В. И. СМИРНОВ

КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

ТОМ ЧЕТВЕРТЫЙ

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ИЗДАНИЕ ШЕСТОЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для студентов механико-математических и физико-математических факультетов университетов

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1981

22.1
С 50
УДК 51

$С \frac{20203-127}{053(02)\text{-}81}$ 21-81. 1702010000

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА II

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

В предисловии ко второму изданию пятого тома (1959 г.) Владимир Иванович Смирнов писал, что «предполагается выпуск шестого тома с изложением некоторых вопросов современной теории дифференциальных операторов с одной и несколькими независимыми переменными». Он хотел, чтобы я была соавтором этого нового тома. Однако разные дела и обстоятельства помешали осуществлению этого намерения, и было решено ограничиться расширением четвертого тома. Для этого во второй том была включена теория интеграла Лебега и пространство L_2, а четвертый том был разбит на две части (книги). В первой из них изложена теория интегральных уравнений в пространстве непрерывных функций и в пространстве L_2, вариационное исчисление, теория обобщенных производных, основные свойства пространств W_2^1 и W_2^2 и задача о минимуме квадратичного функционала в обобщенной постановке. Эта часть вышла в свет в 1974 году. Переработка и расширение второй части четвертого тома пришлась на время, когда здоровье Владимира Ивановича было подорвано тяжелой болезнью. Тем не менее он нашел в себе силы внимательно прочесть и отредактировать написанные мною дополнения и изменения и высказал пожелания относительно окончательной редакции данной книги. У Владимира Ивановича было намерение исключить часть материала предыдущего издания, которая ему казалась несколько устаревшей в свете последующих исследований. Но в результате совместного обсуждения он согласился сохранить его и внести лишь небольшие коррективы, необходимые для увязывания старого и нового текстов.

Из-за изменений, внесенных ранее в предыдущие тома, пришлось переделывать номера ссылок на них. Они даются на последние издания всех томов: 23-е издание первого тома (1974 г.), 21-е издание второго тома (1974 г.), 10-е издание первой части третьего тома (1974 г.), 9-е издание второй части третьего тома (1974 г.), на 1-е издание первой части четвертого тома (1974 г.) и на 2-е издание пятого тома (1959 г.). Например, ссылка на первую часть третьего тома дается в виде [III_1; **140**], где число **140** указывает номер пункта. Если же имеется в виду данная книга, то номер тома не пишется, а приводится лишь номер соответствующего пункта (например, [**150**]), а иногда и страницы.

Апрель 1979 г. *О. А. Ладыженская*

ГЛАВА I

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

§ 1. УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

1. Линейные уравнения с двумя независимыми переменными. Мы неоднократно встречались с различными дифференциальными уравнениями, содержащими частные производные искомой функции. Это были всегда уравнения совершенно специального вида, возникшие из конкретных задач математической физики. Целью настоящей главы является изложение основ общей теории уравнений с частными производными, причем мы начинаем изложение этой теории с рассмотрения уравнений первого порядка.

Одно уравнение первого порядка с одной искомой функцией u независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$ имеет вид

$$F(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n) = 0,$$

где x_k — независимые переменные и $p_k = u_{x_k}$ — частные производные искомой функции по этим независимым переменным. Мы будем изучать сначала уравнения, линейные относительно частных производных p_k, т. е. уравнения вида

$$a_1(x_1, \ldots, x_n, u)\,p_1 + \ldots + a_n(x_1, \ldots, x_n, u)\,p_n = c(x_1, \ldots, x_n, u), \quad (1)$$

причем коэффициенты a_k и свободный член c суть заданные функции независимых переменных x_k и искомой функции u. Поскольку сама функция u может входить любым образом в коэффициенты и свободный член, такие уравнения называют иногда не линейными, а *квазилинейными уравнениями*. В настоящем параграфе мы будем рассматривать уравнение вида (1) в случае двух независимых переменных. В этом частном случае независимые переменные обозначаются обычно буквами x и y, а частные производные мы будем, как всегда, обозначать следующим образом: $p = u_x$ и $q = u_y$. Таким образом, предметом исследования настоящего параграфа будут уравнения вида

$$a(x, y, u)\,p + b(x, y, u)\,q = c(x, y, u). \quad (2)$$

Напомним, что мы уже занимались линейными уравнениями с частными производными раньше **[II; 22]** и видели, что задача интегрирования уравнения вида (2) равносильна задаче интегрирования некоторой системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Мы дополним полученные раньше результаты некоторыми новыми фактами, которые окажутся нам полезными в дальнейшем при исследовании более сложных задач.

Заданные функции $a(x, y, u)$, $b(x, y, u)$ и $c(x, y, u)$ определяют некоторое поле направлений в пространстве (x, y, u), а именно, в каждой фиксированной точке этого пространства мы имеем направление, у которого направляющие косинусы пропорциональны a, b и c. Это поле направлений определяет семейство линий, таких, что любая линия семейства имеет в каждой своей точке касательную, совпадающую с направлением поля в этой точке. Это семейство линий получается в результате интегрирования системы обыкновенных уравнений

$$\frac{dx}{a(x, y, u)} = \frac{dy}{b(x, y, u)} = \frac{du}{c(x, y, u)}, \qquad (3)$$

или, если мы обозначим через ds общую величину написанных трех отношений, системы

$$\frac{dx}{ds} = a(x, y, u); \quad \frac{dy}{ds} = b(x, y, u); \quad \frac{du}{ds} = c(x, y, u). \qquad (4)$$

Величины p, q и (-1) пропорциональны направляющим косинусам нормали к искомой поверхности $u = u(x, y)$, и уравнение (2) выражает условие перпендикулярности $ap + bq + c(-1) = 0$ нормали к искомой поверхности с направлением поля, т. е. уравнение (2) сводится к требованию, чтобы в каждой точке искомой поверхности $u = u(x, y)$ направление, определяемое упомянутым выше полем направлений, находилось в касательной плоскости к поверхности. Назовем линии, определяемые системой (4), *характеристическими линиями* или *характеристиками* уравнения (2). Если некоторая поверхность $u = u(x, y)$ представляет собою геометрическое место характеристик уравнения (2), т. е. образована линиями l', которые удовлетворяют системе (4), то в каждой точке этой поверхности касательная к линии l', проходящей через эту точку, лежит в касательной плоскости к поверхности, и, следовательно, эта поверхность удовлетворяет уравнению (2), т. е. является интегральной поверхностью этого уравнения. Таким образом, *если поверхность $u = u(x, y)$ образована характеристиками уравнения* (2), *то эта поверхность есть интегральная поверхность этого уравнения.*

Мы предполагаем, что поверхность $u = u(x, y)$ имеет в каждой точке касательную плоскость и что направление нормали к поверхности меняется непрерывным образом при перемещении вдоль поверхности. Это сводится к существованию и непрерывности производных первого порядка от $u(x, y)$.

В дальнейшем, говоря об интегральной поверхности, мы будем предполагать, что эта поверхность обладает указанными выше свойствами. Вообще такие поверхности мы для краткости будем называть *гладкими.*

Выше мы показали, что гладкая поверхность, имеющая уравнение $u = u(x, y)$ и образованная характеристиками, есть интегральная поверхность. Можно показать, что и, наоборот, *если некоторая гладкая поверхность удовлетворяет уравнению* (2), т. е. *есть интегральная поверхность, то ее можно покрыть характеристиками.*

Действительно, если некоторая поверхность S удовлетворяет уравнению (2), то в каждой ее точке направление (a, b, c) лежит в касательной плоскости к S, и мы имеем, таким образом, на S некоторое поле направлений. Интегрируя соответствующее этому полю направлений обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, мы и найдем линии l', лежащие на поверхности S и удовлетворяющие системе (4). Этим уравнением первого порядка может служить, например, уравнение

$$\frac{dx}{a(x, y, u)} = \frac{dy}{b(x, y, u)},$$

в котором u заменено его выражением $u = u(x, y)$ из уравнения поверхности S. Положим, что к полученному уравнению применима теорема существования и единственности, причем его интегральные линии l покрывают без пересечений некоторую область D, в которой определена функция $u = u(x, y)$. Линии l' суть те линии на S, проекциями которых на плоскость (x, y) являются линии l.

При исследовании обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка мы видели **[II; 50, 51]**, что искомые функции вполне определяются заданием начальных значений этих функций при заданном значении независимого переменного. Из этих начальных данных определяются произвольные постоянные, входящие в общий интеграл, если этот последний нам удалось найти. Но определение решения по начальным данным может быть произведено и без знания общего интеграла, хотя бы при помощи метода последовательных приближений, которым мы пользовались при доказательстве теоремы существования и единственности **[II; 51]**. Общее решение уравнения (2) содержит уже не произвольные постоянные, а произвольные функции **[II; 23]**, и задача определения решения по начальному данному формулируется в этом случае следующим образом: *определить ту интегральную поверхность уравнения* (2), *которая проходит через заданную кривую l в пространстве* (x, y, u).

Если через λ мы обозначим проекцию линии l на плоскость (x, y), то формулированная задача приводится к задаче разыскания такого решения уравнения (2), которое принимает заданные значения в точках линии λ. Наметим предварительно решение поставленной задачи **[II; 23]**. Пусть M_0 — некоторая точка линии l. Примем ее координаты за начальные данные функций, определяемых системой (4). Согласно теореме существования и единственности, получим вполне определенную характеристику, выходящую из этой точки M_0. Проделывая это для каждой точки линии l, мы будем иметь семейство характеристик; положим, что они образуют некоторую поверхность S с уравнением $u = u(x, y)$. Она проходит через линию l и, согласно сказанному выше, является интегральной поверхностью уравнения (2).

Строгое проведение доказательства существования и единственности решения задачи требует некоторых предположений о правых частях уравнений (4) и некоторых существенных оговорок относительно линии l. Если, например, заданная линия l сама есть характеристика, то указанный выше прием проведения характеристик из точек линии l приведет не к поверхности, а к самой линии l. В этом случае решений может быть бесчисленное множество **[II; 24]**. Действительно, проведем через некоторую точку линии l линию l_1, которая уже не является характеристикой. Проведя из точек этой линии характеристики (среди них будет участвовать и данная линия l), мы получим, при соблюдении некоторых условий, интегральную поверхность, проходящую через заданную линию l. Принимая во внимание произвольность в выборе l_1, мы видим, что задача имеет бесчисленное множество решений, если заданная линия l есть характеристика. Может оказаться, что задача вовсе не имеет решения. Это будет в том случае, когда характеристики, выходящие из точек линии l, не образуют в окрестности этой линии поверхность, имеющую явное уравнение $u = u(x, y)$, где $u(x, y)$ однозначна и непрерывна и имеет непрерывные производные первого порядка. Так будет, например, если упомянутые характеристики образуют цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси u. В следующем параграфе мы перейдем к выяснению условий, при которых поставленная задача имеет одно определенное решение.

2. Задача Коши и характеристики. Под задачей Коши подразумевают обычно формулированную выше задачу об определении интегральной поверхности уравнения (2), проходящей через заданную линию l. Для точного исследования вопроса о существовании и единственности решения этой задачи нам придется пользоваться одной теоремой из теории обыкновенных дифференциальных уравнений, а именно:

Теорема. *Если правые части системы дифференциальных уравнений*

$$\frac{dy_k}{dx} = f_k(x, y_1, \ldots, y_n) \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{5}$$

суть непрерывные функции своих аргументов в некоторой области, определяемой неравенствами

$$|x - a| \leqslant A; \quad |y_k - b_k| \leqslant B \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{6}$$

и если, кроме того, в этой области существуют непрерывные частные производные $\frac{\partial f_k}{\partial y_s}$, *то решение системы* (5), *определяемое в силу теоремы существования и единственности любыми начальными данными* $(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$, *находящимися внутри области* (6):

$$y_k = \varphi_k(x, x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0) \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

непрерывно по своим аргументам и допускает частные производные $\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_s^0}$ *по начальным данным, которые являются непрерывными функциями своих аргументов* $(x, x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ *в некоторой окрестности взятых начальных данных.*

Чтобы не прерывать изложение, мы отложим доказательство этой теоремы до одного из следующих параграфов.

Вернемся к решению задачи Коши. Положим, что уравнение линии l задано в параметрической форме:

$$x_0 = x_0(t); \quad y_0 = y_0(t); \quad u_0 = u_0(t) \quad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1), \tag{7}$$

и допустим, что правые части уравнений (4) удовлетворяют условиям формулированной выше теоремы в некоторой области пространства (x, y, u), содержащей внутри себя линию l. Принимая координаты точек l за начальные данные при $s = 0$, мы получим решение системы (4):

$$x = x(s, x_0, y_0, u_0); \quad y = y(s, x_0, y_0, u_0); \quad u = u(s, x_0, y_0, u_0)$$

при s, достаточно близких к нулю, или, в силу (7),

$$x = x(s, t); \quad y = y(s, t); \quad u = u(s, t). \tag{8}$$

Считая, что правые части уравнений (7) непрерывно дифференцируемы по t, и пользуясь указанной выше теоремой, мы можем утверждать, что функции (8) имеют непрерывные производные не только по s, но и по t. При любом заданном t из промежутка $t_0 < t < t_1$ функции (8) определены при всех s, достаточно близких к нулю. Составим функциональный определитель от первых двух из этих функций по s и t:

$$\Delta = x_s y_t - x_t y_s. \tag{9}$$

Существенным для дальнейшего будет тот факт, является ли этот определитель отличным от нуля или нет. Мы рассмотрим, во-первых, тот случай, когда $\Delta \neq 0$ вдоль линии l, и, во-вторых, тот случай, когда $\Delta = 0$ вдоль линии l. Начнем с первого случая:

$$\Delta \neq 0 \quad (\text{вдоль линии } l), \tag{10}$$

т. е. $\Delta \neq 0$ при $s = 0$, но тем самым, в силу непрерывности производных, $\Delta \neq 0$ и в некоторой окрестности начального значения $s = 0$ и значения t, соответствующего некоторой точке M линии l. При этом первые два из уравнений (8) можно решить относительно s и t при всех x и y, находящихся в окрестности координат (x_0, y_0) точки M линии l. Это решение — единственно, и полученные функции $s(x, y)$, $t(x, y)$ имеют непрерывные производные первого порядка [**III**$_1$; **19**]. Подставляя полученные функции $s(x, y)$ и $t(x, y)$ в третье из уравнений (8), мы и будем иметь в упомянутой окрестности функцию $u(x, y)$, имеющую непрерывные производные первого порядка, причем поверхность $u = u(x, y)$ содержит некоторый участок линии l в окрестности M. Из указанных в предыдущем параграфе геометрических соображений непосредственно следует, что $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению (2). Мы это проверим ниже и аналитически.

Отметим, что мы построили решение $u(x, y)$ лишь в некоторой окрестности любой заданной точки M линии l, или, как говорят, получили локальное решение задачи. При некоторых условиях, налагаемых на a, b, c и линию l, можно убедиться в возможности построения интегральной поверхности в некоторой окрестности всей линии l, т. е. при всех x и y, достаточно близких к линии $x = x_0(t)$, $y = y_0(t)$ на плоскости (x, y). При этом считается, что производные $x_0'(t)$ и $y_0'(t)$ одновременно в нуль не обращаются. Точная формулировка подобных результатов будет указана в следующем параграфе.

Вопрос о существовании решения уравнения в некоторой наперед предписанной области плоскости (x, y) представляет большие трудности. Можно построить область B плоскости (x, y) и в ней функцию $b(x, y)$, имеющую производные всех порядков, так, что для уравнения

$$u_x + b(x, y)\, u_y = 0$$

только $u = \text{const}$ будет решением, имеющим непрерывные производные первого порядка и существующим во всей области B.

Проверим теперь, что построенная функция $u(x, y)$ действительно является решением уравнения (2). Пользуясь правилом дифференцирования сложных функций и уравнениями (4), можем написать:

$$\frac{du}{ds} = u_x a + u_y b.$$

Это уравнение имеет место для всех s и t, находящихся в окрестности $s = 0$, и значения t, соответствующего некоторой точке $M(x_0, y_0, z_0)$ линии l. Но $\frac{du}{ds} = c$, и, следовательно, $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению (2) при всех (x, y), лежащих в окрестности (x_0, y_0).

Для доказательства единственности достаточно убедиться в том, что всякая гладкая интегральная поверхность $u = u(x, y)$, проходящая через l, может быть образована характеристиками. Образуем систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{ds} = a[x, y, u(x, y)]; \quad \frac{dy}{ds} = b[x, y, u(x, y)]. \tag{11}$$

В силу сделанных предположений правые части таковы, что имеет место теорема существования и единственности для всех (x, y) в окрестности (x_0, y_0). Из того факта, что интегральная поверхность имеет явное уравнение $u = u(x, y)$ и проходит через участок линии l в окрестности точки $M(x_0, y_0, z_0)$, следует, что координаты (x, y) различных точек линии l в окрестности M различны (мы считаем, что l не пересекает себя). Беря эти координаты за начальные данные при интегрировании системы (11) и подставляя полученные решения в функцию $u = u(x, y)$, будем иметь семейство линий на нашей интегральной поверхности. Вдоль этих линий, в силу (11), удовлетворяются первые два из уравнений (4). Нетрудно проверить, что удовлетворяется и третье уравнение. Действительно, пользуясь (11), получаем

$$\frac{du}{ds} = u_x a + u_y b.$$

Но $u = u(x, y)$ есть интегральная поверхность, т. е. $u_x a + u_y b = c$, откуда $\frac{du}{ds} = c$. Таким образом, упомянутые выше линии, покрывающие поверхность $u = u(x, y)$, суть действительно характеристики. Итак, *при условии* (10) *задача Коши имеет единственное решение*. Мы еще вернемся к вопросу о единственности при рассмотрении нелинейных уравнений первого порядка.

Положим теперь, что вдоль линии l, т. е. при $s = 0$, мы имеем

$$\Delta = x_s y_t - x_t y_s = 0. \tag{12}$$

Покажем, что если в этом случае существует интегральная поверхность $u = u(x, y)$ с непрерывными производными первого порядка, проходящая через l, то эта линия должна быть характеристикой. Здесь, как и выше, когда мы говорим, что поверхность $u = u(x, y)$ проходит через линию l, то понимаем это локально, т. е. рассматриваем лишь некоторый участок l.

Будем считать, что a и b отличны от нуля вдоль l. Принимая во внимание первые два из уравнений (4), мы можем написать условие (12) в виде

$$\frac{x_t}{a} = \frac{y_t}{b} = k \qquad (s = 0), \tag{13}$$

где буквою k мы обозначили общую величину написанных отношений. Пусть $u = u(x, y)$ — интегральная поверхность, проходящая через l. Подставляя в $u(x, y)$ выражения $x = x_0(t)$ и $y = y_0(t)$, дифференцируя по t и пользуясь (13), мы получим $\frac{du}{dt} = u_x ka + u_y kb$. Принимая во внимание, что $u = u(x, y)$ есть решение уравнения (2), и пользуясь этим уравнением, можем написать далее $\frac{du}{dt} = kc$, что и приведет нас к системе

$$\frac{x_t}{a} = \frac{y_t}{b} = \frac{u_t}{c} \qquad (s = 0),$$

из которой следует, что линия l есть характеристика. Итак, *если $\Delta = 0$, то для того, чтобы существовала интегральная поверхность, проходящая через линию l, необходимо, чтобы эта линия была характеристикой.* При этом, как мы видели в предыдущем параграфе, через линию l проходит бесчисленное множество интегральных поверхностей. При проведенном выше доказательстве для нас, конечно, было существенным, чтобы интегральная поверхность $u = u(x, y)$, проходящая через l, имела в точках этой линии непрерывные производные; может случиться, как это мы увидим на примере, что l не есть характеристика, вдоль нее $\Delta = 0$, и все же через l проходит интегральная поверхность, но такая, что частные производные от $u(x, y)$ перестают быть непрерывными в точках l, т. е., иными словами, линия l является особой линией интегральной поверхности. Если l — не характеристика, но вдоль нее $\Delta = 0$, то это значит, что вдоль линии l

$$\frac{x_t}{a} = \frac{y_t}{b} \neq \frac{u_t}{c}.$$

Отметим одну особенность системы (4). Вспомогательный параметр s не входит в правую часть уравнений, и одна из произвольных постоянных входит как добавочное слагаемое к s. Эта произвольная постоянная не играет существенной роли и сводится к произвольности выбора начального значения s. Таким образом, мы имеем при интегрировании этой системы две существенные произвольные постоянные. Этот факт непосредственно очевиден, если записать систему (4) в виде (3).

Напомним, что квазилинейное неоднородное уравнение (2) может быть приведено к чисто линейному однородному уравнению, если искать решение в неявной форме [II, 21].

$$\varphi(x, y, u) = C, \tag{14}$$

где C — некоторая произвольная постоянная. Согласно правилу дифференцирования неявных функций, мы имеем

$$u_x = -\frac{\varphi_x}{\varphi_u}; \quad u_y = -\frac{\varphi_y}{\varphi_u},$$

и уравнение (2) порождает линейное однородное уравнение для функции φ:

$$a(x, y, u)\varphi_x + b(x, y, u)\varphi_y + c(x, y, u)\varphi_u = 0. \tag{15}$$

Соответствующей ему системой обыкновенных дифференциальных уравнений является система (3). Если

$$\varphi_1(x, y, u) = C_1; \quad \varphi_2(x, y, u) = C_2$$

— два независимых интеграла этой системы, то $\varphi = F(\varphi_1, \varphi_2)$, где F — произвольная функция своих аргументов, будет решением уравнения (15). Мы видели, каким образом из условий задачи Коши можно найти явный вид этой функции [II; 24].

Изложенные рассуждения дают повод к следующему вопросу. Мы искали решение уравнения (2) как решение, входящее в целый класс решений, имеющих неявное уравнение (14), содержащее произвольную постоянную C. Нетрудно показать, что мы таким путем не потеряем ни одного решения нашего уравнения. Для этого надо принять во внимание то, что, ввиду произвольности начальных данных в задаче Коши, мы можем всякое решение нашего уравнения считать входящим в целое семейство решений, содержащее произвольную постоянную. Решая относительно этой произвольной постоянной, мы и убедимся в том, что всякое решение может быть получено из формулы вида (14). Мы могли бы потерять лишь такие решения (особые решения), которые не могут быть получены указанным выше процессом путем решения задачи Коши Таких решений не может быть, если функции a, b и c удовлетворяют некоторым общим условиям. На подробностях доказательства мы не останавливаемся.

3. Случай любого числа переменных. Рассмотрим квазилинейное уравнение с любым числом независимых переменных:

$$a_1(x_1, \ldots, x_n, u)p_1 + \ldots + a_n(x_1, \ldots, x_n, u)p_n = c(x_1, \ldots, x_n, u). \tag{16}$$

В дальнейшем мы будем всегда считать, что коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$ при рассматриваемых значениях переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n, u$ одновременно в нуль не обращаются, т. е. $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 > 0$. При исследовании уравнения (16) мы будем пользоваться геометрическими терминами по аналогии с трехмерным пространством. Детальных формулировок и доказательств мы проводить не будем. В данном случае мы имеем $(n+1)$-мерное пространство с координатами $(x_1, \ldots, x_n, u)$. Назовем m-мерным многообразием в таком пространстве совокупность точек, координаты которых выражаются через m произвольных параметров:

$$x_k = x_k(t_1, \ldots, t_m); \quad u = u(t_1, \ldots, t_m) \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

причем мы считаем, что какие-нибудь m из написанных уравнений разрешимы относительно $t_1, \ldots, t_m$. При $m = n$ мы имеем n-мерное многообразие, которое мы будем называть поверхностью. Если за параметры принять $x_1, \ldots, x_n$, то будем иметь явное уравнение поверхности: $u = u(x_1, \ldots, x_n)$. Именно такой вид должно иметь уравнение интегральной поверхности уравнения (16). При $m = 1$ соответствующее одномерное многообразие называется линией $(n+1)$-мерного пространства.

Определим характеристики уравнения (16) следующей системой:

$$\frac{dx_k}{ds} = a_k(x_1, \ldots, x_n, u); \quad \frac{du}{ds} = c(x_1, \ldots, x_n, u), \qquad (17)$$

где s — вспомогательный параметр. Всякое решение этой системы порождает некоторую линию $(n+1)$-мерного пространства, так как решение, в котором все x_k и u — постоянны, не может существовать в силу нашего предположения, что $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 > 0$. Координаты этой линии будут выражаться через параметр s. Чтобы построить из этих линий поверхность, нам надо взять семейство таких линий, зависящее от $(n-1)$ произвольных параметров. В общем получится совокупность точек, зависящая от n параметров. *Если некоторая гладкая поверхность $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ образована семейством характеристик, зависящим от $(n-1)$ параметров, то это есть интегральная поверхность уравнения* (16). Действительно, дифференцируя $u(x_1, \ldots, x_n)$ по s и пользуясь уравнениями (17), получим

$$\frac{du}{ds} = \sum_{k=1}^{n} u_{x_k} a_k.$$

Но, в силу последнего из уравнений, $\frac{du}{ds} = c$, откуда и вытекает уравнение (16). Наоборот, *всякую гладкую интегральную по-*

верхность $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ *можно представить себе образованной семейством характеристик, зависящим от* $(n-1)$ *параметров*. Действительно, имея интегральную поверхность $u = u(x_1, \ldots, x_n)$, мы можем определить x_k из системы уравнений:

$$\frac{dx_k}{ds} = a_k[x_1, \ldots, x_n, u(x_1, \ldots, x_n)] \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{18}$$

что даст нам $(n-1)$ произвольных постоянных. Одна произвольная постоянная, входящая аддитивно в s, не будет играть существенной роли. Подставляя решение системы (18) в правую часть $u = u(x_1, \ldots, x_n)$, дифференцируя по s и пользуясь уравнениями (16) и (18), мы убедимся в том, что u будет удовлетворять последнему из уравнений (17).

Мы считаем, как и в [2], что $u(x_1, \ldots, x_n)$ и правые части уравнений (17) имеют непрерывные производные первого порядка.

Задача Коши для уравнения (16) состоит в определении интегральной поверхности, содержащей заданное $(n-1)$-мерное многообразие:

$$x_k = x_k(t_1, \ldots, t_{n-1}); \quad u = u(t_1, \ldots, t_{n-1}) \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{19}$$

причем правые части этих равенств непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого порядка внутри некоторой области D $(n-1)$-мерного пространства $(t_1, \ldots, t_{n-1})$.

Считается, что ранг матрицы, составленной из производных $\frac{\partial x_k}{\partial t_l}$, равен $(n-1)$ и что различным системам значений $(t_1, \ldots, t_{n-1})$ отвечают различные точки $(x_1, \ldots, x_n)$. Далее, как упомянуто выше, предполагается, что коэффициенты $a_k(x_1, \ldots, x_n, u)$ и $c(x_1, \ldots, x_n, u)$ имеют непрерывные производные первого порядка в некоторой области пространства, содержащей внутри себя многообразие (19).

В частном случае это условие в задаче Коши может состоять в задании искомой функции u при заданном значении одной из независимых переменных как функции от остальных переменных:

$$u\big|_{x_1 = x_1^{(0)}} = \varphi(x_2, \ldots, x_n). \tag{20}$$

Решение задачи проводится совершенно аналогично случаю двух независимых переменных. Выражения (19) принимаем за начальные условия при интегрировании системы (17). Таким образом, мы получаем решение вида

$$x_k = x_k(s, t_1, \ldots, t_{n-1}); \quad u = u(s, t_1, \ldots, t_{n-1}). \tag{21}$$

Существенную роль в дальнейшем играет определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial s}, & \frac{\partial x_2}{\partial s}, & \ldots, & \frac{\partial x_n}{\partial s} \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_1}, & \frac{\partial x_2}{\partial t_1}, & \ldots, & \frac{\partial x_n}{\partial t_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_{n-1}}, & \frac{\partial x_2}{\partial t_{n-1}}, & \ldots, & \frac{\partial x_n}{\partial t_{n-1}} \end{vmatrix}, \tag{22}$$

который мы можем, принимая во внимание уравнения (17), переписать в виде

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1, & a_2, & \ldots, & a_n \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_1}, & \frac{\partial x_2}{\partial t_1}, & \ldots, & \frac{\partial x_n}{\partial t_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_{n-1}}, & \frac{\partial x_2}{\partial t_{n-1}}, & \ldots, & \frac{\partial x_n}{\partial t_{n-1}} \end{vmatrix}. \tag{23}$$

Если этот определитель на многообразии (19), т. е. при $s = 0$, отличен от нуля, то первые n из уравнений (21) можно решить относительно $s, t_1, \ldots, t_{n-1}$ и, подставляя это решение в последнее из уравнений (21), мы получаем интегральную поверхность уравнения (16). Никаких других решений задача Коши в этом случае иметь не может. Все это доказывается совершенно так же, как и в случае двух независимых переменных. Рассмотрим тот случай, когда начальное условие имеет вид (20); роль параметров $t_1, \ldots, t_{n-1}$ играют $x_2, \ldots, x_n$. Возьмем линейное уравнение и предположим, что определитель (23) на нашем многообразии отличен от нуля. Принимая во внимание, что $\frac{\partial x_p}{\partial x_q} = 0$ при $p \neq q$ и $\frac{\partial x_p}{\partial x_p} = 1$, получим $\Delta = a_1 \neq 0$. Деля уравнение на коэффициент a_1, придем к уравнению вида

$$p_1 + a_2(x_1, \ldots, x_n)\, p_2 + \ldots + a_n(x_1, \ldots, x_n)\, p_n = \\ = b(x_1, \ldots, x_n)\, u + c(x_1, \ldots, x_n). \tag{24}$$

Предположим, что a_k, b и c непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого порядка по $x_2, \ldots, x_n$ при $\alpha \leqslant x_1 \leqslant \beta$ и произвольных вещественных $x_2, \ldots, x_n$. Положим, кроме того, что при этих условиях указанные функции ограничены: $|a_k| \leqslant M$; $|b| \leqslant M$; $|c| \leqslant M$.

Выбирая x_1 за независимую переменную, запишем систему (17) в виде

$$\frac{dx_k}{dx_1} = a_k(x_1, \ldots, x_n) \qquad (k = 2, \ldots, n), \tag{25}$$

$$\frac{du}{dx_1} = b(x_1, \ldots, x_n)\, u + c(x_1, \ldots, x_n). \tag{26}$$

Пусть $x_1^{(0)}$ — начальное значение x_1 из промежутка $[\alpha, \beta]$. Проинтегрируем систему (25) при некоторых начальных условиях:

$$x_k\Big|_{x_1=x_1^{(0)}} = x_k^{(0)} \qquad (k=2, \ldots, n).$$

Из $|a_k| \leqslant M$ следует, что решения x_k системы (25) имеют ограниченные производные $\left|\frac{dx_k}{dx_1}\right| \leqslant M$, и тем самым сами величины x_k остаются ограниченными по абсолютной величине: $\left|x_k - x_k^{(0)}\right| \leqslant M(\beta - \alpha)$. Применяя метод последовательных приближений [II; 51], мы легко убедимся в том, что упомянутые решения

$$x_k = \varphi_k\left(x_1, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right), \qquad (k=2, \ldots, n) \tag{27}$$

существуют во всем промежутке $\alpha \leqslant x_1 \leqslant \beta$, при произвольных начальных данных $x_k^{(0)}$ $(k=2, \ldots, n)$. Мы можем сказать, что интегральная кривая, проходящая через точку $A_0\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots \right.$ $\left.\ldots, x_n^{(0)}\right)$, приходит в точку $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, координаты которой определяются формулами (27). Принимая во внимание теорему единственности, можем утверждать, что если взять точку A за начальную, то соответствующая интегральная кривая пройдет через точку A_0. Отсюда следует, что уравнения (27) при произвольных x_k разрешимы относительно $x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$, причем решение имеет вид

$$x_k^{(0)} = \varphi_k\left(x_1^{(0)}, x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \qquad (k=2, \ldots, n). \tag{27$_1$}$$

Положим, что мы хотим решить задачу Коши при начальном данном (20). Мы должны, согласно сказанному выше, проинтегрировать уравнения (25) и (26) при начальных данных

$$x_k\Big|_{x_1=x_1^{(0)}} = x_k^{(0)} \qquad (k=2, \ldots, n);$$

$$u\Big|_{x_1=x_1^{(0)}} = \varphi\left(x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right),$$

где произвольные величины $x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ играют роль $t_1, \ldots$ $\ldots, t_{n-1}$. Подставляя (27) в уравнение (26), интегрируем последнее уравнение:

$$u = e^{\omega}\left[\varphi\left(x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right) + \int\limits_{x_1^{(0)}}^{x_1} c(x_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)\, e^{-\omega}\, dx_1\right], \tag{28}$$

где

$$\omega = \int_{x_1^{(0)}}^{x_1} b(x_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)\, dx_1$$

и в аргументах b и c стоят $\varphi_k(x_1, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$. Подставляя в правую часть (28) выражение (27_1), получим искомое решение $u(x_1, \ldots, x_n)$ задачи Коши. Оно будет существовать во всем промежутке $\alpha \leqslant x_1 \leqslant \beta$ и при любых $x_2, \ldots, x_n$. Это связано с линейностью уравнения и с теми предположениями, которые мы приняли относительно a_k, b и c.

Для квазилинейного уравнения (16) можно указать область существования решения при некоторых предположениях относительно a_k и c. Приведем соответствующий результат.

Пусть $a_1 = 1$, a_k и c непрерывны, ограничены и имеют непрерывные производные при условиях

$$|x_1 - x_1^{(0)}| \leqslant a, \tag{29}$$

$$b_k \leqslant x_k \leqslant c_k \quad (k = 2, \ldots, n) \tag{30}$$

и любых вещественных u, причем эти производные по абсолютной величине не превосходят некоторой постоянной A. Пусть $\varphi(x_2, \ldots, x_n)$ непрерывна и ограничена при условиях (30) и имеет непрерывные производные первого порядка, которые по абсолютной величине не превышают некоторой постоянной B При этом уравнение (16) ($a_1 \equiv 1$) при условии (20) имеет решение в области, определяемой неравенствами

$$|x_1 - x_1^{(0)}| < a; \quad |x - x_1^{(0)}| < \frac{1}{nA} \lg\left[1 + \frac{n}{(n-1)(B+1)}\right]$$

и неравенствами (30) [Камке (Kamke). Differentialgleichungen reeller Funktionen, Leipzig, 1952].

Рассмотрим теперь тот случай, когда $\Delta = 0$ на многообразии (19). Будем считать, что один из миноров определителя Δ, соответствующих элементам первой строки, отличен от нуля. Равенство $\Delta = 0$ показывает, что при этом элементы первой строки представляют собою линейную комбинацию соответствующих элементов остальных строк, т е. имеет место соотношение

$$a_k = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \frac{\partial x_k}{\partial t_j}, \tag{31}$$

где λ_j — определенные функции параметров $(t_1, \ldots, t_{n-1})$. Если на многообразии (19) и функция c представима формулой

$$c = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \frac{\partial u}{\partial t_j}, \tag{32}$$

то в этом случае многообразие (19) называется *характеристическим многообразием* для нашего уравнения. Можно показать, что всякое характеристическое многообразие (19) уравнения (16) может быть образовано характеристиками этого уравнения и что, если для многообразия (19) $\Delta = 0$ и через это многообразие проходит гладкая интегральная поверхность $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то это многообразие должно быть характеристическим.

Через характеристическое многообразие может проходить бесчисленное множество интегральных поверхностей.

Совершенно так же, как и в случае двух независимых переменных, можно привести квазилинейное неоднородное уравнение (16) к чисто линейному однородному уравнению, если искать решение уравнения (16) в неявной форме:

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n, u) = C,$$

где C — произвольная постоянная. Для функции φ получаем уравнение

$$a_1\varphi_{x_1} + \ldots + a_n\varphi_{x_n} + c\varphi_u = 0.$$

Соответствующая система обыкновенных дифференциальных уравнений будет

$$\frac{dx_1}{a_1} = \ldots = \frac{dx_n}{a_n} = \frac{du}{c}. \tag{33}$$

Если

$$\varphi_1(x_1, \ldots, x_n, u) = C_1; \ \ldots; \ \varphi_n(x_1, \ldots, x_n, u) = C_n \tag{34}$$

— ее независимые интегралы, то уравнение

$$F\left(\varphi_1, \ldots, \varphi_n\right) = 0,$$

где F — произвольная функция своих аргументов, дает решение уравнения (16) в неявной форме. В правой части последнего равенства мы пишем нуль вместо произвольной постоянной, поскольку F является произвольной функцией своих аргументов. Для построения интегральной поверхности, содержащей данное многообразие (19), мы подставим выражения (19) в левые части интегралов (34). Исключая из полученных таким образом n уравнений $(n-1)$ параметров $t_1, \ldots, t_{n-1}$, мы будем иметь соотношение между произвольными постоянными:

$$F(C_1, \ldots, C_n) = 0.$$

Левая часть этого соотношения и определит нам вид функции F. Подставляя в левую часть последнего уравнения вместо C_k функции $\varphi_k(x_1, \ldots, x_n, u)$, мы и получим уравнение искомой интегральной поверхности.

4. Примеры. 1. Рассмотрим уравнение

$$3(u-y)^2 p - q = 0. \tag{35}$$

Система (4) имеет вид

$$\frac{dx}{ds} = 3(u-y)^2, \quad \frac{dy}{ds} = -1; \quad \frac{du}{ds} = 0, \tag{36}$$

и ее решение, выраженное через начальные значения переменных (x, y, u), будет

$$x = (u_0 - y_0 + s)^3 + x_0 - (u_0 - y_0)^3; \quad y = -s + y_0; \quad u = u_0. \tag{37}$$

Положим, что уравнения (7) линии l, через которую должна проходить искомая интегральная поверхность, имеют вид

$$x = 0, \quad y = t; \quad u = t. \tag{38}$$

Подставляя в (37) $x_0 = 0$, $y_0 = u_0 = t$, получим

$$x = s^3; \quad y = -s + t; \quad u = t;$$

определитель

$$\Delta = x_s y_t - x_t y_s = 3s^2$$

обращается в нуль при $s=0$, т. е. вдоль l. Линия (38) не является характеристикой уравнения (35), так как, в силу последнего из уравнений (36), вдоль характеристики u должна быть постоянной. Имеется все же интегральная поверхность уравнения (35), проходящая через линию (38), а именно:

$$u=\sqrt[3]{x}+y.$$

В данном случае $p=u_x=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$, и эта частная производная обращается в бесконечность вдоль линии (38).

2. Рассмотрим уравнение для функции u трех независимых переменных:

$$p_1+p_2+p_3=u.$$

Составляя систему (17) и интегрируя ее, получим следующее решение, выраженное через начальные значения x_k^0 и u_0 переменных:

$$x_k=s+x_k^0;\quad u=u_0e^s\quad (k=1,\ 2,\ 3). \tag{39}$$

Пусть требуется найти интегральную поверхность, содержащую многообразие

$$x_1=t_1+t_2;\quad x_2=t_1-t_2;\quad x_3=1;\quad u=t_1t_2.$$

Подставляя эти выражения вместо начальных значений в уравнения (39), получим

$$x_1=s+t_1+t_2;\quad x_2=s+t_1-t_2;\quad x_3=s+1;\quad u=t_1t_2e^s. \tag{40}$$

Первые три уравнения разрешимы относительно s, t_1 и t_2 (случай $\Delta\neq 0$):

$$s=x_3-1;\qquad t_1=\frac{1}{2}(x_1+x_2-2x_3+2);\quad t_2=\frac{1}{2}(x_1-x_2);$$

подставляя эти выражения в последнее из уравнений (40), получим уравнение искомой интегральной поверхности:

$$u=\frac{1}{4}(x_1+x_2-2x_3+2)(x_1-x_2)\,e^{x_3-1}.$$

3. Будем искать решение уравнения

$$u_x-u_y=f(x+y),$$

непрерывное с производными первого порядка и удовлетворяющее условию $u=0$ при $x=0$. Мы можем ввести замену переменных:

$$x=x_1;\qquad x+y=y_1,$$

пользуясь которой без труда получим следующий ответ:

$$u(x,\ y)=xf(x+y).$$

Эта формула действительно дает решение поставленной задачи, если функция $f(t)$ имеет непрерывную производную. Если $f(t)$ не обладает непрерывной производной, то поставленная задача не имеет гладких решений. Известно, что существуют непрерывные функции $f(t)$, не имеющие нигде производной. Приведенный пример показывает существенность предположения о существовании и непрерывности производной у c в уравнении (2). [Перрон (Perron). — Math. Z., 1928, 27, № 4.]

5. Вспомогательная теорема. В настоящем параграфе приведем доказательство теоремы, которую мы формулировали в [2]. Докажем сначала одно вспомогательное предложение. Положим, что правые части системы уравнений

$$\frac{dy_k}{dx}=f_k(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_n,\ \lambda)\quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)\tag{41}$$

содержат параметр λ. Пусть, далее, эти правые части — непрерывные функции, имеющие непрерывные производные по всем y_k при

$$|x-a|\leqslant A;\ \ |y_k-b_k|\leqslant B\quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n),\tag{42}$$

где a и b_k — заданные числа, и при изменении λ в некотором промежутке $\alpha\leqslant\lambda\leqslant\beta$.

Пусть M — наибольшая величина абсолютных значений

$$|f_k(x,\ y,\ \ldots,\ y_n,\ \lambda)|\quad (k=1,\ \ldots,\ n)$$

при указанных значениях переменных. При этом система (41) имеет единственное решение, удовлетворяющее начальным данным:

$$y_k|_{x=a}=b_k\quad (k=1,\ \ldots,\ n).\tag{43}$$

Это решение существует в промежутке $|x-a|\leqslant h$, где h — наименьшее из двух чисел A и B/M, и оно может быть получено в этом промежутке по методу последовательных приближений [II; 51]. Последовательные приближения, вычисляемые по формулам, указанным в [II; 51], будут непрерывными функциями x и λ, и, в силу равномерной сходимости последовательных приближений относительно x и λ [II; 51], мы можем утверждать, что и функции, дающие решение системы (41), удовлетворяющее начальным условиям (43), будут непрерывными функциями аргументов x и λ. Мы могли бы считать, конечно, что правые части уравнений (41) содержат не один, а несколько параметров.

Мы можем, таким образом, считать доказанной следующую лемму:

Лемма. *Если правые части уравнений* (41) *содержат некоторые параметры* $\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_s$ *и удовлетворяют указанным выше условиям, то решение системы, удовлетворяющее начальным данным* (43), *где* a *и* b_k — *заданные числа, состоит из непрерывных относительно* x *и* λ_l *функций*: $y_k=\psi_k(x,\ \lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_s)$.

Замечание. Пусть x_0 и y_k^0 — значения, лежащие внутри области (42). Решения, удовлетворяющие начальным данным $y_k(x_0)=y_k^0$, будут функциями этих начальных данных:

$$y_k=\psi_k\left(x,\ x_0,\ y_1^0,\ \ldots,\ y_n^0\right),\tag{44}$$

причем эти функции определены в некоторой окрестности $x=x_0$. Если ввести новую независимую переменную $\xi=x-x_0$ и новые функции $\eta_k=y_k-y_k^0$, то система перепишется в виде

$$\frac{d\eta_k}{dx}=f_k\left(\xi+x_0,\ \eta_1+y_1^0,\ \eta_2+y_2^0,\ \ldots,\ \eta_n+y_n^0,\ \lambda\right),$$

т. е. начальные значения войдут в качестве параметров в правые части, а в начальные условия $\eta_k(0)=0$ будут входить лишь определенные числа. В силу указанной выше леммы, мы можем утверждать, что функции (44) суть непрерывные функции своих аргументов.

Перейдем теперь к доказательству теоремы, сформулированной в [2], причем для простоты изложения рассмотрим сначала случай одного уравнения:

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y). \tag{45}$$

Положим, что правая часть непрерывна и имеет непрерывную производную по y при

$$|x-a|\leqslant A; \quad |y-b|\leqslant B. \tag{46}$$

Рассмотрим решение уравнения (45), удовлетворяющее начальному условию $y(x_0)=y_0$, где x_0 и y_0 находятся внутри области (46). Это решение будет функцией от x_0 и y_0:

$$y=\varphi(x, x_0, y_0), \tag{47}$$

и будет определено при x, достаточно близких к x_0. Изменим несколько начальное значение функции и рассмотрим новое решение:

$$y^+=\varphi(x, x_0, y_0+\Delta y_0). \tag{48}$$

Если Δy_0 достаточно мало по абсолютной величине, то решения (47) и (48) существуют в некоторой определенной окрестности значения $x=x_0$.

Из уравнения (45) следует, что

$$\frac{d(y^+-y)}{dx}=f(x, y^+)-f(x, y),$$

и это уравнение мы можем переписать в виде

$$\frac{d(y^+-y)}{dx}=a(x, \Delta y_0)(y^+-y), \tag{49}$$

где

$$a(x, \Delta y_0)=\frac{f(x, y^+)-f(x, y)}{y^+-y}. \tag{50}$$

Это отношение мы считаем известной функцией от x и Δy_0, поскольку мы считаем известными решения (47) и (48). Нетрудно видеть, что функция $a(x, \Delta y_0)$ является непрерывной функцией своих аргументов. Это очевидно для тех значений x и Δy_0, при которых $y^+-y\neq 0$. Если же при $x\to x'$ и $\Delta y_0\to \alpha'$ функции y^+ и y имеют общий предел y', то из условия существования непрерывной производной непосредственно следует, что

$$\frac{f(x, y^+)-f(x, y)}{y^+-y}=f_y[x, y+\theta(y^+-y)]\to f_y(x, y'),$$

т. е. и в этом случае функция (50) непрерывна. Деля обе части (49) на Δy_0, получим дифференциальное уравнение для отношения $(y^+-y):\Delta y_0$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y^+-y}{\Delta y_0}\right)=a(x, \Delta y_0)\cdot\frac{y^+-y}{\Delta y_0}. \tag{51}$$

При $x=x_0$ мы имеем $y^+|_{x=x_0}=y_0+\Delta y_0$ и $y|_{x=x_0}=y_0$, т. е.

$$\left.\frac{y^+-y}{\Delta y_0}\right|_{x=x_0}=1. \tag{52}$$

Итак, отношение $(y^+-y):\Delta y_0$ есть решение дифференциального уравнения

$$\frac{du}{dx}=a(x, \Delta y_0)u, \tag{53}$$

удовлетворяющее начальному условию:

$$u|_{x=x_0}=1. \tag{54}$$

Поскольку правая часть уравнения (53) есть непрерывная функция параметра Δy_0 при всех Δy_0, достаточно близких к нулю, то и решение u, удовлетворяющее условию (54), есть непрерывная функция Δy_0, и, в частности, существует предел упомянутого отношения при $\Delta y_0 \to 0$, т. е. функция (47) имеет частную производную $\varphi_{y_0}(x, x_0, y_0)$ по y_0. Эта частная производная должна быть решением уравнения (53) при $\Delta y_0 = 0$. Но, в силу (50), $a(x, 0) = f_y[x, \varphi(x, x_0, y_0)]$, и, следовательно, мы можем утверждать, что частная производная $\varphi_{y_0}(x, x_0, y_0)$ есть решение уравнения

$$\frac{du}{dx} = f_y[x, \varphi(x, x_0, y_0)]\, u, \tag{55}$$

удовлетворяющее условию (54). Поскольку правая часть уравнения (55) есть непрерывная функция параметров x_0 и y_0, мы можем, пользуясь еще раз леммой, утверждать, что и частная производная $\varphi_{y_0}(x, x_0, y_0)$ есть непрерывная функция своих аргументов, и тем самым теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Придавая x_0 некоторое приращение Δx_0 и повторяя предыдущие рассуждения, мы могли бы доказать тот факт, что функция (47) имеет непрерывную частную производную $\varphi_{x_0}(x, x_0, y_0)$. Эта частная производная также должна удовлетворять уравнению (55), но уже не начальному условию (54), а условию

$$u\,|_{x=x_0} = -f(x_0, y_0).$$

Это условие получится непосредственно, если записать уравнение (45) с начальным условием $y(x_0) = y_0$ в виде интегрального уравнения **[II; 51]**

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)\, dx.$$

Дифференцируя обе части по x_0, мы и получим вышеуказанное начальное условие для $u = \varphi_{x_0}(x, x_0, y_0)$.

З а м е ч а н и е 2. Предыдущее доказательство сохраняет свою силу и для системы уравнений (5). Мы будем иметь решение этой системы:

$$y_k = \varphi_k(x, x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0) \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{56}$$

Придавая y_i^0 приращение Δy_i^0, получим другое решение:

$$y_k^+ = \varphi_k(x, x_0, y_1^0, \ldots, y_{i-1}^0, y_i^0 + \Delta y_i^0, y_{i+1}^0, \ldots, y_n^0).$$

Написав систему (5) для y_k и y_k^+ и вычитая почленно полученные уравнения, разность, получаемую в правой части, перепишем в виде

$$\begin{aligned} f_k(x, y_1^+, \ldots, y_n^+) - f_k(x, y_1, \ldots, y_n) = \\ = [f_k(x, y_1^+, y_2^+, y_3^+, \ldots, y_n^+) - f_k(x, y_1, y_2^+, y_3^+, \ldots, y_n^+)] + \\ + [f_k(x, y_1, y_2^+, y_3^+, \ldots, y_n^+) - f_k(x, y_1, y_2, y_3^+, \ldots, y_n^+)] + \ldots \\ \ldots + [f_k(x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n^+) - f_k(x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n)]. \end{aligned}$$

Для отношений $u_k = (y_k^+ - y_k) : \Delta y_i^0$ получаем систему линейных уравнений

$$\frac{du_k}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}(x, \Delta y_i^0)\, u_j,$$

где

$$a_{kj}=\frac{f_k\left(x, y_1, \ldots, y_{j-1}, y_j^+, \ldots, y_n^+\right)-f_k\left(x, y_1, \ldots, y_{j-1}, y_j, y_{j+1}^+, \ldots, y_n^+\right)}{y_j^+-y_j},$$

и начальные условия

$$u_k\big|_{x=x_0}=0 \quad (k \neq i); \qquad u_i\big|_{x=x_0}=1. \tag{57}$$

В остальном доказательство получается таким же, и мы убеждаемся в существовании у функций (56) непрерывных частных производных по y_i^0. Вместо уравнения (55) мы получаем для этих частных производных систему уравнений

$$\frac{du_k}{dx}=\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_k(x, y_1, \ldots, y_n)}{\partial y_j} u_j, \tag{58}$$

причем в коэффициенты этой линейной системы вместо y_k надо подставить функции (56). Начальные условия будут по-прежнему определяться формулами (57). Заметим, что систему (58) можно непосредственно получить, подставляя функции (56) в уравнения (5) и дифференцируя обе части по y_i^0. Но без предварительного доказательства мы не можем утверждать существование частной производной по $y_i^{(0)}$ и не можем, строго говоря, менять порядок дифференцирования по x и $y_i^{(0)}$ в левой части. Отметим еще, что в случае одного уравнения линейное однородное уравнение (55) интегрируется в конечном виде.

Замечание 3. Если правые части f_k уравнений (5) имеют, при условии (6), непрерывные частные производные по y_s до некоторого порядка m, то и функции $\varphi_k\left(x, x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}\right)$ имеют непрерывные частные производные по $y_s^{(0)}$ до порядка m. Если f_k имеют непрерывную частную производную по x, то из самого уравнения (5) следует, что φ_k будет иметь непрерывные производные до второго порядка по x.

6. Нелинейные уравнения первого порядка. Мы переходим к рассмотрению уравнений с частными производными первого порядка в общем случае. Как и для рассмотренных выше линейных уравнений, мы сначала будем предполагать, что имеются лишь две независимые переменные. Уравнение с частными производными первого порядка для функции от двух независимых переменных имеет вид

$$F(x, y, u, p, q)=0. \tag{59}$$

Выясним прежде всего геометрический смысл написанного уравнения. В любой фиксированной точке (x, y, u) уравнение (59) представляет собою соотношение между p и q, т. е. соотношение между направляющими косинусами нормали к поверхности. Удовлетворяющие этому соотношению нормали образуют некоторую коническую поверхность с вершиной (x, y, u). Плоскости, проходящие через точку (x, y, u) и перпендикулярные к образующим этого конуса, представляют собою возможные положения касательной плоскости в фиксированной точке (x, y, u) к искомым интегральным поверхностям. Это семейство плоскостей, так же как и семейство образующих конуса нормалей, будет зависеть от одного параметра. Огибающая этого семейства плоскостей будет представлять собою новый конус, который мы назовем конусом T. Уравнение (59) эквивалентно, таким образом, заданию в каждой точке пространства конуса T, а искомая интегральная поверхность уравнения (59) должна обладать тем свойством, что в каждой ее точке касательная плоскость должна касаться конуса T, соответствующего этой точке.

Составим уравнения образующих конуса T в заданной точке (x, y, u). Пусть p и q — функции некоторого параметра a, удовлетворяющие уравнению (59) в фиксированной точке (x, y, u). Конус T является огибающей семейства плоскостей:

$$p(a)(X-x)+q(a)(Y-y)-(U-u)=0. \tag{60}$$

Дифференцируя по параметру a, получаем добавочное уравнение

$$\frac{dp}{da}(X-x)+\frac{dq}{da}(Y-y)=0. \tag{61}$$

Дифференцируя по a соотношение (59), мы получим

$$P\frac{dp}{da}+Q\frac{dq}{da}=0, \tag{62}$$

где

$$P=F_p; \quad Q=F_q. \tag{63}$$

В дальнейшем мы будем считать, что при рассматриваемых значениях переменных F_p и F_q одновременно в нуль не обращаются, т. е. $F_p^2+F_q^2>0$. Исключением будет лишь случай особых решений уравнения (59). Считая, что $\frac{dp}{da}$ и $\frac{dq}{da}$ не могут быть оба одновременно равны нулю, мы из однородных уравнений (61) и (62) получаем

$$\frac{X-x}{P}=\frac{Y-y}{Q},$$

и, наконец, уравнение (60) дает нам окончательно уравнение образующих конуса:

$$\frac{X-x}{P}=\frac{Y-y}{Q}=\frac{U-u}{pP+qQ}. \tag{64}$$

Чтобы получить различные образующие конуса T, мы должны в знаменатели подставлять различные значения p и q, удовлетворяющие соотношению (59) в фиксированной точке (x, y, u).

В случае линейного уравнения (2) мы имели в каждой точке одно определенное направление, и касательная плоскость к искомым интегральным поверхностям должна была содержать это направление В данном случае мы имеем в каждой точке вместо одного определенного направления конус T, и касательная плоскость к искомым интегральным поверхностям должна касаться этого конуса Мы не можем, таким образом, для нелинейного уравнения (59) строить непосредственно характеристические кривые так, как это мы делали для линейного уравнения (2), имея определенное поле направлений. В данном случае вместо поля направлений мы имеем поле конусов T. Но мы покажем сейчас, что, имея интегральную поверхность S $u=u(x, y)$ уравнения (59), мы можем покрыть ее линиями, которые вполне аналогичны характеристическим линиям линейного уравнения (2). Действительно, в каждой точке интегральной поверхности касательная плоскость должна касаться конуса T, соответствующего этой точке, и, тем самым, должна содержать одну из образующих этого конуса, вдоль которой она и касается конуса Эти образующие конусов T в различных точках поверхности создают на интегральной поверхности некоторое поле направлений и, тем самым, интегрируя соответствующее этому полю направлений дифференциальное уравнение первого порядка, мы покрываем нашу поверхность семейством кривых l', зависящим от одного параметра. Направляющие косинусы упомянутого поля направлений должны быть пропорциональны знаменателям уравнения (64), где p и q определяются непосредственно из уравнения рассматриваемой интегральной поверхности Таким образом, вдоль упомянутых линий, покрывающих заданную интегральную поверхность, должно выполняться соотношение

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{du}{pP+qQ}, \tag{65}$$

или

$$\frac{dx}{ds}=P; \quad \frac{dy}{ds}=Q; \quad \frac{du}{ds}=pP+qQ. \tag{66}$$

Чтобы найти упомянутые линии на заданной интегральной поверхности, достаточно проинтегрировать уравнение первого порядка

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}, \tag{67}$$

причем знаменатели написанных дробей содержат только переменные x и y, поскольку функция u и ее частные производные p и q на заданной поверхности являются известными функциями x и y. Интегрируя уравнение (67) и пользуясь уравнением поверхности $u=u(x, y)$, мы и получим упомянутые выше линии

l'. Правые части уравнений (66) имеют определенный смысл только при определенном выборе интегральной поверхности $u = u(x, y)$. Знание интегральной поверхности дает нам p и q как функции от (x, y). Мы дополним сейчас систему уравнений (66) еще двумя уравнениями, содержащими дифференциалы dp и dq так, чтобы получилась система дифференциальных уравнений, не зависящая от выбора интегральной поверхности уравнения (59). Обозначим через r, σ и t вторые производные функции u:

$$r = u_{xx}; \quad \sigma = u_{xy}; \quad t = u_{yy},$$

а через X, Y и U обозначим производные от левой части уравнения (59) по x, y и u:

$$X = F_x; \quad Y = F_y; \quad U = F_u.$$

Дифференцируя левую часть уравнения (55) по x и y полным образом, мы получим

$$X + Up + Pr + Q\sigma = 0; \quad Y + Uq + P\sigma + Qt = 0.$$

С другой стороны, мы имеем, очевидно,

$$\frac{dp}{ds} = r\frac{dx}{ds} + \sigma\frac{dy}{ds} = Pr + Q\sigma,$$

$$\frac{dq}{ds} = \sigma\frac{dx}{ds} + t\frac{dy}{ds} = P\sigma + Qt.$$

Из написанных уравнений непосредственно вытекает, что

$$\frac{dp}{ds} = -(X + Up); \quad \frac{dq}{ds} = -(Y + Uq),$$

и, следовательно, мы можем добавить к уравнениям (66) еще два последних уравнения, и, таким образом, получим следующую систему пяги дифференциальных уравнений с пятью функциями вспомогательного параметра s:

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{ds} = P; \quad \frac{dy}{ds} = Q; \quad \frac{du}{ds} = pP + qQ; \\ &\frac{dp}{ds} = -(X + Up); \quad \frac{dq}{ds} = -(Y + Uq). \end{aligned} \tag{68}$$

Мы можем, таким образом, утверждать, что на любой интегральной поверхности, вдоль всякой линии l', построенной нами выше, должны выполняться уравнения (68). Систему дифференциальных уравнений (68) мы можем рассматривать саму по себе, независимо от интегральных поверхностей уравнения (59). Эта система называется *характеристической системой* уравнения (59).

Отметим, что при выводе уравнений (68) мы пользовались производными второго порядка функции u. Кроме того, для нас существенно при интегрировании (68), чтобы правые части имели непрерывные производные первого порядка. Учитывая все это, сформулируем полученный нами результат. Пусть $u(x, y)$ — решение уравнения (59), имеющее непрерывные производные до второго порядка в окрестности некоторой точки (x_0, y_0). Обозначим $u_0 = u(x_0, y_0)$, $p_0 = u_x(x_0, y_0)$, $q_0 = u_y(x_0, y_0)$. Мы считаем, что $F(x, y, u, p, q)$ однозначна, непрерывна и имеет непрерывные производные до второго порядка в некоторой окрестности значений $(x_0, y_0, u_0, p_0, q_0)$. При этом система (68) имеет одно определенное решение

$$x_0(s),\ y_0(s),\ u_0(s),\ p_0(s),\ q_0(s)$$

с начальными условиями $(x_0, y_0, u_0, p_0, q_0)$ при $s = 0$. Из приведенных выше рассуждений следует, что интегральная поверхность $u = u(x, y)$ содержит указанное выше решение системы (68) при всех s, достаточно близких к нулю, т. е.

$$u_0(s) = u[x_0(s),\ y_0(s)]; \quad p_0(s) = u_x[x_0(s),\ y_0(s)];$$
$$q_0(s) = u_y[x_0(s),\ y_0(s)].$$

Систему (68) мы можем рассматривать, как мы уже упоминали выше, саму по себе, независимо от уравнения (59), как систему первого порядка для функций (x, y, u, p, q). Нетрудно проверить, что она имеет интеграл

$$F(x,\ y,\ u,\ p,\ q) = C. \tag{69}$$

Действительно, дифференцируя по s левую часть написанного равенства и пользуясь уравнениями (68), мы получим

$$\frac{dF}{ds} = XP + YQ + U(pP + qQ) - P(X + Up) - Q(Y + Uq) \equiv 0.$$

7. Характеристические многообразия. Всякое решение системы (68) представляет собой пять функций вспомогательного параметра:

$$x(s),\ y(s),\ u(s),\ p(s),\ q(s). \tag{70}$$

Мы выделим только те решения системы, которые при подстановке в интеграл (69) дают постоянной C значение, равное нулю. Назовем такие решения системы (68) характеристическими полосами уравнения (59), т. е. *характеристической полосой уравнения* (59) *называется система функций* (70), *удовлетворяющих системе* (68) *и соотношению*

$$F(x,\ y,\ u,\ p,\ q) = 0. \tag{71}$$

Первые три из функций (70) определяют некоторую пространственную кривую, а последние две из этих функций определяют вдоль этой кривой некоторую касательную плоскость. Всякая пространственная кривая, входящая в состав характеристической полосы, называется обычно *характеристической кривой* уравнения (59). В предыдущем параграфе мы показали, что всякая интегральная поверхность может быть покрыта характеристическими полосами и, следовательно, соответствующими этим полосам характеристическими кривыми. Если мы возьмем на некоторой интегральной поверхности точку (x_0, y_0, u_0) и соответствующие этой точке значения $p = p_0$ и $q = q_0$, то по теореме существования и единственности система (68) определит единственную характеристическую полосу по начальным значениям $(x_0, y_0, u_0, p_0, q_0)$, и эта полоса должна целиком принадлежать упомянутой интегральной поверхности, т. е. *если характеристическая полоса имеет некоторый элемент, общий с интегральной поверхностью, то она целиком лежит на этой интегральной поверхности*. Из этого утверждения непосредственно вытекает, что если две интегральные поверхности касаются в некоторой точке, т. е. имеют в этой точке общие p и q, то соответствующая этим начальным значениям характеристическая полоса должна принадлежать обеим интегральным поверхностям. Иначе говоря, *если две интегральные поверхности касаются в некоторой точке, то они касаются вдоль характеристической полосы, имеющей начальным элементом точку касания поверхностей.* Во всех этих рассуждениях мы считаем, конечно, что интегральные поверхности и функция F удовлетворяют условиям, указанным в предыдущем параграфе, и все относится к окрестности некоторой точки (x_0, y_0).

Заметим еще, что для того чтобы решение системы (68) удовлетворяло соотношению (71), т. е. было характеристической полосой, достаточно, в силу (69), проверить, что этому соотношению удовлетворяют начальные данные $(x_0, y_0, u_0, p_0, q_0)$ упомянутого решения, т. е.

$$F(x_0, y_0, u_0, p_0, q_0) = 0. \tag{72}$$

8. **Метод Коши.** Мы выяснили связь системы (68) с уравнением (59). В частности, мы выяснили, что всякая интегральная поверхность представляет собой семейство характеристических полос, зависящее от одного параметра. Положим теперь, что мы сумели проинтегрировать систему (68) и тем самым нашли всевозможные характеристические полосы. Покажем, каким образом мы можем из этих характеристических полос строить интегральные поверхности уравнения (59). Будем считать, что решение системы (68) выражено через параметр s и начальные

данные функций, входящих в систему

$$\begin{aligned} x &= x(s,\ x_0,\ y_0,\ u_0,\ p_0,\ q_0), \\ y &= y(s,\ x_0,\ y_0,\ u_0,\ p_0,\ q_0), \\ u &= u(\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ ), \\ p &= p(\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ ), \\ q &= q(\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ ). \end{aligned} \tag{73}$$

Желая получить семейство характеристических полос, мы будем считать, что начальные данные $(x_0,\ y_0,\ u_0,\ p_0,\ q_0)$ мы взяли как функции некоторого параметра t:

$$x_0(t),\ y_0(t),\ u_0(t),\ p_0(t),\ q_0(t), \tag{74}$$

причем эти функции должны удовлетворять соотношению (72). Мы считаем, кроме того, что они имеют непрерывные производные при $t_0 < t < t_1$ и что правые части уравнений (68) имеют непрерывные производные по $(x,\ y,\ u,\ p,\ q)$ в некоторой области, содержащей многообразие (74) внутри себя. Как мы видели в предыдущем номере, будет удовлетворено при любых значениях s и соотношение (71).

Подставляя функции (74) в правые части формул (73), мы получим

$$x = x(s,\ t),\ y = y(s,\ t),\ u = u(s,\ t), \tag{75}$$

$$p = p(s,\ t),\quad q = q(s,\ t). \tag{76}$$

Уравнения (75) определяют в параметрической форме некоторую поверхность. Если определитель

$$\Delta = x_s y_t - x_t y_s \tag{77}$$

отличен от нуля, что мы будем в дальнейшем считать, то совершенно так же, как и для линейного уравнения, мы сможем определить явное уравнение этой поверхности $u = u(x,\ y)$. Уравнение (71), как мы видели выше, будет удовлетворено, но остается открытым вопрос, будут ли функции p и q, определяемые формулами (75), частными производными от функции $u(x,\ y)$ по x и y. Если это обстоятельство имеет место, то, дифференцируя функцию $u(x,\ y)$ по s и t, мы будем иметь

$$\frac{\partial u}{\partial s} - p\frac{\partial x}{\partial s} - q\frac{\partial y}{\partial s} = 0,\quad \frac{\partial u}{\partial t} - p\frac{\partial x}{\partial t} - q\frac{\partial y}{\partial t} = 0. \tag{78}$$

Поскольку определитель второго порядка, составленный из коэффициентов при p и q, по условию, отличен от нуля, мы можем утверждать, что и наоборот, если p и q, определяемые формулами (76), удовлетворяют соотношениям (78), то они являются частными производными от $u(x,\ y)$ по x и y. Первое из соотношений (78) непосредственно вытекает из первых трех уравнений системы (68). Остается только выяснить, при каких условиях будет выполнено второе из соотношений (78). Мы считаем, что $F(x, y, u, p, q)$ имеет непрерывные производные до второго порядка в окрестности $(x_0, y_0, u_0, p_0, q_0)$. При этом правые части уравнений (68) имеют непрерывные производные первого порядка, и из этих уравнений следует, что x_s, y_s, u_s имеют непрерывные производные по t, т. е. существуют непрерывные производные x_{st}, y_{st}, u_{st}. При этом существуют и непрерывные производные x_{ts}, y_{ts}, u_{ts}, равные указанным выше производным. Это следует из того, что если функция $f(x, y)$ имеет в некоторой области непрерывную производную f_{xy}, то имеется и производная f_{yx}, причем $f_{yx} = f_{xy}$. Эта теорема может быть доказана небольшим видоизменением рассуждения из [I; 155] (см., например, Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I. — М.: Наука, 1970).

Обозначая через L левую часть второго из уравнений (78) и дифференцируя по s, мы получим

$$\frac{\partial L}{\partial s} = \frac{\partial^2 u}{\partial t\, \partial s} - p\frac{\partial^2 x}{\partial t\, \partial s} - q\frac{\partial^2 y}{\partial t\, \partial s} - \frac{\partial p}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

С другой стороны, дифференцируя первое из соотношений (78), которое, как мы только что видели, наверное выполнено, по t, будем иметь

$$0 = \frac{\partial^2 u}{\partial s\, \partial t} - p\frac{\partial^2 x}{\partial s\, \partial t} - q\frac{\partial^2 y}{\partial s\, \partial t} - \frac{\partial p}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial s} - \frac{\partial q}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial s}.$$

Вычитая почленно последнее равенство из предыдущего, можем записать $\frac{\partial L}{\partial s}$ в виде

$$\frac{\partial L}{\partial s} = \frac{\partial p}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial q}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial p}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial t},$$

или, пользуясь системой (68), в виде

$$\frac{\partial L}{\partial s} = P\frac{\partial p}{\partial t} - Q\frac{\partial q}{\partial t} + (X + Up)\frac{\partial x}{\partial t} + (Y + Uq)\frac{\partial y}{\partial t}.$$

Дифференцируя по t соотношение (71), которому удовлетворяют функции (75) и (76), мы получим

$$0 = X\frac{\partial x}{\partial t} + Y\frac{\partial y}{\partial t} + U\frac{\partial u}{\partial t} + P\frac{\partial p}{\partial t} + Q\frac{\partial q}{\partial t}.$$

Вычитая это равенство из предыдущего, мы можем преобразовать выражение для $\frac{\partial L}{\partial s}$ к виду

$$\frac{\partial L}{\partial s} = U\left(p\frac{\partial x}{\partial t} + q\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t}\right) \quad \text{или} \quad \frac{\partial L}{\partial s} = -UL,$$

откуда следует, что

$$L = L_0 e^{-\int\limits_0^s U\,ds},$$

где L_0 — значение левой части второго из соотношений (78) при $s = 0$:

$$L_0 = \frac{\partial u_0}{\partial t} - p_0 \frac{\partial x_0}{\partial t} - q_0 \frac{\partial y_0}{\partial t}.$$

Из написанной формулы непосредственно следует, что соотношение $L = 0$ будет выполнено при всяком s, если оно выполнено при $s = 0$, т. е. для того чтобы удовлетворялось второе из соотношений (78), необходимо и достаточно, чтобы функции (74) удовлетворяли соотношению

$$\frac{du_0}{dt} = p_0 \frac{dx_0}{dt} + q_0 \frac{dy_0}{dt}. \tag{79}$$

Мы можем, таким образом, утверждать, что если определитель Δ отличен от нуля при $s = 0$ и $t = t'$ $(t_0 < t' < t_1)$, и если функции (74) удовлетворяют соотношениям

$$F(x_0, y_0, u_0, p_0, q_0) = 0, \quad \frac{du_0}{dt} = p_0 \frac{dx_0}{dt} + q_0 \frac{dy_0}{dt}, \tag{80}$$

то уравнения (75) при s и t, близких к $s = 0$ и $t = t'$, определяют интегральную поверхность $u = u(x, y)$ уравнения (59). Первые два из уравнений (75) дают непрерывно дифференцируемые функции $s(x, y)$, $t(x, y)$. Подставляя их в $u(s, t)$, $p(s, t)$, $q(s, t)$, получим непрерывно дифференцируемые функции x и y, которые мы, не желая вводить новые символы, обозначим через $u(x, y)$, $p(x, y)$ и $q(x, y)$. В силу доказанного выше $p(x, y) = u_x(x, y)$, $q(x, y) = u_y(x, y)$, и потому $u(x, y)$ имеет непрерывные производные второго порядка. Для полученного решения при $s = 0$ $u_0(t) = u[x_0(t), y_0(t)]$ при t, близких к t', т. е. поверхность $u = u(x, y)$ содержит некоторый участок линии $x = x_0(t)$, $y = y_0(t)$, $u = u_0(t)$.

9. Задача Коши. Задача Коши для уравнения (59) формулируется так же, как и в случае линейного уравнения: *требуется найти поверхность, проходящую через заданную кривую* l. Рассмотрим сначала тот частый случай задачи, когда заданная кривая находится в плоскости $x = x_0$, параллельной плоскости (y, u), и имеет в этой плоскости явное уравнение $u = \psi(y)$, т. е. положим, что требуется найти интегральную поверхность, удовлетворяющую следующему условию:

$$u|_{x=x_0} = \psi(y). \tag{81}$$

При рассмотрении задачи Коши мы, кроме доказательства существования и единственности решения, будем всегда доказывать и непрерывную в некотором смысле зависимость решения от начальных данных. Пусть u_1 — решение задачи, для которой в условии (81) $\psi(y)$ заменено на $\psi(y)+\delta(y)$. Указанная непрерывная зависимость в данном случае сводится к следующему: в некоторой конечной области изменения (x, y) величина $|u-u_1|$ может быть сделана сколь угодно малой, если $|\delta(y)|$ достаточно мала. Эта непрерывная зависимость от начальных данных обычно называется *корректностью постановки задачи Коши.* Будем считать, что уравнение (59) написано в разрешенном относительно p виде:

$$p=f(x, y, u, q). \tag{82}$$

Из условия Коши (81) непосредственно вытекает, что в качестве параметра мы можем взять переменную y, причем параметрическое уравнение кривой l будет иметь вид: $x=x_0$; $y=y$; $u=\psi(y)$. Нам остается еще определить вдоль этой кривой p и q как функции параметра y так, чтобы удовлетворялись два условия (80). В данном случае эти условия перепишутся в виде

$$p_0=f(x_0, y, \psi(y), q_0); \quad \psi'(y)=q_0, \tag{83}$$

откуда видно, что p_0 и q_0 определяются вдоль l единственным образом, и, применяя указанный в предыдущем параграфе метод, мы получаем решение задачи.

Для того чтобы выполнялись указанные в предыдущем номере условия, нам надо потребовать существование непрерывной производной второго порядка у функции $\psi(y)$. Условия для f вытекают из указанных в [8] условий для F.

Рассмотрим теперь более общее начальное данное, а именно, пусть требуется провести интегральную поверхность через кривую

$$x=\varphi(y); \quad u=\psi(y). \tag{84}$$

Эта задача может быть сведена к предыдущей при помощи замены независимых переменных, а именно: вместо (x, y) вводим новые независимые переменные (x', y') по формулам

$$x=x'+\varphi(y'); \quad y=y',$$

и выражаем производные по новым переменным через производные по прежним переменным:

$$u_{x'}=p; \quad u_{y'}=p\varphi'(y')+q,$$

откуда

$$p=u_{x'}; \quad q=u_{y'}-u_{x'}\varphi'(y'),$$

и уравнение (59) в новых независимых переменных принимает вид

$$F[x'+\varphi(y'),\ y',\ u,\ u_{x'},\ u_{y'}-u_{x'}\varphi'(y')]=0. \tag{85}$$

Линия (84) в новых переменных запишется в виде

$$x'=0;\quad u=\psi(y'),$$

т. е. мы имеем задачу Коши рассмотренного выше вида. Возможность ее решения сводится к вопросу о разрешимости уравнения (85) относительно $u_{x'}$.

В случае, если кривая l задана в параметрической форме:

$$x=x_0(t);\quad y=y_0(t);\quad u=u_0(t),$$

мы должны будем определить функции $p_0(t)$ и $q_0(t)$ из двух уравнений:

$$\left.\begin{aligned} F[x_0(t),\quad y_0(t),\quad u_0(t),\quad p_0(t),\quad q_0(t)]=0,\\ u_0'(t)-p_0(t)\,x_0'(t)-q_0(t)\,y_0'(t)=0. \end{aligned}\right\} \tag{86}$$

Функциональный определитель левых частей этих уравнений по p_0 и q_0

$$\Delta_0=y_0'(t)\,F_{p_0}-x_0'(t)\,F_{q_0} \tag{87}$$

совпадает как раз с определителем (77) при $s=0$, что непосредственно вытекает из первых двух уравнений системы (68). Мы считаем, что определитель (77) отличен от нуля вдоль l и что система (86) дает вдоль l вполне определенные значения для p_0 и q_0. При этом можно применить указанный в предыдущем параграфе метод построения решения, причем надо заметить, что определитель (87) будет отличным от нуля не только при $s=0$, но и при s, близких к нулю. Для того чтобы функции $p_0(t)$, $q_0(t)$ имели непрерывные производные первого порядка, нам надо потребовать существования непрерывных производных второго порядка у функций $x_0(t)$, $y_0(t)$, $u_0(t)$. Это видно из второго уравнения (86).

10. Единственность решения. При решении задачи Коши мы строили интегральную поверхность при помощи характеристических полос. Единственность решения задачи на первый взгляд получается непосредственно из того, что всякая интегральная поверхность сможет быть покрыта характеристическими полосами. Но при доказательстве этого мы использовали существование непрерывных производных второго порядка у функции $u(x, y)$. При сделанных выше предположениях мы получили в [9] решение задачи, у которого $u(x, y)$ имеет непрерывные производные второго порядка. Но указанное простое доказательство единственности не годится, если предполагать лишь непрерывные производные первого порядка у функции $u(x, y)$.

Нетрудно доказать теорему единственности и в предположении, что существуют лишь непрерывные производные первого порядка. Мы сделаем это для (82) при условии Коши (81).

Доказательство основано на следующей лемме:

Лемма. *Пусть функция $u(x, y)$ непрерывна в замкнутом треугольнике Δ, образованном прямыми*

$$x = x_0; \quad x - x_0 = \frac{1}{A}(y - y_1); \quad x - x_0 = -\frac{1}{A}(y - y_2) \tag{88}$$

$$(y_1 < y_2),$$

определена и имеет непрерывные производные первого порядка при $x > x_0$ в более широком треугольнике, образованном прямыми

$$x = x_0; \quad x - x_0 = \frac{1}{A}(y - y_3); \quad x - x_0 = -\frac{1}{A}(y - y_4) \tag{89}$$

$$(y_3 < y_1 < y_2 < y_4).$$

Пусть далее эти производные во всем треугольнике Δ, кроме основания $x = x_0$, удовлетворяют условию

$$|u_x| \leqslant A|u_y| + B|u|, \tag{90}$$

а на основании $x = x_0$ имеет место неравенство

$$|u(x_0, y)| \leqslant M. \tag{91}$$

Тогда во всем треугольнике Δ имеет место неравенство

$$|u(x, y)| \leqslant Me^{B(x-x_0)}. \tag{92}$$

Докажем сначала эту лемму при $A = B = 1$. Будем рассуждать от обратного. Пусть в Δ имеются точки, в которых $|u(x, y)| > Me^{x-x_0}$. При этом функция $u(x, y)e^{x_0-x}$ должна была бы достигать наибольшего абсолютного значения не на основании.

Поскольку все условия содержат лишь абсолютные значения функции $u(x, y)$ и ее производных, мы можем, меняя, если это надо, знак у $u(x, y)$, считать, что произведение $u(x, y)e^{x_0-x}$ достигает наибольшего положительного значения не на основании Δ. При этом можно фиксировать столь малое положительное число λ, что функция

$$v(x, y) = u(x, y)e^{-(1+\lambda)(x-x_0)} \tag{93}$$

будет достигать наибольшего положительного значения не на основании Δ. Приведем это к противоречию. Если это имеет место внутри Δ, то мы должны иметь в соответствующей точке $v_x = v_y = 0$, откуда следует: $u_x - (1+\lambda)u = 0$, $u_y = 0$ $(u > 0)$, а это противоречит (90) при $A = B = 1$. Если это имеет место на стороне $x - x_0 = y - y_1$ (не в вершине Δ), то в соответствующей точке мы должны иметь $v_y \leqslant 0$, и, дифференцируя вдоль этой стороны, получим $v_x + v_y = 0$. Это приводит к формулам

$$u_y \leqslant 0; \quad u_x = -u_y + (1+\lambda)u \qquad (u > 0), \tag{94}$$

которые опять противоречат (90) при $A = B = 1$. Если это имеет место на стороне $x - x_0 = -(y - y_2)$, то аналогично получим $v_y \geqslant 0$, $v_x - v_y = 0$, откуда

$$u_y \geqslant 0; \quad u_x = u_y + (1+\lambda)u \quad (u > 0), \tag{95}$$

что опять находится в противоречии с (90) при $A = B = 1$. Положим, наконец, что функция (93) достигает наибольшего положительного значения в вершине треугольника Δ. Мы должны иметь во всяком случае в этой точке $v_x \geqslant 0$, т. е. $u_x \geqslant (1+\lambda)u$. Если при этом $u_y = 0$, то мы опять пришли к противоречию с (90). Если в вершине $u_y < 0$, то, дифференцируя вдоль стороны $x - x_0 = y - y_1$, получим $v_x + v_y \geqslant 0$, что приводит к неравенствам $u_y < 0$, $u_x \geqslant -u_y + (1+\lambda)u$, что противоречит (90) при $A = B = 1$. Если же в вершине $u_y > 0$, то, дифференцируя вдоль стороны $x - x_0 = -(y - y_2)$, придем, как и выше, к противоречию. Итак, лемма доказана при $A = B = 1$. Распространим ее на общий случай. Мы имеем в треугольнике со сторонами (88) условия (90) и (91). Введем новые независимые переменные $x' = Bx$, $y' = \frac{B}{A}y$. Треугольник Δ перейдет в треугольник Δ' со сторонами

$$x' = Bx_0; \quad x' - Bx_0 = y' - y_1'; \quad x' - Bx_0 = -(y' - y_2')$$
$$\left(y_k' = \frac{B}{A}y_k\right),$$

и вместо (90) мы будем иметь

$$|u_{x'}| \leqslant |u_{y'}| + |u|,$$

а условие (91) по-прежнему будет иметь вид $|u(Bx_0, y')| \leqslant M$. В силу доказанного выше, мы получим $|u(x', y')| \leqslant Me^{(x' - Bx_0)}$ в Δ' или, возвращаясь к прежним независимым переменным, получим неравенство (92) в Δ.

Переходим к доказательству единственности решения уравнения (82) при условии (81) и сделанных выше предположениях. Пусть имеются два решения $u_1(x, y)$, $u_2(x, y)$ в полосе $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$, причем пусть $|u_k(x, y)|$ и $|u_{ky}(x, y)|$, $k = 1, 2$, не превосходят какого-либо числа M_1. Относительно $f(x, y, u, q)$ достаточно предположить, что при любых (x, y) из этой полосы и u_k, q_k, $k = 1, 2$, не превосходящих по модулю M_1, выполняется неравенство

$$|f(x, y, u_2, q_2) - f(x, y, u_1, q_1)| \leqslant B|u_2 - u_1| + A|q_2 - q_1|,$$

где A и B — некоторые постоянные. Вычитая из уравнения (82) для $u_2(x, y)$ уравнение (82) для $u_1(x, y)$ и используя это свойство f, получим

$$|(u_2-u_1)_x| \leqslant A|(u_2-u_1)_y| + B|u_2-u_1|.$$

Применяя к разности u_2-u_1 доказанную лемму и принимая во внимание, что эта разность обращается в нуль при $x=x_0$ (т. е. $M=0$), мы из (92) видим, что $u_2(x, y)-u_1(x, y)=0$ в любом треугольнике Δ, т. е. единственность решения доказана. Общий случай уравнения (59) при данных Коши на любой кривой можно привести к разобранному выше при помощи замены переменных и решения дифференциального уравнения относительно одной из производных. Это мы уже делали в [**9**].

Рассмотрим теперь в треугольнике Δ два решения $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$ уравнения (82) при различных условиях:

$$u_1|_{x=x_0}=\psi_1(y); \quad u_2|_{x=x_0}=\psi_2(y).$$

Применяя к разности (u_2-u_1) лемму, получим следующее неравенство в треугольнике Δ:

$$|u_2(x, y)-u_1(x, y)| \leqslant \max_{y_1 \leqslant y \leqslant y_2} |\psi_2(y)-\psi_1(y)|\, e^{B(x-x_0)}.$$

Это неравенство доказывает непрерывную зависимость решения от начальных данных $\psi(y)$, входящих в формулу (81).

Отметим еще одно обстоятельство, связанное с решением задачи Коши. Если функция $\psi(y)$ не имеет непрерывной производной второго порядка, то применение метода Коши может привести к поверхности $u=u(x, y)$, для которой $u(x, y)$ не имеет производной. Можно показать, что в таком случае задача не имеет решения с непрерывной производной [Хаар (Haar).— Acta Szeged, 1928, **4**, № 2]. Доказательство указанной выше леммы в более общем случае и ее применения к доказательству теорем единственности для уравнений с частными производными можно найти в статье: Мышкис А. Д. Единственность решения задачи Коши. — УМН, 1948, **3**, № 2.

11. Особый случай. Положим, что нам задана полоса, удовлетворяющая двум соотношениям (80) и такая, что вдоль этой полосы определитель (87) равен нулю:

$$\Delta_0 = x_s y_t - x_t y_s|_{s=0} = y_0'(t)\, F_{p_0} - x_0'(t)\, F_{q_0} = 0. \tag{96}$$

Положим, что существует интегральная поверхность $u=u(x, y)$, проходящая через такую полосу, причем $u(x, y)$ имеет непрерывные производные до второго порядка. Если F_{p_0} и F_{q_0} не равны одновременно нулю, то из (96) и второго из соотношений

(80) следует, что наша полоса удовлетворяет уравнениям (66), в которых s надо заменить буквой t. Но тогда приведенные в [6] вычисления покажут нам, что эта полоса удовлетворяет и всем уравнениям (68), т. е. является характеристической полосой. Таким образом, *если, при выполнении условия* (96), *существует интегральная поверхность, содержащая заданную полосу, то эта полоса должна быть характеристической полосой* (*причем считается, что* F_{p_0} *и* F_{q_0} *не равны одновременно нулю*). При этом, совершенно так же, как и в случае линейного уравнения, через эту полосу может проходить, вообще говоря, бесчисленное множество интегральных поверхностей. Надо провести некоторую полосу ω, которая имеет с полосой (74) некоторую общую точку (x_0, y_0, u_0) и общие в этой точке p_0 и q_0, и притом так, чтобы вдоль новой полосы ω определитель (87) был отличным от нуля. При выполнении некоторых условий через эту полосу проходит определенная интегральная поверхность, которая будет содержать характеристическую полосу (74), ибо она содержит ее начальный элемент. Ввиду произвольности в выборе полосы ω, мы и имеем бесчисленное множество решений задачи.

Если вдоль заданной полосы $\Delta_0 = 0$, но полоса не является характеристической, то решение задачи невозможно, если говорить о функциях $u(x, y)$, имеющих непрерывные производные до второго порядка. Но может случиться, что соответствующая линия будет особой для интегральной поверхности. Заметим при этом, что при проведении метода Коши нами были использованы производные второго порядка функции $u(x, y)$. Если выполнено равенство (96) и полоса не характеристическая, то вдоль этой полосы удовлетворены только первые три из уравнений системы (68). На доказательстве высказанных выше утверждений мы не останавливаемся.

Предыдущие рассуждения имеют простой геометрический смысл. Если нам задана некоторая линия l, то первое из условий (80) показывает, что вдоль этой кривой плоскость, определяемая величинами $p_0(t)$ и $q_0(t)$, должна касаться конуса T, а второе условие равносильно тому, что эта плоскость должна содержать касательную к l. Вспоминая уравнение (64) образующих конуса, мы видим, что условие $\Delta_0 \neq 0$ равносильно тому факту, что вдоль l касательные к l не совпадают с образующими конуса T. Разрешимость уравнений (86) относительно $p_0(t)$ и $q_0(t)$ сводится к возможности проведения плоскости, которая содержит касательную к l и касается конуса T. Положим, что мы можем через касательные к l провести плоскости, которые касаются T и непрерывно меняются вдоль l ($p_0(t)$ и $q_0(t)$ должны иметь непрерывные производные).

Мы дополним таким образом кривую l до полосы и, принимая эту полосу за начальные значения в решениях (73), будем иметь интегральную поверхность. Если касательные к l являются образующими конусов T, мы будем иметь, проводя касательную плоскость к конусу вдоль соответствующей образующей, значения p_0 и q_0 вдоль T. Полученная таким образом полоса может оказаться характеристической полосой. В этом случае задача имеет бесчисленное множество решений. Достаточно пересечь кривую l другой кривой l_1, касательная к которой в точке пересечения лежит в той же плоскости, что и касательная к l, но не совпадает с этой касательной, и такую, что вдоль l_1 касательные не совпадают с образующими конусов T. Интегральная поверхность, проведенная через l_1, будет содержать и l. Может, наконец, случиться, что касательные к кривой l совпадают с образующими конусов T, но что эта кривая не характеристическая, т. е. что ее дополнение до полосы указанным выше приемом не приводит к характеристической полосе. Из каждой точки l в этом случае мы все же можем выпустить характеристическую полосу, имея начальные значения $(x_0, y_0, u_0, p_0, q_0)$. Если эти характеристические полосы образуют интегральную поверхность с явным уравнением $u = u(x, y)$, то линия l является особой линией на построенной интегральной поверхности. Эти рассуждения имеют лишь иллюстративное значение.

Отметим один важный тип интегральных поверхностей уравнения (59). Фиксируем некоторую точку (x_0, y_0, u_0). При этом второе из соотношений (80) будет выполняться при любых значениях p_0 и q_0, так как все производные, входящие в это соотношение, обращаются в данном случае тождественно в нуль. Мы получаем одно первое из соотношений (80), которое даст нам, вообще говоря, бесчисленное множество значений для p_0 и q_0. Это будут как раз те значения p_0, q_0, которые определяют возможные положения касательной плоскости в фиксированной точке (x_0, y_0, u_0). Мы можем, как и выше, считать $p_0(t)$ и $q_0(t)$ функциями некоторого параметра t. Подставляя фиксированные значения (x_0, y_0, u_0) и упомянутые выше выражения $p_0(t)$ и $q_0(t)$ в формулы (73), мы получим интегральную поверхность уравнения (59), имеющую вид конической поверхности с вершиной (x_0, y_0, u_0). Эта поверхность будет иметь, вообще говоря, криволинейные образующие, которые в вершине (x_0, y_0, u_0) будут касаться образующих конуса T. Эту поверхность называют обычно *интегральным коноидом уравнения* (59) *с вершиной* (x_0, y_0, u_0). Можно показать, что решение задачи Коши может быть сведено к следующему построению. Строятся интегральные коноиды, имеющие вершины на заданной кривой l, и берется их огибающая, что и приводит к решению задачи. Все последние утверждения требуют, конечно, строгих аналитических доказательств, на которых мы не будем останавливаться.

12. Любое число независимых переменных. Рассмотрим уравнение первого порядка в случае любого числа независимых переменных:

$$F(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n) = 0. \tag{97}$$

Метод Коши интегрирования такого уравнения проводится совершенно так же, как и в случае двух независимых переменных, и мы ограничимся лишь указанием результатов. Характеристическая система, соответствующая уравнению (97), имеет вид

$$\frac{dx_1}{P_1} = \ldots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{du}{p_1P_1 + \ldots + p_nP_n} = \frac{dp_1}{-(X_1 + Up_1)} = \ldots =$$
$$= \frac{dp_n}{-(X_n + Up_n)} = ds \quad (X_k = F_{x_k};\ P_k = F_{p_k};\ U = F_u). \tag{98}$$

Укажем формальный путь, приводящий к системе (98). Пусть имеется решение $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ уравнения (97) с непрерывными производными до второго порядка. При этом X_k, P_k и U после подстановки $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ и $p_k = u_{x_k}(x_1, \ldots, x_n)$ будут функциями $(x_1, \ldots, x_n)$.

Напишем систему уравнений первого порядка

$$\frac{dx_k}{ds} = P_k \quad (k = 1, \ldots, n),$$

где s — вспомогательная переменная. Подставляя решения этой системы в уравнение $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ и дифференцируя по s, получим

$$\frac{du}{ds} = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{dx_i}{ds} = \sum_{i=1}^{n} p_i P_i, \text{ и точно так же: } \frac{dp_k}{ds} = \sum_{i=1}^{n} u_{x_k x_i} P_i.$$

Дифференцируя (97) по x_k, получим

$$X_k + Up_k + \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial p_i}{\partial x_k} = X_k + Up_k + \sum_{i=1}^{n} u_{x_k x_i} P_i = 0.$$

Из этих равенств следует, что

$$\frac{dp_k}{ds} = -(X_k + Up_k).$$

Таким образом, мы получили все уравнения системы (98). Рассмотрим подробнее систему (98), как систему относительно функций x_k, u, p_k вспомогательного переменного s.

Она допускает очевидный интеграл

$$F(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n) = C.$$

Положим, что нам удалось проинтегрировать указанную систему:

$$\left.\begin{aligned} x_k &= x_k\left(s,\ x_k^{(0)},\ u^{(0)},\ p_k^{(0)}\right), \\ u &= u\left(s,\ x_k^{(0)},\ u^{(0)},\ p_k^{(0)}\right), \\ p_k &= p_k\left(s,\ x_k^{(0)},\ u^{(0)},\ p_k^{(0)}\right), \end{aligned}\right\} \tag{99}$$

где $x_k^{(0)}$, $u^{(0)}$, $p_k^{(0)}$ — начальные значения функций при $s = 0$. Будем считать, что эти начальные значения являются функциями $(n-1)$ параметров

$$x_k^{(0)}(t_1, \ldots, t_{n-1}), \quad u^{(0)}(t_1, \ldots, t_{n-1}), \quad p_k^{(0)}(t_1, \ldots, t_{n-1}). \tag{100}$$

Подставляя это в формулы (99), мы будем иметь выражение переменных x_k и u через n параметров. Рассмотрим функциональный определитель

$$\Delta = \frac{D(x_1, \ldots, x_n)}{D(s, t_1, \ldots, t_{n-1})},$$

который, в силу первых из уравнений системы, может быть написан в виде

$$\Delta = \begin{vmatrix} P_1, & \ldots, & P_n \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial t_1}, & \ldots, & \dfrac{\partial x_n}{\partial t_1} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial t_{n-1}}, & \ldots, & \dfrac{\partial x_n}{\partial t_{n-1}} \end{vmatrix}. \tag{101}$$

Если этот определитель в окрестности начального значения $s=0$ отличен от нуля, то уравнения (100) дают нам поверхность, которая может быть записана явной формулой $u = u(x_1, \ldots, x_n)$. Для того чтобы эта поверхность оказалась интегральной поверхностью уравнения (97), необходимо и достаточно, чтобы функции (100) удовлетворяли следующим n соотношениям:

$$F\left(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, u^{(0)}, p_1^{(0)}, \ldots, p_n^{(0)}\right) = 0, \tag{102}$$

$$\frac{\partial u^{(0)}}{\partial t_j} = \sum_{s=1}^{n} p_s^{(0)} \frac{\partial x_s^{(0)}}{\partial t_j} \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1). \tag{103}$$

Задача Коши состоит в отыскании интегральной поверхности уравнения (97), содержащей заданное $(n-1)$-мерное многообразие:

$$x_k^{(0)}(t_1, \ldots, t_{n-1}),\ u^{(0)}(t_1, \ldots, t_{n-1}).$$

Мы считаем, что это многообразие дополнено до многообразия (100), так что удовлетворяются соотношения (102) и (103). Если при этом определитель (101) отличен от нуля вдоль такого многообразия, то указанный выше метод приводит к решению задачи Коши, и это решение единственно.

Совершенно так же, как и в случае двух независимых переменных, мы можем строить интегральный коноид уравнения (97), фиксируя некоторую точку $\left(x_1^{(0)}, x_n^{(0)}, u^{(0)}\right)$ и выбирая $p_1^{(0)}, \ldots$ $\ldots, p_n^{(0)}$ как функции $(n-1)$ параметров так, чтобы удовлетворялось соотношение (102).

Если уравнение (97) разрешено относительно p_1:

$$p_1 = f(x_1, \ldots, x_n, u, p_2, \ldots, p_n), \tag{104}$$

и если условие Коши имеет вид

$$u\,|_{x_1=x_1^{(0)}} = \psi(x_2, \ldots, x_n), \tag{105}$$

то задача Коши имеет одно определенное решение.

Мы не приводим здесь всех условий непрерывности и существования производных у f и ψ. Это делается так же, как и при $n = 2$. Для уравнения (104) с начальным данным (105) можно, при некоторых определенных предположениях относительно f и ψ, определить и ту область, в которой существует интегральная поверхность. Предположим, что функция f непрерывна и имеет непрерывные производные f_{x_k}, f_{p_k} и f_u $(k = 2, \ldots, n)$ при $\left|x_1 - x_1^{(0)}\right| \leqslant$ $\leqslant a$ и произвольных x_k, p_k и u Положим, кроме того, что эти производные имеют непрерывные производные по x_1. x_k, u и p_k, и что производные f_{x_1}, f_{x_k}, f_u, f_{p_k}, $f_{x_k x_l}$, $f_{x_k u}$, $f_{x_k p_l}$, f_{uu}, $f_{u p_k}$, $f_{p_k p_l}$ ограничены по абсолютной величине числом A при указанных значениях аргументов. Положим далее, что $\psi(x_2, \ldots, x_n)$ имеет непрерывные производные до второго порядка и что имеет место неравенство

$$\left|\psi_{x_k}\right| + \sum_{l=2}^{n} \left|\psi_{x_k x_l}\right| \leqslant B \quad (k = 2, \ldots, n).$$

При этом существует дважды непрерывно дифференцируемое решение уравнения (104) при условии (105) в области $\left|x_1 - x_1^{(0)}\right| \leqslant \alpha$ и произвольных x_k $(k = 2, \ldots, n)$, где $\alpha \leqslant a$. Кроме того, α должно удовлетворять условию

$$\alpha < \frac{1}{A} \lg\left[1 + \frac{\lg 3}{2(n-1)(B+1)}\right]$$

[см. Камке (Kamke). — Math Z, 1943, **49**, № 3].

13. Полный, общий и особый интегралы. В настоящем и следующем параграфах мы укажем другой метод интегрирования уравнения

$$F(x, y, u, p, q) = 0 \tag{106}$$

и, в частности, решения задачи Коши. Он часто в конкретных примерах легко приводит к решению задачи. При изложении метода Коши мы выяснили условия его применимости и существования и единственности решения задачи Коши. Сейчас мы будем иметь в виду, главным образом, формальную сторону вопроса и широко используем теорию огибающих семейства поверхностей, зависящего от одного или двух параметров.

При применении метода Коши для интегрирования уравнения (106) мы должны уметь проинтегрировать полностью соответствующую систему обыкновенных уравнений:

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{du}{pP+qQ}=\frac{dp}{-(X+Up)}=\frac{dq}{-(Y+Uq)}. \qquad (107)$$

Мы покажем сейчас, что задача интегрирования уравнения (106) требует лишь знания решения этого уравнения, зависящего от двух произвольных постоянных. Пусть мы имеем такое решение:

$$u=\varphi(x,\ y,\ a,\ b), \qquad (108)$$

где a и b — произвольные постоянные. Частные производные p и q будут выражаться по формулам

$$p=\varphi_x(x,\ y,\ a,\ b);\quad q=\varphi_y(x,\ y,\ a,\ b), \qquad (109)$$

и мы будем иметь, следовательно, следующее соотношение:

$$F[x,\ y,\ \varphi(x,\ y,\ a,\ b),\ \ \varphi_x(x,\ y,\ a,\ b),\ \ \varphi_y(x,\ y,\ a,\ b)]=0, \qquad (110)$$

которое должно выполняться тождественно не только относительно $(x,\ y)$, но и относительно $(a,\ b)$. Мы считаем, что из трех соотношений (108) и (109) могут быть исключены a и b и что это исключение приводит нас к уравнению (106). В этом случае решение (108) уравнения (106) будем называть *полным интегралом* данного уравнения. Нетрудно из полного интеграла уравнения получить и другие решения этого уравнения. Положим, что в формуле (108) постоянная b является некоторой функцией постоянной a, т. е. $b=\omega(a)$. Таким путем мы придем к семейству интегральных поверхностей, зависящему от одного параметра:

$$u=\varphi[x,\ y,\ a,\ \omega(a)]. \qquad (111)$$

Огибающая этого семейства, которая получается исключением a из уравнения (111) и уравнения

$$\varphi_a[x,\ y,\ a,\ \omega(a)]+\varphi_b[x,\ y,\ a,\ \omega(a)]\,\omega'(a)=0, \qquad (112)$$

будет иметь вдоль линии касания с огибаемой поверхностью те же самые p и q, что и огибаемая, а потому эта огибающая будет также интегральной поверхностью уравнения (106). Совокупность всех таких интегральных поверхностей при любом выборе дифференцируемой функции $\omega(a)$ образует *общий интеграл* уравнения (106). Этот интеграл, как мы видим, содержит уже произвольную функцию $\omega(a)$. Мы можем далее строить огибающую семейства интегральных поверхностей (108), зависящего от двух параметров a и b. Это приводит к исключению a и b из уравнения (108) и уравнений

$$\varphi_a(x, y, a, b)=0; \quad \varphi_b(x, y, a, b)=0. \tag{113}$$

Полученная интегральная поверхность не содержит никаких произвольных элементов и называется обычно *особым интегралом* уравнения (106). Мы считаем при этом, конечно, что все указанные выше исключения возможны и приводят к функциям, имеющим непрерывные производные

Вместо указанных геометрических соображений мы можем получить общий и особый интегралы, пользуясь методом вариации произвольных постоянных. Будем искать решение уравнения (106) в виде (108), считая a и b искомыми функциями (x, y). Частные производные функции u будут вычисляться уже не по формулам (109), а по следующим формулам:

$$p=\varphi_x+\varphi_a a_x+\varphi_b b_x; \quad q=\varphi_y+\varphi_a a_y+\varphi_b b_y.$$

Если мы подчиним искомые функции a и b двум соотношениям:

$$\varphi_a a_x+\varphi_b b_x=0; \quad \varphi_a a_y+\varphi_b b_y=0, \tag{114}$$

то выражения для частных производных останутся прежними, и функция (108) будет, как и раньше, давать интегральную поверхность. Все дело сводится к рассмотрению уравнений (114). Эти уравнения имеют очевидные решения: $a=\text{const}$ и $b=$ $=\text{const}$, что приводит нас опять к полному интегралу. Второе очевидное решение получается, если a и b удовлетворяют соотношениям

$$\varphi_a=0; \quad \varphi_b=0.$$

Это приводит нас к особому интегралу. Если по крайней мере одно из этих равенств не выполняется, то определитель однородной относительно φ_a и φ_b системы (114) должен обращаться в нуль:

$$\begin{vmatrix} a_x, & b_x \\ a_y, & b_y \end{vmatrix}\equiv 0.$$

Мы считаем при этом, что a и b не являются одновременно постоянными. Равенство нулю этого функционального определителя приводит нас к соотношению между a и b [III_1; 18]. Положим, что это соотношение имеет вид $b=\omega(a)$. При этом уравнения (114) приводятся к одному, которое может быть записано в виде

$$\varphi_a+\varphi_b\omega'(a)=0,$$

и мы получаем общий интеграл. Можно показать, что при некоторых условиях указанными выше решениями исчерпываются все решения уравнения (106). По существу дело сводится к тому, что, имея полный интеграл, мы можем решить задачу Коши.

14. Полный интеграл и задача Коши. Покажем теперь, каким именно образом из полного интеграла следует решение задачи Коши. Пусть требуется найти интегральную поверхность, проходящую через линию:

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad u = u(t). \tag{115}$$

Вопрос приводится к нахождению такой функции $b = \omega(a)$ в общем интеграле, определяемом равенствами (111) и (112), чтобы полученная интегральная поверхность прошла через линию (115). Выясним предварительно одно свойство огибающей поверхности. Пусть имеется семейство поверхностей с одним параметром:

$$\psi(x, y, u, a) = 0. \tag{116}$$

Положим, что через всякую точку M линии (115) проходит поверхность семейства (116), причем касательная плоскость к этой поверхности в точке M содержит касательную к линии (115) в точке M. Покажем, что в этом случае огибающая семейства (116) содержит линию (115). Действительно, мы имеем по условию

$$\psi[x(t), y(t), u(t), a] = 0, \tag{117}$$

причем различным точкам M линии (115) отвечают различные значения постоянной a, т. е различные поверхности семейства (116). Дифференцируя последнее тождество по t, получим

$$\psi_x x_t + \psi_y y_t + \psi_u u_t + \psi_a a_t = 0.$$

С другой стороны, тот факт, что касательная плоскость к поверхности семейства (116) содержит касательную к линии (115), приводит нас к тождеству

$$\psi_x x_t + \psi_y y_t + \psi_u u_t = 0, \tag{118}$$

и последние два тождества дают $\psi_a a_t = 0$, или, в силу $a_t \neq 0$, мы имеем $\psi_a = 0$. Итак, функции (115) удовлетворяют тождественно относительно t уравнениям $\psi = 0$ и $\psi_a = 0$, т. е. огибающая семейства (116) действительно содержит линию (115).

Положим теперь, что мы имеем полный интеграл уравнения (106), который напишем в неявной форме:

$$\psi(x, y, u, a, b) = 0. \tag{119}$$

Нам надо определить функцию $b = \omega(a)$ так, чтобы выполнялись соотношения (117) и (118). Левая часть уравнения (118) представляет собою производную по t от левой части уравнения (117). Обозначим через $\Psi(t, a, b)$ результат подстановки функций (115) в левую часть уравнения (119). Мы должны написать таким образом два уравнения

$$\Psi(t, a, b)=0; \quad \Psi_t(t, a, b)=0. \tag{120}$$

Исключая из этих равенств t, мы будем иметь соотношение между a и b, т. е. найдем искомую функцию: $b=\omega(a)$. Таким образом, для решения задачи Коши по полному интегралу надо в уравнение полного интеграла подставить функции (115), полученное уравнение продифференцировать по t и из двух построенных таким образом уравнений исключить t. Это приведет нас к соотношению между постоянными a и b. Соответствующий этому соотношению общий интеграл и будет проходить через линию (115).

Можно поступать и иначе Выразим из (120) a и b через t. Подставляя в (119), будем иметь семейство поверхностей, зависящее от одного параметра t. Находя огибающую этого семейства, получим искомую интегральную поверхность, проходящую через линию (115).

Отметим еще связь понятия общего интеграла с характеристическими полосами, которые получаются в результате интегрирования системы (107). Огибающая семейства (111) касается одной из огибаемых вдоль некоторой линии l_a. Проводя вдоль этой линии касательную плоскость, общую огибающей и огибаемой, мы получим некоторую полосу. Эта полоса принадлежит двум интегральным поверхностям, а именно: огибающей и огибаемой, и, следовательно, должна быть характеристической полосой. Мы можем, таким образом, утверждать, что формулы

$$\left.\begin{aligned} u=\varphi(x, y, a, b);\ \varphi_a(x, y, a, b)+\varphi_b(x, y, a, b)\,\omega'(a)=0,\\ p=\varphi_x(x, y, a, b); \quad q=\varphi_y(x, y, a, b) \end{aligned}\right\} \tag{121}$$

определяют, при любом фиксированном a и любом выборе $b=\omega(a)$, решение системы (107), удовлетворяющее условию (106).

Мы можем считать, что формулы (121) определяют четыре из величин x, y, u, p, q, как функции пятой и трех произвольных постоянных a, b и $c=\omega'(a)$. Общий интеграл системы (107) содержит четыре произвольные постоянные. Но, ввиду наличия соотношения (106), семейство всех характеристических полос должно зависеть только от трех произвольных постоянных, что мы и получили согласно формулам (121). В одном из следующих параграфов, для случая любого числа независимых переменных, мы проверим путем непосредственного вычисления тот факт, что уравнения (121) действительно дают решение системы (107).

Выясним возможность определения особого интеграла непосредственно по дифференциальному уравнению без помощи полного интеграла. Дифференцируя тождество (110) по a и b, мы получим

$$F_u\varphi_a + F_p\varphi_{xa} + F_q\varphi_{ya} = 0; \quad F_u\varphi_b + F_p\varphi_{xb} + F_q\varphi_{yb} = 0.$$

Принимая во внимание определение особого интеграла (113), мы можем утверждать, что на особой интегральной поверхности выполнены следующие два равенства:

$$F_p\varphi_{xa} + F_q\varphi_{ya} = 0; \quad F_p\varphi_{xb} + F_q\varphi_{yb} = 0.$$

Будем считать, что определитель написанной однородной относительно F_p и F_q системы на особой интегральной поверхности отличен от нуля, что по существу сводится к предположению о возможности разрешения уравнений (109) относительно a и b. При этом написанная однородная система дает нам

$$F_p = F_q = 0. \tag{122}$$

Таким образом особый интеграл может быть получен путем исключения p и q из следующих трех уравнений:

$$F(x, y, u, p, q) = 0; \, F_p(x, y, u, p, q) = 0; \, F_q(x, y, u, p, q) = 0. \tag{123}$$

Уравнения (122) указывают на невозможность применения теоремы о неявных функциях к уравнению (106) по отношению к переменной p или переменной q. Это показывает на невозможность получения особого интеграла в результате решения задачи Коши, как это мы делали в [9], считая уравнение разрешенным относительно p (или q). К этому же результату мы можем прийти и иным путем. Какую бы кривую мы ни взяли на особой интегральной поверхности, вдоль этой кривой определитель (96), в силу условий (122), будет равен нулю, что и указывает на несуществование определенного решения задачи Коши при любом выборе кривой на поверхности особого интеграла.

15. Примеры. 1. Уравнение

$$u = xp + yq + f(p, q) \tag{124}$$

является аналогом уравнения Клеро, которое мы рассматривали раньше [II; 11] Заменяя p и q на a и b, как нетрудно проверить, получим его полный интеграл

$$u = ax + by + f(a, b).$$

Уравнение

$$u = xp + yq + pq$$

имеет полный интеграл.

$$u = ax + by + ab,$$

и, применяя указанный выше метод, получим особый интеграл:

$$u = -xy.$$

Если мы возьмем на этой поверхности любую линию:

$$x_0 = \varphi(t); \quad y_0 = \psi(t); \quad u_0 = -\varphi(t)\psi(t), \tag{125}$$

то уравнения (86)

$$\varphi(t)p_0 + \psi(t)q_0 + p_0q_0 + \varphi(t)\psi(t) = 0,$$
$$\varphi'(t)\psi(t) + \psi'(t)\varphi(t) + \varphi'(t)p_0 + \psi'(t)q_0 = 0$$

имеют решения $p_0 = -\psi(t)$, $q_0 = -\varphi(t)$, и мы будем иметь вдоль линии (125)

$$F_{p_0} = q + \varphi(t) \equiv 0; \quad F_{q_0} = p + \psi(t) \equiv 0.$$

Для уравнения

$$u = xp + yq - \frac{1}{2}(p^2 + q^2) \tag{124_1}$$

особый интеграл будет

$$u = \frac{1}{2}(x^2 + y^2). \tag{126}$$

Если решить уравнение (124_1) относительно p, то мы получим

$$F = p - x + \sqrt{x^2 + 2qy - 2u - q^2} = 0,$$

и вдоль поверхности (126) частная производная от левой части уравнения по u обращается в бесконечность.

2. Пусть имеется уравнение, содержащее только p и q:

$$f(p, q) = 0.$$

Такое уравнение имеет очевидное решение:

$$u = ax + cy + b,$$

где постоянные a и c должны удовлетворять соотношению $f(a, c) = 0$. Решая его относительно c: $c = f_1(a)$, получим полный интеграл уравнения в виде

$$u = ax + f_1(a)y + b.$$

Это уравнение дает некоторое семейство плоскостей. Общий интеграл будет огибающей семейства плоскостей с одним параметром, т. е. развертывающейся поверхностью [**II**; **153**].

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$p^2 + q^2 = k^2. \tag{127}$$

Принимая во внимание, что направляющий косинус нормали к искомой поверхности с осью u выражается формулой

$$\cos(n, u) = \pm\frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{1 + k^2}},$$

мы видим, что уравнение (127) сводится к требованию, чтобы нормали к искомой поверхности образовывали постоянный угол с осью u. Полный интеграл уравнения представляет собой семейство плоскостей

$$u = ax + \sqrt{k^2 - a^2}\,y + b.$$

Система (68) напишется в виде

$$\frac{dx}{ds}=2p; \quad \frac{dy}{ds}=2q; \quad \frac{du}{ds}=2\,(p^2+q^2); \quad \frac{dp}{ds}=0; \quad \frac{dq}{ds}=0,$$

и ее решение, выраженное через начальные данные, будет

$$x=2p_0s+x_0; \quad y=2q_0s+y_0; \quad u=2\left(p_0^2+q_0^2\right)s+u_0; \quad p=p_0; \quad q=q_0. \quad (128)$$

Мы получим характеристические полосы, если подчиним p_0 и q_0 условию $p_0^2+q_0^2=k^2$. Это будут некоторые прямые, и вдоль этих прямых p и q сохраняют постоянные значения.

Пусть требуется провести интегральную поверхность через окружность

$$x_0=\cos t; \quad y_0=0; \quad u_0=\sin t.$$

Уравнения (86) в данном случае имеют вид

$$p_0^2+q_0^2=k^2; \quad \cos t=-p_0\sin t,$$

откуда

$$p_0=-\operatorname{ctg} t; \quad q_0=\sqrt{k^2-\operatorname{ctg}^2 t}.$$

Подставляя в первые три из уравнений (128), получим параметрическое уравнение искомой поверхности, выраженное через параметры s и t:

$$x=-2s\operatorname{ctg} t+\cos t; \quad y=2s\sqrt{k^2-\operatorname{ctg}^2 t}; \quad u=2k^2s+\sin t.$$

3. Более общим является следующий тип уравнений первого порядка:

$$f_1(x, p)=f_2(y, q).$$

Для нахождения полного интеграла положим, что обе части уравнения равны одной и той же постоянной a: $f_1(x,p)=a$ и $f_2(y,q)=a$ Решая эти уравнения относительно p и q, получим $p=\varphi_1(x,a)$ и $q=\varphi_2(y,a)$, и полный интеграл напишется в виде

$$u=\int\varphi_1(x, a)\,dx+\int\varphi_2(y, a)\,dy+b,$$

где b — вторая произвольная постоянная. В применении к уравнению

$$pq-xy=0 \quad \text{или} \quad \frac{p}{x}=\frac{y}{q} \quad (129)$$

этот прием дает

$$u=\frac{1}{2}ax^2+\frac{1}{2a}y^2+b. \quad (130)$$

Пусть требуется провести интегральную поверхность через линию

$$x=t; \quad y=\frac{1}{t}; \quad u=1.$$

Подставляя в (130) и дифференцируя по t, получим

$$1=\frac{1}{2}at^2+\frac{1}{2at^2}+b; \quad at-\frac{1}{at^3}=0.$$

Исключение t дает $b=0$, и мы получаем семейство интегральных поверхностей с одним параметром

$$u=\frac{1}{2}ax^2+\frac{1}{2a}y^2,$$

и огибающая этого семейства приводит к искомой интегральной поверхности

$$u = xy.$$

Если бы в качестве начального данного мы взяли линию

$$x = t, \quad y = t, \quad u = t^2, \tag{131}$$

то примененный выше прием привел бы нас к уравнениям

$$\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2a} - 1\right)t^2 + b = 0, \quad 2\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2a} - 1\right)t = 0,$$

из которых следует $a = 1$, $b = 0$, и мы не смогли бы найти интегральной поверхности, проходящей через линию (131) Нетрудно видеть, что линию (131) мы можем дополнить до характеристической полосы, полагая $p = t$ и $q = t$. Действительно, функции

$$x = t; \quad y = t; \quad u = t^2, \quad p = t, \quad q = t$$

удовлетворяют уравнению (129) и системе (107).

4. Если уравнение не содержит независимых переменных

$$F(u, p, q) = 0,$$

то можно построить полный интеграл, если искать решение уравнения вида

$$u = \varphi(x + ay), \tag{132}$$

где a — произвольная постоянная В качестве примера рассмотрим уравнение

$$pq - u = 0. \tag{133}$$

Совершая подстановку (132) и полагая $\xi = x + ay$, получим

$$a[\varphi'(\xi)]^2 - \varphi(\xi) = 0,$$

и интегрируя это обыкновенное дифференциальное уравнение, получим полный интеграл уравнения (133):

$$u = \frac{(x + ay + b)^2}{4a}.$$

Система (68) для уравнения (133) имеет вид

$$\frac{dx}{ds} = q; \quad \frac{dy}{ds} = p; \quad \frac{du}{ds} = 2pq; \quad \frac{dp}{ds} = p; \quad \frac{dq}{ds} = q,$$

и ее интегрирование дает

$$x = q_0e^s + (x_0 - q_0); \quad y = p_0e^s + (y_0 - p_0); \quad u = p_0q_0e^{2s} + (u_0 - p_0q_0); \tag{133$_1$}$$

$$p = p_0e^s; \quad q = q_0e^s.$$

Пусть ищется интегральная поверхность, проходящая через прямую:

$$x_0 = t; \quad y_0 = 1; \quad u_0 = t.$$

Для определения p_0 и q_0 имеем уравнения

$$p_0q_0 = t; \quad p_0 = 1,$$

откуда $p_0 = 1$ и $q_0 = t$. Подставляя в первые три из уравнений (133$_1$) и полагая $e^s = v$, получаем параметрические уравнения искомой поверхности, выраженные через параметры v и t

$$x = tv; \quad y = v; \quad u = tv^2,$$

или, в явной форме, $u = xy$.

16. Случай любого числа переменных. *Полным интегралом* уравнения

$$F(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n) = 0 \tag{134}$$

называется решение этого уравнения:

$$u = \varphi(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n), \tag{135}$$

содержащее n произвольных постоянных a_s и такое, что исключение a_s из уравнений

$$p_k = \varphi_{x_k}(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n) \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{135$_1$}$$

и уравнения (135) приводит к уравнению (134). Будем считать, что a_k суть функции $(n-1)$ параметров:

$$a_k = a_k(t_1, \ldots, t_{n-1}) \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{136}$$

Подставляя эти выражения в формулу (135) и исключая $(n-1)$ параметров из n уравнений

$$\begin{gathered} u = \varphi(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n), \\ \varphi_{t_j}(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n) = 0 \quad (j = 1, \ldots, n-1), \end{gathered} \tag{137}$$

мы получаем общий интеграл уравнения (134). Он зависит от выбора n функций (136). Переходим к решению задачи Коши. Пусть требуется найти интегральную поверхность уравнения (134), содержащую заданное многообразие $(n-1)$ измерений:

$$u = u(t_1, \ldots, t_{n-1}); \; x_k = x_k(t_1, \ldots, t_{n-1}) \; (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{138}$$

Решение этой задачи производится совершенно так же, как и в случае двух независимых переменных. Подставляя выражения (138) в формулу (135), мы придем к равенству вида

$$\psi(t_1, \ldots, t_{n-1}, a_1, \ldots, a_n) = 0. \tag{139}$$

Присоединяя к этому равенству еще $(n-1)$ равенств, полученных дифференцированием последнего равенства по $t_1, \ldots, t_{n-1}$:

$$\psi_{t_1} = 0; \quad \psi_{t_2} = 0; \; \ldots; \; \psi_{t_{n-1}} = 0, \tag{140}$$

будем иметь n уравнений, из которых можно определить $a_k (k = 1, 2, \ldots, n)$ как функции параметров $t_1, \ldots, t_{n-1}$, т. е. из этих n уравнений определяются функции (136). Полученные функции подставляем в формулы (137) и, исключая из n уравнений (137) $t_1, \ldots, t_{n-1}$, будем иметь интегральную поверхность, содержащую многообразие (138). Отметим, что в формуле (139) число независимых параметров может оказаться меньше, чем $(n-1)$. Вместо (140) при этом надо дифференцировать по независимым параметрам.

Если фиксировать значение параметров t_j, то n уравнений (137) с $(n+1)$ переменными $(u, x_1, \ldots, x_n)$ определят некоторую линию в $(n+1)$-мерном пространстве. Присоединяя еще уравнения (135_1), дополняем эту линию до полосы первого порядка. Эта полоса принадлежит двум интегральным поверхностям — огибающей поверхности, которая получается исключением параметров t_j из (137), и одной из огибаемых поверхностей. Поэтому эта полоса должна быть характеристической полосой, т. е. должна удовлетворять системе Коши (98). Это даст возможность, зная полный интеграл (135), построить решение системы (98), зависящее от $(2n-1)$ произвольных постоянных. Будем считать для простоты, что a_n есть функция $(a_1, \ldots, a_{n-1})$, причем эти последние играют роль параметров $t_1, \ldots, t_{n-1}$. Формулы (137) и (135_1) примут вид

$$
\begin{gathered}
u = \varphi(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n), \\
\varphi_{a_j} + \varphi_{a_n} b_j = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n-1), \\
p_k = \varphi_{x_k}(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n) \quad (k = 1, 2, \ldots, n),
\end{gathered}
\tag{141}
$$

где через b_j мы обозначим производную от a_n по a_j. Формулы (141) определяют упомянутую выше полосу первого порядка, причем не только $a_1, \ldots, a_n$, но и $b_1, \ldots, b_{n-1}$ можно считать произвольными, поскольку произволен выбор функции $a_n(a_1, \ldots \ldots, a_{n-1})$. Докажем формально, что полоса, определяемая формулами (141), удовлетворяет системе (98).

Подставляя в уравнение (134) вместо u и p_k их выражения (141), мы должны получить тождество относительно x_k и a_k $(k = 1, \ldots, n)$. Дифференцируя это тождество по a_s, получим

$$
\begin{gathered}
U\varphi_{a_j} + \sum_{k=1}^{n} P_k \varphi_{x_k a_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n-1), \\
U\varphi_{a_n} + \sum_{k=1}^{n} P_k \varphi_{x_k a_n} = 0.
\end{gathered}
$$

Умножая последнее равенство на b_j, складывая его с предыдущим и пользуясь (141), мы будем иметь следующие $(n-1)$ равенств:

$$
\sum_{k=1}^{n} P_k (\varphi_{a_j x_k} + \varphi_{a_n x_k} b_j) = 0. \tag{142}
$$

С другой стороны, беря полный дифференциал от левой части второго из уравнений (141), мы получим следующие $(n-1)$ равенств:

$$
\sum_{k=1}^{n} (\varphi_{a_j x_k} + \varphi_{a_n x_k} b_j)\, dx_k = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{143}
$$

Считая, что по крайней мере один из определителей порядка $(n-1)$, составленный из коэффициентов системы (142) или (143), отличен от нуля, мы можем утверждать, что dx_k должны быть пропорциональны P_k, т. е. выполняются соотношения

$$\frac{dx_1}{P_1} = \ldots = \frac{dx_n}{P_n}.$$

Далее из (141) следует, что $du = \sum_{k=1}^{n} p_k\, dx_k$, и мы можем дополнить написанные выше равенства:

$$\frac{dx_1}{P_1} = \ldots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{du}{p_1 P_1 + \ldots + p_n P_n}. \tag{144}$$

Возвращаемся вновь к тождеству, которое получается, если в уравнение (134) подставить вместо u и p_k их выражения (141), и дифференцируем это тождество по x_k:

$$X_k + U\varphi_{x_k} + \sum_{i=1}^{n} P_i \varphi_{x_i x_k} = 0.$$

Умножая на dx_k и заменяя, в силу (144), $P_i dx_k = P_k dx_i$, мы получим

$$(X_k + Up_k)\, dx_k + P_k \sum_{i=1}^{n} \varphi_{x_i x_k}\, dx_i = 0.$$

Но

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_{x_i x_k}\, dx_i = dp_k,$$

и, следовательно,

$$(X_k + Up_k)\, dx_k + P_k\, dp_k = 0, \text{ т. е. } \frac{dx_k}{P_k} = \frac{dp_k}{-(X_k + Up_k)},$$

и мы получаем таким образом окончательно систему

$$\frac{dx_1}{P_1} = \ldots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{du}{p_1 P_1 + \ldots + p_n P_n} =$$
$$= \frac{dp_1}{-(X_1 + Up_1)} = \ldots = \frac{dp_n}{-(X_n + Up_n)}. \tag{145}$$

17. Теорема Якоби. Рассмотрим теперь тот частный случай уравнения (134), когда оно не содержит искомой функции u и разрешено относительно одной из производных. Для симметрии письма обозначим независимые переменные через $t, x_1, \ldots, x_n$ и положим, что уравнение разрешено относительно $p_0 = u_t$, т. е. что оно имеет вид

$$p_0 + H(t, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0. \tag{146}$$

Соответствующая этому уравнению система (145) запишется в виде

$$\frac{dt}{1}=\frac{dx_1}{H_{p_1}}=\ldots=\frac{dx_n}{H_{p_n}}=\frac{dp_1}{-H_{x_1}}=\ldots=\frac{dp_n}{-H_{x_n}}=$$
$$=\frac{du}{p_0+p_1H_{p_1}+\ldots+p_nH_{p_n}}. \qquad (147)$$

Все написанные отношения, кроме последнего, не содержат p_0 и u, и мы получаем так называемую каноническую систему:

$$\frac{dx_k}{dt}=H_{p_k}; \quad \frac{dp_k}{dt}=-H_{x_k} \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

причем x_k и p_k мы считаем функциями от t. Если нам удастся проинтегрировать эту систему, то p_0 найдется из (146), а u определится при помощи квадратуры из уравнения $du=(p_0+p_1H_{p_1}+$ $+\ldots+p_nH_{p_n})\,dt$.

Поскольку уравнение (146) не содержит u, ко всякому решению этого уравнения мы можем прибавить произвольную постоянную. Положим, что мы имеем полный интеграл уравнения (146), который должен содержать $(n+1)$ произвольных постоянных, причем одну из них в виде слагаемого:

$$u=\psi(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n,\ a_1,\ \ldots,\ a_n)-a_0.$$

Применим к данному случаю равенства (141), причем роль a_n у нас будет играть постоянная a_0. Принимая во внимание, что в данном случае $\varphi_{a_0}=-1$, мы получаем общий интеграл канонической системы в следующем виде:

$$\psi_{a_k}=b_k; \quad p_k=\psi_{x_k} \quad (k=1,\ \ldots,\ n).$$

В этом состоит известная теорема Якоби, о которой мы уже упоминали в [**IV**$_1$; **91**].

Отметим, что если уравнение (134) не содержит искомой функции u, но не разрешено относительно какого-либо p_k, т. е. имеет вид

$$F(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ p_1,\ \ldots,\ p_n)=0,$$

то соответствующая этому уравнению система (145) будет

$$\frac{dx_1}{F_{p_1}}=\ldots=\frac{dx_n}{F_{p_n}}=\frac{dp_1}{-F_{x_1}}=\ldots=\frac{dp_n}{-F_{x_n}}=\frac{du}{p_1F_{p_1}+\ldots+p_nF_{p_n}}=ds,$$

и мы получаем опять каноническую систему

$$\frac{dx_k}{ds}=F_{p_k}; \quad \frac{dp_k}{ds}=-F_{x_k} \quad (k=1,\ \ldots,\ n),$$

в которой роль независимого переменного играет вспомогательный параметр s. Если мы сумеем проинтегрировать эту систему, то u найдется с помощью квадратуры.

Изложенная выше теорема Якоби показывает нам, каким образом можно, имея полный интеграл уравнения (146), проинтегрировать соответствующую каноническую систему. Метод Коши, изложенный нами в [12], показывает, что и наоборот, умея проинтегрировать систему (147), мы можем находить решения уравнения (146), удовлетворяющие любым начальным условиям Коши, и, пользуясь этим, нетрудно показать, что, в частности, может быть построен и полный интеграл уравнения (146).

18. Системы двух уравнений первого порядка. Мы привели ряд примеров, когда полный интеграл может быть найден при помощи совершенно элементарных приемов. Возникает вопрос о возможности построения общего метода разыскания полного интеграла для любого уравнения первого порядка. Для изложения такого метода нам необходимо предварительно рассмотреть задачу о нахождении решения двух уравнений первого порядка с одной искомой функцией:

$$F(x, y, u, p, q)=0; \quad \Phi(x, y, u, p, q)=0.$$

Будем считать, что эти уравнения разрешены относительно p и q так, что мы имеем уравнения следующего вида:

$$p=f(x, y, u); \quad q=g(x, y, u). \tag{148}$$

Мы будем называть написанную систему *вполне интегрируемой*, если она имеет решение, зависящее от произвольной постоянной. Выясним необходимое и достаточное условие, при котором это обстоятельство имеет место, и дадим прием нахождения решения, если вышеупомянутое условие выполнено. Дифференцируя первое из уравнений (148) по y, а второе по x, мы получим, очевидно,

$$f_y+f_u q=g_x+g_u p,$$

или, в силу (148),

$$f_y+f_u g=g_x+g_u f. \tag{149}$$

Если написанное соотношение между переменными (x, y, u) не выполнено тождественно, то оно определяет u как функцию от x и y, и только эта функция, не содержащая произвольной постоянной, и может быть решением системы (148). Таким образом, тождественное выполнение соотношения (149) является необходимым условием для того, чтобы система (148) была вполне интегрируемой. Покажем, что оно и достаточно, и одновременно дадим способ нахождения решений системы (148). Мы можем рассматривать первое из уравнений (148), как уравнение с одним независимым переменным x, поскольку y входит в это уравнение как параметр. Интегрируя это уравнение первого порядка, мы получим u, как функцию независимого переменного x, параметра y и произвольной постоянной $C(y)$, которую мы можем считать функцией от y:

$$u = \varphi[x, y, C(y)]. \tag{150}$$

Эта функция должна удовлетворять и второму из уравнений (148), т. е. должно быть выполнено уравнение

$$\varphi_y + \varphi_C \frac{dC}{dy} = g(x, y, u),$$

или

$$\frac{dC}{dy} = \frac{g(x, y, u) - \varphi_y}{\varphi_C}, \tag{151}$$

причем в правой части u надо заменить его выражением (150). Покажем теперь, что если тождественно выполнено соотношение (149), то правая часть (151) не содержит x. Действительно, приравнивая нулю производную от правой части уравнения (151) по x, мы получим

$$(g_x + g_u\varphi_x - \varphi_{yx})\varphi_C - \varphi_{Cx}(g - \varphi_y) = 0. \tag{152}$$

Но, поскольку функция (150) удовлетворяет первому из уравнений (148), мы имеем следующие очевидные соотношения:

$$\varphi_x = f; \quad \varphi_{yx} = f_y + f_u\varphi_y; \quad \varphi_{Cx} = f_u\varphi_C,$$

и с помощью этих соотношений условие (152) может быть записано в виде

$$(g_x + g_u f - f_y - f_u\varphi_y)\varphi_C - f_u\varphi_C(g - \varphi_y) = 0,$$

и оно, очевидно, выполнено, поскольку мы считаем соотношение (149) выполненным тождественно. Таким образом, при этом уравнение (151) представляет собою уравнение первого порядка относительно $C(y)$, интегрируя которое, мы получим выражение C через y и произвольную постоянную b. Подставляя это выражение в формулу (150), будем иметь решение системы (148), содержащее одну произвольную постоянную. Таким образом, *необходимым и достаточным условием полной интегрируемости системы* (148) *является тождественное выполнение соотношений* (149). Если это условие выполнено, то интегрирование системы (148) приводится к интегрированию двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, и общее решение системы (148) содержит одну произвольную постоянную.

В непосредственной связи с решенной задачей стоит задача интегрирования уравнения в полных дифференциалах:

$$P\,dx + Q\,dy + R\,du = 0, \tag{153}$$

где P, Q и R — заданные функции (x, y, u). Это уравнение непосредственно приводится к системе (148), если положить

$$f = -\frac{P}{R}; \quad g = -\frac{Q}{R},$$

и условие интегрируемости (149) приводит в данном случае к следующему соотношению между коэффициентами:

$$P(R_y - Q_u) + Q(P_u - R_x) + R(Q_x - P_y) = 0.$$

Мы уже раньше указывали на это соотношение, как необходимое и достаточное условие полной интегрируемости уравнения (153) [II; 79].

19. Метод Лагранжа — Шарпи. Этот метод дает общий прием построения полного интеграла уравнения с частными производными первого порядка при двух независимых переменных:

$$F(x, y, u, p, q) = 0. \tag{154}$$

Постараемся подыскать второе уравнение вида

$$\Phi(x, y, u, p, q) = a, \tag{155}$$

где a — произвольная постоянная, так, чтобы уравнения (154) и (155) были разрешимы относительно p и q и чтобы после разрешения полученная система вида (148) была вполне интегрируемой. Если это нам удастся сделать, то, интегрируя полученную систему, мы введем еще одну произвольную постоянную b и таким образом получим полный интеграл уравнения (154). Условие полной интегрируемости (149) может быть записано в виде

$$p_y + p_u q = q_x + q_u p. \tag{156}$$

Нам надо вычислить все частные производные, входящие в это тождество, применяя правила дифференцирования неявных функций p и q от переменных (x, y, u), определяемых уравнениями (154) и (155). Дифференцируя соотношения (154) и (155) по u, мы получим

$$F_u + F_p p_u + F_q q_u = 0; \quad \Phi_u + \Phi_p p_u + \Phi_q q_u = 0,$$

откуда

$$p_u = -\frac{\begin{vmatrix} F_u, & F_q \\ \Phi_u, & \Phi_q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_p, & F_q \\ \Phi_p, & \Phi_q \end{vmatrix}}; \quad q_u = -\frac{\begin{vmatrix} F_p, & F_u \\ \Phi_p, & \Phi_u \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_p, & F_q \\ \Phi_p, & \Phi_q \end{vmatrix}}.$$

Совершенно аналогичным образом, дифференцируя по x и y, мы будем иметь

$$q_x = -\frac{\begin{vmatrix} F_p, & F_x \\ \Phi_p, & \Phi_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_p, & F_q \\ \Phi_p, & \Phi_q \end{vmatrix}}; \quad p_y = -\frac{\begin{vmatrix} F_y, & F_q \\ \Phi_y, & \Phi_q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_p, & F_q \\ \Phi_p, & \Phi_q \end{vmatrix}},$$

и условие интегрируемости (156) запишется в виде

$$-\begin{vmatrix} F_y, & F_q \\ \Phi_y, & \Phi_q \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} F_u, & F_q \\ \Phi_u, & \Phi_q \end{vmatrix} q + \begin{vmatrix} F_p, & F_x \\ \Phi_p, & \Phi_x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} F_p, & F_u \\ \Phi_p, & \Phi_u \end{vmatrix} p = 0,$$

или

$$\begin{vmatrix} F_p, & F_x + F_u p \\ \Phi_p, & \Phi_x + \Phi_u p \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} F_q, & F_y + F_u q \\ \Phi_q, & \Phi_y + \Phi_u q \end{vmatrix} = 0. \qquad (157)$$

Раскрывая определители и пользуясь обозначениями из [6], мы придем к следующему уравнению с частными производными для определения искомой функции Φ:

$$P\Phi_x + Q\Phi_y + (pP + qQ)\,\Phi_u - (X + Up)\,\Phi_p - (Y + Uq)\,\Phi_q = 0. \qquad (158)$$

Строго говоря, это уравнение должно быть выполнено, если в нем заменить p и q их выражениями из (154) и (155). Но мы будем требовать большего, а именно того, чтобы оно выполнялось тождественно. Соответствующая линейному однородному уравнению (158) система обыкновенных дифференциальных уравнений есть как раз система Коши (107):

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{du}{pP + qQ} = \frac{dp}{-(X + Up)} = \frac{dq}{-(Y + Uq)}. \qquad (159)$$

Нам достаточно найти один какой-либо интеграл этой системы, такой, чтобы уравнения (154) и (155) были разрешимы относительно и p и q.

Мы знаем, что система (159) имеет очевидный интеграл $F = C$. Наличие этого интеграла может облегчить нахождение другого интеграла системы. При этом мы можем пользоваться не только указанным интегралом, но и просто соотношением $F = 0$.

Если уравнение (154) не содержит искомой функции u, т. е. имеет вид $F(x, y, p, q) = 0$, то мы можем искать интеграл также независящим от u:

$$\Phi(x, y, p, q) = a.$$

Условие (157) при этом запишется в виде

$$\begin{vmatrix} F_p, & F_x \\ \Phi_p, & \Phi_x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} F_q, & F_y \\ \Phi_q, & \Phi_y \end{vmatrix} = 0, \qquad (160)$$

или, в раскрытом виде

$$(F_p\Phi_x - F_x\Phi_p) + (F_q\Phi_y - F_y\Phi_q) = 0,$$

что приведет к разысканию интеграла системы

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dp}{-X} = \frac{dq}{-Y}. \qquad (161)$$

Выражение, стоящее в левой части формулы (160), называется обычно *скобкой Пуассона* функций F и Φ и обозначается символом (F, Φ). Выражение, стоящее в левой части формулы (157), называется *скобкой Майера* функций F и Φ и обозначается символом $[F, \Phi]$. Если мы введем условное обозначение для любой функции ω, зависящей от переменных (x, y, u, p, q), а именно, положим

$$\frac{d\omega}{dx} = \omega_x + \omega_u p; \quad \frac{d\omega}{dy} = \omega_y + \omega_u q,$$

то скобка Майера может быть записана в виде

$$[F, \Phi] = \begin{vmatrix} F_p, & \dfrac{dF}{dx} \\ \Phi_p, & \dfrac{d\Phi}{dx} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} F_q, & \dfrac{dF}{dy} \\ \Phi_q, & \dfrac{d\Phi}{dy} \end{vmatrix}. \qquad (162)$$

Говорят, что две *функции F и Φ находятся в инволюции*, если они обращают в нуль скобку Пуассона или скобку Майера. В первом случае эти функции должны быть функциями от переменных (x, y, p, q), а во втором случае к этим аргументам добавляется еще u. Сущность метода Лагранжа — Шарпи состоит, таким образом, в подыскании такого интеграла системы (159) или (161), который находился бы в инволюции с F.

Отметим одно обстоятельство, которое бросается в глаза при сравнении методов Коши и Лагранжа. При применении метода Коши мы должны находить все интегралы системы (159), а в методе Лагранжа — Шарпи мы должны найти только один интеграл этой системы. Но, имея полный интеграл уравнения (154), который затем получится из метода Лагранжа — Шарпи, мы сможем вполне проинтегрировать систему (159).

20. Системы линейных уравнений. Для обобщения метода Лагранжа — Шарпи на случай любого числа независимых переменных нам надо предварительно рассмотреть вопрос об интегрировании системы линейных однородных уравнений с одной искомой функцией. Рассмотрим такую систему, содержащую m уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} X_1(u) = a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + \ldots + a_{1n}p_n = 0, \\ X_2(u) = a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + \ldots + a_{2n}p_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_m(u) = a_{m1}p_1 + a_{m2}p_2 + \ldots + a_{mn}p_n = 0, \end{array}\right\} \qquad (163)$$

где $p_k = u_{x_k}$, коэффициенты a_{ik} мы считаем непрерывными и непрерывно дифференцируемыми функциями независимых переменных x_s и через $X_k(u)$ обозначили для краткости левую часть k-го уравнения. Ставится вопрос об отыскании функции u, которая удовлетворяла бы одновременно всем уравнениям системы (163). Говоря о решении системы (163), мы исключаем очевидное решение $u = \text{const}$, которое для нас не имеет интереса. Мы предполагаем, что уравнения (163) линейно-независимы, т. е. что не существует множителей λ_k, которые могут быть функциями x_s, таких, что среди них есть отличные от нуля, и имеет место соотношение

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k X_k(u) = 0,$$

тождественное относительно x_s в некоторой области изменения этих переменных и p_s. Если бы такие множители существовали и хоть один из них был отличным от нуля, то левая часть одного из уравнений (163) выражалась бы линейно через левые части остальных уравнений. Это уравнение было бы следствием остальных, и мы могли бы его вычеркнуть. Положим, что $m \geqslant n$, и рассмотрим первые n уравнений системы. Поскольку эти уравнения линейно-независимы, определитель, составленный из их коэффициентов, должен быть отличным от нуля Но тогда однородная относительно p_s система имеет только нулевое решение $p_1 = \ldots = p_n = 0$, откуда следует, что $u = \text{const}$, т. е. *при $m \geqslant n$ система не имеет решений* (кроме очевидного). Мы будем таким образом в дальнейшем предполагать, что $m < n$.

Мы можем образовать новые линейные однородные уравнения, которые являются следствием уравнений (163), но могут оказаться линейно-независимыми с уравнениями (163). Предварительно установим ряд элементарных тождеств Если u_1 и u_2 — любые две функции независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$, мы имеем следующие два очевидных тождества:

$$X_k(u_1 + u_2) = X_k(u_1) + X_k(u_2); \quad X_k(u_1 u_2) = u_1 X_k(u_2) + u_2 X_k(u_1). \tag{164}$$

Заменим в выражении $X_i(u)$ функцию u левой частью k-го уравнения, т. е. выражением $X_k(u)$. Принимая во внимание (164), мы получим

$$X_i(X_k(u)) = \sum_{s=1}^{n} X_i(a_{ks}) u_{x_s} + \sum_{s=1}^{n} a_{ks} X_i(u_{x_s}),$$

и совершенно так же

$$X_k(X_i(u)) = \sum_{s=1}^{n} X_k(a_{is}) u_{x_s} + \sum_{s=1}^{n} a_{is} X_k(u_{x_s}).$$

Далее, очевидно, можно написать, пользуясь производными второго порядка функции u:

$$\sum_{s=1}^{n} a_{ks} X_i(u_{x_s}) = \sum_{s=1}^{n} a_{ks} \sum_{t=1}^{n} a_{it} u_{x_s x_t} = \sum_{s,\, t=1}^{n} a_{it} a_{ks} u_{x_s x_t},$$

и последнее выражение не меняется при перестановке значков i и k, т. е

$$\sum_{s=1}^{n} a_{is} X_k(u_{x_s}) = \sum_{s=1}^{n} a_{ks} X_i(u_{x_s}),$$

и мы получаем следующую формулу:

$$X_i(X_k(u)) - X_k(X_i(u)) = \sum_{s=1}^{n} [X_i(a_{ks}) - X_k(a_{is})] u_{x_s}, \tag{165}$$

правая часть которой представляет собой линейную однородную функцию от $p_s = u_{x_s}$ с коэффициентами, зависящими от x_k. Распространим понятие скобок Пуассона на случай любого числа независимых переменных. Если φ и ψ — любые функции переменных $x_1, \ldots, x_n$ и $p_1, \ldots, p_n$, то мы определяем, по аналогии с прежним определением, скобку Пуассона этих двух функций следующим равенством:

$$(\varphi, \psi) = \sum_{j=1}^{n} \left(\varphi_{p_j}\psi_{x_j} - \varphi_{x_j}\psi_{p_j}\right). \tag{166}$$

Положим в этой формуле $\varphi = X_i(u)$ и $\psi = X_k(u)$. При этом

$$\varphi_{p_j} = a_{ij}, \quad \psi_{x_j} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial a_{ks}}{\partial x_j} p_s; \quad \varphi_{x_j} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial a_{is}}{\partial x_j} p_s; \quad \psi_{p_j} = a_{kj}.$$

Подставляя это в правую часть формулы (166), получим

$$(X_i(u), X_k(u)) = \sum_{s=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial a_{ks}}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \frac{\partial a_{is}}{\partial x_j} \right) p_s,$$

или что то же

$$(X_i(u), X_k(u)) = \sum_{s=1}^{n} [X_i(a_{ks}) - X_k(a_{is})]\, p_s.$$

Сравнивая с правой частью формулы (165), мы приходим к важному тождеству

$$X_i(X_k(u)) - X_k(X_i(u)) = (X_i(u), X_k(u)). \tag{167}$$

Если u удовлетворяет всем уравнениям системы (163), т. е.

$$X_l(u) = 0 \quad (l = 1, \ldots, m),$$

то эта функция должна удовлетворять и линейному однородному уравнению

$$(X_i(u), X_k(u)) = 0 \tag{168}$$

при любом выборе значков i и k. Придавая значкам всевозможные значения, мы составим таким образом $\frac{m(m-1)}{2}$ новых линейных однородных уравнений, которые являются, в указанном смысле, следствием системы (163). Некоторые из этих новых уравнений могут превратиться в тождество, т. е. все их коэффициенты при p_k могут оказаться равными нулю. Непревратившиеся в тождество новые уравнения будем присоединять в некотором определенном порядке к уравнениям системы (163), испытывая каждый раз, не является ли присоединяемое уравнение линейной комбинацией уже имеющихся уравнений. Если это так, то такое уравнение мы, конечно, не будем присоединять. Проделывая это со всеми уравнениями, мы получим новую систему, в которой число уравнений может оказаться бо́льшим, чем m. Для новой системы будем опять составлять скобки Пуассона из левых частей, не повторяя, конечно, тех скобок Пуассона, которые мы уже составляли для исходной системы. Полученные новые уравнения будем, как и выше, присоединять к системе. Продолжая этот прием, мы можем иметь два различных случая. Может случиться, что мы придем к такой системе, в которой число уравнений будет равно n. Такая система имеет только тривиальное решение

$u = \mathrm{const}$, а следовательно, и первоначальная наша система имеет только тривиальное решение. Вторая возможность состоит в том, что мы придем к такой системе с числом уравнений, меньшим, чем n, для которой все новые уравнения, получаемые при помощи скобок Пуассона, оказываются линейными комбинациями уравнений самой системы. Такая система называется *полной*. Таким образом, из предыдущих рассуждений следует, что наша *первоначальная система или имеет только тривиальное решение, или равносильна некоторой полной системе*, и мы приходим, таким образом, к задаче интегрирования полной системы. Будем предполагать, что наша первоначально написанная система (163) является уже полной, т. е. всевозможные скобки Пуассона $(X_i(u),\ X_k(u))$ суть линейные комбинации левых частей уравнений

$$(X_i(u),\ X_k(u)) = \sum_{l=1}^{m} \beta_l^{(i,\,k)} X_l(u), \tag{169}$$

где коэффициенты $\beta_l^{(i,\,k)}$ суть функции x_k, или эти скобки обращаются тождественно в нуль.

21. Полные и якобиевы системы. Выясним некоторые основные свойства полных систем. Введем вместо x_k новые независимые переменные

$$y_k = \varphi_k(x_1, \ldots, x_n) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

причем мы считаем, что написанное преобразование разрешимо относительно x_k. В новых независимых переменных система (163) будет иметь вид

$$Y_j(u) = b_{j1}\frac{\partial u}{\partial y_1} + \ldots + b_{jn}\frac{\partial u}{\partial y_n} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m),$$

где, согласно правилу дифференцирования сложных функций,

$$b_{jl} = \sum_{s=1}^{n} a_{js}\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_s} = X_j(y_l). \tag{170}$$

При любом выборе функций u мы имеем $Y_j(u) = X_j(u)$, причем правая часть выражена через независимые переменные x_k, а левая — через независимые переменные y_k. Следовательно, при любых значках i и k

$$X_i(X_k(u)) = Y_i(Y_k(u))$$

и

$$X_i(X_k(u)) - X_k(X_i(u)) = Y_i(Y_k(u)) - Y_k(Y_i(u)).$$

Принимая во внимание (167) и (169), мы можем написать:

$$Y_i(Y_k(u)) - Y_k(Y_i(u)) = \sum_{l=1}^{m} \gamma_l^{(i,\,k)} Y_l(u),$$

где коэффициенты $\gamma_l^{(i,\,k)}$ получаются из коэффициентов $\beta_l^{(i,\,k)}$ простым переходом к новым независимым переменным. Мы видим, таким образом, что *если первоначальная система была полной, то и новая система, полученная в результате любой замены независимых переменных, также будет полной.*

Выясним теперь второе свойство полных систем. Составим m линейных комбинаций левых частей уравнений (163):

$$Z_j(u) = d_{j1}X_1(u) + \ldots + d_{jm}X_m(u) \qquad (j = 1, \ldots, m),$$

причем коэффициенты d_{jl} считаются зависящими от x_k и определитель, составленный из этих коэффициентов, считается отличным от нуля. При этих предположениях система уравнений

$$Z_j(u) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m) \tag{171}$$

будет, очевидно, равносильна системе (163). Будем называть новую систему *эквивалентной* системе (163). Покажем, что *если первоначальная система была полной, то и любая эквивалентная ей система будет полной.* Действительно, скобка Пуассона $(Z_i(u),\ Z_k(u))$ будет представлять собою сумму выражений вида

$$d_{ip}X_p(d_{kq}X_q(u)) - d_{kq}X_q(d_{ip}X_p(u)),$$

или, в силу (164), сумму выражений вида

$$\begin{aligned} d_{ip}[X_p(d_{kq})X_q(u) + d_{kq}X_p(X_q(u))] - d_{kq}[X_q(d_{ip})X_p(u) + \\ + d_{ip}X_q(X_p(u))] = d_{ip}X_p(d_{kq})X_q(u) - d_{kq}X_q(d_{ip})X_p(u) + \\ + d_{ip}d_{kq}[X_p(X_q(u)) - X_q(X_p(u))]. \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что все выражения $X_p(X_q(u)) - X_q(X_p(u))$ суть линейные комбинации $X_l(u)$, мы видим, что и скобка Пуассона $(Z_i(u),\ Z_k(u))$ выражается линейно через $X_l(u)$, а следовательно, и через $Z_l(u)$, что и доказывает полноту системы (171). Введем теперь новое понятие, которое является частным случаем понятия полноты, а именно: мы будем называть систему (163) *якобиевой системой*, если для нее все скобки Пуассона $(X_i(u),\ X_k(u))$ обращаются тождественно в нуль, т. е. если в этих скобках все коэффициенты при p_s равны тождественно нулю. Нетрудно при помощи элементарных алгебраических операций преобразовать полную систему в якобиеву. Действительно, рассмотрим первоначальную систему (163), которую мы считаем полной. Поскольку уравнения этой системы линейно-независимы, таблица ее коэффициентов имеет ранг m, и мы можем решить уравнения системы относительно m из величин p_s. Не ограничивая общности, мы можем считать, что уравнения системы разрешимы относительно $p_1, \ldots, p_m$, т. е. вместо системы (163) мы можем написать эквивалентную ей систему вида

$$\left.\begin{aligned} p_1 + c_{1,\,m+1}p_{m+1} + \ldots + c_{1,n}\,p_n &= 0, \\ p_2 + c_{2,\,m+1}p_{m+1} + \ldots + c_{2,n}\,p_n &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_m + c_{m,\,m+1}p_{m+1} + \ldots + c_{m,n}\,p_n &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{172}$$

Эта система, по доказанному выше, должна быть полной. Покажем, что она будет и якобиевой. Обозначим, по-прежнему, через $X_i(u)$ левые части уравнений написанной системы. Мы должны показать, что в формуле (169) все коэффициенты $\beta_l^{(i,\,k)}$ равны тождественно нулю. Из вида системы (172) и определения скобок Пуассона непосредственно следует, что выражение, стоящее в левой части (169), не содержит p_s при $s \leqslant m$, а в правой части коэффициент при p_s $(s \leqslant m)$ равен, очевидно, $\beta_s^{(i,\,k)}$. Отсюда и вытекает непосредственно, что все коэффициенты $\beta_s^{(i,\,k)}$ должны быть равны нулю, т. е. система (172) действительно является якобиевой. Заметим, что не всякая якобиева система должна обязательно иметь вид (172), но, в силу доказанного выше, *при приведении полной системы к виду* (172) *она оказывается якобиевой.*

22. Интегрирование полных систем. Вместо того чтобы интегрировать полную систему (163), мы можем интегрировать равносильную ей якобиеву систему (172).

Рассмотрим первое из уравнений этой системы и соответствующую ему систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_1}{1} = \frac{dx_2}{0} = \ldots = \frac{dx_m}{0} = \frac{dx_{m+1}}{c_{1,\,m+1}} = \ldots = \frac{dx_n}{c_{1,\,n}}.$$

Эта система должна иметь $(n-1)$ независимых интегралов

$$\varphi_2(x_1, \ldots, x_n) = C_2; \ldots; \varphi_n(x_1, \ldots, x_n) = C_n,$$

причем левые части написанных уравнений должны быть решениями первого из уравнений (172). Заметим, что мы можем непосредственно написать $(m-1)$ интегралов, а именно:

$$x_2 = \text{const}; \ldots; x_m = \text{const}.$$

Введем $(n-1)$ новых переменных:

$$y_s = \varphi_s(x_1, \ldots, x_n) \quad (s = 2, \ldots, n). \tag{173}$$

В силу независимости интегралов, написанные уравнения должны быть разрешимы относительно $(n-1)$ из переменных x_k, и мы можем выбрать функцию $\varphi_1(x_1, \ldots, x_n)$ так, чтобы полная замена переменных

$$y_s = \varphi_s(x_1, \ldots, x_n) \quad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

была разрешима относительно всех переменных x_k. Если, например, уравнения (173) разрешимы относительно $x_1, \ldots, x_{n-1}$, то нам достаточно взять $\varphi_1 = x_n$. Преобразуем систему (172) к новым независимым переменным. Пользуясь формулой (170), а также тем обстоятельством, что $\varphi_2, \ldots, \varphi_n$ суть решения первого из уравнений (172), мы убеждаемся в том, что первое из написанных уравнений приведется к виду $\frac{\partial u}{\partial y_1} = 0$. Пользуясь этим уравнением, мы можем зачеркнуть все члены, содержащие $\frac{\partial u}{\partial y_1}$, в остальных $(m-1)$ уравнениях и, в силу линейной независимости уравнений, можем решить эти уравнения относительно некоторых $(m-1)$ из производных $\frac{\partial u}{\partial y_s}$. Не ограничивая общности, можно считать, что мы можем решить оставшиеся уравнения относительно $\frac{\partial u}{\partial y_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial y_m}$. Таким образом, преобразованная система будет иметь вид

$$\left.\begin{aligned} Y_1(u) &= \frac{\partial u}{\partial y_1} = 0, \\ Y_2(u) &= \frac{\partial u}{\partial y_2} + h_{2,\,m+1}\frac{\partial u}{\partial y_{m+1}} + \ldots + h_{2n}\frac{\partial u}{\partial y_n} = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Y_m(u) &= \frac{\partial u}{\partial y_m} + h_{m,\,m+1}\frac{\partial u}{\partial y_{m+1}} + \ldots + h_{mn}\frac{\partial u}{\partial y_n} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{174}$$

Первоначальная система была якобиевой и, следовательно, полной, а потому и преобразованная должна быть полной. Но поскольку она разрешена относительно производных, она должна быть и якобиевой. Отметим, между прочим, что из рассуждений [21] непосредственно вытекает, что преобразование якобиевой системы к новым независимым переменным приводит также к якобиевой системе.

Первое из уравнений (174) показывает, что функция u не должна зависеть от y_1. Докажем, что коэффициенты в остальных уравнениях системы (174) не содержат y_1. Действительно, всякое выражение:

$$Y_1(Y_i(u)) - Y_i(Y_1(u)) = \frac{\partial h_{i,\,m+1}}{\partial y_1}\frac{\partial u}{\partial y_{m+1}} + \ldots + \frac{\partial h_{in}}{\partial y_1}\frac{\partial u}{\partial y_n},$$

должно обращаться тождественно в нуль в силу того, что система (174) якобиева, что и доказывает высказанное выше утверждение. Мы можем, таким образом, в системе (174) откинуть первое уравнение и интегрировать остальные в предположении, что u не зависит от y_1. Мы приходим, таким образом, к замкнутой системе $(m-1)$ уравнений с $(n-1)$ независимыми переменными. Проделывая с этой системой указанную выше операцию, мы придем к замкнутой системе $(m-2)$ уравнений с $(n-2)$ независимыми переменными и т. д. Окончательно мы придем к одному уравнению для функции u от $(n-m+1)$ независимых переменных. Обозначая эти переменные опять через $y_1, \ldots, y_{n-m+1}$, мы будем иметь, таким образом, уравнение вида

$$\frac{\partial u}{\partial y_1}+g_2\frac{\partial u}{\partial y_2}+\ldots+g_{n-m+1}\frac{\partial u}{\partial y_{n-m+1}}=0,$$

где независимые переменные y_l являются функциями первоначальных независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$. Соответствующая последнему уравнению система обыкновенных дифференциальных уравнений будет иметь $(n-m)$ независимых интегралов:

$$\psi_1(y_1, \ldots, y_{n-m+1})=C_1; \quad \ldots; \quad \psi_{n-m}(y_1, \ldots, y_{n-m+1})=C_{n-m},$$

и общее решение этого уравнения представится в виде

$$u=\Psi(\psi_1, \ldots, \psi_{n-m}),$$

где Ψ — произвольная функция. Эта же формула дает и общее решение первоначальной системы (163).

23. Скобки Пуассона. Мы используем полученные выше результаты для построения метода нахождения полного интеграла нелинейного уравнения первого порядка в случае любого числа независимых переменных. Предварительно нам надо будет рассмотреть, как и в случае двух независимых переменных, одну вспомогательную задачу. Пусть требуется определить функцию $u(x_1, \ldots, x_n)$, если заданы ее частные производные как функции независимых переменных x_k:

$$p_k=p_k(x_1, \ldots, x_n) \qquad (k=1, 2, \ldots, n). \tag{175}$$

Принимая во внимание независимость результата дифференцирования от порядка, мы видим, что функции (175) должны удовлетворять следующим $n(n-1):2$ соотношениям:

$$\frac{\partial p_i(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_k}=\frac{\partial p_k(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i}. \tag{176}$$

Эти соотношения не только необходимы, но и достаточны для определения функции u. Мы это доказывали раньше для случаев $n=2$ и $n=3$ [II; 76]. Обобщая формулу Стокса на случай n-мерного пространства, мы обнаружим, как и в случае $n=3$, что при выполнении условий (176) криволинейный интеграл

$$u(x_1, \ldots, x_n)=\int^{(x_1, \ldots, x_n)}\sum_{s=1}^{n}p_s(x_1, \ldots, x_n)\,dx_s$$

не зависит от пути и дает функцию u, имеющую частные производные (175).

Можно доказать достаточность условий (176) в общем случае, применяя метод полной индукции. Будем считать, что достаточность условий (176) доказана в случае $(n-1)$ независимых переменных, и докажем, что тогда это же утверждение будет справедливо и для n переменных. Итак, положим, что функции (175) удовлетворяют соотношениям (176). Принимая во внимание, что мы считаем доказанным наше утверждение для $(n-1)$ независимых переменных, можем, пользуясь первыми $(n-1)$ из функций (175), построить функцию u независимых переменных $(x_1, \ldots, x_{n-1})$, имеющую частные производные $u_{x_k} = p_k(x_1, \ldots, x_n)$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$. Эта функция будет содержать x_n в качестве параметра, ибо эта переменная входит в p_k. Кроме того, мы можем добавить к функции u произвольную постоянную, которую можем считать функцией параметра x_n.

Таким образом мы получим функцию

$$u(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) + c(x_n),$$

которая удовлетворяет $(n-1)$ условиям

$$u_{x_k} = p_k(x_1, \ldots, x_n) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Остается еще подобрать $c(x_n)$ так, чтобы удовлетворялось условие $u_{x_n} = p_n(x_1, \ldots, x_n)$, что приводит нас к уравнению

$$\frac{dc(x_n)}{dx_n} = p_n(x_1, \ldots, x_n) - u_{x_n},$$

и нам остается убедиться в том, что правая часть написанного уравнения содержит только x_n. Дифференцируя по x_k при $k < n$ и принимая во внимание (176) и то, что $u_{x_k} = p_k$, мы получим

$$\frac{\partial p_n}{\partial x_k} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_k} = \frac{\partial p_n}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial p_n}{\partial x_k} - \frac{\partial p_k}{\partial x_n} = 0,$$

что и требовалось доказать.

Положим теперь, что частные производные p_k определены неявным образом при помощи n уравнений:

$$F_s(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = a_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{177}$$

которые мы считаем разрешимыми относительно p_k. Докажем, что для того чтобы p_k, определяемые из уравнений (177), удовлетворяли соотношениям (176), необходимо и достаточно, чтобы все скобки Пуассона из левых частей равенств (177) обращались тождественно в нуль, т. е. мы должны иметь следующие $\frac{n(n-1)}{2}$ тождеств относительно x_i и p_i:

$$(F_i, F_k) = \sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial F_i}{\partial p_s}\frac{\partial F_k}{\partial x_s} - \frac{\partial F_i}{\partial x_s}\frac{\partial F_k}{\partial p_s}\right) = 0. \tag{178}$$

При этом мы предполагаем, что в уравнениях (177) правые части суть произвольные постоянные.

Возьмем два из уравнений (177) и продифференцируем их по независимому переменному x_s:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_s} + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F_i}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial x_s} = 0; \quad \frac{\partial F_k}{\partial x_s} + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F_k}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial x_s} = 0.$$

Умножая первое из этих уравнений на $\frac{\partial F_k}{\partial p_s}$, второе на $\frac{\partial F_i}{\partial p_s}$, вычитая из второго первое и суммируя по s, мы получим

$$(F_i, F_k) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial F_k}{\partial p_j}\frac{\partial F_i}{\partial p_s}\frac{\partial p_j}{\partial x_s} - \sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial F_i}{\partial p_j}\frac{\partial F_k}{\partial p_s}\frac{\partial p_j}{\partial x_s} = 0.$$

Меняя во второй сумме обозначение переменных суммирования, мы можем переписать последнюю формулу в виде

$$(F_i, F_k)+\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial F_k}{\partial p_j}\frac{\partial F_i}{\partial p_s}\left(\frac{\partial p_j}{\partial x_s}-\frac{\partial p_s}{\partial x_j}\right)=0. \tag{179}$$

Если p_k удовлетворяет соотношениям (176), то из последней формулы непосредственно вытекает, что должны быть выполнены при любых значках тождества (178). Положим теперь наоборот, что выполнены тождества (178), и докажем, что p_k, определяемые формулами (177), должны удовлетворять соотношениям (176). Если тождества (178) выполнены, то формула (179) переписывается в виде

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial F_k}{\partial p_j}\frac{\partial F_i}{\partial p_s}\left(\frac{\partial p_j}{\partial x_s}-\frac{\partial p_s}{\partial x_j}\right)=0,$$

причем мы можем придавать любые значения значкам i и k. Придавая значку k значения $k=1, 2, \ldots, n$, мы получим n равенств, которые можем рассматривать как n однородных уравнений относительно n величин

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial F_i}{\partial p_s}\left(\frac{\partial p_j}{\partial x_s}-\frac{\partial p_s}{\partial x_j}\right)\qquad (j=1, 2, \ldots, n). \tag{180}$$

Определитель этой однородной системы представляет собою функциональный определитель от функций F_s по переменным p_s, и мы считаем его отличным от нуля [система (177) разрешима относительно p_s]. Следовательно, мы можем утверждать, что величины (180) должны равняться нулю. Фиксируя значок j и придавая i значения $i=1, 2, \ldots, n$, мы получим, таким образом, опять однородную систему относительно величин

$$\frac{\partial p_j}{\partial x_s}-\frac{\partial p_s}{\partial x_j}\qquad (s=1, 2, \ldots, n), \tag{181}$$

определитель которой опять представляет собою функциональный определитель от F_s по p_s. Отсюда непосредственно вытекает, что все величины (181) должны обращаться в нуль, что мы и хотели доказать. Итак, *для того чтобы система* (177) *определяла p_k, которые являются частными производными некоторой функции u, необходимо и достаточно, чтобы функции F_i находились попарно в инволюции.* Мы предполагали, что правые части уравнений (177) суть произвольные постоянные, и, в связи с этим, было необходимо требовать, чтобы соотношения (178) выполнялись тождественно. Если мы фиксируем значение некоторых из этих постоянных, то достаточно потребовать, чтобы соотношения (178) выполнялись в силу полученных таким образом уравнений.

Отметим еще некоторые элементарные свойства скобок Пуассона. Если φ и ψ — две какие-либо функции переменных x_k и p_k и a и b — числа, то из определения скобок Пуассона непосредственно вытекают следующие соотношения:

$$(\varphi, \varphi)=0;\quad (\psi, \varphi)=-(\varphi, \psi);\quad (0, \varphi)=0;\quad (a\varphi, b\psi)=ab\,(\varphi, \psi).$$

Пусть ω — еще некоторая функция упомянутых выше переменных. Имеет место следующее тождество:

$$((\varphi, \psi), \omega)+((\psi, \omega), \varphi)+((\omega, \varphi), \psi)=0, \tag{182}$$

которое называется обычно тождеством Пуассона. Написанное тождество содержит двойные скобки Пуассона. Для составления первого слагаемого в написанной формуле мы должны составить скобку Пуассона (φ, ψ) и затем, пользуясь полученной таким образом функцией, составить скобку $((\varphi, \psi), \omega)$. Чтобы проверить тождество (182), заметим прежде всего, что каждое из слагаемых этого тождества содержит производные первого порядка. Ввиду симметрии написанного тождества относительно всех трех функций, а также относительно переменных x_k и p_k, чтобы проверить написанное тождество, нам достаточно убедиться, что в левой части сократятся все члены, содержащие $\frac{\partial\varphi}{\partial p_k}$. Пользуясь определением скобок Пуассона, мы убеждаемся в том, что коэффициент при $\frac{\partial\varphi}{\partial p_k}$ в левой части тождества будет

$$\sum_{s=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial p_s}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_k}\right)\frac{\partial\omega}{\partial x_s}-\frac{\partial}{\partial x_s}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_k}\right)\frac{\partial\omega}{\partial p_s}\right]-$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_k}\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p_s}\frac{\partial\omega}{\partial x_s}-\frac{\partial\psi}{\partial x_s}\frac{\partial\omega}{\partial p_s}\right)-$$

$$-\sum_{s=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial p_s}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_k}\right)\frac{\partial\psi}{\partial x_s}-\frac{\partial}{\partial x_s}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_k}\right)\frac{\partial\psi}{\partial p_s}\right].$$

Производя дифференцирование, мы без труда убедимся в том, что этот коэффициент действительно равен нулю

24. Метод Якоби. Переходим теперь к изложению обобщения метода Лагранжа — Шарпи, а именно к решению задачи о разыскании полного интеграла уравнения первого порядка с любым числом независимых переменных, причем мы будем считать, что это уравнение не содержит искомой функции, т. е. что оно имеет вид

$$F_1(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0. \tag{183}$$

Если нам удастся подобрать еще $(n-1)$ функций F_k так, чтобы полученные n функций были попарно в инволюции и чтобы они были разрешимы относительно p_k, то, взяв систему (177), в которой положим $a_1 = 0$, мы найдем p_k, удовлетворяющие условиям (176), и, следовательно, будем иметь u. Система (177) даст нам $(n-1)$ произвольных постоянных, и затем еще одна произвольная постоянная получится при определении u по ее частным производным p_k. Нахождение функций F_k можно производить постепенно. Положим, что первые m функций $F_1, F_2, \ldots, F_m$ уже имеются, так что они попарно находятся в инволюции и разрешимы относительно m из величин p_k. Для нахождения следующей функции F_{m+1} мы должны составить m уравнений

$$(F_1, u) = 0; \quad (F_2, u) = 0; \quad \ldots; \quad (F_m, u) = 0. \tag{184}$$

Это будут линейные однородные уравнения для искомой функции F_{m+1} от $2n$ независимых переменных x_k и p_k.

Выпишем в раскрытом виде систему для F_{m+1}:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial F_j}{\partial p_k}\frac{\partial u}{\partial x_k}-\frac{\partial F_j}{\partial x_k}\frac{\partial u}{\partial p_k}\right)=0 \qquad (j = 1, \ldots, m). \tag{185}$$

Поскольку мы считаем F_j разрешимым относительно m из величин p_k, мы должны считать, что некоторый определитель порядка m от функций F_j по переменным p_k отличен от нуля, и, следовательно, у системы (185) ранг таблицы коэффициентов при производных будет равен m, т. е. уравнения (185) наверное линейно-независимы. Покажем, что эта система будет полной. Чтобы обнаружить это, составим разности (163) для системы (184):

$$(F_p, (F_q, u)) - (F_q, (F_p, u)).$$

Нам надо доказать, что они обращаются тождественно в нуль. Применяя тождество (182), мы можем преобразовать написанную разность к виду

$$-((F_q, u), F_p) - ((u, F_p), F_q) = ((F_p, F_q), u).$$

Но функции F_p и F_q находятся в инволюции, откуда и вытекает непосредственно равенство нулю рассматриваемой разности. Таким образом, в силу сказанного в [22], система (185) имеет $2n - m$ независимых решений. Мы имеем очевидные решения этой системы

$$u = F_1; \quad u = F_2; \quad \ldots; \quad u = F_m. \tag{186}$$

Следовательно, кроме них должны существовать еще $2n - 2m$ решений, которые совместно с решениями (186) должны быть разрешимы относительно $(2n - m)$ из переменных x_k и p_k. Следовательно, у системы (185) наверное найдется решение $u = F_{m+1}$ такое, что уравнения $F_1 = 0$; $F_2 = a_2$; ... ...; $F_{m+1} = a_{m+1}$ будут разрешимы относительно $(m+1)$ из величин p_k. Для нахождения следующей функции F_{m+2} мы построим систему

$$(F_1, u) = 0; \quad \ldots; \quad (F_{m+1}, u) = 0,$$

относительно которой можем провести те же рассуждения, что и для системы (184). Таким образом мы построим все n функций таких, что они будут попарно в инволюции, и система (177) (при $a_1 = 0$) будет разрешима относительно всех p_k. Это и приведет нас, как мы видели выше, к полному интегралу уравнения (183).

Мы предполагали, что уравнение не содержит искомой функции. Если имеется уравнение, содержащее эту функцию:

$$F(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n) = 0,$$

то мы можем, увеличивая число независимых переменных на единицу, прийти к уравнению, не содержащему искомой функции. Для этого достаточно искать решение уравнения в неявном виде:

$$v(x_1, \ldots, x_n, u) = C,$$

где C — произвольная постоянная. Применяя правила дифференцирования неявных функций, мы получим, как всегда, для v уравнение, уже не содержащее самой функции.

25. Канонические системы. Установим связь предыдущих рассуждений с системой Коши. Мы будем рассматривать тот случай, когда уравнение не содержит искомой функции и разрешено относительно одной из производных. Для симметрии введем $(n+1)$ независимых переменных и одну из этих переменных обозначим через t, а производную по ней — через $p_0 = u_t$. Уравнение будет иметь вид

$$p_0 + H(t, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0, \tag{187}$$

а соответствующая система Коши будет канонической системой [17]

$$\frac{dx_k}{dt} = H_{p_k}, \qquad \frac{dp_k}{dt} = -H_{x_k}. \tag{188}$$

Пусть

$$\varphi(t, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = C$$

есть интеграл этой системы, т. е.

$$\varphi_t + \sum_{k=1}^{n} \left(\varphi_{x_k} \frac{dx_k}{dt} + \varphi_{p_k} \frac{dp_k}{dt} \right) = 0$$

в силу системы (188). Иначе мы можем написать последнее равенство в виде

$$\varphi_t + (H, \varphi) = 0, \qquad (189)$$

Следовательно, для того чтобы функция φ давала интеграл системы, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла уравнению (189). Положим, что функции φ и ψ дают два интеграла системы. Покажем, что и их скобка Пуассона (φ, ψ) также дает интеграл системы (или обращается в постоянную). Из определения скобки Пуассона непосредственно вытекает равенство

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varphi, \psi) = (\varphi_t, \psi) + (\varphi, \psi_t).$$

Подставляя функцию $\omega = (\varphi, \psi)$ вместо φ в соотношение (189), мы получим

$$(\varphi_t, \psi) + (\varphi, \psi_t) + (H, (\varphi, \psi)) = 0.$$

Но поскольку φ и ψ суть интегралы, мы можем в последнем равенстве заменить

$$\varphi_t = -(H, \varphi); \qquad \psi_t = -(H, \psi),$$

и, таким образом, придем к соотношению

$$-((H, \varphi), \psi) - (\varphi, (H, \psi)) + (H, (\varphi, \psi)) = 0,$$

которое выполняется тождественно, в силу (182). Таким образом, *скобка Пуассона из двух интегралов канонической системы есть также интеграл этой системы или постоянная.*

Положим теперь, что мы имеем n интегралов системы (188)

$$\varphi_s (t, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = a_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \qquad (190)$$

которые попарно находятся в инволюции и разрешимы относительно p_k. Присоединим к уравнениям (190) само дифференциальное уравнение (187) и покажем, что полученные $(n+1)$ функций находятся попарно в инволюции, если принять во внимание независимые переменные $t, x_1, \ldots, x_n$ и соответствующие производные $p_0, p_1, \ldots, p_n$. Функции (190) будут, очевидно, попарно в инволюции и после присоединения новой независимой переменной t, так как они вовсе не содержат p_0. Достаточно проверить, что каждая из функций (190) будет в инволюции с левой частью уравнения (187). Приравняв нулю соответствующую скобку Пуассона, мы придем как раз к равенству

$$\frac{\partial \varphi_s}{\partial t} + (H, \varphi_s) = 0,$$

которое наверное выполнено, так как функции (190) суть интегралы системы (188). Принимая во внимание результаты из [24], мы можем утверждать, что если мы решим уравнения (190) относительно p_k $(k = 1, \ldots, n)$ и уравнение (187) относительно p_0, подставив в функцию H полученные выражения p_k, то сумма

$$p_1\, dx_1 + p_2\, dx_2 + \ldots + p_n\, dx_n - H\, dt$$

будет полным дифференциалом некоторой функции $v(t, x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n)$. Она будет давать, очевидно, полный интеграл уравнения (187).

Пользуясь теоремой Якоби, мы можем утверждать, что остальные n интегралов канонической системы (190) могут быть получены простым дифференцированием, а именно — они определятся равенствами $v_{a_k} = b_k$ $(k = 1, \ldots, n)$. Изложение последних параграфов имеет формальный характер.

26. Примеры. 1. Рассмотрим систему двух линейных однородных уравнений

$$\left.\begin{aligned} X_1 = p_1 + (x_2 + x_4 - 3x_1)\, p_3 + (x_3 + x_1x_2 + x_1x_4)\, p_4 = 0, \\ X_2 = p_2 + (x_3x_4 - x_2)\, p_3 + (x_1x_3x_4 + x_2 - x_1x_2)\, p_4 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{191}$$

Составляя скобку Пуассона из левых частей, получим еще одно уравнение $X_3 = p_3 + x_1p_4 = 0$.

