.

В дальнейшем нам придется вычислять определитель матриц, имеющих квазидиагональную форму

$$A=[A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_k].$$

Нетрудно видеть, что он равен произведению определителей матриц $A_k$, т. е.

$$D(A)=D(A_1)D(A_2)\ldots D(A_k). \tag{14}$$

Для простоты письма ограничимся случаем $k=2$. Мы имеем в силу закона умножения

$$[A_1,\ A_2]=[A,\ I]\,[I,\ A_2],$$

откуда

$$D(A)=D([A_1,\ I])\,D([I,\ A_2]).$$

Применяя разложение определителя по элементам некоторого столбца или строки, мы получим, например,

$$D([A_1,\ I])=D(A_1),$$

откуда и вытекает непосредственно формула (14).

В заключение напомним, что подобные матрицы имеют одинаковые характеристические числа.

**191. Случай простых корней.** Выше мы разобрали полностью приведение матрицы к канонической форме в том случае, когда матрица имеет различные характеристические числа. Изложим это несколько иначе с тем, чтобы потом провести аналогичные рассуждения и в общем случае, когда имеются одинаковые характеристические числа.

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — характеристические числа матрицы $A$, различные между собой. Как мы видели, существуют в данном случае $n$ линейно независимых векторов $\boldsymbol{v}_k$, которые удовлетворяют уравнениям

$$A\boldsymbol{v}_k = \lambda_k \boldsymbol{v}_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

или

$$(A - \lambda_k)\,\boldsymbol{v}_k = 0. \tag{15}$$

Каждый из этих векторов $\boldsymbol{v}_k$ образует подпространство $E_k$ одного измерения, и эти подпространства $E_k$ дают полную систему подпространств. Каждый из векторов вида $c_k\boldsymbol{v}_k$, где $c_k$ — некоторое число, удовлетворяет, очевидно, уравнению $Ac_k\boldsymbol{v}_k = \lambda_k c_k \boldsymbol{v}_k$, т. е. в результате преобразования $A$ умножается лишь на число $\lambda_k$. Иначе говоря, каждое из подпространств $E_k$ является инвариантным подпространством по отношению к линейному преобразованию, осуществляемому матрицей $A$. Выбирая векторы $\boldsymbol{v}_k$ за орты, мы приводим матрицу $A$ не только к квазидиагональной форме, но просто к чисто диагональной форме, поскольку каждое из подпространств $E_k$ имеет лишь одно измерение.

Напишем уравнение вида

$$(A - \lambda_k)\,\boldsymbol{x} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{16}$$

Ему удовлетворяют, между прочим, векторы подпространства $E_k$. Нетрудно видеть, что других решений оно не имеет, т. е. что уравнение (16) определяет подпространство одного измерения. Действительно, если бы оно определяло подпространство выше одного измерения, например двух измерений, то, как мы показали в [**III$_1$, 27**], каждый вектор этого подпространства будет линейно независимым с векторами остальных подпространств $E_k$, и мы получили бы таким образом $(n+1)$ линейно независимых векторов в $n$-мерном пространстве, что невозможно. Таким образом, в рассматриваемом случае уравнения (16) и определяют подпространство $E_k$.

Можно определить эти подпространства и иначе. Возьмем для этого разложение на простейшие дроби

$$\frac{1}{\varphi(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{z - \lambda_k} \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\varphi(z)}{z - \lambda_k} = 1,$$

где $a_k$ — числа, отличные от нуля. Подставляя вместо $z$ матрицу $A$, получим

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\varphi(A)}{A-\lambda_k} = 1. \tag{17}$$

Рассмотрим теперь подпространства $E'_k$, определяемые формулами

$$\xi = a_k \frac{\varphi(A)}{A-\lambda_k} x \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{18}$$

где $x$ — любой переменный вектор из всего пространства. Постоянный множитель $a_k$ в формуле (18), очевидно, никакой роли не играет. Из формулы (17) получаем разложение любого вектора $x$:

$$x = \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\varphi(A)}{A-\lambda_k} x, \tag{19}$$

причем слагаемые правой части принадлежат подпространствам $E'_k$. Покажем, что эти подпространства $E'_k$, определяемые формулой (18), совпадают с $E_k$, которые определялись уравнением (16). Действительно, если $\xi$ есть некоторый вектор из $E'_k$, который определяется формулой (18), то в силу формулы Кейли имеем

$$(A-\lambda_k)\xi = a_k \varphi(A) x = 0,$$

т. е. всякий вектор из $E'_k$ принадлежит $E_k$. Остается показать, что и, наоборот, всякий вектор $\eta_k$ из $E_k$ может быть получен по формуле (18) при определенном выборе $x$. Для этого подставим в (19) вместо $x$ вектор $\eta_k$. Поскольку каждый полином $\frac{\varphi(A)}{A-\lambda_s}$ при $s \neq k$ содержит множитель $(A-\lambda_k)$, мы имеем в силу (16), которое служит определением $E_k$,

$$\frac{\varphi(A)}{A-\lambda_k}\eta_k = 0 \text{ при } s \neq k$$

и, таким образом, получаем из (19) при замене $x$ на $\eta_k$

$$\eta_k = a_k \frac{\varphi(A)}{A-\lambda_k}\eta_k,$$

т. е. вектор $\eta_k$ действительно получается по формуле (18), если вместо $x$ мы возьмем сам вектор $\eta_k$.

Рассуждения, совершенно аналогичные предыдущим, мы будем иметь и для случая кратных корней характеристического уравнения. Это даст нам возможность разбить все пространство на полную систему подпространств, инвариантных по отношению к линейному преобразованию, совершаемому матрицей $A$. Для каждого из этих подпространств характеристическое уравнение будет иметь все корни

одинаковые, и вторым шагом в нашем преобразовании будет такой выбор ортов в этом пространстве, при котором мы приходим к основной формуле (1).

