Акад. В. И. СМИРНОВ

КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

ТОМ ПЯТЫЙ

Допущено
Министерством высшего образования СССР
в качестве учебного пособия
для механико-математических
и физико-математических факультетов
университетов

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1959

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 7

Глава I

ИНТЕГРАЛ СТИЛТЬЕСА

1. Множества и их мощность (11). **2.** Интеграл Стилтьеса и его основные свойства (14). **3.** Суммы Дарбу (18). 4. Интеграл Стилтьеса от непрерывной функции (23). **5.** Несобственный интеграл Стилтьеса (26). **6.** Функция скачков (29). **7.** Физическая интерпретация (33). **8.** Функции ограниченной вариации (34). **9.** Интегрирующая функция ограниченной вариации (41). **10.** Существование интеграла Стилтьеса (43). **11.** Предельный переход в интеграле Стилтьеса (44). **12.** Теорема Хелли (46). **13.** Принцип выбора (50). **14.** Пространство непрерывных функций (52). **15.** Общая форма функционалов в C (54). **16.** Линейные операторы в C (59). **17.** Функции промежутков (60). **18.** Общий интеграл Стилтьеса (62). **19.** Свойства (общего) интеграла Стилтьеса (64). **20.** Существование общего интеграла Стилтьеса (68). **21.** Функции промежутков на плоскости (70). **22.** Переход к функции точки (73). **23.** Интеграл Стилтьеса на плоскости (76). **24.** Функция ограниченной вариации на плоскости (78). **25.** Пространство непрерывных функций многих переменных (81). **26.** Интеграл Фурье — Стилтьеса (82). **27.** Формула обращения (85). **28.** Теорема свертывания (87). **29.** Интеграл Коши — Стилтьеса (89).

Глава II

ФУНКЦИИ МНОЖЕСТВ И ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

§ 1. Функции множеств и теория измерения 93

30. Операции над множествами (93). **31.** Точечные множества (97). **32.** Свойства замкнутых и открытых множеств (98). **33.** Элементарная фигура (102). **34.** Внешняя мера и ее свойства (105). **35.** Измеримые множества (108). **36.** Измеримые множества (продолжение) (117). **37.** Критерии измеримости (118). **38.** Тело множеств (120). **39.** Независимость от выбора осей (123). **40.** Тело B (123). **41.** Случай одного переменного (125).

§ 2. Измеримые функции 126

42. Определение измеримых функций (126). **43.** Свойства измеримых функций (130). **44.** Предел измеряемых функций (131). **45.** Свойство C (136). **46.** Кусочно-постоянные функции (136). **47.** Класс B(139)

§ 3. Интеграл Лебега 140

48. Интеграл от ограниченной функции (140). **49.** Свойства интеграла (143). **50.** Интеграл от неограниченной неотрицательной функции (148). **51.** Свойства интеграла (152). **52.** Функция любого знака (155). **53.** Комплексные суммируемые функции (161). **54.** Предельный переход под знаком интеграла (162). **55.** Класс L_2 (166). **56.** Сходимость в среднем (168). **57.** Функциональное пространство Гильберта (172). **58.** Ортогональные системы функций (174). **59.** Пространство l_2 (180). **60.** Линеалы в L_2 (183). **61.** Примеры замкнутых систем (187). **62.** Неравенства Гёльдера и Минковского (188). **63.** Интеграл по множеству бесконечной меры (193). **64.** Класс L_2 на множестве бесконечной меры (198). **65.** Интегрирующая функция ограниченной вариации (201). **66.** Приведение кратных интегралов (203). **67.** Случай характеристической функции (207). **68.** Теорема Фубини (209). **69.** Перестановка порядка интегрирования (214). **70.** Непрерывность в среднем (216). **71.** Средние функции (217).