Скобки Пуассона (X_1, X_3) и (X_2, X_3) лишь множителем отличаются от левой части последнего уравнения. Таким образом, мы имеем полную систему, состоящую из трех уравнений. Решая ее относительно p_1, p_2, p_3, получим якобиеву систему

$$p_1 + \left(x_3 + 3x_1^2\right) p_4 = 0; \quad p_2 + x_2p_4 = 0; \quad p_3 + x_1p_4 = 0.$$

Последнее уравнение имеет решения x_1, x_2 и $x_4 - x_1x_3$. Вводим независимые переменные x_1, x_2, x_3 и $t = x_4 - x_1x_3$. Система перепишется в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} + 3x_1^2 \frac{\partial u}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0.$$

Первые два уравнения дают якобиеву систему с независимыми переменными x_1, x_2, t. Второе из них имеет решения x_1 и $t - \frac{x_2^2}{2}$. Вводим новые независимые переменные x_1, x_2 и $\tau = t - \frac{x_2^2}{2}$. Упомянутые уравнения перепишутся в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} + 3x_1^2 \frac{\partial u}{\partial \tau} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0.$$

Первое из этих уравнений имеет решение

$$u = \tau - x_1^3 \quad \text{или} \quad u = x_4 - x_1x_3 - \frac{x_2^2}{2} - x_1^3,$$

и произвольная функция этого u является решением системы (191).

2. Найдем полный интеграл уравнения

$$F_1 = (p_1 + x_2)^2 + (x_1 + p_2)^2 - x_3p_3 = 0. \tag{192}$$

Уравнение $(F_1, u) = 0$ имеет вид

$$2(p_1 + x_2)\frac{\partial u}{\partial x_1} + 2(x_1 + p_2)\frac{\partial u}{\partial x_2} - x_3\frac{\partial u}{\partial x_3} - 2(x_1 + p_2)\frac{\partial u}{\partial p_1} - \\ - 2(p_1 + x_2)\frac{\partial u}{\partial p_2} + p_3\frac{\partial u}{\partial p_3} = 0. \tag{193}$$

Это уравнение имеет очевидное решение $u = x_1 + p_2$. Полагаем

$$F_2 = x_1 + p_2 = a_2. \tag{192_1}$$

Присоединяем к уравнению (193) уравнение $(F_2, u) = 0$, т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial p_1} - \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0.$$

Это уравнение и уравнение (193) имеют решение $u = x_3 p_3$, т е

$$F_3 = x_3 p_3 = a_3 \tag{192$_2$}$$

Решаем (192), (192$_1$) и (192$_2$) относительно p_1, p_2, p_3:

$$p_1 = -x_2 + \sqrt{a_3 - a_2^2}; \quad p_2 = a_2 - x_1; \quad p_3 = \frac{a_3}{x_3}.$$

Восстанавливая функцию u по ее частным производным, получим полный интеграл уравнения (192)

$$u = -x_1 x_2 + \sqrt{a_3 - a_2^2}\, x_1 + a_2 x_2 + a_3 \lg x_3 + a.$$

27. Метод мажорантных рядов. При исследовании задачи Коши мы предполагали данные и искомые функции вещественными функциями вещественных независимых переменных, обладающими лишь некоторой гладкостью. В данном и следующих двух пунктах мы докажем однозначную разрешимость задачи Коши для уравнений и систем любого порядка, но в предположении, что все входящие в задачу функции являются аналитическими. Независимые переменные $x_1, \ldots, x_n$ по-прежнему будем считать вещественными, а данные и искомые функции могут принимать и комплексные значения. Предварительно нам надо будет изложить некоторые вспомогательные предложения.

Пусть имеется степенной ряд от m переменных

$$\varphi(z_1, \ldots, z_m) = \sum_{p_1, \ldots, p_m = 0}^{\infty} a_{p_1 \ldots p_m} z_1^{p_1}, \ldots, z_m^{p_m}, \tag{194}$$

сходящийся при соблюдении условий

$$|z_1| \leqslant R_1; \ \ldots; \ |z_m| \leqslant R_m. \tag{195}$$

Мы будем считать, что радиусы сходимости ряда (194) даже несколько больше чисел R_k. Пусть M — наибольшее значение модуля функции (194) при соблюдении условий (195). Мы видели, что степенной ряд, полученный от разложения функции **[III$_2$; 84]**

$$\frac{M}{\left(1 - \frac{z_1}{R_1}\right)\left(1 - \frac{z_2}{R_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{z_m}{R_m}\right)}, \tag{196}$$

будет иметь все коэффициенты положительные и не меньшие, чем модули коэффициентов ряда (194). Иначе говорят, что последний ряд будет *мажорантным* для ряда (194).

Вообще *мажорантным* для ряда

$$\sum_{p_1, \ldots, p_m = 0}^{\infty} c_{p_1 \ldots p_m} z_1^{p_1}, \ldots, z_m^{p_m} \tag{197}$$

называется ряд такого же вида, но коэффициенты которого неотрицательны (т. е. больше нуля или равны нулю) и не меньше, чем модули соответствующих коэффициентов ряда (197). Как известно, всякий степенной ряд сходится абсолютно внутри своих кругов сходимости [III$_2$; 84]. Если некоторый мажорантный ряд для ряда (197) сходится при $|z_k| < \rho_k$ $(k = 1, 2, \ldots$ $\ldots, m)$, то мы можем, очевидно, утверждать, что и ряд (197) сходится внутри кругов $|z_k| < \rho_k$. Считая в выражении (196) все числа R_k одинаковыми (можно заменить все R_k наименьшим), рассмотрим две функции:

$$\frac{M}{\left(1-\frac{z_1}{R}\right)\left(1-\frac{z_2}{R}\right)\cdots\left(1-\frac{z_m}{R}\right)} \tag{198}$$

и

$$\frac{M}{1-\frac{z_1+z_2+\ldots+z_m}{R}}. \tag{199}$$

Разложения этих функций в степенные ряды будут иметь соответственно вид

$$\sum_{p_1,\ldots,p_m=0}^{\infty} M\frac{z_1^{p_1}\ldots z_m^{p_m}}{R^{p_1+\ldots+p_m}} \quad \text{и} \quad \sum_{p=0}^{\infty} M\frac{(z_1+\ldots+z_m)^p}{R^p},$$

и, раскрывая $(z_1+\ldots+z_m)^p$, мы убеждаемся, что коэффициенты в разложении функции (199) не меньше соответствующих коэффициентов в разложении (198), т. е. функция (199) (или соответствующий степенной ряд) также будет мажорантной для функции (197) (т. е. для соответствующего степенного ряда).

Метод мажорантных степенных рядов применяется для доказательств существования решения дифференциальных уравнений в случае аналитических функций. Проведем соответствующее доказательство сначала для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Пусть имеется дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

правая часть которого представляет собою степенной ряд относительно x и y, сходящийся в окрестности $x = y = 0$, т. е.

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{p,\,q=0}^{\infty} a_{pq}x^p y^q. \tag{200}$$

Ищется решение этого уравнения, регулярное в точке $x = 0$ и удовлетворяющее начальному условию

$$y|_{x=0} = 0. \tag{201}$$

Для построения искомого решения достаточно составить его ряд Маклорена, т. е. вычислить значения производных при $x=0$. Свободный член этого ряда Маклорена дается начальным условием (201) и равен нулю. Значение первой производной при $x=0$ дается дифференциальным уравнением, и мы имеем $y'_0=a_{00}$. Для определения второй производной дифференцируем обе части уравнения по x:

$$y''=\sum_{p,\,q=0}^{\infty} pa_{pq}x^{p-1}y^q+\sum_{p,\,q=0}^{\infty} qa_{pq}x^py^{q-1}y',$$

и подставляя в его правую часть $x=0$; $y=0$; $y'=a_{00}$, определим значение второй производной при $x=0$:

$$y''_0=a_{10}+a_{01}a_{00}.$$

Продолжая поступать так и дальше, мы сможем определить производные всех порядков при $x=0$ и составить ряд Маклорена

$$y_0+\frac{y'_0}{1!}x+\frac{y''_0}{2!}x^2+\ \ldots \tag{202}$$

Из предыдущих вычислений вытекает, что может существовать только одно регулярное решение, удовлетворяющее данному начальному условию. Но для того, чтобы утверждать, что такое решение действительно существует, нам надо доказать, что ряд (202) имеет радиус сходимости, больший нуля. Заметим при этом, что все предыдущие операции, которые мы проделывали с рядами, законны в силу основных свойств степенных рядов внутри их кругов сходимости. Если ряд (202) окажется сходящимся, то из самого закона составления его коэффициентов непосредственно вытекает, что его сумма удовлетворяет уравнению (200).

Из предыдущих вычислений непосредственно вытекает, что коэффициенты ряда (202) являются полиномами от a_{pq} с неотрицательными численными коэффициентами. Действительно, при последовательном дифференцировании уравнения и подстановке в правую часть уже найденных начальных значений производных нам приходится производить над коэффициентами только действия сложения и умножения. Поэтому если мы ряд, стоящий в правой части уравнения (200), заменим мажорантным рядом, то и ряд (202) заменится мажорантным рядом. Если этот мажорантный ряд окажется сходящимся при x, достаточно близких к нулю, то тем более будет сходящимся и сам ряд (202) для уравнения (200). Основным моментом в дальнейшем доказательстве будет тот факт, что при замене в правой части уравнения (200) ряда мажорантным рядом мы получим уравнение, которое проинтегрируется в конечном виде. Положим, что ряд, стоящий в правой части уравнения (200), сходится абсолютно и равномерно при $|x| \leqslant R$ и $|y| \leqslant R$, и пусть M — наибольшее значение суммы этого ряда при указанных условиях. Переходя к мажорантному ряду, мы получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{R}\right)\left(1 - \frac{y}{R}\right)}, \tag{203}$$

в котором переменные разделяются:

$$\left(1 - \frac{y}{R}\right) dy = \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{R}\right)} dx.$$

Интегрируя и принимая во внимание (201), получим

$$y - \frac{y^2}{2R} = -MR \lg\left(1 - \frac{x}{R}\right),$$

откуда

$$y = R - R\sqrt{1 + 2M \lg\left(1 - \frac{x}{R}\right)}, \tag{204}$$

причем значение радикала надо брать равным единице при $x = 0$, т. е. таким, чтобы удовлетворялось начальное условие (201). Функция (204) является регулярной функцией в точке $x = 0$ и, следовательно, разлагается в степенной ряд.

Коэффициенты этого ряда очевидно совпадают с теми коэффициентами, которые получаются указанным выше процессом из уравнения (203) его почленным дифференцированием. Таким образом, для мажорантного уравнения ряд (202) оказывается сходящимся в окрестности $x = 0$. Тем более он будет сходящимся, как мы видели выше, и для основного уравнения. Этим доказана не только единственность, но и существование регулярного решения уравнения (200), удовлетворяющего начальному условию (201).

28. Теорема Ковалевской. Указанный выше метод мажорантных рядов или функций применим и для доказательства существования и единственности решения задачи Коши для уравнений с частными производными. При этом мы будем брать всегда дифференциальные уравнения в разрешенной форме. Пусть имеется дифференциальное уравнение первого порядка

$$p_1 = f(x_1, \ldots, x_n, u, p_2, \ldots, p_n), \tag{205}$$

где f — регулярная функция в точке

$$x_1 = \ldots = x_n = 0; \quad u = u^{(0)}, \quad p_2 = p_2^{(0)}; \ \ldots; \quad p_n = p_n^{(0)}, \tag{206}$$

причем без ограничения общности мы приняли начальные значения независимых переменных равными нулю. Ищется решение уравнения, удовлетворяющее следующему условию Коши:

$$u|_{x_1=0} = \varphi(x_2, \ldots, x_n). \tag{207}$$

При этом мы считаем, что функция $\varphi(x_2, \ldots, x_n)$ регулярна при нулевых значениях своих аргументов и, кроме того,

$$(\varphi)_0 = u^{(0)}; \quad \left(\varphi_{x_k}\right)_0 = p_k^{(0)} \qquad (k = 2, \ldots, n), \tag{208}$$

и значок нуль, поставленный снизу, будет указывать всегда на то, что все аргументы функции заменены нулями. Прежде чем переходить к решению этой задачи, мы при помощи элементарной замены искомой функции упростим условия задачи, а именно введем вместо функции u новую искомую функцию u' по формуле

$$u = u' + \varphi(x_2, \ldots, x_n) + Ax_1,$$

где постоянная A представляет собою значение правой части уравнения (205) при начальных значениях (206) аргументов, т. е., проще говоря, A есть свободный член в разложении правой части уравнения (205) в соответствующий степенной ряд

$$A = f\left(0, \ldots, 0, (\varphi)_0, (\varphi_{x_2})_0, \ldots, (\varphi_{x_n})_0\right).$$

Новая искомая функция должна удовлетворять уравнению

$$u'_{x_1} = f\left(x_1, \ldots, x_n, u' + \varphi + Ax_1, u'_{x_2} + \varphi_{x_2}, \ldots, u'_{x_n} + \varphi_{x_n}\right) - \\ - f\left(0, \ldots, 0, (\varphi)_0, (\varphi_{x_2})_0, \ldots, (\varphi_{x_n})_0\right), \tag{209}$$

и вместо начального условия (207) мы будем иметь начальное условие

$$u'|_{x_1=0} = 0.$$

Обратим внимание на аргументы функции, стоящей в правой части уравнения (209). Аргумент $u' + \varphi + Ax_1$ становится равным $(\varphi)_0$, если положить все $x_s = 0$ и $u' = 0$. Точно так же каждый из аргументов $\varphi_{x_k} + u'_{x_k}$ становится равным $\left(\varphi_{x_k}\right)_0$, если положить опять все $x_s = 0$ и $u'_{x_k} = 0$. Таким образом, аргументы упомянутой функции при нулевых значениях x_s, u', u'_{x_k} совпадают как раз с начальными значениями (208), при которых функция f регулярна. Мы можем, таким образом, утверждать, что правая часть уравнения (209) есть регулярная функция в точке

$$x_1 = \ldots = x_n = u' = u'_{x_2} = \ldots = u'_{x_n} = 0. \tag{210}$$

Кроме того, принимая во внимание вычитаемое, стоящее в правой части (209), мы можем утверждать, что эта правая часть обращается в нуль при начальных значениях (210) аргументов. Мы привели таким образом начальное значение Коши и все начальные значения аргументов у функции, стоящей в правой части уравнения, к нулю. Удерживая прежнее обозначение, мы получаем, таким образом, следующую задачу: имеется дифференциальное уравнение

$$p_1 = f(x_1, \ldots, x_n, u, p_2, \ldots, p_n), \tag{211}$$

где f — регулярная функция в точке

$$x_1 = \ldots = x_n = u = p_2 = \ldots = p_n = 0,$$

равная нулю в этой точке, и ищется решение этого уравнения, удовлетворяющее условию

$$u\,|_{x_1=0} = 0. \tag{212}$$

Заметим, что правая часть уравнения (211) должна разлагаться в ряд вида

$$f = \sum_{s_1, \ldots, s_n, t_1, \ldots, t_n = 0}^{\infty} a_{s_1 \ldots s_n t_1 \ldots t_n} x_1^{s_1} \ldots x_n^{s_n} u^{t_1} p_2^{t_2} \ldots p_n^{t_n}$$
$$(a_{0 \ldots 00 \ldots 0} = 0), \tag{213}$$

сходящийся при всех значениях аргументов, достаточно близких к нулю.

Совершенно так же, как в случае обыкновенного дифференциального уравнения, мы будем, пользуясь уравнением (211) и начальным условием (212), вычислять коэффициенты ряда Маклорена искомой функции u, т. е. значение всех частных производных при нулевых значениях аргументов. При дифференцировании по любому аргументу, кроме x_1, мы можем предварительно положить $x_1 = 0$.

Таким образом, начальное условие (212) показывает нам, что

$$\left(\frac{\partial^{\alpha_2 + \ldots + \alpha_n} u}{\partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}\right)_0 = 0, \tag{214}$$

где α_k — какие угодно целые неотрицательные числа. Будем теперь вычислять начальные значения тех производных, в которые входит дифференцирование по x_1. Из уравнения (211) следует, что

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)_0 = 0. \tag{215}$$

Дифференцируя обе части уравнения (211) любое число раз по переменным $x_2, \ldots, x_n$ и вводя затем нулевые значения аргументов, мы в правой части будем иметь уже вычисленные значения производных (214) и (215) и таким образом определим

$$\left(\frac{\partial^{1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}u}{\partial x_1\,\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}\right)_0$$

при любых неотрицательных значениях $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Возьмем теперь то уравнение, которое получится из уравнения (211) путем дифференцирования по x_1, и будем поступать с ним так же, как мы поступали с основным уравнением. Это даст нам вполне определенные значения для производных

$$\left(\frac{\partial^{2+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}u}{\partial x_1^2\,\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}\right)_0.$$

Поступая так и дальше, мы можем вычислить любую частную производную искомой функции при начальных значениях аргументов и составить ряд Маклорена

$$\sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n=0}^{\infty}{}' \frac{1}{\alpha_1!\ldots\alpha_n!}\left(\frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}\right)_0 x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}. \qquad (216)$$

Предыдущие рассуждения так же, как и в случае обыкновенного дифференциального уравнения, доказывают единственность регулярного решения поставленной задачи Коши. Для доказательства существования нам надо обнаружить, что при подстановке полученных начальных значений производных в ряд (216) он сходится в некоторых кругах с центром в начале. Совершенно так же, как и в предыдущем параграфе, можно утверждать, что если мы заменим ряд (213) мажорантным рядом, и если для полученного мажорантного уравнения составленный указанным выше образом ряд (216) будет сходящимся, то тем более он будет сходящимся и для первоначального уравнения. Положим, что ряд (213) абсолютно и равномерно сходится при условии:

$$|x_1|\leqslant\rho;\ \ldots;\ |x_n|\leqslant\rho;\ |u|\leqslant\rho;\ |p_2|\leqslant R;\ \ldots;\ |p_n|\leqslant R,$$

и пусть M — наибольшее значение модуля суммы этого ряда при этих условиях. Функция

$$\frac{M}{\left(1-\frac{x_1}{\rho}\right)\ldots\left(1-\frac{x_n}{\rho}\right)\left(1-\frac{u}{\rho}\right)\left(1-\frac{p_2}{R}\right)\ldots\left(1-\frac{p_n}{R}\right)}-M$$

будет мажорантной для (213), причем мы вычли в правой части предыдущей формулы число M, чтобы избавиться от свободного члена, который отсутствует и в ряде (213). Тем более мажорантной для ряда (213) будет функция

$$\frac{M}{\left(1-\frac{x_1+\ldots+x_n+u}{\rho}\right)\left(1-\frac{p_2+\ldots+p_n}{R}\right)}-M.$$

Если мы разделим переменную x_1 на некоторое число α, удовлетворяющее условию $0<\alpha<1$, то различные степени этого числа появятся в знаменателях коэффициентов членов, содержащих степени x_1, и функция

$$\frac{M}{\left(1-\frac{\frac{x_1}{\alpha}+x_2+\ldots+x_n+u}{\rho}\right)\left(1-\frac{p_2+\ldots+p_n}{R}\right)}-M$$

будет и подавно мажорантной для (213). Мы имеем, таким образом, мажорантное уравнение

$$p_1=\frac{M}{\left(1-\frac{\frac{x_1}{\alpha}+x_2+\ldots+x_n+u}{\rho}\right)\left(1-\frac{p_2+\ldots+p_n}{R}\right)}-M. \quad (217)$$

Вычисляя коэффициенты Маклорена для решения этого уравнения, удовлетворяющего начальному условию (212), мы получим степенной ряд, обращающийся в нуль при $x_s=0$, и мажорантный для ряда (216), составленного для уравнения (211). Если этот ряд окажется сходящимся, то тем более будет сходиться ряд (216), составленный для уравнения (211). Мы строим сейчас решение уравнения (217), которое удовлетворяет не нулевому начальному условию, а условию

$$u\,|_{x_1=0}=\psi(x_2,\ \ldots,\ x_n), \quad (218)$$

где ψ — степенной ряд с неотрицательными коэффициентами. Последовательное вычисление коэффициентов Маклорена для такого решения может быть произведено совершенно так же, как и выше, но только начальное условие (218) приведет к тому, что в правой части формул (214) при всех неотрицательных значениях α_k будут стоять уже не нули, а некоторые неотрицательные числа. Вычисление дальнейших коэффициентов производится, как и выше, и приводит к действиям сложения и умножения над уже полученными неотрицательными коэффициентами и положительными коэффициентами в разложении правой части уравнения (218). Таким образом, если мы для уравнения (217) заменим нулевое начальное условие (212) начальным условием (218), где ψ разлагается в ряд с вещественными неотрицательными коэффициентами, то ряд (216) для уравнения (217) с начальным условием (218) будет мажорантным по отношению к ряду (216) для уравнения (217) с нулевым начальным условием (212) и тем более мажорантным по отношению к ряду (216) для уравнения (211) с начальным условием (212). Таким образом, все сводится к доказательству того, что ряд (216) для уравнения (217) с каким-либо начальным условием вида (218), где ψ обладает указанным выше свойством, будет сходящимся внутри некоторых кругов с центром в начале.

Иначе говоря, все дело сводится к построению решения уравнения (217), удовлетворяющего условию вида (218), и к доказательству того, что это решение разлагается в ряд Маклорена, если x_k достаточно близки к нулю. Будем искать такое решение, как функцию только одного аргумента $z=x_1+\alpha(x_2+\ldots+x_n)$. При этом

$$u_{x_1}=\frac{du}{dz};\qquad u_{x_k}=\alpha\frac{du}{dz}\qquad (k=2,\ \ldots,\ n),$$

и, следовательно, уравнение (217) примет вид

$$\frac{du}{dz}=\frac{M}{\left(1-\dfrac{\dfrac{z}{\alpha}+u}{\rho}\right)\left(1-\dfrac{(n-1)\alpha}{R}\dfrac{du}{dz}\right)}-M,$$

или

$$\left(1-\frac{(n-1)M\alpha}{R}\right)\frac{du}{dz}-\frac{(n-1)\alpha}{R}\left(\frac{du}{dz}\right)^2=\frac{M}{1-\dfrac{\dfrac{z}{\alpha}+u}{\rho}}-M.$$

Будем считать, что число α взято настолько близким к нулю, что коэффициент при $\dfrac{du}{dz}$ положителен. В правой части написанного равенства мы получим, разлагая по формуле прогрессии, степенной ряд без свободного члена с положительными коэффициентами. Последнее уравнение может быть записано в виде

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^2-2h\frac{du}{dz}+\varphi(z,\ u)=0,$$

где $h>0$ и $\varphi(z,\ u)$ — степенной ряд без свободного члена с положительными коэффициентами. Решая относительно $\dfrac{du}{dz}$, получим уравнение первого порядка

$$\frac{du}{dz}=h-h\sqrt{1-\frac{1}{h^2}\varphi(z,\ u)},\tag{219}$$

причем радикал надо считать равным единице при $z=u=0$. Разлагая по биному Ньютона, мы получим

$$-h\sqrt{1-\frac{1}{h^2}\varphi(z, u)}=$$
$$=-h+\frac{\frac{1}{2}}{1!}\frac{\varphi}{h}-\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\frac{\varphi^2}{h^3}+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}\frac{\varphi^3}{h^5}+\ldots,$$

и все коэффициенты при степенях $\varphi(z, u)$ оказываются положительными. Переразлагая по степеням z и u, мы получим в правой части уравнения (219) степенной ряд $\varphi_1(z, u)$ с положительными коэффициентами и без свободного члена и придем к уравнению первого порядка

$$\frac{du}{dz}=\varphi_1(z, u).$$

Мы уже имели теорему о существовании регулярного решения такого уравнения, удовлетворяющего начальному условию $u|_{z=0}=0$. Это решение будет представляться рядом

$$u=\sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k,$$

все коэффициенты которого положительны. Если в написанном разложении подставить $z=x_1+\alpha(x_2+\ldots+x_n)$, то получим решение уравнения (217), представимое степенным рядом с положительными коэффициентами. Это решение будет удовлетворять, при $x_1=0$, некоторому начальному условию (218), где $\psi(x_2, \ldots, x_n)$ — степенной ряд с положительными коэффициентами. В силу сказанного выше, построение такого решения уравнения (216) доводит до конца доказательство существования решения задачи Коши. Приведенное доказательство принадлежит Гурса. Сама теорема называется обычно теоремой Ковалевской, так как впервые в законченной форме ее доказательство было дано С. В. Ковалевской.

Из приведенного выше доказательства следует, что радиусы тех кругов для переменных x_k, внутри которых установлена сходимость ряда (216), дающего решения задачи (211), (212), зависят лишь от радиусов сходимости правой части уравнения (213) и максимума модуля M этой правой части, но не зависят от конкретного вида функции f. Для (205), (207) присоединяется еще зависимость от радиусов сходимости и максимума модуля функции $\varphi(x_2, \ldots, x_n)$, входящей в условие (207). Аналогичное замечание имеет место и для результатов следующего параграфа.

29. Уравнения высших порядков. Указанный выше метод применим почти без всяких изменений и для случая уравнений высших порядков. Рассмотрим для примера уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными, разрешенное относительно производной второго порядка по x:

$$r = f(x, y, u, p, q, s, t) \\ (p = u_x,\ q = u_y,\ r = u_{xx},\ s = u_{xy},\ t = u_{yy}). \tag{220}$$

Начальные данные Коши в данном случае состоят в задании u и p при начальном значении x:

$$u|_{x=0} = \varphi(y); \quad p|_{x=0} = \psi(y). \tag{221}$$

Пусть $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ — функции, регулярные в точке $y = 0$. Обозначим

$$\varphi(0) = u_0; \quad \psi(0) = p_0; \quad \varphi'(0) = q_0; \quad \psi'(0) = s_0; \quad \varphi''(0) = t_0$$

и положим, что правая часть уравнения (220) есть регулярная функция в точке

$$x = y = 0; \quad u = u_0; \quad p = p_0; \quad q = q_0; \quad s = s_0; \quad t = t_0.$$

При этом уравнение (220) имеет единственное регулярное решение, удовлетворяющее условиям Коши (221). Мы не будем проводить доказательства этого утверждения, которое аналогично предыдущему доказательству, и ограничимся лишь указанием на возможность однозначного вычисления коэффициентов Маклорена искомого решения. Начальные условия (221) дают нам непосредственно значение производных

$$\left(\frac{\partial^\alpha u}{\partial y^\alpha}\right)_0, \quad \left(\frac{\partial^{1+\alpha} u}{\partial x\, \partial y^\alpha}\right)_0,$$

при любых неотрицательных значениях α, т. е. начальные условия дают нам начальное значение самой функции и тех ее производных, в которых дифференцирование по x совершается не больше одного раза. Само уравнение даст нам после этого

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0.$$

Дифференцируя обе части уравнения (220) несколько раз по y, мы получим значения

$$\left(\frac{\partial^{2+\alpha} u}{\partial x^2\, \partial y^\alpha}\right)_0.$$

Дифференцируя обе части уравнения (220) по x и пользуясь полученным уравнением совершенно так же, как это мы делали только что с исходным уравнением (220), мы будем иметь значения

$$\left(\frac{\partial^{3+\alpha} u}{\partial x^3\, \partial y^\alpha}\right)_0.$$

Продолжая так и дальше, мы получим вполне однозначно все коэффициенты Маклорена искомой функции.

Формулируем теперь теорему Ковалевской в самом общем случае для систем уравнений любого порядка. Пусть имеется система m уравнений относительно искомых функций $u_1, \ldots, u_m$ от независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$

$$\frac{\partial^{r_k} u_k}{\partial x_1^{r_k}} = f_k\left(x_i, u_i, \frac{\partial^l u_i}{\partial x_1^{l_1} \ldots \partial x_n^{l_n}}\right) \qquad (k = 1, \ldots, m). \tag{222}$$

Правые части этих уравнений содержат независимые переменные x_s, функции u_k и их производные до порядка r_k, причем в эти правые части не должны входить производные $\dfrac{\partial^{r_k} u_k}{\partial x_1^{r_k}}$, относительно которых система разрешена. Начальные данные Коши имеют при этом вид

$$\left.\begin{aligned} &u_k\Big|_{x_1=0} = \varphi_k(x_2, \ldots, x_n); \quad \frac{\partial u_k}{\partial x_1}\Big|_{x_1=0} = \varphi_k^{(1)}(x_2, \ldots, x_n); \ldots; \\ &\frac{\partial^{r_k-1} u_k}{\partial x_1^{r_k-1}}\Bigg|_{x_1=0} = \varphi_k^{(r_k-1)}(x_2, \ldots, x\ ) \qquad (k = 1, \ldots, m). \end{aligned}\right\} \tag{223}$$

Функции, стоящие в правых частях последних равенств, мы считаем регулярными при нулевых значениях аргументов. Вычислим с помощью этих функций значения всех функций, входящих в функции $f_k(\ldots)$ $(k = 1, \ldots, m)$, в точке $x = (0, \ldots, 0)$. Предположим, что функции $f_k(\ldots)$ $(k = 1, \ldots, m)$ регулярны в окрестности этих вычисленных значений их аргументов.

При выполнении всех перечисленных условий имеет место теорема существования и единственности регулярного решения системы (222) при начальных условиях (223).

Заметим, что можно построить всю теорию дифференциальных уравнений с частными производными, ограничиваясь рассмотрением одних аналитических функций. В дальнейшем при рассмотрении уравнений высших порядков мы выясним недостаточность такой точки зрения.

§ 2. УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

30. Типы уравнений второго порядка. Изложение общей теории уравнений высших порядков мы начнем с исследования линейных уравнений второго порядка. Пусть имеется линейное уравнение второго порядка для функции u независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$:

$$\sum_{i,\, k=1}^{n} a_{ik}(x)\, u_{x_i x_k} + \sum_{k=1}^{n} b_k(x)\, u_{x_k} + c(x)\, u = 0. \tag{1}$$

Коэффициенты a_{ik} мы считаем заданными функциями независимых переменных x_s и можем, очевидно, считать, принимая во внимание независимость результата дифференцирования от порядка, что $a_{ki} = a_{ik}$. Все функции и независимые переменные мы считаем вещественными.

В основе общей теории лежит разделение уравнений на типы. Для уравнений, принадлежащих к различным типам, совершенно иначе ставятся основные задачи, употребляются различные приемы решения задач, и функции, удовлетворяющие уравнениям различных типов, обладают различными аналитическими свойствами. В настоящем параграфе мы дадим определения основных типов для уравнений вида (1). Для этого составим квадратичную форму от вспомогательных переменных ξ_s:

$$\sum_{i,\, k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\xi_k. \tag{2}$$

Придавая переменным x_s определенные значения $x_s = x_s^{(0)}$, мы будем иметь квадратичную форму с численными коэффициентами. Если эта форма оказывается определенно положительной или определенно отрицательной [III$_1$; 35], то говорят, что уравнение (1) в упомянутой точке $x_s = x_s^{(0)}$ принадлежит *эллиптическому типу*. Далее, мы будем говорить, что уравнение принадлежит к эллиптическому типу в некоторой области D пространства $(x_1, \ldots, x_n)$, если во всех точках этой области оно принадлежит эллиптическому типу. Принадлежность к эллиптическому типу характеризуется тем, что в каждой точке области D квадратичная форма (2) при приведении ее к сумме квадратов имеет все коэффициенты одного и того же знака, причем ни один из этих коэффициентов не должен равняться нулю.

Далее, мы говорим, что уравнение (1) в области D принадлежит *гиперболическому типу*, если квадратичная форма (2) при приведении ее к сумме квадратов имеет все коэффициенты, кроме одного, определенного знака, а оставшийся один коэффициент — противоположного знака. Если среди упомянутых коэффициентов нет равных нулю, и мы не имеем ни эллиптического, ни гиперболического типа, то иногда говорят, что уравнение принадлежит *ультрагиперболическому типу*. Если коэффициенты a_{ik} постоянные, то принадлежность уравнения к тому или иному типу не зависит от значений независимых переменных. Простейшим уравнением эллиптического типа является уравнение Лапласа; уравнением гиперболического типа является волновое уравнение.

Принято, наконец, выделять из уравнений общего вида (1) еще один класс уравнений, называемых *параболическими*. Эти уравнения определяются не только коэффициентами $a_{ik}(x)$ при старших членах, но и коэффициентами $b_i(x)$ при производных u_{x_i}. Для них квадратичная форма (2) после приведения ее к сумме квадратов должна иметь один коэффициент равным нулю, а остальные — одного знака. Как будет показано в следующем пункте, невырожденной линейной заменой независимых переменных уравнение (1) в фиксированной точке $x = x^{(0)}$ может быть приведено к виду

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x^{(0)}) u_{y_i y_i} + \sum_{i=1}^{n} b_i' (x^{(0)}) u_{y_i} + c (x^0) u = 0.$$

Условие параболичности уравнения (1) в точке $x^{(0)}$ состоит в том, что после такого приведения одно из $\lambda_i(x^{(0)})$ (пусть для определенности $\lambda_n(x^{(0)})$) равно нулю, остальные все положительны или все отрицательны, а коэффициент $b_n'(x^{(0)})$, стоящий при производной u_{y_n}, отличен от нуля. Простейшим представителем параболических уравнений является уравнение теплопроводности

$$\sum_{i=1}^{n-1} u_{x_i x_i} - u_{x_n} = 0.$$

Переменные x_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, в нем обычно называют пространственными, а переменную x_n — временем.

Определенные нами классы (типы) уравнений не охватывают всех уравнений вида (1). Действительно, среди последних имеются такие, для которых несколько коэффициентов $\lambda_i(x^{(0)})$ обращаются в нуль. Если при этом соответствующие им $b_i'(x^{(0)})$ не обращаются в нуль, то иногда говорят, что уравнение в точке $x^{(0)}$ ультрапараболическое или параболическое с несколькими временами. В противном случае в уравнение вообще не войдут производные по некоторым направлениям, и соответствующие им y_i будут играть роль произвольных параметров. Мы не будем рассматривать все возможные ситуации и ограничимся в дальнейшем изучением лишь тех случаев, когда уравнение во всей интересующей нас области принадлежит одному из классических типов: эллиптическому, гиперболическому или параболическому.

Если коэффициенты уравнения (1) содержат функцию u и ее частные производные u_{x_i}, то мы можем говорить о типе уравнения, лишь фиксируя какое-либо решение $u^{(0)}(x_1, \ldots, x_n)$ этого уравнения. Подставляя $u = u^{(0)}$ и $u_{x_i} = u^{(0)}_{x_i}$ в коэффициенты, мы получим функции только от x_s, и можем на основании вышесказанного решить вопрос о типе уравнения для данного решения $u^{(0)}$.

Если уравнение нелинейно:

$$F\left(x_1, \ldots, x_n, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}, u_{x_1x_1}, \ldots, u_{x_nx_n}\right)=0,$$

то для определения *типа уравнения для данного решения* $u^{(0)}$ строят коэффициенты a_{ik} по формулам

$$a_{ik}=\frac{\partial F}{\partial u_{x_ix_k}} \quad \text{при} \quad u=u^{(0)}$$

и затем определяют тип линейного уравнения.

31. Уравнения с постоянными коэффициентами. Рассмотрим уравнение (1) с постоянными коэффициентами a_{ik} и выпишем соответствующую квадратичную форму. Попытаемся при помощи линейного преобразования независимых переменных привести совокупность членов, содержащих вторые производные в уравнении (1), к простейшему виду. Итак, введем вместо x_s новые независимые переменные y_s при помощи линейного преобразования

$$y_k=c_{k1}x_1+\ldots+c_{kn}x_n \qquad (k=1, 2, \ldots, n),$$

причем мы считаем, конечно, что определитель, составленный из коэффициентов этого преобразования, отличен от нуля. Производные по старым переменным выразятся через производные по новым переменным по следующим формулам:

$$u_{x_i}=\sum_{s=1}^{n} c_{si}u_{y_s}, \qquad u_{x_ix_k}=\sum_{s,\ t=1}^{n} c_{si}c_{tk}u_{y_sy_t}.$$

Подставляя в уравнение (1), мы получим преобразованное уравнение вида

$$\sum_{i,\ k=1}^{n} a'_{ik}u_{y_iy_k}+\ldots=0,$$

где новые коэффициенты a'_{ik} выражаются через старые, согласно формулам

$$a'_{ik}=\sum_{s,\ t=1}^{n} c_{is}c_{kt}a_{st}. \tag{3}$$

Если мы, с другой стороны, в квадратичной форме (2) вместо переменных ξ_s введем новые переменные η_s при помощи таблицы, транспонированной по отношению к таблице c_{ik}, но только будем выражать при помощи этой таблицы старые переменные через новые, т. е. положим

$$\xi_k = c_{1k}\eta_1 + \ldots + c_{nk}\eta_n \qquad (k = 1, \ldots, n),$$

то нетрудно проверить, что преобразованная квадратичная форма будет иметь как раз коэффициенты a'_{ik}, определяемые формулами (3), т. е.

$$\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\xi_k = \sum_{i,\,k=1}^{n} a'_{ik}\eta_i\eta_k.$$

Но, как мы знаем, всегда можно подобрать коэффициенты c_{ik} так, чтобы квадратичная форма (2) привелась к сумме квадратов, т. е.

$$\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\xi_k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\eta_i^2,$$

или, иначе говоря, $a'_{ik} = 0$ при $i \neq k$ и $a'_{ii} = \lambda_i$. Знаки коэффициентов λ_i и определят тип уравнения. Сохраняя прежнее обозначение для независимых переменных, мы получим преобразованное уравнение вида

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_{x_i x_i} + \ldots = 0.$$

Если уравнение линейно и с постоянными коэффициентами не только относительно производных второго порядка, то преобразованное уравнение будет иметь вид

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_{x_i x_i} + \sum_{i=1}^{n} b'_i u_{x_i} + cu = f(x_1, \ldots, x_n). \tag{4}$$

Добавляя к независимым переменным x_s подходящим образом подобранный численный множитель, мы всегда можем достигнуть того, чтобы коэффициенты λ_i, отличные от нуля, были равны $(+1)$ или (-1). Положим, что все λ_i отличны от нуля, и покажем, что в этом случае при помощи элементарного преобразования функции u мы можем освободиться и от членов, содержащих первые производные, а именно введем вместо u новую искомую функцию v по формуле

$$u = ve^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{b'_i}{\lambda_i}x_i}. \tag{5}$$

Подставляя в уравнение (4), мы получим, как это нетрудно проверить, уравнение вида

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_{x_i x_i} + c_1 v = f_1(x_1, \ldots, x_n).$$

Для уравнения эллиптического типа все λ_i — одного знака, и умножая, если надо, обе части уравнения на (-1), мы можем считать, что все λ_i положительны. Вводя вместо x_i новые независимые переменные $x_i = \sqrt{\lambda_i} x_i'$, мы освободимся от коэффициентов λ_i и, сохраняя прежние обозначения, можем утверждать, что всякое линейное уравнение эллиптического типа с постоянными коэффициентами может быть приведено к виду

$$\sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} + c_1 u = f_1(x_1, \ldots, x_n). \tag{6}$$

Любое гиперболическое уравнение с постоянными коэффициентами приводится к виду

$$\sum_{i=1}^{n-1} u_{x_i x_i} - u_{x_n x_n} + cu = f(x_1, \ldots, x_n)\,.$$

а параболическое к виду

$$\sum_{i=1}^{n-1} u_{x_i x_i} - u_{x_n} + cu = f(x_1, \ldots, x_n),$$

причем независимую переменную x_n называют временем и обозначают через t.

32. Нормальные формы при двух независимых переменных. В [31] мы показали, что в случае постоянных коэффициентов мы можем совокупность членов уравнения, зависящих от производных второго порядка, привести при помощи линейного преобразования к некоторой нормальной форме. В случае переменных коэффициентов, зависящих от x_s, мы не можем, конечно, надеяться совершить такое преобразование к нормальной форме при помощи линейного преобразования переменных и должны пользоваться более общими преобразованиями, но даже и при этом мы сможем решить задачу лишь для случаях двух независимых переменных. Итак, рассмотрим уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными, линейное относительно производных второго порядка

$$a(x, y)\,u_{xx} + 2b(x, y)\,u_{xy} + c(x, y)\,u_{yy} + \ldots = 0. \tag{7}$$

Введем вместо (x, y) новые независимые переменные (ξ, η):

$$\xi = \varphi(x, y); \qquad \eta = \psi(x, y). \tag{8}$$

Производные по старым переменным выразятся через производные по новым переменным по формулам:

$$\begin{aligned}
u_x &= u_\xi \varphi_x + u_\eta \psi_x; \qquad u_y = u_\xi \varphi_y + u_\eta \psi_y,\\
u_{xx} &= u_{\xi\xi}\varphi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\varphi_x\psi_x + u_{\eta\eta}\psi_x^2 + u_\xi\varphi_{xx} + u_\eta\psi_{xx},\\
u_{yy} &= u_{\xi\xi}\varphi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\varphi_y\psi_y + u_{\eta\eta}\psi_y^2 + u_\xi\varphi_{yy} + u_\eta\psi_{yy},\\
u_{xy} &= u_{\xi\xi}\varphi_x\varphi_y + u_{\xi\eta}(\varphi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x) + u_{\eta\eta}\psi_x\psi_y + u_\xi\varphi_{xy} + u_\eta\psi_{xy}.
\end{aligned}$$

Подставляя в уравнение (7), мы будем иметь преобразованное уравнение

$$a'(\xi, \eta)\, u_{\xi\xi} + 2b'(\xi, \eta)\, u_{\xi\eta} + c'(\xi, \eta)\, u_{\eta\eta} + \ldots = 0,$$

где

$$\left.\begin{aligned} a'(\xi, \eta) &= a\varphi_x^2 + 2b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2, \\ c'(\xi, \eta) &= a\psi_x^2 + 2b\psi_x\psi_y + c\psi_y^2, \\ b'(\xi, \eta) &= a\varphi_x\psi_x + b(\varphi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x) + c\varphi_y\varphi_y. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Непосредственной подстановкой проверяется следующее тождество:

$$a'c' - b'^2 = (ac - b^2)(\varphi_x\psi_y - \varphi_y\psi_x)^2. \tag{10}$$

Нетрудно видеть, что знак разности $ac - b^2$ определяет тип уравнения (7). Если $ac - b^2 < 0$, то уравнение принадлежит гиперболическому типу, при $ac - b^2 > 0$ — эллиптическому типу и при $ac - b^2 = 0$ — параболическому типу. В силу (10), преобразование переменных не меняет знака упомянутой разности, т. е. не меняет, естественно, типа уравнения.

В случае уравнений гиперболического типа с постоянными коэффициентами, простейшая форма при двух независимых переменных имеет вид

$$u_{xx} - u_{yy} + \ldots = 0. \tag{11}$$

Вводя вместо (x, y) новые независимые переменные (ξ, η):

$$\xi = \frac{x+y}{2}; \quad \eta = \frac{x-y}{2}, \tag{12}$$

мы придем для гиперболического типа к простейшей форме вида

$$u_{\xi\eta} + \ldots = 0. \tag{13}$$

Мы видим, таким образом, что для гиперболического типа, в случае двух независимых переменных, мы можем брать простейшую форму вида (11) или (13). Эти уравнения легко могут быть преобразованы одно в другое.

Вернемся к уравнению (7) и положим, что в некоторой области D плоскости (x, y) уравнение (7) принадлежит к гиперболическому типу. Это значит, что при значениях (x, y), лежащих в D, квадратное уравнение

$$a(x, y)\tau^2 + 2b(x, y)\tau + c(x, y) = 0 \tag{14}$$

имеет различные вещественные корни. При этом мы считаем, что или $a \neq 0$, или $c \neq 0$. Если бы $a = c = 0$, то уравнение (7) уже имело бы простейшую форму (13). Не нарушая общности, мы можем, конечно, считать $a \neq 0$. Рассмотрим дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка:

$$a(x, y)\,u_x^2 + 2b(x, y)\,u_x u_y + c(x, y)\,u_y^2 = 0. \tag{15}$$

Обозначая через $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ корни уравнения (14), мы видим, что уравнение (15) распадается на два уравнения

$$u_x = f_1(x, y)\,u_y \tag{16_1}$$

и

$$u_x = f_2(x, y)\,u_y. \tag{16_2}$$

Если коэффициенты a, b и c, а тем самым и функции f_1 и f_2, достаточно гладкие, то у написанных уравнений имеются решения с непрерывными производными до второго порядка в некоторой части области D (ср. [2]). Решение уравнения (16_1) возьмем за $\varphi(x, y)$, а уравнения (16_2) за $\psi(x, y)$ в преобразовании (8). Можно выбрать эти решения так, чтобы определитель $\varphi_x\psi_y - \varphi_y\psi_x$ был отличным от нуля в упомянутой части D. Отметим, что мы имеем

$$\varphi_x = f_1\varphi_y; \quad \psi_x = f_2\psi_y,$$

откуда

$$\varphi_x\psi_y - \varphi_y\psi_x = (f_1 - f_2)\,\varphi_y\psi_y. \tag{17}$$

Из написанных формул следует, что если определитель в некоторой точке обращается в нуль, то в этой точке равны нулю обе частные производные первого порядка от φ или ψ. Таким образом, надо строить такие решения уравнений (16_1) и (16_2), у которых обе частные производные первого порядка одновременно не равны нулю.

Функции φ и ψ удовлетворяют уравнению (15), и, в силу (9), мы имеем $a' = c' = 0$, и из формулы (10) вытекает $b' \neq 0$, так что уравнение (7) приводится к виду (13).

Как мы видели в [2], решение уравнений (16_1) и (16_2) имеет локальный характер, т. е. мы можем построить решения этих уравнений, отличные от постоянных лишь в некоторой области, которая будет, вообще говоря, лишь частью области, где $f_k(x, y)$ непрерывно дифференцируемы, и приведение уравнения (7) к нормальному виду будет иметь место лишь в упомянутой области. То же замечание о локальности приведения уравнений (7) к нормальной форме относится и к дальнейшему изложению.

Переходим к рассмотрению уравнения эллиптического типа. При этом $ac - b^2 > 0$, и корни уравнения (14) — мнимые сопряженные. Мы можем по-прежнему писать уравнение (15). Напишем одно из уравнений (16)

$$u_x = \frac{-b + i\sqrt{ac - b^2}}{a}\,u_y,$$

где радикал берется, например, арифметическим. Считая коэффициенты a, b и c аналитическими функциями x и y и $a \neq 0$, мы сможем найти решение этого уравнения в виде аналитической функции [28]: $u = \varphi(x, y) + \psi(x, y)i$, причем получим

$$\varphi_x = -\frac{b}{a}\varphi_y - \frac{\sqrt{ac-b^2}}{a}\psi_y, \quad \psi_x = -\frac{b}{a}\psi_y + \frac{\sqrt{ac-b^2}}{a}\varphi_y.$$

Совершим теперь замену переменных (8). Пользуясь написанной системой для φ и ψ, а также формулами (9), мы получим

$$b' = 0; \quad a' = c' = (ac - b^2)(\varphi_y^2 + \psi_y^2),$$

и после деления на a' уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \ldots = 0. \tag{18}$$

Вместо формулы (17) будем иметь

$$\varphi_x\psi_y - \varphi_y\psi_x = -\frac{2\sqrt{ac-b^2}}{a}\varphi_y\psi_y.$$

Таким образом, задача решена и в случае эллиптического типа. Решение этой задачи в целом при некоторых условиях на коэффициенты a, b, c, которые не считаются аналитическими, имеется в работе: Векуа И. Н. Задача приведения к каноническому виду дифференциальных форм эллиптического типа и обобщенная система Коши — Римана. — ДАН СССР, 1955, **100**, № 2; см. также его книгу: Обобщенные аналитические функции. — М.: Физматгиз, 1959.

Остается рассмотреть уравнение параболического типа. В этом последнем случае уравнение (14) имеет равные корни, и уравнение (15) приводит только к одному уравнению, т. е. уравнения (16_1) и (16_2) совпадают. За функцию $\varphi(x, y)$ возьмем решение этого уравнения, а вторую функцию $\psi(x, y)$ возьмем какой-нибудь, но такой, чтобы функциональный определитель φ и ψ был отличным от нуля. В силу выбора $\varphi(x, y)$ мы будем иметь в преобразованном уравнении $a' = 0$. Кроме того, в силу того, что уравнение принадлежит параболическому типу, мы должны иметь $ac - b^2 = 0$, и формула (10) покажет нам, что $b' = 0$. Таким образом, в результате преобразования, мы будем иметь $a' = b' = 0$. Функция c' не может обратиться тождественно в нуль, так как в противном случае мы получили бы уравнение первого порядка, и обратное преобразование от (ξ, η) к (x, y) не могло бы нам дать уравнение второго порядка (7). Таким образом, в параболическом случае мы будем иметь следующую каноническую форму:

$$u_{\eta\eta} + \ldots = 0, \tag{19}$$

где ненаписанные члены не содержат производных второго порядка, но обязаны иметь член с производной первого порядка по ξ.

33. Задача Коши. Мы видели выше [29], что для уравнения второго порядка

$$F(x, y, u, p, q, r, s, t) = 0 \tag{20}$$

данные Коши, в частном случае, могут состоять в задании функции u и ее производной $u_x = p$ при начальном значении $x = x_0$:

$$u\,|_{x=x_0} = \varphi(y); \quad p\,|_{x=x_0} = \psi(y). \tag{21}$$

Будем называть такие данные *специальными данными Коши*. Эти начальные условия сводятся к тому, что вдоль линии $x = x_0$ плоскости (x, y) задается значение искомой функции u и ее частной производной p. Отметим при этом, что значения другой частной производной первого порядка $q\,|_{x=x_0} = \varphi'(y)$ непосредственно получаются из первого из условий (21). Таким образом, согласно начальным данным, мы будем знать вдоль линии $x = x_0$ самую функцию и ее обе частные производные первого порядка. Нетрудно представить себе более общие данные Коши. Пусть на плоскости (x, y) имеется некоторая линия λ, не пересекающая сама себя, и положим, что вдоль этой линии нам заданы значения искомой функции u. Тем самым мы будем знать вдоль линии λ и производную от u по направлению, касательному к линии λ. Для того, чтобы знать производную первого порядка по любому направлению, мы должны иметь еще одно данное вдоль линии λ, а именно нам должно быть задано вдоль линии λ значение производной от функции u по любому направлению, отличному от направления, касательного к λ. Имея производные по двум направлениям плоскости (x, y) вдоль линии λ, мы будем знать и производную по любому направлению в этой плоскости вдоль λ. Таким образом, в рассматриваемом случае вдоль линии λ нам должны быть заданы значения самой функции и ее производной по любому направлению, не касательному к λ. Задание значений u вдоль линии λ плоскости (x, y) приводит нас к некоторой линии l в трехмерном пространстве (x, y, u). Кроме того, нам известны вдоль λ частные производные p и q. Таким образом, окончательно данные Коши сводятся к заданию некоторой линии l трехмерного пространства (x, y, u) и к заданию вдоль этой линии положения касательной плоскости. Пользуясь параметрическим представлением, мы можем изобразить эти общие данные Коши в следующем виде: заданы пять функций от одного параметра

$$x(t), \quad y(t), \quad u(t), \quad p(t), \quad q(t), \tag{22}$$

которые должны удовлетворять соотношению

$$du = p\,dx + q\,dy. \tag{23}$$

Последнее соотношение сводится к тому требованию, чтобы задание обеих частных производных p и q вдоль λ не противоречило заданию самой функции u вдоль λ, т. е. чтобы производная в направлении, касательном λ, вычисленная на основании данных p и q, имела бы те же самые значения, которые получаются в силу задания самой функции u вдоль λ. Пять функций (22), удовлетворяющих соотношению (23), определяют *полосу* в трехмерном пространстве (x, y, u), и задача Коши состоит в разыскании интегральной поверхности уравнения (20), содержащей заданную полосу.

Аналогичным образом ставится в общем случае задача Коши и для функций от любого числа независимых переменных. Рассмотрим, например, уравнение второго порядка с тремя независимыми переменными

$$F(x_1, x_2, x_3, u, u_{x_1}, u_{x_2}, u_{x_3}, u_{x_1x_1}, u_{x_1x_2}, \ldots) = 0. \tag{24}$$

Начальные данные Коши сводятся в данном случае к заданию функции u и ее частных производных первого порядка на некоторой поверхности S трехмерного пространства (x_1, x_2, x_3). Раз заданы значения самой функции u на поверхности S, то для определения всех ее частных производных первого порядка вдоль S достаточно задать вдоль S производную по любому направлению, не лежащему лишь в касательной плоскости к поверхности S. Если поверхность S, несущая начальные данные Коши, есть плоскость $x_1 = x_1^{(0)}$, то мы имеем специальную форму начальных данных Коши

$$u\big|_{x_1=x_1^{(0)}} = \varphi(x_2, x_3); \quad u_{x_1}\big|_{x_1=x_1^{(0)}} = \psi(x_2, x_3). \tag{25}$$

В параметрической форме указанная выше задача Коши сводится к заданию семи функций от двух параметров

$$\left.\begin{array}{c} x_1(t_1, t_2), \quad x_2(t_1, t_2), \quad x_3(t_1, t_2), \quad u(t_1, t_2), \\ \qquad u_{x_1}(t_1, t_2), \quad u_{x_2}(t_1, t_2), \quad u_{x_3}(t_1, t_2), \end{array}\right\} \tag{26}$$

причем должно быть выполнено условие

$$du = u_{x_1}\,dx_1 + u_{x_2}\,dx_2 + u_{x_3}\,dx_3. \tag{27}$$

Задание функций x_1, x_2, x_3 сводится к заданию поверхности, а остальные данные — к заданию функции u и ее частных производных первого порядка вдоль этой поверхности. Данные (26), удовлетворяющие условию (27), называют обычно *полосой* или — более точно — *полосой первого порядка* в четырехмерном пространстве (x_1, x_2, x_3, u), и задача Коши состоит в определении интегральной поверхности уравнения (24), содержащей заданную полосу. В случае функции u от n независимых переменных $(x_1, \ldots, x_n)$ полоса задается в виде $(2n+1)$ функций от $(n-1)$ параметров

$$x_k(t_1, \ldots, t_{n-1}),\ u(t_1, \ldots, t_{n-1}),\ u_{x_k}(t_1, \ldots, t_{n-1}) \quad (k=1, 2, \ldots, n),$$

причем эти функции должны удовлетворять соотношению

$$du = \sum_{k=1}^{n} u_{x_k}\, dx_k.$$

Если одной из независимых переменных является время t, и поверхность, несущая начальные данные Коши, есть плоскость $t=0$, то мы имеем обычную задачу математической физики интегрирования данного уравнения при заданных начальных условиях [**II**; **176**].

Начальные данные Коши определяют функцию u и все ее частные производные первого порядка на той линии или поверхности, которая несет на себе начальные данные. Если мы к начальным данным присоединим еще само дифференциальное уравнение, то, как мы видели в [**29**], в случае специальных данных Коши мы сможем однозначно определять на указанной линии или поверхности и все производные второго порядка от искомой функции. Мы будем называть данную полосу *характеристической полосой*, если данная полоса вместе с самим дифференциальным уравнением не приводит к однозначному определению производных второго порядка. В следующем параграфе мы выясним этот вопрос подробно для случая квазилинейного уравнения с двумя независимыми переменными.

34. Характеристические полосы. Будем рассматривать уравнение вида

$$ar + 2bs + ct + h = 0, \tag{28}$$

в котором коэффициенты и свободный член суть заданные функции (x, y, u, p, q). Требуется найти интегральную поверхность этого уравнения, содержащую заданную полосу:

$$x(t),\ y(t),\ u(t),\ p(t),\ q(t) \qquad (du = p\,dx + q\,dy). \tag{29}$$

Мы имеем, очевидно,

$$dp = r\,dx + s\,dy; \qquad dq = s\,dx + t\,dy,$$

и, присоединяя еще само уравнение, мы будем иметь три уравнения первой степени для определения производных второго порядка от искомой функции на основной линии λ: $x(t)$, $y(t)$, несущей на себе данные Коши:

$$\left.\begin{aligned} dx\cdot r+dy\cdot s&=dp,\\ dx\cdot s+dy\cdot t&=dq,\\ ar+2bs+ct&=-h. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

В этой системе r, s, t являются искомыми, а все остальные величины, в силу (29), суть известные функции параметра t. Если определитель написанной системы отличен от нуля, то мы получаем определенные значения для производных второго порядка. Таким образом, необходимым и достаточным условием несовместимости или неопределенности задачи разыскания производных второго порядка является равенство

$$\Delta=\begin{vmatrix} dx, & dy, & 0\\ 0, & dx, & dy\\ a, & 2b, & c \end{vmatrix}=0, \tag{31}$$

или, в раскрытом виде

$$a\,dy^2-2b\,dx\,dy+c\,dx^2=0. \tag{32}$$

Найдем второе условие, которое бы гарантировало нам, что задача именно неопределенна, т. е. которое гарантировало бы нам, что система уравнений (31) имеет бесконечное множество решений. Будем считать, что один из миноров второго порядка определителя (31) отличен от нуля. Для определенности положим, что

$$\begin{vmatrix} 0, & dy\\ a, & c \end{vmatrix}=-a\,dy\neq 0.$$

В данном случае система (30) будет иметь один характеристический определитель **[III₁; 9]**, и для того, чтобы она была неопределенной, необходимо и достаточно к условию (31) добавить еще равенство нулю этого характеристического определителя **[III₁; 9]**:

$$\begin{vmatrix} dx, & dp, & 0\\ 0 & dq, & dy\\ a, & -h, & c \end{vmatrix}=0,$$

или, в раскрытом виде:

$$a\,dp\,dy+h\,dx\,dy+c\,dx\,dq=0. \tag{33}$$

Вспоминая еще равенство (23), мы получаем окончательно следующие три равенства, которые вполне характеризуют характеристическую полосу, как такую полосу, вдоль которой определение производных второго порядка из системы (30) приводит к бесчисленному множеству ответов:

$$\left.\begin{aligned} a\,dy^2 - 2b\,dx\,dy + c\,dx^2 = 0, \\ a\,dp\,dy + h\,dx\,dy + c\,dx\,dq = 0, \\ du = p\,dx + q\,dy. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Разберем отдельно случай специальных данных Коши:

$$u\,|_{x=x_0} = \varphi(y); \quad p\,|_{x=x_0} = \psi(y). \tag{35}$$

В данном случае в формулах (29) роль параметра t играет переменная y, и переменная x сохраняет постоянное значение $x = x_0$ Условие (32) приводит нас к равенству $a = 0$ Отметим, что это равенство должно выполняться не тождественно, а после подстановки в функцию a начальных данных (35). Система (30) будет при этом иметь вид:

$$s\,dy = dp; \quad t\,dy = dq; \quad 2bs + ct = -h.$$

и для того, чтобы она была неопределенной, необходимо и достаточно, чтобы третье из написанных уравнений было следствием первых двух. Умножая это уравнение на dy и принимая во внимание первые два уравнения, мы приходим к следующему условию.

$$2b\,dp + c\,dq = -h\,dy,$$

которое заменяет в этом случае условие (33). Окончательно, для специальных данных Коши (35) мы будем иметь следующие условия, определяющие характеристическую полосу:

$$a = 0; \quad 2b\,dp + c\,dq = -h\,dy; \quad du = q\,dy. \tag{36}$$

Условие $a = 0$ показывает, что из уравнения (28) нельзя найти u_{xx}. Второе условие:

$$2b\frac{dp}{dy} + c\frac{dq}{dy} + h = 0,$$

означает, что заданные на прямой $x = x_0$ величины p и q таковы, что удовлетворяется уравнение (28), ибо на упомянутой прямой $s = \frac{dp}{dy}$ и $t = \frac{dq}{dy}$. Третье условие дает очевидную формулу:

$$q\,|_{x=x_0} = \varphi'(y).$$

35. Производные высших порядков. В предыдущем параграфе мы рассмотрели вопрос об определении производных второго порядка на заданной полосе. Перейдем теперь к определению производных высших порядков. Положим, что мы имеем дело с тем случаем, когда определитель (31) отличен от нуля. Возьмем полный дифференциал от первых двух из уравнений (30) и продифференцируем заданное уравнение (28) по x и по y. Таким образом мы будем иметь четыре уравнения первой степени для определения четырех производных третьего порядка от искомой функции u на заданной полосе:

$$\begin{aligned} (dx)^2 u_{xxx} + 2\,dx\,dy\,u_{xxy} + (dy)^2 u_{xyy} &= \ldots, \\ (dx)^2 u_{xxy} + 2\,dx\,dy\,u_{xyy} + (dy)^2 u_{yyy} &= \ldots, \\ au_{xxx} + 2b\,u_{xxy} + cu_{xyy} &= \ldots, \\ au_{xxy} + 2b\,u_{xyy} + cu_{yyy} &= \ldots \end{aligned}$$

Определитель этой системы имеет вид

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} (dx)^2, & 2\,dx\,dy, & (dy)^2, & 0 \\ 0, & (dx)^2, & 2\,dx\,dy, & (dy)^2 \\ a, & 2b, & c, & 0 \\ 0, & a, & 2b, & c \end{vmatrix}.$$

Можно показать, что этот определитель равен квадрату определителя (31), т. е. тоже отличен от нуля. Действительно, обозначая через γ какой-нибудь корень уравнения

$$a + 2b\gamma + c\gamma^2 = 0, \tag{37}$$

прибавим к элементам первого столбца определителя Δ_1 элементы второго столбца, умноженные на γ, третьего столбца, умноженные на γ^2, и четвертого столбца, умноженные на γ^3. Элементы первого столбца при этом окажутся следующими:

$$(dx + \gamma\,dy)^2, \quad \gamma\,(dx + \gamma\,dy)^2, \quad 0, \quad 0,$$

откуда видно, что Δ_1, являющийся однородным полиномом четвертой степени относительно dx и dy, делится на $(dx + \gamma\,dy)^2$. Коэффициент при $(dx)^4$ в выражении Δ_1 равен c^2 и, если мы обозначим через γ_1 и γ_2 корни уравнения (37), то можем написать:

$$\Delta_1 = c^2\,(dx + \gamma_1\,dy)^2\,(dx + \gamma_2\,dy)^2,$$

или, принимая во внимание свойство корней квадратного уравнения:

$$\Delta_1 = (c\,dx^2 - 2b\,dx\,dy + a\,dy^2)^2 = \Delta^2.$$

При доказательстве мы предполагали, что уравнение (37) имеет различные корни. Но если равенство $\Delta_1 = \Delta^2$ справедливо при таком предположении, то оно будет справедливо и в том случае, когда уравнение (37) имеет равные корни. Чтобы убедиться в этом, достаточно несколько изменить коэффициенты a, b, c так, чтобы уравнение (37) имело различные корни, и затем в равенстве $\Delta_1 = \Delta^2$ перейти к пределу, устремляя измененные значения коэффициентов к их исходным значениям, при которых уравнение (37) имеет равные корни.

Совершенно так же мы можем получить пять уравнений первой степени для определения пяти производных четвертого порядка, и определитель этой системы также окажется отличным от нуля и т. д. Предположим, что соответствующие функции будут аналитическими и регулярными. Таким образом, так же, как и в случае специальных данных Коши и уравнения, разрешенного относительно r [29], мы можем и в более общем случае, предполагая определитель Δ отличным от нуля, вычислять на заданной полосе производные всех порядков. Составив соответствующий ряд Тэйлора, мы могли бы доказать, как и в [28], его сходимость.

Переходим теперь к тому случаю, когда данная полоса оказывается характеристической полосой. Мы ограничимся при этом только рассмотрением специальных начальных данных Коши (35). Сами эти начальные данные дают нам s и t при $x = x_0$, и остается определить только r. Но при подстановке полученных начальных данных в уравнение (28), мы, в силу (36), получаем тождество, и производная r при $x = x_0$ на первый взгляд остается совершенно неопределенной. Продифференцируем обе части уравнения (28) по x:

$$ar_x + 2bs_x + ct_x + (a_x + a_u p + a_p r + a_q s)\, r + (\ldots)\, s + \\ + (\ldots)\, t + (\ldots) = 0, \qquad (38)$$

причем в круглых скобках с точками стоят выражения, совершенно аналогичные тому выражению, которое стоит в скобке, содержащей производные от a. Если мы в написанное уравнение подставим начальные данные (35) и уже известные производные второго порядка:

$$s\,|_{x=x_0} = \psi'(y); \quad t\,|_{x=x_0} = \varphi''(y),$$

то, обозначая $r\,|_{x=x_0} = \omega(y)$, мы получим для искомой функции $\omega(y)$, как нетрудно проверить, уравнение Риккатти, т. е. уравнение вида

$$\alpha(y)\,\omega'(y) + \beta(y)\,\omega^2(y) + \gamma(y)\,\omega(y) + \delta(y) = 0,$$

где α, β, γ и δ — известные функции от y. Если мы возьмем какое-нибудь решение этого уравнения, то тем самым будем знать r при $x = x_0$, а следовательно, будем знать и все производные третьего порядка при $x = x_0$, кроме u_{xxx}. Для определения начального значения этой производной мы должны продифференцировать уравнение (38) по x и внести в полученное таким образом уравнение все уже вычисленные начальные данные. Таким образом, мы придем для искомой функции $u_{xxx}|_{x=x_0} = \omega_1(y)$ к линейному дифференциальному уравнению:

$$\alpha_1(y)\,\omega_1'(y) + \beta_1(y)\,\omega_1(y) + \gamma_1(y) = 0.$$

Этот процесс может продолжаться и дальше. При интегрировании упомянутого выше уравнения Риккатти и последующих линейных уравнений вводятся все новые и новые произвольные постоянные, но вся трудность задачи заключается в том, чтобы подобрать значения этих постоянных так, чтобы полученный ряд Тейлора был сходящимся. Можно доказать, на чем мы не останавливаемся, что для уравнения гиперболического типа это может быть сделано бесчисленным множеством способов, т. е. через характеристическую полосу действительно проходит бесчисленное множество интегральных поверхностей. Условия (36) или, в более общем случае, (34) представляют собою, таким образом, необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять начальные данные для того, чтобы существовали интегральные поверхности, содержащие данную характеристическую полосу.

В качестве примера рассмотрим простейшее уравнение второго порядка параболического типа:

$$t - u_x = 0, \quad \text{т. е.} \quad u_x = u_{yy}. \tag{39}$$

В данном случае $a = b = 0$, $c = -1$, и уравнение (32) дает $dx = 0$, т. е. $x = \text{const}$. Вдоль всякой линии $x = x_0$ мы должны иметь некоторую особенность при попытке решения задачи Коши. Положим, что мы имеем специальные данные Коши (35). Полагая в уравнения (39) $x = x_0$, получим $\psi(y) = \varphi''(y)$, откуда мы видим, что функция $\psi(y)$ вполне определяется заданием функции $\varphi(y)$. Это соответствует необходимости выполнения второго из условий (36). Таким образом, в данном случае достаточно задавать лишь первое из условий (35).

Дифференцируя уравнение (39) по x и полагая $x = x_0$, мы вполне определяем начальное значение: $r|_{x=x_0} = \varphi^{(IV)}(y)$. Имея это начальное значение, дифференцируя (39) два раза по x и полагая $x = x_0$, мы получим начальное значение при $x = x_0$ производной третьего порядка по x и т. д. В данном случае начальные значения производных по x определяются единственным образом, а упомянутые выше дифференциальные уравнения вырождаются в конечные соотношения. Определив начальные значения производных всех порядков по x при $x = x_0$, мы можем построить соответствующий ряд Тэйлора. Оказывается, что он будет сходящимся в окрестности $x = x_0$ только в том случае, если $\varphi(y)$ есть целая функция, удовлетворяющая некоторому дополнительному условию Напомним, что при рассмотрении задачи распространения тепла в неограниченном стержне [II; 214] мы построили решение уравнения (39), удовлетворяющее первому из условий (35), в виде определенного интеграла. При этом, конечно, не надо было предполагать, что $\varphi(y)$ есть целая функция. Для перехода к прежним обозначениям из [II; 214] надо в уравнении (39) заменить x на t и y на x, и в уравнении из [II; 214] считать $a^2 = 1$.

Если мы положим $\varphi(y) = 0$, получим, очевидно, решение уравнения (39), равное тождественно нулю. Покажем, что существует еще элементарное решение уравнения (39), удовлетворяющее с исключением точки $y = 0$, $x = x_0$ тому же начальному условию $u|_{x=x_0} = 0$. Положим, что

$$u = \frac{1}{\sqrt{x - x_0}} e^{-\frac{y^2}{4(x-x_0)}} \quad \text{при} \quad x > x_0, \tag{40_1}$$

$$u = 0 \quad \text{при} \quad x \leqslant x_0. \tag{40_2}$$

Функция (40_1) и все ее производные стремятся к нулю при стремлении x к x_0 (от больших значений), т. е. функция, определяемая формулами (40_1) и (40_2), и все ее производные будут сохранять непрерывность при переходе через прямую $x = x_0$, а на самой этой прямой функция u и все ее производные обращаются в нуль. Исключение представляет лишь точка $x = x_0$, $y = 0$, в которой построенная функция имеет особенность. Непосредственным дифференцированием (40_1) убеждаемся в том, что построенная функция удовлетворяет уравнению (39). Во всякой точке прямой $x = x_0$ построенная функция уже не будет, конечно, аналитической, регулярной функцией от x, ибо слева от этой прямой она тождественно равна нулю, а справа отлична от нуля. Таким образом, построенная функция не представима рядом Тейлора по целым положительным степеням $(x - x_0)$. Решение (40_1) постоянным множителем отличается от решения, дающего элементарный источник тепла [II; 214].

36. Вещественные и мнимые характеристики. Поскольку коэффициенты уравнения (28) могут зависеть не только от x и y, но и от u, p, q, мы можем определить тип уравнения, лишь фиксируя некоторую точку в пятимерном пространстве (x, y, u, p, q). При этом, если $b^2 - ac > 0$, то мы имеем гиперболический тип, если $b^2 - ac < 0$, то эллиптический, и если $b^2 - ac = 0$, то — параболический. Пусть нам задана некоторая полоса (29), которую мы считаем вещественной. Если вдоль этой полосы наше уравнение принадлежит эллиптическому типу, то выражение, стоящее в левой части условия (32), не может обращаться в нуль и, следовательно, никакая вещественная полоса не может быть характеристической полосой. В дальнейшем мы будем рассматривать только гиперболический тип. Уравнение (32) представляет собою квадратное уравнение относительно $\frac{dy}{dx}$. В случае гиперболического типа оно имеет два вещественных различных корня, которые мы обозначим через $\mu_1(x, y, u, p, q)$ и $\mu_2(x, y, u, p, q)$, так что упомянутое выше уравнение распадается на два, $dy = \mu_i dx\,(i = 1, 2)$. Мы можем таким образом вместо уравнений (34) написать две системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} dy - \mu_i\,dx &= 0, \\ a\mu_i\,dp + h\mu_i\,dx + c\,dq &= 0, \qquad (i = 1, 2) \\ du = p\,dx &+ q\,dy, \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

которым соответствуют две системы характеристик.

Особенно просто обстоит дело в том случае, когда в уравнении (28) стоящие при производных второго порядка коэффициенты a, b и c зависят только от независимых переменных (x, y). При этом основное уравнение (32) превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка с переменными x и y:

$$a(x, y)\,dy^2 - 2b(x, y)\,dx\,dy + c(x, y)\,dx^2 = 0.$$

В гиперболическом случае оно определяет на плоскости (x, y) два семейства линий, которые называются обычно *характеристическими линиями* или *характеристиками* уравнения (28). Характерное свойство всякой характеристической линии состоит в том, что если мы зададим вдоль такой линии некоторые данные Коши, т. е. функцию u и ее производные первого порядка, то полученная таким образом полоса или приведет к несовместной системе (30) для производных второго порядка, или же окажется характеристической полосой. Для всякой линии, отличной от характеристики, любые данные Коши приведут к определенным значениям производных второго и следующих порядков. В эллиптическом случае уравнение (32) будет иметь мнимые корни для $\frac{dy}{dx}$, и мы не будем иметь характеристических линий на плоскости (x, y). Если мы перейдем к комплексным значениям переменных (x, y), то сможем получить из уравнения (32) мнимые характеристики. При этом, конечно, все функции считаются аналитическими. Наконец, в параболическом случае уравнение (32) даст нам на плоскости (x, y) одно семейство характеристик. Обращаясь к результатам (32), мы видим, что при приведении уравнения к канонической форме мы выбирали за координатные линии на плоскости (x, y) семейство характеристических линий.

37. Основные теоремы. Характеристическое многообразие совершенно так же, как и в случае уравнения первого порядка, играет основную роль при интегрировании уравнения. Мы имеем здесь основные теоремы, аналогичные тем, которые имели место и для уравнений первого порядка.

Положим, что две интегральные поверхности уравнения (28) имеют вдоль некоторой линии l пространства (x, y, u) касание конечного порядка, т. е. вдоль этой линии интегральные поверхности имеют общую касательную плоскость, но некоторые производные выше первого порядка оказываются для этих интегральных поверхностей на этой линии различными. Нетрудно видеть, что эта линия вместе с касательной плоскостью вдоль нее должна представлять собою характеристическую полосу. Действительно, если бы это было не так, то из рассуждений [35] следует, что мы получили бы вдоль l совершенно определенные значения для производных всех порядков. Таким образом, мы имеем следующую теорему:

Теорема 1. *Если две интегральные поверхности имеют вдоль линии l касание конечного порядка, то эта линия вместе с соответствующей касательной плоскостью представляет собою характеристическую полосу.*

Основным свойством характеристической полосы является тот факт, что вдоль этой полосы уравнение приводит к неопределенной системе (30) при разыскании производных второго порядка. Это свойство не зависит, конечно, от выбора независимых переменных, и мы получаем, таким образом, следующую теорему:

Теорема 2. *При любой обратимой и гладкой замене переменных x, y характеристические полосы переходят в характеристические полосы.*

Пусть имеется некоторая интегральная поверхность S уравнения (28). На этой поверхности u, p, q суть определенные функции независимых переменных (x, y). Подставляя в коэффициенты уравнения (28) вместо u, p, q их выражение через (x, y), мы получим для этих коэффициентов определенные выражения через (x, y), и уравнение (32) будет представлять собою дифференциальное уравнение первого порядка, определяющее две системы линий на поверхности S. Вдоль каждой из этих линий l будут выполнены уравнение (23) и уравнение (32), и нетрудно видеть, что вдоль такой линии должно быть выполнено и второе из уравнений (34). Действительно, если бы оно не было выполнено, то мы имели бы несовместную систему для определения производных второго порядка, а это противоречит тому факту, что полоса, определенная линией l и касательной плоскостью интегральной поверхности S, находится на интегральной поверхности S. Мы получили, таким образом, следующую, третью, теорему:

Теорема 3. *Всякую интегральную поверхность можно покрыть семейством характеристических полос.*

Отметим, что этот результат, если оставаться в вещественной области, имеет место только в гиперболическом или параболическом случаях, причем в гиперболическом случае мы можем покрыть интегральную поверхность двумя семействами характеристических полос.

Докажем теперь обратную теорему, а именно следующую, четвертую, теорему:

Теорема 4. *Если некоторое семейство характеристических полос образует поверхность S: $u = u(x, y)$, где $u(x, y)$ имеет непрерывные производные до второго порядка, то эта поверхность есть интегральная поверхность уравнения* (28).

Пусть имеется поверхность S, покрытая семейством полос, вдоль которых выполнены уравнения (34). Вдоль каждой из этих полос мы имеем

$$dp = r\,dx + s\,dy; \quad dq = s\,dx + t\,dy.$$

Подставляя эти выражения dp и dq во второе из уравнений (34), мы придем к следующим двум уравнениям:

$$as\,dy^2 + (ar + ct + h)\,dx\,dy + cs\,dx^2 = 0,$$
$$a\,dy^2 - 2b\,dx\,dy + c\,dx^2 = 0.$$

Умножая второе на s и вычитая из первого, мы и придем к основному уравнению (28), причем надо принять во внимание, что произведение $dx\,dy$ отлично от нуля, так как x и y — независимые переменные.

В случае уравнения первого порядка мы имели для характеристических полос обычную систему обыкновенных дифференциальных уравнений, и, благодаря этому, задача интегрирования уравнения с частными производными первого порядка привелась к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В настоящем случае система (34) представляет собою систему трех уравнений (в полных дифференциалах) для пяти искомых функций. В работе Леви (Math. Ann., 1927, **97**) показано, каким образом можно систему (34) расширить так, чтобы получилась система пяти дифференциальных уравнений первого порядка с пятью неизвестными функциями — система, имеющая специальную форму. Для этой системы строится определенным образом решение задачи Коши, что приводит к решению задачи Коши и для уравнения (28).

В следующем параграфе мы разберем частные случаи, когда система (34) имеет интеграл.

38. Промежуточные интегралы. Для удобства дальнейших вычислений преобразуем уравнения (41), определяющие характеристические полосы, к новому виду. Вспоминая основное свойство корней квадратного уравнения, мы можем написать $\mu_1\mu_2 = \frac{c}{a}$, и, пользуясь этим равенством, мы можем переписать систему (41) при $i = 1$ в виде

$$dy - \mu_1\, dx = 0;\quad dp + \mu_2\, dq + \frac{h}{a}\, dx = 0;\quad du - (p + q\mu_1)\, dx = 0. \tag{42}$$

Вторая система (при $i = 2$) получится из написанной перестановкой букв μ_1 и μ_2 Будем искать такую функцию $V(x, y, u, p, q)$, полный дифференциал которой равен нулю в силу уравнений (42):

$$V_x\, dx + V_y\, dy + V_u\, du + V_p\, dp + V_q\, dq = 0. \tag{43}$$

Определяя dy, du и dp из системы (42) и подставляя в левую часть последнего уравнения, мы должны будем приравнять нулю коэффициенты при оставшихся дифференциалах dx и dq. Таким образом, оказывается, что для того, чтобы функция V была интегралом системы (42):

$$V(x, y, u, p, q) = C, \tag{44}$$

необходимо и достаточно, чтобы функция V удовлетворяла двум линейным однородным уравнениям с частными производными первого порядка:

$$\left.\begin{aligned} V_x + \mu_1 V_y + (p + \mu_1 q)\, V_u - \frac{h}{a}\, V_p = 0,\\ V_q - \mu_2 V_p = 0. \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Если мы в этих уравнениях поменяем μ_1 и μ_2 местами, то получим аналогичную систему, выражающую необходимое и достаточное условие того, что функция V является интегралом второй системы характеристических полос. Методы разыскания решений системы (45) были нами изложены в [22]. Положим, что нам удалось найти решение этой системы, отличное от тривиального решения, равного постоянному. Покажем, что при этом *всякое решение уравнения первого порядка* (44), *не являющееся особым решением, будет и решением нашего уравнения* (28). Действительно, в рассматриваемом случае полный дифференциал V должен обращаться в нуль в силу (42), т. е. должен быть линейной комбинацией левых частей этих уравнений:

$$dV = \alpha\,(dy - \mu_1\, dx) + \beta\left(dp + \mu_2\, dq + \frac{h}{a}\, dx\right) + \gamma\,(du - p\, dx - q\, dy). \tag{46}$$

Пусть имеется некоторая интегральная поверхность S уравнения (44). На этой поверхности u, p, q являются определенными функциями (x, y), и, интегрируя уравнение первого порядка $dy - \mu_1 dx = 0$, мы получим некоторое семейство линий, покрывающих поверхность S. Кроме того, вдоль этих линий мы должны, очевидно, иметь $du = p\, dx + q\, dy$. Принимая во внимание, что в силу только что сказанного, сомножители при α и γ в формуле (46) вдоль наших линий равны нулю, мы получим вдоль этих линий, т. е. на поверхности S, равенство

$$\beta\left(dp + \mu_2\, dq + \frac{h}{a}\, dx\right) = 0.$$

По условию, интегральная поверхность S не является особым решением, и, следовательно, в левой части формулы (43) коэффициент при dp или dq окажется отличным от нуля. Из этого вытекает, что $\beta \neq 0$, и, следовательно, вдоль наших линий выполняются все три уравнения (42), т. е. поверхность S оказывается покрытой характеристическими полосами уравнения (28). Но тогда, в силу четвертой теоремы из [37], эта поверхность является интегральной поверхностью уравнения (28). Таким образом, имея интеграл (44), мы получаем некоторый класс решений уравнения (28), интегрируя уравнение первого порядка (44). Положим, что нам удалось найти два независимых решения системы (45) V_1 и V_2. При этом выражение $V_1 - \Phi(V_2)$ при произвольном выборе функции Φ также будет решением системы (45), и мы будем иметь следующий интеграл системы (42):

$$V_1 - \Phi(V_2) = 0, \tag{47}$$

содержащий произвольную функцию Φ. Пусть ищется интегральная поверхность уравнения (28), содержащая заданную полосу (29). Подставляя в функции V_1 и V_2 вместо x, y, u, p, q их выражения (29), мы получим две определенные функции параметра t $v_1(t)$ и $v_2(t)$. Уравнение (47) приведется при этом к виду $v_1(t) - \Phi[v_2(t)] = 0$. Введем вместо t новую переменную $\sigma = v_2(t)$. Решая это уравнение относительно t, будем иметь $t = \omega(\sigma)$, и предыдущее равенство, выраженное в переменной σ, определит нам вид функции $\Phi(\sigma) = v_1[\omega(\sigma)]$. После определения вида функции $\Phi(\sigma)$ уравнение (47) будет представлять собою определенное уравнение первого порядка. Решая для него задачу Коши при начальных данных (29), мы получим решение задачи Коши и для уравнения (28). Всякий интеграл системы (42) или аналогичной системы, получаемой перестановкой μ_1 и μ_2, называется обычно *промежуточным интегралом уравнения* (28). Заметим, что если система (45) оказывается полной, то она имеет три независимых решения. Можно показать, что это может иметь место только при $\mu_1 = \mu_2$.

Замечание. Положим, что $h = 0$, а коэффициенты a, b и c постоянные или зависят только от p и q. При этом μ_1 и μ_2 зависят также только от p и q, и мы можем найти решение системы (45), если будем искать V, зависящим только от p и q. Первое уравнение будет при этом удовлетворено при любом выборе $V(p, q)$, ибо $h = 0$, и для нахождения V мы получаем одно уравнение $V_q - \mu_2(p, q) V_p = 0$. Найдя решение этого уравнения $V_1(p, q)$, мы получим уравнение первого порядка $V_1(p, q) = \text{const}$, каждое решение которого удовлетворяет и исходному уравнению второго порядка. Вместо $\mu_2(p, q)$ мы могли бы использовать второй корень $\mu_1(p, q)$ уравнения (32) и получили бы другое уравнение первого порядка: $V_2(p, q) = \text{const}$.

39. Уравнения Монжа — Ампера. Вся изложенная выше теория характеристических полос и промежуточных интегралов распространяется непосредственно и на уравнения более общего типа, а именно на уравнения, линейные относительно r, s, t и $rt - s^2$, т. е. на уравнения вида

$$ar + 2bs + ct + g(rt - s^2) + h = 0 \quad (g \neq 0),$$

которые называются обычно *уравнениями Монжа — Ампера*. Если задана некоторая полоса, то определение производных второго порядка вдоль этой полосы будет вполне однозначным, если выражение

$$A = a\,dy^2 - 2b\,dx\,dy + c\,dx^2 + g\,(dx\,dp + dy\,dq)$$

отлично от нуля. Если это выражение обращается в нуль, а выражение

$$B = a\,dp\,dy + h\,dx\,dy + c\,dq\,dx + g\,dp\,dq$$

отлично от нуля, то определение производных второго порядка приводит к несовместной системе. Характеристическая полоса определяется следующими тремя уравнениями:

$$A = 0; \quad B = 0; \quad du = p\,dx + q\,dy.$$

Если обозначим через μ_1 и μ_2 корни уравнения

$$\mu^2+2b\mu+ac-gh=0,$$

то две системы характеристических полос могут быть определены уравнениями

$$g\,dp+c\,dx+\mu_1\,dy=0;\quad g\,dq+a\,dy+\mu_2\,dx=0;\quad du=p\,dx+q\,dy.$$

Вторую систему можно получить из написанной, меняя μ_1 и μ_2 местами Все эти результаты получаются при помощи вычислений, совершенно аналогичных предыдущим. Для уравнения Монжа — Ампера остаются справедливыми также основные теоремы, изложенные в [37].

При разыскании промежуточных интегралов мы, вместо системы (45), приходим к системе

$$V_x+pV_u-\frac{c}{g}V_p-\frac{\mu_2}{g}V_q=0,$$

$$V_y+qV_u-\frac{\mu_1}{g}V_p-\frac{a}{g}V_q=0.$$

Вторая система может быть получена из написанной, как и выше, перестановкой μ_1 и μ_2. Остаются справедливыми и все указанные выше свойства промежуточных интегралов.

40. Характеристики при любом числе независимых переменных. Будем рассматривать теперь уравнение второго порядка с любым числом независимых переменных:

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}u_{x_ix_k}+\ldots=0\qquad (a_{ik}=a_{ki}), \tag{48}$$

причем ненаписанные члены не содержат производных второго порядка. Коэффициенты a_{ik} будем считать пока зависящими только от независимых переменных x_s. В данном случае мы ограничимся выяснением только того условия, при котором уравнение (48), совместно с начальными данными Коши, не дает возможности однозначного определения производных второго порядка, т. е. приводит к несовместности или неопределенности при разыскании этих производных. Это условие аналогично условию (32) в случае двух независимых переменных. Мы начнем рассмотрение нашей задачи с того случая, когда начальные данные Коши имеют специальную форму:

$$u\,\big|_{x_1=x_1^{(0)}}=\varphi(x_2,\ldots,x_n);\quad u_{x_1}\big|_{x_1=x_1^{(0)}}=\psi(x_2,\ldots,x_n).$$

Эти начальные данные дают нам возможность определить на гиперплоскости $x_1=x_1^{(0)}$ все производные первого порядка и все производные второго порядка, кроме $u_{x_1x_1}$. Для определения этой последней производной мы должны воспользоваться самим уравнением (48), положив в нем $x_1=x_1^{(0)}$. Если при этом окажется, что $a_{11}\neq 0$, то мы будем иметь определенное значение для упомянутой производной. Если же после указанной подстановки окажется, что $a_{11}=0$, то мы или придем к невозможному равенству, или получим тождество. Таким образом, в случае специальных данных Коши, искомое условие имеет вид

$$a_{11}=0. \tag{49}$$

Перейдем теперь к общему случаю, когда начальные данные Коши даны на некоторой гиперповерхности:

$$\omega_1(x_1, \ldots, x_n)=0. \tag{50}$$

Кроме функции ω_1, входящей в последнюю формулу, введем еще $(n-1)$ функцию $\omega_s(x_1, \ldots, x_n)$ $(s=2, \ldots, n)$ так, чтобы мы могли совершить замену независимых переменных:

$$x'_s=\omega_s(x_1, \ldots, x_n) \quad (s=1, \ldots, n), \tag{51}$$

т. е. так, чтобы последние уравнения были разрешимы относительно x_s. Выразим производные по старым переменным через производные по новым переменным, выписывая лишь те члены, в которые входят интересующие нас производные:

$$u_{x_i}=u_{x'_1}\frac{\partial\omega_1}{\partial x_i}+\ldots; \quad u_{x_i x_k}=u_{x'_1 x'_1}\frac{\partial\omega_1}{\partial x_i}\frac{\partial\omega_1}{\partial x_k}+\ldots$$

Преобразованное уравнение будет иметь вид

$$a'_{11}u_{x'_1 x'_1}+\ldots=0, \quad \text{где} \quad a'_{11}=\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}\frac{\partial\omega_1}{\partial x_i}\frac{\partial\omega_1}{\partial x_k}, \tag{52}$$

и невыписанные члены не содержат производной $u_{x'_1 x'_1}$. В силу (51) начальные данные для преобразованного уравнения задаются на гиперплоскости $x'_1=0$, т. е. они имеют специальный вид. Таким образом, в данном случае мы можем воспользоваться условием (49), но только в новых независимых переменных. Принимая во внимание (52), мы можем, таким образом, утверждать, что для того, чтобы начальные данные Коши на гиперповерхности (50) приводили к несовместности или неопределенности при отыскании производных второго порядка, необходимо и достаточно, чтобы функция ω_1 удовлетворяла уравнению

$$\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}\frac{\partial\omega_1}{\partial x_i}\frac{\partial\omega_1}{\partial x_k}=0, \tag{53}$$

причем это последнее уравнение должно быть удовлетворено при $\omega_1=0$, т. е., иначе говоря, в силу уравнения (50). Всякую гиперповерхность, удовлетворяющую этому условию, мы назовем *характеристической поверхностью или характеристикой уравнения* (48).

Если мы фиксируем какую-либо точку $M_0\left(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$, то в этой точке коэффициенты a_{ik} будут иметь фиксированные значения, которые мы обозначим $a_{ik}^{(0)}$. Направление вектора, вещественные составляющие которого $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ удовлетворяют уравнению

$$\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}^{(0)}\alpha_i\alpha_k = 0, \tag{53_1}$$

назовем характеристическим направлением нормали в точке M_0. Уравнение (53) равносильно тому, что в каждой точке поверхности $\omega_1(x_1, \ldots, x_n) = 0$ направление нормали к этой поверхности есть характеристическое направление нормали. Если поверхность $S(\omega_1 = 0)$ такова, что ни в одной ее точке направление нормали не характеристическое, т. е. левая часть уравнения (53) отлична от нуля вдоль всей поверхности, то из сказанного выше следует, что, совершая замену переменных (51), мы можем переписать уравнение (48) в виде

$$u_{x_1'x_1'} = \sum_{i,\,k=2}^{n} a_{ik}'' u_{x_i'x_k'} + \sum_{i=2}^{n} a_{1i}'' u_{x_1'x_i'} + \ldots, \tag{48_1}$$

причем поверхность S переходит в плоскость $x_1' = 0$. Это дает возможность преобразовать задачу Коши при начальных данных на упомянутой поверхности в задачу Коши с начальными данными на плоскости $x_1' = 0$. Если уравнение (48) имеет аналитический характер — например оно линейно и с аналитическими коэффициентами, поверхность S нехарактеристическая и ω_1 — аналитическая функция, то преобразованная задача Коши может быть, при надлежащих условиях, решена согласно теореме Ковалевской. Если поверхность S есть характеристическая, то функция u и ее частные производные первого порядка должны быть связаны на ней некоторым соотношением. Действительно, u и ее частные производные на S выражаются через такие же величины на плоскости $x_1' = 0$ и наоборот. Пусть

$$u = \varphi_0(x_2', \ldots, x_n'); \quad u_{x_1'} = \varphi_1(x_2', \ldots, x_n') \quad \text{при} \quad x_1' = 0,$$

$$u_{x_k'} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_k'} \qquad (k = 2, \ldots, n).$$

Если S есть характеристическая поверхность, то в преобразованном уравнении $a_{11}' = 0$ при $x_1' = 0$, и мы имеем уравнение

$$\sum_{i,\,k=2}^{n} a_{ik}' u_{x_i'x_k'} + \sum_{i=2}^{n} a_{1i}' u_{x_1'x_i'} + \ldots = 0,$$

где ненаписанные члены содержат лишь производные первого порядка. Таким образом получается связь между функциями φ_0 и φ_1:

$$\sum_{i,\,k=2}^{n} a'_{ik} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x'_i \, \partial x'_k} + \sum_{i=2}^{n} a'_{1i} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x'_i} + \ldots = 0.$$

Это соотношение не приводится, вообще говоря, к тождеству относительно φ_0 и φ_1.

Положим теперь, что коэффициенты a_{ik} зависят не только от x_s, но и от u и u_{x_s}. Начальные данные Коши на $(n-1)$-мерном многообразии (50) зависят от $(n-1)$ параметров. Будем считать, что этими параметрами являются $x_2, \ldots, x_n$. Подставляя эти выражения начальных данных в коэффициенты a_{ik}, мы по-прежнему будем иметь уравнение (53), которое должно быть выполнено в силу (50), и можем решить, является ли поверхность $\omega_1 = 0$ характеристической при заданных начальных данных.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением лишь того случая, когда коэффициенты a_{ik} зависят только от x_s. Заметим, что если уравнение (48) принадлежит эллиптическому типу, то уравнение (53), как и в случае двух независимых переменных, не может иметь вещественных решений, кроме $\omega_1 = \text{const}$. Последнее решение, очевидно, не представляет интереса для нашей задачи.

41. Бихарактеристики. Уравнение (53) должно быть выполнено в силу (50). Потребуем, чтобы это уравнение выполнялось тождественно относительно x_s. При этом уравнение (53) будет представлять собою обычное дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка, и всякое его решение, отличное от постоянной, будет давать не одну характеристику, а целое семейство характеристик:

$$\omega_1(x_1, \ldots, x_n) = C, \tag{54}$$

где C — произвольная постоянная. Наоборот, для того, чтобы последнее уравнение определяло семейство характеристик при произвольном постоянном C, необходимо и достаточно, чтобы функция ω_1 удовлетворяла уравнению (53). Совершенно так же, как и выше [2], можно показать, что всякую характеристику можно включить в семейство вида (54) и что таким образом решения уравнения (53) дадут нам все характеристики.

В уравнениях математической физики одна из независимых переменных, а именно время, играет исключительную роль по сравнению с остальными переменными, которые обычно дают пространственные координаты. В дальнейшем мы будем считать, что такой исключительной независимой переменной является переменная x_n, и будем обозначать $x_n = t$. Для остальных переменных мы введем обозначение $x_1, \ldots, x_m$, т. е. будем считать $n = m+1$.

Напишем уравнение поверхности (50) в разрешенном относительно t виде: $t - \omega(x_1, \ldots, x_m) = 0$ и будем считать, что коэффициенты a_{ik} не зависят от t.

Подставляя левую часть уравнения $t - \omega = 0$ в уравнение (53), мы получим следующее уравнение для функции ω:

$$\sum_{i,k=1}^{m} a_{ik} \frac{\partial\omega}{\partial x_i} \frac{\partial\omega}{\partial x_k} - 2 \sum_{i=1}^{m} a_{in} \frac{\partial\omega}{\partial x_i} + a_{nn} = 0. \tag{55}$$

Это уравнение должно быть выполнено, строго говоря, в силу $t = \omega$. Но оно вовсе не содержит буквы t, и, следовательно, мы можем утверждать, что оно должно быть выполнено тождественно. Возвращаясь к общему случаю, рассмотрим уравнение (53) и напишем соответствующую этому уравнению первого порядка систему Коши. Уравнение (53) не содержит самой функции ω_1, и поэтому в соответствующей системе Коши мы не будем выписывать того отношения, которое содержит $d\omega_1$. Таким образом, мы получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_k}{ds} = 2 \sum_{i=1}^{n} a_{ki} p_i; \tag{56$_1$}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\frac{dp_k}{ds} = - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} p_i p_j, \tag{56$_2$}$$

где s — некоторый вспомогательный параметр. Возьмем некоторое семейство характеристических гиперповерхностей $\omega_1(x_1, \ldots, x_n) = C$ и положим $p_k = \frac{\partial\omega_1}{\partial x_k}$. При этом p_i выразятся через $(x_1, \ldots, x_n)$, и, подставляя эти выражения в правые части уравнения (56$_1$), получим систему первого порядка для $(x_1, \ldots, x_n)$. Если взять какое-нибудь решение этой системы и подставить в упомянутые выше выражения p_k через $(x_1, \ldots, x_n)$ то нетрудно проверить, что полученные функции будут удовлетворять уравнениям (56$_2$). Действительно,

$$\frac{dp_k}{ds} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2\omega_1}{\partial x_k \partial x_i} \frac{dx_i}{ds} = 2 \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2\omega_1}{\partial x_k \partial x_i} a_{ij} p_j = 2 \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial p_i}{\partial x_k} a_{ij} p_j. \tag{57}$$

Заменим в уравнении (53) значок k на j и продифференцируем обе части по x_k:

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} p_i p_j + \sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial p_i}{\partial x_k} p_j + \sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij} p_i \frac{\partial p_j}{\partial x_k} \equiv 0.$$

В силу $a_{ij} = a_{ji}$ последние две суммы равны между собой, и, пользуясь последним тождеством, мы можем переписать формулу (57) в виде

$$\frac{dp_k}{ds} = -\sum_{i,\,j=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} p_i p_j,$$

что и совпадает с уравнением (56_2). Заметим, что равенство (54) представляет собою при этом интеграл системы (56_1). Действительно,

$$\frac{d\omega_1}{ds} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_k} \cdot \frac{dx_k}{ds} = 2 \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_k} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_i},$$

и последняя сумма равна тождественно нулю, в силу (53). Те линии пространства R^n с координатами $(x_1, \ldots, x_n)$, которые получаются в результате интегрирования системы (56_1), в которой положено $p_i = \frac{\partial \omega_1}{\partial x_i}$, называются *бихарактеристиками*, соответствующими системе $\omega_1 = C$ характеристических поверхностей.

Если при интегрировании системы (56_1) за начальные значения x_k мы возьмем точку, лежащую на некоторой гиперповерхности $\omega_1 = C_0$, то вся соответствующая бихарактеристика будет лежать на упомянутой гиперповерхности, т. е. *всякая характеристическая поверхность уравнения* (48) *может быть образована бихарактеристиками.* Укажем теперь те условия, при которых решения системы (56_1), (56_2) образуют характеристическую гиперповерхность. Поверхность (54) представляет собою $(n-1)$-мерное многообразие в R^n. В уравнение бихарактеристики входит параметр s, и, следовательно, для образования характеристической гиперповерхности (54) надо взять семейство бихарактеристик, зависящее от $(n-2)$ параметров. Будем считать, что начальные значения $x_k^{(0)}$ и $p_k^{(0)}$ переменных, входящих в систему (56_1), (56_2), зависят от $(n-2)$ параметров $t_1, \ldots, t_{n-2}$. Повторяя рассуждения из [8], нетрудно убедиться в том, что для того чтобы полученное семейство бихарактеристик давало характеристическую гиперповерхность, необходимо и достаточно чтобы указанные выше начальные значения удовлетворяли следующим соотношениям [12]:

$$\sum_{i, k=1}^{n} a_{ik}^{(0)} p_i^{(0)} p_k^{(0)} = 0, \tag{58}$$

$$\sum_{s=1}^{n} p_s^{(0)} \frac{\partial x_s^{(0)}}{\partial t_j} = 0 \quad (j = 1, \ldots, n-2), \tag{59}$$

где $a_{ik}^{(0)}$ — результат подстановки $x_s = x_s^{(0)}$ в выражения a_{ik}. При этом предполагаем, что по крайней мере один из функциональных определителей порядка $(n-1)$ от переменных $(x_1, \ldots, x_n)$ по $(s, t_1, \ldots, t_{n-2})$ отличен от нуля.

Все высказанные результаты вытекают непосредственно из метода Коши интегрирования уравнения первого порядка [12]. Несущественным осложнением в данном случае является тот факт, что уравнение интегральной поверхности ищется в неявной форме $\omega_1(x_1, \ldots, x_n) = C$ и, в связи с этим, система Коши (56) не содержит самой функции ω_1.

Основную роль в математической физике играет особая интегральная поверхность уравнения (53), а именно, так называемый *характеристический коноид* этого уравнения. Эта характеристическая поверхность получится указанным выше методом, если мы будем считать $x_k^{(0)}$ фиксированными, т. е. независящими от параметров (вершина коноида), и подчиним $p_k^{(0)}$ условию (58). Отметим, что из этого уравнения n величин $p_k^{(0)}$ определяются как функции $(n-1)$ параметров. В силу однородности уравнения (58), один из параметров входит множителем в $p_k^{(0)}$. Но нетрудно проверить, что уравнения (56_1) и (56_2) не меняются, если заменим s на $\frac{1}{\alpha}s$ и p_k на αp_k, где α не зависит от s. Таким образом параметр, входящий множителем при $p_k^{(0)}$, является излишним, так как он все равно войдет через s. Поэтому одну из величин $p_k^{(0)}$ мы можем считать, например, равной единице.

Если коэффициенты a_{ik} суть постоянные, то уравнения (56_2) показывают, что p_k должны быть постоянными, а из уравнений (56_1) мы видим, что x_k будут полиномами первой степени от s, т. е. *если a_{ik} — постоянные, то бихарактеристики суть прямые линии в R^n.*

Рассмотрим один важный частный случай. Введем указанное выше обозначение $x_1 = t$ и будем рассматривать уравнение специального вида

$$u_{tt} - \sum_{i, k=1}^{m} a_{ik} u_{x_i x_k} + \ldots = 0, \tag{60}$$

где $m = n - 1$, и коэффициенты a_{ik} не содержат t, т. е. зависят только от $(x_1, \ldots, x_m)$. Будем считать, что квадратичная форма

$$\sum_{i, k=1}^{m} a_{ik}\xi_i\xi_k$$

определенно положительна при всех значениях ξ_s. Уравнение (53) в данном случае будет иметь вид

$$\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial t}\right)^2 - \sum_{i, k=1}^{m} \frac{\partial\omega_1}{\partial x_i}\frac{\partial\omega_1}{\partial x_k} = 0.$$

Будем искать характеристическую гиперповерхность в виде, решенном относительно t:

$$\omega(x_1, \ldots, x_m) - t = 0 \quad \text{или} \quad t = \omega(x_1, \ldots, x_m). \tag{61}$$

При этом $p_0 = \frac{\partial\omega_1}{\partial t} = -1$, и для функции ω мы получаем уравнение первого порядка

$$\sum_{i, k=1}^{m} a_{ik}\omega_{x_i}\omega_{x_k} = 1 \tag{62}$$

или

$$\sum_{i, k=1}^{m} a_{ik}p_i p_k = 1. \tag{63}$$

Соответствующая этому уравнению система Коши будет

$$\frac{dx_k}{2\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ki}p_i} = \frac{dt}{2\sum\limits_{i, k=1}^{m} a_{ik}p_i p_k} = \frac{dp_k}{-\sum\limits_{i, j=1}^{m} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} p_i p_j}.$$

Если мы возьмем некоторую конкретную характеристическую гиперповерхность (61), то из (63) и последней системы следует, что образующие ее бихарактеристики должны удовлетворять следующей системе:

$$\frac{dx_k}{dt} = \sum_{i=1}^{m} a_{ki}p_i \quad (p_i = \omega_{x_i}) \quad (k = 1, \ldots, m). \tag{64}$$

Мы можем рассматривать поверхность (61) не как неподвижную поверхность в n-мерном пространстве R_n с координатами $(x_1, \ldots, x_m, t)$, а как поверхность, движущуюся с течением времени в m-мерном пространстве R^m с координатами $(x_1, \ldots, x_m)$. При этом решения системы (64) мы будем рассматривать, как линии λ в пространстве R^m, определяемые параметрически при помощи параметра t (время). При этом, конечно, в пространстве

R^m линия λ не будет уже находиться на движущейся поверхности (61).

Если, например, в пространстве R^3 с координатами (x_1, x_2, t) мы имели конус

$$x_1^2 + x_2^2 - c^2t^2 = 0,$$

то на плоскости (x_1, x_2) мы должны его рассматривать как окружность с центром в начале и с переменным радиусом ct. Если прямолинейные образующие этого конуса были бихарактеристиками, то линии λ в плоскости (x_1, x_2) представляют собою пучок прямых, выходящих из начала. Приведенный пример, как мы увидим дальше, соответствует тому случаю, когда данное уравнение есть волновое уравнение

$$u_{tt} - c^2(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}) = 0.$$

42. Связь с вариационной задачей. Пусть A — таблица коэффициентов a_{ik}. Решая систему (64) относительно p_i, мы получим $p = A^{-1}\frac{dx}{dt}$, где, как всегда, A^{-1} — матрица, обратная матрице A. Подставляя полученные выражения p_i в левую часть уравнения (63), мы преобразуем квадратичную форму от p_i в квадратичную форму от $\frac{dx}{dt}$, т. е. будем иметь

$$\sum_{i,\,k=1}^{m} b_{ik}\frac{dx_i}{dt}\frac{dx_k}{dt} = \sum_{i,\,k=1}^{m} a_{ik}p_ip_k = 1, \tag{65}$$

причем таблица B коэффициентов b_{ik} получается из таблицы A по формуле [III$_1$; 32]

$$B = (A^{-1})^* AA^{-1} = (A^{-1})^*,$$

или, принимая во внимание, что A симметрична, получим $B = A^{-1}$.

Введем в пространстве R^m метрику, определяемую равенством

$$d\sigma^2 = \sum_{i,\,k=1}^{m} b_{ik}\,dx_i\,dx_k.$$

Интеграл

$$\int d\sigma = \int \sqrt{\sum_{i,\,k=1}^{m} b_{ik}\,dx_i\,dx_k} = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\sum_{i,\,k=1}^{m} b_{ik}x_i'x_k'}\,dt, \tag{66}$$

взятый вдоль любой бихарактеристики, входящей в состав некоторой характеристической гиперповерхности (61), равен, в силу (65), разности значений t, соответствующих концам пути интегрирования, т. е. длина любой дуги упомянутой бихарактеристики, при наличии метрики (66), определяется разностью значений времени, соответствующих концам дуги.

Сравнивая предыдущие результаты с результатами из [**IV**$_1$; **89**], мы видим, что уравнение (63) есть уравнение основной функции поля для интеграла (66). Таким образом, семейство гиперповерхностей $\omega(x_1, \ldots, x_m) = t$ представляет семейство трансверсальных поверхностей некоторого поля вариационной задачи для интеграла (66). Далее, нетрудно проверить, что бихарактеристики, соответствующие взятому семейству характеристических поверхностей и определяемые уравнениями (64), будут экстремалями поля. Чтобы убедиться в этом, достаточно проверить, пользуясь уравнением (64), тот факт, что бихарактеристики пересекаются трансверсально с гиперповерхностями $\omega(x_1, \ldots, x_m) = t$.

Действительно, условие трансверсальности в данном случае сводится к пропорциональности $p_i = \omega_{x_i}$ и производных от подынтегральной функции интеграла (66) по x'_i [**IV**$_1$; **89**], т. е. к пропорциональности p_i и $\sum\limits_{k=1}^{m} b_{ik}x'_k$. Но, решая уравнения (64) относительно p_i, мы получим

$$p_i = \sum_{k=1}^{m} b_{ik}x'_k,$$

что и доказывает наше утверждение о трансверсальности пересечения семейства характеристических гиперповерхностей с соответствующими бихарактеристиками.

Отметим, что случаю характеристического коноида соответствуют квазисферы в пространстве R^m с центром $\left(x_1^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}\right)$ соответствующим вершине коноида, и радиусом t.

Если уравнению (60) соответствует волновой процесс в пространстве R^m, то уравнение первого порядка (63) определяет геометрическую оптику этого процесса при помощи характеристических поверхностей, и бихарактеристики суть лучи, определяющие эту же геометрическую оптику. Указанные выше соображения приводят геометрическую оптику в непосредственную связь с некоторой вариационной задачей. Если нам задан фронт волны S_0 при $t = 0$, то для того, чтобы получить фронт волны S_t в любой момент времени t, мы должны построить семейство квазисфер с центрами на S_0 и радиусом t и взять огибающую этого семейства (построение Гюйгенса). Это построение соответствует тому, что мы говорили в [**11**] относительно решения задачи Коши для уравнений первого порядка при помощи характеристических коноидов этого уравнения. Мы не останавливаемся на доказательстве указанного построения. Оно может быть проведено на основе теории полного интеграла. Заметим, что огибающая квазисфер радиуса t может состоять из двух гиперповерхностей. Только одна из них будет давать фронт волны в момент времени t.

Все предыдущие рассуждения можно провести не в пространстве R^m, а в пространстве R^n, включая t в число координат пространства. Для большей симметрии рассмотрим общий случай уравнения (48):

$$\sum_{i,\, k=1}^{n} a_{ik} u_{x_i x_k} + \ldots = 0 \quad (a_{ki} = a_{ik}), \tag{67}$$

где a_{ik} — заданные функции $(x_1, \ldots, x_n)$. Характеристические поверхности будут определяться уравнением

$$D(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = \sum_{i,\, k=1}^{n} a_{ik} p_i p_k = 0 \quad \left(p_i = \frac{\partial \omega_1}{\partial x_i}\right), \tag{68}$$

где через $D(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n)$ мы обозначили левую часть уравнения. Соответствующая этому уравнению система Коши, т. е. система обыкновенных уравнений, определяющая бихарактеристики, дается уравнениями (56_1) и (56_2). Заменяя вспомогательный параметр s на $s/2$, можем написать эту систему в виде

$$\frac{dx_k}{ds} = \frac{1}{2} D_{p_k}; \quad \frac{dp_k}{ds} = -\frac{1}{2} D_{x_k} \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{69}$$

Первые уравнения этой системы имеют вид

$$\frac{dx_k}{ds} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} p_i \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Решая эти уравнения относительно p_i и подставляя в уравнение (68), получим

$$\sum_{i,\, k=1}^{n} b_{ik} \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{ds} = 0, \tag{70}$$

где таблица B коэффициентов b_{ik} выражается формулой $B = A^{-1}$. Введем в пространстве R_n метрику

$$d\sigma_1^2 = \sum_{i,\, k=1}^{n} b_{ik}\, dx_i\, dx_k.$$

Существенным отличием от предыдущего будет тот факт, что для уравнения гиперболического типа правая часть написанной формулы может принимать как положительные, так и отрицательные значения (знакопеременная квадратичная форма [III$_1$; 35]), и, следовательно, $d\sigma_1$ может оказаться мнимой величиной.

Из (70) следует, что для бихарактеристик характерным является соотношение $d\sigma_1 = 0$, т. е., при принятой метрике, длина любого отрезка бихарактеристики равна нулю. При этом надо помнить невещественный характер введенной метрики.

43. Распространение поверхности разрыва. Положим, что некоторое решение u уравнения (48) имеет на поверхности

$$\psi(x_1, \ldots, x_n) = 0 \tag{71}$$

разрыв первого рода для производных второго порядка, причем само решение и его производные первого порядка остаются непрерывными при переходе через поверхность (71). Будем рассматривать упомянутое решение u с двух разных сторон поверхности (71), как два различных решения уравнения (48). Эти решения имеют на этой поверхности одинаковые данные Коши, но различные значения для производных второго порядка, и мы можем поэтому утверждать, что поверхность (71) должна быть характеристической поверхностью уравнения (67). К тому же самому результату мы пришли бы, если бы предположили, что не только само решение u и его частные производные первого порядка, но и частные производные второго порядка, остаются непрерывными при переходе через поверхность (71), а разрыв имеет место лишь для производных порядка выше второго. Вообще говорят, что решение уравнения второго порядка (67) имеет на поверхности (71) *слабый разрыв*, если при переходе через эту поверхность u и его первые производные остаются непрерывными, а некоторые производные порядка выше первого имеют на поверхности (71) разрыв первого рода. Из предыдущих рассуждений следует, что *поверхностью слабого разрыва может быть только характеристическая поверхность*.

Выделяя по-прежнему независимую переменную $x_n = t$, мы, вместо (71), будем иметь движущуюся поверхность слабого разрыва в пространстве R_m:

$$\psi(x_1, \ldots, x_m, t) = 0. \tag{72}$$

Определим скорость перемещения этой поверхности. Возьмем некоторую точку M на поверхности (72) и проведем из нее нормаль к поверхности в ту сторону, где $\psi > 0$. На этом направлении нормали возьмем отрезок MM_1 от точки M до точки пересечения M_1 с поверхностью, соответствующей моменту $(t + \Delta t)$ времени t. Предел отношения $|MM_1| : \Delta t$ при $\Delta t \to 0$ называется обычно скоростью перемещения поверхности (72). Вводя обозначение:

$$g = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \psi_{x_i}{}^2}, \tag{73}$$

мы будем иметь следующие выражения для направляющих косинусов упомянутой нормали:

$$\cos(n, x_i) = \frac{\psi_{x_i}}{g}. \tag{74}$$

Продифференцируем соотношение (72):

$$\sum_{i=1}^{m} \psi_{x_i}\, dx_i + \psi_t\, dt = 0.$$

Величину dx_i можно считать проекцией бесконечно малого перемещения MM_1 вдоль нормали на координатную ось, и мы можем, следовательно, написать:

$$\sum_{i=1}^{m} \psi_{x_i} |MM_1| \cos(n, x_i) + \psi_t\, dt = 0.$$

Принимая во внимание (74), мы получаем следующее выражение для скорости перемещения поверхности (72):

$$P = -\frac{\psi_t}{g}. \tag{75}$$

В случае $m = 2$ мы имеем перемещающуюся линию на плоскости (x_1, x_2), в случае $m = 3$ мы имеем поверхность, двигающуюся в трехмерном пространстве (x_1, x_2, x_3).

Рассмотрим в качестве примера волновое уравнение при $m = 1$:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0.$$

Основное уравнение (53) имеет вид

$$\psi_t^2 - a^2\psi_x^2 = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\psi_t}{\psi_x} = \pm a,$$

и оно показывает, что всякая слабая прерывность должна двигаться вдоль оси x со скоростью $\pm a$. На плоскости (x, t) характеристиками будут два семейства прямых $x \pm at = c$. Рассмотрим еще уравнение

$$u_{tt} - f(u_x, u_t)\, u_{xx} = 0,$$

которое встречается при рассмотрении движения сжимаемой жидкости в одномерном случае. Условие (53) запишется в виде

$$\psi_t^2 - f(u_x, u_t)\, \psi_x^2 = 0.$$

Положим, что на оси x с одной стороны от прерывности мы имеем покой. Тогда с этой стороны от прерывности и в самой точке прерывности мы имеем $u_x = u_t = 0$. Предыдущее условие записывается в виде $\psi_t^2 - f(0,\ 0)\,\psi_x^2 = 0$, и скорость распространения прерывности определяется формулой

$$P = \pm\sqrt{f(0,\ 0)}. \tag{76}$$

Перейдем теперь к рассмотрению волнового уравнения с тремя независимыми переменными:

$$u_{tt} - a^2(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}) = 0.$$

Уравнение (53) запишется при этом в виде

$$\psi_t^2 - a^2(\psi_{x_1}^2 + \psi_{x_2}^2) = 0,$$

или, пользуясь формулой (73), мы можем записать последнее уравнение в виде $\psi_t^2 - a^2g^2 = 0$, и это уравнение первого порядка выражает тот факт, что всякая характеристическая линия на плоскости $(x_1,\ x_2)$ должна двигаться со скоростью a. Совершенно аналогичный результат мы получим и для характеристической поверхности в трехмерном пространстве $(x_1,\ x_2,\ x_3)$, если будем исходить из волнового уравнения

$$u_{tt} - a^2(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3}) = 0.$$

Заметим, что коэффициент a^2 мы можем предполагать зависящим от координат $(x_1,\ x_2,\ x_3)$.

44. Сильные разрывы. При исследовании разрывных решений для уравнений второго порядка мы предполагали, что сама функция и ее производные первого порядка остаются непрерывными при переходе через поверхность разрыва и что разрыв испытывают производные не ниже второго порядка (слабый разрыв). Только при таком предположении мы могли утверждать, что поверхность разрыва должна быть характеристической поверхностью. Мы переходим теперь к исследованию *сильных разрывов*. Это значит, что в случае уравнения второго порядка, разрыв имеют уже производные *первого* порядка. Нашей целью является выяснение тех обстоятельств, при которых поверхностью разрыва по-прежнему является обязательно характеристическая поверхность. Мы рассмотрим волновое уравнение с тремя независимыми переменными. Введем в рассмотрение оператор, стоящий в левой части упомянутого уравнения:

$$\square u = u_{xx} + u_{yy} - \frac{1}{a^2}u_{tt}.$$

Это выражение называется обычно *оператором Лоренца*. Введем в рассмотрение еще один оператор, содержащий производные первого порядка:

$$P(u) = u_x\cos(n,\ x) + u_y\cos(n,\ y) - \frac{1}{a^2}u_t\cos(n,\ t), \tag{77}$$

где n — некоторое направление в пространстве (x, y, t). Пусть D — некоторая область в пространстве (x, y, t), S — ограничивающая ее поверхность и n — направление внешней нормали к поверхности S. Применяя обычную формулу Гаусса, мы сможем, совершенно так же, как и в [II; 203], написать для оператора Лоренца следующую формулу Грина:

$$\iiint\limits_D [v \square u - u \square v]\, d\tau = \iint\limits_D [vP(u) - uP(v)]\, dS, \tag{78}$$

где u и v — две функции, имеющие непрерывные производные до второго порядка в $\bar{D}$.

В частности, для любых $u \in C^2(D)$ и $v \in C_0^\infty(D)$ *)

$$\iiint\limits_D [v \square u - u \square v]\, d\tau = 0. \tag{79}$$

Положим, что область D разбивается некоторой поверхностью σ на две части D_1 и D_2, причем эта поверхность σ является поверхностью разрыва для производных первого порядка от функции u. Выясним те условия, которым должен удовлетворять этот разрыв, для того чтобы формула (79) осталась по-прежнему справедливой для всего объема D в применении к функции u с разрывными производными и к любой функции $v \in C_0^\infty(D)$. Будем при этом предполагать, что сама функция u остается непрерывной при переходе через σ. Пусть M — некоторая точка поверхности σ и l — любое направление, лежащее в касательной плоскости к σ в точке M. Мы будем считать, что производная $\frac{\partial u}{\partial l}$, при приближении к точке M с обеих сторон поверхности σ, имеет один и тот же предел, и что этот предел равен производной от значений функции u на самой поверхности σ, взятой по направлению l. Это условие называют иногда *кинематическим условием совместности*. Если n — фиксированное направление нормали к σ в точке M, то мы будем считать, что $\frac{\partial u}{\partial n}$ при приближении к точке M с той или другой стороны поверхности имеет определенные пределы, но эти пределы могут быть различными на различных сторонах поверхности.

Переходим теперь к формулировке условия, которое называют *динамическим условием совместности*. Оно состоит в том, что выражение (77) при приближении к любой точке поверхности (n — направление нормали в этой точке) имеет одинаковые пределы на обеих сторонах поверхности, если в обоих случаях

*) Напомним, что C_0^∞ — это совокупность всех бесконечно дифференцируемых функций, имеющих компактные носители, принадлежащие D.

брать одно и то же направление нормали n. Мы считаем далее, что формула (78) применима в отдельности к частям D_1 и D_2 области D. Это будет наверное выполнено, если функция u имеет в D_1 и D_2 непрерывные вплоть до поверхности σ производные до второго порядка. Если мы применим формулу (78) для D_1 и D_2, то на поверхности σ мы будем иметь в этих двух случаях прямо противоположные направления внешней нормали, так что выражение $P(u)$ для написанных двух интегралов будет отличаться знаком. Складывая эти две формулы, мы получим для всего объема D формулу (79), так как два интеграла, взятых по σ, взаимно сократятся. Итак, при сделанных предположениях относительно сильного разрыва функции u, мы получаем справедливость формулы (79) для всего объема D.

Выведем теперь некоторые важные следствия из сделанных предположений. Пусть $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к σ. Рассмотрим векторное произведение $\operatorname{grad} u \times \mathbf{n}$. Если через $\mathbf{l}$ обозначить орт, имеющий направление проекции $\operatorname{grad} u$ на касательную плоскость к σ, так что $\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial l}\mathbf{l} + \frac{\partial u}{\partial n}\mathbf{n}$, то упомянутое векторное произведение будет равно $\frac{\partial u}{\partial l}\mathbf{l} \times \mathbf{n}$, а потому оно является непрерывным при переходе через поверхность σ. Если мы образуем три составляющие этого векторного произведения, то получим следующие три выражения, которые, в силу кинематических условий совместности, должны быть непрерывными при переходе через σ:

$$\left.\begin{aligned} u_x \cos(n, y) - u_y \cos(n, x) &= M_1, \\ u_y \cos(n, t) - u_t \cos(n, y) &= M_2, \\ u_t \cos(n, x) - u_x \cos(n, t) &= M_3. \end{aligned}\right\} \tag{80}$$

Кроме того, формулированное выше условие дает нам четвертое выражение, которое также должно оставаться непрерывным при переходе через σ:

$$u_x \cos(n, x) + u_y \cos(n, y) - \frac{1}{a^2} u_t \cos(n, t) = M_4. \tag{81}$$

Будем рассматривать уравнения (80) и (81) как четыре уравнения первой степени относительно u_x, u_y, u_t. Если бы оказалось, что таблица коэффициентов этой системы имеет ранг, равный трем, т. е. если бы оказалось, что хоть один определитель третьего порядка в таблице коэффициентов отличен от нуля, то мы смогли бы решить соответствующие три уравнения относительно указанных выше производных, и эти производные выразились бы через непрерывные функции M_k. При этом оказалось бы, что все производные первого порядка функции u остаются непрерывными при переходе через σ, и мы не имели бы сильного разрыва. Таким образом, мы можем утверждать, что ранг упомянутой таблицы коэффициентов должен быть меньше трех, т. е. все определители третьего порядка таблицы

$$\left\|\begin{matrix} \cos(n, y) & -\cos(n, x) & 0 \\ 0 & \cos(n, t) & -\cos(n, y) \\ -\cos(n, t) & 0 & \cos(n, x) \\ \cos(n, x) & \cos(n, y) & -\frac{1}{a^2}\cos(n, t) \end{matrix}\right\|. \tag{82}$$

должны равняться нулю.

Легко подсчитывается, что

$$\Delta_1^2+\Delta_2^2+\Delta_3^2=\left[\cos^2(n, x)+\cos^2(n, y)-\frac{1}{a^2}\cos^2(n, t)\right]^2,$$

а $\Delta_4=0$, где Δ_k есть определитель матрицы, полученной из этой таблицы вычеркиванием k-й строки. Следовательно, равенство нулю всех Δ_k равносильно равенству

$$\cos^2(n, x)+\cos^2(n, y)-\frac{1}{a^2}\cos^2(n, t)=0. \tag{83}$$

Если $\psi(x, y, t)=0$ есть уравнение поверхности σ, то это равенство переписывается очевидно в виде

$$\psi_x^2+\psi_y^2-\frac{1}{a^2}\psi_t^2=0,$$

и мы видим, таким образом, что и в рассматриваемом случае сильного разрыва поверхность σ должна быть характеристической поверхностью уравнения $\Box u=0$. Если условие (83) выполнено, то нетрудно показать, что и все определители третьего порядка таблицы (82) равны нулю и что M_4 является линейной комбинацией M_1, M_2 и M_3, а именно, мы имеем, очевидно, при этом

$$\cos(n, t)M_4=\cos(n, y)M_2-\cos(n, x)M_3.$$

Мы видим, таким образом, что если выполнены кинематические условия совместности, что дает непрерывность M_1, M_2, M_3, и поверхность σ есть характеристическая поверхность уравнения $\Box u=0$, то отсюда уже вытекает непрерывность выражения M_4, т. е. динамическое условие совместности. Заметим, что в предыдущих рассуждениях мы пришли к уравнению характеристической поверхности, не занимаясь вовсе исследованием решений уравнения $\Box u=f$, а исходя лишь из равенства (79), содержащего выражение $\Box u$, стоящее в левой части этого равенства.

Итак, мы доказали следующее: если функция u имеет сильный разрыв на поверхности σ и удовлетворяет на ней кинематическим и динамическим условиям совместности, то σ является характеристической поверхностью, и функция u удовлетворяет тождеству (79) при любой $v \in C_0^\infty(D)$ (и любой $v \in C_0^2(D)$).

Верно и обратное утверждение, а именно: если функция u имеет сильный разрыв на σ, удовлетворяет на σ кинематическим условиям совместности и тождеству (79) при любом $v \in C_0^\infty(D)$, то σ будет характеристической поверхностью, а для функции u выполняется динамическое условие совместности: скачок $[P(u)]_\sigma$ функции $P(u)$ при переходе через σ равен нулю.

Действительно, нам дано, что u непрерывна в D (так что $[u]_\sigma = 0$), а $[\operatorname{grad} u]_\sigma \neq 0$. Из тождества (79) следует

$$\int_\sigma v\, [P(u)]_\sigma\, dS = 0,$$

что в силу достаточного произвола в выборе функции v [**IV**$_1$; **71, 112**] дает $[P(u)]_\sigma = 0$, т. е. динамическое условие совместности. Наконец, так как $[\operatorname{grad} u]_\sigma \neq 0$ и $[u_x]_\sigma$, $[u_y]_\sigma$, $[u_t]_\sigma$ удовлетворяют однородной системе уравнений (80), (81), то, как было показано выше, это возможно только в случае, когда σ есть характеристическая поверхность.

С точки зрения физических задач уравнение $\Box u = f$ означает равновесие внутренних и внешних сил, действующих на элемент объема в пространстве (x, y, t), а уравнение $[P(u)]_\sigma = 0$ — отсутствие поверхностных внешних сил, действующих на элемент поверхности σ. Из нашего анализа следует, что эта пара уравнений эквивалентна тождеству

$$\iiint_D [vf - u \Box v]\, d\tau = 0,$$

где v — любая функция из $\dot{C}_0^\infty(D)$, если u обладает указанной выше гладкостью в D_1 и D_2. В [**60**] мы опишем более широкие классы разрывных решений уравнения $\Box u = f$, а также других линейных дифференциальных уравнений, положив в основу их определения тождества этого типа.

45. Метод Римана. Мы переходим теперь к решению задачи Коши и начнем со случая линейного уравнения с двумя независимыми переменными, причем берем это уравнение уже приведенным к нормальной форме:

$$L(u) = u_{xy} + a(x, y)\, u_x + b(x, y)\, u_y + c(x, y)\, u = f(x, y). \qquad (84)$$

В дальнейшем часто мы не будем выписывать аргументы у коэффициентов и свободного члена. Через $L(u)$ мы обозначили левую часть уравнения. Напомним, что основное условие (32), определяющее характеристики, для написанного уравнения имеет вид $dx\, dy = 0$, так что характеристиками уравнения (84) будут прямые $x=\text{const}$ и $y=\text{const}$, параллельные осям. Наряду с оператором $L(u)$, рассмотрим так называемый *сопряженный оператор*, который определяется следующим образом:

$$L^*(v)=v_{xy}-(av)_x-(bv)_y+cv.$$

Коэффициенты a и b мы считаем при этом, конечно, непрерывно дифференцируемыми. Пользуясь выражениями для $L(u)$ и $L^*(v)$, нетрудно проверить следующее элементарное тождество:

$$2[vL(u)-uL^*(v)]=(u_xv-v_xu+2buv)_y+(u_yv-v_yu+2auv)_x. \quad (85)$$

Рассмотрим на плоскости (x, y) некоторую область D с границей λ и положим, что функции u и v имеют в области D непрерывные производные первого порядка и непрерывную смешанную производную второго порядка. При этом, интегрируя обе части тождества (85) по области D и пользуясь известной формулой **[II; 72]**:

$$\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\oint\limits_\lambda P\,dx+Q\,dy,$$

мы получим следующую *формулу Грина*:

$$2\iint\limits_D[vL(u)-uL^*(v)]\,dS=$$
$$=\oint\limits_\lambda-(u_xv-v_xu+2buv)\,dx+(u_yv-v_yu+2auv)\,dy. \quad (86)$$

После этих предварительных вычислений переходим к решению задачи Коши для уравнения (84).

Положим, что на плоскости (x, y) нам задана некоторая линия l, которая пересекается не более чем в одной точке с прямыми, параллельными осям. Уравнение этой линии может быть написано в виде $x=x(y)$ или $y=y(x)$. Мы считаем, что существуют производные $x'(y)$ и $y'(x)$, отличные от нуля, на рассматриваемом участке линии l. Ищется решение уравнения (84) по заданиям Коши на l, т. е. вдоль этой линии заданы значения функции u и ее частных производных u_x, u_y, причем, как всегда, должно быть соблюдено условие $du=u_xdx+u_ydy$. Мы можем считать, что u, u_x, u_y заданы вдоль l как функции только от x или только от y.

При этом предполагается, что функция, дающая значения u на l, имеет непрерывную производную, а u_x и u_y — непрерывные функции. Коэффициенты a и b, как мы упоминали выше, по предположению имеют непрерывные частные производные, а c и f — непрерывны в той области, содержащей l, к которой будут относиться дальнейшие рассуждения. В дальнейшем мы докажем, что при сделанных предположениях задача имеет решение. Нашей задачей сейчас является построение некоторой формулы для решения задачи в предположении, что такое решение существует.

Возьмем за область B часть плоскости (x, y), ограниченную дугой линии l и двумя прямыми, параллельными осям и выходящими из фиксированной точки $P(x, y)$ (рис. 1). Положим, что в этой области нам известно решение однородного сопряженного уравнения:

$$L^*(v) = 0. \tag{87}$$

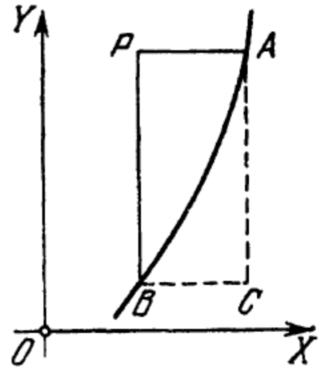

Рис. 1.

Применяя формулу (86) к искомому решению u задачи Коши и только что упомянутому решению уравнения (87), мы получим, пользуясь уравнением (84),

$$-2\iint\limits_{D} vf\,d\sigma = \int\limits_{AB} + \int\limits_{BP} + \int\limits_{PA}. \tag{88}$$

Интегрирование по контуру λ разбивается на интегрирование по дуге AB кривой l и по прямым BP и PA, параллельным осям. Интеграл по дуге l мы должны считать известным, так как на этой дуге нам заданы значения искомой функции u и ее обеих частных производных первого порядка. Рассмотрим интегралы по упомянутым прямым. Вдоль PA меняется только x, и, следовательно, при интегрировании по PA, мы получим интеграл

$$-\int\limits_{PA} (u_x v - v_x u + 2buv)\,dx.$$

Подынтегральную функцию мы можем переписать в виде

$$u_x v - v_x u + 2buv = (uv)_x + 2u(bv - v_x),$$

и, следовательно, будет:

$$-\int\limits_{PA} (u_x v - v_x u + 2buv)\,dx = (uv)_P - (uv)_A - \int\limits_{PA} 2u(bv - v_x)\,dx,$$

где, например, $(uv)_P$ есть значение произведения uv в точке P.

Совершенно так же интегрирование по BP даст нам следующий результат:

$$\int\limits_{BP} (u_y v - v_y u + 2auv)\,dy = (uv)_P - (uv)_B + \int\limits_{BP} 2u(av - v_y)\,dy.$$

Формула (88) может быть переписана следующим образом:

$$2v(P)u(P)=\int\limits_{AB}[(u_x v-v_x u+2buv)\,dx-$$
$$-(u_y v-v_y u+2auv)\,dy]+u(A)v(A)+u(B)v(B)+$$
$$+\int\limits_{PA}2u(bv-v_x)\,dx+\int\limits_{PB}2u(av-v_y)\,dy-2\iint\limits_{D}fv\,d\sigma. \quad (89)$$

Положим, что нам известно не какое-нибудь решение уравнения (87), а решение этого уравнения, удовлетворяющее на прямых PA и PB следующим условиям:

$$bv-v_x=0 \quad \text{на} \quad PA \quad \text{и} \quad av-v_y=0 \quad \text{на} \quad PB,$$

и притом такое, что $v(P)=1$. В таком случае в формуле (89) пропадут интегралы по PA и PB, и мы получим следующую формулу, выражающую значение искомой функции $u(P)$ в точке P, координаты которой обозначим через (x_0, y_0):

$$2u(x_0, y_0)=u(A)v(A)+u(B)v(B)+$$
$$+\int\limits_{AB}(u_x v-v_x u+2buv)\,dx-(u_y v-v_y u+2auv)\,dy-2\iint\limits_{D}fv\,d\sigma. \quad (90)$$

Выясним теперь более подробно те условия, которым должно удовлетворять решение v уравнения (87). Вдоль прямой PA мы должны иметь

$$v_x=b(x, y_0)\,v.$$

Это уравнение можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение по отношению к независимой переменной x, и, интегрируя его, мы получаем следующие значения v на прямой PA:

$$v(x, y_0)=e^{\int\limits_{x_0}^{x} b(x, y_0)\,dx} \quad (\text{на } PA). \quad (91)$$

Совершенно так же на прямой PB мы получим

$$v(x_0, y)=e^{\int\limits_{y_0}^{y} a(x_0, y)\,dy} \quad (\text{на } PB). \quad (92)$$

При этом в самой точке $P(x_0, y_0)$ мы будем иметь $v(x_0, y_0)=1$. Итак, решение v уравнения (87) должно иметь на прямых PA и PB заданные значения, определяемые формулами (91) и (92).

Оно будет зависеть, конечно, от выбора точки (x_0, y_0), т. е., по существу говоря, оно будет функцией пары точек. Обозначим его через

$$v(x, y; x_0, y_0). \tag{93}$$

Это решение уравнения (87), удовлетворяющее условиям (91) и (92), называется *функцией Римана*. Эта функция не зависит ни от данных Коши на l, ни от вида этого контура. Для нее точка (x, y) играет роль аргумента, а точка (x_0, y_0) — роль параметра. Отметим, что мы могли бы доказать существование решения задачи путем непосредственной проверки того, что формула (90) действительно дает функцию $u(x_0, y_0)$, которая удовлетворяет уравнению (84) и условиям на l. Такая проверка представляет некоторые затруднения, и мы дадим в одном из следующих параграфов иное доказательство существования решения задачи Коши.

Изложенный выше метод Римана приводит решение задачи Коши к нахождению функции Римана (93). Сама эта функция является решением однородного уравнения (87) того же типа, что и уравнение (84), но с добавочными условиями, совершенно отличными от условий Коши, а именно, как мы видели выше, задаются значения только самой функции v на двух характеристиках PA и PB, выходящих из заданной точки P. В дальнейшем мы докажем существование функции Римана. Заметим еще, что основная формула (90) получена нами в предположении, что решение задачи существует. Таким образом, если решение задачи существует, то оно должно обязательно выражаться формулой (90), и тем самым доказана единственность решения задачи Коши. Но остается еще показать, что формула (90) действительно дает решение задачи. Дальше мы докажем не только существование функции Римана, но и существование решения задачи Коши, а тем самым будет доказан и тот факт, что формула (90) дает действительно решение задачи.

Считая пока все указанные выше теоремы существования доказанными, мы перейдем к выяснению некоторых следствий из формулы (90). Как мы только что упоминали выше, эта формула показывает *единственность* решения задачи. Кроме того, из этой формулы непосредственно вытекает, что если мы достаточно мало изменим данные Коши на контуре l, то и решение задачи изменится на сколь угодно малую величину, т. е. *решение задачи Коши непрерывно зависит от начальных данных*. Кроме того, из формулы (90) непосредственно вытекает, что значение искомой функции u в точке P зависит только от начальных данных, распределенных на дуге AB линии l. Если мы продолжим начальные данные, заданные на дуге AB, за эту дугу двумя различными способами, сохраняя непрерывность этих начальных данных в точках A и B, то получим вне криволинейного треугольника PAB два различных решения задачи Коши, т. е., точнее говоря, мы будем иметь две различные системы данных Коши, которым будут соответствовать два различных решения задачи Коши, но эти решения будут совпадать в криволинейном треугольнике PAB, поскольку начальные данные в обеих задачах совпадают вдоль дуги AB. Характеристики PA и PB будут теми линиями, вдоль которых решения, одинаковые в упомянутом треугольнике, расщепятся на два различных решения.

Все рассуждения настоящего параграфа не предполагают, конечно, аналитичности функций. Отметим роль того условия, что прямые, параллельные осям, т. е. характеристики, пересекают линию l не более, чем в одной точке. Возьмем (рис. 2) линию l_1, которая пересекается прямыми, параллельными оси x, в двух точках, и положим, что на ней заданы начальные данные Коши. Применяя метод Римана, мы можем определить значение искомой функции u в точке P, пользуясь или криволинейным треугольником PAB, или криволинейным треугольником PBC. Полученные две формулы дадут, вообще говоря, в точке P разные результаты для u, и, таким образом, задача окажется неразрешимой.

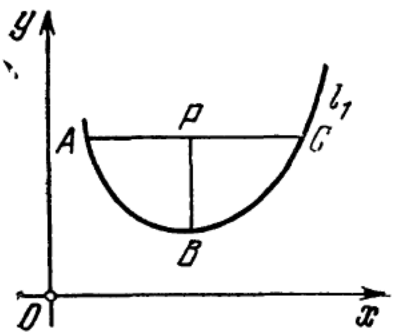

Рис. 2.

46. Характеристические начальные данные. Рассмотрим теперь ту задачу, к которой привелось построение функции Римана, причем мы будем рассматривать только случай однородного уравнения. Пусть требуется определить решение уравнения

$$u_{xy} + au_x + bu_y + cu = 0, \tag{94}$$

если заданы значения только искомой функции u на прямых CA и CB, параллельных осям (рис. 1). Через (ξ, η) обозначим координаты точки C. Отметим, что если нам заданы значения u на CB, то мы тем самым знаем вдоль CB и частную производную u_x. Но тогда уравнение (94), при подстановке $y = \eta$ и известных функций u и u_x, превращается в обыкновенное линейное уравнение первого порядка для функции u_y вдоль CB. Интегрируя это уравнение, мы будем знать и значение частной производной u_y вдоль CB. Точно так же, имея значение u вдоль CA, мы будем знать и обе частные производные первого порядка от u вдоль CA. Произвольные постоянные, получаемые при интегрировании обыкновенных уравнений первого порядка, определятся, так как можно считать известными u_y и u_x в точке C. Указанные рассуждения показывают нам, почему вдоль характеристик CA и CB достаточно задавать только значения самой функции u. Изложенный выше метод Римана будет применим дословно и к рассматриваемой задаче, и мы получим для искомой функции формулу

$$2u(P)=u(A)v(A)+u(B)v(B)+\\ +\int\limits_{CA}(u_y v-v_y u+2auv)\,dy+\int\limits_{CB}(u_x v-v_x u+2buv)\,dx,$$

где, как и выше, v есть функция Римана (93).

В первом из написанных интегралов перепишем подынтегральную функцию в виде

$$u_y v-v_y u+2auv=-(uv)_y+2v(au+u_y)$$

и произведем интегрирование. Аналогичное преобразование применим и ко второму интегралу. В результате мы будем иметь следующую формулу:

$$u(P)=u(C)v(C)+\int\limits_{CA}v(au+u_y)\,dy+\int\limits_{CB}v(bu+u_x)\,dx. \qquad (95)$$

Применим полученную формулу для доказательства одного свойства функции Римана. Заметим прежде всего, что оператором, сопряженным с оператором $L^*(v)$, будет исходный оператор $L(u)$. Действительно,

$$L^*(v)=v_{xy}-av_x-bv_y+(c-a_x-b_y)v,$$

и сопряженный оператор будет:

$$L_1(u)=u_{xy}+(au)_x+(bu)_y+(c-a_x-b_y)u=\\ =u_{xy}+au_x+bu_y+cu=L(u).$$

Применим формулу (95) к функции Римана u оператора $L^*(v)$. В операторе $L^*(v)$ коэффициенты при v_x и v_y равны $(-a)$ и $(-b)$, и, следовательно, функция Римана этого оператора есть решение уравнения (94), удовлетворяющее на прямых CA и CB уравнениям $au+u_y=0$ и $bu+u_x=0$, и, кроме того, мы должны иметь $u(C)=1$. Точка $C(\xi,\eta)$ будет играть при этом роль точки $P(x_0, y_0)$ функции (93).

Пользуясь формулой (95) для этого частного случая, мы придем к следующей формуле:

$$u(x_0, y_0; \xi, \eta)=v(\xi, \eta; x_0, y_0),$$

т. е. функция Римана (93) оператора $L(u)$ переходит в функцию Римана сопряженного оператора $L^*(v)$, если переставить у нее точки (x, y) и (x_0, y_0). Если выражение $L^*(v)$ совпадает с выражением $L(v)$, то выражение или оператор $L(u)$ называется *симметричным*, и для симметричного оператора функция Римана будет симметричной функцией тех двух точек, от которых она зависит. Принимая во внимание выражения для $L(u)$ и $L^*(v)$, нетрудно написать условия, при которых $L(u)$ будет симметричным: $a = b \equiv 0$. Задача определения решения уравнения (94) при задании значений самой функции на двух характеристиках называется обычно *задачей с характеристическими начальными данными*. Формула (95) совершенно так же, как и в случае задачи Коши, показывает, что задача с характеристическими начальными данными может иметь только *одно* решение.

47. Теоремы существования. Нам осталось доказать теоремы, устанавливающие *существование* решения задачи Коши и задачи с характеристическими начальными данными. Мы начнем с последней задачи и будем рассматривать только случай однородного уравнения. Требуется найти решение уравнения (94), принимающее заданные значения на характеристиках $x = x_0$ и $y = y_0$:

$$u\big|_{x=x_0} = \psi(y); \quad u\big|_{y=y_0} = \varphi(x) \quad [\psi(y_0) = \varphi(x_0)]. \tag{96}$$

Считая, что коэффициент b имеет непрерывную производную по y, мы можем переписать уравнение (94) в виде системы двух уравнений первого порядка:

$$u_x + bu = w; \tag{97}$$

$$w_y + aw = du, \tag{98}$$

где

$$d = ab + b_y - c,$$

причем для вновь введенной функции w мы получаем следующее начальное данное:

$$w\big|_{y=y_0} = \varphi'(x) + b(x, y_0)\varphi(x) = \omega(x). \tag{99}$$

Рассматривая уравнение (97) как обыкновенное линейное дифференциальное уравнение и принимая во внимание первое из условий (96), мы получаем выражение функции $u(x, y)$ через функцию $w(x, y)$:

$$u(x, y) = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} b(\xi, y)\,d\xi}\left[\int\limits_{x_0}^{x} e^{\int\limits_{x_0}^{\xi} b(\xi', y)\,d\xi'} w(\xi, y)\,d\xi + \psi(y)\right].$$

Совершенно так же уравнение (98) дает нам

$$w(x, y) = e^{-\int\limits_{y_0}^{y} a(x, \eta)\,d\eta}\left[\int\limits_{y_0}^{y} e^{\int\limits_{y_0}^{\eta} a(x, \eta')\,d\eta'} d(x, \eta)\,u(x, \eta)\,d\eta + \right.$$
$$\left. + \varphi'(x) + b(x, y_0)\varphi(x)\right].$$

Эти уравнения равносильны уравнениям (97) и (98) с начальными условиями (96). Вводя обозначения

$$K_1(x, y; \xi) = e^{\int\limits_x^\xi b(\xi', y)\,d\xi'}, \quad K_2(x, y; \eta) = e^{\int\limits_y^\eta a(x, \eta')\,d\eta'} d(x, \eta), \tag{100}$$

можем переписать вышеуказанные уравнения в виде

$$\left.\begin{aligned} u(x, y) &= e^{-\int\limits_{x_0}^x b(\xi, y)\,d\xi} \psi(y) + \int\limits_{x_0}^x K_1(x, y; \xi)\, w(\xi, y)\,d\xi, \\ w(x, y) &= e^{-\int\limits_{y_1}^y a(x, \eta)\,d\eta} \omega(x) + \int\limits_{y_1}^y K_2(x, y; \eta)\, u(x, \eta)\,d\eta. \end{aligned}\right\} \tag{101}$$

Применение метода последовательных приближений с обычным рассуждением для установления сходимости дает доказательство существования и единственности решения последней системы. Для того чтобы можно было вернуться от уравнений (97) и (98) к (94), должна существовать непрерывная смешанная производная u_{xy}. Из уравнений (101), которым удовлетворяют непрерывные функции $u(x, y)$ и $w(x, y)$, видно, что утверждение относительно u_{xy} имеет место, если $b(x, y)$ имеет непрерывные частные производные первого порядка, а $\psi(y)$ — непрерывную производную. Если подставим выражение $w(x, y)$ из второго из уравнений (101) в первое, то получим для $u(x, y)$ обычное уравнение Вольтерра с двухкратным интегралом.

Переходим к доказательству существования решения задачи Коши. Уравнение линии l, которая несет на себе данные Коши, может быть записано, как мы видели выше, в виде $x = x(y)$ или $y = y(x)$, где $x(y)$ и $y(x)$ имеют непрерывные, не равные нулю, производные. Данные Коши на l мы можем считать функциями или независимого переменного x или независимого переменного y. Напишем эти данные в виде

$$u\,|_{x=x(y)} = \psi(y) = \psi_1(x); \quad u_x\,|_{y=y(x)} = \varphi_1(x).$$

При интегрировании уравнений (97) и (98) мы должны принимать во внимание начальные данные

$$u\,|_{x=x(y)} = \psi(y); \quad w\,|_{y=y(x)} = \varphi_1(x) + b[x, y(x)]\,\psi_1(x) = \omega_1(x).$$

Таким образом мы, как и выше, получим следующую систему интегральных уравнений:

$$
\begin{aligned}
u(x, y) &= e^{-\int\limits_{x(y)}^{x} b(\xi, y)\, d\xi} \psi(y) + \int\limits_{x(y)}^{x} K_1(x, y; \xi)\, w(\xi, y)\, d\xi, \\
w(x, y) &= e^{-\int\limits_{y(x)}^{y} a(x, \eta)\, d\eta} \omega_1(x) + \int\limits_{y(x)}^{y} K_2(x, y; \eta)\, u(x, \eta)\, d\eta,
\end{aligned}
\tag{102}
$$

где $K_1(x, y; \xi)$, $K_2(x, y; \eta)$ определяются формулами (100). Доказательство сходимости метода последовательных приближений проводится для системы обычным образом, и таким образом можно получить теорему существования решения. Если точка P расположена так, как это указано на рис. 1, то при интегрировании по ξ, в оценках, длину пути интегрирования можно заменить на $(\alpha - x)$, а при интегрировании по η на $(\beta - y)$, где α и β — наибольшие значения x и y в том прямоугольнике со сторонами, параллельными осям, в котором мы рассматриваем решение задачи и где коэффициенты удовлетворяют поставленным выше условиям, например, непрерывны частные производные первого порядка у a и b и непрерывны c и f, что нам было надо при проведении метода Римана. Мы могли бы рассматривать и неоднородное уравнение (84). Достаточно при этом в правой части уравнения (98) добавить свободный член $f(x, y)$. Легко доказать единственность решения, и не прибегая к методу Римана, а пользуясь системой (102).

Можно было бы для доказательства теорем существования применить метод последовательных приближений непосредственно к самому уравнению (94), совершенно так же, как это мы делали для обыкновенных дифференциальных уравнений. Начнем со случая характеристических начальных данных (96). Уравнение (94) с начальными данными (96) равносильно интегро-дифференциальному уравнению

$$
\begin{aligned}
u(x, y) = \varphi(x) + \psi(y) - \varphi(x_0) - \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y} [a(\xi, \eta)\, u_\xi(\xi, \eta) + \\
+ b(\xi, \eta)\, u_\eta(\xi, \eta) + c(\xi, \eta)\, u(\xi, \eta)]\, d\xi\, d\eta,
\end{aligned}
\tag{103}
$$

причем, в силу очевидного условия $\varphi(x_0) = \psi(y_0)$, внеинтегральный член в написанном уравнении удовлетворяет начальным данным (96).

Мы можем в качестве первого приближения взять функцию

$$u_0(x, y) = \varphi(x) + \psi(y) - \varphi(x_0).$$

Остальные приближения вычисляются последовательно по формулам

$$u_n(x, y) = u_0(x, y) - \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\left[a(\xi, \eta)\frac{\partial u_{n-1}(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \right.$$

$$\left. + b(\xi, \eta)\frac{\partial u_{n-1}(\xi, \eta)}{\partial \eta} + c(\xi, \eta)u_{n-1}(\xi, \eta)\right]d\xi\, d\eta \quad (n = 1, 2, \ldots). \qquad (104)$$

Применяя элементарные оценки, можно показать, что последовательности функций

$$u_n(x, y), \quad \frac{\partial u_n(x, y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_n(x, y)}{\partial y}$$

равномерно сходятся в прямоугольнике R, изображенном на рис. 1, причем мы считаем, что коэффициенты уравнения — непрерывные функции в этом прямоугольнике. Переходя в соотношении (104) к пределу, мы убедимся без труда в том, что предельная функция последовательности $u_n(x, y)$ удовлетворяет уравнению (103) и, следовательно, удовлетворяет уравнению (94) и начальным данным (96).

Перейдем теперь к задаче Коши. Пусть R — прямоугольник, содержащий внутри себя часть кривой l, на которой заданы данные Коши, и такой, что в прямоугольнике R коэффициенты уравнения суть непрерывные функции. Пусть (x, y) — некоторая точка внутри этого прямоугольника. Обозначим через D_{xy} криволинейный треугольник PAB, ограниченный дугой AB линии l и двумя прямыми PA и PB, параллельными осям, выходящими из точки $P(x, y)$. Начальные данные Коши мы можем записать в виде

$$u\,|_l = \varphi(x) + \psi(y); \quad u_x\,|_l = \varphi'(x), \quad u_y\,|_l = \psi'(y). \qquad (105)$$

Действительно, как мы уже упоминали выше, мы можем всегда считать, что начальные данные для u_x и u_y выражены через x или y. Интегрируя эти функции, мы получим и начальное данное для u в указанном выше виде. Уравнение (94) с начальными данными (105) равносильно уравнению

$$u(x, y) = \varphi(x) + \psi(y) + \iint_{D_{xy}}[a(\xi, \eta)u_\xi(\xi, \eta) +$$

$$+ b(\xi, \eta)u_\eta(\xi, \eta) + c(\xi, \eta)u(\xi, \eta)]\,d\xi\, d\eta.$$

В формуле (103) мы писали повторный интеграл с указанием пределов, и при этой форме записи безразлично расположение точки $P(x, y)$ относительно характеристик $x = x_0$ и $y = y_0$. В последней формуле мы пишем двойной интеграл и берем взаимное расположение точки, кривой и осей, указанное на рис. 1. В качестве первого приближения мы берем

$$u_0(x, y) = \varphi(x) + \psi(y),$$

и следующие приближения вычисляются по формулам

$$u_n(x, y) = u_0(x, y) + \iint_{D_{xy}}\left[a(\xi, \eta)\frac{\partial u_{n-1}(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \right.$$

$$\left. + b(\xi, \eta)\frac{\partial u_{n-1}(\xi, \eta)}{\partial \eta} + c(\xi, \eta)u_{n-1}(\xi, \eta)\right]d\xi\, d\eta.$$

Совершенно так же, как и выше, при помощи элементарных оценок интегралов можно показать, что последовательность $u_n(x, y)$ в прямоугольнике R

равномерно стремится к предельной функции, которая и является решением задачи Коши.

Метод последовательных приближений применим и для нахождения решений задачи Коши для квазилинейных гиперболических уравнений. Для этого целесообразно исходную задачу Коши свести к задаче Коши с однородными начальными данными. Рассмотрим уравнение

$$u_{xy}=f(x, y, u, p, q). \tag{106}$$

Положим, что начальные данные Коши на кривой $l(y=y(x))$ выражены через независимую переменную x: $u(x)$, $p(x)$, $q(x)$, причем мы должны иметь $u'(x)=p(x)+y'(x)q(x)$. Будем считать, что указанные выше функции имеют непрерывные производные. Составим вспомогательную функцию

$$\omega(x, y)=u(x)+[y-y(x)]\,q(x),$$

которая, очевидно, имеет непрерывные производные ω_x и ω_y. Эта функция ω удовлетворяет на линии l требуемым начальным данным. Вводя вместо u новую искомую функцию: $u_1=u-\omega$, мы получим для нее на линии l начальные данные Коши, равные нулю. Уравнение (106) для u порождает аналогичное уравнение для u_1. Мы можем, таким образом, считать, что для уравнения (106) имеем начальные данные Коши, равные нулю. Предполагается, что функция f, стоящая в правой части уравнения, имеет непрерывные производные первого порядка по всем своим аргументам для значений (x, y), достаточно близких к линии l, и для значений (u, p, q), достаточно близких к нулю. Уравнение (106) с нулевыми начальными данными преобразуется в уравнение

$$u(x, y)=-\iint\limits_{D_{xy}} f(\xi, \eta, u, p, q)\,d\xi\,d\eta,$$

а к этому уравнению применим обычный метод последовательных приближений, если мы ограничимся значениями (x, y), лежащими в некоторой окрестности линии l. В качестве первого приближения мы должны взять $u_0=p_0=q_0=0$, и следующие приближения вычисляются по формулам

$$u_n(x, y)=-\iint\limits_{D_{xy}} f(\xi, \eta, u_{n-1}, p_{n-1}, q_{n-1})\,d\xi\,d\eta,$$

$$p_n(x, y)=\int\limits_{BP} f(x, \eta, u_{n-1}, p_{n-1}, q_{n-1})\,d\eta,$$

$$q_n(x, y)=\int\limits_{AP} f(\xi, y, u_{n-1}, p_{n-1}, q_{n-1})\,d\xi.$$

Заметим, что при применении метода последовательных приближений для линейного уравнения мы могли бы, конечно, рассматривать и неоднородное уравнение, и совершенно так же, как и выше для уравнения (94), мы могли бы привести начальные данные в задаче Коши или в задаче с характеристическими начальными данными к нулю. При этом исходное однородное уравнение уже стало бы неоднородным для преобразованной функции.

48. Формула интегрирования по частям и формула Грина. Формулы Грина и Остроградского являются следствиями формул интегрирования по частям (16_1) и (31_2) для двукратных и трехкратных интегралов, доказанных в [**II**; **66, 72**]. Эти последние могут быть записаны в единой форме, пригодной для интегралов любой кратности, если воспользоваться интегралами вида $\int\limits_S f\,dS$ по гиперповерхностям S, лежащим в евклидовом пространстве R^m. В них dS есть элемент площади поверхности (он всегда положителен), а $\int\limits_S dS$ дает величину площади гиперповерхности S. В [**II**; **65, 142**] определены все эти понятия для случая $m=3$. Для $m>3$ они определяются аналогично; в частности, если S задана явным уравнением

$$x_m = \varphi(x_1, \ldots, x_{m-1}),$$

где $x' = (x_1, \ldots, x_{m-1})$ заполняет ограниченную область D_{m-1} из R^{m-1}, то $dS = \sqrt{1 + \sum\limits_{i=1}^{m-1} \varphi^2_{x_i}(x')}\,dx'$, $dx' = dx_1 \ldots dx_{m-1}$, в точке $x = (x', \varphi(x'))$ поверхности S, а

$$\int\limits_S f\,dS = \int\limits_{D_{m-1}} f(x') \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{m-1} \varphi^2_{x_i}(x')}\,dx',$$

где $f(x')$ есть значение f в точке $x = (x', \varphi(x'))$ поверхности S. Если S есть граница какой-нибудь ограниченной области D пространства R^m и если S есть гладкая поверхность, то ее можно разбить на конечное число кусков S_k, $k=1, \ldots, N$, каждый из которых можно задать явным уравнением, выражающим одну из координат x_{i_k} через остальные, и интеграл $\int\limits_S f\,ds$ по S определить как сумму интегралов $\int\limits_{S_k} f\,dS$, взятых по этим кускам S_k.

Формула интегрирования по частям имеет вид

$$\int\limits_D \frac{\partial u}{\partial x_i} v\,dx = -\int\limits_D u \frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx + \int\limits_S uv \cos(n, x_i)\,dS, \qquad i=1, \ldots, m. \tag{107}$$

Она заведомо справедлива, если D есть ограниченная область евклидова пространства R^m, ее граница S — гладкая гиперповерхность, а функции u и v принадлежат $C^1(\bar{D})$ (т. е. непрерывны и непрерывно дифференцируемы в $\bar{D} = D \cup S$). Стоящий в ней $\cos(n, x_i)$ есть косинус угла между направлением оси x_i и направлением нормали n к S, внешней по отношению к D.

Формула (107) есть следствие формулы

$$\int\limits_D \frac{\partial w}{\partial x_i}\,dx = \int\limits_D w\cos(n,\ x_i)\,dx,$$

справедливой при любом $i=1,\ \ldots,\ m$ для S и w, обладающих вышеуказанной гладкостью. Действительно, если в ней взять $w=uv$, то придем к (107).

Получим с помощью (107) формулу Грина для произвольного линейного дифференциального оператора второго порядка. Будем предполагать, что все те производные, которые встретятся нам ниже, непрерывны в ограниченной области D вплоть до границы и S — гладкая.

Пусть

$$L(u) = \sum_{i,\ k=1}^{m} a_{ik}u_{x_i x_k} + \sum_{k=1}^{m} b_k u_{x_k} + cu, \tag{108}$$

и

$$L^*(v) = \sum_{i,\ k=1}^{m} \frac{\partial^2(a_{ik}v)}{\partial x_i\,\partial x_k} - \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial(b_k v)}{\partial x_k} + cv, \tag{109}$$

где a_{ik}, b_k и c — заданные функции x. Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_D vL(u)\,dx, \quad dx = dx_1\ \ldots\ dx_m,$$

и преобразуем его с помощью формулы (107), перенося все производные с u на v. Это приведет нас к формуле Грина

$$\int\limits_D [vL(u) - uL^*(v)]\,dx = \int\limits_S [vP(u) - uP(v) + uvQ]\,dS, \tag{110}$$

в которой

$$\left.\begin{aligned} P(u) &= \sum_{i,\ k=1}^{m} a_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}\cos(n,\ x_i),\\ Q &= \sum_{i=1}^{m}\left(b_i - \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_k}\right)\cos(n,\ x_i), \end{aligned}\right\} \tag{111}$$

а n, как всюду, единичная внешняя нормаль к S.

Определим в точках поверхности S некоторое направление ν, которое называется *конормалью* к поверхности S. Для этого положим

$$N = \sqrt{\sum_{k=1}^{m}\left[\sum_{i=1}^{m} a_{ik}\cos(n,\ x_i)\right]^2} \tag{112}$$

и определим направление ν формулами

$$\cos(\nu, x_k) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{m} a_{ik} \cos(n, x_i) \quad (k = 1, 2, \ldots, m). \tag{113}$$

При этом первую из формул (111) можно переписать в виде

$$P(u) = N \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_k} \cos(\nu, x_k) = N \frac{\partial u}{\partial \nu},$$

и формулу Грина (110) можем окончательно переписать в виде

$$\int_D [vL(u) - uL^*(v)]\, d\tau =$$
$$= \int_S \left[N\left(v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu}\right) + uvQ\right] dS. \tag{114}$$

Отметим, что если выполнены равенства

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_k} = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

то Q обращается в нуль, оператор $L^*(v)$ совпадает с $L(v)$, и мы можем записать $L(u)$ в виде

$$L(u) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{k=1}^{m} a_{ik} u_{x_k} + cu.$$

В этом случае оператор $L(u)$ называют симметричным. В общем же случае дифференциальный оператор L^* не совпадает с L. Его называют оператором, сопряженным к L в смысле Лагранжа.

49. Метод Вольтерра. Решение задачи Коши для уравнений второго порядка в том случае, когда число независимых переменных больше двух, представляет гораздо бо́льшие трудности. Для волнового уравнения, когда начальные условия заданы при $t = 0$, мы дали явные формулы для решений задачи Коши [II; 184]. Однако метод, с помощью которого они были получены, не переносится на более общие ситуации. В настоящем параграфе мы изложим другой метод решения задачи Коши для уравнений с постоянными коэффициентами. Этот метод, являющийся обобщением метода Римана, основан, как и последний, на своеобразном применении формулы Грина. Он дает решение задачи Коши при задании начальных условий не только на плоскости $t=0$, но и на некоторых нехарактеристических поверхностях. По своей основной идее он близок к методам, применимым и для уравнений с переменными коэффициентами.

Положим, что гиперповерхность S есть характеристическая гиперповерхность уравнения $L(u)=0$ или $L(u)=f$, где f — заданная функция независимых переменных. Пусть $\omega(x_1, \ldots, x_m)=0$ есть уравнение этой гиперповерхности. Величины $\cos(n, x_i)$ пропорциональны частным производным $p_i=\omega_{x_i}$ и, в силу (113), направляющие косинусы направления ν пропорциональны величинам $\sum_{i=1}^{m} a_{ik}p_i$. Написанные суммы представляют собой правые части уравнений бихарактеристик [41]:

$$\frac{dx_k}{ds}=2\sum_{i=1}^{m} a_{ik}p_i,$$

образующих характеристическую гиперповерхность S, и мы можем утверждать, таким образом, что *если S есть характеристическая гиперповерхность, то направление ν на ней совпадает в каждой точке с направлением бихарактеристики, лежащей на S и проходящей через эту точку.* Следовательно, в рассматриваемом случае направление ν лежит в касательной плоскости к S. Направление ν называют иногда направлением *конормали* на S.

Выясним теперь значение формулы Грина (114) при решении задачи Коши. Пусть требуется найти решение уравнения

$$L(u)=-f, \tag{115}$$

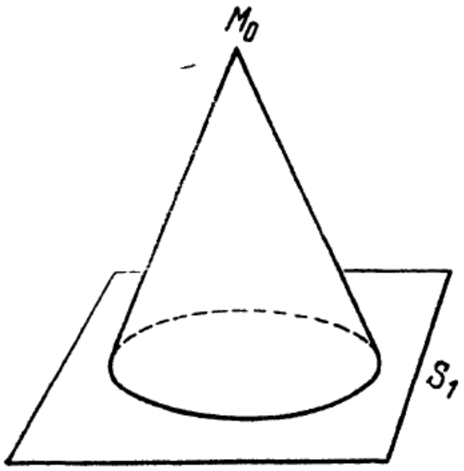

Рис. 3.

если заданы значения u и конормальной производной $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ на некоторой поверхности S_1. Мы считаем, что S_1 такова, что на ней направление ν *не* находится в касательной плоскости. При этом задание u и $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ на S_1 дает на S_1 и значение производной функции u по любому направлению. Для разыскания значения u в некоторой точке $M_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, лежащей вне S_1, поступаем следующим образом. Проводим характеристический коноид уравнения (115) с вершиной M_0 и предположим, что половина этого коноида вместе с частью поверхности S_1 образует ограниченную область D пространства $(x_1, \ldots, x_m)$ (рис. 3). Затем к области D применяется формула Грина (114), причем за u мы берем искомое решение уравнения (115) и за v — некоторое сингулярное решение сопряженного уравнения $L^*(v)=0$. Поверхность области D состоит из куска поверхности S_1, на котором u

и $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ нам заданы, и из боковой поверхности Γ характеристического коноида. На Γ направление ν совпадает с направлением касательной к бихарактеристике, лежащей на Γ, и это дает возможность при интегрировании по Γ произвести интегрирование по частям. Проведем этот метод для волнового уравнения

$$L(u) = u_{xx} + u_{yy} - u_{tt} = -f(x, y, t). \tag{116}$$

Характеристический коноид есть в данном случае круговой конус, у которого угол между образующей и высотой равен $\frac{\pi}{4}$. Оператор $L(u)$ есть симметричный оператор, формула (112) дает $N = 1$, из формул (113) получаем

$$\cos(\nu, x) = \cos(n, x);\ \cos(\nu, y) = \cos(n, y);\ \cos(\nu, t) = -\cos(n, t),$$

откуда видно, что направление ν является зеркальным отражением направления n в плоскости $t = 0$. Уравнение характеристического конуса с вершиной (x_0, y_0, t_0) будет

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - (t - t_0)^2 = 0. \tag{117}$$

Используем следующее решение уравнения $L(v) = 0$:

$$v = \lg\left[\sqrt{\frac{(t - t_0)^2}{r^2} - 1} - \frac{t - t_0}{r}\right], \tag{118}$$

где

$$r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2.$$

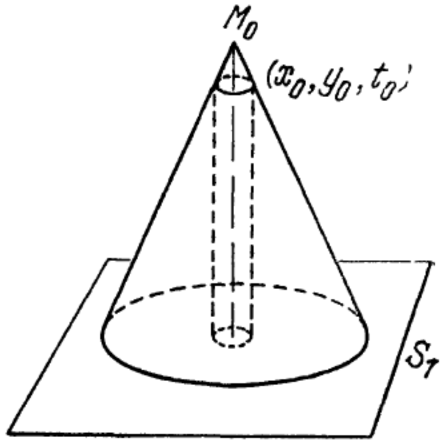

Рис. 4.

Берем ту половину конуса (117), которая обращена в сторону убывающих значений t. На боковой поверхности Γ этого конуса $\frac{t - t_0}{r} = -1$, и решение (118) обращается на этой поверхности в нуль. Дифференцирование по ν на Γ есть дифференцирование по направлению конормали на Γ, т. е. по направлению образующей конуса и, следовательно, на Γ мы имеем не только $v = 0$, но и $\frac{\partial v}{\partial \nu} = 0$. Но решение (118) имеет особенность при $r = 0$, т. е. прямая, проходящая через вершину конуса параллельно оси t, является особой линией решения (118). Выделим эту линию круговым цилиндром T_ε радиуса ε. Оставшуюся часть области D обозначим через D'. Граница этой области, кроме S_1 и Γ, будет содержать также боковую поверхность T_ε указанного цилиндра (рис. 4). Пусть S_1' — часть поверхности S_1, заключающаяся внутри упомянутого конуса, за вычетом того, что находится внутри цилиндра T_ε. Применим теперь формулу

(114). Принимая во внимание, что $L(v) = L^*(v)$, $L(u) = -f(x, y, t)$, $L(v) = 0$ и на Γ: $v = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0$, получим

$$\iint\limits_{T_\varepsilon + S_1'} \left(v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) dS = - \iiint\limits_{D'} fv \, d\tau. \tag{119}$$

На поверхности T_ε направление ν совпадает с направлением внешней нормали, т. е. противоположно направлению r, считаемому от оси t. Обозначая через φ полярный угол в системе координат: $x - x_0 = r \cos \varphi$ и $y - y_0 = r \sin \varphi$, получим

$$\iint\limits_{T_\varepsilon} v \frac{\partial u}{\partial \nu} dS = \iint\limits_{T_\varepsilon} v \frac{\partial u}{\partial \nu} \varepsilon \, d\varphi \, dt. \tag{120}$$

На T_ε мы имеем $r = \varepsilon$ и, в силу (118), v будет порядка $\lg \varepsilon$. Так как $\varepsilon \lg \varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, то мы можем утверждать, что интеграл (120) стремится к нулю вместе с ε. Далее, мы имеем

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} = - \frac{\partial v}{\partial r} = - \frac{t - t_0}{r \sqrt{(t - t_0)^2 - r^2}},$$

причем радикал надо считать положительным. На T_ε

$$\sqrt{(t - t_0)^2 - r^2} = \sqrt{(t - t_0)^2 - \varepsilon^2},$$

и при $\varepsilon \to 0$ этот радикал стремится к $(t_0 - t)$, ибо $t < t_0$. Мы имеем, таким образом,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \iint\limits_{T_\varepsilon} u \frac{\partial v}{\partial \nu} dS = - \lim_{\varepsilon \to 0} \iint\limits_{T_\varepsilon} \frac{(t - t_0) u}{\sqrt{(t - t_0)^2 - \varepsilon^2}} d\varphi \, dt =$$

$$= 2\pi \int\limits_{t'}^{t_0} u(x_0, y_0, t) \, dt,$$

где t' — значение t, получаемое в точке пересечения прямой $r = 0$ с поверхностью S_1. Таким образом, формула (119) дает

$$2\pi \int\limits_{t'}^{t_0} u(x_0, y_0, t) \, dt = \iint\limits_{S_2} \left(v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) dS + \iiint\limits_{D} fv \, d\tau,$$

где S_2 — часть поверхности S_1, находящаяся внутри упомянутого выше конуса. Справа стоят данные величины, и, дифференцируя по t_0, мы получаем окончательный результат:

$$u(x_0, y_0, t_0) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t_0} \left[\iint\limits_{S_2} \left(v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) dS + \iiint\limits_{D} fv \, d\tau \right]. \tag{121}$$

Мы получили эту формулу, предполагая, что решение задачи существует. Строго говоря, мы должны еще проверить, что правая часть удовлетворяет всем условиям задачи. Это требует большого труда, так как при изменении t_0 меняется положение конуса (117). Если S_2 есть плоскость $t=0$, то решение было нами получено раньше. Указанный метод решения задачи Коши принадлежит Вольтерра. Его подробное изложение можно найти в книге: Вебстер А., Сеге Г. Дифференциальные уравнения в частных производных математической физики, ч. 2. — ОНТИ, 1934, гл. 6.

С формулой Грина связан и другой метод решения задачи Коши, а именно метод Адамара. При применении этого метода берется решение уравнения $L^*(v)=0$, которое обращается в бесконечность на всей боковой поверхности характеристического коноида (конуса (117) в случае уравнения (116)). Это обстоятельство требует особых предосторожностей при применении формулы Грина и приводит, естественно, к особому новому понятию интеграла.

Для уравнений

$$L(u)=\sum_{s=1}^{m} u_{x_s x_s}-u_{tt}=-f$$

особое решение Адамара имеет вид

$$v=\left[(t-t_0)^2-\sum_{s=1}^{m}\left(x_s-x_s^{(0)}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}-\frac{m}{2}}.$$

Подробное изложение метода Адамара в применении к линейным уравнениям с переменными коэффициентами можно найти в его книге: Le probléme de Cauchy et les équations anx dérivées partielles linéaires hyperboliques. — Paris, 1932. Применение метода Адамара к уравнениям с постоянными коэффициентами изложено в книге: Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики, т. II. — М.: Гостехиздат, 1951.

50. Формула Соболева. В случае волнового уравнения с четырьмя независимыми переменными мы имели формулу Кирхгофа [II; 212]. Пусть u — решение волнового уравнения, имеющее непрерывные производные до второго порядка в некоторой области D пространства (x_1, x_2, x_3), ограниченной поверхностью S. Формула Кирхгофа выражает значение u в любой точке внутри области D через интеграл по поверхности S, причем в этот интеграл входят запаздывающие значения u и ее производных первого порядка. Мы видели также, что при специальном выборе поверхности S формула Кирхгофа приводит к решению задачи Коши, когда начальные данные заданы при $t=0$ [II; 212]. Формула Кирхгофа может быть обобщена и на случай волнового уравнения с любым четным числом независимых переменных:

$$u_{tt} = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + \ldots + u_{x_{2k+1}x_{2k+1}},$$

и так же, как и выше, она дает для этого уравнения решение задачи Коши (см. об этом далее в [55]).

Мы укажем сейчас обобщение формулы Кирхгофа на случай волнового уравнения с переменным коэффициентом

$$u_{tt} = c^2(x, y, z)(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}), \tag{122}$$

где $c(x, y, z)$ — положительная функция, имеющая достаточное количество производных. В дальнейшем вместо $c(x, y, z)$ мы будем часто писать $c(M)$, где M — точка с координатами (x, y, z).

Принимая во внимание теорию характеристик для уравнения (122), мы, естественно, приходим к задаче об экстремуме функционала

$$J = \int_{M_0}^{M_1} \frac{ds}{c(x, y, z)} = \int_{M_0}^{M_1} \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{c(x, y, z)}. \tag{123}$$

В данном случае условие трансверсальности совпадает с условием ортогональности, и мы можем строить поле для вариационной задачи так, как это было указано в [42]. Пусть $\tau(M; M_0)$ — основная функция центрального поля с центром M_0. Эта функция дает величину интеграла (123), взятого по экстремали от M_0 до M. Уравнение $\tau(M; M_0) = \text{const}$ дает квазисферы с центром M_0 при метрике, определенной формулой (123). Для функции $\tau(M; M_0)$ мы имеем уравнение

$$\operatorname{grad}^2 \tau(M; M_0) = \frac{1}{c^2(M)}, \tag{124}$$

т. е.

$$\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2 = \frac{1}{c^2(M)}. \tag{124$_1$}$$

Функция $\tau(M; M_0)$ является, очевидно, симметричной функцией M_0 и M. Если c есть постоянная, то $\tau(M; M_0) = \frac{r}{c}$, где r есть расстояние от M_0 до M. В общем случае τ будет применяться нами вместо r/c, при определении запаздывающих значений какой-либо функции $u(M, t)$, и мы, как и в [**II; 212**], введем обозначение

$$u(M, t - \tau) = [u(M, t)].$$

Положим, что $u(M, t)$ есть решение уравнения (122), и для простоты письма обозначим $u(M, t - \tau) = u_1(M, t)$.