**192. Первый этап преобразований в случае кратных корней.** Положим, что характеристическое уравнение (9) имеет корень $a_1$ кратности $r_1$, корень $a_2$ кратности $r_2$ и т. д. и, наконец, корень $a_s$ кратности $r_s$. Разлагая на простейшие дроби, мы будем иметь формулу вида

$$\frac{1}{\varphi(z)} = \sum_{k=1}^{s} \frac{g_k(z)}{(z-a_k)^{r_k}},$$

где $g_k(z)$ — полином от $z$ степени не выше $(r_k - 1)$, причем $g_k(a_k) \neq 0$. Введем в рассмотрение полиномы

$$f_k(z) = g_k(z) \frac{\varphi(z)}{(z-a_k)^{r_k}}. \tag{20}$$

Мы имеем, очевидно, тождество

$$1 = \sum_{k=1}^{s} f_k(z),$$

или, заменяя аргумент $z$ матрицей $A$, получим

$$1 = \sum_{k=1}^{s} f_k(A).$$

Таким образом, для любого вектора $x$ мы получим представление в виде суммы $s$ векторов

$$x = \sum_{k=1}^{s} f_k(A)\, x. \tag{21}$$

Определим теперь некоторые подпространства $E_1, \ldots, E_s$, а именно положим, что $E_k$ есть подпространство, определяемое формулой

$$\xi = f_k(A)\, x \qquad (k = 1, 2, \ldots, s). \tag{22}$$

Мы увидим дальше, что каждое из этих подпространств $E_k$ будет не пустым. Обозначим через $x_k$ любой вектор из подпространства $E_k$. Мы докажем, прежде всего, следующие две формулы:

$$f_p(A)\, x_q = 0 \text{ при } p \neq q \text{ и } f_p(A)\, x_p = x_p. \tag{23}$$

Действительно, по определению

$$x_q = f_q(A)\, x,$$

где $x$ — некоторый вектор полного пространства. Поэтому в силу (20)

$$f_p(A)\,x_q = g_p(A)\,g_q(A)\,\frac{[\varphi(A)]^2}{(A-\alpha_p)^{r_p}(A-r_q)^{r_q}}\,x.$$

Если $p$ и $q$ различны, то дробь, стоящая в правой части равенства, представляет собой полином, содержащий множителем $\varphi(A)$; в силу тождества Кейли, этот полином будет представлять собою матрицу, равную нулю, что и доказывает первую из формул (23). Для доказательства второй формулы достаточно в формуле (21) положить $x = x_p$ и принять во внимание первую из формул (23). Мы получим, таким образом, непосредственно вторую из этих формул. Покажем теперь, что эти подпространства образуют полную систему подпространств. Формула (21) показывает, что всякий вектор может быть представлен в виде суммы векторов из подпространств $E_k$. Нам остается только показать, что между векторами из этих подпространств не может существовать линейной зависимости. Положим, что такая линейная зависимость существует:

$$C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_sx_s = 0, \tag{24}$$

где вектор $x_k$ принадлежит подпространству $E_k$. Нам надо показать, что если $x_k$ отлично от нуля, то коэффициент $C_k$ должен равняться нулю. Применяя к обеим частям равенства (24) линейное преобразование $f_k(A)$, мы получим в силу (23)

$$C_kx_k = 0,$$

что и доказывает наше утверждение.

Таким образом, построенные подпространства $E_k$ действительно образуют полную систему подпространств, и сумма их измерений должна быть равна $n$, т. е. числу измерений полного пространства.

Можно определить каждое из подпространств $E_k$ иначе, чем это было сделано выше, а именно покажем, что подпространство $E_k$ определяется уравнением вида

$$(A-\alpha_k)^{r_k}x = 0, \tag{25}$$

т. е. представляет собою совокупность векторов, удовлетворяющих этому уравнению. Действительно, положим сначала, что имеется некоторый вектор $\xi$, определяемый формулой (22), и покажем, что он удовлетворяет уравнению (25). Действительно, подставляя выражение

$$\xi = f_k(A)\,x$$

вместо $x$ в уравнение (25), мы получим в левой части этого уравнения выражение

$$(A-\alpha_k)^{r_k}f_k(A)\,x = g_k(A)\,\varphi(A)\,x,$$

и в силу тождества Кейли $[\varphi(A)=0]$ результат будет действительно равен нулю. Остается теперь показать обратное, а именно, что всякое решение $\eta$ уравнения (25) может быть получено по формуле (22) при некотором выборе $x$. Более точно мы покажем, что из уравнения

$$(A-\alpha_k)^{r_k}\eta=0 \tag{26}$$

вытекает

$$\eta=f_k(A)\,\eta. \tag{27}$$

Действительно, в силу (21) мы имеем

$$\eta=\sum_{p=1}^{s} f_p(A)\,\eta.$$

Но каждый из полиномов $f_p(A)$ при $p\neq k$ содержит множитель $(A-\alpha_k)^{r_k}$ и, следовательно, в силу (26), мы имеем $f_p(A)\,\eta=0$ при $p\neq k$, откуда и вытекает формула (27).

Вернемся к рассуждениям из [III$_1$, **27**]. Если $\lambda=\alpha_k$ есть некоторый корень характеристического уравнения, то, подставляя его вместо $\lambda$ в коэффициенты системы (105), мы получим однородную систему с определителем, равным нулю, и, таким образом, сможем построить для нее решение, отличное от нулевого. Это решение $v_k$ будет удовлетворять уравнению

$$(A-\alpha_k)\,v_k=0,$$

а потому и подавно уравнению (25), т. е. будет входить в состав подпространства $E_k$, которое, следовательно, не пусто.

Из вида уравнения (25) непосредственно вытекает, что каждое из подпространств $E_k$ будет инвариантным по отношению к преобразованию, совершаемому матрицей $A$. Действительно, если некоторый вектор $x$ удовлетворяет уравнению (25), то непосредственно очевидно, что и вектор $Ax$ будет удовлетворять этому же уравнению, так как

$$(A-\alpha_k)^{r_k}Ax=A(A-\alpha_k)^{r_k}x.$$

Пусть $q_1, \ldots, q_s$ — числа измерений подпространств $E_1, \ldots, E_s$. Выбирая основные орты в этих подпространствах, как это было указано в предыдущем номере, мы перейдем от матрицы $A$ к подобной матрице, имеющей квазидиагональную форму,

$$S_1AS_1^{-1}=[A_1, A_2, \ldots, A_s], \tag{28}$$

причем составляющие матрицы $A_k$ будут иметь порядок $q_k$. Мы покажем сейчас, что числа $q_k$ совпадают с кратностями $r_k$ корней характеристического уравнения, и что каждая из матриц $A_k$ имеет единственное характеристическое число $\alpha_k$ кратности $r_k$.

Для доказательства возьмем любой вектор $\xi$ из подпространства $E_k$. Он должен удовлетворять уравнению (25). При новом выборе ортов это уравнение перепишется в виде

$$S_1 (A - \alpha_k)^{r_k} S_1^{-1} \xi = 0.$$

Но мы имеем, например,

$$S_1 (A - \alpha_k)^2 S_1^{-1} = S_1 (A - \alpha_k) S_1^{-1} S_1 (A - \alpha_k) S_1^{-1} = (S_1 A S_1^{-1} - \alpha_k)^2,$$

так что предыдущее уравнение можно переписать в виде

$$(S_1 A S_1^{-1} - \alpha_k)^{r_k} \xi = 0$$

или

$$[A_1 - \alpha_k,\ A_2 - \alpha_k,\ \ldots,\ A_s - \alpha_k]^{r_k} \xi = 0. \tag{29}$$

Рассмотрим, например, случай $k = 1$.