Глава III

ФУНКЦИИ МНОЖЕСТВ. АБСОЛЮТНАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ. ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ ИНТЕГРАЛА

72. Аддитивные функции множеств (225). **73.** Сингулярная функция (229). **74.** Случай одного переменного (232). **75.** Абсолютно непрерывные функции множеств (237). **76.** Пример (243). **77.** Абсолютно непрерывные функции многих переменных (246). **78.** Вспомогательные предложения (248). **79.** Вспомогательные предложения (продолжение) (253). **80.** Основная теорема (258). **81.** Интеграл Хеллингера (261). **82.** Случай одного переменного (265). **83.** Свойства интеграла Хеллингера (269).

Глава IV

МЕТРИЧЕСКИЕ И НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

84. Метрическое пространство (274). **85.** Пополнение метрического пространства (276). **86.** Операторы и функционалы. Принцип сжатых отображений (282). **87.** Примеры (283). **88.** Примеры применения принципа сжатых отображений (286). **89.** Компактность (288). **90.** Компактность в C (290). **91.** Компактность в L_p (291). **92.** Компактность в l_p (295). **93.** Функционалы на компактных в себе множествах (296). **94.** Сепарабельность (298). **95.** Линейные нормированные пространства (299). **96.** Примеры нормированных пространств (302). **97.** Операторы в нормированных пространствах (303). **98.** Линейные функционалы (307). **99.** Сопряженные пространства (310). **100.** Слабая сходимость функционалов (313). **101.** Слабая сходимость элементов (315). **102.** Линейные функционалы в C, L_p и l_p (319). **103.** Слабая сходимость в C, L_p и l_p (327). **104.** Пространство линейных операторов и сходимость последовательности операторов (328). **105.** Сопряженные операторы (331). **106.** Вполне непрерывные операторы (331). **107.** Операторные уравнения (333). **108.** Вполне непрерывные операторы в C, L_p и l_p (335). **109.** Обобщенные производные (338). **110.** Обобщенные производные (продолжение) (343). **111.** Случай звездной области (346). **112.** Пространства $\tilde{W}_p^{(l)}$ и $W_p^{(l)}$ (347).

113. Свойства функций класса $W_p^{(l)}(D)$ (350). **114.** Теоремы вложения (358). **115.** Интегральные операторы с полярным ядром (362). **116.** Интегральные представления С. Л. Соболева (368). **117.** Теоремы вложения (371). **118.** Области более общего типа (374). **119.** Пространство $\overset{\circ}{C}{}^{(l)}(D)$ (376).

Глава V

ПРОСТРАНСТВО ГИЛЬБЕРТА

§ 1. Теория ограниченных операторов 386

120. Аксиомы пространства (386). **121.** Ортогональность и ортогональные системы элементов (388). **122.** Проекция (393). **123.** Линейные функционалы (395). **124.** Линейные операторы (397). **125.** Билинейные и квадратичные функционалы (401). **126.** Границы самосопряженного оператора (403). **127.** Обратный оператор (404). **128.** Спектр оператора (408). **129.** Спектр самосопряженного оператора (411). **130.** Резольвента (415). **131.** Последовательности операторов (416). **132.** Слабая сходимость (417). **133.** Вполне непрерывные операторы (419). **134.** Пространства H и l_2 (421). **135.** Линейные уравнения со вполне непрерывными операторами (425). **136.** Вполне непрерывные самосопряженные операторы (430). **137.** Унитарные операторы (435). **138.** Абсолютная норма оператора (438). **139.** Операции над подпространствами (440). **140.** Операторы проектирования (442). **141.** Разложение единицы. Интеграл Стилтьеса (447). **142.** Спектральная функция самосопряженного оператора (453). **143.** Непрерывные функции самосопряженного оператора (456). **144.** Формула для резольвенты и характеристика регулярных значений λ (458). **145.** Собственные значения и собственные элементы (461). **146.** Чисто точечный спектр (463). **147.** Непрерывный простой спектр (464). **148.** Инвариантные подпространства (470). **149.** Общий случай непрерывного спектра (473). **150.** Случай смешанного спектра (475). **151.** Дифференциальные решения (476). **152.** Операция умножения на независимую переменную (480). **153.** Унитарная эквивалентность самосопряженных операторов (483). **154.** Спектральное разложение унитарных операторов (484). **155.** Функции самосопряженного оператора (485). **156.** Коммутирующие операторы (489). **157.** Возмущение спектра самосопряженного оператора (491). **158.** Нормальные операторы (493). **159.** Вспомогательные предложения (495). **160.** Степенной ряд от оператора (498). **161.** Спектральная функция (500).