Перейдем в уравнении (122) к запаздывающим значениям

$$[u_{tt}] = c^2(M)[\Delta u], \tag{125}$$

где Δ — оператор Лапласа. Выразим $[\Delta u]$ через u_1. Мы имеем

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{grad} u_1 = [\operatorname{grad} u] - [u_t]\operatorname{grad}\tau,\\ &\Delta u_1 = \operatorname{div}\operatorname{grad} u_1 =\\ &= [\Delta u] - 2[\operatorname{grad} u_t]\cdot\operatorname{grad}\tau - [u_t]\Delta\tau + [u_{tt}]\operatorname{grad}^2\tau, \end{aligned}\right\} \tag{126}$$

и, подставляя в (125) вместо $[\Delta u]$ его выражение из последнего уравнения, получим, пользуясь (124),

$$\frac{1}{c^2(M)}[u_{tt}] = \Delta u_1 + 2[\operatorname{grad} u_t]\cdot\operatorname{grad}\tau + [u_t]\Delta\tau - [u_{tt}]\frac{1}{c^2(M)}.$$

Аналогично первой из формул (126) имеем

$$\operatorname{grad}\frac{\partial u_1}{\partial t} = [\operatorname{grad} u_t] - [u_{tt}]\operatorname{grad}\tau,$$

и, подставляя выражение для $[\operatorname{grad} u_t]$ из последнего уравнения в предыдущую формулу, получим следующую важную для дальнейшего формулу:

$$\Delta u_1 = -2\operatorname{grad}\tau\cdot\operatorname{grad}\frac{\partial u_1}{\partial t} - \Delta\tau\,\frac{\partial u_1}{\partial t}.$$

Умножим обе части этого равенства на неопределенную пока функцию $\sigma(M)$:

$$\sigma\,\Delta u_1 = -2\sigma\operatorname{grad}\tau\cdot\operatorname{grad}\frac{\partial u_1}{\partial t} - \sigma\,\Delta\tau\frac{\partial u_1}{\partial t}, \tag{127}$$

и подберем эту функцию $\sigma(M)$ так, чтобы правая часть была расходимостью некоторого вектора вида $\left(-\frac{\partial u_1}{\partial t}\mathbf{w}\right)$, где $\mathbf{w}$ — вектор, не зависящий от u_1:

$$\sigma\,\Delta u_1 = \operatorname{div}\left(-\frac{\partial u_1}{\partial t}\mathbf{w}\right). \tag{128}$$

Раскрываем правую часть:

$$\sigma\,\Delta u_1 = -\frac{\partial u_1}{\partial t}\operatorname{div}\mathbf{w} - \operatorname{grad}\frac{\partial u_1}{\partial t}\cdot\mathbf{w}.$$

Сравнивая с (127), видим, что равенство (128) будет иметь место и $\mathbf{w}$ не будет зависеть от u_1, если удовлетворяются следующие два равенства:

$$\mathbf{w} = 2\sigma\operatorname{grad}\tau; \quad \operatorname{div}\mathbf{w} = \sigma\,\Delta\tau. \tag{129}$$

Подставляя первое из этих равенств во второе, мы получим уравнение для определения σ:

$$\operatorname{div}(2\sigma\operatorname{grad}\tau) = \sigma\,\Delta\tau,$$

т. е.

$$2\,\mathrm{grad}\,\sigma\cdot\mathrm{grad}\,\tau+\sigma\,\Delta\tau=0, \tag{130}$$

или в координатах

$$2(\sigma_x\tau_x+\sigma_y\tau_y+\sigma_z\tau_z)+\sigma\,\Delta\tau=0, \tag{131}$$

т. е. для определения σ мы имеем линейное уравнение первого порядка. Имея σ, мы сможем определить вектор $\mathbf{w}$ по первой из формул (129). Пусть D — некоторая область трехмерного пространства (x, y, z) и S — ограничивающая его поверхность. Положим, что в области D функции σ и u_1 имеют непрерывные производные до второго порядка. Применим формулу Грина

$$\iiint\limits_D(\sigma\,\Delta u_1-u_1\,\Delta\sigma)\,dv=\iint\limits_S\left(\sigma\frac{\partial u_1}{\partial n}-u_1\frac{\partial\sigma}{\partial n}\right)dS,$$

где n — направление внешней нормали на S. Пользуясь формулами (128) и (129), можем переписать формулу Грина в виде

$$-\iiint\limits_D u_1\,\Delta\sigma\,dv-\iiint\limits_D\mathrm{div}\left(2\sigma\frac{\partial u_1}{\partial t}\,\mathrm{grad}\,\tau\right)dv=\iint\limits_S\left(\sigma\frac{\partial u_1}{\partial n}-u_1\frac{\partial\sigma}{\partial n}\right)dS,$$

и, применяя к интегралу, содержащему расходимость, формулу Остроградского, получим

$$\iint\limits_S\left(\sigma\frac{\partial u_1}{\partial n}-u_1\frac{\partial\sigma}{\partial n}+2\sigma\frac{\partial\tau}{\partial n}\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)dS+\iiint\limits_D u_1\,\Delta\sigma\,dv=0.$$

Возвращаясь к функции u и принимая во внимание, что

$$\frac{\partial u_1}{\partial n}=\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]-\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]\frac{\partial\tau}{\partial n},$$

получаем следующую основную для дальнейшего формулу:

$$\iint\limits_S\left\{\sigma\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]-[u]\frac{\partial\sigma}{\partial n}+\sigma\frac{\partial\tau}{\partial n}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]\right\}dS+\iiint\limits_D[u]\,\Delta\sigma\,dv=0. \tag{132}$$

Во всех предыдущих вычислениях мы могли считать поле не центральным, а любым. Функция σ, которая должна удовлетворять уравнению (130), зависит, очевидно, от τ, т. е. от выбора поля. В дальнейшем мы будем иметь дело только с центральным полем и функцию σ будем обозначать через $\sigma(M;M_0)$. Все наши рассуждения относятся лишь к такой окрестности точки M_0, в которой экстремали интеграла (123) не пересекаются и образуют поле. Если c — постоянная, то, как мы уже указывали, $\tau = r/c$, и нетрудно проверить, что уравнению (130) удовлетворяет функция $\sigma = 1/r$.

51. Формула Соболева (продолжение). Положим, что нам удалось построить функцию $\sigma(M; M_0)$ с непрерывными производными до второго порядка в окрестности точки M_0, имеющую особенность в точке M_0 и удовлетворяющую следующим условиям:

1) произведение $\sigma(M, M_0)\tau(M; M_0)$ имеет непрерывные производные до второго порядка, включая точку M_0, и

$$\lim_{M \to M_0} \sigma(M;\ M_0)\,\tau(M;\ M_0) = \frac{1}{c(M_0)}; \tag{133}$$

2)
$$\sigma(M_0;\ M) = \sigma(M;\ M_0); \tag{134}$$

3) оператор Лапласа от $\sigma(M; M_0)$ удовлетворяет неравенству

$$|\Delta\sigma(M;\ M_0)| \leqslant \frac{K}{\tau(M,\ M_0)}, \tag{135}$$

где K — постоянная (не зависит от M);

4) если S_1 — некоторая замкнутая поверхность, содержащая M_0 внутри себя, и n — направление внешней нормали на S_1, то при беспредельном сжимании S_1 к M_0 имеет место предельное равенство

$$\lim_{S_1 \to M_0} \iint\limits_{S_1} \frac{\partial\sigma(M;\ M_0)}{\partial n}\, dS = -4\pi. \tag{136}$$

Если c — постоянная, то всем этим условиям удовлетворяет функция $\sigma = \dfrac{1}{r}$.

Используя функцию $\sigma(M; M_0)$ с указанными выше свойствами, мы построим сейчас формулу для решений уравнения (122). Пусть $u(M, t)$ — такое решение в области D, ограниченной поверхностью S, и пусть M_0 — точка внутри D. Положим, что существует центральное поле с центром M_0, содержащее область D, и что у нас имеется функция $\sigma(M; M_0)$ с указанными выше свойствами.

Исключим из области D малую сферу S_ε с центром M_0 и радиусом ε. К оставшейся области D' мы можем применить формулу (132):

$$\iint\limits_{S} \left\{ \sigma \left[\frac{\partial u}{\partial n}\right] - [u]\,\frac{\partial\sigma}{\partial n} + \sigma\,\frac{\partial\tau}{\partial n}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] \right\} dS + \iint\limits_{S_\varepsilon} \{\quad\}\, dS + \\ + \iiint\limits_{D'} [u]\,\Delta\sigma\, dv = 0. \tag{137}$$

Покажем, что при $\varepsilon \to 0$ интеграл по S_ε даст нам $-4\pi u(M_0, t)$. Действительно, величины

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] \quad \text{и} \quad \frac{\partial \tau}{\partial n}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]$$

при приближении к M_0 будут ограничены; $\tau(M; M_0)$ на S_ε будет порядка ε, и, в силу (133), $\sigma(M; M_0)$ на S_ε будет порядка $1/\varepsilon$, а площадь S_ε будет порядка ε^2. Отсюда следует, что интегралы

$$\iint\limits_{S_\varepsilon} \sigma \left[\frac{\partial u}{\partial n}\right] dS \quad \text{и} \quad \iint\limits_{S_\varepsilon} \sigma \frac{\partial \tau}{\partial n}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] dS$$

стремятся к нулю вместе с ε. Остается интеграл

$$-\iint\limits_{S_\varepsilon} [u] \frac{\partial \sigma}{\partial n}\, dS = -\iint\limits_{S_\varepsilon} u(M, t-\tau) \frac{\partial \sigma}{\partial n}\, dS.$$

Здесь нормаль берется внешней по отношению к области D', т. е. внутренней по отношению к сфере S_ε. На сфере $u(M, t-\tau)$ стремится к $u(M_0, t)$ при $\varepsilon \to 0$, и, принимая во внимание (136) и сказанное выше о направлении нормали, мы видим, что последний интеграл действительно дает в пределе $-4\pi u(M_0, t)$. Формула (137) дает нам в пределе искомую формулу

$$u(M_0; t) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{S} \left\{ \sigma \left[\frac{\partial u}{\partial n}\right] - [u] \frac{\partial \sigma}{\partial n} + \sigma \frac{\partial \tau}{\partial n}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] \right\} dS + \\ + \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{D} [u]\, \Delta\sigma\, dv, \qquad (138)$$

которая была построена С. Л. Соболевым.

Если c — постоянная, то $\sigma = 1/r$ и $\Delta\sigma = 0$, тройной интеграл пропадает, и мы получаем обычную формулу Кирхгофа. В случае переменного c (неоднородная среда) значение u в точке M_0 получается в результате запаздывающего излучения не только из точек поверхности S, но из всей области D.

Формула (138) может быть применена при решении задачи Коши для уравнения (122). Пусть требуется найти решение уравнения (122), удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$u(M, t)\,|_{t=0} = f_0(M); \quad u_t(M, t)\,|_{t=0} = f_1(M). \qquad (139)$$

Применим к искомому решению формулу (138), причем за поверхность S возьмем квазисферу S_t с центром M_0 и радиусом t, т. е. положим, что уравнение поверхности S имеет вид $\tau(M; M_0)=t$. При этом в правой части значения функций

$$[u], \quad \left[\frac{\partial u}{\partial n}\right], \quad \left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]$$

должны быть взяты в момент времени $t-\tau(M; M_0)$ или, в силу $\tau(M; M_0)=t$, в момент времени $t=0$. Принимая во внимание начальные данные (139), мы сможем переписать уравнение (138) в виде

$$u(M_0, t)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_t}\left\{\sigma\frac{\partial f_0}{\partial n}-f_0\frac{\partial\sigma}{\partial n}+\sigma\frac{\partial\tau}{\partial n}f_1\right\}dS+\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{D_t}[u]\Delta\sigma\,dv,$$

где D_t — область, ограниченная квазисферой S_t. Двойной интеграл, стоящий справа, представляет собою известную функцию, которую мы обозначим через $F(M_0, t)$. Мы получили, таким образом, для $u(M, t)$ интегральное уравнение

$$u(M_0, t)=F(M_0, t)+\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{D_t}[u]\Delta\sigma(M; M_0)\,dv. \tag{140}$$

При выводе этого уравнения мы должны были предполагать, что t таково, что в области D_t существуют центральное поле с центром M_0 и функция $\sigma(M; M_0)$ с указанными выше свойствами.

Заметим, что при изменении M_0 и t меняется и область D_t, и уравнение (140) аналогично уравнению Вольтерра. Можно показать, что при t, достаточно близких к нулю, это уравнение имеет единственное решение, которое может быть получено применением обычного метода последовательных приближений, и что это решение является вместе с тем и решением поставленной задачи Коши для уравнения (122). Если мы имеем безграничное пространство, то близость t к нулю обусловливается возможным появлением особенностей у поля вариационной задачи при расширении D_t. При наличии границ мы должны, конечно, считаться с приходом возмущений, отраженных от границы, что также существенно ограничивает возможный промежуток изменения t.

52. Построение функции σ. Перейдем к построению функции σ с указанными выше свойствами. Мы покажем, что эта функция имеет явное выражение в конечном виде, если считать известными экстремали, образующие упомянутое выше центральное поле. Предварительно докажем две леммы:

Лемма 1. *Если имеется система дифференциальных уравнений*

$$\frac{dx_k}{dt}=X_k(t, x_1, x_2, x_3) \qquad (k=1, 2, 3) \tag{141}$$

и известен общий интеграл ее

$$x_k = \varphi_k(t, a_1, a_2, a_3) \qquad (k = 1, 2, 3), \tag{142}$$

то имеет место формула

$$\frac{d}{dt} \lg \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{D(a_1, a_2, a_3)} = \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \frac{\partial X_3}{\partial x_3}. \tag{143}$$

В этой формуле под знаком логарифма стоит функциональный определитель от функций (142) по a_1, a_2, a_3, и в правой ее части x_k надо заменить функциями (142). Выпишем упомянутый только что определитель и продифференцируем его по t. Принимая во внимание основное определение определителя в виде суммы произведений его элементов, мы можем утверждать, что при дифференцировании определителя достаточно продифференцировать в отдельности каждый его столбец и затем сложить все полученные определители **[III₂; 122]**. Таким образом, мы получим

$$\frac{d}{dt}\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{D(a_1, a_2, a_3)} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial a_1\,\partial t} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial a_1} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial a_1} \\ \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial a_2\,\partial t} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial a_2} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial a_2} \\ \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial a_3\,\partial t} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial a_3} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial a_3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial a_1} & \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial a_1\,\partial t} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial a_1} \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial a_2} & \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial a_2\,\partial t} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial a_2} \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial a_3} & \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial a_3\,\partial t} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial a_3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial a_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial a_1} & \frac{\partial^2\varphi_3}{\partial a_1\,\partial t} \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial a_2} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial a_2} & \frac{\partial^2\varphi_3}{\partial a_2\,\partial t} \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial a_3} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial a_3} & \frac{\partial^2\varphi_3}{\partial a_3\,\partial t} \end{vmatrix}. \tag{144}$$

Принимая во внимание, что функции (142) должны удовлетворять системе (141), мы получаем следующие тождества относительно t и a_k:

$$\frac{\partial\varphi_k}{\partial t} = X_k(t, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \qquad (k = 1, 2, 3).$$

Дифференцируя эти тождества по a_s, будем иметь

$$\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial a_s\,\partial t} = \sum_{l=1}^{3} \frac{\partial X_k}{\partial x_l}\frac{\partial\varphi_l}{\partial a_s}.$$

Подставляя эти выражения вторых производных в правую часть формулы (144) и разлагая каждый определитель на сумму трех определителей, будем иметь

$$\frac{d}{dt}\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{D(a_1, a_2, a_3)} = \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \frac{\partial X_3}{\partial x_3}\right) \cdot \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{D(a_1, a_2, a_3)},$$

что и дает формулу (143).

Лемма 2. *Пусть* $\mathbf{t}$ — *единичный вектор касательной к некоторому семейству кривых, зависящему от двух параметров и заполняющему трехмерное пространство или некоторую его часть, и* δ — *функциональный определитель преобразования от декартовых координат к криволинейным, причем за криволинейные координаты принимаем два параметра* a_1 *и* a_2, *определяющих линию упомянутого семейства, и длину дуги* s *вдоль этой линии, отсчитываемую от некоторой поверхности, которая пересекает все линии семейства, или от точки, где все эти линии пересекаются. При этом имеет место формула*

$$\operatorname{div}\mathbf{t} = \frac{\partial \lg \delta}{\partial s}. \tag{145}$$

Пусть $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$, $Z(x, y, z)$ — составляющие вектора $\mathbf{t}$ в точке (x, y, z). При этом кривые семейства удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{ds} = X; \quad \frac{dy}{ds} = Y; \quad \frac{dz}{ds} = Z.$$

Так как правые части не содержат s, одна из произвольных постоянных s_0 будет входить в качестве слагаемого к s, и общий интеграл системы будет иметь вид

$$x = \varphi_1(s + s_0, a_1, a_2); \quad y = \varphi_2(s + s_0, a_1, a_2); \quad z = \varphi_3(s + s_0, a_1, a_2).$$

Применяя предыдущую лемму, получим

$$\operatorname{div}\mathbf{t} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial s}\lg\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{D(s_0, a_1, a_2)},$$

и, принимая во внимание, что

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial s_0} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial s},$$

мы и получаем формулу (145).

Вернемся теперь к рассмотренному выше центральному полю экстремалей с центром M_0 и к уравнению (130), которому должна удовлетворять функция σ. Вектор $\operatorname{grad}\tau$ касается экстремали, и из (124) следует, что $\dfrac{\partial\tau}{\partial s} = n(M)$, где $n(M) = 1 : c(M)$. Принимая это во внимание, можем переписать уравнение (130) в виде

$$2\frac{\partial \sigma(M)}{\partial s} n(M) + \sigma(M)\,\Delta\tau(M) = 0,$$

причем длина дуги s отсчитывается от точки M_0.

Для вычисления $\Delta\tau(M)$ используем лемму 2. Мы имеем

$$\operatorname{grad}\tau(M) = n(M)\,\mathbf{t},$$

где $\mathbf{t}$ — единичный вектор касательной к экстремали поля. Отсюда

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\tau(M) = \Delta\tau(M) = \mathbf{t}\cdot\operatorname{grad} n(M) + n(M)\operatorname{div}\mathbf{t}.$$

Первое слагаемое справа есть производная от $n(M)$ по s, а второе, в силу леммы 2, равно

$$n(M)\frac{\partial \lg \delta}{\partial s},$$

и уравнение для $\sigma(M)$ переписывается в виде

$$2\frac{\partial\sigma}{\partial s} n(M) + \sigma\left[\frac{\partial n(M)}{\partial s} + n(M)\frac{\partial \lg\delta}{\partial s}\right] = 0,$$

или

$$2\frac{\partial \lg\sigma}{\partial s} = -\frac{\partial \lg n}{\partial s} - \frac{\partial \lg\delta}{\partial s},$$

откуда, интегрируя, получаем

$$\sigma(M) = \frac{\Psi(a_1, a_2)}{\sqrt{n(M)\,\delta}},$$

где $\Psi(a_1, a_2)$ — произвольная функция своих аргументов. В качестве параметров a_1 и a_2 возьмем угловые координаты ϑ_0, φ_0 сферической системы координат для направления касательной к экстремали в точке M_0. Предыдущая формула при этом запишется в виде

$$\sigma(M) = \frac{\Psi(\vartheta_0, \varphi_0)}{\sqrt{n(M)\dfrac{D(x, y, z)}{D(s, \vartheta_0, \varphi_0)}}}. \tag{146}$$

Вид функции $\Psi(\vartheta_0, \varphi_0)$ мы определим из первого из условий для функции $\sigma(M)$, указанных в [51]. Это условие имеет вид

$$\lim_{M\to M_0} \sigma(M)\,\tau(M) = n(M_0).$$

Принимая во внимание вид интеграла (123), мы можем написать

$$\tau(M) = \int_0^s n(M)\,ds,$$

где интегрирование производится вдоль экстремали. Применяя теорему о среднем, получим

$$\lim_{s\to 0}\frac{\tau(M)}{s} = n(M_0),$$

и предыдущее условие для $\sigma(M)$ может быть записано в виде

$$\lim_{s\to 0}\sigma(M)\,s = 1. \tag{147}$$

Заметим, что при $s\to 0$ точка M стремится к M_0.

Для исследования функционального определителя, стоящего в формуле (146), обратимся к формулам, установленным в [**IV**$_1$; **90**] для канонических переменных в задаче о геодезических линиях. В данном случае

$$\varphi = n^2(M)\left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right),$$

и канонические переменные имеют вид

$$p_1 = 2n^2(M)\,x'; \quad p_2 = 2n^2(M)\,y'; \quad p_3 = 2n^2(M)\,z'.$$

Мы имеем следующие начальные условия

$$x'_0 = \sin\vartheta_0 \cos\varphi_0; \quad y'_0 = \sin\vartheta_0 \sin\varphi_0; \quad z'_0 = \cos\vartheta_0$$

и

$$\begin{gathered} p_{10} = 2n^2(M_0)\sin\vartheta_0\cos\varphi_0; \quad p_{20} = 2n^2(M_0)\sin\vartheta_0\sin\varphi_0; \\ p_{30} = 2n^2(M_0)\cos\vartheta_0. \end{gathered} \tag{148}$$

Уравнения экстремалей поля будут:

$$x = \varphi_1(r_1, r_2, r_3, x_0, y_0, z_0); \quad y = \varphi_2(\quad); \quad z = \varphi_3(\quad), \tag{149}$$

где $r_k = sp_{k0}$ и φ_k — функции, имеющие непрерывные производные до некоторого порядка. Дифференцируя первую из формул по s и полагая затем $s = 0$, получим

$$\sin\vartheta_0\cos\varphi_0 = \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial r_1}\right)_{s=0} p_{10} + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial r_2}\right)_{s=0} p_{20} + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial r_3}\right)_{s=0} p_{30}.$$

Пользуясь формулами (148) и произвольностью ϑ_0 и φ_0, получим

$$\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial r_2}\right)_{s=0} = \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial r_3}\right)_{s=0} = 0; \quad \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial r_1}\right)_{s=0} = 1 : 2n^2(M_0).$$

Пользуясь и остальными формулами (149), получим следующие общие формулы:

$$\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial r_k}\right)_{s=0} = 1 : 2n^2(M_0); \quad \left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial r_l}\right)_{s=0} = 0 \qquad (l \neq k).$$

С помощью формул (148) и (149) мы можем составить функциональный определитель от функции φ_k по переменным s, ϑ_0, φ_0. При дифференцировании по ϑ_0 и φ_0 через посредство r_k мы получим множитель s, и два столбца этого определителя будут содержать этот множитель. Деля определитель на s^2, мы перейдем к пределу, устремляя s к нулю. В результате придем к равенству

$$\lim_{s\to 0}\frac{1}{s^2}\,\frac{D(x, y, z)}{D(s, \vartheta_0, \varphi_0)} = \begin{vmatrix} \sin\vartheta_0\cos\varphi_0 & \cos\vartheta_0\cos\varphi_0 & -\sin\vartheta_0\sin\varphi_0 \\ \sin\vartheta_0\sin\varphi_0 & \cos\vartheta_0\sin\varphi_0 & \sin\vartheta_0\cos\varphi_0 \\ \cos\vartheta_0 & -\sin\vartheta_0 & 0 \end{vmatrix} = \sin\vartheta_0.$$

Для определения произвольной функции в формуле (146) умножим обе ее части на s и устремим s к нулю. Пользуясь последней формулой и формулой (147), будем иметь

$$1 = \frac{\Psi(\vartheta_0, \varphi_0)}{\sqrt{n(M_0)\sin\vartheta_0}}, \quad \text{т. е.} \quad \Psi(\vartheta_0, \varphi_0) = \sqrt{n(M_0)\sin\vartheta_0},$$

и окончательно мы получаем следующее выражение для функции σ:

$$\sigma(M, M_0) = \sqrt{\frac{n(M_0)\sin\vartheta_0}{n(M)\dfrac{D(x, y, z)}{D(s, \vartheta_0, \varphi_0)}}}. \tag{150}$$

Можно проверить, что эта функция имеет все свойства, указанные в [51]. Если $n(M) = \text{const}$, то $(s, \vartheta_0, \varphi_0)$ суть обычные сферические координаты точки M, и последняя формула дает $\sigma = \dfrac{1}{r}$.

53. Общий случай начальных данных. Положим теперь, что начальные условия заданы не на плоскости $t = 0$, а на какой-либо поверхности с уравнением $t = \varphi(M)$:

$$u\,|_{t=\varphi(M)} = f_0(M); \quad u_t\,|_{t=\varphi(M)} = f_1(M). \tag{151}$$

Будем решать задачу при $t > \varphi(M)$. Вместо гиперсферы $\tau(M; M_0) = t$ рассмотрим поверхность

$$\tau(M; M_0) + \varphi(M) = t, \tag{152}$$

и предположим, что при всех положительных значениях разности $[t - \varphi(M)]$, достаточно близких к нулю, поверхность (152) есть замкнутая поверхность трехмерного пространства, содержащая точку M_0 внутри себя, причем часть пространства, которая заключается внутри этой поверхности, определяется неравенством

$$\tau(M; M_0) + \varphi(M) < t. \tag{153}$$

Применим теперь формулу (138), приняв за S поверхность (152). При этом в подынтегральной функции интеграла по S мы будем иметь

$$[u] = u(M; t - \tau) = u[M; \varphi(M)] = f_0(M); \quad [u_t] = f_1(M).$$

Покажем, что и $\left[\dfrac{\partial u}{\partial n}\right]$ выражается через начальные данные. Мы имеем

$$\frac{\partial f_0(M)}{\partial n} = \frac{\partial u[M; \varphi(M)]}{\partial n} = \frac{\partial u(M; t)}{\partial n}\bigg|_{t=\varphi(M)} + \frac{\partial u(M; t)}{\partial t}\bigg|_{t=\varphi(M)} \cdot \frac{\partial \varphi(M)}{\partial n},$$

откуда

$$\left.\frac{\partial u(M, t)}{\partial n}\right|_{t=\varphi(M)} = \frac{\partial f_0(M)}{\partial n} - \left.\frac{\partial u(M, t)}{\partial t}\right|_{t=\varphi(M)} \cdot \frac{\partial \varphi(M)}{\partial n},$$

т. е.

$$\left[\frac{\partial u(M; t)}{\partial n}\right] = \frac{\partial f_0(M)}{\partial n} - \frac{\partial \varphi(M)}{\partial n} f_1(M).$$

Вводя обозначение

$$F(M_0; t) = \\ = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{\tau(M, M_0)+\varphi(M)=t} \left\{\sigma \frac{\partial f_0(M)}{\partial n} + \sigma\left(\frac{\partial \tau}{\partial n} - \frac{\partial \varphi}{\partial n}\right) f_1(M) - \frac{\partial \sigma}{\partial n} f_0\right\} dS,$$

мы получаем для $u(M_0; t)$ уравнение, аналогичное (140):

$$u(M_0; t) = F(M_0; t) + \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{\tau(M; M_0)+\varphi(M)<t} [u] \Delta\sigma(M; M_0)\, dv. \tag{154}$$

Как и выше, оно может быть решено методом последовательных приближений и дает решение задачи Коши при условиях (151). Точное проведение всех доказательств требует наличия некоторого числа непрерывных частных производных у функций $c(M)$, $f_0(M)$, $f_1(M)$, $\varphi(M)$.

Выясним связь поверхности (152) с теорией характеристик. Характеристический коноид уравнения (122) с вершиной (M_0, t) имеет в четырехмерном пространстве $(M; t_1)$ уравнение

$$t_1 = t - \tau(M; M_0), \tag{155}$$

где t_1 и $M(x, y, z)$ — текущие координаты, а t и M_0 — параметры. Поверхность (152) представляет собою геометрическое место тех точек трехмерного пространства, которые имеют те же координаты (x, y, z), что и точки пересечения характеристического коноида (155) с поверхностью $t_1 = \varphi(M)$ четырехмерного пространства, т. е. поверхность (152) есть проекция указанного пересечения в трехмерное пространство (x, y, z). Для наглядности представим себе, что все происходит в трехмерном пространстве (x, y, t_1). Уравнению (155) соответствует обычная поверхность конического типа. Эта поверхность пересекается с поверхностью $t_1 = \varphi(x, y)$ вдоль некоторой линии. Проекция этой линии на плоскость (x, y) должна быть замкнутой линией l, которая и есть аналог поверхности (152). Проекция вершины коноида на плоскость (x, y) должна попасть внутрь l, и трехмерный интеграл формулы (154) имеет своим аналогом двойной интеграл по части плоскости (x, y), лежащей внутри l. Эта область зависит, конечно, от положения вершины (x_0, y_0, t), коноида. Если эта вершина приближается к некоторой точке (x_0', y_0', t') на поверхности $t_1 = \varphi(x, y)$, то линия должна стягиваться в точку (x_0', y_0'). Совершенно аналогично замкнутая поверхность S должна стягиваться к точке M_0, если вершина коноида (155) стремится к некоторой точке (M_0', t') на поверхности $t_1 = \varphi(M)$.

Все эти геометрические свойства поверхности S, необходимые для строгого доказательства существования задачи Коши, связаны с тем, что касательная плоскость к поверхности $t = \varphi(M)$ не должна слишком отклоняться от плоскости $t = 0$. Можно показать, что это условие может быть записано в виде

$$\operatorname{grad}^2 \varphi(M) < \frac{1}{c^2(M)}. \tag{156}$$

При этом существенно, что функция $c^2(M)$ связана с $\tau(M; M_0)$ уравнением (124). При соблюдении условия (156) говорят, что поверхность $t = \varphi(M)$ *пространственно ориентирована*. Для более общего уравнения гиперболического типа

$$u_{tt} - \sum_{i, j=1}^{m} a_{ij} u_{x_i x_j} + \ldots = 0,$$

где u — функция независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$, говорят, что поверхность $t = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ — пространственно ориентирована в некоторой своей точке, если в этой точке выполняется неравенство

$$\sum_{i, j=1}^{m} a_{ij} \varphi_{x_i} \varphi_{x_j} < 1.$$

Описанные нами конструкции и формулы и их применения к решению задачи Коши для уравнения (122) были предложены в работах С. Л. Соболева (Тр. сейсмологического ин-та АН СССР, 1930, № 6 и 1934, № 42). Они были перенесены В. Г. Гоголадзе на более общие линейные уравнения гиперболического типа с четырьмя независимыми переменными (ДАН СССР, 1934, 1). Далее в работе С. Л. Соболева (Матем. сб., 1936, 1 (43), № 1, с. 39—72) указанный метод был распространен на общие линейные уравнения гиперболического типа с четным числом независимых переменных. В следующем параграфе мы укажем на те изменения, которые вносятся в изложенный метод для более общих уравнений, что и было сделано в работе В. Г. Гоголадзе, а потом изложим распространение метода на любое четное число независимых переменных лишь для волнового уравнения с постоянным коэффициентом c^2.

54. Обобщенное волновое уравнение. Рассмотрим вместо (122) более общее уравнение:

$$\frac{1}{c^2} u_{tt} = \sum_{i=1}^{3} a_i u_{x_i x_i} + \sum_{i=1}^{3} b_i u_{x_i} + hu, \tag{157}$$

где коэффициенты a_i, b_i, c и h — функции независимых переменных x_1, x_2, x_3, причем a_i больше некоторого положительного числа. Вместо функционала (123) строим функционал

$$J = \int_{M_0}^{M_1} \frac{ds}{c}, \tag{158}$$

где

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{3} \frac{dx_i^2}{a_i}. \tag{159}$$

Основная функция $\tau(M; M_0)$ центрального поля удовлетворяет следующему уравнению:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i \tau_{x_i}^2 = \frac{1}{c^2}. \tag{160}$$

Как и в [50], определяется запаздывающее значение какой-либо функции $u(M; t)$. Вместо (131) получим следующее уравнение для функции σ:

$$2\sum_{i=1}^{3} a_i \tau_{x_i} \sigma_{x_i} + \sigma \sum_{i=1}^{3} \left[a_i \tau_{x_i x_i} + \left(2\frac{\partial a_i}{\partial x_i} - b_i \right) \tau_{x_i} \right] = 0. \tag{161}$$

Условие (133) принимает вид

$$\lim_{M \to M_0} \sigma(M; M_0) \tau(M; M_0) = \frac{n(M_0)}{\sqrt{a_1^0 a_2^0 a_3^0}} \qquad \left(n(M) = \frac{1}{c(M)} \right), \tag{162}$$

где a_i^0 — значение функции a_i в точке M_0. Вместо (135) имеем оценку

$$|L(\sigma)| \leqslant \frac{K}{\tau(M; M_0)}, \tag{163}$$

где $L(u)$ — правая часть уравнения (157) и K — постоянная, и формула (136) принимает вид

$$\lim_{S_1 \to M_0} \iint_{S_1} \sum_{i=1}^{3} a_i \sigma_{x_i} \cos(n, x_i)\, dS = -4\pi. \tag{164}$$

Вместо (138) имеет место формула

$$u(M_0;\ t) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \left\{ \sigma P([u]) - [u] P(\sigma) + \right.$$

$$\left. + \sigma \left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] P(\tau) + \sigma R[u] \right\} dS + \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_D [u] L^*(\sigma)\, dv, \tag{165}$$

где

$$P(v) = \sum_{i=1}^{3} a_i v_{x_i} \cos(n,\ x_i), \qquad R = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial a_i}{\partial x_i} - b_i\right)\cos(n,\ x_i),$$

$$L^*(\sigma) = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial^2 a_i \sigma}{\partial x_i^2} - \frac{\partial b_i \sigma}{\partial x_i} + h\sigma\right),$$

причем $L^*(\sigma)$ есть оператор, сопряженный с $L(\sigma)$. Пользуясь формулой (165), можно, как и в [51], привести задачу Коши с начальными условиями (139) к интегральному уравнению

$$u(M_0;\ t) = F(M_0;\ t) + \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_D [u] L^*(\sigma)\, dv.$$

Отметим, что в записи уравнения (157) имеет место некоторая неопределенность, связанная с тем, что мы можем различным образом выделять множитель c^2. В частности, умножая обе части уравнения на c^2 и включая эту функцию в коэффициенты уравнения, мы можем считать $c \equiv 1$.

Для функции $\sigma(M; M_0)$ можно получить формулу, аналогичную (150):

$$\sigma^2(M;\ M_0) = \frac{n(M_0)\sin\vartheta_0 e^{\int\limits_0^s \sum\limits_{i=1}^{3}\left(b_i - \frac{\partial a_i}{\partial x_i}\right)\frac{1}{a_i}\frac{dx_i}{ds}\, ds}}{n(M)\dfrac{D(x_1,\ x_2,\ x_3)}{D(s,\ \vartheta_0,\ \varphi_0)}\sqrt{a_1^0 a_2^0 a_3^0}}, \tag{166}$$

где s — длина дуги экстремали, соединяющей M_0 с M, причем ds^2 вычисляется по формуле (159).

55. Случай любого числа независимых переменных. Применение метода С. Л. Соболева для случая многих независимых переменных требует введения нескольких функций σ. Мы изложим применение этого метода для волнового уравнения с постоянным коэффициентом:

$$\frac{1}{c^2} u_{tt} = \sum_{i=1}^{2k+1} u_{x_i x_i} \tag{167}$$

(см. Соболев С. Л. Об одном обобщении формулы Кирхгофа. — ДАН СССР, 1933, 1).

Через M мы будем обозначать точки в пространстве R^{2k+1} с координатами $(x_1, \ldots, x_{2k+1})$. Кроме того, будем рассматривать пространство R^{2k+2} с координатами $(x_1, \ldots, x_{2k+1}, t_1)$ или $(M; t_1)$. Характеристический конус для (167) с вершиной $(M_0; t)$ имеет в R^{2k+2} уравнение

$$t_1 = t - \frac{r}{c}, \tag{168}$$

где

$$r^2 = \sum_{i=1}^{2k+1} (x_i - x_i^0)^2. \tag{169}$$

Через $[\varphi]$ обозначается, как и выше, запаздывающее значение функции φ:

$$[\varphi(M; t)] = \varphi\left(M, t - \frac{r}{c}\right),$$

т. е. значение φ на нижней относительно t половине конуса (168). Как мы уже отмечали [40], на характеристической поверхности имеются соотношения между функцией u, удовлетворяющей уравнению (167), и ее производными. Установим эти соотношения для производных от u по t:

$$u_s = \left[\frac{\partial^s u}{\partial t^s}\right] \qquad (s = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{170}$$

причем мы будем рассматривать u_s как функции в R^{2k+1}. Отметим предварительно, что основное уравнение (124) имеет в данном случае вид

$$\left(\operatorname{grad} \frac{r}{c}\right)^2 = \frac{1}{c^2}. \tag{171}$$

Производя дифференцирование функции u_s по координатам как непосредственно, так и через посредство аргумента $\left(t - \frac{r}{c}\right)$, мы получаем, пользуясь легко проверяемой формулой

$$\operatorname{grad} u_{s+1} \cdot \operatorname{grad} \frac{r}{c} = \left[\operatorname{grad} \frac{\partial^{s+1} u}{\partial t^{s+1}}\right] \cdot \operatorname{grad} \frac{r}{c} - \left[\frac{\partial^{s+2} u}{\partial t^{s+2}}\right] \operatorname{grad}^2 \frac{r}{c},$$

где точка обозначает скалярное произведение в R^{2k+1}, следующую формулу:

$$\Delta u_s = -2 \operatorname{grad} u_{s+1} \cdot \operatorname{grad} \frac{r}{c} - u_{s+1} \Delta \frac{r}{c}. \tag{172}$$

Вводя оператор

$$L(v) = -2 \operatorname{grad} v \cdot \operatorname{grad} \frac{r}{c} - v \Delta \frac{r}{c} = -\frac{2}{c} \sum_{i=1}^{2k+1} \frac{x_i - x_i^{(0)}}{r} v_{x_i} - \frac{v}{c} \Delta r, \tag{173}$$

можем переписать (172) в виде

$$\Delta u_s = L(u_{s+1}). \tag{174}$$

Это и есть те соотношения, которые выполняются на конусе (168). Оператор L удовлетворяет соотношению

$$vL(w) + wL(v) = -\operatorname{div}\left(2vw \operatorname{grad}\frac{r}{c}\right). \tag{175}$$

Для степеней r мы имеем

$$\Delta r^s = (2k+s-1)\,sr^{s-2}; \quad L(r^s) = -\frac{2}{c}(s+k)\,r^{s-1}. \tag{176}$$

Вводим функции σ_i:

$$\sigma_i = \frac{(2k-2)(2k-4)\ldots(2i+2)\,2i}{(k-i)!\,c^{k-i}(2k-2)(2k-3)\ldots(k+i-1)}\,r^{-k-i+1}; \qquad \sigma_k = r^{-2k+1}$$

$$(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k-1). \tag{177}$$

Мы имеем

$$L(\sigma_1) = 0; \quad L(\sigma_{i+1}) = \Delta\sigma_i; \quad \Delta\sigma_k = 0 \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k-1). \tag{178}$$

Пусть D — некоторая область пространства R^{2k+1}, не содержащая точки M_0. Составим интеграл кратности $(2k+1)$:

$$\int\limits_D \sum_{s=1}^{k} (-1)^{s-1} \left[(u_{s-1}\,\Delta\sigma_{k-s+1} - \sigma_{k-s+1}\,\Delta u_{s-1}) + \right.$$
$$\left. + (\sigma_{k-s+1}L(u_s) + u_sL(\sigma_{k-s+1}))\right] dx_1 \ldots dx_{2k+1}. \tag{179}$$

Из (174) и (178) следует, что этот интеграл равен нулю. Принимая во внимание (175) и формулу

$$v\,\Delta w - w\,\Delta v = \operatorname{div}(v \operatorname{grad} w - w \operatorname{grad} v),$$

можем преобразовать интеграл (179) в интеграл по поверхности S, ограничивающей область D. Учитывая еще формулу

$$\frac{\partial u_s}{\partial n} = \left[\frac{\partial^{s+1}u}{\partial t^s\,\partial n}\right] - \left[\frac{\partial^{s+1}u}{\partial t^{s+1}}\right]\frac{\partial \frac{r}{c}}{\partial n},$$

мы можем написать

$$\int\limits_S \sum_{s=1}^{k} (-1)^s \left\{ \frac{\partial\sigma_{k-s+1}}{\partial n}\left[\frac{\partial^{s-1}u}{\partial t^{s-1}}\right] - \sigma_{k-s+1}\left[\frac{\partial^s u}{\partial n\,\partial t^{s-1}}\right] - \right.$$
$$\left. - \sigma_{k-s+1}\frac{\partial \frac{r}{c}}{\partial n}\left[\frac{\partial^s u}{\partial t^s}\right]\right\} dS = 0,$$

где n — направление внешней нормали на S. Если область D содержит точку M_0 внутри себя, то предыдущая формула применяется после выделения M_0 малой сферой. Переходя затем обычным образом к пределу, получаем следующую формулу:

$$u(M_0, t) = A \int_S \sum_{s=1}^{k} (-1)^s \left\{ \frac{\partial \sigma_{k-s+1}}{\partial n} \left[\frac{\partial^{s-1} u}{\partial t^{s-1}} \right] - \right.$$

$$\left. - \sigma_{k-s+1} \left[\frac{\partial^s u}{\partial n\, \partial t^{s-1}} \right] - \sigma_{k-s+1} \frac{\partial \frac{r}{c}}{\partial n} \left[\frac{\partial^s u}{\partial t^s} \right] \right\} dS, \qquad (180)$$

где постоянная A определяется формулой

$$A = \frac{\prod_{i=1}^{2k-1} \Gamma\left(\frac{i+2}{2}\right)}{2(2k-1)\pi^{\frac{2k-1}{2}} \prod_{i=1}^{2k-1} \Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right)}.$$

При $2k+1=3$ формула (180) совпадает с формулой Кирхгофа. Если за поверхность S взять сферу с центром M_0 и радиусом ct, то запаздывающие значения производных функций u выразятся через начальные данные для u и u_t при $t=0$, и мы получим в явном виде решение задачи Коши, которое мы имели раньше в другом виде [II; 184]. Совершенно так же, используя формулу (180), можно решить задачу Коши и для того случая, когда начальные условия даны на поверхности $t_1 = \varphi(M)$. Отметим, что под знак интеграла будут входить и производные от начальных данных, так что для решения задачи нам надо требовать непрерывности производных от начальных данных до определенного порядка, зависящего от k, что мы отмечали и раньше. В работе С. А. Христиановича (Матем. сб., 1937, **2**, № 5) этот метод был распространен на нелинейные гиперболические уравнения.

56. Энергетическое неравенство. Рассмотрим уравнение гиперболического типа, имеющее вид

$$L(u) \equiv \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} u_{x_i x_k} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu - u_{tt} = f, \qquad (181)$$

в котором a_{ik}, b_i, c и f зависят от $(x_1, \ldots, x_n, t)$, причем b_i, c и f — непрерывны, а a_{ik} имеет непрерывные производные первого порядка в областях пространства $(x_1, \ldots, x_n, t)$, о которых мы будем говорить ниже. Поскольку мы считаем (181) уравнением гиперболического типа, будет иметь место неравенство

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \xi_i \xi_k \geqslant \nu \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \qquad (\nu > 0), \qquad (182)$$

причем мы будем считать, что ν — положительная постоянная для упомянутых выше областей. В дальнейшем, для большей наглядности, мы будем считать, что $n=2$, так что будем рассматривать трехмерное пространство с координатами (x_1, x_2, t). Рассуждения переносятся и на общий случай.

Наша задача — дать оценки для решений уравнения (181) через начальные данные и коэффициенты. Из этих оценок сразу будет следовать, между прочим, *единственность* решения задачи Коши и *непрерывная зависимость* его от начальных данных. Наши последующие рассуждения будут сходны с теми, которые мы применяли при доказательстве единственности задачи Коши и предельной задачи для волнового уравнения в **[II; 192]**.

Для этого предварительно докажем следующую лемму.

Лемма. *Если неотрицательная, абсолютно непрерывная функция $w(t)$ удовлетворяет при почти всех $t>0$ неравенству*

$$\frac{dw(t)}{dt} \leqslant c_1(t)\,w(t) + c_2(t), \tag{183}$$

где $c_i(t)$ — интегрируемые функции, тогда

$$w(t) \leqslant e^{\int_0^t c_1(t_1)\,dt_1}\left[w(0) + \int_0^t c_2(t_2)\,e^{-\int_0^{t} c_1(t_1)\,dt_1}\,dt_2\right]. \tag{184}$$

Если к тому же $c_1(t) \geqslant 0$, то при почти всех $t>0$

$$\frac{dw(t)}{dt} \leqslant c_1(t)\,e^{\int_0^t c_1(t_1)\,dt_1}\left[w(0) + \int_0^t c_2(t_2)\,e^{-\int_0^{t_2} c_1(t_1)\,dt_1}\,dt_2\right] + c_2(t). \tag{185}$$

Из (184) и (185), в частности, следует, что если $c_1(t)$ есть положительная константа c_1, а $c_2(t)$ — неубывающая функция, то

$$w(t) \leqslant w(0)\,e^{c_1 t} + \frac{e^{c_1 t} - 1}{c_1}\,c_2(t) \tag{186}$$

и

$$\frac{dw(t)}{dt} \leqslant [c_1 w(0) + c_2(t)]\,e^{c_1 t}. \tag{187}$$

Действительно, умножим обе части неравенства (183) на $e^{-\int_0^t c_1(t_1)\,dt_1}$ и результат запишем в виде

$$\frac{d}{dt}\left(w(t)\,e^{-\int_0^t c_1(t_1)\,dt_1}\right) \leqslant c_2(t)\,e^{-\int_0^t c_1(t_1)\,dt_1}.$$

Интегрируя это неравенство по t от нуля до t, получим оценку (184). Из нее и (183) в случае $c_1(t) \geqslant 0$ следует (185). Лемма доказана.

Пусть в некоторой области, примыкающей к плоскости $t=0$ и расположенной в полупространстве, где $t>0$, имеется решение уравнения (181), непрерывное с производными до второго порядка вплоть до ее границы. Предположим, что в ней содержится область D типа усеченного конуса, нижнее основание которого $B(0)$ лежит на плоскости $t=0$, верхнее $B(T)$ на плоскости $t=T>0$, $\cos(n,t)$ на боковой поверхности S положителен и S *ориентирована пространственно-характеристическим образом*, т. е. на ней

$$\cos^2(n,\ t)-\sum_{i,k=1}^{2} a_{ik}\cos(n,\ x_i)\cos(n,\ x_k)\geqslant 0 \tag{188}$$

(напомним, что нормаль n к S направлена вне D). Обозначим через $B(t_1)$ сечение D плоскостью $t=t_1$. Рассмотрим равенство

$$-\int_0^t \iint_{B(t_1)} 2u_t L(u)\,dx_1\,dx_2\,dt_1=-\int_0^t \iint_{B(t_1)} 2u_t f\,dx_1\,dx_2\,dt_1 \tag{189}$$

для $t\in[0,T]$. В силу тождеств

$$2u_t u_{tt}=\frac{\partial u_t^2}{\partial t};\quad 2\sum_{i,k=1}^{2} a_{ik}u_{x_ix_k}u_t=2\sum_{i,k=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}u_{x_k}u_t\right)-$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\sum_{i,k=1}^{2} a_{ik}u_{x_i}u_{x_k}-2\sum_{i,k=1}^{2}\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_i}u_{x_k}u_t+\sum_{i,k=1}^{2}\frac{\partial a_{ik}}{\partial t}u_{x_i}u_{x_k},$$

равенство (189) можно преобразовать, используя формулу (107), к виду

$$\iint_{B(t)}\left(\sum_{i,k=1}^{2} a_{ik}u_{x_i}u_{x_k}+u_t^2\right)dx_1\,dx_2-\iint_{B(0)}\left(\sum_{i,k=1}^{2} a_{ik}u_{x_i}u_{x_k}+u_t^2\right)dx_1\,dx_2+$$

$$+\int_0^t\int_{\partial B(t_1)}\left[-2\sum_{i,k=1}^{2} a_{ik}u_{x_k}u_t\cos(n,\ x_i)+\right.$$

$$\left.+\left(\sum_{i,k=1}^{2} a_{ik}u_{x_i}u_{x_k}+u_t^2\right)\cos(n,\ t)\right]dS\,dt_1+$$

$$+\int_0^t\iint_{B(t_1)}\left(2\sum_{i,k=1}^{2}\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_i}u_{x_k}u_t-\sum_{i,k=1}^{2}\frac{\partial a_{ik}}{\partial t}u_{x_i}u_{x_k}-\right.$$

$$\left.-2\sum_{i=1}^{2} b_i u_{x_i}u_t-2cuu_t\right)dx_1\,dx_2\,dt_1=-\int_0^t\iint_{B(t_1)} 2u_t f\,dx_1\,dx_2\,dt_1, \tag{190}$$

где $\partial B(t_1)$ есть граница $B(t_1)$. Подынтегральное выражение, стоящее в третьем члене, неотрицательно, ибо оно лишь положительным множителем $\cos(n, t)$ отличается от суммы

$$\sum_{i,k=1}^{2} a_{ik}\left(u_{x_i}\cos(n,t)-u_t\cos(n,x_i)\right)\left(u_{x_k}\cos(n,t)-u_t\cos(n,x_k)\right)+\\ +u_t^2\left(\cos^2(n,t)-\sum_{i,k=1}^{2} a_{ik}\cos(n,x_i)\cos(n,x_k)\right),$$

в которой первое слагаемое есть форма вида $\sum\limits_{i,k=1}^{2} a_{ik}\xi_i\xi_k$, которая неотрицательна при любых ξ_i, а второе неотрицательно в силу предположения (183). В силу этого из равенства (190) следует неравенство

$$K(t)\leqslant K(0)-\int_0^t \iint\limits_{B(t_1)}\left(2\sum_{i,k=1}^{2}\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_i}u_{x_k}u_t-\sum_{i,k=1}^{2}\frac{\partial a_{ik}}{\partial t}u_{x_i}u_{x_k}-\right.\\ \left.-2\sum_{i=1}^{2} b_i u_{x_i}u_t-2cuu_t\right)dx_1\,dx_2\,dt_1-\int_0^t \iint\limits_{B(t_1)} 2u_t f\,dx_1\,dx_2\,dt_1, \qquad (191)$$

где

$$K(t)=\iint\limits_{B(t)}\left(\sum_{i,k=1}^{2} a_{ik}u_{x_i}u_{x_k}+u_t^2\right)dx_1\,dx_2. \qquad (192)$$

Положим, что имеют место неравенства

$$\left|\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_k}\right|,\quad \left|\frac{\partial a_{ik}}{\partial t}\right|,\quad |b_i|,\quad |c|\leqslant C_0, \qquad (193)$$

где C_0 — некоторое положительное число. Тогда

$$\left|\iint\limits_{B(t_1)}\sum_{i,k=1}^{2}\frac{\partial a_{ik}}{\partial t}u_{x_i}u_{x_k}\,dx_1\,dx_2\right|\leqslant C_0\iint\limits_{B(t_1)}\sum_{i,k=1}^{2}|u_{x_i}|\cdot|u_{x_k}|\,dx_1\,dx_2.$$

Далее, мы имеем

$$\sum_{i,k=1}^{2}|u_{x_i}|\cdot|u_{x_k}|\leqslant 2\sum_{i=1}^{2}u_{x_i}^2.$$

Но, в силу (182),

$$\sum_{i=1}^{2}u_{x_i}^2\leqslant\frac{1}{\nu}\sum_{i,k=1}^{2}a_{ik}u_{x_i}u_{x_k},$$

и, следовательно,

$$\left|\int_0^t \iint_{B(t_1)} \sum_{i,k=1}^{2} \frac{\partial a_{ik}}{\partial t} u_{x_i} u_{x_k}\, dx_1\, dx_2\, dt_1\right| \leqslant C_1 \int_0^t K(t_1)\, dt_1,$$

где C_1 — положительная постоянная, зависящая от коэффициентов. Совершенно аналогично

$$\left|\int_0^t \iint_{B(t_1)} 2u_t \sum_{i=1}^{2}\left(b_i - \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_k}\right) u_{x_i}\, dx_1\, dx_2\, dt_1\right| \leqslant C_2 \int_0^t K(t_1)\, dt_1,$$

где C_2 — постоянная, аналогичная C_1. Обозначим

$$L(t) = \iint_{B(t)} u^2\, dx_1\, dx_2. \tag{194}$$

Применяя неравенство $|2ab| \leqslant a^2 + b^2$ и принимая во внимание, что

$$\sum_{i,k=1}^{2} a_{ik} u_{x_i} u_{x_k} \geqslant 0, \tag{195}$$

получим

$$\left|\int_0^t \iint_{B(t_1)} 2cu_t u\, dx_1\, dx_2\, dt_1\right| \leqslant C_3 \int_0^t [K(t_1) + L(t_1)]\, dt_1.$$

Далее из $|2fu_t| \leqslant u_t^2 + f^2$ и (195) получим

$$\left|\iint_{B(t_1)} 2fu_t\, dx_1\, dx_2\right| \leqslant K(t_1) + M(t_1),$$

где

$$M(t_1) = \iint_{B(t_1)} f^2\, dx_1\, dx_2. \tag{196}$$

Подставляя полученные оценки в (191), будем иметь

$$K(t) \leqslant K(0) + \\ + (C_1 + C_2 + C_3 + 1) \int_0^t K(t_1)\, dt_1 + C_3 \int_0^t L(t_1)\, dt_1 + \int_0^t M(t_1)\, dt_1. \tag{197}$$

Переходим к оценке $L(t)$. Возьмем интеграл

$$J_1(t) = \int_0^t \iint_{B(t_1)} [u^2(x_1, x_2, t_1)]_{t_1}\, dx_1\, dx_2\, dt_1.$$

Его можно рассматривать как тройной интеграл по области D_t, ограниченной снизу плоскостью $t=0$, сверху — плоскостью постоянного t и сбоку — указанной выше поверхностью S, на которой $\cos(n, t) > 0$. Применяя формулу Остроградского, легко получим неравенство

$$J_1(t) \geqslant \iint\limits_{B(t)} u^2\,dx_1\,dx_2 - \iint\limits_{B(0)} u^2\,dx_1\,dx_2,$$

т. е.

$$\iint\limits_{B(t)} u^2\,dx_1\,dx_2 \leqslant \iint\limits_{B(0)} u^2\,dx_1\,dx_2 + \int\limits_0^t \iint\limits_{B(t_1)} 2uu_{t_1}\,dx_1\,dx_2\,dt_1, \qquad (198)$$

откуда, в силу $|2uu_{t_1}| \leqslant u_{t_1}^2 + u^2$ и (195), следует, что

$$L(t) \leqslant L(0) + \int\limits_0^t K(t_1)\,dt_1 + \int\limits_0^t L(t_1)\,dt_1. \qquad (199)$$

Складываем (197) и (199):

$$(Kt) + L(t) \leqslant$$
$$\leqslant K(0) + L(0) + C\int\limits_0^t [K(t_1) + L(t_1)]\,dt_1 + \int\limits_0^t M(t_1)\,dt_1, \qquad (200)$$

где постоянная $C = C_1 + C_2 + C_3 + 2$ зависит от величины коэффициентов a_{ik}, b_i, c и производных от a_{ik}. Воспользуемся теперь неравенствами (186) и (187). Функция $w(t) = \int\limits_0^t [K(t_1) + L(t_1)]\,dt_1$ удовлетворяет условиям леммы с

$$c_1(t) = C, \quad c_2(t) = K(0) + L(0) + \int\limits_0^t M(t_1)\,dt_1 \quad \text{и} \quad w(0) = 0.$$

Поэтому для нее верны оценки

$$w(t) = \int\limits_0^t [K(t_1) + L(t_1)]\,dt_1 \leqslant \frac{e^{Ct} - 1}{C}\left[\delta + \int\limits_0^t M(t_1)\,dt_1\right]$$

и

$$\frac{dw(t)}{dt} = K(t) + L(t) \leqslant e^{Ct}\left[\delta + \int\limits_0^t M(t_1)\,dt_1\right], \qquad (201)$$

где $\delta = K(0) + L(0)$. Их называют *энергетическими*.

В силу предположения (182)

$$K(t) \geqslant \iint\limits_{B(t)} (\nu u_{x_1}^2 + \nu u_{x_2}^2 + u_t^2)\, dx_1\, dx_2.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что ν, входящее в условие (182) удовлетворяет неравенствам $0 < \nu \leqslant 1$. Тогда из неравенства (201) следует оценка

$$\iint\limits_{B(t)} (u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2 + u_t^2 + u^2)\, dx_1\, dx_2 \leqslant \frac{e^{Ct}}{\nu} \left[\iint\limits_{B(0)} \left(\sum_{i,\,k=1}^{2} a_{ik} u_{x_i} u_{x_k} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + u_t^2 + u^2 \right) dx_1\, dx_2 + \int\limits_0^t \iint\limits_{B(t_1)} f^2\, dx_1\, dx_2\, dt_1 \right]. \qquad (202)$$

Она справедлива для всех t из $[0, T]$ и для любых областей описанного выше типа Постоянные C и ν в ней определяются только коэффициентами уравнения (181) и не зависят от взятого решения u и свободного члена f.

Приведенные в этом пункте оценки имеются в работах Фридрихса, Леви, Шаудера

57. Теоремы единственности и непрерывной зависимости решений. Из доказанных неравенств легко следует теорема единственности решения задачи Коши и непрерывная зависимость решения от начальных данных и свободного члена уравнения. Рассматривая разность двух решений задачи Коши при одинаковых начальных данных, мы приводим теорему единственности к следующему. если свободный член f в уравнении (181) равен нулю и начальные данные имеют вид

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0, \qquad (203)$$

то и решение задачи должно быть $u \equiv 0$ Проведем через какую-либо точку $\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, t^{(0)}\right)$ характеристический коноид и положим, что он вместе с плоскостью $t = 0$ образует область D указанного выше типа. Пусть $u(x_1, x_2, t)$ — решение задачи при $f \equiv 0$ и с начальными условиями (203), непрерывное вместе с производными до второго порядка в области D. Мы можем применить, например, неравенство (201), причем из сказанного выше следует, что $\delta = 0$. Таким образом

$$L(t) = \iint\limits_{B(t)} u^2\, dx_1\, dx_2 = 0,$$

и, следовательно, $u \equiv 0$ в D. Это утверждение сохранит свою силу, если однородные начальные условия (203) имеют место не на всей плоскости (x, y), но лишь на основании $B(0)$ области D, ибо при этом одном $\delta=0$. Отсюда можно заключить, что *значение решения однородного уравнения* (181) *в точке* $\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, t^{(0)}\right)$ *зависит от значений начальных данных только на основании* $B(0)$ *характеристического коноида с вершиной* $\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, t^{(0)}\right)$. При этом предполагается, что этот коноид вместе с плоскостью $t=0$ образует область D указанного типа.

Совершенно так же, как и выше, непрерывная зависимость решения от начальных данных сводится к тому, что если $f\equiv 0$, и функции $\varphi_0(x_1, x_2)$ и $\varphi_1(x_1, x_2)$, входящие в начальные условия

$$u|_{t=0}=\varphi_0(x_1, x_2); \quad u_t|_{t=0}=\varphi_1(x_1, x_2), \tag{204}$$

малы (в каком-либо смысле), то в известном смысле и решение $u(x_1, x_2, t)$ также мало. Положим, что малость начальных данных мы понимаем в том смысле, что интегралы $L(0)$ и $K(0)$ — малы, т. е. положим, что мы имеем неравенства $L(0)\leqslant\varepsilon$ и $K(0)\leqslant\varepsilon$, где ε — малое положительное число. При этом из (201) непосредственно следует, что $L(t)$ и $K(t)$ во всей области D имеют оценку вида

$$K(t)\leqslant 2\varepsilon e^{Ct}; \quad L(t)\leqslant 2\varepsilon e^{Ct}.$$

Непрерывную зависимость от начальных данных можно доказать не только в смысле оценок интегралов $K(t)$ и $L(t)$, но и в смысле оценки абсолютного значения самой функции, если $n=1$, т. е. если мы имеем две независимые переменные x_1 и t. Это непосредственно следует из метода Римана [45], если уравнение приведено к той канонической форме, которая была принята при применении метода Римана. Если число независимых переменных больше двух, то, пользуясь указанными неравенствами, нельзя из малости $|\varphi_0|$ и $|\varphi_1|$ получить малость $|u|$ (при $f\equiv 0$). Рассмотрим при помощи выведенных выше неравенств случай $n=1$.

При этом мы имеем независимые переменные (x, t), и область D есть трапеция ABB_1A_1 с криволинейными, вообще говоря, боковыми сторонами. Прямая A_1B_1 имеет уравнение $t=T$. Положим, что $x=\xi_1(t)$ есть уравнение стороны AA_1 и $x=\xi_2(t)$ — стороны BB_1. Мы считаем, что не только функции $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$, входящие в начальные условия (204), но и производная $\varphi_0(x)$ малы по абсолютной величине. При этом и интегралы от квадратов этих величин по основанию AB области D будут малы, и тем самым будут малы величины $L(0)$ и $K(0)$, причем в данном случае мы имеем

$$K(t)=\int\limits_{\xi_1(t)}^{\xi_2(t)}\left[a(x, t)u_x^2+u_t^2\right]dx,$$

где $a(x,t) \geqslant m > 0$. Из малости $L(0)$ и $K(0)$ следует, в силу указанных выше оценок, малость величин $L(t)$ и $K(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant T$, откуда мы можем заключить о малости интегралов

$$\int\limits_{\xi_1(t)}^{\xi_2(t)} u^2(x,\ t)\,dx; \quad \int\limits_{\xi_1(t)}^{\xi_2(t)} u_x^2(x,\ t)\,dx; \quad \int\limits_{\xi_1(t)}^{\xi_2(t)} u_t^2(x,\ t)\,dx. \tag{205}$$

Положим, что эти интегралы не превышают некоторого положительного числа η. Мы имеем, применяя неравенство Буняковского,

$$\{u(x,\ t) - u[\xi_1(t),\ t]\}^2 =$$

$$= \left[\int\limits_{\xi_1(t)}^{x} u_x(x',\ t)\,dx'\right]^2 \leqslant \int\limits_{\xi_1(t)}^{x} u_x^2(x',\ t)\,dx \cdot \int\limits_{\xi_1(t)}^{x} 1^2\,dx,$$

откуда

$$\{u(x,\ t) - u(\xi_1(t),\ t)\}^2 \leqslant a\eta \qquad [\xi_1(t) \leqslant x \leqslant \xi_2(t)], \tag{206}$$

где $a = \xi_2(0) - \xi_1(0)$ в D.

Благодаря неравенству Буняковского получаем оценку

$$\left.\begin{array}{c}\left[\int\limits_{\xi_1(t)}^{x} |u(x',\ t)|\,dx'\right]^2 \leqslant a\eta, \\ [\xi_1(t) \leqslant x \leqslant \xi_2(t)].\end{array}\right\} \tag{207}$$

Из (206) следует

$$u[\xi_1(t),\ t] = u(x,\ t) + v(x,\ t), \quad \text{где} \quad |v(x,\ t)| \leqslant \sqrt{a\eta}. \tag{208}$$

Интегрируя обе части по x в пределах $\xi_1(t) \leqslant x \leqslant \xi_2(t)$ и пользуясь (207), получим

$$|u[\xi_1(t),\ t]| \leqslant \frac{\sqrt{a\eta}}{b} + \sqrt{a\eta}, \tag{209}$$

где b равно разности $\xi_2(T) - \xi_1(T)$, так что $|u[\xi_1(t), t]| \leqslant (1 + b^{-1})\sqrt{a\eta}$. Пользуясь (208), получаем, на основании указанного только что неравенства, оценку

$$|u(x,\ t)| \leqslant \left(2 + b^{-1}\right)\sqrt{a\eta}, \tag{210}$$

где η — оценка интегралов (205), а $b = \xi_2(T) - \xi_1(T)$. Таким образом, мы и имеем искомую оценку $|u(x,t)|$ во всей области D, считая $b > 0$. Переходим теперь к оценке решения $u(x,t)$ в зависимости от свободного члена f.

Положим, что при однородных начальных условиях (203) свободный член f отличен от нуля. Пусть $|f| \leqslant M_0$, где M_0 — положительное число; тогда, используя (196) и (201), получим

$$K(t) + L(t) \leqslant atM_0^2e^{Ct}. \tag{211}$$

Можно использовать оценку не $|f|$, а величины $M(t_1)$, входящей в формулу (201).

Интегралы $K(t)$ и $L(t)$ для разности $u_2 - u_1$ двух решений u_1 и u_2 уравнения (181) с различными свободными членами, но с одинаковыми начальными условиями, сколь угодно малы, если достаточно мало абсолютное значение разности $|f_2 - f_1|$.

При $n = 1$ мы, как и выше, можем получить отсюда оценку и для $|u_2 - u_1|$.

58. Случай волнового уравнения. Легко увидеть (см. (191)), что для решений однородного волнового уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} - u_{tt} = 0 \tag{212}$$

энергетическое неравенство имеет вид

$$\int_{B(t)} \left(\sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 + u_t^2 \right) dx \leqslant \int_{B(0)} \left(\sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 + u_t^2 \right) dx, \tag{213}$$

где $dx = dx_1 \ldots dx_n$. Оно выведено в предположении, что u имеет непрерывные производные до второго порядка. Если же u имеет в рассматриваемых областях непрерывные производные до порядка $m+1$, то любая его производная $D^l u$, $l \leqslant m-1$, также удовлетворяет уравнению (212), и поэтому для нее справедлива оценка (213), т. е.

$$\int_{B(t)} \left[\sum_{i=1}^{n} (D^l u_{x_i})^2 + (D^l u_t)^2 \right] dx \leqslant \int_{B(0)} \left[\sum_{i=1}^{n} (D^l u_{x_i})^2 + (D^l u_t)^2 \right] dx. \tag{214}$$

Формула Пуассона [**II**; **184**] дает решение задачи Коши для уравнения (212), причем гладкость ее решения растет с ростом гладкости начальных данных $\varphi(x) = u|_{t=0}$ и $\psi(x) = u_t|_{t=0}$.

Неравенства (214) позволяют исследовать вопрос о разрешимости задачи Коши и при негладких начальных данных. Действительно, пусть функция φ квадратично суммируема в шаре $B_R = \{x: |x| < R\}$ и имеет в нем обобщенные производные до порядка m, квадратично суммируемые по B_R [**IV**$_1$; **113, 114**]. Говоря иначе, пусть $\varphi \in W_2^m(B_R)$. Относительно функции ψ предположим, что она принадлежит множеству $W_2^{m-1}(B_R)$*). Так же, как и в случаях $m = 1$ и $m = 2$ [**IV**$_1$, **115**], множество $W_2^m(B_R)$ может быть рассмотрено, как гильбертово пространство, ска-

*) $W_2^0(D)$ принято обозначать через $L_2(D)$.

лярное произведение в котором определено равенством

$$(\varphi, \tilde{\varphi})_m = \int_{B_R} \left[\varphi\tilde{\varphi} + \sum_{l=1}^{m} \sum_{(l)} D^l\varphi D^l\tilde{\varphi} \right] dx,$$

где символ D^l означает производную порядка l любого вида, а знак $\sum_{(l)}$ — суммирование всех таких производных. Доказывается, что $W_2^m(B_R)$ есть полное гильбертово пространство.

Обозначим через φ_h усреднения φ, определенные в [$\mathbf{IV_1}$; **110**]. Известно, что они суть бесконечно дифференцируемые в B_{R-h} функции, сходящиеся к φ при $h \to 0$ в нормах пространств $W_2^m(B_{R_1})$, где R_1 — любое число, меньшее R. Аналогично ψ_h будут сходиться к ψ в нормах $W_2^{m-1}(B_{R_1})$.

Пусть $u_h(x, t)$ есть решение задачи Коши для уравнения (212), отвечающее начальным данным φ_h и ψ_h. Из формулы Пуассона видно, что u_h имеет непрерывные производные всех порядков. Устремим h к нулю и исследуем этот предельный переход в конусе $D_1 = \{(x, t)\colon\ |x| < R_1,\ 0 < t < |x|\}$. Конус D_1 удовлетворяет всем требованиям, которые были наложены на область в пункте [56], и потому для u_h справедливы неравенства (214), в которых роль $B(t_1)$ играют сечения D_1 плоскостью $t = t_1$. Эти же неравенства имеют место и для функций $v_{1,2}(x, t) = u_{h_1}(x, t) - u_{h_2}(x, t)$ (ибо они также являются решениями уравнения (212)), т. е.

$$\int_{B(t)} \left[\sum_{i=1}^{n} (D^l v_{1,2x_i})^2 + (D^l v_{1,2t})^2 \right] dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_{B(0)} \left[\sum_{i=1}^{n} (D^l v_{1,2x_i})^2 + (D^l v_{1,2t})^2 \right] dx. \quad (215)$$

При h_1 и h_2, стремящихся к нулю, правая часть (215) пойдет к нулю при $l = 0, 1, \ldots m-1$, следовательно, это же имеет место и на любом сечении $B(t)$, $t \in [0, R_1]$. Сами функции $v_{1,2}$ также стремятся к нулю в нормах $L_2(B(t))$, так как для любой гладкой функции v

$$v(x, t) = v(x, 0) + \int_0^t v_{t_1}(x, t_1)\, dt_1,$$

и потому (в силу неравенства Коши — Буняковского)

$$v^2(x, t) \leqslant 2v^2(x, 0) + 2t \int_0^t v_{t_1}^2(x, t_1)\, dt_1$$

и

$$\int\limits_{B(t)} v^2\,dx \leqslant 2 \int\limits_{B(0)} v^2\,dx + 2t \int\limits_0^t \int\limits_{B(t_1)} v_{t_1}^2\,dx\,dx_1. \tag{216}$$

Интегрируя (215) и (216) по t в пределах от 0 до $t_2 \leqslant R_1$, убеждаемся, что $v_{1,2}$ и все их производные до порядка m сходятся к нулю в норме $L_2(D_1)$. В силу полноты пространства $L_2(D_1)$ и свойств обобщенных производных, описанных в **[IV₁; 113, 114]**, существует элемент u пространства $W_2^m(D_1)$, к которому сходятся функции u_h в норме $W_2^m(D_1)$. Более того, из (215) и (216) видно, что имеет место сходимость $u_h(x, t)$ в нормах $W_2^m(B(t))$ и сходимость $u_{ht}(x, t)$ в нормах $W_2^{m-1}(B(t))$ при любом $t \in [0, R_1)$, так что функция $u(x, t)$ будет принадлежать $W_2^m(B(t))$, а $u_t(x, t) \in W_2^{m-1}(B(t))$ при любом $t \in [0, R_1)$, и для u будут выполняться неравенства (214) и (216). При $m \geqslant 2$ u будет удовлетворять уравнению (212) при почти всех (x, t) из D_1. Таким образом, мы сумели найти решение задачи Коши для уравнения (212) в области D_1, предполагая о начальных данных φ и ψ, что они суть элементы $W_2^m(B_R)$ и $W_2^{m-1}(B_R)$, $m \geqslant 2$, соответственно. Более того, мы показали, что гладкость этого решения не ухудшается во времени, если эту гладкость характеризовать принадлежностью $u(x, t)$ и $u_t(x, t)$ к пространствам $W_2^m(B(t))$ и $W_2^{m-1}(B(t))$. Если φ и ψ мало меняются в нормах пространств $W_2^m(B_R)$ и $W_2^{m-1}(B_R)$ соответственно, то соответствующее им решение u и его производная u_t мало меняются в нормах $W_2^m(B(t))$ и $W_2^{m-1}(B(t))$. Точнее, если u_k, $k = 1, 2$, суть решения уравнения (212), отвечающие начальным данным φ_k и ψ_k, $k = 1, 2$, то для их разности $v = u_1 - u_2$ справедливы неравенства (214) и (216), которые и характеризуют непрерывную зависимость решений задачи Коши от начальных данных в соответствующих интегральных нормах. Решение задачи Коши, найденное нами выше, единственно в классе функций, принадлежащих $W_2^m(D_1)$, если $m \geqslant 2$ Действительно, для функций этого класса справедливы рассуждения, приведенные в **[56]**, если все интегралы понимать в смысле Лебега и имеющиеся там неравенства рассматривать не для всех, а для почти всех значений t из $[0, T]$.

Обратим внимание на особую роль пространств $W_2^m(B(t))$ для гиперболических уравнений С их помощью удалось уловить весьма важное свойство решений уравнений (212): неухудшаемость их гладкости при увеличении времени. Более того, так как изменение направления оси времени (т. е. замена t на $-t$) не меняет уравнения (212), то задача Коши для них решается таким же образом и в направлении убывания t, и поэтому гладкость решений не ухудшается и при уменьшении времени. Тем самым, мы установили такой факт: решения однородного волнового уравнения при любом t сохраняют со временем ту гладкость, которой они обладали в начальный момент времени. Это верно, если гладкость решений u характеризовать принадлежностью пары $\{u(x, t);\ u_t(x, t)\}$ пространствам $W_2^m(B(t)) \times \times W_2^{m-1}(B(t)), t \in (-R_1, R_1)$. В терминах же других пространств это свойство не улавливается. Например, оно не имеет место, если гладкость решений характеризовать непрерывностью тех или иных их производных (Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики, т. II. — М.: Гостехиздат, 1951, гл VI, § 10, п. 4).

Мы показали, как используются неравенство (213) и его следствия (214) для решения и анализа задачи Коши применительно к уравнению (212). Так же подробно можно исследовать и случай неоднородного волнового уравнения. Более того, неравенство (201) и его следствия играют фундаментальную роль и при изучении задачи Коши для гиперболических уравнений общего вида (181). Мы проиллюстрируем это в следующей главе на примерах более сложных задач для уравнений (181) и покажем также, как из полученных там результатов вывести разрешимость задачи Коши для уравнений (181).

59. Теорема вложения в пространство непрерывных функций и некоторые ее следствия. Оказывается, если функция $f(x)$, $x \in D \subset R^n$, обладает квадратично суммируемыми обобщенными производными по всем x_i до порядка l и $l \geqslant \left[\frac{n}{2}\right] + 1$, то она эквивалентна функции $\hat{f}(x)$, непрерывной в $\bar{D}$, и $\max\limits_{x \in D} |\hat{f}(x)|$ оценивается через норму f в пространстве $W_2^l(D)$. Это верно при некоторых ограничениях на область D, например для D с гладкой границей. Сформулированное утверждение является частным случаем теорем вложения, установленных С. Л. Соболевым. Мы докажем несколько более слабое предложение: непрерывность $\hat{f}(x)$ лишь в открытой области D и оценку $\max\limits_{x \in D'} |\hat{f}(x)|$ для любой внутренней подобласти D' области D. Сначала убедимся в справедливости следующей теоремы:

Теорема 1. *Если функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ имеет внутри n-мерного шара D непрерывные производные до некоторого порядка l и имеют место оценки*

$$\int\limits_D \left(\frac{\partial^\alpha f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \right)^2 dx_1 \ldots dx_n \leqslant A^2 \quad (\alpha = 0, 1, \ldots, l), \quad (217)$$

то в любом концентрическом внутреннем шаре D_1, для этой функции и ее производных до порядка $l-\left[\frac{n}{2}\right]-1$, где $\left[\frac{n}{2}\right]$ — *целая часть положительного числа $\frac{n}{2}$, имеют место оценки*

$$\left|\frac{\partial^{\beta} f}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_n^{\beta_n}}\right| \leqslant cA \qquad \left(\beta = 0,\ 1,\ \dots,\ l-\left[\frac{n}{2}\right]-1\right), \tag{218}$$

где постоянная c зависит только от выбора D_1.

Построим вспомогательную функцию

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } x \leqslant \frac{1}{3}, \\ 0 \text{ при } x \geqslant \frac{2}{3}, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}} \text{ при } \frac{1}{2} < x < \frac{2}{3}, \end{cases} \tag{219}$$

где

$$u = \frac{\frac{1}{2} - x}{\left(\frac{2}{3} - x\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)},$$

Очевидно, $u \to +\infty$ при стремлении x к $\frac{1}{3}$ от бо́льших значений и $u \to -\infty$ при стремлении x к $\frac{2}{3}$ от меньших значений. При этом $\sigma(x)$ стремится соответственно к единице и нулю, и нетрудно проверить, что все производные $\sigma(x)$ непрерывны при $x = {}^1/_3$ и $x = {}^2/_3$. Пусть M_0 — некоторая точка из D_1 и h — разность радиусов D и D_1. Введем сферическую систему координат с центром M_0:

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos\theta_1; \\ x_2 &= r\sin\theta_1\cos\theta_2; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n-2} &= r\sin\theta_1 \dots \sin\theta_{n-3}\cos\theta_{n-2}; \\ x_{n-1} &= r\sin\theta_1 \dots \sin\theta_{n-2}\cos\psi; \\ x_n &= r\sin\theta_1 \dots \sin\theta_{n-2}\sin\psi, \end{aligned}$$

причем $0 \leqslant \theta_k \leqslant \pi$ и $0 \leqslant \psi < 2\pi$. Для элемента объема мы имеем

$$d\omega_n = r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1 \sin^{n-3}\theta_2 \dots \sin\theta_{n-2}\, dr\, d\theta_1 \dots d\theta_{n-2}\, d\psi.$$

Вычеркивая dr и полагая $r=1$, получаем элемент $d\sigma_n$ площади поверхности единичной сферы. Вводим функцию

$$F(M)=f(M)\cdot\frac{\partial^{l-1}}{\partial r^{l-1}}\left[\frac{r^{l-1}}{(l-1)!}\sigma\left(\frac{r}{h}\right)\right]-$$
$$-\frac{\partial f(M)}{\partial r}\cdot\frac{\partial^{l-2}}{\partial r^{l-2}}\left[\frac{r^{l-1}}{(l-1)!}\sigma\left(\frac{r}{h}\right)\right]+$$
$$+\ldots+(-1)^{l-1}\frac{\partial^{l-1}f(M)}{\partial r^{l-1}}\cdot\left[\frac{r^{l-1}}{(l-1)!}\sigma\left(\frac{r}{h}\right)\right],$$

где r — расстояние $\overline{M_0M}$. Непосредственно проверяются следующие формулы:

$$F(M_0)=f(M_0);\quad F(M)=0 \text{ при } r=h,$$

$$\frac{\partial F(M)}{\partial r}=f(M)\cdot\frac{\partial^l}{\partial r^l}\left[\frac{r^{l-1}}{(l-1)!}\sigma\left(\frac{r}{h}\right)\right]+(-1)^{l-1}\frac{\partial^l f}{\partial r^l}\cdot\left[\frac{r^{l-1}}{(l-1)!}\sigma\left(\frac{r}{h}\right)\right], \tag{220}$$

и мы можем написать

$$f(M_0)=-\int_0^h\frac{\partial F(M)}{\partial r}dr,$$

причем интегрирование производится по лучу, выходящему из M_0. Умножая обе части этой формулы на $d\sigma_n=d\omega_n:r^{n-1}dr$, интегрируя в пределах $0\leqslant\theta_s\leqslant\pi$; $0\leqslant\psi\leqslant 2\pi$, получим

$$f(M_0)=-\frac{1}{\sigma_n}\int_{D_0}\frac{\partial F(M)}{\partial r}r^{-n+1}dx_1\ldots dx_n,$$

где D_0 — шар с центром M_0 и радиусом h и σ_n — площадь поверхности единичной сферы в R_n. Полагая $k=\left[\frac{n}{2}\right]$, перепишем предыдущую формулу в виде

$$f(M_0)=-\frac{1}{\sigma_n}\int_{D_0}\frac{1}{r^k}\frac{\partial F(M)}{\partial r}r^{k-n+1}dx_1\ldots dx_n,$$

и, применяя неравенство Буняковского, получим

$$f^2(M_0)\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{\sigma_n^2}\int_{D_0}\left(\frac{1}{r^k}\frac{\partial F(M)}{\partial r}\right)^2dx_1\ldots dx_n\int_{D_0}r^{2k-2n+2}r^{n-1}dr\,d\theta_1\ldots d\theta_{n-2}\,d\psi.$$

При четном n показатель степени в последнем интеграле равен единице, а при нечетном n — нулю. Таким образом, мы получаем

$$f^2(M_0) \leqslant c_1 \int\limits_{D_0} \left(\frac{1}{r^k} \frac{\partial F(M)}{\partial r}\right)^2 dx_1 \ldots dx_n, \tag{221}$$

где постоянная c_1 зависит только от h. Обратимся к формуле (220). Коэффициент при f в правой ее части равен, при $r \leqslant \frac{h}{3}$, нулю в силу (219). С другой стороны, принимая во внимание правило дифференцирования сложной функции, можем утверждать, что $\frac{\partial^l f}{\partial r^l}$ есть линейная комбинация производных порядка l по $x_1, \ldots, x_n$ с ограниченными коэффициентами. Благодаря этому можем написать:

$$\frac{1}{r^k} \frac{\partial F(M)}{\partial r} = af + \sum a_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \frac{\partial^l f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

где a — ограниченная непрерывная функция и $|a_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}| \leqslant c_2 r^{l-k-1}$. При $l \geqslant k+1$, т. е. при $l \geqslant \left[\frac{n}{2}\right] + 1$, все коэффициенты в написанной формуле ограничены, откуда, учитывая неравенство $(x_1 + \ldots + x_n)^2 \leqslant n(x_1^2 + \ldots + x_n^2)$ и оценку (217), получаем, в силу (221),

$$f^2(M_0) \leqslant c^2 A^2,$$

где постоянная c зависит только от h. Если для целого положительного β имеет место неравенство $l - \beta \geqslant \left[\frac{n}{2}\right] + 1$, т. е. $\beta \leqslant l - \left[\frac{n}{2}\right] - 1$, то мы можем применить все предыдущие рассуждения, заменяя f на какую-либо частную производную от f порядка β и l — на $(l - \beta)$.

Таким образом, мы получили оценки (218). Теорема доказана.

Пусть теперь для функции f выполнены все условия этой теоремы, кроме предположения о непрерывности f и ее производных, так что f есть элемент пространства $W_2^l(D)$. Фиксируем какой-либо шар D_2, концентрический с D и имеющий меньший радиус. Для точек этого шара определим средние f_h [**IV**$_1$, **110**], считая h непревосходящим разности радиусов D и D_2. Для них

$$\int\limits_{D_2} f_h^2(x)\,dx \leqslant \int\limits_{D} f^2(x)\,dx. \tag{222}$$

Действительно, из определения f_h и неравенства Буняковского следует, что

$$\int_{D_2} f_h^2(x)\,dx = \int_{D_2}\left[\frac{1}{h^n}\int_{|x-y|<h}\omega\left(\frac{|x-y|}{h}\right)f(y)\,dy\right]^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_{D_2}\left[\frac{1}{h^n}\int_{|x-y|<h}\omega\left(\frac{|x-y|}{h}\right)dy\,\frac{1}{h^n}\int_{|x-y|<h}\omega\left(\frac{|x-y|}{h}\right)f^2(y)\,dy\right]dx =$$

$$= \int_{D_2}\left[\frac{1}{h^n}\int_{|x-y|<h}\omega\left(\frac{|x-y|}{h}\right)f^2(y)\,dy\right]dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_{D}\left[f^2(y)\,\frac{1}{h^n}\int_{|x-y|<h}\omega\left(\frac{|x-y|}{h}\right)dx\right]dy = \int_D f^2(y)\,dy.$$

Так как для всех производных $\dfrac{\partial^k f_h}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}} = \left(\dfrac{\partial^k f}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}\right)_h$, $k\leqslant l$, то из (217) и (222) следует, что интегралы от квадратов всех $\dfrac{\partial^k f_h}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$, $0\leqslant k\leqslant l$, по D_2 не превосходят A^2, поэтому

$$\|f_h\|_{2,D_2}^{(l)} = \left\{\int_{D_2}\left[f_h^2 + \sum_{k=1}^{l}\sum_{(k)}\left(\frac{\partial^k f_h}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}\right)^2\right]dx\right\}^{1/2} \leqslant c_1 A. \qquad (223)$$

Далее известно [**IV**$_1$, **111**], что f_h стремится при $h\to 0$ к f в норме $W_2^l(D_2)$, определенной в (223), и поэтому $\|f_{h_1}-f_{h_2}\|_{2,D_2}^{(l)}\to 0$ при h_1, $h_2\to 0$. В силу неравенства (218), примененного к функции $f_{h_1}-f_{h_2}$ и шару D_1, концентрическому с D_2 и имеющему меньший радиус, эта разность $f_{h_1}-f_{h_2}$ и все ее производные по x до порядка $l-\left[\frac{n}{2}\right]-1$ стремятся к нулю при h_1 и $h_2\to 0$, равномерно относительно $x\in D_1$. Так как, к тому же, функции f_h бесконечно дифференцируемы, то предельная для них функция $\hat{f}$ будет непрерывной в $\bar{D}_1$ вместе со своими производными до порядка $l-\left[\frac{n}{2}\right]-1$. Эта функция $\hat{f}$ совпадает с f для почти всех x. Тем самым доказана

Теорема 2. *Если из условий предыдущей теоремы отбросить предположение о непрерывности f, а производные f считать обобщенными, то существует функция $\hat{f}$, эквивалентная f и непрерывная вместе со своими производными до порядка $l-\left[\frac{n}{2}\right]-1$ в открытом шаре D. Для $\hat{f}$ верны оценки* (218).

Эта теорема и результаты, изложенные в [58], позволяют сделать следующие выводы о существовании классических решений задачи Коши для уравнения (212):

Если $\varphi(x) = u|_{t=0}$ *принадлежит* $W^m_{2,\,\mathrm{loc}}(R^n)$, *а* $\psi(x) = u_t|_{t=0}$ *принадлежит* $W^{m-1}_{2,\,\mathrm{loc}}(R^n)$ *и* $m \geqslant l + \left[\frac{n+1}{2}\right] + 1$, $l \geqslant 2$, *то соответствующее им решение* $u(x, t)$ *задачи Коши для уравнения* (212) *непрерывно и имеет непрерывные производные до порядка* l.

Здесь принадлежность φ к $W^m_{2,\,\mathrm{loc}}(R^n)$ означает, что $\varphi \in W^m_2(B)$ для любого шара $B \subset R^n$. Из рассуждений [58] следует существование решения $u(x, t)$ задачи Коши, принадлежащего $W^m_{2,\,\mathrm{loc}}(R^{n+1})$, а это совместно со второй теоремой данного пункта гарантирует непрерывность $u(x, t)$ и ее производных до порядка $l = m - \left[\frac{n+1}{2}\right] - 1$.

Для неоднородного уравнения $\Box u = f(x, t)$ решение задачи Коши при тех же начальных данных будет классическим, если

$$f \in W^{m-1}_{2,\,\mathrm{loc}}(R^{n+1}_+), \text{ где } R^{n+1}_+ = \{(x, t)\colon\ x \in R^n,\ t > 0\}.$$

60. Обобщенные решения уравнений второго порядка. В [44] мы исследовали вопрос, за какими функциями $u(x, t)$, заданными в области D, имеющими разрывы производных первого порядка на гладкой поверхности σ и удовлетворяющими вне σ уравнению $\Box u = 0$ или $\Box u = f$, разумно сохранить название решений (лучше — обобщенных решений) этих уравнений в области D. С точки зрения физических задач, приводящих к этим уравнениям, на такие функции надо наложить требование $[P(u)]_\sigma = 0$, означающее, что на поверхности разрыва не сосредоточены никакие внешние силы. С математической же точки зрения желательно, чтобы для них сохранилась формула Грина (79), центральная роль которой была понята в длительном процессе изучения дифференциальных уравнений. В [44] мы показали, что эти требования эквивалентны, если u имеет «регулярные» разрывы, т. е. удовлетворяет кинематическим условиям совместности, и поверхности разрывов гладкие. Для u, удовлетворяющих всем этим условиям и уравнению $\Box u = f$ вне σ, справедливо тождество

$$\int_D u \Box \eta \, dx\, dt = \int_D f\eta \, dx\, dt \tag{224}$$

при любой $\eta \in C_0^\infty(D)$. С другой стороны, в [IV$_1$; 113; 114] были определены понятия обобщенных производных и обобщенных дифференциальных операторов для функций из $L_2(D)$. Согласно с этими определениями тождество (224) означает, что для u определен обобщенный оператор $\Box$ и $\Box u = f$.

Назовем функцию $u(x, t)$ *обобщенным решением класса* L_2 *уравнения* $\Box u = f$ *в области* D, если она квадратично суммируема по любой ограниченной строго внутренней подобласти D' области D и для нее выполняется тождество (224) при любой $\eta \in C_0^\infty(D)$. Будем под D' понимать только такие подобласти D.

Аналогично *обобщенным решением класса* L_2 *в области* D уравнения

$$L(u) \equiv \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} u_{x_i x_k} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu = f \tag{225}$$

назовем любую функцию $u(x)$, квадратично суммируемую по всем подобластям D' и удовлетворяющую тождеству

$$\int_D uL^*(\eta)\,dx = \int_D f\eta\,dx \tag{226}$$

при любой $\eta \in C_0^\infty(D)$. Здесь L^* есть оператор, сопряженный по Лагранжу к L, т. е.

$$L^*(\eta) = \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 (a_{ik}\eta)}{\partial x_i\,\partial x_k} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (b_i \eta)}{\partial x_i} + c\eta.$$

Для корректности этого определения надо считать, что коэффициенты a_{ik} дважды дифференцируемы, а коэффициенты b_i имеют производные первого порядка. Предположим, что производные $D^l a_{ik}$, $l = 1, 2$, и Db_i непрерывны в D. Решения уравнений (225), принадлежащие $C^2(D)$ (в основном только такие решения мы рассматривали до сих пор), будем называть *классическими*. Классические решения уравнения (225) удовлетворяют тождеству (226), ибо для любых $u \in C^2(D)$ и $\eta \in C_0^\infty(D)$ справедлива формула Грина

$$\int_D uL^*(\eta)\,dx = \int_D \eta L(u)\,dx. \tag{227}$$

Верно и обратное: если $u \in C^2(D)$ и удовлетворяет тождеству (226), то она есть классическое решение уравнения (225). Действительно, из (226) и (227) следует, что

$$\int_D [L(u) - f]\,\eta\,dx = 0$$

при любых $\eta \in C_0^\infty(D)$, а отсюда в силу теоремы 2 из **[IV₁; 113]**, примененной к любой D', следует, что $L(u) = f$.

Имеет место следующая

Т е о р е м а 3. *Если коэффициенты L постоянны в D, то любое обобщенное решение класса L_2 однородного уравнения* (225) *можно аппроксимировать в нормах $L_2(D')$ классическими решениями того же уравнения.*

Действительно, пусть u есть обобщенное решение класса L_2 однородного уравнения (225) в D, т. е. $u \in L_2(D')$ для любой D' и

$$\int_D u L^*(\eta)\, dx = 0 \tag{228}$$

при любой $\eta \in C_0^\infty(D)$. Возьмем в качестве η усреднения v_h, описанные в [$\mathbf{IV}_1$; **112**], для функции $v \in C_0^\infty(D)$. При достаточно малом h эти усреднения принадлежат $C_0^\infty(D)$. В силу того, что ядро усреднения зависит лишь от разности, для любой производной D^l от v верно равенство $D^l v_h = (D^l v)_h$, и потому $L(v_h) = (L(v))_h$ Кроме того, нетрудно проверить, используя теорему Фубини, что

$$\int_D u w_h\, dx = \int_D u_h w\, dx \tag{229}$$

для любых u из $L_2(D)$ и w из $C_0^\infty(D)$, если h достаточно мало (величина h должна быть меньше расстояния носителя w до границы D). Ввиду всего сказанного справедливы равенства

$$0 = \int_D u L^*(v_h)\, dx = \int_D u\, (L^*(v))_h\, dx = \int_D u_h L^*(v)\, dx = \int_D L(u_h)\, v\, dx. \tag{230}$$

Зафиксируем какую-либо внутреннюю подобласть D' области D. Соотношения (230) справедливы при любой v из $C_0^\infty(D')$ и h, меньших расстояния D' до границы D. Это в силу теоремы 2 из [$\mathbf{IV}_1$; **112**] гарантирует, что $L(u_h) = 0$ в D', т е. u_h является классическим решением однородного уравнения (225). При $h \to 0$ они сходятся к обобщенному решению u в норме $L_2(D')$, так что высказанное выше утверждение доказано.

Легко видеть, что верно и обратное утверждение· *если функция u может быть аппроксимирована в нормах $L_2(D')$, $D' \subset D$, классическими решениями u_m однородного уравнения* (225), *то она является обобщенным решением этого уравнения в области D.*

Благодаря этим двум утверждениям можно было бы дать другое определение обобщенных решений уравнения $L(u) = 0$ в D, как пределов в нормах $L_2(D')$ его классических решений, причем это определение было бы эквивалентно данному выше. Однако мы не будем работать с ним, ибо оно применимо лишь к операторам L с постоянными (или, общее, с достаточно гладкими) коэффициентами. Отметим лишь, что в работах С. Л. Соболева 30-х годов развивался именно такой подход при исследовании разрывных решений волнового уравнения и нахождении решений задачи Коши для него. Далее он и ряд других авторов исследовали разрешимость задачи Коши для гиперболических уравнений с переменными коэффициентами, исходя из классических решений задачи Коши для специально построенных уравнений, аппроксимирующих данное. Обобщенные же решения уравнения (или задачи Коши для него) определялись, как пределы (в тех или иных нормах) классических решений приближенных уравнений (или задач Коши для них), аппроксимирующих данное. Для тех же уравнений или предельных задач для них, для которых имелись какие-либо хорошие интегральные представления решений, обобщенные решения определялись с помощью этих представлений (см. работы Н. М. Гюнтера, Ж. Лерэ и др.). Доминирующая роль тождества (226) была осознана не сразу, хотя оно фигурировало еще в работах 20-х годов (например, в работе: Винер Н. The Operational Calculus. — Math. Ann., 1926, **95**, p. 557—584).

Позже (в конце 40-х — начале 50-х годов) были даны определения обобщенных решений задачи Коши и предельных задач для уравнений разных типов, не использующие ни представления этих решений, ни аппроксимационные процессы Эти определения, опирающиеся на интегральные тождества, оказались плодотворными при решении предельных задач. Именно такая идеология была систематически развита в работах О. А. Ладыженской, в частности в ее монографии «Смешанная задача для гиперболического уравнения» (М.: Физматгиз, 1953). В них была понята целесообразность введения не одного какого-либо класса обобщенных решений задачи, а целой шкалы обобщенных решений, если коэффициенты уравнения достаточно гладкие функции. Напротив, если коэффициенты уравнения негладкие функции, то нередко с ним можно связать лишь какой-то определенный класс обобщенных решений. Так, например, если коэффициенты a_{ik} или b_i уравнения (225) не имеют производных, входящих в выражение L^*, то данное выше определение его обобщенных решений, использующее тождество (226), неправомерно. В следующей главе мы дадим определения обобщенных решений различных предельных задач, принадлежащих тем или иным функциональным пространствам, и покажем, как с их помощью исследовать разрешимость этих задач.

Здесь же рассмотрим задачу Коши

$$L(u) \equiv \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} u_{x_i x_k} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu - u_{tt} = f, \tag{231}$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t\big|_{t=0} = \psi(x), \tag{232}$$

считая, что коэффициенты L достаточно гладкие функции и уравнение гиперболично. Умножим уравнение (231) на произвольную функцию $\eta(x, t) \in C_0^\infty(R^{n+1})$ (напомним, что такие функции имеют компактный носитель) и полученное равенство проинтегрируем по области $R_+^{n+1} = \{(x, t) : x \in R^n, t > 0\}$. После этого выполним в левой части интегрирование по частям, так, чтобы на u не осталось никаких производных. При этом выделятся граничные интегралы по плоскости $R_0^n = \{(x, t) : x \in R^n, t = 0\}$, содержащие функции $u|_{t=0}$ и $u_t|_{t=0}$, которые мы заменим на φ и ψ согласно требованиям (232). В результате этих операций мы придем к тождеству

$$\int\limits_{R_+^{n+1}} uL^*(\eta)\,dx\,dt + \int\limits_{R_0^n} (\psi\eta - \varphi\eta_t)\,dx = \int\limits_{R_+^{n+1}} f\eta\,dx\,dt. \quad (233)$$

В нем

$$L^*(\eta) = \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2(a_{ik}\eta)}{\partial x_i\,\partial x_k} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(b_i\eta)}{\partial x_i} + c\eta - \eta_{tt},$$

и все интегралы фактически берутся лишь по ограниченной области, где $\eta(x, t)$ отлична от нуля.

Назовем *обобщенным решением класса* L_2 *задачи Коши* (231), (232) функцию u, принадлежащую $L_{2,\,\mathrm{loc}}(R_+^{n+1})$ (т. е. квадратично суммируемую по любой ограниченной подобласти области R_+^{n+1}) и удовлетворяющую интегральному тождеству (233) при любой $\eta \in C_0^\infty(R^{n+1})$.

Ясно, что если коэффициенты L имеют непрерывные производные, входящие в L^*, $f \in L_{1,\,\mathrm{loc}}(R_+^{n+1})$, а φ и ψ принадлежат $L_{1,\,\mathrm{loc}}(R^n)$, то это определение не абсурдно, т. е. все интегралы, входящие в равенство (233), сходятся. Классические решения задачи (231), (232) удовлетворяют тождеству (233). Далее, если функция u удовлетворяет этому тождеству при любой $\eta \in C_0^\infty(R^{n+1})$ и дважды непрерывно дифференцируема при $t \geqslant 0$, то она будет решением задачи (231), (232). Чтобы убедиться в этом, надо выполнить интегрирование по частям, перенося обратно производные с η на u. Это приведет к тождеству

$$\int\limits_{R_+^{n+1}} [L(u) - f]\,\eta\,dx\,dt + \int\limits_{R_0^n} [(\psi - u_t)\,\eta - (\varphi - u)\,\eta_t]\,dx = 0. \quad (234)$$

Для $\eta \in C_0^\infty(R_+^{n+1})$ интегралы по R_0^n равны нулю, и из полученного тождества, согласно теореме 2 из [IV₁; 113] мы заключим, что $Lu = f$ в R_+^{n+1}. Но тогда (234) эквивалентно тождеству

$$\int\limits_{R_0^n} [(\psi - u_t)\,\eta - (\varphi - u)\,\eta_t]\,dx = 0. \tag{235}$$

Возьмем теперь лишь те η из $C_0^\infty(R^{n+1})$, которые равны нулю при $t = 0$. Тогда из (235) выпадет интеграл, в который входит η, а из полученного тождества будет следовать (в силу той же теоремы 2 из **[IV$_1$; 113]**) равенство $\varphi = u|_{t=0}$, ибо в качестве $\eta_t|_{t=0}$ можно взять любую функцию из $C_0^\infty(R^n)$. Таким образом, (235) редуцируется к тождеству

$$\int\limits_{R_0^n} (\psi - u_t)\,\eta\,dx = 0,$$

из которого аналогично заключим, что $\psi = u_t|_{t=0}$. Итак, мы убедились, что тождество (233) содержит в себе всю информацию о задаче (231), (232). Из доказательства этого факта видно, насколько существенным было то, что это тождество должно выполняться при любых η из $C_0^\infty(R^{n+1})$. Если бы мы взяли более узкий класс функций η, например только $\eta \in C_0^\infty(R_+^{n+1})$, то мы не смогли бы доказать, что функция u удовлетворяет начальным условиям (232). Из всего сказанного ясно, что данное выше определение обобщенного решения задачи (231), (232) действительно является расширением понятия ее классического решения. Такое расширение необходимо, если функции f, φ или ψ не обладают достаточной гладкостью. Например, если f разрывна, или если φ или ψ недифференцируемы, то задача (231), (232) заведомо не имеет классических (дважды непрерывно дифференцируемых в $\overline{R}_+^{n+1}$) решений.

Однако введенное нами расширение понятия решения задачи (231), (232) нуждается еще в одном оправдании. А именно, в **[57]** мы доказали, что в классе классических решений задача (231), (232) имеет детерминированный характер: она не может иметь двух различных решений. Это одно из важнейших свойств динамических задач желательно сохранить, и потому необходимо выяснить, сохраняется ли в определенном выше классе обобщенных решений теорема единственности. Приведенное в **[56]** доказательство не годится, ибо для его правомерности исследуемые решения должны обладать хотя бы обобщенными производными второго порядка. Другой способ доказательства теоремы единственности был предложен в начале века Гольмгреном. Но он требует умения находить классические решения сопряженной задачи при достаточно гладких и финитных свободных членах и начальных функций. Эта задача является, по сути дела, такой же, что и исходная задача (231), (232). Для уравнений с переменными коэффициентами она была исследована Ж. Адамаром, а затем И. Шаудером и другими, весьма тяжелыми средствами и при очень большой гладкости коэффициентов L. Было желательно найти другие способы доказательства теоремы единственности для обобщенных решений, которые не опирались бы на умение находить классические решения сопряженной задачи. Это было сделано в работах О. А. Ладыженской в начале 50-х годов (см. упомянутую на с. 183 монографию, статью: Ладыженская О. А. О разрешимости основных краевых задач для уравнений параболического и эллиптического типов. — ДАН СССР, 1954, 97, № 3, с. 395—398, и др.). Что касается нахождения обобщенных решений задачи (231), (232), то для этого можно воспользоваться методом Галеркина, методом конечных разностей, функциональным методом О. А. Ладыженской и другими.

61. О существовании и единственности обобщенных решений задачи Коши для волнового уравнения. Для волнового уравнения

$$\square u \equiv \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} - u_{tt} = f \tag{236}$$

обобщенные решения задачи Коши при «плохих» f, φ и ψ можно получить, используя формулу Пуассона — Кирхгофа. Если, например, $f \in L_{2,\,\mathrm{loc}}(R^{n+1})$, $\varphi \in W^1_{2,\,\mathrm{loc}}(R^n)$, а $\psi \in L_{2,\,\mathrm{loc}}(R^n)$, то возьмем их усреднения f_h, φ_h и ψ_h и соответствующие им классические решения u_h задачи Коши для оператора $\square$. При $h \to 0$ f_h сходятся к f в нормах $L_2(D)$, φ_h к φ в нормах $W^1_2(\tilde{D})$, а ψ_h к ψ в нормах $L_2(\tilde{D})$, где D и $\tilde{D}$ — любые ограниченные области из R^{n+1} и R^n. Неравенство (202) для $L = \square$ позволяет утверждать существование функции $u(x, t)$, являющейся пределом $u_h(x, t)$ в нормах $W^1_2(D)$. Эта предельная функция будет обобщенным решением задачи (236), (232). Действительно, каждая из u_h удовлетворяет тождеству (233) с $f = f_h$, $\varphi = \varphi_h$, $\psi = \psi_h$, и в этом тождестве можно перейти к пределу при $h \to 0$ (при фиксированной η из $C_0^\infty(R^{n+1})$). В результате убедимся, что и u удовлетворяет этому тождеству. Найденное нами решение обладает даже бо́льшей гладкостью, чем требовалось в определении обобщенного решения из класса L_2. Для построения решений, отвечающих менее гладким f, φ и ψ, надо установить неравенства, оценивающие подходящую норму решения через нормы пространств, к которым принадлежат f, φ и ψ. Мы не будем здесь этого делать, а вместо этого докажем *теорему единственности задачи* (236), (232) *в классе обобщенных решений из* L_2, следуя методу Гольмгрена.

Пусть u' и u'' — два таких решения. Тогда их разность v принадлежит $L_{2,\,\mathrm{loc}}(R_+^{n+1})$ и удовлетворяет тождеству

$$\int\limits_{R_+^{n+1}} v \,\square\, \eta \, dx\, dt = 0 \tag{237}$$

при любых $\eta \in C_0^\infty(R^{n+1})$. Рассмотрим полосу $\Pi = \{(x, t)\colon x \in \in R^n,\ t \in (0, T)\}$ и задачу

$$\square\, w = \tilde{f}(x,\ t), \quad w|_{t=T} = 0, \quad w_t|_{t=T} = 0, \tag{238}$$

считая $\tilde{f} \in C_0^\infty(\Pi)$ *). Ее решение дается формулой Кирхгофа. Оно есть бесконечно дифференцируемая функция, равная нулю при $t \geqslant T$ и в точках (x, t) с $t \in [-T, T]$ и достаточно больших $|x|$. Умножая его на бесконечно дифференцируемую функцию $\chi(t)$, равную 1 при $t \geqslant 0$ и нулю при $t \leqslant -T$, мы получим функцию $\tilde{w}(x, t) = w(x, t)\chi(t)$ из $C_0^\infty(R^{n+1})$, совпадающую с $w(x, t)$ при $t \geqslant 0$. Поэтому мы можем взять в качестве η в (237) функцию $\tilde{w}$. Учитывая равенство $\square w = \tilde{f}$, получим

$$\int\limits_{R_+^{n+1}} v\tilde{f}\, dx\, dt = 0.$$

Так как это равенство справедливо при любой функции $\tilde{f}$ из $C_0^\infty(\Pi)$, то $v \equiv 0$ в Π. Ввиду произвольности выбора величины T, функция $v \equiv 0$ в R_+^{n+1}. Теорема доказана.

62. Уравнения эллиптического типа. До сих пор при исследовании задачи Коши мы рассматривали уравнения гиперболического типа. Остановимся теперь на простейшем уравнении эллиптического типа, а именно на уравнении Лапласа с двумя независимыми переменными:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0. \tag{239}$$

Мы знаем, что любое решение этого уравнения есть вещественная часть некоторой аналитической функции: $f(z) = u(x, y) + v(x, y)\,i$ [III₂; 22]. Рассмотрим решение уравнения (239) в окрестности некоторой точки, которую мы можем принять за начало координат. Считая, что u имеет в этой точке и ее окрестности непрерывные производные до второго порядка, будем иметь для $f(z)$ разложение в степенной ряд:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

*) Эта задача и называется сопряженной к исходной задаче.

сходящийся в некотором круге $|z|<R$, причем $c_n = a_n + b_n i$ суть некоторые комплексные числа. Отделяя в членах ряда

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n i)(x + yi)^n$$

вещественную часть, мы получим для $u(x, y)$ представление в виде ряда по однородным полиномам от (x, y):

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ a_n \left[x^n - \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} y^2 + \ldots \right] + \right.$$
$$\left. + b_n \left[-n x^{n-1} y + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^{n-3} y^3 - \ldots \right] \right\} \qquad (240)$$

и этот ряд абсолютно сходится при условии $\sqrt{x^2+y^2}<R$. Запишем последний ряд в виде двойного ряда по целым положительным степеням x и y:

$$\sum_{p,\ q=0}^{\infty} d_{pq} x^p y^q, \qquad (241)$$

и покажем, что он также будет сходящимся, если вещественные значения x и y достаточно близки к нулю. Действительно, абсолютные значения членов ряда (241) не превосходят членов двойного ряда, который получается из ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| (|x| + |y|)^n.$$

Но ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n \quad (r > 0)$$

сходится при $r<R$, и отсюда непосредственно следует, что ряд (241) абсолютно сходится при условии $|x|+|y|<R$. В этом ряде мы можем группировать члены, и получим, таким образом, ряд (240), т. е. сумма ряда (241) равна $u(x, y)$. Таким образом, всякое решение уравнения (239) представимо степенным рядом в окрестности любой точки (x, y), если в этой точке рассматриваемое решение не имеет особенности, т. е., проще говоря, *всякое решение уравнения* (239) *есть аналитическая функция* (x, y). Отсюда непосредственно следует, что гармоническая функция имеет производные всех порядков и что если две гармонические функции совпадают на некотором двумерном участке плоскости (x, y), то они совпадают везде.

Заметим, что совершенно иную картину мы имеем для уравнения гиперболического типа:

$$u_{yy} - a^2 u_{xx} = 0, \qquad (242)$$

где a — заданное вещественное число. Это уравнение имеет очевидное решение [II; 177]:

$$u = \varphi(x + ay), \tag{243}$$

где φ — произвольная функция, имеющая непрерывные производные до второго порядка. В теории функций вещественного переменного доказывается, что можно построить $\varphi(t)$, имеющую непрерывные первую и вторую производные и не имеющую ни при каком значении t производной третьего порядка. Для такого $\varphi(t)$ решение (242) не будет иметь ни при каких (x, y) производных третьего порядка, и, тем самым, конечно, не может быть аналитической функцией (x, y).

Для уравнения (239) может быть поставлена *задача Коши*. Например, можно искать решение уравнения (239), если задана u и ее производная u_x при $x = 0$:

$$u\big|_{x=0} = f_0(y); \quad u_x\big|_{x=0} = f_1(y), \tag{244}$$

где $f_0(y)$ и $f_1(y)$ — заданные аналитические функции y [29]. Эта задача будет иметь в окрестности $x = 0$ одно определенное решение. Однако задача эта, как говорят, *некорректна*: ее решения могут сильно меняться при малых изменениях данных Коши. Действительно, возьмем

$$f_0(y) = 0 \quad \text{и} \quad f_1(y) = \frac{1}{n}\sin(ny), \tag{245}$$

где n — заданное положительное число. Нетрудно проверить, что решение уравнения (239), удовлетворяющее этим начальным данным, будет:

$$u = \frac{e^{nx} - e^{-nx}}{2n^2}\sin(ny). \tag{246}$$

Пусть $n \to \infty$. При этом начальное данное $f_1(y)$ стремится к нулю равномерно относительно y, ибо $|\sin(ny)| \leqslant 1$, а решение (246) стремится к бесконечности, если $x \neq 0$ и ny отлично от кратного π. Действительно, если, например, $x > 0$, то $e^{-nx} \to 0$, а отношение $e^{nx}/n^2 \to \infty$ при $n \to \infty$, так как показательная функция e^{nx} растет быстрее, чем n^2. Таким образом, при стремлении начальных данных к нулю само решение будет беспредельно возрастать. Иначе говоря, из приведенного примера мы видим, что решение задачи Коши для уравнения (239) не обладает свойством непрерывной зависимости от начальных данных. Для уравнения гиперболического типа такая непрерывная зависимость, в том или ином смысле, всегда будет иметь место (см. [57], [58]).

Мы доказали аналитичность решений уравнения Лапласа для случая двух независимых переменных. То же самое будет иметь место и в случае трех независимых переменных

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0.$$

Наметим доказательство этого утверждения. Пусть имеется решение этого уравнения с непрерывными производными до второго порядка в начале координат и его окрестности. Функция u будет, таким образом, гармонической функцией в некоторой замкнутой сфере с центром в начале и радиусом R. Мы можем выразить значение этой функции в любой точке (x, y, z), находящейся внутри сферы, через ее значение в точках (ξ, η, ζ) на поверхности сферы S по формуле [II; 207]:

$$u(x, y, z) = \frac{1}{4\pi R} \iint_S u(\xi, \eta, \zeta) \frac{R^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2]^{3/2}} dS. \quad (247)$$

При всех x, y, z, достаточно близких к нулю, мы можем разложить функцию

$$[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2]^{-3/2} =$$

$$= R^{-3}\left[1 + \frac{(x^2 + y^2 + z^2) - (2\xi x + 2\eta y + 2\zeta z)}{R^2}\right]^{-\frac{3}{2}}$$

в степенной ряд по целым положительным степеням (x, y, z), пользуясь формулой бинома Ньютона. При этом и вся подынтегральная функция интеграла (247) представится таким рядом с коэффициентами, зависящими от (ξ, η, ζ). Интегрируя этот ряд почленно по S, получим степенной ряд для $u(x, y, z)$.

Аналогичным образом можно показать, что и решения уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0$$

являются аналитическими функциями переменных (x, y), о чем мы будем говорить в следующей главе.

Доказательство аналитичности решений для широкого класса уравнений эллиптического типа дано в работах С. Н. Бернштейна

До сих пор речь шла о классических, т. е. дважды непрерывно дифференцируемых, решениях эллиптических уравнений. Посмотрим, какими свойствами обладают обобщенные (разрывные) решения этих уравнений. Рассмотрим уравнение (239) и соответствующий ему оператор Лапласа Δ Для него можно провести рассуждения, аналогичные тем, которые сделаны в [43] и [44] для оператора $\Box \equiv \Delta - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$, и придти к следующему выводу: уравнение (239) не имеет решений, обладающих слабыми разрывами, а также решений с сильными разрывами, удовлетворяющими кинематическим и динамическим условиям совместности. Это и понятно, ибо для тех и других решений было установлено, что поверхностями как слабого, так и сильного разрывов могут быть лишь характеристические поверхности уравнения, а таковых эллиптические уравнения не имеют.

Мы докажем более общий факт:

Теорема. *Любое обобщенное решение класса L_2 уравнения Лапласа является классическим.*

Это утверждение справедливо при любом числе независимых переменных. Лишь ради большей наглядности возьмем уравнение (239). Пусть $u(x, y)$ есть обобщенное решение уравнения (239) в круге $D_{\rho_0}=\{(x, y): \sqrt{x^2+y^2}<\rho_0\}$, т. е $u\in L_2(D_\rho)$ при любом $\rho<\rho_0$ и

$$\iint\limits_{D_{\rho_0}} u\,\Box\,\eta\,dx\,dy=0 \tag{248}$$

при любой $\eta\in C_0^\infty(D_{\rho_0})$. Согласно теореме, доказанной в [60], усреднения u_h функции u являются гармоническими (а потому и аналитическими) функциями, аппроксимирующими u при $h\to 0$ в нормах $L_2(D_\rho)$, $\rho<\rho_0$. Напомним, что u_h определена в D_ρ с $\rho\leqslant\rho_0-h$. Воспользуемся следующим свойством гармонических функций:

$$u_h(x, y)=\frac{1}{\pi\varepsilon^2}\iint\limits_{B_\varepsilon(x, y)} u_h(x', y')\,dx'\,dy', \tag{249}$$

где $B_\varepsilon(x, y)$ есть круг с центром в точке (x, y) радиуса ε, лежащий в D_{ρ_0-h}. Покажем, что семейство функций $\{u_h\}$, $0<h\leqslant\leqslant h_1$, равномерно ограничено и равностепенно непрерывно в D_{ρ_1}, если $\rho_1<\rho_0-2h_1$. Воспользуемся для этого неравенством Буняковского и тем, что при $h\leqslant h_1$

$$\iint\limits_{D_{\rho_1+h_1}} u_h^2(x', y')\,dx'\,dy'\leqslant\iint\limits_{D_{\rho_1+2h_1}} u^2(x', y')\,dx'\,dy'\equiv c^2_{\rho_1+2h_1}$$

(см. (222)). Благодаря этим фактам

$$|u_h(x, y)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{\pi}\,h_1}\left(\iint\limits_{B_{h_1}(x, y)} u_h^2(x', y')\,dx'\,dy'\right)^{1/2}\leqslant\frac{c_{\rho_1+2h_1}}{\sqrt{\pi}\,h_1} \tag{250}$$

при любой $(x, y)\in D_{\rho_1}$ и $h\leqslant h_1$. Далее, для любых (x, y) и $(\tilde{x},\tilde{y})$, принадлежащих D_{ρ_1} и $h\leqslant h_1$,

$$|u_h(x, y)-u_h(\tilde{x}, \tilde{y})|\leqslant\frac{1}{\pi h_1^2}\iint\limits_{\widetilde{D}}|u_h(x', y')|\,dx'\,dy'\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi h_1^2}\left(\iint\limits_{\widetilde{D}}|u_h(x', y')|^2\,dx'\,dy'\right)^{1/2}|\widetilde{D}|^{1/2}\leqslant\frac{2d^{1/2}}{\pi h_1^{3/2}}\,c_{\rho_1+2h_1}, \tag{251}$$

где $\widetilde{D} = (B_{h_1}(x, y) \cup B_{h_1}(\tilde{x}, \tilde{y})) \setminus (B_{h_1}(x, y) \cap B_{h_1}(\tilde{x}, \tilde{y}))$ — симметрическая разность кругов $B_{h_1}(x, y)$ и $B_{h_1}(\tilde{x}, \tilde{y})$, $|\widetilde{D}|$ — ее площадь, а $d = \sqrt{(x-\tilde{x})^2 + (y-\tilde{y})^2}$. Неравенства (250) и (251) дают равномерную ограниченность и равностепенную непрерывность функций $\{u_h(x, y)\}$ в круге $\overline{D}_{\rho_1}$. Поэтому предельная для них функция, а ею является $u(x, y)$, будет непрерывной в D_{ρ_1}. Чтобы доказать ее гармоничность, воспользуемся формулой Пуассона (формула (25) из **[II; 205]**) для функций u_h, $h \leqslant h_1$, и произвольного фиксированного круга $B_\varepsilon(x, y)$, лежащего в D_{ρ_1}. В этой формуле можно перейти к пределу по $h \to 0$ и убедиться, тем самым, что она справедлива для функции u. Но, как доказано в **[II; 206]**, отсюда следует, что u гармонична внутри $B_\varepsilon(x, y)$. Тем самым теорема доказана.

Итак, мы убедились, что для уравнения $\Delta u = 0$ все его обобщенные решения класса L_2 являются классическими, т. е. обычными гармоническими функциями. Напротив, для неоднородного уравнения

$$\Delta u = f \tag{252}$$

переход к обобщенным решениям существенно расширяет множество его решений. Известно, что для гладких f одно из решений (252) дается ньютоновским потенциалом. В случае трех пространственных переменных он имеет вид

$$u(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_D \frac{f(x', y', z')}{r}\, dx'\, dy'\, dz', \tag{253}$$

где $r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$. Если f непрерывно дифференцируема в замыкании $\overline{D}$ ограниченной области D, то функция (253) имеет непрерывные производные в D до второго порядка и удовлетворяет в D уравнению (252). Напротив, существуют такие непрерывные функции f, для которых (253) не имеет непрерывных производных второго порядка и поэтому не является классическим решением уравнения (252). Покажем, что при любой функции f, непрерывной в $\overline{D}$, функция u является обобщенным решением класса L_2 уравнения (252). Для этого надо доказать, что $u \in L_2(D')$, $\overline{D}' \subset D$, и при любой $\eta \in C_0^\infty(D)$

$$\iiint_D u\, \Delta\eta\, dx\, dy\, dz = \iiint_D f\eta\, dx\, dy\, dz. \tag{254}$$

При наших предположениях относительно f функция u непрерывна и непрерывно дифференцируема в $\overline{D}$, так что она зазедомо принадлежит $L_2(D)$. Для проверки же равенств (254) рассмотрим функции

$$u_{(h)}(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_D \frac{f_h(x', y', z')}{r} \, dx' \, dy' \, dz', \tag{255}$$

где f_h есть усреднения функции f [IV$_1$, 110], продолженной нулем вне D. Для $u_{(h)}$ и f_h справедливо тождество (254):

$$\iiint_D u_{(h)} \Delta \eta \, dx \, dy \, dz = \iiint_D f_h \eta \, dx \, dy \, dz. \tag{256}$$

При $h \to 0$ функции f_h сходятся к f в норме $L_2(D)$ и равномерно в любой внутренней подобласти D' области D. Отсюда нетрудно убедиться, что $u_{(h)}$ сходятся к u равномерно в любой D'. Ввиду этого в (256) можно перейти к пределу по $h \to 0$ (при фиксированной η из $C_0^\infty(D)$) и убедиться в справедливости (254) для u. Соотношение (254) верно и при любой $f \in L_2(D)$. Более того, при $f \in L_2(D)$ решения $u(x)$ уравнения (252) имеют обобщенные производные по x первого и второго порядков и удовлетворяют уравнению почти всюду. Мы это докажем ниже в [148] сразу для эллиптических уравнений общего вида. Здесь же отметим, что утверждение теоремы, доказанной в данном пункте, справедливо и для уравнения теплопроводности, а именно: обобщенные решения класса L_2 однородного уравнения теплопроводности являются классическими. Доказательство этого утверждения можно найти в книге: Соболев С. Л. Уравнения математической физики. — М.: Гостехиздат, 1950, с. 314. Его нетрудно провести и самостоятельно.

§ 3. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

63. Характеристики систем уравнений. Мы переходим теперь к исследованию систем уравнений с частными производными. Для аналитического случая вопрос о существовании и единственности решения задачи Коши был изложен нами выше [28]. В неаналитическом случае этот вопрос представляет гораздо бóльшие трудности по сравнению с одним уравнением. Весьма общие результаты в этом направлении были получены И. Г. Петровским в его работах «О проблеме Коши для систем уравнений с частными производными» (Матем. сб., 1937, 2, № 5) и «О проблеме Коши для системы линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций» (Бюлл. МГУ, 1938). Некоторые из относящихся сюда результатов изложены в книге: Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными. — М.: Физматгиз, 1961. Там же указана литература вопроса и обзор результатов.

Мы ограничимся немногим в отношении систем уравнений и начнем с изложения теории характеристик и связанного с этой теорией вопроса о прерывных решениях. При изложении теории слабых разрывов и примеров мы следуем книге Леви-Чивита «Теория характеристик и распространение волн».

Рассмотрим систему

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{ij}^{(k)} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \Phi_i(x_k, u_s) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{1}$$

Поскольку эта система есть система первого порядка, данные Коши сводятся к заданию начальных значений функций $u_s(x_1, \ldots, x_n)$ на данной поверхности пространства $(x_1, \ldots, x_n)$. Положим, что поверхность, несущая на себе эти данные, есть плоскость $x_1 = 0$, т. е. что мы имеем специальные данные Коши:

$$u_j|_{x_1=0} = \varphi_j(x_2, \ldots, x_n) \quad (j = 1, \ldots, m). \tag{2}$$

Эти начальные данные дают возможность вычислить на плоскости $x_1 = 0$ все производные первого порядка, кроме производных $\frac{\partial u_j}{\partial x_1}$. Если система (1) при подстановке $x_1 = 0$ и других начальных данных (2) разрешима относительно $\frac{\partial u_j}{\partial x_1}$, то мы имеем на $x_1 = 0$ значения всех производных первого порядка. В противном случае мы будем называть плоскость $x_1 = 0$ *характеристической*. Вообще, некоторая поверхность

$$\omega_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \tag{3}$$

вместе с определенными на ней начальными данными называется *характеристической*, если эти начальные данные совместно с системой (1) не дают возможности однозначного определения на ней всех производных первого порядка. В том случае, когда коэффициенты $a_{ij}^{(k)}$ содержат только x_s, нам неважно знать начальные данные функций u_j на поверхности (3). Для того, чтобы получить те условия, которым должна удовлетворять характеристическая поверхность (3), введем, как и в [40], вместо x_k новые независимые переменные x'_k по формулам

$$x'_k = \omega_k(x_1, \ldots, x_n) \quad (k = 1, \ldots, n), \tag{4}$$

где $(n-1)$ функций $\omega_2, \ldots, \omega_n$ выбраны так, чтобы написанные формулы были разрешимы относительно x_k. Выражая производные по старым переменным через производные по новым переменным, мы получим

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial u_j}{\partial x'_s} \frac{\partial \omega_s}{\partial x_k}.$$

Подставим эти выражения в систему (1), причем выпишем только те члены, которые содержат производные $\frac{\partial u_j}{\partial x_1'}$:

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{ij}^{(k)} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_1'} + \ldots = 0 \quad (i = 1, \ldots, m). \tag{1_1}$$

В новых переменных мы имеем данные Коши в специальной форме, а именно эти данные относятся к плоскости $x_1' = 0$. Эта плоскость будет характеристической, если последняя система не дает определенных значений для производных $\frac{\partial u_j}{\partial x_1'}$, т. е. если определитель, образованный из коэффициентов при $\frac{\partial u_j}{\partial x_1'}$, равен нулю. Вводя для краткости обозначение

$$\omega_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ij}^{(k)} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_k}, \tag{5}$$

мы получаем следующее уравнение первого порядка, которому должна удовлетворять всякая характеристическая поверхность системы (1):

$$|\omega_{ij}| = \begin{vmatrix} \omega_{11}, & \omega_{12}, & \ldots, & \omega_{1m} \\ \omega_{21}, & \omega_{22}, & \ldots, & \omega_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_{m1}, & \omega_{m2}, & \ldots, & \omega_{mm} \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

Это уравнение первого порядка будет m-й степени относительно производных $\frac{\partial \omega_1}{\partial x_k}$. Оно вполне аналогично уравнению (53) из [40].

Уравнение (6) должно быть удовлетворено в силу (3). Если мы потребуем, чтобы оно было удовлетворено тождественно, т. е. если мы будем рассматривать его как обычное уравнение первого порядка для функции $\omega_1(x_1, \ldots, x_n)$, то мы будем иметь семейство $\omega_1(x_1, \ldots, x_n) = C$ характеристических поверхностей системы (1). Можно показать (ср. [3]), что всякая характеристическая поверхность может быть включена в такое семейство.

Если функция $\omega_1(x_1, \ldots, x_n)$ такова, что левая часть уравнения (6) отлична от нуля на поверхности $\omega_1 = 0$, то, вводя замену переменных (4), мы можем решить преобразованную систему (1_1) относительно $\frac{\partial u_j}{\partial x_1'}$.

Если в левой части уравнения (6) заменить $\frac{\partial \omega_1}{\partial x_k}$ на α_k, то получим уравнение степени m для составляющих вектора

$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, которое определяет в каждой точке характеристические направления нормали. В каждой точке характеристической поверхности нормаль имеет характеристическое направление.

Совершенно аналогично мы можем рассмотреть и систему уравнений второго порядка:

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{k,\, l=1}^{n} a_{ij}^{kl} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k\, \partial x_l} + \ldots = 0, \tag{7}$$

причем, как всегда, мы можем считать $a_{ij}^{lk} = a_{ij}^{kl}$. Если мы имеем специальные данные Коши на гиперплоскости $x_1 = 0$:

$$u_j \big|_{x_1=0} = \varphi_j(x_2, \ldots, x_n); \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_1}\bigg|_{x_1=0} = \psi_j(x_2, \ldots, x_n) \ (j=1, \ldots, m),$$

то мы знаем на этой гиперплоскости все производные первого порядка и все производные второго порядка, кроме $\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_1^2}$. Подставляя начальные данные в коэффициенты системы и приравнивая нулю определитель, составленный из коэффициентов при $\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_1^2}$, мы получим условие того, что гиперплоскость $x_1 = 0$ является *характеристической поверхностью*. В общем случае на поверхности (3) задаются сами функции и их производные первого порядка, и мы должны найти условие того, что система (7) совместно с начальными данными не дает однозначного определения производных второго порядка. Вводим опять вместо x_k новые переменные x_k' по формулам (4). Выражения производных по старым переменным через производные по новым переменным будут:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \frac{\partial u_j}{\partial x_1'} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_k} + \ldots,$$

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k\, \partial x_l} = \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_1'^2} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_k} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_l} + \ldots$$

Подставляя в (7) и выписывая лишь члены, содержащие $\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_1'^2}$, мы получим в новых независимых переменных систему

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{k,\, l=1}^{n} a_{ij}^{kl} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_k} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_l} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_1'^2} + \ldots = 0.$$

В новых переменных начальные данные относятся к плоскости $x_1' = 0$ и мы должны написать условие того, что последняя система не дает однозначной возможности определения производных $\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_1'^2}$. Вводя обозначения, аналогичные предыдущим:

$$\omega'_{ij} = \sum_{k,\, l=1}^{n} a_{ij}^{kl} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_k} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_l}, \tag{8}$$

мы можем записать это условие в виде

$$|\omega'_{ij}| = \begin{vmatrix} \omega'_{11} & \omega'_{12} & \ldots, & \omega'_{1m} \\ \omega'_{21} & \omega'_{22} & \ldots, & \omega'_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega'_{m1} & \omega'_{m2} & \ldots, & \omega'_{mm} \end{vmatrix} = 0. \tag{9}$$

Левая часть этого уравнения первого порядка является однородным полиномом степени $2m$ относительно производных $\frac{\partial \omega_1}{\partial x_k}$.

Возвратимся к системам первого порядка. Если в левой части уравнения (6) заменить $\frac{\partial \omega_1}{\partial x_k}$ на α_k, то мы получим уравнение

$$\Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0, \tag{10}$$

где Φ — однородный полином степени m аргументов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ с коэффициентами, зависящими от $(x_1, \ldots, x_n)$. Если в некоторой области D пространства $(x_1, \ldots, x_n)$ левая часть уравнения (10) обращается в нуль лишь при $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$, то говорят, что система (1) *эллиптического типа в области* D. Аналогично определяется эллиптический тип и для системы (7). Термин гиперболический тип применяют к системам в несколько разных смыслах. Мы вернемся еще к этому вопросу для случая двух независимых переменных. Если в некоторой точке $(x_1, \ldots, x_n)$ или в некоторой области D можно соответствующим линейным преобразованием переменных α_s свести однородный полином $\Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ к меньшему числу переменных, то говорят, что система (1) *параболически вырожденная* в упомянутой точке или области D.

Если коэффициенты $a_{ij}^{(k)}$ системы (1) содержат функции u_j (система *квазилинейна*), то, подставляя в эти коэффициенты какие-либо заданные на поверхности $\omega_1 = 0$ функции u_j, мы можем составить уравнение (6) и решить вопрос о том, будет ли поверхность $\omega_1 = 0$ характеристической. Аналогичное замечание относится и к системе (7), если ее коэффициенты a_{ij}^{kl} содержат функции u_j и их частные производные первого порядка (ср. **[30]**). Отметим, что систему (7) можно привести к системе уравнений первого порядка, если ввести mn новых функций:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_k} = w_{jk} \quad \begin{pmatrix} j = 1, \ldots, m \\ k = 1, \ldots, n \end{pmatrix}. \tag{10_1}$$

Производя в уравнениях (7) замену (10_1), получим m уравнений первого порядка относительно $(m + mn)$ функций u_j и w_{jk}. К этим уравнениям добавится еще mn уравнений (10_1).

64. Кинематические условия совместности. Для дальнейшего нам надо будет доказать одно предложение о дифференцировании функций вдоль поверхности. Для большей геометрической наглядности мы будем доказывать эту лемму для случая трех независимых переменных.

Пусть функция $f(x_1, x_2, x_3)$ — непрерывна с одной стороны некоторой поверхности S:

$$\psi(x_1, x_2, x_3) = 0$$

вплоть до S, и предположим еще, что ее частные производные первого порядка также непрерывны с упомянутой стороны S и имеют определенные предельные значения f_{x_i} на S. Если с той же стороны поверхности задана некоторая линия $l: x_i = x_i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$, где $x_i(t)$ имеют непрерывные производные по t, то вдоль l функция f есть функция от t, и мы имеем

$$\frac{df}{dt} = \sum_{k=1}^{3} f_{x_k} x'_k(t). \tag{11}$$

Лемма. *Формула* (11) *имеет место, если l лежит на S.*

Линию l мы можем предположить достаточно малой. Пусть N_1 и N_2 — ее концы и N — переменная точка на l. Проведем через N прямую, параллельную нормали n_1 к поверхности в точке N_1, причем нормаль направим в ту сторону, где определена функция f, и отложим на каждой из этих прямых отрезок NN' одной и той же длины δ. Мы считаем, что концы N' этих отрезков образуют некоторую линию l', которая не пересекает сама себя и лежит в той области, где определена функция f. Точки этой линии имеют координаты $\xi_i = x_i(t) + \delta \cos(n_1, x_i)$. Вдоль l' мы можем применить формулу (11):

$$\left.\frac{df}{dt}\right|_{l'} = \sum_{k=1}^{3} f_{x_k}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\, x'_k(t).$$

Интегрируем обе части по t в пределах от значения $t = t_1$, соответствующего точке N_1, до переменного t:

$$f(t)\big|_{l'} - f(t_1)\big|_{l'} = \int_{t_1}^{t} \sum_{k=1}^{3} f_{x_k}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\, x'_k(t)\, dt,$$

где $f(t_1)$ и $f(t)$ в левой части — значения f на l' в точках, соответствующих указанным значениям t. По условию f и f_{x_k} непрерывны вплоть до S, и тем самым подынтегральная функция в правой части — равномерно непрерывная функция параметра δ. Переходя в последней формуле к пределу при $\delta \to 0$, получим

$$f(t) - f(t_1) = \int_{t_1}^{t} \sum_{k=1}^{3} f_{x_k}[x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t)]\, x_k'(t)\, dt,$$

где слева стоят значения f на l. Дифференцируя обе части по t, получим формулу (11). Доказанной леммой нам придется пользоваться не только в этом параграфе, но и в следующей главе.

Переходим к случаю любого числа переменных и положим теперь, что некоторая функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ непрерывна при переходе через поверхность S:

$$\psi(x_1, \ldots, x_n) = 0, \tag{12}$$

а ее частные производные первого порядка имеют с каждой стороны этой поверхности определенные пределы, но эти пределы различны на различных сторонах поверхности, т. е., короче говоря, производные первого порядка функции f имеют на поверхности (12) разрывы первого рода. Мы назовем две стороны поверхности положительной и отрицательной сторонами. Для обозначения пределов, получаемых на положительной стороне, мы будем приписывать к соответствующей величине знак (+), а для отрицательной стороны знак (—). Так, например, условие непрерывности f при переходе через S мы можем записать в виде $f^+ = f^-$. Введем в рассмотрение скачок для производных первого порядка:

$$[f_{x_k}] = f_{x_k}^+ - f_{x_k}^-.$$

Вдоль всякой линии l, лежащей на поверхности (12), по условию f^+ и f^- совпадают. Таким образом, применяя лемму, получим

$$\sum_{k=1}^{n} f_{x_k}^+ dx_k = \sum_{k=1}^{n} f_{x_k}^- dx_k \quad (\text{на } S). \tag{13}$$

На поверхности S переменные x_k нельзя считать независимыми. Если, например, уравнение поверхности задано в явной форме, то одна из координат будет функцией остальных, а эти последние можно уже считать независимыми переменными.

Предыдущую формулу мы можем переписать в виде

$$\sum_{k=1}^{n} [f_{x_k}]\, dx_k = 0.$$

Мы имеем, кроме того,

$$\sum_{k=1}^{n} \psi_{x_k} dx_k = 0.$$

Умножим последнее равенство на неопределенный пока множитель h и вычтем из предыдущего:

$$\sum_{k=1}^{n} \left\{ [f_{x_k}] - h\psi_{x_k} \right\} dx_k = 0.$$

Определим теперь множитель h так, чтобы коэффициент при дифференциале зависимого переменного обращался в нуль. Оставшиеся коэффициенты при дифференциалах независимых переменных, очевидно, должны быть равны нулю **[I; 167]**, и мы приходим, таким образом, к следующим n равенствам:

$$[f_{x_k}] = h\psi_{x_k}, \tag{14}$$

т. е. *скачки производных первого порядка должны быть пропорциональны частным производным от левой части* (12) *по соответствующим переменным*. Написанные условия называются обычно *кинематическими условиями совместности*.

Рассмотрим теперь тот случай, когда сама функция f и ее производные первого порядка остаются непрерывными при переходе через поверхность (12), а разрыв непрерывности испытывают производные второго порядка. Наше предыдущее рассуждение применимо тогда для каждой из функций f_{x_k}. Каждая такая функция будет иметь свой коэффициент пропорциональности h_k в кинематических условиях совместности, и скачок производной от функции f_{x_k} по всякой переменной x_l должен быть пропорционален ψ_{x_l}, т. е. мы будем иметь следующие равенства для скачков производных второго порядка:

$$[f_{x_k x_l}] = f^+_{x_k x_l} - f^-_{x_k x_l} = h_k \psi_{x_l}.$$

Принимая во внимание независимость результата дифференцирования от порядка дифференцирования как с положительной, так и с отрицательной стороны поверхности, мы можем написать $h_k \psi_{x_l} = h_l \psi_{x_l}$, т. е. $\frac{h_k}{\psi_{x_k}} = \frac{h_l}{\psi_{x_l}}$. Иначе говоря, отношение $h_k : \psi_{x_k}$ не должно зависеть от значка k. Полагая $h_k : \psi_{x_k} = h$, мы преобразуем окончательно последнюю формулу к виду

$$[f_{x_k x_l}] = h\psi_{x_k}\psi_{x_l}. \tag{15}$$

Эти формулы дают кинематические условия совместности для случая разрыва второго порядка, т. е. разрыва производных второго порядка.

65. Динамические условия совместности. Вернемся к системе уравнений первого порядка (1) и положим, что поверхность (3) является характеристической поверхностью для написанной системы, причем некоторое решение u на этой поверхности имеет слабый разрыв, т. е. само u — непрерывно, и разрыв может быть лишь у производных первого порядка. Пусть u^+ — то непрерывное решение с положительной стороны поверхности и u^- — то непрерывное решение с отрицательной стороны поверхности, с которыми совпадает u. Мы можем для u^+ и u^- написать систему (1). Возьмем разность этих уравнений на самой поверхности (3). При этом члены Φ_i будут непрерывными при переходе через поверхность и при вычитании сократятся. Мы придем таким образом к следующим m уравнениям, которым должны удовлетворять скачки производных первого порядка:

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{ij}^{(k)} \left[\frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right] = 0. \tag{16}$$

При выводе этих условий мы существенно использовали саму систему (1), которая обычно описывает некоторый физический процесс; полученные условия для скачков называются *динамическими условиями совместности*. Каждая из функций u_j имеет свой коэффициент пропорциональности h_j в кинематических условиях совместности (14):

$$\left[\frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right] = h_j \frac{\partial \omega_1}{\partial x_k} \qquad (j = 1, 2, \ldots, m). \tag{17}$$

Подставляя эти выражения в условия (16) и принимая во внимание обозначение (5), мы получим систему m однородных уравнений первой степени для коэффициентов h_j:

$$\sum_{j=1}^{m} \omega_{ij} h_j = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{18}$$

Из уравнения характеристической поверхности (6) непосредственно вытекает, что определитель этой системы равен нулю и, таким образом, мы сможем получить решение системы, отличное от нулевого. В общем случае, когда ранг таблицы коэффициентов системы (18) будет равен $(m - 1)$, общее решение этой системы определится с точностью до произвольного множителя, который не играет существенной роли при определении качественной картины разрыва.

Перейдем теперь к рассмотрению системы уравнений второго порядка (7). В данном случае решением, имеющим слабый разрыв, будет решение, в котором сама функция и ее производные первого порядка непрерывны. Совершенно так же, как и выше, мы получим динамические условия совместности для скачков производных второго порядка:

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k,\,l=1}^{n} a_{ij}^{kl}\left[\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k\,\partial x_l}\right]=0. \tag{19}$$

Каждая функция u_j будет иметь свой коэффициент пропорциональности h_j в кинематических условиях совместности:

$$\left[\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k\,\partial x_l}\right]=h_j\frac{\partial\omega_1}{\partial x_k}\frac{\partial\omega_1}{\partial x_l}. \tag{20}$$

Подставляя эти выражения в условие (19) и пользуясь обозначением (8), получим опять систему однородных уравнений для множителей h_j, определитель которой, в силу (9), равен нулю:

$$\sum_{j=1}^{m}\omega'_{ij}h_j=0. \tag{21}$$

66. Уравнения гидродинамики. Применим теорию характеристик к случаю уравнений гидродинамики. Обозначим через (u_1, u_2, u_3) составляющие вектора скорости, через p — давление, через ρ — плотность и через f_1, f_2, f_3 — составляющие внешней силы, рассчитанной на единицу массы. Независимыми переменными будут время t и пространственные координаты x_1, x_2, x_3. Мы будем иметь три уравнения Эйлера:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}u_k+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}=f_i \quad (i=1, 2, 3),$$

и уравнение неразрывности [II, 114, 115]:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\rho}{\partial x_k}u_k+\rho\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}=0.$$

Будем считать жидкость сжимаемой и положим, что уравнение состояния определяется зависимостью давления от плотности $p=p(\rho)$, где $p(\rho)$ — заданная функция. Окончательно будем иметь четыре уравнения первого порядка для функций u_1, u_2, u_3, ρ от независимых переменных x_1, x_2, x_3, t:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}u_k+\frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x_i}=f_i \quad (i=1, 2, 3),$$

$$\rho\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}+\frac{\partial\rho}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\rho}{\partial x_k}u_k=0.$$

Величины ω_{ij}, определяемые формулами (5), будут в данном случае иметь вид

$$\omega_{12}=\omega_{21}=\omega_{13}=\omega_{31}=\omega_{23}=\omega_{32}=0;$$

$$\omega_{ii}=\frac{d\omega_1}{dt}\equiv\frac{\partial\omega_1}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\omega_1}{\partial x_k}u_k \quad (i=1,\ 2,\ 3,\ 4),$$

$$\omega_{i4}=\frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\rho}\frac{\partial\omega_1}{\partial x_i}; \qquad \omega_{4i}=\rho\frac{\partial\omega_1}{\partial x_i} \quad (i\neq 4),$$

где, как и раньше, ω_1 есть левая часть уравнения характеристической поверхности

$$\omega_1(x_1,\ x_2,\ x_3,\ t)=0. \tag{22}$$

Обозначим, как и выше, через g^2 сумму:

$$g^2=\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial x_k}\right)^2.$$

Уравнение первого порядка (6), которому должна удовлетворять характеристическая поверхность (22), в данном случае будет иметь вид

$$\begin{vmatrix} \frac{d\omega_1}{dt} & 0 & 0 & \frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\rho}\frac{\partial\omega_1}{\partial x_1} \\ 0 & \frac{d\omega_1}{dt} & 0 & \frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\rho}\frac{\partial\omega_1}{\partial x_2} \\ 0 & 0 & \frac{d\omega_1}{dt} & \frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\rho}\frac{\partial\omega_1}{\partial x_3} \\ \rho\frac{\partial\omega_1}{\partial x_1} & \rho\frac{\partial\omega_1}{\partial x_2} & \rho\frac{\partial\omega_1}{\partial x_3} & \frac{d\omega_1}{dt} \end{vmatrix}=0$$

$$\left(\frac{d\omega_1}{dt}=\frac{\partial\omega_1}{\partial t}+\frac{\partial\omega_1}{\partial x_1}u_1+\frac{\partial\omega_1}{\partial x_2}u_2+\frac{\partial\omega_1}{\partial x_3}u_3\right).$$

Раскрывая этот определитель, получим

$$\left(\frac{d\omega_1}{dt}\right)^2\left[\left(\frac{d\omega_1}{dt}\right)^2-g^2\frac{dp}{d\rho}\right]=0. \tag{23}$$

Скорость P перемещения поверхности (22) в направлении, нормальном к поверхности, определяется, как известно, формулой (75) из [43]. В каждый данный момент поверхность (22) будет проходить через некоторые жидкие частицы. Пусть u_n — составляющая скорости жидкой частицы, лежащей на упомянутой поверхности, на нормаль к поверхности в соответствующей точке. Принимая во внимание, что $\frac{\partial\omega_1}{\partial x_k}:g$ суть направляющие косинусы упомянутой нормали (в ту сторону, где $\omega_1>0$), мы имеем

$$u_n=\frac{1}{g}\sum_{k=1}^{3}u_k\frac{\partial\omega_1}{\partial x_k}.$$

Разность $P-u_n$, выражающая скорость движения поверхности по отношению к жидким частицам, называется обычно *скоростью распространения волны.*

Мы имеем для этой скорости следующее выражение:

$$V = P - u_n = -\frac{1}{g}\frac{\partial\omega_1}{\partial t} - \frac{1}{g}\sum_{k=1}^{3} u_k \frac{\partial\omega_1}{\partial x_k},$$

или

$$V = -\frac{1}{g}\frac{d\omega_1}{dt}. \tag{24}$$

Дифференциальное уравнение характеристических поверхностей (23) оказывается равносильным двум уравнениям:

$$V^2 = 0; \quad V^2 = \frac{dp}{d\rho}. \tag{25}$$

Первому уравнению отвечает случай стационарного разрыва, и в дальнейшем мы будем рассматривать лишь второе из написанных уравнений. Скорость V, определяемая формулой (25), есть скорость звука:

$$V = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}. \tag{26}$$

Установим теперь характер разрыва, пользуясь кинематическими и динамическими условиями совместности Обозначим через h_k коэффициенты разрывности, входящие в формулу (17), для функций u_k, и через r — соответствующий коэффициент для функции ρ. Уравнения (18) в данном случае напишутся в виде

$$\frac{d\omega_1}{dt} h_k + \frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\rho}\frac{\partial\omega_1}{\partial x_k} r = 0 \qquad (k = 1, 2, 3)$$

или, принимая во внимание (24) и (25), в виде

$$-gh_k + \frac{1}{\rho} V \frac{\partial\omega_1}{\partial x_k} r = 0,$$

т. е.

$$h_k = \frac{rV}{\rho}\cos\alpha_k, \tag{27}$$

где $\cos\alpha_k$ — направляющие косинусы нормали к поверхности разрыва. Будем рассматривать (h_1, h_2, h_3) как составляющие некоторого вектора $\mathbf{h}$ (вектор разрыва производных скорости). Предыдущие формулы могут быть записаны в следующей векторной форме:

$$\mathbf{h} = \frac{rV}{\rho}\mathbf{n},$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности разрыва. Мы видим, таким образом, что *вектор разрыва производных скорости направлен по нормали к поверхности разрыва* (продольная волна).

Составляющие вектора ускорения w_i выражаются формулами

$$w_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} u_k \qquad (i = 1, 2, 3)$$

и имеют разрыв при переходе через поверхность. Положим, что с одной стороны поверхности мы имеем покой В силу непрерывности самой скорости, ее предельные значения на поверхности с обеих сторон равны нулю, а производные от скорости будут на поверхности иметь значения, равные скачку, поскольку перед поверхностью там, где мы имеем покой, эти производные равны нулю. То же самое можно сказать и о составляющих вектора ускорения. Скачок этих составляющих, в силу (27) и (24), определится равенством

$$[w_i] = h_i \frac{\partial \omega_1}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} h_i u_k \frac{\partial \omega_1}{\partial x_k} = h_i \frac{d\omega_1}{dt} = -\frac{rgV^2}{\rho} \cos \alpha_i,$$

или в векторной форме:

$$[\mathbf{w}] = -\frac{rgV^2}{\rho} \mathbf{n}.$$

При указанном выше условии эта формула будет давать вектор ускорения на поверхности разрыва.

Рассмотрим теперь так называемый стационарный случай, а именно тот случай, когда функции u_k и ρ не зависят от t. Считая ω_1 также не зависящим от t, будем иметь $P = 0$ и $V = -u_n$. Положим, что в некоторой области скорость движения жидкости меньше скорости звука (26). При этом и подавно $|u_n| < \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$, и равенство $V = -u_n$ невозможно. Таким образом, мы видим, что при дозвуковых скоростях мы не можем иметь в стационарном случае распространяющихся прерывностей.

67. Уравнения теории упругости. В качестве примера применения теории характеристик к системам уравнений второго порядка рассмотрим уравнения теории упругости в простейшем случае однородной изотропной среды. Обозначим через (u_1, u_2, u_3) составляющие вектора смещения и через λ и μ — обычные постоянные упругого вещества. Основные уравнения теории упругости представляют собою следующую систему трех уравнений второго порядка для функций (u_1, u_2, u_3) от независимых переменных (x_1, x_2, x_3, t):

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu \Delta u_i - \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \ldots = 0.$$

Мы будем иметь в данном случае

$$\omega'_{ij} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \omega_1}{\partial x_i} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_j} + \delta_{ij} \left[\mu \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x_k} \right)^2 - \rho \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial t} \right)^2 \right]$$

$$(i, j = 1, 2, 3) \quad \left(\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \right). \tag{28}$$

Уравнение (9), после раскрытия соответствующего определителя, будет в данном случае иметь вид

$$\left[(\lambda + 2\mu) g^2 - \rho \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial t} \right)^2 \right] \left[\mu g^2 - \rho \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial t} \right)^2 \right]^2 = 0. \tag{29}$$

В силу формулы (75) из [43] это уравнение дает нам следующие две возможные скорости перемещения поверхности разрыва:

$$P_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}; \quad P_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

В данном случае деформации считаются малыми и не имеет смысла говорить отдельно о скорости распространения, т. е. скорости перемещения по отношению к частицам материальной среды.

Рассмотрим теперь характер прерывности. Вводим коэффициенты прерывности h_j производных второго порядка функций u_j:

$$\left[\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_k}\right] = h_j \frac{\partial \omega_1}{\partial x_i} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_k}. \tag{30}$$

В силу (28), уравнения (21) в данном случае имеют вид

$$\left[\mu g^2 - \rho \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial t}\right)^2\right] h_i + (\lambda + \mu) \frac{\partial \omega_1}{\partial x_i} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_j} h_j = 0 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial x_k} = g \cos(n, x_k) \qquad (k = 1, 2, 3),$$

где n — направление нормали к поверхности (3), мы можем переписать предыдущие уравнения в виде

$$\left[\mu g^2 - \rho \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial t}\right)^2\right] h_i + (\lambda + \mu) g^2 \cos(n, x_i) \sum_{j=1}^{3} \cos(n, x_j) h_j = 0.$$

Введем вектор $\mathbf{h}$ с составляющими (h_1, h_2, h_3). Предыдущие уравнения могут быть записаны в виде

$$\left[\mu g^2 - \rho \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial t}\right)^2\right] h_i + (\lambda + \mu) g^2 \cos(n, x_i) h_n = 0,$$

где h_n — величина проекции вектора $\mathbf{h}$ на нормаль n к поверхности (3), или, в векторной форме:

$$\left[\mu g^2 - \rho \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial t}\right)^2\right] \mathbf{h} + (\lambda + \mu) g^2 h_n \mathbf{n} = 0, \tag{31}$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности (3). Если мы возьмем скорость перемещения P_2, то коэффициент при $\mathbf{h}$ будет равен нулю, и мы должны иметь $h_n = 0$, т. е. вектор $\mathbf{h}$ должен лежать в касательной плоскости к поверхности (3) (поперечная волна). Если же мы возьмем скорость P_1, то из (31) непосредственно следует, что $\mathbf{h}$ лишь численным множителем отличается от $\mathbf{n}$, т. е. $\mathbf{h}$ должен быть направлен по нормали к поверхности (3) (продольная волна). Отметим еще, что в уравнении (29) множитель, дающий скорость поперечной волны, стоит в квадрате. Это обстоятельство получит свое объяснение в следующем параграфе, где мы будем рассматривать уравнения теории упругости для анизотропной среды.

Выясним механический смысл вектора $\mathbf{h}$. Положим, что по одну сторону от поверхности S: $\omega_1(x_1, x_2, x_3, t) = 0$ слабого разрыва имеется покой, т. е. u_j $(j = 1, 2, 3)$ равны нулю. В точках поверхности S функции u_j и их производные первого порядка также равны нулю. С той стороны, где имеется движение, значения вторых производных u_j на S будут определяться формулами (30), так как с другой стороны поверхности эти производные тождественно равны нулю, т. е.

$$\left.\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_k}\right|_S = h_j \left.\frac{\partial \omega_1}{\partial x_i} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_k}\right|_S \qquad (i, k = 0, 1, 2, 3),$$

причем мы считаем $x_0 = t$. Возьмем некоторую точку M на поверхности S и примем ее за начало координат в пространстве (x_0, x_1, x_2, x_3). Разложим u_j в окрестности точки M в ряд Маклорена, доводя разложение до членов второй степени. Принимая во внимание предыдущие формулы и тот факт, что u_j и ее частные производные первого порядка обращаются в нуль в точке M, получим приближенное равенство

$$u_j \sim \frac{h_j}{2} \sum_{i,\,k=0}^{3} \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x_i}\right)_0 \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x_k}\right)_0 x_i x_k,$$

причем значок нуль указывает, что надо брать значение производных в точке M.

Принимая во внимание, что функция ω_1 обращается в нуль в точке M, получим следующее разложение Маклорена, доведенное до членов первой степени:

$$\omega_1 \sim \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x_i}\right)_0 x_i,$$

и предыдущую формулу можно переписать в виде

$$\mathbf{u} \sim \frac{\mathbf{h}}{2} \omega_1^2 (x_0, x_1, x_2, x_3).$$

Это приближенное равенство для вектора смещения $\mathbf{u}$ будет справедливым вблизи поверхности разрыва с той ее стороны, где имеет место движение.

68. Анизотропное упругое тело. Введем в рассмотрение составляющие тензора деформации, несколько изменяя обозначения из [IV₁; 104]:

$$\varepsilon_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}; \quad \gamma_1 = \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3}; \quad \gamma_2 = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}; \quad \gamma_3 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$$
$$(i = 1, 2, 3).$$

В случае анизотропного тела с тремя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии работа сил деформации, отнесенная к единице объема, выражается через составляющие тензора деформации в виде следующего однородного полинома второй степени:

$$A = \frac{1}{2}\left(a\varepsilon_1^2 + b\varepsilon_2^2 + c\varepsilon_3^2 + 2a'\varepsilon_2\varepsilon_3 + 2b'\varepsilon_3\varepsilon_1 + 2c'\varepsilon_1\varepsilon_2 + a''\gamma_1^2 + b''\gamma_2^2 + c''\gamma_3^2\right),$$

где коэффициенты $a, b, \ldots, c''$ суть функции (x_1, x_2, x_3, t) или постоянные, в случае однородной среды. Уравнения из [IV₁; 104] при наличии силы инерции могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial A}{\partial \gamma_3}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial A}{\partial \gamma_2}\right) - \rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + X_1 = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial A}{\partial \gamma_3}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial A}{\partial \gamma_1}\right) - \rho\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + X_2 = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial A}{\partial \gamma_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial A}{\partial \gamma_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_3}\right) - \rho\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} + X_3 = 0.$$

Подставляя выражения A, получим следующие уравнения:

$$a\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}+c''\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}+b''\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2}+\\+(c'+c'')\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1\,\partial x_2}+(b'+b'')\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1\,\partial x_3}-\rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}+\ldots=0,$$

$$c''\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}+b\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}+a''\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2}+\\+(c'+c'')\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\,\partial x_2}+(a'+a'')\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2\,\partial x_3}-\rho\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}+\ldots=0,$$

$$b''\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2}+a''\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2}+c\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}+\\+(b'+b'')\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\,\partial x_3}+(a'+a'')\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2\,\partial x_3}-\rho\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}+\ldots=0.$$

Вводя для сокращения письма обозначения:

$$p_0=\frac{\partial\omega_1}{\partial t};\qquad p_i=\frac{\partial\omega_1}{\partial x_i}\qquad(i=1,\,2,\,3),\tag{32}$$

мы можем записать коэффициенты ω'_{ij} в виде

$$\omega'_{11}=ap_1^2+c''p_2^2+b''p_3^2-\rho p_0^2;\quad \omega'_{12}=(c'+c'')\,p_1p_2;\quad \omega'_{13}=(b'+b'')\,p_1p_3,$$
$$\omega'_{21}=(c'+c'')\,p_1p_2;\quad \omega'_{22}=c''p_1^2+bp_2^2+a''p_3^2-\rho p_0^2;\quad \omega'_{23}=(a'+a'')\,p_2p_3,$$
$$\omega'_{31}=(b'+b'')\,p_3p_1;\quad \omega'_{32}=(a'+a'')\,p_2p_3;\quad \omega'_{33}=b''p_1^2+a''p_2^2+cp_3^2-\rho p_0^2.$$

Уравнение первого порядка (9), определяющее характеристические поверхности, совпадает, как нетрудно видеть, с основным уравнением относительно $\lambda=\rho p_0^2$, которое служит для приведения эллипсоида:

$$\left(ap_1^2+c''p_2^2+b''p_3^2\right)\xi_1^2+\left(c''p_1^2+bp_2^2+a''p_3^2\right)\xi_2^2+\\+\left(b''p_1^2+a''p_2^2+cp_3^2\right)\xi_3^2+2\,(a'+a'')\,p_2p_3\xi_2\xi_3+2\,(b'+b'')\,p_3p_1\xi_3\xi_1+\\+2\,(c'+c'')\,p_1p_2\xi_1\xi_2=1\tag{33}$$

к осям симметрии [III$_1$; 32, 33]. Заметим, что левая часть написанного уравнения может быть получена из выражения $2A$, если в нем положить $\varepsilon_k=p_k\xi_k$; $\gamma_1=p_2\xi_3+p_3\xi_2$; $\gamma_2=p_3\xi_1+p_1\xi_3$; $\gamma_3=p_1\xi_2+p_2\xi_1$, а потому она представляет собою определенно положительную квадратичную форму от ξ_s (ибо $A>0$), и, следовательно, уравнению (33) соответствует действительно эллипсоид. Решая упомянутое выше уравнение для λ, мы получим в каждой точке тела три положительных корня для p_0^2, причем p_0^2 будет однородной функцией второго измерения от p_1, p_2, p_3. Если обе части уравнения (33) разделить на g^2, то p_k превратится в $\cos\alpha_k$, где $\cos\alpha_k$ — направляющие косинусы нормали к поверхности волны, и полученный корень p_0^2 превратится в P^2 Таким образом, в каждой точке мы для любого фиксированного направления будем иметь три возможные скорости перемещения волны.

Составляющие (h_1, h_2, h_3) вектора прерывности будут получаться из однородной системы, из которой определяются направления осей симметрии эллипсоида (33). Таким образом, в каждой точке, при задании определенного направления, мы имеем три взаимно перпендикулярных вектора прерывности, соответствующих трем скоростям перемещения. Для того чтобы иметь продольные и поперечные волны, необходимо и достаточно, чтобы одна из осей эллипсоида была направлена по нормали к соответствующей волне. Если это выполнено, то мы будем иметь одну продольную и две поперечные волны, причем мы считаем, что при фиксированном направлении упомянутое кубическое уравнение имеет различные корни В случае однородной изотропной среды, как мы видели, один из корней будет двойным. Направляющие косинусы нормали к волне пропорциональны p_1, p_2, p_3, и, следовательно, указанное выше условие равносильно тому, что для некоторого корня $\lambda=\rho p_0^2$ величины (h_1, h_2, h_3) должны быть пропорциональны (p_1, p_2, p_3) при любом выборе p_k, т. е. при любом выборе направления. Заменяя в однородной системе для h_k эти величины пропорциональными величинами p_k, мы получим

$$\left.\begin{aligned}
&\left(ap_1^2+c''p_2^2+b''p_3^2-\rho p_0^2\right)p_1+(c'+c'')\,p_1p_2^2+(b'+b'')\,p_1p_3^2=0,\\
&(c'+c'')\,p_1^2p_2+\left(c''p_1^2+bp_2^2+a''p_3^2-\rho p_0^2\right)p_2+(a'+a'')\,p_2p_3^2=0,\\
&(b'+b'')\,p_1^2p_3+(a'+a'')\,p_2^2p_3+\left(b''p_1^2+a''p_2^2+cp_3^2-\rho p_0^2\right)p_3=0.
\end{aligned}\right\}\tag{34}$$

Если мы примем во внимание, что при любом выборе p_1, p_2, p_3 должны получить из трех уравнений (34) одно и то же значение для ρp_0^2, то мы придем к следующим условиям для коэффициентов упругого потенциала A:

$$a=b=c=a'+2a''=b'+2b''=c'+2c'',\tag{35}$$

и написанные три уравнения дают нам $\rho p_0^2=ag^2$, т. е. для скорости продольных волн мы получаем

$$P_*=\sqrt{\frac{a}{\rho}}.$$

Остальные два корня, соответствующие поперечным волнам, вообще говоря, различны и зависят от выбора направления волны, т. е. от выбора p_k. Равенства (35) дают нам пять условий для девяти коэффициентов, входящих в выражение упругого потенциала A.

69 Электромагнитные волны. Рассмотрим первые два уравнения Максвелла для изотропной среды:

$$c\operatorname{rot}\mathbf{H}=\lambda\mathbf{E}+\varepsilon\mathbf{E}_t,\quad c\operatorname{rot}\mathbf{E}=-\mu\mathbf{H}_t,\tag{36}$$

где $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — напряжения электрического и магнитного поля, c — скорость света, λ — коэффициент проводимости среды, ε и μ — диэлектрическая постоянная и магнитная проницаемость. Векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ являются функциями независимых переменных (x_1, x_2, x_3, t). Обозначим через (e_1, e_2, e_3) и (h_1, h_2, h_3) составляющие этих векторов, можем переписать уравнения (36) в виде

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial e_1}{\partial t}+\frac{\partial h_2}{\partial x_3}-\frac{\partial h_3}{\partial x_2}+\ldots=0,\quad \frac{\mu}{c}\frac{\partial h_1}{\partial t}+\frac{\partial e_3}{\partial x_2}-\frac{\partial e_2}{\partial x_3}=0,\\
&\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial e_2}{\partial t}+\frac{\partial h_3}{\partial x_1}-\frac{\partial h_1}{\partial x_3}+\ldots=0,\quad \frac{\mu}{c}\frac{\partial h_2}{\partial t}+\frac{\partial e_1}{\partial x_3}-\frac{\partial e_3}{\partial x_1}=0,\\
&\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial e_3}{\partial t}+\frac{\partial h_1}{\partial x_2}-\frac{\partial h_2}{\partial x_1}+\ldots=0,\quad \frac{\mu}{c}\frac{\partial h_3}{\partial t}+\frac{\partial e_2}{\partial x_1}-\frac{\partial e_1}{\partial x_2}=0,
\end{aligned}\right\}\tag{37}$$

причем ненаписанные члены не содержат производных от функций e_k и h_k. В данном случае мы имеем систему шести уравнений первого порядка с шестью функциями. Будем нумеровать эти функции в следующем порядке:

$$u_1 = e_1;\quad u_2 = e_2;\quad u_3 = e_3\quad u_4 = h_1;\quad u_5 = h_2;\quad u_6 = h_3.$$

Составляя выражения (5) и написав уравнение (6), мы получим следующее уравнение первого порядка для характеристических поверхностей:

$$\begin{vmatrix} \frac{\varepsilon}{c} p_0 & 0 & 0 & 0 & p_3 & -p_2 \\ 0 & \frac{\varepsilon}{c} p_0 & 0 & -p_3 & 0 & p_1 \\ 0 & 0 & \frac{\varepsilon}{c} p_0 & p_2 & -p_1 & 0 \\ 0 & -p_3 & p_2 & \frac{\mu}{c} p_0 & 0 & 0 \\ p_3 & 0 & -p_1 & 0 & \frac{\mu}{c} p_0 & 0 \\ -p_2 & p_1 & 0 & 0 & 0 & \frac{\mu}{c} p_0 \end{vmatrix} = 0. \tag{38}$$

Умножим элементы первых трех столбцов этого определителя на $\frac{\mu}{c} p_0$. После этого к элементам первого столбца прибавим элементы пятого столбца, умноженные на $(-p_3)$, и шестого, умноженные на p_2; к элементам второго столбца прибавим элементы четвертого, умноженные на p_3, и шестого, умноженные на $(-p_1)$; к элементам третьего столбца прибавим элементы четвертого, умноженные на $(-p_2)$, и элементы пятого, умноженные на p_1. Разлагая затем по элементам шестой, пятой и четвертой строк, придем к уравнению

$$\begin{vmatrix} q + p_1^2 & p_1 p_2 & p_1 p_3 \\ p_2 p_1 & q + p_2^2 & p_2 p_3 \\ p_3 p_1 & p_3 p_2 & q + p_3^2 \end{vmatrix} = 0, \tag{39}$$

где

$$q = \frac{\varepsilon\mu}{c} p_0^2 - g^2. \tag{40}$$

Раскрывая определитель, мы приходим к уравнению

$$q^2 (q + g^2) = 0 \quad \left(g^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2\right), \tag{41}$$

которое распадается на два. Если приравнять нулю сумму, стоящую в скобках, то получим $p_0 = 0$ и будем иметь стационарную волну [43]. В дальнейшем остановимся на втором случае, когда $q = 0$, т. е. когда

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2} p_0^2 - g^2 = 0, \tag{42}$$

что дает известное выражение для величины скорости перемещения волны

$$V = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \tag{43}$$

Будем теперь рассматривать характер разрыва. Обозначим через $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ коэффициенты прерывности для производных от составляющих вектора **E** и через $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ — аналогичные величины для составляющих вектора **H** Введем, как всегда, в рассмотрение векторы прерывности $\boldsymbol{\alpha}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ и $\boldsymbol{\beta}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$. Мы можем написать

$$\left.\begin{aligned}[\mathbf{E}_{x_k}] &= p_k\alpha,\\ [\mathbf{H}_{x_k}] &= p_k\beta\end{aligned}\right\} \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ 3; \quad x_0 = t). \tag{44}$$

Первые три из уравнений (18) запишутся в данном случае в виде

$$\left.\begin{aligned}\frac{\varepsilon}{c}p_0\alpha_1 + p_3\beta_2 - p_2\beta_3 = 0,\\ \frac{\varepsilon}{c}p_0\alpha_2 + p_1\beta_3 - p_3\beta_1 = 0,\\ \frac{\varepsilon}{c}p_0\alpha_3 + p_2\beta_1 - p_1\beta_2 = 0,\end{aligned}\right\} \tag{45}$$

или, обозначая через **n** вектор единичной нормали к поверхности волны $\omega_1 = 0$, направленный в ту сторону, где $\omega_1 > 0$, мы можем написать последние уравнения в виде

$$\frac{\varepsilon V}{c}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{n}, \tag{46}$$

причем справа стоит векторное произведение векторов $\boldsymbol{\beta}$ и **n** Совершенно так же последние три из уравнений (8) могут быть записаны в виде

$$\frac{\mu V}{c}\boldsymbol{\beta} = -\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{n}. \tag{47}$$

Из написанных уравнений непосредственно вытекает, что векторы $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ лежат в касательной плоскости к волне и взаимно перпендикулярны

Положим, что перед поверхностью волны, т е. там, где $\omega_1 > 0$, мы имеем покой, т. е **E** и **H** равны нулю Формулы (44) дадут нам значение производных от векторов **E** и **H** на самой поверхности волны·

$$\mathbf{E}_{x_k} = -p_k\boldsymbol{\alpha}; \quad \mathbf{H}_{x_k} = -p_k\boldsymbol{\beta}. \tag{48}$$

Разложим **E** и **H** вблизи фронта волны в ряд Тейлора, доводя разложение до членов, содержащих производные первого порядка Принимая во внимание, что **E** и **H** обращаются в нуль на поверхности волны, мы можем написать, пользуясь формулами (48), следующие приближенные формулы:

$$\mathbf{E} \sim -\boldsymbol{\alpha}\sum_{k=0}^{3} p_k\left(x_k - x_k^{(0)}\right); \quad \mathbf{H} \sim -\boldsymbol{\beta}\sum_{k=0}^{3} p_k\left(x_k - x_k^{(0)}\right),$$

где $\left(x_0^{(0)}, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}\right)$—некоторая точка на поверхности волны. Применяя формулу Тейлора для функции ω_1, можем написать, принимая во внимание, что $\omega_1\left(x_0^{(0)}, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}\right) = 0$:

$$\omega_1(x_0, x_1, x_2, x_3) \sim \sum_{k=0}^{3} p_k\left(x_k - x_k^{(0)}\right),$$

и предыдущие формулы могут быть переписаны в виде (ср. [66])

$$\mathbf{E} \sim -\omega_1(x_0, x_1, x_2, x_3)\,\boldsymbol{\alpha}; \quad \mathbf{H} \sim -\omega_1(x_0, x_1, x_2, x_3)\,\boldsymbol{\beta}. \tag{49}$$

Эти приближенные формулы будут иметь место вблизи волны с той ее стороны, где имеется электромагнитный процесс.

В случае однородной анизотропной среды величину ε мы должны считать уже не числом, а симметричной таблицей из девяти элементов. Эта величина входит в формулу, связывающую вектор электрического смещения с вектором **E** [II; 130]. Величину μ будем по-прежнему считать числом. Выберем координатные оси так, чтобы таблица ε привелась к диагональной форме, и пусть $\varepsilon_3 > \varepsilon_2 > \varepsilon_1 > 0$ — ее собственные значения [III$_1$; 32, 33]. При этом первые три из уравнений (37) будут иметь вид

$$\frac{\varepsilon_1}{c}\frac{\partial e_1}{\partial t} + \frac{\partial h_2}{\partial x_3} - \frac{\partial h_3}{\partial x_2} + \ldots = 0,$$

$$\frac{\varepsilon_2}{c}\frac{\partial e_2}{\partial t} + \frac{\partial h_3}{\partial x_1} - \frac{\partial h_1}{\partial x_3} + \ldots = 0,$$

$$\frac{\varepsilon_3}{c}\frac{\partial e_3}{\partial t} + \frac{\partial h_1}{\partial x_2} - \frac{\partial h_2}{\partial x_1} + \ldots = 0,$$

и вместо уравнения (39) мы будем иметь уравнение

Совершенно так же, как в [II, 149], можно показать, что это уравнение имеет два различных положительных корня для V^2.

Если мы решим уравнение (50) или (52) относительно p_0, то получим уравнение вида

$$p_0 + F(p_1, p_2, p_3) = 0, \tag{55}$$

где F — однородная функция первого измерения. Поскольку уравнение (55) не содержит x_k, система Коши для этого уравнения приведет к постоянным значениям для p_k, и бихарактеристики будут прямые линии. Их уравнение напишется в виде

$$\frac{dx_k}{dt} = F_{p_k} \qquad (k = 1, 2, 3).$$

Проведем характеристический коноид с вершиной в начале. Он представляет собою поверхность волны от точечного источника в начале координат в различные моменты времени. Его уравнение будет $x_k = F_{p_k} t$ или, при $t = 1$:

$$x_k = F_{p_k} \qquad (k = 1, 2, 3). \tag{56}$$

Поскольку F_{p_k} есть однородная функция нулевого измерения, правые части уравнений (56) содержат два параметра, а именно отношения двух из величин p_1, p_2, p_3 к третьей. Пусть S — поверхность (56), $P(x_1, x_2, x_3)$ — некоторая точка на S и δ — расстояние от начала координат до касательной плоскости к S в точке P. Если $\cos\alpha_i$ — направляющие косинусы нормали к S в точке P, то мы имеем, применяя формулу Эйлера для однородных функций,

$$\delta = \sum_{i=1}^{3} x_i \cos\alpha_i = \sum_{i=1}^{3} F_{p_i} \cos\alpha_i = \pm\frac{1}{g}\sum_{i=1}^{3} p_i F_{p_i} = \pm\frac{F}{g} = \pm\frac{p_0}{g} = \pm V.$$

Беря для определенности знак $(+)$, что несущественно для дальнейшего, мы можем написать уравнение касательной плоскости к S в виде

$$\sum_{i=1}^{3} x\cos\alpha_i - V = 0. \tag{57}$$

В это уравнение входят четыре параметра $\cos\alpha_i$ $(i = 1, 2, 3)$ и V, которые связаны двумя соотношениями:

$$\sum_{i=1}^{3} \cos^2\alpha_i = 1; \qquad \sum_{i=1}^{3} \frac{\cos^2\alpha_i}{V^2 - V_i^2} = 0,$$

так что уравнение (57) содержит два независимых параметра, как это и должно быть. Сама поверхность S будет огибающей семейства плоскостей (57), зависящего от двух параметров. Если проделать все вычисления, на которых мы не останавливаемся, то мы получаем следующее уравнение поверхности:

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{V_i^2 x_i^2}{V_i^2 - \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)} = 0.$$

Если, например, $V_1 = V_2$, то эта поверхность четвертого порядка вырождается в совокупность сферы и эллипсоида.

70. Сильные разрывы в теории упругости. Мы рассматривали раньше вопрос о сильных разрывах для решений одного уравнения [44]. Приведем теперь с точки зрения теории сильных разрывов исследование уравнений теории упругости.

Мы ограничимся при этом рассмотрением плоского случая. Пусть (u, v) — составляющие вектора смещения на плоскости (x, y) и X, Y — составляющие объемной силы. Обозначая, как всегда, через σ_x, σ_y, τ_{xy} составляющие тензора напряжений, мы будем иметь следующие два основных уравнения теории упругости.

$$\left.\begin{aligned}\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}-\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}&=X,\\ \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}-\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}&=Y.\end{aligned}\right\}\tag{58}$$

К этим уравнениям надо добавить еще связь между тензором напряжений и тензором деформации (закон Гука):

$$\sigma_x=\lambda(u_x+v_y)+2\mu u_x;\quad \sigma_y=\lambda(u_x+v_y)+2\mu v_y,\quad \tau_{xy}=\mu(u_y+v_x).\tag{58$_1$}$$

Подставляя последние выражения в уравнения (58), получим уравнения теории упругости, выраженные через вектор смещения $\boldsymbol{\omega}$:

$$\rho\frac{\partial^2\boldsymbol{\omega}}{\partial t^2}=(\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{\omega}+\mu\,\Delta\boldsymbol{\omega}+\mathbf{F}.$$

В дальнейшем под (u, v) мы можем подразумевать любые две функции от (x, y, t), имеющие непрерывные производные до второго порядка. При этом уравнения (58) дадут нам величины X и Y, соответствующие взятым функциям (u, v) Введем еще два линейных оператора, содержащих производные первого порядка от функций (u, v):

$$\left.\begin{aligned}P_x(u, v)&=\sigma_x\cos(n, x)+\tau_{xy}\cos(n, y)-\rho u_t\cos(n, t),\\ P_y(u, v)&=\tau_{xy}\cos(n, x)+\sigma_y\cos(n, y)-\rho v_t\cos(n, t).\end{aligned}\right\}\tag{59}$$

Рассмотрим две пары функций (u, v) и (u', v'), и пусть σ'_x, σ'_y, τ'_{xy}, X', Y' — значения величин (58$_1$) и X, Y, соответствующие паре функций (u', v'). Мы имеем, таким образом,

$$\sigma'_x=\lambda\left(u'_x+v'_y\right)+2\mu u'_x;\quad \sigma'_y=\lambda\left(u'_x+v'_y\right)+2\mu v'_y;\quad \tau'_{xy}=\mu\left(u'_y+v'_x\right).$$

Пользуясь этими выражениями и применяя обычную формулу Остроградского, мы получим следующий аналог формулы Грина:

$$-\iiint\limits_D(uX'+vY'-u'X-v'Y)\,d\tau=$$

$$=\iint\limits_S[uP_x(u', v')+vP_y(u', v')-u'P_x(u, v)-v'P_y(u, v)]\,dS,\tag{60}$$

где D, как и выше, — некоторая область в пространстве (x, y, t), S — ограничивающая ее поверхность и n — направление внешней нормали к S. Указанная выше формула была впервые дана Вольтерра. Отметим, что под X, Y мы разумеем просто выражения, стоящие в первых частях формул (58) и аналогично для X', Y'. При выводе формулы (60) предполагается, конечно, что функции (u, v) и (u', v') имеют в области D непрерывные производные до второго порядка.