В данном случае у вектора $\xi$ все составляющие, кроме первых $q_1$, будут равны нулю, и вместо (29) мы можем написать уравнение

$$(A_1 - \alpha_1)^{r_1} \xi' = 0, \tag{30}$$

где через $\xi'$ мы обозначили произвольный вектор в пространстве, имеющем $q_1$ измерений, и матрица $(A_1 - \alpha_1)^{r_1}$ будет матрицей порядка $q_1$. Поскольку уравнение (30) должно иметь место при любом векторе $\xi'$, мы должны иметь

$$(A_1 - \alpha_1)^{r_1} = 0.$$

Отсюда, конечно, следует, что все характеристические числа матрицы $(A_1 - \alpha_1)^{r_1}$ должны равняться нулю. Но эти характеристические числа получаются из характеристических чисел матрицы $A_1 - \alpha_1$ путем возведения этих последних в степень $r_1$, и, следовательно, все характеристические числа матрицы $A_1 - \alpha_1$ равны нулю, а все характеристические числа матрицы $A_1$ равны $\alpha_1$. Совершенно так же можно показать вообще, что все характеристические числа матрицы $A_k$ порядка $q_k$ равны $\alpha_k$. Но матрица (28), подобная $A$, должна иметь те же характеристические числа, что и матрица $A$. Ее характеристическое уравнение имеет вид

$$D([A_1 - \lambda,\ A_2 - \lambda,\ \ldots,\ A_s - \lambda]) = 0$$

или [190]

$$D(A_1 - \lambda) D(A_2 - \lambda) \ldots D(A_s - \lambda) = 0.$$

Отсюда вытекает непосредственно, что $q_k$ должны совпадать с $r_k$, и что матрица $A_k$ имеет единственное характеристическое число $\alpha_k$ кратности $r_k$.

**193. Приведение к канонической форме.** Мы видели, что каждая из матриц $A_k$ имеет единственное характеристическое число $\alpha_k$ кратности $r_k$. Для приведения этой матрицы к канонической форме

упомянутого в начале вида достаточно выбрать в подпространстве $E_k$ соответственным образом орты. Мы приходим, таким образом, к рассмотрению частного случая, а именно матрицы с единственным характеристическим числом. Пусть, вообще, некоторая матрица $D$ порядка $r$ имеет единственное характеристическое число $\alpha$ кратности $r$. Матрица $B=D-\alpha$ будет иметь единственное характеристическое число нуль кратности $r$, и эту матрицу мы и будем дальше рассматривать.

В силу тождества Кейли мы имеем $B^r=0$, так как левая часть характеристического уравнения для матрицы $B$ равна, очевидно, $(-1)^r\lambda^r$. Но может случиться, что $B^l=0$, где $l$ — целое положительное число, меньшее $r$. Возьмем наименьшее целое положительное число $l$, при котором имеет место формула

$$B^l=0. \tag{31}$$

Если, например, сама матрица $B$ равна нулю, то $l=1$. Для матрицы

$$B=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

нетрудно проверить, что $B^2=0$.

Если матрица $B$ равна нулю, то $D=B+\alpha$ есть чисто диагональная матрица

$$D=[\alpha,\ \alpha,\ \ldots,\ \alpha],$$

и, таким образом, мы уже имеем каноническую форму. Итак, имеет смысл рассматривать лишь тот случай, когда $l>1$.

В силу условия (31) уравнение

$$B^l x=0$$

определяет всё пространство измерения $r$. Мы его будем в дальнейшем обозначать $\omega$. Построим теперь уравнение

$$B^{l-1}x=0.$$

Поскольку матрица $B^{l-1}$ отлична от нуля, это уравнение определяет некоторое подпространство с числом измерений, меньшим $r$. Определим вообще последовательность пространств следующими уравнениями:

$$B^l x=0,\ B^{l-1}x=0,\ \ldots,\ Bx=0, \tag{32}$$

и обозначим через $F_m$ подпространство, определяемое уравнением $B^m x=0$. Пусть $\tau_m$ — число измерений этого подпространства. Как мы уже упоминали выше, $F_l$ совпадает со всем пространством $\omega$,

и $\tau_l = r$, а $\tau_{l-1} < \tau_l$. Если некоторый вектор $\xi$ входит в подпространство $F_m$, т. е. удовлетворяет уравнению $B^m\xi = 0$, то вектор $B\xi$ будет удовлетворять уравнению $B^{m-1}(B\xi) = 0$, т. е. будет входить в подпространство $F_{m-1}$. Кроме того, очевидно, что всякий вектор, входящий в пространство $F_m$, тем самым входит и в подпространство $F_{m+1}$, т. е. подпространство $F_m$ составляет часть подпространства $F_{m+1}$. Дальше мы увидим, что число измерений подпространства $F_m$ всегда меньше числа измерений подпространства $F_{m+1}$, т. е. подпространство $F_m$ составляет правильную часть подпространства $F_{m+1}$, а не совпадает с ним. Мы имеем пока неравенства вида

$$\tau_l > \tau_{l-1} \geqslant \tau_{l-2} \geqslant \ldots \geqslant \tau_1, \tag{33}$$

и дальше мы покажем, что не только в начале, но и везде в дальнейшем мы имеем просто знак $>$.

Обозначим $\tau_l - \tau_{l-1} = r_l$, где $r_l$ есть некоторое целое положительное число. Мы можем построить в подпространстве $F_l$ (т. е., иначе говоря, во всем пространстве $\omega$) $r_l$ линейно независимых векторов $\xi_1, \ldots, \xi_{r_l}$, таких, что никакая их линейная комбинация не принадлежит $F_{l-1}$. При этом всякий вектор из $F_l$ может быть представлен в виде линейной комбинации векторов $\xi_1, \ldots, \xi_{r_l}$ и некоторого вектора из $F_{l-1}$. Для образования этих векторов $\xi_1, \ldots, \xi_{r_l}$ мы можем, например, в подпространстве $F_{l-1}$ выбрать любым образом $\tau_{l-1}$ линейно независимых векторов. При этом векторы $\xi_1, \ldots, \xi_{r_l}$ будут дополнять эти векторы до полной системы линейно независимых векторов в пространстве $\omega$. Совершенно так же обозначим $\tau_{l-1} - \tau_{l-2} = r_{l-1}$, где $r_{l-1}$ будет некоторым целым неотрицательным числом, и построим в подпространстве $F_{l-1}$ такие $r_{l-1}$ линейно независимых векторов, что никакая их линейная комбинация не принадлежит подпространству $F_{l-2}$. Назовем эти векторы и любые их линейные комбинации векторами $\eta$. Рассмотрим теперь векторы