§ 2. Пространства l_2 и L_2 503

162. Линейные операторы в l_2 (503). **163.** Ограниченные операторы (505). **164.** Унитарные матрицы и матрицы проектирования (509). **165.** Самосопряженные матрицы (511). **166.** Случай непрерывного спектра (514). **167.** Матрицы Якоби (518). **168.** Дифференциальные решения (521). **169.** Примеры (524). **170.** Слабая сходимость в l_2 (527). **171.** Вполне непрерывные операторы в l_2 (528). **172.** Интегральные операторы в L_2 (529). **173.** Сопряженный оператор (530). **174.** Вполне непрерывные операторы (532). **175.** Спектральная функция (534). **176.** Спектральная функция (продолжение) (535). **177.** Унитарные преобразования в L_2 (537). **178.** Преобразования Фурье (540). **179.** Преобразование Фурье и функции Эрмита (544). **180.** Операция умножения (546). **181.** Ядра, зависящие от разности (547). **182.** Слабая сходимость (552). **183.** Другие осуществления пространства H (553).

§ 3. Неограниченные операторы 554

184. Замкнутые операторы (554). **185.** Сопряженный оператор (556). **186.** График оператора (559). **187.** Симметричные и самосопряженные операторы (561). **188.** Примеры неограниченных операторов (564). **189.** Спектр самосопряженного оператора (575). **190.** Случай точечного спектра (578). **191.** Инвариантные подпространства и приводимость оператора (580). **192.** Разложение единицы. Интеграл Стилтьеса (583). **193.** Непрерывные функции самосопряженного оператора (589). **194.** Резольвента (590). **195.** Собственные значения (592). **196.** Случай смешанного спектра (593). **197.** Функции самосопряженного оператора (595). **198.** Малые возмущения спектра (598). **199.** Оператор умножения (599). **200.** Интегральные операторы (604). **201.** Расширение замкнутого симметричного оператора (607). **202.** Индексы дефекта (611). **203.** Сопряженный оператор (614). **204.** Максимальные операторы (616). **205.** Расширение симметричных полуограниченных операторов (617). **206.** Сравнение симметричных полуограниченных операторов (623). **207.** Примеры на теорию расширений (624). **208.** Спектр симметричного оператора (627). **209.** Некоторые теоремы о расширениях и их спектрах (629). **210.** Независимость индексов дефекта от λ (632). **211.** Об инвариантности непрерывной части ядра спектра при симметричных расширениях (634). **212.** О спектрах самосопряженных расширений (635). **213.** Примеры (636). **214.** Бесконечные матрицы (637). **215.** Матрицы Якоби (639). **216.** Матрицы и операторы (644). **217.** Унитарная эквивалентность C-матриц (646). **218.** Существование спектральной функции (649).

Предметный указатель 653

ПРЕДИСЛОВИЕ

В современных теоретических схемах математической физики большое значение имеют теория функций вещественного переменного, различные функциональные пространства и общая теория операторов. Этим вопросам в основном и посвящена настоящая книга, которая написана на основе пятого тома моего „Курса высшей математики", вышедшего в 1947 году.

Содержанием теории функций вещественного переменного в настоящей книге является теория классического интеграла Стилтьеса, интеграла Лебега—Стилтьеса и теория вполне аддитивных функций множеств.

В первой главе изложена теория классического интеграла Стилтьеса, а также рассмотрено более общее определение интеграла Стилтьеса по промежутку любого типа, основанное на совпадении соответствующих верхнего и нижнего интегралов Дарбу при разбиении основного промежутка на промежутки любого типа. В качестве примеров классического интеграла Стилтьеса рассматриваются интегралы Фурье—Стилтьеса и Коши—Стилтьеса. Для них устанавливаются формулы обращения. Интеграл Стилтьеса определяется и для случая плоскости.