Переходим теперь к рассмотрению того случая, когда производные первого порядка функций (u, v) имеют разрывы Пусть область D рассечена поверхностью σ на две части D_1 и D_2, и положим, что на поверхности σ первые производные функций (u, v) имеют разрывы, удовлетворяющие указанным в [44] кинематическим условиям совместности Положим, кроме того, что выражения (59) остаются непрерывными при переходе через поверхность σ. В дальнейшем мы выясним механический смысл этих динамических условий совместности Совершенно так же, как и в [44], мы можем утверждать, что формула (60) будет иметь место для всего объема D, если (u, v) удовлетворяют указанным выше условиям прерывности, а (u', v') — любые функции с непрерывными производными до второго порядка.

Выясним следствия из указанных выше условий. Как и в [44], мы можем утверждать, что векторы $\operatorname{grad} u \times \mathbf{n}$ и $\operatorname{grad} v \times \mathbf{n}$ должны оставаться непрерывными при переходе через σ. Если мы выпишем составляющие этих векторов, то получим шесть выражений, которые должны оставаться непрерывными при переходе через σ Добавив еще выражения (59) которые мы преобразуем, подставив в них вместо составляющих тензора напряжений их выражения по формулам (58_1), мы будем иметь следующие восемь выражений, которые должны оставаться непрерывными при переходе через σ:

$$
\begin{gathered}
u_x \cos(n, y) - u_y \cos(n, x) = M_1,\\
u_y \cos(n, t) - u_t \cos(n, y) = M_2,\\
u_t \cos(n, x) - u_x \cos(n, t) = M_3,\\
v_x \cos(n, y) - v_y \cos(n, x) = M_4,\\
v_y \cos(n, t) - v_t \cos(n, y) = M_5,\\
v_t \cos(n, x) - v_x \cos(n, t) = M_6,
\end{gathered}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\lambda + 2\mu) u_x \cos(n, x) + \mu u_y \cos(n, y) - \rho u_t \cos(n, t) + \mu v_x \cos(n, y) +\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \lambda v_y \cos(n, x) = M_7,\\
&\lambda u_x \cos(n, y) + \mu u_y \cos(n, y) + \mu v_x \cos(n, x) +\\
&\qquad\qquad\qquad + (\lambda + 2\mu) v_y \cos(n, y) - \rho v_t \cos(n, t) = M_8.
\end{aligned}
$$

Будем рассматривать написанные уравнения как восемь уравнений относительно шести производных первого порядка от функций u и v. Если бы таблица коэффициентов этих уравнений содержала хоть один определитель шестого порядка, отличный от нуля, то мы могли бы выразить все шесть производных первого порядка от функций u и v через непрерывные функции M_k и не имели бы разрыва этих производных на σ. Мы можем, таким образом, утверждать, что все определители шестого порядка упомянутой выше таблицы должны равняться нулю Вычеркивая последние две строки упомянутой таблицы и приравнивая оставшийся определитель нулю, мы получим тождество Рассматривая остальные случаи, мы придем к единственному уравнению

$$
\begin{aligned}
&\{\rho \cos^2(n, t) - (\lambda + 2\mu)[\cos^2(n, x) + \cos^2(n, y)]\} \times\\
&\qquad\qquad \times \{\rho \cos^2(n, t) - \mu[\cos^2(n, x) + \cos^2(n, y)]\} = 0, \qquad (61)
\end{aligned}
$$

которое и будет выражать тот факт, что упомянутая выше таблица имеет ранг, меньший шести. Пусть уравнение σ имеет вид $\psi(x, y, t) = 0$. Написанное выше уравнение распадается на два уравнения:

$$
\rho\psi_t^2 - (\lambda + 2\mu)\left(\psi_x^2 + \psi_y^2\right) = 0 \quad \text{и} \quad \rho\psi_t^2 - \mu\left(\psi_x^2 + \psi_y^2\right) = 0,
$$

и мы видим, таким образом, что поверхность σ должна быть характеристической поверхностью уравнений теории упругости [66].

В данном случае мы будем иметь существенную разницу по сравнению с одним волновым уравнением. Кинематические условия совместности, которые сводятся к непрерывности $M_1, M_2, \ldots, M_6$, совместно с тем фактом, что σ есть характеристическая поверхность, что сводится к уравнению (61), не гарантирует нам еще непрерывности M_7 и M_8, т. е. не гарантирует динамических условий совместности. Выясним те дополнительные условия, при которых мы получаем непрерывность M_7 и M_8.

Возьмем на σ некоторую точку N, и пусть l — прямая пересечения касательной плоскости к σ в точке N с плоскостью $t=\text{const}$, проходящей через точку N Выберем эту прямую l за ось y Ось t имеет в точке N фиксированное направление, перпендикулярное к направлению прямой l. Тем самым определится и ось x Рассмотрим сначала тот случай, когда равен нулю первый из множителей, стоящих в левой части уравнения (61):

$$\rho\cos^2(n, t)-(\lambda+2\mu)[\cos^2(n, x)+\cos^2(n, y)]=0, \tag{62}$$

что соответствует скорости продольных волн. В силу сделанного выбора оси y, мы имеем в точке $N\cos(n, y)=0$, и, кроме того, производные u_y и v_y остаются непрерывными при переходе через σ в точке N. Составим выражение:

$$(\lambda+2\mu)u_x\cos(n, x)-\rho u_t\cos(n, t)=r. \tag{63}$$

Пользуясь (62), можем написать

$$r\cos(n, x)=-\rho\cos(n, t)M_3,$$

откуда вытекает, что, в силу кинематических условий совместности и уравнения (62), выражение (63) непрерывно в точке N. При этом M_7 оказывается также непрерывным в точке N, а для непрерывности M_8 оказывается необходимым и достаточным непрерывность выражения

$$\mu v_x\cos(n, x)-\rho v_t\cos(n, t)=M. \tag{64}$$

Кроме того, мы имеем непрерывность выражения

$$v_x\cos(n, t)-v_t\cos(n, x)=-M_6. \tag{65}$$

Определитель системы уравнений (64) и (65), равный $\rho\cos^2(n,t)-\mu\cos^2(n,x)$, в силу (62) и $\cos(n,y)=0$, отличен от нуля, и, следовательно, непрерывность выражения (64) равносильна непрерывности частных производных v_x и v_t. Кроме того, мы уже имеем непрерывность частной производной v_y в точке N. Пересечение поверхности σ с плоскостью $t=\text{const}$ является линией разрыва на плоскости (x, y) в заданный момент времени, а прямая l есть касательная к этой линии в точке N. Величина v есть проекция вектора смещения на направление l, касательное к линии разрыва Мы показали выше, что все производные первого порядка от v должны быть непрерывными в точке N, т. е. сильный разрыв может испытывать только составляющая u вектора смещения на направление, перпендикулярное к линии разрыва (продольный разрыв). Итак, если выполнены кинематические условия совместности и уравнение (62), то для соблюдения динамических условий совместности необходимо и достаточно, чтобы сильный разрыв имела только составляющая вектора смещения, нормальная к движущейся в плоскости (x, y) линии разрыва. Совершенно так же можно рассмотреть и уравнение

$$\rho\cos^2(n, t)-\mu[\cos^2(n, x)+\cos^2(n, y)]=0.$$

При этом окажется, что сильный разрыв может испытывать только составляющая вектора смещения на касательную к линии разрыва.

Положим, что поле смещений потенциально:

$$(u, v)=\operatorname{grad}\varphi,$$

откуда следует, что

$$u_y = v_x.$$

Выбирая по-прежнему координатные оси, мы будем иметь в точке N непрерывность производных u_y, v_y и v_x. Но тогда из непрерывности M_6 будет следовать и непрерывность v_t, и, таким образом, в случае потенциального поля, разрыв может испытывать только составляющая вектора смещения на нормаль к линии разрыва.

Положим теперь, что поле смещений соленоидально, т. е.

$$u_x + v_y = 0.$$

При этом мы будем иметь непрерывность производных u_y, v_y и u_x, а следовательно, в силу непрерывности M_3, и производной u_t, т. е. в соленоидальном поле возможен только разрыв составляющей вектора смещения на касательную к линии разрыва.

Выясним теперь механический смысл изложенной выше теории, а именно мы покажем, что наличие формулы (60) в простейших частных случаях показывает, что закон импульсов оказывается справедливым и для объема, содержащего внутри себя поверхность разрыва. Положим в формуле $u' = 1$ и $v' = 0$. При этом, согласно формулам (58_1), составляющие тензора напряжений для (u', v') будут равны нулю и формула (60) приведется к виду

$$\iiint\limits_D X\,d\tau = -\iint\limits_S P_x(u, v)\,dS. \tag{66}$$

Совершенно так же, если положить $u' = 0$; $v' = 1$, то получится формула

$$\iiint\limits_D Y\,d\tau = -\iint\limits_S P_y(u, v)\,dS. \tag{67}$$

За область D возьмем цилиндр, образующие которого параллельны оси t, и пусть основания этого цилиндра S_1 и S_2 находятся в плоскостях $t = t_1$ и $t = t_2$. Положим, что внутри этого цилиндра находится поверхность разрыва σ. На нижнем и верхнем основаниях S_1 и S_2 мы имеем $\cos(n, x) = \cos(n, y) = 0$. На нижнем основании $\cos(n, t) = -1$ и на верхнем основании $\cos(n, t) = +1$. На боковой поверхности $\cos(n, t) = 0$. Обозначая через S_t переменное сечение цилиндра плоскостью, перпендикулярной к его образующим,и через l_t линию пересечения этой плоскости с боковой поверхностью цилиндра, мы можем переписать формулу (66) в виде

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\left[\iint\limits_{S_t} X\,dx\,dy\right]dt = \iint\limits_{S_t} \rho u_t\,dx\,dy\bigg|_{t=t_2} - \iint\limits_{S_t} \rho u_t\,dx\,dy\bigg|_{t=t_1} = \int\limits_{t_1}^{t_2}\left[\int\limits_{l_t} \sigma_n\,ds\right]dt,$$

где

$$\sigma_n = \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy}\cos(n, y),$$

или

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\left[\iint\limits_{S_t} X\,dx\,dy\right]dt + \int\limits_{t_1}^{t_2}\left[\int\limits_{l_t} \sigma_n\,ds\right]dt = \iint\limits_{S_t} \rho u_t\,dx\,dy\bigg|_{t=t_2} - \iint\limits_{S_t} \rho u_t\,dx\,dy\bigg|_{t=t_1}.$$

Первое слагаемое левой части дает импульс объемных сил, приложенных к площадке S_t плоскости (x, y) за промежуток времени $[t_1, t_2]$. Второе слагаемое дает импульс сил напряжения, действующих на контуре этой площадки, а разность, стоящая справа, представляет собою приращение количества движения, рассчитанное для этой же площадки, причем как импульс силы, так и приращение количества движения спроектированы на ось x. Совершенно так же формула (67) даст нам аналогичное соотношение для проекций импульса силы и приращения количества движения на ось y Таким образом, мы действительно получаем для объема D, содержащего поверхность разрыва, закон импульса.

71. Характеристики и большие частоты. Существует связь между теми формулами, которые мы получили выше при изложении теории характеристик систем уравнений, и теми формулами, которые получаются, если пытаться приближенно удовлетворить системе дифференциальных уравнений функциями специального типа. Пусть имеется система уравнений второго порядка:

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{k,\, l=1}^{n} a_{ij}^{kl} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_l} + \ldots = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{68}$$

Будем пытаться удовлетворить этой системе, задавая функции u_j в виде

$$u_j = X_j e^{i\omega\Phi} \quad (j = 1, 2, \ldots, m), \tag{69}$$

где X_l и Φ — некоторые искомые функции независимых переменных и ω — число Подставляя выражения (69) в уравнение (68) и оставляя лишь члены, содержащие квадрат числа ω, мы придем к следующей системе уравнений:

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{k,\, l=1}^{n} a_{ij}^{kl} X_j \Phi_{x_k} \Phi_{x_l} = 0 \quad \left(i = 1, 2, \ldots, m\right). \tag{70}$$

Будем рассматривать эту систему как систему однородных уравнений относительно X_j Чтобы получить решение, отличное от нулевого, мы должны приравнять нулю определитель этой системы. Таким образом, мы приходим к уравнению первого порядка для искомой функции Φ:

$$\left|\omega'_{ij}\right| = 0 \quad \left(\omega'_{ij} = \sum_{k,\, l=1}^{n} a_{ij}^{kl} \Phi_{x_k} \Phi_{x_l}\right),$$

которое совпадает с уравнением для характеристических поверхностей. Взяв какое-нибудь решение этого уравнения, мы сможем определить X_j, вообще говоря, с точностью до произвольного множителя из системы (70). Эта система совпадает с системой (21), которую мы имели для определения коэффициентов прерывности h_j. Уравнения этой последней системы должны были иметь место лишь на поверхности волны Уравнения (70) должны иметь место везде. Но при этом мы лишь приближенно удовлетворили системе (68) функциями вида (69). В данном случае $\Phi = \mathrm{const}$ суть поверхности одинаковых фаз

Рассмотрим более подробно случай одного волнового уравнения:

$$u_{tt} = a^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}), \tag{71}$$

и будем искать его решение в виде гармонического колебания частоты ω по отношению ко времени t:

$$u = Ae^{i\omega(t+\Phi)},$$

где A и Φ — искомые функции только координат (x, y, z). Дело сводится к подстановке выражения

$$v = Ae^{i\omega\Phi} \tag{72}$$

в уравнение

$$\Delta v + k^2 v = 0 \quad \left(k^2 = \frac{\omega^2}{a^2}\right). \tag{73}$$

Мы имеем

$$v_x=(A_x+i\omega A\Phi_x)\,e^{i\omega\Phi},$$
$$v_{xx}=\left(A_{xx}+i\omega A\Phi_{xx}+2i\omega A_x\Phi_x-\omega^2 A\Phi_x^2\right)e^{i\omega\Phi}.$$

Аналогичные формулы получатся и для производных по y и z. Подставляя в уравнение (73) и приравнивая нулю коэффициент при ω^2, получим уравнение для Φ.

$$\Phi_x^2+\Phi_y^2+\Phi_z^2=\frac{1}{a^2}. \tag{74}$$

Приравнивая еще нулю коэффициент при ω, получим уравнение, в которое будет входить амплитуда $A(x, y, z)$ решения (72):

$$A\,\Delta\Phi+2\,(A_x\Phi_x+A_y\Phi_y+A_z\Phi_z)=0,$$

или

$$\operatorname{grad}\lg A\cdot\operatorname{grad}\Phi=-\frac{1}{2}\,\Delta\Phi. \tag{75}$$

Легко установить связь уравнения (74) с уравнением характеристических поверхностей. Для уравнения (71) мы имеем следующее уравнение характеристических поверхностей:

$$a^2\left[\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial z}\right)^2\right]=\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial t}\right)^2,$$

и подставляя $\omega_1=t+\Phi$, мы и получим уравнение (74). Обозначая через $\mathbf{n}$ единичный вектор нормали в некоторой точке M к поверхности $\Phi=\text{const}$ одинаковых фаз, проходящей через эту точку, мы можем написать

$$\operatorname{grad}\Phi=\varphi\,(x, y, z)\,\mathbf{n},$$

где $\varphi(x, y, z)$ — длина вектора $\operatorname{grad}\Phi$ в точке (x, y, z). Уравнение (75) при этом может быть записано в виде

$$\operatorname{grad}_n\lg A=-\frac{1}{2\varphi}\operatorname{div}(\varphi\mathbf{n}), \tag{76}$$

где $\operatorname{grad}_n\lg A$ — проекция $\operatorname{grad}\lg A$ на направление n Уравнения (74) и (76) должны иметь место во всем пространстве Но мы удовлетворили уравнению (71) только приближенно.

Совершенно так же, если мы в уравнения Максвелла (36) подставим

$$\mathbf{E}=\mathbf{e}e^{i\omega\Phi};\quad \mathbf{H}=\mathbf{h}e^{i\omega\Phi}, \tag{77}$$

где $\mathbf{e}$ и $\mathbf{h}$ — векторы, Φ — скалярная функция, зависящие от (x_1, x_2, x_3, t), и ω — число, то мы получим, собирая члены, содержащие множитель ω.

$$\Phi_t\frac{\varepsilon}{c}\,\mathbf{e}=\operatorname{grad}\Phi\times\mathbf{h}. \tag{78}$$

Это уравнение совпадает, по существу, с уравнением (46) из [69]. Совершенно так же получится и уравнение, аналогичное уравнению (47) Уравнение (78) должно иметь место не только на поверхности $\Phi=\text{const}$, и эта последняя поверхность не есть поверхность разрыва, а поверхность одинаковых фаз в решении (77).

72. Случай двух независимых переменных. Рассмотрим систему уравнений первого порядка с двумя независимыми переменными и предположим, что она разрешена относительно частных производных по x_2. Таким образом, мы имеем систему в виде

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_2} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} + \Phi_i(x_1, x_2, u_j) \quad (i = 1, \ldots m), \tag{79}$$

где a_{ij} могут зависеть от x_1, x_2. Вводя векторы $\mathbf{u}$ и $\mathbf{\Phi}$ с составляющими u_i и Φ_i и матрицу A с элементами a_{ij}, можем переписать систему (79) в виде одного векторного равенства:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_2} = A \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} + \mathbf{\Phi}(x_1, x_2, u_j). \tag{80}$$

Введем вместо $\mathbf{u}$ новый вектор $\mathbf{v}$ по формуле

$$\mathbf{u} = B\mathbf{v}, \tag{81}$$

где B — некоторая матрица с элементами b_{ik}, зависящими от x_1, x_2, имеющими непрерывные производные в некоторой области D плоскости (x_1, x_2), и с определителем, отличным от нуля. Мы имеем

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} = B \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} + \frac{\partial B}{\partial x_i} \mathbf{v} \quad (i = 1, 2), \tag{82}$$

где дифференцирование матрицы B сводится к дифференцированию ее элементов. Подставляя (81) и (82) в (80), получим уравнение для $\mathbf{v}$:

$$B \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_2} = AB \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_1} + \mathbf{\Psi},$$

где $\mathbf{\Psi}$ — вектор, составляющие которого зависят от (x_1, x_2, v_j). Умножая обе части на B^{-1}, получим преобразованное уравнение в виде

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_2} = B^{-1}AB \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_1} + \mathbf{\Psi}_1. \tag{83}$$

Выберем теперь, если возможно, матрицу B так, чтобы матрица $B^{-1}AB$ имела диагональную форму. Это связано, как известно, с решением характеристического уравнения для матрицы A **[III$_1$; 27]**:

$$|A - \lambda| = 0, \tag{84}$$

где в левой части стоит определитель матрицы $(A - \lambda)$, или, в раскрытом виде:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda, & a_{12}, & \ldots, & a_{1m} \\ a_{21}, & a_{22} - \lambda, & \ldots, & a_{2m} \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \ldots, & a_{mm} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{85}$$

Положим, что в окрестности некоторой точки $\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\right)$ коэффициенты a_{ik} имеют непрерывные производные и уравнение (85) имеет различные корни $\lambda_k(x_1, x_2)$ $(k=1, \ldots, m)$. Последнее существенно для дальнейшего. При этом в упомянутой окрестности мы сможем, пользуясь методом, описанным в [**III**$_1$; **27**], построить матрицу B с указанными выше свойствами так, чтобы матрица $B^{-1}AB$ привелась к чисто диагональной форме, и при этом уравнение (83) мы можем написать, выписывая все составляющие, в виде

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_2} - \lambda_i(x_1, x_2)\frac{\partial v_i}{\partial x_1} + \psi_i(x_1, x_2, v_j) = 0 \qquad (i=1, 2, \ldots, m). \tag{86}$$

Если все $\lambda_i(x_1, x_2)$ — вещественны в упомянутой окрестности, то система называется *гиперболической* в этой окрестности.

Пользуясь обозначениями из [**63**], мы имеем для системы

$$a_{ij}^{(k)} = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j; \qquad a_{ii}^{(2)} = 1; \qquad a_{ii}^{(1)} = -\lambda_i(x_1, x_2), \tag{87}$$

для величин ω_{ij}, определяемых формулами (5), получаем

$$\omega_{ij} = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j; \quad \omega_{ii} = \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} - \lambda_i(x_1, x_2)\frac{\partial \omega_1}{\partial x_1},$$

уравнение (6) принимает вид

$$\left[\frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} - \lambda_1(x_1, x_2)\frac{\partial \omega_1}{\partial x_1}\right] \ldots \left[\frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} - \lambda_m(x_1, x_2)\frac{\partial \omega_1}{\partial x_1}\right] = 0,$$

и оно распадается на m линейных уравнений:

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} - \lambda_i(x_1, x_2)\frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} = 0 \qquad (i=1, \ldots, m). \tag{88}$$

Если $\omega_1(x_1, x_2)$ — решение одного из этих уравнений, то семейство $\omega_1(x_1, x_2) = C$ есть семейство характеристических линий или характеристик для системы (86). Уравнение (88) равносильно обыкновенному уравнению:

$$dx_1 + \lambda_i(x_1, x_2)\,dx_2 = 0, \quad \text{т. е.} \quad \frac{dx_1}{dx_2} = -\lambda_i(x_1, x_2), \tag{89}$$

и через каждую точку плоскости той области, где мы имеем функции $\lambda_i(x_1, x_2)$ с непрерывными производными первого порядка, проходит m характеристик.

Рассмотрим точки, достаточно близкие к оси $x_2 = 0$, и пусть l_i — часть интегральной линии уравнения (89), проходящей через точку (x_1, x_2), между этой точкой и пересечением этой интегральной линии с осью $x_2 = 0$, в некоторой точке $\left(x_1^{(i)}, 0\right)$. Вдоль линии l_i мы можем считать любую функцию $\psi(x_1, x_2)$ функцией только от x_2 и, в силу (89), имеем

$$\frac{d\psi}{dx_2} = \frac{\partial \psi}{\partial x_2} - \lambda_i(x_1, x_2)\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \quad \text{вдоль } l_i.$$

Таким образом, система уравнений (86) равносильна следующей системе интегральных уравнений:

$$v_i(x_1, x_2) = v_i\left(x_1^{(i)}, 0\right) - \int_{l_i} \psi_i(x_1, x_2, v_j)\, dx_2 \quad (i = 1, \ldots, m). \tag{90}$$

Принимая, что на оси $x_2 = 0$ нам заданы значения функций $v_i(x_1, x_2)$, мы можем считать известными $v_i\left(x_1^{(i)}, 0\right)$ и можем применить к системе (90) метод последовательных приближений. Это дает теорему существования и единственности решения задачи Коши и непрерывную зависимость от начальных данных. Подробное изложение этого вопроса, а также рассмотрение того случая, кода уравнение (85) имеет кратные корни, можно найти в упомянутой выше книге И. Г. Петровского.

73. Примеры. 1. Рассмотрим систему уравнений, которой определяются вещественная и мнимая части аналитической функции [III₂, 2]:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0; \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = 0. \tag{91}$$

Мы имеем

$$a_{11}^{(1)} = a_{21}^{(2)} = a_{22}^{(1)} = 1; \quad a_{12}^{(2)} = -1,$$

и остальные $a_{ij}^{(k)}$ равны нулю. Левая часть уравнения (6) при замене $\frac{\partial \omega_1}{\partial x_k}$ на α_k имеет вид $\alpha_1^2 + \alpha_2^2$, и, следовательно, система (91) имеет эллиптический тип. Принимая во внимание отмеченную выше связь этой системы с аналитическими функциями, можем утверждать, что всякое ее решение с непрерывными производными первого порядка есть аналитическая функция x_1 и x_2.

2. Рассмотрим систему (Перрон (Perron) — Math. Z, 1927, 27, № 4)

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0; \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - a\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + F(x_2) = 0, \tag{92}$$

где a — постоянная.

Левая часть уравнения (6) при замене $\frac{\partial \omega_1}{\partial x_k}$ на α_k имеет вид $\alpha_1^2 - a\alpha_2^2$, и, следовательно, система — эллиптического типа при $a < 0$ и параболического при $a = 0$. Уравнение (85), если написать систему в форме, решенной относительно частных производных по x_1, имеет вид

$$\begin{vmatrix} -\lambda, & 1 \\ a, & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{т. е.} \quad \lambda^2 - a = 0,$$

и при $a > 0$ оно имеет вещественные, различные корни, т. е. система гиперболическая при $a > 0$.

Положим сначала, что $a > 0$ Поступая, как указано в [72], вводим вместо u_1, u_2 новые функции:

$$v_1 = \sqrt{a}u_1 + u_2; \quad v_2 = \sqrt{a}u_1 - u_2, \tag{93}$$

и получаем два раздельных уравнения для v_1 и v_2:

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \sqrt{a}\,\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + F(x_2) = 0; \quad \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \sqrt{a}\,\frac{\partial v_2}{\partial x_2} - F(x_2) = 0. \tag{94}$$

После введения новых независимых переменных:

$$2\xi = \sqrt{a}x_1 + x_2, \quad 2\eta = -\sqrt{a}x_1 + x_2,$$

система переписывается в виде

$$-\sqrt{a}\,\frac{\partial v_1}{\partial \eta} + F(\xi + \eta) = 0; \quad \sqrt{a}\,\frac{\partial v_2}{\partial \xi} - F(\xi + \eta) = 0. \tag{95}$$

Найдем то решение системы (95), которое удовлетворяет начальному условию:

$$v_1\,|_{x_1=0} = v_2\,|_{x_1=0} = 0, \quad \text{т. е.} \quad v_1\,|_{\eta=\xi} = 0; \quad v_2\,|_{\eta=\xi} = 0.$$

Пользуясь (95), получаем

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{a}}\int\limits_{2\xi}^{\xi+\eta} F(t)\,dt; \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{a}}\int\limits_{2\eta}^{\xi+\eta} F(t)\,dt.$$

В исходных независимых переменных:

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{a}}\int\limits_{\sqrt{a}x_1+x_2}^{x_2} F(t)\,dt; \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{a}}\int\limits_{-\sqrt{a}x_1+x_2}^{x_2} F(t)\,dt,$$

и согласно формулам (93) сможем определить u_1 и u_2, которые являются решением системы (92) и удовлетворяют начальным условиям:

$$u_1\,|_{x_1=0} = u_2\,|_{x_1=0} = 0. \tag{96}$$

Такое решение, очевидно, единственно.

При $a = 0$ система (92) принимает вид

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + F(x_2) = 0,$$

и мы получаем ее единственное решение, удовлетворяющее условиям (96):

$$u_1 = -\frac{x_1^2}{2}F'(x_2), \quad u_2 = -x_1F(x_2),$$

причем мы должны предположить, что $F(x_2)$ имеет непрерывную производную второго порядка.

Рассмотрим, наконец, тот случай, когда $a = -b^2 < 0$. Полагая

$$bx_1 = x \quad x_2 = y, \quad v_1 = bu_1 + \frac{1}{b}\int\limits_c^y F(t)\,dt; \quad v_2 = u_2, \tag{97}$$

переписываем систему (92) в виде

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0.$$

Отсюда видно, что $v_1 + v_2 i$ должна быть регулярной функцией $z = x + yi$, и, в силу (96) и (97) эта функция при $x \to 0$ должна стремиться к вещественной функции

$$\frac{1}{b}\int\limits_c^y F(t)\,dt. \tag{98}$$

Мы можем утверждать, что упомянутая регулярная функция должна быть аналитически продолжима через прямую $x = 0$ и следовательно, должна быть аналитической функцией и на самой этой прямой [III₂; 24] Тем самым функция (98), а потому и $F(y)$, должны быть аналитическими функциями при вещественных y Разлагая функцию (98) по степеням $(y - y_0)$, где y_0 — какое либо вещественное число

$$-\frac{1}{b}\int_c^y F(t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (y - y_0)^k,$$

мы получим

$$v_1 + v_2 i = \sum_{k=0}^{\infty} (-i)^k a_k \left(z - iy_0\right)^k \qquad (z = x + yi)$$

при z, близких к iy_0 Зная v_1 и v_2, найдем u_1 и u_2 согласно (97).

ГЛАВА II

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

§ 1. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ В СЛУЧАЕ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

74. Функция Грина линейного уравнения второго порядка. Настоящая глава будет посвящена рассмотрению предельных задач как для обыкновенных дифференциальных уравнений, так и для уравнений с частными производными. Мы неоднократно уже встречались с решением таких задач. Цель настоящей главы — дать систематическое изложение вопроса.

Применение метода Фурье к решению предельных задач математической физики приводило нас неоднократно к следующей предельной задаче для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, содержащего параметр: найти такие значения параметра λ, при которых в конечном промежутке $[a, b]$ существует отличное от нуля решение однородного уравнения

$$\frac{d}{dx}[p(x)y'] + [\lambda r(x) - q(x)]y = 0, \tag{1}$$

удовлетворяющее на концах этого промежутка некоторым однородным предельным условиям:

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0; \quad \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \tag{2}$$

где α_k и β_k — заданные числа. При этом мы, конечно, считаем, что по крайней мере одно из чисел α_1 и α_2, а также β_1 и β_2, отлично от нуля. Мы будем предполагать, что $p(x)$, $q(x)$ и $r(x)$ — непрерывные функции в замкнутом промежутке $[a, b]$, причем функция $p(x)$ не обращается в этом промежутке в нуль и имеет непрерывную производную. Введем специальное обозначение для суммы тех слагаемых левой части уравнения (1), которые не содержат параметра λ:

$$L(y) = \frac{d}{dx}[p(x)y'] - q(x)y.$$

Будем, как всегда, называть *собственными числами* или *собственными значениями* те значения параметра λ, при которых поставленная однородная задача имеет не нулевое решение, а *собственными функциями* — сами эти решения. Они определяются, очевидно, с точностью до постоянного множителя. Нетрудно видеть, что всякому собственному значению может соответствовать только одна собственная функция. Действительно, положим, наоборот, что при некотором значении λ существуют два линейно-независимых решения уравнения (1), удовлетворяющих предельным условиям (2). При этом оказалось бы, что и общий интеграл уравнения (1) удовлетворяет этим предельным условиям (2). Но этого быть не может, так как можно определить решение уравнения (1) при таких начальных данных для $y(a)$ и $y'(a)$, которые не удовлетворяют первому из предельных условий (2). Пользуясь элементарными преобразованиями, которые мы применяли много раз **[III₂; 105, 146, 158]**, можно показать, что собственные функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, соответствующие различным собственным значениям, обладают свойством ортогональности, а именно:

$$\int_a^b r(x)\varphi_1(x)\varphi_2(x)\,dx = 0.$$

Мы введем сейчас для оператора $L(y)$ функцию, аналогичную статическому прогибу струны под действием сосредоточенной силы, который мы рассматривали в **[IV₁; 1]**. В этом последнем случае роль оператора $L(y)$ играл оператор y''. Для того чтобы естественным путем придти к выяснению свойств упомянутой выше функции, рассмотрим неоднородное уравнение

$$L(y) = \frac{d}{dx}[p(x)y'] - q(x)y = -f(x) \tag{3}$$

и предположим, что функция $f(x)$ равна нулю во всем промежутке $[a, b]$, кроме малого промежутка $[\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon]$, где ξ — фиксированная точка, лежащая внутри $[a, b]$, причем выполнено условие

$$\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} f(x)\,dx = 1. \tag{4}$$

При стремлении ε к нулю мы и получим в пределе аналог сосредоточенной в точке $x=\xi$ силы. Рассмотрим при этом предположении относительно $f(x)$ решение $y_\varepsilon(x)$ уравнения (3), удовлетворяющее предельным условиям (2), считая, что такое решение существует. Интегрируя обе части уравнения (3) по x и принимая во внимание (4), получим

$$p(x)\,y'_\varepsilon(x)\Big|_{x=\xi-\varepsilon}^{x=\xi+\varepsilon} - \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} q(x)\,y_\varepsilon(x)\,dx = -1,$$

или в пределе, при $\varepsilon \to 0$,

$$y'(\xi+0) - y'(\xi-0) = -\frac{1}{p(\xi)},$$

т. е. производная $y'(x)$ упомянутого выше решения должна иметь в точке $x=\xi$ разрыв непрерывности первого рода со скачком, равным $-\frac{1}{p(\xi)}$. Это решение будет зависеть, конечно, и от того, какую именно точку промежутка $[a, b]$ мы выбираем за точку ξ, так что оно будет функцией двух переменных (x, ξ), и мы его в дальнейшем будем обозначать через $G(x, \xi)$ и называть функцией Грина оператора $L(y)$ при предельных условиях (2). Предыдущие соображения приводят нас к следующему строгому определению функции Грина: *функцией Грина оператора $L(y)$ при предельных условиях* (2) *называется функция $G(x, \xi)$, удовлетворяющая следующим условиям*: 1) *она определена и непрерывна в квадрате k_0, определяемом неравенствами $a \leqslant x$, $\xi \leqslant b$*; 2) *как функция переменной x, она имеет при $a \leqslant x < \xi$ и $\xi < x \leqslant b$ непрерывные производные до второго порядка и удовлетворяет однородному уравнению $L(y)=0$*; 3) *как функция от x, она удовлетворяет предельным условиям* (2); 4) *на диагонали упомянутого квадрата*, т. е. *при $x=\xi$, ее производная по аргументу x, которую мы будем обозначать через $G'(x, \xi)$, имеет разрыв первого рода, причем должны быть удовлетворены следующие два условия*:

$$\left.\begin{aligned} G'(\xi+0, \xi) - G'(\xi-0, \xi) &= -\frac{1}{p(\xi)}, \\ G'(\xi, \xi+0) - G'(\xi, \xi-0) &= \frac{1}{p(\xi)}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Эти последние условия сводятся к одному следующему требованию: при приближении к любой точке $x=\xi$ упомянутой диагонали как сверху, т. е. из области $\xi > x$, так и снизу, т. е. из области $\xi < x$, производная $G'(x,\xi)$ должна иметь определенные значения, и разность этих предельных значений должна равняться $\frac{1}{p(\xi)}$. В каждой из этих двух областей вторая производная по первому аргументу выражается, в силу $L(G)=0$, следующим образом:

$$p(x)\,G''(x, \xi) = -p'(x)\,G'(x, \xi) + q(x)\,G(x, \xi),$$

и, следовательно, и эта вторая производная будет иметь определенные предельные значения при приближении к точкам диагонали с той или иной стороны.

Докажем теперь, что существует, и притом единственная, функция Грина, удовлетворяющая всем указанным выше условиям. Мы будем при этом предполагать, что $\lambda = 0$ *не есть собственное значение*, т. е. что уравнение $L(y) = 0$ не имеет решений, отличных от тождественного нуля, удовлетворяющих условиям (2). В дальнейшем мы увидим, каким образом надо видоизменить определение функции Грина в том случае, когда $\lambda = 0$ есть собственное значение. Построим решение $y_1(x)$ однородного уравнения $L(y) = 0$, принимая за начальные значения $y_1(a)$ и $y_1'(a)$ некоторые числа, удовлетворяющие первому из условий (2). Это решение $y_1(x)$ и вообще все решения $c_1 y_1(x)$, при произвольном постоянном c_1, будут удовлетворять первому из предельных условий. Нетрудно видеть, что этим и исчерпываются все решения, удовлетворяющие первому из условий (2). Действительно, если некоторое решение $y(x)$ удовлетворяет этому условию, то мы имеем два однородных уравнения относительно α_1 и α_2:

$$\alpha_1 y_1(a) + \alpha_2 y_1'(a) = 0; \quad \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0,$$

и поскольку мы, естественно, считаем, что по крайней мере одно из этих чисел отлично от нуля, определитель написанной системы должен равняться нулю, т. е. определитель Вронского решений $y(x)$ и $y_1(x)$ обращается в нуль при $x = a$, а потому $y(x)$ и $y_1(x)$ линейно-зависимы, т. е. $y(x) = cy_1(x)$ **[II; 25]**.

Совершенно так же пусть $c_2 y_2(x)$, где c_2 — произвольная постоянная, суть решения уравнения $L(y) = 0$, удовлетворяющие второму из условий (2). Согласно теореме существования и единственности, оба решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ определены во всем промежутке $[a, b]$ и линейно-независимы. Действительно, если бы они оказались линейно-зависимыми, то $y_1(x)$ удовлетворяло бы обоим предельным условиям (2), и $\lambda = 0$ оказалось бы собственным значением, что противоречит сделанному выше предположению. При $x \leqslant \xi$ функция $G(x; \xi)$ должна иметь вид $c_1 y_1(x)$, а при $x \geqslant \xi$ она должна иметь вид $c_2 y_2(x)$. Остается подобрать постоянные c_1 и c_2 так, чтобы в точке $x = \xi$ функция была непрерывной, а ее производная имела указанный выше скачок. Это приводит нас к следующим двум уравнениям для определения c_1 и c_2:

$$\left.\begin{aligned} &c_1 y_1(\xi) - c_2 y_2(\xi) = 0, \\ &c_1 y_1'(\xi) - c_2 y_2'(\xi) = \frac{1}{p(\xi)}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Определитель этой системы $[y_2(\xi) y_1'(\xi) - y_1(\xi) y_2'(\xi)]$ отличен от нуля, поскольку наши решения линейно-независимы, и таким образом мы получаем определенные значения для постоянных c_1 и c_2. Определитель Вронского наших двух решений, как нетрудно видеть [II; 25], должен выражаться формулой

$$y_1(x)\,y_2'(x) - y_2(x)\,y_1'(x) = \frac{c}{p(x)},$$

где c — некоторая постоянная, отличная от нуля. Добавляя постоянный множитель, например к решению $y_1(x)$, мы можем считать, что наши решения будут удовлетворять соотношению

$$p(x)\left[y_1(x)\,y_2'(x) - y_2(x)\,y_1'(x)\right] = 1.$$

Из него непосредственно следует, что система (6) имеет решение: $c_1 = y_2(\xi)$ и $c_2 = y_1(\xi)$, и функция Грина $G(x, \xi)$ определяется следующим образом:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} y_1(x)\,y_2(\xi) & (x \leqslant \xi), \\ y_2(x)\,y_1(\xi) & (x \geqslant \xi). \end{cases} \tag{7}$$

Нетрудно проверить непосредственно, что она удовлетворяет всем четырем условиям. Ее единственность непосредственно вытекает из предыдущих рассуждений.

75. Приведение к интегральному уравнению. Рассмотрим неоднородное уравнение

$$L(y) = \frac{d}{dx}\left[p(x)\,y'\right] - q(x)\,y = -f(x), \tag{8}$$

где $f(x)$ — заданная, непрерывная в промежутке $[a, b]$ функция. Будем искать решение уравнения (8), удовлетворяющее предельным условиям (2). Такое решение может быть только одно, так как если бы их было два, то их разность удовлетворяла бы однородному уравнению $L(y) = 0$ и предельным условиям (2), т. е. $\lambda = 0$ было бы собственным значением. Проверим, что единственное решение уравнения (8), удовлетворяющее предельным условиям (2), дается формулой

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi)\,f(\xi)\,d\xi. \tag{9}$$

Аналог этой формулы, который был указан в [IV$_1$; 1], имел тот простой механический смысл, что, зная статический прогиб от сосредоточенной силы, мы могли путем интегрирования получить статический прогиб и при непрерывно распределенной силе.

Перейдем к доказательству того, что функция, определяемая формулой (9), удовлетворяет (8) и предельным условиям (2). Принимая во внимание указанный выше разрыв функции Грина, разобьем промежуток интегрирования на два:

$$y = \int_a^x G(x, \xi)\,f(\xi)\,d\xi + \int_x^b G(x, \xi)\,f(\xi)\,d\xi.$$

Дифференцируя по x, найдем

$$y' = \int_a^x G'(x, \xi) f(\xi) dx + G(x, x-0) f(x) + \\ + \int_x^b G'(x, \xi) f(\xi) d\xi - G(x, x+0) f(x)$$

или, в силу непрерывности функции Грина, т. е. в силу $G(x, x+0) = G(x, x-0)$:

$$y' = \int_a^x G'(x, \xi) f(\xi) d\xi + \int_x^b G'(x, \xi) f(\xi) d\xi = \int_a^b G'(x, \xi) f(\xi) d\xi. \qquad (10)$$

Из формул (9) и (10) и того факта, что $G(x, \xi)$ удовлетворяет предельным условиям (2), непосредственно вытекает, что и функция (9) удовлетворяет этим предельным условиям. Для проверки уравнения (8) дифференцируем y' еще один раз по x. После несложных преобразований получим

$$y'' = \int_a^b G''(x, \xi) f(\xi) d\xi + [G'(x, x-0) - G'(x, x+0)] f(x),$$

и из (5) вытекает

$$y'' = \int_a^b G''(x, \xi) f(\xi) d\xi - \frac{f(x)}{p(x)}. \qquad (11)$$

Подставляя в левую часть (8) вместо y, y' и y'' их выражения (9), (10) и (11), получим

$$\int_a^b L(G) f(\xi) d\xi - f(x) = -f(x),$$

т. е. уравнение (8) удовлетворено, ибо функция $G(x, \xi)$ является решением однородного уравнения $L(y) = 0$. Отметим еще, что из написанных выше формул непосредственно вытекает, что функция y, определяемая формулой (9), имеет во всем промежутке непрерывные производные до второго порядка. Мы приходим, таким образом, к следующему утверждению: *Если $\lambda = 0$ не есть собственное значение дифференциального уравнения* (8), *то это уравнение при любой заданной непрерывной в* $[a, b]$ *функции* $f(x)$ *имеет единственное решение, удовлетворяющее предельным условиям* (2), *и это решение определяется формулой* (9). Можно еще сказать иначе: *При любой заданной не-*

прерывной функции $f(x)$ *функция* (9) *имеет непрерывные производные до второго порядка, удовлетворяет уравнению* (8) *и предельным условиям* (2).

Заметим, что если $y(x)$ есть любая функция, имеющая непрерывные производные до второго порядка в промежутке $[a, b]$ и удовлетворяющая предельным условиям (2), то мы можем, подставляя эту функцию в левую часть уравнения (8), построить соответствующую непрерывную функцию $f(x)$, и при этом, согласно доказанному выше, функция $y(x)$ будет выражаться через $f(x)$ по формуле (9).

Таким образом, формулы (8) и (9) устанавливают взаимно-однозначное соответствие между функциями двух классов: к первому принадлежат функции $y(x)$, имеющие в промежутке $[a, b]$ непрерывные производные до второго порядка и удовлетворяющие условиям (2), а ко второму — функции $f(x)$, непрерывные в промежутке $[a, b]$. Переход от $y(x)$ к $f(x)$ осуществляется с помощью формулы (8), а от $f(x)$ к $y(x)$ по формуле (9).

Из сказанного выше непосредственно вытекает возможность приведения предельной задачи, сформулированной в начале предыдущего параграфа, к интегральному уравнению. Действительно, переписав уравнение (1) в форме

$$L(y) = -\lambda r(x) y,$$

мы из установленных выше результатов непосредственно получаем, что это уравнение с предельным условием (2) равносильно интегральному уравнению

$$y(x) = \lambda \int_a^b G(x, \xi) r(\xi) y(\xi) d\xi. \tag{12}$$

Совершенно так же неоднородное уравнение

$$\frac{d}{dx}[p(x) y'] + [\lambda r(x) - q(x)] y = F(x) \tag{12_1}$$

с предельным условием (2) равносильно интегральному уравнению

$$y(x) = F_1(x) + \lambda \int_a^b G(x, \xi) r(\xi) y(\xi) d\xi, \tag{12_2}$$

где

$$F_1(x) = -\int_a^b G(x, \xi) F(\xi) d\xi,$$

причем в обоих интегральных уравнениях мы должны искать непрерывное решение $y(x)$.

76. Симметрия функции Грина. Формула (7) определяет функцию Грина не только при $a < x < b$, но и на концах $x = a$ и $x = b$, т. е. во всем замкнутом квадрате k_0: $a \leqslant x, \xi \leqslant b$, и из этой формулы непосредственно вытекает, что функция Грина обладает во всем квадрате свойством симметрии:

$$G(x, \xi) = G(\xi, x). \tag{13}$$

Дадим другое доказательство симметричности функции Грина, основанное на идее, применимой и в более общих случаях. Нетрудно проверить следующее тождество:

$$uL(v) - vL(u) = \frac{d}{dx}[p(x)(uv' - vu')]. \tag{14}$$

В этом тождестве $u(x)$ и $v(x)$ — любые две функции с непрерывными производными до второго порядка. Подставим в (14): $u = G(x, \xi_1)$ и $v = G(x, \xi_2)$, причем для определенности будем считать $\xi_1 < \xi_2$. Интегрируя по промежуткам $[a, \xi_1]$, $[\xi_1, \xi_2]$ и $[\xi_2, b]$ и принимая во внимание, что функция Грина удовлетворяет однородному уравнению $L(y) = 0$, мы получим

$$[p(x)(G(x, \xi_1)G'(x, \xi_2) - G(x, \xi_2)G'(x, \xi_1))]_{x=a}^{x=\xi_1} = 0,$$

$$[p(x)(G(x, \xi_1)G'(x, \xi_2) - G(x, \xi_2)G'(x, \xi_1))]_{x=\xi_1}^{x=\xi_2} = 0,$$

$$[p(x)(G(x, \xi_1)G'(x, \xi_2) - G(x, \xi_2)G'(x, \xi_1))]_{x=\xi_2}^{x=b} = 0.$$

Складывая эти три равенства и принимая во внимание непрерывность самой функции Грина и разрывность ее первой производной, мы придем к следующему соотношению

$$G(\xi_1, \xi_2) - G(\xi_2, \xi_1) = \\ = [p(x)(G(x, \xi_1)G'(x, \xi_2) - G(x, \xi_2)G'(x, \xi_1))]_{x=a}^{x=b}. \tag{15}$$

Нетрудно проверить, что разность, стоящая в правой части написанной формулы, обращается в нуль при $x = a$ и $x = b$. Действительно, функция Грина удовлетворяет первому из предельных условий (2), т. е.

$$\alpha_1 G(a, \xi_1) + \alpha_2 G'(a, \xi_1) = 0,$$

$$\alpha_1 G(a, \xi_2) + \alpha_2 G'(a, \xi_2) = 0,$$

и так как мы естественно считаем, что заданные постоянные α_1 и α_2 одновременно не могут равняться нулю, то определитель написанной однородной системы должен равняться нулю, т. е. упомянутая выше разность действительно обращается в нуль при $x = a$. Аналогично доказывается, что она обращается в нуль и при $x = b$, а тогда формула (15) и дает нам симметричность функции Грина.

Можно рассматривать предельные условия более общие, чем условия (2), а именно такие, при которых значения функции и ее производной на обоих концах промежутка входят в оба условия:

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) + \alpha_3 y(b) + \alpha_4 y'(b) = 0,$$
$$\beta_1 y(a) + \beta_2 y'(a) + \beta_3 y(b) + \beta_4 y'(b) = 0.$$

Все предыдущие рассуждения, кроме доказательства симметричности функции Грина, сохранят свою силу, а для того чтобы предыдущее доказательство симметричности функции Грина осталось справедливым, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$p(b)\begin{vmatrix} \alpha_1, & \alpha_2 \\ \beta_1, & \beta_2 \end{vmatrix} = p(a)\begin{vmatrix} \alpha_3, & \alpha_4 \\ \beta_3, & \beta_4 \end{vmatrix}.$$

Мы не останавливаемся на доказательстве этого утверждения. Нетрудно непосредственно проверить, что симметричность функции Грина сохранится при чисто-периодических предельных условиях $y(a) = y(b)$; $y'(a) = y'(b)$, если $p(a) = p(b)$, т. е. если и функция $p(x)$ обладает периодичностью. Отметим, что если и остальные коэффициенты $q(x)$ и $r(x)$ обладают периодичностью, то предельная задача с указанными выше периодическими предельными условиями сводится к разысканию тех значений параметра λ, при которых уравнение (1) имеет периодическое решение.

77. Собственные значения и собственные функции предельной задачи. Поскольку мы привели предельную задачу к интегральному уравнению, мы можем использовать результаты общей теории интегральных уравнений и получить таким образом ряд утверждений, касающихся собственных значений и собственных функций предельной задачи. Рассмотрим сначала случай $r(x) \equiv 1$, когда уравнение (1) имеет вид

$$\frac{d}{dx}[p(x)\,y'] + (\lambda - q(x))\,y = 0, \tag{16}$$

причем мы считаем предельные условия такими, что функция Грина симметрична. Интегральное уравнение (12) будет уравнением с симметричным ядром. Оно будет иметь вещественные собственные значения, и его собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, будут ортогональны. В данном случае, как мы видели выше [74], всякому собственному значению будет соответствовать только одна собственная функция. Это мы доказали для предельных условий вида (2). В случае периодических предельных условий собственному значению могут соответствовать две собственные функции, но не больше, поскольку уравнение (16) имеет только два линейно-независимых решения. Докажем еще, что ядро $G(x, \xi)$ уравнения (16) есть полное ядро, т. е. что не существует непрерывной функции $f(x)$, не равной тождественно нулю и ортогональной к ядру. Положим, наоборот, что такая функция существует:

$$\int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi = 0.$$

Мы получим тогда, что функция (9), с одной стороны, должна обращаться тождественно в нуль и, с другой стороны, должна, в силу доказанного выше, удовлетворять неоднородному уравнению (8), что невозможно. Из полноты ядра вытекает, как известно [**IV**$_1$; **42**] существование бесчисленного множества собственных значений. Пусть λ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — собственные значения уравнения (16), т. е. нашей предельной задачи, и $\varphi_n(x)$ — соответствующие собственные функции, образующие ортогональную и нормированную систему. Положим, что функция $f(x)$ удовлетворяет предельным условиям и имеет непрерывные производные до второго порядка. Полагая $L(f) = -h(x)$, мы получим представление этой функции $f(x)$ через ядро

$$f(x) = \int_a^b G(x, \xi) h(\xi) d\xi,$$

и, следовательно, *всякая функция, удовлетворяющая предельным условиям и имеющая непрерывные производные до второго порядка в промежутке* $[a, b]$, *разлагается в этом промежутке в регулярно сходящийся ряд Фурье по собственным функциям* $\varphi_n(x)$ [**IV**$_1$; **36**]. Легко доказать еще следующую теорему.

Теорема. *Если ряд Фурье непрерывной функции* $f(x)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x); \qquad c_n = \int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx \tag{17}$$

равномерно сходится в промежутке $[a, b]$, *то его сумма равна* $f(x)$.

Доказываем от обратного. Пусть $f_1(x)$ — сумма ряда (17), и положим, что $f_1(x)$ не равно тождественно в $[a, b]$ функции $f(x)$. При этом разность $f_1(x) - f(x)$, не равная тождественно нулю, ортогональна ко всем функциям $\varphi_n(x)$, а тем самым ортогональна ядру, что противоречит доказанной полноте ядра. Мы будем дальше пользоваться доказанной теоремой.

Можно показать, что не только ядро $G(x, \xi)$ полное, но и что *собственные функции* $\varphi_n(x)$ *образуют замкнутую систему*. Отсюда непосредственно будет следовать и доказанная выше теорема.

Ниже, при рассмотрении многомерного случая, мы дадим доказательство того, что для любой непрерывной функции имеет место уравнение замкнутости. Это доказательство будет годиться и для одномерного случая.

Рассмотрим теперь тот случай, когда $r(x)$ отлично от единицы, и будем считать эту функцию положительной. Пользуясь результатами из [IV_1; 44], мы видим, что и в этом случае предельная задача для уравнения (1) приводится к интегральному уравнению с симметричным ядром. В частности, всякая функция, удовлетворяющая предельным условиям и имеющая в промежутке $[a, b]$ непрерывные производные до второго порядка, разлагается в регулярно сходящийся ряд Фурье по собственным функциям задачи

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(x), \tag{18}$$

коэффициенты которого определяются по формулам

$$c_n=\int_a^b r(x)\, f(x)\, \varphi_n(x)\, dx. \tag{19}$$

Для доказательства этого утверждения мы заметим, что, согласно сказанному в [75], имеем

$$f(x)=-\int_a^b G(x, \xi)\, L[f(\xi)]\, d\xi.$$

Но мы можем, очевидно, написать $L[f(\xi)]=-\sqrt{r(\xi)}\, h(\xi)$, где, в силу $r(\xi)>0$, функция $h(\xi)$ непрерывна в промежутке $[a, b]$. Таким образом, мы имеем для функции $\sqrt{r(x)}\, f(x)$ представление через ядро симметричного интегрального уравнения

$$\sqrt{r(x)}\, f(x)=\int_a^b G(x, \xi)\sqrt{r(x)\, r(\xi)}\, h(\xi)\, d\xi, \tag{20}$$

и рассуждения из [IV_1; 44] сразу дают нам формулированную выше теорему разложения. Так же, как и выше, может быть доказана замкнутость ядра и, следовательно, существование бесчисленного множества собственных значений. Повторяя рассуждения из [74] для того случая, когда $f(x)$ имеет непрерывную первую производную и кусочно-непрерывную вторую производную и вспоминая, что теорема II из [IV_1; 31] справедлива и в случае представления функции через ядро при помощи кусочно-непрерывной функции $h(x)$, мы можем убедиться в том, что формулированная выше теорема разложения справедлива и для того случая, когда функция $f(x)$, удовлетворяющая предельным условиям, имеет непрерывную первую производную и кусочно-непрерывную вторую производную. В дальнейшем мы укажем на те случаи, когда при формулировке теорем разложения можно допустить и кусочную непрерывность первой производной.

78. Знак собственных значений. При исследовании знаков собственных значений мы будем предполагать, для простоты дальнейших формул, что $r(x) \equiv 1$. Все рассуждения легко распространяются и на общий случай. Прежде всего дадим формулу, выражающую собственные значения через соответствующие собственные функции. Пусть, как и выше, λ_n — собственные значения и $\varphi_n(x)$ — собственные функции, образующие ортогональную и нормированную систему. Мы имеем

$$L(\varphi_n) = -\lambda_n \varphi_n(x).$$

Умножая обе части на $\varphi_n(x)$, интегрируя и принимая во внимание нормированность собственных функций, получим

$$\lambda_n = -\int_a^b L(\varphi_n)\varphi_n(x)\,dx = -\int_a^b \left[\frac{d}{dx}(p(x)\varphi_n') - q(x)\varphi_n\right]\varphi_n(x)\,dx,$$

откуда, интегрируя первое слагаемое по частям, придем к следующей формуле:

$$\lambda_n = \int_a^b \left[p(x)\varphi_n'^2(x) + q(x)\varphi_n^2(x)\right]dx - \left[p(x)\varphi_n(x)\varphi_n'(x)\right]_{x=a}^{x=b}. \qquad (21)$$

Предположим, что внеинтегральный член этой формулы обращается в нуль. Это будет иметь место, например, в том случае, когда предельные условия будут: $\varphi_n(a) = \varphi_n(b) = 0$. При этом формула (21) перепишется в виде

$$\lambda_n = \int_a^b \left[p(x)\varphi_n'^2(x) + q(x)\varphi_n^2(x)\right]dx. \qquad (22)$$

Допустим, что $p(x) > 0$. Если, кроме того, мы предположим, что и $q(x) \geqslant 0$ в промежутке $[a, b]$, то из написанной формулы будет непосредственно следовать положительность всех собственных значений. Положим теперь, что $q(x)$ — произвольная непрерывная функция, и пусть m — ее наименьшее значение в промежутке, т. е. $q(x) \geqslant m$ в $[a, b]$. Из предыдущей формулы непосредственно вытекает

$$\lambda_n \geqslant \int_a^b p(x)\varphi_n'^2(x)\,dx + m \geqslant m.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае может быть только конечное число отрицательных собственных значений. Положим теперь, что предельные условия имеют вид

$$y'(a) - h_1 y(a) = 0; \quad y'(b) + h_2 y(b) = 0, \tag{23}$$

где h_1 и h_2 — положительные постоянные. Внеинтегральный член формулы (21) при этом окажется положительным, и мы, как и выше, убедимся, что при предельных условиях (23) и $q(x) \geqslant 0$ все собственные значения положительны.

Если все собственные значения положительны или если имеется только конечное число отрицательных собственных значений, то будет справедлива теорема Мерсера, и мы можем написать разложение ядра в абсолютно и равномерно сходящийся ряд:

$$G(x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(\xi)}{\lambda_n}. \tag{24}$$

Это равенство дает нам простую возможность распространить доказанную в [77] теорему разложения по собственным функциям на более общий класс функций, а именно — положим, что $f(x)$ непрерывна, имеет непрерывную производную во всем промежутке, кроме одной точки $x = c$, в которой она имеет разрыв первого рода:

$$f'(c+0) - f'(c-0) = k,$$

и существует кусочно-непрерывная производная второго порядка. Кроме того, как всегда, предполагаем, что $f(x)$ удовлетворяет предельным условиям. Составим разность

$$f(x) - \frac{k}{p(c)} G(x, c),$$

которая имеет непрерывную производную во всем промежутке без исключения. Для этой разности справедлива теорема разложения по собственным функциям. С другой стороны, в силу (24), вычитаемое $G(x, c)$ может быть разложено по собственным функциям, а следовательно, и первоначальная функция $f(x)$ разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд Фурье по собственным функциям. Приведенные рассуждения имеют, конечно, место и в том случае, когда производная $f'(x)$ имеет конечное число разрывов первого рода в промежутке $[a, b]$. Они сходны с теми, которые мы применяли раньше при улучшении сходимости рядов Фурье [II; 171].

79. Примеры. 1. Рассмотрим уравнение

$$y'' + \lambda y = 0$$

и предельные условия $y(0) = y(1) = 0$. В данном случае $L(y) = y''$, и функция Грина будет

$$G(x, \xi) = \begin{cases} (1-\xi)\,x & (x \leqslant \xi), \\ (1-x)\,\xi & (\xi \leqslant x). \end{cases}$$

Собственные значения и собственные функции определяются в конечном виде:

$$\lambda_n = n^2\pi^2; \quad \varphi_n(x) = \sqrt{2}\,\sin n\pi x \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

и мы имеем теорему разложения по этим собственным функциям для всех функций, удовлетворяющих условиям, указанным в предыдущем параграфе. Можно значительно расширить условия применимости теоремы разложения, на чем мы останавливаться не будем.

2. Сохраняя прежнее дифференциальное уравнение, возьмем новые предельные условия $y(0) = y'(1) = 0$. В данном случае

$$G(x, \xi) = \begin{cases} x & (x \leqslant \xi), \\ \xi & (\xi \leqslant x), \end{cases}$$

а собственные значения и собственные функции имеют следующий вид:

$$\lambda_n = (2n+1)^2\,\frac{\pi^2}{4}; \quad \varphi_n(x) = \sqrt{2}\,\sin(2n+1)\,\frac{\pi}{2}\,x.$$

3. Рассмотрим теперь для того же уравнения предельные условия вида $y(0) = 0$; $y(1) + hy'(1) = 0$.

Составим соответствующую функцию Грина. Построим два решения уравнения $y'' = 0$, из которых одно удовлетворяет первому из предельных условий, а другое — второму: $y_1(x) = x$; $y_2(x) = (1+h) - x$. Рассуждая так, как это было указано в [74], мы придем к следующей формуле для функции Грина:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{1+h-\xi}{1+h}\,x & (x \leqslant \xi), \\[2mm] \dfrac{1+h-x}{1+h}\,\xi & (\xi \leqslant x). \end{cases}$$

В данном случае все собственные значения — положительны, и, полагая $\lambda = \mu^2$, мы убедимся без труда в том, что соответствующие значения μ определяются из уравнения $\operatorname{tg}\mu + h\mu = 0$, а собственные функции будут $c_n \sin \mu_n x$, причем постоянная c_n должна быть найдена из условия нормирования этих функций.

4. При исследовании колебаний круглой мембраны, закрепленной на концах, мы пришли к следующей предельной задаче. Найти значения параметра λ, при которых уравнение

$$y'' + \frac{1}{x}\,y' + \left(\lambda - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0 \tag{25}$$

имеет решение, конечное на конце $x = 0$ и равное нулю при $x = l$. Буква n обозначает целое неотрицательное число. Эта предельная задача имеет особенность по сравнению с теми, которые мы рассматривали до сих пор, а именно: коэффициенты уравнения имеют полюс на конце $x = 0$, и на этом конце, вместо определенного предельного условия, мы ставим только условие ограниченности решения в окрестности $x = 0$. Это приводит к определенному конечному значению решения уравнения (25) при $x = 0$.

Мы неоднократно встречались и раньше с такими особыми предельными задачами. Умножая обе части (25) на x, мы перепишем уравнение в обычной форме:

$$\frac{d}{dx}(xy') + \left(\lambda x - \frac{n^2}{x}\right) y = 0, \tag{26}$$

и будем считать заданное число n положительным.

Определение функции Грина остается прежним, но только вместо предельного условия на конце $x = 0$ мы требуем конечности функции Грина при $x = 0$. Уравнение $L(y) = 0$ будет уравнением Эйлера [II; 42], и оно будет иметь линейно-независимые решения x^n и x^{-n}.

Принимая во внимание условие конечности на конце $x = 0$, мы должны в промежутке $0 \leqslant x \leqslant \xi$ взять для функции Грина выражение $c_1 x^n$, а в промежутке $\xi \leqslant x \leqslant 1$ мы должны составить такую линейную комбинацию указанных выше решений, которая обращается в нуль при $x = 1$, т. е. в этом промежутке мы должны взять для функции Грина выражение вида $c_2(x^n - x^{-n})$. Постоянные c_1 и c_2 определятся, как всегда, из условий непрерывности функции Грина и скачка ее первой производной при $x = \xi$. Это даст нам следующую формулу:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2n}\left[\left(\dfrac{x}{\xi}\right)^n - (x\xi)^n\right] & (x \leqslant \xi), \\ \dfrac{1}{2n}\left[\left(\dfrac{\xi}{x}\right)^n - (x\xi)^n\right] & (\xi \leqslant x). \end{cases}$$

Совершенно так же, как и раньше, неоднородное уравнение $L(y) = -f(x)$ имеет единственное решение, удовлетворяющее указанным выше предельным условиям, и это решение определяется формулой

$$y(x) = \int_0^1 G(x, \xi) f(\xi)\, d\xi.$$

Рассуждения из [78] покажут нам, что все собственные значения положительны. Полагая $\lambda = \mu^2$, будем иметь для определения собственных значений трансцендентное уравнение $J_n(\mu) = 1$, а собственные функции будут $\varphi_n(x) = c_n J_n(\mu_n x)$. В случае $n = 0$ уравнение $L(y) = 0$ имеет линейно-независимые решения $y_1(x) = 1$ и $y_2(x) = \lg x$, а функция Грина будет определяться формулой

$$G(x, \xi) = \begin{cases} -\lg \xi & (x \leqslant \xi), \\ -\lg x & (\xi \leqslant x). \end{cases} \tag{27}$$

Отметим, что в данном случае формула (9) дает нам

$$y(x) = \int_0^1 G(x, \xi) f(\xi)\, d\xi = -\lg x \int_0^x f(\xi)\, d\xi - \int_x^1 f(\xi) \lg \xi\, d\xi,$$

и непосредственно проверяется, что эта функция удовлетворяет уравнеиию $L(y) = -f(x)$ и предельным условиям. Из вида уравнения (26) непосредственно следует, что в данном случае мы имеем $r(x) = x$. При приведении нашей предельной задачи к интегральному уравнению мы получим ядро $G(x, \xi)\sqrt{\xi x}$, которое будет непрерывным во всем квадрате, включая и его вершину $x = \xi = 0$.

Собственными функциями этого интегрального уравнения будут функции $\varphi_n(x) = c_n \sqrt{x}\, J_0(\mu_n x)$, и мы будем иметь разложение в абсолютно и равномерно сходящийся ряд Фурье:

$$G(x, \xi)\sqrt{\xi x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\,\varphi_n(\xi)}{\lambda_n}.$$

После деления на $\sqrt{\xi x}$ мы получим

$$G(x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n^2 J_0(\mu_n x)\, J_0(\mu_n \xi)}{\lambda_n},$$

и для этого ряда мы можем утверждать его равномерную сходимость только в промежутке $[\varepsilon, 1]$, где ε — любое заданное положительное число. Постоянные c_n определяются, в силу условия нормированности, формулой [III₂; 145]:

$$c_n^2 = \frac{2}{J_1(\mu_n)}.$$

Отметим при этом, что функция $G(x, \xi)$, определяемая формулой (27), стремится к бесконечности, когда точка (x, ξ) стремится к вершине квадрата (0, 0). В данном случае, кроме указанных выше особенностей, мы имеем ту особенность, что функция $r(x) = x$ обращается в нуль на конце $x = 0$.

В томе V мы подробно займемся предельными задачами для уравнений, имеющих особые точки на концах промежутка, и для уравнений на бесконечном промежутке.

80. Обобщенная функция Грина. Мы обращаемся теперь к рассмотрению того случая, когда уравнение (1) с предельными условиями (2) имеет собственное значение $\lambda = 0$, т. е. однородное уравнение $L(y) = 0$ имеет некоторое решение $y = \varphi_0(x)$, удовлетворяющее предельным условиям (2). Это решение мы можем считать нормированным, что мы и будем делать в дальнейшем. В данном случае нам не удастся построить функцию Грина, удовлетворяющую всем четырем условиям, указанным в [73], и мы внесем некоторое изменение в само определение функции Грина. Удерживая по-прежнему условие, касающееся непрерывности самой функции, разрывности ее первой производной при $x = \xi$ и удовлетворения предельным условиям, мы потребуем, чтобы *функция $G(x, \xi)$ в каждом из промежутков $[a, \xi]$ и $[\xi, b]$ удовлетворяла уже не однородному уравнению $L(y) = 0$, а уравнению с правой частью*:

$$L[G(x, \xi)] = \varphi_0(\xi)\,\varphi_0(x). \tag{28}$$

Если $y(x)$ есть некоторое решение этого уравнения, удовлетворяющее предельным условиям, то, поскольку $\varphi_0(x)$ удовлетворяет однородному уравнению и предельным условиям, сумма $y(x) + c\varphi_0(x)$ при произвольном постоянном c также будет удовлетворять уравнению (28) и предельным условиям; и для определения произвольной постоянной c мы введем еще новое дополнительное условие, а именно условие ортогональности функции $G(x, \xi)$ к функции $\varphi_0(x)$:

$$\int_a^b [G(x, \xi)]\, \varphi_0(x)\, dx = 0. \tag{29}$$

Наличие правой части в уравнении (28) имеет простой физический смысл. Если $\lambda = 0$ есть собственное значение задачи, то мы имеем резонанс при частоте, равной нулю, и нам не удается получить конечное статическое отклонение при наличии сосредоточенной силы. Чтобы получить такое отклонение, мы должны, кроме сосредоточенной силы, добавить непрерывно распределенную силу, что и характеризуется добавлением правой части в уравнении (28).

Будем строить обобщенную функцию Грина аналогично тому, как это мы сделали в [74]. Пусть $\omega(x)$ есть какое-либо решение неоднородного уравнения

$$L(\omega) = \varphi_0(\xi)\, \varphi_0(x) \tag{30}$$

и $\varphi_1(x)$ — решение соответствующего однородного уравнения, линейно-независимое с $\varphi_0(x)$ и такое, что

$$p(x)\left[\varphi_0(x)\, \varphi_1'(x) - \varphi_1(x)\, \varphi_0'(x)\right] = 1. \tag{31}$$

Вспоминая, что общий интеграл неоднородного уравнения есть сумма его решения $\omega(x)$ и общего интеграла однородного уравнения, мы должны положить:

$$\begin{aligned} G(x;\ \xi) &= \omega(x) + c_1\varphi_0(x) + c_2\varphi_1(x) \qquad (x \leqslant \xi), \\ G(x;\ \xi) &= \omega(x) + c_3\varphi_0(x) + c_4\varphi_1(x) \qquad (x \geqslant \xi). \end{aligned} \tag{32}$$

Эта функция должна удовлетворять предельным условиям (2). Принимая во внимание, что $\varphi_0(x)$ удовлетворяет этим условиям, получаем два равенства:

$$\begin{aligned} \alpha_1\omega(a) + \alpha_2\omega'(a) + c_2\left[\alpha_1\varphi_1(a) + \alpha_2\varphi_1'(a)\right] = 0, \\ \beta_1\omega(b) + \beta_2\omega'(b) + c_4\left[\beta_1\varphi_1(b) + \beta_2\varphi_1'(b)\right] = 0, \end{aligned} \tag{33}$$

из которых определяются c_2 и c_4. Коэффициенты при c_2 и c_4 отличны от нуля, так как $\varphi_1(x)$, линейно-независимое с $\varphi_0(x)$, не может удовлетворять ни одному из условий (2) [74]. Условия непрерывности в точке $x = \xi$ и разрыва производной в этой точке приводят к следующим двум равенствам:

$$\begin{aligned} (c_1 - c_3)\, \varphi_0(\xi) + (c_2 - c_4)\, \varphi_1(\xi) = 0, \\ (c_1 - c_3)\, \varphi_0'(\xi) + (c_2 - c_4)\, \varphi_1'(\xi) = 1 : p(\xi), \end{aligned}$$

которые могут быть, в силу (31), переписаны в виде

$$c_1 - c_3 = -\varphi_1(\xi); \qquad c_2 - c_4 = \varphi_0(\xi). \tag{34}$$

Остается еще удовлетворить условию (29). Постоянные c_2 и c_4 уже определены формулами (33). Первое из равенств (34) дает $c_1 = c_3 - \varphi_1(\xi)$. Подставляя в первую из формул (32), мы сможем определить c_3 из условия (29) и c_1 определится по только что написанной формуле. Все постоянные уже определены без использования второго из равенств (34), и нам остается проверить тот факт, что c_2 и c_4, определенные по формулам (33), удовлетворяют второму из равенств (34).

Напишем для этого формулу (14):

$$\varphi_0(x) L(\omega) - \omega(x) L(\varphi_0) = \frac{d}{dx}\left[p(x)\left(\varphi_0\omega' - \omega\varphi_0'\right)\right].$$

Проинтегрируем обе части этого равенства по основному промежутку $[a, b]$. Принимая во внимание равенство $L(\varphi_0) = 0$, уравнение (30) и нормированность функции $\varphi_0(x)$, получим

$$\varphi_0(\xi) = \left[p(x)\left(\varphi_0\omega' - \omega\varphi_0'\right)\right]_{x=a}^{x=b}. \tag{35}$$

Второе из равенств (34), которое нам надо проверить, может быть записано, в силу (33), в виде

$$\frac{\beta_1\omega(b) + \beta_2\omega'(b)}{\beta_1\varphi_1(b) + \beta_2\varphi_1'(b)} - \frac{\alpha_1\omega(a) + \alpha_2\omega'(a)}{\alpha_1\varphi_1(a) + \alpha_2\varphi_1'(a)} = \varphi_0(\xi). \tag{36}$$

Для $\varphi_0(x)$ мы имеем предельные условия:

$$\alpha_1\varphi_0(a) + \alpha_2\varphi_0'(a) = 0; \quad \beta_1\varphi_0(b) + \beta_2\varphi_0'(b) = 0. \tag{37}$$

Написав равенство (31) при $x = a$ и $x = b$, сможем определить из полученных равенств и равенств (37): $\varphi_0(a)$, $\varphi_0'(a)$, $\varphi_0(b)$ $\varphi_0'(b)$. Подставляя полученные выражения в доказанное равенство (35), придем к равенству (36). Проделаем вычисления для предельных условий: $y(a) = y(b) = 0$, т. е. для того случая, когда $\alpha_2 = \beta_2 = 0$. При этом формула (35) перепишется в виде $\varphi_0(\xi) = p(a)\,\omega(a)\,\varphi_0'(a) - p(b)\,\omega(b)\,\varphi_0'(b)$. Формула (31) при $x = a$ и $x = b$ даст $p(a)\,\varphi_1(a)\,\varphi_0'(a) = p(b)\,\varphi_1(b)\,\varphi_0'(b) = -1$, т. е.

$$p(a)\,\varphi_0'(a) = -\frac{1}{\varphi_1(a)}; \quad p(b)\,\varphi_0'(b) = -\frac{1}{\varphi_1(b)},$$

и подставляя в предыдущую формулу, получим

$$\frac{\omega(b)}{\varphi_1(b)} - \frac{\omega(a)}{\varphi_1(a)} = \varphi_0(\xi),$$

а это и есть равенство (36) в случае $\alpha_2 = \beta_2 = 0$.

Для доказательства симметричности обобщенной функции Грина мы напишем два уравнения:

$$L[G(x;\ \xi_1)] = \varphi_0(\xi_1)\,\varphi_0(x); \quad L[G(x;\ \xi_2)] = \varphi_0(\xi_2)\,\varphi_0(x).$$

Умножая первое на $G(x, \xi_2)$, второе на $G(x; \xi_1)$, вычитаем почленно и интегрируем по основному промежутку. Пользуясь формулой Грина, предельными условиями и условием (29), мы придем к равенству

$$[p(x)(G(x;\ \xi_2)G'(x;\ \xi_1)-G(x;\ \xi_1)G'(x;\ \xi_2))]_{x=\xi_1+0}^{x=\xi_1-0}+[\quad]_{x=\xi_2+0}^{x=\xi_2-0}=0,$$

откуда и получится непосредственно, как и раньше, $G(\xi_1,\ \xi_2)=G(\xi_2,\ \xi_1)$. Отметим, что при интегрировании по основному промежутку нам надо так же, как и в [76], разбить этот промежуток на три части.

Обратимся теперь к рассмотрению неоднородного уравнения

$$L(y)=-f(x), \tag{38}$$

где $f(x)$ — заданная непрерывная функция, ортогональная к $\varphi_0(x)$. Уравнение (38) может иметь только одно решение, удовлетворяющее предельным условиям и ортогональное к $\varphi_0(x)$. Действительно, если бы их было два, то их разность должна была бы удовлетворять однородному уравнению и предельным условиям, т. е. должна была бы иметь вид $c\varphi_0(x)$ и не могла бы быть ортогональной к $\varphi_0(x)$. Покажем теперь, что это единственное ортогональное к $\varphi_0(x)$ решение уравнения (38) определяется формулой

$$y(x)=\int_a^b G(x,\ \xi)f(\xi)\,d\xi. \tag{39}$$

Действительно, разбивая промежуток интегрирования на части $[a, x]$ и $[x, b]$, мы докажем, как и выше в [75], что

$$L(y)=\int_a^b L[G(x,\ \xi)]f(\xi)\,d\xi-f(x).$$

Пользуясь уравнением (28), мы получим отсюда

$$L(y)=\varphi_0(x)\int_a^b \varphi_0(\xi)f(\xi)\,d\xi-f(x),$$

а из этой формулы непосредственно вытекает (38), поскольку, по условию, $f(x)$ ортогональна к $\varphi_0(x)$. Итак, *если $f(x)$ ортогональна к $\varphi_0(x)$, то уравнение* (38) *имеет единственное решение, удовлетворяющее предельным условиям* (2) *и ортогональное к $\varphi_0(x)$, и это решение определяется формулой* (39).

Если $F(x)$ — любая функция, ортогональная к $\varphi_0(x)$, удовлетворяющая предельным условиям и имеющая непрерывные производные до второго порядка, то, полагая $f(x)=-L(F)$, мы можем выразить $F(x)$ формулой (39). Для доказательства этого утверждения нам достаточно убедиться в том, что построенная нами функция $f(x)$ ортогнальна к $\varphi_0(x)$. Для этого напишем формулу Грина (14) для $u=\varphi_0(x)$ и $v=F(x)$. Принимая во внимание, что $L(\varphi_0)=0$ и предельные условия для $\varphi_0(x)$ и

$F(x)$, мы путем интегрирования упомянутой формулы Грина по основному промежутку и обнаружим ортогональность функций $\varphi_0(x)$ и $f(x)$. Отметим еще, что формула (39) при любом выборе непрерывной функции $f(x)$ дает функцию, ортогональную к $\varphi_0(x)$, поскольку ядро $G(x, \xi)$ обладает этим свойством.

Обратимся теперь к предельной задаче для уравнения

$$L(y) = \frac{d}{dx}[p(x) y'] - q(x) y = -\lambda y \tag{40}$$

с предельными условиями (2). Всякая собственная функция этой задачи, отличная от $\varphi_0(x)$, т. е. соответствующая собственному значению, отличному от нуля, должна быть ортогональной к $\varphi_0(x)$ и, принимая во внимание все сказанное выше, мы видим, что поставленная предельная задача (с исключением функции $\varphi_0(x)$) равносильна интегральному уравнению

$$y(x) = \lambda \int_a^b G(x, \xi) y(\xi) d\xi. \tag{41}$$

Обратимся теперь к теореме разложения по собственным функциям для написанного уравнения. Нам надо выяснить вопрос о представимости функции через ядро. Выше мы видели, что всякая функция, имеющая непрерывные производные до второго порядка, удовлетворяющая предельным условиям и ортогональная к $\varphi_0(x)$, представима через ядро, и, следовательно, для всякой такой функции мы будем иметь абсолютно и равномерно сходящееся разложение в ряд Фурье по собственным функциям уравнения (41). Отметим, что дополнительное условие ортогональности разлагаемой функции к $\varphi_0(x)$ является необходимым, поскольку все собственные функции уравнения (41) ортогональны к $\varphi_0(x)$. Из последнего факта непосредственно вытекает, что ядро уравнения (41) не будет полным. В указанной выше теореме разложения, как всегда, можно непрерывность второй производной заменить ее кусочной непрерывностью.

Отметим еще другой, более элементарный метод, при помощи которого можно рассмотреть тот случай, когда $\lambda = 0$ есть собственное значение. Уравнение (41) будет иметь собственное значение, наименьшее по абсолютной величине, и пусть m — его абсолютная величина. Внутри промежутка $[-m, +m]$ будет иметься единственное собственное значение $\lambda = 0$ нашей предельной задачи. Возьмем внутри указанного промежутка какое-нибудь значение λ', отличное от нуля, и введем вместо λ в уравнение (40) новый параметр μ, полагая $\lambda = \lambda' + \mu$. При новом выборе параметра уравнение (16) будет иметь вид

$$\frac{d}{dx}[p(x) y'] + [\lambda' - q(x)] y = -\mu y,$$

причем, в силу сказанного выше, значение $\mu = 0$ уже не будет собственным значением, и, следовательно, будет иметь место вся теория, построенная на применении обычной функции Грина. В частности, собственные функции задачи будут образовывать замкнутую систему. Отсюда, между прочим, непосредственно вытекает, что если мы к собственным функциям уравнения (41) присоединим $\varphi_0(x)$, то получится замкнутая система. Введение нового параметра, как мы увидим на дальнейшем примере, может осложнить интегрирование того уравнения, которое служит для определения обычной функции Грина. В следующем параграфе мы применим обобщенную функцию Грина к рассмотрению предельной задачи, приводящей к полиномам Лежандра. В этом случае на обоих концах промежутка функция $p(x)$ обращается в нуль, и роль предельных условий играет требование конечности решения на концах промежутка. Все сказанное останется справедливым и в этом случае.

Для уравнения (1) с предельным условием (2) собственному значению $\lambda = 0$ может соответствовать, как мы видели, только одна собственная функция. Для предельных условий периодического типа, например $y(a) = y(b)$ и $y'(a) = y'(b)$, собственных функций может быть и две. Для уравнений выше второго порядка, о которых мы будем говорить ниже, их может быть также больше одной. В этих случаях можно строить функцию Грина аналогично предыдущему. При этом в правой части уравнения (28) надо писать сумму, распространенную на все собственные функции, соответствующие собственному значению $\lambda = 0$, причем эти функции считаются взаимно-ортогональными и нормированными.

81. Полиномы Лежандра. Требуется найти такие значения параметра λ, при которых уравнение

$$\frac{d}{dx}[(1 - x^2)\, y'] + \lambda y = 0 \tag{42}$$

имеет решение, ограниченное на обоих концах промежутка $[-1, 1]$ Мы уже знаем, что собственными значениями этой задачи будут значения $\lambda_n = n(n+1)$ [III$_2$; 105], а ортогональные и нормированные собственные функции будут

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\, P_n(x) \qquad (n = 0, 1, \ldots), \tag{43}$$

где $P_n(x)$ — полиномы Лежандра Нетрудно видеть, что никаких других собственных значений и собственных функций не может быть Если бы существовали другие собственные функции, то мы имели бы собственную функцию, ортогональную ко всем функциям (43), и для того чтобы показать, что такой функции нет, нам достаточно показать, что функции (43) образуют замкнутую систему Покажем это Пусть $f(x)$ — любая заданная непрерывная в промежутке $[-1, 1]$ функция Согласно теореме Вейерштрасса [II; 168], при любом заданном положительном ε мы можем найти такой полином $Q(x)$, что во всем промежутке $[-1, 1]$ имеет место неравенство $|f(x)-Q(x)|<\varepsilon$, из которого непосредственно вытекает

$$\int_{-1}^{1}[f(x)-Q(x)]^2\,dx<2\varepsilon^2.$$

Пусть m — степень полинома $Q(x)$. Поскольку функция $\varphi_n(x)$ есть полином степени, в точности равной n, мы можем представить $Q(x)$ в виде линейной комбинации полиномов $\varphi_0(x), \ldots, \varphi_m(x)$, и предыдущее неравенство перепишется в виде

$$\int_{-1}^{1}\left[f(x)-\sum_{k=0}^{m}a_k\varphi_k(x)\right]^2dx<2\varepsilon^2.$$

Если вместо коэффициентов a_k мы возьмем коэффициенты Фурье функции $f(x)$ относительно системы функций (43), то написанное неравенство будет тем более удовлетворено.

Принимая во внимание произвольную малость числа ε, мы можем утверждать, что средняя квадратичная погрешность при представлении функции $f(x)$ отрезком ее ряда Фурье по функциям (43) стремится к нулю, т е. функции (43) действительно образуют замкнутую систему.

Вернемся к уравнению (42). В данном случае мы имеем

$$L(y)=\frac{d}{dx}[(1-x^2)\,y'],$$

и непосредственно очевидно, что первая из функций (43), т. е. постоянная $\varphi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}$, удовлетворяет однородному уравнению $L(y)=0$ и предельным условиям, т е ограничена на концах промежутка Иными словами, $\lambda=0$ есть собственное значение, что вытекает и из формулы $\lambda_n=n(n+1)$ при $n=0$ Для построения функции Грина напишем неоднородное уравнение (28), которое в данном случае будет иметь вид

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)\,y']=\frac{1}{2}.$$

Частное решение этого уравнения будет $y=-\frac{1}{4}\lg(1-x^2)$, а общий интеграл соответствующего однородного уравнения имеет вид $c_1+c_2\lg\frac{1+x}{1-x}$. Решения, которые остаются конечными на концах $x=\pm 1$, имеют соответственно вид

$$y_1(x)=-\frac{1}{4}\lg(1-x^2)+\frac{1}{4}\lg\frac{1+x}{1-x}+\alpha=-\frac{1}{2}\lg(1-x)+\alpha,$$

$$y_2(x)=-\frac{1}{4}\lg(1-x^2)-\frac{1}{4}\lg\frac{1+x}{1-x}+\beta=-\frac{1}{2}\lg(1+x)+\beta,$$

где α и β — некоторые постоянные Подберем эти постоянные так, чтобы составное решение было непрерывным при $x=\xi$ и чтобы оно было ортогональным к $\varphi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Первое из этих условий дает

$$-\frac{1}{2}\lg(1-\xi)+\alpha=-\frac{1}{2}\lg(1+\xi)+\beta,$$

и мы можем положить

$$\alpha = -\frac{1}{2}\lg(1+\xi)+\gamma; \quad \beta = -\frac{1}{2}\lg(1-\xi)+\gamma,$$

где γ — постоянная, которую надо определить из условия ортогональности функции Грина $G(x, \xi)$ и $\varphi_0(x)$. Мы имеем

$$G(x, \xi) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\lg[(1-x)(1+\xi)]+\gamma & (x \leqslant \xi), \\ -\frac{1}{2}\lg[(1+x)(1-\xi)]+\gamma & (\xi \leqslant x). \end{cases}$$

Условие ортогональности

$$\int_{-1}^{1} G(x, \xi)\,\varphi_0(x)\,dx = 0, \quad \text{или просто} \quad \int_{-1}^{1} G(x, \xi)\,dx = 0,$$

дает нам следующее значение постоянной γ: $\gamma = \frac{1}{2} - \lg 2$, и окончательно обобщенная функция Грина определяется следующим равенством:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\lg[(1-x)(1+\xi)] - \lg 2 + \frac{1}{2} & (x \leqslant \xi), \\ -\frac{1}{2}\lg[(1+x)(1-\xi)] - \lg 2 + \frac{1}{2} & (x \geqslant \xi). \end{cases} \tag{44}$$

Ядро (44) становится неограниченным в окрестности вершин $x = \xi = -1$ и $x = \xi = 1$ основного квадрата. Легко проверить, что всякая представимая через ядро функция

$$\int_{-1}^{1} G(x, \xi)\,g(\xi)\,d\xi \tag{45}$$

будет уже непрерывной, если непрерывна $g(x)$, и мы будем иметь так же, как и в [76], для таких функций теорему разложения в абсолютно и равномерно сходящийся ряд Фурье по функциям $\varphi_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Всякая функция $f(x)$, имеющая в промежутке $[-1, 1]$ непрерывные производные до второго порядка и удовлетворяющая условию

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0, \tag{46}$$

которое выражает ортогональность $f(x)$ и $\varphi_0(x)$, может быть представлена по формуле (45) через ядро и разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд Фурье по функциям $\varphi_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, т е по полиномам Лежандра $P_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Если $f(x)$ не удовлетворяет условию (46), то достаточно применить общую теорему разложения к функции

$$f_1(x) = f(x) - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\,dx;$$

которая уже удовлетворяет условию (46). Для первоначальной функции $f(x)$ получим разложение по всем полиномам Лежандра, включая $P_0(x) = \text{const}$.

Ряд Фурье для ядра в данном случае имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1) P_n(x) P_n(\xi)}{2n(n+1)}. \tag{47}$$

Он не может сходиться равномерно во всем квадрате k_0, так как ядро неограниченно. Воспользуемся асимптотическим выражением полиномов Лежандра при больших значениях n [III₂; 164]:

$$P_n(\cos t) = \sqrt{\frac{2}{n\pi \sin t}} \left\{ \cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t - \frac{\pi}{4}\right] + \delta_n \right\},$$

где $\delta_n \to 0$ равномерно относительно t, если t принадлежит промежутку $[\varepsilon, \pi - \varepsilon]$, причем ε — любое заданное положительное число. Фиксируем некоторое значение ξ внутри промежутка $[-1, 1]$. Для $P_n(\xi)$ мы имеем асимптотическую оценку вида $|P_n(\xi)| \leqslant \frac{m_n}{\sqrt{n}}$, где m_n остается ограниченным при возрастании n. Для любых x, удовлетворяющих условию $-1 \leqslant x \leqslant 1$, мы имеем неравенство $|P_n(x)| \leqslant 1$ [III₁; 133]. Отсюда видно, что при фиксированном ξ ряд (47) сходится абсолютно и равномерно относительно x в промежутке $[-1, 1]$. Функция (44) ортогональна к $\varphi_0(x)$, и, следовательно, ряд (47) есть ее ряд Фурье по отношению к замкнутой системе функций (43). Из его равномерной сходимости следует, что его сумма равна ядру (44) [IV₁; 3]. Из предыдущих рассуждений непосредственно вытекает также, что ряд (47) сходится абсолютно и равномерно в квадрате k_0, если исключить из этого квадрата его вершины $(-1, -1)$ и $(1, 1)$ кружками с центрами в этих вершинах и со сколь угодно малым положительным радиусом.

Применим теперь другой подход к рассмотрению предельной задачи для уравнения (42), указанный в предыдущем параграфе. Введем вместо λ новый параметр μ по формуле $\lambda = \mu + p(p+1)$, где p — некоторое фиксированное не целое число. Уравнение (42) перепишется в виде

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)y'] + p(p+1)y + \mu y = 0.$$

Значение $\mu = 0$ уже не будет собственным значением, причем мы должны положить

$$L(y) = \frac{d}{dx}[(1-x^2)y'] + p(p+1)y.$$

Если ввести вместо x новую переменную $t = \frac{1+x}{2}$, то уравнение $L(y) = 0$ превратится в уравнение Гаусса [III₂; 103, 104] с параметрами $\alpha = -p$, $\beta = p+1$, $\gamma = 1$. Мы будем иметь два решения этого уравнения:

$$y_1(x) = F\left(-p, p+1, 1; \frac{1+x}{2}\right); \qquad y_2(x) = cF\left(-p, p+1, 1; \frac{1-x}{2}\right),$$

из которых первое регулярно при $x = -1$, а второе при $x = 1$. Можно подобрать постоянную c так, чтобы имело место соотношение:

$$y_1'(x)\,y_2(x) - y_2'(x)\,y_1(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

Можно показать, что это дает $c = \frac{\pi}{4 \sin p\pi}$, и, следовательно, обычная функция Грина определяется равенством

$$G_1(x, \xi) = \frac{\pi F\left(-p, p+1, 1; \frac{1+x}{2}\right) F\left(-p, p+1, 1; \frac{1-\xi}{2}\right)}{4 \sin p\pi} \quad (x \leqslant \xi). \quad (48)$$

При $\xi \leqslant x$ надо буквы x и ξ поменять местами. Вследствие замены параметра собственные значения будут определяться формулой $\mu_n = n(n+1) - p(p+1)$, а собственные функции будут прежние функции $\varphi_n(x)$. Ряд Фурье для ядра (48) будет в данном случае иметь вид

$$G_1(x, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1) P_n(x) P_n(\xi)}{2[n(n+1) - p(p+1)]},$$

и, как и выше, он будет давать функцию Грина (48) при любом фиксированном ξ внутри промежутка $[-1, 1]$ для всех x из этого промежутка. Заметим, что и в данном случае ядро (48) будет неограниченным.

82. Функции Эрмита и Лагерра. Можно построить функцию Грина и для предельных задач, приводящих к функциям Эрмита и Лагерра.

Функции Эрмита $\psi_n(x)$ [III₂; 157] суть собственные функции для уравнения

$$y'' + (\lambda - x^2) y = 0$$

при основном промежутке $(-\infty, +\infty)$ и при условии, что $y \to 0$ при $x \to -\infty$ и $x \to +\infty$. Собственные значения суть $\lambda_n = 2n + 1$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Заменяя λ на $(\lambda - 1)$, можем переписать уравнение в виде

$$L(y) + \lambda y = 0, \quad \text{где} \quad L(y) = y'' - (1 + x^2) y,$$

причем собственные значения теперь определяются по формуле $\lambda_n = 2n + 2$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Уравнение

$$L(y) = y'' - (1 + x^2) y = 0$$

имеет решение $y = e^{\frac{x^2}{2}}$, и, вводя вместо y новую искомую функцию w по формуле $y = we^{\frac{x^2}{2}}$, мы непосредственно найдем его общий интеграл:

$$y = C_1 e^{\frac{x^2}{2}} \int_{C_2}^{x} e^{-v^2} dv,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. При $x \leqslant \xi$ мы должны взять решение, которое обращается в нуль при $x = -\infty$:

$$y_1 = ae^{\frac{x^2}{2}} \int_{-\infty}^{x} e^{-v^2} dv,$$

где a — постоянная. При $x \geqslant \xi$ точно так же возьмем решение

$$y_2 = be^{\frac{x^2}{2}} \int_{x}^{+\infty} e^{-v^2} dv,$$

где b — новая постоянная. Эти постоянные определятся из условия непрерывности $G(x, \xi)$ при $x = \xi$ и скачка производной $G'(x, \xi)$ при $x = \xi$. Окончательно получим

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{x^2+\xi^2}{2}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-v^2}\, dv \int_{\xi}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt & (x \leqslant \xi), \\ \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{x^2+\xi^2}{2}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\xi} e^{-v^2}\, dv \int_{x}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt & (x \geqslant \xi). \end{cases}$$

Функции Лагерра $\omega_n(x)$ (ср. [III$_2$; 161] при $s = 0$) суть собственные функции для уравнения

$$xy'' + y' + \left(\lambda - \frac{x}{4}\right) y = 0$$

при основном промежутке $(0, +\infty)$ и при условии ограниченности решения в окрестности $x = 0$ и обращения его в нуль при $x = +\infty$. Собственные значения суть $\lambda_n = \frac{1}{2} + n$. Заменяя λ на $\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)$, можем переписать уравнение в виде

$$L(y) + \lambda y = 0, \quad \text{где} \quad L(y) = xy'' + y' - \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{4}\right) y,$$

собственные значения будут $\lambda_n = n + 1$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Уравнение

$$L(y) = xy'' + y' - \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{4}\right) y = 0$$

имеет решение $y = e^{x/2}$, и, совершая замену искомой функции $y = we^{x/2}$, мы сможем найти общий интеграл этого уравнения:

$$y = C_1 e^{\frac{x}{2}} \left(\int_{+\infty}^{x} \frac{e^{-v}}{v}\, dv + C_2 \right).$$

При $x \leqslant \xi$ мы должны взять решение, регулярное при $x = 0$:

$$y_1 = ae^{x/2},$$

и при $x \geqslant \xi$ — решение, равное нулю при $x = +\infty$:

$$y_2 = be^{\frac{x}{2}} \int_{x}^{+\infty} \frac{e^{-v}}{v}\, dv.$$

Определяя a и b, как и выше, получим окончательно

$$G(x, \xi) = \begin{cases} e^{\frac{x+\xi}{2}} \displaystyle\int_{\xi}^{\infty} \frac{e^{-v}}{v}\, dv & (x \leqslant \xi), \\ e^{\frac{x+\xi}{2}} \displaystyle\int_{x}^{\infty} \frac{e^{-v}}{v}\, dv & (x \geqslant \xi). \end{cases}$$

83. Уравнения четвертого порядка. Понятие функции Грина и приведение задачи к интегральному уравнению может быть проделано, аналогично предыдущему, и для уравнений высшего порядка. Рассматривая колебание стержня, мы получили следующую предельную задачу: найти такие значения параметра λ, при которых уравнение

$$y^{(\mathrm{IV})} - \lambda y = 0 \tag{49}$$

при четырех однородных предельных условиях имеет решение, отличное от нуля. Если, например, стержень заделан на конце $x = 0$ и свободен на конце $x = l$, мы получаем предельные условия:

$$y\,|_{x=0} = y'\,|_{x=0} = 0; \quad y''\,|_{x=l} = y'''\,|_{x=l} = 0. \tag{50}$$

Для неоднородного стержня мы получим уравнение

$$y^{(\mathrm{IV})} - \lambda r(x)\,y = 0. \tag{51}$$

Функция Грина $G(x, \xi)$ будет соответствовать статическому прогибу стержня под влиянием сосредоточенной силы. Она определяется из следующих условий: 1) она непрерывна со своими первыми двумя производными по отношению к x в квадрате k_0; 2) при $0 < x < \xi$ и $\xi < x < l$ она имеет непрерывные производные до четвертого порядка и удовлетворяет однородному уравнению $G^{(\mathrm{IV})}(x, \xi) = 0$; 3) при любых значениях ξ из промежутка $[0, l]$ она удовлетворяет предельным условиям; 4) на диагонали прямоугольника ее третья производная имеет скачок, определяемый условием

$$G'''(\xi + 0, \xi) - G'''(\xi - 0, \xi) = -1. \tag{52}$$

Если $y(x)$ — функция с непрерывными производными до четвертого порядка, причем производная четвертого порядка может быть только кусочно-непрерывной, удовлетворяет предельным условиям (50), то из соотношения $y^{(\mathrm{IV})} = -f(x)$ вытекает

$$y(x) = \int_0^l G(x, \xi)\, f(\xi)\, d\xi, \tag{53}$$

и, наоборот, функция, определяемая последним равенством, имеет непрерывные производные до четвертого порядка и удовлетворяет предельным условиям и уравнению $y^{(\mathrm{IV})} = -f(x)$, если $f(x)$ непрерывна на $[0, l]$. Таким образом, предельная задача для уравнения (49) приводится к интегральному уравнению

$$y(x) = -\lambda \int_0^l G(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi,$$

а для уравнения (51) — к интегральному уравнению

$$y(x) = -\lambda \int_0^l G(x, \xi) r(\xi) y(\xi) d\xi.$$

В данном случае собственные функции будут, как и раньше, образовывать замкнутую систему, и всякая функция, удовлетворяющая предельным условиям и имеющая непрерывные производные до четвертого порядка, разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд Фурье по собственным функциям. Совершенно так же, как и в [78], можно показать, что все собственные значения положительны и, следовательно, по теореме Мерсера, мы имеем разложение самого ядра по собственным функциям.

Построим фактически функцию Грина для случая стержня, заделанного на обоих концах, т е при предельных условиях $y(0) = y'(0) = y(1) = y'(1) = 0$, причем мы считаем $r(x) \equiv 1$ и $l = 1$ Общий интеграл уравнения $y^{(IV)} = 0$ представляет собою полином третьей степени с произвольными коэффициентами Мы можем легко найти решения, удовлетворяющие предельным условиям только на левом и только на правом конце Это будут решения

$$y_1(x) = x^2(a_1 + a_2 x) \quad y_2(x) = (x-1)^2(b_1 + b_2 x).$$

Произвольные постоянные определятся из четырех условий, а именно — из условия непрерывности функции и ее производных до второго порядка при $x = \xi$ и разрыва (52) производной третьего порядка Проделывая элементарные вычисления, мы придем к следующему окончательному выражению для функции Грина в рассматриваемом случае·

$$G(x, \xi) = \frac{x^2(\xi - 1)^2}{6}(2x\xi + x - 3\xi) \quad (x \leqslant \xi)$$

При $\xi \leqslant x$ надо поменять местами x и ξ

84. Уточненные теоремы разложения Стеклова. В [77] мы получили теорему разложения по собственным функциям $\varphi_n(x)$ уравнения (16). Предельные условия мы возьмем в виде

$$y(a) = y(b) = 0. \tag{54}$$

Теоремы разложения по функциям $\varphi_n(x)$ при весьма общих условиях, независимо от теории интегральных уравнений, даны в работах В А Стеклова. Относящиеся сюда результаты собраны в его книге «Основные задачи математической физики», т I (Пгр, 1922). Мы приведем некоторые из полученных им результатов.

Лишь ради упрощения рассуждения будем предполагать, что $q(x) \geqslant 0$ Это ограничение можно отбросить во всех пунктах [84]—[91] Пусть $f(x)$ — *непрерывная функция, имеющая непрерывную производную в промежутке* $[a, b]$ *и удовлетворяющая* *предельным условиям* (54). Существование производной второго порядка не предполагается. Докажем предварительно формулу

$$\int_a^b [p(x)\varphi_k'(x)\varphi_l'(x) + q(x)\varphi_k(x)\varphi_l(x)]\,dx = 0 \quad \text{при} \quad k \neq l. \tag{55}$$

Действительно, производя интегрирование по частям и пользуясь уравнением, которому удовлетворяют собственные функции

$$q(x)\varphi_k(x) - \frac{d}{dx}[p(x)\varphi_k'(x)] = \lambda_k\varphi_k(x), \tag{56}$$

получим

$$\int_a^b [p(x)\varphi_k'(x)\varphi_l'(x) + q(x)\varphi_k(x)\varphi_l(x)]\,dx =$$

$$= p(x)\varphi_k'(x)\varphi_l(x)\Big|_{x=a}^{x=b} + \lambda_k\int_a^b \varphi_k(x)\varphi_l(x)\,dx.$$

Но внеинтегральный член равен нулю в силу $\varphi_l(a) = \varphi_l(b) = 0$, а последний интеграл равен нулю в силу ортогональности собственных функций Рассмотрим теперь функционал

$$J(y) = \int_a^b [p(x)y'^2 + q(x)y^2]\,dx \tag{57}$$

и подставим в него

$$y = r_n(x) = f(x) - \sum_{k=1}^{n-1} c_k\varphi_k(x), \tag{58}$$

где c_k — коэффициенты Фурье функции $f(x)$:

$$c_k = \int_a^b f(x)\varphi_k(x)\,dx. \tag{59}$$

Раскрывая скобки и принимая во внимание (22) и (55), получим

$$J\left[f(x) - \sum_{k=1}^{n-1} c_k\varphi_k(x)\right] = \int_a^b [p(x)f'^2(x) + q(x)f^2(x)]\,dx +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k c_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n-1} c_k\int_a^b [p(x)f'(x)\varphi_k'(x) + q(x)f(x)\varphi_k(x)]\,dx.$$

Производя в последнем интеграле интегрирование по частям и принимая во внимание, что, по условию, $f(a)=f(b)=0$, а также учитывая (56), получим

$$J\left[f(x)-\sum_{k=1}^{n-1} c_k\varphi_k(x)\right]=\int_a^b [p(x)f'^2(x)+q(x)f^2(x)]\,dx-\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k c_k^2. \tag{60}$$

Если предположить, что не только $p(x)>0$, но и $q(x)\geqslant 0$, то из этой формулы непосредственно следует неравенство, аналогичное неравенству Бесселя:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k c_k^2 \leqslant \int_a^b [p(x)f'^2(x)+q(x)f^2(x)]\,dx, \tag{61}$$

и сходимость ряда, стоящего слева. Все члены этого ряда положительны, ибо $\lambda_k>0$ при $q(x)\geqslant 0$.

Отметим, что доказательство неравенства (61) полностью сохранится, если предположить, что непрерывная функция $f(x)$ имеет производную $f'(x)$ везде в $[a, b]$, кроме конечного числа точек $a_1, a_2, \ldots, a_m$, причем производная непрерывна везде, кроме упомянутых точек, а в этих точках имеет конечные пределы слева и справа (разрыв первого рода). При интегрировании по частям достаточно интегрировать по промежуткам непрерывности $f'(x)$ и затем сложить все эти интегралы.

Докажем теперь, что при сделанных выше относительно $f(x)$ предположениях ее ряд Фурье

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k(x) \tag{62}$$

регулярно сходится в промежутке $[a, b]$, т. е. что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k\varphi_k(x)| \tag{63}$$

равномерно сходится в этом промежутке. Пользуясь интегральным уравнением

$$\varphi_k(x)=\lambda_k\int_a^b G(x, \xi)\,\varphi_k(\xi)\,d\xi, \tag{64}$$

мы можем представить ряд (63) в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k |c_k\psi_k(x)|, \tag{65}$$

где

$$\psi_k(x)=\int_a^b G(x, \xi)\,\varphi_k(\xi)\,d\xi \tag{66}$$

можно рассматривать как коэффициенты Фурье функции $G(x, \xi)$ аргумента ξ. Пользуясь неравенством (61), можем написать

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \psi_k^2(x) \leqslant \int_a^b [p(\xi) G_\xi^2(x, \xi) + q(\xi) G^2(x, \xi)]^2 d\xi, \tag{67}$$

где $G_\xi(x, \xi)$ есть производная $G(x, \xi)$ по ξ. Все функции, стоящие под знаком интеграла, ограничены, и из (67) следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \psi_k^2(x) \leqslant M, \tag{68}$$

где M — некоторая постоянная. Заменим λ_k на $\sqrt{\lambda_k}\sqrt{\lambda_k}$ и применим к отрезку ряда (65) неравенство Коши

$$\sum_{k=m}^{m+p} \lambda_k |c_k \psi_k(x)| \leqslant \sqrt{\sum_{k=m}^{m+p} \lambda_k c_k^2} \sqrt{\sum_{k=m}^{m+p} \lambda_k \psi_k^2(x)}$$

или

$$\sum_{k=m}^{m+p} \lambda_k |c_k \psi_k(x)| \leqslant \sqrt{\sum_{k=m}^{m+p} \lambda_k c_k^2} \sqrt{M},$$

и из этого неравенства и сходимости ряда с членами $\lambda_k c_k^2$ непосредственно следует, что ряд (65) сходится равномерно на промежутке $[a, b]$, т. е. ряд (62) сходится регулярно. С другой стороны мы знаем, что его сумма равна $f(x)$ [**IV**$_1$; **3**].

Приведем еще одно доказательство теоремы разложения без предположения $q(x) \geqslant 0$ и при прежних предположениях относительно $f(x)$. Оно также принадлежит В. А. Стеклову. Вводя обозначение (58), докажем прежде всего, что существует такая постоянная C (не зависящая от n), что

$$\sigma_n = \int_a^b p(x) r_n'^2(x)\, dx \leqslant C. \tag{69}$$

Мы имеем

$$\sigma_n = \int_a^b p(x) \left[[f'(x) - \sum_{k=1}^{n-1} c_k \varphi_k'(x) \right]^2 dx =$$

$$= \int_a^b p(x) \left[f'(x) - \sum_{k=1}^{n-1} c_k \varphi_k'(x) \right] r_n'(x)\, dx =$$

$$= \int_a^b p(x) f'(x) r_n'(x)\, dx - \sum_{k=1}^{n-1} c_k \int_a^b p(x) \varphi_k'(x) r_n'(x)\, dx.$$

Интегрируя последний интеграл по частям и принимая во внимание (56), а также ортогональность $r_n(x)$ к функциям $\varphi_k(x)$ ($k=1, 2, \ldots, n-1$), получим

$$\sigma_n=\int_a^b p(x) f'(x) r_n'(x)\,dx+\int_a^b q(x) r_n(x) f(x)\,dx-\int_a^b q(x) r_n^2(x)\,dx,$$

откуда, обозначая через q_0 наибольшее значение $|q(x)|$ в промежутке $[a, b]$ и применяя неравенство Буняковского, причем в первом интеграле заменяем $p(x)=\sqrt{p(x)}\,\sqrt{p(x)}$, получим

$$\sigma_n \leqslant \sqrt{\int_a^b p(x) f'^2(x)\,dx}\,\sqrt{\sigma_n}+$$

$$+q_0\sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}\,\sqrt{\int_a^b r_n^2(x)\,dx}+q_0\int_a^b r_n^2(x)\,dx.$$

Принимая во внимание, что, в силу уравнения замкнутости,

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b r_n^2(x)\,dx=0,$$

мы получаем для σ_n неравенство вида

$$\sigma_n \leqslant c_1\sqrt{\sigma_n}+c_2,$$

где c_1 и c_2 — положительные постоянные. Из этого неравенства видно, что σ_n при возрастании n остается ограниченной, и мы получаем (69).

Далее из

$$\int_\xi^x \frac{d}{dt} r_n^2(t)\,dt=r_n^2(x)-r_n^2(\xi)$$

следует, что

$$r_n^2(x)=r_n^2(\xi)+2\int_\xi^x r_n(t) r_n'(t)\,dt,$$

откуда, применяя неравенство Буняковского и считая $\xi<x$, получим

$$r_n^2(x)\leqslant r_n^2(\xi)+2\sqrt{\int_\xi^x r_n^2(t)\,dt}\cdot\sqrt{\int_\xi^x r_n'^2(t)\,dt}\leqslant$$

$$\leqslant r_n^2(\xi)+2\sqrt{\int_a^b r_n^2(t)\,dt}\cdot\sqrt{\int_a^b r_n'^2(t)\,dt}.$$

В случае $x < \xi$ мы должны поменять пределы интегрирования ξ и x. Интегрируя обе части по ξ на промежутке $[a, b]$, получим

$$(b-a)\, r_n^2(x) \leqslant \int_a^b r_n^2(\xi)\, d\xi + 2(b-a) \sqrt{\int_a^b r_n^2(t)\, dt} \cdot \sqrt{\int_a^b r_n'^2(t)\, dt}.$$

Обозначая через p_0 наименьшее значение положительной функции $p(x)$ в промежутке $[a, b]$, можем написать, в силу (69), что

$$\int_a^b r_n'^2(t)\, dt \leqslant \frac{1}{p_0} \int_a^b p(t)\, r_n'^2(t)\, dt \leqslant \frac{C}{p_0},$$

и предыдущее неравенство дает

$$r_n^2(x) \leqslant \frac{1}{b-a} \int_a^b r_n^2(t)\, dt + 2\sqrt{\frac{C}{p_0}} \sqrt{\int_a^b r_n^2(t)\, dt}.$$

Правая часть не зависит от x и при беспредельном возрастании n стремится к нулю, откуда следует, что $r_n(x) \to 0$ равномерно в промежутке $[a, b]$, т. е. ряд (62) равномерно сходится в этом промежутке и его сумма равна $f(x)$. Можно доказать и без предположения $q(x) \geqslant 0$, что ряд (62) регулярно сходится.

85. Оправдание метода Фурье для уравнения теплопроводности. Рассмотрим уравнение с частными производными:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[p(x) \frac{\partial u}{\partial x}\right] - q(x)\, u, \tag{70}$$

которое соответствует распространению тепла в неоднородном стержне с учетом лучеиспускания с поверхности стержня. Считая $a \leqslant x \leqslant b$, будем искать решение уравнения (70) при начальном условии

$$u|_{t=0} = f(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b) \tag{71}$$

и предельных условиях

$$u|_{x=a} = 0; \quad u|_{x=b} = 0. \tag{72}$$

Применяя метод Фурье, получим решение задачи в виде

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-\lambda_k t} \varphi_k(x), \tag{73}$$

где λ_k и $\varphi_k(x)$ — собственные значения и собственные функции уравнения

$$\frac{d}{dx}[p(x)\, y'] + [\lambda - q(x)]\, y = 0 \tag{74}$$

при предельных условиях

$$y(a)=y(b)=0, \tag{75}$$

и c_k — коэффициенты Фурье (59) функции $f(x)$. Будем считать, что $q(x)\geqslant 0$ и что $f(x)$ имеет непрерывную производную в $[a, b]$ и удовлетворяет предельным условиям (72). Отметим, что все λ_k — положительны, ибо $q(x)\geqslant 0$. Покажем, что функция (73) удовлетворяет всем условиям задачи, т. е. удовлетворяет (71), (72), а также уравнению (70) при $t>0$.

Как мы доказали, ряд (73) регулярно сходится в промежутке $[a, b]$. Принимая во внимание, что $\lambda_k>0$, можем утверждать, что ряд (73) сходится абсолютно и равномерно при $t\geqslant 0$ и $a\leqslant x\leqslant b$. Тем самым его сумма есть непрерывная функция при указанных значениях аргументов, т. е.

$$\lim_{t\to+0} u(x, t)=u(x, 0)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k(x)=f(x).$$

Этим доказано выполнение начального условия (71). Предельные условия (72) выполняются в силу того, что все функции $\varphi_k(x)$ удовлетворяют условиям (72). Остается проверить уравнение (70) при $t>0$. Каждый член ряда (73) удовлетворяет уравнению (70) по самому его построению, и нам достаточно показать, что ряд (73) можно почленно дифференцировать один раз по t и два раза по x, а для этого достаточно показать, что ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k c_k e^{-\lambda_k t}\varphi_k(x); \tag{76$_1$}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-\lambda_k t}\varphi_k'(x); \tag{76$_2$}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-\lambda_k t}\varphi_k''(x) \tag{76$_3$}$$

равномерно сходятся при $t\geqslant\alpha$, где α — любое положительное число, и при $a\leqslant x\leqslant b$. Так как $\lambda_k\to+\infty$ при $k\to+\infty$, то $\lambda_k e^{-\lambda_k\alpha}\to 0$, и $\lambda_k e^{-\lambda_k t}\leqslant\lambda_k e^{-\lambda_k\alpha}$ при $t\geqslant\alpha$, т. е. существует такое N (не зависящее от t), что $\lambda_k e^{-\lambda_k t}<1$ при $t\geqslant\alpha$ и $k\geqslant N$. Отсюда, принимая во внимание равномерную сходимость ряда (63), получаем равномерную сходимость ряда (76$_1$) при $t\geqslant\alpha$ и $a\leqslant x\leqslant b$.

Совершенно так же доказывается возможность почленного дифференцирования ряда (73) по t сколько угодно раз при $t>0$. Для исследования следующих рядов напишем выражение (64) для $\varphi_k(x)$, пользуясь (7):

$$\varphi_k(x)=\lambda_k y_1(x)\int_a^x y_2(\xi)\varphi_k(\xi)\,d\xi+\lambda_k y_2(x)\int_x^b y_1(\xi)\varphi_k(\xi)\,d\xi,$$

откуда

$$\varphi_k'(x) = \lambda_k y_1'(x)\int_a^x y_2(\xi)\,\varphi_k(\xi)\,d\xi + \lambda_k y_2'(x)\int_x^b y_1(\xi)\,\varphi_k(\xi)\,d\xi$$

и

$$c_k e^{-\lambda_k t}\varphi_k'(x) = \\ = y_1'(x)\int_a^x y_2(\xi)\,\lambda_k e^{-\lambda_k t}\varphi_k(\xi)\,d\xi + y_2'(x)\int_x^b y_1(\xi)\,\lambda_k e^{-\lambda_k t}\varphi_k(\xi)\,d\xi. \quad (77)$$

Принимая во внимание равномерную, относительно x, сходимость ряда (76_1) в промежутке $[a, b]$ при $t > 0$, мы можем утверждать, что ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_2(\xi)\,\lambda_k e^{-\lambda_k t}\,\varphi_k(\xi) \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} y_1(\xi)\,\lambda_k e^{-\lambda_k t}\varphi_k(\xi)$$

равномерно сходятся в промежутке $[a, b]$, откуда, в силу (77), следует и равномерная сходимость ряда (76_2). Остается исследовать ряд (76_3). Для этого воспользуемся уравнением (56) для собственных функций. Из него следует:

$$c_k e^{-\lambda_k t}\varphi_k''(x) = \frac{1}{p(x)}\Big[-p'(x)\,c_k e^{-\lambda_k t}\varphi_k'(x) + \\ + q(x)\,c_k e^{-\lambda_k t}\varphi_k(x) - \lambda_k c_k e^{-\lambda_k t}\varphi_k(x)\Big], \quad (78)$$

и отсюда, в силу равномерной сходимости рядов (73), (76_1) и (76_2) в промежутке $[a, b]$ при любом $t > 0$, следует и равномерная сходимость ряда (76_3). Тем самым доказано, что функция $u(x, t)$, определяемая формулой (73), имеет соответствующие частные производные и удовлетворяет уравнению (70) при $t > 0$. Мы получаем таким образом следующую теорему:

Теорема. *Если функция $f(x)$, входящая в начальное условие, имеет непрерывную производную в промежутке $[a, b]$ и удовлетворяет предельным условиям* (72), *то функция $u(x, t)$, определяемая формулой* (73), *удовлетворяет начальному условию* (71), *предельным условиям* (72), *а также уравнению* (70) *при $t > 0$. Возможно почленное дифференцирование ряда* (73) *по t любое число раз и по x два раза при $t > 0$.*

86. Оправдание метода Фурье для уравнения колебаний. Рассмотрим теперь, вместо (70), уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right] - q(x)\,u. \quad (79)$$

Здесь, кроме предельных условий (72), мы имеем два начальных условия:

$$u\,|_{t=0} = f(x); \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = f_1(x), \quad (80)$$

и применение метода Фурье дает решение задачи в виде

$$u(x, t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos \sqrt{\lambda_k} t+b_k \sin \sqrt{\lambda_k} t\right) \varphi_k(x), \tag{81}$$

где λ_k и $\varphi_k(x)$ имеют прежние значения, а

$$a_k=\int_a^b f(x) \varphi_k(x) d x ; \quad b_k=\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_a^b f_1(x) \varphi_k(x) d x. \tag{82}$$

Как и в [85], нам достаточно показать, что ряд (81) и ряды, которые из него получаются при двукратном дифференцировании по t и x, будут равномерно сходящимися в промежутке $[a, b]$ при любом t.

Разобьем ряд (81) на два ряда и будем сначала рассматривать ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \sqrt{\lambda_k}\, t \varphi_k(x). \tag{83}$$

Принимая во внимание, что $\lambda_k>1$ при всех достаточно больших k, можно утверждать, что $\sqrt{\lambda_k}<\lambda_k$ при всех достаточно больших k.

Если мы докажем при некоторых условиях, налагаемых на $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k\left|a_k \varphi_k(x)\right| \tag{84}$$

равномерно сходится в промежутке $[a, b]$, то отсюда, повторяя буквально рассуждения из [85], мы докажем все указанные выше утверждения о почленном дифференцировании ряда (83)

Действительно, это очевидно для самого ряда (83), ибо $\lambda_k \rightarrow+\infty$, а для рядов, которые получаются дифференцированием по t, — в силу того, что $\sqrt{\lambda_k}<\lambda_k$ при всех достаточно больших k. При однократном дифференцировании по x нам достаточно доказать равномерную сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|a_k \varphi_k^{\prime}(x)\right|.$$

Она непосредственно вытекает из равномерной сходимости ряда (84) в силу формулы

$$a_k \varphi_k^{\prime}(x)=y_1^{\prime}(x) \int_a^x y_2(\xi) \lambda_k a_k \varphi_k(\xi) d \xi+y_2^{\prime}(x) \int_x^b y_1(\xi) \lambda_k a_k \varphi_k(\xi) d \xi,$$

аналогичной формуле (77). Для доказательства равномерной сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k \varphi_k''(x)|$$

достаточно использовать формулу, аналогичную формуле (78), вычеркнув, как и выше, множитель $e^{-\lambda_k t}$. Таким образом, все сводится к доказательству равномерной сходимости ряда (84).

Пользуясь уравнением (56), получим

$$\lambda_k a_k = \lambda_k \int_a^b f(x)\varphi_k(x)\,dx = \int_a^b f(x)\left\{q(x)\varphi_k(x) - \frac{d}{dx}[p(x)\varphi_k'(x)]\right\}dx.$$

Считая, что $f(x)$ имеет непрерывные производные до второго порядка и удовлетворяет условиям (72), и интегрируя по частям, получим

$$\lambda_k a_k = \int_a^b \left\{q(x)f(x) - \frac{d}{dx}[p(x)f'(x)]\right\}\varphi_k(x)\,dx.$$

Если предположить, что выражение, стоящее под знаком интеграла в фигурных скобках, имеет непрерывную производную и удовлетворяет предельным условиям (72), то отсюда будет следовать, что ряд (84) равномерно сходится в $[a, b]$. Указанное выше требование сводится к следующему: $f(x)$ имеет непрерывные производные до третьего порядка, $p(x)$ имеет непрерывные производные до второго порядка, $q(x)$ имеет непрерывную производную, и удовлетворяется условие

$$\frac{d}{dx}[p(x)f'(x)] - q(x)f(x) = 0 \quad \text{при} \quad x = a \quad \text{и} \quad x = b. \qquad (85)$$

В силу того, что $f(x)$ также должна удовлетворять условиям (72), мы можем написать (85) в виде

$$\frac{d}{dx}[p(x)f'(x)] = 0 \quad \text{при} \quad x = a \quad \text{и} \quad x = b. \qquad (86)$$

Рассмотрим теперь ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\sqrt{\lambda_k}\, t\varphi_k(x), \qquad (87)$$

где b_k определяются вторым из равенств (82). Как и выше, достаточно доказать равномерную сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |b_k \varphi_k(x)|,$$

т. е. ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k}\,|b'_k\varphi_k(x)|, \tag{88}$$

где

$$b'_k = \int_a^b f_1(x)\,\varphi_k(x)\,dx.$$

Считая, что $f_1(x)$ имеет непрерывные производные до второго порядка и удовлетворяет условиям (72), получим, как и выше,

$$\lambda_k b'_k = \int_a^b \left\{ q(x) f_1(x) - \frac{d}{dx}\left[p(x) f'_1(x)\right] \right\} \varphi_k(x)\,dx = b''_k,$$

где b''_k — коэффициент Фурье непрерывной функции, стоящей в фигурных скобках. Подставляя еще $\varphi_k(x) = \lambda_k\psi_k(x)$, получим

$$\sqrt{\lambda_k}\,|b'_k\varphi_k(x)| = \sqrt{\lambda_k}\,|b''_k\psi_k(x)|,$$

откуда, по неравенству Коши,

$$\sum_{k=m}^{m+p} \sqrt{\lambda_k}\,|b'_k\varphi_k(x)| \leqslant \sqrt{\sum_{k=m}^{m+p} b''^2_k} \cdot \sqrt{\sum_{k=m}^{m+p} \lambda_k\psi_k^2(x)}$$

или, принимая во внимание (68),

$$\sum_{k=m}^{m+p} \sqrt{\lambda_k}\,|b'_k\varphi_k(x)| \leqslant \sqrt{\sum_{k=m}^{m+p} b''^2_k} \cdot \sqrt{M}.$$

Но ряд, составленный из членов b''^2_k, сходится, и из последнего неравенства непосредственно следует, что ряд (88) равномерно сходится. Таким образом, мы приходим к следующей теореме:

Теорема. *Если $p(x)$ имеет непрерывные производные до второго порядка, $q(x) \geqslant 0$ и имеет непрерывную производную, $f(x)$ имеет непрерывные производные до третьего порядка, удовлетворяет условиям* (72) *и условию* (85), *а $f_1(x)$ имеет непрерывные производные до второго порядка и удовлетворяет условиям* (72), *то функция $u(x, t)$, определяемая формулой* (81), *удовлетворяет начальным условиям* (80), *предельным* (72), *а также уравнению* (79). *При этом возможно почленное дифференцирование ряда* (81) *по t и x два раза, и полученные ряды равномерно сходятся в промежутке $[a, b]$ при всяком t.*

87. Теоремы единственности. Мы установили существование решений уравнений (70) и (79) при соответствующих предельных и начальных условиях. Докажем теперь единственность таких решений.

Начнем с уравнения (70) при $q(x) \geqslant 0$, и будем предполагать, что решения непрерывны при $t \geqslant 0$ и $a \leqslant x \leqslant b$ и что при всяком $t > 0$ решение имеет непрерывную производную по t и производные по x до второго порядка, непрерывные в промежутке $[a, b]$. Решение именно с такими свойствами и было нами построено в [85].

Утверждение о единственности решения равносильно тому, что решение $u_0(x, t)$ уравнения (70) с указанными выше свойствами, удовлетворяющее однородному начальному условию

$$u_0|_{t=0} = 0 \qquad (a \leqslant x \leqslant b) \tag{89}$$

и предельным условиям (72), равно тождественно нулю при $t > 0$.

Напишем для $u_0(x, t)$ уравнение (70), умножим обе его части на $u_0(x, t)$ и проинтегрируем по x. При этом считается $t > 0$. Мы получим, таким образом, формулу

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_a^b u_0^2\,dx = \int_a^b u_0 \frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial u_0}{\partial x}\right]dx - \int_a^b q(x)\,u_0^2\,dx.$$

Все операции выполнимы в силу упомянутых выше свойств $u_0(x, t)$. В первом интеграле правой части интегрируем по частям и принимаем во внимание предельные условия. Таким образом, получаем

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_a^b u_0^2\,dx = -\int_a^b p(x)\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^2 dx - \int_a^b q(x)\,u_0^2\,dx \leqslant 0.$$

Таким образом, неотрицательная функция от t

$$\int_a^b u_0^2\,dx, \tag{90}$$

непрерывная при $t \geqslant 0$ и равная нулю, в силу (89), при $t = 0$ имеет неположительную производную при $t > 0$. Отсюда следует, что функция (90) тождественно равна нулю при $t > 0$. Но тогда и $u(x, t) \equiv 0$ при $t \geqslant 0$, что мы и хотели доказать.

Переходим теперь к доказательству теоремы единственности для уравнения (79) при $q(x) \geqslant 0$. Будем предполагать, что сами решения и их производные u_t, u_{tt}, u_x, u_{xx} непрерывны в промежутке $a \leqslant x \leqslant b$ и при любом t. Решение с такими именно свойствами и было нами построено в [86]. Утверждение о единственности решения равносильно тому, что решение $u_0(x, t)$ уравнения (79) с указанными выше свойствами, удовлетворяющее однородным начальным условиям

$$u_0|_{t=0} = \left.\frac{\partial u_0}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \tag{91}$$

и предельным условиям (72), равно тождественно нулю, Введем функцию

$$v(x, t)=\int_0^t u_0(x, \tau)\,d\tau. \tag{92}$$

Она имеет непрерывные производные v_x, v_t, v_{xx}, v_{xt}, v_{tt} при указанных значениях переменных. Напишем для $u_0(x, \tau)$ уравнение (79) и проинтегрируем его по τ на промежутке от $\tau=0$ до $\tau=t$. Принимая во внимание (91) и (92), получим

$$\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial v(x, t)}{\partial x}\right]-q(x)\,v(x, t).$$

В этом уравнении заменим t на τ, умножим обе части на $v_\tau(x, \tau)$ и проинтегрируем по τ на промежутке от $\tau=0$ до $\tau=t$. Принимая во внимание (91) и (92), получим

$$\frac{1}{2}v_t^2(x, t)=\int_0^t v_\tau(x, \tau)\frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\,v_x(x, \tau)\right]d\tau-\frac{1}{2}q(x)\,v^2(x, t).$$

Интегрируем обе части по x на промежутке $[a, b]$ и в повторном интеграле меняем порядок интегрирования:

$$\frac{1}{2}\int_a^b v_t^2(x, t)\,dx=$$

$$=\int_0^t\left\{\int_a^b v_\tau(x, \tau)\frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\,v_x(x, \tau)\right]dx\right\}d\tau-\frac{1}{2}\int_a^b q(x)\,v^2(x, t)\,dx.$$

Во внутреннем интеграле проинтегрируем по частям и учтем, что, в силу (91) и (92), внеинтегральный член равен нулю:

$$\frac{1}{2}\int_a^b v_t^2(x, t)\,dx=$$

$$=-\int_0^t\left\{\int_a^b p(x)\,v_{\tau x}(x, \tau)\,v_x(x, \tau)\,dx\right\}d\tau-\frac{1}{2}\int_a^b q(x)\,v^2(x, t)\,dx.$$

Меняя опять порядок интегрирования, производя интегрирование по τ и принимая во внимание, что $v_x(x, 0)=0$, получим

$$\frac{1}{2}\int_a^b v_t^2(x, t)\,dx=-\frac{1}{2}\int_a^b p(x)\,v_x^2(x, \tau)\,d\tau-\frac{1}{2}\int_a^b q(x)\,v^2(x, t)\,dx,$$

откуда следует

$$\int_a^b v_t^2(x, t)\,dx \leqslant 0,$$

и потому $v_t(x, t) \equiv 0$ при $a \leqslant x \leqslant b$ и $-\infty < t < +\infty$. В силу (92), получаем $u_0(x, t) \equiv 0$, что мы и хотели доказать. Заметим, что условие $q \geqslant 0$ можно отбросить.

88. Экстремальные свойства собственных значений и функций. Вернемся к предельной задаче для уравнения

$$\frac{d}{dx}[p(x)\,y'] + [\lambda - q(x)]\,y = 0 \tag{93}$$

или, что то же, для уравнения

$$L(y) = -\lambda y, \quad \text{где} \quad L(y) = \frac{d}{dx}[p(x)\,y'] - q(x)\,y.$$

В общем случае уравнения (1) мы можем привести его к виду (93), вводя вместо x новую независимую переменную:

$$t = \int_a^x r(x)\,dx. \tag{94}$$

Уравнение (1) при этом перепишется в виде

$$r(x)\frac{d}{dt}\left[r(x)\,p(x)\frac{dy}{dt}\right] + (\lambda r(x) - q(x))\,y = 0,$$

и, деля обе части на $r(x)$, мы получаем уравнение вида (93). При этом преобразовании существенно предположение, что $r(x)$ не обращается в нуль в замкнутом промежутке $[a, b]$. Мы считаем, что в уравнении (93) $p(x) > 0$ в промежутке $[a, b]$, и положим, что предельные условия имеют вид

$$y(a) = y(b) = 0. \tag{95}$$

При этом, как мы видели [78], собственные значения выражаются через соответствующие собственные функции по формуле

$$\lambda_n = \int_a^b \left[p(x)\,\varphi_n'^2(x) + q(x)\,\varphi_n^2(x)\right]dx, \tag{96}$$

и может существовать лишь конечное число отрицательных собственных значений, так что можно считать, что собственные значения расположены в возрастающем порядке, т. е. $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots$

Поставленная предельная задача равносильна интегральному уравнению

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b G(x, \xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi,$$

где $G(x, \xi)$ — функция Грина оператора $L(y)$ при предельных условиях (95). Мы знаем [IV; 42], что первое собственное значение λ_1 равно наименьшему значению интеграла

$$\int_a^b \int_a^b G(x, \xi)\, \omega(x)\, \omega(\xi)\, dx\, d\xi \tag{97}$$

в классе непрерывных функций $\omega(x)$, удовлетворяющих условию

$$\int_a^b \left[\int_a^b G(x, \xi)\, \omega(\xi)\, d\xi\right]^2 dx = 1. \tag{98}$$

Но интеграл

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi)\, \omega(\xi)\, d\xi \tag{99}$$

при любом выборе непрерывной функции $\omega(\xi)$ дает функцию $y(x)$ с непрерывными производными до второго порядка, удовлетворяющую предельным условиям (95). Наоборот, всякая функция $y(x)$ с указанными только что свойствами выражается интегралом (99) при соответствующем выборе непрерывной функции $\omega(x) = -L(y)$.

Мы можем, таким образом, согласно (97), (98) и (99) утверждать, что λ_1 есть наименьшее значение интеграла

$$-\int_a^b L(y)\, y\, dx \tag{100}$$

при выполнении условия:

$$\int_a^b y^2(x)\, dx = 1 \tag{101}$$

в классе функций $y(x)$, имеющих непрерывные производные до второго порядка и удовлетворяющих предельным условиям (95).

Производя в интеграле (100) интегрирование по частям, мы видим, что λ_1 есть наименьшее значение интеграла

$$\int_a^b [p(x)\, y'^2 + q(x)\, y^2]\, dx \tag{102}$$

при условии (101) в только что указанном классе функций $y(x)$. Первая собственная функция $y = \varphi_1(x)$ дает при этом, в силу (96), интегралу (102) наименьшее значение λ_1. Переходим ко второму собственному значению λ_2. Мы знаем, что это есть наименьшее значение интеграла (97), если к условию (98) добавить еще условие

$$\int_a^b \omega(\xi)\varphi_1(\xi)\,d\xi = 0. \tag{103}$$

Если определить $y(x)$ формулой (99), то [IV$_1$; 31]

$$\int_a^b y(x)\varphi_1(x)\,dx = \frac{1}{\lambda_1}\int_a^b \omega(\xi)\varphi_1(\xi)\,d\xi$$

и, следовательно, условие (103) равносильно условию

$$\int_a^b y(x)\varphi_1(x)\,dx = 0. \tag{104}$$

Таким образом, λ_2 есть наименьшее значение интеграла (102) в классе функций $y(x)$, имеющих непрерывные производные до второго порядка и удовлетворяющих условиям (95), при дополнительных условиях (101) и (104).

Вообще, собственное значение λ_n является наименьшим значением интеграла (102) в классе функций $y(x)$, имеющих непрерывные производные до второго порядка, удовлетворяющих предельным условиям (95) и следующим дополнительным условиям:

$$\int_a^b y^2\,dx = 1; \quad \int_a^b \varphi_k(x)\,y(x)\,dx = 0 \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1). \tag{105}$$

Покажем, что уравнение (93) есть уравнение Эйлера, выражающее необходимое условие экстремума интеграла (102) при дополнительном условии (101). Действительно [IV$_1$; 77], мы должны составить функцию

$$F = p(x)\,y'^2 + q(x)\,y^2 - \lambda y^2$$

и для нее написать уравнение Эйлера

$$\frac{d}{dx}F_{y'} - F_y = 0,$$

которое действительно совпадает с уравнением (93). Рассмотрим теперь экстремум интеграла (102) при двух дополнительных условиях, а именно, условиях (101) и (104). В данном случае мы должны составить вспомогательную функцию:

$$F = p(x)\,y'^2 + q(x)\,y^2 - \lambda y^2 - \mu\varphi_1(x)\,y,$$

и уравнение Эйлера для этой функции будет иметь вид

$$\frac{d}{dx}[p(x)y'] + (\lambda - q(x))y + \frac{\mu}{2}\varphi_1(x) = 0. \tag{106}$$

Покажем, что постоянная μ должна равняться нулю, т. е. что мы придем опять к уравнению (93). Для этого напишем уравнение (93) для первой собственной функции:

$$\frac{d}{dx}[p(x)\varphi_1'(x)] + (\lambda_1 - q(x))\varphi_1(x) = 0.$$

Умножим это последнее уравнение на y, уравнение (106) на $\varphi_1(x)$, вычтем почленно полученные уравнения и проинтегрируем полученное таким образом уравнение по основному промежутку. Принимая во внимание условие ортогональности (104) и нормированность первой собственной функции, мы придем к следующему соотношению:

$$\frac{\mu}{2} = \int_a^b \left\{ y\frac{d}{dx}[p(x)\varphi_1'(x)] - \varphi_1(x)\frac{d}{dx}[p(x)y'] \right\} dx.$$

Производя интегрирование по частям и пользуясь предельными условиями, мы убедимся без труда в том, что написанный интеграл равен нулю, а отсюда непосредственно вытекает $\mu = 0$, что мы и хотели доказать. Вообще, если мы напишем уравнение Эйлера, выражающее необходимое условие экстремума интеграла (102) при дополнительных условиях (105), то придем, как и выше, к уравнению (93).

До сих пор мы рассматривали случай $r(x) \equiv 1$. Совершенно аналогичные результаты будут иметь место и в общем случае, причем мы считаем $r(x) > 0$. В этом общем случае дополнительные условия (105) надо написать в виде

$$\begin{gathered}\int_a^b r(x)y^2(x)\,dx = 1;\\ \int_a^b r(x)\varphi_k(x)y(x)\,dx = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1).\end{gathered} \tag{107}$$

Чтобы удостовериться в этом, достаточно в общем уравнении (1) совершить замену независимого переменного (94). При этом мы получим уравнение вида (93), для которого результат нами уже доказан. Возвращаясь к прежней независимой переменной, мы получим интеграл (102) и дополнительные условия (107).

Отметим еще, что все изложенное выше остается справедливым и для предельных условий (2).

При нахождении последовательных минимумов интеграла (102) можно ставить эту задачу в классе функций, имеющих не две, а только одну непрерывную в промежутке $[a, b]$ производную. Можно показать, что в этой более широкой постановке последовательные минимумы осуществляются по-прежнему функциями $\varphi_n(x)$.

Рассмотрим уравнение колебания струны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \left(a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}\right),$$

где ρ — линейная плотность струны и T_0 — натяжение. Мы имеем следующие выражения для кинетической и потенциальной энергии:

$$T = \frac{1}{2}\int_0^l \rho u_t^2\, dx; \quad -U = \frac{1}{2}\int_0^l T_0 u_x^2\, dx.$$

В случае синусоидального режима вида $u = \sin \omega t y(x)$, мы получим для $y(x)$ уравнение

$$y'' + \lambda y = 0 \quad \left(\lambda = \frac{\omega^2}{a^2}\right)$$

при предельных условиях $y(0) = y(l) = 0$, если струна закреплена на концах, а кинетическая и потенциальная энергии будут выражаться формулами

$$T = \frac{\rho\omega^2}{2}\cos^2 \omega t \int_0^l y^2\, dx; \quad -U = \frac{T_0}{2}\sin^2 \omega t \int_0^l y'^2\, dx.$$

Первое собственное значение этой задачи сводится к разысканию наименьшей величины интеграла

$$\int_0^l y'^2\, dx \quad \text{при условии, что} \quad \int_0^l y^2\, dx = 1.$$

89. Теорема Куранта. Из рассуждений предыдущего параграфа следует, что наименьшее значение интеграла (102) при условиях (105) осуществляется собственной функцией $\varphi_n(x)$ и равно λ_n. При таком определении λ_n и $\varphi_n(x)$ нам необходимо знать все предыдущие собственные функции. Это обстоятельство затрудняет применение высказанного экстремального принципа. Мы докажем теперь теорему, которая позволяет определить λ_n и $\varphi_n(x)$ без использования предыдущих собственных функций. Пусть $z_1(x), \ldots, z_{n-1}(x)$ — какие угодно заданные функции, непрерывные в промежутке $[a, b]$. Поставим задачу о нахождении наименьшего значения интеграла

$$\int_a^b [p(x)y'^2 + q(x)y^2]\, dx \tag{108}$$

при дополнительных условиях:

$$\int_a^b r(x)\,y^2\,dx = 1; \quad \int_a^b r(x)\,z_k(x)\,y\,dx = 0 \tag{109}$$

$$(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$$

в классе функций $y(x)$, удовлетворяющих предельным условиям и имеющих непрерывные производные до второго порядка. Мы не знаем заранее, будет ли интеграл (108) при поставленных условиях достигать наименьшего значения, но мы можем во всяком случае говорить о точной нижней границе значений этого интеграла. Эта точная нижняя граница будет, конечно, зависеть от выбора функций $z_k(x)$. Мы обозначим ее через $m(z_1, \ldots, z_{n-1})$. Докажем сейчас следующую теорему Куранта: *при любом выборе непрерывных функций $z_k(x)$ число $m(z_1, \ldots, z_{n-1})$ не превосходит собственного значения λ_n.* Если при любом выборе функций z_k мы сможем построить такую функцию $y(x)$, удовлетворяющую условиям (109) и всем остальным требованиям, что соответствующее ей значение интеграла (108) не больше λ_n, то число $m(z_1, \ldots, z_n)$ и подавно будет не больше λ_n, и теорема будет доказана. Будем искать функцию $y(x)$ в виде

$$y = c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x), \tag{110}$$

где $\varphi_k(x)$ — собственные функции предельной задачи и c_k — постоянные, к определению которых мы сейчас и переходим. Первое из условий (109), в силу ортонормированности функций $\varphi_k(x)$ с весом $r(x)$ (см. (107)), приводит нас к равенству

$$c_1^2 + c_2^2 + \ldots + c_n^2 = 1. \tag{111}$$

Оставшиеся $(n-1)$ условий дадут систему $(n-1)$ однородных уравнений с n неизвестными $c_1, \ldots, c_n$. Такая система, как известно [**III**$_1$; **10**], имеет решения, отличные от нулевого. Всякое такое решение можно умножить на произвольный постоянный множитель, который можно выбрать так, чтобы выполнялось равенство (111). Таким образом, при помощи формулы (110) мы построили функцию, имеющую непрерывные производные до второго порядка, удовлетворяющую предельным условиям и всем дополнительным условиям (109). Нам остается только подставить выражение (110) в интеграл (108) и убедиться, что величина этого интеграла окажется $\leqslant \lambda_n$. После упомянутой подстановки под знаком интеграла мы будем иметь члены, содержащие квадраты $\varphi_k^2(x)$ и квадраты $\varphi_k'^2(x)$, а также члены с произведениями $\varphi_k(x)\varphi_l(x)$ и $\varphi_k'(x)\varphi_l'(x)$. Но совершенно так же, как и в [84], может быть и при $r(x)$, отличном от единицы, доказана формула

$$\int_a^b [p(x)\varphi_k'(x)\varphi_l'(x)+q(x)\varphi_k(x)\varphi_l(x)]\,dx=0 \qquad (k\neq l).$$

Принимая еще во внимание формулу (22), убедимся в том, что подстановка выражения (110) в интеграл (108) приведет к выражению

$$c_1^2\lambda_1+\ldots+c_n^2\lambda_n.$$

Принимая во внимание, что $\lambda_1<\ldots<\lambda_n$ и пользуясь формулой (111), мы получим

$$c_1^2\lambda_1+\ldots+c_n^2\lambda_n\leqslant\lambda_n,$$

что и дает окончательно теорему Куранта.

Следствие. Если мы примем $z_1=\varphi_1(x), \ldots, z_{n-1}=\varphi_{n-1}(x)$, то, как мы видели выше, наименьшее значение интеграла (108) при условиях (109) будет равно в точности λ_n и будет достигаться при $y=\varphi_n(x)$. Таким образом, мы можем сказать, что λ_n *есть наибольшее значение всевозможных нижних границ* $m_n(z_1, \ldots, z_{n-1})$ *значений интеграла* (108) *при дополнительных условиях* (109) *в классе функций* $y(x)$, *удовлетворяющих предельным условиям и имеющих непрерывные производные до второго порядка, причем это наибольшее значение точных нижних границ достигается при* $z_k=\varphi_k(x)$ *и* $y=\varphi_n(x)$. Это максимально-минимальное свойство собственных значений λ_n остается справедливым для широкого класса уравнений с частными производными и играет основную роль при исследовании собственных значений.

90. Асимптотическое выражение собственных значений. Заменим в уравнении (1) $p(x)$ и $q(x)$ новыми функциями $p_1(x)$ и $q_1(x)$, не меньшими прежних во всем промежутке

$$\begin{gathered} p_1(x)\geqslant p(x);\quad q_1(x)\geqslant q(x)\quad (a\leqslant x\leqslant b)\\ (p(x)>0;\ r(x)>0). \end{gathered} \tag{112}$$

Функцию $r(x)$ оставим прежней. Обозначим характеристические числа измененного уравнения через λ_n' и докажем неравенство $\lambda_n'\geqslant\lambda_n$. Для этого воспользуемся только что доказанным свойством собственных значений.

При указанном изменении $p(x)$ и $q(x)$ дополнительные условия (109) остаются прежними, а интеграл (108) может только увеличиться при фиксированной функции y. Поскольку совокупность функций y остается прежней при упомянутой замене коэффициентов, и точная нижняя граница $m(z_1, \ldots, z_{n-1})$ значений интеграла (108) во всяком случае не уменьшится, а следовательно, не уменьшится и наибольшее из чисел $m(z_1, \ldots, z_{n-1})$, т. е. λ_n. Что и требовалось доказать.

Оставим теперь неизменными функции $p(x)$ и $q(x)$ и заменим $r(x)$ на $r_1(x)$, причем $r_1(x) \geqslant r(x)$ при $a \leqslant x \leqslant b$. В этом случае нельзя уже говорить о сохранении класса конкурирующих функций y, ибо если y удовлетворяет первому из условий (109), то после подстановки вместо $r(x)$ функции $r_1(x)$ будем иметь

$$\int_a^b r_1(x)\, y^2\, dx \geqslant 1.$$

Легко, однако, из функции y получить допустимую функцию новой задачи. Для этого достаточно подобрать число θ, удовлетворяющее условию $0 < \theta \leqslant 1$ так, чтобы

$$\int_a^b r_1(x)\, \theta^2 y^2\, dx = 1.$$

Нетрудно видеть, что функция θy удовлетворяет и остальным условиям (109), правда, для других функций $z_k(x)$. Действительно, так как θ есть постоянная, то из (109) вытекает, что

$$\int_a^b r_1(x)\, \frac{z_k(x)\, r(x)}{r_1(x)}\, \theta y\, dx = 0 \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ k-1).$$

Но это и есть опять условия вида (109) для видоизмененного уравнения, причем вместо функций $z_k(x)$ здесь взяты функции

$$\tilde{z}_k(x) = \frac{z_k(x)\, r(x)}{r_1(x)}.$$

Каждой системе функций $z_k(x)$ будет соответствовать система функций $\tilde{z}_k(x)$, и наоборот. Обратный переход от функции θy для преобразованного уравнения к таким же функциям для первоначального уравнения будет совершаться при помощи деления θy на θ. При замене y на θy значение интеграла (108) не может увеличиться. Следовательно, не может увеличиться и точная нижняя граница этих значений, а потому не может увеличиться и число λ_n, являющееся наибольшей из этих точных нижних границ. Мы приходим, таким образом, к следующему общему предложению: *если измененные коэффициенты $p_1(x)$ и $q_1(x)$ удовлетворяют условию* (112), *то собственное значение λ_n не может уменьшиться, а если измененный коэффициент $r_1(x)$ удовлетворяет условию $r_1(x) \geqslant r(x)$, то λ_n не может увеличиться.*

Применим доказанное предложение к асимптотической оценке собственных значений λ_n при больших значениях n. Пусть

(p, P), (q, Q), (r, R) — наименьшие и наибольшие значения функций $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ в промежутке $[a, b]$. Заменим в заданном уравнении (1) $p(x)$ на P, $q(x)$ на Q и $r(x)$ на r. Полученное новое уравнение с постоянными коэффициентами:

$$Py'' + (\lambda r - Q)\, y = 0, \tag{113}$$

будет иметь собственные значения λ'_n, во всяком случае не меньшие, чем собственные значения λ_n первоначального уравнения. Но мы легко можем найти λ'_n. Для этого заметим прежде всего, что уравнение (113) может иметь решение, удовлетворяющее предельным условиям (95) только в том случае, если $\frac{\lambda r - Q}{P} > 0$. Принимая это во внимание, мы напишем общий интеграл уравнения (113) в виде

$$y = C_1 \cos \sqrt{\frac{\lambda r - Q}{P}}\, x + C_2 \sin \sqrt{\frac{\lambda r - Q}{P}}\, x.$$

Для простоты в дальнейших вычислениях примем за основной промежуток $[a, b]$ промежуток $[0, l]$. Из предельного условия $y(0) = 0$ следует $C_1 = 0$, и второе предельное условие $y(l) = 0$ дает нам уравнение для определения λ, а именно:

$$\sqrt{\frac{\lambda r - Q}{P}}\, l = n\pi,$$

откуда

$$\lambda'_n = \frac{n^2 \frac{\pi^2}{l^2} P + Q}{r}, \quad \text{и, следовательно,} \quad \lambda_n \leqslant \frac{n^2 \frac{\pi^2}{l^2} P + Q}{r}.$$

Совершенно так же, заменяя $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ соответственно на p, q, R, мы докажем, что

$$\lambda_n \geqslant \frac{n^2 \frac{\pi^2}{l^2} p + q}{R},$$

и получаем таким образом следующую оценку для собственных значений:

$$\frac{n^2 \frac{\pi^2}{l^2} P + Q}{r} \geqslant \lambda_n \geqslant \frac{n^2 \frac{\pi^2}{l^2} p + q}{R}.$$

Отсюда вытекает, что λ_n при больших n есть величина порядка n^2 и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}$$

есть ряд сходящийся. Пользуясь максимально-минимальным свойством λ_n, можно получить более точную оценку, если предварительно преобразовать исходное уравнение. Предположим, что $p(x)$ и $r(x)$ имеют непрерывные производные до второго порядка и преобразуем уравнение (1), вводя вместо x новую независимую переменную t:

$$t=\int\limits_a^x \sqrt{\frac{r(x)}{p(x)}}\,dx, \tag{114}$$

и вместо y новую искомую функцию u:

$$u=\sqrt[4]{p(x)\,r(x)}\,y. \tag{115}$$

Промежуток $[a, b]$ изменения переменной x преобразуется в промежуток $[0, l]$ для переменной t, где

$$l=\int\limits_a^b \sqrt{\frac{r(x)}{p(x)}}\,dx.$$

Уравнение для $u(t)$ будет иметь вид

$$\frac{d^2u}{dt^2}+(\lambda-s(t))\,u=0, \tag{116}$$

где $s(t)$ — некоторая непрерывная функция, которая легко определяется по заданным коэффициентам уравнения (1). Из $y(a)=y(b)=0$ следует $u(0)=u(l)=0$ и наоборот, а потому собственные функции исходного уравнения будут определяться собственными функциями преобразованного уравнения по формуле (115), и наоборот, а собственные значения останутся прежними. При определении собственных значений уравнения (116) мы должны поставить минимальную задачу для интеграла

$$\int\limits_0^l [u'^2+s(t)\,u^2]\,dt. \tag{117}$$

Пусть σ есть наибольшее значение для $|s(t)|$ в промежутке $[0, l]$, так что

$$-\sigma\leqslant s(t)\leqslant\sigma \qquad (0\leqslant t\leqslant l).$$

Если вместо интеграла (117) мы поставим минимальную задачу для интегралов

$$\int\limits_a^b (u'^2+\sigma u^2)\,dt \tag{118$_1$}$$

и

$$\int\limits_a^b (u'^2-\sigma u^2)\,dt \tag{118$_2$}$$

и обозначим через λ_n' и λ_n'' соответствующие собственные значения, то получим

$$\lambda_n' \geqslant \lambda_n \geqslant \lambda_n''. \tag{119}$$

Но числа λ_n' и λ_n'' вычисляются элементарно из решений уравнений

$$u'' + (\lambda - \sigma) u = 0 \quad \text{и} \quad u'' + (\lambda + \sigma) u = 0$$

при предельных условиях $u(0) = u(l) = 0$, и мы имеем

$$\lambda_n' = \frac{n^2\pi^2}{l^2} + \sigma; \quad \lambda_n'' = \frac{n^2\pi^2}{l^2} - \sigma.$$

В силу (119) получим

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2} + A_n \quad (|A_n| \leqslant \sigma) \tag{120}$$

или

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2} + O(1), \tag{121}$$

где через $O(1)$ мы, как всегда, обозначаем величину, которая остается ограниченной по абсолютной величине при всех значениях n. Возвращаясь к старым переменным, получим

$$\lambda_n = n^2\pi^2 \left[\int_a^b \sqrt{\frac{r(x)}{p(x)}}\, dx \right]^{-2} + O(1), \tag{122}$$

и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{\lambda_n} = \frac{1}{\pi^2} \left[\int_a^b \sqrt{\frac{r(x)}{p(x)}}\, dx \right]^2. \tag{123}$$

Точно такие же асимптотические выражения собственных значений мы получим и для других предельных условий. Это непосредственно получается, если рассмотреть уравнение $u'' + \mu u = 0$ для различных предельных условий.

91. Асимптотическое выражение для собственных функций. Имея асимптотическое выражение для собственных значений, мы можем получить и асимптотические выражения для собственных функций, пользуясь тем же самым методом, который мы применяли раньше при выводе асимптотических выражений полиномов Эрмита и Лежандра [**III**$_2$; **163, 164**].

При помощи указанного выше преобразования переменных мы можем привести наше уравнение к виду (116):

$$u''(t) + (\lambda - s(t))\, u(t) = 0.$$

При больших значениях n собственные значения λ_n будут, как мы знаем [78], положительными, и в дальнейшем мы будем считать, что n настолько велико, что $\lambda_n > 0$. Пусть $u_n(t)$ — собственные функции, соответствующие собственным значениям λ_n. Мы можем написать:

$$u_n''(t) + \lambda_n u_n(t) = s(t) u_n(t),$$

и получим

$$u_n(t) = a_n \sin\sqrt{\lambda_n}\, t + b_n \cos\sqrt{\lambda_n}\, t + \\ + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^t s(\tau) u_n(\tau) \sin\sqrt{\lambda_n}(t-\tau)\, d\tau. \quad (124)$$

Применим к интегралу, стоящему в правой части, неравенство Буняковского:

$$\left[\int_0^t s(\tau) u_n(\tau) \sin\sqrt{\lambda_n}(t-\tau)\, dt\right]^2 \leqslant \int_0^t u_n^2(\tau)\, d\tau \int_0^t s^2(\tau) \sin^2\sqrt{\lambda_n}(t-\tau)\, d\tau,$$

откуда следует, что при всяком t из промежутка $[0, l]$

$$\left[\int_0^t s(\tau) u_n(\tau) \sin\sqrt{\lambda_n}(t-\tau)\, d\tau\right]^2 \leqslant \int_0^l s^2(\tau)\, d\tau, \quad (125)$$

причем мы приняли во внимание нормированность функций $u_n(t)$.

Пусть $\varphi_n(x)$ — собственная функция исходного уравнения (1), получаемая из $u_n(t)$ при помощи преобразований (114) и (115). Из этих преобразований непосредственно следует

$$\int_a^b r(x) \varphi_n^2(x)\, dx = \int_0^l u_n^2(t)\, dt = 1, \quad (126)$$

т. е. обычная нормировка $u_n(t)$ равносильна нормировке $\varphi_n(x)$ с весом $r(x)$. Предельное условие $u(0) = 0$ дает нам $b_n = 0$, и мы можем переписать формулу (124) в следующем виде:

$$u_n(t) = a_n \sin\sqrt{\lambda_n}\, t + \frac{m_n(t)}{\sqrt{\lambda_n}}, \quad (127)$$

где, в силу неравенства (125), функция $m_n(t)$ остается ограниченной при всех целых положительных n и всех t из промежутка $[0, l]$, т. е. существует такое положительное число A, что

$$|m_n(t)| \leqslant A. \quad (128)$$

Возводя обе части (127) в квадрат, интегрируя по основному промежутку и принимая во внимание нормированность функций

$u_n(t)$, можем написать:

$$1 = a_n^2 \int_0^l \sin^2 \sqrt{\lambda_n}\, t\, dt + \frac{2a_n}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^l m_n(t) \sin \sqrt{\lambda_n}\, t\, dt + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^l m_n^2(t)\, dt.$$

Первый из написанных интегралов вычисляется до конца, а остальные два, в силу условия (128), будут ограниченными по абсолютной величине при всех значениях n. Таким образом мы получим

$$1 = \frac{l}{2} a_n^2 - \frac{\sin 2\sqrt{\lambda_n}\, l}{4\sqrt{\lambda_n}} a_n^2 + \frac{a_n}{\sqrt{\lambda_n}} p_n + \frac{1}{\lambda_n} q_n, \tag{129}$$

где p_n и q_n остаются ограниченными по абсолютной величине при возрастании n. Вынесем в правой части a_n^2 за скобки:

$$1 = a_n^2 \left(\frac{l}{2} - \frac{\sin 2\sqrt{\lambda_n}\, l}{4\sqrt{\lambda_n}} + \frac{1}{a_n\sqrt{\lambda_n}} p_n + \frac{1}{a_n^2 \lambda_n} q_n \right).$$

Если бы при возрастании n мы встречались со сколь угодно большими значениями a_n^2, то при таких значениях n выражение, стоящее в скобках, стремилось бы к пределу $\frac{l}{2}$, отличному от нуля, и произведение, стоящее в правой части последней формулы, не могло бы равняться единице. Отсюда мы можем заключить, что a_n остается ограниченным при возрастании n. Принимая это во внимание, мы можем переписать формулу (129) в виде

$$1 = \frac{l}{2} a_n^2 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right), \tag{130}$$

где, как всегда, через $O\left(\frac{1}{x_n}\right)$ мы обозначаем такую величину, что произведение $x_n \cdot O\left(\frac{1}{x_n}\right)$ остается ограниченным при беспредельном возрастании n. Мы можем переписать последнюю формулу следующим образом:

$$a_n^2 = \frac{2}{l} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right),$$

откуда вытекает:

$$a_n = \sqrt{\frac{2}{l}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right).$$

Подставляя это в (127), получим

$$u_n(t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \sqrt{\lambda_n}\, t + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right), \tag{131}$$

где

$$O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right)=\frac{p_n(t)}{\sqrt{\lambda_n}},$$

причем $p_n(t)$ ограничена по абсолютной величине при всех n и всех t из промежутка $0 \leqslant t \leqslant l$.

Из (121) вытекает:

$$\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{l^2}\left[1+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \quad \text{или} \quad \sqrt{\lambda_n}=\frac{n\pi}{l}+O\left(\frac{1}{n}\right),$$

откуда

$$\sin\sqrt{\lambda_n}\,t=\sin\frac{n\pi}{l}+O\left(\frac{1}{n}\right),$$

где $O\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{q_n(t)}{n}$, где $q_n(t)$ — ограничена по абсолютной величине при всех n и всех t из $[0, l]$. Подставляя это в (131), получим следующие асимптотические выражения для нормированных функций $u_n(t)$:

$$u_n(t)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{n\pi}{l}t+O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{132}$$

Возвращаясь к старым переменным согласно (114) и (115), мы получим следующую асимптотическую формулу:

$$\varphi_n(x)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{l}\,\sqrt[4]{p(x)\,r(x)}}\sin\left[\frac{n\pi}{l}\int_a^x\sqrt{\frac{r(x)}{p(x)}}\,dx\right]+O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{133}$$

где собственные функции $\varphi_n(x)$ нормированы согласно (126) и $O\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{r_n(x)}{n}$, где $r_n(x)$ ограничена по абсолютной величине при всех n и всех x из $[a, b]$.

92. Метод Ритца. Уравнение

$$\frac{d}{dx}[p(x)\,y']+[\lambda r(x)-p(x)]\,y=0 \tag{134}$$

есть уравнение Эйлера для интеграла

$$\int_a^b [p(x)'^2+q(x)\,y^2]\,dx \tag{135}$$

при дополнительном условии

$$\int_a^b r(x)\,y^2(x)\,dx=1,$$

и, как мы видели, разыскание последовательных собственных значений и собственных функций сводится к экстремальным задачам для интеграла (135).

Это приводит к практически удобному способу приближенного определения собственных значений и собственных функций. Мы уже описывали этот способ (метод Ритца) в применении к отысканию абсолютного экстремума интеграла.

Берем последовательность линейно независимых функций $v_1(x)$, $v_2(x)$, ..., удовлетворяющих предельным условиям, составляем линейную комбинацию

$$y = \sum_{k=1}^{n} a_k^{(n)} v_k(x) \tag{136}$$

и подставляем ее в интеграл

$$J(y) = \int_a^b \{p(x)\, y'^2 + [q(x) - \lambda r(x)]\, y^2\}\, dx.$$

В результате получим квадратичную форму величин $a_k^{(n)}$. Приравнивая ее частные производные по $a_k^{(n)}$ нулю, придем к системе n однородных уравнений с n неизвестными $a_k^{(n)}$. Полагая определитель этой системы равным нулю, получим уравнение n-й степени относительно λ. Корни этого уравнения $\lambda_1^{(n)}, \ldots, \lambda_n^{(n)}$ могут быть приняты за приближенные значения первых n собственных значений задачи. Для каждого из них может быть найдена из упомянутой однородной системы система чисел $a_k^{(n)}$, и по ней, согласно (136), построена соответствующая функция y, которая приближенно может быть принята за соответствующую собственную функцию. Сходимость этого процесса существенно зависит от выбора координатных функций $v_k(x)$. По этому поводу мы приведем лишь некоторые результаты из работ академика Н. М. Крылова (Mem. Sci. Math., 1931, **49**).

Положим, что уравнение имеет вид

$$y'' + \lambda r(x)\, y = 0 \qquad (r(x) > 0). \tag{137}$$

Предельные условия берем в простейшей форме: $y(0) = y(1) = 0$. Если положить $v_n(x) = \sqrt{2}\sin n\pi x$, то разность между истинным значением λ_m и n-м приближением к этому числу может быть оценена следующим образом:

$$\left|\lambda_m - \lambda_m^{(n)}\right| \leqslant \frac{2\lambda_m^2 \max r^{3/2}(x)}{(n+1)^2 \pi^2 \min\sqrt{r(x)} - 2\lambda_m \max r^{3/2}(x)},$$

или

$$\left|\frac{\lambda_m^{(n)} - \lambda_m}{\lambda_m}\right| \leqslant \frac{\lambda_m A}{(n+1)^2\pi^2 - \lambda_m B}, \tag{138}$$

где

$$A = [\max r(x) - \min r(x)]\sqrt{\frac{\max r(x)}{\min r(x)}}; \qquad B = 2\max r(x).$$

В практических вычислениях часто пользуются не тригонометрическими функциями, а многочленами Положим, что мы по-прежнему имеем уравнение (137) с предельными условиями $y(-1) = y(1) = 0$, и примем $v_n(x) = (1 - x^2)x^{n-1}$ (множитель $(1 - x^2)$ обеспечивает удовлетворение предельных условий). При таком выборе функций $v_n(x)$ имеют место следующие оценки:

$$\left|\frac{\lambda_m^{(n)} - \lambda_m}{\lambda_m}\right| < \frac{\lambda_m^{(n)} \max r(x)}{(n+1)(n+2)}. \tag{139}$$

Эта оценка справедлива, если предположить только непрерывность функции $r(x)$. Если эта функция имеет еще непрерывную производную, то можно получить более точную оценку, а именно:

$$\left|\frac{\lambda_m^{(n)}-\lambda_m}{\lambda_m}\right| < \frac{N\lambda_m^{(n)}}{(n+1)^2(n+2)},$$

где

$$N=\left\{\max\left|\frac{r'(x)}{\sqrt{r(x)}}\right|+\sqrt{\lambda_m^{(n)}}\sqrt[4]{\frac{\max r^5(x)}{\min r(x)}}\right\}^2.$$

Более точная оценка получается в предположении существования второй непрерывной производной у функции $r(x)$.

93. Пример Ритца. Приведем один пример приближенного вычисления собственных значений и собственных функций. В этом примере собственные значения и собственные функции могут быть определены точно в конечном виде, и это даст нам возможность выяснить быстроту сходимости процесса. Приводимый пример находится в мемуаре Ритца (J. reine und angew. Math., 1909, 135). Рассмотрим уравнение

$$y''+k^2y=0$$

при предельных условиях $y(-1)=y(1)=0$, причем k^2 играет роль параметра λ. К такой предельной задаче приводит задача колебания струны, закрепленной на концах. Основной тон струны дается решением

$$y_1=\cos\frac{\pi x}{2}, \qquad k_1=\frac{\pi}{2};$$

первый обертон —

$$y_2=\sin\pi x, \qquad k_2=\pi;$$

второй обертон —

$$y_3=\cos\frac{3\pi x}{2}, \qquad k_3=\frac{3\pi}{2} \quad \text{и т. д.}$$

Ищем приближенно четные решения в виде многочлена, расположенного по четным степеням x. Общий вид такого многочлена, удовлетворяющего предельным условиям, будет

$$y=(1-x^2)(a_0+a_1x^2+\ \dots\ +a_nx^{2n}).$$

Ограничиваясь лишь двумя членами

$$y=(1-x^2)(a_0+a_1x^2)$$

и подставляя их в интеграл

$$J(y)=\int_{-1}^{1}(y'^2-k^2y^2)\,dx,$$

мы получим

$$J(y)=\frac{8}{315}\left[(105-42k^2)a_0^2+(42-12k^2)a_0a_1+(33-2k^2)a_1^2\right].$$

Приравнивая нулю частные производные по a_0 и a_1, придем к системе

$$(35-14k^2)a_0+(7-2k^2)a_1=0,$$
$$(21-6k^2)a_0+(33-2k^2)a_2=0,$$

и равенство нулю определителя даст нам уравнение

$$k^4-28k^2+63=0,$$

корни которого будут

$$k_1^2 = 2{,}46744; \quad k_3^2 = 25{,}6.$$

Из точных же решений, приведенных выше, получается:

$$k_1^2 = \frac{\pi^2}{4} = 2{,}467401100\ \ldots; \quad k_3^2 = \frac{9\pi^2}{4} = 22{,}207.$$

При втором приближении

$$y = (1 - x^2)(a_0 + a_1 x^2 + a_2 x^4).$$

Для определения k^2 будем иметь уравнение

$$4k^6 - 450k^4 + 8\,910k^2 - 19\,305 = 0,$$

из которого находим

$$k_1^2 = 2{,}467401108\ \ldots; \quad k_3^2 = 23{,}301\ \ldots$$

Подставляя это полученное приближенное значение для k_1^2 в коэффициенты системы, служащей для определения a_0, a_1, a_2, мы найдем и эти коэффициенты с точностью до постоянного множителя, которым можно распорядиться так, чтобы полученное решение удовлетворяло условию

$$\int_{-1}^{1} y^2\,dx = 1,$$

которому удовлетверяет точное решение $y = \cos\frac{\pi x}{2}$. Таким путем мы придем к следующему приближенному решению·

$$y = (1 - x^2)(1 - 0{,}233430x^2 + 0{,}018962x^4).$$

Насколько мало отличается y от $\cos\frac{\pi x}{2}$, показывает следующая таблица, в которой приведены мантиссы десятичных логарифмов этих функций:

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$\lg\cos\frac{\pi x}{2}$	994620	978206	949881	907958	849485
$\lg y$	994621	978212	949889	907952	849493

x	0,6	0,7	0,8	0,9
$\lg\cos\frac{\pi x}{2}$	769219	657047	489982	194332
$\lg y$	769221	657043	489978	194345

Собственные значения и функции, которые представляют собой нечетные функции x, можно приближенно искать в виде

$$y = (1 - x^2)(a_0 x + a_1 x^3 + \ldots + a_n x^{2n+1}).$$

§ 2. УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

94. Ньютонов потенциал. Мы переходим сейчас к рассмотрению предельных задач для уравнений с частными производными. Начнем с уравнения Лапласа. Мы уже решали задачу Дирихле для этого уравнения в случае круга и сферы. Кроме уравнения Лапласа, мы рассмотрим в настоящем параграфе и другие уравнения эллиптического типа. Для этих уравнений можно ставить задачи, аналогичные задачам Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа. Физически уравнения эти возникают обычно при рассмотрении статических задач или установившихся режимов. Напомним, что самое уравнение Лапласа получается, например, при рассмотрении электростатического поля и установившегося потока тепла.

Большое значение при рассмотрении предельных задач для уравнения Лапласа имеет ньютонов потенциал. Напомним основные определения, касающиеся ньютонова потенциала, а также введем и некоторые новые понятия.

Пусть D — ограниченная область трехмерного пространства, $\mu(N)$ — непрерывная функция точки в этой области и r — расстояние от точки M до переменной точки N области D. *Потенциал объемных масс* определяется, как известно, формулой

$$v(M)=\iiint_D \frac{\mu(N)}{r}\,dv. \tag{1}$$

Точно так же *потенциал простого слоя*, распределенного по поверхности S с плотностью $\mu(N)$, определяется формулой

$$u(M)=\iint_S \frac{\mu(N)}{r}\,ds. \tag{2}$$

Как мы знаем [**II; 90, 210**], вне масс функции $u(M)$ и $v(M)$ имеют производные всех порядков и удовлетворяют уравнению Лапласа. Для дальнейшего изложения важно прежде всего указать те ограничения, которые мы будем налагать на поверхность S, которую в дальнейшем будем считать замкнутой. Это было впервые точно сформулировано А. М. Ляпуновым в его работе «О некоторых вопросах, связанных с задачей Дирихле» (1898 г.). Работа эта сыграла выдающуюся роль в развитии теории потенциала и исследовании предельных задач для уравнения Лапласа. В этом и дальнейших параграфах мы будем следовать изложению этой работы.

На поверхность S налагаются следующие требования.

1. В каждой точке S существует касательная плоскость.

2. Существует такое $d>0$, что если N_0 — любая точка S, то всякая сфера с центром N_0 радиуса d или меньшего радиуса

делит S на две части, из которых одна заключается внутри и другая вне сферы, и прямые, параллельные нормали к S в точке N_0, пересекают часть S, находящуюся внутри упомянутой сферы, в одной точке.

3. Если ϑ — острый угол, образованный нормалями к S в двух ее точках N_1 и N_2, и $r_{1,2}$ — расстояние между этими двумя точками, то существуют два положительных числа a и α, не зависящих от выбора N_1 и N_2, таких, что имеет место неравенство:

$$\vartheta \leqslant a r_{1,2}^{\alpha} \qquad (\alpha \leqslant 1) \tag{3}$$

при любых положениях N_1 и N_2 на S.

Замкнутые поверхности, удовлетворяющие этим условиям, называются обычно *поверхностями Ляпунова*. Дальше мы введем еще некоторые предположения относительно S, а сейчас выведем из сделанных предположений некоторые следствия.

Из (3) непосредственно следует, что касательная плоскость меняется непрерывно при перемещении точки касания вдоль поверхности. Укажем теперь важное для дальнейшего следствие из третьего условия. Пусть N_0 — некоторая точка поверхности S. Поместим в ней начало координат, ось Z направим по внешней нормали к S в N_0, а оси X и Y расположим каким-либо образом в касательной плоскости. При этом можно представить в явном виде уравнение куска S, заключенного внутри сферы C_0 с центром N_0 и радиусом d:

$$\zeta = \zeta(\xi, \eta). \tag{4}$$

Через (ξ, η, ζ) мы будем обозначать всегда координаты переменной точки N поверхности S, а через (x, y, z) — координаты любой точки M пространства. Указанные выше координатные оси назовем *местными осями в точке* N_0.

Из существования касательной плоскости и ее непрерывного изменения следует существование и непрерывность производных первого порядка $\zeta_\xi(\xi, \eta)$ и $\zeta_\eta(\xi, \eta)$. Мы считаем, что d взято достаточно малым. Например, можно принять условие

$$a d^{\alpha} \leqslant 1, \tag{5}$$

так что угол ϑ_0 между нормалью в N_0 и нормалью в любой точке N куска поверхности S, находящегося внутри сферы C_0, не достигает $\frac{\pi}{2}$. Обозначая через r_0 расстояние N_0N $(r_0 < d)$, будем иметь

$$\cos\vartheta_0 \geqslant 1 - \frac{1}{2}\vartheta_0^2 \geqslant 1 - \frac{1}{2}a^2 r_0^{2\alpha}, \tag{6}$$

откуда

$$\frac{1}{\cos\vartheta_0} = \sqrt{1 + \zeta_\xi^2 + \zeta_\eta^2} \leqslant 1 + a^2 r_0^{2\alpha} \leqslant 2, \tag{7}$$

и, следовательно, в силу (5),

$$\zeta_\xi^2+\zeta_\eta^2\leqslant 2a^2r_0^{2\alpha}+a^4r_0^{4\alpha}\leqslant 3a^2r_0^{2\alpha}. \tag{8}$$

Вводим полярные координаты:

$$\zeta=\rho_0\cos\theta;\qquad \eta=\rho_0\sin\theta.$$

Мы имеем

$$\zeta_{\rho_0}^2=(\zeta_\xi\cos\theta+\zeta_\eta\sin\theta)^2\leqslant\zeta_\xi^2+\zeta_\eta^2,$$

откуда, в силу (8),

$$|\zeta_{\rho_0}|\leqslant\sqrt{3}\,ar_0^\alpha, \tag{9}$$

и

$$|\zeta|\leqslant\sqrt{3}\,ad^\alpha\rho_0\leqslant\sqrt{3}\,\rho_0, \tag{10}$$

и, следовательно,

$$r_0=\sqrt{\rho_0^2+\zeta^2}\leqslant 2\rho_0. \tag{11}$$

Неравенства (9) и (11) дают

$$|\zeta_{\rho_0}|\leqslant\sqrt{3}\,a2^\alpha\rho_0^\alpha, \tag{12}$$

откуда

$$|\zeta|\leqslant\frac{\sqrt{3}\,2^\alpha}{\alpha+1}a\rho_0^{\alpha+1},$$

или тем более

$$|\zeta|\leqslant 2a\rho_0^{\alpha+1}, \tag{13}$$

ибо $2^\alpha\leqslant\alpha+1$ при $\alpha\leqslant 1$. Наконец, из (6) следует:

$$1-\cos\vartheta_0\leqslant 2^{2\alpha-1}a^2\rho_0^{2\alpha}. \tag{14}$$

Дадим еще оценку для $\cos(\mathbf{n}, X)$ и $\cos(\mathbf{n}, Y)$, где $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к S в точке N. Мы имеем на основании (8)

$$|\cos(\mathbf{n}, X)|=\frac{|\zeta_\xi|}{\sqrt{1+\zeta_\xi^2+\zeta_\eta^2}}\leqslant|\zeta_\xi|\leqslant\sqrt{3}\,ar_0^\alpha,$$

и совершенно аналогично

$$|\cos(\mathbf{n}, Y)|\leqslant\sqrt{3}\,ar_0^\alpha.$$

Мы имеем далее

$$\cos(\mathbf{n}, Z)=\cos\vartheta_0.$$

Собираем вместе все оценки, которые мы получили выше:

$$\begin{gathered}|\zeta|\leqslant c\rho_0^{1+\alpha};\quad |\cos(\mathbf{n}, X)|\leqslant c\rho_0^\alpha;\quad |\cos(\mathbf{n}, Y)|\leqslant c\rho_0^\alpha,\\ 1-\cos(\mathbf{n}, Z)\leqslant c\rho_0^{2\alpha};\quad |\cos(\mathbf{n}, Z)|\geqslant\frac{1}{2},\end{gathered} \tag{15}$$

причем для простоты записи дальнейших формул мы обозначили через c — постоянную, равную наибольшей из постоянных, входящих в соответствующие оценки. Указанные неравенства, очевидно, сохранятся, если в правых частях заменить ρ_0 на r_0. В точках пересечения S с C_0 мы имеем $r_0 = d$, и из (11) следует: $\rho_0 \geqslant \frac{1}{2} d$. Таким образом, мы видим, что часть поверхности S, вырезанная цилиндром, ось которого совпадает с осью Z (нормаль в точке N_0), а радиус равен $\frac{1}{3}d$, лежит внутри C_0. Будем дальше обозначать эту часть S через σ_0. Ее проекция σ_0' на плоскость XY (касательная плоскость в точке N_0) есть круг:

$$\xi^2 + \eta^2 \leqslant \frac{d^2}{9}. \tag{16}$$

Для всех точек N, лежащих на σ_0, справедливы формулы (15). Введем еще в рассмотрение часть σ_1 поверхности S, которая вырезается из S круговым цилиндром, ось которого совпадает с осью Z, а радиус основания равен некоторому числу d_1, причем $d_1 < \frac{d}{2}$. Дальше мы используем произвольность в выборе d_1. На σ_1 также имеют место оценки (15). Проекция σ_1' куска σ_1 на касательную плоскость в точке N_0 есть круг:

$$\xi^2 + \eta^2 \leqslant d_1^2 \quad \left(d_1 < \frac{d}{2}\right). \tag{17}$$

Мы переходим к исследованию свойств потенциалов простого слоя, а также некоторых других потенциалов — потенциалов двойного слоя, которые так же, как и потенциалы простого слоя, представляются в виде интегралов по поверхности S.