$$B\xi_1, \ldots, B\xi_{r_l}. \tag{34}$$

Все они принадлежат подпространству $F_{l-1}$. Покажем, что никакая их линейная комбинация не может принадлежать подпространству $F_{l-2}$. Действительно, в противном случае мы имели бы

$$B^{l-2}(c_1 B\xi_1 + \ldots + c_{r_l} B\xi_{r_l}) = 0$$

или

$$B^{l-1}(c_1\xi_1 + \ldots + c_{r_l}\xi_{r_l}) = 0,$$

т. е. оказалось бы, что линейная комбинация векторов $\xi_1, \ldots, \xi_{r_l}$ принадлежит подпространству $B^{l-1}$, что противоречит определению этих векторов. Таким образом, мы видим, что векторы (34) суть линейно независимые вектора из подпространства $F_{l-1}$, являющиеся для этого подпространства векторами $\eta$, т. е. никакая их линейная комбинация

не принадлежит $F_{l-2}$. Отсюда непосредственно вытекает, что $r_{l-1} \geqslant r_l$. Совершенно так же, обозначая $\tau_{l-2} - \tau_{l-3} = r_{l-2}$, мы получим $r_{l-2} \geqslant r_{l-1}$, и вообще, обозначая $\tau_m - \tau_{m-1} = r_m$, мы имеем

$$0 < r_l \leqslant r_{l-1} \leqslant r_{l-2} \leqslant \ldots \leqslant r_1 \qquad (r_1 = \tau_1). \tag{35}$$

Отсюда, между прочим, и вытекает непосредственно, что в формуле (33) мы имеем везде знак ($>$), т. е.

$$\tau_l > \tau_{l-1} > \ldots > \tau_1. \tag{36}$$

Число $r_l$ можно назвать числом измерений подпространства $F_l$ по отношению к подпространству $F_{l-1}$, составляющему его часть. Точнее говоря, $r_l$ есть число линейно независимых векторов из $F_l$ таких, что любая их линейная комбинация не принадлежит к $F_{l-1}$. Эти векторы образуют некоторое подпространство $G_l$, входящее в $F_l$. Точно так же $r_{l-1}$ есть число измерений $F_{l-1}$ относительно $F_{l-2}$, и мы получаем аналогично предыдущему некоторое подпространство $G_{l-1}$, входящее в $F_{l-1}$. Вообще $r_m$ есть число измерений $F_m$ относительно $F_{m-1}$, и какие-нибудь $r_m$ линейно независимых векторов из $F_m$, обладающих тем свойством, что никакая их линейная комбинация не входит в $F_{m-1}$, образуют подпространство $G_m$, входящее в $F_m$. Подпространство $G_1$ совпадает с самим $F_1$. Если $\xi$ есть некоторый вектор из $G_m$ и тем самым из $F_m$, то $B\xi$ должен принадлежать $F_{m-1}$. Но он уже не может принадлежать $F_{m-2}$, ибо в противном случае мы имели бы $B^{m-2}(B\xi) = 0$ и, следовательно, вектор $\xi$ принадлежал бы не только $F_m$, но и $F_{m-1}$, что противоречит определению подпространства $G_m$. Таким образом, производя над подпространством $G_m$ линейное преобразование $B$, мы получим часть подпространства $G_{m-1}$ (или все подпространство $G_{m-1}$), причем линейно независимые векторы $G_m$ переходят также в линейно независимые векторы $G_{m-1}$. Из формул

$$r_m = \tau_m - \tau_{m-1} \qquad (r_1 = \tau_1)$$

непосредственно вытекает, в силу $\tau_l = r$,

$$r_l + r_{l-1} + \ldots + r_1 = r,$$

и подпространства $G_l, \ldots, G_1$ образуют, очевидно, полную систему подпространств.

Мы переходим, наконец, к последнему этапу построения, а именно к построению окончательных подпространств, инвариантных относительно линейного преобразования, осуществляемого матрицей $B$. Выбираем из $G_l$ некоторый вектор $\xi_1$ за первый орт и строим еще $(l-1)$ ортов по следующему правилу:

$$\xi_2 = B\xi_1, \ \xi_3 = B\xi_2, \ \ldots, \ \xi_l = B\xi_{l-1} \qquad (B\xi_l = B^l\xi_1 = 0).$$

Из предыдущих рассуждений непосредственно следует, что эти орты линейно независимы и что они принадлежат последовательно

к подпространствам $G_l$, $G_{l-1}$, ..., $G_1$. Нетрудно видеть, что они образуют подпространство, инвариантное по отношению к линейному преобразованию $B$. Действительно, имеем при любом выборе постоянных $c_k$

$$B(c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \ldots + c_l\xi_l) = c_1\xi_2 + c_2\xi_3 + \ldots + c_{l-1}\xi_l.$$

Отсюда непосредственно следует, что матрица линейного преобразования образованного таким образом инвариантного подпространства, если $\xi_k$ принять за орты, будет матрицей порядка $l$ канонической формы:

$$I_l(0) = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Использовав таким образом один из векторов из $G_l$, мы берем какой-нибудь второй вектор $\eta_1$ из $G_l$, линейно независимый с $\xi_1$, и пристраиваем к нему еще $(l-1)$ векторов по формулам

$$\eta_2 = B\eta_1, \quad \eta_3 = B\eta_2, \quad \ldots, \quad \eta_l = B\eta_{l-1}.$$

Построенные таким образом $l$ векторов будут линейно независимы не только друг с другом, но и с векторами $\xi_k$. Это непосредственно вытекает из того факта, что линейно независимые векторы из $G_m$ переходят в линейно независимые векторы из $G_{m-1}$ при преобразовании $B$. Принимая векторы $\eta_k$ за орты, мы получим инвариантное подпространство, в котором наше линейное преобразование будет осуществляться матрицей $I_l(0)$. Используя все $r_l$ векторов из подпространства $G_l$, мы построим $r_l$ инвариантных подпространств измерения $l$, в каждом из которых наше линейное преобразование будет осуществляться матрицей вида $I_l(0)$.

Переходим теперь к следующему подпространству $G_{l-1}$ измерения $r_{l-1}$, причем $r_{l-1} \geqslant r_l$. Из этого подпространства $r_l$ векторов уже использованы при предыдущем построении ортов. Используя остальные $(r_{l-1} - r_l)$ векторов совершенно так же, как это мы делали выше, мы построим $(r_{l-1} - r_l)$ инвариантных подпространств, в каждом из которых наше линейное преобразование при сделанном выборе ортов будет выглядеть в виде матрицы $I_{l-1}(0)$ порядка $(l-1)$ канонической формы.