95. Потенциал двойного слоя. Основную роль при построении функций (1) и (2) играет сингулярное решение $\frac{1}{r}$ уравнения Лапласа. Введем теперь другое сингулярное решение этого уравнения. Пусть N — некоторая точка пространства и l — фиксированное направление, проведенное из точки N. Берем в направлении l отрезок NN' длины ε и помещаем в точке N заряд $\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$, а в точке N' заряд $\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)$. Обозначая через r и r' расстояния от переменной точки M до точек N и N', будем иметь следующий потенциал упомянутых двух зарядов:

$$u_0(M) = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right) = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{r' - r}{rr'} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{r'^2 - r^2}{(r' + r)\,rr'}.$$

Введем в рассмотрение угол $\varphi = (r, l)$, причем направление r мы считаем от точки M к точке N.

Принимая во внимание равенство $r'^2 = r^2 + \varepsilon^2 + 2r\varepsilon \cos\varphi$, мы можем написать:

$$u_0(M) = \frac{\varepsilon + 2r\cos\varphi}{(r' + r)\,rr'},$$

и в пределе при $\varepsilon \to 0$ получим потенциал диполя единичной интенсивности с направлением l:

$$u_0(M) = \frac{\cos\varphi}{r^2}.$$

Нетрудно проверить, что мы можем написать этот потенциал как производную от $\frac{1}{r}$ по направлению l, причем дифференцирование совершается по точке M:

$$\frac{\cos\varphi}{r^2} = \frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{1}{r}\right). \tag{18}$$

Действительно, обозначая через (ξ, η, ζ) координаты точки N и через (x, y, z) — координаты точки M, мы получим

$$\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{(\xi - x)\cos(l, x) + (\eta - y)\cos(l, y) + (\zeta - z)\cos(l, z)}{r^3},$$

откуда, принимая во внимание формулу

$$\cos\varphi = \frac{\xi - x}{r}\cos(l, x) + \frac{\eta - y}{r}\cos(l, y) + \frac{\zeta - z}{r}\cos(l, z),$$

мы и придем к формуле (18). Функция (18) удовлетворяет очевидно уравнению Лапласа и имеет особенность в точке N. Покроем поверхность S диполями так, чтобы в каждой точке поверхности направление диполя совпадало с направлением n внешней нормали к поверхности, и пусть $\mu(N)$ — интенсивность диполя, помещенного в точке N поверхности. Мы придем таким образом к понятию потенциала двойного слоя, который будет определяться равенством (рис. 5):

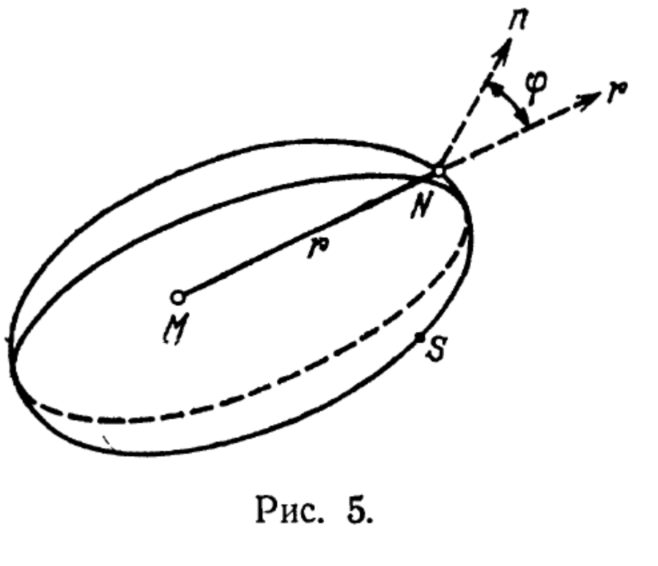

Рис. 5.

$$w(M) = \iint_S \mu(N)\frac{\cos\varphi}{r^2}\,dS \tag{19}$$

$$[\varphi = (\mathbf{r}, \mathbf{n})].$$

Функция (19) имеет везде вне S производные всех порядков и удовлетворяет уравнению Лапласа. Ее можно при этом дифференцировать по координатам точки M под знаком интеграла. Если точка M совпадает с некоторой точкой N_0, лежащей на поверхности, то r обращается в нуль при совпадении N с N_0, и интеграл (19) есть в этом случае несобственный интеграл. Покажем, что он имеет смысл.

Достаточно исследовать подынтегральную функцию на участке σ_0 поверхности вблизи точки N_0. При этом мы можем воспользоваться

зоваться уравнением поверхности (4) в местных осях для точки N_0.

Найдем выражение для $\cos\varphi_0 = \cos(\mathbf{r}_0, \mathbf{n})$, где $\mathbf{r}_0$ есть направление N_0N:

$$\cos\varphi_0 = \frac{\xi}{r_0}\cos(\mathbf{n}, X) + \frac{\eta}{r_0}\cos(\mathbf{n}, Y) + \frac{\zeta}{r_0}\cos(\mathbf{n}, Z) \qquad ((\mathbf{n}, Z) = \vartheta_0), \tag{20}$$

где (ξ, η, ζ) — координаты точки N и $r_0 = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$. Принимая во внимание полученные выше оценки (15), а также очевидные неравенства: $|\xi| \leqslant \rho_0$; $|\eta| \leqslant \rho_0$; $\rho_0 \leqslant r_0$, получим

$$\left|\frac{\cos\varphi_0}{r_0^2}\right| \leqslant \frac{3c\rho_0^\alpha}{\rho_0^2} \qquad (\rho_0 = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}),$$

т. е.

$$\left|\frac{\cos\varphi_0}{r_0^2}\right| \leqslant \frac{b}{\rho_0^{2-\alpha}}, \tag{21}$$

где b — постоянная. Кроме того, для непрерывной функции $\mu(N)$ имеем оценку

$$|\mu(N)| \leqslant A \qquad (N \text{ на } S), \tag{22}$$

где постоянная $A = \max|\mu(N)|$ при изменении N на S. Заменяя интеграл по σ_0 интегралом по проекции σ_0' поверхности σ_0 на плоскость XY $\left(\text{круг с центром } N_0 \text{ и радиусом } \frac{d}{3}\right)$, получим

$$\iint_{\sigma_0'} \mu(\xi, \eta) \frac{\cos\varphi_0}{r_0^2} \cdot \frac{d\xi\, d\eta}{\cos\vartheta_0},$$

причем имеется, в силу (21), (22) и (15), следующая оценка подынтегральной функции:

$$\left|\mu(\xi, \eta)\frac{\cos\varphi_0}{r_0^2 \cos\vartheta_0}\right| \leqslant \frac{2Ab}{\rho_0^{2-\alpha}},$$

откуда и следует сходимость интеграла (19), если точка M лежит на поверхности S. Таким образом, *функция* (19) *определена во всем пространстве.*

Рассмотрим интеграл (19) при $\mu(N) \equiv 1$. Принимая во внимание (18), можем написать:

$$w_1(M) = \iint_S \frac{\cos\varphi}{r^2}\, dS = -\iint_S \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, dS, \tag{23}$$

причем мы считаем, что дифференцирование по направлению n происходит по отношению к точке N, которая является переменной интегрирования. Ввиду этого перед интегралом мы поставили знак минус.

Положим сначала, что точка M находится вне замкнутой поверхности S. При этом $\frac{1}{r}$ есть гармоническая функция внутри S с непрерывными производными всех порядков вплоть до S, и, в силу одного из основных свойств гармонических функций, мы имеем [II; 204]:

$$w_1(M) = -\iint_S \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS = 0 \qquad (M \text{ вне } S).$$

Пусть точка M находится внутри S. Выделим ее малой сферой C с центром M и радиусом ρ. В части пространства D' между C и S функция $\frac{1}{r}$ — гармоническая, и мы имеем

$$\iint_S \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS + \iint_C \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS = 0.$$

Нормаль, внешняя по отношению к области D', направлена на C к центру сферы, и, следовательно,

$$\left.\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\right|_C = \frac{1}{\rho^2},$$

так что предыдущая формула перепишется в виде

$$\iint_S \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS + \frac{1}{\rho^2} \iint_C dS = 0 \quad \text{или} \quad \iint_S \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS + 4\pi = 0,$$

откуда

$$w_1(M) = -\iint_S \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS = 4\pi \qquad (M \text{ внутри } S).$$

Положим, наконец, что точка M совпадает с некоторой точкой N_0, лежащей на поверхности. Проведем сферу C с центром N_0 и радиусом $d_1 < \frac{d}{2}$ и заменим участок σ_1 поверхности S, содержащийся внутри C, частью C' сферы C так, чтобы точка N_0 лежала вне полученной поверхности, которая состоит из $(S - \sigma_1)$ и части C' сферы C. Мы имеем

$$\iint_{S-\sigma_1} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS + \iint_{C'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS = 0. \tag{24}$$

Второе слагаемое вычисляется, как и выше, и оно равно телесному углу, под которым часть C' сферы C видна из центра N_0

этой сферы:

$$\iint\limits_{C'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, dS = \frac{1}{d_1^2} \iint\limits_{C'} dS. \tag{25}$$

Линия l пересечения сферы C с S обладает тем свойством, что для координат ζ точек этой линии имеет место, в силу (15), неравенство $|\zeta| \leqslant c d_1^{1+\alpha}$, и точки l при $d_1 \to 0$ беспредельно приближаются к плоскости XY.

Отсюда следует, что при стремлении d_1 к нулю телесный угол (25) стремится к 2π, и формула (24) в пределе дает

$$w_1(M) = -\iint\limits_{S} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, dS = 2\pi \qquad (M \text{ на } S).$$

Мы имеем, таким образом,

$$\iint\limits_{S} \frac{\cos\varphi}{r^2}\, dS = \begin{cases} 4\pi & (M \text{ внутри } S), \\ 0 & (M \text{ вне } S), \\ 2\pi & (M \text{ на } S). \end{cases} \tag{26}$$

Рассмотрим еще незамкнутую поверхность S_1 и интеграл

$$w_2(M) = \iint\limits_{S_1} \frac{\cos\varphi}{r^2}\, dS, \tag{27}$$

причем мы считаем, что точка M лежит вне S_1. Проведем конус с вершиной M и основанием S_1, и пусть σ_1 — часть сферы с центром M и достаточно малым радиусом ρ, лежащая внутри упомянутого конуса.

Рассмотрим в пространстве область D, ограниченную S_1, σ_1 и боковой поверхностью Γ упомянутого конуса (рис. 6). (Мы считаем, что упомянутые поверхности ограничивают некоторую область D.)

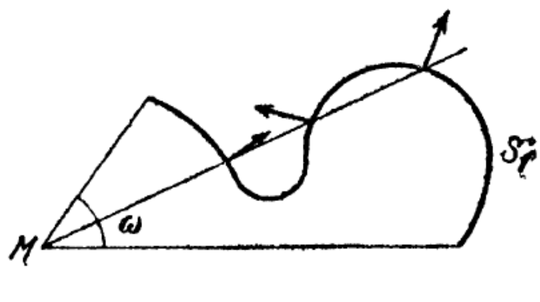

Рис 6

Внутри D функция $\frac{1}{r}$ — гармоническая и, следовательно,

$$\iint\limits_{S_1} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, dS + \iint\limits_{\sigma_1} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, dS + \iint\limits_{\Gamma} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, dS = 0.$$

На поверхности Γ

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = -\frac{\cos\varphi}{r^2} = 0.$$

На σ_1 направление n противоположно r и $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = \frac{1}{\rho^2}$. Обозначая через ω телесный угол, под которым S_1 видна из точки M, мы получим из предыдущей формулы

$$\omega = -\iint\limits_{S_1} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS = \iint\limits_{S_1} \frac{\cos\varphi}{r^2} dS,$$

т. е. *интеграл* (27) *дает телесный угол, под которым* S_1 *видна из точки* M. При этом нормаль n на S_1 направлена вовне области D. Радиус-вектор из M может пересекать S_1 в нескольких точках. Если мы имеем, например, три точки пересечения, то в двух из них $\cos\varphi > 0$ и в третьей $\cos\varphi < 0$ (рис. 6). Элемент рассматриваемого интеграла, т. е. $\frac{\cos\varphi}{r^2} dS$, представляет собою элементарный телесный угол $d\omega$, под которым элемент площади поверхности виден из точки M, причем этот угол будет положительным, если $\cos\varphi > 0$, и отрицательным, если $\cos\varphi < 0$. Если M лежит на S_1, то интеграл (27) надо рассматривать как несобственный, как это мы делали выше для замкнутой поверхности. Из указанных выше рассуждений могут быть также получены формулы (26).

Мы в дальнейшем будем предполагать поверхность S такой, что при любом положении точки M выполняется неравенство

$$\iint\limits_{S} \frac{|\cos\varphi|}{r^2} ds \leqslant c, \tag{28}$$

где c — определенное положительное число. Положим, например, что существует такое целое положительное число k, что при любом положении M можно разбить S на отдельные куски, число которых не превышает k, так, что прямая, проходящая через M, пересекает каждый кусок не более чем в одной точке, причем на каждом из кусков $\cos\varphi$ сохраняет знак. При этом условие (28) выполнено, если взять $c = 4\pi k$.

Формулы (26) показывают, что при $\mu(N) \equiv 1$ потенциал двойного слоя (19) испытывает разрыв непрерывности, когда M пересекает поверхность S. Разберем этот вопрос для произвольной непрерывной плотности.

Пусть N_0 — фиксированная точка поверхности S. Составим потенциал двойного слоя:

$$w_0(M) = \iint\limits_{S} [\mu(N) - \mu(N_0)] \frac{\cos\varphi}{r^2} dS, \tag{29}$$

и докажем, что он сохраняет непрерывность, когда M пересекает поверхность в точке N_0. Пусть ε — заданное положительное число. Выделим такой участок σ поверхности S, содержащий точку N_0 внутри себя, на котором выполняется неравенство

$$|\mu(N)-\mu(N_0)|\leqslant\frac{\varepsilon}{4c}\qquad (N \text{ на } \sigma),\tag{30}$$

где c — постоянная, входящая в условие (28). Разбивая S на два куска, σ и $S-\sigma$, можем написать:

$$w_0(M)=w_0^{(1)}(M)+w_0^{(2)}(M),\tag{31}$$

где

$$\begin{aligned} w_0^{(1)}(M)&=\iint_\sigma[\mu(N)-\mu(N_0)]\frac{\cos\varphi}{r^2}\,dS;\\ w_0^{(2)}(M)&=\iint_{S-\sigma}[(\mu(N)-\mu(N_0))]\frac{\cos\varphi}{r^2}\,dS.\end{aligned}\tag{32}$$

При любом положении точки M мы имеем

$$|w_0^{(1)}(M)|\leqslant\iint_\sigma|\mu(N)-\mu(N_0)|\frac{|\cos\varphi|}{r^2}\,dS,$$

откуда, в силу (28) и (30):

$$|w_0^{(1)}(M)|\leqslant\frac{\varepsilon}{4}.\tag{33}$$

Из (31) следует:

$$w_0(M)-w_0(N_0)=w_0^{(1)}(M)-w_0^{(1)}(N_0)+[w_0^{(2)}(M)-w_0^{(2)}(N_0)],$$

откуда

$$|w_0(M)-w_0(N_0)|\leqslant|w_0^{(1)}(M)|+|w_0^{(1)}(N_0)|+|w_0^{(2)}(M)-w_0^{(2)}(N_0)|,$$

или, в силу (33),

$$|w_0(M)-w_0(N)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+|w_0^{(2)}(M)-w_0^{(2)}(N_0)|.\tag{34}$$

В потенциале двойного слоя $w_0^{(2)}(M)$ интегрирование совершается по $(S-\sigma)$, а точка N_0 лежит внутри σ, и потому функция $w_0^{(2)}(M)$ в точке N_0 и ее некоторой окрестности непрерывна (и имеет производные всех порядков). Таким образом, при всех M, достаточно близких к N_0, мы имеем $|w_0^{(2)}(M)-w_0^{(2)}(N_0)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$, и, в силу (34), $|w_0(M)-w_0(N_0)|\leqslant\varepsilon$, откуда и следует, в силу произвольности ε, непрерывность функции $w_0(M)$, определяемой формулой (29), в точке N_0. Мы можем написать:

$$w_0(M) = w(M) - \mu(N_0)\iint\limits_S \frac{\cos\varphi}{r^2}\,dS, \tag{35}$$

где $w(M)$ — потенциал двойного слоя (19). Положим сначала, что точка M находится на S. Обозначим ее через N. При этом, в силу (26), имеем

$$w_0(N) = w(N) - 2\pi\mu(N_0) \tag{36}$$

и

$$w_0(N_0) = w(N_0) - 2\pi\mu(N_0), \tag{37}$$

где $w(N_0)$ — значение интеграла (19) в точке N_0. Будем теперь точку N, находящуюся на S, стремить к N_0. В силу доказанной непрерывности $w_0(M)$

$$w_0(N) \to w_0(N_0) = w(N_0) - 2\pi\mu(N_0).$$

Отсюда и из формулы (36) мы видим, что $w(N)$ имеет при этом предел $w(N_0)$, т. е. *функция $w(M)$, определенная формулой* (19), *есть непрерывная на поверхности S функция.*

Положим теперь, что точка M находится внутри S. При этом, в силу (26), имеем

$$w_0(M) = w(M) - 4\pi\mu(N_0). \tag{38}$$

Будем теперь точку M, находящуюся внутри S, стремить к N_0. В силу доказанной непрерывности $w_0(M)$, мы будем иметь

$$w_0(M) \to w_0(N_0) = w(N_0) - 2\pi\mu(N_0). \tag{39}$$

Обращаясь к правой части формулы (38), мы видим, что и $w(M)$ имеет при этом предел. Обозначим этот предел через $w_i(N_0)$. Из (38) и (39) следует:

$$w_i(N_0) - 4\pi\mu(N_1) = w(N_0) - 2\pi\mu(N_0),$$

т. е.

$$w_i(N_0) = w(N_0) + 2\pi\mu(N_0). \tag{40}$$

Отсюда видно, что предел $w_i(N_0)$ и значение $w(N_0)$ функции $w(M)$ в точке N_0 различны, если $\mu(N_0) \neq 0$. Если точка M находится вне S, то вместо (38) имеем

$$w_0(M) = w(M),$$

и, рассуждая, как и выше, мы видим, что существует предел $w(M)$, когда M стремится к N_0, находясь вне S. Обозначая этот предел $w_e(N_0)$, будем иметь, пользуясь (39),

$$w_e(N_0) = w(N_0) - 2\pi\mu(N_0). \tag{41}$$

Обозначая через r_0 и φ_0 значения r и φ при совпадении M с N_0, можем переписать формулы (40) и (41) в виде

$$\left.\begin{aligned} w_i(N_0) = w(N_0) + 2\pi\mu(N_0) = \iint\limits_S \mu(N)\frac{\cos\varphi_0}{r_0^2}dS + 2\pi\mu(N_0), \\ w_e(N_0) = w(N_0) - 2\pi\mu(N_0) = \iint\limits_S \mu(N)\frac{\cos\varphi_0}{r_0^2}dS - 2\pi\mu(N_0). \end{aligned}\right\} \quad (42)$$

Здесь φ_0 есть угол, образованный направлением $\overline{N_0N}$ с внешней нормалью $\mathbf{n}$ в переменной точке N, т. е. $\varphi_0 = (\mathbf{r}_0, \mathbf{n})$. Принимая во внимание эти формулы и непрерывность функции $w(N_0)$ при перемещении N_0 на S, мы можем утверждать, что *функция* $w(M)$, *определенная формулой* (19), *непрерывна внутри* S *и вплоть до* S. Точно так же *она непрерывна вне* S *и вплоть до* S. Напомним, что внутри и вне S эта функция имеет производные всех порядков. Нетрудно видеть, что при беспредельном удалении точки M функция $w(M)$ стремится к нулю. Действительно, обозначая через D кратчайшие расстояния точки M, находящейся вне S, до поверхности S [II; 92], имеем

$$|w(M)| \leqslant \iint\limits_S \left|\mu(N)\frac{\cos\varphi}{r^2}\right| dS \leqslant \frac{A}{D^2}\cdot \text{площадь } S. \quad (43)$$

Отсюда и следует, что $w(M) \to 0$ при беспредельном удалении M. Точнее говоря, если O — любая фиксированная точка, то при любом заданном положительном ε существует такое положительное число B, что $|w(M)| \leqslant \varepsilon$, если только M находится вне сферы с центром O и радиусом B.

96. Свойства потенциала простого слоя. Потенциал простого слоя

$$u(M) = \iint\limits_S \frac{\mu(N)}{r}dS \quad (44)$$

является несобственным интегралом, если M лежит на S. Пусть M совпадает с точкой N_0, лежащей на S. Покажем, что несобственный интеграл (44) имеет при этом смысл. Как и в [95], достаточно рассмотреть его на участке σ_0 поверхности S, содержащем N_0 внутри себя. Для σ_0 пользуемся уравнением (4) в местных координатах. Мы имеем

$$\iint\limits_{\sigma_0} \frac{\mu(N)}{r_0}dS = \iint\limits_{\sigma_0'} \frac{\mu(\xi, \eta)}{r_0\cos\vartheta_0}d\xi\, d\eta.$$

В силу (15), (22) и $r_0 \leqslant \rho_0$, получаем следующую оценку подынтегральной функции:

$$\left|\frac{\mu(\xi, \eta)}{r_0\cos\vartheta_0}\right| \leqslant \frac{2A}{\rho_0},$$

откуда непосредственно следует сходимость интеграла (44), когда M лежит на S. Таким образом, формула (44) определяет $u(M)$ при любом положении точки M. Функция $u(M)$ непрерывна в точках M, находящихся вне S. Покажем, что $u(M)$ непрерывна и в любой точке N_0, лежащей на S. Пусть ε — заданное положительное число и σ_1 — часть S, определяемая неравенством (17). Покажем, что можно выбрать d_1 настолько малым, чтобы при любом положении M, в некоторой окрестности N_0, выполнялось неравенство

$$\left|\iint\limits_{\sigma_1} \frac{\mu(N)}{r}\, dS\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}. \tag{45}$$

Мы имеем

$$\left|\iint\limits_{\sigma_1} \frac{\mu(N)}{r}\, dS\right| \leqslant \iint\limits_{\sigma_1'} \frac{A}{\rho_1}\, d\xi\, d\eta, \tag{46}$$

где σ_0' — круг с центром N_0 и радиусом d_1 и ρ_1 — длина проекции M_1N_1 отрезка MN на касательную плоскость. Положим, что M находится внутри шара с центром N_0 и радиусом d_1. При этом M_1 принадлежит кругу σ_1', и если мы на плоскости (ξ, η) возьмем круг σ_1'' с центром M_1 и радиусом $2d_1$, то он будет содержать весь круг σ_1', так что, в силу (46),

$$\left|\iint\limits_{\sigma_1} \frac{\mu(N)}{r}\, dS\right| \leqslant A \iint\limits_{\rho_1 \leqslant 2d_1} \frac{d\xi\, d\eta}{\rho_1} = A \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2d_1} \frac{\rho_1\, d\rho_1\, d\vartheta}{\rho_1} = 4\pi d_1 A.$$

Остается фиксировать d_1 так, чтобы имело место неравенство $4\pi d_1 A \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$, и мы получаем оценку (45) при любом положении M в шаре с центром N_0 и радиусом d_1. Далее представляем функцию (44) в виде

$$u(M) = u_1(M) + u_2(M),$$

где

$$u_1(M) = \iint\limits_{\sigma_1} \frac{\mu(N)}{r}\, dS; \quad u_2(M) = \iint\limits_{S-\sigma_1} \frac{\mu(N)}{r}\, dS,$$

причем $u_2(M)$ — непрерывна в точке N_0, и доказательство непрерывности $u(M)$ в точке N_0 проводится совершенно так же, как и в [95] для функции (29). Мы имеем, таким образом, следующий результат: *потенциал простого слоя* (44) *определен во всем пространстве и является непрерывной во всем пространстве функцией.* Совершенно так же, как и в [95], можно показать, что $u(M) \to 0$ при беспредельном удалении точки M.

97. Нормальная производная потенциала простого слоя. Пусть n_0 — направление внешней нормали в некоторой точке N_0 поверхности S. Считая, что M лежит не на S, составим производную от функции (44) по направлению $\mathbf{n}_0$. От M зависит только множитель $\frac{1}{r}$, и мы можем дифференцировать под знаком интеграла:

$$\frac{\partial u(M)}{\partial n_0} = \iint\limits_S \mu(N) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_0} dS = \iint\limits_S \mu(N) \frac{\cos\psi}{r^2} dS. \tag{47}$$

Отметим разницу между последним интегралом и интегралом (19), определяющим потенциал двойного слоя. В интеграле (19) $\varphi = (\mathbf{r}, \mathbf{n})$, где $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали в точке N, которая является переменной точкой интегрирования, а в интеграле (47) $\psi = (\mathbf{r}, \mathbf{n}_0)$, где $\mathbf{n}_0$ — единичный вектор внешней нормали в фиксированной точке N_0 В обоих случаях $\mathbf{r}$ есть направление $\overline{MN}$ (рис. 7). Покажем, что интеграл (47) существует и в том случае, когда M совпадает с точкой N_0, упомянутой выше. В этом последнем случае мы будем записывать интеграл (47) в виде

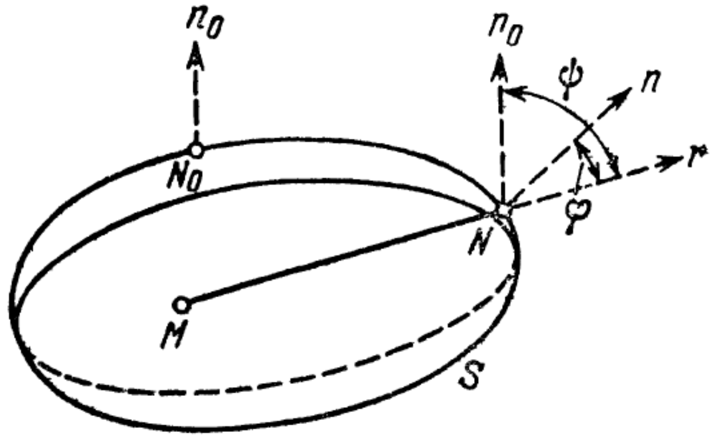

Рис 7

$$\iint\limits_S \mu(N) \frac{\cos\psi_0}{r_0^2} dS = \iint\limits_S \mu(N) \frac{\cos(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}_0)}{r_0^2} dS, \tag{48}$$

где r_0 — расстояние $|N_0N|$ и угол $\psi_0 = (\mathbf{r}_0, \mathbf{n}_0)$ есть угол между направлениями $\overline{N_0N}$ и $\mathbf{n}_0$ Далее мы покажем, что при приближении M к N_0 изнутри поверхности или извне поверхности по нормали производная (47) имеет определенные пределы, и для этих пределов имеют место формулы

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial n_0}\right)_i &= \iint\limits_S \mu(N) \frac{\cos\psi_0}{r_0^2} dS + 2\pi\mu(N_0), \\ \left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial n_0}\right)_e &= \iint\limits_S \mu(N) \frac{\cos\psi_0}{r_0^2} dS - 2\pi\mu(N_0), \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

где, как и в [95], значки i и e показывают, что надо брать пределы $\frac{\partial u(M)}{\partial n_0}$ при стремлении M к N_0 изнутри и извне, и левые части формул представляют собою лишь обозначения этих пределов.

В местной системе координат с началом в N_0 направление $\mathbf{n}_0$ совпадает с направлением оси Z. Будем, как и выше, через (x, y, z) обозначать координаты M, а через (ξ, η, ζ) — координаты N в упомянутой системе координат. Выделяя, как всегда, участок σ_0 поверхности S, напишем интеграл (47) в виде

$$\iint_{\sigma_0} \mu(N) \frac{\zeta - z}{r^3} \, dS. \tag{50}$$

Если M совпадает с N_0, то $z = 0$, и интеграл принимает вид

$$\iint_{\sigma_1} \mu(N) \frac{\zeta}{r_0^3} \, dS = \iint_{\sigma_1'} \mu(\xi, \eta) \frac{\zeta(\xi, \eta)}{r_0^3 \cos(n, Z)} \, d\xi \, d\eta,$$

где ζ заменено по формуле (4). Принимая во внимание (15), а также неравенство $r_0 \geqslant \rho_0$, непосредственно убедимся в том, что написанный интеграл имеет смысл. Таким образом, мы доказали существование интеграла (47) для M, лежащих на S. Переходим к доказательству формул (49).

Составим разность интеграла (47) и потенциала двойного слоя с тою же плотностью $\mu(N)$:

$$\frac{\partial u(M)}{\partial n_0} - w(M) = \iint_S \mu(N) \frac{\cos\psi - \cos\varphi}{r^2} \, dS. \tag{51}$$

Написанный интеграл имеет смысл, если M находится не на S или если M совпадает с N_0.

Докажем, что эта разность остается непрерывной, когда M пересекает поверхность S в точке N_0. Для этого, как и в предыдущих параграфах, достаточно показать, что написанный интеграл, взятый по малому участку σ_1 поверхности S, определяемому условием (17), может быть сделан сколь угодно малым по абсолютной величине. Мы будем предполагать при дальнейших оценках, что M находится на нормали к S в точке N_0, т. е. что в местной системе координат $x = y = 0$. При этом мы имеем

$$\frac{\cos\psi - \cos\varphi}{r^2} = -\frac{\xi}{r^3}\cos(\mathbf{n}, X) - \frac{\eta}{r^3}\cos(\mathbf{n}, Y) - \frac{\zeta - z}{r^3}(\cos\vartheta_0 - 1). \tag{52}$$

Принимая во внимание (15) и оценки

$$|\xi| \leqslant \rho_0, \quad |\eta| \leqslant \rho_0; \quad r \geqslant \rho_0 \geqslant \frac{1}{2} r; \quad |\zeta - z| \leqslant r \leqslant 2\rho_0,$$

где $\rho_0 = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ — длина проекции $\overline{MN}$ на плоскость XY, получим

$$\frac{|\cos\psi - \cos\varphi|}{r^2} \leqslant \frac{b_1}{\rho_0^{2-\alpha}},$$

где b_1 — некоторая постоянная, и будем иметь, принимая во внимание (22),

$$\left|\iint\limits_{\sigma_1} \mu(N) \frac{\cos\psi - \cos\varphi}{r^2}\, dS\right| \leqslant \iint\limits_{\rho_0 \leqslant d_1} \frac{2Ab_1}{\rho_0^{2-\alpha}}\, d\xi\, d\eta =$$

$$= 2Ab_1 \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{d_1} \frac{d\rho_0\, d\varphi}{\rho_0^{1-\alpha}} = b_2 d_1^{\alpha}, \qquad (53)$$

где b_2 — постоянная. Эта оценка имеет место при любом положении M на нормали к S в точке N_0, причем M может совпадать с N_0. Отсюда и следует, что при d_1, достаточно малом, интеграл, стоящий в правой части (51) и взятый по σ_1, будет при соответствующем выборе d_1 по абсолютной величине меньше любого заданного положительного числа. Тем самым доказано, что разность (51) непрерывна в точке N_0. Но $w(M)$ имеет предел при стремлении M к N_0 изнутри или извне поверхности S. Отсюда следует, что и величина (47) имеет также предел в обоих случаях Используя непрерывность разности (51), получим

$$\left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial n_0}\right)_i - w_i(N_0) = \iint\limits_S \mu(N) \frac{\cos\psi_0}{r_0^2}\, dS - w(N_0),$$

и, принимая во внимание первую из формул (42), получим первую из формул (49). Аналогично получается и вторая из формул (49). Из этих формул непосредственно следует величина скачка нормальной производной потенциала простого слоя:

$$\left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial n_0}\right)_i - \left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial n_0}\right)_e = 4\pi\mu(N_0). \qquad (54)$$

98. Нормальная производная потенциала простого слоя (продолжение). Для последующего нам важно доказать, что нормальная производная стремится к своим пределам

$$\left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial n_0}\right)_i \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial n_0}\right)_e$$

равномерно для всей поверхности S при стремлении M к N_0 по нормали. Для этого сначала покажем равномерное стремление к пределу интеграла, входящего в формулу (51). Обозначим через $\omega(M)$ величину этого интеграла. Как мы уже упоминали, эта функция имеет смысл, если M совпадает с N_0. Нам надо показать, что при любом заданном положительном ε существует такое положительное η, не зависящее от положения точки N_0 на S, что $|\omega(M) - \omega(N_0)| \leqslant \varepsilon$, если $|MN_0| \leqslant \eta$, причем M находится на нормали к S в точке N_0.

Фиксируем d_1 таким, чтобы иметь $b_2 d_1^\alpha \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$ и представим $\omega(M)$ в виде $\omega(M) = \omega_1(M) + \omega_2(M)$, где

$$\omega_1(M) = \iint\limits_{\sigma_1} \mu(N) \frac{\cos\psi - \cos\varphi}{r^2} dS; \quad \omega_2(M) = \int\limits_{S-\sigma_1}\int \mu(N) \frac{\cos\psi - \cos\varphi}{r^2} dS.$$

При этом, в силу (53), мы имеем $|\omega_1(M)| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$ при любом положении M на нормали к S в точке N_0. Далее,

$$\omega(M) - \omega(N_0) = \omega_1(M) - \omega_1(N_0) + [\omega_2(M) - \omega_2(N_0)],$$

откуда

$$|\omega(M) - \omega(N_0)| \leqslant |\omega_1(M)| + |\omega_1(N_0)| + \\ + |\omega_2(M) - \omega_2(N_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + |\omega_2(M) - \omega_2(N_0)|. \quad (55)$$

Принимая во внимание (52), получим

$$\left[\frac{\cos\psi - \cos\varphi}{r^2}\right]_M - \left[\frac{\cos\psi - \cos\varphi}{r^2}\right]_{N_0} = \left(\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r^3}\right)[\xi\cos(\mathbf{n}, X) + \\ + \eta\cos(\mathbf{n}, Y) + \zeta(\cos\vartheta_0 - 1)] + \frac{z}{r^3}(\cos\vartheta_0 - 1) \quad (\vartheta_0 = (\mathbf{n}, Z)). \quad (56)$$

Для точек $(S - \sigma_1)$ имеем $r \geqslant d_1$ и $r_0 \geqslant d_1$. Кроме того, при любом положении точек N и N_0 на S величины ξ, η, ζ по абсолютной величине не превышают диаметра поверхности S, т. е. наибольшего расстояния между точками S Далее мы имеем $|r - r_0| \leqslant |z|$ и

$$\left|\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r^3}\right| = |r - r_0| \left(\frac{1}{r_0^3 r} + \frac{1}{r_0^2 r^2} + \frac{1}{r_0 r^3}\right) \leqslant \frac{3|z|}{d_1^4}; \quad \frac{|z|}{r^3} \leqslant \frac{|z|}{d_1^3},$$

и, согласно формуле (56), получаем

$$\left|\left[\frac{\cos\psi - \cos\varphi}{r^2}\right]_M - \left[\frac{\cos\psi - \cos\varphi}{r^2}\right]_{N_0}\right| \leqslant c_1 |z|,$$

где c_1 — определенная постоянная, не зависящая от положения N_0. Она зависит, конечно, от выбора d_1. Принимая во внимание выражение $\omega_2(M)$, получаем

$$|\omega_2(M) - \omega_2(N_0)| \leqslant \int\limits_{S-\sigma_1}\int |\mu(N)| c_1 |z| dS \leqslant A c_1 |z| \cdot \text{площадь } S.$$

Если взять

$$|z| \leqslant \frac{\varepsilon}{2Ac_1 \cdot \text{площадь } S}, \quad (57)$$

то мы будем иметь $|\omega_2(M)-\omega_2(N_0)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$, и, в силу (55), получим $|\omega(M)-\omega(N_0)|\leqslant\varepsilon$. За искомое число η можно взять, таким образом, правую часть неравенства (57).

Мы доказали, что разность

$$\frac{\partial u(M)}{\partial n_0}-w(M)$$

стремится к своему предельному значению, при стремлении M к N_0 по нормали, равномерно относительно положения точки N_0 на S. С другой стороны, потенциал двойного слоя $w(M)$ является функцией; непрерывной вплоть до S, и, следовательно, $w(M)$ также равномерно стремится к своим предельным значениям на S. Отсюда следует, что и нормальная производная $\frac{\partial u(M)}{\partial n_0}$ стремится к своим предельным значениям (49) равномерно на S. Следуя А. М. Ляпунову, будем говорить, что гармоническая внутри или вне S функция $v(M)$ имеет *правильную нормальную производную*, если при стремлении M к N_0 по нормали к S ее нормальная производная $\frac{\partial u(M)}{\partial n_0}$ стремится к своим предельным значениям равномерно по отношению к точке N_0, лежащей на S. Мы можем, таким образом, утверждать:

Теорема. *Потенциал простого слоя с непрерывной плотностью имеет правильные нормальные производные как внутри, так и вне S.*

Фиксируя положительное значение $|z|$, причем M находится или внутри или вне S, мы можем считать, что значение нормальной производной $\frac{\partial u(M)}{\partial n_0}$ есть функция N_0, зависящая еще от параметра $|z|$, причем эта функция есть непрерывная функция N_0, ибо $u(M)$ имеет внутри и вне S непрерывные производные, и направление $\mathbf{n}_0$ на S меняется непрерывно.

Поскольку при $|z|\to 0$ стремление к пределу равномерно, мы можем утверждать, что и предельные значения (49) суть непрерывные функции N_0, а отсюда следует, что *интеграл, входящий в правые части формул* (49), *представляет собою непрерывную функцию N_0 на S*. Этот интеграл называется *прямым значением нормальной производной потенциала простого слоя на S.*

99. Прямое значение нормальной производной. Обозначим через $F(N)$ прямое значение нормальной производной на S

$$F(N_0)=\iint\limits_S \mu(N)\,\frac{\cos(\mathbf{r}_0,\,\mathbf{n}_0)}{r_0^2}\,dS. \tag{58}$$

Мы видели, что $F(N_0)$ — непрерывная функция положения точки N_0 на S. Докажем сейчас теорему, которая уточнит это свойство $F(N_0)$. Эта теорема была впервые доказана А. М. Ляпуновым.

Теорема *При непрерывной плотности $\mu(N)$ функция $F(N_0)$ удовлетворяет условию*

$$|F(N_1)-F(N_0)|\leqslant Br_{0\,1}^{\beta}, \tag{59}$$

где B и β — положительные постоянные и $r_{0,1}=|N_0N_1|$.

Будем в дальнейшем условие (59) называть *условием Липшица* *). Если $r_{0,1}$ больше некоторой положительной величины, то мы можем, при любом заданном положительном β, удовлетворить этому неравенству путем соответствующего выбора постоянной B. Действительно, функция $F(N)$, как мы знаем, непрерывна на S и тем самым ограничена, т. е. $|F(N)|\leqslant A_1$, и если $r_{0,1}\geqslant h>0$, то, взяв $B=\frac{2A_1}{h^{\beta}}$, мы получим, очевидно, неравенство (59) при $r_{0,1}\geqslant h$. Если при $r_{0,1}<h$ мы получим в неравенстве (59) другое значение B, то, взяв наибольшее из двух полученных значений B, сможем написать (59) при всех значениях $r_{0,1}$. Мы можем, таким образом, считать, например, что $r_{0,1}<\frac{d}{10}$. Мы имеем

$$F(N_1)-F(N_0)=\iint\limits_S \mu(N)\left[\frac{\cos(\mathbf{r}_1,\,\mathbf{n}_1)}{r_1^2}-\frac{\cos(\mathbf{r}_0,\,\mathbf{n}_0)}{r_0^2}\right]dS,$$

где $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{r}_1$ — векторы $\overline{N_0N}$ и $\overline{N_1N}$, а r_0 и r_1 — их длины, и, следовательно, принимая во внимание (22), получим

$$|F(N_1)-F(N_0)|\leqslant A\iint\limits_S\left|\frac{\cos(\mathbf{r}_1,\,\mathbf{n}_1)}{r_1^2}-\frac{\cos(\mathbf{r}_0,\,\mathbf{n}_0)}{r_0^2}\right|dS. \tag{60}$$

Вырежем часть σ_1 поверхности S при помощи кругового цилиндра, ось которого есть нормаль к S и N_0 и радиус основания $2r_{0,1}$. Разобьем интеграл по S на две части, по σ_1 и по $S-\sigma_1$:

$$\left.\begin{aligned} J_1&=\iint\limits_{\sigma_1}\left|\frac{\cos(\mathbf{r}_1,\,\mathbf{n}_1)}{r_1^2}-\frac{\cos(\mathbf{r}_0,\,\mathbf{n}_0)}{r_0^2}\right|dS;\\ J_2&=\iint\limits_{S-\sigma_1}\left|\frac{\cos(\mathbf{r}_1,\,\mathbf{n}_1)}{r_1^2}-\frac{\cos(\mathbf{r}_0,\,\mathbf{n}_0)}{r_0^2}\right|dS.\end{aligned}\right\} \tag{61}$$

Вводя скалярное произведение векторов, можем написать:

$$\frac{\cos(\mathbf{r}_1,\,\mathbf{n}_1)}{r_1^2}-\frac{\cos(\mathbf{r}_0,\,\mathbf{n}_0)}{r_0^2}=\frac{\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{n}_1}{r_1^3}-\frac{\mathbf{r}_0\cdot\mathbf{n}_0}{r_0^3}=$$
$$=\frac{\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{n}_0-\mathbf{r}_0\cdot\mathbf{n}_0}{r_1^3}+\frac{\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{n}_1-\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{n}_0}{r_1^3}+\mathbf{r}_0\cdot\mathbf{n}_0\left(\frac{1}{r_1^3}-\frac{1}{r_0^3}\right),$$

где, как всегда, $\mathbf{n}_0$ и $\mathbf{n}_1$ — единичные векторы внешней нормали в точках N_0 и N_1.

---

*) Часто в математической литературе это условие при $\alpha\in(0,\,1)$ называют условием Гельдера, а при $\alpha=1$ — условием Липшица.

Из написанного выше следует, что

$$\left|\frac{\cos(\mathbf{r}_1, \mathbf{n}_1)}{r_1^2} - \frac{\cos(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}_0)}{r_0^2}\right| \leqslant \frac{|\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{n}_0 - \mathbf{r}_0\cdot\mathbf{n}_0|}{r_1^3} + \\ + \frac{|\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{n}_1 - \mathbf{r}_1\cdot\mathbf{n}_0|}{r_1^3} + |\mathbf{r}_0\cdot\mathbf{n}_0|\left|\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_0^3}\right|. \tag{62}$$

Производим оценку отдельных слагаемых:

$$|\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{n}_1 - \mathbf{r}_1\cdot\mathbf{n}_0| = |\mathbf{r}_1\cdot(\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_0)| \leqslant r_1|\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_0|.$$

Образуя треугольник со сторонами $\mathbf{n}_0$ и $\mathbf{n}_1$, получим $|\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_0| \leqslant \vartheta$, где ϑ — угол, образованный направлениями $\mathbf{n}_0$ и $\mathbf{n}_1$. Принимая во внимание условие (3), мы можем написать.

$$|\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{n}_1 - \mathbf{r}_1\cdot\mathbf{n}_0| \leqslant ar_1 r_{0,1}^{\alpha},$$

где a — постоянная Далее,

$$|\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{n}_0 - \mathbf{r}_0\cdot\mathbf{n}_0| = |(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{n}_0| = |\mathbf{r}_{0,1}\cdot\mathbf{n}_0| = |\zeta_1|,$$

где ζ_1 — координата точки N_1 в местной системе координат с началом в точке N_0. Принимая во внимание (15), будем иметь

$$|\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{n}_0 - \mathbf{r}_0\cdot\mathbf{n}_0| \leqslant cr_{0,1}^{1+\alpha}.$$

Наконец, если точка интегрирования N достаточно близка к N_0, то в силу (15) мы имеем $|\mathbf{r}_0\cdot\mathbf{n}_0| = |\zeta| \leqslant cr_0^{1+\alpha}$. Но, как и в отношении неравенства (59), мы можем считать, что и это последнее неравенство верно для всех значений r_0. Подставляя все полученные оценки в (62), будем иметь

$$\left|\frac{\cos(\mathbf{r}_1, \mathbf{n}_1)}{r_1^2} - \frac{\cos(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}_0)}{r_0^2}\right| \leqslant \\ \leqslant \frac{c_1 r_1 r_{0,1}^{\alpha}}{r_1^3} + \frac{c_1 r_{0,1}^{1+\alpha}}{r_0^3} + c_1 r_0^{1+\alpha}|r_1 - r_0|\left(\frac{1}{r_0^3 r_1} + \frac{1}{r_0^2 r_1^2} + \frac{1}{r_0 r_1^3}\right), \tag{63}$$

где c_1 — наибольшая из постоянных a и c Из треугольника $N_0N_1N: r_1 + r_{0,1} \geqslant r_0$. Но при интегрировании по $(S - \sigma_1)$ мы имеем $r_{0,1} \leqslant \frac{r_0}{2}$, и следовательно, $r_1 \geqslant \frac{r_0}{2}$. Пользуясь этими неравенствами, а также неравенством $|r_1 - r_0| \leqslant r_{0,1}$, можем вместо (63) написать:

$$\left|\frac{\cos(\mathbf{r}_1, \mathbf{n}_1)}{r_1^2} - \frac{\cos(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}_0)}{r_0^2}\right| \leqslant \\ \leqslant c_1 r_{0,1}^{\alpha}\left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{r_{0,1}}{r_1^3} + \frac{r_0^{1+\alpha} r_{0,1}^{1-\alpha}}{r_0^3 r_1} + \frac{r_0^{1+\alpha} r_{0,1}^{1-\alpha}}{r_0^2 r_1^2} + \frac{r_0^{1+\alpha} r_{0,1}^{1-\alpha}}{r_0 r_1^3}\right) \leqslant \\ \leqslant c_1 r_{0,1}^{\alpha}\left(\frac{4}{r_0^2} + \frac{1}{r_0^2} + \frac{2}{r_0^2} + \frac{4}{r_0^2} + \frac{8}{r_0^2}\right) = \frac{19 c_1 r_{0,1}^{\alpha}}{r_0^2}.$$

Возвращаясь ко второй из формул (61), получаем

$$|J_2| \leqslant c_0 r_{0,1}^{\alpha} \iint\limits_{S-\sigma_1} \frac{dS}{r_0^2}, \tag{64}$$

где $c_0 = 19c_1$. Радиус цилиндра, которым вырезалась часть σ_1 поверхности S, был взят равным $2r_{0,1}$. Возьмем цилиндр с той же осью и с фиксированным радиусом $\frac{d}{3}$. Он вырежет часть σ_0 поверхности S, причем σ_0 содержит σ_1 внутри себя.

Мы имеем:

$$\iint\limits_{S-\sigma_1} \frac{dS}{r_0^2} = \iint\limits_{\sigma_0-\sigma_1} \frac{dS}{r_0^2} + \iint\limits_{S-\sigma_0} \frac{dS}{r_0^2}.$$

Во втором интеграле $r_0 \geqslant d/3$, и, следовательно,

$$\iint\limits_{S-\sigma_0} \frac{dS}{r_0^2} \leqslant \frac{9}{d^2} \cdot \text{площадь } S.$$

При интегрировании по $(\sigma_0 - \sigma_1)$ мы можем свести интегрирование на касательную в точке N_0 плоскость и получим путем обычных оценок ($r_0 \geqslant \rho_0$ и $\cos(\mathbf{n}, Z) \geqslant \frac{1}{2}$):

$$\iint\limits_{\sigma_0-\sigma_1} \frac{dS}{r_0^2} \leqslant \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{2r_{0,1}}^{d/3} \frac{2\rho_0\, d\rho_0\, d\theta}{\rho_0^2} = 4\pi \left(\lg \frac{d}{3} - \lg 2r_{0,1} \right).$$

Подставляя в (64), получим оценку вида

$$J_2 \leqslant A_1 r_{0,1}^{\alpha} \left| \lg r_{0,1} \right| + B_1 r_{0,1}^{\alpha},$$

где A_1 и B_1 — постоянные. Эту оценку можно заменить оценкой вида:

$$J_2 \leqslant A_2 r_{0,1}^{\beta},$$

если взять положительное β меньшим α.

Переходим к оценке J_1 Мы имеем

$$J_1 \leqslant \iint\limits_{\sigma_1} \frac{|\cos(\mathbf{r}_1, \mathbf{n}_1)|}{r_1^2}\, dS + \iint\limits_{\sigma_1} \frac{|\cos(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}_0)|}{r_0^2}\, dS. \tag{65}$$

Применяя обычные оценки, получим

$$\iint\limits_{\sigma_1} \frac{|\cos(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}_0)|}{r_0^2}\, dS = \iint\limits_{\sigma_1} \frac{|\zeta|}{r_0^3}\, dS \leqslant c \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{2r_{0,1}} \frac{\rho_0^{1+\alpha} \rho_0\, d\rho_0\, d\theta}{\rho_0^3} = A_3 r_{0,1}^{\alpha},$$

где A_3 — постоянная. Для оценки первого из интегралов (65) проведем сферу с центром N_1 и радиусом $4r_{0,1}$, причем отметим, что $4r_{0,1} < \frac{2d}{5}$. Она вырежет из S кусок σ_2, содержащий кусок σ_1. Эта часть σ_2 имеет явное уравнение в местных координатах с центром N_1, и мы можем применить на этом куске обычные оценки, сводя интегрирование на касательную в точке N_1 плоскость Область интегрирования будет представлять собою часть круга с центром N_1, и радиусом $4r_{0,1}$. Интегрируя по всему кругу, получим оценку

$$\iint\limits_{\sigma_1} \frac{|\cos(\mathbf{r}_1, \mathbf{n}_1)|}{r_1^2}\, dS \leqslant \iint\limits_{\sigma_2} \frac{|\cos(\mathbf{r}_1, \mathbf{n}_1)|}{r_1^2}\, dS \leqslant A_4 r_{0,1}^{\alpha}.$$

Подставляя все полученные нами оценки в (60), будем иметь

$$|F(N_1)-F(N_0)|\leqslant A\left(A_2 r_{0,1}^{\beta}+A_5 r_{0,1}^{\alpha}\right),$$

и окончательно можем написать (59), где β — положительное число, меньшее α.

100. Производная потенциала простого слоя по любому направлению. Мы исследовали в [97] предельные значения нормальной производной потенциала простого слоя при приближении M к N_0 по нормали. Если относительно плотности $\mu(N)$ сделать бо́льшие предположения, чем непрерывность, то можно доказать, что существуют предельные значения для производных по любому фиксированному направлению и, кроме того, можно показать, что эти предельные значения не зависят от закона приближения M к N_0. Мы предположим, что плотность удовлетворяет условию Липшица:

$$|\mu(N_2)-\mu(N_1)|\leqslant B r_{1,2}^{\delta}, \tag{66}$$

где $r_{1,2}=|N_1N_2|$, B и δ — положительные постоянные ($\delta\leqslant 1$). Пусть XYZ — местная система координат в точке N_0 поверхности S. Возьмем производную от $u(M)$ по направлению x, лежащему в касательной плоскости к S в точке N_0. Будем пока считать, что M находится на нормали к S в точке N_0. Для определенности предположим, что M лежит внутри S. Мы имеем

$$\frac{\partial u(M)}{\partial x}=\iint\limits_S \mu(N)\frac{\xi}{r^3}\,dS \qquad (r=|MN|). \tag{67}$$

Введем величину $r'=\sqrt{\xi^2+\eta^2+z^2}$ и рассмотрим интеграл

$$\iint\limits_{\sigma_0}\mu(N_0)\,\frac{\xi}{r'^3}\cos(\mathbf{n},Z)\,dS=\mu(N_0)\iint\limits_{\sigma_0'}\frac{\xi}{(\xi^2+\eta^2+z^2)^{3/2}}\,d\xi\,d\eta \quad (z\neq 0), \tag{68}$$

где σ_0' есть круг $\xi^2+\eta^2\leqslant\frac{d^2}{9}$. Мы имеем, очевидно,

$$\iint\limits_{\sigma_0'}\frac{\xi}{(\xi^2+\eta^2+z^2)^{3/2}}\,d\xi\,d\eta=\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta\int_0^{\frac{d}{3}}\frac{\rho_0^2}{\sqrt{\rho_0^2+z^2}}\,d\rho_0=0.$$

Вместо (67) мы можем написать

$$\frac{\partial u(M)}{\partial x}=\iint\limits_{\sigma_0}\mu(N)\frac{\xi}{r^3}\,dS+\iint\limits_{S-\sigma_0}\mu(N)\,\frac{\xi}{r^3}\,dS=v_1(M)+v_2(M). \tag{69}$$

Пользуясь тем, что интеграл (68) равен нулю, будем иметь

$$v_1(M)=\iint\limits_{\sigma_0}\xi\left[\frac{\mu(N)}{r^3}-\frac{\mu(N_0)\cos(\mathbf{n},Z)}{r'^3}\right]dS. \tag{70}$$

Разность, стоящую под знаком интеграла, представим в виде

$$\frac{\mu(N)}{r^3}-\frac{\mu(N_0)\cos(\mathbf{n},Z)}{r'^3}=\frac{\mu(N)-\mu(N_0)}{r^3}+$$
$$+\frac{\mu(N_0)\,[1-\cos(\mathbf{n},Z)]}{r^3}+\mu(N_0)\cos(\mathbf{n},Z)\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{r'^3}\right). \tag{71}$$

Оценим каждое из слагаемых в правой части. Пользуясь (66), получим

$$\frac{|\mu(N)-\mu(N_0)|}{r^3} \leqslant \frac{b r_0^\beta}{r^3},$$

откуда, принимая во внимание, что $r_0 \leqslant 2\rho_0$ и $r \geqslant \rho_0$, найдем, что

$$\frac{|\mu(N)-\mu(N_0)|}{r^3} \leqslant \frac{2^\beta b}{\rho_0^{3-\beta}}. \tag{72}$$

Далее, из (15) и (22) следует

$$\frac{|\mu(N_0)|\,[1-\cos(\mathbf{n},\ Z)]}{r^3} \leqslant \frac{cA}{\rho_0^{3-2\alpha}}. \tag{73}$$

Оценим третье слагаемое правой части (71). Величина r' есть длина вектора, идущего из точки M в точку N', которая является проекцией N на плоскость XY, и из треугольника MNN' мы имеем

$$|r-r'| \leqslant |\zeta| \leqslant 2a\rho_0^{1+\alpha},$$

откуда следует

$$\left|\frac{1}{r^3}-\frac{1}{r'^3}\right| \leqslant 2a\rho_0^{1+\alpha}\left(\frac{1}{r^3 r'}+\frac{1}{r^2 r'^2}+\frac{1}{r r'^3}\right) \leqslant \frac{6a}{\rho_0^{3-\alpha}},$$

ибо r и $r' \geqslant \rho_0$ и

$$\left|\mu(N_0)\cos(\mathbf{n},\ Z)\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{r'^3}\right)\right| \leqslant \frac{6aA}{\rho_0^{3-\alpha}}. \tag{74}$$

При выводе оценок мы могли считать, что M совпадает с N_0. При этом $z=0$ и $r=r_0$.

Подставляя выражение (71) в интеграл (70), мы разобьем $v_1(M)$ на три интеграла

$$v_1(M) = v_{1,1}(M) + v_{1,2}(M) + v_{1,3}(M) \tag{75}$$

по σ_0, каждый из которых имеет смысл при любом положении точки M на нормали в N_0, в частности и при совпадении M с N_0. Для подынтегральных функций этих интегралов мы получили оценки (72), (73) и (74), которые имеют вид

$$|\xi|\,\frac{C_1}{\rho_0^{3-\beta}}, \quad |\xi|\,\frac{C_2}{\rho_0^{3-2\alpha}}, \quad |\xi|\,\frac{C_3}{\rho_0^{3-\alpha}}, \tag{76}$$

где постоянные C_1, C_2 и C_3 не зависят от положения точки N_0 на S и точки M на нормали. Отсюда следует, что $v_{1,k}(M)$ $(k=1, 2, 3)$ при стремлении M к N_0 равномерно относительно положения точки N_0 на S стремятся к предельным значениям, которые равны $v_{1,k}(N_0)$. Приведем доказательство этого для $v_{1,1}(M)$. Пусть ε — заданное положительное число. Выделим часть σ_1 поверхности σ_0, определяемую неравенством $\xi^2+\eta^2 \leqslant d_1$, и выберем d_1 настолько малым, чтобы интеграл

$$\iint\limits_{\sigma_1} |\xi|\,\frac{|\mu(N)-\mu(N_0)|}{r^3}\,dS$$

при любом положении точки M на нормали оставался по абсолютной величине $\leqslant \varepsilon/4$. Это можно сделать в силу первой из оценок (76). Далее представляем $v_{1,1}(M)$ в виде

$$v_{1,1}(M) = \iint_{\sigma_1} \xi \frac{\mu(N) - \mu(N_0)}{r^3} dS + \iint_{\sigma - \sigma_1} \xi \frac{\mu(N) - \mu(N_0)}{r^3} dS = v_{1,1}^{(1)}(M) + v_{1,1}^{(2)}(M)$$

и получим

$$v_{1,1}(M) - v_{1,1}(N_0) = v_{1,1}^{(1)}(M) - v_{1,1}^{(1)}(N_0) + \left[v_{1,1}^{(2)}(M) - v_{1,1}^{(2)}(N_0)\right],$$

откуда

$$|v_{1,1}(M) - v_{1,1}(N_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \left|v_{1,1}^{(2)}(M) - v_{1,1}^{(2)}(N_0)\right|. \tag{77}$$

Интеграл $v_{1,1}^{(2)}(M)$ берется по поверхности, все точки которой отстоят от N_0 и M не меньше, чем на d_1 и, совершенно так же, как и в [98], мы получим

$$\left|v_{1,1}^{(2)}(M) - v_{1,1}^{(2)}(N_0)\right| \leqslant C_4 |z|,$$

где C_4 не зависит от положения N_0 на S. При этом (77) дает

$$|v_{1,1}(M) - v_{1,1}(N_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + C_4 |z|,$$

и при $|z| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2C_4}$ мы получаем

$$|v_{1,1}(M) - v_{1,1}(N_0)| \leqslant \varepsilon,$$

откуда и следует, что $v_{1,1}(M) \to v_{1,1}(N_0)$ равномерно по отношению к положению N_0 на S.

Возвращаясь к формуле (75), мы видим, что $v_1(M)$ стремится равномерно к пределу $v_1(N_0)$ при $M \to N_0$. Отметим, что этот предел один и тот же при стремлении M к N_0 изнутри и извне S. Проще говоря, при перемещении M по нормали функция $v_1(M)$ непрерывна в точке N_0.

Интеграл $v_2(M)$ берется по части $(S - \sigma_0)$ поверхности S, все точки которой отстоят от M и N_0 не ближе, чем на $d/3$. Отсюда, как и выше, следует, что

$$|v_2(M) - v_2(N_0)| \leqslant C_5 |z|,$$

где постоянная C_5 не зависит от положения N_0 на S и, следовательно, $v_2(M) \to v_2(N_0)$ равномерно относительно N_0. Окончательно, мы можем утверждать, что производная $\dfrac{\partial u(M)}{\partial x}$ стремится равномерно к пределу при стремлении M к N_0 по нормали, причем этот предел один и тот же, когда $M \to N_0$ извне и изнутри S. Совершенно аналогичное утверждение имеет, очевидно, место и для $\dfrac{\partial u(M)}{\partial y}$. В [98] мы доказали то, что и производная $\dfrac{\partial u(M)}{\partial z}$ стремится равномерно к пределу. Но там мы имели разные пределы изнутри и извне. Если l — любое направление, образующее углы α_1, α_2, α_3 с осями X, Y, Z, то из предыдущего непосредственно следует, что производная

$$\frac{\partial u(M)}{\partial l} = \frac{\partial u(M)}{\partial x} \cos \alpha_1 + \frac{\partial u(M)}{\partial y} \cos \alpha_2 + \frac{\partial u(M)}{\partial z} \cos \alpha_3 \tag{78}$$

также равномерно стремится к предельным значениям, когда M стремится к N_0 изнутри или извне S.

В силу равномерного стремления производной (78) к своим предельным значениям изнутри и извне, можно утверждать, что эти предельные значения представляют собой непрерывные функции точки N_0 поверхности S.

Покажем, наконец, что производная (78) стремится к упомянутому выше пределу при любом законе стремления M к N_0, а не только по нормали. Положим, для определенности, что M стремится к N_0 изнутри, и обозначим через $\omega(N_0)$ предельные значения на поверхности производной (78), когда M стремится к N_0 вдоль $\mathbf{n}_0$ Пусть ε — заданное положительное число. Нам надо показать, что существует такое положительное число η, что

$$\left|\frac{\partial u(M)}{\partial l} - \omega(N_0)\right| \leqslant \varepsilon, \tag{79}$$

если только $|MN_0| \leqslant \eta$, причем M находится внутри S. Проведем сферу с центром N_0 и выберем радиус ее δ настолько малым, чтобы на части σ' поверхности S, заключенной внутри этой сферы, имело место неравенство $|\omega(N) - \omega(N_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Считаем далее, что M находится внутри сферы с центром N_0 и радиусом η, причем это число выбираем так, что

$$\left|\frac{\partial u(M)}{\partial l} - \omega(N)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

если только M лежит на нормали к S в точке N и $|MN| \leqslant \eta$. Это возможно в силу доказанной равномерности стремления $\frac{\partial u(M)}{\partial l}$ к $\omega(N)$ на S. Кроме того, считаем еще, что $\eta \leqslant \frac{\delta}{3}$. Если точка M отстоит от N_0 не больше, чем на η, то тем более она отстоит не больше, чем на η, от той точки N, на нормали к которой она находится, причем эта точка N принадлежит σ'. Мы имеем

$$\frac{\partial u(M)}{\partial l} - \omega(N_0) = \frac{\partial u(M)}{\partial l} - \omega(N) + \omega(N) - \omega(N_0)$$

и

$$\left|\frac{\partial u(M)}{\partial l} - \omega(N_0)\right| \leqslant \left|\frac{\partial u(M)}{\partial l} - \omega(N)\right| + |\omega(N) - \omega(N_0)|.$$

В силу сказанного выше, оба слагаемых справа $\leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ и, следовательно,

$$\left|\frac{\partial u(M)}{\partial l} - \omega(N_0)\right| \leqslant \varepsilon \quad \text{при} \quad |MN_0| \leqslant \eta. \tag{80}$$

Выше мы использовали следующее элементарное предложение: кратчайшим расстоянием от точки M до поверхности S является длина нормали MN к поверхности S, проведенной через точку M.

Отметим еще, что интегралы (67) и (68) не имеют смысла при $z = 0$, т.е. когда точки M и N_0 совпадают. Однако их разность, как мы видели, уже имеет смысл.

Предыдущие рассуждения приводят нас к следующей теореме, доказанной впервые А. М. Ляпуновым:

Т е о р е м а. *Если плотность $\mu(N)$ удовлетворяет условию Липшица* (66), *то производная потенциала простого слоя по любому фиксированному направлению непрерывна вплоть до S как изнутри, так и извне. Производная по какому-либо касательному направлению в точке N_0 поверхности S меняется непрерывно при переходе точкою M поверхности в точке N_0.*

Исследование поведения производных потенциала двойного слоя при приближении к поверхности S представляет бо́льшие трудности. Основные результаты в этом отношении были получены также А. М. Ляпуновым в его упомянутой уже выше работе «О некоторых вопросах, связанных с задачей Дирихле».

101. Логарифмический потенциал. В случае плоскости вместо основного сингулярного решения $\frac{1}{r}$ мы имеем $\lg\frac{1}{r}$ [II; 203]*). Пусть l — замкнутый контур на плоскости XY и l_0 — его длина. Потенциал простого слоя определяется формулой

$$u(M)=\int_l \mu(N)\lg\frac{1}{r}\,ds=\int_l \mu(s)\lg\frac{1}{r}\,ds. \qquad (81)$$

Второе сингулярное решение, аналогичное диполю в трехмерном случае (см. (18)), будет

$$\frac{\cos\varphi}{r}=\frac{\partial}{\partial l}\left(\lg\frac{1}{r}\right),$$

и потенциал двойного слоя определится формулой

$$w(M)=\int_l \mu(N)\frac{\cos\varphi}{r}\,ds, \qquad (82)$$

где $\varphi=(\mathbf{r},\mathbf{n})$. Выражение $\frac{\cos\varphi\,ds}{r}$ дает угол, под которым виден элемент контура ds из точки M, причем этот угол получается положительным, если $\cos\varphi>0$, и отрицательным, если $\cos\varphi<0$. Аналогом формулы (26) будет следующая формула:

$$\int_l \frac{\cos\varphi}{r}\,ds=\begin{cases}2\pi & (M \text{ внутри } l),\\ 0 & (M \text{ вне } l),\\ \pi & (M \text{ на } l).\end{cases} \qquad (83)$$

Относительно контура l можно сделать предположения, аналогичные тем, которые мы делали относительно поверхности S.

Положим теперь, что функции $x(s)$, $y(s)$, дающие параметрическое уравнение линии l и имеющие период l_0, допускают непрерывные производные до второго порядка. Функцию $\mu(N)=\mu(s)$ мы считаем непрерывной. Исследуем ядро потенциала двойного слоя, считая, что точка M лежит на l и совпадает с некоторой точкой N_0 этой линии. Принимая во внимание, что направляющие косинусы направления $\mathbf{n}$ выражаются производными $y'(s)$ и $-x'(s)$, мы можем написать:

$$\frac{\cos\varphi}{r}=\frac{\cos(\mathbf{r},\mathbf{n})}{r}=\frac{[x(s)-x(s_0)]\,y'(s)-[y(s)-y(s_0)]\,x'(s)}{[x(s)-x(s_0)]^2+[y(s)-y(s_0)]^2}. \qquad (84)$$

---

*) Обратим внимание, что во всех томах lg есть логарифм по основанию e.

Если s и s_0 отличны, то написанное выражение представляет собою непрерывную функцию s и s_0. Положим теперь, что s и s_0 стремятся к общему пределу s_1. Применяя формулу Тейлора, можем написать:

$$x(s)-x(s_0)=x'(s_0)(s-s_0)+\frac{1}{2}x''(s_0')(s-s_0)^2,$$

$$x'(s)=x'(s_0)+x''(s_0'')(s-s_0),$$

$$y(s)-y(s_0)=y'(s_0)(s-s_0)+\frac{1}{2}y''(s_0''')(s-s_0)^2,$$

$$y'(s)=y'(s_0)+y''(s_0'''')(s-s_0),$$

где значения s_0', s_0'', s_0''', s_0'''' находятся между s и s_0. Подставляя в (84) и сокращая на $(s-s_0)^2$, мы получим в пределе выражение

$$\frac{x'(s_1)\,y''(s_1)-y'(s_1)\,x''(s_1)}{2\left[x'^2(s_1)+y'^2(s_1)\right]}=\frac{x'(s_1)\,y''(s_1)-y'(s_1)\,x''(s_1)}{2},$$

равное половине кривизны кривой в точке $s=s_1$. Таким образом, функция (84) является непрерывной функцией s и s_0 вдоль l. Обозначая эту функцию через $L(s_0, s)$, мы можем утверждать, что потенциал двойного слоя $w(N_0)=w(s_0)=\int\limits_0^l \mu(s)\,L(s_0, s)\,ds$ представляет собой непрерывную функцию N_0, если N_0 находится на l.

Таким образом, при сделанных предположениях относительно $x(s)$ и $y(s)$ функция (84) является непрерывной функцией s и s_0 на l. В трехмерном случае функция $\frac{\cos\varphi}{r^2}$ имела, вообще говоря, полярность при совпадении N с N_0. Для потенциала двойного слоя (82) можно доказать формулы, аналогичные (42):

$$\begin{aligned} w_i(N_0)&=w(N_0)+\pi\mu(N_0)=\int\limits_l \mu(N)\frac{\cos(\mathbf{r}_0, \mathbf{n})}{r_0}\,ds+\pi\mu(N_0),\\ w_e(N_0)&=w(N_0)-\pi\mu(N_0)=\int\limits_l \mu(N)\frac{\cos(\mathbf{r}_0, \mathbf{n})}{r_0}\,ds-\pi\mu(N_0), \end{aligned} \tag{85}$$

где $r_0=|N_0N|$ и $(\mathbf{r}_0, \mathbf{n})$ — угол, образованный направлением $\overline{N_0N}$ с направлением $\mathbf{n}$ внешней нормали к l в точке N. Из (85) следует

$$w_i(N_0)-w_e(N_0)=2\pi\mu(N_0). \tag{86}$$

Потенциал простого слоя (81) определен во всех точках плоскости и непрерывен на всей плоскости.

Пусть N_0 — некоторая точка на S и $\mathbf{n}_0$ — направление нормали в этой точке. Мы имеем, если M не на S,

$$\frac{\partial u(M)}{\partial n_0} = \int_l \mu(N) \frac{\partial \lg \frac{1}{r}}{\partial n_0} ds = \int_l \mu(N) \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n}_0)}{r} ds. \tag{87}$$

При приближении M к N_0 по нормали изнутри и извне S производная (87) имеет пределы, которые определяются по формулам

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial n_0}\right)_i &= \int_l \mu(N) \frac{\cos(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}_0)}{r_0} ds + \pi\mu(N_0), \\ \left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial n_0}\right)_e &= \int_l \mu(N) \frac{\cos(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}_0)}{r_0} ds - \pi\mu(N_0), \end{aligned} \tag{88}$$

из которых следует

$$\left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial n_0}\right)_i - \left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial n_0}\right)_e = 2\pi\mu(N_0). \tag{89}$$

Вместо (84) мы будем иметь

$$\frac{\cos(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}_0)}{r_0} = \frac{[x(s) - x(s_0)]\, y'(s_0) - [y(s) - y(s_0)]\, x'(s_0)}{[x(s) - x(s_0)]^2 + [y(s) - y(s_0)]^2},$$

и, как и выше, можно показать, что это выражение остается непрерывным и при совпадении s и s_0. Отметим, что потенциал простого слоя (81) не обращается, вообще говоря, в нуль на бесконечности.

102. Интегральные формулы и параллельные поверхности. В дальнейшем нам придется пользоваться следующими интегральными формулами [II; 203]:

$$\iiint_{D_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial v}{\partial z}\right) d\tau = \\ = \iint_S u \frac{\partial v}{\partial n} dS - \iiint_{D_i} u\, \Delta v\, d\tau, \tag{90}$$

$$\iiint_{D_i} (u\, \Delta v - v\, \Delta u)\, d\tau = \iint_S \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}\right) dS, \tag{91}$$

где D_i — часть пространства, ограниченная поверхностью S, и $\mathbf{n}$ — направление внешней нормали к S. Они являются следствиями равенства (107) из [48]. Эти формулы справедливы при следующих предположениях: u, v и их частные производные первого порядка непрерывны в D_i вплоть до S, частные производные второго порядка непрерывны внутри D_i и интегралы по D_i, содержащие Δu и Δv, имеют смысл. Если Δu и Δv не обладают непрерывностью вплоть до S, то это — несобственные интегралы, которые получаются как пределы по любой последовательности областей $D_i^{(n)}$, которые содержатся внутри D_i, когда эти области $D_i^{(n)}$ стремятся к D_i, так что всякая точка, находящаяся внутри D_i, попадает внутрь областей $D_i^{(n)}$, начиная с некоторого номера n. В дальнейшем мы будем иметь дело с гармоническими функциями, так что $\Delta u = \Delta v = 0$, и в (90) мы будем считать $u = v$. При этом указанные выше формулы принимают вид

$$\iiint\limits_{D_i}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]d\tau=\iint\limits_S u\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_i dS, \tag{92}$$

$$\iint\limits_S\left[u\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_i - v\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_i\right]dS=0. \tag{93}$$

Эти формулы справедливы и для бесконечной области D_e, находящейся вне S:

$$\iiint\limits_{D_e}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]d\tau=\iint\limits_S u\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_e dS, \tag{94}$$

$$\iint\limits_S\left[u\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_e - v\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_e\right]dS=0, \tag{95}$$

если только гармонические вне S функции u и v непрерывны со своими частными производными первого порядка вплоть до S и стремятся к нулю при беспредельном удалении точки M так, что имеют место неравенства

$$\begin{aligned} &R\,|u(M)|\leqslant A; \quad R^2\left|\frac{\partial u(M)}{\partial l}\right|\leqslant A;\\ &R\,|v(M)|\leqslant A; \quad R^2\left|\frac{\partial v(M)}{\partial l}\right|\leqslant A, \end{aligned} \tag{96}$$

где R — расстояние от M до какой-либо определенной точки O пространства, A — численная постоянная и l — любое фиксированное направление. В формулах (94) и (95) $\mathbf{n}$ есть направление нормали к S, внешней по отношению к D_e, т. е. направленной внутрь S.

Для доказательства формул (94) и (95) надо применить их к конечной области, ограниченной поверхностью S и сферой с центром O и достаточно большим радиусом. При стремлении радиуса к бесконечности интеграл по поверхности сферы будет стремиться к нулю, так как произведения $u\dfrac{\partial v}{\partial n}$ и $v\dfrac{\partial u}{\partial n}$ будут иметь оценку порядка $\dfrac{1}{R^3}$, а площадь поверхности —$4\pi R^2$. Таким образом мы и получим формулы (94) и (95) (ср. [II; 204]).

Как мы увидим в одном из следующих параграфов, условия (96) выполняются при единственном предположении, что гармонические функции $u(M)$ и $v(M)$ стремятся к нулю при беспредельном удалении M. Как следствие формул (93) и (95), мы получаем следующую формулу [**II**, 204]:

$$u(M)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\right]dS, \tag{97}$$

где $\mathbf{n}$ — направление внешней нормали по отношению к D_i или D_e, смотря по тому, к какому случаю применяется формула (97).

Укажем теперь более общие условия применимости приведенных выше формул. Отложим на нормалях к S в каждой точке этой поверхности отрезок одной и той же длины δ, направив этот отрезок внутрь S. Предположим, что геометрическое место концов P этих отрезков при всех достаточно малых δ образует замкнутую поверхность, которая не пересекает сама себя, лежит внутри S и имеет непрерывно изменяющуюся касательную плоскость. Обозначим эту поверхность через S_δ. Каждой точке N на S отвечает определенная точка P на S_δ, которая лежит на нормали к S в точке N, и, наоборот, каждой точке P на S_δ отвечает определенная точка N на S. Покажем, что нормаль к S в точке N является и нормалью к S_δ в точке P. Обозначим через (x, y, z) координаты точек S и через (x', y', z') — координаты соответствующих точек P в некоторой системе координат.

Мы имеем

$$\begin{aligned} x'&=x-\delta\cos(\mathbf{n}, X),\\ y'&=y-\delta\cos(\mathbf{n}, Y),\\ z'&=z-\delta\cos(\mathbf{n}, Z),\end{aligned} \tag{98}$$

где $\mathbf{n}$ — направление внешней нормали к S. Будем считать, что некоторый кусок поверхности S имеет явное уравнение $z=z(x, y)$, причем $z(x, y)$ имеет непрерывные производные до второго порядка. При этом направляющие косинусы нормали будут непрерывно дифференцируемыми функциями координат.

Положим, что N описывает некоторую линию l на упомянутом куске S так, что (x, y, z) суть непрерывно дифференцируемые функции некоторого параметра t. При этом и (x', y', z') будут непрерывно дифференцируемыми функциями t. Дифференцируя по t очевидное равенство

$$(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2=\delta^2,$$

получим

$$[(x'-x)x'_t+(y'-y)y'_t+(z'-z)z'_t]-\\ -[(x'-x)x_t+(y'-y)y_t+(z'-z)z_t]=0.$$

Но вторая квадратная скобка равна нулю, ибо PN есть нормаль к S Отсюда следует, что и первая скобка равна нулю, а это равносильно тому, что касательная к l' перпендикулярна к PN. Отсюда непосредственно следует, что PN есть нормаль и к S_δ. Мы считаем, что всякую точку S можно поместить внутрь куска поверхности с упомянутыми свойствами. Поверхность S_δ называется *поверхностью, параллельной поверхности* S.

Положим теперь, что гармонические внутри S функции u и v имеют правильные нормальные производные при стремлении M к N по нормали, причем сами u и v непрерывны в замкнутой области $\bar{D}_i$. Мы можем при этом применить все указанные выше формулы для области, ограниченной поверхностью S_δ Принимая во внимание равномерное стремление к пределу для u, v и их нормальных производных, а также совпадение нормалей у S_δ и S, мы получим при $\delta \to 0$ в пределе все эти формулы и для D_i. Тройной интеграл по D_i надо при этом считать несобственным, как предел интегралов по внутренним областям, при их стремлении к D_i. Так как подынтегральная функция положительна, то несущественно, каким именно образом эти внутренние области стремятся к D_i В частности, можно использовать области, ограниченные S_δ. При предельном переходе надо еще иметь в виду и изменение площади поверхности Элемент этой площади выражается через коэффициенты первой Гауссовой формы в виде [II; 142]:

$$dS = \sqrt{EG - F^2}\, dx\, dy,$$

если принять, например, x и y за параметры, и из (98) следует, что E, G и F — полиномы второй степени от δ. Указанные выше соображения применимы и для D_e. При этом в формулах (98) надо знак минус заменить на плюс. Если гармонические функции $u(M)$ и $v(M)$ представимы потенциалами простого слоя с непрерывными плотностями, то они непрерывны вплоть до S и имеют правильные нормальные производные.

Таким образом, мы имеем:

Теорема. *Если возможно построение параллельных поверхностей изнутри и извне S с указанными выше свойствами, то для потенциалов простого слоя $u(M)$ и $v(M)$ с непрерывными плотностями применимы вышеуказанные формулы.*

Выясним теперь некоторые достаточные условия существования поверхностей S_δ, параллельных S. Положим, что поверхность S есть поверхность Ляпунова, причем в условии (3) $\alpha = 1$. Покажем, что при этом поверхность S_δ при достаточно малых δ есть замкнутая поверхность без кратных точек, т. е. что разным N на S отвечают и разные P. Положим пока, что $\delta < \frac{d}{3}$, и будем считать, что для разных точек $N_1(x_1, y_1, z_1)$, $N_2(x_2, y_2, z_2)$

мы получим одну и ту же точку P, т. е.

$$\begin{aligned} x_1 - \delta \cos(\mathbf{n}_1, X) &= x_2 - \delta \cos(\mathbf{n}_2, X), \\ y_1 - \delta \cos(\mathbf{n}_1, Y) &= y_2 - \delta \cos(\mathbf{n}_2, Y), \\ z_1 - \delta \cos(\mathbf{n}_1, Z) &= z_2 - \delta \cos(\mathbf{n}_2, Z), \end{aligned} \tag{99}$$

где $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ — направление внешних нормалей к S в точках N_1 и N_2. Отметим, что N_2 лежит внутри сферы с центром N_1 и радиусом d. Обозначая через $r_{1,2}$ расстояние $|N_1N_2|$, получим, в силу (99),

$$r_{1,2} = \delta\sqrt{2(1-\cos\vartheta)},$$

где ϑ есть угол между $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$. Но, в силу (6), при $\alpha = 1$ мы имеем $1 - \cos\vartheta \leqslant \frac{1}{2}a^2r_{1,2}^2$, и потому $r_{1,2} \leqslant a\delta r_{1,2}$.

Если взять $\delta < \frac{1}{a}$, то мы приходим к противоречию. Итак, для поверхности Ляпунова, при $\alpha = 1$, поверхность S_δ не имеет кратных точек, если $\delta < \frac{d}{3}$ и $\delta < \frac{1}{a}$. Кроме того, из условий, налагаемых на S [94], непосредственно следует, что все точки P при $\delta < d$ находятся внутри (или вне) S. Если мы, кроме того, предположим, что уравнение куска поверхности $z = z(x, y)$ в местных координатах таково, что $z(x, y)$ имеет непрерывные производные до второго порядка, то поверхность S_δ будет иметь касательную плоскость, непрерывно меняющуюся при перемещении вдоль S_δ. Замкнутость S_δ непосредственно следует из того, что при непрерывном перемещении точки M, находящейся внутри D_i, к поверхности S кратчайшее расстояние от M до S будет, при некотором положении M, равным δ.

Замечание. Положим, что $u(M)$ — непрерывна вместе с производными первого порядка внутри S и имеет правильную нормальную производную. При этом предельные значения последней $\left(\frac{\partial u(N)}{\partial n}\right)_i$ представляют собою непрерывную на S функцию [98], откуда следует, что существует такое число B, что

$$\left|\left(\frac{\partial u(N)}{\partial n}\right)_i\right| \leqslant B \quad (N \text{ на } S).$$

С другой стороны, в силу равномерного стремления нормальной производной к пределу, при любом заданном положительном ε существует такое число η, что

$$\left|\frac{\partial u(M)}{\partial n} - \left(\frac{\partial u(N)}{\partial n}\right)_i\right| \leqslant \varepsilon \quad \text{при} \quad |MN| \leqslant \eta,$$

причем точка M находится внутри S и на нормали к S в точке N. Фиксируя ε, мы получаем $\left|\frac{\partial u(M)}{\partial n}\right| \leqslant (B + \varepsilon)$ при $|MN| \leqslant \eta$, откуда $|u(M_2)-u(M_1)|\leqslant(B+\varepsilon)\delta_{1,2}$, где $\delta_{1,2}=|M_1M_2|$. Отсюда следует, что $u(M)$ имеет определенный предел $u(N)$ при $M\to N$ по нормали. Мы можем далее написать:

$$u(M)-u(N)=\int_0^\delta \frac{\partial u(M_1)}{\partial n}\,d\delta_1,$$

где M_1 — переменная точка на нормали, $\delta_1=|NM_1|$ и $\delta=|NM|$, причем $\delta_1\leqslant\delta\leqslant\eta$. Из предыдущей оценки нормальной производной следует: $|u(M)-u(N)|\leqslant(B+\varepsilon)\delta$, откуда видно, что $u(M)\to u(N)$ равномерно относительно положения N на S. Принимая это во внимание, нетрудно показать (ср. [100]), что $u(M)$ стремится к $u(N)$ при любом законе стремления M к N и что $u(M)$ — непрерывна вплоть до S. Аналогичные рассуждения применимы и для D_e. Итак, *при наличии правильной нормальной производной функция* $u(M)$ *непрерывна вплоть до* S.

Таким образом, *применение указанных выше интегральных формул обусловлено лишь наличием правильных нормальных производных у* $u(M)$ и $v(M)$.

Все сказанное выше для D_i переносится и на случай плоскости. В случае бесконечной области на плоскости дело будет обстоять несколько иначе, о чем мы будем говорить ниже.

103. Последовательности гармонических функций. Прежде чем переходить к решению предельных задач для уравнения Лапласа при помощи потенциалов простого и двойного слоя, мы установим некоторые свойства гармонических функций в дополнение к тем, которые мы имели раньше. Рассмотрим последовательности гармонических функций или, что то же, ряды, члены которых — гармонические функции. Мы будем проводить все доказательства в случае плоскости. Для трехмерного пространства они буквально такие же. Достаточно только вместо формулы Пуассона применить формулу, дающую решение задачи Дирихле для сферы.

Основная теорема о равномерно сходящихся рядах гармонических функций чрезвычайно похожа на аналогичную теорему из теории регулярных функций комплексного переменного [III$_2$; 12]:

Если члены ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,\ y) \tag{100}$$

гармонические функции внутри ограниченной области B *и непрерывные функции в замкнутой области* $\overline{B}$, *и ряд равномерно сходится на контуре* l *этой области, то он равномерно сходится во всей замкнутой области и сумма ряда есть гармоническая функция внутри* B.

Пусть ε — наперед заданное положительное число. Ввиду равномерной сходимости на контуре l существует такое N, что при всяком $n \geqslant N$ и любом положительном p имеет место неравенство

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} u_k(x, y)\right| \leqslant \varepsilon \quad [(x, y) \text{ на } l].$$

Написанная конечная сумма гармонических функций будет гармонической функцией внутри B и непрерывной в замкнутой области $\bar{B}$, и, в силу основного свойства гармонических функций относительно достижения экстремумов на контуре [II; 204], мы можем утверждать, что раз написанное неравенство соблюдено на контуре, то тем более оно соблюдено и во всех внутренних точках, т. е., иначе говоря, оно соблюдено и во всей замкнутой области, что и дает равномерную сходимость ряда (100) во всей замкнутой области. Таким образом, сумма $S(x, y)$ ряда (100) есть непрерывная функция в замкнутой области. Докажем, что она будет гармонической внутри области. Пусть M_0 — любая точка внутри B. Опишем круг Σ_0 с центром M_0 и таким радиусом R, чтобы весь этот круг лежал внутри B. Обозначим через $S_n(x, y)$ сумму первых n членов ряда (100). Эта конечная сумма будет гармонической функцией, и ее значения внутри круга Σ_0 будут выражаться через ее значения на окружности этого круга по формуле Пуассона:

$$S_n(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_n(R, \psi) \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - 2R\rho\cos(\psi - \varphi) + \rho^2} d\psi,$$

где (ρ, φ) — полярные координаты точки $M(x, y)$, если точка M_0 принята за начало координат. На окружности упомянутого круга $S_n(R, \psi) \to S(R, \psi)$ равномерно по отношению к ψ, и мы имеем, переходя к пределу,

$$S(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(R, \psi) \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - 2R\rho\cos(\psi - \varphi) + \rho^2} d\psi,$$

т. е. внутри упомянутого круга сумма ряда (100) выражается интегралом Пуассона и является, следовательно, гармонической функцией. Напомним, что точка M_0 была любой точкой внутри B. Заметим, что совершенно так же мы могли бы доказать, что ряд (100) можно внутри B дифференцировать по переменным (ρ, φ) сколько угодно раз. Действительно, из формулы Пуассона непосредственно вытекает:

$$\frac{\partial u_k(\rho, \varphi)}{\partial \rho} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_k(R, \psi) \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - 2R\rho\cos(\psi - \varphi) + \rho^2} d\psi.$$

Умножая обе части ряда (100) на

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\,\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(\psi-\varphi)+\rho^2}$$

и интегрируя по окружности упомянутого круга, мы будем иметь

$$\frac{\partial S(\rho,\varphi)}{\partial\rho}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial u_k(\rho,\varphi)}{\partial\rho}.$$

Доказанную теорему можно, конечно, формулировать и в терминах последовательности гармонических функций, а именно: *если последовательность $S_n(x,y)$ функций, гармонических внутри B и непрерывных в замкнутой области $\bar{B}$, равномерно стремится к предельной функции $S(x,y)$ на контуре l, то она равномерно стремится к предельной функции во всей замкнутой области $\bar{B}$. Предельная функция будет гармонической внутри B, и внутри B последовательность можно дифференцировать сколько угодно раз.*

Докажем еще одну теорему, относящуюся к тому частному случаю, когда члены ряда (100) суть положительные функции. Предварительно выясним одно следствие формулы Пуассона. Функция $u(\rho,\varphi)$, гармоническая внутри круга $\rho<R$ с центром M_0 и непрерывная в замкнутом круге, выражается в этом круге по формуле Пуассона:

$$u(\rho,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(R,\psi)\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(\psi-\varphi)+\rho^2}\,d\psi.$$

Положим, кроме того, что эта функция положительна. Учитывая, что $|\cos(\psi-\varphi)|\leqslant 1$, мы можем написать неравенство

$$(R-\rho)^2\leqslant R^2-2R\rho\cos(\psi-\varphi)+\rho^2\leqslant(R+\rho)^2,$$

и из формулы Пуассона непосредственно следует:

$$\frac{R-\rho}{R+\rho}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(R,\psi)\,d\psi\leqslant u(\rho,\varphi)\leqslant\frac{R+\rho}{R-\rho}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(R,\psi)\,d\psi,$$

или, принимая во внимание теорему о среднем [II; 204],

$$\frac{R-\rho}{R+\rho}u(M_0)\leqslant u(\rho,\varphi)\leqslant\frac{R+\rho}{R-\rho}u(M_0). \tag{101}$$

Эта оценка значений положительной гармонической функции в произвольной точке внутри круга через ее значение в центре круга называется обычно *неравенством Гарнака.* Пользуясь этим неравенством, мы можем доказать следующую теорему:

Если имеется возрастающая последовательность $S_n(M)$ функций, гармонических внутри B, и если эта последовательность имеет конечный предел в какой-либо одной точке M_0, лежащей внутри B, то она сходится везде внутри B и притом равномерно во всякой замкнутой области B_1, которая вместе со своим контуром лежит внутри B.

По условию теоремы мы имеем внутри B: $S_{n+1}(M) \geqslant S_n(M)$. В силу сходимости последовательности в точке M_0 при любом заданном положительном ε существует такое N, что

$$[S_{n+p}(M_0) - S_n(M_0)] \leqslant \varepsilon$$

при $n \geqslant N$ и любом положительном p. Пусть Σ_0 — круг с центром M_0 и радиусом R, лежащий внутри B. Принимая во внимание, что написанная выше разность представляет собою положительную гармоническую функцию, мы можем написать

$$0 \leqslant S_{n+p}(M) - S_n(M) \leqslant \frac{R+\rho}{R-\rho}\varepsilon,$$

где M — произвольная точка внутри упомянутого круга и ρ — расстояние от M до M_0. Взяв круг Σ_0' с центром M_0 и радиусом $(R-a)$, где a — любое малое заданное положительное число, мы получаем в круге Σ_1 оценку:

$$0 \leqslant S_{n+p}(M) - S_n(M) \leqslant \frac{2R}{a}\varepsilon,$$

откуда вытекает равномерная сходимость $S_n(M)$ в круге Σ_0'. Взяв некоторую точку M_1 внутри круга Σ_0' и имея в ней сходимость последовательности, мы при помощи вышеуказанных рассуждений получим равномерную сходимость внутри круга с центром в этой точке, лежащего внутри B. Продолжая так и дальше, мы совершенно так же, как это делали при аналитическом продолжении, можем доказать равномерную сходимость последовательности во всяком замкнутом круге, лежащем внутри B. Всякую замкнутую область B_1, которая вместе со своим контуром лежит внутри B, мы можем покрыть конечным числом кругов, лежащих внутри B, и это дает нам равномерную сходимость последовательности в такой области B_1. Заметим еще, что *из равномерной сходимости последовательности вытекает, в силу предыдущей теоремы, и тот факт, что предельная функция последовательности будет гармонической функцией внутри B.*

Доказанную теорему можно формулировать и в терминах рядов, а именно: *пусть члены ряда* (100) — *гармонические функции внутри B и притом положительные, начиная с некоторого номера n. Если ряд сходится в некоторой точке внутри B, то он сходится во всех точках внутри B, и равномерно во всякой* *замкнутой области B_1, которая вместе со своим контуром лежит внутри B.* В предыдущей теореме вместо возрастающей последовательности мы могли бы, конечно, брать убывающую последовательность и соответственно — вместо положительных функций — могли бы брать отрицательные функции

104. Постановка внутренних предельных задач для уравнения Лапласа. Пусть D_i — конечная область трехмерного пространства, ограниченная поверхностью S Внутренняя задача Дирихле состоит, как мы знаем, в разыскании функции $u(M)$, гармонической внутри D_i, непрерывной в замкнутой области $\bar{D}_i$ и принимающей на S заданные значения, которые представляют собою непрерывную на S функцию Решение задачи может быть только одно **[II; 204]**. В дальнейшем, при некоторых предположениях о границе S, мы дадим доказательство существования решения. В случае плоскости вопрос обстоит совершенно так же.

В задаче Неймана на границе задается не сама функция, а предельные значения $f(N)$ нормальной производной $\frac{\partial u(M)}{\partial n}$, причем считается, что $M \to N$ по нормали. Если предполагать еще, что $u(M)$ имеет правильную нормальную производную, то мы можем применить формулу (93) к $u(M)$ и $v(M) \equiv 1$, и получим

$$\iint_S f(N)\, dS = 0, \tag{102}$$

таким образом, это равенство является необходимым условием разрешимости внутренней задачи Неймана при наличии правильной нормальной производной. Заметим, что если некоторая функция $u(M)$ дает решение внутренней задачи Неймана, то функция $u(M)+C$, где C — произвольная постоянная, также дает решение задачи при том же предельном условии $f(N)$ Теорема единственности решения внутренней задачи Неймана состоит в утверждении, что этим и исчерпываются все решения задачи, т. е. *если $u_1(M)$ и $u_2(M)$ — два решения задачи Неймана при одном и том же предельном условии $f(N)$, то разность $u_2(M)-u_1(M)$ должна быть постоянной в D.*

Легко доказать это утверждение, если предположить, что $u_1(M)$ и $u_2(M)$ имеют правильные нормальные производные. При этом разность $v(M)=u_2(M)-u_1(M)$ также имеет правильную нормальную производную, предельные значения которой равны нулю, тем самым $v(M)$ непрерывна вплоть до S, так что, применяя к $v(M)$ формулу (92), получим:

$$\iiint_{D_i} \left[\left(\frac{\partial v(M)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v(M)}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v(M)}{\partial z}\right)^2\right] d\tau = 0,$$

откуда и следует, что $v(M)$ постоянна внутри D_i. В [107] мы приведем доказательство единственности решения задачи Неймана без предположения о существовании правильной нормальной производной.

Отметим, что при постановке внутренних задач Дирихле и Неймана можно считать, что граница S состоит и из нескольких замкнутых поверхностей.

Третья основная предельная задача, связанная с уравнением Лапласа, состоит в нахождении внутри S гармонической функции, когда *на границе области задана линейная комбинация нормальной производной и самой функции*, т. е. предельное условие имеет вид

$$\left(\frac{\partial u(N)}{\partial n}\right)_i + p(N)\,u = f(N) \qquad (N \text{ на } S), \tag{103}$$

где $p(N)$ и $f(N)$ заданные на S непрерывные функции, причем мы считаем, что $p(N) > 0$. Докажем теорему единственности, считая, что $u(M)$ имеет правильную нормальную производную. Если бы существовали два решения задачи, то их разность $v(N)$ удовлетворяла бы однородному предельному условию:

$$\left(\frac{\partial v(N)}{\partial n}\right)_i + p(N)\,v(N) = 0. \tag{104}$$

Применяя к $v(M)$ формулу (92) и пользуясь (104), получим

$$\iiint\limits_{D_i}\left[\left(\frac{\partial v(M)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v(M)}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v(M)}{\partial z}\right)^2\right]d\tau = -\iint\limits_{S} p(N)\,v^2(N)\,dS.$$

Интеграл, стоящий справа, не может быть положительным, а интеграл, стоящий слева, не может быть отрицательным, т. е. оба они должны равняться нулю, откуда непосредственно следует, что $v(M) = 0$.

Все предыдущие результаты имеют место и для случая плоскости.

До сих пор мы рассматривали так называемые внутренние задачи, при которых требуется определить гармоническую функцию в ограниченной области при некотором предельном условии. Мы переходим теперь к внешним задачам, когда ищется гармоническая функция в бесконечной части пространства, находящейся вне некоторой замкнутой поверхности (или вне нескольких замкнутых поверхностей). Аналогично ставится задача для плоскости. Существенную роль играет при этом то требование, которое мы налагаем на искомую функцию в окрестности бесконечно далекой точки. Этот вопрос будет решаться различно для плоскости и для пространства. Мы начнем с выяснения упомянутого требования на бесконечности и сначала разберем случай плоскости.

105. Внешние задачи в случае плоскости. Функцию $u(M)$, гармоническую в окрестности бесконечно далекой точки, мы назовем *регулярной в бесконечно далекой точке*, если при стремлении точки M к бесконечности функция $u(M)$ имеет конечный предел. Выясним смысл этого определения. Построим в окрестности бесконечно далекой точки функцию $v(M)$, гармонически сопряженную с $u(M)$ [III₂; 2]. При обходе бесконечно далекой точки против часовой стрелки функция $v(M)$ может приобрести постоянное слагаемое, которое мы обозначим через γ. Функция комплексного переменного

$$f(z) = u(z) + v(z)\, i - \frac{\gamma}{2\pi} \lg z$$

будет однозначной и регулярной в окрестности бесконечно далекой точки и, следовательно, должна разлагаться в этой окрестности в ряд Лорана по целым степеням z. Покажем, что в этом разложении вовсе нет членов с положительными степенями z. Действительно, если бы таких членов было бы бесконечное множество, то функция $f(z)$ при $|z| \to \infty$ могла бы принимать значения, сколь угодно близкие к любому наперед заданному числу [III₂; 17], а на самом деле вещественная часть функции, т. е. $u(z) - \frac{\gamma}{2\pi} \lg |z|$ или стремится к бесконечности, если $\gamma \neq 0$, так как, по условию, $u(z)$ имеет конечный предел, или имеет конечный предел при $|z| \to \infty$, если $\gamma = 0$.

Если бы членов с положительными степенями было конечное число, т. е. если бы

$$f(z) = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \ldots + a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \ldots \quad (a_m \neq 0),$$

то мы имели бы

$$u(z) - \frac{\gamma}{2\pi} \lg \rho = r\rho^m \cos(m\varphi + \psi) + \\ + \operatorname{Re}\left[a_{m-1} z^{m-1} + \ldots + a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \ldots\right]$$

($z = \rho e^{i\varphi}$, $a_m = re^{i\psi}$; Re — знак вещественной части).

Если разделить обе части равенства на ρ^m и устремить ρ к бесконечности при фиксированном φ, то левая часть будет очевидно стремиться к нулю, а правая будет иметь предел $r\cos(m\varphi + \psi)$, зависящий от φ, который не всегда равен нулю. Мы придем, таким образом, к противоречию и, следовательно, в разложении $f(z)$ будет только свободный член и члены с отрицательными степенями:

$$f(z) = a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \ldots \tag{105}$$

При $|z| \to \infty$ функция $f(z)$ имеет конечный и определенный предел a_0, и отсюда непосредственно вытекает, что постоянная

γ должна быть равна нулю, т. е. *если* $u(M)$ *регулярна в бесконечно далекой точке и* $v(M)$ — *сопряженная функция, то* $f(z) = u(z) + iv(z)$ *имеет в окрестности бесконечно далекой точки разложение* (105). Из предыдущих рассуждений непосредственно вытекает, что для получения этого результата достаточно предположить, что $u(M)$ просто ограничена по абсолютной величине в окрестности бесконечно далекой точки. Отсюда уже будет вытекать разложение (105) и, тем самым, существование конечного предела у $u(M)$ при стремлении точки M к бесконечности.

Внешняя задача Дирихле сводится к нахождению функции $u(M)$, гармонической вне замкнутого контура l, регулярной на бесконечности и принимающей на контуре l заданные значения $f(N)$. Пусть z_0 — некоторая точка, находящаяся внутри l. Совершим конформное преобразование плоскости $w = \frac{1}{z - z_0}$. Часть плоскости, находящаяся вне l, перейдет в некоторую ограниченную область B, гармонические функции перейдут в гармонические функции [III$_2$; 31], точка $z = \infty$ перейдет в $w = 0$, и $f(z)$ будет регулярной функцией от w при $w = 0$. Формулированная выше внешняя задача Дирихле перейдет во внутреннюю задачу для преобразованной области, и мы, очевидно, можем иметь только одно решение поставленной задачи.

Пользуясь разложением (105), дифференцируя его по z и принимая во внимание, что

$$z^2 f'(z) \to -a_{-1} \quad \text{при} \quad |z| \to \infty,$$

мы можем утверждать, что если гармоническая функция $u(M)$ регулярна в бесконечно далекой точке, то произведения $\rho^2 \frac{\partial u}{\partial x}$ и $\rho^2 \frac{\partial u}{\partial y}$, где $\rho = |z|$, остаются ограниченными при беспредельном удалении точки M. Отсюда непосредственно вытекает, что и произведение $\rho^2 \frac{\partial u}{\partial m}$, где m — любое направление, которое может и изменяться при перемещении точки M, остается ограниченным при беспредельном удалении точки M. Если B есть часть плоскости, находящаяся вне замкнутого контура l, а $u(M)$ и $v(M)$ — функции, гармонические в B, непрерывные в бесконечно далекой точке и непрерывные вместе с производными первого порядка вплоть до контура, то имеют место формулы

$$\iint\limits_B \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy = \int\limits_l u \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_e ds, \tag{106}$$

$$\int\limits_l \left[u \left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_e - v \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_e\right] ds = 0, \tag{107}$$

где **n** — направление нормали к l, внешней по отношению к области B. Формулы доказываются совершенно так же, как это делалось в [**102**] для трехмерного случая. Достаточно иметь в виду, что на окружности C с центром в фиксированной точке O и радиусом R произведения $v\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_e$ и $u\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_e$ имеют оценку $\frac{A}{R^2}$, а длина окружности — $2\pi R$. Как и в [**102**], формулы (106) и (107) остаются справедливыми, если вместо непрерывности производных первого порядка вплоть до l потребовать существования правильных нормальных производных у $u(M)$ и $v(M)$.

Переходим к внешней задаче Неймана, когда на l имеется предельное условие

$$\left(\frac{\partial u(N)}{\partial n}\right)_e = f(N) \quad (N \text{ на } l) \tag{108}$$

при стремлении M к N по нормали, и сохраняется требование регулярности функции $u(M)$ на бесконечности. Пусть решение задачи $u(M)$ существует, и предположим, что $u(M)$ имеет правильную нормальную производную на l. Проводя окружность C достаточно большого радиуса R и применяя формулу (107) к $u(M)$ и $v(M) \equiv 1$ для области, ограниченной l и C, получим

$$\oint_l \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_e ds + \oint_l \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_e ds = 0. \tag{109}$$

Но на C производная $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_e$ имеет порядок $\frac{1}{R^2}$, откуда следует, что интеграл по C стремится к нулю при $R \to \infty$, и мы получаем в пределе, в силу (108),

$$\int_l f(N)\, ds = 0. \tag{110}$$

Это необходимое условие мы получили и для внутренней задачи Неймана. Пользуясь формулой (106), можно доказать единственность решения внешней задачи Неймана при условии правильности нормальной производной (ср. [**104**]). В трехмерном пространстве мы не будем иметь условия, аналогичного (110), для разрешимости внешней задачи Неймана.

Отметим тот факт, что основное сингулярное решение $\lg\frac{1}{r}$ не будет регулярным в бесконечно далекой точке. При $r \to \infty$ оно стремится к ∞. Второе сингулярное решение $\frac{\cos\varphi}{r}$, соответствующее диполю, уже будет регулярным в бесконечно далекой точке, и оно обращается в этой точке в нуль. В трехмерном пространстве не только потенциал диполя, но и основное сингулярное решение $\frac{1}{r}$ обращается в бесконечно далекой точке в нуль. Потенциал простого слоя (81), дающий гармоническую функцию вне l, не будет, вообще говоря, регулярным в бесконечно далекой точке. Если общий заряд равен нулю, т. е. если

$$\int_l \mu(N)\,ds = 0, \tag{111}$$

то в этом частном случае потенциал (81) будет регулярным. Действительно, пусть R — расстояние точки M до начала. Вводя в интеграл (111) множитель $\lg R$, не зависящий от переменной точки интегрирования N, мы можем написать потенциал (81) в виде

$$u(M) = \int_l \mu(N) \lg \frac{R}{r}\,ds,$$

и при беспредельном удалении точки M выражение $\lg \frac{R}{r}$ стремится к нулю равномерно по отношению к точкам N, лежащим на l. Таким образом, мы видим, что потенциал действительно будет регулярным в бесконечно далекой точке и равным нулю.

Докажем еще одно свойство гармонических функций. Положим, что *$u(M)$ — гармоническая функция в некотором круге, центр которого примем за начало координат N_0, кроме, может быть, самого начала, и ограничена по абсолютной величине в этом круге.* Покажем, что *существует предел $u(M)$ при $M \to N_0$, и если принять этот предел за значение $u(N_0)$, то $u(M)$ будет гармонической во всем круге, включая начало.* Чтобы убедиться в этом, достаточно проделать те рассуждения, которые привели нас к разложению (105), заменив бесконечно далекую точку началом. Вместо (105) будем иметь

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots,$$

откуда и следует наше утверждение.

106. Преобразование Кельвина. При рассмотрении гармонических функций в трехмерном пространстве мы уже не имеем больше того важного вспомогательного аппарата, каким являлась в случае плоскости теория функций комплексного переменного и, в частности, конформное преобразование, переводящее всякую гармоническую функцию тоже в гармоническую функцию. В случае трехмерного пространства имеется все же некоторое точечное преобразование совершенно специального вида, которое обладает тем же свойством, а именно: если $u(x, y, z)$ —

гармоническая функция в некоторой области D, то функция

$$v(x', y', z') = \frac{1}{r'} u\left(\frac{x'}{r'^2}, \frac{y'}{r'^2}, \frac{z'}{r'^2}\right) \quad (r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2) \tag{112}$$

будет гармонической в области D', которая получается из D при помощи преобразования:

$$x' = \frac{x}{r^2}; \quad y' = \frac{y}{r^2}; \quad z' = \frac{z}{r^2} \quad (r^2 = x^2 + y^2 + z^2). \tag{113}$$

Заметим прежде всего, что $r' = \frac{1}{r}$ и что преобразование, обратное (113), имеет тот же вид:

$$x = \frac{x'}{r'^2}; \quad y = \frac{y'}{r'^2}; \quad z = \frac{z'}{r'^2}. \tag{113_1}$$

Если ввести сферические координаты, то формула (112) преобразуется к виду:

$$v(r', \theta, \varphi) = \frac{1}{r'} u\left(\frac{1}{r'}, \theta, \varphi\right).$$

Принимая во внимание, что $u(r, \theta, \varphi)$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$r^2 u_{rr} + 2ru_r + \frac{1}{\sin\theta}(u_\theta \sin\theta)_\theta + \frac{1}{\sin^2\theta} u_{\varphi\varphi} = 0$$

и что имеет место очевидное тождество

$$r'^5\left(v_{r'r'} + \frac{2}{r'} v_{r'}\right) = u_{rr} + \frac{2}{r} u_r,$$

мы без труда убедимся в том, что и функция $v(r', \theta, \varphi)$ удовлетворяет уравнению Лапласа. Преобразование (113) представляет собою преобразование симметрии относительно сферы с центром в начале и радиусом единица (ср. [**II**; **207**]). Мы могли бы, конечно, брать центр сферы в любой точке (a, b, c) и считать ее радиус R тоже любым. При этом формулы (112) и (113) запишутся в виде

$$x' - a = \frac{R^2}{r^2}(x - a); \quad y' - b = \frac{R^2}{r^2}(y - b); \quad z' - c = \frac{R^2}{r^2}(z - c);$$

$$v(x', y', z') = \frac{R}{r'} u\left[a + \frac{R^2}{r'^2}(x' - a), \ldots\right]; \tag{114}$$

$$r^2 = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2};$$

$$r'^2 = \sqrt{(x' - a)^2 + (y' - b)^2 + (z' - c)^2}.$$

Преобразование (114) называется *преобразованием Кельвина*. Прежде чем выяснить понятие регулярности гармонической функции в бесконечно далекой точке в трехмерном пространстве, докажем свойство гармонических функций, которое в плоском случае мы доказали в конце предыдущего параграфа. *Пусть $u(M)$ — гармоническая функция в некоторой сфере S_0 с центром в начале координат, кроме, может быть, самого начала, и ограничена по абсолютной величине в этой сфере. Покажем, что существует предел $u(M)$ при стремлении M к началу, и, если принять этот предел за значение $u(M)$ в начале, то $u(M)$ будет гармонической и в начале.*

Пользуясь интегралом, указанным нами в **[II; 207]**, мы можем построить функцию $u_1(M)$, гармоническую в сфере S_0 без всякого исключения и принимающую на поверхности этой сферы те же самые предельные значения, что и функция $u(M)$.

Применим к разности $u_1(M)-u(M)$ преобразование Кельвина по отношению к сфере S_0. Преобразованная функция окажется гармонической вне сферы S_0, равной нулю на поверхности этой сферы и стремящейся к нулю при стремлении точки M' к бесконечности. Последнее обстоятельство непосредственно вытекает из вида формул (114) и того факта, что $u(M)$, по условию, ограничена в окрестности начала координат. Принимая во внимание, что экстремумы гармонической функции должны находиться на границе области, мы можем утверждать, что функция $u_1(M)-u(M)$ должна быть равна тождественно нулю, т. е. функция $u_1(M)$ совпадает с функцией $u(M)$, а потому эта последняя функция будет гармонической и в начале координат.

Пусть $u(M)$ — некоторая функция, гармоническая в окрестности точки O, которую мы примем за начало, и в самой этой точке. Совершая преобразование Кельвина с центром в начале и с радиусом хотя бы равным единице, мы получим преобразованную функцию $v(M')$, которая будет гармонической функцией в окрестности бесконечно далекой точки. Эта функция будет стремиться к нулю при $r'\to\infty$ и, больше того, из формулы (112) непосредственно вытекает, что произведение $r'v(M')$ остается ограниченным при $r'\to\infty$ и то же самое можно утверждать относительно произведений $r'^2\frac{\partial v}{\partial x'}$, $r'^2\frac{\partial v}{\partial y'}$, $r'^2\frac{\partial v}{\partial z'}$. Последнее непосредственно вытекает из того факта, что производные функции $u(M)$ в окрестности начала ограничены. Наоборот, если мы имеем функцию $u(M)$, гармоническую в окрестности бесконечно далекой точки и такую, что произведение $ru(M)$ остается ограниченным при $r\to\infty$, то, совершая преобразование Кельвина, мы убедимся в том, что преобразованная функция $v(M')=$ $=\frac{1}{r'}u(M)$ будет гармонической и ограниченной в окрестности начала координат, а тем самым будет гармонической и в начале координат. Но тогда из приведенных выше рассуждений непосредственно следует, что произведения $r^2\frac{\partial u}{\partial x}$, $r^2\frac{\partial u}{\partial y}$, $r^2\frac{\partial u}{\partial z}$

остаются ограниченными при $r \to \infty$. Положим, наконец, что про функцию $u(M)$, гармоническую в окрестности бесконечно далекой точки, известно только, что $u(M) \to 0$ при $r \to \infty$, т. е. при любом заданном положительном ε существует такое положительное число A, что $|u(M)| \leqslant \varepsilon$, если только $r \geqslant A$. Построим сферу S_0 с центром в начале и настолько большим радиусом, чтобы $u(M)$ была гармонической вне S_0 и на самой поверхности этой сферы. Мы можем построить функцию $v_1(M')$, гармоническую внутри сферы S_0 и имеющую на поверхности этой сферы те же самые предельные значения, что и $u(M)$.

Пусть $u_1(M)$ — результат преобразования Кельвина над функцией $v_1(M')$ по отношению к сфере S_0. Разность $u(M) - u_1(M)$ — гармоническая функция вне S_0, равная нулю на S_0 и стремящаяся к нулю при $r \to \infty$. Такая функция, как мы видели выше, должна тождественно обращаться в нуль. Следовательно, наша первоначальная функция $u(M)$ должна совпадать с функцией $u_1(M)$, которая получилась в результате преобразования Кельвина из функции $v_1(M')$, гармонической внутри сферы S_0. Для такой функции, как мы видели выше, произведения

$$ru_1(M), \quad r^2\frac{\partial u_1(M)}{\partial x}, \quad r^2\frac{\partial u_1(M)}{\partial y}, \quad r^2\frac{\partial u_1(M)}{\partial z} \tag{115}$$

должны оставаться ограниченными при $r \to \infty$. Мы видим, таким образом, что *из того, что $u(M) \to 0$ при $r \to \infty$, вытекает, что для $u(M)$ произведения* (115) *должны оставаться ограниченными при $r \to \infty$.*

Назовем функцию $u(M)$, гармоническую в окрестности бесконечно далекой точки, *регулярной на бесконечности*, если $u(M) \to 0$ при $r \to \infty$. Если известно только, что $u(M)$ стремится к конечному пределу b, то можно сказать, что такая функция равна сумме постоянного слагаемого b и гармонической функции, регулярной в бесконечно далекой точке. Если для гармонических вне S функций $u(M)$ и $v(M)$ произведения (115) остаются ограниченными, и эти функции имеют на S правильные нормальные производные извне, то, как мы видели [**102**], для таких функций имеют место формулы (94), (95), в которых интегрирование распространяется на часть пространства, находящуюся вне S.

В н е ш н я я з а д а ч а Д и р и х л е состоит в разыскании функции $u(M)$, гармонической вне S, регулярной в бесконечно далекой точке, непрерывной вплоть до S и принимающей на поверхности S наперед заданные значения $f(N)$. Принимая некоторую точку M_0, находящуюся внутри S, за начало и совершая преобразование Кельвина, мы сведем внешнюю задачу Дирихле к внутренней задаче для преобразованной области. При помощи обычных рассуждений доказывается единственность решения внешней задачи Дирихле. Существование решения задачи сводится к существованию решения внутренней задачи Дирихле, а это последнее может быть доказано при общих предположениях о поверхности при условии непрерывности граничных данных.

Отметим разницу при постановке внешней задачи Дирихле в случае плоскости и пространства. В плоском случае мы задавали предельные значения на границе и требовали только, чтобы функция стремилась к конечному пределу при $r \to \infty$. В случае трехмерного пространства мы задаем сам этот предел, а именно — считаем его равным нулю. Мы могли бы считать, что при $r \to \infty$ наша функция стремится к некоторому заданному числу b. Рассматривая разность $u(M) - b$, мы пришли бы к прежней постановке задачи. Нетрудно видеть, что в случае трехмерного пространства для определенности внешней задачи Дирихле недостаточно требовать, чтобы $u(M)$ имела конечный предел при $r \to \infty$. Действительно, положим, что некоторое количество электричества находится в равновесии на проводящей поверхности S. Такой электростатический потенциал простого слоя будет иметь некоторое постоянное значение c на поверхности S, причем нетрудно показать, что $u(M)$ будет давать гармоническую функцию вне S и будет стремиться к нулю при $r \to \infty$. Сама постоянная c будет также гармонической функцией вне S и будет иметь на S те же предельные значения, но она уже не будет регулярной, согласно нашему определению, в бесконечно далекой точке. Для случая плоскости это рассуждение уже неприменимо, ибо электростатический потенциал простого слоя на линии l обращается в бесконечность в бесконечно далекой точке. Отметим еще, что иногда называют функцию $u(M)$ гармонической вне поверхности S только в том случае, если она регулярна в бесконечно далекой точке, т. е. некоторые авторы в определение функции, гармонической вне поверхности S, включают и регулярность в бесконечно далекой точке.

Внешняя задача Неймана состоит в нахождении функции, гармонической вне S, регулярной на бесконечности, при заданных предельных значениях ее нормальной производной на S. В данном случае предельные значения нормальной производной уже не должны удовлетворять условию (110). Доказательство этого условия, проведенное нами в случае плоскости, уже не годится в случае пространства, ибо площадь поверхности сферы радиуса R имеет порядок R^2, и величина интеграла от $\frac{\partial u}{\partial n}$ по сфере достаточно большого радиуса не должна стремиться к нулю при $R \to \infty$. Если предположить, что решение внешней задачи Неймана имеет правильную нормальную производную, то единственность решения задачи непосредственно следует из формулы (94). Аналогичное рассуждение мы проводили для внутренней задачи Неймана.

Заметим в заключение настоящего параграфа, что указанные выше свойства гармонической функции в окрестности бесконечно далекой точки могут быть непосредственно получены из разложения этой функции в окрестности бесконечно далекой точки по сферическим функциям.

107. Единственность решения задачи Неймана. В настоящем параграфе мы дадим доказательство единственности решения внутренней задачи Неймана без предположения правильности нормальной производной. Предварительно рассмотрим тело некоторого специального вида и построим в этом теле гармоническую функцию, обладающую некоторыми свойствами, которые будут ниже указаны. Пусть $T(\alpha, k, h)$ — тело, ограниченное поверхностью

$$z = k(x^2+y^2)^{\frac{1+\alpha}{2}} \tag{116}$$

и плоскостью $z = h$, где k, α и h — положительные постоянные. Точку (0, 0, 0) назовем вершиной этого тела, и обозначим ее N_0. Буквою σ' обозначим ту часть границы этого тела, которая лежит в плоскости $z=h$ и буквою σ'' — остальную часть границы тела. Пусть далее u_0 и u_1 — две вещественные постоянные, причем $u_0 < u_1$. Построим функцию $w(M)$ — гармоническую внутри тела $T(\alpha, k, h)$, непрерывную вплоть до границы, и такую, что $w(M) < u_1$ на σ', $w(M) \leqslant u_0$ на σ'' и $w(N_0) = u_0$. Если $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, θ — угол между радиусом-вектором и осью z и $P_n(x)$ — функция Лежандра [III$_2$; 142], то, как известно [III$_2$; 136], при любом n функция $r^n P_n(\cos\theta)$ будет гармонической внутри тела $T(\alpha, k, h)$. Будем строить $w(M)$ в виде

$$w(M) = \gamma\,[r\cos\theta + r^{1+\beta}P_{1+\beta}(\cos\theta)] + u_0, \tag{117}$$

где γ и β — положительные постоянные, которые будут определены позднее. Мы имеем, очевидно, $w(N_0) = u_0$. Покажем, прежде всего, что при всех β, достаточно близких к нулю,

$$P_{1+\beta}(0) < 0. \tag{118}$$

Функция $P_n(x)$ есть сумма гипергеометрического ряда:

$$P_n(x) = F\left(n+1;\ -n;\ 1;\ \frac{1-x}{2}\right) \qquad (|x|<1),$$

вследствие чего можно написать:

$$P_n(0) = 1 - \frac{(n+1)n}{2} + \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\frac{(n+k)(n+k-1)\ldots(n-k+1)}{(k!)^2\,2^k}$$

или

$$P_n(0) = -\frac{(n-1)(n+2)}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \left[\prod_{s=1}^{k} \frac{(n+s)(n-s+1)}{2s^2} \right].$$

Мы считаем $1 < n < 2$, так что множители, соответствующие $s = 1$ и $s = 2$, положительны, а остальные $(k-2)$ отрицательны. Относя к этим последним множителям $(-1)^{k-2}$, можем записать их в виде

$$0 < \frac{(n+s)(s-n-1)}{2s^2} = \frac{s^2 - n^2 - s - n}{2s^2} < \frac{1}{2} \quad (s = 3, 4, \ldots).$$

Таким образом, выделяя первые два множителя, получаем неравенство

$$P_n(0) < -\frac{(n-1)(n+2)}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{16} \cdot \frac{1}{2^{k-2}},$$

т. е.

$$P_n(0) < \frac{(n-1)(n+2)}{2} \left[\frac{(n+1)n}{8} - 1 \right],$$

откуда и следует, что $P_n(0) < 0$, если $n^2 + n < 8$. Таким образом, (118) доказано при всех положительных β, достаточно близких к нулю. Фиксируем β так, чтобы оно удовлетворяло этому условию, а также условию $\beta < \alpha$, где α из уравнения (116). Принимая во внимание, что $z = r\cos\theta$, получаем на поверхности (116)

$$r\cos\theta + r^{1+\beta} P_{1+\beta}(\cos\theta) = k\rho^{1+\alpha} + r^{1+\beta} P_{1+\beta}(\cos\theta),$$

где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, и, окончательно, на поверхности (116)

$$r\cos\theta + r^{1+\beta} P_{1+\beta}(\cos\theta) = r^{1+\beta}\left[k r^{\alpha-\beta} \sin^{1+\alpha}\theta + P_{1+\beta}(\cos\theta)\right].$$

Если $r \to 0$, то $\theta \to \frac{\pi}{2}$, и, в силу (118) и $\beta < \alpha$, квадратная скобка имеет при этом отрицательный предел. Таким образом, мы можем фиксировать положительное число h настолько малым, чтобы на всей части σ'' поверхности тела $T(\alpha, k, h)$ иметь

$$r\cos\theta + r^{1+\beta} P_{1+\beta}(\cos\theta) \leqslant 0. \tag{119}$$

Выберем, наконец, положительное число γ настолько малым, чтобы формула (117) давала $w(M) < u_1$ на σ'. Построенная функция $w(M)$ удовлетворяет всем указанным выше условиям. На оси тела $T(\alpha, k, h)$, т. е. на оси Z, мы имеем

$$w(M) = \gamma(z + z^{1+\beta}) + u_0 \quad (z > 0).$$

Если M — переменная точка этой оси, то

$$\frac{w(M)-w(N_0)}{z}=\gamma+\gamma z^{\beta}>\gamma. \tag{120}$$

Докажем теперь теорему:

Теорема. *Если $u(M)$ — функция, гармоническая внутри D_i, отличная от постоянной, u_0 — конечная точная нижняя граница значений $u(M)$ внутри D_i и существует такая точка N_0 на S, что $u(M)\to u_0$ при стремлении M изнутри к N_0, то при стремлении M к N_0 по нормали, отношение*

$$\frac{u(M)-u(N_0)}{|N_0M|} \tag{121}$$

остается больше некоторого положительного числа.

Мы считаем, что существует тело $T(\alpha, k, h)$, которое касается S в точке N_0 и все точки которого, кроме N_0, лежат внутри S. Число h фиксировано настолько малым, чтобы иметь (119) на всей части σ'' поверхности упомянутого тела. Пусть u_1 — наименьшее значение $u(M)$ на части σ' поверхности $T(\alpha, k, h)$. Так как $u(M)$ — отлична от постоянной, то $u_0<u_1$, и, выбрав γ достаточно малым, мы можем построить $w(M)$ с указанными выше свойствами. При этом $w(N_0)=u(N_0)$, и $w(N)<u(N)$ на остальной части поверхности $T(\alpha, k, h)$. При этом, направив ось Z по внутренней нормали к S в точке N_0, получим

$$\frac{u(M)-u(N_0)}{|N_0M|}=\frac{u(M)-u(N_0)}{z}>\frac{w(M)-w(N_0)}{z}>\gamma, \tag{122}$$

что и доказывает теорему.

Из доказанной теоремы непосредственно следует единственность решения задачи Неймана в следующем смысле:

Если гармоническая внутри D_i функция $u(M)$ непрерывна вплоть до S, и $\left(\frac{\partial u(N)}{\partial n}\right)_i=0$ на всей поверхности S, то $u(M)$ — постоянна. Пусть N_0 — та точка S, где $u(M)$ имеет наименьшее значение. Из (122) непосредственно следует, что производная по нормали в точке N_0 не может стремиться к нулю, когда $M\to N_0$, оставаясь на нормали. Если бы это было так, то из формулы конечных приращений мы получили бы

$$\frac{u(M)-u(N_0)}{z}\to 0,$$

что противоречит (122).

Совершенно аналогично проводится доказательство единственности и для внешней задачи Неймана.

Приведенное выше доказательство было дано в совместной работе М. В. Келдыша и М. А. Лаврентьева (ДАН СССР, 1937, **16**, № 3).

Если можно коснуться поверхности S изнутри сферой, то доказательство теоремы единственности проводится элементарно (Заремба С. — УМН, 1946, 1, № 3—4).

108. Решение предельных задач в трехмерном случае. Рассмотрим внутренние задачи Дирихле и Неймана для области D_i, ограниченной поверхностью S. Будем искать решение внутренней задачи Дирихле в виде потенциала двойного слоя:

$$u(M) = \iint_S \mu(N) \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} dS \qquad (r = |MN|), \tag{123}$$

где $\mathbf{r}$ — направление $\overline{MN}$ и $\mathbf{n}$ — направление внешней нормали в точке N поверхности. Искомой является плотность $\mu(N)$. Согласно первой из формул (42), внутренняя задача Дирихле с предельным значением

$$(u)_i|_S = f(N) \tag{124}$$

равносильна следующему интегральному уравнению для плотности $\mu(N)$:

$$f(N_0) = \iint_S \mu(N) \frac{\cos(\mathbf{r}_0, \mathbf{n})}{r_0^2} dS + 2\pi\mu(N_0) \qquad (r_0 = |N_0 N|).$$

Вводя ядро

$$K(N_0;\ N) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\cos(\mathbf{r}_0, \mathbf{n})}{r_0^2},$$

мы можем переписать последнее уравнение в виде

$$\mu(N_0) = \frac{1}{2\pi} f(N_0) + \iint_S \mu(N) K(N_0;\ N) dS. \tag{125}$$

Ядро $K(N_0;\ N)$ не симметрично, поскольку нормаль берется в точке N и $\mathbf{r}_0$ обозначает направление $\overline{N_0N}$. Мы получим транспонированное ядро союзного уравнения [IV$_1$; 9], если будем брать нормаль в N_0 и считать $\mathbf{r}_0$ от N к N_0. Это транспонированное ядро $K_1(N_0;\ N)$ определится, таким образом, формулой

$$K_1(N_0;\ N) = K(N;\ N_0) = \frac{\cos(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}_0)}{2\pi r_0^2}, \tag{126}$$

где $\mathbf{n}_0$ — направление внешней нормали в N_0. Мы переменили знак у ядра, так как в $K_1(N_0;\ N)$ должны были переменить направление $\mathbf{r}_0$ на противоположное, а в формуле (126) $\mathbf{r}_0$ обозначает по-прежнему направление $\overline{N_0N}$. Решение внутренней задачи Неймана с предельным условием

$$\left(\frac{\partial u(N)}{\partial n}\right)_i = f(N) \tag{127}$$

ищем в виде потенциала простого слоя:

$$u(M)=\iint\limits_S \frac{\mu(N)}{r}\,dS. \tag{128}$$

Пользуясь первой из формул (49), приходим к интегральному уравнению, равносильному поставленной задаче:

$$f(N_0)=\iint\limits_S \mu(N)\frac{\cos(\mathbf{r}_0,\mathbf{n}_0)}{r_0^2}\,dS+2\pi\mu(N_0).$$

Это уравнение может быть также записано в виде

$$\mu(N_0)=\frac{1}{2\pi}f(N_0)-\iint\limits_S \mu(N)K_1(N_0;\,N)\,dS. \tag{129}$$

Совершенно так же, используя вторые из формул (42) и (49), мы получим для внешней задачи Дирихле и внешней задачи Неймана при предельных условиях

$$(u)_e|_S=f(N); \tag{130_1}$$

$$\left(\frac{\partial u(N)}{\partial n}\right)_e=f(N) \tag{130_2}$$

интегральные уравнения

$$\mu(N_0)=-\frac{1}{2\pi}f(N_0)+\iint\limits_S \mu(N)\frac{\cos(\mathbf{r}_0,\mathbf{n})}{r_0^2}\,dS, \tag{131_1}$$

$$\mu(N_0)=-\frac{1}{2\pi}f(N_0)+\iint\limits_S \mu(N)\frac{\cos(\mathbf{r}_0,\mathbf{n}_0)}{2\pi r_0^2}\,dS, \tag{131_2}$$

причем, как и выше, решение задачи Дирихле ищется в виде (123), а решение задачи Неймана — в виде (128). Напишем уравнения с параметром:

$$\mu(N_0)=\varphi(N_0)+\lambda\iint\limits_S \mu(N)K(N_0;\,N)\,dS, \tag{132}$$

$$\mu(N_0)=\varphi(N_0)+\lambda\iint\limits_S \mu(N)K_1(N_0;\,N)\,dS. \tag{133}$$

Уравнение (132) при $\lambda=1$ и $\varphi(N_0)=\frac{1}{2\pi}f(N_0)$ соответствует внутренней задаче Дирихле, а при $\lambda=-1$ и $\varphi(N_0)=-\frac{1}{2\pi}f(N_0)$ — внешней задаче Дирихле. Уравнение (133) при $\lambda=1$ и $\varphi(N_0)=-\frac{1}{2\pi}f(N_0)$ соответствует внешней задаче Неймана, и при $\lambda=-1$ и $\varphi(N_0)=\frac{1}{2\pi}f(N_0)$ — внутренней задаче Неймана. Если S есть поверхность Ляпунова и в условии

(3) $\alpha = 1$, то для ядра интегрального уравнения на основании результатов из [94] мы получаем оценку

$$|K(N_0;\ N)| \leqslant \frac{C}{r}, \tag{134}$$

и мы можем считать, что для уравнений (132) и (133) справедливы основные теоремы теории интегральных уравнений [IV$_1$; 10].

109. Исследование интегральных уравнений. Рассмотрим однородное уравнение:

$$\mu(N_0) = \lambda \iint\limits_S \mu(N) K(N_0;\ N)\, dS. \tag{135}$$

Его исследование проводится совсем просто в случае выпуклой поверхности. При этом $\cos(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}) \geqslant 0$ и $K(N_0;\ N) \leqslant 0$. Положим, что $\mu(N)$ есть решение уравнения (135), отличное от нуля, и пусть N_0 есть та точка, в которой $|\mu(N)|$ имеет наибольшее значение. Если $\mu(N)$ не есть постоянная, то мы получим

$$|\mu(N_0)| < |\lambda|\,|\mu(N_0)| \iint\limits_S \frac{\cos(\mathbf{r}_0,\ \mathbf{n})}{2\pi r_0^2}\, dS,$$

или, в силу (26),

$$|\mu(N_0)| < |\lambda|\,|\mu(N_0)| \qquad (\mu(N_0) \neq 0),$$

откуда $|\lambda| > 1$. Если в формуле (135) мы положим, что $\mu(N)$ есть постоянная, отличная от нуля, то, пользуясь опять формулой (26), мы получим $\lambda = -1$.

Таким образом, мы получаем:

Если S — выпуклая поверхность, то $\lambda = 1$ не есть собственное значение уравнения (135), а $\lambda = -1$ есть собственное значение с рангом единица, соответствующая собственная функция $\mu(N) = \text{const}$. Следовательно, мы можем утверждать, что для уравнения (133) $\lambda = 1$ также не есть собственное значение, а $\lambda = -1$ есть собственное значение ранга единица.

Покажем теперь, что эти же результаты будут иметь место и для любой поверхности Ляпунова при $\alpha = 1$, причем мы используем результаты из [102], основанные на возможности построения параллельных поверхностей. Будем исходить сейчас из уравнения (133) и рассмотрим соответствующее однородное уравнение при $\lambda = 1$:

$$\mu(N_0) = \iint\limits_S \mu(N) K_1(N_0;\ N)\, dS. \tag{136}$$

Пусть $\mu_0(N)$ — непрерывное решение этого уравнения. Нам надо показать, что $\mu_0(N) \equiv 0$. Потенциал простого слоя с плотностью $\mu_0(N)$ даст нам функцию $u_0(M)$, гармоническую в D_i

и D_e, непрерывную во всем пространстве, у которой предельные значения нормальной производной $\left(\frac{\partial u_0(N)}{\partial n}\right)_e$ на S равны нулю. Последнее следует из того, что $\mu_0(N)$ по условию удовлетворяет уравнению (136). К потенциалу простого слоя $u_0(N)$ применима формула (94), из которой следует, что $u_0(N)$ есть постоянная в D_e. На бесконечности потенциал простого слоя равен нулю, и, следовательно, $u_0 = 0$ в D_e, и, в частности, на S. При этом гармоническая функция $u_0(M) = 0$ и внутри S, т. е. $u_0(M) \equiv 0$ во всем пространстве. Принимая во внимание (54), получим:

$$\mu_0(N) = \frac{1}{4\pi}\left[\left(\frac{\partial u_0(N)}{\partial n}\right)_i - \left(\frac{\partial u_0(N)}{\partial n}\right)_e\right] \equiv 0 \quad (\text{на } S),$$

что и требовалось доказать. Таким образом, можем утверждать, что $\lambda = 1$ не есть собственное значение уравнений (132) и (133). Однородное уравнение (135) при $\lambda = -1$ имеет, в силу (26), решение, равное произвольной постоянной, т. е. $\lambda = -1$ есть собственное значение уравнений (132) и (133). Покажем, что его ранг равен единице. Достаточно показать, что однородное уравнение (133) при $\lambda = -1$:

$$\mu(N_0) = -\iint_S \mu(N) K_1(N_0; N)\, dS \tag{137}$$

имеет, с точностью до произвольного постоянного множителя, только одну собственную функцию.

Пусть $\mu_1(N)$ — собственная функция уравнения (137). Потенциал простого слоя с плотностью $\mu_1(N)$ дает функцию $u_1(M)$, гармоническую в D_i, для которой предел $\left(\frac{\partial u_1(N)}{\partial n}\right)_i$ на S равен нулю. Как и выше, формула (92) покажет, что $u_1(M)$ есть постоянная в D_i и на S, т. е. плотность $\mu_1(N)$ дает потенциал простого слоя, сохраняющий на S и внутри S постоянное значение. Иначе говоря, $\mu_1(N)$ есть электростатическая плотность.

Покажем, что интеграл

$$\iint_S \mu_1(N)\, dS, \tag{138}$$

дающий общее количество электричества, находящегося в равновесии на проводящей поверхности S, отличен от нуля. Как мы уже упоминали, u_1 сохраняет постоянное значение в D, и формула (54) дает

$$\mu_1(N) = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial u_1(N)}{\partial n}\right)_e. \tag{139}$$

Если бы интеграл (138) был равен нулю, то мы имели бы

$$\iint_S \left(\frac{\partial u_1(N)}{\partial n}\right)_e dS = 0. \tag{140}$$

Применим к u_1 формулу (94). На S функция u_1 сохраняет постоянное значение, и интеграл (140) равен нулю. Отсюда следует, что обе части формулы (94) равны нулю при $u = u_1$, т. е. u_1 равна постоянной в D_e, и формула (139) покажет нам, что $\mu_1(N)$ равно нулю на S, а это противоречит основному предположению, что $\mu_1(N)$ есть решение однородного уравнения (137), не равное тождественно нулю. Таким образом интеграл (138) действительно отличен от нуля. Умножая $\mu_1(N)$ на постоянный множитель, мы можем придать интегралу (138) любое наперед заданное значение.

Покажем теперь, что уравнение (137) имеет с точностью до постоянного множителя только одно решение. Пусть $\mu_2(N)$ — какое-либо решение этого уравнения, отличное от нулевого. Существует такая постоянная c, что интеграл (138) при замене $\mu_1(N)$ на $\mu_2(N) - c\mu_1(N)$ равен нулю. При этом $\mu_2(N) - c\mu_1(N)$ есть также решение уравнения (137), и, в силу только что доказанного, $\mu_2(N) - c\mu_1(N) \equiv 0$ на S, откуда $\mu_2(N) = c\mu_1(N)$, т. е. формула $\mu(N) = c\mu_1(N)$ при произвольном постоянном c дает все решения уравнения (137).

Из приведенных рассуждений следует, что уравнения (132) и (133) для $\lambda = 1$ при любом свободном члене имеют определенное решение, и мы получаем, таким образом, решение внутренней задачи Дирихле и внешней задачи Неймана.

Обратимся теперь к уравнению (133) при $\lambda = -1$. Оно дает плотность потенциала (128), решающего внутреннюю задачу Неймана. Для существования решения необходимо и достаточно, чтобы свободный член интегрального уравнения был ортогональным к собственной функции однородного союзного уравнения, т. е. к постоянной. Это приводит к условию:

$$\iint_S f(N)\, dS = 0, \tag{141}$$

необходимость которого мы видели уже и выше. При сделанных предположениях оно оказывается и достаточным. Если это условие выполнено, то решение неоднородного уравнения определено с точностью до слагаемого, являющегося решением однородного уравнения (137), т. е. с точностью до слагаемого, которое является электростатической плотностью. Подстановка этого слагаемого в потенциал простого слоя приводит к постоянному потенциалу, а постоянное слагаемое не играет существенной роли при решении внутренней задачи Неймана.

Рассмотрим теперь уравнение (132) при $\lambda=-1$, что соответствует внешней задаче Дирихле. Для разрешимости уравнения необходимо и достаточно, чтобы свободный член уравнения был ортогональным к решению однородного уравнения (137), т. е. к электростатической плотности $\mu_1(N)$:

$$\iint_S \mu_1(N) f(N)\, dS = 0. \tag{142}$$

Это дополнительное условие не связано с существом задачи, а происходит лишь от того, что мы ищем решение внешней задачи Дирихле в виде потенциала двойного слоя. Из вида такого потенциала непосредственно вытекает, что он обращается в нуль при $r \to \infty$ порядка $1/r^2$. Такое усиленное обращение в нуль в бесконечно далекой точке не является необходимым при решении внешней задачи Дирихле, и именно это обстоятельство и вызывает наличие дополнительного условия (142). Покажем, что можно решить внешнюю задачу Дирихле без всякого дополнительного условия, налагаемого на $f(N)$, при помощи суммы потенциалов простого и двойного слоя. Действительно, пусть $\mu_1(N)$ — электростатическая плотность, для которой интеграл (138) равен единице, и $u_1(M)$ — соответствующий ей потенциал простого слоя. Потенциал $u_1(M)$ имеет на S предельные значения, равные некоторой постоянной k, отличной от нуля. Выберем постоянную c так, чтобы имело место равенство

$$\iint_S \mu_1(N)\,[f(N)-c]\, dS = 0,$$

т. е. положим

$$c = \iint_S \mu_1(N) f(N)\, dS.$$

Мы можем, согласно предыдущему, образовать потенциал двойного слоя $w(M)$, решающий внешнюю задачу Дирихле с предельными значениями $f(N)-c$. При этом сумма

$$w(M) + \frac{c}{k} u_1(M)$$

будет решать внешнюю задачу Дирихле с заданными предельными значениями $f(N)$.

Замечание. В настоящем параграфе мы предполагали, что область, для которой мы решаем предельную задачу, ограничена одной поверхностью S. Результаты будут иными, если конечная область D ограничена извне поверхностью S_0 и изнутри поверхностями S_k $(k=1, 2, \ldots, m)$. Будем для этой области искать решение задачи Дирихле в виде потенциала двойного слоя. Для плотности мы по прежнему получим уравнение (132) при $\lambda = 1$, причем S будет полной границей D, т. е. S будет состоять из поверхностей S_0 и S_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$, и на поверхностях S_k нормаль должна быть направлена вовне D, т. е. внутрь S_k $(k = 1, \ldots, m)$. Мы имеем, таким образом, внутреннюю задачу Дирихле. Уравнению (133) при $\lambda = 1$ соответствует внешняя задача Неймана. В данном случае она состоит в нахождении функции, гармонической внутри каждой из поверхностей S_k и вне S_0, причем заданы значения ее нормальной производной на этих поверхностях. На бесконечности, как всегда, функция должна быть регулярной.

Если заданные значения нормальной производной равны нулю, то имеем однородное уравнение (133) при $\lambda = 1$. Как мы только что видели, это уравнение имеет только нулевое решение, если D ограничена одной поверхностью. В данном случае это будет не так. Действительно, представим себе все поверхности проводящими. На поверхности S_1 поместим единицу положительного электричества, а поверхность S_0 соединим с землей и положим, что на всех поверхностях установился электростатический режим. На поверхностях S_l $(l = 2, \ldots, m)$ мы будем иметь индуцированное распределение электричества с общим зарядом нуль.

Пусть $\mu_1(N)$ — плотность полученного электростатического распределения на S. Потенциал простого слоя с такой плотностью будет, очевидно, постоянным внутри каждой поверхности S_k и равным нулю вне S_0, т. е. этот потенциал будет решением внешней задачи Неймана с однородным предельным условием. Иначе говоря, $\mu_1(N)$ будет удовлетворять однородному уравнению (133) при $\lambda = 1$. Помещая единицу положительного электричества последовательно на каждой из поверхностей S_k, мы будем иметь m линейно-независимых решений $\mu_k(N)$ однородного уравнения (133) при $\lambda = 1$ Можно показать, что эти функции $\mu_k(N)$ составляют полную систему линейно-независимых решений упомянутого однородного уравнения. Мы видим, таким образом, что в рассматриваемом случае $\lambda = 1$ есть собственное значение уравнений (132) и (133). Для того чтобы уравнение (132) было разрешимо, необходимо и достаточно, чтобы $f(N)$ удовлетворяло m условиям:

$$\iint_S f(N)\,\mu_k(N)\,dS = 0.$$

Если хоть одно из этих условий не выполнено, то внутренняя задача Дирихле не разрешима в виде потенциала двойного слоя. Можно показать, что она разрешима в виде суммы потенциалов двойного и простого слоев, аналогично тому, что мы имели выше для внешней задачи Дирихле. Подробное рассмотрение задач теории потенциала в случае границы, состоящей из нескольких поверхностей, имеется в книге Н. М. Гюнтера «La théorie du potentiel...» (Paris, 1934).

Мы доказали раньше единственность решения задачи Неймана при условии, что искомая гармоническая функция непрерывна вплоть до S. Из приведенных выше рассуждений следует, что это единственное решение задачи Неймана представимо потенциалом простого слоя.

110. Сводка результатов, касающихся решений предельных задач. Сформулируем полученные выше результаты, относящиеся к решению задач Дирихле и Неймана, и приведем некоторые новые результаты, относящиеся к этому вопросу. Для любой функции $f(N)$, непрерывной на S, уравнение (125) определяет непрерывную плотность $\mu(N)$ так, что потенциал двойного слоя (123) дает решение внутренней задачи Дирихле при предельном условии (124). Сопряженное интегральное уравнение (131_2) дает непрерывную плотность $\mu(N)$ такую, что потенциал простого слоя (128) решает внешнюю задачу Неймана при предельном условии (130_2). Если $f(N)$ удовлетворяет условию (141), то уравнение (129) определяет плотность $\mu(N)$ такую, что потенциал простого слоя решает внутреннюю задачу Неймана.

Сделаем важные замечания по поводу решения задач Неймана. В уравнениях (129) и (131_2) интегральное слагаемое правой части удовлетворяет условию Липшица [99]. Если функция $f(N)$ также удовлетворяет такому условию, то из упомянутых уравнений следует, что и $\mu(N)$ удовлетворяет такому же условию. Но тогда из [100] следует, что при этом соответствующий потенциал простого слоя, т. е. *решение задачи Неймана не только само непрерывно вплоть до S, но и имеет непрерывные вплоть до S частные производные первого порядка.*

Вернемся теперь к условию (141) разрешимости внутренней задачи Неймана. Оно было нами получено в предположении, что решение $u(M)$ имеет правильную нормальную производную. Тем самым $u(M)$ должно быть непрерывно вплоть до S [102]. Покажем, что из одной непрерывности $u(M)$ вплоть до S вытекает необходимость условия (141). Положим, что $f(N)$ не удовлетворяет этому условию, но все же существует решение задачи Неймана $u(M)$, непрерывное вплоть до S, и приведем это к противоречию.

Согласно предположению, мы имеем

$$\iint\limits_S f(N)\,dS \neq 0,$$

и можно подобрать такую постоянную C, отличную от нуля, что

$$\iint\limits_S [f(N) - C]\,dS = 0.$$

В силу сказанного выше, мы можем построить решение $u_1(M)$ внутренней задачи Неймана с предельным условием

$$\left(\frac{\partial u_1(N)}{\partial n}\right)_i = f(N) - C$$

в виде потенциала простого слоя с непрерывной плотностью, причем $u_1(M)$ — непрерывно вплоть до S. Разность $u_2(M) = u(M) - u_1(M)$ также непрерывна вплоть до S и удовлетворяет предельному условию

$$\left(\frac{\partial u_2(N)}{\partial n}\right)_i = C.$$

Изменяя, если это надо, знак у $u_2(M)$, мы можем считать, что $C > 0$. Функция $u_2(M)$ достигает на S своего наименьшего значения в некоторой точке N_0, а это находится в противоречии с тем, что при стремлении M к N_0 по нормали $\frac{\partial u(M)}{\partial n}$ стремится к положительной величине C. Таким образом, необходимость условия (141) для разрешимости внутренней задачи Неймана вытекает из непрерывности искомого решения вплоть до S.

Выше мы указали свойства производных решения задачи Неймана при приближении к S. Аналогичное исследование решения задачи Дирихле более трудно в связи с тем, что это решение представлено в виде потенциала двойного слоя. Исследование потенциала двойного слоя было выполнено в упомянутой выше работе А. М. Ляпунова, а также в его работе «О фундаментальном принципе Неймана в задаче Дирихле» (1902).

Перечислим результаты, полученные А. М. Ляпуновым в отношении потенциала двойного слоя и решения задачи Дирихле.

1. Значение в точках поверхности S потенциала двойного слоя $w(N)$ с непрерывной плотностью представляет собою функцию, удовлетворяющую условию Липшица с любым показателем, меньшим единицы.

2. Если потенциал двойного слоя с непрерывной плотностью имеет правильную нормальную производную на S с одной стороны этой поверхности, то он имеет правильную нормальную производную и с другой стороны поверхности, и эти нормальные производные одинаковы во всех точках S.

3. Для того чтобы решение внутренней или внешней задачи Дирихле с непрерывными предельными значениями $f(N)$ на S имело правильную нормальную производную на S, необходимо и достаточно, чтобы потенциал двойного слоя с плотностью $f(N)$ имел правильную нормальную производную на S. Эта теорема доказана в предположении, что число α, входящее в условие (3), равно единице.

4. Пусть $F(x, y, z)$ — однозначная, непрерывная с производными двух первых порядков функция, определенная в некоторой окрестности поверхности S, и пусть $f(N)$ — значение $F(x, y, z)$ на S. При этом производная по любому фиксированному направлению от функции $u(M)$, гармонической в D_i или D_e и принимающей на S значения $f(N)$, непрерывна вплоть до S. Теорема эта доказана без предположения $\alpha = 1$.

А. М. Ляпуновым установлено также достаточное условие для того, чтобы потенциал двойного слоя имел правильную нормальную производную. Приведем его. Пусть N_0 — какая-либо точка S, которую мы берем за начало полярных координат (ρ, θ) в касательной плоскости к S в точке N_0. Значения плотности $\mu(N)$ в точках N, близких к N_0, можно рассматривать, проектируя N на касательную плоскость как функцию ρ и θ. Обозначим

$$\bar{\mu}(\rho)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mu(\rho,\theta)\,d\theta.$$

Упомянутое выше условие сводится к следующему. Существуют два положительных числа b и β таких, что при любом выборе точки N_0 имеет место неравенство

$$|\bar{\mu}(\rho)-\mu(N_0)|\leqslant b\rho^{\beta+1}.$$

Эта теорема доказана Ляпуновым в предположении $\alpha=1$

Дальнейшие результаты в теории потенциала объемных масс, простого и двойного слоя и в отношении исследования решения задачи Дирихле можно найти в упомянутой выше книге Н М Гюнтера и в заметке: Смолицкий Х Л. Оценки производных фундаментальных функций. — ДАН СССР, 1950, **24**, № 2.

111. Предельные задачи на плоскости. Задачи Дирихле и Неймана на плоскости рассматриваются совершенно так же, как и в [108]. Решение задачи Дирихле ищется в виде потенциала двойного слоя:

$$u(M)=\int_l \mu(N)\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}\,ds, \tag{144}$$

и задачи Неймана в виде потенциала простого слоя:

$$u(M)=\int_l \mu(N)\lg\frac{1}{r}\,ds. \tag{145}$$

Для плотности получаются интегральные уравнения:

$$\mu(N_0)=\varphi(N_0)+\lambda\int_l \mu(N)K(N_0;\,N)\,ds, \tag{146}$$

$$\mu(N_0)=\varphi(N_0)+\lambda\int_l \mu(N)K_1(N_0;\,N)\,ds, \tag{147}$$

где

$$K(N_0;\,N)=-\frac{\cos(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{n})}{\pi r_0};\qquad K_1(N_0;\,N)=\frac{\cos(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{n}_0)}{\pi r_0}\ (r_0=|N_0N|).$$

Уравнение (146) при $\lambda=1$ и $\varphi(N_0)=\frac{1}{\pi}f(N_0)$ соответствует внутренней задаче Дирихле, а при $\lambda=-1$ и $\varphi(N_0)=-\frac{1}{\pi}f(N_0)$ — внешней задаче Дирихле. Уравнение (147) при $\lambda=1$ и $\varphi(N_0)=-\frac{1}{\pi}f(N_0)$ соответствует внешней задаче Неймана, а при $\lambda=-1$ и $\varphi(N_0)=\frac{1}{\pi}f(N_0)$ — внутренней задаче Неймана. Во всех случаях $\varphi(N_0)$ — функция, входящая в предельное условие.

Уравнение (146) можно записать в виде

$$\mu(s_0) = \varphi(s_0) + \lambda \int_0^{l_0} \mu(s) K(s_0, s)\, ds,$$

где s и s_0 — длины дуг LN и LN_0 контура l, отсчитываемые от какой-либо фиксированной точки L в определенном направлении, а l_0 — длина контура l. Аналогично записываем и уравнение (147). При сделанных в [101] предположениях о контуре l ядра $K(s_0; s)$ и $K_1(s_0; s)$ — непрерывные ядра.

Как и в [109], $\lambda = 1$ не есть собственное значение, а $\lambda = -1$ собственное значение первого ранга При этом для уравнения (146) собственная функция есть произвольная постоянная, а для уравнения (147) это — электростатическая плотность $\mu_0(N)$, при которой потенциал простого слоя (145) равен постоянной на l и внутри l.

Решение внутренних задач Дирихле и Неймана получается так же, как и в трехмерном случае. Остановимся на внешних задачах. Решение внешней задачи Неймана связано с уравнением (147) при $\lambda = 1$. При этом функция $\varphi(N_0)$ должна удовлетворять условию [105]:

$$\int_0^l \varphi(N_0)\, ds_0 = 0.$$

Интегрируя обе части (147) при $\lambda = 1$ по точке N_0, получим

$$\int_0^l \mu(N_0)\, ds = 0,$$

и, следовательно, функция (145), где $\mu(N)$ — решение уравнения (147) при $\lambda = 1$, будет гармонической функцией, регулярной на бесконечности [105], и, тем самым, будет давать решение внешней задачи Неймана.

Переходим к внешней задаче Дирихле. Если $f(N)$ удовлетворяет условию

$$\int_l \mu_0(N) f(N)\, ds = 0,$$

то подстановка решения уравнения (146) при $\lambda = -1$ в формулу (144) дает решение задачи.

Если это условие не выполнено, то берем такую постоянную a, чтобы иметь (ср. [109])

$$\int_l \mu_0(N)[f(N) - a]\, ds = 0,$$

и, как и выше, получаем по формуле (144) решение задачи $w(M)$ при предельных значениях $f(N)-a$, и сумма $w(M)+a$ будет искомым решением задачи с предельными значениями $f(N)$. Добавление постоянной связано с тем, что формула (144) дает гармоническую функцию, равную нулю на бесконечности, а в плоском случае решение внешней задачи не требует обращения в нуль на бесконечности.

112. Интегральное уравнение сферических функций. Рассмотрим однородное уравнение (133) для случая сферы Σ с центром в начале и радиусом единица. В данном случае направление n_0 есть направление радиуса $\overline{ON_0}$ и $\cos(r_0, n_0) = -\frac{r_0}{2}$, так что однородное уравнение (133) будет иметь вид

$$\mu(N_0) = -\frac{\lambda}{4\pi}\iint_{\Sigma}\frac{\mu(N)}{r_0}\,dS. \tag{148}$$

Мы пришли бы к тому же самому уравнению, если бы исходили и из уравнения (132). Интеграл, стоящий справа, представляет собою значение в точке $N_0(\theta_0, \varphi_0)$ потенциала сферического слоя с плотностью $-\lambda\mu(N):4\pi = -\lambda\mu(\theta, \varphi):4\pi$.

Рассмотрим сначала этот потенциал в точке $M(\rho, \theta', \varphi')$, находящейся внутри сферы. Обозначая через r расстояние $|MN|$ и через ρ $|OM|$, будем иметь разложение [III₂; 133]

$$\frac{1}{r} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\cos\gamma)\,\rho^k \qquad (\rho < 1), \tag{149}$$

где $P_k(x)$ — полиномы Лежандра и γ — угол, образованный радиусами-векторами $\overline{OM}$ и $\overline{ON}$. Возьмем за $\mu(\theta, \varphi)$ некоторую сферическую функцию порядка n:

$$\mu(\theta, \varphi) = Y_n(\theta, \varphi).$$

Пользуясь написанным выше разложением, равномерно сходящимся при $\rho < 1$, мы получим

$$\iint_{\Sigma} Y_n(\theta, \varphi)\frac{1}{r}\,d\sigma = \frac{4\pi}{2n+1}Y_n(\theta', \varphi')\,\rho^n,$$

что непосредственно вытекает из следующих формул [III₂; 134]:

$$\iint_{\Sigma} Y_n(\theta, \varphi)\,P_m(\cos\gamma)\,dS = 0 \quad \text{при} \quad m \neq n$$

$$\iint_{\Sigma} Y_n(\theta, \varphi)\,P_n(\cos\gamma)\,dS = \frac{4\pi}{2n+1}Y_n(\theta', \varphi').$$

При совпадении точки M с точкой N_0, лежащей на сфере, мы будем иметь

$$\iint\limits_{\Sigma} Y_n(\theta, \varphi) \frac{1}{r_0} d\sigma = \frac{4\pi}{2n+1} Y_n(\theta_0, \varphi_0).$$

Отсюда видно, что $\lambda_n = -(2n+1)$ суть собственные значения уравнения (148), и всякому такому собственному значению соответствуют $(2n+1)$ собственных функций, а именно этими собственными функциями являются сферические функции порядка n. Первому собственному значению $\lambda_0 = -1$ соответствует собственная функция, равная постоянной (электростатическая плотность для случая сферы).

Покажем теперь, что уравнение (148) не имеет других собственных значений и что всякому собственному значению λ_n не соответствуют никакие другие собственные функции, кроме указанных выше сферических функций. Пусть λ' есть некоторое собственное значение уравнения (148), отличное от указанных выше, а $\mu'(N)$ — соответствующая собственная функция. Ядро уравнений (148) есть симметричная функция N и N_0, а потому $\mu'(N)$ должна быть ортогональна ко всем сферическим функциям и, в частности, к $P_k(\cos\gamma)$:

$$\iint\limits_{\Sigma} \mu'(\theta, \varphi) P_k(\cos\gamma) d\sigma = 0.$$

При этом из разложения (149) вытекает, что потенциал сферического слоя с плотностью $\mu'(N)$ равен нулю везде внутри сферы, а следовательно, и везде на сфере. Но тогда интегральное уравнение (148) покажет нам, что $\mu'(N)$ тождественно равно нулю на всей сфере, что не должно иметь места для собственной функции. Рассмотрим теперь собственное значение λ_n. Если бы ему соответствовала какая-нибудь собственная функция, которая не является сферической функцией порядка n, то мы могли бы считать, что эта собственная функция ортогональна ко всем сферическим функциям и, повторяя предыдущие рассуждения, убедились бы, что эта функция должна равняться тождественно нулю на всей поверхности сферы.

Таким образом, *сферические функции представляют собою полную совокупность всех собственных функций интегрального уравнения* (148).

113. Тепловое равновесие излучающего тела. Рассмотрим третью предельную задачу для уравнения Лапласа.

В случае установившегося потока тепла температура $u(M)$ внутри тела должна удовлетворять уравнению Лапласа, а на границе S должно быть выполнено условие

$$\frac{\partial u}{\partial n} + h(u - u_0) = 0,$$

где h — коэффициент внешней теплопроводности и u_0 — температура внешней среды, соприкасающейся с телом. Обе эти величины мы можем считать функциями точки на поверхности S, и приходим, таким образом, к задаче нахождения гармонической функции внутри поверхности S, удовлетворяющей на этой поверхности предельному условию вида:

$$\frac{\partial u(N)}{\partial n}+p(N)u(N)=f(N), \tag{150}$$

где $p(N)$ и $f(N)$ заданные на S функции и $p(N)>0$. Будем искать решение этой предельной задачи в виде потенциала простого слоя. Предельное условие (150) приведет к следующему интегральному уравнению для плотности:

$$\iint_S \mu(N)\frac{\cos(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{n}_0)}{r_0^2}\,dS+2\pi\mu(N_0)+p(N_0)\iint_S \mu(N)\frac{1}{r_0}\,dS=f(N_0),$$

или

$$\mu(N_0)=\frac{1}{2\pi}f(N_0)-\iint_S \mu(N)\left[\frac{p(N_0)}{2\pi r_0}+\frac{\cos(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{n}_0)}{2\pi r_0^2}\right]dS.$$

Покажем, что при сделанном выше предположении однородное уравнение не может иметь решения, отличного от нулевого. Действительно, мы видели выше [104], что при $p(N)>0$ гармоническая функция, представимая потенциалом простого слоя и тем самым имеющая правильную нормальную производную и удовлетворяющая однородному предельному условию

$$\frac{\partial u(N)}{\partial n}+p(N)u(N)=0, \tag{151}$$

тождественно равна нулю внутри S. Положим, что однородное уравнение имеет решение $\mu(N)$. Потенциал простого слоя с плотностью $\mu(N)$ удовлетворяет однородному предельному условию (151) и, следовательно, равен нулю внутри S. Поскольку он равен нулю и на бесконечности, мы, как и раньше, заключаем отсюда, что он равен нулю во всем пространстве и что $\mu(N)\equiv 0$, т. е., действительно, однородное уравнение не имеет решений, а потому неоднородное уравнение разрешимо при любом выборе свободного члена $f(N_0)$. Предположим, что поверхность S есть сфера Σ единичного радиуса и что функция $p(N)$ есть положительная постоянная h. В этом случае, в силу $r_0=-2\cos(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{n}_0)$, мы получаем интегральное уравнение

$$\mu(N_0)=\frac{1-2h}{4\pi}\iint_\Sigma \mu(N)\frac{1}{r_0}\,d\sigma+\frac{1}{2\pi}f(N_0),$$

которое мы разбирали в предыдущем параграфе. Если считать h за параметр, то собственные значения этого интегрального уравнения определятся из уравнения $1-2h=2n+1$, т. е. собственные значения будут $h=0, -1, -2, \ldots$, а соответствующие им собственные функции будут сферические функции. Совершенно аналогичным образом можно рассмотреть третью предельную задачу и для случая плоскости.

114. Метод Шварца. Опишем еще один метод решения задачи Дирихле. Положим, что мы умеем решить задачу Дирихле для областей B_1 и B_2 при любых непрерывных предельных значениях, причем эти области имеют общую часть O, как это указано на рис. 8. Метод Шварца дает возможность решить задачу Дирихле для области $B = B_1 + B_2$, получаемой объединением областей B_1 и B_2. Мы проводим рассуждения в плоском случае, но они останутся совершенно такими же и в случае трехмерного пространства. Контуры областей B_1 и B_2 точками их пересечения делятся на части α_1 и β_1 для B_1 и α_2 и β_2 для B_2. Пусть на контуре $l = \alpha_1 + \alpha_2$ области B нам задана некоторая непрерывная функция $\omega(N)$.

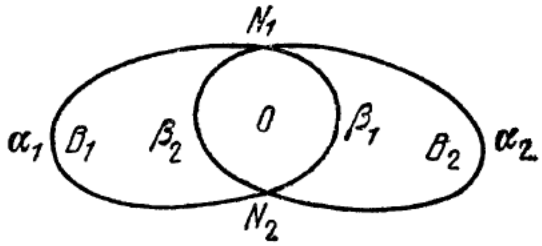

Рис 8.

Вычисления в методе Шварца проводятся следующим образом. Функцию $\omega(N)$, заданную, в частности, на α_1, продолжаем каким-нибудь образом на β_1 с сохранением ее непрерывности. Пусть $\omega_1(N)$ — полученная таким образом на β_1 функция. Решая задачу Дирихле для B_1, строим в B_1 гармоническую функцию $u_1(M)$ со следующими предельными значениями:

$$u_1(N) = \begin{cases} \omega(N) & \text{на} \quad \alpha_1, \\ \omega_1(N) & \text{на} \quad \beta_1. \end{cases}$$

Значения этой функции на β_2 вместе со значениями $\omega(N)$ на α_2 принимаем за предельные значения новой гармонической функции $v_1(M)$ в B_2:

$$v_1(M) = \begin{cases} \omega(N) & \text{на} \quad \alpha_2, \\ u_1(N) & \text{на} \quad \beta_2. \end{cases}$$

Строим теперь в B_1 гармоническую функцию $u_2(M)$ с предельными значениями:

$$u_2(N) = \begin{cases} \omega(N) & \text{на} \quad \alpha_1, \\ v_1(N) & \text{на} \quad \beta_1. \end{cases}$$

Дальше строим в B_2 гармоническую функцию $v_2(M)$ с предельными значениями:

$$v_2(N) = \begin{cases} \omega(N) & \text{на} \quad \alpha_2, \\ u_2(N) & \text{на} \quad \beta_2 \end{cases}$$

и т. д. Вообще

$$\Delta u_n(M)=0 \text{ в } B_1 \text{ и } u_n(N)=\begin{cases}\omega(N) & \text{на } \alpha_1,\\ v_{n-1}(N) & \text{на } \beta_1,\end{cases}$$
$$\Delta v_n(M)=0 \text{ в } B_2 \text{ и } v_n(N)=\begin{cases}\omega(N) & \text{на } \alpha_2,\\ u_n(N) & \text{на } \beta_2.\end{cases} \tag{152}$$

Докажем теперь, что существует $\lim u_n(M)$ в B_1 и $\lim v_n(M)$ в B_2 и что в общей части областей B_1 и B_2 эти пределы совпадают. Для этого используем одну лемму, которую сейчас и формулируем. Упомянем сначала о предположениях, которые мы делаем относительно контуров областей. Мы предполагаем, что контуры областей B_1 и B_2 состоят из конечного числа кусков, имеющих непрерывно меняющуюся касательную. Таким образом, возможно конечное число угловых точек на контуре. Кроме того, мы предположим, что в точках пересечения N_1 и N_2 (рис. 8) оба контура имеют касательную, и что эти касательные в N_1 и N_2 образуют между собою угол, отличный от нуля. Формулируем теперь лемму: *если контуры областей B_1 и B_2 удовлетворяют указанным условиям и $w(M)$ есть функция, гармоническая внутри B_1, непрерывная в замкнутой области, принимающая на α_1 значения нуль и на β_1 удовлетворяющая условию $|w(N)|\leqslant A$, то существует положительная постоянная $q<1$, зависящая только от областей B_1 и B_2, но не от выбора $w(M)$, такая, что $|w(M)|\leqslant qA$ на β_2.* Аналогичное утверждение будет верно, если мы будем исходить из B_2 и оценивать $w(M)$ на β_1. Мы можем при этом считать, что число q одно и то же в обоих случаях. Откладывая доказательство леммы до следующего параграфа, применим ее для доказательства сходимости процесса Шварца.

Согласно построению:

$$u_{n+1}(N)-u_n(N)=\begin{cases}0 & \text{на } \alpha_1,\\ v_n(N)-v_{n-1}(N) & \text{на } \beta_1,\end{cases}$$
$$v_n(N)-v_{n-1}(N)=\begin{cases}0 & \text{на } \alpha_2,\\ u_n(N)-u_{n-1}(N) & \text{на } \beta_2.\end{cases} \tag{153}$$

Введем следующие обозначения:

$$M_n=\max|u_{n+1}(N)-u_n(N)|=\max|v_n(N)-v_{n-1}(N)| \text{ на } \beta_1,$$
$$M_n'=\max|v_{n+1}(N)-v_n(N)|=\max|u_{n+1}(N)-u_n(N)| \text{ на } \beta_2.$$

Принимая во внимание предельные условия (153) и лемму, получим $M_n'\leqslant qM_n$ и $M_n\leqslant qM_{n-1}'$. Отсюда следует, что $M_n\leqslant q^2M_{n-1}$ $(n=2, 3, \ldots)$, т. е. $M_n\leqslant q^{2(n-1)}M_1$.

Составим ряд

$$u_1(M)+\sum_{n=1}^{\infty}[u_{n+1}(M)-u_n(M)]. \tag{154}$$

Его члены, начиная со второго, равны нулю на α_1 и имеют оценку $|u_{n+1}(N)-u_n(N)|\leqslant q^{2(n-1)}M_1$ на β_1. Таким образом, написанный ряд сходится абсолютно и равномерно на контуре B_1, а тем самым во всей замкнутой области. Его сумма $u(M)$ будет непрерывной в замкнутой области $\overline{B}_1$ и гармонической внутри B_1. Сумма первых членов ряда (154) есть $u_n(M)$, и мы можем, следовательно, утверждать, что $u_n(M)\to u(M)$ равномерно в замкнутой области. Совершенно так же докажем, что $v_n(M)\to v(M)$ равномерно в замкнутой области $\overline{B}_2$, где $v(M)$ — непрерывна в замкнутой области $\overline{B}_2$ и гармоническая внутри B_2. На основании (152)

$$u_n(N)=v_{n-1}(N) \text{ на } \beta_1 \quad \text{и} \quad v_n(N)=u_n(N) \text{ на } \beta_2.$$

Переходя к пределу, видим, что $u(N)$ и $v(N)$ совпадают на β_1 и β_2. Отсюда следует, что они совпадают и везде в общей части O областей B_1 и B_2. Таким образом, внутри $B=B_1+B_2$ функции $u(M)$ и $v(M)$ дают единую гармоническую функцию. В силу (152), эта гармоническая функция имеет заданные предельные значения $\omega(N)$ на контуре $l=\alpha_1+\alpha_2$, и, таким образом, метод Шварца действительно решает поставленную выше задачу.

115. Доказательство леммы. Образуем потенциал двойного слоя, распределенного вдоль дуги β_1 с плотностью единица:

$$F(M)=-\int_{\beta_1}\frac{\partial \lg\frac{1}{r}}{\partial n}\,ds. \tag{155}$$

Это есть угол, под которым видна дуга β_1 из точки M, причем мы считаем, что M принадлежит B_1. Функция (155), гармоническая внутри B_1, принимает непрерывные предельные значения во внутренних точках дуг α_1 и β_1 (рис. 9).

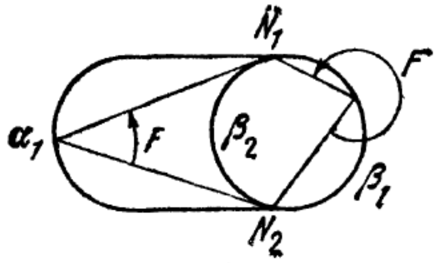

Рис. 9.

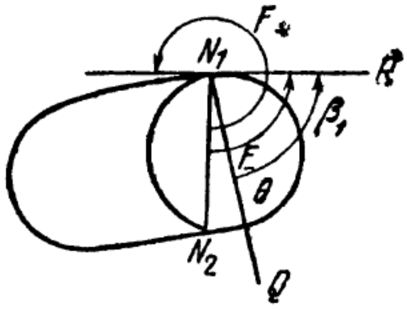

Рис. 10.

При приближении точки N контура к точке N_1 со стороны дуги α_1 и со стороны дуги β_1 мы будем иметь для упомянутых предельных значений $F(N)$ функции (155) различные пределы, которые обозначим $F_-(N_1)$ и $F_+(N_1)$.

Эти пределы суть углы, образованные секущей $\overline{N_1N_2}$ с различными направлениями касательной к контуру области B_1 в точке N_1 (рис. 10), причем мы имеем

$$F_+(N_1) - F_-(N_1) = \pi. \tag{156}$$

Если мы будем приближать точку M к N_1 вдоль какого-нибудь луча N_1Q, который образует угол θ с указанным на чертеже направлением касательной в точке, то функция (155) будет, как нетрудно видеть из чертежа, иметь предел: $F_+(N_1) - \theta$, который, на основании (156), может быть записан в виде

$$F_+(N_1) - \theta = \frac{\theta}{\pi} F_-(N_1) + \left(1 - \frac{\theta}{\pi}\right) F_+(N_1). \tag{157}$$

При приближении M к N_1 любым образом функция (155) может иметь различные предельные значения, но они должны содержаться между $F_-(N_1)$ и $F_+(N_1)$, и функция (155) будет ограниченной в окрестности N_1. Совершенно аналогичные результаты получатся и в точке N_2.

Определим на контуре $l = \alpha_1 + \beta_1$ функцию $f(N)$, равную нулю внутри α_1 и π внутри β_1. Обозначая, как и выше, через $F(N)$ предельные значения функции (155), внутри α_1 и β_1 образуем функцию $f_1(N) = F(N) - f(N)$. Нетрудно видеть, что она будет непрерывной на всем контуре $l = \alpha_1 + \beta_1$, включая точки N_1 и N_2, так как уменьшаемое и вычитаемое имеют в этих точках одинаковый скачок. Значение этой функции, например в точке N_1, будет равно $F_-(N_1)$. Пусть $F_1(M)$ — гармоническая в B_1 функция, имеющая на контуре непрерывные предельные значения $f_1(N)$. Построим гармоническую функцию

$$G(M) = \frac{1}{\pi}[F(M) - F_1(M)]. \tag{158}$$

Ее предельные значения внутри α_1 будут нуль и внутри β_1 — единица. Кроме того, в силу сказанного выше относительно $F(M)$, при приближении M к N_1 или N_2 предельные значения $G(M)$ должны обязательно принадлежать промежутку $[0, 1]$. В силу принципа максимума и минимума и все внутренние значения функции (158) будут находиться внутри этого промежутка, т. е. $0 < G(M) < 1$, если M внутри B_1. Положим, что θ_1 и θ_2 суть углы, образованные касательными к линии β_2 в точках N_1 и N_2 с касательными к контуру области B_1 в этих же точках. При приближении вдоль β_2 к точке N_1 функция $F(M)$ имеет, в силу (157), предел $[F_+(N_1) - \theta_1]$, а функция $F_1(M)$ с непрерывными предельными значениями $f_1(N)$ будет иметь предел $f_1(N_1) = F_-(N_1)$ и, в силу (156), функция (158) будет иметь предел $1 - \frac{\theta_1}{\pi}$. Точно так же в точке N_2 функция (158) будет иметь предел $1 - \frac{\theta_2}{\pi}$. Оба эти предела меньше единицы, а внутри области мы имеем $0 < G(M) < 1$. Отсюда непосредственно следует, что существует такое положительное число $q < 1$, что $G(M) \leqslant q$ на β_2.

После этих вспомогательных построений вернемся к функции $w(M)$, упомянутой в лемме. Заменяя эту функцию на $w(M):A$, можем считать, что число A, фигурирующее в лемме, равно единице, т. е. гармоническая функция $w(M)$, непрерывная в замкнутой области $\bar{B}_1$, имеет на α_1 предельные значения, равные нулю, и $|w(N)| \leqslant 1$ на β_1. В точках N_1 и N_2 предельные значения $w(M)$ равны, очевидно, нулю. Составим гармоническую функцию $H(M) = G(M) - w(M)$. Ее предельные значения внутри дуги α_1 равны нулю и внутри дуги β_1 неотрицательны, ибо внутри β_1 имеем $G(N) = 1$ и $|w(N)| \leqslant 1$. При приближении M к N_1 и N_2 предельные значения $H(M)$ должны принадлежать промежутку $[0, 1]$. Отсюда непосредственно следует, что $H(M) \geqslant 0$ в замкнутой области $\bar{B}_1$, т. е. $w(M) \leqslant G(M)$ и, следовательно, на β_2 мы имеем $w(M) \leqslant G(M) \leqslant q$. Совершенно так же $G(M) + w(M) \geqslant 0$ в $\bar{B}_1$, и отсюда следует, что $-w(M) \leqslant \leqslant G(M) \leqslant q$ на β_2. Полученные два неравенства дают $|w(M)| \leqslant q$, что и доказывает лемму. Это доказательство может быть повторено и в трехмерном случае[1]).

116. Метод Шварца (продолжение). Мы рассмотрели применение метода Шварца в простейшем случае взаимного расположения областей B_1 и B_2. Контуры этих областей могут пересекаться более чем в двух точках (рис. 11), могут иметь общие

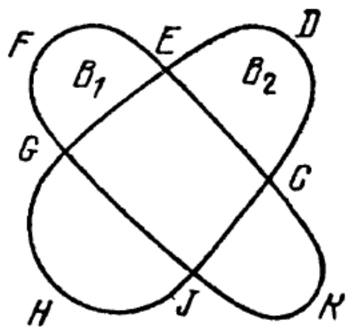

Рис. 11.

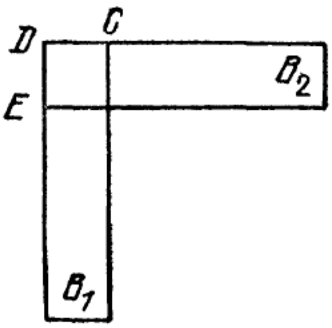

Рис. 12.

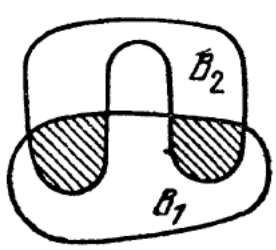

Рис. 13.

части (рис. 12). Может случиться, что B_1 и B_2 односвязны, а их сумма многосвязна (рис. 13). На рис. 11 контур области $B = B_1 + B_2$ есть линия $CDEFGHJKC$. На рис. 12 ломаная CDE есть общая часть контуров, и на рис. 13 заштрихованные области являются общей частью областей B_1 и B_2. Во всех случаях построение последовательных приближений в методе Шварца будет буквально таким же, что и выше. Несколько видоизменяя метод вычисления, мы, умея решать задачу Дирихле для B_1 и B_2,

[1]) См. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики, т. II.— М.: Гостехиздат, 1951.

сможем получить решение не для суммы этих областей, а для области, которая является общей частью областей B_1 и B_2. В случае рис. 8 это будет область, ограниченная контуром $\beta_1+\beta_2$. На этом контуре нам заданы предельные значения $\omega(N)$.

Мы будем искать по этим предельным значениям гармоническую функцию в виде суммы

$$w(M)=u(M)+v(M), \tag{159}$$

где $u(M)$ — гармоническая в B_1 и $v(M)$ — гармоническая в B_2. Такое разбиение искомой функции на два слагаемых, очевидно, не однозначно, что несущественно при дальнейшем построении. Продолжим каким-нибудь образом заданные на β_1 значения функции $\omega(N)$ на дугу α_1 так, чтобы получалась непрерывная функция, и это продолжение обозначим через $\varphi_1(N)$.

Построим последовательные приближения для $u(M)$ и $v(M)$, как решения задач Дирихле при следующих предельных условиях:

$$u_1(N)=\begin{cases}\varphi_1(N) & \text{на } \alpha_1,\\ \omega(N) & \text{на } \beta_1,\end{cases} \qquad v_1(N)=\begin{cases}0 & \text{на } \alpha_2,\\ \omega(N)-u_1(N) & \text{на } \beta_2.\end{cases}$$

При этом заметим, что разность $\omega(N)-u_1(N)$ равна нулю в точках N_1 и N_2. Для вычисления следующих приближений полагаем

$$u_{n+1}(N)=\begin{cases}\varphi_1(N) & \text{на } \alpha_1,\\ \omega(N)-v_n(N) & \text{на } \beta_1,\end{cases} \quad v_{n+1}(N)=\begin{cases}0 & \text{на } \alpha_2,\\ \omega(N)-u_{n+1}(N) & \text{на } \beta_2.\end{cases}$$

Процесс будет сходящимся, и сумма (159) будет давать решение задачи.

Подробное изложение указанного метода можно найти в книге: Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. — М.: Физматгиз, 1962, где этот метод применяется не только для уравнения Лапласа, но и для других уравнений эллиптического типа. Этот метод применим и для трехмерного случая.

Укажем еще на одну возможность применения метода Шварца. Нам придется сейчас иметь дело с решением внешней задачи Дирихле и, в связи с этим, мы будем рассматривать не плоский случай, а случай трехмерного пространства. Пусть в пространстве имеется n замкнутых поверхностей S_k $(k=1, 2, \ldots, n)$, причем тела, ограниченные ими, не имеют общих точек. Обозначим через D часть пространства, находящуюся вне всех поверхностей S_k, и через D_k — часть пространства, находящуюся вне S_k. Положим, что мы умеем решить задачу Дирихле для всех D_k при любых непрерывных значениях на S_k, и покажем, каким образом можно при этом решить задачу Дирихле для D. Все области D_k и область D содержат внутри себя бесконечно далекую точку и, как обычно, при решении задачи Дирихле считается, что гармоническая функция равна нулю на бесконечности.

Итак, требуется найти функцию, гармоническую внутри D и принимающую на поверхностях S_k заданные непрерывные значения:

$$u|_{S_k} = f_k(N) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{160}$$

На первом шаге находим при каждом k функции $u_{0,k}(M)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — гармонические внутри D_k и принимающие значения $f_k(N)$ на S_k. Далее находим функции $u_{1,k}(M)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, гармонические внутри D_k, с предельными значениями:

$$u_{1,k}(M) = -\sum_{i \neq k} u_{0,i}(N) \quad \text{на} \quad S_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{161}$$

причем суммирование производится по всем i от $i = 1$ до $i = n$, кроме $i = k$.

Вообще при всяком целом положительном m находим функции $u_{m,k}(M)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, гармонические внутри D_k с предельными значениями

$$u_{m,k}(N)|_{S_k} = -\sum_{i \neq k} u_{m-1,i}(N) \text{ на } S_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{162}$$

Функции

$$\sum_{m=0}^{p} u_{m,k}(M) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

гармонические внутри D_k с предельными значениями

$$\sum_{m=0}^{p} u_{m,k}(N) = f_k(N) - \sum_{m=0}^{p-1} \sum_{i \neq k} u_{m,i}(N) \text{ на } S_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Вычитая из обеих частей сумму

$$\sum_{m=0}^{p-1} u_{m,k}(N),$$

можем переписать предыдущее равенство в виде

$$\sum_{m=0}^{p-1} \sum_{i=1}^{n} u_{m,i}(N) = f_k(N) - u_{p,k}(N) \text{ на } S_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{163}$$

Если мы докажем, что при беспредельном возрастании p все функции $u_{p,k}(M)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ стремятся равномерно в замкнутой области D к нулю, то из (163) будет следовать, что гармоническая внутри D и непрерывная вплоть до границы функция

$$\sum_{m=0}^{p-1} \sum_{i=1}^{n} u_{m,\,i}(M)$$

при беспредельном возрастании p и дает решение задачи Дирихле для области D с предельными значениями $f_k(N)$ на S_k:

$$u(M) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} u_{m,\,i}(M). \tag{164}$$

Переходим к выяснению условий, при которых функции $u_{p,\,k}(M)$ стремятся к нулю равномерно в замкнутой области D. Обозначим через $v_k(M)$ $(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ функцию, гармоническую внутри D_k и равную 1 на S_k. При этом $v_k(M) \geqslant 0$ внутри D_k, и, в силу того, что $v_k(M) \to 0$ при беспредельном удалении точки M, существует такая постоянная q_k, удовлетворяющая условию $0 < q_k < 1$, что

$$v_k(M) \leqslant q_k \quad \text{на} \quad S_i \quad \text{при} \quad i \neq k \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{165}$$

Если $w_k(M)$ $(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ — какие-нибудь функции, гармонические внутри D_k, непрерывные вплоть до S_k и удовлетворяющие условию

$$|\,w_k(M)\,| \leqslant a_k \text{ на } S_k \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{166}$$

где a_k — постоянные, то $a_k v_k(M) - w_k(M)$ будут гармоническими внутри D_k и неотрицательными на S_k, откуда следует, что $a_k v_k(M) - w_k(M) \geqslant 0$ в замкнутой области $\bar{D}_k$, т. е. $w_k(M) \leqslant a_k v_k(M)$ в $\bar{D}_k$. Не меняя условия (166), мы можем переменить знак у гармонической функции $w_k(M)$, и, таким образом, можем считать, что $w_k(M) \geqslant 0$ в рассматриваемой точке M. Таким образом, из предыдущих рассуждений следует, что

$$|\,w_k(M)\,| \leqslant a_k v_k(M), \tag{167}$$

откуда, в силу (165),

$$|\,w_k(N)\,| \leqslant a_k q_k \quad \text{на} \quad S_i \quad \text{при} \quad i \neq k \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{168}$$

Это неравенство является, таким образом, следствием (166). Пусть a — такое положительное число, что $|\,f_k(N)\,| \leqslant a$ при $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, и q — наибольшее из чисел $q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n$, причем, очевидно, $0 < q < 1$. В силу (160) мы имеем $|\,u_{0,\,k}(N)\,| \leqslant a$ на S_k. В силу (161) и (168) мы имеем далее $|\,u_{1,\,k}(N)\,| \leqslant (n-1)\,aq$ на S_k $(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$. Применяя далее (162) при $m = 2$ и пользуясь опять (168), получим $|\,u_{2,\,k}(N)\,| \leqslant (n-1)^2 aq^2$ на S_k и, вообще, $|\,u_{p,\,k}(N)\,| \leqslant (n-1)^p aq^p$ на S_k, и, следовательно,

$$|\,u_{p,\,k}(M)\,| \leqslant [(n-1)\,q]^p\, a \quad (M \text{ в } \overline{D}_k) \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{169}$$

Если число поверхностей $n=2$, то отсюда следует, что $u_{p,k}(M)\to 0$ при $p\to\infty$ равномерно в $\bar{D}_k$ и тем более равномерно в замкнутой области $\bar{D}$. Если $n>2$, то мы получаем следующее достаточное условие того, что $u_{p,k}(M)\to 0$:

$$(n-1)q<1. \tag{170}$$

Число q, по самому его построению, не зависит от предельных условий $f_k(N)$ и определяется только областью D. Мы могли бы совершенно так же рассмотреть и тот случай, когда область D есть конечная область, имеющая внешнюю границу S_1 и внутренние границы $S_2, S_3, \ldots, S_n$. При этом для области D_1, ограниченной поверхностью S_1, мы имели бы внутреннюю задачу Дирихле, а для областей D_k $(k=2, \ldots, n)$, как и выше, внешнюю задачу. Указанное выше построение принадлежит Г. М. Голузину (Матем. сб., 1934, **41**, № 2). Оно неприменимо в плоском случае, как в этом нетрудно убедиться, задавая постоянные значения на отдельных замкнутых контурах l_k.

117. Суб- и супергармонические функции. При решении задачи Дирихле методом интегральных уравнений были существенны сравнительно тяжелые ограничения, которые приходилось накладывать на границу области. Мы изложим другой метод решения задачи Дирихле, годный при весьма общих предположениях о границе области и предельных значениях на этой границе. Его часто называют «методом выметания». Он был предложен Пуанкаре, затем уточнен Перроном (Perron. Eine neue Behandlung der ersten Randwertaufgabe für $\Delta u=0$. — Math. Z., 1923, **18**, S. 42—54; см. также статью И. Г. Петровского: Метод Перрона решения задачи Дирихле. — УМН, 1941, **8** и его книгу по уравнениям с частными производными) и Валле — Пуссеном.

В настоящем параграфе мы изложим некоторые новые понятия, которые окажутся нам полезными при проведении упомянутого метода. Эти новые понятия представляют и общий интерес в математической физике. Все изложение мы будем проводить для случая плоскости. В трехмерном пространстве они буквально такие же. Разница в исследовании предельных значений гармонической функции, которая строится по упомянутому методу, указана в конце изложения метода.

Для функции одной независимой переменной $y(x)$ аналогом уравнения Лапласа является уравнение $y''(x)=0$, и его общий интеграл есть полином первой степени: $y=ax+b$, а его график — прямая. Задача Дирихле, т. е. задача определения решения уравнения $y''(x)=0$ внутри промежутка $[a, b]$ при заданных значениях на концах промежутка, сводится просто к проведению прямой через две заданные точки. Характерным для полинома первой степени является тот факт, что его значение в какой-либо точке $x = x_0$ является средним арифметическим его значений в точках $x = x_0 + h$ и $x = x_0 - h$, равноотстоящих от $x = x_0$ Рассмотрим теперь непрерывную линию, обращенную вогнутостью в сторону положительных ординат. Пусть $y = y(x)$ — ее уравнение. В точках этой линии мы будем иметь

$$y(x_0) < \frac{1}{2}[y(x_0 + h) + y(x_0 - h)]. \qquad (171_1)$$

Совершенно аналогично, если линия обращена выпуклостью в сторону положительных ординат, то

$$y(x_0) > \frac{1}{2}[y(x_0 + h) + y(x_0 - h)]. \qquad (171_2)$$

Неравенство (171_1) непосредственно вытекает из того факта, что в рассматриваемом случае каждый участок кривой находится под своей хордой. Введем соответствующие классы функций и в случае нескольких переменных. Пусть $f(M)$ — функция, непрерывная внутри плоской области B. Мы назовем ее *субгармонической внутри B, если для всякой точки P, находящейся внутри B, существует такое положительное число δ, что $f(P)$ не превосходит среднего значения $f(M)$ на окружности с центром P и любым радиусом $\rho < \delta$* Если ввести координаты (x, y) точки P, то высказанное условие запишется в виде

$$f(x, y) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x + \rho\cos\varphi,\ y + \rho\sin\varphi)\, d\varphi \quad (\rho < \delta). \qquad (172_1)$$

Если функция $f(M)$ — гармоническая функция внутри B, то для всякой точки внутри B в формуле (172_1) имеет место знак равенства **[II; 204]**, и таким образом *гармоническая функция есть частный случай субгармонической функции.* Определение может быть непосредственно обобщено и на трехмерный случай, только окружности мы должны заменить сферами. Совершенно аналогично определяется *супергармоническая функция* Для нее вместо (172_1) мы должны иметь во всякой внутренней точке области B:

$$f(x, y) \geqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x + \rho\cos\varphi,\ y + \rho\sin\varphi)\, d\varphi. \qquad (172_2)$$

Гармоническая функция есть частный случай и супергармонической функции. Из определения непосредственно вытекает, что если $f(M)$ есть субгармоническая функция и C — постоянная, то $Cf(M)$ будет субгармонической при $C > 0$ и супергармонической при $C < 0$. Если же $f(M)$ — супергармоническая, то $Cf(M)$ — супергармоническая при $C > 0$ и субгармоническая при $C < 0$. Кроме того, из данных нами определений вытекает, что конечная сумма субгармонических функций есть субгармоническая функция, и конечная сумма супергармонических функций есть супергармоническая функция.

Положим, что $f(M) = f(x, y)$ имеет внутри области B непрерывные производные второго порядка и

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \geqslant 0 \quad (\text{внутри } B). \tag{173_1}$$

Применяя формулу Грина к кругу K_ρ с центром $P(x, y)$, лежащему внутри B, и полагая $u = f$ и $v = 1$, получим

$$\int\limits_{C_\rho} \frac{\partial f}{\partial n} ds = \iint\limits_{K_\rho} \Delta f \, d\sigma, \tag{174}$$

где C_ρ — окружность круга K_ρ. Применим еще к функции f формулу [II; 203]:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{C_\rho} \left(f \frac{\partial \lg r}{\partial n} - \lg r \frac{\partial f}{\partial n} \right) ds + \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{K_\rho} \Delta f \lg r \, d\sigma,$$

где r — расстояние от (x, y) до переменной точки интегрирования. На C_ρ направление n совпадает с направлением r, а $ds = \rho d\varphi$, и, пользуясь (174), мы можем переписать предыдущую формулу в виде

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x + \rho \cos \varphi, \ y + \rho \sin \varphi) \, d\varphi + \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{K_\rho} \Delta f \lg \frac{r}{\rho} d\sigma.$$

В круге K_ρ мы имеем $r : \rho \leqslant 1$, и, в силу (173_1), последняя формула дает неравенство (172_1), т. е. *при условии* (173_1) *функция* $f(M)$ *есть субгармоническая внутри* B *функция.* Точно так же, *если*

$$\Delta f \leqslant 0 \quad (\text{в } B), \tag{173_2}$$

то $f(M)$ *есть супергармоническая внутри* B *функция.* В основном определении суб- и супергармонической функций мы не предполагаем существования производных. Условия (173_1) и (173_2) аналогичны известным условиям выпуклости и вогнутости кривой [I; 71].

Выясним некоторые простые свойства суб- и супергармонических функций. Положим, что $f(M)$ непрерывна в замкнутой области и субгармоническая внутри области. При этом из (172_1) непосредственно вытекает, что *субгармоническая функция принимает наибольшее значение на контуре.* Больше того, она не может иметь внутри максимума, в окрестности которого она непостоянна. Точно так же *супергармоническая функция принимает наименьшее значение на контуре.*

118. Вспомогательные предложения. Мы докажем некоторые предложения о суб- и супергармонических функциях, которые нам будут нужны при решении задачи Дирихле. В дальнейшем через $\bar{B}$ мы, как всегда, будем обозначать ограниченную область B вместе с ее контуром, т. е. замкнутую область.

Теорема I. *Пусть $f_k(M)$ $(k = 1, \ldots, m)$ — функции, непрерывные в $\bar{B}$ и субгармонические внутри B. Построим функцию $\varphi(M)$, которая в каждой точке $\bar{B}$ равна наибольшему из значений $f_k(M)$ $(k = 1, \ldots, m)$:*

$$\varphi(M) = \max[f_1(M), \ldots, f_m(M)]. \tag{175_1}$$

При этом $\varphi(M)$ будет непрерывной в $\bar{B}$ и субгармонической внутри B.

Теорема I′. *Аналогично, если $f_k(M)$ — супергармонические и*

$$\psi(M) = \min[f_1(M), \ldots, f_m(M)], \tag{175_2}$$

то и $\psi(M)$ — супергармоническая.

Непрерывность $\varphi(M)$ в $\bar{B}$ непосредственно вытекает из непрерывности $f_k(M)$. Пусть (x_0, y_0) — некоторая точка внутри B, и пусть в этой точке $\varphi(x_0, y_0)$ равно, например, $f_1(x_0, y_0)$. Мы имеем, в силу субгармоничности $f_1(x, y)$,

$$\varphi(x_0, y_0) = f_1(x_0, y_0) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_1(x_0 + \rho\cos\varphi,\ y_0 + \rho\sin\varphi)\, d\varphi.$$

Но, в силу (175_1), на окружности, по которой производится интегрирование, $\varphi(M) \geqslant f_1(M)$, а следовательно, и подавно

$$\varphi(x_0, y_0) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(x_0 + \rho\cos\varphi,\ y_0 + \rho\sin\varphi)\, d\varphi,$$

что и дает субгармоничность $\varphi(M)$.

Теорема II. *Пусть $f(M)$ субгармоническая внутри B и непрерывная в $\bar{B}$, K — круг, содержащийся в B, и $u_K(M)$ — та гармоническая внутри K функция, значения которой на окружности круга K совпадают со значениями $f(M)$. Тогда*

$$f(M) \leqslant u_K(M) \quad (\text{в } K). \tag{176_1}$$

Теорема II′. *Аналогично, если $f(M)$ — супергармоническая функция, то*

$$f(M) \geqslant u_K(M) \quad (\text{в } K). \tag{176_2}$$

Выражение $f - u_K = f + (-u_K)$ есть сумма субгармонической функции $f(M)$ и гармонической (т. е. тоже субгармонической) функции $(-u_K)$. Значит $f - u_K$ есть субгармоническая внутри K функция, равная нулю на контуре. Следовательно, согласно сказанному в предыдущем параграфе, $f-u_K \leqslant 0$ внутри K, что и приводит к (176_1).

Теорема III. *Если при условиях теоремы* II *мы заменим значения $f(M)$ в круге K значениями $u_K(M)$ и обозначим новую функцию через $f_K(M)$, то эта функция, непрерывная в $\bar{B}$, будет субгармонической внутри B.*

Теорема III'. *Такое же построение для супергармонической функции даст супергармоническую функцию $f_K(M)$.*

Вне K функция f_K совпадает с f, и условие (172_1) очевидно выполнено во всякой точке вне K при достаточно малом δ. Внутри K функция f_K — гармоническая, и (172_1) выполнено со знаком равенства. Остается проверить выполнение (172_1) в точках окружности круга K. Пусть (x_0, y_0) — такая точка, причем если упомянутая окружность имеет точки, общие с контуром области B, то мы считаем, что (x_0, y_0) лежит внутри B. Мы имеем

$$f_K(x_0, y_0) = f(x_0, y_0) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x_0+\rho\cos\varphi, y_0+\rho\sin\varphi)\,d\varphi \quad (\rho<\delta).$$

Внутри K, в силу теоремы II, $f_K \geqslant f$, а вне K будет $f_K = f$, следовательно, и подавно

$$f_K(x_0, y_0) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_K(x_0+\rho\cos\varphi, y_0+\rho\sin\varphi)\,d\varphi,$$

что и требовалось доказать.

119. Метод нижних и верхних функций. Мы переходим сейчас к изложению метода Пуанкаре — Перрона. Пусть на плоскости имеется ограниченная область B и l ее граница, о которой мы не делаем пока никаких предположений. Положим, что на l задана функция $\omega(N) = \omega(x, y)$, относительно которой мы предположим пока только, что она ограничена, т. е., что существуют два таких числа a и b, что

$$a \leqslant \omega(N) \leqslant b. \tag{177}$$

Назовем *нижней функцией* всякую функцию $\varphi(M)$, которая является непрерывной функцией в замкнутой области, субгармонической внутри области, и на контуре удовлетворяет условию $\varphi(N) \leqslant \omega(N)$. Аналогично *верхняя функция* $\psi(M)$ должна быть супергармонической внутри и на контуре должна удовлетворять условию $\psi(N) \geqslant \omega(N)$.

Существует, очевидно, бесчисленное множество тех и других функций. Например, всякая постоянная, которая не превосходит a, будет нижней функцией. Пусть φ — некоторая нижняя и ψ —

верхняя функции. Выражение $\chi=\varphi-\psi=\varphi+(-\psi)$, как сумма двух субгармонических функций, будет субгармонической функцией и $\chi\leqslant 0$ на l. Отсюда следует, что $\chi\leqslant 0$ в $\bar{B}$, т. е. $\varphi\leqslant\psi$ в $\bar{B}$. Иначе говоря, *всякая нижняя функция не больше всякой верхней в* B. Из теорем I и I′ непосредственно следует, что *если* $f_1(M), f_2(M), \ldots, f_m(M)$ — *нижние функции, то и функция* $\varphi(M)$, *определяемая формулой* (175_1), *также нижняя функция, аналогично и для верхних функций и формулы* (175_2). Точно так же из теорем III и III′ следует, что если $f(M)$ — *нижняя функция, то и функция* $f_K(M)$ — *нижняя функция, и аналогично, если* $f(M)$ — *верхняя функция, то и* $f_K(M)$ — *верхняя функция.*

Совершенно очевидно, что нижние функции ограничены сверху некоторым числом, а верхние ограничены снизу. Например, число b, фигурирующее в неравенстве (177), есть верхняя функция, и мы имеем для любой нижней функции $\varphi(M)\leqslant b$. Совершенно аналогично для любой верхней функции $\psi(M)\geqslant a$. Таким образом, *множество значений всевозможных верхних функций* $\psi(M)$ *в любой фиксированной точке* M, *лежащей внутри* B, *имеет точную нижнюю границу* **[I; 42]**, *которую мы обозначим через* $u(M)$. Это будет некоторая функция, определенная внутри B. Из $\psi(M)\geqslant a$ следует, что $u(M)\geqslant a$, а поскольку постоянная b есть верхняя функция, мы имеем $u(M)\leqslant b$, т. е. построенная *функция* $u(M)$ *удовлетворяет условию* $a\leqslant u(M)\leqslant b$. Согласно определению точной нижней границы для каждой точки M_0, лежащей внутри B, существует такая последовательность $\psi_n(M)$ верхних функций, что $\psi_n(M_0)\to u(M_0)$ при $n\to\infty$. Если существует такая верхняя функция $\psi(M)$, что $\psi(M_0)=u(M_0)$, то мы можем, например, считать $\psi_n(M)=\psi(M)$ при любом значке n. Для разных точек M_0 последовательности $\psi_n(M)$ могут быть разными. Докажем теорему:

Теорема. $u(M)$ — *гармоническая внутри* B *функция.*

Отметим, что дальше значки у функций мы будем писать не снизу, а сверху в скобках.

Предварительно докажем лемму:

Лемма. *Если* P — *произвольная фиксированная точка, лежащая внутри* B, *то существует монотонная последовательность верхних функций*:

$$\varphi^{(1)}(M)\geqslant\varphi^{(2)}(M)\geqslant\ldots\qquad (M \text{ в } \bar{B}) \tag{178}$$

таких, что $\varphi^{(n)}(P)\to u(P)$.

Как мы видели выше, существует последовательность $\psi_n(M)$ верхних функций таких, что $\psi_n(P)\to u(P)$. Положим

$$\varphi^{(n)}(M)=\min[\psi_1(M),\ \psi_2(M),\ \ldots,\ \psi_n(M)]. \tag{179}$$

Функции $\varphi^{(n)}(M)$, как мы видели выше, — непрерывные верхние функции. При возрастании n увеличивается число функций

$\psi_s(M)$, из которых составляется минимум, и, следовательно, $\varphi^{(n)}(M)$ удовлетворяют условию (178). Из того, что функция $u(M)$ есть точная нижняя граница верхних функций, и из (179) следует, что $u(P) \leqslant \varphi^{(n)}(P) \leqslant \psi_n(P)$, а отсюда, в силу $\psi_n(P) \to$ $\to u(P)$, вытекает, что и $\varphi^{(n)}(P) \to u(P)$. Лемма доказана.

Замечание. Пусть K — любой круг с центром P, лежащий внутри B. Построим функции $\varphi_K^{(n)}(M)$, как это указано в теореме III′. Поскольку на окружности круга K соблюдаются неравенства (178), то аналогичные неравенства соблюдаются и во всем замкнутом круге K. Вне круга K функции $\varphi_K^{(n)}(M$ совпадают с $\varphi^{(n)}(M)$, и, следовательно, тоже удовлетворяют условию (178):

$$\varphi_K^{(1)}(M) \geqslant \varphi_K^{(2)}(M) \geqslant \ldots \qquad (M \text{ в } \overline{B}).$$

Кроме того, $u(M) \leqslant \varphi_K^{(n)}(M) \leqslant \varphi^{(n)}(M)$, и, в силу $\varphi^{(n)}(P) \to u(P)$, мы имеем $\varphi_K^{(n)}(P) \to u(P)$. Таким образом, мы можем считать, что *функции $\varphi^{(n)}(M)$, фигурирующие в лемме, — гармонические внутри любого фиксированного круга с центром P, принадлежащего B.*

Переходим к доказательству теоремы. Достаточно показать, что $u(M)$ — гармоническая функция внутри любого круга K, лежащего внутри B. Пусть P — центр этого круга. Строим, согласно лемме и замечанию к ней, функции $\varphi^{(n)}(M)$, гармонические внутри K. Эти функции имеют предел $u(P)$ в точке P. Согласно теореме Гарнака эти функции стремятся во всех точках внутри K к некоторой гармонической функции

$$\varphi^{(n)}(M) \to v(M) \qquad (M \text{ внутри } K),$$

причем сходимость равномерная во всяком замкнутом круге K' с центром P, лежащем внутри K. Докажем, что $v(M) = u(M)$ внутри K. Этим теорема будет доказана. Доказываем от обратного. Пусть в некоторой точке P_1, лежащей внутри K, мы имеем $v(P_1) \neq u(P_1)$. Поскольку $\varphi^{(n)}(P_1) \to v(P_1)$ и $u(P_1)$ есть точная нижняя граница значений верхних функций в точке P_1, мы должны иметь $v(P_1) > u(P_1)$. Тем самым должна существовать верхняя функция $w(M)$, такая, что $w(P_1) < v(P_1)$. Пусть K' — круг с центром P, на окружности которого находится точка P_1. Составим верхние функции:

$$\rho^{(n)}(M) = \min[w(M), \varphi^{(n)}(M)] \quad \text{и} \quad \rho_{K'}^{(n)}(M),$$

причем

$$\rho_{K'}^{(n)}(M) \leqslant \rho^{(n)}(M).$$

Поскольку $\varphi^{(n)}(M)$ равномерно в замкнутом круге K' сходится к $v(M)$, мы можем утверждать, что и $\rho^{(n)}(M)$ равномерно сходится там же к предельной функции:

$$\rho(M) = \min[w(M),\ v(M)].$$

Тем самым равномерная сходимость имеет место на окружности круга K' и мы можем утверждать, что и гармонические внутри K' функции $\rho_{K'}^{(n)}(M)$ сходятся равномерно в замкнутом круге K' к некоторой гармонической функции $\rho_{K'}(M)$. Поскольку $w(P_1) < v(P_1)$, мы имеем $\rho(P_1) < v(P_1)$, и вообще во всех точках окружности круга K' мы имеем $\rho(M) \leqslant v(M)$. Таким образом, по теореме о среднем для гармонических функций $\rho_{K'}(P) < v(P)$. Но $v(P) = u(P)$, и, следовательно, $\rho_{K'}(P) < u(P)$. В точке P функция $\rho_{K'}(M)$ есть предел верхних функций $\rho_{K'}^{(n)}(M)$, и неравенство $\rho_{K'}(P) < u(P)$ противоречит тому, что $u(P)$ есть точная нижняя граница значений верхних функций в точке P. Таким образом, теорема о том, что $u(M)$ — гармоническая внутри B функция, доказана.

В трехмерном случае доказательство буквально такое же. Таким образом, при любой заданной на границе l ограниченной функции $\omega(N)$ строится указанным выше методом функция $u(M)$, гармоническая внутри B. Вместо того, чтобы строить точную нижнюю границу $u(M)$ верхних функций, мы могли бы строить точную верхнюю границу $u_0(M)$ нижних функций. Если $\omega(N)$ есть непрерывная на границе l функция, то можно показать, что $u_0(M)$ совпадает с $u(M)$. В дальнейшем мы всегда будем говорить о точной нижней границе верхних функций.

Как мы уже упоминали, все построение без изменения переносится на трехмерный случай. Функцию $u(M)$ называют обобщенным решением задачи Дирихле с предельными значениями $\omega(N)$. Смысл этого выяснится в следующем параграфе.

Замечание. Указанное выше обобщенное решение задачи Дирихле $u(M)$ при непрерывности функции $\omega(N)$ на границе l можно построить еще одним способом, который мы сейчас укажем. Продолжим функцию $\omega(N)$ на всю плоскость, сохраняя ее непрерывность. Положим далее, что B_n $(n = 1, 2, \ldots)$ есть последовательность областей, которые лежат вместе со своими границами l_n внутри B и стремятся к B, так что всякая точка M, лежащая внутри B, находится внутри всех областей B_n, начиная с некоторого номера n. Области B_n могут быть, например, составленными из конечного числа кругов. Положим, что для областей B_n мы умеем решать задачу Дирихле с непрерывными значениями на l_n.

Пусть $u_n(M)$ — решение задачи Дирихле для B_n, причем предельные значения на l_n задаются как продолжение функции $\omega(N)$, о котором мы говорили. Можно доказать, что при беспредельном возрастании n функции $u_n(M)$ стромятся к построенному выше обобщенному решению $u(M)$ задачи Дирихле, причем это стремление равномерное во всякой замкнутой области, лежащей внутри B. Таким образом, оказывается, предел $u_n(M)$ не зависит ни от способа продолжения $\omega(N)$, ни от выбора областей B_n. Важны лишь те свойства этих областей, о которых говорилось выше. Доказательство этих фактов можно найти в обзорной статье М. В. Келдыша (УМН, 1941, 8).

120. Исследование граничных значений. Пока мы не делали никаких предположений о границе области B. Наложим теперь некоторое условие, в формулировке которого будет фигурировать некоторая фиксированная точка N_0 границы области B. Множество граничных точек области B будем обозначать буквой l.

Условие I. *Существует непрерывная в $\bar{B}$ и супергармоническая внутри B функция $w(M)$ такая, что $w(N_0)=0$ и $w(M)>0$ в остальных точках $\bar{B}$.* Докажем теперь следующую теорему:

Теорема. *Если выполнено указанное условие и граничная функция $\omega(N)$ непрерывна в точке N_0, то $u(M)$ стремится к $\omega(N_0)$ при стремлении M к точке N_0 изнутри области.*

Обозначим через β_η множество тех точек области $\bar{B}$, расстояние которых до N_0 не превышает $\eta>0$. Пусть ε — заданное положительное число. В силу непрерывности $\omega(N)$ в точке N_0 существует такое положительное число η, что для всех точек границы B, принадлежащих β_η, выполняется неравенство

$$\omega(N_0)-\varepsilon\leqslant\omega(N)\leqslant\omega(N_0)+\varepsilon \quad (N \text{ на } l \text{ и в } \beta_\eta). \tag{180}$$

Построим непрерывную в $\bar{B}$ и субгармоническую внутри B функцию

$$\varphi_1(M)=\omega(N_0)-\varepsilon-Cw(M), \tag{181}$$

где C — некоторая положительная постоянная, которую мы сейчас выберем. В силу (180) и $w(M)\geqslant 0$, мы имеем $\varphi_1(N)\leqslant\omega(N)$ в точках l, принадлежащих β_η. Выберем C настолько большим, чтобы вне β_η мы имели то же самое неравенство в точках l, т. е.

$$\omega(N_0)-\varepsilon-Cw(N)\leqslant\omega(N) \quad (N \text{ на } l \text{ и вне } \beta_\eta). \tag{182}$$

Во всех точках $\bar{B}$, расстояние которых до N_0 не меньше η, функция $w(M)$ достигает наименьшего положительного значения, которое мы обозначим через m_η. Это непосредственно следует из того, что указанные точки образуют замкнутое множество, и функция $w(M)$ непрерывна и положительна на этом множестве [[II; 92]. Для выполнения неравенства (182) достаточно взять

$$C\geqslant\max\left\{\frac{\omega(N_0)-\varepsilon-a}{m};\ 0\right\},$$

где a — число, фигурирующее в неравенстве (177). При таком выборе C функция (181) будет нижней функцией. Точно так же при достаточно большом C функция

$$\psi_1(M) = \omega(N_0) + \varepsilon + Cw(M) \tag{183}$$

будет верхней функцией. Из $w(N_0) = 0$ следует:

$$\varphi_1(N_0) = \omega(N_0) - \varepsilon,$$

и, в силу непрерывности $\varphi_1(M)$ в $\bar{B}$, найдется такое малое положительное δ_1, что в β_{δ_1}:

$$\varphi_1(M) \geqslant \omega(N_0) - 2\varepsilon \qquad (M \text{ в } \beta_{\delta_1}).$$

Пусть $\psi(M)$ — любая верхняя функция. Мы имеем для всех точек M, принадлежащих $\bar{B}$: $\psi(M) \geqslant \varphi_1(M)$, и, следовательно, из последнего неравенства следует:

$$\psi(M) \geqslant \omega(N_0) - 2\varepsilon \qquad (M \text{ в } \beta_{\delta_1}).$$

Точная нижняя граница $\psi(M)$ также должна удовлетворять этому неравенству, т. е.

$$u(M) \geqslant \omega(N_0) - 2\varepsilon \qquad (M \text{ внутри } B \text{ и в } \beta_{\delta_1}). \tag{184}$$

Точно так же из (183) следует:

$$\psi_1(N_0) = \omega(N_0) + \varepsilon,$$

и, следовательно, в силу непрерывности $\psi_1(M)$, существует такое малое положительное δ_2, что в β_{δ_2} мы имеем

$$\psi_1(M) \leqslant \omega(N_0) + 2\varepsilon \qquad (M \text{ в } \beta_{\delta_2}),$$

и тем более

$$u(M) \leqslant \omega(N_0) + 2\varepsilon \qquad (M \text{ внутри } B \text{ и в } \beta_{\delta_2}). \tag{185}$$

Пусть δ — наименьшее из чисел δ_1 и δ_2. В силу (184) и (185), мы имеем

$$\omega(N_0) - 2\varepsilon \leqslant u(M) \leqslant \omega(N_0) + 2\varepsilon \qquad (M \text{ внутри } B \text{ и в } \beta_\delta). \tag{186}$$

Ввиду произвола в выборе ε, отсюда следует, что $u(M)$ стремится к $\omega(N_0)$ при $M \to N_0$ изнутри области, и теорема доказана. Доказательство годится как в двумерном, так и в трехмерном случае. Если $\omega(N)$ — непрерывна в каждой точке границы и в каждой точке выполняется условие I, то функция $u(M)$ непрерывна в замкнутой области $\bar{B}$ и принимает в граничных точках значения $\omega(N)$.

Определение. *Если при любом выборе непрерывной на l функции $\omega(N)$ функция $u(M)$ стремится к $\omega(N_0)$ при $M \to N_0$, то точка N_0 называется регулярной точкой границы. Точки гра-*

ницы, не обладающие этим свойством, называются иррегулярными точками границы.

Из доказанной выше теоремы следует, что условие I есть достаточное условие регулярности точки N_0.

Укажем теперь для трехмерного случая простое достаточное условие геометрического характера регулярности точки границы. Положим, что точка N_0 границы обладает следующим свойством: существует сфера, которая не содержит никаких точек $\bar{B}$, кроме точки N_0. Пусть M_1 — центр этой сферы и R — ее радиус. Обозначая через r расстояние $|M_1M|$, построим функцию

$$w(M) = \frac{1}{R} - \frac{1}{r}.$$

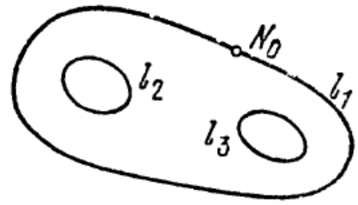

Рис. 14.

Эта функция удовлетворяет, очевидно, всем требованиям условия I, причем внутри B она — гармоническая.

Рассмотрим теперь плоский случай, и пусть граница B состоит из конечного числа простых замкнутых кривых, имеющих уравнения: $x = x(t)$, $y = y(t)$, где $x(t)$ и $y(t)$ — непрерывные периодические функции параметра t (рис. 14). Положим сначала, что точка N_0 находится на внешнем контуре l_1 (рис. 14). Поместим в нее начало координат $z = 0$ и выберем масштаб так, чтобы область $\bar{B}$ помещалась внутри круга $|z| < 1$. Составим функцию

$$F(z) = -\frac{1}{\lg z}.$$

Когда z двигается в B, то оно не может обойти вокруг начала, и $F(z)$ есть однозначная в $\bar{B}$ функция, регулярная внутри B и непрерывная в $\bar{B}$, причем $F(0) = 0$.

Полагая $z = \rho e^{i\varphi}$, получим для вещественной части $F(z)$ выражение

$$w(z) = -\frac{\lg \rho}{(\lg \rho)^2 + \varphi^2},$$

причем $\lg \rho < 0$. Эта гармоническая функция удовлетворяет всем указанным выше условиям.

В частности, вне β_ε мы имеем

$$w(z) > -\frac{\lg R}{(\lg \varepsilon)^2 + \varphi_0^2},$$

где φ_0 — наибольшее значение φ в $\bar{B}$ и R — наибольшее расстояние от начала до точек $\bar{B}$.

Положим теперь, что N_0 лежит на внутреннем контуре l_2. Выбираем внутри l_2 какую-либо точку α и совершаем конформное преобразование плоскости:

$$z' = \frac{1}{z-\alpha}.$$

Контур l_2 переходит во внешний контур, и мы для рассматриваемой точки N_0 можем построить функцию $w(M)$ указанным выше способом. Переходя к прежней переменной z, получаем требуемую функцию. Таким образом, если $\omega(N)$ — непрерывна во всех точках рассмотренного контура l, то $u(M)$ будет непрерывна вплоть до контура и на контуре равна $\omega(N)$.

Положим теперь, что N_0 есть точка разрыва $\omega(N)$, причем $\omega(N)$ при стремлении N к N_0 вдоль контура с обеих сторон имеет пределы, но эти пределы различны (разрыв первого рода). Обозначим их через $\omega_1(N_0)$ и $\omega_2(N_0)$, и пусть $\omega_1(N_0) < \omega_2(N_0)$. Рассуждая совершенно так же, как и выше, получим вместо (184)

$$u(M) \geqslant \omega_1(N_0) - 2\varepsilon$$

и вместо (185)

$$u(M) \leqslant \omega_2(N_0) + 2\varepsilon.$$

При стремлении M к N_0 изнутри области B функция $u(M)$ может иметь различные пределы. Но для любого из этих пределов u_0 мы имеем, в силу предыдущих неравенств и произвольности ε

$$\omega_1(N_0) \leqslant u_0 \leqslant \omega_2(N_0). \tag{187}$$

Если $\omega(N)$ — ограниченная функция, т. е. удовлетворяет условиям (177), то и функция $u(M)$, как мы видели, удовлетворяет этому условию. Таким образом, $u(M)$ есть ограниченная гармоническая функция, принимающая предельные значения $\omega(N)$ во всех точках непрерывности этой функции.

Вернемся к трехмерному случаю. Можно построить сравнительно простую замкнутую поверхность, имеющую иррегулярные точки. Это обстоятельство было открыто Лебегом и затем, независимо от него, П. С. Урысоном. Более подробное выяснение вопроса о предельных значениях можно найти в статье М. В. Келдыша (УМН, 1941, 8).

Приведем еще пример в случае плоскости. Пусть B — круг с центром в начале координат и с исключенным центром. Множество l граничных точек состоит из окружности круга и его центра. Пусть $\omega(N) = 0$ на окружности и $\omega(N) = 1$ в центре. Такая функция $\omega(N)$ непрерывна на l. Гармоническая функция $u(M)$ стремится, очевидно, к нулю при приближении M к точкам окружности. Покажем, что $u(M)$ не может стремиться к единице при приближении к центру. Если бы это было так, то

$u(M)$ была бы гармонической внутри всего круга, если принять ее значение в центре равным единице [105]. Но это противоречит теореме о среднем значении гармонической функции в центре круга. Таким образом, начало координат — иррегулярная точка границы.

Нетрудно показать, что в рассматриваемом случае $u(M) \equiv 0$. Действительно, $u(M)$ ограничена, а потому имеет предел при стремлении M к центру [105], и если принять этот предел равным значению $u(M)$ в центре, то $u(M)$ — гармоническая везде внутри круга [105] и равна нулю на окружности, т. е. $u(M) \equiv 0$.

Отметим еще, что вместо условия I можно поставить условие регулярности, которое касается только окрестности точки N_0, причем можно показать, что это новое условие равносильно условию I.

Условие II. *Для некоторой окрестности* β_η *точки* N_0 *существует функция* $w_\eta(M)$, *непрерывная в* β_η *вплоть до границы, супергармоническая внутри* β_η *и такая, что* $w_\eta(N_0) = 0$ *и* $w_\eta(M) > 0$ *в остальных точках* β_η.

Можно показать, что в трехмерном случае точка N_0 удовлетворяет условию II, если эта точка является вершиной кругового конуса, все точки которого, достаточно близкие к N_0, лежат вне $\bar{B}$ (кроме точки N_0). Таким образом, такие точки регулярны. (См. Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными. — М.: Физматгиз, 1961.)

В дальнейшем мы будем всегда считать, если не будет соответствующих оговорок, что контуры или поверхности, ограничивающие области, о которых будет идти речь, таковы, что все их точки суть регулярные точки. Таковыми будут, например, поверхности Ляпунова. Для них мы построили решение задачи Дирихле при помощи теории потенциала и интегральных уравнений.

Если на границе задана непрерывная функция $\omega(N)$, и все точки границы регулярны, то построенная гармоническая функция $u(M)$ непрерывна вплоть до границы и на границе принимает значения $\omega(N)$. Мы знаем, что может существовать только одна такая функция. Если на границе имеются нерегулярные точки, то гармоническая функция $u(M)$ ограничена внутри области и принимает во всех регулярных точках границы значения $\omega(N)$. Можно показать, что может существовать только одна функция с такими свойствами. Доказательство этого утверждения и ряда других интересных фактов, в том числе критерия регулярности Винера, можно найти в упомянутой выше статье М. В. Келдыша.

121. Уравнение Лапласа в n-мерном пространстве. До сих пор мы рассматривали уравнение Лапласа на плоскости и в трехмерном пространстве.

Результаты легко распространяются и на случай n-мерного пространства, где уравнение имеет вид

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = 0.$$

Приведем основные результаты, касающиеся решений этого уравнения. Функции, имеющие непрерывные производные до второго порядка и удовлетворяющие этому уравнению, называются гармоническими. Основное сингулярное решение имеет вид

$$\frac{C}{r^{n-2}} \qquad (n > 2),$$

причем постоянную C выбирают равной $\frac{1}{(n-2)\,\omega_n}$, где ω_n — площадь поверхности сферы единичного радиуса в n-мерном пространстве, так что основное сингулярное решение имеет вид

$$\varphi_0(r) = \frac{1}{(n-2)\,\omega_n r^{n-2}} \qquad (n > 2).$$

Объем v_n n-мерного шара радиуса r выражается формулой **[II; 101]**

$$v_n = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{n\,(n-2)\,\ldots\,2}\, r^n \quad \text{при четном } n,$$

$$v_n = \frac{2^{\frac{n+1}{2}}\,\pi^{\frac{n-1}{2}}}{n\,(n-2)\,\ldots\,1}\, r^n \quad \text{при нечетном } n,$$

что, как легко проверить, может быть записано единообразно в форме

$$v_n = \frac{2\left(\sqrt{\pi}\,\right)^n}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\, r^n,$$

откуда, дифференцируя по r и полагая $r = 1$, получим

$$\omega_n = \frac{2\left(\sqrt{\pi}\,\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Для гармонической в области D с поверхностью S функции имеет место формула **[II; 204]**

$$u(M) = \int\limits_S \left(\varphi_0(r)\,\frac{\partial u}{\partial n} - u\,\frac{\partial \varphi_0(r)}{\partial n}\right) dS,$$

причем везде мы будем писать лишь один знак интеграла. Величина r есть расстояние переменной точки интегрирования поверхности S до M Справедливы основные свойства гармонических функций, среди них теорема о среднем для значения гармонической функции в центре сферы, а также единственность решения задачи Дирихле

Формула, решающая задачу Дирихле для сферы с радиусом R, имеет вид

$$u(M)=\frac{1}{\omega_n R}\int_S f(N)\frac{(R^2-\rho^2)\,dS}{(R^2+\rho^2-2R\rho\cos\theta)^{\frac{n}{2}}}, \qquad (188)$$

где ρ — расстояние от центра O сферы до M, N — переменная точка на сфере и θ — угол между ON и OM.

На n-мерное пространство без изменения переносится метод верхних и нижних функций для решения задачи Дирихле, причем имеет место доказанное раньше условие регулярности точек поверхности

122. Функция Грина оператора Лапласа. Мы можем определить функцию Грина и для уравнения с частными производными аналогично тому, как это мы делали для обыкновенного дифференциального уравнения. Начнем с определения функции Грина для уравнения Лапласа при одном из следующих однородных предельных условий:

$$u|_S=0, \qquad (189)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}+p(N)u\Big|_S=0 \qquad (p(N)>0), \qquad (190)$$

причем мы рассматриваем трехмерный случай Мы можем строить функцию Грина как для конечной области D_i, находящейся внутри S, так и для бесконечной области D_e вне S Начнем с конечной области D_i Функция Грина $G(P, Q)$ должна быть функцией пары точек (P, Q), причем, как функция P, она должна внутри D_i иметь везде, кроме точки Q, непрерывные производные до второго порядка и удовлетворять уравнению Лапласа, а на границе — предельному условию. Далее, $G(P, Q)$ как функция P, должна иметь особенность в точке Q, соответствующую конечному заряду (или массе), сосредоточенному в точке Q Принимая во внимание множитель 4π, входящий в формулу [II, 201]

$$\Delta\left[\iiint_{D_i}\frac{\mu(M)}{r}\,d\tau_M\right]=-4\pi\mu(M_0) \quad M_0\in D_i \quad (r=|M_0M|), \qquad (191)$$

мы определим функцию Грина для условий (189) или (190) следующим образом:

Определение *Функцией Грина оператора Лапласа, соответствующей предельным условиям* (189) *или* (190), *называется функция* $G(P, Q)$, *удовлетворяющая, как функция* P, *при произвольно фиксированной точке $Q \in D_i$ следующим условиям:*

1) *внутри D_i, кроме точки Q, эта функция гармоническая;*
2) *она удовлетворяет предельному условию* (189) *или* (190);
3) *она может быть представлена в виде*

$$G(P;\,Q) = G(x,\,y,\,z;\,\xi,\,\eta,\,\zeta) = \frac{1}{4\pi r} + g(P;\,Q), \qquad (192)$$

где $r = |PQ|$ *и* $g(P;\,Q)$ — *гармоническая функция везде внутри* D_i.

Построение функции Грина сводится к нахождению ее регулярной части $g(P;\,Q)$. В случае предельного условия (189) гармоническая внутри D_i функция $g(P;\,Q)$ должна на S иметь предельные значения

$$g(N;\,Q) = -\frac{1}{4\pi r}, \quad N \in S, \quad (r = |NQ|). \qquad (193)$$

В случае (190) предельные условия для $g(P;\,Q)$ имеют вид

$$\left(\frac{\partial g(N;\,Q)}{\partial n}\right)_i + p(N)\,g(N;\,Q) = -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} + \frac{p(N)}{r}\right], \quad N \in S. \qquad (194)$$

Таким образом, построение функции Грина сводится к решению первой или третьей предельной задачи для уравнения Лапласа, и мы можем считать установленным существование функции Грина, если S — поверхность Ляпунова.

Для внешней области D_e к определению функции Грина добавляется условие ее регулярности на бесконечности, т. е. $G(P;\,Q)$ при любом фиксированном Q на конечном расстоянии должна стремиться к нулю, если точка P стремится к бесконечности.

Пусть D_i — любая ограниченная область и S — множество ее граничных точек. В D_i существует обобщенное решение задачи Дирихле с предельным условием (193). При этом формула (192) определяет обобщенную функцию Грина для области D_i при предельном условии (189). Если N_0 — регулярная точка границы, то $G(P;\,Q) \to 0$ при $P \to N_0$ Можно доказать и обратное утверждение: если $G(P;\,Q) \to 0$ при $P \to N_0$, то N_0 — регулярная точка границы.

В случае плоскости определение функции Грина совершенно аналогично, но только вместо (192) будет иметь место формула

$$G(P;\,Q) = \frac{1}{2\pi} \lg \frac{1}{r} + g(P;\,Q). \qquad (195)$$

Из формул (192) и (195) следует, что функция Грина обращается в бесконечность при совпадении P и Q, причем *при P до-*

статочно близких к Q функция Грина положительна. Точка Q называется *полюсом функции Грина.* Дальше мы будем рассматривать функцию Грина лишь при предельном условии (189). Покажем, что $G(P; Q)$ *есть непрерывная функция точек P и Q внутри D_i, если эти точки не совпадают.* Принимая во внимание (192), можем утверждать, что доказательство непрерывности $G(P; Q)$ может быть сведено к доказательству непрерывности $g(P; Q)$. Оценим разность $g(P'; Q')-g(P''; Q'')$; добавляя и отнимая $g(P'; Q'')$, получим

$$|g(P'; Q')-g(P''; Q'')|\leqslant \\ \leqslant |g(P'; Q')-g(P'; Q'')|+|g(P'; Q'')-g(P''; Q'')|.$$

Разность $g(P'; Q'')-g(P''; Q'')$ есть разность значений $g(P; Q'')$ в точках P' и P'', и она очевидно стремится к нулю при $P''\to P'$. Разность $g(P'; Q')-g(P'; Q'')$ представляет собою значение в точке P' гармонической функции $g(P; Q')-g(P; Q'')$ с предельными значениями $\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r'}-\frac{1}{r''}\right)$ на S, где r' и r'' расстояния переменной точки N на S от точек Q' и Q''.

Если Q'' достаточно близко к Q', то абсолютное значение разности $\left(\frac{1}{r'}-\frac{1}{r''}\right)$ сколь угодно мало при изменении N на S. Но гармоническая функция $g(P; Q')-g(P; Q'')$ принимает наименьшее и наибольшее значения на границе S, и мы можем утверждать, что $g(P'; Q')-g(P'; Q'')\to 0$ при $Q''\to Q'$. Этим и доказывается непрерывность функции $g(P; Q)$, а тем самым и $G(P; Q)$.

Функция $G(P; Q)$ — положительна в окрестности точки Q и равна нулю на S, и, следовательно, *она положительна внутри области D_i.* То же рассуждение в трехмерном случае годится и для D_e. Выведем еще одно простое неравенство для $G(P; Q)$. Функция $g(P; Q)$ имеет на S отрицательные предельные значения (193). Тем самым, $g(P, Q)<0$ в замкнутой области D_i, и, следовательно,

$$0<G(P; Q)<\frac{1}{4\pi r} \quad \text{внутри} \quad D_i \qquad (r=|PQ|). \tag{196}$$

Такая же оценка справедлива и для D_e.

Проведем теперь рассуждения для случая плоскости. Пусть d — диаметр конечной области B на плоскости, т. е. наибольшее расстояние между двумя точками, принадлежащими замкнутой области $\overline{B}$. Гармоническая функция $g(P; Q)+\frac{1}{2\pi}\lg\frac{1}{d}$ принимает на границе l значения $\frac{1}{2\pi}\lg\frac{r}{d}$ — отрицательные при любом положении полюса Q внутри B. Таким образом, мы имеем

$g(P;Q)+\frac{1}{2\pi}\lg\frac{1}{d}<0$, т. е. $g(P;Q)<-\frac{1}{2\pi}\lg\frac{1}{d}$ внутри B. Это дает нам

$$G(P;Q)<\frac{1}{2\pi}\lg\frac{1}{r}-\frac{1}{2\pi}\lg\frac{1}{d},$$

т. е. имеет место неравенство вида

$$0<G(P;Q)<a\lg\frac{1}{r}+b \qquad (\text{внутри } B), \tag{197}$$

где a и b — постоянные. Неравенства (196) и (197) дают нам оценки функции Грина, зависящие от расстояния r между точками P и Q.

123. Свойства функции Грина. Рассмотрим функцию Грина в D_i, обозначая, как и выше, через r расстояние от переменной точки пространства до точки $Q\in D_i$. Определим функцию

$$v(P)=\begin{cases} g(P;Q), & P\in\bar{D}_i,\\ -\frac{1}{4\pi r}, & P\in D_e.\end{cases} \tag{198}$$

Она — гармоническая, как внутри D_i, так и внутри D_e, и равна нулю на бесконечности. В D_e она имеет производные любого порядка, непрерывные вплоть до S. Мы можем рассматривать $v(P)$ в D_e как решение задачи Неймана с предельными значениями:

$$f(M)=-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right), \qquad M\in S, \tag{199}$$

и можем представить, таким образом, $v(P)$ в D_e как потенциал простого слоя с непрерывной плотностью:

$$v(P)=\iint\limits_S\frac{\mu(N)}{r'}dS \qquad (r'=|NP|). \tag{200}$$

Значения этого потенциала на S равны $\left(-\frac{1}{4\pi r}\right)$, где $r=|MQ|$, т. е. такие же, что и у $g(M;Q)$. Отсюда видно, что формула (200) для функции $v(P)$, определенной равенством (198), справедлива во всем пространстве, т. е.

$$g(P;Q)=\iint\limits_S\frac{\mu(N)}{r'}dS \qquad (P \text{ в } D_i), \tag{201}$$

и, следовательно, $g(P;Q)$ имеет в D_i правильные нормальные производные на S. То же можно, очевидно, утверждать и относительно $G(P;Q)$.

Отметим, в связи с предельным условием (199), что функция $\frac{1}{r}$, при любом положении точки Q внутри D_i, имеет производные всех порядков не только на S, но и в пространстве вблизи S На S правая часть (199) удовлетворяет, очевидно, условию Липшица.

$$|f(N_2)-f(N_1)|\leqslant ar_{1,2} \qquad (r_{1,2}=|N_1N_2|),$$

и мы можем утверждать, что и $\mu(N)$ удовлетворяет условию Липшица [98], и, следовательно, $G(P, Q)$ имеет непрерывные вплоть до S производные первого порядка [100]

Докажем теперь симметрию функции Грина:

$$G(P;\, Q)=G(Q;\, P). \tag{202}$$

При этом заметим, что в силу доказанного выше, $G(P;\, Q)$ имеет правильные нормальные производные на S. Внутри D_i она имеет везде, кроме Q, непрерывные производные. Применим теперь формулу

$$\iiint\limits_{D_i'}(u\,\Delta v-v\,\Delta u)\,d\tau=\iint\limits_{S'}\left(u\,\frac{\partial v}{\partial n}-v\,\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS$$

к функциям $u=G(P;\, Q_1)$ и $v=G(P;\, Q_2)$, выбирая за область интегрирования D_i' область D_i с исключением двух сфер с центрами в точках Q_1 и Q_2 и с малым радиусом ε. Такое применение возможно в силу вышесказанного. Тройной интеграл по этой области обратится в нуль, так как функции Грина вне полюсов удовлетворяют уравнению Лапласа Интеграл по S обратится в нуль, в силу предельного условия (все равно какого), и, таким образом, мы придем к равенству

$$\iint\limits_{S_1}\left[G(P;\, Q_1)\,\frac{\partial G(P,\, Q_2)}{\partial n}-G(P;\, Q_2)\,\frac{\partial G(P,\, Q_1)}{\partial n}\right]dS+\int\limits_{S_2}[\quad]\,dS=0,$$

где S_1 и S_2 — поверхности вышеупомянутых сфер. В точке Q_2 функция $G(P;\, Q_1)$ никаких особенностей не имеет, а функция $G(P;\, Q_2)$ обращается в точке Q_2 в бесконечность порядка $\frac{1}{r}$.

Принимая во внимание, что произведение $\frac{1}{\varepsilon}$ на площадь поверхности сферы $4\pi\varepsilon^2$ стремится к нулю при $\varepsilon\to 0$, мы видим, что единственными членами в написанной формуле, которые не будут стремиться к нулю при $\varepsilon\to 0$, будут те члены, которые содержат нормальную производную от $G(P;\, Q_i)$ в окрестности той точки, где $G=+\infty$. Таких членов будет два, и мы получим, выписав их явно, сумму:

$$\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_2}G(P;\, Q_1)\,\frac{\partial\,\frac{1}{r_2}}{\partial n}\,dS-\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_1}G(P;\, Q_2)\,\frac{\partial\,\frac{1}{r_1}}{\partial n}\,dS+\eta=0,$$

[redacted]

Аналогичные оценки получаются и для других частных производных.

Пусть $u(M)$ есть решение внутренней задачи Дирихле для области D_i, ограниченной поверхностью S, с предельными значениями $f(N)$. Если нам известно, что $u(M)$ имеет правильную нормальную производную, то мы можем применить к $u(P)$ формулу (91), полагая $v = g(P; Q)$. При этом мы получаем (ср. [II; 208])

$$u(Q) = -\iint_S f(N) \frac{\partial G(N, Q)}{\partial n} dS_N. \tag{205}$$

А. М Ляпунов доказал, что эта формула дает решение задачи Дирихле при любом выборе непрерывной функции $f(N)$, входящей в предельное условие Ему же принадлежит и первое строгое доказательство симметричности функции Грина. Эти результаты, а также результаты, относящиеся к теории потенциала, о которых мы говорили выше, содержатся в работе А. М. Ляпунова «О некоторых вопросах, связанных с задачей Дирихле» (1898 г.), о которой мы уже упоминали

124. Функция Грина в случае плоскости. Рассмотрение функции Грина на плоскости представляет некоторые особенности по сравнению со случаем пространства. Мы будем рассматривать функцию Грина для ограниченной области B_i с контуром l при предельном условии (189) на l.

Определим, как и в [123], функцию $v(P)$ на плоскости:

$$v(P) = \begin{cases} g(P; Q) & \text{внутри } l, \\ -\frac{1}{2\pi} \lg \frac{1}{r} & \text{вне } l. \end{cases} \tag{206}$$

Построим, как это мы делали в [123], потенциал простого слоя:

$$v_1(P) = \int_l \mu(s) \lg \frac{1}{r'} ds, \tag{207}$$

где r' есть расстояние от P до переменной точки N на l. Предельные значения его нормальной производной на l со стороны B_e равны

$$f(M) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n} \lg \frac{1}{r} = -\frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{2\pi r}, \qquad M \in l, \tag{208}$$

где $\mathbf{r}$ — направление $\overline{MQ}$ и $\mathbf{n}$ — направление нормали к l в точке M, внешней по отношению к замкнутому контуру l. Составим теперь гармоническую в B_e функцию

$$w(P) = \int_l \mu(s) \lg \frac{1}{r'} ds + \frac{1}{2\pi} \lg \frac{1}{r} \quad \left(\begin{matrix} r = |PQ| \\ Q \text{ внутри } l \end{matrix} \right). \tag{209}$$

имеющую правильную нормальную производную на l, равную нулю. Проведем внутри B_e какой-либо замкнутый обходящий вокруг l контур l', и применим формулу Грина при $u = w(P)$ и $v = 1$ к области, ограниченной l и l'. Мы имеем

$$\int_l \frac{\partial w(P)}{\partial n} ds - \int_{l'} \frac{\partial w(P)}{\partial n} ds = 0,$$

причем в обоих случаях n — есть внешняя нормаль по отношению к замкнутому контуру. Отсюда, в силу того, что $\frac{\partial w(P)}{\partial n} = 0$ на l:

$$\int_{l'} \frac{\partial w(P)}{\partial n} ds = 0 \tag{210}$$

Но

$$\frac{\partial w(P)}{\partial n} = \int_l \mu(s) \frac{\cos(r', n)}{r'} ds + \frac{\cos(r, n)}{2\pi r},$$

где r' ёсть направление $\overline{PN}$, а r — направление $\overline{PQ}$. Интегрируя по l', меняя порядок интегрирования [**IV**$_1$; **16**] и принимая во внимание, что точки Q и N находятся внутри l', получим, в силу (83),

$$2\pi \int_l \mu(s) ds + 1 = 0.$$

Мы можем теперь переписать (209) в виде

$$w(P) = \int_l \mu(s) \lg \frac{r}{r'} ds \quad (r = |PQ|;\ r' = |PN|, \quad N \in l). \tag{211}$$

При беспредельном удалении точки P отношение $\frac{r}{r'}$ равномерно стремится к единице, т. е. при любом заданном положительном ε существует такое положительное число M, что $\left|1 - \frac{r}{r'}\right| \leqslant \varepsilon$ при любом положении N на l, если только $r > M$. Таким образом, функция (211), гармоническая в B_e, имеет на l правильную нормальную производную, равную нулю, и стремится к нулю при беспредельном удалении точки P. К такой функции применима формула

$$\iint_{B_e} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] dS = \int_l w \left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_e ds,$$

из которой следует, что $w(P) = 0$ в B_e, т. е.

$$\int_l \mu(s) \lg \frac{1}{r'} ds = -\frac{1}{2\pi} \lg \frac{1}{r} \quad \text{в} \quad B_e.$$

Отсюда, как и в [123], непосредственно следует, что потенциал простого слоя (207) совпадает с функцией $v(P)$, определенной равенством (206), на всей плоскости, и можно утверждать, что $g(P; Q)$ имеет на l правильную нормальную производную. Далее, как и в [123], можно утверждать, что $g(P; Q)$ имеет в B_i непрерывные производные первого порядка вплоть до l. Доказательство симметричности $G(P; Q)$ проводится совершенно так же, как и в [123]. Для круга радиуса R функция Грина имеет вид

$$G(P;\ Q)=\frac{1}{2\pi}\lg\frac{\rho r_1}{Rr}, \tag{212}$$

при тех же обозначениях, что и в [123]. Это приводит к следующим оценкам:

$$\left|\frac{\partial G(P;\ Q)}{\partial x}\right|\leqslant\frac{1}{\pi r};\quad \left|\frac{\partial G(P;\ Q)}{\partial y}\right|\leqslant\frac{1}{\pi r}. \tag{213}$$

Для решения задачи Дирихле в B_i имеет место формула, аналогичная (205).

Функция Грина оператора Лапласа для плоской односвязной области при предельном условии (189) тесно связана с функцией, совершающей конформное преобразование упомянутой области на круг $|w|<1$ [III$_2$; 37]. Пусть B — односвязная область с контуром l и $z_0=\xi+\eta i$ — некоторая внутренняя точка этой области. Пусть, далее, $w=f(z)$ — функция, совершающая конформное преобразование B на единичный круг, причем $f(z_0)=0$ т. е. точка $z=z_0$ переходит в центр упомянутого круга. При некоторых условиях гладкости контура $f(z)$ непрерывна вплоть до окружности $|z|=1$ и преобразует ее в контур l.

Из однолистности преобразования вытекает, что $f(z)$ имеет в точке $z=z_0$ простой корень:

$$f(z)=(z-z_0)[a_0+a_1(z-z_0)+\ \ldots]\quad (a_0\neq 0). \tag{214}$$

Образуем функцию

$$G(x,\ y;\ \xi,\ \eta)=-\frac{1}{2\pi}\lg|f(z)|. \tag{215}$$

Нетрудно проверить, что это и будет функция Грина для области B с полюсом $(\xi,\ \eta)$. Действительно, $\lg|f(z)|$ представляет собою вещественную часть $\lg f(z)$ и, следовательно, удовлетворяет уравнению Лапласа. Согласно (214), бесконечная часть функции (215) в точке $(\xi,\ \eta)$ будет $\frac{1}{2\pi}\lg\frac{1}{|z-z_0|}$ и, наконец, контур l области B переходит в окружность единичного круга т. е. $|f(z)|=1$ на контуре l, а функция (215) при этом обращается в нуль.

Обозначим через $H(x, y; \xi, \eta)$ функцию, гармонически сопряженную с (215). Мы имеем

$$G + iH = -\frac{1}{2\pi}\lg f(z), \tag{216}$$

и, следовательно, можем выразить $f(z)$ через функцию Грина и сопряженную с ней функцию:

$$f(z) = e^{-2\pi(G+Hi)}.$$

Функция H определена с точностью до постоянного слагаемого, и тем самым в правой части последней формулы мы имеем произвольный постоянный множитель, по модулю равный единице, что соответствует произвольному повороту единичного круга $|w| < 1$ вокруг начала.

Положим, что контур l области B обладает следующим свойством: угол $\theta(s)$, образованный касательной к l с каким-либо фиксированным направлением, как функция длины дуги s, удовлетворяет условию Липшица

$$|\theta(s_2) - \theta(s_1)| \leqslant b\,|s_2 - s_1|^{\beta}, \tag{217}$$

где b и β — положительные постоянные. Доказывается, что при этом производная $f'(z)$ непрерывна вплоть до l, и существуют такие две положительные постоянные m и M, что

$$m \leqslant |f'(z)| \leqslant M. \tag{218}$$

Эти постоянные зависят, конечно, от выбора той точки z_0, которая переходит в начало координат на плоскости w. Зафиксируем эту точку z_0 и будем теперь строить общее конформное преобразование B на круг $|w| < 1$ при условии, что в начало координат переходит какая-либо точка z', лежащая внутри B. Для этого надо совершить сначала конформное преобразование $w = f(z)$, а затем преобразовать круг $|w| \leqslant 1$ в себя так, чтобы точка $f(z')$ перешла в начало координат. Это последнее преобразование есть дробно-линейное преобразование, и окончательно мы получаем, отбрасывая постоянный множитель с модулем, равным единице,

$$-2\pi G(z;\, z') = \operatorname{Re}\left[\lg \frac{f(z) - f(z')}{1 - f(z)\overline{f(z')}}\right],$$

где, как всегда, Re — знак вещественной части и $G(z;\, z')$ — функция Грина области B с полюсом в точке z'. Дифференцируя по x, где за x можно принять любое направление, получим

$$-2\pi\frac{\partial G(z;\, z')}{\partial x} = \operatorname{Re}\left[\frac{f'(z)}{f(z) - f(z')} + \frac{\overline{f(z')}\,f'(z)}{1 - f(z)\overline{f(z')}}\right] =$$
$$= \operatorname{Re}\left\{\frac{f'(z)\,[1 - |f(z')|^2]}{[f(z) - f(z')]\,[1 - f(z)\overline{f(z')}]}\right\},$$

или, заменяя вещественную часть модулем,

$$2\pi\left|\frac{\partial G(z;\, z')}{\partial x}\right| \leqslant \frac{|f'(z)|\,|1 - |f(z')|^2|}{|f(z) - f(z')|\,|1 - f(z)\overline{f(z')}|},$$

и, принимая во внимание, что $|f(z)| < 1$ и $|f(z')| < 1$, получим

$$2\pi\left|\frac{\partial G(z;\, z')}{\partial x}\right| < \frac{|f'(z)|\,|1 - |f(z')|^2|}{|f(z) - f(z')|\,(1 - |f(z')|)} < \frac{2\,|f'(z)|}{|f(z) - f(z')|}. \tag{218$_1$}$$

Пусть $z=\varphi(w)$ — функция, обратная функции $w=f(z)$. Она определена в круге $|w|\leqslant 1$. Из (218) следует, что $|\varphi'(w)|\leqslant\frac{1}{m}$, и мы получаем

$$|\varphi(w)-\varphi(w')|=\left|\int\limits_{w}^{w'}\varphi'(\tau)\,d\tau\right|\leqslant\frac{1}{m}|w-w'|,$$

причем указанное интегрирование можно производить по прямолинейному отрезку. Последнее неравенство даст $|f(z)-f(z')|\geqslant m|z-z'|$, и, принимая во внимание (218_1), получаем, в силу последнего неравенства

$$\left|\frac{\partial G(z;z')}{\partial x}\right|\leqslant\frac{2M}{2\pi m|z-z'|}=\frac{M}{\pi mr},\tag{219}$$

где r — расстояние точек z и z'. Таким образом, при сделанном относительно контура l предположении, мы получаем оценку производной функции Грина по любому направлению, зависящую только от расстояния r.

Если область B — многосвязна, и каждый из ограничивающих ее замкнутых контуров удовлетворяет указанному выше условию, то можно и в этом случае получить оценку вида (219). Указанное выше доказательство оценки (219), а также и доказательство для многосвязной области, которое я не привожу, было мне сообщено Г. М. Голузиным.

125. Примеры. Обратимся теперь к примерам построения функции Грина и начнем с построения этой функции для круга $|z|<1$. Мы имели раньше функцию, преобразующую этот круг в себя, при условии, что некоторая точка $\alpha=\xi+\eta i$, находящаяся внутри круга, переходит в начало. Эту функцию можно записать в виде [III_2; 33]

$$w=\frac{e^{i\psi}}{\bar{\alpha}}\cdot\frac{z-\alpha}{z-\alpha'},$$

где $\bar{\alpha}$ — комплексное число, сопряженное с α, и α' — точка, симметричная с α относительно окружности, т. е. $\alpha'=\bar{\alpha}^{-1}$. Обозначая через r_1 и r_2 расстояния переменной точки z' до точек α и α', получим непосредственно следующее выражение функции Грина для круга;

$$G(z\cdot\alpha)=-\frac{1}{2\pi}\lg\left|\frac{e^{i\psi}}{\bar{\alpha}}\cdot\frac{z-\alpha}{z-\alpha'}\right|=-\frac{1}{2\pi}\lg\frac{r_1}{r_2}+\frac{1}{2\pi}\lg\sqrt{\xi^2+\eta^2}.$$

Положим теперь, что область B есть прямоугольник с вершинами $(0,0)$, $(0,a)$, (a,b), $(0,b)$. Полагая $\omega_1=2a$ и $\omega_2=2bi$, строим функцию Вейерштрасса $\sigma(z;\omega_1,\omega_2)$. Мы видели, что функция, преобразующая наш прямоугольник в единичный круг так, что точка $z=\xi+\eta i$ переходит в начало, имеет вид [III_2; 189]

$$f(z)=e^{i\psi}\frac{\sigma(z-\xi-\eta i)\,\sigma(z+\xi+\eta i)}{\sigma(z-\xi+\eta i)\,\sigma(z+\xi-\eta i)}.$$

Таким образом, мы имеем следующее выражение функции Грина для прямоугольника:

$$G(z\ \alpha)=-\frac{1}{2\pi}\lg\left|\frac{\sigma(z-\xi-\eta i)\,\sigma(z+\xi+\eta i)}{\sigma(z-\xi+\eta i)\,\sigma(z+\xi-\eta i)}\right|.$$

Теория функций комплексного переменного может быть применена и при построении функций Грина для многосвязной области, причем мы, как и выше, ограничиваемся предельным условием (189) на l. Пусть B, например, — двусвязная область, ограниченная внешним контуром l_1 и внутренним l_2, и пусть $G(z;\alpha)$ — функция Грина этой области. Строим функцию $H(z;\alpha)$, гармонически сопряженную с $G(z;a)$, и функцию комплексного переменного $\varphi(z) = G(z;\alpha) + H(z,\alpha)i$. В точке $z = \alpha$, которая является полюсом функции Грина, функция $\varphi(z)$ будет иметь логарифмическую особенность, а именно, в окрестности этой точки она может быть представлена в виде суммы $-\frac{1}{2\pi}\lg(z-\alpha)$ и слагаемого, регулярного в этой точке. Но, кроме того, при обходе по замкнутому контуру вокруг l_2 функция $\varphi(z)$ будет приобретать некоторое чисто мнимое слагаемое γi, а функция $f(z) = e^{-2\pi\varphi(z)}$ будет приобретать множитель $e^{2\pi\gamma i}$, по модулю равный единице. Кроме того, эта последняя функция будет иметь в точке $z = \alpha$ простой корень, а на контурах l_1 и l_2 ее модуль будет равняться единице, так как на этих контурах функция Грина $G(z;\alpha)$ обращается в нуль. Таким образом, построение функции Грина сводится к построению такой аналитической функции $f(z)$, которая имеет внутри многосвязной области B однозначный модуль, равный единице на контуре области, и точку $z = a$ имеет единственным простым корнем.

В качестве примера рассмотрим случай кольца, ограниченного двумя концентрическими окружностями. Примем центр этих окружностей за начало и будем считать, что радиусы этих окружностей равны $h^{-1/2}$ и $h^{1/2}$, где $0 < h < 1$ Этого всегда можно достигнуть при помощи подходящим образом выбранного преобразования подобия. Введем вместо z новую переменную v по формуле $z = e^{i\pi v}$ и рассмотрим наряду с h чисто мнимое число $\tau = ci$ $(c > 0)$, определенное формулой $h = e^{\pi\tau i}$. Упомянутому выше кольцу соответствует на плоскости v часть полосы, образованной прямыми $y = \pm\frac{c}{2}$, параллельными вещественной оси, и ограниченной двумя прямыми, параллельными мнимой оси, отстоящими друг от друга на расстоянии, равном двум

Функция $f(z)$ как функция от v должна быть аналитической функцией во всей упомянутой полосе. Переход от v к $(v+2)$ равносилен обходу вокруг начала в кольце, и при этом $f(z)$ должна приобретать множитель, по модулю равный единице. На границах $y = \pm\frac{c}{2}$ полосы должно быть выполнено условие $|f(z)| = 1$, и если $z = \alpha$ есть полюс функции Грина в плоскости z, то функция $f(z)$ как функция от v должна иметь простые корни в точках β, определяемых равенством $\alpha = e^{\pi\beta i}$. Этими точками и должны исчерпываться все корни $f(z)$ внутри полосы. Мы можем считать α вещественным положительным числом. Этого всегда можно достигнуть простым поворотом кольца вокруг начала Нетрудно проверить, что функция

$$f(z) = z^{\frac{\lg\alpha}{\lg h}}\frac{\vartheta_1\left(\frac{v}{2}-\frac{\beta}{2}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{v}{2}+\frac{\beta}{2}\right)} = e^{-\frac{\pi\beta}{\tau}vi}\frac{\vartheta_1\left(\frac{v}{2}-\frac{\beta}{2}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{v}{2}+\frac{\beta}{2}\right)}$$

будет удовлетворять всем поставленным выше условиям. В написанной формуле $\vartheta_0(v)$ и $\vartheta_1(v)$ суть функции, определенные нами в **[III₂; 177]**, и буквой β мы обозначили для определенности чисто мнимое решение уравнения $\alpha = e^{\pi\beta i}$. Для проверки всех свойств функции $f(z)$ нам надо использовать таблицы (109) и (110) из **[III₂; 178]**, а также тот факт, что при вещественных h функции $\vartheta_k(v)$ имеют мнимые сопряженные значения для мнимых сопряженных значений v. Имея функцию $f(z)$, мы получим функцию Грина по формуле

$$G(z;\alpha) = -\frac{1}{2\pi}\lg|f(z)|.$$

126. Функция Грина и неоднородное уравнение. Рассмотрим неоднородное уравнение

$$\Delta u(P) = -\varphi(P) \tag{220}$$

в области D_i, ограниченной поверхностью S. Мы считаем, что $\varphi(P)$ непрерывна в D_i вплоть до S и имеет внутри D_i непрерывные производные первого порядка. Ищем решение (220), непрерывное вплоть до S и удовлетворяющее предельному условию

$$u|_S = 0. \tag{221}$$

Такое решение может быть только одно. Это непосредственно следует из того, что разность двух решений уравнения (220) при условии (221) должна удовлетворять уравнению Лапласа и условию (221), т. е. должна равняться тождественно нулю. Покажем, что *искомое решение имеет вид*

$$u(P) = \iiint\limits_{D_i} G(P;\ Q)\,\varphi(Q)\,d\tau_Q, \tag{222}$$

или иначе:

$$u(x,\ y,\ z) = \iiint\limits_{D_i} G(x,\ y,\ z;\ \xi,\ \eta,\ \zeta)\,\varphi(\xi,\ \eta,\ \zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta. \tag{223}$$

В силу (192) можем написать:

$$u(P) = \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{D_i} \varphi(Q)\frac{1}{r}\,d\tau + \iiint\limits_{D_i} g(P;\ Q)\,\varphi(Q)\,d\tau. \tag{224}$$

Первое слагаемое имеет внутри D_i непрерывные производные до второго порядка, и оператор Лапласа от него равен $[-\varphi(P)]$ [II; 211]. Покажем, что второе слагаемое можно дифференцировать по координатам $(x,\ y,\ z)$ точки P сколько угодно раз под знаком интеграла. Отсюда будет следовать, что оно представляет собою гармоническую внутри D_i функцию, ибо $g(P;\ Q)$ — гармоническая функция точки P. Сделаем сначала одно замечание. Пусть предельные значения $f(N;\ a)$ гармонической функции зависят от параметра a. При этом и сама гармоническая функция $u(P;\ a)$ зависит от a. Если при $a \to a_0$ мы имеем $f(N;\ a) \to f(N;\ a_0)$ равномерно на S, то $u(P;\ a) \to u(P;\ a_0)$ равномерно в замкнутой области D_i [103].

Так как $g(P,\ Q) = g(Q,\ P)$, то функция $g(P;\ Q)$ есть гармоническая функция точки $Q(\xi,\ \eta,\ \zeta)$ [122] с предельными значениями $\left(-\frac{1}{4\pi r^0}\right)$, где $r^0 = \sqrt{(x-\xi^0)^2 + (y-\eta^0)^2 + (z-\zeta^0)^2}$, а $Q^0(\xi^0,\ \eta^0,\ \zeta^0) \in S$. Мы считаем, что P находится внутри D_i.

Функция

$$\frac{g(x+\Delta x, y, z; \xi, \eta, \zeta) - g(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)}{\Delta x} \tag{225}$$

есть гармоническая функция точки (ξ, η, ζ) с предельными значениями

$$-\frac{1}{4\pi \Delta x}\left[\frac{1}{\sqrt{(x+\Delta x-\xi^0)^2+(y-\eta^0)^2+(z-\zeta^0)^2}} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{\sqrt{(x-\xi^0)^2+(y-\eta^0)^2+(z-\zeta^0)^2}}\right].$$

При $\Delta x \to 0$ эти предельные значения равномерно на S стремятся к

$$-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r^0}\right), \tag{226}$$

и отсюда непосредственно вытекает, что отношение (225) равномерно по $(\xi, \eta, \zeta) \in \bar{D}_i$ стремится к гармонической функции точки (ξ, η, ζ) с предельными значениями (226). Аналогичные рассуждения применимы и для других производных до любого порядка. Таким образом, функция $g(P; Q)$ имеет непрерывные производные всех порядков по координатам точки P, когда P D_i, а $Q \in \bar{D}_i$. Отсюда и вытекает непосредственно возможность дифференцировать второе слагаемое формулы (224) по (x, y, z) под знаком интеграла.

Остается доказать, что функция $u(M)$, определяемая формулой (222), удовлетворяет предельному условию (221). По существу это вытекает из того, что $G(P; Q)$, как функция от P, удовлетворяет этому условию. Недостаточность такого рассуждения заключается в том, что при интегрировании точка Q может быть сколь угодно близкой к S, а с другой стороны, и точка P при проверке условия (221) должна стремиться к S. При этом поведение функции $G(P; Q)$ неясно.

Проведем строгое доказательство того, что функция (222) удовлетворяет условию (221) в любой точке $N_0 \in S$. Пусть D_i' — часть области D_i, находящаяся вне сферы с центром N_0 и радиусом d_1, и D_i'' — часть D_i, находящаяся внутри этой сферы. Если задано положительное число ε, то, принимая во внимание оценку (196), мы можем взять d_1 настолько малым, чтобы интеграл, входящий в формулу (222) и взятый по D_i'', был по абсолютной величине меньше $\frac{\varepsilon}{2}$ при любом положении точки P внутри упомянутой сферы. При интегрировании по D_i' точка Q принадлежит D_i', а точку P мы считаем находящейся в малой окрестности точки N_0, например, внутри сферы с центром N_0 и радиусом $\frac{d_1}{2}$. При этом расстояние $|PQ|$ больше $\frac{d_1}{2}$, и из **[122]** следует, что $G(P; Q)$ — непрерывная функция пары точек $(P; Q)$.

Таким образом, в интеграле по D'_l мы можем переходить к пределу по P при $P \to N_0$, и этот предел равен нулю, ибо $G(P; Q)$ удовлетворяет условию (221). Таким образом, интеграл по D'_l будет по абсолютной величине меньше $\frac{\varepsilon}{2}$, если P достаточно близко к N_0, а следовательно, и весь интеграл, входящий в формулу (222), будет по абсолютной величине меньше ε, если P достаточно близко к N_0. Отсюда, ввиду произвольности ε, и следует, что этот интеграл удовлетворяет условию (221). Таким образом, наше утверждение о том, что формула (222) дает решение уравнения (220), удовлетворяющее условию (221), полностью доказано.

Замечание 1. При доказательстве существования непрерывных производных второго порядка у объемного потенциала и формулы Пуассона достаточно предположить, что его плотность удовлетворяет в D_l условию Липшица — вместо существования непрерывных производных первого порядка (см., например **Гюнтер Н. М.** Теория потенциала... — Париж, 1934). Таким образом, наше утверждение о том, что формула (222) дает решение задачи (220), (221), справедливо, если $\varphi(P)$ удовлетворяет условию Липшица:

$$|\varphi(P_2) - \varphi(P_1)| \leqslant b r_{1,2}^{\beta} \quad (r_{1,2} = |P_1 P_2|). \tag{227}$$

Если $\varphi(P)$ только непрерывна в замкнутой области D_l, то мы уже не можем утверждать, что первое слагаемое правой части формулы (224) имеет непрерывные производные до второго порядка и удовлетворяет уравнению (220). Но остается в силе доказательство того, что второе слагаемое упомянутой формулы есть гармоническая внутри D_l функция и что $u(M)$, определяемая формулой (222), удовлетворяет условию (221).

Принимая во внимание, что объемный потенциал с непрерывной плотностью является обобщенным решением уравнения (220) [62], мы можем утверждать, что формула (222) при непрерывности $\varphi(P)$ в замкнутой области D_l дает обобщенное решение уравнения (220), удовлетворяющее условию (221).

Покажем, что такое решение единственно. Положим, что существуют два непрерывных обобщенных решения $u_1(M)$ и $u_2(M)$ уравнения (220), удовлетворяющих условию (221). Мы имеем

$$\iiint_{D_l} u_1 \Delta\sigma \, d\tau = -\iiint_{D_l} \varphi\sigma \, d\tau;$$

$$\iiint_{D_l} u_2 \Delta\sigma \, d\tau = -\iiint_{D_l} \varphi\sigma \, d\tau,$$

где σ — любая функция с непрерывными производными до второго порядка в D_l, равная нулю во всех точках, достаточно близких к S. Вычитая почленно, получим

$$\iiint\limits_{D_i} (u_2 - u_1)\,\Delta\sigma\,d\tau = 0,$$

откуда следует, что $(u_2 - u_1)$ — гармоническая внутри D_i функция [62]. Из того, что $(u_2 - u_1)$ — непрерывна вплоть до S и равна нулю на S, следует, что u_2 тождественна с u_1 в D_i.

Таким образом, при любой непрерывной функции $\varphi(P)$ формула (222) дает единственное обобщенное решение уравнения (220), удовлетворяющее условию (221). Это решение имеет в D_i непрерывные производные первого порядка [**II; 210**].

Замечание 2. Положим, что нам дана функция $u(P)$, непрерывная в замкнутой области $\bar{D}_i$, удовлетворяющая условию (221) и имеющая внутри D_i непрерывные производные до второго порядка, такие, что оператор Лапласа $\Delta u(P)$ непрерывен вплоть до S. Подставляя эту функцию в левую часть уравнения (220), мы получим функцию $\varphi(P)$ — непрерывную в замкнутой области $\bar{D}_i$. Функция $u(P)$ является, очевидно, как обычным, так и обобщенным решением уравнения (220), удовлетворяющим условию (221), а потому эта функция $u(P)$ должна выражаться формулой (222) через $\varphi(P)$.

Все сказанное переносится и на двумерный случай, когда уравнение (220) имеет вид

$$\Delta u(x, y) = -\varphi(x, y). \tag{228}$$

Его решение в области B с контуром l, удовлетворяющее предельному условию

$$u|_l = 0, \tag{229}$$

дается формулой

$$u(x, y) = \iint\limits_B G(x, y; \xi, \eta)\,\varphi(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta. \tag{230}$$

127. Собственные значения и собственные функции. Доказанное выше основное свойство функции Грина в отношении неоднородного уравнения (220) лежит в основе применения функции Грина к решению предельной задачи для уравнения

$$\Delta v + \lambda v = 0 \quad (\text{внутри } D_i), \tag{231}$$

при предельном условии

$$v|_S = 0, \tag{232}$$

а это связано с решением предельных задач для волнового уравнения и уравнения теплопроводности, о чем будет подробнее сказано позже.

Перенося λv направо, мы докажем, как и в [75], что поставленная задача (231), (232) равносильна интегральному уравнению

$$v(P)=\lambda\iiint\limits_{D_i} G(P;\,Q)\,v(Q)\,d\tau \tag{233}$$

с симметричным ядром. Ядро этого уравнения обращается в бесконечность при совпадении P и Q, но к нему применима вся теория из [**IV**$_1$; **17**] ибо, в силу (196), полярность ядра имеет порядок $\frac{1}{r}$:

$$G(P;\,Q)=\frac{K(P;\,Q)}{r}, \tag{234}$$

где $K(P;\,Q)$ — ограниченная функция.

Представим уравнение (233) в виде

$$v(P)=\frac{\lambda}{4\pi}\iiint\limits_{D_i} v(Q)\,\frac{1}{r}d\tau+\lambda\iiint\limits_{D_i} g(P;\,Q)\,v(Q)\,d\tau \quad (r=|PQ|). \tag{235}$$

Если $v(P)$ есть непрерывное решение этого уравнения, то первое слагаемое правой части имеет, как потенциал масс, распределенных по D_i с непрерывной плотностью, непрерывные первые производные внутри D_i, а второе слагаемое правой части имеет внутри D_i, как мы видели выше, непрерывные производные любого порядка, и, следовательно, $v(P)$ имеет непрерывные производные первого порядка внутри D_i. Но при этом, как мы знаем [**II**; **211**], первое слагаемое правой части имеет внутри непрерывные производные до второго порядка. Тем самым, в силу сказанного выше, и $v(P)$ имеет непрерывные производные второго порядка. Применяя к обеим частям (235) оператор Δ, убедимся, что $\Delta v=-\lambda v$. Предельное условие (232) тоже удовлетворяется, как это мы видели в [**126**]. Наоборот, из (231) и (232), как мы видели в [**126**], следует уравнение (233). Таким образом, мы показали равносильность уравнения (231) с предельным условием (232) интегральному уравнению (233). Для ядра этого интегрального уравнения мы имеем (234), откуда непосредственно следует неравенство

$$\iiint\limits_{D_i} G^2(P;\,Q)\,d\tau\leqslant C, \tag{236}$$

где C — некоторая постоянная.

Пусть λ_k и $v_k(P)$ — собственные значения и собственные функции уравнения (233) или, что то же, задачи (231), (232):

$$\Delta v_k + \lambda_k v_k = 0 \quad (\text{внутри } D_i); \tag{237$_1$}$$

$$v_k|_S = 0. \tag{237$_2$}$$

Можно считать, что $v_k(P)$ образуют в D_i ортогональную нормированную систему:

$$\iiint\limits_{D_i} v_l(P)\, v_m(P)\, d\tau = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad l \neq m, \\ 1 & \text{при} \quad l = m. \end{cases} \tag{238}$$

Пусть функция $\omega(P)$ и ее производные до второго порядка непрерывны в D_i вплоть до S, и пусть эта функция удовлетворяет условию (232). Мы можем представить ее в виде **[126]**

$$\omega(P) = -\iiint\limits_{D_i} G(P;\, Q)\, \Delta\omega(Q)\, d\tau, \tag{239}$$

и, применяя основную теорему разложения из **[IV$_1$; 31]**, мы можем утверждать, что $\omega(P)$ разлагается в ряд Фурье по собственным функциям:

$$\omega(P) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k v_k(P), \tag{240}$$

причем этот ряд регулярно сходится в замкнутой области $\bar{D}_i$. Коэффициенты определяются обычным образом:

$$c_k = \iiint\limits_{D_i} \omega(P)\, v_k(P)\, d\tau. \tag{241}$$

Таким образом, мы имеем:

Теорема *Всякая функция $\omega(P)$ непрерывная, с непрерывными производными до второго порядка в замкнутой области $\bar{D}_i$ и удовлетворяющая условию* (232), *разлагается в ряд Фурье по собственным функциям $v_k(P)$, регулярно сходящийся в замкнутой области $\bar{D}_i$*

Дальше мы покажем, что число собственных значений λ_k бесконечно Мы это использовали при записи ряда (240). Из равномерной сходимости ряда (240) следует, что если $\omega(P)$ удовлетворяет указанным в теореме условиям, то имеет место уравнение замкнутости.

$$\iiint\limits_{D_i} \omega^2(P)\, d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2. \tag{242}$$

В дальнейшем мы докажем, что это уравнение справедливо и для любой непрерывной в замкнутой области $\bar{D}_l$ функции. Нетрудно показать, что если ряд Фурье

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k(P) \tag{243}$$

некоторой непрерывной в замкнутой области $\bar{D}_l$ функции $\omega_1(P)$ равномерно сходится в $\bar{D}_l$, то его сумма равна $\omega_1(P)$. Обозначая через $\omega_2(P)$ сумму ряда (243), рассмотрим функцию $\omega_2(P) - \omega_1(P)$, непрерывную в $\bar{D}_l$ и ортогональную ко всем собственным функциям $v_k(P)$. Тем самым она ортогональна и к ядру, т. е

$$\iiint_{D_l} G(P;\, Q)\,[\omega_2(Q) - \omega_1(Q)]\, d\tau = 0 \qquad (P \quad \text{в} \quad \bar{D}_l).$$

Отсюда видно, что обобщенное решение уравнения

$$\Delta u(P) = \omega_1(P) - \omega_2(P)$$

при условии (232) есть $u(P) \equiv 0$, и, следовательно, $\omega_2(P)$ совпадает с $\omega_1(P)$.

Из последних рассуждений непосредственно следует, что ядро $G(P, Q)$ — полное ядро (ср. [77]), и тем самым имеется бесчисленное множество собственных значений λ_k [IV_1; 42] Покажем теперь, что уравнение замкнутости (242) имеет место для любой непрерывной в $\bar{D}_l$ функции $\omega(P)$. Такая функция обязательно ограничена, т е существует такое положительное число M, что $|\omega(P)| \leqslant M$. Пусть ε — заданное положительное число. Выберем замкнутую область $\bar{D}'_l$, лежащую внутри D_l, так, чтобы объем $(D_l - D'_l)$ был меньше $\frac{\varepsilon}{32M^2}$ Проведем внутри $(D_l - D'_l)$ замкнутую поверхность S', содержащую D'_l внутри себя, и определим функцию $\varphi(P)$ так, чтобы она была равна $\omega(P)$ в замкнутой области $\bar{D}'_l$ и равна нулю на S' и вне S'. Эту функцию можно распространить на все пространство так, что она будет непрерывной и будет удовлетворять неравенству $|\varphi(P)| \leqslant M$ [59]. Пусть $\varphi_n(P)$ — средние функции для $\varphi(P)$. Они имеют производные всех порядков, при всех достаточно больших значениях n, равны нулю на поверхности S и удовлетворяют неравенству $|\varphi_n(P)| \leqslant M$. Функции $\varphi_n(P)$ равномерно в $\bar{D}'_l$ стремятся к $\omega(P)$, и мы можем фиксировать настолько большое n, чтобы иметь

$$\iiint_{D'_l} [\omega(P) - \varphi_n(P)]^2\, d\tau \leqslant \frac{\varepsilon}{4}.$$

Для функций $\varphi_n(P)$ мы имеем, в силу сказанного выше, уравнение замкнутости, т. е. существует такое число N, что

$$\iiint\limits_{D_l} [\varphi_n(P) - s_m(\varphi_n)]^2 \, d\tau \leqslant \frac{\varepsilon}{8} \quad \text{при} \quad m \geqslant N,$$

где $s_m(\varphi_n)$ — отрезок ряда Фурье функции $\varphi_n(P)$. Принимая во внимание неравенство $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$, можем написать:

$$\iiint\limits_{D_l} [\omega(P) - s_m(\varphi_n)]^2 \, d\tau =$$

$$= \iiint\limits_{D_l} \{[\omega(P) - \varphi_n(P)] + [\varphi_n(P) - s_m(\varphi_n)]\}^2 \, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant 2 \iiint\limits_{D_l} [\omega(P) - \varphi_n(P)]^2 \, d\tau + 2 \iiint\limits_{D_l} [\varphi_n(P) - s_m(\varphi_n)]^2 \, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant 2 \iiint\limits_{D_l} [\omega(P) - \varphi_n(P)]^2 \, d\tau + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Мы имеем далее

$$2 \iiint\limits_{D_l} [\omega(P) - \varphi_n(P)]^2 \, d\tau = 2 \iiint\limits_{D_l - D'_l} [\omega(P) - \varphi_n(P)]^2 \, d\tau +$$

$$+ 2 \iiint\limits_{D'_l} [\omega(P) - \varphi_n(P)]^2 \, d\tau \leqslant 2 \iiint\limits_{D_l - D'_l} [\omega(P) - \varphi_n(P)]^2 \, d\tau + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Для последнего интеграла мы используем неравенство

$$|\omega(P) - \varphi_n(P)|^2 \leqslant 4M^2$$

и получаем

$$2 \iiint\limits_{D_l - D'_l} [\omega(P) - \varphi_n(P)]^2 \, d\tau \leqslant 8M^2 \cdot \text{объем}\,(D_l - D'_l) < \frac{\varepsilon}{4},$$

после чего предыдущие неравенства дают

$$\iiint\limits_{D_l} [\omega(P) - s_m(\varphi_n)]^2 \, d\tau < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{при} \quad m \geqslant N$$

и тем более [**IV**$_1$; 3]

$$\iiint\limits_{D_l} [\omega(P) - s_m(\omega)]^2 \, d\tau < \varepsilon \quad \text{при} \quad m \geqslant N,$$

откуда, ввиду произвольности ε, и следует уравнение замкнутости для $\omega(P)$.

Отметим еще, что из (236) следует, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2}$$

является сходящимся рядом [IV_1; 3]. Нетрудно доказать уравнение замкнутости и для неограниченных функций указанного в [IV_1; 3] типа и, в частности, для функции Грина $G(P; Q)$.

128. Нормальная производная собственных функций. Для дальнейшего нам важно изучить поведение производных функций $v_k(P)$ при приближении к S.

Теорема. *Функции $v_k(P)$ имеют правильную нормальную производную на S.*

Составим потенциал объемных масс:

$$u(P) = \frac{\lambda_k}{4\pi} \iiint\limits_{D_i} \frac{v_k(Q)}{r}\, d\tau \qquad (r = |PQ|).$$

Он определен во всем пространстве, непрерывен, имеет непрерывные производные первого порядка, равен нулю на бесконечности, есть гармоническая функция внутри D_e, а внутри D_i имеет непрерывные производные до второго порядка и удовлетворяет уравнению:

$$\Delta u = -\lambda_k v_k. \tag{244}$$

Мы можем построить потенциал простого слоя:

$$v(P) = \iint\limits_{S} \frac{\mu(N)}{r}\, dS,$$

удовлетворяющий на S предельному условию:

$$\left(\frac{\partial v(N)}{\partial n}\right)_e = \frac{\partial u(N)}{\partial n},$$

причем надо иметь в виду, что $u(P)$ имеет производные первого порядка, непрерывные во всем пространстве. Составим функцию:

$$w(P) = u(P) - v(P).$$

Она гармоническая внутри D_e, равна нулю на бесконечности и имеет на S правильную нормальную производную извне, равную нулю. К функции $w(P)$ применима в D_e формула Грина [102], из которой следует, что $w(P) \equiv 0$ в D_e, а тем самым и на S. Внутри D_i функция $w(P)$ удовлетворяет, в силу (244), уравнению

$$\Delta w = \Delta u - \Delta v = -\lambda_k v_k,$$

откуда следует, что в D_i функция $w(P)$ совпадает с $v_k(P)$, т. е.

$$v_k(P) = u(P) - v(P) \qquad (P \text{ из } D_i),$$

где $u(P)$ и $v(P)$ определены выше. Из этого и свойств u и v следует, что *собственная функция $v_k(P)$ имеет на S правильную нормальную производную*. Благодаря этому, мы можем применить к функции $v_k(P)$ (не гармонической) формулу Грина:

$$\iiint\limits_{D_i} \left[\left(\frac{\partial v_k}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_k}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_k}{\partial z}\right)^2\right] d\tau =$$

$$= \iint\limits_S v_k \left(\frac{\partial v_k}{\partial n}\right)_i dS - \iiint\limits_{D_i} v_k \, \Delta v_k \, d\tau.$$

Принимая во внимание уравнение $\Delta v_k = -\lambda_k v_k$ и условие (237_2), а также нормированность функций $v_k(P)$, т. е.

$$\iiint\limits_{D_i} v_k^2(P) \, d\tau = 1,$$

мы получаем формулу

$$\lambda_k = \iiint \left[\left(\frac{\partial v_k}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_k}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_k}{\partial z}\right)^2\right] d\tau. \qquad (245)$$

$\leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \ldots$ Мы знаем, что λ_1 есть наименьшее значение интеграла:

$$\iiint\limits_{D_i} \iiint\limits_{D_i} G(P;\, Q)\,\omega(P)\,\omega(Q)\,d\tau_P\,d\tau_Q \tag{246}$$

в классе непрерывных функций $\omega(P)$, удовлетворяющих условию

$$\iiint\limits_{D_i} \left[\iiint\limits_{D_i} G(P;\, Q)\,\omega(Q)\,d\tau_Q\right]^2 d\tau_P = 1,$$

и это наименьшее значение достигается при $\omega(P) = v_1(P)$. Значки у $d\tau$ указывают на точку, которая является переменной интегрирования. Порядок интегрирования в интеграле (246) в отношении точек P и Q — безразличен (ср. [**IV**$_1$; **16**]).

Для получения следующих собственных значений и функций надо добавлять условия ортогональности:

$$\iiint\limits_{D_i} \omega(P)\,v_k(P)\,d\tau = 0 \qquad (k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n-1).$$

Вводя класс A функций, представимых через ядро,

$$v(P) = \iiint\limits_{D_i} G(P;\, Q)\,\omega(Q)\,d\tau_Q,$$

где $\omega(Q)$ — любая непрерывная в $\bar{D}_i$ функция, мы можем указанную выше задачу сформулировать как задачу на минимум интеграла

$$\iiint\limits_{D_i} v(P)\,\omega(P)\,d\tau \quad \text{при условии} \quad \iiint\limits_{D_i} v^2(P)\,d\tau = 1$$

в упомянутом выше классе A функций $v(P)$.

Этот класс функций есть класс обобщенных решений уравнения Пуассона

$$\Delta v(P) = -\,\omega(P),$$

равных нулю на S, при любых непрерывных в $\bar{D}_i$ функциях $\omega(P)$, и окончательно мы можем говорить о минимуме интеграла

$$-\iiint\limits_{D_i} v\,\Delta v\,d\tau \tag{247}$$

в классе A, где Δv — обобщенный оператор Лапласа. Указанные выше условия ортогональности, как и в [88], сводятся к условиям ортогональности для $v(P)$:

$$\iiint\limits_{D_i} v(P)\,v_k(P)\,d\tau = 0 \qquad (k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n-1). \tag{248}$$

Функции $v(P)$ класса A имеют внутри D_i непрерывные производные первого порядка, и, повторяя дословно рассуждения из [128], мы докажем, что $v(P)$ имеет на S правильную нормальную производную.

Определим теперь класс функций A_1, являющийся частью класса A. Класс A_1 есть множество функций $v(P)$, обладающих следующими свойствами: функции $v(P)$ непрерывны в замкнутой области $\bar{D}_i$ и равны нулю на S, внутри D_i эти функции имеют непрерывные производные до второго порядка, причем их оператор Лапласа Δv непрерывен вплоть до S. К классу A_1 принадлежат все собственные функции $v_n(P)$. Если $v(P)$ принадлежит классу A_1, то мы можем применить к интегралу (247) формулу Грина, и, принимая во внимание, что $v(P)=0$ на S, можем вместо интеграла (247) написать интеграл

$$\iiint\limits_{D_i} (v_x^2+v_y^2+v_z^2)\,d\tau. \tag{249$_1$}$$

Таким образом, мы можем утверждать, что λ_1 есть наименьшее значение этого интеграла в классе A_1 при условии

$$\iiint\limits_{D_i} v^2\,d\tau = 1, \tag{249$_2$}$$

и это наименьшее значение достигается при $v(P)=v_1(P)$. Для получения следующих собственных значений и функций надо добавлять упомянутые выше условия ортогональности (248) к уже найденным собственным функциям. Можно показать, что формула Грина

$$\iiint\limits_{D_i} (v_x^2+v_y^2+v_z^2)\,d\tau = -\iiint\limits_{D_i} v\,\Delta v\,d\tau,$$

где Δv — обобщенный оператор Лапласа, имеет место для любой функции v из класса A.

Таким образом, указанные выше экстремальные свойства собственных значений и собственных функций имеют место и для всего класса A. В [150] мы покажем, что эти экстремальные свойства имеют место и в гораздо более широком классе функций. Обратим внимание, что в [143] и далее мы записываем спектральную задачу в виде $Lu=\lambda u$, $u|_S=0$, и соответствующие ей λ, для которых $u\not\equiv 0$, называем собственными значениями L при первом краевом условии.

130. Уравнение Гельмгольца и принцип излучения. Рассмотрим волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\,\Delta u \tag{250}$$

и будем искать его решение в виде установившегося синусоидального режима заданной частоты:

$$u = e^{i\omega t} v. \tag{251}$$

Для v мы получаем *уравнение Гельмгольца*:

$$\Delta v + k^2 v = 0 \qquad (k = \omega : a), \tag{252}$$

по виду схожее с уравнением Лапласа. Выясним, прежде всего, условие, которому должны удовлетворять решения этого уравнения на бесконечности. Мы уже упоминали об этом условии в **[III₂; 155]** и назвали его *принципом излучения*. Мы дадим в настоящем параграфе точную математическую формулировку этого условия. Пусть имеется установившийся режим вне некоторой поверхности S. Проведем сферу S_ρ с центром в некоторой точке M, находящейся вне S, и достаточно большим радиусом, так, чтобы S лежала внутри S_ρ, и применим формулу Кирхгофа **[II; 212]** (в ней $r = |MN|$, а $N \in S$):

$$u(M;\ t) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{S+S_\rho} \left[\frac{1}{r} \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right] + \frac{1}{ar} \left[\frac{\partial u}{\partial t} \right] \frac{\partial r}{\partial n} - [u] \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right] dS$$

к решению (251). В написанной формуле интегрирование совершается по S и S_ρ. Для решения (251) мы имеем при $t > \rho/a$

$$[u] = e^{i\omega \left(t - \frac{r}{a}\right)} v; \quad \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right] = e^{i\omega \left(t - \frac{r}{a}\right)} \frac{\partial v}{\partial n}; \quad \left[\frac{\partial u}{\partial t} \right] = i\omega e^{i\omega \left(t - \frac{r}{a}\right)} v,$$

и при интегрировании по S_ρ получим интеграл вида

$$\iint\limits_{S_\rho} \frac{e^{-ikr}}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial r} + ikv \right) dS + \iint\limits_{S_\rho} \frac{v}{r^2} e^{-ikr} dS, \tag{253}$$

причем под знаком интеграла надо положить $r = \rho$. Естественно потребовать, чтобы последнее выражение стремилось к нулю при $\rho \to \infty$ (отсутствие источника колебания на бесконечности). Элемент площади поверхности сферы содержит множитель ρ^2, и указанное выше условие будет выполнено, если мы подчиним v двум требованиям:

$$rv \text{ — ограничено и } r\left(\frac{\partial v}{\partial r} + ikv \right) \to 0$$

при $r \to \infty$, причем эти условия должны быть выполнены при любом выборе начала радиусов-векторов r и равномерно относительно направления этих радиусов-векторов. В дальнейшем мы будем пользоваться следующими обозначениями. Через $O(r^\alpha)$ мы будем обозначать такую величину x, что отношение $x : r^\alpha$ остается ограниченным при $r \to \infty$, и через $o(r^\alpha)$ мы будем обозначать такую величину x, что отношение $x : r^{\alpha} \to 0$ при $r \to \infty$, причем это должно иметь место равномерно относительно направления радиуса-вектора r и независимо от выбора его начала. Предыдущие условия могут быть записаны в виде

$$v = O(r^{-1}); \tag{254}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} + ikv = o(r^{-1}). \tag{255}$$

Эти условия и представляют собою математическую формулировку принципа излучения в трехмерном случае. Совершенно аналогично в двумерном случае условия имеют вид

$$v = O\left(r^{-\frac{1}{2}}\right); \tag{256}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} + ikv = o\left(r^{-\frac{1}{2}}\right). \tag{257}$$

Основным сингулярным решением, удовлетворяющим принципу излучения, будет в трехмерном случае решение:

$$v(P) = \frac{e^{-ikr}}{r}, \tag{258}$$

где r — расстояние, отсчитываемое от некоторой фиксированнной точки O до переменной точки P. Дифференцируя решение (258) по r, убеждаемся, что оно удовлетворяет условию, более сильному, чем условие (255), а именно вместо $o(r^{-1})$ справа будет стоять $O(r^{-2})$. При этом мы считаем, что в формуле (255) расстояния отсчитываются от той же точки O. Проверим теперь формулы (254) и (255), считая, что расстояния отсчитываются от другой точки O_1, и обозначим $O_1P = \rho$. Ограниченность ρv непосредственно вытекает из того, что $\rho : r \to 1$. Формула (255) проверяется простым дифференцированием решения (258) по ρ через посредство r. При этом мы имеем

$$\frac{\partial r}{\partial \rho} = \cos\gamma,$$

где γ — угол между направлениями r и ρ; применяя формулу для квадрата стороны OO_1 в треугольнике OO_1P, мы получаем

$$\cos\gamma = 1 + O(r^{-2}). \tag{259}$$

В плоском случае основным решением, удовлетворяющим принципу излучения, будет решение $H_0^{(2)}(kr)$, где $H_0^{(2)}(z)$ — вторая функция Ханкеля. Чтобы проверить это, достаточно воспользоваться асимптотическим выражением функций Ханкеля и формулой

$$\frac{d}{dz} H_0^{(2)}(z) = -H_1^{(2)}(z). \tag{260}$$

При этом условие (257) будет выполнено в усиленной форме, а именно справа вместо $o\left(r^{-\frac{1}{2}}\right)$ будет стоять $O\left(r^{-\frac{3}{2}}\right)$. Умножим это решение $H_0^{(2)}(kr)$ на такой постоянный множитель, чтобы сингулярность при $r=0$ сводилась к $\lg\frac{1}{r}$. Мы получим таким образом решение

$$v=\frac{\pi}{2i}H_0^{(2)}(kr). \tag{261}$$

Как и выше, можно показать, что принципу излучения будут удовлетворять и решения

$$H_m^{(2)}(kr)\cos m\varphi;\quad H_m^{(2)}(kr)\sin m\varphi\quad (m=1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \tag{262}$$

131. Теорема единственности. При наличии принципа излучения может быть доказана теорема единственности, т. е. *если функция v удовлетворяет вне некоторого замкнутого контура l уравнению* (252), *на бесконечности принципу излучения и на контуре l однородному предельному условию, например условию $v|_l=0$ или $\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_l=0$, то она тождественно равна нулю.*

Применим формулу

$$\iint\limits_{B_1}(u_1\,\Delta u_2-u_2\,\Delta u_1)\,d\tau=\iint\limits_{\partial B_1}\left(u_1\frac{\partial u_2}{\partial n}-u_2\frac{\partial u_1}{\partial n}\right)ds \tag{263}$$

к области B_1, ограниченной изнутри контуром l и извне окружностью S_r с центром в некоторой фиксированной точке и достаточно большим радиусом, и положим $u_1=v$ и $u_2=\bar{v}$, где $\bar{v}$ — комплексно сопряженная с v. Считаем, что v непрерывна вплоть до l и имеет правильную нормальную производную. В силу (252) двойной интеграл будет равен нулю, и, в силу предельного условия, интеграл по l также будет равен нулю. Останется интеграл по S_r, и на этом контуре направление n совпадает с направлением r. Условие (257) дает нам возможность заменить

$$\frac{\partial v}{\partial r}=-ikv+o\left(r^{-\frac{1}{2}}\right);\quad \frac{\partial\bar{v}}{\partial r}=ik\bar{v}+o\left(r^{-\frac{1}{2}}\right),$$

и таким образом мы приходим к равенству

$$2ik\int\limits_{S_r}|v|^2\,ds+\int\limits_{S_r}v\cdot o\left(r^{-\frac{1}{2}}\right)ds+\int\limits_{S_r}\bar{v}\cdot o\left(r^{-\frac{1}{2}}\right)ds=0.$$

Так как $\sqrt{r}\,v$ и $\sqrt{r}\,\bar{v}$ ограничены при $r\to\infty$, то последние два слагаемых стремятся к нулю, и, вводя полярный угол φ на окружности S_r, мы имеем

$$\int_0^{2\pi} |\sqrt{r}v|^2 d\varphi \to 0. \tag{264}$$

Применим теперь формулу Грина к решению v и к первому из решений (262). Двойной интеграл по-прежнему сократится и останутся интегралы по l и S_r, а потому величина интеграла по S_r не зависит от r. Оба взятые решения удовлетворяют принципу излучения, причем решения (262) удовлетворяют условию (257) в усиленной форме, как и решение $H_0^{(2)}(kr)$. Пользуясь, как и выше, условием (257), мы получим, что интеграл по S_r стремится к нулю, и поскольку его величина не зависит от r, он просто равен нулю, т. е.

$$H_m^{(2)}(kr)\int_{S_r}\frac{\partial v}{\partial r}\cos m\varphi\, d\varphi - \frac{dH_m^{(2)}(kr)}{dr}\int_{S_r} v\cos m\varphi\, d\varphi = 0.$$

Если положить

$$f_m(r) = \int_{S_r} v\cos m\varphi\, d\varphi,$$

то это дает

$$H_m^{(2)}(kr)\, f_m'(r) = \frac{dH_m^{(2)}(kr)}{dr} f_m(r),$$

откуда $f_m(r) = c_m H_m^{(2)}(kr)$, где c_m — постоянная, причем $m = 0, 1, \ldots$.

Совершенно аналогично получим для

$$g_m(r) = \int_{S_r} v\sin m\varphi\, d\varphi$$

выражения $g_m(r) = d_m H_m^{(2)}(kr)$, где d_m — тоже постоянная. Уравнение замкнутости [IV_1; 3] и формула (264) показывают, что при фиксированном m и $r \to \infty$

$$c_m\sqrt{r}H_m^{(2)}(kr) \quad \text{и} \quad d_m\sqrt{r}H_m^{(2)}(kr) \to 0.$$

Но из асимптотического выражения $H_m^{(2)}(kr)$ следует, что $\sqrt{r}H_m^{(2)}(kr)$ остается по модулю бóльшим некоторого положительного числа при больших r, откуда следует, что $c_m = d_m = 0$, т. е. $f_m(r) = g_m(r) = 0$, а отсюда вытекает, в силу уравнения замкнутости, что v равно нулю на окружностях S_r.

Если l есть окружность, то, взяв за S_r окружности, концентрические с l, мы получим, что v тождественно равно нулю вне l, что и требовалось доказать. В случае общего контура предыдущие рассуждения показывают, что v обращается в нуль в окрестности бесконечно далекой точки. Дальше мы покажем [132], что $v(x, y)$ должна быть, как и для уравнения Лапласа, аналитической функцией, и, согласно принципу аналитического продолжения, из обращения v в нуль в окрестности бесконечно далекой точки следует, что $v = 0$ везде вне l. Совершенно аналогичным образом теорема единственности доказывается и в трехмерном случае.

132. Принцип предельной амплитуды и принцип предельного поглощения. Как и в предыдущем пункте, можно показать, что условие излучения выделяет единственное решение уравнения

$$\Delta v + k^2 v = -F(P) \quad (k > 0), \tag{264$_1$}$$

определенное во всем пространстве Будем считать $F(P)$ непрерывно дифференцируемой функцией точки трехмерного эвклидова пространства, определенной во всем пространстве и равной нулю вне некоторой конечной области D. Тогда указанное решение определяется равенством

$$v(P) = \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_D \frac{e^{-ikr}}{r} F(Q)\, d\tau_Q \quad (r = |PQ|). \tag{264$_2$}$$

К нему же мы придем, рассматривая нестационарную задачу о вынужденных колебаниях, происходящих под действием периодической силы. Именно, непосредственно из формулы Кирхгофа [II; 212] следует, что

$$v(P) = \lim_{t \to +\infty} u(P, t)\, e^{-ikt},$$

где $u(P, t)$ есть решение волнового уравнения

$$\Delta u - u_{tt} = -F(P)\, e^{ikt},$$

удовлетворяющее нулевым начальным условиям. Поэтому про решение $v(P)$ говорят, что оно есть «предельная амплитуда периодического колебания, устанавливающегося при больших t под действием периодической силы». Такой принцип выделения решений уравнений (264$_1$) называется принципом предельной амплитуды

Другой принцип выделения решений уравнения (264$_1$), так называемый принцип предельного поглощения (см Игнатовский В. С. Ann. Phys., 1905, 18), состоит в следующем: в уравнение вводят комплексный параметр $-i\varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ («поглощение»):

$$\Delta v_\varepsilon + (k^2 - i\varepsilon)\, v_\varepsilon = -F(P),$$

и берут то решение $v_\varepsilon(P)$, которое стремится к нулю на бесконечности (такое решение одно):

$$v_\varepsilon(P) = \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_D \frac{e^{-ir(a_\varepsilon - ib_\varepsilon)}}{r} F(Q)\, d\tau_Q,$$

где $a_\varepsilon - ib_\varepsilon = \sqrt{k^2 - i\varepsilon}$ $(a_\varepsilon > 0,\ b_\varepsilon > 0)$, причем $b_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to +0$. При $\varepsilon \to +0$ предельная для $v_\varepsilon(P)$ функция существует и совпадает с $v(P)$, определенной формулой (264$_2$).

Указанные в [130] и здесь три принципа выделения решений в рассмотренном нами простейшем случае приводят, как мы указали, к одному и тому же решению (264_2). Естественно ожидать, что они применимы и к более общим задачам: к краевым задачам для эллиптических уравнений в неограниченных областях. Однако область применимости этих принципов разная. Так, принцип излучения пригоден для тех случаев, когда уравнение (264_1) рассматривается во всем пространстве или в области E, содержащей бесконечно удаленную точку внутри себя [131]. Если же область E является, например, полосой $0 \leqslant z \leqslant 1$, то уравнение ($264_1$) не имеет ни одного решения, равного нулю при $z=0$ и $z=1$ и удовлетворяющего условиям излучения в виде (254) и (255) ($F(Q) \not\equiv 0$). Однако, если эти условия несколько видоизменить, то задача будет иметь единственное решение (см. Свешников А. Г. О принципе излучения. — ДАН СССР, 1950, 73, № 5).

На основании двух других принципов, применимых здесь без каких-либо изменений, этот пример показывает, что «условия излучения» должны зависеть от формы области E на бесконечности. Некоторые соображения физического характера указывают на то, что и принцип предельного поглощения не всегда применим в указанной выше форме, если E достаточно быстро сужается на бесконечности.

Вообще, вопрос о применимости формулированных здесь принципов исследован не полностью. Укажем в связи с этим на работы Ф. Реллиха (Jahresber. Deutsch. Math. Verein., **53**, **57**), в которых рассматривается форма «условий излучения» для уравнения (264_1) в неограниченных областях разного вида, на работу А. Я. Повзнера «О разложении функций по собственным функциям оператора $-\Delta u + cu$» (Матем. сб., 1953, **32**, № 1, с. 107—156), в которой дается обоснование принципа предельного поглощения для уравнения

$$\Delta u + q(P)\,u + k^2 u = -F(P)$$

в безграничном трехмерном пространстве, и заметку О. А. Ладыженской «О принципе предельной амплитуды» (УМН, 1957, **12**, № 3, с. 161—164). Эта заметка посвящена принципу предельной амплитуды для написанного выше уравнения.

Из работ Повзнера и Ладыженской следует, что принцип предельного поглощения имеет более широкую область применимости, чем принцип предельной амплитуды, по крайней мере в той форме, как он сформулирован выше.

Именно, предел решений уравнений

$$\Delta v_\varepsilon + q(P)\,v_\varepsilon + (k^2 - i\varepsilon)\,v_\varepsilon = -F(P),$$

равных нулю на бесконечности, при $\varepsilon \to +0$ существует, если только k^2 не есть собственное значение оператора $\Delta v + q(P)v$; предел от решений соответствующей нестационарной задачи, $\lim\limits_{t\to+\infty} u(P,t)\,e^{-ikt}$, может не существовать, если оператор имеет хотя бы какое-нибудь собственное значение. Отметим, что число c называется собственным значением оператора $\Delta v + q(P)v$, если уравнение $\Delta v + q(P)v + cv = 0$ имеет решение, отличное от нулевого, квадрат модуля которого интегрируем по всему пространству. Исследованию этих принципов для более общих уравнений посвящены работы Д. М. Эйдуса, Б. Р. Вайнберга и др.

133. Предельные задачи для уравнения Гельмгольца. Решение (258) уравнения (252) имеет при $r=0$ полярность $\dfrac{1}{r}$, и это дает нам возможность построить для уравнения (252) теорию потенциала, совершенно аналогичную теории ньютонова потенциала для уравнения Лапласа. Обозначая через r расстояние между переменной точкой N поверхности S и точкой P, мы будем иметь в трехмерном случае следующие аналоги потенциалов простого и двойного слоя:

$$\left.\begin{aligned} v(P) &= \iint_S \mu(N)\frac{e^{-ikr}}{r}\,dS, \\ w(P) &= -\iint_S \mu(N)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)dS, \end{aligned}\right\} \tag{265}$$

где n — направление внешней нормали к S в переменной точке N. Выделяя из ядра полярное слагаемое $\frac{1}{r}$, мы получим обычные потенциалы, в которых предельный переход при стремлении P на поверхность совершается по формулам из [95] и [97]. В оставшемся интеграле ядро уже не будет иметь сингулярности при $r=0$ и возможен предельный переход под знаком интеграла. Мы получаем таким образом формулы, совершенно аналогичные формулам из [95] и [97]:

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial v(N_0)}{\partial n_0}\right)_i &= 2\pi\mu(N_0) + \iint_S \mu(N)\frac{\partial}{\partial n_0}\left(\frac{e^{-ikr_0}}{r_0}\right)dS, \\ &\qquad\qquad (r_0 = |N_0N|) \\ \left(\frac{\partial v(N_0)}{\partial n_0}\right)_e &= -2\pi\mu(N_0) + \iint_S \mu(N)\frac{\partial}{\partial n_0}\left(\frac{e^{-ikr_0}}{r_0}\right)dS \end{aligned}\right\} \tag{266}$$

и

$$\left.\begin{aligned} w_i(N_0) &= 2\pi\mu(N_0) - \iint_S \mu(N)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ikr_0}}{r_0}\right)dS, \\ w_e(N_0) &= -2\pi\mu(N_0) - \iint_S \mu(N)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ikr_0}}{r_0}\right)dS, \end{aligned}\right\} \tag{267}$$

причем в (266) ядро интеграла представляет собою значение производной по направлению нормали n_0 в точке N_0, а в (267) по направлению нормали n в точке N; интегрирование, как во всех аналогичных формулах, ведется по S.

В плоском случае мы имеем потенциалы простого и двойного слоя:

$$\left.\begin{aligned} v(P) &= \int_l \mu(N)\frac{\pi}{2i}H_0^{(2)}(kr)\,ds, \\ w(P) &= \int_l \mu(N)\frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{\pi}{2i}H_0^{(2)}(kr)\right]ds, \end{aligned}\right\} \tag{268}$$

и для них имеют место формулы, совершенно аналогичные формулам (266) и (267), причем справа множитель 2π надо заменить на π. Написанные потенциалы удовлетворяют уравнению (252), и, в силу специального выбора ядер, каждый элемент написанных интегралов и сами эти интегралы удовлетворяют принципу излучения.

Введем ядро

$$K(N_0, N; k) = \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ikr_0}}{2\pi r_0}\right) = -\frac{e^{-ikr_0}(ikr_0+1)}{2\pi r_0^2}\cos\varphi_0,$$

где φ_0 — угол, образованный направлением n с направлением $\overline{N_0N}$. Транспонированное ядро будет

$$K(N, N_0; k) = \frac{\partial}{\partial n_0}\left(\frac{e^{-ikr_0}}{2\pi r_0}\right) = \frac{e^{ikr_0}(ikr_0+1)}{2\pi r_0^2}\cos\psi_0,$$

где ψ_0 — угол, образованный нормалью n_0 в точке N_0 с направлением $\overline{N_0N}$. Совершенно так же, как и для уравнения Лапласа, можно поставить задачи Дирихле и Неймана.

Внутренняя задача Дирихле состоит в отыскании внутри S решения уравнения (252), удовлетворяющего на S предельному условию

$$u|_S = f(N_0).$$

Аналогично формулируется и внешняя задача, причем на бесконечности должен быть выполнен принцип излучения. В случае задачи Неймана мы имеем предельное условие

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = f(N_0).$$

Из теоремы единственности [131] вытекает, что внешние задачи могут иметь только одно решение. Для внутренних задач мы имеем единственность не при всяких k.

Число k^2 называется *собственным значением внутренней задачи Дирихле,* если существует внутри S решение уравнения (252), удовлетворяющее на S однородному предельному условию: $u|_S = 0$. Аналогично определяются собственные значения внутренней задачи Неймана.

Если мы будем искать решение внешней задачи Дирихле в виде потенциала двойного слоя и внутренней задачи Неймана в виде потенциала простого слоя, то придем к союзным интегральным уравнениям:

$$\mu(N_0) + \iint_S \mu(N) K(N_0, N; k)\, dS = -\frac{1}{2\pi} f(N_0), \tag{269}$$

$$\mu(N_0) + \iint_S \mu(N) K(N, N_0; k)\, dS = \frac{1}{2\pi} f(N_0), \tag{270}$$

где N_0 — переменная точка S. Пусть k^2 не есть собственное значение внутренней задачи Неймана. Покажем, что при этом однородное уравнение (269) имеет только нулевое решение. Будем доказывать от обратного. Пусть оно имеет решение, отличное от нулевого. При этом и однородное уравнение (270) должно иметь решение $\mu_0(N)$, отличное от нулевого. Составляя потенциал простого слоя с плотностью $\mu_0(N)$, получим решение уравнения (252) с однородным предельным условием $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = 0$. Но раз k^2 не есть собственное значение внутренней задачи Неймана, то это решение должно равняться нулю внутри S. В силу непрерывности, упомянутый потенциал простого слоя должен равняться нулю и на S, а тогда, согласно теореме единственности, он должен равняться нулю и вне S. При этом, в силу формулы, аналогичной (54), $\mu_0(N)$ должно тождественно равняться нулю. Полученное противоречие доказывает, что *если k^2 не есть собственное значение внутренней задачи Неймана, то однородное уравнение* (269) *имеет только нулевое решение, и, следовательно, неоднородное уравнение разрешимо при любом $f(N_0)$*, т. е. *при любом $f(N_0)$ внешняя задача Дирихле имеет решение в виде потенциала двойного слоя*. Совершенно аналогично, *если k^2 не есть собственное значение внутренней задачи Дирихле, то внешняя задача Неймана имеет решение в виде потенциала простого слоя.*

В книге: Купрадзе В. Д. Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения. — М., Гостехиздат, 1950, подробно излагаются исследования автора, посвященные установившимся режимам в электродинамике и теории упругости, и в частности задаче дифракции, о которой мы будем говорить в следующем параграфе. В упомянутой книге разобраны и те случаи, когда k^2 есть собственное значение внутренней задачи Дирихле или Неймана, и показано, как и в этих случаях строятся решения внешних задач.

Покажем теперь, что всякое решение $v(P)$ уравнения (252) с непрерывными производными до второго порядка внутри некоторой области D будет аналитической функцией координат. Для этого достаточно показать, что $v(P)$ будет аналитической внутри некоторой сферы S_0 с центром в любой точке P_0, лежащей внутри D.

Попытаемся представить $v(P)$ внутри S_0 в виде потенциала двойного слоя (265). Для плотности $\mu(N)$ этого слоя мы придем к интегральному уравнению:

$$\mu(N_0) = \frac{1}{2\pi} f(N_0) + \frac{1}{2\pi} \iint_{S_0} \mu(N) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ikr_0}}{r_0}\right) dS, \qquad (271)$$

где $f(N)$ — значения $v(P)$ на сфере S_0. Радиус этой сферы можно взять настолько малым, чтобы уравнение

$$\mu(N_0) = \frac{1}{2\pi}\iint_{S_0} \mu(N)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ikr_0}}{r_0}\right)dS \qquad (272)$$

имело только нулевое решение. Докажем это. Пусть λ_1 — первое собственное значение уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$ при предельном условии $u|_{S_0} = 0$, если S_0 — сфера с радиусом, равным единице. Совершая преобразование подобия, мы убедимся без труда в том, что первое собственное значение для сферы с радиусом R равно $(\lambda_1 : R)$, и число R можно взять настолько малым, чтобы $(\lambda_1 : R)$ было больше числа k^2. При этом внутренняя задача Дирихле для уравнения $\Delta u + k^2 u = 0$ с однородным граничным условием имеет только нулевое решение. Интегральное уравнение (272) есть уравнение для плотности потенциала двойного слоя, который дает решение упомянутой только что однородной внутренней задачи Дирихле. Принимая во внимание, что эта задача имеет только нулевое решение, и рассуждая совершенно так же, как и в [109], мы и получим, что уравнение (272) для сферы радиуса R имеет только нулевое решение. При таком выборе мы сможем утверждать существование решения у уравнения (271) и будем иметь

$$v(P) = -\iint_{S_0} \mu(N)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)dS \quad (P \text{ внутри } S_0;\ r = |PN|)$$

или [II; 207]

$$v(P) = \iint_{S_0} \mu(N)\frac{e^{-ikr}(ikr+1)}{r^2}\cdot\frac{R^2+r^2-\rho^2}{2Rr}\,dS, \qquad (273)$$

где R — радиус S_0 и $\rho = |P_0P|$. Подынтегральная функция есть аналитическая функция координат (x, y, z) точки P, лежащей внутри S_0, и из (273) следует, что и $v(P)$ — аналитическая функция (x, y, z) (ср. [61]). Аналогично проводится доказательство и в плоском случае при помощи соответствующего сингулярного решения, которое мы укажем ниже.

Мы можем для уравнения (252) построить функцию Грина совершенно так же, как это мы делали для уравнения Лапласа. В трехмерном случае основное сингулярное решение этого уравнения можно написать в виде $\frac{\cos kr}{r}$. Функцию Грина, соответствующую условию

$$v|_S = 0, \qquad (274)$$

надо искать в виде

$$G_1(P, Q; k^2) = \frac{\cos kr}{4\pi r} + g_1(P, Q; k^2) \quad (r = |PQ|), \qquad (275)$$

где $g_1(P, Q; k^2)$ удовлетворяет внутри D уравнению (252), а на S предельному условию

$$g_1(P, Q; k^2)|_S = -\left.\frac{\cos kr}{4\pi r}\right|_S. \tag{276}$$

Если k^2 не есть собственное значение уравнения (252) при предельном условии (274), то мы можем построить такую функцию.

В плоском случае решения уравнения (252), зависящие только от расстояния $r = |PQ|$, имеют вид $Z_0(kr)$, где $Z_0(z)$ — любое решение уравнения Бесселя, соответствующее значку нуль:

$$Z_0''(z) + \frac{1}{z} Z_0'(z) + Z_0(z) = 0. \tag{277}$$

В качестве решения этого уравнения возьмем функцию Неймана [III₂; 150]:

$$N_0(z) = \frac{2}{\pi} J_0(z)\left(\lg\frac{z}{2} + C\right) - \\ - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + \ldots + 1\right). \tag{278}$$

Основное сингулярное решение, имеющее в точке Q полярность $\frac{1}{2\pi}\lg\frac{1}{r}$, будет

$$-\frac{1}{4} N_0(kr). \tag{279}$$

Из (278) следует, что, помимо указанного полярного члена, мы будем иметь в выражении функции (279) члены вида $r^{2n}\lg r$ $(n = 1, 2, \ldots)$, содержащие $\lg r$. Эти члены стремятся к нулю при $r \to 0$. Непосредственным дифференцированием нетрудно убедиться, что и их производные первого порядка по координатам стремятся к нулю, и потому они имеют непрерывные производные первого порядка в R^2. Пусть k не есть собственное значение уравнения (252) при предельном условии вида (274). Нетрудно построить при таких значениях k функцию Грина $G_1(P, Q; k^2)$ уравнения (252).

Будем искать эту функцию Грина в виде

$$G_1(P, Q; k^2) = -\frac{1}{4} N_0(kr) + g_1(P, Q; k^2). \tag{280}$$

Поскольку первое слагаемое в правой части удовлетворяет уравнению и имеет требуемую полярность, вопрос приводится к определению слагаемого $g_1(P, Q; k^2)$ так, чтобы оно не имело уже полярности, удовлетворяло уравнению (252), а на контуре l удовлетворяло бы следующему неоднородному предельному условию:

$$g_1|_l = \frac{1}{4} N_0(kr).$$

Принимая во внимание, что k не есть собственное значение, мы получим одну определенную функцию g_1, удовлетворяющую этим условиям.

Возвращаясь опять к трехмерному случаю, отметим еще одну формулу, связанную с уравнением (252). Пусть $v_0(P, Q)$ — какое-нибудь сингулярное решение этого уравнения с полярностью $\frac{1}{|PQ|}$, и пусть $v(P)$ — какая-нибудь функция, имеющая в области D_i и вплоть до S непрерывные производные до второго порядка. Рассуждая совершенно так же, как в [II; 203], получим

$$v(Q) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_S \left[v_0(P, Q) \frac{\partial v(P)}{\partial n} - v(P) \frac{\partial v_0(P, Q)}{\partial n} \right] dS -$$

$$- \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{D_i} [\Delta v(P) + k^2 v(P)] \, v_0(P, Q) \, d\tau_P.$$

Если v удовлетворяет уравнению (252), то тройной интеграл равен нулю. Применим полученную формулу для того случая, когда S есть сфера радиуса R и Q — ее центр, и, считая, что $\sin kR \neq 0$, в качестве v_0 возьмем функцию:

$$v_0(r) = \frac{\cos kr}{r} - \operatorname{ctg} kR \frac{\sin kr}{r}, \quad \text{где} \quad r = |PQ|.$$

В результате мы получим

$$\frac{\sin kR}{kR} v(P) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint\limits_S v \, dS,$$

и справа стоит среднее от v по сфере S. Эта формула обобщает свойство среднего гармонических функций.

134. Дифракция электромагнитной волны. К более сложной задаче приводит явление дифракции синусоидальной электромагнитной волны, падающей на тело с диэлектрической постоянной ε и коэффициентом проводимости σ. Рассмотрим плоскую задачу. Пусть l — контур тела и вне l — пустота. Обозначим через B_i и B_e части плоскости, лежащие внутри и вне l. Математически задача сводится к нахождению функции $E(x, y)$, удовлетворяющей уравнениям

$$\Delta E + k_i^2 E = 0 \quad (\text{в } B_i); \qquad \Delta E + k_e^2 E = 0 \quad (\text{в } B_e), \tag{281}$$

где

$$k_i^2 = \frac{\omega^2 \varepsilon^2 - \omega\sigma i}{c^2}; \qquad k_e^2 = \frac{\omega^2}{c^2};$$

ω — частота падающей волны и c — скорость света в пустоте. Функция E представляет собою в B_i составляющую по оси Z вектора электрической напряженности, возникшего в результате падающего возмущения $e^{i\omega t}A(x, y)$; в B_e функция E есть сумма падающей волны A и волны, полученной в результате дифракции от контура l, так что разность $(E-A)$ должна удовлетворять принципу излучения. Заданная функция A должна на всей плоскости удовлетворять уравнению

$$\Delta A + k_e^2 A = 0. \tag{282}$$

Предельными условиями являются непрерывность E и $\frac{\partial E}{\partial n}$ при переходе через контур

Применим формулу Грина (263) к области B_i и функциям $E(Q)$ и

$$G(P; Q) = \frac{\pi}{2i} H_0^{(2)}(k_e r) \quad (r = |PQ|), \tag{283}$$

считая, что P лежит внутри B_i. При этом мы выделяем точку P малой окружностью γ, и оставшуюся часть B_i обозначим через B_i':

$$\iint\limits_{B_i'} (E\,\Delta G - G\,\Delta E)\,dS = \int\limits_l \left(E\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial E}{\partial n}\right) dS + \int\limits_\gamma \left(E\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial E}{\partial n}\right) ds.$$

Первое из уравнений (281) и аналогичное уравнение для функции (283) дают:

$$E\,\Delta G - G\,\Delta E = \left(k_e^2 - k_i^2\right) G(P; Q)\,E(Q).$$

Принимая во внимание, что $G(P, Q)$ имеет при $r = 0$ полярность $\lg\frac{1}{r}$, и беспредельно сжимая окружность γ, мы получим (ср. [**II; 199**]):

$$2\pi E(P) = \left(k_i^2 - k_e^2\right) \iint\limits_{B_i} G(P; Q)\,E(Q)\,dS + \int\limits_l \left(E\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial E}{\partial n}\right) ds. \tag{284_1}$$

Пусть S_ρ — окружность с центром в начале и достаточно большим радиусом ρ и B_e' — часть B_e, лежащая внутри S_ρ. Применяя формулу Грина к B_e' и считая, что P находится в B_i, получим

$$0 = \int\limits_{S_\rho} \left(E\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial E}{\partial n}\right) ds + \int\limits_l \left(E\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial E}{\partial n}\right) ds. \tag{284_2}$$

Считая теперь, что P находится в B_e, и применяя формулу к B_i, получим

$$0 = \left(k_i^2 - k_e^2\right) \iint\limits_{B_i} G(P; Q)\,E(Q)\,dS + \int\limits_l \left(E\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial E}{\partial n}\right) ds. \tag{284_3}$$

Наконец, считая P находящейся в B_e и применяя формулу к B_e', получим

$$2\pi E(P) = \int\limits_l \left(E\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial E}{\partial n}\right) ds + \int\limits_{S_\rho} \left(E\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial E}{\partial n}\right) ds. \tag{284_4}$$

В формулах (284_1) и (284_2) направления внешней нормали к контуру l противоположны То же самое имеет место в формулах (284_3) и (284_4). Складывая почленно (284_1) и (284_2), а также (283_3) и (284_4), и принимая во внимание непрерывность E и $\frac{\partial E}{\partial n}$ при переходе через контур l, мы получим одно и то же уравнение для случаев, когда P лежит в B_i или в B_e:

$$2\pi E(P) = \left(k_i^2 - k_e^2\right) \iint\limits_{B_i} G(P; Q)\, E(Q)\, dS + \int\limits_{S_\rho} \left(E \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial E}{\partial n}\right) ds, \tag{285}$$

и нам остается перейти к пределу, устремляя ρ к бесконечности. Применяя формулу Грина к кругу, ограниченному окружностью S_ρ, и к функциям A и G и считая, что P находится внутри S_ρ, получим

$$2\pi A(P) = \int\limits_{S_\rho} \left(A \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial A}{\partial n}\right) ds,$$

и, следовательно, криволинейный интеграл, входящий в формулу (285), равен следующему выражению:

$$2\pi A(P) + \int\limits_{S_\rho} \left\{[E(Q) - A(Q)] \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n} - G(P; Q) \frac{\partial}{\partial n} [E(Q) - A(Q)]\right\} ds. \tag{286}$$

Пользуясь тем, что разность $(E - A)$ должна удовлетворять принципу излучения, мы покажем в конце следующего параграфа, что написанный интеграл должен стремиться к нулю, и формула (285) даст нам

$$E(P) = \frac{k_i^2 - k_e^2}{2\pi} \iint\limits_{B_i} G(P; Q)\, E(Q)\, dS + A(P). \tag{287}$$

Если считать, что P находится в B_i, то написанное уравнение представляет собой обычное интегральное уравнение. Определяя из него $E(P)$, причем P принадлежит B_i, и подставляя полученное решение в правую часть (287), получим явное выражение $E(P)$ для того случая, когда P принадлежит B_e. Мы получили уравнение (287), считая, что существует решение задачи. Строго говоря, надо произвести исследование уравнения (287) и показать, что оно имеет решение, если P принадлежит B_i, и что это решение является и решением поставленной задачи дифракции. Это проделано в работах, которые будут указаны в конце следующего параграфа. Отметим еще, что в уравнении (287) интегрирование производится не по контуру l, а по всей области B.

135. Вектор магнитной напряженности. Для определения вектора $H(x, y)$ магнитной напряженности мы имеем те же самые уравнения и условия с одним только изменением. Вместо непрерывности $\frac{\partial H}{\partial n}$ при переходе через l мы должны иметь непрерывность $\frac{1}{k} \frac{\partial H}{\partial n}$, где $k = k_i$ в B_i и $k = k_e$ в B_e. Кроме того, разность $(H - B)$, где $B(x, y)$ — заданная функция удовлетворяющая уравнению (282), должна подчиняться принципу излучения. Это приведет к уравнениям (284) для H. Принимая во внимание требуемую непрерывность $\frac{1}{k} \frac{\partial H}{\partial n}$, умножим (284_1) на $\frac{1}{k_i^2}$, (284_2) на $\frac{1}{k_e^2}$ и сложим. То же самое проделаем с (284_3) и (284_4). Переходя затем, как и выше, к пределу, будем иметь

$$\frac{H(P)}{k_i^2}=\frac{k_i^2-k_e^2}{2\pi k_i^2}\iint_{B_i} G(P, Q)\, H(Q)\, dS+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{k_i^2}-\frac{1}{k_e^2}\right)\int_l \vec{H}(Q)\,\frac{\partial G(P; Q)}{\partial n}\,ds+\frac{B(P)}{k_e^2}, \qquad (P \text{ в } B_i)$$

$$\frac{H(P)}{k_e^2}=\frac{k_i^2-k_e^2}{2\pi k_i^2}\iint_{B_i} G(P; Q)\, H(Q)\, dS+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{k_i^2}-\frac{1}{k_e^2}\right)\int_l H(Q)\,\frac{\partial G(P; Q)}{\partial n}\,ds+\frac{B(P)}{k_e^2}. \qquad (P \text{ в } B_e)$$

В силу полярности у функции $G(P; Q)$ при совпадении P и Q написанный криволинейный интеграл, при устремлении точки P на контур, ведет себя как потенциал двойного слоя, и мы получим для того случая, когда P лежит на контуре:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k_i^2}+\frac{1}{k_e^2}\right)H(P)=\ldots,$$

причем справа стоит то же, что и в предыдущих уравнениях. Мы можем переписать предыдущие три уравнения в виде одной формулы:

$$\frac{1}{k^2}\,H(P)=\frac{k_i^2-k_e^2}{2\pi k_i^2}\iint_{B_i} G(P; Q)\, H(Q)\, dS+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{k_i^2}-\frac{1}{k_e^2}\right)\int_l H(Q)\,\frac{\partial G(P; Q)}{\partial n}\,ds+\frac{B(P)}{k_e^2}, \qquad (288)$$

где $k^2=k_i^2$ (если P внутри B_i); $k^2=k_e^2$ (если P внутри B_e) и

$$\frac{1}{k^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k_i^2}+\frac{1}{k_e^2}\right) \qquad (\text{если } P \text{ на } l).$$

Если P находится в замкнутой области B_i, то (288) есть нагруженное интегральное уравнение [IV₁; 56] и к нему приложима обычная теория Фредгольма. Можно показать, что оно имеет одно определенное решение и что это решение дает и решение поставленной задачи дифракции. Отметим, что если мы решим упомянутое выше интегральное уравнение, т. е. будем знать $H(Q)$ в замкнутой области B_i, то формула (288) даст нам $H(P)$ в B_e.

Покажем теперь, что интеграл, стоящий в выражении (286), стремится к нулю при $\rho\to\infty$. В силу асимптотического выражения для $H_0^{(2)}(z)$ и $H_1^{(2)}(z)$, мы имеем

$$\frac{\partial G(P; Q)}{\partial r}=-ik_e G(P; Q)+O\left(r^{-\frac{3}{2}}\right) \qquad (r=|PQ|).$$

В дальнейшем мы должны считать, что P фиксировано и Q находится на C_ρ. Мы имеем

$$\frac{\partial G\ (P\cdot\ Q)}{\partial\rho}=\frac{\partial G}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial\rho}=\frac{\partial G}{\partial r}\cos\gamma,$$

где для $\cos\gamma$ мы имеем выражение (259).

Далее, имеет место очевидное равенство:

$$O\left(r^{\alpha}\right)=O\left(\rho^{\alpha}\right),$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial G\ (P;\ Q)}{\partial\rho}=-ik_eG\ (P;\ Q)+O\left(\rho^{-\frac{3}{2}}\right).$$

Интеграл, стоящий в выражении (286), можно переписать в виде

$$J=\int\limits_{S_\rho}\left\{(E-A)\left[-ik_eG+O\left(\rho^{-\frac{3}{2}}\right)\right]-G\left[-ik_e\,(E-A)+o\left(r^{-\frac{1}{2}}\right)\right]\right\}ds,$$

или

$$J=\int\limits_{S_\rho}\left[(E-A)\cdot O\left(\rho^{-\frac{3}{2}}\right)+G\cdot o\left(\rho^{-\frac{1}{2}}\right)\right]ds=\int\limits_{S_\rho}\left[o\left(r^{-1}\right)+o\left(r^{-1}\right)\right]ds,$$

откуда и вытекает непосредственно, что $J\to 0$. Исследование задач дифракции можно найти в следующих работах:

1. Купрадзе В. Д. Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения. — М.; Л : Гостехиздат, 1950.

2. Штернберг (Sternberg). Anwendung der Integralgleichungen in der elektromagnetischen Lichttheorie — Comp. Math., 1936, **3**, № 2.

3. Фрейденталь (Freudental). Über Beugungsprobleme der elektromagnetischen Lichtteorie. — Comp. Math., 1938, **6**, № 2.

136. Единственность решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений. Прежде чем переходить к указанному в заглавии вопросу докажем одно вспомогательное предложение, относящееся к матрицам.

Лемма. *Пусть A и B — две квадратные вещественные симметричные матрицы, причем все характеристические числа A — положительны. Если при этом все характеристические числа B не положительны, то след произведения AB есть неположительное число:* $\mathrm{Sp}(AB)\leqslant 0$. *Если же все характеристические числа B не отрицательны, то* $\mathrm{Sp}(AB)\geqslant 0$.

Пусть U — матрица ортогонального преобразования, приводящая B к диагональной форме, т. е. $UBU^{-1}=[\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_n]$, где μ_i — характеристические числа матрицы B. Известно, что

$$\mathrm{Sp}\,(AB)=\mathrm{Sp}\left(UABU^{-1}\right)=\mathrm{Sp}\left(UAU^{-1}UBU^{-1}\right)$$

[III₁; 27] и что вещественная симметричная матрица $A'=$ $=UAU^{-1}$ имеет те же характеристические числа, что и A. По условию все они положительны, и тем самым квадратичная форма

$$\sum_{i,\,k=1}^{n} \{A'\}_{ik}\, \xi_i \xi_k$$

определенно положительна. Полагая $\xi_s = 1$ и остальные ξ_i равными нулю, мы видим, что $\{A'\}_{ss} > 0$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$. С другой стороны,

$$\mathrm{Sp}\,(AB) = \mathrm{Sp}\,(A'\,[\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n]) = \sum_{s=1}^{n} \{A'\}_{ss}\, \mu_s,$$

и отсюда непосредственно следует, что если все $\mu_s \leqslant 0$, то $\mathrm{Sp}\,(AB) \leqslant 0$, а если все $\mu_s \geqslant 0$, то $\mathrm{Sp}\,(AB) \geqslant 0$, и лемма доказана.

Отметим еще один факт, который нам будет нужен в дальнейшем. Пусть $u(P) = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — вещественная непрерывная функция, определенная в некоторой области D пространства $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и имеющая в D непрерывные производные до второго порядка. Положим, что в некоторой точке P_0, лежащей внутри D, функция $u(P)$ имеет максимум. При этом вещественная симметричная форма

$$\sum_{i,\,k=1}^{n} u_{x_i x_k}(P_0)\, \xi_i \xi_k$$

не может принимать положительных значений (ср. [**III**$_1$; **35**]), т. е. все характеристические числа вещественной симметричной матрицы $u_{x_i x_k}(P_0)$ не положительны. Точно так же в точке минимума они не отрицательны.

Рассмотрим линейное эллиптическое уравнение:

$$L(u) = \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik} u_{x_i x_k} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu = f, \tag{289}$$

причем пусть a_{ik}, b_i, c и f — непрерывные функции в некоторой конечной области $\overline{D}$ и квадратичная форма

$$\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik} \xi_i \xi_k$$

определенно положительная в $\overline{D}$. Отметим, что сумма

$$\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik} u_{x_i x_k} = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik} u_{x_i x_k} \right) \tag{290}$$

есть след произведения вещественных симметричных матриц $\| a_{ik} \|$ и $\| u_{x_i x_k} \|$, причем мы считаем, что функция $u(P)$ имеет непрерывные производные до второго порядка внутри D. Единственность решения задачи Дирихле для уравнения (289) основана на следующей теореме.

Теорема. *Если $c < 0$ внутри D, то всякое решение однородного уравнения*

$$L(u) = 0 \tag{291}$$

не может иметь внутри D ни положительного максимума, ни отрицательного минимума.

Доказываем от обратного. Положим, что в некоторой точке P_0 внутри D функция $u(P)$ имеет максимум $u(P_0) > 0$. В такой точке все производные первого порядка должны быть равны нулю, и уравнение (291) дает

$$\sum_{i, k=1}^{n} a_{ik} u_{x_i x_k} = -cu \quad (\text{в точке } P_0). \tag{292}$$

Из условия максимума следует, что все характеристические числа матриц $\|u_{x_i x_k}\|$ не положительны, и, в силу доказанной выше леммы, левая часть равенства (292) $\leqslant 0$, а правая положительна, ибо по условию $u(P_0) > 0$ и $c(P_0) < 0$. Это противоречие и доказывает теорему. Невозможность отрицательного минимума доказывается аналогично или заменой u на $(-u)$.

Совершенно так же можно доказать, что если в неоднородном уравнении (289) $f(P) \geqslant 0$ внутри D, то решение такого уравнения не может иметь внутри D положительного максимума, а если $f(P) \leqslant 0$, то оно не может иметь отрицательного минимума.

Из доказанной выше теоремы непосредственно следует, что если $c < 0$ внутри D, то решение задачи Дирихле для уравнения (289) единственно. Действительно, пусть $u_1(P)$ и $u_2(P)$ — два решения уравнения (289) внутри D, непрерывные в замкнутой области $\bar{D}$ и удовлетворяющие на границе S области D одному и тому же граничному условию

$$u|_S = \varphi(P). \tag{293}$$

При этом разность $v(P) = u_1(P) - u_2(P)$ должна удовлетворять однородному уравнению $L(v) = 0$ и обращаться в нуль на S. Отсюда, в силу доказанной теоремы, следует, что $v(P) \equiv 0$ в $\bar{D}$, т. е. $u_1(P) \equiv u_2(P)$ в $\bar{D}$ Действительно, если бы это было не так, то $v(P)$ должна была бы иметь внутри D положительные максимумы или отрицательные минимумы (или и то и другое), а по теореме этого не может быть. Можно доказать единственность решения задачи Дирихле, заменив предположение $c < 0$ более слабым предположением, что $c \leqslant 0$ внутри D. Введем для этого вместо функции $v(P)$, о которой мы упоминали выше, новую функцию $w(P)$, полагая

$$v = (\alpha - e^{-\beta x_1})\, w, \tag{294}$$

где числа α и β мы определим ниже и притом так, что разность $\alpha - e^{-\beta x_1}$ будет положительной в $\overline{D}$. Подставляя (294) в уравнение $L(v) = 0$, получим для w уравнение вида

$$\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik} w_{x_i x_k} + \sum_{i=1}^{n} b'_i w_{x_i} + c'w = 0, \tag{295}$$

где b'_i, как и b_i, непрерывны в $\overline{D}$ и

$$c' = c + e^{-\beta x_1} \frac{b_1\beta - a_{11}\beta^2}{\alpha - e^{-\beta x_1}}, \tag{296}$$

и, в силу (294), $w = 0$ на S.

Принимая во внимание, что $a_{11} > 0$ в D, мы можем выбрать число β так, чтобы иметь в $\overline{D}$ неравенство $b_1\beta - a_{11}\beta^2 < 0$, а затем выбираем настолько большое число α, что $\alpha - e^{-\beta x_1} > 0$ в $\overline{D}$. При этом в уравнении (295) $c' < 0$ внутри D, и к функции $w(P)$, равной нулю на S, применима доказанная теорема, откуда следует, что $w(P) \equiv 0$ в $\overline{D}$. Но тогда из (294) следует, что и $v(P) \equiv 0$ в $\overline{D}$.

Предположение $c \leqslant 0$ существенно для единственности решения задачи Дирихле. Нетрудно дать пример, когда при $c > 0$ однородное уравнение $L(v) = 0$ имеет решение, равное нулю на границе S, но не равное нулю тождественно. В качестве такого примера приведем уравнение

$$v_{x_1 x_1} + v_{x_2 x_2} + 2k^2 v = 0 \tag{297}$$

и рассмотрим его в квадрате $0 \leqslant x_1 \leqslant \pi$, $0 \leqslant x_2 \leqslant \pi$. Если взять k равным целому числу, то уравнение (297) имеет решение

$$v = \sin kx_1 \sin kx_2,$$

равное нулю на границе указанного квадрата. Напомним, что вообще уравнение

$$\Delta v + \lambda v = 0 \tag{298}$$

имеет бесчисленное множество положительных собственных значений $\lambda = \lambda_1$; $\lambda = \lambda_2$, ..., таких, что при $\lambda = \lambda_k$ уравнение имеет решения, не равные тождественно нулю и обращающиеся в нуль на границе S заданной области.

З а м е ч а н и е. Пользуясь указанными выше результатами, можно получить некоторые оценки для решений задачи Дирихле. Укажем простейшие из них.

Пусть $u(P)$ есть решение задачи

$$L(u) = f \text{ внутри } D; \quad u|_S = 0. \tag{299}$$

Мы считаем $c < 0$ в $\overline{D}$. Обозначим через μ наименьшее значение $|c|$ и через M наибольшее значение $|f|$ в $\overline{D}$.

Введем функцию v, полагая $v = u + k$, где k — некоторая постоянная. Мы имеем: $L(v) = L(u) + ck = f + ck$, так что $v(P)$ является решением задачи

$$L(v) = f + ck \quad \text{внутри} \quad D; \qquad v|_S = k. \tag{300}$$

Положим сначала, что $k = \frac{M}{\mu}$. При этом $f + ck \leqslant 0$ в $\bar{D}$, и решения уравнения $L(v) = f + ck$ не могут иметь внутри D отрицательных минимумов. Но значения $v(P)$ на S равны положительной постоянной $\frac{M}{\mu}$, и отсюда следует, что $v(P)$ не может быть отрицательной, т. е $v = u + \frac{M}{\mu} \geqslant 0$ или $u \geqslant -\frac{M}{\mu}$. Совершенно так же, полагая $k = -\frac{M}{\mu}$, получим $u \leqslant \frac{M}{\mu}$. Окончательно можем утверждать, что решение задачи (299) (если оно существует) должно удовлетворять в $\bar{D}$ неравенству

$$|u| \leqslant \frac{M}{\mu}.$$

Рассмотрим теперь задачу

$$L(u) = 0 \quad \text{внутри} \quad D; \qquad u|_S = \varphi \tag{301}$$

и обозначим через N наибольшее значение $|\varphi|$ на S Полагая опять $v = u + k$, приходим к задаче

$$L(v) = ck \quad \text{внутри} \quad D; \qquad v|_S = \varphi + k. \tag{302}$$

Положим $k = N$. Поскольку мы считаем $c < 0$ внутри D, функция v не может иметь внутри D отрицательных минимумов. Для граничных значений $v(P)$ мы имеем очевидно $\varphi + N \geqslant 0$. Отсюда, как и выше, следует, что $v = u + N \geqslant 0$, т. е $u \geqslant -N$. Совершенно аналогично, полагая $k = -N$, получим $u \leqslant N$, т е. для задачи (301): $|u| \leqslant N$ в $\bar{D}$.

137. Уравнение $\Delta v - \lambda v = 0$. Рассмотрим уравнение

$$\Delta v - \lambda v = 0, \tag{303}$$

где λ — заданное положительное число, и поставим внутреннюю задачу Дирихле с предельным условием

$$v|_S = f(N). \tag{304}$$

Решения уравнения (303) не могут иметь внутри D_i ни положительных максимумов, ни отрицательных минимумов [136], и отсюда следует единственность решения указанной задачи Дирихле.

Если функция $f(N)$ удовлетворяет неравенству $-a \leqslant f(N) \leqslant b$, где a и b — некоторые положительные числа, то такому же неравенству в D_i должно удовлетворять и решение задачи Дирихле (это следует из последнего результата [136]).

Рассмотрим сначала неоднородное уравнение

$$\Delta v - \lambda v = -\varphi(P) \quad (\text{внутри } D_i) \tag{305}$$

с однородным предельным условием

$$v|_S = 0. \tag{306}$$

Мы считаем, что $\varphi(P)$ непрерывна в замкнутой области $\bar{D}_i$ и имеет внутри D_i непрерывные производные. Задача (305), (306) равносильна интегральному уравнению (ср. [126])

$$v(P) = -\lambda \iiint\limits_{D_i} G(P; Q)\, v(Q)\, d\tau + \iiint\limits_{D_i} G(P; Q)\, \varphi(Q)\, d\tau, \tag{307}$$

где $G(P; Q)$ — функция Грина уравнения Лапласа с предельным условием (306). Поскольку $(-\lambda)$ — отрицательное число, а все собственные значения ядра $G(P; Q)$ — положительны, уравнение (307) имеет при любом свободном члене одно определенное решение, которое и является решением задачи (305), (306).

Перейдем теперь к решению задачи Дирихле (303) и (304). Пусть $w(P)$ — решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа с предельным условием (304). Функция

$$u(P) = v(P) - w(P) \tag{308}$$

должна удовлетворять уравнению

$$\Delta u - \lambda u = \lambda w$$

и предельному условию

$$u|_S = 0.$$

Мы только что доказали существование решения этой задачи. Зная $u(P)$, мы найдем решение задачи Дирихле $v(P)$ согласно формуле (308).

Основным сингулярным решением уравнения (303) является решение

$$v_0(P) = \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\, r}}{r}, \tag{309}$$

где r — расстояние точки P до некоторой фиксированной точки Q. Основываясь на этом решении, можно построить теорию потенциала совершенно так же, как мы это делали в [132]. Мы не будем на этом останавливаться и перейдем к определению функции Грина.

Функция Грина $G_1(P, Q; \lambda)$ уравнения (303) при предельном условии (306) есть функция P, непрерывная в $\bar{D}_i \setminus Q$, имеющая в $D_i \setminus Q$ непрерывные производные до второго порядка, удовлетворяющая внутри D_i уравнению (303), на S — предельному условию (306) и имеющая вид

$$G_1(P, Q; \lambda) = \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\, r}}{4\pi r} + g_1(P, Q; \lambda), \tag{310}$$

где $g_1(P, Q; \lambda)$ имеет внутри D_i везде непрерывные производные до второго порядка. Функция $g_1(P, Q; \lambda)$ есть решение задачи Дирихле для уравнения (303) при предельном условии

$$g_1(P, Q; \lambda)|_S = -\left.\frac{e^{-\sqrt{\lambda}\, r}}{4\pi r}\right|_S. \tag{311}$$

Совершенно так же, как и в [122], можно показать, что $g_1(P, Q; \lambda)$ — непрерывная функция пары точек P и Q и что внутри D_i имеет место неравенство

$$0 < G_1(P, Q; \lambda) < \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\, r}}{4\pi r} \qquad (r = |PQ|). \tag{312}$$

Тем же способом, что и в [123], доказывается симметрия функции $G_1(P, Q; \lambda)$.

Решение уравнения (305) при условии (306) можно выразить формулой

$$v(P) = \iiint\limits_{D_i} G_1(P, Q; \lambda)\, \varphi(Q)\, d\tau. \tag{313}$$

Это доказывается так же, как и в [126]. Интеграл

$$\iiint\limits_{D_i} g_1(P, Q; \lambda)\, \varphi(Q)\, d\tau$$

внутри D_i удовлетворяет однородному уравнению (303) [126]. Интеграл с сингулярной частью можно представить в виде

$$\iiint\limits_{D_i} \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\, r}}{4\pi r}\, \varphi(Q)\, d\tau_Q = \iiint\limits_{D_i} \frac{\varphi(Q)}{4\pi r}\, d\tau + \iiint\limits_{D_i} \left(\frac{e^{-\sqrt{\lambda}\, r}}{4\pi r} - \frac{1}{4\pi r}\right) \varphi(Q)\, d\tau.$$

К первому слагаемому применима формула Пуассона, а во втором слагаемом ядро ограничено и возможно двукратное дифференцирование под знаком интеграла. Отсюда непосредственно следует, что применение оператора $(\Delta - \lambda)$ к (313) даст $[-\varphi(P)]$. Предельное условие (306) для функции (313) проверяется, как и в [126].

Можно подойти к понятию функции Грина и иначе, а именно так же, как это мы делали в [74]. Рассмотрим неоднородное уравнение (305) и будем считать, что $\varphi(P)$ обращается в нуль везде, кроме сферы D_ε с центром Q и малым радиусом ε, причем

$$\iiint\limits_{D_\varepsilon} \varphi(P)\, d\tau = 1. \tag{314}$$

Переходя к интегральному уравнению (307), мы можем написать его решение в виде [IV$_1$, 8]

$$v(P) = \iiint\limits_{D_i} R(P, Q'; \lambda)\, \varphi(Q')\, d\tau_{Q'}, \tag{315}$$

где $R(P, Q; \lambda)$ — резольвента уравнения (307). Учитывая определение $\varphi(Q')$, можем ожидать, что, при стремлении ε к нулю, левая часть (315) стремится к $G_1(P, Q; \lambda)$, а правая — к $R(P, Q; \lambda)$, так что

$$G_1(P, Q; \lambda) = R(P, Q; \lambda),$$

т. е. функция Грина $G_1(P, Q; \lambda)$ является резольвентой интегрального уравнения (307).

Это, естественно, приводит к следующему соотношению:

$$G_1(P, Q; \lambda) = G(P, Q) - \lambda \iiint\limits_{D_i} G(P, Q')\, G_1(Q', Q; \lambda)\, d\tau_{Q'}, \tag{316}$$

которое легко может быть доказано на основании того, что разность $H(P, Q) = G_1(P, Q; \lambda) - G(P, Q)$ удовлетворяет уравнению $\Delta H(P, Q) = \lambda G_1(P, Q; \lambda)$, предельному условию (306) и сохраняет непрерывность в точке Q. Но мы имели для резольвенты представление в виде ряда по собственным функциям ядра [IV$_1$; 32], что даст в рассматриваемом случае

$$G_1(P, Q; \lambda) = G(P, Q) - \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k(P)\, v_k(Q)}{\lambda_k(\lambda_k + \lambda)},$$

где λ_k и $v_k(P)$ — собственные значения и собственные функции ядра $G(P; Q)$, т. е. уравнения (231) при условии (232). Сравнивая с (316), получим

$$\iiint\limits_{D_i} G(P \cdot Q')\, G_1(Q', Q; \lambda)\, d\tau_{Q'} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k(P)\, v_k(Q)}{\lambda_k(\lambda_k + \lambda)}. \tag{317}$$

Сказанное выше не является строго обоснованным. Сейчас мы проведем доказательство формулы (317), которая нам понадобится в дальнейшем.

Напомним прежде всего, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2}, \tag{318}$$

где λ_k — собственные значения задачи (237_i), $i = 1, 2$, сходится.

Определим коэффициенты Фурье функции $G_1(Q', Q; \lambda)$ относительно собственных функций задачи (237_i), $i = 1, 2$:

$$h_k = \iiint\limits_{D_i} G_1(Q', Q; \lambda)\, v_k(Q')\, d\tau_{Q'}.$$

Заменяя $v_k(Q') = -\dfrac{\Delta v_k(Q')}{\lambda_k}$, получим

$$\lambda_k h_k = -\iiint\limits_{D_i} G_1(Q', Q; \lambda)\, \Delta v_k(Q')\, d\tau_{Q'}.$$

Из двух последних формул следует:

$$(\lambda_k + \lambda) h_k = - \iiint\limits_{D_l} G_1(Q', Q; \lambda) [\Delta v_k(Q') - \lambda v_k(Q')] d\tau_{Q'}. \quad (319)$$

Принимая во внимание симметрию функции $G_1(Q', Q; \lambda)$ и тот факт, что формула (313) дает решение уравнения (305), удовлетворяющее условию (306), мы можем утверждать, что правая часть формулы (319) равна $v_k(Q)$. В данном случае роль $\varphi(Q)$ в формуле (313) играет

$$-[\Delta v_k(Q') - \lambda v_k(Q')] = (\lambda + \lambda_k) v_k(Q').$$

Эта функция имеет внутри D_l непрерывные производные, и если ее взять за правую часть уравнения (305), то решение этого уравнения, удовлетворяющее условию (306) (такое решение единственно), будет $v(P) = v_k(P)$. Формула (319) дает:

$$h_k = \frac{v_k(Q)}{\lambda_k + \lambda}. \quad (320)$$

Таким образом, правая часть формулы (317) есть ряд Фурье левой части, причем эта последняя является функцией, представимой через ядро. Ряд, стоящий в правой части (317), сходится регулярно относительно P при любом фиксированном Q. Это следует из оценок

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k^2(P)}{\lambda_k^2} = \iiint\limits_{D_l} G^2(P; Q) d\tau_Q \leqslant C; \quad \sum_{k=m}^{m+p} h_k^2 \leqslant \varepsilon$$

совершенно так же, как и в **[IV₁; 31]**. Первая из написанных формул выражает уравнение замкнутости для функции $G(P; Q)$ **[127]**. Отметим еще, что левая часть (317) есть непрерывная в замкнутой области $\bar{D}_l$ функция точек P и Q. Это может быть доказано совершенно так же, как мы доказывали непрерывность объемного потенциала и его производных первого порядка **[II; 210]**. Отметим, что член с наибольшей полярностью в подынтегральной функции левой части формулы (317) равен

$$\frac{e^{-\sqrt{\lambda} r}}{rr'},$$

где r и r' — расстояния от Q' до Q и P.

Из сказанного выше следует справедливость формулы (317). При совпадении P и Q получаем формулу

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k^2(P)}{\lambda_k(\lambda_k + \lambda)} = \iiint\limits_{D_l} G(P; Q') G_1(Q', P; \lambda) d\tau_{Q'}, \quad (321)$$

причем ряд сходится равномерно в замкнутой области $\bar{D}_i$, так как справа, в силу сказанного выше, стоит непрерывная функция P [IV$_1$; 38]. Интегрируя (321) по D_i, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k(\lambda_k+\lambda)} = \iiint_{D_i} \psi(P, \lambda)\, d\tau, \tag{322}$$

где

$$\psi(P, \lambda) = \iiint_{D_i} G(P; Q)\, G_1(Q, P; \lambda)\, d\tau_Q. \tag{323}$$

Формула (322) будет нами использована при исследовании чисел λ_k.

138. Асимптотическое выражение собственных значений. Предварительно выясним некоторые свойства функции $\psi(P, \lambda)$. Принимая во внимание оценки для G и G_1, имеем

$$|\psi(P, \lambda)| \leqslant \iiint_{D_i} \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\, r}}{16\pi^2 r^2}\, d\tau_Q \quad (r = |PQ|). \tag{324}$$

Интегрируя по всему пространству и вводя сферические координаты с центром P, получим

$$|\psi(P, \lambda)| \leqslant \frac{1}{16\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-\sqrt{\lambda}\, r} \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi = \frac{1}{4\pi\sqrt{\lambda}}. \tag{325}$$

Докажем теперь, что в любой замкнутой области D', лежащей внутри D_i, произведение $\sqrt{\lambda}\,\psi(P, \lambda)$ при $\lambda \to +\infty$ равномерно стремится к $\frac{1}{4\pi}$:

$$\sqrt{\lambda}\,\psi(P, \lambda) \to \frac{1}{4\pi} \text{ равномерно в } D'. \tag{326}$$

Учитывая те предельные значения, которые имеют функции $g(P; Q)$ и $g_1(P, Q; \lambda)$ на S, мы получаем оценки

$$0 \geqslant g(P; Q) \geqslant -\frac{1}{4r'}; \quad 0 \geqslant g_1(P, Q; \lambda) \geqslant -\frac{e^{-\sqrt{\lambda}\, r'}}{4\pi r'} \quad (P \text{ в } D'),$$

где r' — расстояние от границы D' до S. Мы имеем

$$\sqrt{\lambda}\,\psi(P, \lambda) = \sqrt{\lambda} \iiint_{D_i} \left[\frac{1}{4\pi r} + g(P; Q)\right] \left[\frac{e^{-\sqrt{\lambda}\, r}}{4\pi r} + g_1(P, Q; \lambda)\right] d\tau_Q.$$

Открываем скобки и разбиваем интеграл на четыре слагаемых:

$$\left|\sqrt{\lambda} \iiint_{D_i} g(P; Q)\, g_1(P, Q; \lambda)\, d\tau_Q\right| \leqslant \sqrt{\lambda}\, \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\, r'}}{16\pi^2 r'} \cdot \text{объем } D_i,$$

откуда видно, что интеграл, стоящий слева, стремится равномерно к нулю при $\lambda \to +\infty$, если P принадлежит D'. Далее имеем

$$\left|\sqrt{\lambda}\iiint\limits_{D_l}\frac{1}{4\pi r}g_1(P, Q; \lambda)\,d\tau_Q\right| \leqslant \sqrt{\lambda}\,\frac{e^{-\sqrt{\lambda}\,r'}}{16\pi^2 r'}\iiint\limits_{D_l}\frac{d\tau_Q}{r},$$

и интеграл, стоящий справа, при любом положении P в D_l не превышает некоторой постоянной, откуда следует, что интеграл, стоящий слева, стремится равномерно к нулю. Совершенно аналогично рассматривается интеграл

$$\sqrt{\lambda}\iiint\limits_{D_l}\frac{e^{-\sqrt{\lambda}\,r}}{4\pi r}g(P; Q)\,d\tau_Q.$$

Осталось рассмотреть интеграл

$$\sqrt{\lambda}\iiint\limits_{D_l}\frac{e^{-\sqrt{\lambda}\,r}}{16\pi^2 r^2}\,d\tau_Q \tag{327}$$

и доказать, что он равномерно стремится к $\frac{1}{4\pi}$, если P принадлежит D'. Пусть D_0 и D_1 — сферы с центром P и радиусами, равными r' и диаметру d области D_l. Мы имеем

$$\sqrt{\lambda}\iiint\limits_{D_0}\frac{e^{-\sqrt{\lambda}\,r}}{16\pi^2 r^2}\,d\tau_Q \leqslant \sqrt{\lambda}\iiint\limits_{D_l}\frac{e^{-\sqrt{\lambda}\,r}}{16\pi^2 r^2}\,d\tau_Q \leqslant \sqrt{\lambda}\iiint\limits_{D_1}\frac{e^{-\sqrt{\lambda}\,r}}{16\pi^2 r^2}\,d\tau_Q.$$

Интегралы по D_0 и D_1 выражаем в сферических координатах с центром P и вводим новую переменную $\rho = \sqrt{\lambda}\,r$. Приходим таким образом к неравенству.

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{\sqrt{\lambda}\,r'} e^{-\rho}\,d\rho \leqslant \sqrt{\lambda}\iiint\limits_{D_l}\frac{e^{-\sqrt{\lambda}\,r}}{16\pi^2 r^2}\,d\tau \leqslant \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{\sqrt{\lambda}\,d} e^{-\rho}\,d\rho.$$

При $\lambda \to +\infty$ крайние члены стремятся к $\frac{1}{4\pi}$, и они не зависят от положения точки P в D'. Отсюда и следует непосредственно, что интеграл (327) стремится к $\frac{1}{4\pi}$ равномерно в D', и тем самым утверждение (326) доказано. Принимая во внимание (325), мы можем взять D' настолько близким к D_l, что интеграл от $\sqrt{\lambda}\,\psi(P, \lambda)$ по $(D_l - D')$ будет меньше $\frac{\varepsilon}{2}$, где ε — заданное положительное число. С другой стороны, в силу (326), при достаточно больших λ

$$\left|\iiint\limits_{D'} \sqrt{\lambda}\,\psi(P,\lambda)\,d\tau - \frac{v'}{4\pi}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

где v' — объем D', откуда

$$\left|\iiint\limits_{D_l} \sqrt{\lambda}\,\psi(P,\lambda)\,d\tau - \frac{v}{4\pi}\right| \leqslant \frac{1}{4\pi}(v - v') + \varepsilon,$$

где v — объем D_l. Отсюда следует:

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \iiint\limits_{D_l} \sqrt{\lambda}\,\psi(P,\lambda)\,d\tau = \frac{v}{4\pi},$$

и, в силу (322),

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \sqrt{\lambda}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k(\lambda_k+\lambda)} = \frac{v}{4\pi}. \tag{328}$$

Использование этой формулы для вывода асимптотического выражения для λ_k основано на следующей теореме:

Теорема. *Если ряд*

$$s(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda_k+\lambda} \quad (c_k > 0;\quad \lambda_k > 0), \tag{329}$$

где $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots,\ \lambda_n \to \infty$, *сходится при* $\lambda > 0$ *и*

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \sqrt{\lambda}\, s(\lambda) = H, \tag{330}$$

то

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sum_{\lambda_k\leqslant\lambda} c_k = \frac{2H}{\pi}, \tag{331}$$

причем в последней сумме суммирование распространяется на те значения k, *для которых* $\lambda_k \leqslant \lambda$.