Вообще, когда мы дойдем до подпространства $G_m$, то в нем останутся неиспользованными $(r_m - r_{m+1})$ линейно независимых векторов. Выбирая эти векторы каким угодно образом и применяя к каждому из них последовательно преобразование $B$, мы для каждого из них получим дополнительно еще $(m-1)$ векторов и, принимая

эти векторы за орты, мы получим $(r_m - r_{m+1})$ серий ортов, причем каждая из этих серий будет содержать $m$ ортов и будет определять некоторое инвариантное подпространство измерения $m$, для которого наше преобразование будет осуществляться матрицей $I_m(0)$ канонической формы порядка $m$.

Наконец, когда мы придем к последнему подпространству $G_1$, то в нем останутся неиспользованными $(r_1 - r_2)$ линейно независимых векторов, для которых имеет место формула $B\xi = 0$. Принимая каждый из них за орт, мы получим $(r_1 - r_2)$ инвариантных подпространств одного измерения, в каждом из которых наше линейное преобразование будет выглядеть в виде матрицы первого порядка, равной нулю. Окончательно результат нового выбора ортов будет выражаться некоторым линейным преобразованием $\sigma$ над составляющими вектора, и в результате этого преобразования наше линейное преобразование, осуществляемое раньше матрицей $B$, будет теперь осуществляться подобной матрицей квазидиагональной формы

$$\sigma B\sigma^{-1} = [I_{\beta_1}(0),\ I_{\beta_2}(0),\ \ldots,\ I_{\beta_\tau}(0)], \tag{37}$$

причем в квадратной скобке среди нижних значков будет $r_l$ равных $l$, $(r_{l-1} - r_l)$ равных $(l-1)$ и т. д. и, наконец, $(r_1 - r_2)$ равных единице. Для матрицы $D = B + \alpha$ мы имеем, очевидно,

$$\sigma D\sigma^{-1} = \sigma B\sigma^{-1} + \sigma\alpha\sigma^{-1} = \sigma B\sigma^{-1} + \alpha,$$

т. е. дело сводится к прибавлению числа $\alpha$ к диагональным элементам, и мы получим, таким образом,

$$\sigma D\sigma^{-1} = [I_{\beta_1}(\alpha),\ I_{\beta_2}(\alpha),\ \ldots,\ I_{\beta_\tau}(\alpha)]. \tag{38}$$

Вернемся, наконец, к нашей исходной матрице $A$. В предыдущем номере, согласно формуле (28), мы ее представили в виде квазидиагональной матрицы, в которой каждая составляющая матрица $A_k$ имеет единственное характеристическое число $a_k$ кратности $r_k$. Каждую из этих матриц $A_k$ мы можем, согласно предыдущему, привести к канонической форме (38) при помощи некоторой матрицы $\sigma_k$ порядка $r_k$. Если ввести в рассмотрение матрицу

$$S_2 = [\sigma_1,\ \sigma_2,\ \ldots,\ \sigma_s],$$

то мы будем иметь

$$S_2[A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_s]\,S_2^{-1} = [\sigma_1 A_1\sigma_1^{-1},\ \sigma_2 A_2\sigma_2^{-1},\ \ldots,\ \sigma_s A_s\sigma_s^{-1}],$$

и окончательно наша матрица $A$ приведется к канонической форме

$$(S_2S_1)\,A\,(S_2S_1)^{-1} = [I_{\rho_1}(\lambda_1),\ I_{\rho_2}(\lambda_2),\ \ldots,\ I_{\rho_p}(\lambda_p)]. \tag{39}$$

Числа $\lambda_j$ должны совпадать с числами $\alpha_k$, причем сумма нижних значков у составляющих матриц $I_{\rho_j}(\lambda_j)$, для которых $\lambda_j = \alpha_k$, должна равняться $r_k$.

Формула (39) решает вполне задачу о приведении данной матрицы $A$ к канонической форме. Возникает вопрос об единственности такого представления, т. е. о доказательстве того факта, что внутри квадратной скобки, стоящей в правой части формулы (39), при любом способе приведения к канонической форме будет стоять совершенно определенное число матриц $I_{\rho_j}(\lambda_j)$ при заданных $\rho_j$ и $\lambda_j$. Итак, пусть имеется приведение матрицы $A$ к канонической форме, сделанное каким-либо образом:

$$VAV^{-1} = [I_{\rho_1}(\lambda_1),\ I_{\rho_2}(\lambda_2),\ \ldots,\ I_{\rho_p}(\lambda_p)].$$

Принимая во внимание, что подобные матрицы должны иметь одинаковое характеристическое уравнение, можем написать характеристическое уравнение матрицы $A$ в виде

$$D([I_{\rho_1}(\lambda_1),\ I_{\rho_2}(\lambda_2),\ \ldots,\ I_{\rho_p}(\lambda_p)] - \lambda) = 0$$

или

$$D([I_{\rho_1}(\lambda_1 - \lambda),\ I_{\rho_2}(\lambda_2 - \lambda),\ \ldots,\ I_{\rho_p}(\lambda_p - \lambda)]) = 0,$$

что равносильно следующему [**190**]:

$$D(I_{\rho_1}(\lambda_1 - \lambda))\, D(I_{\rho_2}(\lambda_2 - \lambda)) \ldots D(I_{\rho_p}(\lambda_p - \lambda)) = 0.$$

Но из вида матрицы $I_\rho(a)$ следует, что

$$D[I_\rho(a)] = (a - \lambda)^\rho. \tag{40}$$

Таким образом, числа $\lambda_j$ должны совпадать с характеристическими числами $\alpha_k$ матрицы $A$, и сумма значков $\rho_j$, для которых $\lambda_j = a_k$, должна равняться кратности $r_k$ характеристического числа $a_k$. Остается показать, что эти числа $\rho_j$ должны иметь определенное значение. Этот факт можно доказать, пользуясь теми геометрическими соображениями, которые дали нам приведение матрицы к канонической форме. Существенную роль при этом должно играть рассмотрение инвариантных подпространств. Мы не будем проводить этого доказательства, а в следующем номере докажем критерий алгебраического характера, определяющий вполне значки $\rho_j$ по заданной матрице $A$. Этот критерий, основанный на рассмотрении общего наибольшего делителя определителей данного порядка матрицы $(A - \lambda)$, приведен без доказательства в первой части этого тома [$\mathbf{III_1}$, **27**]. Он, очевидно, дает нам и доказательство единственности представления данной матрицы в канонической форме.

**194. Определение структуры канонической формы.** Предварительно докажем две вспомогательные леммы.

Лемма 1. *Если $A$ и $B$ суть две квадратные матрицы порядка $n$ и $C = AB$ — их произведение, то всякий определитель матрицы $C$ порядка $t$, где $t \leqslant n$, может быть представлен в виде суммы*

*произведений некоторых определителей порядка $t$ матрицы $A$ на определители порядка $t$ матрицы $B$.*

Эта лемма непосредственно следует из теоремы, доказанной в [$III_1$, 6].

Следствие. Пусть элементы матрицы $A(\lambda)$ суть полиномы от $\lambda$, а элементы матрицы $B$ не содержат $\lambda$, причем определитель этой матрицы $B$ отличен от нуля. Обозначим через $d_t(\lambda)$ общий наибольший делитель всех определителей порядка $t$, входящих в состав матрицы $A(\lambda)$, и через $d_t'(\lambda)$ обозначим такой же общий наибольший делитель для матрицы $A(\lambda)B$. Из доказанной леммы непосредственно следует, что $d_t(\lambda)$ должен содержаться в $d_t'(\lambda)$. Но мы можем написать

$$A(\lambda) = [A(\lambda)B]\,B^{-1},$$

и доказанная лемма дает нам совершенно так же, что $d_t'(\lambda)$ должно заключаться в $d_t(\lambda)$, т. е. $d_t(\lambda)$ и $d_t'(\lambda)$ совпадают. То же самое мы получили бы, если бы вместо матрицы $A(\lambda)B$ составили матрицу $BA(\lambda)$.

Отсюда далее следует, что упомянутый *общий наибольший делитель $d_t(\lambda)$ для матрицы $A(\lambda)$ и для подобной матрицы $BA(\lambda)B^{-1}$ будет одним и тем же.*

Выясним еще одно свойство общего наибольшего делителя $d_t(\lambda)$. Для этого введем новое определение.

Определение. Назовем элементарным преобразованием матрицы $A(\lambda)$, элементы которой суть полиномы от $\lambda$, преобразование этой матрицы при помощи конечного числа следующих трех операций:

1) перестановка двух строк (или столбцов);

2) умножение всех элементов некоторой строки (столбца) на одно и то же число, отличное от нуля;

3) прибавление к элементам некоторой строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на одно и то же число или на один и тот же полином от $\lambda$.

Если матрица $A_1(\lambda)$ получается из $A(\lambda)$ при помощи элементарного преобразования, то, очевидно, и наоборот, $A(\lambda)$ можно получить из $A_1(\lambda)$ при помощи элементарного преобразования. Две матрицы, которые получаются одна из другой при помощи элементарного преобразования, назовем *эквивалентными*.

Лемма 2. *Эквивалентные матрицы имеют одинаковые общие наибольшие делители $d_t(\lambda)$ ($t = 1, 2, \ldots, n$).*

Достаточно показать, что если все определители порядка $t$ матрицы $A(\lambda)$ содержат общим множителем некоторый полином $\varphi(\lambda)$, то такой же общий множитель будут содержать и все определители порядка $t$ эквивалентной матрицы $A_1(\lambda)$. Первое и второе из указанных выше трех преобразований добавляет к упомянутым определите-

лям порядка $t$ численный множитель, отличный от нуля, и для этих двух преобразований лемма очевидна. Остается показать, что и при третьем преобразовании общий множитель $\varphi(\lambda)$ сохранится. Положим, например, что это преобразование состоит в прибавлении к элементам строки с номером $p$ соответствующих элементов строки с номером $q \neq p$, умноженных на полином $\psi(\lambda)$. Все определители порядка $t$, не содержащие строки с номером $p$ или содержащие строки с номерами $p$ и $q$, не изменятся при указанном преобразовании в силу свойства VI определителя из [III$_1$, 3]. Определители же порядка $t$, содержащие строку с номером $p$, но не содержащие строки с номером $q$, после преобразования будут иметь вид: $A'(\lambda) \pm \psi(\lambda) A''(\lambda)$, где $A'(\lambda)$ и $A''(\lambda)$ — некоторые определители матрицы $A(\lambda)$ порядка $t$. Из сказанного непосредственно следует, что общий множитель $\varphi(\lambda)$ определителей порядка $t$ матрицы $A(\lambda)$ войдет действительно и во все определители порядка $t$ матрицы $A_1(\lambda)$.

Лемма 3. *Всякую матрицу вида*

$$l_\rho(a-\lambda) = \begin{Vmatrix} a-\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a-\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a-\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a-\lambda \end{Vmatrix} \tag{41}$$

*порядка* $\rho$ *можно при помощи элементарных преобразований привести к диагональной матрице* $[1, 1, \dots, 1, (a-\lambda)^\rho]$.

Для случая $\rho = 1$ лемма очевидна. Рассмотрим случай $\rho = 2$. Переставляя строки, умножая затем элементы первого столбца на $-(a-\lambda)$ и прибавляя полученные произведения к элементам второго столбца и проделывая то же для строк, мы будем иметь требуемый результат после вынесения $(-1)$ из последнего столбца:

$$\begin{Vmatrix} a-\lambda & 0 \\ 1 & a-\lambda \end{Vmatrix} \to \begin{Vmatrix} 1 & a-\lambda \\ a-\lambda & 0 \end{Vmatrix} \to \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ a-\lambda & -(a-\lambda)^2 \end{Vmatrix} \to$$

$$\to \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -(a-\lambda)^2 \end{Vmatrix} \to [1, (a-\lambda)^2].$$

Для матриц третьего порядка мы имеем, совершая указанные только что преобразования:

$$\begin{Vmatrix} a-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & a-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & a-\lambda \end{Vmatrix} \to \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (a-\lambda)^2 & 0 \\ 0 & -1 & a-\lambda \end{Vmatrix}.$$

Переставляя вторую и третью строки и совершая дальнейшие элементарные преобразования, мы будем иметь

$$\left\|\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & (a-\lambda)^2 & 0\\ 0 & -1 & a-\lambda\end{matrix}\right\| \to \left\|\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & (a-\lambda)\\ 0 & (a-\lambda)^2 & 0\end{matrix}\right\| \to$$

$$\to \left\|\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & (a-\lambda)^2 & (a-\lambda)^3\end{matrix}\right\| \to \left\|\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & (a-\lambda)^3\end{matrix}\right\|,$$

и после вынесения $(-1)$ из второго столбца получим $[1, 1, (a-\lambda)^3]$. Таким образом, постепенно мы можем доказать лемму для матриц любого порядка.