Применим эту теорему к ряду (328). В этом случае $c_k = \dfrac{1}{\lambda_k}$ и $H = \dfrac{v}{4\pi}$, и мы получаем

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sum_{\lambda_k\leqslant\lambda} \frac{1}{\lambda_k} = \frac{v}{2\pi^2}$$

или, что то же,

$$\sum_{\lambda_k \leqslant \lambda} \frac{1}{\lambda_k} = \frac{v}{2\pi^2} \sqrt{\lambda} + \varepsilon(\lambda) \sqrt{\lambda}, \tag{332}$$

где $\varepsilon(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to +\infty$. Если взять $\lambda = \lambda_n$, то получим

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda_k} = \frac{v}{2\pi^2} \sqrt{\lambda_n} + \varepsilon_n \sqrt{\lambda_n} \qquad (\varepsilon_n \to 0). \tag{333}$$

Обозначим

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda_k},$$

а левую часть (332) обозначим через $\varphi(\lambda)$. Это неубывающая функция λ:

$$\varphi(\lambda) = 0 \quad \text{при} \quad \lambda < \lambda_1 \quad \text{и} \quad \varphi(\lambda) = \sigma_m \quad \text{при} \quad \lambda_m \leqslant \lambda < \lambda_{m+1}. \tag{334}$$

Выведем асимптотическое выражение λ_n при больших n. Мы имеем

$$n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot \frac{1}{\lambda_k} =$$

$$= \sigma_1(\lambda_1 - \lambda_2) + \sigma_2(\lambda_2 - \lambda_3) + \ldots + \sigma_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n) + \sigma_n \lambda_n. \tag{335}$$

Неубывающая функция

$$\varphi(\lambda) = \frac{v}{2\pi^2} \sqrt{\lambda} + \varepsilon(\lambda) \sqrt{\lambda} \tag{336}$$

интегрируема по любому конечному промежутку, и, тем самым, и второе слагаемое правой части также интегрируемая функция. В силу (332) и (334) мы имеем

$$\int_0^{\lambda_n} \varphi(\lambda)\, d\lambda = \sigma_1(\lambda_2 - \lambda_1) + \sigma_2(\lambda_3 - \lambda_2) + \ldots + \sigma_{n-1}(\lambda_n - \lambda_{n-1}) =$$

$$= \frac{v}{3\pi^2} \lambda_n^{3/2} + \int_0^{\lambda_n} \varepsilon(\lambda) \sqrt{\lambda}\, d\lambda. \tag{337}$$

Нетрудно показать, что

$$\frac{1}{\lambda_n^{3/2}} \int_0^{\lambda_n} \varepsilon(\lambda) \sqrt{\lambda}\, d\lambda \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{338}$$

Пусть δ — заданное положительное число. Фиксируем p настолько большим, чтобы иметь $|\varepsilon(\lambda)| \leqslant \delta$ при $\lambda \geqslant \lambda_p$. Мы имеем

$$\left|\int_0^{\lambda_n} \varepsilon(\lambda)\sqrt{\lambda}\,d\lambda\right| \leqslant \int_0^{\lambda_p} |\varepsilon(\lambda)|\sqrt{\lambda}\,d\lambda + 2\delta\frac{\left(\lambda_n^{3/2} - \lambda_p^{3/2}\right)}{3} \qquad (n > p),$$

откуда следует:

$$\left|\frac{1}{\lambda_n^{3/2}}\int_0^{\lambda_n} \varepsilon(\lambda)\sqrt{\lambda}\,d\lambda\right| \leqslant \frac{2}{3}\delta + \left[\frac{1}{\lambda_n^{3/2}}\int_0^{\lambda_p} |\varepsilon(\lambda)|\sqrt{\lambda}\,d\lambda - \frac{2\delta\lambda_p^{3/2}}{3\lambda_n^{3/2}}\right].$$

При достаточно больших n квадратная скобка по абсолютной величине $\leqslant \frac{1}{3}\delta$, т. е.

$$\left|\frac{1}{\lambda_n^{3/2}}\int_0^{\lambda_n} \varepsilon(\lambda)\sqrt{\lambda}\,d\lambda\right| \leqslant \delta \quad \text{при больших } n,$$

откуда и следует (338). Таким образом, мы получаем, в силу (337),

$$\sigma_1(\lambda_2 - \lambda_1) + \sigma_2(\lambda_3 - \lambda_2) + \ldots + \sigma_{n-1}(\lambda_n - \lambda_{n-1}) = \frac{v}{8\pi^2}\lambda_n^{3/2} + \varepsilon_n'\lambda_n^{3/2}$$

где $\varepsilon_n' \to 0$ при $n \to \infty$. Подставляя это в (335) и пользуясь (333), получим

$$n = \frac{v}{6\pi^2}\lambda_n^{3/2} + \varepsilon_n''\lambda_n^{3/2}, \tag{339}$$

где $\varepsilon_n'' \to 0$. Отсюда

$$\lambda_n = \left(\frac{6\pi^2 n}{v}\right)^{\frac{2}{3}}\left(1 + \frac{6\pi^2}{v}\varepsilon_n''\right)^{-\frac{2}{3}},$$

и окончательно

$$\lambda_n = \left(\frac{6\pi^2 n}{v}\right)^{\frac{2}{3}} + \varepsilon_n''' n^{\frac{2}{3}} \qquad (\varepsilon_n''' \to 0). \tag{340}$$

В случае плоской области результат имеет вид

$$\lambda_n = \frac{4\pi n}{S} + \varepsilon_n''' n, \tag{341}$$

где S — площадь области.

Таким образом, все сводится к доказательству теоремы относительно ряда (329).

При помощи указанного выше метода Карлеманом (T. Carleman) в его работе «Über die asymptotische Verteilung der Eigenwerte partieller Differentialgleichungen» (Ber. Sächsisch. Akad. Wiss. Leipzig, Math. Phys. Klasse, 1936, 88) была получена асимптотика собственных значений для уравнений общего вида.

Приведем полученный им результат. Пусть имеется выражение

$$L(u)=\sum_{p,\,q=1}^{3} a_{pq}\frac{\partial^2 u}{\partial x_p\,\partial x_q}+\sum_{p=1}^{3} a_p\frac{\partial u}{\partial x_p}+au \qquad (a_{qp}=a_{pq}),$$

где a_{pq}, a_p и a — заданные вещественные непрерывные функции в замкнутой области $\overline{D}$ пространства (x_1, x_2, x_3). Пусть, далее, квадратичная форма

$$\sum_{p,\,q=1}^{3} a_{pq}\xi_p\xi_q$$

переменных ξ_k — определенно положительна, если точка (x_1, x_2, x_3) находится в замкнутой области $\overline{D}$. Рассмотрим предельную задачу:

$$L(u)+\lambda u=0$$

при условии (302). Она имеет бесчисленное множество собственных значений, которые могут быть и комлексными. Во всякой ограниченной части плоскости находится лишь конечное число собственных значений, и если расположить их в порядке неубывающего модуля, то имеет место следующая формула:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\lambda_n^{3/2}}=\frac{1}{6\pi^2}\iiint\limits_D\frac{dv}{\sqrt{\Delta}},$$

где Δ — определитель, составленный из элементов a_{pq}. Отметим, что, в силу положительности квадратичной формы, $\Delta>0$, и правая часть последней формулы — вещественна.

В книге Куранта и Гильберта «Методы математической физики», т. I, полученные выше асимптотические выражения собственных значений λ_n при большом n для уравнения $\Delta u+\lambda u=0$ установлены при помощи экстремальных свойств собственных значений. Этот метод нами изложен в [90] для случая одного независимого переменного. В применении к уравнению $\Delta u+\lambda u=0$ проведение этого метода становится более сложным.

139. Доказательство вспомогательной теоремы. Прежде чем переходить к доказательству сформулированной в предыдущем параграфе теоремы, установим некоторые вспомогательные формулы и докажем ряд лемм.

Введем следующие обозначения:

$$\varphi(\lambda)=\sum_{\lambda_k\leqslant\lambda} c_k; \tag{342}$$

$$\sigma_n=\varphi(\lambda_n)=\sum_{k=1}^{n} c_k. \tag{343}$$

В формуле (342) суммирование распространяется на те значения k, для которых $\lambda_k\leqslant\lambda$. Функция $\varphi(\lambda)$ — неубывающая, неотрицательная функция λ:

$$\varphi(\lambda)=0 \quad \text{при} \quad \lambda<\lambda_1; \quad \varphi(\lambda)=\sigma_m \quad \text{при} \quad \lambda_m\leqslant\lambda<\lambda_{m+1}. \tag{344}$$

Принимая во внимание, что $\lambda_k + \lambda \leqslant 2\lambda$ при $\lambda_k \leqslant \lambda$, можем написать:

$$\varphi(\lambda) \leqslant 2\lambda \sum_{\lambda_k \leqslant \lambda} \frac{c_k}{\lambda_k + \lambda}$$

и, принимая во внимание (330), получим

$$\varphi(\lambda) = O\left(\sqrt{\lambda}\right), \tag{345}$$

т. е. отношение $\varphi(\lambda) : \sqrt{\lambda}$ остается ограниченным при $\lambda \to \infty$. Мы имеем далее

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{\lambda_k + \lambda} = \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k \left(\frac{1}{\lambda_k + \lambda} - \frac{1}{\lambda_{k+1} + \lambda} \right) + \frac{\sigma_n}{\lambda_n + \lambda},$$

причем

$$\frac{1}{\lambda_k + \lambda} - \frac{1}{\lambda_{k+1} + \lambda} = \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \frac{dx}{(x+\lambda)^2},$$

и, принимая во внимание формулу (334), можем написать:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{\lambda_k + \lambda} = \int_0^{\lambda_n} \frac{\varphi(x)}{(x+\lambda)^2}\, dx + \frac{\sigma_n}{\lambda_n + \lambda}.$$

Но $\sigma_n = \varphi(\lambda_n)$, и из (345) следует, что $\sigma_n : (\lambda_n + \lambda) \to 0$ при $n \to \infty$, так что последняя формула дает

$$s(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda_k + \lambda} = \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x)}{(x+\lambda)^2}\, dx. \tag{346}$$

Из (345) непосредственно следует, что подынтегральная функция при $x \to \infty$ имеет порядок $\frac{1}{x^{3/2}}$. Для краткости записи введем одно обозначение. Если $\psi(\lambda) = a\lambda^b + \varepsilon(\lambda)\lambda^b$, где $\varepsilon(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to \infty$, то будем писать: $\psi(\lambda) \sim a\lambda^b$ (ср. [III$_2$; 112]). Докажем две леммы:

Лемма I. *Если $f(\lambda)$ определена при всех достаточно больших положительных λ, имеет непрерывную производную, $\lambda f'(\lambda)$ не убывает при возрастании λ и $f(\lambda) \sim a\lambda^q$ $(q > 0)$, то $f'(\lambda) \sim$ $\sim aq\lambda^{q-1}$.*

Докажем сначала эту лемму при $a = 1$ и $q = 1$. Мы имеем $f(\lambda) \sim \lambda$ и надо доказать, что $f'(\lambda) \sim 1$, т. е. надо доказать, что $f'(\lambda) \to 1$ при $\lambda \to \infty$.

Доказываем от обратного. Если $f'(\lambda)$ не стремится к единице, то существует такая последовательность значений λ_n, что $\lambda_n \to \infty$ и $f'(\lambda_n) \to h$, где число h отлично от единицы. Положим, например, что $h > 1$. Пусть γ — некоторое положительное число. Принимая во внимание, что $\lambda f'(\lambda)$ — неубывающая функция, можем написать:

$$\frac{f(\lambda_n + \gamma\lambda_n) - f(\lambda_n)}{\gamma\lambda_n} =$$

$$= \frac{1}{\gamma\lambda_n} \int\limits_{\lambda_n}^{\lambda_n + \gamma\lambda_n} f'(\lambda)\, d\lambda \geqslant \frac{\lambda_n f'(\lambda_n)}{\gamma\lambda_n} \int\limits_{\lambda_n}^{\lambda_n + \gamma\lambda_n} \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{f'(\lambda_n)}{\gamma} \lg(1 + \gamma).$$

Правая часть стремится к числу $\frac{h}{\gamma} \lg(1 + \gamma)$, которое больше единицы, если взять γ достаточно близким к нулю. Но из $f(\lambda) \sim \lambda$ непосредственно следует, что мы должны иметь

$$\frac{f(\lambda_n + \gamma\lambda_n) - f(\lambda_n)}{\gamma\lambda_n} \to 1.$$

Это противоречие и доказывает лемму при $a = q = 1$. Переходим к общему случаю. Полагая $\mu = \lambda^q$, введем вместо $f(\lambda)$ новую функцию $f_1(\mu) = \frac{1}{a} f\left(\mu^{\frac{1}{q}}\right)$. Мы имеем

$$f_1(\mu) \sim \mu \ (\mu \to \infty); \qquad \mu f_1'(\mu) = \frac{1}{aq} \mu^{\frac{1}{q}} f'\left(\mu^{\frac{1}{q}}\right) = \frac{1}{aq} \lambda f'(\lambda).$$

Таким образом, $\mu f_1'(\mu)$ — неубывающая функция, и мы можем применить к $f_1(\mu)$ лемму при $a = q = 1$, откуда следует:

$$f_1'(\mu) \sim 1, \quad \text{т. е.} \quad \frac{1}{aq} \mu^{\frac{1}{q} - 1} f'\left(\mu^{\frac{1}{q}}\right) \sim 1,$$

откуда следует: $f'(\lambda) \sim aq\lambda^{q-1}$, что и доказывает лемму. Изложенное доказательство останется в силе и при $h = \infty$.

Рассмотрим интеграл

$$K_p = \int\limits_0^\infty \frac{u^{p + \frac{1}{2}}}{(u+1)^{2p+2}}\, du \qquad (p = 1, 2, \ldots). \tag{347}$$

Совершая замену переменных $u = x : (1 - x)$, преобразуем интеграл к виду [**III**$_2$; **72**]:

$$K_p = \int\limits_0^1 x^{p + \frac{1}{2}} (1 - x)^{p - \frac{1}{2}}\, dx = \frac{\Gamma\left(p + \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2p + 2)}. \tag{348}$$

Лемма II. *Пусть*

$$K_{p,1}=\int\limits_0^{1-\alpha}\frac{u^{p+\frac{1}{2}}}{(u+1)^{2p+2}}\,du;\qquad K_{p,2}=\int\limits_{1-\alpha}^{1+\alpha}\frac{u^{p+\frac{1}{2}}}{(u+1)^{2p+2}}\,du;$$

$$K_{p,3}=\int\limits_{1+\alpha}^{\infty}\frac{u^{p+\frac{1}{2}}}{(u+1)^{2p+2}}\,du,$$

где $0<\alpha<1$. *При этом*

$$K_{p,1}\leqslant\delta'_pK_p;\quad K_{p,2}\geqslant(1-\delta''_p)K_p;\quad K_{p,3}\leqslant\delta'''_pK_p, \tag{349}$$

где δ'_p, δ''_p и δ'''_p, *зависящие от выбора* α, *стремятся к нулю при* $p\to\infty$.

Мы имели формулу Стирлинга **[III₂; 75]**:

$$\Gamma(z)=\sqrt{2\pi}\,z^{z-\frac{1}{2}}e^{-z}[1+\varepsilon(z)]\qquad(\varepsilon(z)\to 0\quad\text{при}\quad z\to+\infty).$$

Применяя ее к правой части (348), получим

$$K_p=\sqrt{2\pi}\,2^{-\frac{3}{2}}2^{-2p}\,\frac{\left(p+\frac{3}{2}\right)^{p+1}\left(p+\frac{1}{2}\right)^{p}}{(p+1)^{2p+\frac{3}{2}}}(1+\varepsilon_p),$$

где $\varepsilon_p\to 0$ при $p\to\infty$. Написанная дробь, умноженная на $\sqrt{p}$, стремится к единице при $p\to\infty$, и мы можем написать:

$$K_p=Ap^{-\frac{1}{2}}2^{-2p}(1+\varepsilon'_p)\qquad(\varepsilon'_p\to 0), \tag{350}$$

где $A=\sqrt{2\pi}\,2^{-\frac{3}{2}}$. Функция $u:(u+1)^2$ имеет при $u=1$ максимум, равный $\frac{1}{4}$, откуда следует:

$$K_{p,1}\leqslant k^p\int\limits_0^{1-\alpha}\frac{u^{\frac{1}{2}}}{(u+1)^2}\,du<k^p\int\limits_0^{\infty}\frac{u^{\frac{1}{2}}}{(u+1)^2}\,du,$$

где $0<k<\frac{1}{4}$, и k зависит от выбора α. Мы получаем таким образом

$$K_{p,1}\leqslant A_1k^p, \tag{351}$$

где $A_1=\frac{\pi}{2}$, и совершенно аналогично

$$K_{p,3}\leqslant A_1k^p. \tag{352}$$

Мы имеем $k^p=\left(\frac{1}{4}-\delta\right)^p$, где $\delta>0$ и зависит от выбора α. Из сказанного следует, что $k^p\cdot 2^{2p}p^{1/2}=(1-4\delta)^p p^{1/2}\to 0$ при

$p \to \infty$, и, принимая во внимание (350), (351) и (352), получаем неравенства (349) для $K_{p,1}$ и $K_{p,3}$. Мы имеем далее

$$K_{p,2} = K_p - K_{p,1} - K_{p,3} \geqslant K_p - (\delta'_p + \delta'''_p) K_p,$$

откуда и следует неравенство (349) для $K_{p,2}$, и лемма доказана.

Переходим к доказательству теоремы, формулированной в [138]. По условию этой теоремы

$$s(\lambda) = \int_0^\infty \frac{\varphi(x)}{(x+\lambda)^2}\, dx \sim H\lambda^{-\frac{1}{2}}. \tag{353}$$

Рассмотрим функцию $\lambda^2 s(\lambda)$ и докажем, что ее производная положительна и не убывает при возрастании λ:

$$\frac{d}{d\lambda}[\lambda^2 s(\lambda)] = 2\int_0^\infty \frac{\lambda x \varphi(x)}{(x+\lambda)^3}\, dx = 2\int_0^\infty \frac{u\varphi(\lambda u)}{(u+1)^3}\, du.$$

Из последнего выражения и неубывания функции $\varphi(x)$ непосредственно следует, что и производная, стоящая в левой части формулы, положительна и не убывает. Мы можем, таким образом, применить к функции $\lambda^2 s(\lambda)$ лемму I и получим, принимая во внимание (353),

$$\frac{d}{d\lambda}[\lambda^2 s(\lambda)] \sim \frac{3}{2} H\lambda^{\frac{1}{2}},$$

откуда

$$-s'(\lambda) = 2\int_0^\infty \frac{\varphi(x)}{(x+\lambda)^3}\, dx \sim \frac{1}{2} H\lambda^{-\frac{3}{2}}. \tag{354}$$

Далее мы получаем

$$-\lambda^3 s'(\lambda) \sim \frac{1}{2} H\lambda^{3/2}, \qquad -\frac{d}{d\lambda}[\lambda^3 s'(\lambda)] = 2\cdot 3\int_0^\infty \frac{u\varphi(\lambda u)}{(u+1)^4}\, du,$$

и можем опять применить лемму I к функции $[-\lambda^3 s'(\lambda)]$:

$$-\frac{d}{d\lambda}[\lambda^3 s'(\lambda)] \sim \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} H\lambda^{\frac{1}{2}},$$

откуда, производя дифференцирование и пользуясь (354), получаем

$$s''(\lambda) = 3!\int_0^\infty \frac{\varphi(x)}{(x+\lambda)^4}\, dx \sim \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} H\lambda^{-\frac{5}{2}}. \tag{355}$$

Продолжая таким образом и дальше, придем к формуле

$$(-1)^m s^m(\lambda) = (m+1)! \int_0^\infty \frac{\varphi(x)}{(x+\lambda)^{m+2}} dx \sim \frac{1\cdot 3\ldots(2m-1)}{2^m} H\lambda^{-\frac{2m+1}{2}}. \quad (356)$$

Изучим теперь асимптотическое поведение интеграла

$$J_p(\lambda) = \int_0^\infty \frac{x^p \varphi(x)}{(x+\lambda)^{2p+2}} dx \qquad (p \geqslant 1) \quad (357)$$

при больших λ. Мы имеем

$$\frac{x^p}{(x+\lambda)^{2p+2}} = \frac{\left(1 - \frac{\lambda}{x+\lambda}\right)^p}{(x+\lambda)^{p+2}} = \sum_{s=0}^{p} \binom{s}{p} \frac{(-\lambda)^s}{(x+\lambda)^{p+2+s}},$$

где

$$\binom{s}{p} = \frac{p(p-1)\ldots(p-s+1)}{s!}; \qquad \binom{0}{p} = 1,$$

и, следовательно,

$$J_p(\lambda) = \sum_{s=0}^{p} \binom{s}{p} (-\lambda)^s \int_0^\infty \frac{\varphi(x)}{(x+\lambda)^{p+2+s}} dx.$$

Принимая во внимание (356), получим

$$\left.\begin{aligned} &J_p(\lambda) \sim H\lambda^{-p-\frac{1}{2}} \sum_{s=0}^{p} (-1)^s \binom{s}{p} \frac{1\cdot 3\ldots(2p+2s+1)}{(p+s+1)!\,2^{p+s}}, \\ &J_0(\lambda) = s(\lambda) \sim H\lambda^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}\right\} \quad (358)$$

Первую из этих формул можно записать в виде

$$J_p(\lambda) \sim H\lambda^{-p-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{s=0}^{p} (-1)^s \binom{s}{p} \frac{\Gamma\left(p+s+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(p+s+2)}. \quad (359)$$

Докажем теперь формулу

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{s=0}^{p} (-1)^s \binom{s}{p} \frac{\Gamma\left(p+s+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(p+s+2)} = \frac{2}{\pi} K_p. \quad (360)$$

Рассмотрим для этого интеграл

$$L_p = \int_0^\infty \frac{x^{p+\frac{1}{2}}}{(x+\lambda)^{2p+2}} dx, \quad (361)$$

который при помощи замены $x = \lambda u$ и приводится к виду

$$L_p = \frac{1}{\lambda^{p+\frac{1}{2}}} \int_0^\infty \frac{u^{p+\frac{1}{2}}}{(u+1)^{2p+2}}\, du = \frac{1}{\lambda^{p+\frac{1}{2}}} K_p. \tag{362}$$

Мы имеем

$$\left(\frac{x}{x+\lambda}\right)^p = \sum_{s=0}^{p} (-1)^s \binom{s}{p} \frac{\lambda^s}{(x+\lambda)^s},$$

и интеграл (361) представляется в виде

$$L_p = \sum_{s=0}^{p} (-1)^s \binom{s}{p} \lambda^s \int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{2}}}{(x+\lambda)^{p+s+2}}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\lambda^{p+\frac{1}{2}}} \sum_{s=0}^{p} (-1)^s \binom{s}{p} \int_0^\infty \frac{u^{\frac{1}{2}}}{(u+1)^{p+s+2}}\, du. \tag{363}$$

Совершая замену $u = x\,.(1-x)$, получим

$$\int_0^\infty \frac{u^{\frac{1}{2}}}{(u+1)^{p+s+2}}\, du = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}} (1-x)^{p+s-\frac{1}{2}}\, dx = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(p+s+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(p+s+2)}$$

и подставим это в формулу (363):

$$L_p = \frac{\sqrt{\pi}}{2\lambda^{p+\frac{1}{2}}} \sum_{s=0}^{p} (-1)^s \binom{s}{p} \frac{\Gamma\left(p+s+\frac{1}{2}\right)}{1\,(p+s+2)}.$$

Сравнивая это с (362), получаем (360), и формула (359) принимает вид

$$J_p(\lambda) \sim \frac{2H}{\pi} \lambda^{-p-\frac{1}{2}} K_p \tag{364}$$

или

$$J_p(\lambda) = \frac{2H}{\pi} \lambda^{-p-\frac{1}{2}} K_p (1+\eta_\lambda), \tag{365}$$

где η_λ зависит от p и λ и $\eta_\lambda \to 0$ при фиксированном p и $\lambda \to \infty$.

Интеграл $J_p(\lambda)$ представим в виде суммы четырех слагаемых:

$$J_p(\lambda) = \int_0^1 \frac{x^p \varphi(x)}{(x+\lambda)^{2p+2}}\, dx + \int_1^{(1-\alpha)\lambda} + \int_{(1-\alpha)\lambda}^{(1+\alpha)\lambda} + \int_{(1+\alpha)\lambda}^{\infty} =$$

$$= J_{p,0} + J_{p,1} + J_{p,2} + J_{p,3}, \tag{366}$$

где $0 < \alpha < 1$. Из (345) следует:

$$0 \leqslant \varphi(\lambda) \leqslant A\sqrt{\lambda},$$

где A — постоянная, и, следовательно,

$$J_{p,1} \leqslant A \int\limits_0^{(1-\alpha)\lambda} \frac{x^{p+\frac{1}{2}}}{(x+\lambda)^{2p+2}}\,dx = A\lambda^{-p-\frac{1}{2}} K_{p,1},$$

откуда, в силу леммы II,

$$J_{p,1} = \frac{2H}{\pi}\lambda^{-p-\frac{1}{2}} K_p \eta_p,$$

где η_p зависит от p и α и $\eta_p \to 0$ при $p \to \infty$ и фиксированном α. Совершенно так же получим

$$J_{p,3} = \frac{2H}{\pi}\lambda^{-p-\frac{1}{2}} K_p \eta'_p,$$

где η'_p аналогично η_p. Оцениваем $J_{p,0}$:

$$J_{p,0} \leqslant B\int\limits_0^1 \frac{dx}{(x+\lambda)^{2p+2}} = \frac{B}{2p+1}\left[\frac{1}{\lambda^{2p+1}} - \frac{1}{(1+\lambda)^{2p+1}}\right] \leqslant \frac{B_1}{p\lambda^{2p+1}},$$

где B и B_1 — постоянные (они не зависят от p и λ). Отсюда следует:

$$J_{p,0} = \frac{2H}{\pi}\lambda^{-p-\frac{1}{2}} K_p \eta'_\lambda$$

и мы имеем

$$0 < \eta'_\lambda \leqslant \frac{C}{pK_p}\lambda^{-p-\frac{1}{2}},$$

где C — постоянная. Из предыдущих формул следует:

$$J_{p,2} = \frac{2H}{\pi}\lambda^{-p-\frac{1}{2}} K_p (1 + \eta_\lambda - \eta'_\lambda - \eta_p - \eta'_p). \tag{367}$$

Принимая во внимание определение $J_{p,2}$ и тот факт, что $\varphi(x)$ не убывает при возрастании x, получим

$$J_{p,2} \leqslant \frac{\varphi(\lambda+\alpha\lambda)}{(\lambda-\alpha\lambda)^{1/2}} \int\limits_{\lambda-\alpha\lambda}^{\lambda+\alpha\lambda} \frac{x^{p+\frac{1}{2}}}{(x+\lambda)^{2p+2}}\,dx =$$

$$= \frac{\varphi(\lambda+\alpha\lambda)}{(\lambda+\alpha\lambda)^{1/2}} \cdot \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \lambda^{-p-\frac{1}{2}} K_{p,2}, \tag{368}$$

откуда

$$\frac{\varphi(\lambda+\alpha\lambda)}{(\lambda+\alpha\lambda)^{1/2}} \geqslant \lambda^{p+\frac{1}{2}} \frac{J_{p,2}}{K_{p,2}} \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant \lambda^{p+\frac{1}{2}} \frac{J_{p,2}}{K_p} \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Принимая во внимание (367), получим

$$\frac{\varphi(\lambda+\alpha\lambda)}{(\lambda+\alpha\lambda)^{1/2}} \geqslant \frac{2H}{\pi} \left(1+\eta_\lambda-\eta'_\lambda-\eta_p-\eta'_p\right) \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^{1/2}. \qquad (369)$$

Аналогично из (368) имеем

$$J_{p,2} \geqslant \frac{\varphi(\lambda-\alpha\lambda)}{(\lambda+\alpha\lambda)^{1/2}} \int\limits_{\lambda-\alpha\lambda}^{\lambda+\alpha\lambda} \frac{x^{p+\frac{1}{2}}}{(x+\lambda)^{2p+2}}\, dx = \frac{\varphi(\lambda-\alpha\lambda)}{(\lambda-\alpha\lambda)^{1/2}} \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^{1/2} \lambda^{-p-\frac{1}{2}} K_{p,2},$$

откуда

$$\frac{\varphi(\lambda-\alpha\lambda)}{(\lambda-\alpha\lambda)^{1/2}} \leqslant \lambda^{p+\frac{1}{2}} \frac{J_{p,2}}{K_{p,2}} \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)^{1/2},$$

и, принимая во внимание лемму II и формулу (367), получим

$$\frac{\varphi(\lambda-\alpha\lambda)}{(\lambda-\alpha\lambda)^{1/2}} \leqslant \frac{2H}{\pi} \left(1+\eta_\lambda-\eta'_\lambda-\eta_p-\eta'_p\right) \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)^{1/2} (1-\delta''_p)^{-1}. \quad (370)$$

Покажем теперь, что отношение $\varphi(\lambda):\lambda^{1/2}$ стремится к $\frac{2H}{\pi}$ при $\lambda\to\infty$:

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda^{1/2}} = \frac{2H}{\pi}. \qquad (371)$$

Вообще число A будет одним из возможных предельных значений $\varphi(\lambda):\sqrt{\lambda}$ при $\lambda\to\infty$, если при любых заданных положительных ε и M найдутся такие значения λ', что $|A-\varphi(\lambda'):\sqrt{\lambda'}|\leqslant \leqslant\varepsilon$ и $\lambda'\geqslant M$. Аналогичным образом $A=+\infty$ будет одним из возможных предельных значений $\varphi(\lambda):\sqrt{\lambda}$, если при любых заданных положительных M и N найдутся такие значения λ', что $\varphi(\lambda'):\sqrt{\lambda'}\geqslant N$ и $\lambda'\geqslant M$. При этом под возможным предельным значением мы понимаем такие значения A, что существует беспредельно возрастающая последовательность λ_n значений λ такая, что $\varphi(\lambda_n):\sqrt{\lambda_n}\to A$. Нам надо показать, что существует только одно возможное предельное значение и что оно равно $\frac{2H}{\pi}$.

Обращаемся к неравенствам (369) и (370) и отметим, что левая часть их не зависит от p, которое входит в правые части неравенств Сначала фиксируем каким-нибудь образом p и α и устремляем λ к бесконечности так, чтобы левые части (369) и

(370) стремились к одному из возможных предельных значений A. Мы получим при этом, принимая во внимание, что η_p и η'_p не зависят от λ:

$$A \geqslant \frac{2H}{\pi}\left(1-\eta_p-\eta'_p\right)\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^{1/2},$$

$$A \leqslant \frac{2H}{\pi}\left(1-\eta_p-\eta'_p\right)\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)^{1/2}.$$

Левые части (т. е. A) не зависят ни от p, ни от α, и считая, что p фиксировано достаточно большим, а α достаточно близким к нулю, мы и получим, что единственным возможным значением A является $2H/\pi$, т. е. имеет место (371). Таким образом, утверждение (331) теоремы из [138] доказано. Приведенное выше доказательство принадлежит Харди и Литтльвуду. В работе упомянутых авторов установлено несколько более общее предложение, частным случаем которого является доказанная выше теорема.

140. Линейные уравнения более общего вида. Рассмотрим уравнение вида

$$L(u) = \sum_{i=1}^{3} u_{x_i x_i} + b(x_1, x_2, x_3)\,u = -f(x_1, x_2, x_3). \tag{372}$$

Координаты (x_1, x_2, x_3) или (ξ_1, ξ_2, ξ_3) точек пространства мы в дальнейшем будем обозначать просто (x) или (ξ).

Пусть ищется решение уравнения (372), удовлетворяющее однородному предельному условию:

$$u|_S = 0. \tag{373}$$

Заданные функции $b(x)$ и $f(x)$ мы считаем непрерывными в замкнутой области $\bar{D}_i$ и имеющими непрерывные производные первого порядка внутри D_i.

Совершенно аналогично тому, что мы делали в [137], будем искать решение указанной задачи в виде

$$u(x) = \iiint_{D_i} G(x;\ \xi)\,\mu(\xi)\,d\tau_\xi, \tag{374}$$

где $G(x;\ \xi)$ — функция Грина оператора Лапласа с предельным условием (373). Это последнее условие для функции $u(x)$, определенной формулой (374), выполнено при любом выборе непрерывной функции $\mu(\xi)$, и надо подобрать эту функцию так, чтобы внутри D_i удовлетворялось уравнение (372). Считая, что $\mu(\xi)$ имеет непрерывные производные, получим для $\mu(\xi)$ интегральное уравнение

$$\mu(x) = f(x) + \iiint_{D_i} K(x;\ \xi)\,\mu(\xi)\,d\tau_\xi, \tag{375}$$

с ядром

$$K(x;\ \xi)=b(x)\,G(x;\ \xi). \tag{376}$$

Рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$\mu(x)=\iiint\limits_{D_i} K(x;\ \xi)\,\mu(\xi)\,d\tau_\xi. \tag{377}$$

Надо выяснить, имеет ли оно решения, отличные от нулевого. Положим, что $b(x)\leqslant 0$ в $\bar{D}_i$, и пусть $\mu_0(x)$ — решение уравнения (377). Формула (374) при $\mu(\xi)=\mu_0(\xi)$ дает решение уравнения $L(u)=0$, удовлетворяющее условию (373). Но такое решение равно тождественно нулю **[136]**, т. е.

$$\iiint\limits_{D_i} G(x;\ \xi)\,\mu_0(\xi)\,d\tau_\xi=0. \tag{378}$$

Из формулы (377) при $\mu(x)=\mu_0(x)$ непосредственно следует, что $\mu_0(\xi)$ должно иметь внутри D_i непрерывные производные **[126]**, и, применяя к обеим частям формулы (378) оператор Лапласа, получим $\mu_0(x)\equiv 0$, т. е. уравнение (377) имеет при $b(x)\leqslant\leqslant 0$ только нулевое решение, а следовательно, уравнение (375) разрешимо при любом свободном члене. Поскольку $f(x)$ имеет, по условию, внутри D_i непрерывные производные первого порядка, можно утверждать, что и $\mu(x)$ имеет такие же производные, откуда следует, что формула (374) дает решение поставленной выше задачи. Можно показать, что однородное уравнение (377) имеет только нулевое решение, независимо от знака $b(x)$, в том случае, если область D_i достаточно мала. Все сказанное выше применимо и в плоском случае. Если применить указанный выше метод для уравнения

$$\sum_{i=1}^{3} u_{x_i x_i}+\sum_{i=1}^{3} a_i(x)\,u_{x_i}+b(x)\,u=-f(x), \tag{379}$$

то мы придем к интегральному уравнению с ядром:

$$K(x;\ \xi)=\sum_{i=1}^{3} a_i(x)\,G_{x_i}(x;\ \xi)+b(x)\,G(x;\ \xi). \tag{380}$$

Если для производных функции Грина имеет место оценка

$$|G_{x_i}(x;\ \xi)|\leqslant\frac{C}{r^2}, \tag{381}$$

то к упомянутому интегральному уравнению применимы обычные теоремы.

Сравнительно простое доказательство этой оценки имеется в заметке Эйдуса Д. М. — ДАН СССР, 1956, **106**, № 2.

141. Тензор Грина. Пусть $L(\mathbf{u})$ есть некоторая линейная операция над вектором $\mathbf{u}(u_1, u_2, u_3)$, зависящим от (x, y, z), приводящая тоже к вектору. Рассмотрим уравнение

$$L(\mathbf{u}) = -\mathbf{f}, \tag{382}$$

где $\mathbf{f}$ — заданный вектор, зависящий от (x, y, z). Разлагая левую и правую части на составляющие, получим систему трех уравнений для составляющих (u_1, u_2, u_3) вектора $\mathbf{u}$. Положим, что на поверхности S области D имеется, кроме того, однородное предельное условие, например условие:

$$\mathbf{u}|_S = 0. \tag{383}$$

Под *тензором Грина* для $L(\mathbf{u})$ с предельным условием (383) подразумевают матрицу

$$G(P; Q) = G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = \begin{Vmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{Vmatrix},$$

такую, что уравнение (382) с предельным условием (383) равносильно формуле

$$\mathbf{u}(P) = \iiint\limits_D G(P; Q)\,\mathbf{f}(Q)\,d\tau_Q, \tag{384}$$

причем подынтегральное выражение представляет собою применение матрицы $G(P; Q)$, как оператора, к вектору $\mathbf{f}$, т. е. это подынтегральное выражение есть вектор с составляющими:

$$G_{i1}f_1 + G_{i2}f_2 + G_{i3}f_3 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Каждый столбец тензора дает составляющие некоторого вектора $\mathbf{g}_k$ $(k = 1, 2, 3)$, который, за исключением точки Q, имеет непрерывные производные, удовлетворяет однородному уравнению (382) и предельному условию (383). Характер полярности в точке Q легко вытекает обычно из физического смысла задачи. Пользуясь тензором Грина, можно привести, как и выше, к системе интегральных уравнений задачу о собственных значениях и собственных векторах уравнения

$$L(\mathbf{u}) + \lambda\mathbf{u} = 0$$

при предельном условии (383).

Напишем основное уравнение теории упругости для вектора смещения [IV₁; 104]:

$$\rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} = G\left(\Delta\mathbf{u} + \frac{m}{m-2}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}\right).$$

Пользуясь формулой [II; 124]

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} - \Delta\mathbf{u},$$

мы можем написать для статического случая уравнение в виде

$$\Delta^* \mathbf{u} = a \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - b \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} = 0, \tag{385}$$

где

$$a = \frac{G\,(2m-2)}{m-2}; \qquad b = G,$$

или, вводя обычные постоянные λ и μ Ламе, $a = \lambda + 2\mu$; $b = \mu$.

В безграничном пространстве сила, величины единица, действующая в точке $Q(\xi, \eta, \zeta)$ параллельно оси Z, вызывает смещение с составляющими [1]:

$$u_1 = A\,\frac{(x-\xi)(z-\zeta)}{r^3}; \qquad u_2 = A\,\frac{(y-\eta)(z-\zeta)}{r^3};$$

$$u_3 = A\left[\frac{(z-\zeta)^2}{r^3} + \frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}\cdot\frac{1}{r}\right],$$

где

$$A = \frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu\,(\lambda+2\mu)} \quad \text{и} \quad r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}.$$

Аналогичные выражения для смещения мы имеем и в случае сил, параллельных осям X и Y. Тензор Грина в данном случае будет иметь вид

$$\mathfrak{G} = \frac{1}{8\pi a} P_a + \frac{1}{8\pi b} P_b, \tag{386}$$

где

$$P_a = \left\| \begin{matrix} \frac{1}{r} - \frac{(x-\xi)^2}{r^3} & -\frac{(x-\xi)(y-\eta)}{r^3} & -\frac{(x-\xi)(z-\zeta)}{r^3} \\ -\frac{(y-\eta)(x-\xi)}{r^3} & \frac{1}{r} - \frac{(y-\eta)^2}{r^3} & -\frac{(y-\eta)(z-\zeta)}{r^3} \\ -\frac{(z-\zeta)(x-\xi)}{r^3} & -\frac{(z-\zeta)(y-\eta)}{r^3} & \frac{1}{r} - \frac{(z-\zeta)^2}{r^3} \end{matrix} \right\|$$

и

$$P_b = \left\| \begin{matrix} \frac{1}{r} + \frac{(x-\xi)^2}{r^3} & \frac{(x-\xi)(y-\eta)}{r^3} & \frac{(x-\xi)(z-\zeta)}{r^3} \\ \frac{(y-\eta)(x-\xi)}{r^3} & \frac{1}{r} + \frac{(y-\eta)^2}{r^3} & \frac{(y-\eta)(z-\zeta)}{r^3} \\ \frac{(z-\zeta)(x-\xi)}{r^3} & \frac{(z-\zeta)(y-\eta)}{r^3} & \frac{1}{r} + \frac{(z-\zeta)^2}{r^3} \end{matrix} \right\|,$$

Вместо предельного условия (383) мы имеем в данном случае обращение в нуль в бесконечно далекой точке. Уравнение

$$\Delta^* \mathbf{u} = -\mathbf{f}$$

имеет в данном случае решение (385) Тензор (386) называется обычно в теории упругости тензором смещения Сомильяна (Somigliana). Его можно записать в виде

$$G = \frac{1}{8\pi\mu\,(\lambda+2\mu)}\left[\frac{\lambda+3\mu}{r} E + (\lambda+\mu)\,\frac{\mathbf{r}\times\mathbf{r}}{r^3}\right],$$

---

[1]) Ляв А. Математическая теория упругости. — М.; Л.: ОНТИ, 1935, с. 195.

где E — единичная матрица и $\mathbf{r}\times\mathbf{r}$ — тензор:

$$\mathbf{r}\times\mathbf{r}=\begin{Vmatrix} (x-\xi)^2 & (x-\xi)(y-\eta) & (x-\xi)(z-\zeta) \\ (y-\eta)(x-\xi) & (y-\eta)^2 & (y-\eta)(z-\zeta) \\ (z-\zeta)(x-\xi) & (z-\zeta)(y-\eta) & (z-\zeta)^2 \end{Vmatrix}.$$

В работе Вейля [1]) указаны различные аналоги формулы Грина для уравнения (385), приведено построение тензора Грина для ограниченной области и с помощью этого тензора исследованы собственные значения уравнения

$$\Delta^*\mathbf{u}+\lambda\mathbf{u}=0.$$

142. Плоская статическая задача теории упругости. Некоторые из предельных задач в плоском случае решаются с применением интеграла Коши. Это относится, например, к задаче Дирихле для гармонического и бигармонического уравнений или к задачам конформного преобразования односвязной области на круг или многосвязной области на области определенного типа (Крылов В. И. — Матем. сб., 1938, 4 (46), № 1). С помощью интеграла Коши эти задачи сводятся к интегральным уравнениям Мы изложим применение этого метода к решению плоской статической задачи теории упругости (Мусхелишвили Н. И Некоторые задачи теории упругости). Если в качестве предельного условия мы имеем задание смещений на контуре области B, то решение статической задачи сводится к нахождению двух функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, регулярных в B и удовлетворяющих на контуре области предельному условию:

$$-k\overline{\varphi(z')}+\overline{z'}\varphi'(z')+\psi(z')=f(z') \qquad (z' \text{ на } l), \tag{387}$$

где k — некоторая вещественная постоянная и $f(z')$ — заданная на контуре l функция. Умножая обе части (387) на $\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z'-z}$, где z лежит вне l, и интегрируя по l, получим

$$-\frac{k}{2\pi i}\int_l \frac{\overline{\varphi(z')}}{z'-z}\,dz'+\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{\overline{z'}\varphi'(z')}{z'-z}\,dz'=F(z),$$

где

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{f(z')}{z'-z}\,dz' \qquad (z \text{ вне } l)$$

известная вне l функция. Устремляя z на контур l, мы получим

$$\frac{k}{2}\overline{\varphi(t)}-\frac{k}{2\pi i}\int_l \frac{\overline{\varphi(z')}}{z'-t}\,dz'-\frac{1}{2}\bar{t}\varphi'(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{\overline{z'}\varphi'(z')}{z'-t}\,dz'=F_e(t), \tag{388}$$

где интегралы надо понимать в смысле главного значения. Для того, чтобы получить уравнение, содержащее обычные интегралы, напишем:

$$\frac{k}{2}\overline{\varphi(t)}+\frac{k}{2\pi i}\int_l \frac{\overline{\varphi(z')}\,\overline{dz'}}{\overline{z'}-\bar{t}}=0; \qquad \frac{1}{2}\varphi'(t)-\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{\varphi'(z')\,dz'}{z'-t}=0.$$

Умножая второе из написанных уравнений на t и складывая оба уравнения почленно с уравнением (388), получим

$$k\overline{\varphi(t)}+\frac{k}{2\pi i}\int_l \overline{\varphi(z')}\,d\lg\frac{\overline{z'}-\bar{t}}{z'-t}+\frac{1}{2\pi i}\int_l \varphi'(z')\frac{\overline{z'}-\bar{t}}{z'-t}\,dz'=F_e(t).$$

---

[1]) Rend. Circ. mah. Palermo, 1915.

Наконец, производя в интеграле, содержащем $\varphi'(z')$, интегрирование по частям, получим

$$k\overline{\varphi(t)}+\frac{k}{2\pi i}\int\limits_l \overline{\varphi(z')}\,d\lg\frac{\overline{z'}-\overline{t}}{z'-t}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_l \varphi(z')\,d\,\frac{\overline{z'}-\overline{t}}{z'-t}=F_e(t). \tag{389}$$

Если положить $z'-t=re^{i\vartheta}$, то предыдущее уравнение переписывается в виде

$$k\overline{\varphi(t)}+\frac{1}{\pi}\int\limits_l\left[e^{-2i\vartheta}\varphi(z')-k\overline{\varphi(z')}\right]d\vartheta=F_e(t). \tag{390}$$

Отделяя вещественную и мнимую части, получим систему двух интегральных уравнений для значений вещественной и мнимой частей $\varphi(z')$ на l. Решая эти уравнения, будем иметь $\varphi(z')$ на l, и по формуле Коши получим $\varphi(z)$ внутри l. Для нахождения $\psi(z)$ умножим обе части (387) на $\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z'-z}$, где z — внутри l, и проинтегрируем по l:

$$\psi(z)=\frac{k}{2\pi i}\int\limits_l\frac{\overline{\varphi(z')}}{z'-z}\,dz'-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_l\frac{\overline{z'}\varphi'(z')}{z'-z}\,dz'+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_l\frac{f(z')}{z'-z}\,dz'.$$

Изложенный метод приведения предельной задачи (387) к интегральному уравнению принадлежит Н. И. Мусхелишвили (ДАН СССР, 1934, 3, № 1). При составлении уравнения (389) мы считали, что задача имеет решение. Можно, пользуясь уравнением (389), установить теорему существования поставленной плоской статической задачи теории упругости не только в случае односвязной области, что мы предполагали выше, но и в случае многосвязной области [1]).

Приведение плоской статической задачи теории упругости к интегральному уравнению было дано в работе В. А. Фока (C. r. Acad. Sci. Paris, 1926, 182, p. 264).

В уравнении (390) ϑ есть угол, образованный радиусом-вектором из фиксированной точки t контура l в переменную точку z' того же контура. Принимая это во внимание, нетрудно видеть, что однородное уравнение (390) имеет решение $\varphi(z')=\text{const}$, отличное от нулевого. То же самое можно сказать и об уравнении (389). Мы всегда можем считать, что $z=0$ находится внутри l. Из вида предельного условия (387) следует, что мы можем относить постоянное слагаемое из $\varphi(z)$ к $\psi(z)$ и можем считать $\varphi(0)=0$. Отсюда следует:

$$\int\limits_l\frac{\varphi(z')}{z'}\,dz'=0;$$

складывая это уравнение с (389), получаем новое уравнение, уже не имеющее собственной функции.

Можно применить и другой метод при решении предельной задачи (387) [2]). Будем искать $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ в виде

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_l\frac{\omega(z')}{z'-z}\,dz'\qquad(z\text{ — внутри } l),$$

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_l\frac{\overline{\omega(z')}}{z'-z}\,dz'-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_l\frac{\overline{z'}\omega(z')}{z'-z}\,dz'+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_l\frac{\omega(z')}{z'-z}\,\overline{dz'},$$

---

[1]) Шерман Д. И. — ДАН СССР, 1935, 4, № 3.

[2]) То же, 1940, 27, № 9.

где $\omega(z')$ — искомая на l функция. Подставляя в (387) и пользуясь свойствами интеграла типа Коши, получим интегральное уравнение для $\omega(z')$:

$$k\omega(t) - \frac{k}{2\pi i}\int_l \omega(z')\, d\lg\frac{\overline{z'}-\bar t}{z'-t} - \frac{1}{2\pi i}\int_l \omega(z')\, d\,\frac{\overline{z'}-\bar t}{z'-t} = -f(t).$$

В указанной выше работе Д. И. Шермана рассмотрен случай многосвязной области и проведен анализ полученного интегрального уравнения.

143. О результатах Шаудера. Для эллиптических уравнений второго порядка общего вида

$$L(u) = \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}u_{x_ix_k} + \sum_{k=1}^{n} b_k u_{x_k} + cu = f \tag{391}$$

основными (классическими) предельными (краевыми) задачами являются задача Дирихле, в которой на границе S области $D \subset R^n$ задаются значения u:

$$u|_S = \varphi(s), \tag{392}$$

задача Неймана (вторая краевая задача), в которой на S задаются значения производной u по конормали к S:

$$P(u)|_S \equiv \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}\cos(n,\ x_i)\Big|_S = \psi(s), \tag{393}$$

и третья краевая задача, в которой задается линейная комбинация $P(u)$ и u на S:

$$P(u) + \sigma u|_S = \chi(s). \tag{394}$$

Наиболее красивые результаты по разрешимости задачи Дирихле в ограниченных областях D были доказаны Шаудером и частично Каччопполи в работах: Schauder J. Über lineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung. — Math. Z., 1934, **38**, S. 257—282; Numerische Abschätzungen in elliptischen linearen Differentialgleichungen.—Studia Math., 1934, **5**, S. 34—42; Caccioppoli R. Sulle equazioni ellittiche a derivate partiali con n variabili independenti. — Rend. Acc. Lincei, 1934, **19**, p. 83—89. Они формулируются в терминах пространств Гёльдера $C^{l+\alpha}(\bar D)$. Элементами $C^\alpha(\bar D)$ являются функции $u(x)$, непрерывные в $\bar D$ в смысле Гёльдера с показателем α $(\alpha \in (0,1))$, т. е. $u(x)$ непрерывна в $\bar D$ и для нее конечна постоянная Гёльдера:

$$\sup_{x,\,y \in D}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} \equiv \langle u\rangle_D^\alpha. \tag{395}$$

Норма в $C^\alpha(\bar D)$ определяется равенством

$$\|u\|_D^\alpha = \sup_{x \in D}|u(x)| + \langle u\rangle_D^\alpha. \tag{396}$$

Элементами $C^{l+\alpha}(\bar{D})$, $l \geqslant 1$, являются непрерывные в $\bar{D}$ функции, имеющие всевозможные производные до порядка l, причем производные порядка l суть элементы $C^{\alpha}(\bar{D})$. Норма в $C^{l+\alpha}(\bar{D})$ определяется равенством

$$\|u\|_D^{(l+\alpha)} = \sum_{k=0}^{l} \sum_{(k)} \sup_{x \in D} |D^k u(x)| + \sum_{(l)} \langle D^l u \rangle_D^{\alpha}. \tag{397}$$

В нем $\sum\limits_{(k)}$ означает суммирование по всем производным порядка k. Пространства $C^{l+\alpha}(\bar{D})$, $l \geqslant 0$ являются банаховыми. Таковыми же являются и пространства $C^l(\bar{D})$, $l = 0, 1, \ldots$, состоящие из непрерывных в $\bar{D}$ функций, имеющих непрерывные в $\bar{D}$ производные до порядка l. Норма в $C^l(\bar{D})$ определяется

$$\|u\|_D^{(l)} = \sum_{k=0}^{l} \sum_{(k)} \sup_{x \in D} |D^k u(x)|. \tag{398}$$

Вместо $C^0(\bar{D})$ принято писать просто $C(\bar{D})$.

Будем говорить, что граница S области $D \subset R^n$ принадлежит классу $C^{l+\alpha}$, $l \geqslant 1$, $\alpha \in (0, 1)$, если существует число $\rho > 0$, такое, что пересечение S с шаром B_ρ радиуса ρ с центром в произвольной точке $x^0 \in S$ есть связная поверхность, уравнение которой в местной декартовой системе координат $(y_1, \ldots, y_n)$ с началом в точке x^0 имеет вид $y_n = \omega(y_1, \ldots, y_{n-1})$, причем $\omega(y_1, \ldots, y_{n-1})$ есть функция класса $C^{l+\alpha}$ в замкнутой области $B(x^0, \rho)$, являющейся ортогональной проекцией пересечения $S \cap B_\rho$ на плоскость $y_n = 0$. Термин «местная декартова система координат с началом в точке $x^0 \in S$» означает, что ось y_n направлена по нормали к S в точке x^0, а остальные, ортогональные друг другу y_i, лежат в гиперплоскости, касательной к S в точке x^0.

Для функции φ, заданной на поверхности S класса $C^{l+\alpha}$, принадлежность к $C^{k+\beta}(S)$, $k + \beta \leqslant l + \alpha$, будет означать, что она как функция местных координат $(y_1, \ldots, y_{n-1})$ принадлежит $C^{k+\beta}(\bar{B}(x^0, \rho))$ для всех $x^0 \in S$.

Основной результат Шаудера состоит в следующем:

Теорема 1. *Если коэффициенты и свободный член f уравнения* (391) *являются элементами* $C^{l+\alpha}(\bar{D})$, $l \geqslant 0$, *где D — ограниченная область в R^n,*

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\xi_k \geqslant \nu \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \qquad \nu = \mathrm{const} > 0,$$

$c(x) \leqslant 0$, *S принадлежит классу $C^{l+2+\alpha}$, а $\varphi \in C^{l+2+\alpha}(S)$, то задача* (391), (392) *имеет решение u, принадлежащее $C^{l+2+\alpha}(\bar{D})$, и оно единственно.*

На основе этой теоремы, предложения о компактности вложения $C^{l+\alpha}(\bar{D})$ в $C^l(\bar{D})$ и спектральных свойств вполне непрерывных операторов устанавливается аналог первой и второй теорем Фредгольма для оператора L при условии Дирихле. А именно, рассмотрим наряду с задачей (391), (392) спектральную задачу

$$L(u)=\lambda u, \quad u|_S=0. \tag{399}$$

Чтобы сформулировать наиболее полный результат, надо считать λ комплексным числом, а u — комплекснозначной функцией вещественного переменного x. В соответствии с этим надо ввести аналоги пространств $C^{l+\alpha}(\bar{D})$, элементами которых являются комплекснозначные функции $u(x)=u_1(x)+iu_2(x)$ с $u_k(x)$, $k=1, 2$, принадлежащими $C^{l+\alpha}(\bar{D})$. Сохраним за ними те же обозначения $C^{l+\alpha}(\bar{D})$. Норма в таком $C^{l+\alpha}(\bar{D})$ определяется как сумма норм (397) для u_1 и u_2.

Справедливо следующее предложение:

Теорема 2. *Пусть для L и S выполнены все предположения предыдущей теоремы, кроме условия $c(x)\leqslant 0$. Тогда задача* (399) *имеет нетривиальные* (т. е. *отличные от тождественного нуля*) *решения не более чем при счетном числе значений λ: $\lambda=\lambda_k$, $k=1, 2, \ldots$, и эти решения принадлежат $C^{l+2+\alpha}(\bar{D})$. Числа λ_k расположены в квадратичной параболе $\pi=\{\lambda=\lambda'+i\lambda'': \lambda''^2\leqslant\alpha_1(\alpha_2-\lambda'), \alpha_1>0\}$, параметры которой α_i вычисляются по коэффициентам L. Каждое λ_k имеет конечную кратность*, т. е. *каждому λ_k соответствует лишь конечное число линейно независимых решений. Задача*

$$L(u)=\lambda u+f, \quad u|_S=\varphi, \tag{400}$$

однозначно разрешима в $C^{l+2+\alpha}(\bar{D})$ при любых $f\in C^{l+\alpha}(\bar{D})$ и $\varphi\in C^{l+2+\alpha}(S)$, если λ отлично от чисел λ_k, $k=1, 2, \ldots$.

Последнее утверждение теоремы можно кратко формулировать так: из теоремы единственности для задачи (400) следует теорема существования. Числа $\{\lambda_k\}$ составляют спектр оператора L при первом краевом условии. Соответствующие им решения u_k (т. е. решения задачи (399) при $\lambda=\lambda_k$) называются собственными функциями оператора L при первом краевом условии. Все они принадлежат $C^{l+2+\alpha}(\bar{D})$. Третью теорему Фредгольма для задачи (400) при указанной выше гладкости коэффициентов L формулировать в простом виде невозможно. Мы это сделаем в дальнейшем при несколько иных предположениях о коэффициентах L, когда будем подробно исследовать задачу (400) в гильбертовом пространстве $W_2^2(D)$.

Доказательство этих теорем существенно опирается на следующее важное неравенство:

$$\|u\|_D^{(l+2+\alpha)}\leqslant \dot{C}\left[\|L(u)\|_D^{(l+\alpha)}+\max_{\bar{D}}|u|+\|u\|_S^{(l+2+\alpha)}\right]. \tag{401}$$

Оно справедливо для любой функции u из $C^{l+2+\alpha}(\bar{D})$. Постоянная C в нем зависит лишь от норм коэффициентов L в пространстве $C^{l+\alpha}(\bar{D})$, константы эллиптичности ν и границы S, которая должна принадлежать классу $C^{l+2+\alpha}$. Если коэффициент $c(x)$ в

[redacted]

$W_2^2(D)$ $L(u)$ есть элемент $L_2(D)$ и при любой $\eta \in C_0^\infty(D)$ имеет место равенство

$$-\int_D L(u)\,\eta\,dx = L(u, \eta), \tag{404}$$

где через $L(u, \eta)$ обозначена билинейная форма

$$L(u, \eta) = \int_D (a_{ik} u_{x_k} \eta_{x_i} - b_i u_{x_i} \eta - cu\eta)\,dx. \tag{405}$$

Здесь и в дальнейшем мы опускаем знак суммирования Σ по дважды повторяющимся индексам. Равенство (404) получается в результате интегрирования по частям первой группы членов левой части (404) (см. формулу (107) из [48]). Так как $L(u) \in L_2(D)$, а множество $C_0^\infty(D)$ плотно в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$, то равенство (404) справедливо при любой η из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$. Действительно, произвольную функцию η из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ можно аппроксимировать в норме $W_2^1(D)$ функциями η_m из $C_0^\infty(D)$. Для u и η_m равенство (404) имеет место, и в нем можно перейти к пределу по $m \to \infty$. В результате получим (404) для любых функций u из $W_2^2(D)$ и η из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$.

Если u принадлежит $W_2^2(D)$ и удовлетворяет уравнению

$$L(u) = \lambda u + f \tag{406}$$

(при почти всех x из D) с $f \in L_2(D)$, то для него и любой η из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ справедливо соотношение

$$L(u, \eta) = -\int_D (\lambda u + f)\,\eta\,dx. \tag{407}$$

Верно и обратное утверждение: если для элемента u из $W_2^2(D)$ равенство (407) выполняется при любой η из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ (или хотя бы при любой η из $C_0^\infty(D)$), то u есть решение уравнения (406). Действительно, из (407) и (404) следует, что

$$\int_D (L(u) - \lambda u - f)\,\eta\,dx = 0,$$

и так как первый множитель принадлежит $L_2(D)$, а второй есть произвольный элемент $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ (или хотя бы $C_0^\infty(D)$), то согласно теореме 2 из [IV$_1$; 112] первый множитель будет равен нулю. Таким образом, уравнение (406) и тождество (407) с любым η из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ или $C_0^\infty(D)$ эквивалентны на функциях u из $W_2^2(D)$. Однако тождество (407) имеет смысл для функций u из $W_2^1(D)$.

Более того, в него не входят производные a_{ik} по x. Благодаря этому можно ввести следующее расширение понятия решения уравнения (406):

Функция $u(x)$ называется *обобщенным решением класса* $W_2^1(D)$ *уравнения* (406) (короче *об. решением*), если она принадлежит $W_2^1(D)$ и удовлетворяет тождеству (407) при всех η из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$. Относительно коэффициентов a_{ik}, b_i и c при этом можно предполагать лишь, что они суть измеримые, ограниченные на D функции. В соответствии с этим *обобщенным решением класса* $W_2^1(D)$ *задачи* (403) назовем функцию u из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$, удовлетворяющую тождеству (407) при всех η из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$.

Такое расширенное толкование понятия решения задачи (403) оказалось весьма целесообразным. Если для a_{ik} при любых вещественных числах $\xi_1, \ldots, \xi_n$ выполнено неравенство

$$\sum_{i, k=1}^{n} a_{ik}(x) \xi_i \xi_k \geqslant \nu \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \quad x \in D, \quad \nu = \mathrm{const} > 0,$$

являющееся ни чем иным, как условием эллиптичности L, если a_{ik} дифференцируемы, то для задачи (403) верны утверждения, которые естественно было назвать теоремами Фредгольма. Они аналогичны трем теоремам Фредгольма, доказанным выше для интегральных уравнений Фредгольма второго рода, а также для более общих уравнений вида $u = \lambda A(u) + f$ в сепарабельном гильбертовом пространстве (в частности, в L_2) с вполне непрерывным оператором A (см. [IV$_1$; гл. I], а также [V; 133—135]). Мы приведем здесь их формулировки. Доказательство же этих утверждений, хотя и очень просто с аналитической точки зрения, требует знания ряда понятий и теорем функционального анализа, которые мы излагаем лишь в пятом томе.

Первая теорема Фредгольма утверждает, что если задача (403) имеет не более одного об. решения класса $W_2^1(D)$, то она разрешима при любой f из $L_2(D)$.

Это верно и при комплексных λ, только в этом случае надо иметь дело с комплексными пространствами $L_2(D)$, $W_2^1(D)$ и $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$, т. е. считать, что u и f суть элементы этих пространств. *Коэффициенты же для L мы везде предполагаем вещественными.* Для формулировки второй теоремы Фредгольма надо ввести в рассмотрение две спектральные задачи:

$$L(u) = \lambda u, \quad u|_S = 0, \tag{408}$$

и

$$L^*(u) = \lambda u, \quad u|_S = 0, \tag{409}$$

где L^* есть дифференциальный оператор, сопряженный по Лагранжу к L. Согласно с [48] L^* имеет вид

$$L^*(u) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) - \frac{\partial}{\partial x_i}(b_i u) + cu. \tag{410}$$

Под нетривиальными *об. решениями класса* $W_2^1(D)$ *задачи* (408) понимаются отличные от тождественного нуля элементы $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$, удовлетворяющие тождеству (407) с $f = 0$. Аналогично *об. решения класса* $W_2^1(D)$ *задачи* (409) — это элементы $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$, удовлетворяющие тождеству

$$L^*(u, \eta) \equiv \int_D (a_{ik}u_{x_k}\eta_{x_i} - b_i u\eta_{x_i} - cu\eta)\, dx = -\lambda \int_D u\eta$$

при любой η из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$.

Вторая теорема Фредгольма имеет следующее содержание: задачи (408) и (409) имеют нетривиальные об. решения для не более, чем счетного множества значений λ: $\lambda = \lambda_k$, $k = 1, \ldots$ Они совпадают с теми λ_k, о которых шла речь в [143]. Каждому λ_k соответствует лишь конечное число линейно-независимых об. решений задачи (408) и задачи (409), и число тех и других совпадает. Набор чисел $\{\lambda_k\}$ называется *спектром оператора L и оператора L^* в области D при условии Дирихле.*

Таким образом задача (403) однозначно разрешима при любой f из $L_2(D)$ для всех λ, не совпадающих с $\{\lambda_k\}$. Если же в (403) $\lambda = \lambda_k$, то нетрудно убедиться, что для разрешимости задачи (402) f обязано удовлетворять равенствам

$$\int_D f v_k\, dx = 0, \tag{411}$$

где v_k есть любое об. решение задачи (409) с $\lambda = \lambda_k$. Это следует из (407), если в нем положить $\lambda = \lambda_k$, а $\eta = v_k$, и заметить, что

$$L(u, v_k) = L^*(v_k, u) = -\lambda_k \int_D v_k u\, dx.$$

Третья теорема Фредгольма для задачи (403) с $\lambda = \lambda_k$ утверждает, что выполнение равенства (411) является необходимым и достаточным условием разрешимости задачи (403) в пространстве $W_2^1(D)$. Задача в этом случае имеет бесчисленное множество решений. Все они могут быть записаны в виде $u = u_0 + \sum_{i=1}^{N_k} c_i u_{k_i}$, где u_0 есть какое-нибудь частное об. решение задачи (403), u_{k_i}, $i = 1, \ldots, N_k$, суть об. решения задачи (408), при $\lambda = \lambda_k$, а c_i — произвольные числа. Для справедливости всех перечисленных утверждений существенно, что область D — ограничена и коэффициенты a_{ik} удовлетворяют условиям

$$\nu \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \leqslant a_{ik}(x)\,\xi_i\xi_k \leqslant \mu \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2,$$

где ν и μ — положительные постоянные. Предположения же об ограниченности b_i и c могут быть ослаблены — заменены предположениями об их принадлежности $L_q(D)$ с $q > n$ для b_i и $q > {}^n/_2$ для c. Может быть ослаблено и предположение относительно f; например, заменено на принадлежность f к $L_q(D)$ с $q \geqslant \frac{2n}{n-2}$ при $n > 2$ и с любым конечным q при $n = 2$. Близким образом исследуется и случай неоднородного краевого условия Дирихле, а также вторая и третья краевые задачи.

При $b_i \equiv 0$ уравнение

$$L(u) = f \tag{412}$$

является уравнением Эйлера для квадратичного функционала

$$J(u) = \int\limits_D \left(a_{ik} u_{x_k} u_{x_i} - cu^2 + 2uf\right) dx,$$

а соответствующее (412) тождество

$$L(u,\, \eta) \equiv \int\limits_D \left(a_{ik} u_{x_k} \eta_{x_i} - cu\eta\right) dx = -\int\limits_D f\eta\, dx$$

есть не что иное, как равенство нулю первой вариации $J(u)$ на функции u и $\delta u = \eta$. Таким образом с задачей Дирихле для уравнения (412) связана вариационная задача о нахождении экстремальных точек функционала $J(u)$ на классе функций из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$. Решения этой задачи (если они существуют) являются не чем иным, как обобщенными решениями класса $W_2^1(D)$ задачи Дирихле для (412).

В **[IV$_1$; 117—119]** мы показали, что инфимум функционала $J(u)$ на $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ реализуется на единственном элементе $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$, если $c(x) \equiv 0$ (это же верно и при любой ограниченной неположительной функции $c(x)$). Проведенное там рассуждение не опиралось на существование решения задачи Дирихле для уравнения (412); напротив, оно само гарантирует существование обобщенного решения класса $W_2^1(D)$ задачи Дирихле для (412). Основы такого пути изучения краевых задач (прямых методов) были заложены Гильбертом, давшим оправдание принципа Римана для $L = \Delta$. А именно, он доказал, не привлекая теории потенциала, что среди гладких функций, удовлетворяющих краевому условию $u|_S = \varphi$, имеется такая, которая реализует инфимум интеграла

$$J(u) = \int_D \sum_{i=1}^{2} u_{x_i}^2 \, dx_1 \, dx_2,$$

и она является гармонической функцией в D. Правда, в то время работали лишь с непрерывно дифференцируемыми функциями и стремились получать сразу классические решения. Это существенно усложняло все исследование. В 20-х годах начали отказываться от обычных (классических) производных, вводя те или иные обобщенные производные. В начале 30-х годов, когда уже сформировалось то понятие обобщенного дифференцирования, которое изложено в конце тома [**IV**$_1$], задача на определение инфимума $J(u)$ (при $c(x) \leqslant 0$) была поставлена и решена, по сути дела, в той форме, которая изложена в [**IV**$_1$; **117—118**]. В работе К. Фридрихса «Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren und Anwendungen auf die Spektralzerlegung von Differentialoperatoren» (Math. Ann., 1934, **109**, № 4—5, S. 465—487, 685—713) разрешимость этой задачи была положена в основу построения самосопряженных полуограниченных расширений эллиптических операторов

$$L(u) \equiv \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + cu,$$

заданных первоначально на множестве всех гладких функций, равных нулю на S. Коэффициенты a_{ik} при этом считались непрерывно дифференцируемыми (или общее — ограниченно дифференцируемыми функциями x), а за основное гильбертово пространство, в котором ставили вопрос о расширениях неограниченных операторов L, бралось пространство $L_2(D)$. Мы вернемся к этому вопросу в пятом томе.

Сформулированные в этом пункте теоремы о разрешимости задачи (403) (и аналогичные теоремы о разрешимости для уравнения $L(u) = \lambda u + f$ других классических краевых задач) были доказаны разными методами в конце 40-х годов М. И. Вишиком, О. А. Ладыженской и С. Г. Михлиным. Введенные ими определения обобщенных решений различны по форме, но эквивалентны по существу дела. Мы привели определения обобщенного решения уравнения и обобщенного решения задачи (403), предложенные О. А. Ладыженской. Они оказались удобными при исследовании не только линейных, но и нелинейных краевых задач. Доказательство теорем Фредгольма, данное ею, проводится по следующему плану: сначала устанавливается эквивалентность тождества (407) некоторому операторному уравнению вида $u=\lambda A(u)+f$ в гильбертовом пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ с вполне непрерывным оператором A. Для этого используются лишь оценки, доказываемые нами в следующем пункте, и теорема Рисса об общем виде линейного функционала. После этого, с помощью теорем Фредгольма, справедливых для таких уравнений, извлекаются те утверждения о разрешимости задачи (403), которые мы перечислили выше (см. в связи с этим лекции О. А. Ладыженской, изданные в виде книги: Краевые задачи математической физики. — М.: Наука, 1970. Более подробный анализ задач (403) и (408) и соответствующая библиография содержатся в монографии О. А. Ладыженской и Н. Н. Уральцевой, указанной в предыдущем пункте).

145. Первое основное (энергетическое) неравенство. Предположим, что коэффициенты оператора L из (402) удовлетворяют условиям п. [144], а именно при любых вещественных $\xi_1, \ldots, \xi_n$ и $x \in D$

$$\left.\begin{aligned} \nu \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \leqslant a_{ik}(x)\,\xi_i\xi_k \leqslant \mu \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \\ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2(x)} \leqslant \mu_1, \quad \mu_2 \leqslant c(x) \leqslant \mu_3, \end{aligned}\right\} \tag{413}$$

где ν и $\mu>0$, $\mu_1 \geqslant 0$, а μ_2 и μ_3 — какие-либо числа (не обязательно положительные). Введем сокращенные обозначения:

$$(u, v)=\int_D uv\,dx, \quad \|u\|=\sqrt{(u, u)}, \quad u_x^2=\sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2,$$

$$|u_x|=\sqrt{u_x^2}, \quad \|u_x\|=\left(\int_D u_x^2\,d_x\right)^{1/2},$$

$$\|u\|^{(1)}=\left(\|u\|^2+\|u_x\|^2\right)^{1/2}=\left(\int_D (u^2+u_x^2)\,dx\right)^{1/2}. \tag{414}$$

Будем считать параметр λ и все функции вещественными, хотя проводимые ниже рассуждения легко обобщаются и на случай комплексных λ, u и f. Мы будем использовать неравенство

$$\int_D \sum_{i=1}^{N} u_i v_i\,dx \leqslant \left(\int_D \sum_{i=1}^{N} u_i^2\,dx\right)^{1/2} \left(\int_D \sum_{i=1}^{N} v_i^2\,dx\right)^{1/2}, \tag{415}$$

которое является обобщением неравенства Буняковского — Шварца [II; 161] (и доказывается так же, как последнее), и элементарное неравенство

$$|ab| \leqslant \varepsilon a^2+(4\varepsilon)^{-1} b^2, \tag{416}$$

справедливое для любых чисел a, b и любого $\varepsilon > 0$. Оценим $L(u, u)$, определенное в (405), снизу, используя предположения (413) и неравенство (415), следующим образом:

$$L(u, u) \geqslant \nu \|u_x\|^2 - \left(\int_D \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2\, dx\right)^{1/2} \left(\int_D \sum_{i=1}^n (b_i u)^2\, dx\right)^{1/2} - \\ - \mu_3 \|u\|^2 \geqslant \nu \|u_x\|^2 - \mu_1 \|u_x\| \|u\| - \mu_3 \|u\|^2.$$

Отсюда, в силу (416), вытекает

$$L(u, u) \geqslant (\nu - \varepsilon_1) \|u_x\|^2 - \left(\mu_3 + \frac{\mu_1^2}{4\varepsilon_1}\right) \|u\|^2 \qquad (417)$$

при любом $\varepsilon_1 > 0$. Пусть u есть обобщенное решение класса $W_2^1(D)$ задачи (403), так что для него справедливо тождество (407). Полагая в (407) $\eta = u$, получим равенство

$$L(u, u) + \lambda \|u\|^2 = - \int_D fu\, dx. \qquad (418)$$

Из него, используя (417), неравенство Буняковского — Шварца и (416), извлекаем такое неравенство:

$$(\nu - \varepsilon_1) \|u_x\|^2 + \left(\lambda - \mu_3 - \frac{\mu_1^2}{4\varepsilon_1}\right) \|u\|^2 \leqslant \|f\| \|u\| \leqslant \varepsilon_2 \|u\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon_2} \|f\|^2, \qquad (419)$$

где ε_2 — произвольное положительное число. Его и называют *первым основным* (или *энергетическим*) *неравенством*. Из (419) видно, что норма $\|u_x\|$ об. решения u задачи (403) оценивается сверху через $\|f\|$ и $\|u\|$. Если же

$$\lambda - \mu_3 - \frac{\mu_1^2}{4\nu} \equiv \delta > 0, \qquad (420)$$

то (419) дает возможность оценить норму $\|u_x\|$ только через $\|f\|$. Действительно, возьмем, например, $\varepsilon_2 = \delta/4$, а ε_1 таким, чтобы $\lambda - \mu_3 - \mu_1^2 (4\varepsilon_1)^{-1} = 3\delta/4$. Тогда элементарные подсчеты показывают, что $\varepsilon_1 = \nu\mu_1^2 (\delta\nu + \mu_1^2)^{-1}$, и из (419) следует желаемая оценка:

$$\frac{2\nu^2}{\delta\nu + \mu_1^2} \|u_x\|^2 + \|u\|^2 \leqslant \frac{2}{\delta^2} \|f\|^2, \qquad (421)$$

или, короче,

$$\|u\|^{(1)} \leqslant C_\delta \|f\|. \qquad (422)$$

Благодаря ей имеет место следующая теорема единственности:

Теорема 1. *Если коэффициенты L удовлетворяют условиям* (413) *и выполнено условие* (420), *то задача* (403) *имеет* *не более одного об. решения класса $W_2^1(D)$ (область D при этом может быть и неограниченной).*

Действительно, для разности $v = u' - u''$ двух возможных обобщенных решений задачи (403) справедливо тождество (407) с $f = 0$; а потому и неравенство (422) с $f = 0$, из которого следует, что $v = 0$, т. е. $u' = u''$.

Для ограниченных областей D можно ослабить условие (420). Чтобы сделать это, воспользуемся неравенством

$$\int_D u^2\,dx \leqslant C_D \int_D u_x^2\,dx \tag{423}$$

(неравенство (32) из [IV$_1$; 115]), справедливым для любой функции $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ и ограниченной области D. При $\varepsilon_1 \in (0, \nu]$ из (419) следует

$$\left(\frac{\nu - \varepsilon_1}{C_D} + \lambda - \mu_3 - \frac{\mu_1^2}{4\varepsilon_1} - \varepsilon_2\right)\|u\|^2 \leqslant \frac{1}{4\varepsilon_2}\|f\|^2, \tag{424}$$

и потому, если

$$\max_{0<\varepsilon_1\leqslant\nu}\left(\frac{\nu - \varepsilon_1}{C_D} + \lambda - \mu_3 - \frac{\mu_1^2}{4\varepsilon_1}\right) \equiv \delta_1 > 0, \tag{425}$$

то, беря в (424) $\varepsilon_2 = \delta_1/2$, получим

$$\|u\|^2 \leqslant \delta_1^{-2}\|f\|^2. \tag{426}$$

Отсюда же и из (419), взятого, например, с $\varepsilon_1 = \nu/2$, $\varepsilon_2 = 1$, следует и оценка полной нормы u в $W_2^1(D)$, а именно:

$$\|u\|^{(1)} \leqslant C\|f\|. \tag{427}$$

Условие (425) выполнено, например, для $L = \Delta$ при всех $\lambda \geqslant 0$. Условие же (420) для $L = \Delta$ и $\lambda = 0$ не выполняется. Если коэффициенты заданы в какой-либо области D_1 и для них справедливы предположения (413) в области D_1, то условие (425) выполняется для любого фиксированного λ (в частности, для $\lambda = 0$), если область $D \subset D_1$ взять достаточно малого объема, ибо $C_D \to 0$ при $\operatorname{mes} D \to 0$. В связи с этим говорят, что в областях «достаточно малого объема» для задачи (403) справедлива теорема единственности.

З а м е ч а н и е. В [IV$_1$; 115] мы доказали, что $C_D \to 0$, если стремится к нулю диаметр D. Более тонкие рассуждения показывают, что C_D пропорциональна $|\operatorname{mes} D|^{2/n}$.

146. Пространство $W_{2,0}^2(D)$ и второе основное неравенство. Докажем предварительно неравенство

$$\int_S |v|\,dS \leqslant C \int_D (|v| + |v_x|)\,dx. \tag{428}$$

Оно справедливо для любой функции v, принадлежащей $W^1_1(D)$, т. е. v из $L_1(D)$, имеющей обобщенные производные первого порядка, суммируемые по D. Граница S области D должна обладать некоторой регулярностью, например принадлежать классу C^1. Неравенство (428) справедливо и для более широкого класса областей: для областей с липшицевыми границами. Мы не будем давать их точного определения, но из приводимого ниже вывода нетрудно усмотреть, какие свойства S достаточны для справедливости (428). Неравенство (428) потребуется нам лишь для функций v, принадлежащих $C^1(\bar{D})$. Поэтому мы ограничимся его доказательством лишь для таких v. Из этого факта и плотности $C^1(\bar{D})$ в $W^1_1(D)$ следует справедливость (428) для любой $v \in W^1_1(D)$. Возьмем в произвольной точке $x^0 \in S$ местную декартову систему координат $(y_1, \ldots, y_n)$ и кусок $S_\rho(x^0)$ поверхности S, имеющий уравнение

$$y_n = \omega(y_1, \ldots, y_{n-1}),$$
$$y' \equiv (y_1, \ldots, y_{n-1}) \in B_\rho = \{y' : |y'| < \rho\}.$$

Пусть $\bar{\rho}$ таково, что область $D_{\rho,\delta} = \{y : y' \in B_\rho,\ \omega(y') - \delta < y_n < \omega(y')\}$ принадлежит D. Функцию ω будем считать непрерывно дифференцируемой в $\bar{B}_\rho$. Функцию v, принадлежащую $C^1(\bar{D})$, рассмотрим как функцию координат y в $D_{\rho,\delta}$. В силу теоремы Ньютона — Лейбница

$$v(y', \omega(y')) = v(y', \omega(y') - \tau) - \int_{-\tau}^{0} \frac{\partial v(y', \omega(y') + \xi)}{\partial \xi}\, d\xi. \tag{429}$$

Возьмем от обеих частей (429) модули, результат умножим на $\sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} \omega^2_{y_i}(y')}\, dy'$ и проинтегрируем по B_ρ. Это и элементарные оценки дают следующие соотношения:

$$\int_{B_\rho} |v(y', \omega(y'))| \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} \omega^2_{y_i}(y')}\, dy' = \int_{S_\rho(x^0)} |v|\, dS =$$
$$= \int_{B_\rho} \left| v(y', \omega(y') - \tau) + \int_{-\tau}^{0} \frac{\partial v(y', \omega(y') + \xi)}{\partial \xi}\, d\xi \right| \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} \omega^2_{y_i}(y')}\, dy' \leqslant$$
$$\leqslant C_1 \left[\int_{B_\rho} |v(y', \omega(y') - \tau)|\, dy' + \int_{D_{\rho,\delta}} \left| \frac{\partial v(y)}{\partial y_n} \right| dy \right] \tag{430}$$

для $\tau \in (0, \delta)$. Постоянная C_1 есть мажоранта для $\sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} \omega^2_{y_i}(y')}$ в B_ρ. Проинтегрируем теперь неравенство

(430) по τ в пределах от 0 до δ и результат умножим на δ^{-1}. В правой части появится интеграл

$$\delta^{-1}\int_0^\delta d\tau \int_{B_\rho} |v(y', \omega(y')-\tau)|\,dy',$$

который не превосходит $\delta^{-1}\int_{D_{\rho,\delta}} |v(y)|\,dy$. Таким образом мы приходим к неравенству

$$\int_{S_\rho(x^0)} |v|\,dS \leqslant C_1\delta^{-1}\int_{D_{\rho,\delta}} |v|\,dy + C_1\int_{D_{\rho,\delta}} \left|\frac{\partial v}{\partial y_n}\right| dy \leqslant$$
$$\leqslant C_1\delta^{-1}\int_{D_{\rho,\delta}} |v|\,dx + C_1\int_{D_{\rho,\delta}} |v_x|\,dx. \tag{431}$$

Предполагая, что поверхность S можно покрыть конечным числом кусков типа $S_\rho(x^0)$, мы придем к неравенству (428), суммируя (431) по всем таким кускам.

Определим теперь *пространство* $W^2_{2,0}(D)$. Оно есть замкнутое подпространство гильбертова пространства $W^2_2(D)$, которое определено в [IV₁; 115]. Напомним, что $W^2_2(D)$ состоит из всех квадратично суммируемых по D функций, имеющих квадратично суммируемые по D об. производные до второго порядка. Скалярное произведение в $W^2_2(D)$ определяется так:

$$(u, v)_2 = \int_D (uv + u_x v_x + u_{xx} v_{xx})\,dx, \tag{432}$$

где $u_x v_x = \sum_{i=1}^n u_{x_i} v_{x_i}$, а $u_{xx} v_{xx} = \sum_{i,\,k=1}^n u_{x_i x_k} v_{x_i x_k}$. $W^2_2(D)$ является полным гильбертовым пространством. Норму в нем будем обозначать $\|u\|^{(2)}_{2,\,D} = (u, u)^{1/2}_2$, а иногда, короче, $\|u\|^{(2)}$.

Подпространство $W^2_{2,0}(D)$ состоит из тех элементов $W^2_2(D)$, которые обращаются в нуль на границе S области D. При «хороших» границах S в $W^2_{2,0}(D)$ плотно множество функций из $C^2(\bar{D})$, равных нулю на S. Чтобы не доказывать этот важный для нас факт, определим $W^2_{2,0}(D)$ иначе:

$W^2_{2,0}(D)$ есть замыкание в норме $W^2_2(D)$ множества $\dot{C}^2(\bar{D})$ функций и из $C^2(\bar{D})$, равных нулю на S. (Мы ввели здесь обозначение $C^2_0(\bar{D})$; не следует его смешивать с обозначением $C^2_0(D)$ множества всех дважды непрерывно дифференцируемых функ-

ций, имеющих компактные носители, лежащие в D. Элементы $C_0^2(D)$ равны нулю не только на S, но и в ее окрестности.)

$W_{2,0}^2(D)$ есть полное гильбертово пространство с тем же скалярным произведением, что и в $W_{22}(D)$. Для гладких (и даже липшицевых) границ S множество $W_{2,0}^2(D)$ принадлежит множеству $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$. Мы предоставляем читателю доказать это утверждение самостоятельно.

Теперь мы переходим к получению оценки нормы в $W_2^2(D)$ решений u задачи (403) через нормы u и f в $L_2(D)$. Для этого, помимо условий (413) о коэффициентах L, будем считать, что a_{ik} имеют ограниченные об. производные первого порядка, т. е.

$$\left|\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_l}\right| \leqslant \mu_4. \tag{433}$$

Кроме того, предположим, что S принадлежит классу C^2 (о допустимых ослаблениях этого условия см. замечание в конце данного пункта). Эта оценка есть следствие неравенства

$$\| u \|_{2,D}^{(2)} \leqslant \frac{2}{\nu} \| L(u) \|_{2,D} + C_1 \| u \|_{2,D}, \tag{434}$$

справедливого для любой функции u из $W_{2,0}^2(D)$. Оно и называется *вторым основным неравенством для эллиптических операторов* Постоянная C_1 в нем определяется некоторыми характеристиками границы области D и постоянными ν, μ и μ_i из условий (413), (433). Неравенство (434) достаточно доказать лишь для $u \in C_0^2(\overline{D})$, ибо $C_0^2(\overline{D})$ плотно в $W_{2,0}^2(D)$. Действительно, любое u из $W_{2,0}^2(D)$ можно аппроксимировать в норме $W_2^2(D)$ функциями u_m из $C_0^2(\overline{D})$. Пусть (434) верно для всех u_m. В силу указанной сходимости u_m к u в (434), взятом для u_m, можно перейти к пределу по $m \to \infty$ и получить (434) для u. Итак, пусть $u \in C_0^2(\overline{D})$. Рассмотрим $\int\limits_D (L(u))^2\,dx$ и оценим его снизу следующим образом:

$$\int\limits_D (L(u))^2\,dx = \int\limits_D \Big[(a_{ik}u_{x_ix_k})^2 + 2a_{ik}u_{x_ix_k}\left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_i}u_{x_k} + \right.$$

$$\left. + b_iu_{x_i} + cu\right) + \left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_i}u_{x_k} + b_iu_{x_i} + cu\right)^2\Big]\,dx \geqslant$$

$$\geqslant (1-\varepsilon)\int\limits_D (a_{ik}u_{x_ix_k})^2\,dx + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)\int\limits_D \left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_i}u_{x_k} + b_iu_{x_i} + cu\right)^2 dx \geqslant$$

$$\geqslant (1-\varepsilon)\int\limits_D (a_{ik}u_{x_ix_k})^2\,dx - C_2\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)\int\limits_D (u^2 + u_x^2)\,dx. \tag{435}$$

Здесь и ниже, если не оговорено противное, по повторяющимся дважды индексам подразумевается суммирование от 1 до n; ε — произвольное число из интервала $(0, 1)$, а постоянная C_2, так же, как и вводимые ниже постоянные C_k, определяются числовыми параметрами из условий (413), (433), и возможно, областью D. Преобразуем интеграл $\int\limits_D (a_{ik}u_{x_ix_k})^2\,dx$ с помощью двукратного интегрирования по частям (см. (107) [48]) к виду

$$\int\limits_D a_{ik}u_{x_ix_k}a_{jl}u_{x_jx_l}\,dx = \int\limits_D \Big[a_{ik}u_{x_ix_j}a_{jl}u_{x_kx_l} - \\ - \frac{\partial}{\partial x_k}(a_{ik}a_{jl})\,u_{x_i}u_{x_jx_l} + \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{ik}a_{jl})\,u_{x_i}u_{x_kx_l}\Big]\,dx + \int\limits_S I(s)\,dS,$$

где *)

$$I(s) = a_{ik}a_{jl}u_{x_i}\left[u_{x_jx_l}\cos(n, x_k) - u_{x_kx_l}\cos(n, x_j)\right], \quad x = s \in S. \tag{436}$$

Из (436) следует неравенство

$$\int\limits_D (a_{ik}u_{x_ix_k})^2\,dx \geqslant \int\limits_D I_1(x)\,dx + \int\limits_S I(s)\,dS - \\ - C_3\int\limits_D \left(\varepsilon_1 u_{xx}^2 + \frac{1}{\varepsilon_1}u_x^2\right)dx, \quad \varepsilon_1 \in (0, 1), \tag{437}$$

---

*) Для возможности первого интегрирования по частям функция u должна иметь производные третьего порядка, однако написанное нами равенство, полученное в результате двукратного интегрирования по частям, содержит от u лишь производные второго порядка и справедливо для любой функции u из $C^2(\bar{D})$. Чтобы убедиться в этом, надо аппроксимировать u из $C^2(\bar{D})$ функциями u_m из $C^3(\bar{D})$ в норме $C^2(\bar{D})$. Для каждой из u_m равенство (436) имеет место. Переходя в нем к пределу по $m \to \infty$, получим (436) для u. Указанные аппроксимации u_m можно построить, например, так: продолжить u на более широкую область $\tilde{D} \supset D$ так, чтобы продолжение принадлежало $C^2(\tilde{D})$, и затем от него взять усреднения u_h с $h = \frac{1}{m}$ [IV$_1$; 110]. Можно убедиться в справедливости (436) для $u \in C^2(\bar{D})$ несколько иначе, не используя продолжения u на более широкую область. А именно, взять последовательность подобластей $D_1 \subset D_2 \subset \ldots$ области D, с границами ∂D_k, равноотстоящими от ∂D [102]. Пусть ∂D_k получена из ∂D сдвигом вдоль внутренних нормалей к ∂D на расстояние, равное $\frac{1}{k}$. . Для фиксированной D_k усреднения $u_{\frac{1}{m}}$ функции u при $m \geqslant k$ определяются только значениями u в D и сходятся при $m \to \infty$ к u в норме $C^2(\bar{D}_k)$. Для области D_k и всех $u_{\frac{1}{m}}$ с $m \geqslant k$ равенство (436) справедливо. Переходя в нем к пределу по $m \to \infty$, убедимся, что (436) верно для функции u в области D_k. Затем сделаем предельный переход по областям D_k, устремляя k к бесконечности. Это даст равенство (436) для u и области D.

в котором использовано следующее сокращенное обозначение

$$I_1(x) = a_{ik}(x)\, a_{jl}(x)\, u_{x_i x_j}(x)\, u_{x_k x_l}(x). \tag{438}$$

Покажем, что в силу (413) имеет место оценка

$$I_1(x) \geqslant \nu^2 u^2_{xx}(x). \tag{439}$$

Для этого зафиксируем произвольную точку $x^0 \in D$ и введем в ее окрестности новые декартовы координаты: $y_k = \alpha_{kl}(x - x^0_l)$, $k, l = 1, \ldots, n$. Ортогональную матрицу α_{kl} выберем так, чтобы она приводила квадратичную форму $a_{ik}(x^0)\xi_i\xi_k$ к диагональному виду, т. е. чтобы

$$a_{ik}(x^0)\,\alpha_{ji}\alpha_{lk} = \lambda_j(x^0)\,\delta_{jl},$$

где $\lambda_j(x^0)$ — собственные числа формы $a_{ik}(x^0)\xi_i\xi_k$, а δ_{jl} — символ Кронекера *). Тогда, учитывая условие (413) и закон преобразования $u_{x_i x_j}$ при переходе к координатам y, получим

$$I(x^0) = \sum_{s,\,t=1}^{n} \lambda_s \lambda_t \left(u_{y_s y_t}\right)^2 \Big|_{x=x^0} \geqslant \nu^2 u^2_{yy}\Big|_{x=x^0}.$$

Но, как легко проверить, $u^2_{yy} = u^2_{xx}$, и поэтому неравенство (439) действительно имеет место для всех точек x^0 из D. Благодаря (437) и (439) из (435) следует неравенство

$$\int_D (L(u))^2\,dx \geqslant (1-\varepsilon)\left[\nu^2 \|u_{xx}\|^2 + \int_S I(s)\,dS - C_3\varepsilon_1 \|u_{xx}\|^2 - \right.$$
$$\left. - C_3\varepsilon_1^{-1}\|u_x\|^2\right] - C_2(\varepsilon^{-1} - 1)\left(\|u\|^{(1)}\right)^2,$$

а из этого неравенства — неравенство

$$(1-\varepsilon)(\nu^2 - C_3\varepsilon_1)\|u_{xx}\|^2 \leqslant \|L(u)\|^2 - (1-\varepsilon)\int_S I(s)\,dS +$$
$$+ \left[C_3\varepsilon_1^{-1}(1-\varepsilon) + C_2(\varepsilon^{-1} - 1)\right]\left(\|u\|^{(1)}\right)^2. \tag{440}$$

Здесь ε_1 — произвольное положительное число, ε — произвольное число из $(0, 1)$, а $\|u_{xx}\|^2 = \int_D u^2_{xx}\,dx$. При $\varepsilon = 1/7$ и $\varepsilon_1 = \frac{\nu^2}{8C_3}$ (440) примет вид

$$\frac{3}{4}\nu^2 \|u_{xx}\|^2 \leqslant \|L(u)\|^2 - \frac{6}{7}\int_S I(s)\,dS + C_4\left(\|u\|^{(1)}\right)^2. \tag{441}$$

До сих пор мы не использовали обращение u в нуль на S. Покажем, что если воспользоваться этим условием, то интеграл

---

*) Напомним, что δ_{jl} равно 1 при $j = l$ и равно 0 при $j \neq l$.

$\int\limits_S I\,dS$ может быть преобразован к виду, не содержащему вторые производные u по x. Этот факт является центральным при выводе неравенства (434). Чтобы доказать это, рассмотрим произвольную точку x^0 на поверхности S и введем в ней *местные декартовы координаты* y: $y_k = c_{kl}(x_l - x_l^0)$, $k = 1, \ldots, n$, т. е. такие, что ось y_n направлена по внешней нормали $\boldsymbol{n}$ к S в точке x^0 и матрица (c_{kl}) — ортогональна. Пусть $y_n = \omega(y_1, \ldots, y_{n-1})$ есть уравнение поверхности S в окрестности начала координат $y = (0, \ldots, 0)$. По условию, функция $\omega(y_1, \ldots, y_{n-1}) \in C^2$. В силу ортогональности матрицы (c_{kl}) имеем $x_l - x_l^0 = c_{kl}y_k$, $l = 1, \ldots, n$, и потому $\cos(n, x_l) = c_{nl}$, $l = 1, \ldots, n$. Рассмотрим выражение $I(s)$ в точке x^0 и перейдем в нем к координатам y:

$$I(x^0) = a_{ik}a_{jl}c_{mi}u_{y_m}c_{pj}c_{ql}u_{y_py_q}c_{nk} - a_{ik}a_{jl}c_{mi}u_{y_m}c_{pk}c_{ql}u_{y_py_q}c_{nj} \equiv$$
$$\equiv (b_{mn}b_{pq} - b_{mp}b_{qn})\,u_{y_m}u_{y_py_q}, \qquad (442)$$

где

$$b_{pq} = a_{jl}c_{pj}c_{ql}, \qquad p,\ q = 1, \ldots, n.$$

Используем теперь граничное условие $u|_S = 0$. Вблизи точки x^0, координаты y_l которой равны нулю, это условие имеет вид

$$u(y_1, \ldots, y_{n-1}, \omega(y_1, \ldots, y_{n-1})) = 0,$$

причем оно выполняется тождественно по $y_1, \ldots, y_{n-1}$ вблизи $y_1 = \ldots = y_{n-1} = 0$. Продифференцируем это тождество по y_i и y_k, $i, k = 1, \ldots, n-1$, и учтем, что в точке x^0 $\omega_{y_i} = 0$, $i = 1, \ldots, n-1$. В точке x^0 это даст

$$u_{y_i} = 0, \quad u_{y_iy_k} = -u_{y_k}\omega_{y_iy_k} = -\frac{\partial u}{\partial n}\omega_{y_iy_k}, \qquad (443)$$

$i, k = 1, \ldots, n-1$. Благодаря $\left.\dfrac{\partial u}{\partial y_i}\right|_{x^0} = 0$, $i = 1, \ldots, n-1$,

$$I(x^0) = (b_{nn}b_{pq} - b_{np}b_{qn})\frac{\partial u}{\partial n}\frac{\partial^2 u}{\partial y_p\,\partial y_q}. \qquad (444)$$

При $p = n$ и произвольном q, а также при $q = n$ и произвольном p члены, стоящие в круглой скобке (444) взаимно сокращаются, что вместе с (443) дает для $I(x^0)$ представление

$$I(x_0) = -\sum_{p,q=1}^{n-1}(b_{nn}b_{pq} - b_{np}b_{qn})\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2 \omega_{y_py_q}. \qquad (445)$$

Будем считать, что координаты $y_1, \ldots, y_{n-1}$ в касательной плоскости к S в точке x^0 выбраны так, что все смешанные производные $\omega_{y_p y_q}$, $p \neq q$ в точке x^0 равны нулю (этого, как известно, всегда можно добиться за счет ортогонального преобразования координат $y_1, \ldots, y_{n-1}$). Тогда

$$I(x^0) = -\sum_{p=1}^{n-1} (b_{nn}b_{pp} - b_{np}^2)\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2 \omega_{y_p y_p}. \tag{446}$$

В силу предположения: $S \in C^2$ найдется такое неотрицательное число K, что

$$\omega_{y_p y_p}\big|_{x_0} \leqslant K, \quad p = 1, \ldots, n-1, \tag{447}$$

для всех точек x^0 поверхности S. Если, в частности, D есть выпуклая область, то в качестве K можно взять нуль. Из условия (413) следует, что $0 \leqslant b_{nn}b_{pp} - b_{np}^2 \leqslant \mu^2$, и поэтому

$$-I(x^0) \leqslant \mu^2(n-1)K\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2. \tag{448}$$

Благодаря этому из неравенства (441) получаем

$$\frac{3}{4}\nu^2\|u_{xx}\|^2 \leqslant \|L(u)\|^2 + \frac{6}{7}\mu^2(n-1)K\int_S \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2 dS + C_4(\|u\|^{(1)})^2. \tag{449}$$

Для оценки граничного интеграла при $K > 0$ воспользуемся неравенством (428), взяв в нем $v = u_x^2$:

$$\int_S \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2 dS = \int_S \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2\, dS \leqslant$$

$$\leqslant C_5 \int_D \left\{ u_x^2 + \sqrt{\sum_{k=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2\right)\right]^2}\right\} dx =$$

$$= C_5 \int_D \left[u_x^2 + \sqrt{\sum_{k=1}^n \left(2\sum_{i=1}^n u_{x_i}u_{x_i x_k}\right)^2}\right] dx \leqslant$$

$$\leqslant C_5 \int_D \left[u_x^2 + 2\sqrt{\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \sum_{i=1}^n u_{x_i x_k}^2}\right] dx =$$

$$= C_5 \int_D (u_x^2 + 2|u_x||u_{xx}|)\, dx \leqslant C_5 \int_D (\varepsilon u_{xx}^2 + (1+\varepsilon^{-1})u_x^2)\, dx, \tag{450}$$

где ε — любое положительное число. Постоянная C_5 равна константе C из (428). Подставим в (449) эту оценку граничного интеграла, взяв $\varepsilon = \frac{1}{4}\nu^2\left[\frac{6}{7}\mu^2(n-1)KC_5\right]^{-1}$, и приведем подобные члены:

$$\frac{\nu^2}{2}\|u_{xx}\|^2 \leqslant \|L(u)\|^2 + C_6(\|u\|^{(1)})^2.$$

Прибавив к обеим ее частям член $\frac{\nu^2}{2}(\|u\|^{(1)})^2$, получим

$$\frac{\nu^2}{2}(\|u\|^{(2)})^2 \leqslant \|L(u)\|^2 + C_7(\|u\|^{(1)})^2. \tag{451}$$

С другой стороны, для любой функции $u \in C_0^2(\overline{D})$ справедливы соотношения

$$\int_D u_x^2\,dx = -\int_D u\,\Delta u\,dx \leqslant \|u\|\|\Delta u\| \leqslant \sqrt{n}\,\|u\|\|u_{xx}\| \leqslant \\ \leqslant \varepsilon\|u_{xx}\|^2 + \frac{n}{4\varepsilon}\|u\|^2$$

с $\varepsilon > 0$. Используем его с $\varepsilon = \frac{\nu^2}{4C_7}$ для оценки сверху члена $C_7\|u_x\|^2$, имеющегося в правой части (451). В результате этого элементарные преобразования приведут нас к неравенству

$$\frac{\nu^2}{4}(\|u\|^{(2)})^2 \leqslant \|L(u)\|^2 + C_8\|u\|^2, \tag{452}$$

из которого следует интересующее нас неравенство (434). Как сказано выше, все постоянные C_k определяются D и известными нам параметрами из условий (413), (433). Они могут быть выписаны явно, что легко сделать, следуя только что приведенному выводу неравенства (434).

Если u есть решение задачи (403) из пространства $W_{2,0}^2(D)$, то благодаря неравенству (434) мы можем оценить его норму в $W_2^2(D)$ через $\|f\|$ и $\|u\|$, а именно:

$$\|u\|^{(2)} \leqslant \frac{2}{\nu}\|\lambda u + f\| + C_1\|u\| \leqslant \frac{2}{\nu}\|f\| + \left(\frac{2|\lambda|}{\nu} + C_1\right)\|u\|. \tag{453}$$

Если же λ таково, что выполняется неравенство (420), то отсюда и из (421) следует возможность оценить $\|u\|^{(2)}$ только через $\|f\|$:

$$\|u\|^{(2)} \leqslant \left[\frac{2}{\nu} + \left(\frac{2|\lambda|}{\nu} + C_1\right)\frac{\sqrt{2}}{\delta}\right]\|f\|. \tag{454}$$

З а м е ч а н и е. Из данного нами доказательства неравенства (434) видно, что от области D были использованы лишь две характеристики: постоянная C из (428) и постоянная K из (447), причем условие (447) может нарушаться в отдельных точках S и даже на целых множествах точек S поверхностной меры нуль.

Весь вывод сохраняется для широкого класса областей D (например, для любых многогранников).

Неравенство (434) и приведенный здесь вывод взят из работы О. А. Ладыженской (ДАН СССР, 1951, **79**, с. 723—725). Такое же неравенство было установлено ею и для общих однородных краевых условий вида $\left(\frac{\partial u}{\partial l}+\sigma u\right)\Big|_S=0$, где $\frac{\partial}{\partial l}$ означает дифференцирование по направлению, не касающемуся поверхности S и гладко меняющемуся при переходе от одной точки поверхности к другой. Более того, были даны оценки, обобщающие неравенство (434) на случай производных u любого порядка (полные доказательства имеются в книге: Ладыженская О. А. Смешанная задача для гиперболического уравнения. — М.: Гостехиздат, 1953). Неравенство (434) для первого краевого условия (т. е. для $u|_S=0$) независимо от О. А. Ладыженской и другим способом было доказано Каччопполи (Giorn. Mat. Battaglini, 1950—51, **80**, p. 186—212). Частный случай (434), когда D есть круг, извлекается из работ С. Н. Бернштейна (Math. Ann., 1906, **62**, S. 253—271; 1910, **69**, S. 82—131). Примечательной особенностью двумерного случая является то, что неравенство (434) место для операторов

$$L(u)=\sum_{i,\,k=1}^{2}a_{ik}u_{x_ix_k}+\sum_{i=1}^{2}b_iu_{x_i}+cu,$$

старшие коэффициенты a_{ik} которых могут быть произвольными измеримыми функциями, удовлетворяющими лишь условиям (413). Этот факт доказывается с помощью приема С. Н. Бернштейна, сводящего данный вопрос для L к аналогичному вопросу для оператора Лапласа, и приема О. А. Ладыженской преобразования и оценки контурного интеграла $\int\limits_S I(s)\,dS$, изложенного выше. При размерности пространства x, большей двух, прием С. Н. Бернштейна не работает и, оказывается, для справедливости неравенства (434) необходимо накладывать те или иные дополнительные ограничения на коэффициенты a_{ik} (у нас — это условие (433)) (см. по этому поводу главы I и III книги; Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. — М.: Наука, 1973).

147. Некоторые сведения о гильбертовых пространствах и операторах, действующих в них. Ранее мы имели дело с конкретными гильбертовыми пространствами — пространствами $L_2(D)$, $W_2^1(D)$, $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$, $W_2^2(D)$, $W_{2,0}^2(D)$. Всех их объединяют некоторые общие им свойства, которые положены в основу определения абстрактного полного сепарабельного гильбертова пространства H.

Приведем здесь краткую формулировку аксиом, определяющих *комплексное гильбертово пространство* H, а также некоторые их следствия (более подробно см. [V; гл. V]). Прежде всего, H есть линейное множество, т. е. его элементы u, v, ... можно умножать на комплексные числа a, b, ... и складывать, и эти операции обладают теми же свойствами коммутативности и ассоциативности, что и в случае комплексного n-мерного векторного пространства ([III₁; 25]).

Во-вторых, для любого целого положительного m существует m линейно независимых элементов. Наконец, каждой паре элементов u и v из H сопоставляется комплексное число, называемое скалярным произведением. Оно обозначается символом (u, v). Это скалярное произведение должно обладать следующими свойствами:

$$\left.\begin{array}{c}(v, u) = \overline{(u, v)}, \quad (u + v, w) = (u, w) + (v, w), \\ (au, v) = a(u, v) \quad \text{и} \quad (u, u) > 0, \text{ если } u \neq 0.\end{array}\right\} \tag{455}$$

По (u, u) определяется положительное число, называемое нормой элемента u, а именно: $\|u\| = (u, u)^{1/2}$. Она равна нулю лишь для нулевого элемента H (который мы обозначаем просто через 0). В соответствии с этим вводится понятие *сходимости*: последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к элементу u, если $\lim\limits_{k\to\infty} \|u_k - u\| = 0$. Последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется *сходящейся в себе*, или *последовательностью Коши*, если $\|u_k - u_m\| \to 0$ при k и m, стремящихся к бесконечности.

Пространство H называется *полным*, если для любой последовательности Коши $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ существует элемент u, к которому она сходится. Наконец, H называется *сепарабельным* пространством, если существует счетное множество элементов H: $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$, *плотное* в H. Последнее означает, что для любого элемента $u \in H$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такой элемент v_k, что $\|u - v_k\| \leqslant \varepsilon$. Если H обладает всеми перечисленными свойствами, то оно называется *полным, сепарабельным, комплексным гильбертовым пространством. Часто свойства полноты и сепарабельности включаются в понятие гильбертова пространства и в дальнейшем не оговариваются особо. Мы также не будем указывать их отдельно, считая, что оба эти свойства выполнены.*

Если в качестве a, b, ... берутся лишь вещественные числа, то скалярное произведение (u, v) также должно быть вещественным, и в равенствах (455) комплексного сопряжения нет. В этом случае говорят о *вещественном гильбертовом пространстве* H.

Доказывается, что в абстрактном гильбертовом пространстве H существует *ортонормированный базис*, т. е. такая система элементов $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, что $(\varphi_k, \varphi_l) = \delta_{kl}$ и любой элемент u представим рядом $u = \sum_{k=1}^{\infty} (u, \varphi_k)\varphi_k$, сходящимся к нему в норме пространства H. Отсюда следует, что $\|u\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(u, \varphi_k)|^2$. Число таких базисов неограничено. Но, выбрав один такой базис, можно построить изоморфизм между двумя произвольными комплексными гильбертовыми пространствами H_l, в том числе между H и комплексным гильбертовым пространством l_2. Элементами l_2 являются числовые последовательности $x = (x_1, x_2, \ldots)$ комплексных чисел x_k, удовлетворяющие лишь условию $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty$. Операции умножения на число и сложения определяются так: $ax = (ax_1, ax_2, \ldots)$, $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots)$, а скалярное произведение равенством $(x, y)_{l_2} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k$.

Указанный выше изоморфизм строится так: элементу $u \in H$ сопоставляется набор $\tilde{u} = ((u, \varphi_1), (u, \varphi_2), \ldots)$ его коэффициентов (u, φ_k) по выбранному в H ортонормированному базису $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$. Нетрудно понять, что при этом $(u, v) = (\tilde{u}, \tilde{v})_{l_2}$.

Благодаря этому с абстрактной точки зрения все гильбертовы пространства (имеются ввиду лишь полные сепарабельные пространства) устроены одинаково, и факты, доказанные для одного из них, могут быть переформулированы для другого. Пространства, указанные в начале данного пункта, изоморфны вещественному пространству l_2, а тем самым и друг другу. Поэтому многое из того, что было доказано для пространства $L_2(D)$, оказывается справедливым и для других пространств. Например, неравенство Буняковского — Шварца есть простое следствие аксиом (455). Для случая абстрактного пространства H оно имеет вид $|(u, v)| \leqslant \|u\| \, \|v\|$. Однако мы не будем использовать наличие изоморфизма между интересующими нас конкретными функциональными пространствами, ибо извлекаемые из этого факты мало наглядны, и к тому же мы не доказали еще, что пространства $W_2^l(D)$ с целыми l сепарабельные. Сепарабельность $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ и $W_{2\,0}^2(D)$ будет следовать из предложений пункта [150]. Ее нетрудно доказать для всех пространств $W_p^l(D)$ из более простых и общих соображений, что и сделано в [V; гл. IV].

В данном гильбертовом пространстве H можно ввести новую гильбертову структуру (т. е. иное скалярное произведение) так, чтобы оно оставалось при этом снова полным пространством. Для этого надо, чтобы новая норма $\|\cdot\|^*$, соответствующая новому скалярному произведению $(,)^*$ (т. е. $\|u\|^* = \sqrt{(u, u)^*}$) была эквивалентна исходной норме $\|\cdot\|$. *Эквивалентность норм* $\|\cdot\|^*$ и $\|\cdot\|$ означает существование таких двух положительных констант C_1 и C_2, что для всех элементов H справедливы неравенства

$$C_1\|u\| \leqslant \|u\|^* \leqslant C_2\|u\|.$$

Ясно, что если последовательность элементов u_k, $k = 1, 2, \ldots$ сходится в норме $\|\cdot\|$, то она сходится и в норме $\|\cdot\|^*$ и наоборот. Это гарантирует полноту H и по отношению к сходимости в новой норме. Если H было сепарабельным, то и порожденное им новое гильбертово пространство будет сепарабельным.

Одним из основных объектов изучения в гильбертовых пространствах являются линейные операторы. Оператор A называется *линейным ограниченным оператором* в H, если он отображает H в H, причем $A(au + bv) = aA(u) + bA(v)$, и существует такое положительное число C, что для всех элементов H выполняется неравенство *)

$$\|A(u)\| \leqslant C\|u\|.$$

Нижняя грань всех таких C называется *нормой оператора* A и обозначается через $\|A\|$.

Докажем справедливость простого предложения, с которым мы, по сути дела, встречались не раз для конкретных функциональных пространств и конкретных операторов, действующих в них.

Лемма 1. *Пусть A есть линейный ограниченный оператор в гильбертовом пространстве H, и его норма $\|A\| < 1$. Тогда уравнение*

$$u = A(u) + v \tag{456}$$

однозначно разрешимо в H при любом v.

Для нахождения решения уравнения (456) используем метод последовательных приближений в его простейшей форме, а именно: пусть $u_1 = v$, $u_{n+1} = A(u_n) + v$, $n = 1, 2, \ldots$ Легко видеть, что

$$\|u_1\| = \|v\|, \quad \|u_{n+1} - u_n\| = \|A(u_n - u_{n-1})\| \leqslant$$
$$\leqslant \|A\|\|u_n - u_{n-1}\| \leqslant \ldots \leqslant \|A\|^{n-1}\|u_2 - u_1\| \leqslant \|A\|^n\|v\|.$$

Отсюда и из условия $\|A\| < 1$ следует, что $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ есть последовательность Коши в пространстве H, а так как H полное, то в H существует элемент u, к которому сходится эта последовательность. В силу ограниченности A элементы $A(u_k)$ сходятся

*) Часто вместо $A(u)$ пишут короче Au.

к $A(u)$, и потому u будет решением уравнения (456). Если бы (456) имело два разных решения u и u', то их разность w удовлетворяла бы уравнению $w = A(w)$. Но это невозможно, ибо $\|w\| = \|A(w)\| \leqslant \|A\|\|w\| < \|w\|$. Тем самым лемма доказана.

Замечание. В [V; 86] доказано аналогичное предложение для нелинейных сжимающих преобразований, из которого вытекает лемма 1.

В дальнейшем нам придется иметь дело с линейными неограниченными операторами, действующими в пространстве H. В абстрактном гильбертовом пространстве H изучаются различные классы таких операторов. В большинстве случаев предполагается, что линейный неограниченный оператор A задан на некотором линейном множестве, плотном в H. Это множество называют *областью определения* A и обозначают $\mathscr{D}(A)$. Так, например, дифференциальный оператор L из (402) даже при гладких коэффициентах будет неограниченным в пространстве $L_2(D)$. В качестве области его определения можно взять множество $W_2^2(D)$ или множество $W_{2,0}^2(D)$, если для L выполнены условия (413) и (433). Оба они плотны в $L_2(D)$. Абстрактные операторы A, сопоставляемые L указанием области определения L, обладают разными свойствами, и потому их надо различать. В дальнейшем, имея в виду задачу Дирихле, мы будем считать, что $\mathscr{D}(L) = W_{2,0}^2(D)$. Ради упрощения записи обычно не вводят специального обозначения для оператора, порождаемого конкретным дифференциальным оператором L, но четко указывают область его определения (за этим оператором сохраняют символ L).

Нам потребуется в следующем пункте еще одно понятие, связанное с линейными операторами, а именно, понятие ограниченного линейного оператора A, действующего из одного гильбертова пространства H в другое гильбертово пространство H_1. Такой оператор определен на всем H, и его значения лежат в H_1, он дистрибутивен, т. е. $A(au + bv) = aA(u) + bA(v)$, и существует такая константа C_1, что для любых элементов u из H справедливо неравенство

$$\|A(u)\|_1 \leqslant C_1 \|u\|, \tag{457}$$

где $\|\cdot\|$ есть норма в H, а $\|\cdot\|_1$ — норма в H_1. Нижняя грань таких чисел C_1 называется *нормой оператора* A, и ее чаще всего обозначают также $\|A\|$, без явного указания пространств H и H_1 (если это не вызывает недоразумений). В соответствии с этим определением дифференциальный оператор L из (402) будет ограниченным линейным оператором, действующим из пространства $H = W_{2,0}^2(\dot{D})$ в пространство $H_1 = L_2(D)$, если коэффициенты L удовлетворяют условиям (413), (433). Не вводя и в этом случае специального символа для оператора L, мы будем четко указывать, какая область определения и область значений оператора L имеется в виду.

148. О разрешимости задачи Дирихле в пространстве $W_2^2(D)$. Переходим теперь к исследованию разрешимости задачи (403) в пространстве $W_2^2(D)$. Пусть относительно L и D выполнены условия п. [145] и п. [146], которые гарантировали справедливость первого и второго основных неравенств. Обозначим через L_1 оператор $L-\lambda_0 E$, где E — единичный оператор, а число λ_0 выбрано так, чтобы

$$\lambda_0-\mu_3-\frac{\mu_1^2}{4\nu}\equiv\delta_1>0. \tag{458}$$

Тогда в силу (417) для любой функции u из $W_{2,0}^2(D)$ справедливо неравенство

$$L_1(u, u)\equiv-\int_D L_1(u)\,u\,dx=L(u, u)+\lambda_0\|u\|^2\geqslant\delta_1\|u\|^2, \tag{459}$$

из которого следует оценка

$$\|u\|\leqslant\delta_1^{-1}\|L_1(u)\|. \tag{460}$$

С другой стороны, для оператора L_1 и произвольного элемента u пространства $W_{2,0}^2(D)$ имеет место неравенство (434) с некоторой постоянной C_1, определяемой областью D, числами ν, μ, μ_1, μ_4 из условий (413), (433) и числом $\mu_5+|\lambda_0|$, где $\mu_5=\max(|\mu_2|, |\mu_3|)$. Из этого неравенства и оценки (460) получим

$$\|u\|^{(2)}\leqslant C_2\|L_1(u)\|, \tag{461}$$

где $C_2=2\nu^{-1}+C_1\delta_1^{-1}$. Докажем справедливость следующего вспомогательного предложения:

Теорема 1. *Пусть для L и оператора L_0, имеющего тот же вид, что и L, справедливы условия* (413) *и* (433), *и для $L_1=L-\lambda_0 E$ и L_0 справедливо неравенство* (459). *Область D предполагаем удовлетворяющей условиям предыдущего пункта. Пусть, кроме того, задача*

$$L_0(u)=f,\quad u|_S=0, \tag{462}$$

имеет решения u из $W_{2,0}^2(D)$ для какого-либо плотного в $L_2(D)$ множества $\mathfrak{M}$ элементов f. Тогда задачи

$$L_\tau(u)=f,\quad u|_S=0, \tag{463}$$

где $L_\tau=L_0+\tau(L_1-L_0)$, однозначно разрешимы в $W_{2,0}^2(D)$ для всех τ из $[0, 1]$ при любой f из $L_2(D)$.

Из условий теоремы следует, что для L_0 справедливы неравенства

$$L_0(u, u) \equiv -\int_D L_0(u)\, u\, dx \geqslant \delta_1 \| u \|^2 \tag{464}$$

и

$$\| u \|^{(2)} \leqslant C_2 \| L_0(u) \| \tag{465}$$

для любой u из $\overset{\circ}{W}{}^2_{2,0}(D)$. Благодаря (465) задача (462) однозначно разрешима в $W^2_{2,0}(D)$ для любой f из $L_2(D)$. Действительно, для $f \in \mathfrak{M}$ разрешимость дана одним из условий теоремы, а единственность следует из (465). Если же $f \in L_2(D)$, но не принадлежит $\mathfrak{M}$, то возьмем последовательность f_m, $m = 1, 2, \ldots$ из $\mathfrak{M}$, сходящуюся к f в норме $L_2(D)$. Для каждой из f_m существует решение u_m задачи (462) с $f = f_m$, принадлежащее $W^2_{2,0}(D)$. В силу линейности задачи (462) разность $u_k - u_m$ есть ее решение, соответствующее свободному члену $f = f_k - f_m$. Для $u_k - u_m$ справедливо неравенство (465), т. е.

$$\| u_k - u_m \|^{(2)} \leqslant C_2 \| f_k - f_m \|,$$

из которого видно, что $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ образуют последовательность Коши в пространстве $W^2_{2,0}(D)$. В силу полноты последнего, существует единственный элемент $u \in W^2_{2,0}(D)$, к которому сходятся u_m в норме $W^2_{2,0}(D)$. Так как коэффициенты L_0 являются ограниченными функциями, то $L_0(u_m)$ будут сходиться в $L_2(D)$ к $L_0(u)$, и потому $L_0(u) = f$. Итак, мы убедились, что задача (462) разрешима в $W^2_{2,0}(D)$ при любом f из $L_2(D)$, причем в силу (465) решение ее единственно. Тем самым, можно утверждать, что оператор L_0 устанавливает взаимно однозначное соответствие между полными пространствами $W^2_{2,0}(D)$ и $L_2(D)$. Обратный к L_0 оператор L_0^{-1} отображает $L_2(D)$ на $W^2_{2,0}(D)$, и в силу неравенства (465) для любого элемента v из $L_2(D)$

$$\| L_0^{-1}(v) \|^{(2)} \leqslant C_2 \| v \|. \tag{466}$$

Оценка (466), или что то же оценка $\| L_0^{-1} \| \leqslant C_2$ нормы L_0^{-1}, как оператора из $L_2(D)$ в $W^2_{2,0}(D)$, дается неравенством (465) (действительно, если в (465) функцию $L_0(u)$ обозначить через v, то u есть не что иное, как $L_0^{-1}(v)$). Покажем, что этими же свойствами обладают и все операторы L_τ, $\tau \in [0, 1]$. Для этого применим к обеим частям уравнения (463) оператор L_0^{-1} и результат запишем в виде

$$u + \tau L_0^{-1}(L_1 - L_0)(u) = L_0^{-1}(f). \tag{467}$$

Равенство (467) рассмотрим как операторное уравнение

$$u + \tau A_0(u) = L_0^{-1}(f) \tag{468}$$

в пространстве $W_{2,0}^2(D)$ со свободным членом $L_0^{-1}(f)$. В нем $A_0 = L_0^{-1}(L_1 - L_0)$ есть ограниченный оператор, действующий в пространстве $W_{2,0}^2(D)$. Его норма не превосходит постоянной C_3, определяемой максимумами модулей коэффициентов L_1 и L_0 и C_2, ибо для любой $u \in W_{2,0}^2(D)$ норма $\|(L_1 - L_0)(u)\| \leqslant C_4\|u\|^{(2)}$, и в силу (466)

$$\|A_0(u)\|^{(2)} \leqslant \|L_0^{-1}\| \|(L_1 - L_0)(u)\| \leqslant C_3\|u\|^{(2)}, \tag{469}$$

где $C_3 = C_2C_4$. В силу леммы 1 [147] (468) имеет единственное решение в $W_{2,0}^2(D)$ для $\tau \in [0, C_3^{-1})$. Но это означает, что задачи (463) однозначно разрешимы в $W_{2,0}^2(D)$ при любой $f \in L_2(D)$ и любом неотрицательном $\tau < C_3^{-1}$, и операторы L_τ при $\tau \in [0, C_3^{-1})$ устанавливают взаимно однозначное соответствие между $W_{2,0}^2(D)$ и $L_2(D)$. Если $C_3^{-1} \leqslant 1$, то возьмем какое-либо τ_1 из $[{}^1/_2 C_3^{-1}, C_3^{-1})$ и, представив L_τ в виде $L_\tau = L_{\tau_1} + (\tau - \tau_1)(L_1 - L_0)$, запишем задачу (463) в эквивалентной форме:

$$u + (\tau - \tau_1) L_{\tau_1}^{-1}(L_1 - L_0)(u) = L_{\tau_1}^{-1}(f). \tag{470}$$

Оператор $A_1 \equiv L_{\tau_1}^{-1}(L_1 - L_0)$ является ограниченным в пространстве $W_{2,0}^2(D)$ Покажем, что его норма не превосходит C_3. Для этого заметим, что из условия (459) для L_1 и L_0 следует

$$L_\tau(u, u) \equiv -\int_D L_\tau(u)\, u\, dx = (1-\tau) L_0(u, u) + \tau L_1(u, u) \geqslant \delta_1\|u\|^2,$$
$$\tau \in [0, 1].$$

Кроме того, для коэффициентов L_τ, стоящих при u_{x_i} и $u_{x_ix_k}$, справедливы те же неравенства (413) и (433), что и для соответствующих коэффициентов L и L_0, а модуль коэффициента при u не превосходит $\mu_5 + |\lambda_0|$. Ввиду этого, для L_τ справедливы неравенства (460) и (461), а из этого следует, что $\|L_\tau^{-1}(L_1 - L_0)\| \leqslant C_3$ для тех τ, для которых L_τ^{-1} существует, в частности для $\tau = \tau_1$. Но тогда уравнение (470) однозначно разрешимо в $W_{2,0}^2(D)$ при $\tau - \tau_1 \in [0, C_3^{-1})$, в том числе при $\tau = 2\tau_1$. Таким образом, мы установили существование оператора $L_{2\tau_1}^{-1}$, обратного $L_{2\tau_1}$. Если $2\tau_1 < 1$, то представим L_τ в виде $L_{2\tau_1} + (\tau - 2\tau_1) \times (L_1 - L_0)$ и повторим для него только что проведенное рассуждение. Так, за конечное число шагов, мы исчерпаем весь отрезок $\tau \in [0, 1]$ и докажем обратимость операторов L_τ, а тем самым и нашу теорему I. При $\tau = 1$ оператор L_τ^{-} совпадает с интересующим нас оператором $L_1 = L - \lambda_0 E$.

Теорема I позволяет доказать безусловные теоремы существования для задачи

$$L_1(u) \equiv L(u) - \lambda_0 u = f, \quad u|_S = 0, \tag{471}$$

для достаточно широкого класса областей D. Пусть сначала D есть шар или параллелепипед *). Для таких D возьмем в качестве L_0 оператор Лапласа. Для него задача (462) удовлетворяет требованиям теоремы 1. Действительно, для таких областей нам известно, что оператор Лапласа при первом краевом условии имеет гладкие вплоть до границы собственные функции $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$, и они полны в пространстве $L_2(D)$ **). Их можно считать ортонормированными в $L_2(D)$. Любая функция f из $L_2(D)$ разлагается по ним в ряд

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (f, u_k)\, u_k(x),$$

сходящийся к f в норме $L_2(D)$. Функции u_k удовлетворяют уравнениям

$$\Delta u_k = \lambda_k u_k, \quad u_k|_S = 0. \tag{472}$$

Задача

$$\Delta u = f, \quad u|_S = 0, \tag{473}$$

при любом $f(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k u_k(x)$ имеет решение $u(x) = \sum_{k=1}^{N} \frac{c_k}{\lambda_k} u_k(x)$, и это решение принадлежит $W_{2,0}^2(D)$. Кроме того, множество $\mathfrak{M}$ функций $f(x)$ вида $\sum_{k=1}^{N} c_k u_k(x)$ с произвольными коэффициентами c_k плотно в $L_2(D)$. Оператор $L_0 = \Delta$ удовлетворяет и всем другим требованиям теоремы 1, правда, вообще говоря, с другими, чем L_1, постоянными ν, μ_i, δ. Но это не играет существенной роли: можно в условиях (413), (433) и (459) выбрать постоянные ν, μ_i и δ_1, общими для $L_0 = \Delta$ и L_1.

Таким образом мы показали, что задача (471) однозначно разрешима в $W_{2,0}^2(D)$ при любой $f \in L_2(D)$ для случая, когда D есть шар, или параллелепипед. Аналогичное рассуждение

---

*) При $n = 2$ (задача в R^2) в качестве D можно взять круг или прямоугольник.

**) В [II; 190, 191] и в [III; 134—137, 146, 154—156] дан явный вид всех u_k для таких областей D, из которого ясно, что $u_k \in C^\infty(\bar{D})$; в [127] доказана полнот... $\}_{k=1}^{\infty}$.

остается справедливым и для других областей D, для которых известно, что все собственные функции u_k спектральной задачи (471) принадлежат $\overset{\circ}{W}{}^2_{2,0}(D)$. Например, это так для сферического слоя $D=\{x.\ 0<\rho<|x|<\rho_1\}$ и других областей, являющихся параллелепипедами в сферической или цилиндрической системах координат.

Пусть теперь область D может быть преобразована в область $\tilde{D}$, являющуюся одной из таких областей, причем функции $y=y(x)$, $x\in\bar{D}$, осуществляющие это преобразование, и обратные им функции $x=x(y)$, $y\in\bar{\tilde{D}}$, принадлежат $C^2(\bar{D})$ и $C^2(\bar{\tilde{D}})$ соответственно, а якобианы $\frac{\partial(y)}{\partial(x)}$ и $\frac{\partial(x)}{\partial(y)}$ строго положительны. Легко видеть, что если при этом $u(x)\in W^2_{2,0}(D)$, то $\tilde{u}(y)=u(x(y))$ будет элементом $W^2_{2,0}(\tilde{D})$ и наоборот. Дифференциальное выражение $L(u)$ при переходе от переменных x к y преобразуется так:

$$\tilde{L}(\tilde{u})=\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\tilde{a}_{ik}(y)\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y_k}\right)+\tilde{b}_i(y)\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y_i}+\tilde{c}(y)\tilde{u},$$

где

$$\tilde{a}_{ik}(y)=\left[a_{jl}(x)\frac{\partial y_i(x)}{\partial x_j}\frac{\partial y_k(x)}{\partial x_l}\right]\Bigg|_{x=x(y)}$$

$$\tilde{b}_i(y)=\left[b_j(x)\frac{\partial y_i(x)}{\partial x_j}\right]\Bigg|_{x=x(y)}-$$

$$-\left[a_{lk}(x)\frac{\partial y_i(x)}{\partial x_k}\right]\Bigg|_{x=x(y)}\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{\partial y_j(x)}{\partial x_l}\right)\Bigg|_{x=x(y)}$$

а $\tilde{c}(y)=c(x(y))$. Легко проверить, что коэффициенты $\tilde{L}$ удовлетворяют неравенствам вида (413) и (433), правда, с другими постоянными. По этим постоянным можно выбрать столь большое число λ_0, что для $\tilde{L}-\lambda_0 E$ в $\tilde{D}$ будет выполняться условие вида (458), а потому и неравенство (459). Если $\tilde{D}$ есть шар, параллелепипед или шаровой слой, то из доказанного выше следует, что задача $L(\tilde{u})-\lambda_0\tilde{u}=\tilde{f}(y)$, $\tilde{u}|_{\partial\tilde{D}}=0$, однозначно разрешима в $W^2_{2,0}(\tilde{D})$ при любой $\tilde{f}\in L_2(\tilde{D})$. Переходя в ней к старым переменным x, убедимся в однозначной разрешимости в $W^2_{2,0}(D)$ задачи (471) при взятом нами λ_0 и любой $f\in L_2(D)$. Таким образом доказана следующая теорема:

Теорема 2. *Если коэффициенты* L *из* (402) *удовлетворяют условиям* (413) *и* (433) *и область* D *есть шар, параллелепипед или шаровой слой, или может быть преобразована в одну из этих областей с помощью регулярного преобразования* $y=y(x)\in$

$\in C^2(\bar{D})$, *то задача* (471) *однозначно разрешима в* $W_{2,0}^2(D)$ *при любой* $f \in L_2(D)$ *для всех достаточно больших* λ_0.

Замечание. С помощью этой теоремы можно доказать, что такая же разрешимость имеет место для любой области D (в том числе и неограниченной), граница которой есть поверхность класса C^2.

149. О фредгольмовой разрешимости задачи Дирихле. Рассмотрим теперь вопрос о разрешимости задачи Дирихле

$$L(u) = \lambda u + f, \quad u|_S = 0, \tag{474}$$

при произвольном вещественном λ. Все дальнейшее справедливо для любых комплексных λ, но мы ограничимся случаем вещественных λ. Пусть для L и D выполнены условия теоремы 2 предыдущего пункта. Возьмем столь большое λ_0, что для $L_1 = L - \lambda_0 E$ справедливо заключение этой теоремы, и преобразуем задачу (474) к эквивалентному виду

$$u = (\lambda - \lambda_0) L_1^{-1}(u) + L_1^{-1}(f). \tag{475}$$

В [148] было доказано, что L_1^{-1} преобразует элементы $L_2(D)$ в элементы $W_{2,0}^2(D)$ и для любой $f \in L_2(D)$

$$\| L_1^{-1}(f) \|^{(2)} \leqslant C_2 \| f \| \tag{476}$$

(см. (461)). В силу теоремы Реллиха (см. [IV; 116]) отсюда следует, что L_1^{-1} является вполне непрерывным оператором в $L_2(D)$ (т. е. как оператор, действующий из $L_2(D)$ в $L_2(D)$). Поэтому к уравнению (475) применимы теоремы Фредгольма, изложенные нами в [IV$_1$; 29] (см. также [V, 133—135]). Из них следует, что уравнение (475) однозначно разрешимо в $L_2(D)$ при всех λ, кроме, может быть, счетного числа λ. Эти исключительные значения обозначим через $\{\lambda_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$ Пусть λ не совпадает ни с одним из $\{\lambda_k\}$, и u есть соответствующее ему решение уравнения (475). Это решение u фактически принадлежит $W_{2,0}^2(D)$, т. к. оба члена правой части (475) принадлежат $W_{2,0}^2(D)$, если $f \in L_2(D)$. Поэтому u есть решение задачи (474) из пространства $W_{2,0}^2(D)$.

При $\lambda = \lambda_k$ (и только при таких λ) имеются нетривиальные (т. е. отличные от тождественного нуля) решения однородного уравнения

$$u_k = (\lambda_k - \lambda_0) L_1^{-1}(u_k). \tag{477}$$

Они также принадлежат $W_{2,0}^2(D)$, ибо из принадлежности u_k к $L_2(D)$ и свойств оператора L_1^{-1} следует, что $L_1^{-1}(u_k) \in W_{2,0}^2(D)$. Благодаря этому u_k суть решения задачи

$$L(u_k) = \lambda_k u_k, \quad u_k|_S = 0. \tag{478}$$

Они называются *собственными функциями оператора L в области D при первом краевом условии*, а λ_k — его *собственными значениями*. Из упомянутой выше теории линейных уравнений с вполне непрерывными операторами следует, что каждому λ_k соответствует лишь конечное число линейно независимых решений задачи (478), иначе говоря, каждое из λ_k имеет конечную кратность. Для формулировки следующих утверждений нам надо ввести операторы, сопряженные к операторам L и L_1, действующим в пространстве $L_2(D)$.

Оператор, сопряженный к данному (линейному) оператору A, обозначается через A^*. Он определяется с помощью тождества

$$(A(u),\ v) = (u,\ A^*(v)), \tag{479}$$

которое должно выполняться для всех элементов u, на которых задан оператор A. Для ограниченных операторов A мы считаем, что областью определения (задания) $\mathscr{D}(A)$ оператора A является все $L_2(D)$, а для неограниченных A — множество $\mathscr{D}(A)$, плотное в $L_2(D)$. Область определения оператора A^* (ее обозначают через $\mathscr{D}(A^*)$) состоит из тех и только тех элементов v, для которых выражение $(A(u), v)$, являющееся линейной функцией от u на множестве $\mathscr{D}(A)$, может быть представлено в виде (u, w), где w есть какой-нибудь элемент $L_2(D)$. В силу плотности $\mathscr{D}(A)$ в $L_2(D)$ такой элемент w может быть только один, и ему полагается равным значение $A^*(v)$.

Для случая ограниченных операторов A доказывается, что $\mathscr{D}(A^*)$ есть все $L_2(D)$ (все гильбертово пространство H, если вместо $L_2(D)$ взято H). Это легко выводится из теоремы Рисса об общем виде линейного функционала в $L_2(D)$ (см. [**V; 123**]). Действительно, при любом фиксированном v из $L_2(D)$ выражение $(A(u), v)$ есть линейная непрерывная функция u, определенная на всем $L_2(D)$ (т. е. линейный функционал), и потому найдется единственный элемент w такой, что $(A(u), v) = (u, w)$ при всех $u \in L_2(D)$. Но это и значит, что $v \in \mathscr{D}(A^*)$, $w = A^*(v)$ и $\mathscr{D}(A^*) = L_2(D)$.

Для неограниченных операторов A нахождение $\mathscr{D}(A^*)$ и «явного» вида A^* — вопрос сложный. Интересующие нас операторы L и L_1 суть неограниченные операторы, заданные на множестве $\mathscr{D}(L) = \mathscr{D}(L_1) = \overset{\circ}{W}{}^2_{2}(D)$, плотном в $L_2(D)$. Мы покажем, что сопряженные им операторы L^* и L_1^* имеют вид

$$L^*(u) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) - \frac{\partial}{\partial x_i}(b_i u) + cu, \quad L_1^*(u) = L^*(u) - \lambda_0 u \tag{480}$$

(т. е. являются дифференциальными операторами, сопряженными в смысле Лагранжа к L и L_1 соответственно — см. формулу (410)), и их области определения совпадают с $\overset{\circ}{W}{}^2_{2}(D)$.

Для этого проверим, что задача

$$L_1^*(u) = f, \quad u|_S = 0, \tag{481}$$

где $L_1^*(u)$ — есть дифференциальное выражение из (480), однозначно разрешима в $W_{2,0}^2(D)$ при любой $f \in L_2(D)$. Действительно, для L_1^* выполняются все условия теоремы 2 [148], в том числе и условие $L_1^*(u, u) \geqslant \delta_1 \|u\|^2$, $\delta_1 > 0$, если $\lambda_0 \gg 1$, ибо

$$L_1^*(u, u) = (-L_1^*(u), u) = \int_\Omega \left(a_{ik} u_{x_k} u_{x_i} - b_i u u_{x_i} - c u^2 + \lambda_0 u^2\right) dx = \\ = L_1(u, u).$$

Обозначим через $(L_1^*)^{-1}$ оператор, сопоставляющий f решение u задачи (481). Он является ограниченным оператором в $L_2(D)$, устанавливающим взаимно однозначное соответствие между $L_2(D)$ и $W_{2,0}^2(D)$. С другой стороны, для любых функций u и v из $W_{2,0}^2(D)$ справедливо равенство

$$(L_1(u), v) = (u, L_1^*(v)),$$

которое получается двукратным интегрированием по частям левой части. Сопоставляя его с данным выше определением оператора A^*, сопряженного к оператору A, видим, что элементы v из множества $W_{2,0}^2(D)$ принадлежат $\mathscr{D}(A^*) = \mathscr{D}(L_1^*)$ и $A^* = L$ на нем вычисляется по правилу (480). Нам осталось проверить, что $\mathscr{D}(L_1^*) = W_{2,0}^2(D)$, т. е. доказать, что если для каких-то элементов v и f из $L_2(D)$ выполняется тождество

$$(L_1(u), v) = (u, f)$$

при любом $u \in W_{2,0}^2(D)$, то $v \in W_{2,0}^2(D)$ и $f = L_1^*(v)$. Найдем по f элемент $w = (L_1^*)^{-1} f$ — решение задачи (481) (оно принадлежит $W_{2,0}^2(D)$) и представим (u, f) в виде $(u, L_1^*(w)) = (L_1(u), w)$ согласно формуле (482). Тогда $(u, f) = (L_1(u), w) = (L_1(u), v)$, и так как элементы $L_1(u)$ пробегают все $L_2(D)$, когда u пробегает $W_{2,0}^2(D)$, то отсюда следует, что $v = w$, т. е. v действительно принадлежит $W_{2,0}^2(D)$ и $f = L_1^*(v)$.

Итак, мы показали, что оператор L_1^*, сопряженный к неограниченному оператору L_1, действующему в пространстве $L_2(D)$ и определенному на множестве $\mathscr{D}(L_1) = W_{2,0}^2(D)$, имеет своей областью определения $\mathscr{D}(L_1^*)$ то же множество $W_{2,0}^2(D)$, и на элементах этого множества его действие задается дифференциальным выражением (480). Так как дифференциальное выражение $L(u)$ отличается от $L_1(u)$ лишь на слагаемое $\lambda_0 u$, которому отвечает ограниченный оператор, то $\mathscr{D}(L) = \mathscr{D}(L_1) = W_{2,0}^2(D)$,

$\mathscr{D}(L^*)=\mathscr{D}(L_1^*)=W_{2,0}^2(D)$ и действие оператора L^* на $W_{2,0}^2(D)$ задается дифференциальным оператором L^* из (480).

Замечание. Когда говорят о дифференциальном операторе L^*, задаваемом выражением (480), то имеют в виду лишь правило вычисления $L^*(u)$ на функциях $u(x)$. Надо отличать это понятие от понятия оператора, сопряженного к неограниченному оператору L, порожденному дифференциальным оператором L. В этом случае должна быть указана область определения дифференциального оператора L и найдена соответствующая ей область определения сопряженного к нему оператора.

Вернемся к изучению операторов L и L^*, а также $L_1=L-\lambda_0 E$ и $L_1^*=L^*-\lambda_0 E$, заданных на множестве $W_{2,0}^2(D)$ пространства $L_2(D)$. Докажем, что сопряженным к ограниченному оператору L_1^{-1}, действующему в $L_2(D)$ является ограниченный оператор $(L_1^*)^{-1}$, т. е. что

$$\left(L_1^{-1}\right)^*=(L_1^*)^{-1} \quad \text{и} \quad \mathscr{D}\left((L_1^*)^{-1}\right)=\mathscr{D}\left(\left(L_1^{-1}\right)^*\right)=L_2(D).$$

Это легко выводится из известных уже нам фактов; а именно, того, что оператор L_1 и сопряженный ему оператор L_1^* устанавливают взаимно однозначное соответствие между $\mathscr{D}(L_1)=\mathscr{D}(L_1^*)=W_{2,0}^2(D)$ и всем пространством $L_2(D)$ и для них верно тождество (482) при любых $u, v\in W_{2,0}^2(D)$. Когда u и v пробегают множество $W_{2,0}^2(D)$, $L_1(u)$ и $L_1(v)$ пробегают все $L_2(D)$. Обозначив $L_1(u)$ через φ, а $L_1^*(D)$ через ψ, перепишем (482) в виде

$$\left(\varphi,\ (L_1^*)^{-1}\psi\right)=\left(L_1^{-1}\varphi,\ \psi\right).$$

Так как это равенство справедливо при любых φ, $\psi\in L_2(D)$, то оно и показывает, что $\left(L_1^{-1}\right)^*$ равен ограниченному оператору $(L_1^*)^{-1}$ в $L_2(D)$.

Вернемся теперь к задаче (474) и связанным с нею задачам (475), (477) и (478). Так как L_1^{-1} есть вполне непрерывный оператор в $L_2(D)$, то для сопряженного к нему оператора $\left(L_1^{-1}\right)^*$ характеристическими числами являются те же числа $(\lambda_k-\lambda_0)$, что и для L_1^{-1}, т. е. уравнение

$$v=(\lambda-\lambda_0)\left(L_1^{-1}\right)^*(v) \tag{482}$$

имеет ненулевые решения лишь для $\lambda=\lambda_k$, $k=1, 2, \ldots$ (напомним, что мы ограничили себя рассмотрением только вещественных λ). Каждому λ_k соответствует конечное число нетривиальных решений v_k уравнения (482), равное числу линейно независимых решений уравнения (477) при том же λ_k. Иначе говоря, кратности характеристического числа $\lambda_k-\lambda_0$ для L_1^{-1} и для

$(L_1^{-1})^*$ совпадают. Так как $(L_1^{-1})^* = (L_1^*)^{-1}$, то уравнение (482) эквивалентно системе уравнений

$$L_1^*(v) = (\lambda - \lambda_0) v, \quad v|_S = 0,$$

которая, в свою очередь, есть не что иное, как система

$$L^*(v) = \lambda v, \quad v|_S = 0, \tag{483}$$

решения которой ищутся в $\overset{\circ}{W}{}^2_{2,0}(D)$, а дифференциальный оператор L^* задан равенством (480). Итак, вещественный спектр операторов L и L^* при первом краевом условии не более, чем счетен, каждое из входящих в него λ_k имеет конечную кратность и единственными предельными для $\{\lambda_k\}$ точками могут быть лишь $\lambda = \pm\infty$. Однако из теоремы 2 [148] следует, что при λ, бо́льших или равных λ_0, задача (478) не имеет ненулевых решений, следовательно все λ_k меньше λ_0. Если бы мы с самого начала рассмотрели комплексное гильбертово пространство $L_2(D)$ и задачу (474) с комплексными λ, то, используя соответствующие теоремы Фредгольма для уравнения (475), пришли бы к выводу, что полный спектр операторов L и L^* состоит из не более чем счетного числа собственных значений, каждое из которых имеет конечную кратность. Сравнительно простые оценки типа [145] показывают, что спектра нет вне квадратичной параболы вида $\lambda''^2 = \alpha_1(\alpha_2 - \lambda')$, где α_i — некоторые вещественные числа, которые нетрудно подсчитать по константе эллиптичности ν и мажорантам μ_i коэффициентов L, причем $\alpha_1 > 0$, а λ' и λ'' суть вещественная и мнимая части λ (т. е. $\lambda = \lambda' + i\lambda''$). Значительно более сложный анализ показывает, что полный спектр задачи (474) состоит из неограниченного числа собственных значений $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, и $\operatorname{Re}\lambda_k \to -\infty$ при $k \to \infty$. Это было установлено Карлеманом (см. [138]).

В следующем пункте мы докажем это для случая симметрического оператора L, т. е. когда $L^* = L$ или, что то же, когда $b_i(x) \equiv 0$, а сейчас перейдем к формулировке и доказательству третьей теоремы Фредгольма для задачи (474).

Пусть в ней λ равно какому-нибудь собственному значению λ_k. Если задача (474) имеет решение u для f, взятого из $L_2(D)$ (мы всюду имеем в виду решения из класса $\overset{\circ}{W}{}^2_{2,0}(D)$), то умножая первое из уравнений (474) на произвольную функцию v из класса $\overset{\circ}{W}{}^2_{2,0}(D)$ и интегрируя затем по D, мы можем результат преобразовать следующим образом:

$$\int_D L(u) v\, dx = \int_D u L^*(v)\, dx = \lambda_k \int_D uv\, dx + \int_D fv\, dx.$$

Для v, равных любому из решений v_k задачи (483) с $\lambda=\lambda_k$, это равенство приобретает вид

$$\int_D f v_k\,dx = 0, \tag{484}$$

следовательно, оно необходимо для разрешимости задачи (474). Докажем, что условие (484) является и достаточным для разрешимости задачи (474). Действительно, необходимым и достаточным условием разрешимости уравнения (475) в пространстве $L_2(D)$, согласно третьей теореме Фредгольма для уравнений с вполне непрерывным оператором L_1^{-1}, является условие

$$0=\left(L_1^{-1}(f),\ v_k\right)=\left(f,\left(L_1^{-1}\right)^*(v_k)\right)=\frac{1}{\lambda_k-\lambda_0}(f,\ v_k),$$

где v_k — любое решение уравнения (482) с $\lambda=\lambda_k$. Но задача (482) эквивалентна задаче (483) с $\lambda=\lambda_k$, и их решения v_k совпадают, так что это условие есть не что иное, как условие (484). Оно имеет такой же вид и в случае комплексного λ_k. Подытожим теперь все доказанное в виде теоремы:

Теорема 1. *Пусть для L и D выполнены условия теоремы 2 предыдущего пункта. Тогда задача* (474) *однозначно разрешима в $W_{2,0}^2(D)$ для любого f из $L_2(D)$ при всех вещественных λ, кроме не более чем счетного числа значений λ_k, $k=1, 2, \ldots$, составляющих вещественную часть спектра L в D при первом краевом условии. Для этих и только этих значений λ_k однородная задача* (478) *имеет нетривиальные вещественные решения, причем каждому λ_k соответствует лишь конечное число линейно независимых решений задачи* (478). *Множество $\{\lambda_k\}$ является вещественной частью спектра сопряженной задачи* (483), *причем λ_k для нее имеет ту же кратность, что и для задачи* (478). *Числа λ_k, $k=1, 2, \ldots$ можно расположить в порядке их убывания, и единственной точкой накопления для $\{\lambda_k\}$ может быть лишь $\lambda=-\infty$.*

Для разрешимости задачи (474) *при $\lambda=\lambda_k$ необходимо и достаточно выполнение условий* (484) *ортогональности f ко всем решениям однородной сопряженной задачи* (483) *при том же λ_k. При выполнении этих условий общее решение задачи* (474) *имеет вид $u=u_0+\sum_{i=1}^{N_k} c_i u_{k_i}$, где u_0 есть какое-либо частное решение задачи* (474), *c_i — произвольные числа, а u_{k_i}, $i=1, \ldots$ $\ldots, N_k$ — решения задачи* (478) *с данным λ_k.*

Эта теорема есть одна из возможных формулировок *фредгольмовой разрешимости* задачи Дирихле (474).

Как сказано выше, аналогично исследуется задача (474) для λ, заполняющих всю комплексную плоскость. Условие разрешимости задачи (474) при комплексном λ_k имеет тот же вид (484).

Полезно заметить, что для решений задачи (474) при всех λ, отличных от $\{\lambda_k\}$, справедлива оценка

$$\| u \|^{(2)} \leqslant C_\lambda \| f \|, \tag{485}$$

постоянная C_λ в которой зависит от коэффициентов L, области D и взятого λ. Для тех λ, для которых выполнено условие (420), мы смогли дать явное выражение для C_λ через некоторые сравнительно простые характеристики области D и параметры ν, μ, μ_1 и λ. В общем же случае, когда известно лишь, что λ не совпадает со спектральными значениями λ_k, $k = 1, 2, \ldots$, мы можем утверждать существование постоянной C_λ, но не можем выписать ее явного вида. Ясно, что C_λ стремится к бесконечности при приближении λ к спектру $\{\lambda_k\}$. Заметим, что и фактическое определение спектра для данных L и D является весьма сложной вычислительной задачей.

Из теоремы 1 данного пункта и теоремы 2 [148] вытекает следующее предложение:

Теорема 2. *Пусть для L и D выполнены условия теоремы 2 предыдущего пункта. Тогда любое обобщенное решение задачи* (474) *из класса $W_2^1(D)$ является элементом $W_{2,0}^2(D)$.*

Действительно, пусть функция u является обобщенным решением задачи (474) из класса $W_2^1(D)$, т. е. принадлежит $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ и удовлетворяет тождеству (407) при любой функции $\eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$. Запишем тождество (407) в виде

$$L(u, \eta) = -\int_D (\lambda_0 u + F)\, \eta \, dx, \tag{486}$$

где $F = f + (\lambda - \lambda_0) u$. Число λ_0 выберем столь большим, чтобы выполнялось неравенство (420), гарантирующее теорему единственности из [145] для задачи (474) с $\lambda = \lambda_0$, т. е. для задачи

$$L(v) = \lambda_0 v + F, \quad v|_S = 0, \tag{487}$$

причем функцию $F = f + (\lambda - \lambda_0) u$ рассматриваем как известную (в ней в качестве u взято известное по условию теоремы обобщенное решение из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$). Ясно, что $F \in L_2(D)$. В силу (486) u есть обобщенное решение задачи (487) из $W_2^1(D)$ с только что указанным F. С другой стороны, теорема 2 [148] гарантирует однозначную разрешимость задачи (487) в классе $W_{2,0}^2(D)$ (благодаря (420) имеет место первая теорема Фредгольма). В силу же теоремы 2 [145] это решение обязано совпадать с исследуемым обобщенным решением u из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$, и потому u есть элемент $W_{2,0}^2(D)$, что и требовалось доказать.

150. О спектре симметричного оператора. Рассмотрим симметричные дифференциальные операторы L вида (402), т. е. такие, для которых оператор L^*, сопряженный L по Лагранжу (его выражение дается равенством (480)), совпадает с L. Они имеют вид

$$L(u)=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)+cu. \tag{488}$$

Изучим для них спектральную задачу

$$L(u)=\lambda u, \quad u|_S=0, \tag{489}$$

в ограниченной области D, считая, что для коэффициентов L и области D выполнены условия теоремы 2 [148]. Из результатов, доказанных в [149], следует, что для неограниченного оператора L, заданного на плотном множестве $\mathscr{D}(L)=W_{2,0}^2(D)$ пространства $L_2(D)$ равенством (488), сопряженным оператором является он сам с той же областью определения $W_{2,0}^2(D)$. В этом случае говорят, что L является самосопряженным оператором, и записывают это в виде равенства $L=L^*$. Соответствующая ему квадратичная форма $L(u, u)$ имеет вид

$$L(u, u)=-\int\limits_D L(u)\,u\,dx=\int\limits_D \left(a_{ik}u_{x_i}u_{x_k}-cu^2\right)dx.$$

Так как по условию $-c(x)\geqslant-\mu_3$, то при $\lambda_0=\mu_3$

$$L_1(u, u)\equiv-\int\limits_D (L-\lambda_0)(u)\,dx=L(u, u)+\lambda_0\|u\|^2\geqslant$$

$$\geqslant\nu\int\limits_D u_x^2\,dx\geqslant\nu C_D^{-1}\|u\|^2, \tag{490}$$

где C_D есть положительная постоянная из неравенства (423) [145]. Согласно результатам [148] для $L_1\equiv L_0-\lambda_0 E$ существует обратный оператор L_1^{-1}, который является вполне непрерывным, самосопряженным оператором в пространстве $L_2(D)$. Ввиду этого для него справедливы теоремы, доказанные в [IV$_1$; 30—36]. А именно, его спектр (полный) состоит не более чем из счетного числа вещественных чисел, которые мы обозначим через μ_k, $k=1, 2, \ldots$ Каждому μ_k соответствует конечное число линейно независимых решений уравнения

$$L_1^{-1}u_k=\mu_k u_k, \tag{491}$$

являющихся элементами $L_2(D)$. Так как L_1^{-1} обратим, то число $\mu = 0$ не есть точка спектра L_1^{-1} (т. е. ни одно μ_k не совпадает с нулем), и потому число различных собственных значений μ_k неограничено. Из свойств оператора L_1^{-1} следует, что u_k принадлежат $\overset{\circ}{W}{}^2_{2,0}(D)$, и потому любое u_k есть решение задачи

$$L_1 u = \frac{1}{\mu} u, \quad u|_S = 0, \tag{492}$$

с $\mu = \mu_k$, и, наоборот, любое решение задачи (492), принадлежащее $W^2_{2,0}(D)$, есть решение уравнения (491). В свою очередь, задача (492) есть не что иное, как задача (489) с $\lambda = \lambda_0 + \mu^{-1}$. Из неравенства (490) следует, что все μ_k отрицательны и $-\mu_k \leqslant \leqslant \nu^{-1} C_D$. Действительно, для $u = u_k$ неравенство (490) дает оценку

$$L_1(u_k, u_k) = -\frac{1}{\mu_k} \| u_k \|^2 \geqslant \nu C_D^{-1} \| u_k \|^2.$$

Опять-таки в силу свойств, установленных в **[IV$_1$; 30—36]** для вполне непрерывных симметрических операторов, собственные числа μ_k, $k = 1, 2, \ldots$ можно считать занумерованными в порядке их возрастания. Кроме того, каждое собственное значение удобно записывать в последовательности $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ столько раз, какова его кратность, и каждому из них сопоставить одну нормированную в $L_2(D)$ собственную функцию u_k, причем выбрать их так, чтобы они все были ортогональны друг другу. В соответствии со сказанным, мы будем считать, что

$$-\nu^{-1} C_D \leqslant \mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \ldots < 0, \quad \mu_k \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty, \tag{493}$$

и соответствующие им собственные функции $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяют условиям

$$(u_k, u_l) = \delta_{kl}. \tag{494}$$

Спектр оператора L при условии Дирихле состоит из чисел $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\lambda_k = \lambda_0 + \mu_k^{-1}$, и числу λ_k соответствует собственная функция u_k — решение задачи (489) при $\lambda = \lambda_k$. Все функции u_k, как отмечалось выше, суть элементы $W^2_{2,0}(D)$. Ясно, что $\lambda_k \to -\infty$ при $k \to \infty$.

Займемся теперь теоремами разложения по системе собственных функций $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$. Теорема 5 **[IV$_1$; 36]** утверждает, что система $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ образует базис в $L_2(D)$, т. е. любая функция f из $L_2(D)$ разлагается по ней в ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (f, u_k) u_k(x), \tag{495}$$

сходящийся к ней в норме $L_2(D)$, и

$$\| f \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (f, u_k)^2. \tag{496}$$

Покажем теперь, что если $f \in \overset{\circ}{W}{}^2_{2,0}(D)$, то ряд (495) сходится к ней в норме $W^2_{2,0}(D)$, т. е. ряд (495) допускает почленное дифференцирование по x один и два раза и полученные при этом ряды (заметим, что они уже не ортогональны в $L_2(D)$!) сходятся в $L_2(D)$ к соответствующим производным f. Для доказательства этого рассмотрим $W^2_{2,0}(D)$ как гильбертово пространство со скалярным произведением, определенным равенством (432), и нормой $\| \cdot \|^{(2)}$ [146].

Введем в $W^2_{2,0}(D)$ новое скалярное произведение:

$$\{u, v\} \equiv \int_D L_1(u) L_1(v) \, dx.$$

Соответствующая ему норма, которую мы обозначим через $\| \cdot \|_2$, эквивалентна норме $\| \cdot \|^{(2)}$ (см. об этом [147]). Действительно, неравенство

$$\| u \|_2 \leqslant C_1 \| u \|^{(2)}$$

для любой $u \in W^2_{2,0}(D)$ следует непосредственно из ограниченности a_{ik}, $\dfrac{\partial a_{ik}}{\partial x_l}$ и c. Обратное неравенство

$$\| u \|^{(2)} \leqslant C_2 \| u \|_2 = C_2 \| L_1(u) \|$$

есть не что иное, как неравенство (461). Итак, эквивалентность норм $\| \cdot \|^{(2)}$ и $\| \cdot \|_2$ доказана. Функции u_k принадлежат $W^2_{2,0}(D)$, следовательно, ему принадлежат и конечные отрезки ряда (495). Кроме того, функции $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ ортогональны друг другу в смысле нового скалярного произведения, ибо из (492) следует, что

$$\{u_k, u_l\} \equiv (L_1(u_k), L_1(u_l)) = \frac{1}{\mu_k \mu_l} (u_k, u_l) = \mu_k^{-2} \delta_{kl}.$$

Ввиду этого просто подсчитать величину

$$\left\| \sum_{k=m}^{m+p} (f, u_k) u_k \right\|_2^2 = \sum_{k=m}^{m+p} \mu_k^{-2} (f, u_k)^2 = \sum_{k=m}^{m+p} (f, L_1(u_k))^2 = \\ = \sum_{k=m}^{m+p} (L_1(f), u_k)^2.$$

При этом мы использовали то, что $f \in W^2_{2,0}(D)$. Числовой же ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (L_1(f), u_k)^2$ сходится и равен $\| L_1(f) \|^2$, ибо $L_1(f) \in L_2(D)$

(см. (496)). Поэтому функции $f^N(x)=\sum_{k=1}^{N}(f, u_k)\,u_k(x)$, $N=1, 2, \ldots$, образуют последовательность Коши в пространстве $W_{2,0}^2(D)$, а так как оно полное, то существует элемент $\tilde{f}(x)$ в $W_{2,0}^2(D)$, к которому $f^N(x)$ сходятся в норме $W_{2,0}^2(D)$. Но, с другой стороны, мы знаем, что $f^N(x)$ сходится в $L_2(D)$ к $f(x)$, следовательно, $\tilde{f}(x)=f(x)$. Итак, мы доказали, что для $f\in W_{2,0}^2(D)$ ряд (495) сходится в норме пространства $W_{2,0}^2(D)$ (т. е. в любой из норм $\|\cdot\|_2$ и $\|\cdot\|^{(2)}$), и потому

$$L(f)=\sum_{k=1}^{\infty}(f, u_k)\,L(u_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k(f, u_k)\,u_k, \tag{497}$$

причем этот ряд сходится в норме $L_2(D)$ и

$$\|L(f)\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\,(f, u_k)^2. \tag{498}$$

Докажем еще такое предложение: если $f\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$, то ряд (495) сходится к ней в норме $W_2^1(D)$, т. е. ряд (495) и ряды, полученные однократным почленным дифференцированием ряда (495) по x_i, сходятся в норме $L_2(D)$ к f и f_{x_i} соответственно. Для этого введем в гильбертово пространство $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ новое скалярное произведение

$$[u, v]\equiv L_1(u, v)=\int_D\left(a_{ik}u_{x_i}v_{x_k}-cuv+\lambda_0 uv\right)dx.$$

Из (490) и ограниченности $|a_{ik}|$ и $|c|$ следует, что соответствующая ему норма $\|\cdot\|_1$ эквивалентна исходной норме $\|\cdot\|^{(1)}$ пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$. Собственные функции u_k принадлежат $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ и ортогональны по отношению к скалярному произведению $[\cdot, \cdot]$, ибо

$$[u_k, u_l]=\left(-L_1u_k, u_l\right)=-\mu_k^{-1}\left(u_k, u_l\right)=-\mu_k^{-1}\delta_{kl}. \tag{499}$$

Функции $\left\{\sqrt{-\mu_k}\,u_k(x)\right\}_{k=1}^{\infty}$ образуют, тем самым, ортонормированную систему функций в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ с новым скалярным произведением. Поэтому для любой f из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ и системы $\left\{\sqrt{-\mu_k}\,u_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ справедливо неравенство Бесселя (см. **[IV₁; 46]**):

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[f, \sqrt{-\mu_k}\,u_k\right]^2\leqslant\|f\|_1^2.$$

С другой стороны,

$$[f, \sqrt{-\mu_k}\, u_k]^2 = (f, \sqrt{-\mu_k}\, L_1 u_k)^2 = (-\mu_k)^{-1}(f, u_k)^2 \tag{500}$$

и

$$\left\| \sum_{k=m}^{m+p} (f, u_k) u_k \right\|_1^2 = \sum_{k=m}^{m+p} (-\mu_k)^{-1}(f, u_k)^2. \tag{501}$$

Сопоставляя эти соотношения, видим, что функции $f^N = \sum_{k=1}^{N} (f, u_k) u_k$, $k = 1, 2, \ldots$ образуют последовательность Коши в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$, и потому существует элемент $\tilde{f}(x)$ этого пространства, к которому $f^N(x)$ сходится в любой из двух норм $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$, и

$$\|\tilde{f}\|_1^2 = \sum_{k=1}^{\infty} [f, \sqrt{-\mu_k}\, u_k]^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (-\mu_k)^{-1}(f, u_k)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda_k)(f, u_k)^2.$$

Но так как f^N сходится к f в норме $L_2(D)$, то $\tilde{f}(x) = f(x)$ и

$$\|f\|_1^2 = L_1(f, f) = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda_k)(f, u_k)^2. \tag{502}$$

Подытожим доказанные в этом пункте факты в виде теоремы (см. в связи с нею замечание на с. 390):

Теорема 1. *Пусть для симметричного оператора L, определенного равенством* (488), *и области D выполнены условия теоремы 2 из* [148]. *Тогда весь спектр задачи* (489) (*или, что то же, спектр оператора L в области D при условии Дирихле*) *состоит из счетного числа вещественных значений $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, стремящихся при $k \to \infty$ к $-\infty$ и меньших числа λ_0, мажорирующего коэффициент $c(x)$. Соответствующие им собственные функции $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ можно ортонормировать в $L_2(D)$. Они образуют базис в пространствах $L_2(D)$, $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ и $W_{2,0}^2(D)$, так что ряд Фурье* (495) *по ним для любой функции f из $L_2(D)$ сходится к f в норме $L_2(D)$, для любой f из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ сходится к f в норме $W_2^1(D)$, а для любой f из $W_{2,0}^2(D)$ сходится к f в норме $W_2^2(D)$. Кроме того, имеют место равенства* (496) *для $f \in L_2(D)$, равенство* (502) *для f из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ и равенства* (497) *и* (498) *для f из $W_{2,0}^2(D)$.*

Изложенное здесь доказательство сходимости рядов (495) в пространстве $W_2^2(D)$ принадлежит О. А. Ладыженской. Более того, это было сделано ею для всех трех классических краевых условий, причем не только в пространстве $W_2^2(D)$, но и во всех пространствах $W_2^l(D)$ с целыми l (см. гл. II книги: Ладыженская О. А. Смешанная задача для гиперболических уравнений. — М.: Физматгиз, 1953).

Собственные функции и собственные значения оператора L обладают рядом экстремальных свойств аналогичных тем, которые мы установили ранее для интегральных операторов с симметрическими ядрами, для вполне непрерывных симметрических операторов в $L_2(D)$ (см. [**IV**$_1$; **36, 37**]), для обыкновенных дифференциальных операторов типа Штурма — Лиувилля [**88**], для оператора Лапласа [**129**] при условии Дирихле. Так, например, из равенств (496) и (502), справедливых для любой функции f из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$, легко доказывается следующая теорема:

Теорема 2. *Наименьшее значение квадратичного функционала*

$$J(f) = L(f, f) \equiv \int\limits_D \left(a_{ik} f_{x_i} f_{x_k} - cf^2\right) dx$$

на множестве функций f из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ с $\|f\| = 1$ равно $-\lambda_1$ — первому собственному значению, взятому с обратным знаком. Оно реализуется на первой собственной функции u_1. Второе собственное значение, взятое с обратным знаком, дает наименьшее значение $J(f)$ на множестве функций f из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$, подчиняющихся двум условиям: $\|f\| = 1$ и $(f, u_1) = 0$. Оно реализуется на собственных функциях, соответствующих λ_2 (обозначим одно из решений этой задачи через u_2)). Следующая собственная функция u_3 находится, как решение изопериметрической задачи на определение нижней грани $J(f)$ на множестве функций f из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$, подчиненных условиям: $\|f\| = 1$, $(f, u_1) = 0$, $(f, u_2) = 0$. Значение $J(f)$ при этом оказывается равным $-\lambda_3$ (оно будет равно $-\lambda_2$, если λ_2 непростое собственное значение, т. е. если кратность λ_2 больше единицы). Так подряд находятся все u_k и соответствующие им λ_k.*

Для доказательства этих предложений надо учесть, что $0 < \lambda_0 - \lambda_1 \leqslant \lambda_0 - \lambda_2 \leqslant \ldots$ Ввиду этого для любой f из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$

$$L_1(f, f) \geqslant (\lambda_0 - \lambda_1) \sum_{k=1}^{\infty} (f, u_k)^2 = (\lambda_0 - \lambda_1) \|f\|^2,$$

а для $f = u_1$ значение $L_1(u_1, u_1) = (\lambda_0 - \lambda_1) \|u_1\|^2 = \lambda_0 - \lambda_1$, следовательно, для любой $f \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ с $\|f\| = 1$ имеем

$$J(f) = L(f, f) = L_1(f, f) - \lambda_0 \|f\|^2 \geqslant -\lambda_1 = J(u_1),$$

*) Дополнительное рассуждение показывает, что первое собственное значение однократно.

т. е., действительно, u_1 дает решение первой из указанных в теореме вариационных задач. В следующей вариационной задаче мы должны рассмотреть все f из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$, удовлетворяющие условиям $\|f\| = 1$ и $(f, u_1) = 0$. Для них $L_1(f, f) \geqslant (\lambda_0 - \lambda_2)\|f\|^2 = (\lambda_0 - \lambda_2)$, а, с другой стороны, $L_1(u_2, u_2) = \lambda_0 - \lambda_2$, следовательно, $L(f, f) \geqslant L(u_2, u_2) = -\lambda_2$. Аналогично доказываются и остальные утверждения теоремы.

Полезно отметить, что вариационные задачи, описанные в этой теореме, имеют решения и при значительно меньших предположениях о коэффициентах L и D. Например, достаточно потребовать, чтобы для L выполнялись условия, сформулированные в **[144]**, а D была бы произвольной ограниченной областью. При этом мы получим те же числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, но относительно соответствующих им функций u_k сможем утверждать лишь, что они суть элементы $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$. В соответствии с определением, данным в **[144]**, $u_k(x)$ является обобщенным решением из класса $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ спектральной задачи (489) при $\lambda = \lambda_k$. Если же L и D удовлетворяют требованиям теоремы 2 из **[148]**, то каждое из этих $u_k(x)$ окажется элементом $W_{2,0}^2(D)$ и будет удовлетворять уравнениям (489) (см. теорему 2 **[149]**).

§ 3. УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО И ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПОВ

151. Зависимость решений уравнения теплопроводности от начального и предельного условий и свободного члена. Мы установили раньше теорему единственности для уравнения теплопроводности, причем это доказательство было основано на теореме, которая утверждала, что *наибольшее и наименьшее значения решения однородного уравнения теплопроводности достигаются или при $t = 0$ или на границе области.*

Доказательство этой теоремы проводилось для одномерного случая **[II; 219]**. Совершенно аналогично можно провести доказательство и в многомерном случае.

Рассмотрим теперь неоднородное уравнение теплопроводности в области B на плоскости (x, y):

$$u_t = u_{xx} + u_{yy} + f(x, y, t) \tag{1}$$

с начальным и предельным условиями

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y) \text{ (в области } \overline{B}); \quad u|_l = \psi(x, y, t), \tag{2}$$

где l — контур B. Функцию f мы считаем непрерывной в замкнутой области $\overline{B}$ при $t \geqslant 0$. Аналогичным образом φ считается непрерывной в $\overline{B}$ и ψ на l при $t \geqslant 0$. Представим себе в пространстве (x, y, t) цилиндр D, основание которого есть область B на плоскости (x, y) и образующие которого параллельны оси t. Пусть D_T — часть этого цилиндра, ограниченная снизу плоскостью $t=0$ и сверху плоскостью $t=T$ $(T>0)$. Обозначим через S' нижнее основание $t=0$ и боковую поверхность D_T. Пользуясь рассуждениями, аналогичными тем, которые мы применяли в [II; 219], легко доказать теорему.

Теорема 1. *Если u удовлетворяет уравнению* (1) *внутри D и непрерывна вплоть до S', и если $f \geqslant 0$ в D_T, то наименьшее значение u в D_T достигается на S'. Если же $f \leqslant 0$ в D_T, то наибольшее значение u достигается на S'.*

Приведем коротко доказательство этой теоремы. Рассмотрим только случай $f \leqslant 0$ и будем доказывать от обратного. Пусть наибольшее значение u достигается не на S', а в некоторой точке (x', y', t') и равно M. Введем новую функцию:

$$v = u - k(t-T), \tag{3}$$

где k — положительное число, которое мы сейчас определим.

Мы имеем в $\overline{D}_T$

$$u \leqslant v \leqslant u + kT,$$

и можно фиксировать k настолько близким к нулю, чтобы наибольшее значение v на S' было, как и для u, меньше, чем значение u в точке (x', y', t'). При таком выборе k функция v будет достигать наибольшего значения или внутри D_T или внутри верхней границы $t=T$. Приведем оба эти случая к противоречию.

Пусть v достигает наибольшего значения в некоторой точке $C(x, y, t)$ внутри D_T. В этой точке v имеет максимум и, следовательно,

$$v_t = 0; \quad v_{xx} \leqslant 0; \quad v_{yy} \leqslant 0 \quad \text{в точке } C,$$

откуда следует $v_t - v_{xx} - v_{yy} \geqslant 0$, или, в силу (3), $u_t - u_{xx} - u_{yy} - k \geqslant 0$ в точке C, а это противоречит тому, что в точке C должно удовлетворяться уравнение $u_t - u_{xx} - u_{yy} - f = 0$ и $f \leqslant 0$. Положим теперь, что v достигает наибольшего значения в точке C, находящейся внутри основания $t=T$. В этой точке должны быть $v_t \geqslant 0$ и, рассматривая изменения v вдоль верхней границы, получим: $v_{xx} \leqslant 0$ и $v_{yy} \leqslant 0$ в точке C. Это приводит нас к противоречию совершенно так же, как и выше, и теорема доказана. Пользуясь доказанной теоремой, легко установить еще и такую теорему:

Теорема 2. *Если φ, ψ и f удовлетворяют условиям $|\varphi| \leqslant a$ на нижнем основании D_T, $|\psi| \leqslant a$ на боковой поверхности D_T и $|f| \leqslant \frac{a}{T}$ в $\overline{D}_T$, то $|u| \leqslant 2a$ в D_T.*

Рассмотрим функцию

$$v = u + \frac{a(T-t)}{T}, \tag{4}$$

которая удовлетворяет уравнению

$$v_t = v_{xx} + v_{yy} + \left(f - \frac{a}{T}\right)$$

и следующим условиям:

$$v|_{t=0} = \varphi + a; \quad v|_l = \psi + \frac{a(T-t)}{T}.$$

Принимая во внимание условие теоремы и тот факт, что $0 \leqslant t \leqslant T$ на боковой поверхности D_T, можем утверждать, что

$$f - \frac{a}{T} \leqslant 0 \text{ в } D_T; \quad |\varphi + a| \leqslant 2a \text{ на основании } t = 0;$$

$$\left|\psi + \frac{a(T-t)}{T}\right| \leqslant 2a \text{ на боковой поверхности } D_T.$$

Из теоремы 1 следует при этом, что наибольшее значение v достигается на S', и, следовательно, $v \leqslant 2a$ в $\bar{D}_T$. Принимая во внимание, что второе слагаемое правой части формулы (4) неотрицательно, можем утверждать, что $u \leqslant 2a$ Аналогично, вводя функцию

$$v = u - \frac{a(T-t)}{T},$$

мы докажем, что $u \geqslant -2a$, откуда и следует, что $|u| \leqslant 2a$. Теорема 2 дает оценку решения уравнения (1) через оценку свободного члена f и функций, входящих в начальное и предельное условия.

Аналогично доказывается теорема и в случае любого числа пространственных переменных.

152. Потенциалы для уравнения теплопроводности в одномерном случае. Мы покажем сейчас, что можно построить для уравнения теплопроводности теорию, аналогичную теории потенциала для уравнения Лапласа, и таким образом привести предельные задачи уравнения теплопроводности к интегральным уравнениям.

Рассмотрим одномерное уравнение теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx} \tag{5}$$

и положим, что для промежутка $0 \leqslant x \leqslant l$ поставлена предельная задача с предельными условиями

$$u|_{x=0} = \omega_1(t); \quad u|_{x=l} = \omega_2(t) \tag{6}$$

и с начальным условием

$$u|_{t=0} = f(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant l). \tag{7}$$

Продолжим функцию $f(x)$, заданную на промежутке $[0, l]$, на всю ось x так, чтобы она была непрерывной и обращалась в нуль вне некоторого конечного промежутка, и составим решение уравнения (5) **[II; 214]**:

$$u_0(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}}\, d\xi \qquad (t > 0), \tag{8}$$

которое удовлетворяет условию

$$u_0|_{t=0} = f(x) \qquad (-\infty < x < +\infty). \tag{9}$$

Вводя вместо $u(x, t)$ новую функцию $w(x, t) = u(x, t) - u_0(x, t)$, мы получим для w уравнение (5) с однородным начальным условием

$$w|_{t=0} = 0 \qquad (0 \leqslant x \leqslant l)$$

и с некоторыми условиями при $x = 0$ и $x = l$, правые части которых равны разности $\omega_1(t) - w(0, t)$ и $\omega_2(t) - w(l, t)$. Таким образом, мы в дальнейшем будем искать решение уравнения (5) с предельными условиями (6) и однородным начальным условием

$$u|_{t=0} = 0 \qquad (0 \leqslant x \leqslant l). \tag{10}$$

Основным сингулярным решением, соответствующим источнику, помещенному в точке $x = \xi$ и в момент $t = \tau$, является решение **[II; 214]**

$$u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\, e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2(t-\tau)}}. \tag{11}$$

Дифференцируя по ξ и добавляя постоянный множитель $2a^2$, получим сингулярное решение, соответствующее диполю:

$$u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}\,(t-\tau)^{3/2}}\,(x - \xi)\, e^{-\frac{(\xi - x)}{4a^2(t-\tau)}}. \tag{12}$$

Умножая последнее решение на некоторую функцию $\varphi(\tau)$ и интегрируя по τ от $\tau = 0$ до $\tau = t$, получим решение

$$u(x, t) = \int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{2a\sqrt{\pi}\,(t-\tau)^{3/2}}\,(x - \xi)\, e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2(t-\tau)}}\, d\tau, \tag{13}$$

соответствующее диполю в точке $x = \xi$, действующему от момента $t = 0$, с интенсивностью $\varphi(\tau)$. Тот факт, что функция (13) при $x \neq \xi$ удовлетворяет уравнению (5), непосредственно проверяется простым дифференцированием, причем дифференцирование по верхнему пределу дает нуль, так как подынтегральная функция при $x \neq \xi$ стремится к нулю, если $\tau \to t$ Покажем, что функция (13) удовлетворяет следующим предельным соотношениям, если x стремится к ξ слева или справа:

$$u(\xi+0,\ t)=\varphi(t), \quad u(\xi-0,\ t)=-\varphi(t). \tag{14}$$

Считая $x \neq \xi$, введем вместо τ новую переменную интегрирования:

$$\alpha=\frac{x-\xi}{2a\sqrt{t-\tau}}.$$

Если $x>\xi$, то $\alpha \to +\infty$ при $\tau \to t$, и если $x<\xi$, то $\alpha \to -\infty$ при $\tau \to t$. В новой переменной получим

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{x-\xi}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty}\varphi\left[t-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2\alpha^2}\right]e^{-\alpha^2}\,d\alpha \quad (x>\xi), \tag{15}$$

и при $x \to \xi+0$ в пределе получим

$$u(\xi+0,\ t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\infty}\varphi(t)\,e^{-\alpha^2}\,d\alpha=\varphi(t)\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\infty}e^{-\alpha^2}\,d\alpha=\varphi(t).$$

Аналогично доказывается и второе из равенств (14). Кроме того, решение (13) удовлетворяет, очевидно, однородному начальному условию

$$u|_{t=0}=0. \tag{16}$$

Мы не останавливаемся на более детальном проведении предельного перехода в формуле (15). Его легко можно проделать при предположении непрерывности $\varphi(\tau)$.

Положим, что у нас имеется формулированная выше задача с предельными условиями (6) и начальным условием (10). Ищем решение в виде суммы двух диполей — одного, помещенного в точке $x=0$, и другого — в точке $x=l$, искомую интенсивность первого обозначив через $\varphi(\tau)$ и второго через $\psi(\tau)$:

$$u(x,\ t)=\int\limits_0^t\frac{\varphi(\tau)}{2a\sqrt{\pi}\,(t-\tau)^{3/2}}\,xe^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}\,d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\frac{\psi(\tau)}{2a\sqrt{\pi}\,(t-\tau)^{3/2}}\,(x-l)\,e^{-\frac{(l-x)}{4a^2(t-\tau)}}\,d\tau. \tag{17}$$

Предельные условия (6), в силу (14), запишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} \varphi(t) - l\int\limits_0^t \frac{\psi(\tau)}{2a\sqrt{\pi}\,(t-\tau)^{3/2}}\, e^{-\frac{l^2}{4a^2(t-\tau)}}\,d\tau = \omega_1(t), \\ -\psi(t) + l\int\limits_0^t \frac{\varphi(\tau)}{2a\sqrt{\pi}\,(t-\tau)^{3/2}}\, e^{-\frac{l^2}{4a^2(t-\tau)}}\,d\tau = \omega_2(t). \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Эти уравнения представляют собой систему интегральных уравнений Вольтерра для $\varphi(\tau)$ и $\psi(\tau)$ и ядра этих уравнений зависят только от разности $(t-\tau)$, так что к написанной системе может быть применено преобразование Лапласа так, как это мы описывали в [IV$_1$; 53]. Если, например, на одном из концов задана не сама функция u, а ее производная $\frac{\partial u}{\partial x}$, то на этом конце надо поместить не диполь, а простой источник, действие которого дается формулой (11). Положим, например, что предельные условия имеют вид

$$u\,|_{x=0} = \omega_1(t); \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = \omega_2(t), \tag{19}$$

и начальные условия, как и выше, имеют вид (16).

Для простоты дальнейших формул умножим решение (11) на $2a^2$ и будем таким образом искать решение в виде

$$u(x,\ t) = \int\limits_0^t \frac{\varphi(\tau)}{2a\sqrt{\pi}\,(t-\tau)^{3/2}}\, x e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}\,d\tau + \\ + \int\limits_0^t \frac{a\psi(\tau)}{\sqrt{\pi}\,\sqrt{t-\tau}}\, e^{-\frac{(l-x)^2}{4a^2(t-\tau)}}\,d\tau. \tag{20}$$

Первое из условий (19) даст

$$\varphi(t) + \int\limits_0^t \frac{a e^{-\frac{l^2}{2a^2(t-\tau)}}}{\sqrt{\pi}\,\sqrt{t-\tau}}\,\psi(\tau)\,d\tau = \omega_1(t).$$

Дифференцируя формулу (20) по x и устремляя x к l, получим, в силу (14) и второго из условий (19)

$$\psi(t) + \int\limits_0^t \frac{e^{-\frac{l^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi}\,(t-\tau)^{3/2}}\,\varphi(\tau)\,d\tau - l^2\int\limits_0^t \frac{e^{-\frac{l^2}{4a^2(t-\tau)}}}{4a^3(t-\tau)^{5/2}}\,\varphi(\tau)\,d\tau = \omega_2(t),$$

и мы получаем опять для $\varphi(\tau)$ и $\psi(\tau)$ систему интегральных уравнений с ядрами, зависящими от разности $(t-\tau)$.

153. Тепловые источники в многомерном случае. Идея потенциала может быть применена и к многомерным задачам теплопроводности. Мы ограничимся указанием результатов, которые аналогичны предыдущим. Доказательство свойств потенциалов в многомерном случае представляет значительно большие трудности по сравнению с одномерным случаем. Будем рассматривать плоский случай, т. е. уравнение

$$u_t = a^2 (u_{xx} + u_{yy}). \tag{21}$$

Пусть на плоскости (x, y) имеется область B с контуром l. Основное сингулярное решение, соответствующее источнику в точке (ξ, η), действующему с момента времени τ, имеет вид

$$u = \frac{1}{4\pi a^2 (t-\tau)} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} \quad [r^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2].$$

Аналог потенциала простого слоя дается следующей формулой:

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t d\tau \int_l \frac{a(\sigma, \tau)}{t-\tau} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} d\sigma, \tag{22}$$

где σ — длина дуги контура l, отсчитываемая от некоторой фиксированной точки, и $a(\sigma, \tau)$ — функция переменной точки σ контура и параметра τ. Через r обозначено расстояние от точки (x, y) до переменной точки σ контура l. Тепловой потенциал двойного слоя представляется формулой

$$v(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t d\tau \int_l \frac{b(\sigma, \tau)}{t-\tau} \frac{\partial}{\partial n} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} d\sigma, \tag{23}$$

где $\mathbf{n}$ — направление внешней нормали в переменной точке интегрирования, или

$$v(x, y, t) = \int_0^t d\tau \int_l \frac{b(\sigma, \tau)}{4\pi a^2 (t-\tau)^2} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} r \cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})\, d\sigma, \tag{23_1}$$

где направление $\mathbf{r}$ считается из точки σ в точку (x, y). Если ввести угол $d\varphi$, под которым элемент длины $d\sigma$ виден из точки (x, y), то предыдущую формулу можно переписать в виде

$$v(x, y, t) = -\int_l d\varphi \int_0^t \frac{b(\sigma, \tau)}{4\pi a^2 (t-\tau)^2} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} r^2\, d\tau. \tag{23_2}$$

Предельные значения потенциала двойного слоя в точке $\sigma_0(x_0, y_0)$ контура определяются формулами

$$\begin{aligned} v_i(x_0, y_0, t) &= -b(\sigma_0, t) + \int_0^t d\tau \int_l \frac{b(\sigma, \tau)}{4\pi a^2 (t-\tau)^2} e^{-\frac{r_0^2}{4a^2(t-\tau)}} r_0 \cos(\mathbf{r}_0, \mathbf{n})\, d\sigma \\ v_e(x_0, y_0, t) &= b(\sigma_0, t) + \ldots, \end{aligned} \tag{24}$$

где r_0 — расстояние от переменной точки интегрирования до точки $\sigma_0(x_0, y_0)$. Потенциал простого слоя (22) непрерывен при переходе через контур l, а его производная по нормали n в точке σ_0 контура имеет в этой точке предельные значения, определяемые по формулам

$$\left(\frac{\partial u(x_0, y_0, t)}{\partial n_0}\right)_i = -a(\sigma_0, t) - \int_0^t d\tau \int_l \frac{a(\sigma, \tau)}{4\pi a^2 (t-\tau)^2} e^{-\frac{r_0^2}{4a^2(t-\tau)}} r_0 \cos(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}_0)\, d\sigma,$$

$$\left(\frac{\partial u(x_0, y_0, t)}{\partial n_0}\right)_e = -a(\sigma_0, t) - \ldots \tag{25}$$

Пользуясь указанными формулами, можно приводить решение предельных задач к интегральным уравнениям. Пусть, например, ищется функция $v(x, y, t)$, удовлетворяющая внутри B уравнению (21), имеющая на контуре l данные предельные значения:

$$v\,|_l = \omega(s, t), \tag{26}$$

где s — координата точки контура, определяемая длиною дуги s, отсчитываемой от некоторой точки Начальные данные считаются равными нулю. Отыскивая решение в виде потенциала двойного слоя (23), получаем, в силу первого из равенств (24), интегральное уравнение для функции $b(\sigma, \tau)$:

$$-b(s, t) + \int_0^t d\tau \int_l \frac{b(\sigma, t)}{4\pi a^2 (t-\tau)^2} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} r \cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})\, d\sigma = \omega(s, t), \tag{27}$$

где r — расстояние между точками s и σ контура l, и направление $\mathbf{r}$ считается от σ и s. В написанном уравнении интегрирование по σ совершается по фиксированному промежутку $(0, L)$, где L — длина контура l, и при интегрировании по τ верхний предел является переменным. Иначе говоря, написанное интегральное уравнение имеет характер уравнений Фредгольма по отношению к переменной σ и характер уравнений Вольтерра по отношению к переменной τ. Несмотря на такой смешанный характер уравнения (27), обычный метод последовательных приближений, описанный нами для уравнений Вольтерра, оказывается сходящимся и в случае уравнения (27). Метод применим и для области, ограниченной несколькими контурами. Он легко обобщается и на трехмерный случай и применим к внешним задачам. Приведение начального условия к нулю совершается так же, как и в одномерном случае, при помощи решения задачи для всей плоскости или всего пространства. В случае трехмерного пространства формула была нами дана в [II; 214]. В двумерном случае формула имеет вид

$$u(x, y, t) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}} f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Исследования свойств тепловых потенциалов и их применения к предельным задачам имеются в следующих работах: 1) Леви (Levi E.). — Ann. di Mat., 1908; 2) Жеврей (Gevrey M.). — J. Math. pur. et appl., 1913, 9; 3) Мюнтц Г. М — Math. Z., 1934, 38, № 3; 4) Мюнтц Г. М. Интегральные уравнения — М.; Л.: ГНТИ, 1934; 5) Тихонов А. Н. — Бюлл. МГУ, 1938.

154. Функция Грина уравнения теплопроводности. Совершенно так же, как и для уравнения Лапласа, можно ввести функцию Грина и для уравнения теплопроводности. Для удобства в записи дальнейших формул обозначим через $u_0(x-\xi, t-\tau)$ основное сингулярное решение (11). Функция Грина для отрезка $0 \leqslant x \leqslant l$ при однородных предельных условиях

$$u\,|_{x=0} = u\,|_{x=l} = 0 \tag{28}$$

определяется следующим образом:

$$G(x, t; \xi, \tau) = \begin{cases} u_0(x-\xi, t-\tau) - u(x, t; \xi, \tau) & t \geqslant \tau, \\ 0 & t \leqslant \tau, \end{cases} \tag{29}$$

где $u(x, t; \xi, \tau)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности по отношению (x, t) при $0 < x < l$ и $t > \tau$, однородному начальному условию при $t = \tau$:

$$u(x, \tau; \xi, \tau) = 0, \tag{30}$$

и предельным условиям:

$$u(0, t; \xi, \tau) = u_0(-\xi, t-\tau); \quad u(l, t; \xi, \tau) = u_0(l-\xi, t-\tau), \quad t \geqslant \tau. \tag{30_1}$$

В написанных формулах ξ и τ — фиксированы, причем $0 < \xi < l$ Из приведенного определения непосредственно следует, что $u(x, t; \xi, \tau)$ и функция Грина зависят только от разности $\alpha = t - \tau$, и вместо $y(x, t, \xi, \tau)$ можно писать $u(x, \xi, \alpha)$, а вместо $G(x, t; \xi, \tau)$ писать $G(x, \xi, \alpha)$. Условия (30) и (30_1) дают предельные значения функции $u(x, \xi, \alpha)$ на контуре полуполосы, ограниченной полупрямыми $x=0$ и $x = l$ $(t \geqslant \tau)$ и отрезком $0 \leqslant x \leqslant l$ прямой $t = \tau$. В вершинах этой полуполосы эти предельные значения непрерывны. Это непосредственно следует из того, что решение (11), при фиксированном x, не равном ξ, и стремлении t к $(\tau + 0)$, стремится к нулю. Принимая во внимание, что указанные предельные значения не отрицательны, мы можем утверждать, что $u(x, t, \alpha) \geqslant 0$, и, следовательно, в силу (29), $G(x, \xi, \alpha) \leqslant u_0$. Функция Грина имеет при $t = \tau + 0$ и $x = \xi$ особенность, характеризуемую сингулярностью u_0. Мы имеем $u_0 \geqslant 0$, и, в силу (30), $u(x, \xi, \alpha) \to 0$ при $\alpha \to +0$, и отсюда вытекает непосредственно второе неравенство для функции Грина, а именно $G(x, \xi, \alpha) \geqslant 0$. Можно доказать симметричность построенной функции Грина по отношению к x и ξ.

Пользуясь функцией Грина, можно строить решение неоднородного уравнения теплопроводности, удовлетворяющее однородному начальному и однородным предельным условиям, а именно, если $\pi(x, t)$ — непрерывная функция в промежутке $(0, l)$ и при $t > 0$ имеющая непрерывные производные первого порядка, то функция

$$w(x, t) = \int_0^t d\tau \int_0^l G(x, \xi, \alpha)\, \pi(\xi, \tau)\, d\xi \tag{31}$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \pi(x, t)$$

и нулевым предельным и начальному условиям.

Все сказанное может быть проведено в многомерном случае. Доказательство высказанных утверждений можно найти в упомянутой выше работе А Н Тихонова

155. Применение преобразования Лапласа. Как мы уже упоминали, при решении системы интегральных уравнений (18) можно применить преобразование Лапласа Это преобразование можно непосредственно применить к самому дифференциальному уравнению (5). В данном случае мы будем применять одностороннее преобразование

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt = L_1(F). \tag{32}$$

Пусть мы имеем предельные условия (6) и однородное начальное условие (10). Вместо $u(x, t)$ вводим в качестве искомой функции ее преобразование по Лапласу:

$$\varphi(x, s) = \int_0^\infty e^{-st} u(x, t)\, dt. \tag{33}$$

Применим интегрирование по частям, причем будем считать, что произведение $e^{-st}u(x, t)$ обращается в нуль при $t = \infty$. Принимая во внимание однородное начальное условие (16), получим

$$\varphi(x, s) = -\frac{1}{s}\int_0^\infty u(x, t)\, de^{-st} = \frac{1}{s}\int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial t} e^{-st}\, dt.$$

Меняя масштаб для t или x, можем считать, что в уравнении (5) $a = 1$. Применяя к обеим частям уравнения преобразование Лапласа и считая, что в формуле (33) мы можем дифференцировать по x под знаком интеграла, получим для $\varphi(x, s)$ уравнение, в которое будет входить производная только по x:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = s\varphi. \tag{34}$$

Применяя преобразование Лапласа и к уравнениям (6), получим предельные условия для φ:

$$\varphi|_{x=0} = a_1(s); \quad \varphi|_{x=l} = a_2(s), \tag{35}$$

где

$$a_k(s) = \int_0^\infty e^{-st}\omega_k(t)\, dt \qquad (k = 1, 2). \tag{36}$$

Решение уравнения (34) при предельных условиях (35) без труда находится в явном виде:

$$\varphi(x, s) = a_1(s)\varphi_1(x, s) + a_2(s)\varphi_2(x, s), \tag{37}$$

где

$$\varphi_1(x, s) = \frac{\sin(l - x)\sqrt{-s}}{\sin l\sqrt{-s}}; \qquad \varphi_2(x, s) = \frac{\sin x\sqrt{-s}}{\sin l\sqrt{-s}}. \tag{38}$$

Применяя к функции (37) преобразование, обратное преобразованию (32), получаем искомую функцию $u(x, t)$. Оказывается, что эта функция может быть просто выражена через функции $\omega_1(t)$ и $\omega_2(t)$, входящие в предельные условия, и через функцию $\vartheta_3(v)$ Якоби [III$_2$; 177], причем при построении этой последней функции мы принимаем $h = e^{-\pi t}$. Эту фукцию Якоби мы обозначим через $\vartheta_3(v, t)$:

$$\vartheta_3(v, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{2ni\pi v - n^2\pi^2 t}. \tag{39}$$

В основе дальнейших вычислений лежит следующая формула:

$$L_1[\vartheta_3(v, t)] = -\frac{\cos(2v - 1)\sqrt{-s}}{\sqrt{-s}\sin\sqrt{-s}} = \psi(v, s) \qquad (0 \leqslant v \leqslant 1), \tag{40}$$

где для краткости письма мы через $\psi(v, s)$ обозначили написанную дробь. Формулы (38) можно переписать в виде

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(x, s) &= -\frac{1}{2}\left[\frac{\partial\psi(v, l^2 s)}{\partial v}\right]_{v=\frac{x}{2l}} \qquad (0 \leqslant x \leqslant 2l), \\ \varphi_2(x, s) &= -\frac{1}{2}\left[\frac{\partial\psi(v, l^2 s)}{\partial v}\right]_{v=\frac{l-x}{2l}} \qquad (-l \leqslant x \leqslant l). \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Мы имеем, кроме того, очевидно

$$f(l^2 s) = \int_0^\infty e^{-l^2 st} F(t)\, dt = \frac{1}{l^2}\int_0^\infty e^{-st} F\left(\frac{t}{l^2}\right) dt,$$

т. е. при преобразовании (32) переход от $f(s)$ к $f(l^2 s)$ равносилен переходу от $F(t)$ к $\frac{1}{l^2}F\left(\frac{t}{l^2}\right)$. Принимая во внимание это обстоятельство, а также формулы (40) и (41), и производя дифференцирование по v под знаком интеграла, получим

$$L_1^{-1}\{\varphi_1(x, s)\} = -\frac{1}{2l^2}\left[\frac{\partial\vartheta_3\left(v, \frac{t}{l^2}\right)}{\partial v}\right]_{v=\frac{x}{2l}} = -\frac{1}{l}\frac{\partial\vartheta_3\left(\frac{x}{2l}, \frac{t}{l^2}\right)}{\partial x}$$

$$(0 \leqslant x \leqslant 2l),$$

$$L_1^{-1}\{\varphi_2(x, s)\} = -\frac{1}{2l^2}\left[\frac{\partial\vartheta_3\left(v, \frac{t}{l^2}\right)}{\partial v}\right]_{v=\frac{l-x}{2l}} = \frac{1}{l}\frac{\partial\vartheta_3\left(\frac{l-x}{2l}, \frac{t}{l^2}\right)}{\partial x}$$

$$(-l \leqslant x \leqslant l).$$

Применяя теперь к функции (37) преобразование L_1^{-1} и принимая во внимание формулы (36) и теорему о складке, получим окончательно

$$u(x, t) = -\frac{1}{l}\omega_1(t) * \frac{\partial\vartheta_3\left(\frac{x}{2l}, \frac{t}{l^2}\right)}{\partial x} + \frac{1}{l}\omega_2(t) * \frac{\partial\vartheta_3\left(\frac{l-x}{2l}, \frac{t}{l^2}\right)}{\partial x}, \tag{42}$$

$$(0 < x < l),$$

где мы ввели следующее обозначение

$$F_1(t) * F_2(t) = \int_0^t F_1(\tau) F_2(t-\tau)\, d\tau.$$

Можно выразить через функцию $\vartheta_3(v, t)$ функцию Грина, о которой мы говорили в предыдущем параграфе. Заметим прежде всего, что формула (40) имеет место лишь для промежутка $0 \leqslant v \leqslant 1$. Если $-1 \leqslant v \leqslant 0$, то $0 \leqslant v+1 \leqslant 1$ и, принимая во внимание периодичность $\vartheta_3(v, t)$, можем написать:

$$L_1[\vartheta_3(v, t)] = L_1[\vartheta_3(v+1, t)] = -\frac{\cos[2(v+1)-1]\sqrt{-s}}{\sqrt{-s}\sin\sqrt{-s}}$$

$$(0 \leqslant v+1 \leqslant 1),$$

т. е.

$$L_1[\vartheta_3(v, t)] = -\frac{\cos(2v+1)\sqrt{-s}}{\sqrt{-s}\sin\sqrt{-s}} \qquad (-1 \leqslant v \leqslant 0). \tag{43}$$

Возьмем теперь неоднородное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \pi(x, t) \tag{44}$$

с однородным начальным и однородными предельными условиями. Вводя функцию

$$\sigma(x, s) = L_1[\pi(x, t)] = \int_0^\infty e^{-st}\pi(x, t)\,dt \tag{45}$$

и применяя к уравнению (44) преобразование Лапласа, получим

$$\frac{\partial^2\varphi(x, s)}{\partial x^2} - s\varphi(x, s) = -\sigma(x, s) \tag{46}$$

и предельные условия

$$\varphi(0, s) = \varphi(l, s) = 0. \tag{47}$$

Для этих предельных условий функция Грина оператора, стоящего в левой части уравнения (46), как нетрудно проверить, будет

$$\gamma(x, \xi; s) = \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\sin(l-\xi)\sqrt{-s}\cdot\sin x\sqrt{-s}}{\sqrt{-s}\sin l\sqrt{-s}} & (x \leqslant \xi), \\ \dfrac{\sin(l-x)\sqrt{-s}\cdot\sin\xi\sqrt{-s}}{\sqrt{-s}\sin l\sqrt{-s}} & (x \geqslant \xi), \end{array}\right\} \tag{48}$$

и через эту функцию Грина решение уравнения (46), удовлетворяющее предельным условиям (47), выражается в виде

$$\varphi(x, s) = \int_0^l \gamma(x, \xi; s)\,\sigma(\xi; s)\,d\xi. \tag{49}$$

Для того чтобы совершить преобразование L_1^{-1}, представим функцию (48) в виде

$$\gamma(x, \xi; s) = \left\{\begin{array}{ll} -\dfrac{\cos(x-\xi+l)\sqrt{-s}}{2\sqrt{-s}\sin l\sqrt{-s}} + \dfrac{\cos(x+\xi-l)\sqrt{-s}}{2\sqrt{-s}\sin l\sqrt{-s}} & (x \leqslant \xi), \\ -\dfrac{\cos(x-\xi-l)\sqrt{-s}}{2\sqrt{-s}\sin l\sqrt{-s}} + \dfrac{\cos(x-\xi-l)\sqrt{-s}}{2\sqrt{-s}\sin l\sqrt{-s}} & (x \geqslant \xi). \end{array}\right. \tag{50}$$

Принимая во внимание, что если $0 \leqslant x \leqslant \xi \leqslant l$, то $-\frac{1}{2} \leqslant \frac{x-\xi}{2l} \leqslant 0$ и $0 \leqslant \frac{x+\xi}{2l} \leqslant 1$, а если $0 \leqslant \xi \leqslant x \leqslant l$, то $0 \leqslant \frac{x-\xi}{2l} \leqslant \frac{1}{2}$ и $0 \leqslant \frac{x+\xi}{2l} \leqslant 1$ и, пользуясь формулами (40) и (43), мы получим

$$L_1^{-1}[\gamma(x, \xi; s)] = G(x; \xi; t) = \frac{1}{2l}\left[\vartheta_3\left(\frac{x-\xi}{2l}, \frac{t}{l^2}\right) - \vartheta_3\left(\frac{x+\xi}{2l}, \frac{t}{l^2}\right)\right]. \tag{51}$$

Из теоремы о складке следует:

$$L_1^{-1}[\gamma(x,\xi;s)\,\sigma(\xi;s)]=\int_0^t \pi(\xi,\tau)\,G(x,\xi;t-\tau)\,d\tau,$$

и, следовательно, согласно формуле (49)

$$u(x,t)=\int_0^l d\xi\int_0^t \pi(\xi,\tau)\,G(x,\xi;t-\tau)\,d\tau. \tag{52}$$

Сравнивая эту формулу с формулой (31), мы видим, что функция $G(x,\xi;t-\tau)$, определяемая согласно (51) через функцию $\vartheta_3(v,t)$, есть функция Грина уравнения теплопроводности, о которой мы говорили в предыдущем параграфе.

Наметим теперь доказательство формулы (40), на которой были основаны все предыдущие вычисления. Мы имели формулу

$$\cos zx=\frac{2z\sin\pi z}{\pi}\left(\frac{1}{2z^2}+\frac{\cos x}{1^2-z^2}-\frac{\cos 2x}{2^2-z^2}+\ldots\right),$$

которая справедлива для промежутка $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ [II; 157]. Полагая в ней $x=2\pi v-\pi$ и $z=\sqrt{-s}:\pi$, мы получим

$$-\frac{\cos(2v-1)\sqrt{-s}}{\sqrt{-s}\,\sin\sqrt{-s}}=\frac{1}{s}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\pi v}{s+n^2\pi^2},$$

и написанное выше неравенство для x дает $0\leqslant v\leqslant 1$. С другой стороны, мы имеем разложение $\vartheta_3(v,t)$ в ряд Фурье [III$_2$; 176]:

$$\vartheta_3(v,t)=1+2\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2\pi^2 t}\cos 2n\pi v.$$

Написанный ряд сходится равномерно относительно t во всяком конечном промежутке $0<\varepsilon\leqslant t\leqslant T$, лежащем правее нуля. Считая вещественную часть s положительной и интегрируя по частям, получим

$$\int_\varepsilon^T e^{-st}\vartheta_3(v,t)\,dt=\frac{e^{-s\varepsilon}-e^{-sT}}{s}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\pi v}{s+n^2\pi^2}\left[e^{-(s+n^2\pi^2)\varepsilon}-e^{-(s+n^2\pi^2)T}\right].$$

Наличие n^2 в знаменателе дает равномерную относительно ε и T сходимость этого ряда, и, переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$ и $T\to\infty$, мы получим

$$\int_0^\infty e^{-st}\vartheta_3(v,t)\,dt=\frac{1}{s}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\pi v}{s+n^2\pi^2},$$

что и дает формулу (40).

Подробнее изложение применения преобразования Лапласа к задачам теплопроводности можно найти в работах Г. Дёча (Doetsch). — Math. Z, **22**, **25**, **26**, **28** и в его книге «Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и z-преобразования». — М.: Наука, 1971.

156. Применение конечных разностей. Рассмотрим неоднородное уравнение теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx} + \pi(x, t) \tag{53}$$

с начальным условием

$$u|_{t=0} = f(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant l) \tag{54}$$

и однородными предельными условиями

$$u|_{x=0} = 0; \quad u|_{x=l} = 0, \tag{55}$$

причем мы будем в дальнейших формулах считать $a = 1$ и $l = 1$. Этого всегда можно достигнуть изменением масштаба у t и x. Возьмем некоторый промежуток $[0, T]$ изменения t и разделим его на n равных частей точками $t_k = kh$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, где $h = T : n$. В уравнении (53) положим $t = t_{k+1}$ и производную по t заменим отношением приращения функции к приращению h независимого переменного. В результате такой замены мы получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $u_k(x)$, которые являются приближенными значениями для $u(x, t_{k+1})$, поскольку мы производную по t заменили упомянутым выше отношением. Система дифференциальных уравнений для $u_k(x)$ имеет, очевидно, вид

$$\frac{d^2 u_{k+1}(x)}{dx^2} = \frac{u_{k+1}(x) - u_k(x)}{h} - \pi(x, t_{k+1}) \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{56}$$

Принимая во внимание (54), положим $u_0(x) = f(x)$, а все остальные функции $u_{k+1}(x)$ мы подчиняем предельным условиям (55):

$$u_{k+1}(0) = u_{k+1}(1) = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{57}$$

Процесс вычисления сводится к следующему. Полагая в уравнении (56) $k = 0$ и подставляя $u_0(x) = f(x)$, получаем уравнение второго порядка для $u_1(x)$, которое мы должны проинтегрировать при предельных условиях (57). Найдя таким образом $u_1(x)$ и полагая в уравнении (56) $k = 1$, получаем уравнение для $u_2(x)$, которое мы должны проинтегрировать при предельных условиях (57), и т. д. В дальнейшем нам придется исследовать уравнение вида

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - m^2 y = -\pi(x) \tag{58}$$

при предельных условиях

$$y(0) = y(1) = 0, \tag{59}$$

причем мы обозначили $m^2 = 1 : h$. Введем функцию Грина оператора, стоящего в левой части уравнения (58), при предельных условиях (59). Нетрудно проверить, что она будет иметь вид [74]

$$G(x, \xi)=$$
$$=\begin{cases} -(e^{mx}-e^{-mx})\left[e^{m(\xi-1)}-e^{-m(\xi-1)}\right]:\ 2m(e^m-e^{-m}) & (x\leqslant\xi), \\ -\left[e^{m(x-1)}-e^{-m(x-1)}\right](e^{m\xi}-e^{-m\xi}):\ 2m(e^m-e^{-m}) & (x\geqslant\xi), \end{cases} \tag{60}$$

и решение уравнения (58), удовлетворяющее предельным условиям (59), выражается формулой

$$y(x)=\int_0^1 G(x, \xi)\,\pi(\xi)\,d\xi. \tag{61}$$

Докажем лемму: *Для решения уравнения* (58), *удовлетворяющего предельным условиям* (59), *имеет место оценка*

$$|y(x)|\leqslant\frac{1}{m^2}\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|\pi(x)|. \tag{62}$$

Рассмотрим сначала тот случай, когда $\pi(x)\geqslant 0$ в промежутке $[0, 1]$. Покажем, что при этом $y(x)\geqslant 0$. Действительно, если бы это было не так, то $y(x)$ должна была бы иметь внутри промежутка отрицательный минимум, и в соответствующей точке было бы $y''\geqslant 0$ и $m^2y<0$, а это противоречит (58) при $\pi(x)\geqslant\geqslant 0$. Неравенство $y(x)\geqslant 0$ следует и из (61).

Таким образом, все значения $y(x)$ — неотрицательны, и в некоторой точке внутри промежутка $[0, 1]$ эта функция принимает наибольшее положительное значение. В этой точке мы должны иметь $y''(x)\leqslant 0$, и из уравнения (58) непосредственно следует $-m^2y(x)\geqslant-\pi(x)$, откуда и вытекает оценка (62). Если $\pi(x)$ принимает отрицательные значения, то, пользуясь формулой (61) и принимая во внимание, что функция Грина (60) не принимает отрицательных значений, получим оценку

$$|y(x)|\leqslant\int_0^1 G(x, \xi)\,|\pi(\xi)|\,d\xi. \tag{63}$$

Правая часть написанного неравенства представляет собою решение уравнения

$$\frac{d^2z}{dx^2}-m^2z=-|\pi(x)|,$$

удовлетворяющее предельным условиям (59). Для этого решения, как мы только что доказали, имеет место оценка

$$z(x)\leqslant\frac{1}{m^2}\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|\pi(x)|.$$

В силу (63), тем более имеет место оценка (62).

Введем в рассмотрение ошибку $\gamma_{k+1}(x)$, получаемую от замены $u(x, t_{k+1})$ на $u_{k+1}(x)$, и ошибку $\eta_{k+1}(x)$, получаемую от замены производной отношением приращения функции к приращению независимого переменного:

$$\left.\begin{aligned} &\gamma_{k+1}(x) = u(x, t_{k+1}) - u_{k+1}(x); \\ &\eta_{k+1}(x) = \left.\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right|_{t=t_{k+1}} - \frac{u(x, t_{k+1}) - u(x, t_k)}{h}, \end{aligned}\right\} \tag{64}$$

причем, очевидно, $\gamma_0(x) \equiv 0$. Полагая в уравнении (53) $t = t_{k+1}$ и складывая почленно полученное уравнение с (56), будем иметь уравнение

$$\frac{d^2\gamma_{k+1}(x)}{dx^2} = \frac{\gamma_{k+1}(x) - \gamma_k(x)}{h} + \eta_{k+1}(x)$$

или

$$\frac{d^2\gamma_{k+1}(x)}{dx^2} - m^2\gamma_{k+1}(x) = -m^2\gamma_k(x) + \eta_{k+1}(x). \tag{65}$$

Если предположить, что функция $u(x, t)$ имеет непрерывную вплоть до $t = 0$ производную по t, то из выражения (64) для $\eta_{k+1}(x)$, путем применения формулы конечных приращений, мы можем заключить, что для функций $\eta_{k+1}(x)$ имеет место оценка $|\eta_{k+1}(x)| \leqslant \tau$, где τ не зависит от k и x и стремится к нулю вместе с h. Обозначим через δ_k максимум $|\gamma_k(x)|$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$. Применяя к уравнению (65) доказанную выше лемму, получим $\delta_{k+1} \leqslant \delta_k + h\tau$. Суммируя это неравенство от $k = 0$ до $k = n - 1$ и принимая во внимание, что $\delta_0 = 0$, получим $\delta_n \leqslant nh\tau = T\tau$. Это неравенство тем более будем иметь место, если суммировать от $k = 0$ до некоторого $k = m \leqslant n - 1$, т. е. мы имеем

$$|u(x, t_m) - u_m(x)| \leqslant T\tau \quad (m = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{66}$$

Мы видим таким образом, что ошибка $\gamma_m(x)$ стремится к нулю вместе с h. При доказательстве этого факта мы предполагали, что существует решение задачи $u(x, t)$ и что эта функция имеет непрерывную вплоть до $t = 0$ производную по t.

Указанное применение метода конечных разностей принадлежит Роте (Rothe E.) и изложено в его работе «Zweidimensionale paraboliche Randwertaufgaben als Grenzfall eindimensionaler Randwertaufgaben» (Math. Ann., 1929, **102**). В этой работе рассматривается более общее уравнение вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a(x, t)\frac{\partial u}{\partial t} + \pi(x, t, u),$$

и изложенный метод используется для доказательства существования решения.

Если мы имеем неоднородные предельные условия

$$u|_{x=0} = \omega_1(t); \qquad u|_{x=l} = \omega_2(t),$$

то, вводя вместо u новую искомую функцию v по формуле

$$v = u - (1-x)\,\omega_1(t) - x\omega_2(t),$$

мы приведем предельные условия к однородным. Указанная замена функции изменит свободный член $\pi(x, t)$, что не играет существенной роли.

Этот метод позволил исследовать и многомерные параболические уравнения, причем не только линейные, но и некоторые классы квазилинейных уравнений (см. работу О. А. Ладыженской: Первая краевая задача для квазилинейных параболических уравнений. — ДАН СССР, 1956, **107**, с. 636—639; Тр. Моск. матем. об-ва, 1958, **7**, с. 149—177, и ее книгу «Краевые задачи математической физики». — М.: Наука, 1972).

157. Метод Фурье для уравнения теплопроводности. Мы применяли часто раньше метод Фурье для решения предельных задач. Проведем обоснование этого метода, пользуясь теорией интегральных уравнений Рассмотрим, в случае трех независимых переменных, однородное уравнение

$$u_t = u_{xx} + u_{yy} \tag{67}$$

в области B с контуром l при следующих условиях.

$$u|_{t=0} = f(P) \qquad (P \text{ из } \bar{B}); \tag{68}$$

$$u|_l = 0. \tag{69}$$

Метод Фурье дает формально решение этой задачи в виде

$$u(P;\, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k t} v_k(P), \tag{70}$$

где λ_k, $v_k(P)$ — собственные значения и собственные функции уравнения

$$\Delta v + \lambda v = 0$$

при предельном условии

$$v|_l = 0 \tag{71}$$

и a_k — коэффициенты Фурье функции $f(P)$:

$$a_k = \iint\limits_B f(P)\, v_k(P)\, dS. \tag{72}$$

Положим, что функция $f(P)$ сама непрерывна, имеет в замкнутой области $\bar{B}$ непрерывные производные до второго порядка и равна нулю на l. При этом

$$f(P) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k(P) \tag{73}$$

и написанный ряд регулярно сходится в $\bar{B}$, т. е. ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} | a_k v_k(P) | \tag{74}$$

сходится равномерно в $\bar{B}$ (см. [127]).

Принимая во внимание, что $0 \leqslant e^{-\lambda_k t} \leqslant 1$ при $t \geqslant 0$, мы можем утверждать, что и ряд (70) сходится регулярно, если P принадлежит $\bar{B}$ и $t \geqslant 0$. Тем самым, его сумма $u(P, t)$ есть непрерывная функция P и t, если P принадлежит $\bar{B}$ и $t \geqslant 0$. Отсюда следует:

$$\lim_{t \to +0} u(P;\ t) = u(P;\ 0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k(P) = f(P),$$

т. е. функция $u(P;\ t)$, определяемая формулой (70), удовлетворяет начальному условию (68). Далее, каждая из функций $v_k(P)$ удовлетворяет предельному условию (69), а потому и функция $u(P; t)$ удовлетворяет этому условию при $t \geqslant 0$. Остается убедиться в том, что функция $u(P;\ t)$ внутри B и при $t > 0$ имеет непрерывную производную по t, непрерывные производные u_{xx}, u_{yy} и удовлетворяет уравнению (67).

Продифференцируем ряд (70) почленно по t:

$$-\sum_{k=1}^{\infty} a_k \lambda_k e^{-\lambda_k t} v_k(P), \tag{75}$$

и пусть α — произвольно выбранное положительное число. Принимая во внимание, что при всех достаточно больших k мы имеем $0 < \lambda_k e^{-\lambda_k \alpha} < 1$ и равномерную сходимость ряда (74), можно утверждать, что ряд (75) сходится регулярно, если P принадлежит $\bar{B}$ и $t \geqslant \alpha$. Совершенно аналогично доказывается, что и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \lambda_k^2 e^{-\lambda_k t} v_k(P),$$

полученный почленным дифференцированием ряда (75) по t, также сходится регулярно при указанных выше условиях. Отсюда следует, что $u(P;\ t)$ имеет непрерывные производные первого и второго порядка по t при $t > 0$ и P, принадлежащем $\bar{B}$, и для этих производных мы имеем

$$u_t(P;\ t) = -\sum_{k=1}^{\infty} a_k \lambda_k e^{-\lambda_k t} v_k(P); \tag{76$_1$}$$

$$u_{tt}(P;\ t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \lambda_k^2 e^{-\lambda_k t} v_k(P). \tag{76$_2$}$$

Аналогичное рассуждение применимо и для производных любого порядка по t.

Но мы имеем

$$v_k(P)=\lambda_k \iint\limits_B G(P;\,Q)\,v_k(Q)\,dS,$$

где $G(P;\,Q)$ — функция Грина оператора Лапласа, при предельном условии (71), и формулу (76_1) можно переписать в виде

$$u_t(P;\,t)=-\sum_{k=1}^{\infty}\iint\limits_B a_k\lambda_k^2 e^{-\lambda_k t}G(P;\,Q)\,v_k(Q)\,dS.$$

Принимая во внимание равномерную сходимость ряда (76_2) в $\bar{B}$ при $t>0$, можем переставить сумму и интеграл и получим

$$u_t(P;\,t)=-\iint\limits_B G(P;\,Q)\,u_{tt}(Q;\,t)\,dS, \tag{77}$$

и совершенно аналогично

$$u(P;\,t)=-\iint\limits_B G(P;\,Q)\,u_t(Q;\,t)\,dS. \tag{78}$$

Функция $u_{tt}(Q,\,t)$ непрерывна в $\bar{B}$ при $t>0$, и из (77) следует, что $u_t(P;\,t)$ имеет внутри B при $t>0$ непрерывные производные первого порядка по координатам $(x,\,y)$ точки P. После этого формула (78) показывает, что $u(P;\,t)$ имеет внутри B при $t>0$ непрерывные производные до второго порядка и удовлетворяет уравнению

$$\Delta u(P;\,t)=u_t(P;\,t),$$

что мы и хотели доказать

158. Неоднородное уравнение. Рассмотрим теперь неоднородное уравнение

$$u_t=u_{xx}+u_{yy}+\pi(x;\,y,\,t) \tag{79}$$

с однородными начальными и предельными условиями

$$\lim_{t\to+0} u=0; \tag{80}$$

$$u|_l=0. \tag{81}$$

Введем в рассмотрение коэффициенты Фурье свободного члена

$$b_k(t)=\iint\limits_B \pi(P;\,t)\,v_k(P)\,dS \tag{82}$$

и будем искать решение задачи в виде

$$u(P;\,t)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k(t)\,v_k(P). \tag{83}$$

Подставляя в уравнение (79) и принимая во внимание, что $\Delta v_k = -\lambda_k v_k$, получаем для коэффициентов $c_k(t)$ дифференциальное уравнение:

$$c'_k(t) = -\lambda_k c_k(t) + b_k(t),$$

откуда, принимая во внимание (80), т. е. $c_k(0)=0$, получим

$$c_k(t) = \int_0^t e^{\lambda_k(t'-t)} b_k(t')\,dt',$$

и подставляем это в (83):

$$u(P;\ t) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(P) \int_0^t e^{\lambda_k(t'-t)} b_k(t')\,dt'. \tag{84}$$

Оправдаем это решение при следующих предположениях о свободном члене: $\pi(P;\ t)$ имеет при всяком $t \geqslant 0$ внутри B непрерывные производные первого порядка по координатам точки P и ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k(t)\,v_k(P); \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t)\,\lambda_k v_k(P); \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t)\,\lambda_k^2 v_k(P) \tag{85}$$

регулярно сходятся, если P принадлежит замкнутой области $\overline{B}$ и t любому конечному промежутку $[0,\ T]$. Принимая во внимание регулярную сходимость первого из рядов (85) и тот факт, что $0 \leqslant e^{\lambda_k(t'-t)} \leqslant 1$ при $0 \leqslant t' \leqslant t$, можем утверждать, что ряд, стоящий в правой части формулы (84), равномерно сходится при указанных условиях для P и t. Его сумма $u(P,t)$ — непрерывная функция P и t при тех же условиях для P и t. Из вида правой части (84) непосредственно следует, что $u(P;\ t)$ удовлетворяет условиям (80) и (81).

Остается проверить, что функция $u(P;\ t)$, определяемая формулой (84), имеет внутри B и при $t>0$ соответствующие непрерывные производные и удовлетворяет уравнению (79). Дифференцируя почленно по t ряд, входящий в формулу (84), получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k(t)\,v_k(P) - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k v_k(P) \int_0^t e^{\lambda_k(t'-t)} b_k(t')\,dt'.$$

Принимая во внимание регулярную сходимость второго из рядов (85), мы можем утверждать, что ряд, стоящий в вычитаемом написанной разности, равномерно сходится при прежних условиях для P и t. Сумма ряда, стоящего в уменьшаемом, равна $\pi(P;t)$, ибо по условию этот ряд регулярно сходится [**IV**$_1$; **31**]. Таким образом, мы имеем

$$u_t(P;\ t)=\pi(P;\ t)-\sum_{k=1}^{\infty} v_k(P)\,\lambda_k\int_0^t e^{\lambda_k(t'-t)}b_k(t')\,dt', \qquad (86)$$

причем $u_t(P;\ t)$ непрерывна при указанных условиях для P и t.

Заменяя в этой формуле P на Q, умножая обе части на $G(P;\ Q)$ и интегрируя по B, получим, принимая во внимание интегральное уравнение для $v_k(P)$,

$$\iint_B G(P;\ Q)\,u_t(Q;\ t)\,dS=$$

$$=\iint_B G(P;\ Q)\,\pi(Q;\ t)\,dS-\sum_{k=1}^{\infty} v_k(P)\int_0^t e^{\lambda_k(t'-t)}b_k(t')\,dt',$$

причем сумма последнего ряда равна $u(P;\ t)$. Таким образом

$$u(P;\ t)=-\iint_B G(P;\ Q)\,u_t(Q;\ t)\,dS+\iint_B G(P;\ Q)\,\pi(Q;\ t)\,dS. \qquad (87)$$

Поскольку $\pi(Q;\ t)$ имеет внутри B непрерывные производные, можем утверждать, что последний интеграл имеет внутри B непрерывные производные до второго порядка по координатам точки P, и оператор Лапласа от этого интеграла равен $[-\pi(Q;\ t)]$.

Используем теперь регулярную сходимость третьего из рядов (85) и докажем, что $u(P;\ t)$ имеет внутри B непрерывные производные до второго порядка и удовлетворяет уравнению (79).

Обозначим

$$w(P;\ t)=-u_t(P;\ t)+\pi(P;\ t)=\sum_{k=1}^{\infty} v_k(P)\,\lambda_k\int_0^t e^{\lambda_k(t'-t)}b_k(t')\,dt'.$$

Принимая во внимание регулярную сходимость третьего из рядов (85), мы можем написанный равномерно сходящийся ряд дифференцировать почленно по t, после чего получим

$$w_t(P;\ t)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k b_k(t)\,v_k(P)-\sum_{k=1}^{\infty} v_k(P)\,\lambda_k^2\int_0^t e^{\lambda_k(t'-t)}b_k(t')\,dt',$$

причем написанные ряды равномерно сходятся. Заменяя в последней формуле P на Q, умножая обе части на $G(P;\ Q)$, интегрируя по Q и учитывая уравнение для $v_k(P)$, получим

$$\iint\limits_B G(P;\,Q)\,w_t(Q;\,t)\,dS =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t)\,v_k(P) - \sum_{k=1}^{\infty} v_k(P)\,\lambda_k \int\limits_0^t e^{\lambda_k(t'-t)} b_k(t')\,dt',$$

и, следовательно, принимая во внимание (86), получим

$$u_t(P;\,t) = \iint\limits_B G(P;\,Q)\,w_t(Q;\,t)\,dS,$$

откуда следует, что $u_t(P;\,Q)$ имеет внутри B непрерывные производные первого порядка. После этого формула (87) показывает, что $u(P;\,t)$ имеет внутри B непрерывные производные до второго порядка и удовлетворяет уравнению

$$\Delta u(P;\,t) = u_t(P;\,t) - \pi(P;\,t),$$

и тем самым формула (84) полностью оправдана.

Если говорить только об обобщенных решениях уравнения (79), то можно оправдать формулу и при меньших предположениях о свободном члене. Напомним определение обобщенного решения уравнения (79). Пусть D — цилиндр, о котором мы говорили в [**151**], и D_T его часть, ограниченная сверху плоскостью $t = T$. Функция $u(P;\,t)$ называется обобщенным решением уравнения, если для всякой функции $\sigma(P;\,t)$, имеющей внутри D_T непрерывные производные до второго порядка и равной нулю во всех точках, достаточно близких к границе D_T, имеет место формула

$$\iiint\limits_{D_T} u\,(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_t)\,dx\,dy\,dt = -\iiint\limits_{D_T} \pi\sigma\,dx\,dy\,dt. \tag{88}$$

Мы ограничимся обобщенными решениями класса $C(\bar{D}_T)$. Предположим, что первый из рядов (85) регулярно сходится, если P принадлежит $\bar{B}$ и t находится в конечном промежутке $[0,\,T]$. Тогда сумма этого ряда равна $\pi(P;\,t)$, и, как мы выше видели, ряд (84) сходится равномерно, так что u будет принадлежать $C(\bar{D}_T)$.

Обозначим через $\pi_n(P;\,t)$ отрезок первого из рядов (85)

$$\pi_n(P;\,t) = \sum_{k=1}^{n} b_k(t)\,v_k(P),$$

и через $u_n(P;\,t)$ — отрезок ряда (84):

$$u_n(P;\,t) = \sum_{k=1}^{n} v_k(P) \int\limits_0^t e^{\lambda_k(t'-t)} b_k(t')\,dt'.$$

Функция $u_n(P;\ t)$ удовлетворяет уравнению (79) со свободным членом $\pi_n(P;\ t)$. Таким образом, мы можем написать:

$$\iiint\limits_{D_T} u_n(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_t)\,dx\,dy\,dt = -\iiint\limits_{D_T} \pi_n\sigma\,dx\,dy\,dt.$$

Переходя к пределу при $n\to\infty$ и принимая во внимание, что $\pi_n(P;t)\to\pi(P;t)$ и $u_n(P;t)\to u(P;t)$ равномерно в $\bar{D}_T$, мы получим (88), т. е. функция $u(P,\ t)$, определяемая формулой (84), есть обобщенное решение уравнения (79). Непосредственно видно, кроме того, что эта сумма удовлетворяет условиям (80) и (81).

Если использовать тот факт, что непрерывное обобщенное решение однородного уравнения теплопроводности есть классическое решение этого уравнения [**62**], и теорему единственности решения предельной задачи уравнения теплопроводности, то, совершенно так же, как и для уравнения Пуассона, можно показать, что обобщенное решение неоднородного уравнения (79) при заданных начальных и предельном условиях — единственно.

159. Свойства решений уравнения теплопроводности. Рассмотрим уравнение

$$u_t - u_{xx} = 0. \tag{89}$$

Пусть имеется решение $u(x,\ t)$ этого уравнения, имеющее непрерывные производные u_x и u_t в некоторой точке M и ее окрестности. Из уравнения (89) следует, что при этом производная u_{xx} — непрерывна.

Окружим точку M достаточно малым прямоугольником $ABCD$, со сторонами, параллельными осям (рис. 15), так, чтобы в этом прямоугольнике существовало указанное выше решение $u(x,\ t)$. Выберем начало координат в точке A, и пусть l — длина AB. Обозначим через $\omega_1(t)$ и $\omega_2(t)$ — значения нашего решения u на сторонах AD и BC, и через $f(x)$ — его значения на стороне AB. Рассмотрим сначала тот случай, когда $f(x)\equiv 0$. Мы можем написать решение $u(x,\ t)$ согласно формуле (17) в виде

$$u(x,\ t) = \int\limits_0^t \frac{\varphi(\tau)}{2a\sqrt{\pi}\,(t-\tau)^{3/2}}\,x e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}\,d\tau + \\ + \int\limits_0^t \frac{\psi(\tau)}{2a\sqrt{\pi}\,(t-\tau)}\,(x-l)\,e^{-\frac{(x-l)^2}{4a^2(t-\tau)}}\,d\tau, \tag{90}$$

где непрерывные функции $\varphi(\tau)$ и $\psi(\tau)$ определяются из интегральных уравнений (18). При этом надо иметь в виду теорему единственности для уравнения (89).

Пусть точка $(x_0,\ t_0)$ находится внутри $ABCD$. Рассмотрим, например, первый из интегралов, входящих в правую часть формулы (90). Если мы заменим в нем x_0 на $x'+x''i$, где x' достаточно близко к x_0 и x'' достаточно близко к нулю, то вещественная часть $(x'+x''i)^2$ будет положительной, откуда видно, что упомянутый интеграл будет равномерно сходящимся на отрезке $[0, t]$ по отношению к параметру $x=x'+x''i$ при всех комплексных x, достаточно близких к x_0, и, с другой стороны, подынтегральная функция этого интеграла есть целая функция x при $0 \leqslant \tau < t$. Отсюда следует, что величина интеграла есть голоморфная функция x в окрестности всякой точки (x, t), находящейся внутри $ABCD$ [$\mathbf{III_2}$; **70**] и, в частности, точки M. То же можно утверждать и относительно второго из интегралов, входящих в правую часть формулы (90).

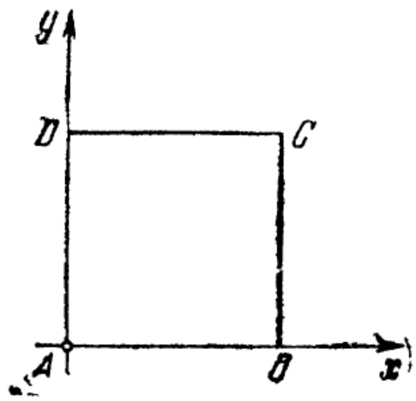

Рис. 15.

Таким образом, *решения уравнения* (89) *суть аналитические функции переменной* x.

Это утверждение не будет справедливым по отношению к переменной t. Действительно, если бы всякое решение уравнения (89) было аналитической функцией t, то значения функции на любой прямой, параллельной оси t и принадлежащей полуполосе, изображенной на рис. 15, вполне определялись бы, в силу принципа аналитического продолжения, теми значениями, которые имеет эта функция на отрезке упомянутой прямой, принадлежащей прямоугольнику $ABCD$. Но это не будет иметь места, так как значения u зависят, очевидно, от того, каким именно способом мы будем продолжать функции $\omega_1(t)$ и $\omega_2(t)$, заданные первоначально только на отрезках AD и BC прямых $x=0$ и $x=l$.

До сих пор мы предполагали, что $f(x_0) \equiv 0$ в промежутке $(0, l)$. Если это не так, то мы можем продолжить эту функцию на более широкий промежуток $[a, b]$ так, чтобы она была равна нулю на концах этого промежутка, и затем продолжить ее нулем вне этого промежутка. Составим разность

$$u - \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_a^b f(\xi)\, e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}}\, d\xi.$$

Эта разность имеет нулевые значения на отрезке AB, и к ней приложимы указанные выше рассуждения. Остается рассмотреть решение

$$u_0(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_a^b f(\xi)\, e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}}\, d\xi.$$

Применяя теорему об интеграле, зависящем от параметра [**III**$_2$; 70], мы видим, что $u_0(x, t)$ будет регулярной функцией (x, t) в окрестности любой точки, находящейся над осью $t = 0$, т. е. при $t > 0$. Отметим еще, что из формулы (90) непосредственно вытекает, что функция u имеет производные всех порядков по t при $0 < x < l$.

Можно дать оценку для производных от решения уравнения (89) по t. Пусть $u(x, t)$, аналитично по x, имеет производные всех порядков по t в окрестности $x = t = 0$ и нечетно по x. Мы будем иметь разложение в ряд Маклорена:

$$u = u_1(t)\,x + \frac{u_3(t)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{u_{2n+1}(t)}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \ldots, \tag{91}$$

где

$$u_{2n+1}(t) = \left.\frac{\partial^{2n+1}u}{\partial x^{2n+1}}\right|_{x=0} \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Пользуясь уравнением (89), можем написать:

$$u_{2n+1}(t) = \frac{\partial^n}{\partial t^n}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0} = \frac{d^n u_1(t)}{dt^n}. \tag{92}$$

Если ρ — положительное число, меньшее радиуса сходимости ряда (91), то мы имеем неравенство [**III**$_2$; 84]

$$\left|\frac{u^{2n+1}(t)}{(2n+1)!}\right| \leqslant \frac{M}{\rho^n},$$

где M — некоторое положительное число. Из (92) вытекает следующая оценка для производных функции $u_1(t)$:

$$\left|\frac{d^n u_1(t)}{dt^n}\right| \leqslant \frac{M\,(2n+1)!}{\rho^n}.$$

Эта оценка не гарантирует аналитичности функции $u_1(t)$. Если бы мы имели более сильную оценку:

$$\left|\frac{d^n u_1(t)}{dt^n}\right| \leqslant \frac{M\cdot n!}{\rho^n},$$

то ряд Маклорена функции $u_1(t)$ был бы сходящимся, и эта функция была бы регулярной в окрестности начала.

160. Обобщенные потенциалы простого и двойного слоя в одномерном случае. В [152] мы изложили решение предельной задачи в полуполосе, ограниченной снизу характеристикой $t = 0$ уравнения (5), а сбоку прямыми $x = 0$ и $x = l$. Рассмотрим теперь область на плоскости (x, t), которая ограничена снизу характеристикой $t=b$, а сбоку — двумя линиями l_i с явным уравнением (рис. 16):

$$x=\sigma_1(t); \quad x=\sigma_2(t) \qquad [\sigma_1(t)<\sigma_2(t)], \tag{93}$$

причем $\sigma_i(t)$ имеют непрерывные производные при $t \geqslant b$. Для решения задачи в такой области нам надо построить обобщенные потенциалы простого и двойного слоя, которые при $\sigma_i(t)=$ $=\text{const}$ обращаются в потенциалы, указанные в [152]. Эти обобщенные потенциалы имеют вид

$$u_i(x,\ t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_b^t \frac{\varphi_i(t')}{\sqrt{t-t'}}e^{-\frac{|\sigma_i(t')-x|^2}{4a^2(t-t')}}dt', \tag{94}$$

$$v_i(x,\ t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_b^t \frac{\psi_i(t')}{(t-t')^{3/2}}[x-\sigma_i(t')]\,e^{-\frac{|\sigma_i(t')-x|^2}{4a^2(t-t')}}dt', \tag{95}$$

где $\varphi_i(t')$ и $\psi_i(t')$ — непрерывные функции.

Функции $u_i(x,\ t)$ и $v_i(x,\ t)$ имеют непрерывные производные и удовлетворяют уравнению (5) везде вне линии l_i. Оба потенциала имеют смысл и в том случае, когда точка $(x,\ t)$ находится на линии l_i. Для потенциала $u_i(x, t)$ это непосредственно очевидно, так как подынтегральная функция имеет оценку $C(t-t')^{-1/2}$, где C — постоянная. Для потенциала $v_i(x,\ t)$, если точка (x, t) находится на l_i, мы можем написать:

$$\frac{|x-\sigma_i(t')|}{(t-t')^{3/2}}=\frac{|\sigma_i(t)-\sigma_i(t')|}{(t-t')^{3/2}}=$$
$$=\frac{\sigma'(t_0)}{(t-t')^{1/2}} \qquad (t'<t_0<t),$$

откуда и следует сходимость интеграла (95).

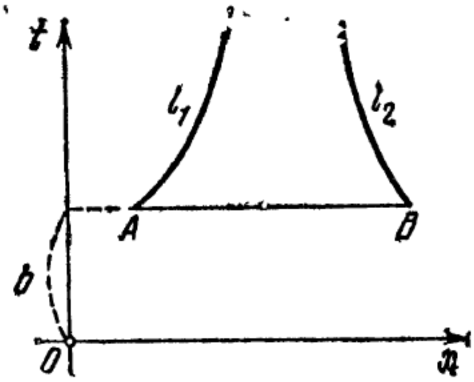

Рис. 16.

Величина интеграла (94) по малому участку: $t-\delta \leqslant t' \leqslant t$ стремится к нулю при $\delta \to 0$, при любом положении точки $(x,\ t)$, и отсюда непосредственно следует, что $u_i(x,\ t)$ непрерывна вплоть до l_i. Для интеграла (95) существуют различные пределы при стремлении $(x,\ t)$ к точке $(x_0,\ t_0)$, лежащей на l_i, а именно:

$$\lim_{(x,\ t)\to(x_0,\ t_0)} v_i(x,\ t)=\pm\psi_i(t_0)+v_i(x_0,\ t_0), \tag{96}$$

где $v_i(x_0,\ t_0)$ — значение интеграла (95) в самой точке $(x_0,\ t_0)$, знак $(+)$ надо брать, если $(x, t)\to(x_0, t_0)$ справа от l_i, и знак

(—), если $(x, t) \to (x_0, t_0)$ слева от l_i. Если $\sigma_i(t) = \text{const}$, то очевидно, что $v_i(x_0, t_0) = 0$, и мы получаем результат из [152]. При доказательстве формулы (96) мы не будем писать знак i.

Рассмотрим интеграл (95) при $\varphi(t') = 1$:

$$v_0(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_b^t \frac{1}{(t-t')^{3/2}} [x - \sigma(t')] e^{-\frac{|\sigma(t') - x|^2}{4a^2(t-t')}} dt' \tag{97}$$

и функцию

$$w_0(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_b^t \frac{-2\sigma'(t')}{\sqrt{t-t'}} e^{-\frac{|\sigma(t') - x|^2}{4a^2(t-t')}} dt'. \tag{98}$$

Вводя вместо t' новую переменную интегрирования

$$z = \frac{x - \sigma(t')}{2a\sqrt{t-t'}},$$

получим

$$v_0(x, t) + w_0(x, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\frac{x-\sigma(b)}{2a\sqrt{t-b}}}^{\pm\infty} e^{-z^2} dz, \tag{99}$$

причем в верхнем пределе надо брать знак (+), если $x - \sigma(t) > 0$, и знак (—), если $x - \sigma(t) < 0$. Если точка (x_0, t_0) лежит на l, т. е. $x_0 - \sigma(t_0) = 0$, то

$$v_0(x_0, t_0) + w_0(x_0, t_0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\frac{x_0-\sigma(b)}{2\sqrt{t_0-b}}}^{0} e^{-z^2} dz. \tag{100}$$

Из определения $w_0(x, t)$ непосредственно следует, как и выше, что $w_0(x, t)$ непрерывна вплоть до l. Из (99) следует

$$\lim_{(x, t) \to (x_0, t_0)} [v_0(x, t) + w_0(x, t)] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\frac{x_0-\sigma(b)}{2a\sqrt{t_0-b}}}^{\pm\infty} e^{-z^2} dz,$$

и, вычитая почленно формулу (100) из последней формулы, получим

$$\lim_{(x, t) \to (x_0, t_0)} v_0(x, t) = v_0(x_0, t_0) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pm\infty} e^{-z^2} dz,$$

т. е.

$$\lim_{(x, t) \to (x_0, t_0)} v_0(x, t) = v_0(x_0, t_0) \pm 1,$$

и мы получили формулу (96) при $\psi(t') \equiv 1$.

Переходим к общему случаю. Перепишем выражение $v(x, t)$ в виде

$$v(x, t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_b^t [\psi(t')-\psi(t_0)]\frac{x-\sigma(t')}{(t-t')^{3/2}}e^{-\frac{[\sigma(t')-x]^2}{4a^2(t-t')}}\,dt'+$$
$$+\frac{\psi(t_0)}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_b^t \frac{1}{(t-t')^{3/2}}[x-\sigma(t')]\,e^{-\frac{[\sigma(t')-x]^2}{4a^2(t-t')}}\,dt'. \qquad (101)$$

Совершенно так же, как и в [95], достаточно показать, что первое слагаемое сохраняет непрерывность, когда точка (x, t) пересекает l в точке (x_0, t_0). Пусть ε — заданное положительное число. Выберем положительное δ настолько малым, чтобы имело место неравенство

$$|\psi(t')-\psi(t_0)|\leqslant\varepsilon \quad \text{при} \quad |t'-t_0|\leqslant\delta,$$

и разобьем промежуток интегрирования $b\leqslant t'\leqslant t$ на части $b\leqslant t'\leqslant t_0-\delta$ и $t_0-\delta\leqslant t'\leqslant t$. Функция, которая выражается интегралом по первому из этих промежутков, непрерывна в точке (x_0, t_0), и достаточно показать, что интеграл

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_{t_0-\delta}^t [\psi(t')-\psi(t_0)]\frac{x-\sigma(t')}{(t-t')^{3/2}}e^{-\frac{[\sigma(t')-x]^2}{4a^2(t-t')}}\,dt'$$

достаточно мал при всех положениях точки (x, t), если она достаточно близка к точке (x_0, t_0) или совпадает с ней. Указанный интеграл по абсолютной величине не превосходит

$$\frac{\varepsilon}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_{t_0-\delta}^t \frac{|x-\sigma(t')|}{(t-t')^{3/2}}e^{-\frac{[\sigma(t')-x]^2}{4a^2(t-t')}}\,dt'.$$

Предположим, что разность $x-\sigma(t')$ меняет знак не больше чем k раз, где k — определенное целое положительное число, при $t_0-\delta\leqslant t'\leqslant t$ и произвольном положении (x, t) в некоторой окрестности (x_0, t_0). При этом интеграл

$$\int\limits_{t_0-\delta}^t \frac{|x-\sigma(t')|}{(t-t')^{3/2}}e^{-\frac{[\sigma(t')-x]^2}{4a^2(t-t')}}\,dt'$$

представится как сумма не более чем k интегралов вида

$$\pm\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{x-\sigma(t')}{(t-t')^{3/2}}e^{-\frac{[\sigma(t')-x]^2}{4a^2(t-t')}}\,dt' \qquad (t_0-\delta\leqslant t_i\leqslant t_{i+1}\leqslant t).$$

которые отличаются от интегралов

$$\pm 4a \int\limits_{\frac{x-\sigma(t_i)}{2a\sqrt{t-t_i}}}^{\frac{x-\sigma(t_{i+1})}{2a\sqrt{t-t_{i+1}}}} e^{-z^2}\,dz \quad \text{на величину} \quad \pm \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{-2\sigma'(t')}{\sqrt{t-t'}} e^{-\frac{[\sigma(t')-x]^2}{4a^2(t-t')}}\,dt',$$

которая по абсолютной величине не превышает некоторой постоянной. Таким образом, упомянутый выше интеграл остается ограниченным, когда (x, t) находится в некоторой окрестности (x_0, t_0). Этот интеграл умножается на ε, и тем самым доказательство того, что первое слагаемое правой части формулы (101) непрерывно, когда (x, t) пересекает l в точке (x_0, t_0), доводится до конца совершенно так же, как и в [95]. Пользуясь указанными выше потенциалами, можно привести предельную задачу для области, указанной на рис. 16, к интегральному уравнению, как это мы делали в [152]. Положим, что условия таковы: $u=0$ на характеристике $t=b$ и $u=\omega_i(t)$ на l_i. Будем искать решение в виде

$$u(x, t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{b}^{t}\frac{\psi_i(t')}{(t-t')^{3/2}}[x-\sigma_i(t')]\,e^{-\frac{[\sigma_i(t')-x]^2}{4a^2(t-t')}}\,dt'. \tag{102}$$

При этом для всяких $\psi_i(t')$ удовлетворяется уравнение (5) и предельное условие на характеристике $t=b$, а из предельных условий на l_i получаем систему интегральных уравнений Вольтерра для $\psi_i(t)$:

$$\left.\begin{aligned}
\omega_1(t)&=\psi_1(t)+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{b}^{t}\frac{\psi_i(t')}{(t-t')^{3/2}}[\sigma_1(t)-\sigma_i(t')]\,e^{-\frac{[\sigma_i(t')-\sigma_1(t)]^2}{4a^2(t-t')}}\,dt',\\
\omega_2(t)&=-\psi_2(t)+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{b}\frac{\psi_i(t')}{(t-t')^{3/2}}[\sigma_2(t)-\sigma_i(t')]\,e^{-\frac{[\sigma_i(t')-\sigma_2(t)]^2}{4a^2(t-t')}}\,dt'.
\end{aligned}\right\} \tag{103}$$

Рассмотрим интегралы, входящие в первое уравнение:

$$\int\limits_{b}^{t}\frac{\psi_1(t')}{(t-t')^{3/2}}[\sigma_1(t)-\sigma_1(t')]\,e^{-\frac{[\sigma_1(t')-\sigma_1(t)]^2}{4a^2(t-t')}}\,dt', \tag{104}$$

$$\int\limits_{b}^{t}\frac{\psi_2(t')}{(t-t')^{3/2}}[\sigma_1(t)-\sigma_2(t')]\,e^{-\frac{[\sigma_2(t')-\sigma_1(t)]}{4a^2(t-t')}}\,dt'. \tag{105}$$

В интеграле (104) полярность при $t'=t$ снижается за счет числителя отношения

$$\frac{\sigma_1(t)-\sigma_1(t')}{(t-t')^{3/2}},$$

совершенно так же, как это было отмечено нами выше. Во втором интеграле показатель у e при $t'\to t$ стремится к $(-\infty)$, и это полностью снимает полярность. Аналогично рассматриваются интегралы и для второго из уравнений (103). Таким образом, система (103) имеет единственное решение и может быть решена методом последовательных приближений.

Можно искать решение указанной выше предельной задачи и в виде суммы двух потенциалов простого слоя:

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\sum_{j=1}^{2}\int_b^t\frac{\varphi_j(t')}{\sqrt{t-t'}}e^{-\frac{[\sigma_j(t')-x]^2}{4a^2(t-t')}}dt'. \tag{106}$$

При этом мы приходим к системе интегральных уравнений первого рода:

$$\left.\begin{aligned}\omega_1(t)&=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\sum_{j=1}^{2}\int_b^t\frac{\varphi_j(t')}{\sqrt{t-t'}}e^{-\frac{[\sigma_j(t')-\sigma_1(t)]^2}{4a^2(t-t')}}dt',\\ \omega_2(t)&=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\sum_{j=1}^{2}\int_b^t\frac{\varphi_j(t')}{\sqrt{t-t'}}e^{-\frac{[\sigma_j(t')-\sigma_2(t)]^2}{4a^2(t-t')}}dt'.\end{aligned}\right\} \tag{107}$$

Умножим обе части на $(y-t)^{-\frac{1}{2}}$ и проинтегрируем по t от $t=b$ до $t=y$:

$$\left.\begin{aligned}f_1(y)&=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\sum_{j=1}^{2}\int_b^y\varphi_j(t')K_{1j}(t',y)\,dt',\\ f_2(y)&=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\sum_{j=1}^{2}\int_b^y\varphi_j(t')K_{2j}(t',y)\,dt',\end{aligned}\right\} \tag{108}$$

где

$$\left.\begin{aligned}f_i(y)&=\int_b^y\frac{\omega_i(t)}{\sqrt{y-t}}dt,\\ K_{ij}(t',y)&=\int_{t'}^y\frac{1}{\sqrt{(y-t)(t-t')}}e^{-\frac{[\sigma_j(t')-\sigma_i(t)]^2}{4a^2(t-t')}}dt,\end{aligned}\right\} \tag{109}$$

причем справа мы изменили порядок интегрирования и воспользовались формулой Дирихле [II; 82]. Система (108) эквивалентна (107) (ср. [II, 82]). Мы имеем, очевидно,

$$\lim_{t \to t'+0} e^{-\frac{[\sigma_j(t')-\sigma_i(t)]^2}{4a^2(t-t')}} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad i \neq j, \\ 1 & \text{при} \quad i = j, \end{cases}$$

и, принимая во внимание формулу [II; 79]

$$\int_{t'}^{y} \frac{dt}{\sqrt{(y-t)(t-t')}} = \pi,$$

мы получаем

$$K_{11}(y, y) = K_{22}(y, y) = \pi; \qquad K_{12}(y, y) = K_{21}(y, y) = 0.$$

Дифференцируем систему (108) по y, причем мы считаем, что $\omega_i(t)$ имеют непрерывные производные, и при этом функции $f_i(y)$ имеют также непрерывные производные [II; 83]:

$$\left.\begin{aligned} f_1'(y) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2a}\varphi_1(y) + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\sum_{j=1}^{2}\int_{b}^{y}\varphi_j(t')\frac{\partial K_{1j}(t', y)}{\partial y}\,dt'; \\ f_2'(y) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2a}\varphi_2(y) + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\sum_{j=1}^{2}\int_{b}^{y}\varphi_j(t')\frac{\partial K_{2j}(t', y)}{\partial y}\,dt'. \end{aligned}\right\} \tag{110}$$

Для вычисления производных представим $K_{ij}(t', y)$ в виде

$$K_{ij}(t', y) = \int_{t'}^{y} e^{-\frac{[\sigma_j(t')-\sigma_i(t)]^2}{4a^2(t-t')}}\, d\left[\arcsin\left(2\frac{t-t'}{y-t'}-1\right)\right].$$

Интегрируя по частям и дифференцируя по y, получим

$$\frac{\partial K_{ij}(t', y)}{\partial y} = -\frac{2}{(y-t')}\int_{t'}^{y}\frac{1}{\sqrt{(y-t)(t-t')}}\,e^{-\frac{[\sigma_j(t')-\sigma_i(t)]^2}{4a^2(t-t')}} \times$$
$$\times\left\{[\sigma_i(t)-\sigma_j(t')]\,\sigma_i'(t) - \frac{[\sigma_j(t')-\sigma_i(t)]^2}{2(t-t')}\right\}dt.$$

При $i \neq j$ сходимость интеграла на пределе $t = t'$ обеспечивается показательной функцией, а при $i = j$ дробь, стоящая в фигурных скобках, не имеет полярности, и вся фигурная скобка стремится к нулю, как $(t-t')$. Учитывая все это и производя элементарные оценки подынтегральной функции при $i \neq j$ и $i = j$, нетрудно убедиться, что интегралы мажорируются функцией

$$C\int_{t'}^{y}\frac{dt}{\sqrt{y-t}},$$

где C — некоторая постоянная. Отсюда видно, что

$$\frac{\partial K_{ij}(t', y)}{\partial y} = \frac{L_{ij}(t', y)}{\sqrt{y-t'}},$$

где $L_{ij}(t', y)$ — непрерывные функции (t', y), и к системе (110) применим метод последовательных приближений [IV$_1$; 50].

161. Суб- и суперпараболические функции. При решении предельной задачи для уравнения теплопроводности можно применить метод, аналогичный методу верхних и нижних функций, который был нами изложен в [119]. Мы рассмотрим на плоскости (x, t) область B, ограниченную сверху и снизу характеристиками $t = 0$ и $t = b$, а слева и справа линиями, имеющими уравнения (93), причем мы не делаем пока никаких предположений о свойствах функций $\sigma_l(t)$, кроме того, что это однозначные непрерывные функции и $\sigma_1(t) < \sigma_2(t)$. При определении суб- и суперпараболических функций мы должны выбрать какую-либо основную область, для которой умеем решать предельную задачу для уравнения

$$u_t - u_{xx} = 0 \tag{111}$$

при любых непрерывных предельных условиях. Для уравнения Лапласа это был круг. В качестве такой области для уравнения (111) мы выберем, например, равносторонний треугольник β, основание которого параллельно оси $t = 0$, а боковые стороны направлены в сторону возрастающего t. Решение предельной задачи $u(x, t)$ для такого треугольника может быть получено по способу, указанному в [160], и оно единственно. Это решение достигает своего наибольшего и наименьшего значения на сторонах треугольника [II; 219]. Непрерывная в замкнутой области $\bar{B}$ функция $\varphi(M) = \varphi(x, t)$ называется субпараболической, если ее значение $\varphi(M_0)$ в любой точке M_0, лежащей внутри B, не больше, чем значение в этой точке того решения уравнения (111) в любом достаточно малом треугольнике β, содержащем M_0 внутри себя, которое имеет на сторонах β те же значения, что и $\varphi(M)$. Суперпараболическая функция $\psi(M) = \psi(x, t)$ определяется аналогичным образом, но только $\psi(M_0)$ должно быть не меньше значений решении уравнения (111) в треугольниках β. Наименьшее значение суперпараболической функции и наибольшее субпараболической достигаются на границе B.

Нетрудно видеть, что *если $\psi(x, t)$ имеет внутри B непрерывные производные ψ_t, ψ_x, ψ_{xx} и $\psi_t - \psi_{xx} \geqslant 0$ внутри B, то $\psi(x, t)$ — суперпараболическая функция.* Действительно, пусть u — функция, удовлетворяющая уравнению (111) и совпадающая на сторонах β с ψ. При этом разность $w = \psi - u$ равна нулю на сторонах β и $w_t - w_{xx} \geqslant 0$ внутри β. Но при этом функция w должна достигать наименьшего значения на границе β [151], где она равна нулю, т. е. $w \geqslant 0$ во всем треугольнике β, т. е. $\psi \geqslant u$ в β, что и требовалось доказать.

Аналогичным образом, если $\varphi_t - \varphi_{xx} \leqslant 0$ внутри B, то φ — субпараболическая функция. Всякое решение уравнения (111) есть одновременно и суб- и суперпараболическая функция. Совершенно так же, как и в [118], можно доказать, что если $f_1(M), \ldots, f_m(M)$ — суперпараболические функции, то и $\psi(M) = \min[f_1(M), \ldots, f_m(M)]$ — суперпараболическая функция. Обозначим через $f_\beta(M)$ функцию, которая совпадает с $f(M)$ вне треугольника β и на его сторонах и равна внутри β решению уравнения (111) со значениями на контуре β, равными $f(M)$. Как и в [118], можно доказать, что если $f(M)$ — суперпараболическая функция, то то же можно утверждать и относительно $f_\beta(M)$, причем $f_\beta(M) \leqslant f(M)$ в B.

Предельные значения в B задаются на нижнем основании $t = 0$ и на боковых сторонах l_l. Обозначим эту часть контура B через l'. Определение верхних и нижних функций такое же, что и для уравнения Лапласа. В частности, верхней функцией называется всякая суперпараболическая функция, которая на l' имеет значения $\geqslant$ заданных предельных значений.

Затем внутри B определяется функция $u(x, t)$ как точная нижняя граница значений всех верхних функций. Можно показать, что эта функция удовлетворяет уравнению (111) (ср. [119]). Она является обобщенным решением указанной выше предельной задачи для уравнения (111). Исследование поведения этой функции $u(x, t)$ при приближении к l' можно найти в работе И. Г. Петровского «О первой предельной задаче для уравнения теплопроводности» (Comp. Math., 1935, 1, № 3).

162. Параболические уравнения общего вида. Энергетическое неравенство. Уравнение теплопроводности, рассмотренное нами в предыдущих пунктах, является простейшим представителем уравнений параболического типа. Канонический вид параболических уравнений с переменными коэффициентами:

$$u_t - \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x, t)\, u_{x_i x_k} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x, t)\, u_{x_i} + c(x, t)\, u = f(x, t), \quad (112)$$

причем $a_{ik} = a_{ki}$, и квадратичная форма $\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x, t)\,\xi_i \xi_k$ должна быть положительно определенной в области D изменения аргументов (x, t), $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Переменные x_i называются пространственными, а переменная t — временной. Для таких уравнений корректно разрешимы задача Коши и различные начально-краевые (предельные) задачи в сторону возрастания t *). Задача Коши для (112) состоит в определении решений $u(x, t)$ уравнения (112) в полупространстве

$$\Pi^+ = \{(x, t)\colon\ x \in R^n,\ t \geqslant t_0\},$$

удовлетворяющих начальному условию $u|_{t=t_0} = \varphi(x)$. Начально-краевые задачи в области B пространства R^n суть задачи на определение решений уравнения (112) в цилиндрической области $D = B \times (t_0, T)$ пространства $R^{n+1} = R^n \times R^1$ (т. е. для $x \in B$, $t \in (t_0, T)$), удовлетворяющих начальному условию

$$u(x, t)|_{t=t_0} = \varphi(x), \qquad x \in B,$$

и одному из классических краевых (предельных) условий. первому

$$u(x, t)|_{x \in S} = \psi(x, t), \qquad t \in [t_0, T],$$

второму

$$P(u(x, t))|_{x \in S} \equiv \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_k} \cos(n, x_i)|_{x \in S} = \psi(x, t),$$
$$t \in [t_0, T]$$

или третьему

$$(P(u(x, t)) + \sigma(x, t)\, u(x, t))|_{x \in S} = \psi(x, t), \qquad t \in [t_0, T].$$

Здесь S — граница области B, n — единичный вектор внешней нормали к S, а φ, ψ и σ — известные функции, заданные на B, $S \times [t_0, T]$ и $S \times [t_0, T]$ соответственно.

В предыдущих пунктах данного параграфа мы рассмотрели задачу Коши и первую начально-краевую задачу (причем по-

*) Случай, когда в уравнении (112) перед первой суммой стоит знак плюс, сводится к рассматриваемому нами случаю с помощью замены t на $\tau = -t$.

следнюю в более общей постановке, когда граница области B меняется со временем) применительно к уравнению теплопроводности. Эти рассмотрения обобщены и на случай уравнений (112), а также на широкий класс систем параболического типа. С имеющимися на данное время результатами по параболическим уравнениям и системам можно познакомиться по монографиям О А Ладыженской, В. А. Солонникова, Н. Н. Уральцевой «Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа», (М : Наука, 1967) и С. Д. Эйдельмана «Параболические системы» (М.: Наука, 1964), а также по работам В. А. Солонникова «О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида» (Тр. МИАН СССР, 1965, 83) и др. Мы изложим лишь некоторые из результатов О. А Ладыженской, установленные ею в начале 50-х годов.

Начнем с вывода энергетического неравенства для первой начально-краевой задачи. Из этого неравенства следует, что эта задача поставлена корректно. Вместо (112) рассмотрим уравнение

$$M(u)=u_t-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}(x,\ t)\,u_{x_k}\right)+b_i(x,\ t)\,u_{x_i}+c(x,\ t)\,u=f(x,\ t), \tag{113}$$

где по повторяющимся индексам подразумевается суммирование от 1 до n. Если $a_{ik}(x,\ t)$ дифференцируемы по x_i, то уравнение (113) может быть записано в виде (112) и наоборот. Для наших целей форма (113) предпочтительнее. Предположим, что уравнение (113) задано в области $D_T=B\times(0,\ T)\subset R^{n+1}$, и его коэффициенты удовлетворяют в D_T условиям

$$\nu\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\leqslant a_{ik}(x,\ t)\,\xi_i\xi_k\leqslant\mu\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2, \tag{114}$$

$$\left|\frac{\partial a_{ik}(x,\ t)}{\partial x_k}\right|\leqslant\mu_1, \tag{115}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2(x,\ t)\right)^{1/2},\qquad |c(x,\ t)|\leqslant\mu_2, \tag{116}$$

где ν, μ и μ_i — какие-либо положительные постоянные. Пусть $u(x,\ t)$ удовлетворяет (в D_T) уравнению (113) и начально-краевым условиям

$$u\,|_{t=0}=\varphi(x) \tag{117}$$

и

$$u\,|_{S_T}=0,\qquad S_T=S\times[0,\ T]. \tag{118}$$

Для дальнейшего нет необходимости считать функцию $u(x,\ t)$ гладкой. Достаточно потребовать, чтобы она принадлежала $L_2(D_T)$ и имела обобщенные производные u_t, u_{x_i}, $u_{x_ix_k}$ из

$L_2(D_T)$. Для таких функций имеет смысл говорить, что они удовлетворяют условиям (117), (118) (см. об этом [V; гл. IV]), и для них справедливы все проводимые ниже рассуждения. Уравнению (113) такие решения удовлетворяют для почти всех (в смысле меры Лебега) точек (x, t) из D_T. Относительно функций $f(x, t)$ и $\varphi(x)$ достаточно предположить, что $f \in L_2(D_T)$, а $\varphi \in L_2(B)$. Производные $\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_l}$ тоже можно считать обобщенными, причем постоянные μ и μ_1 не будут входить в проводимые ниже оценки.

Читатель, незнакомый с теорией обобщенных производных, может предполагать, что все входящие в наше рассмотрение производные непрерывны в $\bar{D}_T$.

Из (113) следует:

$$\int\limits_{B(t)} M(u)\, u\, dx = \int\limits_{B(t)} fu\, dx, \tag{119}$$

где $B(t_1)$ — сечение области D плоскостью $t = t_1$. Преобразуем левую часть этого равенства, используя формулу интегрирования по частям и условие (118), к виду

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int\limits_{B(t)} u^2\, dx + \int\limits_{B(t)} \left(a_{ik} u_{x_k} u_{x_l} + b_l u_{x_l} u + cu^2\right) dx. \tag{120}$$

Подставим это выражение в (119) и, воспользовавшись условиями (114)—(116), произведем следующие преобразования и оценки:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int\limits_{B(t)} u^2\, dx + \nu \int\limits_{B(t)} u_x^2\, dx \leqslant - \int\limits_{B(t)} \left(b_l u_{x_l} u + cu^2\right) dx +$$
$$+ \int\limits_{B(t)} fu\, dx \leqslant \left(\int\limits_{B(t)} \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2\, dx\right)^{1/2} \left(\int\limits_{B(t)} \sum_{i=1}^{n} b_i^2 u^2\, dx\right)^{1/2} +$$
$$+ \mu_2 \int\limits_{B(t)} u^2\, dx + \left(\int\limits_{B(t)} f^2\, dx\right)^{1/2} \left(\int\limits_{B(t)} u^2\, dx\right)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant \mu_2 \left(\int\limits_{B(t)} u_x^2\, dx\right)^{1/2} \left(\int\limits_{B(t)} u^2\, dx\right)^{1/2} + \mu_2 \int\limits_{B(t)} u^2\, dx +$$
$$+ \left(\int\limits_{B(t)} f^2\, dx\right)^{1/2} \left(\int\limits_{B(t)} u^2\, dx\right)^{1/2} \leqslant \frac{\nu}{2} \int\limits_{B(t)} u_x^2\, dx +$$
$$+ \left(\frac{\mu_2^2}{2\nu} + \mu_2 + \frac{1}{2}\right) \int\limits_{B(t)} u^2\, dx + \frac{1}{2} \int\limits_{B(t)} f^2\, dx. \tag{121}$$

При этом мы использовали неравенство Коши — Буняковского и неравенство Коши в форме: $|ab|\leqslant\frac{\nu}{2}a^2+\frac{1}{2\nu}b^2$, а также сокращенное обозначение $u_x^2=\sum_{i=1}^{n}u_{x_i}^2$. Из (121) следует:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{B(t)}u^2\,dx+\nu\int\limits_{B(t)}u_x^2\,dx\leqslant C_1\int\limits_{B(t)}u^2\,dx+\int\limits_{B(t)}f^2\,dx, \tag{122}$$

где $C_1=\frac{\mu_2^2}{\nu}+2\mu_2+1$. Воспользуемся теперь леммой из [56]. Для этого выбросим из (122) член $\nu\int\limits_{B(t)}u_x^2\,dx$. Тогда указанная лемма гарантирует для $w(t)=\int\limits_{B(t)}u^2\,dx$ оценку

$$\int\limits_{B(t)}u^2\,dx\leqslant e^{C_1t}\int\limits_{B(0)}u^2\,dx+\int\limits_0^t e^{C_1(t-\tau)}\,d\tau\int\limits_{B(\tau)}f^2(x,\tau)\,dx\equiv y(t).$$

Подставляя ее в (122), получим

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{B(t)}u^2\,dx+\nu\int\limits_{B(t)}u_x^2\,dx\leqslant C_1y(t)+\int\limits_{B(t)}f^2\,dx. \tag{123}$$

Пусть $D_t=B\times(0,t)$. Проинтегрируем неравенство (123) по t от 0 до t. В результате элементарных вычислений и оценок получим

$$\int\limits_{B(t)}u^2\,dx+\nu\int\limits_{D_t}u_x^2\,dx\,dt\leqslant e^{C_1t}\left[\int\limits_B\varphi^2\,dx+\int\limits_{D_t}f^2\,dx\,dt\right],\qquad t\in[0,T]. \tag{124}$$

Это и есть желаемое *энергетическое неравенство* для решений u задачи (113), (117), (118). Если u есть обобщенное решение, обладающее лишь свойствами, описанными на странице 511, то соотношения (122) и (123) справедливы для него не для всех t из $[0, T]$, а для почти всех (в смысле Лебега) t из $[0, T]$. Неравенство же (124) выполняется для него при всех $t\in[0, T]$. В правой части его стоят известные нам величины. Через них оцениваются для u интегралы, стоящие в левой части (124). Из этого неравенства следует такой важный вывод для задачи (113), (117), (118):

Теорема. *Задача* (113), (117), (118) *при выполнении условий* (114)—(116) *может иметь не более одного обобщенного решения u, принадлежащего $L_2(D_T)$ вместе со своими обобщенными производными u_t, u_{x_i}, $u_{x_ix_k}$.*

Действительно, пусть указанная задача имеет два обобщенных решения u' и u'' указанного класса. Тогда их разность $u = u' - u''$ есть такое же обобщенное решение той же задачи, но с $f(x, t) \equiv 0$ и $\varphi(x) \equiv 0$. Следовательно, для нее справедливо неравенство (124), в котором f и φ положены равными нулю. Но тогда и $\int\limits_B u^2(x, t)\,dx = 0$ при всех $t \in [0, T]$, т. е. u' и u'' совпадают для почти всех (x, t) из D_T. (Заметим, что наш вывод справедлив также для случая, когда u' и u'' удовлетворяют неоднородному краевому условию: $u'(x, t)|_{x \in S} = u''(x, t)|_{x \in S} = \psi(x, t)$, $t \in (0, T)$.)

Из неравенства (124) следует также непрерывная зависимость решений рассматриваемой задачи (в предположении, что они существуют!) от f и φ в следующем смысле:

$$\int\limits_{B(t)} (u_1 - u_2)^2\,dx + \nu \int\limits_{D_t} \sum_{i=1}^{n} (u_{1x_i} - u_{2x_i})^2\,dx\,dt \leqslant$$
$$\leqslant e^{C_1 t} \left\{ \int\limits_B (\varphi_1 - \varphi_2)^2\,dx + \int\limits_{D_t} (f_1 - f_2)^2\,dx\,dt \right\}. \qquad (125)$$

Здесь u_i, $i = 1, 2$,— суть обобщенные решения задачи (113), (117), (118), отвечающие свободным членам f_i и начальным данным φ_i. Оценка (125) следует непосредственно из неравенства (124), примененного к $u = u_1 - u_2$, которое является решением той же задачи, отвечающим $f = f_1 - f_2$ и $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$.

В следующем пункте мы докажем теорему о разрешимости задачи (113), (117), (118), но не для всего класса уравнений (113), а для той его части, для которой решения хорошо представляются рядами Фурье.

163. Метод Фурье для параболических уравнений. Установим однозначную разрешимость первой начально-краевой задачи для параболических уравнений вида

$$M(u) = u_t - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}(x)\, u_{x_k}\right) + c(x)\, u = 0. \qquad (126)$$

Граничное условие будем считать однородным:

$$u|_{S_t} = 0, \qquad S_t = S \times [0, t], \qquad (127)$$

а начальное условие

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \qquad (128)$$

определяемым функцией $\varphi \in L_2(B)$. Пусть относительно коэффициентов оператора M и области B выполнены условия теоремы 2 [148]. В силу теоремы 1 из [150] спектральная задача

$$\left.\begin{aligned} L(u) \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}(x)\,u_{x_k}\right) - c(x)\,u = \lambda u, \\ u\,|_S = 0, \end{aligned}\right\} \tag{129}$$

где S — граница области B, имеет вещественный спектр $\{\lambda_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, который можно считать занумерованным в порядке убывания значений λ_k, причем $\lambda_k \to -\infty$ при $k \to \infty$. Предположим, ради несущественных упрощений в записи, что $c(x) \geqslant 0$. Тогда все λ_k отрицательны. Будем считать также, что система всех собственных функций $\{u_k(x)\}$, $k = 1, 2, \ldots$, ортонормирована в $L_2(B)$, т. е.

$$(u_k, u_l) = \int_B u_k u_l\,dx = \delta_{kl}, \tag{130}$$

причем u_k соответствует значению λ_k. В [150] доказано, что все u_k принадлежат пространству $W^2_{2,0}(B)$ и образуют базис в пространствах $L_2(B)$, $\overset{\circ}{W}{}^1_2(B)$ и $W^2_{2,0}(B)$. Кроме того, там же доказано, что в пространствах $\overset{\circ}{W}{}^1_2(B)$ и $W^2_{2,0}(B)$ можно ввести новые скалярные произведения

$$[u, v] = \int_B [a_{ik} u_{x_i} v_{x_k} + cuv]\,dx$$

и

$$\{u, v\} = \int_B L(u)\,L(v)\,dx$$

соответственно, которым отвечают нормы $\|u\|_1 = \sqrt{[u, u]}$ и $\|u\|_2 = \sqrt{\{u, u\}}$, эквивалентные исходным нормам пространств $\overset{\circ}{W}{}^1_2(B)$ и $W^2_{2,0}(B)$. В этих новых скалярных произведениях система собственных функций $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ ортогональна, причем

$$[u_k, u_l] = -\lambda_k \delta_{kl}, \tag{131}$$

а

$$\{u_k, u_l\} = \lambda_k^2 \delta_{kl}. \tag{132}$$

Функции $a_k e^{\lambda_k t} u_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, при любых числах a_k являются решениями уравнения (126), удовлетворяющими краевому условию (127). Они и все их производные по t принадлежат при всех $t \geqslant 0$ пространству $W^2_{2,0}(B)$. Уравнению (126) они удовлетворяют при всех $t \geqslant 0$ для почти всех x из B. Будем решение u задачи (126)—(128) искать в виде ряда

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k t} u_k(x).$$

Формально, подставляя этот ряд в (128) и используя соотношения (130), мы найдем выражения для a_k:

$$a_k = (\varphi,\ u_k), \quad k = 1,\ 2,\ \ldots$$

Наша дальнейшая цель состоит в том, чтобы исследовать характер сходимости ряда

$$u(x,\ t) = \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi,\ u_k)\, e^{\lambda_k t}\, u_k(x) \tag{133}$$

и убедиться, что он дает обобщенное решение задачи (126)—(128) из такого класса, в котором есть теорема единственности. Во-первых, легко видеть, что ряд (133) сходится в $L_2(B)$ равномерно относительно $t \geqslant 0$. Действительно, при любых m и p и $t \geqslant 0$

$$\left\| \sum_{k=m}^{p} (\varphi,\ u_k)\, e^{\lambda_k t} u_k \right\|^2 = \sum_{k=m}^{p} (\varphi,\ u_k)^2\, e^{2\lambda_k t} \leqslant \sum_{k=m}^{p} (\varphi,\ u_k)^2,$$

причем числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\varphi,\ u_k)^2$ сходится и его сумма равна $\|\varphi\|^2$. Следовательно, сумма u ряда (133) при любом $t \geqslant 0$ есть элемент $L_2(B)$, непрерывно зависящий от $t \geqslant 0$ в норме $L_2(B)$. Последнее означает, что $\|u(x,\ t+\Delta t) - u(x,\ t)\| \to 0$ при $\Delta t \to 0$ и $t, t+\Delta t \geqslant 0$. При $t = 0$ ряд (133) сходится к φ в норме $L_2(B)$, и потому $\|u(x, \Delta t) - \varphi(x)\| \to 0$ при $\Delta t \to +0$. Покажем, что при $t > 0$ ряд (133) сходится в норме пространства $\overset{\circ}{W}{}^2_{2,0}(B)$ равномерно относительно $t \in [\varepsilon, \infty)$, где ε — любое положительное число. Действительно, в силу (132)

$$j_{m,p}(t) \equiv \left\| \sum_{k=m}^{p} (\varphi,\ u_k)\, e^{\lambda_k t}\, u_k(x) \right\|_2^2 = \sum_{k=m}^{p} \lambda_k^2 e^{2\lambda_k t} (\varphi,\ u_k)^2.$$

Но при $t \geqslant \varepsilon > 0$ функции $\lambda_k^2 e^{2\lambda_k t}$ при всех $k = 1,\ 2,\ \ldots$ не превосходят некоторого числа C_ε, зависящего лишь от ε. Поэтому при $t \geqslant \varepsilon > 0$

$$j_{m,p}(t) \leqslant C_\varepsilon \sum_{k=m}^{p} (\varphi,\ u_k)^2.$$

Но это и доказывает желаемую сходимость ряда (133). Из нее следует, что сумма u ряда (133) есть элемент $\overset{\circ}{W}{}^2_{2,0}(B)$, непрерывно зависящий от t в норме этого пространства при $t > 0$.

Почленное дифференцирование ряда (133) по t дает ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (\varphi,\ u_k)\, e^{\lambda_k t} u_k(x), \tag{134}$$

который сходится в норме $L_2(B)$ и даже в норме $W_2^2(B)$ равномерно по t при $t \geqslant \varepsilon > 0$, где ε — произвольное положительное число. Доказывается это так же, как и выше, с учетом того, что функции $|\lambda_k|^r e^{\lambda_k t}$ $k = 1, 2, \ldots$, на полупрямой $t \geqslant \varepsilon > 0$, не превосходят некоторого числа $C_{\varepsilon, r}$, зависящего лишь от ε и r. Такая сходимость ряда (134) гарантирует принадлежность его суммы к $W_{2,0}^2(B)$ при всех $t > 0$ и то, что эта сумма есть обобщенная производная по t суммы $u(x, t)$ ряда (133) в областях $D_{\varepsilon, T} = B \times (\varepsilon, T)$, $\varepsilon > 0$. Из всего сказанного следует, что сумма $u(x, t)$ ряда (133) есть *обобщенное решение задачи* (126)—(128) в области $D_T = B \times (0, T)$ *из класса* $\mathfrak{M}_T$, элементы которого $v(x, t)$ обладают следующими свойствами: они суть элементы $L_2(B)$, непрерывно зависящие от $t \in [0, T]$ в норме $L_2(B)$; они имеют обобщенную производную $v_t(x, t)$ в D_T, причем $v(x, t)$ и $v_t(x, t)$ являются элементами $W_{2,0}^2(B)$, непрерывно зависящими от $t \in (0, T]$. Сумма $u(x, t)$ ряда (133) при любом $t > 0$ и почти всех x из B удовлетворяет уравнению (126). Граничному условию (127) она удовлетворяет в том смысле, что при $t > 0$ является элементом $W_{2,0}^2(B)$. Начальное же условие выполняется «в среднем»:

$$\| u(x, t) - \varphi(x) \| \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +0.$$

Покажем, что в таком классе задача (126)—(128) не может иметь двух разных решений. Одно из них, определенное формулой (133), мы уже нашли. Пусть $u'(x, t)$ есть другое обобщенное решение задачи (126)—(128) из класса $\mathfrak{M}_T$. Тогда их разность $v(x, t)$ есть обобщенное решение из того же класса $\mathfrak{M}_T$ однородной задачи (126)—(128), т. е. задачи

$$M(v) = 0, \quad v|_{S_t} = 0, \quad v|_{t=0} = 0. \tag{135}$$

В области $D_{\varepsilon, T}$, $\varepsilon > 0$, это решение обладает той гладкостью, которая требовалась при выводе энергетического неравенства (124), следовательно, для него справедливы оценки

$$\int\limits_{B(t)} v^2\,dx \leqslant e^{C_1(t-\varepsilon)} \int\limits_{B(\varepsilon)} v^2\,dx \tag{136}$$

при любом $\varepsilon \in (0, t)$ и $t \in [\varepsilon, T]$. Устремляя в этом неравенстве ε к нулю и используя то, что $\int\limits_{B(\varepsilon)} v^2\,dx \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, убедимся, что $v(x, t) \equiv 0$. Теорема единственности доказана.

Если на $\varphi(x)$ наложить дополнительные условия, то ряд (133) будет сходиться лучше, и его сумма будет обладать лучшими дифференциальными свойствами. Например, если

$\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(B)$, то ряд (133) сходится в норме $\overset{\circ}{W}{}_2^1(B)$ равномерно относительно $t \geqslant 0$ и его сумма, тем самым, будет элементом $\overset{\circ}{W}{}_2^1(B)$, непрерывно зависящим от t в норме $\overset{\circ}{W}{}_2^1(B)$ при всех $t \geqslant 0$.

Действительно, благодаря (131) и (129)

$$\left\| \sum_{k=m}^{p} (\varphi, u_k) e^{\lambda_k t} u_k \right\|_1^2 = \sum_{k=m}^{p} |\lambda_k| (\varphi, u_k)^2 e^{2\lambda_k t} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=m}^{p} |\lambda_k| (\varphi, u_k)^2 = \sum_{k=m}^{p} \left[\varphi, \frac{u_k}{\sqrt{|\lambda_k|}}\right]^2,$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\varphi, \frac{u_k}{\sqrt{|\lambda_k|}}\right]^2 = [\varphi, \varphi],$$

т. е. ряд (133) сходится в норме $W_2^1(B)$ равномерно относительно $t \in [0, \infty)$. Покажем, что при $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(B)$ ряды, полученные двукратным почленным дифференцированием ряда (133) по x_i $i = 1, \ldots, n$, сходятся в норме $L_2(D_T)$, где $D_T = B \times (0, T)$, а T — любое конечное число. Это так, ибо

$$\int_0^T \left\| \sum_{k=m}^{p} (\varphi, u_k) e^{\lambda_k t} u_k \right\|_2^2 dt =$$
$$= \sum_{k=m}^{p} \int_0^T \lambda_k^2 (\varphi, u_k)^2 e^{2\lambda_k t}\, dt \leqslant \sum_{k=m}^{p} \frac{1}{2} |\lambda_k| (\varphi, u_k)^2 \to 0$$

при $m, p \to \infty$. Это же неравенство гарантирует и сходимость ряда (134) в $L_2(D)$. Наконец, из того факта, что система $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ образует базис в пространстве $W_{2,0}^2(B)$ [150], следует, что при $\varphi \in W_{2,0}^2(B)$ ряд (133) сходится в норме $W_2^2(B)$ равномерно относительно $t \in [0, \infty)$, и его сумма есть элемент $W_{2,0}^2(B)$, непрерывно зависящий от $t \in [0, \infty)$ в норме $W_2^2(B)$. Ряд (134) при этом будет сходиться в норме $L_2(B)$ равномерно относительно $t \in [0, \infty)$, и его сумма $v(x, t) = u_t(x, t)$ будет элементом $L_2(B)$, непрерывно зависящим от $t \in [0, \infty)$ в норме $L_2(B)$.

Итак, мы доказали следующую теорему:

Теорема 1. *Пусть коэффициенты уравнения* (126) *и область B удовлетворяют условиям теоремы* 2 [148], $c(x) \geqslant 0$ *и* $\varphi \in L_2(B)$. *Тогда решение задачи* (126)—(128) *дается рядом*

(133), *который сходится в* $L_2(B)$ *равномерно относительно* $t \in [0, \infty)$; *при* $t > 0$ *он сходится в норме* $W_2^2(B)$ *равномерно относительно* $t \in [\varepsilon, \infty)$, *где* ε — *произвольное положительное число. Ряд, полученный почленным дифференцированием ряда* (133) *по* t, *сходится в* $L_2(B)$ *при* $t > 0$ *и равномерно относительно* $t \in [\varepsilon, \infty)$. *Сумма ряда* (133) *есть обобщенное решение задачи из класса* $\mathfrak{M}_T$ (*с любым* T), *причем в этом классе имеет место теорема единственности. Если* $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(B)$, *то ряд* (133) *сходится в* $\overset{\circ}{W}{}_2^1(B)$ *равномерно по* $t \in [0, \infty)$, *а ряды, полученные его почленным дифференцированием один раз по* t *или два раза по* x, *сходятся в норме* $L_2(D_T)$, $D_T = B \times (0, T)$. *Наконец, при* $\varphi \in W_{2,0}^2(B)$ *ряд* (133) *сходится в норме* $W_2^2(B)$, *а ряд* (134) *в норме* $L_2(B)$ *равномерно относительно* $t \in [0, \infty)$.

Рассмотрим еще задачу

$$L(u) = f(x, t), \quad u|_{S_T} = 0, \quad u|_{t=0} = 0, \tag{137}$$

где L — то же, что и в (126), а $f \in L_2(D_T)$. Ей формально удовлетворяет сумма ряда

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t f_k(\tau) e^{\lambda_k (t-\tau)} d\tau \, u_k(x), \tag{138}$$

где $f_k(\tau) = \int_B f(x, \tau) u_k(x) \, dx$. Покажем, что ряд (138) и ряды, полученные его почленным дифференцированием по x один и два раза сходятся в норме $L_2(D_T)$, так что сумма ряда $u(x, t)$ и ее производные u_{x_i} и $u_{x_i x_k}$ будут элементами $L_2(D_T)$. Для этого достаточно убедиться, что

$$j_{p,m} \equiv \int_0^T \left\| \sum_{k=p}^{m} \int_0^t f_k(\tau) e^{\lambda_k (t-\tau)} d\tau \, u_k(x) \right\|_2^2 dt \tag{139}$$

стремится к нулю при p и $m \to \infty$. Это верно, ибо благодаря (132)

$$j_{p,m} = \sum_{k=p}^{m} \int_0^T \lambda_k^2 \left| \int_0^t f_k(\tau) e^{\lambda_k (t-\tau)} d\tau \right|^2 dt \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=p}^{m} \int_0^T \lambda_k^2 \left(\int_0^t f_k^2(\tau) e^{\lambda_k (t-\tau)} d\tau \right) \left(\int_0^t e^{\lambda_k (t-\tau)} d\tau \right) dt \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=p}^{m} |\lambda_k| \int_0^T \int_0^t f_k^2(\tau) e^{\lambda_k (t-\tau)} d\tau \, dt \leqslant \sum_{k=p}^{m} \int_0^T f_k^2(\tau) \, d\tau,$$

а для функций $f(x, t)$ из $L_2(D_T)$ верны равенства

$$\int_0^T \int_B f^2(x, \tau)\,dx\,d\tau = \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2(\tau)\,d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T f_k^2(\tau)\,d\tau.$$

Из этой оценки $j_{p,m}$ следует также, что ряд, полученный почленным дифференцированием ряда (133) по t, сходится в $L_2(D)$. Так как конечные суммы

$$u^N(x, t) = \sum_{k=1}^{N} \int_0^t f_k(\tau)\, e^{\lambda_k (t-\tau)}\,d\tau\, u_k(x)$$

удовлетворяют (при почти всех (x, t) из D_T) уравнению $L(u^N) = f^N$ с $f^N(x, t) = \sum\limits_{k=1}^{N} f_k(t)\, u_k(x)$, и f^N сходится к f в норме $L_2(D_T)$, то сумма ряда (138) будет при почти всех (x, t) из D_T удовлетворять уравнению (137). Чтобы проверить выполнение начального и граничного условия из (137), убедимся, что ряд (138) сходится в норме $W_2^1(B)$ при любом $t \geqslant 0$. Действительно, используя те же соображения, что и при оценке $j_{p,m}$, получим

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t f_k(\tau)\, e^{\lambda_k (t-\tau)}\,d\tau\, u_k(x) \right\|_1^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| \left| \int_0^t f_k(\tau)\, e^{\lambda_k (t-\tau)}\,d\tau \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t f_k^2(\tau)\,d\tau = \int_0^t \int_B |f(x, t)|^2\,dx\,dt.$$

Отсюда ясно, что при любом $t \geqslant 0$ сумма $u(x, t)$ есть элемент $\overset{\circ}{W}{}_2^1(B)$ и при $t \to 0$ $\|u(x, t)\|_1 \to 0$.

Тем самым мы доказали теорему:

Теорема 2. *Если относительно L и B выполнены предположения теоремы 2 [148], а $f \in L_2(D_T)$, $D_T = B \times (0, T)$, то решение задачи (137) в D_T дается рядом (138). Этот ряд и ряды, полученные его почленным дифференцированием один раз по t и x и два раза по x, сходятся в норме $L_2(D_T)$. Сумма ряда (138) при почти всех $(x, t) \in D_T$ удовлетворяет уравнению (137), при любом $t \in [0, T]$ она есть элемент $\overset{\circ}{W}{}_2^1(B)$ и при $t \to 0$ $\|u(x, t)\|^{(1)} \to 0$.*

Заметим, что решения второй и третьей начально-краевых задач для уравнения $L(u) = f(x, t)$ определяются рядами вида (133) и (138), только в качестве $u_k(x)$ в них надо брать собственные функции L, отвечающие соответствующему краевому условию.

164. Второе основное неравенство и разрешимость первой начально-краевой задачи. Опишем, как можно доказать разрешимость задачи (113), (127), (128) в классе функций $W_2^{2,1}(D_T)$, $D_T = B\times(0, T)$, состоящем из всех функций $u(x, t)$, принадлежащих $L_2(D_T)$ и имеющих обобщенные производные u_t, u_{x_i}, $u_{x_i x_k}$ из $L_2(D_T)$. Это множество может быть рассмотрено как полное гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(u, v)_{2, D_T}^{(2,1)} = \int\limits_{D_T} (uv + u_x v_x + u_{xx} v_{xx} + u_t v_t)\, dx\, dt \qquad (140)$$

(здесь использованы сокращенные обозначения, введенные в [145; 146]. Норму в $W_2^{2,1}(D_T)$ обозначим через $\|\cdot\|_{2, D_T}^{(2,1)}$. Определим $W_{2,0}^{2,1}(D_T)$ как подпространство пространства $W_2^{2,1}(D_T)$, полученное замыканием в норме $W_2^{2,1}(D_T)$ множества всех функций из $C^2(\bar D_T)$, равных нулю на боковой поверхности S_T цилиндра D_T. Будем предполагать, что область B удовлетворяет требованиям теоремы 2 [148], а коэффициенты M удовлетворяют условиям (114)—(116) и

$$\left|\frac{\partial a_{ik}(x, t)}{\partial t}\right| \leqslant \mu_3. \qquad (141)$$

Докажем, что для параболических операторов M справедливо неравенство, близкое по своему характеру к неравенству (434) из [146]. Для этого рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{D_t} (M(u))^2\, dx\, d\tau = \int\limits_{D_t} [u_\tau - L(u)]^2\, dx\, d\tau, \quad D_t = B\times(0, t),$$

где

$$L(u) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}(x, t)\, u_{x_k}\right) - b_i(x, t)\, u_{x_i} - c(x, t)\, u,$$

а $u(x, t)$ — произвольная функция из $C^2(\bar D_T)$, равная нулю на S_T Преобразуем его, используя формулу интегрирования по частям (107) [48], следующим образом:

$$\int\limits_{D_t} (M(u))^2\, dx\, d\tau = \int\limits_{D_t} [u_\tau^2 + (Lu)^2 + 2a_{ik} u_{x_k} u_{x_i\tau} +$$

$$+ 2\left(b_i u_{x_i} + cu\right) u_\tau]\, dx\, d\tau = \int\limits_{D_t} \Big[u_\tau^2 + (L(u))^2 +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial\tau}\left(a_{ik} u_{x_i} u_{x_k}\right) - \frac{\partial a_{ik}}{\partial\tau} u_{x_i} u_{x_k} + 2\left(b_i u_{x_i} + cu\right) u_\tau\Big]\, dx\, d\tau. \qquad (142)$$

Из этого равенства и предположений (116), (141) следует неравенство

$$\int\limits_{B(t)} a_{ik} u_{x_i} u_{x_k}\, dx + \int\limits_{D_t} [u_\tau^2 + (L(u))^2]\, dx\, d\tau \leqslant \int\limits_{B(0)} a_{ik} u_{x_i} u_{x_k}\, dx +$$

$$+ C_1 \int\limits_{D_t} [\varepsilon u_\tau^2 + (1+\varepsilon^{-1})(u_x^2 + u^2)]\, dx\, d\tau + \int\limits_{D_t} (M(u))^2\, dx\, d\tau, \quad (143)$$

постоянная C_1 в котором определяется лишь μ_2 и μ_3, а ε — произвольное положительное число *). Воспользуемся теперь неравенством (452) [**146**]. Благодаря ему, а также условию (114), из (143) выведем неравенство

$$\nu \int\limits_{B(t)} u_x^2\, dx + \int\limits_{D_t} \left[u_\tau^2 + \frac{\nu^2}{4}(u_{xx}^2 + u_x^2 + u^2)\right] dx\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \mu \int\limits_{B(0)} u_x^2\, dx + C_2 \int\limits_{D_t} [\varepsilon u_\tau^2 + (1+\varepsilon^{-1})(u_x^2 + u^2)]\, dx\, d\tau +$$

$$+ \int\limits_{D_t} (M(u))^2\, dx\, d\tau. \quad (144)$$

Здесь постоянная C_2 зависит от ν, μ, μ_i и области B. Возьмем в (144) $\varepsilon = (2C_2)^{-1}$. Тогда, огрубляя (144), придем к оценке

$$\int\limits_{B(t)} u_x^2\, dx + \int\limits_{D_t} (2u_\tau^2 + u_{xx}^2 + u_x^2 + u^2)\, dx\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant C_3 \left[\int\limits_{B(0)} u_x^2\, dx + \int\limits_{D_t} (u_x^2 + u^2)\, dx\, d\tau + \int\limits_{D_t} (M(u))^2\, dx\, d\tau\right]. \quad (145)$$

В силу неравенства

$$\int\limits_{B(t)} u^2\, dx \leqslant \int\limits_{B(0)} u^2\, dx + \int\limits_{D_t} (u_\tau^2 + u^2)\, d\tau, \quad (146)$$

которое легко выводится из формулы Ньютона — Лейбница для $u^2(x, t)$ с использованием неравенства Буняковского — Шварца (см. (198) [**56**]), из (145) получим

$$\int\limits_{B(t)} (u_x^2 + u^2)\, dx + \int\limits_{D_t} (u_\tau^2 + u_{xx}^2 + u_x^2 + u^2)\, dx\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant C_4 \left[\int\limits_{B(0)} (u_x^2 + u^2)\, dx + \int\limits_{D_t} (u_x^2 + u^2)\, dx\, d\tau + \int\limits_{D_t} (M(u))^2\, dx\, d\tau\right]. \quad (147)$$

---

*) Через $B(t)$ и $B(0)$ мы обозначили верхнее и нижнее основания цилиндра D_t

Из него же выводится желаемая оценка

$$\int\limits_{B(t)} (u_x^2 + u^2)\, dx + \int\limits_{D_t} (u_\tau^2 + u_{xx}^2 + u_x^2 + u^2)\, dx\, d\tau \leqslant$$
$$\leqslant C_4 e^{C_4 t} \left[\int\limits_{B(0)} (u_x^2 + u^2)\, dx + \int\limits_{D_t} (M(u))^2\, dx\, d\tau \right] \qquad (148)$$

с помощью леммы из [56] (почти так же, как (124)). Неравенство (148) и есть *второе основное неравенство* для параболических операторов M при условии (127) Оно выведено для любой функции $u(x, t)$ из $C^2(\bar{D}_T)$, равной нулю на S_T Покажем, что для таких функций интегралы $\left(\int\limits_{B(t)} (u_x^2 + u^2)\, dx \right)^{1/2}$, $t \in [0, T]$, мажорируются $\| u \|_{2, D_T}^{(2, 1)}$. Для этого возьмем какую-либо гладкую, неотрицательную функцию $\chi(t)$, равную 1 для $t \in \left[\frac{T}{2}, T\right]$ и нулю для $t \in \left[0, \frac{T}{4}\right]$, и примем во внимание равенства

$$\int\limits_{B(t)} (u_x^2 + u^2) \chi\, dx = \int\limits_0^t \int\limits_{B(\tau)} \frac{d}{d\tau} [(u_x^2 + u^2) \chi]\, dx\, d\tau =$$
$$= \int\limits_{D_t} (2u_x u_{x\tau} \chi + u_x^2 \chi' + 2uu_\tau \chi + u^2 \chi')\, dx\, d\tau =$$
$$= \int\limits_{D_t} (-2u_\tau\, \Delta u \chi + u_x^2 \chi' + 2uu_\tau \chi + u^2 \chi')\, dx\, d\tau.$$

Из них для $t \in \left[\frac{T}{2}, T\right]$ следует

$$\int\limits_{B(t)} (u_x^2 + u^2)\, dx \leqslant C_5 \int\limits_{D_T} (u_\tau^2 + u_{xx}^2 + u_x^2 + u^2)\, dx\, d\tau. \qquad (149)$$

Такое же неравенство верно и для $t \in \left[0, \frac{T}{2}\right]$. Доказывается это аналогично, надо только взять в качестве $\chi(t)$ гладкую неотрицательную функцию, равную единице при $\left[0, \frac{T}{2}\right]$ и нулю при $t \in \left[\frac{3T}{4}, T\right]$. Благодаря этому норма $\| \cdot \|_{2, D_T}^{(2, 1)}$ в $W_{2, 0}^{2, 1}(D_T)$ эквивалентна норме

$$\| u \|^* = \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \left[\int\limits_{B(t)} (u_x^2 + u^2)\, dx \right]^{1/2} + \| u \|_{2, D_T}^{(2, 1)}. \qquad (150)$$

Из этого факта и неравенства (148), доказанного нами для u, принадлежащих $C^2(\bar{D}_T)$ и равных нулю на S_T, следует справедливость (148) для любого элемента u из $W_{2,0}^{2,1}(D_T)$. С его помощью можно доказать однозначную разрешимость задачи (113), (127), (128) для любых $f(x, t) \in L_2(D)$ и $\varphi(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(B)$, используя метод продолжения по параметру (см. [148]) и теоремы из [163]. А именно, надо рассмотреть семейство задач

$$\left.\begin{aligned} M_\tau(u) \equiv (1-\tau) M_0(u) + \tau M_1(u) = f, \\ u|_{S_T} = 0, \quad u|_{t=0} = \varphi, \quad \tau \in [0, 1], \end{aligned}\right\} \tag{151}$$

где $M_0(u) = u_t - \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}$, а $M_1(u) = M(u)$, и пару гильбертовых пространств: $W_{2,0}^{2,1}(D_T)$ и $W = L_2(D_T) \times \overset{\circ}{W}{}_2^1(B)$. Элементами W являются пары функций $\{f(x, t); \varphi(x)\}$, а скалярное произведение в нем определено равенством

$$(\{f;\ \varphi\},\quad \{\tilde{f};\ \tilde{\varphi}\})_W = \int\limits_{D_T} f\tilde{f}\, dx\, dt + \int\limits_{B} (\varphi_x \tilde{\varphi}_x + \varphi\tilde{\varphi})\, dx.$$

Задачи (151) можно интерпретировать как семейство операторных уравнений

$$A_\tau(u) = \{f;\ \varphi\}, \qquad \tau \in [0, 1], \tag{152}$$

в которых операторы A_τ определены равенствами

$$A_\tau(u) = \{M_\tau(u);\ u|_{t=0}\}, \qquad \tau \in [0, 1]. \tag{153}$$

Операторы A_τ действуют из пространства $W_{2,0}^{2,1}(D_T)$ в пространство W. Однозначная разрешимость уравнения (152) при $\tau = 0$ и любых $\{f;\ \varphi\}$ из W доказана в теоремах [163]. Отсюда с помощью неравенств (149) и неравенства (148), справедливого для всех M_τ, $\tau \in [0, 1]$, с постоянной C_4, которую можно выбрать общей для всех τ из $[0, 1]$, нетрудно доказать однозначную разрешимость всех задач (152) при любых $\{f; \varphi\}$ из W. Мы не будем проводить это рассуждение, ибо оно вполне аналогично доказательству теоремы 1 из [148], а сформулируем лишь окончательный результат:

Теорема. *Пусть для коэффициентов M из* (113) *выполнены условия* (114)—(116) *и* (141), *а для области B условия теоремы* 2 [148]. *Тогда задача* (113), (127), (128) *однозначно разрешима в* $W_{2,0}^{2,1}(D_T)$, $D_T \neq B \times (0, T)$ *при любых f из* $L_2(D_T)$ *и* φ *из* $\overset{\circ}{W}{}_2^1(B)$.

165. Гиперболические уравнения общего вида. Энергетическое неравенство для первой начально-краевой задачи. Оставшиеся разделы книги мы посвятим первой начально-краевой задаче для уравнений гиперболического типа. Рассмотрим уравнение

$$M(u)=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}u_{x_i x_k}+\sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i}+cu-u_{tt}=f \qquad (154)$$

того же вида, что и в [56], в области $D_T=B\times(0, T)$ евклидова пространства R^{n+1}. Пространственные переменные $x=(x_1, \ldots, x_n)$ меняются в области B пространства R^n, а временная переменная t меняется на интервале $(0, T)$. Коэффициенты уравнения (154) и свободный член f могут зависеть от (x, t). Относительно коэффициентов предположим, что они суть ограниченные, измеримые функции на D_T, причем a_{ik} дифференцируемы по x и t и производные $\frac{\partial a_{ik}}{\partial t}$, $\frac{\partial a_{ik}}{\partial x}$ ограничены на D_T (эти производные в общем случае — обобщенные). Свободный член f пусть является элементом $L_2(D_T)$. Гиперболичность уравнения (154) гарантируется условием

$$a_{ik}(x, t)\,\xi_i\xi_k\geqslant\nu\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2, \qquad (155)$$

в котором ν — положительная постоянная, а ξ_i — произвольные вещественные параметры (как всюду, считаем, что $a_{ik}=a_{ki}$). Поставим для уравнения (154) в области D_T первую начально-краевую задачу. Она состоит в определении функции $u(x, t)$, удовлетворяющей в D_T уравнению (154), на нижнем основании D_T начальным условиям

$$u|_{t=0}=\varphi(x), \quad u_t|_{t=0}=\psi(x), \qquad x\in B, \qquad (156)$$

и на боковой поверхности D_T краевому условию

$$u|_{S_T}=0, \quad S_T=S\times[0, T], \qquad (157)$$

где S — граница B. Иначе говоря, мы определяем решение $u(x, t)$ уравнения (154) в области B евклидова пространства R^n в моменты времени $t\in(0, T)$, которое в начальный момент времени удовлетворяет условиям Коши (156) и во все эти моменты времени обращается в нуль на границе области B.

Покажем, что эта задача корректна, т. е. имеет не более одного решения, и это решение непрерывно зависит от начальных данных и свободного члена уравнения. Непрерывность понимается в смысле интегральных норм, определяемых энергетическим неравенством, которое мы сейчас выведем. Разрешимость задачи (154), (156), (157) мы докажем в следующем пункте, правда, не для всего класса уравнений (154), а для той его части, для которой решения хорошо представляются рядами Фурье. Здесь и ниже мы будем иметь дело с обобщенными решениями из класса $W_2^2(D_T)$. Они удовлетворяют уравнению (154) для почти всех (в смысле Лебега) точек $(x, t) \subset D_T$. Элементы $u(x, t)$ этого класса при всех $t \in [0, T]$ принадлежат $W_2^1(B)$ и непрерывно зависят от t в норме этого пространства (т. е. $\|u(x, t+\Delta t) - u(x, t)\|_{2, B}^{(1)} \to 0$ при $\Delta t \to 0$ и $t, t+\Delta t \in [0, T]$). Их производная $u_t(x, t)$ при всех $t \in [0, T]$ является элементом $L_2(B)$ и непрерывно зависит от t в норме $L_2(B)$. В соответствии с этим начальные условия принимаются в следующем смысле: $\|u(x, t) - \varphi(x)\|_{2, B}^{(1)} \to 0$ и $\|u_t(x, t) - \psi(x)\|_{2, B} \to 0$ при $t \to +0$, а условие (157) — в том, что $u(x, t)$ принадлежит $\overset{\circ}{W}{}_2^1(B)$ при всех $t \in [0, T]$ (более подробно о пространствах W_2^l см. [**V; гл. IV**]). Относительно $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ естественно предположить при этом, что

$$\varphi(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(B), \quad \psi \in L_2(B). \tag{158}$$

Вывод энергетического неравенства для решений задачи (154), (156), (157) (мы будем опускать ниже эпитет «обобщенных», считая, что всюду речь будет идти об обобщенных решениях класса $W_2^2(D_T)$, если не оговорено противное) близок к выводу энергетического неравенства для решений задачи Коши, проведенному в [**56**]. Он даже проще последнего, ибо возникающие в данном случае интегралы по боковой поверхности S_T обращаются в нуль в силу условия (157). Мы заимствуем из [**56**] ряд обозначений и оценок. Точнее, обозначим через $K(t)$ интеграл

$$K(t) = \int\limits_{B(t)} (a_{ik} u_{x_i} u_{x_k} + u_t^2)\, dx,$$

где $B(t_0)$ есть сечение цилиндра D_T плоскостью $t = t_0$, а через D_{t_1} — цилиндр $B \times (0, t_1)$, считая $t_1 \leqslant T$. Умножим уравнение (154) на $-2u_t$ и результат проинтегрируем по D_t:

$$-\int\limits_{D_t} 2M(u)\, u_t\, dx\, dt = -\int\limits_{D_t} 2f u_t\, dx\, dt. \tag{159}$$

Левую часть (159) представим иначе, преобразуя часть членов, в нее входящих, с помощью интегрирования по частям следующим образом:

$$\int_{D_t} 2u_{tt}u_t\,dx\,dt = \int_{D_t} \frac{\partial}{\partial t}(u_t)^2\,dx\,dt = \int_{B(t)} u_t^2\,dx - \int_{B(0)} u_t^2\,dx,$$

$$-\int_{D_t} 2a_{ik}u_{x_i x_k}\cdot u_t\,dx\,dt = \int_{D_t}\left(2a_{ik}u_{x_i}u_{tx_k} + 2\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_k}u_{x_i}u_t\right)dx\,dt =$$

$$= \int_{D_t}\left[\frac{\partial}{\partial t}(a_{ik}u_{x_i}u_{x_k}) - \frac{\partial a_{ik}}{\partial t}u_{x_i}u_{x_k} + 2\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_k}u_{x_i}u_t\right]dx\,dt =$$

$$= \int_{B(t)} a_{ik}u_{x_i}u_{x_k}\,dx - \int_{B(0)} a_{ik}u_{x_i}u_{x_k}\,dx +$$

$$+ \int_{D_t}\left(-\frac{\partial a_{ik}}{\partial t}u_{x_i}u_{x_k} + 2\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_k}u_{x_i}u_t\right)dx\,dt.$$

При выводе этих равенств мы учли, что $u|_{S_T} = 0$, а потому и $u_t|_{S_T} = 0$. В силу них (159) эквивалентно следующему:

$$K(t) = K(0) + \int_{D_t}\left[\frac{\partial a_{ik}}{\partial t}u_{x_i}u_{x_k} - 2\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_k}u_{x_i}u_t + \right.$$

$$\left. + 2b_i u_{x_i}u_t + 2cuu_t - 2fu_t\right]dx\,dt. \qquad (160)$$

Дальнейшие оценки интеграла $\int_{D_t}$, стоящего в правой части (160), вполне аналогичны тем, которые мы провели в [56] (то, что в данном случае D_t есть цилиндр, а не конус, несущественно). Мы не будем повторять их здесь, а напишем интересующее нас *энергетическое неравенство*, выводимое из (160) в результате этих оценок. Оно имеет вид (в [56] ему соответствует неравенство (201))

$$\int_{B(t)}\left(u_t^2 + a_{ik}u_{x_i}u_{x_k} + u^2\right)dx \leqslant$$

$$\leqslant e^{Ct}\left[\int_{B(0)}\left(u_t^2 + a_{ik}u_{x_i}u_{x_k} + u^2\right)dx + \int_{D_t} f^2\,dx\,dt\right]. \qquad (161)$$

Входящая в него постоянная C определяется коэффициентами M, точнее, числом ν из условия (155) и максимумами модулей функций $\frac{\partial a_{ik}}{\partial t}$, $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_k} - b_i\right)$ и c в области D_t.

Функции, стоящие в правой части неравенства (161), известны из условий задачи, в частности, интеграл по $B(0)$ равен $\int\limits_B (\psi^2 + a_{ik}\varphi_{x_i}\varphi_{x_k} + \varphi^2)\,dx$. Из (161) следует неравенство

$$\int\limits_{B(t)} (u_t^2 + \nu u_x^2 + u^2)\,dx \leqslant$$
$$\leqslant e^{Ct}\left[\int\limits_B (\psi^2 + \mu\varphi_x^2 + \varphi^2)\,dx + \int\limits_{D_t} f^2\,dx\,dt\right], \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad (162)$$

где μ — постоянная из неравенства $a_{ik}\xi_i\xi_k \leqslant \mu \sum\limits_{i=1}^n \xi_i^2$ (так что μ — мажоранта для a_{ik}). Неравенство (162) также называется *энергетическим*. Из него следует

Теорема 1. *Задача* (154), (156), (157) *имеет не более одного решения из* $W_2^2(D_T)$, *и ее решения непрерывно зависят от начальных данных и свободного члена.*

Действительно, если $u_i(x, t)$, $i = 1, 2$, суть два решения из $W_2^2(D_T)$, отвечающие начальным данным $\varphi_i(x)$, $\psi_i(x)$ и свободным членам (силам) $f_i(x, t)$, $i = 1, 2$, то их разность $u(x, t)$ есть решение той же задачи из $W_2^2(D_T)$, отвечающее начальным данным $\varphi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$, $\psi(x) = \psi_1(x) - \psi_2(x)$ и свободному члену $f(x, t) = f_1(x, t) - f_2(x, t)$. Поэтому для $u(x, t)$ справедливо неравенство (162), из которого и следуют оба утверждения теоремы.

166. Метод Фурье для уравнений гиперболического типа. Здесь мы докажем разрешимость первой начально-краевой задачи для гиперболических уравнений вида

$$M(u) \equiv \sum_{i,\,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ik}(x)\,u_{x_k}) + c(x)\,u - u_{tt} = 0. \quad (163)$$

Предположим, что для эллиптической части $L(u) = \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ik}u_{x_k}) + cu$ этого уравнения и области B выполнены те же условия, что и в теореме 2 [**148**], и, следовательно, система собственных функций $\{u_k(x)\}_{k=1}^\infty$ и собственных значений $\{\lambda_k\}$ оператора L при условии $u|S = 0$ обладает свойствами, описанными в [**150**]. Предположим пока, что $c(x) \leqslant 0$. Это гарантирует отрицательность всех λ_k, так что удобно λ_k обозначить через $-\mu_k^2$, считая $\mu_k > 0$. Все решения уравнения (163), имеющие вид $u(x, t) = X(x)\,T(t)$ и удовлетворяющие краевому условию (157), исчерпываются функциями $(a_k \cos\mu_k t + b_k \sin\mu_k t)\,u_k(x)$, где a_k

и b_k — произвольные постоянные, а $u_k(x)$ — собственная функция, отвечающая собственному значению $\lambda_k = -\mu_k^2$.

Ввиду этого, естественно решение задачи (163), (156), (157) искать в виде ряда

$$u(x,\ t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \mu_k t + b_k \sin \mu_k t)\, u_k(x), \tag{164}$$

определяя его коэффициенты a_k, b_k из начальных условий (156). Первое из этих условий дает выражение для a_k:

$$a_k = (\varphi,\ u_k), \tag{165}$$

а второе — для b_k:

$$b_k = \frac{1}{\mu_k} (\psi,\ u_k). \tag{166}$$

Формально такой ряд удовлетворяет всем требованиям нашей задачи. Наша цель — исследовать его сходимость, в частности, показать, что его можно почленно дифференцировать два раза по x и t. Последнее необходимо, чтобы оправдать справедливость равенств

$$M(u) = M\left(\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \mu_k t + b_k \sin \mu_k t)\, u_k(x)\right) = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} M\left(a_k \cos \mu_k t + b_k \sin \mu_k t)\, u_k(x)\right) = 0, \tag{167}$$

т. е. убедиться, что сумма ряда (164) удовлетворяет уравнению (163). Мы докажем, что ряд (164) и ряды, полученные его почленным дифференцированием по x и t до двух раз включительно, сходятся в норме $L_2(B)$ равномерно относительно $t \in [0, \infty)$. Тем самым будет показано, что сумма ряда (164) удовлетворяет уравнению (163) при почти всех $(x,\ t)$ из D_T (и даже более: при всех t из $[0, \infty)$ для почти всех x из B). Начальные условия будут выполняться в следующем смысле:

$$\| u(x,\ t) - \varphi(x) \|_{2,\ B}^{(2)} \to 0, \quad \| u_t(x,\ t) - \psi(x) \|_{2,\ B}^{(1)} \to 0 \tag{168}$$

при $t \to +0$. Граничное же условие (157) будет гарантировано принадлежностью $u(x,\ t)$ к $W_{2,\ 0}^2(B)$ при всех $t \geqslant 0$. Все это будет иметь место, если $\varphi(x) \in W_{2,\ 0}^2(B)$, а $\psi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(B)$. Действительно, как доказано в [150], функция $\varphi(x)$ разлагается в ряд Фурье $\varphi(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (\varphi,\ u_k)\, u_k(x)$, сходящийся к ней в норме $\|\cdot\|_2$, причем

$$\| \varphi \|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi,\ u_k)^2\, \mu_k^4 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \mu_k^4, \tag{169}$$

а функция ψ разлагается в ряд Фурье $\psi=\sum_{k=1}^{\infty}(\psi,\ u_k)\,u_k(x)$, сходящийся к ней в норме $\|\cdot\|_1$ и

$$\|\psi\|_1^2=\sum_{k=1}^{\infty}(\psi,\ u_k)^2\mu_k^2=\sum_{k=1}^{\infty}b_k^2\mu_k^4. \tag{170}$$

С другой стороны,

$$\left\|\sum_{k=m}^{p}(a_k\cos\mu_k t+b_k\sin\mu_k t)\,u_k\right\|_2^2=$$

$$=\sum_{k=m}^{p}(a_k\cos\mu_k t+b_k\sin\mu_k t)^2\mu_k^4\leqslant 2\sum_{k=m}^{p}(a_k^2+b_k^2)\,\mu_k^4, \tag{171}$$

$$\left\|\sum_{k=m}^{p}\frac{\partial}{\partial t}(a_k\cos\mu_k t+b_k\sin\mu_k t)\,u_k\right\|_1^2=$$

$$=\sum_{k=m}^{p}\mu_k^2(-a_k\sin\mu_k t+b_k\cos\mu_k t)^2\mu_k^2\leqslant 2\sum_{k=m}^{p}(a_k^2+b_k^2)\,\mu_k^4 \tag{172}$$

и

$$\left\|\sum_{k=m}^{p}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(a_k\cos\mu_k t+b_k\sin\mu_k t)\,u_k\right\|^2=$$

$$=\sum_{k=m}^{p}(a_k\cos\mu_k t+b_k\sin\mu_k t)^2\mu_k^4\leqslant 2\sum_{k=m}^{p}(a_k^2+b_k^2)\,\mu_k^4. \tag{173}$$

Из сопоставления оценок (171)—(173) с (169) и (170) убеждаемся в справедливости высказанных нами выше утверждений о сходимости ряда (164) и рядов, полученных его почленным дифференцированием по x и t. При этом надо иметь в виду, что нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ эквивалентны исходным нормам пространств $\overset{\circ}{W}{}_2^1(B)$ и $W_{2,0}^2(B)$ соответственно. Принадлежность при всех $t\geqslant 0$ суммы $u(x,\ t)$ ряда (164) к $W_{2,0}^2(B)$, а ее производных $u_t(x,\ t)$ и $u_{tt}(x,\ t)$ к $\overset{\circ}{W}{}_2^1(B)$ и $L_2(B)$ следует из доказанной сходимости и того, что отрезки этих рядов суть элементы $W_{2,0}^2(B)$, $\overset{\circ}{W}{}_2^1(B)$ и $L_2(B)$. Итак, доказана теорема:

Теорема 1. *Пусть для коэффициентов M и области B выполнены условия теоремы* 2 **[148]** *и* $c(x)\leqslant 0$. *Тогда, если* $\varphi\in W_{2,0}^2(B)$, *а* $\psi\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(B)$, *то сумма* $u(x,\ t)$ *ряда* (164) *с коэффициентами* a_k *и* b_k, *определяемыми формулами* (165) *и* (166), *есть решение задачи* (163), (156), (157). *Она при всех* $t\geqslant 0$

принадлежит $W^2_{2,0}(B)$ *и непрерывно зависит от* t *в норме этого пространства. Ее производные* $u_t(x, t)$ *и* $u_{tt}(x, t)$ *суть элементы* $\overset{\circ}{W}{}^1_2(B)$ *и* $L_2(B)$, *непрерывно зависящие от* $t \geqslant 0$ *в нормах этих пространств. Ряды, полученные почленным дифференцированием ряда* (164) *по* x *и* t *до двух раз включительно, сходятся в* $L_2(B)$ *равномерно относительно* $t \geqslant 0$.

Замечание 1. Если условие $c(x) \leqslant 0$ отбросить, то сохраняются все утверждения теоремы, только несколько первых собственных значений λ_k могут оказаться положительными или равными нулю. Соответствующие им члены будут иметь вид $\left(a_k e^{\sqrt{\lambda_k}\, t} + b_k e^{-\sqrt{\lambda_k}\, t}\right) u_k(x)$ или $(a_k + b_k t) u_k(x)$. На сходимость ряда (164) наличие нескольких таких членов влияния не оказывают: их сумму можно выделить из (164) в виде отдельного слагаемого.

Замечание 2. Для гиперболических уравнений задача Коши и начально-краевые задачи одинаково решаются как в сторону возрастающего, так и убывающего времени t. Ряд (164) сходится указанным образом и при $t \leqslant 0$.

Рассмотрим теперь неоднородное уравнение

$$M(u) = f(x, t), \tag{174}$$

где M — то же, что и в (163). Найдем его решение, соответствующее однородным начальным и граничному условиям

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad u|_{S_T} = 0. \tag{175}$$

Для этого разложим f в ряд по $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$:

$$f(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (f(x, t), \quad u_k(x))\, u_k(x) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\, u_k(x),$$

и найдем для уравнения

$$M(u) = f_k(t)\, u_k(x) \tag{176}$$

решения $u(x, t)$ вида $X(x) T(t)$, удовлетворяющие условиям (175). Положим $u(x, t) = T_k(t) u_k(x)$, тогда для $T_k(t)$ из (176) следует уравнение

$$\lambda_k T_k(t) - T''_k(t) = f_k(t). \tag{177}$$

Его решением, равным нулю вместе с производной при $t = 0$, является, как известно, функция

$$T_k(t) = -\frac{1}{\mu_k} \int_0^t \sin \mu_k (t - \tau)\, f_k(\tau)\, d\tau, \tag{178}$$

где, как и выше, $\mu_k^2 = -\lambda_k$. Сумма ряда

$$u(x, t) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k} \int_0^t f_k(\tau) \sin \mu_k (t-\tau)\, d\tau\, u_k(x) \tag{179}$$

формально удовлетворяет всем требованиям задачи (174), (175). Для оправдания формулы (179) надо проверить, что ряд (179) сходится так же, как ряд (164) в теореме 1. Убедимся, что справедливо следующее утверждение:

Теорема 2. *Пусть относительно M и B выполнены те же предположения, что и в теореме* 1. *Тогда, если $f(x, t) \in L_2(D_T)$, то ряд* (179) *сходится в норме $\mathring{W}_2^1(B)$ равномерно по $t \in [0, T]$. Если, к тому же, $f(x, t)$ имеет обобщенную производную $f_t(x, t) \in L_2(D_T)$, то ряд* (179) *и ряды, полученные его почленным дифференцированием один и два раза по x и t, сходятся в $L_2(B)$ равномерно по $t \in [0, T]$. В последнем случае сумма ряда и есть обобщенное решение задачи* (174), (175) *из класса $W_2^2(D_T)$ (и даже несколько лучше).*

Утверждения теоремы вытекают из нижеследующих соотношений и оценок:

$$\left\| \sum_{k=m}^{p} T_k(t)\, u_k(x) \right\|_1^2 = \sum_{k=m}^{p} \mu_k^2 T_k^2(t) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=m}^{p} \left(\int_0^t |f_k(\tau)|\, d\tau \right)^2 \leqslant T \sum_{k=m}^{p} \int_0^T f_k^2(\tau)\, d\tau, \tag{180}$$

а

$$\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2(\tau)\, d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T f_k^2(\tau)\, d\tau = \int_{D_T} f^2(x, t)\, dx\, dt. \tag{181}$$

Если к тому же $f_t(x, t) \in L_2(D_T)$, то

$$T_k(t) = -\frac{1}{\mu_k^2} \int_0^t f_k(\tau)\, d \cos \mu_k (t-\tau) =$$
$$= -\frac{1}{\mu_k^2} \left[-\int_0^t f_k'(\tau) \cos \mu_k (t-\tau)\, d\tau + f_k(t) - f_k(0) \cos \mu_k t \right] =$$
$$= -\frac{1}{\mu_k^2} \left[\int_0^t f_k'(\tau) \left(1 - \cos \mu_k (t-\tau)\right) d\tau + f_k(0) \left(1 - \cos \mu_k t\right) \right].$$

Отсюда

$$T_k^2(t) \leqslant \frac{8}{\mu_k^4}\left[T\int_0^T (f_k'(\tau))^2\,d\tau + f_k^2(0)\right],$$

и потому

$$\left\|\sum_{k=m}^{p} T_k(t)\,u_k(x)\right\|_2^2 = \sum_{k=m}^{p} T_k^2(t)\,\mu_k^4 \leqslant$$

$$\leqslant 8T\sum_{k=m}^{p}\int_0^T (f_k'(\tau))^2\,d\tau + 8\sum_{k=m}^{p} f_k^2(0). \quad (182)$$

Из условий же f, $f_t \in L_2(D_T)$ следует, что $f(x, 0) \in L_2(B)$, $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2(0) = \int_B f^2(x, 0)\,dx$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^T (f_k'(\tau))^2\,d\tau = \int_{D_T} f_t^2(x, t)\,dx\,dt.$$

Теорема 2 доказана.

При увеличении гладкости коэффициентов M, функций φ, ψ, f и границы B, а также при повышении порядка согласования начальных и граничных условий и уравнения на множестве точек $\{(x, t)\colon\ x \in S,\ t = 0\}$ улучшается сходимость рядов (164), (179). Мы не будем приводить здесь точные формулировки, касающиеся этой зависимости, а отошлем ко второй главе книги О. А. Ладыженской «Смешанная задача для гиперболического уравнения» (1953), из которой взят и изложенный в этом пункте материал. Ею была исследована сходимость рядов (164), (179) во всех пространствах $W_2^l(B)$, $l \geqslant 1$, причем при условиях в определенном смысле необходимых. Это было сделано не только для первого, но и для второго и третьего краевых условий. Из сходимости в $W_2^l(B)$ и теоремы вложения вытекает соответствующая сходимость в нормах других пространств, в частности, при $l \geqslant \left[\frac{n}{2}\right] + 1$ — равномерная сходимость. В указанной книге дано обоснование других методов решения начально-краевых задач для гиперболических уравнений, в том числе метода конечных разностей для уравнений (154) общего вида. Для решения этих задач можно использовать также метод Галеркина и «функциональный» метод, предложенный О. А. Ладыженской в заметке «О разрешимости основных краевых задач для уравнений параболического и гиперболического типов» (ДАН СССР, 1954, 97, № 3, с. 395—398).

В связи с этим см. также работы: Ладыженская О. А. О решении нестационарных операторных уравнений. — Матем. сб., 1956, **39**, № 4, с. 491—524; Ладыженская О. А. О нестационарных операторных уравнениях и их приложениях к линейным задачам математической физики. — Матем. сб., 1958, **45**, № 2, с. 123—158; Ладыженская О. А., Вишик М. И. Краевые задачи для уравнений в частных производных и некоторых классов операторных уравнений. — УМН, 1956, **11**, № 6, с. 41—97.

Заметим наконец, что из разрешимости первой начально-краевой задачи для гиперболических уравнений и конечности области зависимости решений задачи Коши (см. [**56**]) нетрудно заключить о разрешимости задачи Коши для гиперболических уравнений.

167. Предельная задача для сферы. Мы будем рассматривать сейчас предельную задачу для волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{183}$$

в случае сферы. Предварительно докажем лемму: *если* $u=\varphi(x, y, z, t)=\varphi(M, t)$ *есть решение уравнения* (183) *однородное, нулевой степени относительно переменных* (x, y, z, t), *и если оно обращается в нуль на сфере* $r=t$, *где* $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, *то выражение*

$$u=\int\limits_0^{t-r}\omega(\tau)\,\varphi(M, t-\tau)\,d\tau, \tag{184}$$

где $\omega(\tau)$ — *любая непрерывная функция и нижний предел может быть любым заданным числом, также есть решение уравнения* (183).

Дифференцируя решение (184), получим

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\int\limits_0^{t-r}\omega(\tau)\,\frac{\partial\varphi(M, t-\tau)}{\partial x}\,d\tau-\omega(t-r)\,\varphi(M, r)\,\frac{x}{r}.$$

Но по условию $\varphi(M, r)=0$, и, следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\int\limits_0^{t-r}\omega(\tau)\,\frac{\partial\varphi(M, t-\tau)}{\partial x}\,d\tau.$$

Дифференцируем еще раз:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\int\limits_0^{t-r}\omega(\tau)\,\frac{\partial^2\varphi(M, t-\tau)}{\partial x^2}\,d\tau-\omega(t-r)\left[\frac{\partial\varphi(M, t-\tau)}{\partial x}\right]_{\tau=t-r}\cdot\frac{x}{r}.$$

Совершенно аналогичные выражения получим для вторых производных по y и z. Для второй производной по t будем иметь

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\int_0^{t-r}\omega(\tau)\frac{\partial^2\varphi(M,t-\tau)}{\partial t^2}d\tau+\omega(t-r)\left[\frac{\partial\varphi(M,t-\tau)}{\partial t}\right]_{\tau=t-r}.$$

Подставляя в уравнение (183) и принимая во внимание, что $\varphi(M, t-\tau)$, по условию, удовлетворяет уравнению (183), получим в результате подстановки равенство

$$\frac{\omega(t-r)}{r}\left[\frac{\partial\varphi(M,t-\tau)}{\partial t}r+\frac{\partial\varphi(M,t-\tau)}{\partial x}x+\frac{\partial\varphi(M,t-\tau)}{\partial y}y+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial\varphi(M,t-\tau)}{\partial z}z\right]_{\tau=t-r}=0. \quad (185)$$

Но, в силу теоремы Эйлера об однородных функциях, мы имеем [I; 154]

$$\frac{\partial\varphi(M,t-\tau)}{\partial t}(t-\tau)+\frac{\partial\varphi(M,t-\tau)}{\partial x}x+\frac{\partial\varphi(M,t-\tau)}{\partial y}y+$$
$$+\frac{\partial\varphi(M,t-\tau)}{\partial z}z=0.$$

Подставляя сюда $\tau=t-r$, убеждаемся в том, что равенство (185) выполнено, и, следовательно, формула (184) дает действительно решение уравнения (183).

Будем теперь искать специального вида решение уравнения (183), а именно:

$$u=\psi\left(\frac{t}{r}\right)Y_n(\theta,\varphi), \quad (186)$$

где $Y_n(\theta,\varphi)$ — сферическая функция порядка n и $\psi(x)$ — искомая функция.

Преобразуя уравнение (183) к сферическим координатам, получим [II; 131]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right]. \quad (187)$$

Подставляя выражение (186) и принимая во внимание, что $Y_n(\theta,\varphi)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y_n}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y_n}{\partial\varphi^2}+n(n+1)Y_n=0,$$

мы придем к следующему уравнению для $\psi\left(\frac{t}{r}\right)$:

$$\psi''\left(\frac{t}{r}\right)=\frac{t^2}{r^2}\psi''\left(\frac{t}{r}\right)-n(n+1)\psi\left(\frac{t}{r}\right),$$

или

$$(1-x^2)\psi''(x)+n(n+1)\psi(x)=0. \quad (188)$$

Чтобы найти $\psi(x)$, напомним уравнение, которому удовлетворяют полиномы Лежандра [III₂; 105]:

$$[(1-x^2)P'_n(x)]' + n(n+1)P_n(x) = 0.$$

Введем полином степени $(n+1)$

$$Q_{n+1}(x) = \int_1^x P_n(x)\,dx. \tag{189}$$

Интегрируя обе части предыдущего уравнения по промежутку $(1, x)$, получим

$$(1-x^2)P'_n(x) + n(n+1)Q_{n+1}(x) = 0$$

или, в силу (189),

$$(1-x^2)Q''_{n+1}(x) + n(n+1)Q_{n+1}(x) = 0$$

и, сравнивая с (188), мы видим, что функция

$$u = Q_{n+1}\left(\frac{t}{r}\right)Y_n(0, \varphi) \tag{190}$$

будет решением уравнения (183). В силу (189), $Q_{n+1}(1) = 0$, т. е. решение (190) обращается в нуль при $r = t$. Кроме того, очевидно, что решение (190) является однородной функцией нулевого измерения от переменных (x, y, z, t). Пользуясь леммой, мы можем утверждать, что функция

$$u(M, t) = Y_n(\theta, \varphi)\int_0^{t-r}\omega(\tau)\,Q_{n+1}\left(\frac{t-\tau}{r}\right)d\tau \tag{191}$$

при любом выборе непрерывной функции $\omega(\tau)$ также будет решением уравнения (183).

После этих предварительных соображений перейдем к решению предельной задачи для специального вида предельного условия. Пусть ищется вне сферы $r = 1$ решение уравнения (183), удовлетворяющее однородным начальным условиям

$$u|_{t=0} = 0; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \tag{192}$$

и предельному условию вида

$$u|_{r=1} = f(t)\,Y_n(\theta, \varphi), \tag{193}$$

где $f(t)$ — заданная функция. Мы предполагаем, что эта функция имеет непрерывные производные до второго порядка и что

$$f(0) = f'(0) = 0. \tag{194}$$

Обратимся к формуле (191). Если мы в правой ее части заменим t на $(t+1)$, то получим вновь решение уравнения (183), так как коэффициенты этого уравнения не содержат t. Будем искать решение поставленной предельной задачи в виде

$$u = \begin{cases} Y_n(\theta, \varphi) \int\limits_0^{t+1-r} \omega(\tau)\, Q_{n+1}\left(\frac{t+1-\tau}{r}\right) d\tau & t \geqslant r-1 \\ 0 & t \leqslant r-1, \end{cases} \tag{195}$$

где $\omega(\tau)$ — искомая функция от τ при $\tau \geqslant 0$. Из (195) непосредственно следует первое из условий (192). Дифференцируя формулу (195) по t при $r=1$ и полагая затем $t=0$, получим, в силу $Q_{n+1}(1)=0$, второе из условий (192). Предельное условие (193) дает нам интегральное уравнение для $\omega(\tau)$:

$$\int\limits_0^t \omega(\tau)\, Q_{n+1}(t+1-\tau)\, d\tau = f(t).$$

Написанное уравнение есть уравнение Вольтерра первого рода. Дифференцируя его почленно, получим уравнение

$$\int\limits_0^t \omega(\tau)\, P_n(t+1-\tau)\, d\tau = f'(t),$$

причем, в силу (194), это последнее уравнение, равносильно предыдущему. Дифференцируя еще раз, получим, в силу (194), равносильное уравнение второго рода:

$$\omega(t) + \int\limits_0^t \omega(\tau)\, P_n'(t+1-\tau)\, d\tau = f''(t).$$

Ядра написанных уравнений зависят только от разности $(t-\tau)$, и, применяя метод, указанный в [**IV**$_1$; **53**], получим решение в виде

$$\omega(t) = f''(t) - \int\limits_0^t H(t-x)\, f''(x)\, dx,$$

где $H(z)$ есть сумма вычетов функции

$$\frac{-s^n}{s^n + s^{n-1}P_n'(1) + s^{n-2}P_n''(1) + \ldots + P_n^{(n)}(1)}\, e^{sz}$$

относительно корней ее знаменателя.

Предельное условие (193) начинает действовать с момента $t=0$. До этого момента мы имеем покой. Фронт возмущения будет двигаться со скоростью единицы. Вне сферы с центром в начале и радиусом $(t+1)$ мы будем иметь, в силу (195), к моменту времени t покой. На самом фронте волны могут терпеть разрыв непрерывности производные второго порядка. Отметим, что к любому непрерывному предельному условию мы можем приблизиться в среднем на сфере при помощи предельных условий вида (193). Это следует из замкнутости сферических функций. Указанный выше метод применим и на плоскости для внешности круга (Смирнов В. И. — ДАН СССР, 1937, **14**, № 1).

168. Колебания внутренней части сферы. Будем теперь строить решение уравнения (183) при наличии условий (192) и (193) для внутренней части сферы. Если $n \geqslant 1$, то, как нетрудно показать, $Q_{n+1}(x)$ есть четная функция при четном $(n+1)$ и нечетная при нечетном $(n+1)$, и решение (191) мы можем записать в виде

$$u_1(M, t) = Y_n(\theta, \varphi) \int\limits_0^{t-r} \omega_1(\tau)\, Q_{n+1}\left(\frac{\tau - t}{r}\right) d\tau. \tag{196}$$

Заменяя в правой части этой формулы t на $t-1$, получим решение вида

$$u_2(M, t) = Y_n(\theta, \varphi) \int\limits_0^{t+r-1} \omega_2(\tau)\, Q_{n+1}\left(\frac{\tau + 1 - t}{r}\right) d\tau, \tag{197}$$

где $\omega_2(\tau) = 0$ при $\tau < 0$. Этому решению соответствует волна, идущая от поверхности сферы внутрь. Оно перестает быть конечным при $t > 1$ в центре сферы, т. е. при $r = 0$. При $t = 1$ соответствующая волна доходит до центра сферы, и естественно добавить к этому решению решение (196), заменив в нем t на $t-1$ и выбрав $\omega_1(\tau)$ специальным образом. Это приводит нас к решению вида

$$u_3(M, t) = Y_n(\theta, \varphi) \int\limits_{t-1-r}^{t-1+r} \omega_3(\tau)\, Q_{n+1}\left(\frac{\tau + 1 - t}{r}\right) d\tau, \tag{198}$$

где $\omega(\tau) = 0$ при $\tau < 0$. В пределах интегрирования мы имеем $-r \leqslant \tau + 1 - t \leqslant r$, и решение (198) остается конечным й при $r = 0$. Оно обращается при этом в нуль. Для того, чтобы делать меньше предположений относительно производных функции $f(t)$, входящей в предельное условие (193), возьмем за основное то решение, которое получается из (198) дифференцированием по t. Принимая во внимание, что $Q_{n+1}(\pm 1) = 0$ при $n \geqslant 1$, получим решение

$$u(M, t) = Y_n(\theta, \varphi)\, \varphi_n(r, t), \tag{199}$$

где

$$\varphi_n(r, t) = \begin{cases} \dfrac{1}{r} \displaystyle\int\limits_{t-1-r}^{t-1+r} \omega(\tau)\, P_n\left(\frac{\tau + 1 - t}{r}\right) d\tau & \text{при} \quad t > 1 - r, \\ 0 & \text{при} \quad t \leqslant 1 - r \end{cases} \tag{200}$$

и $\omega(\tau)=0$ при $\tau\leqslant 0$. Из этого выражения, как и в [**167**] следует, что при всяком $\omega(\tau)$ соблюдаются условия (192). Легко непосредственно проверить, что формулы (199) и (200) дают решение уравнения (183) и при $n=0$, если $\omega(\tau)$ имеет непрерывную производную. Отметим, что формула (198) не дает решения уравнения (183) при $n=0$.

Предельное условие (193) приводит к следующему уравнению:

$$\int_{t-2}^{t}\omega(\tau)P_n(\tau+1-t)\,d\tau=f(t). \tag{201}$$

Положим, что $f(t)$ имеет непрерывную производную и $f(0)=f'(0)=0$. Дифференцируя уравнение (201) по t, получим

$$\omega(t)+(-1)^{n+1}\omega(t-2)-\int_{t-2}^{t}\omega(\tau)P_n'(\tau+1-t)\,d\tau=f'(t)\quad(n\geqslant 1) \tag{202_1}$$

и при $n=0$

$$\omega(t)-\omega(t-2)=f'(t). \tag{202_2}$$

Уравнение (202_1) дает возможность построить $\omega(\tau)$ методом последовательных шагов. Сначала определяем $\omega(t)$ в промежутке $0\leqslant t\leqslant 2$ из уравнения Вольтерра:

$$\omega(t)-\int_{0}^{t}\omega(\tau)P_n'(\tau+1-t)\,d\tau=f'(t).$$

Затем определяем $\omega(t)$ в промежутке $2<t\leqslant 4$ из уравнения

$$\omega(t)-\int_{2}^{t}\omega(t)P_n'(\tau+1-t)\,d\tau=$$
$$=f'(t)+(-1)^n\omega(t-2)+\int_{0}^{2}\omega(\tau)P_n'(\tau+1-t)\,d\tau,$$

правая часть которого известна и т. д. Полученную функцию $\omega(\tau)$ подставляем в правую часть (200).

Для решения уравнения (202_1) можно использовать одностороннее преобразование Лапласа. Наметим в общих чертах этот метод. Окончательная формула будет нами получена ниже другим путем.

В уравнении (202_1) представляем интеграл в виде суммы двух интегралов с нижним пределом нуль, умножаем обе части на

e^{-st}, где $s = \sigma_1 + \sigma_2 i$, а σ_1 — достаточно большое положительное число, и интегрируем по t на промежутке $0 \leqslant t < \infty$. Введем обозначения:

$$\Omega(s) = \int_0^\infty e^{-st}\omega(t)\,dt, \quad F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt; \tag{203}$$

воспользуемся теоремой свертывания [IV$_1$; 52] и формулами

$$\left.\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-st} P_n(1-t)\,dt &= \sqrt{\frac{\pi}{2s}}\, e^{i\frac{\pi}{4}(2n+1)} e^{-s} H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(-is), \\ \int_0^\infty e^{-st} P_n(-1-t)\,dt &= (-1)^n \sqrt{\frac{\pi}{2s}}\, e^{i\frac{\pi}{4}(2n-1)} e^{s} H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(-is). \end{aligned}\right\} \tag{204}$$

Эти формулы легко получаются путем непосредственного интегрирования левых частей Указанный прием приводит к следующему уравнению для $\Omega(s)$

$$\sqrt{\frac{2\pi}{s}}\, e^{i\frac{\pi}{4}(2n+1)} e^{-s} J_{n+\frac{1}{2}}(-is)\,\Omega(s) = F(s).$$

Использовав формулу обращения для преобразования Лапласа, получим

$$\omega(t) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}(2n+1)}}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \sqrt{\frac{s}{2\pi}}\, \frac{e^{(t+1)s} F(s)}{J_{n+\frac{1}{2}}(-is)}\, ds. \tag{205}$$

Вещественное число σ_1 берется настолько большим, чтобы все особенности функции $F(s)$ лежали левее прямой интегрирования

Оправдание возможности применения преобразования Лапласа и обратного преобразования облегчается в данном случае тем, что при помощи метода шагов мы уже установили существование $\omega(t)$, и можем дать оценку этой функции при больших t, если наложить некоторые условия на $f'(t)$ при больших t Подставляя выражение (205) в формулу (200), переставляя порядок интегрирования и пользуясь легко доказываемым равенством

$$\int_{-1}^{1} e^{px} P_n(x)\,dx = \sqrt{2\pi}\, e^{i\frac{\pi}{4}(2n+1)} \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(-ip)}{\sqrt{p}}, \tag{206}$$

мы получим

$$\varphi_n(r, t) = \frac{1}{\sqrt{r}\, 2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(-irs)}{J_{n+\frac{1}{2}}(-is)} F(s) e^{st}\, ds \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{207}$$

Укажем более короткий путь получения последней формулы. Подставляя выражение (199) в уравнение (183) и пользуясь уравнением для $Y_n(\theta, \varphi)$, получим следующее уравнение для $\varphi_n(r, t)$.

$$\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \varphi_n}{\partial r} - \frac{n(n+1)}{r^2} \varphi_n. \tag{208}$$

К этому уравнению надо добавить условия

$$\varphi_n|_{t=0} = \left.\frac{\partial \varphi_n}{\partial t}\right|_{t=0} = 0; \tag{209}$$

$$\varphi_n|_{r=1} = f(t). \tag{210}$$

Умножая обе части уравнения (208) на e^{-st}, интегрируя по t на промежутке $0 \leqslant t < \infty$ и учитывая условия (209), получим для функции

$$X_n(r, s) = \int_0^\infty e^{-st} \varphi_n(r, t)\, dt \tag{211}$$

уравнение

$$\frac{d^2 X_n}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dX_n}{dr} + \left(-s^2 - \frac{n(n+1)}{r^2}\right) X_n = 0. \tag{212}$$

Применение преобразования Лапласа к (210) дает

$$X_n|_{r=1} = F(s). \tag{213}$$

Кроме того, функция $X_n(r, s)$ должна быть конечной при $r = 0$. Уравнение (212) приводится к уравнению Бесселя и, принимая во внимание (213) и конечность X_n при $r = 0$, получаем

$$X_n(r, s) = \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(-irs)}{J_{n+\frac{1}{2}}(-is)} F(s).$$

После этого обращение преобразования (211) и приводит нас к формуле (207)

Выяснение условий, которые надо наложить на $f(t)$ для оправдания применения преобразования Лапласа и формулы (207), находится в работе. Петрашень Г. И. Динамические задачи теории упругости в случае изотропной сферы. — Уч. зап. ЛГУ, сер. матем. наук, 1950, № 21. Материал настоящего и следующего параграфов взят нами из этой работы.

169. Исследование решения. Проведем исследование полученного нами решения

$$\varphi_n(r, t) = \frac{1}{\sqrt{r}\, 2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(-irs)}{J_{n+\frac{1}{2}}(-is)} F(s)\, e^{st}\, ds. \tag{214}$$

Будем считать для определенности, что функция $f(t)$ отлична от нуля лишь на некотором конечном промежутке $[0, T]$, имеет непрерывную производную до второго порядка и

$$f(0) = f'(0) = f(T) = f'(T) = 0.$$

При этом, интегрируя два раза по частям, получим

$$F(s) = \int\limits_0^T e^{-st} f(t)\, dt = \frac{1}{s^2} \int\limits_0^T e^{-st} f''(t)\, dt. \tag{215}$$

Мы будем предполагать, что функция $F(s)$ имеет вид

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s)\, e^{-sT}, \tag{216}$$

где $F_1(s)$ и $F_2(s)$ — рациональные дроби, у которых степень знаменателя по крайней мере на две единицы выше степени числителя. Легко проверить, что функция $F(s)$ будет обладать таким свойством, например, в следующих двух случаях:

$$f(t) = t^2 (T - t)^2; \quad f(t) = \sin^2 \frac{\pi t}{T} \qquad (0 \leqslant t \leqslant T).$$

Как видно из формулы (215), функция $F(s)$ есть целая функция.

Функция $J_{n+\frac{1}{2}}(-is)$ имеет чисто мнимые корни, которые мы обозначим $\pm k_s i$ $(s = 1, 2, 3, \ldots)$, где k_s — корни уравнения $J_{n+\frac{1}{2}}(k) = 0$ [III₂; 146].

Воспользуемся формулой

$$J_{n+\frac{1}{2}}(z) = \frac{1}{2}\left[H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(z) + H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(z)\, i\right]$$

и следующими выражениями функций Ханкеля:

$$\left.\begin{aligned} H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(z) &= \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\left(z - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{2}\right)} \left[1 + \varphi_1\left(\frac{1}{z}\right)\right], \\ H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(z) &= \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-i\left(z - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{2}\right)} \left[1 + \varphi_2\left(\frac{1}{z}\right)\right], \end{aligned}\right\} \tag{217}$$

где $\varphi_1\left(\frac{1}{z}\right)$ и $\varphi_2\left(\frac{1}{z}\right)$ — полиномы относительно $\frac{1}{z}$ без свободного члена [III₂; 149]. Подставляя $z = -is$, мы легко убедимся в том, что во всех точках линии интегрирования, при достаточно больших σ, модуль отношения

$$\frac{H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(-is)}{H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(-is)}$$

не превышает некоторого числа, меньшего единицы. Учитывая это, мы можем написать:

$$\frac{J_{n+\frac{1}{2}}(-irs)}{J_{n+\frac{1}{2}}(-is)} = \frac{H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(-irs)}{H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(-is)} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \left[\frac{H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(-irs)}{H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(-is)}\right]^p +$$

$$+ \frac{H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(-irs)}{H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(-is)} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \left[\frac{H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(-irs)}{H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(-is)}\right]^p.$$

Подставляя в формулу (214) и интегрируя ряд почленно, получим

$$\varphi_n(r, t) = \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(-irs)}{H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(-is)} \left[\frac{H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(-irs)}{H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(-is)}\right]^p F(s) e^{st}\, ds +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(-irs)}{H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(-is)} \left[\frac{H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(-irs)}{H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(-is)}\right]^p F(s)\, e^{st}\, ds. \quad (218)$$

Покажем, что фактически в правой части мы имеем лишь конечное число слагаемых, и это число растет с возрастанием t. Рассмотрим в качестве примера слагаемые первой суммы. Пользуясь формулами (217), мы можем написать интегралы, входящие в эту сумму, в виде

$$\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(s) \left[1 + O\left(|z|^{-1}\right)\right] e^{s\,[t-(2p+1)+r]}\, ds. \quad (219)$$

Положим, что число p настолько велико, что

$$t - (2p + 1) + r < 0. \quad (220)$$

Проведем справа от прямой интегрирования полуокружность с центром σ и достаточно большим радиусом R. Учитывая формулу (216) для $F(s)$ и указанные выше свойства $F_1(s)$ и $F_2(s)$, мы можем утверждать, что при условии (220) интеграл по этой полуокружности от подынтегральной функции интеграла (219) стремится к нулю при беспредельном возрастании R.

С другой стороны, интеграл по замкнутому контуру, образованному этой полуокружностью и отрезком $-R \leqslant \sigma_1 \leqslant R$ прямой интегрирования интеграла (219), равен нулю, так как внутри этого контура нет особых точек подынтегральной функции. Отсюда следует, что при выполнении условия (220) интеграл (219) равен нулю. Совершенно так же слагаемые второй суммы правой части формулы (218) равны нулю, если выполнено условие

$$t-(2p+1)-r<0. \tag{221}$$

Оставшиеся слагаемые описывают сферические волны, которые отразились то или иное число раз от сферы $r=1$. Пользуясь первой из формул (204), нетрудно показать, что подынтегральная функция в интегралах, стоящих в правой части формулы (218), имеет конечное число особых точек на конечном расстоянии, которые определяются, как корни уравнения:

$$z^n-P_n'(1)\,z^{n-1}+\ldots+(-1)^n P_n^{(n)}(1)=0,$$

и что величина интеграла есть сумма вычетов в этих полюсах, т. е. упомянутые интегралы выражаются через элементарные функции.

Указанное выше использование формулы (214) приводит, таким образом, к «методу Даламбера» для решения задачи о колебании сферы при предельном условии (193).

Укажем теперь другое преобразование формулы (214), которое приводит к «методу Фурье» или, точнее говоря, к разложению решения задачи в ряд по собственным колебаниям сферы. Подставим в формулу (214) выражение (216) для $F(s)$.

При подстановке слагаемого F_2e^{-sT} подынтегральная функция будет содержать множитель $e^{s(t-T)}$, и совершенно так же, как и выше, можно показать, что соответствующий интеграл обратится в нуль при $t<T$, т. е. мы имеем

$$\varphi_n(r,t)=\frac{1}{\sqrt{r}\,2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{J_{n+\frac{1}{2}}(-irs)}{J_{n+\frac{1}{2}}(-is)}F_1(s)\,e^{st}\,ds. \tag{222}$$

Можно показать, что величина этого интеграла равна сумме вычетов его подынтегральной функции, и мы получаем, считая, что полюсы $F_1(s)$ не совпадают с корнями $J_{n+\frac{1}{2}}(-is)$ (отсутствие резонанса):

$$\varphi_n(r,t)=\psi_n(r,t)-2\sum_{p=1}^{\infty}\frac{A_p\sin(k_pt+\omega_p)}{J_{n-\frac{1}{2}}(k_p)}\cdot\frac{J_{n+\frac{1}{2}}(k_pr)}{\sqrt{r}}, \tag{223}$$

где $\psi_n(r,t)$ соответствует сумме вычетов в полюсах $F_1(s)$ и введено обозначение

$$F_1(k_pi)=A_pe^{i\omega_p}.$$

Можно показать, что при сделанных относительно $F_1(s)$ предположениях написанный ряд сходится равномерно относительно t и r. Он представляет собою наложение собственных колебаний системы. Отсюда следует, что слагаемое $\psi_p(r,t)$, которое может быть представлено в конечном виде, удовлетворяет уравнению (183) и предельному условию (193). Если имеется совпадение полюса $F_1(s)$ с корнем $J_{n+\frac{1}{2}}(-is)$, то в правой части (223) появится резонансный член, содержащий t вне знака тригонометрических функций.

Если $t>T$, то мы получим только ряд по собственным колебаниям, поскольку $F(s)$ есть целая функция, и при $t>T$ мы можем применять лемму Жордана [III₂; 60] для некоторой системы полуокружностей с центром σ_1 для подынтегральной функции, в которой стоит вся функция $F(s)$. При $t<T$ мы

не имеем должных оценок подынтегральной функции на вышеупомянутых полуокружностях. Отсутствие дополнительного слагаемого, кроме ряда по собственным колебаниям, связано с выключением внешней силы, входящей в предельное условие.

170. Предельная задача для телеграфного уравнения. При решении предельных задач для уравнений эллиптического и параболического типов мы использовали теорию потенциала, причем в основе всего построения лежало некоторое сингулярное решение соответствующего дифференциального уравнения. Для уравнений гиперболического типа применение этого метода затруднительно. Лишь в одномерном случае можно, пользуясь основной идеей этого метода, привести предельную задачу к интегральному уравнению Вольтерра

Рассмотрим уравнение [II; 198]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+c^2 u \tag{224}$$

на промежутке $0 \leqslant x \leqslant l$ с однородными начальными условиями

$$u\,|_{t=0}=u_t\,|_{t=0}=0 \tag{225}$$

и предельными условиями

$$u\,|_{x=0}=\omega_1(t); \quad u\,|_{x=l}=\omega_2(t). \tag{226}$$

Отметим, что начальные условия могут быть всегда приведены к однородным, если использовать решение задачи для неограниченного промежутка [II; 198], как это мы уже делали в [152] для уравнения теплопроводности Вводя, как и в [II; 198], функцию $I(z)=J_0(iz)$, мы без труда убедимся в том, что функция $I\left(c\sqrt{t^2-x^2}\right)$ есть решение уравнения (224). Оно будет нам служить в качестве основного решения.

Помещая соответствующие этому решению непрерывно действующие источники на концах промежутка $[0, l]$, мы получим, как нетрудно непосредственно проверить, решения уравнения (224)

$$\int\limits_0^{t-x} \varphi(\tau)\, I\left(c\sqrt{(t-\tau)^2-x^2}\right) d\tau$$

и

$$\int\limits_0^{t-(l-x)} \psi(\tau)\, I\left(c\sqrt{(t-\tau)^2-x^2}\right) d\tau,$$

где функции $\varphi(\tau)$ и $\psi(\tau)$ считаются дифференцируемыми Дифференцируя эти решения по x, получаем опять решения, и ищем решение задачи (224), (225), (226) в виде суммы

$$u=\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_0^{t-x} \varphi(\tau)\, I\left(c\sqrt{(t-\tau)^2-x^2}\right) d\tau+ \\ +\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_0^{t-(l-x)} \psi(\tau)\, I\left(c\sqrt{(t-\tau)^2-(l-x)^2}\right) d\tau, \tag{227}$$

причем считается, что $\varphi(\tau)=\psi(\tau)=0$ при $\tau<0$.

Формулу (227) можно написать в виде

$$\left.\begin{aligned}u = -\varphi(t-x) - \int_0^{t-x} \varphi(\tau)\frac{cxI'\left(c\sqrt{(t-\tau)^2-x^2}\right)}{\sqrt{(t-\tau)^2-x^2}}\,d\tau + \\ + \psi(t-l+x) + \int_0^{t-(l-x)} \psi(\tau)\frac{c(l-x)\,I'\left(c\sqrt{(t-\tau)^2-(l-x)^2}\right)}{\sqrt{(t-\tau)^2-(l-x)^2}}\,d\tau.\end{aligned}\right\} \quad (228)$$

Напомним разложение:

$$I(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(s!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2s}.$$

Уравнение (224) и начальные условия (225) удовлетворяются при любом выборе $\varphi(\tau)$ и $\psi(\tau)$. Предельные условия (226) приводят к следующей системе уравнений для $\varphi(\tau)$ и $\psi(\tau)$:

$$\left.\begin{aligned}-\varphi(\tau) + \psi(t-l) + \int_0^{t-l} \psi(\tau)\frac{clI'\left(c\sqrt{(t-\tau)^2-l^2}\right)}{\sqrt{(t-\tau^2)-l^2}}\,d\tau = \omega_1(t), \\ -\varphi(t-l) + \psi(t) - \int_0^{t-l} \varphi(\tau)\frac{clI'\left(c\sqrt{(t-\tau)^2-l^2}\right)}{\sqrt{(t-\tau)^2-l^2}}\,d\tau = \omega_2(t).\end{aligned}\right\} \quad (229)$$

Функции $\omega_1(\tau)$ и $\omega_2(t)$ считаем непрерывно дифференцируемыми. Полагаем

$$\psi(t) - \varphi(t) = \varphi_1(t); \quad \psi(t) + \varphi(t) = \psi_1(t).$$

Складывая и вычитая почленно уравнения (229), получаем раздельные уравнения для $\varphi_1(t)$ и $\psi_1(t)$:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1(t) + \varphi_1(t-l) + cl\int_0^{t-l} \varphi_1(\tau)\frac{I'\left(c\sqrt{(t-\tau)^2-l^2}\right)}{\sqrt{(t-\tau)^2-l^2}}\,d\tau = \\ = \omega_1(t) + \omega_2(t), \\ -\psi_1(t) + \psi_1(t-l) + cl\int_0^{t-l} \psi_1(\tau)\frac{I'\left(c\sqrt{(t-\tau)^2-l^2}\right)}{\sqrt{(t-\tau)^2-l^2}}\,d\tau = \\ = \omega_1(t) - \omega_2(t),\end{aligned}\right\} \quad (230)$$

причем $\varphi_1(\tau) = \psi_1(\tau) = 0$ при $\tau < 0$.

Из этих уравнений можно определять $\varphi_1(t)$ и $\psi_1(t)$ при помощи последовательных шагов на промежутках $[0, l]$, $[l, 2l]$, и т. д. Мы имеем

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi_1(t)=\omega_1(t)+\omega_2(t);\quad \psi_1(t)=\omega_2(t)-\omega_1(t)\quad \text{при}\quad 0\leqslant t\leqslant l;\\
&\varphi_1(t)=\omega_1(t)+\omega_2(t)-\varphi_1(t-l)-cl\int\limits_0^{t-l}\varphi_1(\tau)\frac{I'\left(c\sqrt{(t-\tau)^2-l^2}\right)}{\sqrt{(t-\tau)^2-l^2}}\,d\tau,\\
&\psi_1(t)=\omega_2(t)-\omega_1(t)+\psi_1(t-l)+cl\int\limits_0^{t-l}\psi_1(\tau)\frac{I'\left(c\sqrt{(t-\tau)^2-l^2}\right)}{\sqrt{(t-\tau)^2-l^2}}\,d\tau\\
&\qquad\qquad\text{при}\ \ l\leqslant t\leqslant 2l
\end{aligned}\right\}\quad(231)$$

и т. д.

Вместо метода шагов можно применить к решению интегральных уравнений и преобразование Лапласа.

Материал настоящего параграфа взят мною из неопубликованной работы Д. А. Добротина.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Владимир Иванович Смирнов

Курс высшей математики, том четвертый, часть вторая

Редактор *А. В. Угарова*

Техн. редактор *Л. В. Лихачева*

Корректор *М. Л. Медведская*

ИБ № 11927

Сдано в набор 06.02.81. Подписано к печати 19.10.81. Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Бумага тип. № 2. Литературная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 34,5 Уч.-изд. л. 35.53. Тираж 30 000 экз. Заказ № 999. Цена 1 р. 40 к.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ленинградская типография № 2 головное предприятие ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
198052, г. Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29.