Переходим теперь к доказательству алгебраического критерия структуры канонической формы матрицы $A$, указанного в [**III$_1$, 27**]. Согласно следствию из леммы 1, мы можем свести разыскание общих наибольших делителей $d_t(\lambda)$ матрицы $A-\lambda$ к разысканию общих наибольших делителей подобной матрицы:

$$V(A-\lambda)V^{-1} = VAV^{-1} - \lambda = [I_{\rho_1}(\lambda_1-\lambda), \quad I_{\rho_2}(\lambda_2-\lambda), \ \ldots, \ I_{\rho_p}(\lambda_p-\lambda)]. \tag{42}$$

Применяя лемму 3 к каждой из матриц, входящих в состав этой квазидиагональной матрицы, мы можем при разыскании общих наибольших делителей $d_t(\lambda)$ заменить матрицу (42) чисто диагональной матрицей, в которой вдоль главной диагонали стоит $(\rho_1-1)$ единиц, затем $(\lambda_1-\lambda)^{\rho_1}$, после этого $(\rho_2-1)$ единиц и затем $(\lambda_2-\lambda)^{\rho_2}$ и т. д. Заметим далее, что если при построении определителя некоторого порядка $t$, входящего в эту матрицу, мы вычеркиваем совокупность строк, не совпадающую с совокупностью вычеркиваемых столбцов, то в полученном определителе по крайней мере одна строка и столбец будут состоять из нулей, и этот определитель будет равен нулю. Таким образом, при построении определителей, входящих в полученную диагональную матрицу, нам надо всегда вычеркивать одинаковые строки и столбцы, что, проще говоря, сводится к вычеркиванию диагональных элементов, произведение которых и дает величину определителя.

Рассмотрим для определенности какой-нибудь один корень $\lambda=\alpha$ кратности $k$ характеристического уравнения. В определитель порядка $n$ входит, очевидно, множитель $(\lambda-\alpha)^k$. Положим, что общий наибольший делитель определителей порядка $(n-1)$ содержит лишь $(\lambda-\alpha)^{k_1}$. Это значит, что наибольшая степень бинома $(\lambda-\alpha)$, входящего в построенную диагональную матрицу, равна $(k-k_1)$, т. е. в каноническом представлении нашей матрицы имеется матрица

$I_{k\ k_1}(\alpha)$. Точно так же дальше. Если общий наибольший делитель определителей порядка $(n-2)$ равен $(\lambda-\alpha)^{k_2}$, то это значит, что после $(\lambda-\alpha)^{k\ k_1}$ наибольшая степень $(\lambda-\alpha)$, входящая в построенную диагональную матрицу, равна $(\lambda-\alpha)^{k_1-k_2}$, т. е. кроме $I_{k-k_1}(\alpha)$ в каноническую форму входит матрица $I_{k_1-k_2}(\alpha)$. Если мы таким путем придем, наконец, к определителям некоторого порядка, из которых хоть один вовсе не содержит множителя $(\lambda-\alpha)$, то мы исчерпаем таким образом все те составные части канонической формы $A$, для которых $\lambda=\alpha$. Таким образом, упомянутый в [III$_1$, **27**] алгебраический критерий структуры канонической формы матрицы нами доказан. Заметим, что из предыдущих рассуждений не только вытекает, что

$$k>k_1>k_2>\ldots>k_m, \text{ но и } l_1\geqslant l_2\geqslant\ldots\geqslant l_m\geqslant l_{m+1},$$

где

$$l_1=k-k_1;\quad l_2=k_1-k_2;\quad \ldots;\quad l_m=k_{m-1}-k_m;\quad l_{m+1}=k_m.$$

**195. Пример.** Если мы сумели решить характеристическое уравнение для данной матрицы $A$, то вид ее канонической формы может быть непосредственно определен хотя бы при помощи того алгебраического критерия, который указан нами в предыдущем номере. Но остается вопрос о построении той матрицы $V$ с определителем, отличным от нуля, которая приводит заданную матрицу $A$ к канонической форме. При исследовании самого преобразования к канонической форме мы привели задачу к последовательному выбору новых ортов. Этот выбор в конечном счете и приводил данную матрицу к канонической форме. Но мы знаем [III$_1$, **21**], каким образом по заданному преобразованию ортов составить то преобразование $U$, которое приводит матрицу $A$, как оператор, к новому виду. Если $T$ есть линейное преобразование ортов, то матрица $A$ приводится к новому виду $UAU^{-1}$, где $U=T^{*-1}$, т. е. для получения $U$ по $T$ мы должны в $T$ переставить строки и столбцы и взять обратную матрицу.

Наметим теперь план решения задачи. Сначала мы будем выбирать новые орты таким образом, чтобы наша матрица привелась к квазидиагональной форме в соответствии с различными ее характеристическими числами так, как это указано в [**192**]. В данном случае вопрос о выборе новых ортов сведется к решению уравнений первой степени вида $(A-\alpha_k)^{r_k}x=0$. После этого задача сведется к приведению к канонической форме матрицы $B$ с единственным характеристическим числом, равным нулю. Здесь нам придется сначала определить такое наименьшее число $l$, что $B^l=0$, и затем строить систему уравнений первой степени вида

$$B^{i-1}x=0,$$

Определяя ранг этой системы уравнений, мы возьмем те векторы, которые ей не удовлетворяют, и, совершая над ними преобразование $B$, построим серии новых ортов. Если после этого в подпространстве, определяемом написанной системой, останутся еще векторы, то, применяя и к ним последовательно преобразование $B$, мы получим новые серии ортов и т. д. Таким образом, мы придем ко второму преобразованию ортов и тем самым ко второму преобразованию подобия для основной матрицы $A$, которая окончательно и приведет эту матрицу к канонической форме. Разъясним эти общие соображения численным примером.

Рассмотрим матрицу пятого порядка

$$A = \begin{Vmatrix} -2 & -1 & -1 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & -2 \\ -4 & -2 & -1 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & -3 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Составляя по обычному правилу ее характеристическое уравнение, мы увидим, что оно будет иметь следующий вид:

$$(\lambda - 2)^3 (\lambda + 1)^2 = 0,$$

т. е. это уравнение имеет корень $\lambda = 2$ третьей кратности и корень $\lambda = -1$ второй кратности. Составляем теперь матрицы $(A-2)^3$ и $(A+1)^2$. Уравнение $(A-2)^3 x = 0$ должно определить нам подпространство измерения три, т. е. матрица $(A-2)^3$ должна иметь ранг, равный двум.

Точно так же матрица $(A+1)^2$ должна иметь ранг, равный трем. При помощи элементарных вычислений находим

$$(A-2)^3 = \begin{Vmatrix} -54 & 0 & -27 & 27 & 27 \\ -54 & 0 & -27 & 27 & 27 \\ 27 & 0 & 0 & -27 & -27 \\ -54 & 0 & -27 & 27 & 27 \\ 54 & 0 & 27 & -27 & -27 \end{Vmatrix}$$

и система $(A-2)^3 x = 0$ сводится к двум уравнениям:

$$\begin{aligned} -54x_1 - 27x_3 + 27x_4 + 27x_5 &= 0, \\ 27x_1 \qquad\quad - 27x_4 - 27x_5 &= 0, \end{aligned}$$

где $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ — составляющие вектора $x$.

Мы имеем, таким образом,

$$x_1 = x_4 + x_5, \quad x_3 = -x_4 - x_5,$$

причем $x_2$, $x_4$ и $x_5$ остаются произвольными. Полагая одно из них равным единице, а остальные нулю, получаем три новых орта, которые в прежней системе имеют следующие составляющие:

$$(0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0);\quad (1,\ 0,\ -1,\ 1,\ 0);\quad (1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1). \tag{43}$$

Точно так же в результате элементарных преобразований получим

$$(A+1)^2 = \begin{Vmatrix} 0 & -6 & 0 & 9 & 3 \\ -9 & 3 & 0 & 9 & 3 \\ 0 & 6 & 0 & -9 & -3 \\ -9 & -12 & 0 & 18 & -3 \\ 9 & 6 & 0 & -9 & 6 \end{Vmatrix}$$

и уравнение $(A+1)^2 x = 0$ приведется к системе трех уравнений

$$\begin{aligned} -2x_2 + 3x_4 + x_5 &= 0, \\ -3x_1 + x_2 + 3x_4 + x_5 &= 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_4 + 2x_5 &= 0, \end{aligned}$$

или

$$x_2 = x_1;\quad x_4 = x_1;\quad x_5 = -x_1,$$

причем $x_1$ и $x_3$ остаются произвольными. Это дает нам два новых орта:

$$(1,\ 1,\ 0,\ 1,\ -1) \text{ и } (0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0). \tag{44}$$

Новые орты (43) и (44) будут выражаться через прежние по формулам

$$\begin{aligned} e_1' &= e_2, \\ e_2' &= e_1 - e_3 + e_4, \\ e_3' &= e_1 - e_3 + e_5, \\ e_4' &= e_1 + e_2 + e_4 - e_5, \\ e_5' &= e_3. \end{aligned}$$

Матрица этого линейного преобразования имеет вид

$$T = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

и мы получим, переставляя строки и столбцы и переходя к обратной матрице:

$$S_1^{-1} = T^{(*)} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$S_1 = T^{(*)-1} = \begin{Vmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Отсюда, произведя по обычному приему перемножение матриц, преобразуем матрицу $A$ к квазидиагональной форме, состоящей из матриц третьего и второго порядков:

$$S_1 A S_1^{-1} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}. \qquad (45)$$

Матрица третьего порядка

$$D_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{Vmatrix}$$

должна иметь характеристическое число $\lambda = 2$ третьей кратности. Составляем новую матрицу:

$$B_1 = D_1 - 2 = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

имеющую характеристическое число $\lambda = 0$ третьей кратности. Возводя ее в квадрат, получаем $B_1^2 = 0$. Таким образом, в данном случае мы имеем $l = 2$, и единственная система $B_1 x = 0$ приводится к одному уравнению

$$x_1 + x_3 = 0.$$

Подпространство $F_2$ в наших прежних обозначениях совпадает с полным трехмерным пространством, и подпространство $F_1$ может быть образовано векторами $(1, 0, -1)$ и $(0, 1, 0)$. Берем вектор $(1, 0, 0)$, не входящий в $F_1$. Он образует подпространство $G_2$. Производя над ним операцию получаем

$$B_1(1, 0, 0) = (-1, -2, 1).$$

Векторы $(1, 0, 0)$ и $(-1, -2, 1)$ образуют первую серию новых ортов, которым соответствует каноническая матрица

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

За третий орт мы должны брать какой-нибудь вектор $F_1$, линейно независимый с вектором $(-1, -2, 1)$. Берем вектор $(0, 1, 0)$. Ему соответствует каноническая матрица 0 первого порядка. Новые орты будут выражаться через прежние по формулам

$$\begin{aligned} e_1'' &= e_1', \\ e_2'' &= -e_1' - 2e_2' + e_3', \\ e_3'' &= \qquad\quad e_2'. \end{aligned}$$

Берем теперь матрицу второго порядка, входящую в квазидиагональную матрицу (45):

$$D_2 = \begin{Vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Она должна иметь характеристическое число $\lambda = -1$ второй кратности. Строим матрицу

$$B_2 = D_2 + 1 = \begin{Vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

с характеристическим числом $\lambda = 0$ второй кратности. Очевидно, $B_2^2 = 0$, как это должно быть по формуле Кейли. Уравнение $B_2 x = 0$ равносильно $x_4 + x_5 = 0$, где $x_4$ и $x_5$ — составляющие $x$ в рассматриваемом двумерном пространстве. Берем за первый орт вектор $(1, 0)$, т. е. $x_4 = 1$ и $x_5 = 0$, не удовлетворяющий уравнению $B_2 x = 0$, и, применяя к нему операцию $B_2$, получаем

$$B_2(1, 0) = (-1, 1).$$

Таким образом, два новых орта будут $(1, 0)$ и $(-1, 1)$, так что получаются следующие выражения новых ортов через прежние:

$$e_4'' = e_4', \quad e_5'' = -e_4' + e_5'$$

или, принимая во внимание прежние формулы.

$$\begin{aligned} e_1'' &= e_1', \\ e_2'' &= -e_1' - 2e_2' + e_3', \\ e_3'' &= e_2', \\ e_4'' &= e_4', \\ e_5'' &= -e_4' + e_5'. \end{aligned} \tag{46}$$

Последним двум ортам будет соответствовать каноническая матрица $I_2(0)$.

К первым двум каноническим матрицам мы должны прибавлять число 2 по главной диагонали и к последней канонической матрице — число $(-1)$. Окончательно каноническая форма матрицы $A$ будет

$$\left\|\begin{matrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{matrix}\right\| = [I_2(2),\ I_1(2),\ I_2(-1)]. \tag{47}$$

Составим, наконец, матрицу $V$, которая преобразует $A$ к виду (47). Она, как мы видели, является произведением $S_2S_1$, где $S_1$ получено нами выше, а $S_2$ может быть определено по формуле

$$S_2 = T_1^{*)\,-1},$$

где $T_1$ — матрица линейного преобразования (46). Мы имеем

$$T_1^{(*)} = \left\|\begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\| \text{ и } S_2 = T_1^{*)\,-1} = \left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\|.$$

Отсюда, производя перемножение, получим

$$V = S_2S_1 = \left\|\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}\right\|.$$

Окончательно

$$VAV^{-1} = [I_2(2),\quad I_1(2),\quad I_2(-1)].$$