Далее в первой главе изучается пространство C непрерывных функций и устанавливается общая форма линейных функционалов в этом пространстве.

Во второй главе излагаются основы метрической теории функций вещественного переменного и интеграла Лебега—Стилтьеса. Вся теория излагается для случая плоскости и выясняется возможность очевидного обобщения ее на случай n-мерного эвклидова пространства. Теория меры строится на основе любой неотрицательной, аддитивной, нормальной, функции, определенной на полуоткрытых двумерных промежутках. Интеграл Лебега—Стилтьеса от ограниченной функции определяется на основе совпадения верхнего и нижнего интегралов Дарбу при разбиении основного измеримого множества на измеримые множества. В конце второй главы подробно излагается процесс усреднения функций

и свойства средних функций при некоторых условиях на усредняющее ядро. Процесс усреднения широко используется в дальнейшем.

В третьей главе излагается теория вполне аддитивных функций множеств. После доказательства первоначальных теорем этой теории приводится без доказательства теорема о разбиении вполне аддитивной функции множеств на сингулярное и абсолютно непрерывное слагаемое и выясняются основные факты, связанные с этим разбиением. Подробно рассматривается случай одного независимого переменного. Далее в общем случае исследуется абсолютно непрерывная функция множеств и устанавливается формула замены переменных в многомерном интеграле Лебега — Стилтьеса.

В конце третьей главы приводится доказательство упомянутой выше теоремы о разбиении вполне аддитивной функции множеств на два слагаемые. Далее вводится в многомерном случае понятие интеграла Хеллингера и исследуются его свойства. В частности, указывается связь интеграла Хиллингера с интегралом Лебега — Стилтьеса. Подробно разбирается случай одномерного интеграла Хеллингера. Все доказательства конца третьей главы основаны на предварительном подробном изучении свойств вполне аддитивных функций множеств **[78, 79]**.

Четвертая глава содержит изложение основ общей теории метрических и нормированных пространств. В конце ее приведено подробное изложение обобщенных производных, теорем вложения для различных функциональных пространств и теории функционалов в пространстве непрерывно дифференцируемых функций. Все эти вопросы связаны с известными исследованиями С. Л. Соболева. Они изложены и в его монографии „Некоторые применения функционального анализа в математической физике“ (1950 г.).

Обобщенные производные определяются двояко — при помощи формулы интегрирования по частям и путем замыкания функций с непрерывными производными, при чем доказывается равносильность этих определений. Особо рассматривается случай областей звездного типа. Далее вводятся полные нормированные функциональные пространства $\tilde{W}_p^{(l)}(D)$ и $\overset{\circ}{W}{}_p^{(l)}(D)$, первое из которых состоит из функций $\varphi(x)$, определенных в области D и имеющих все обобщенные производные порядка l, причем $\varphi(x)$ и упомянутые производные принадлежат $L_p(D)$, а при определении второго пространства берутся функции $\varphi(x)$, имеющие все обобщенные производные до порядка l

включительно. В дальнейшем доказывается, что для широкого класса областей D $\tilde{W}_p^{(l)}(D)$ и $W_p^{(l)}(D)$ состоит из одного и того же множества функций и что введенные в них нормы эквивалентны. Далее для пространства $W_p(D)$ сравнительно просто доказываются теоремы, являющиеся частным случаем теорем вложения для $W_p^{(l)}(D)$.

Далее, сначала эти теоремы формулируются, а затем в мелком шрифте приводится полное их доказательство на основе интегрального представления С. Л. Соболева. Весь этот материал тесно связан с его упомянутой выше монографией.

В последней пятой главе излагается общая теория пространства Гильберта, причем сначала все изложение проводится для случая ограниченных операторов. Доказываются теоремы Фредгольма для линейных уравнений с вполне непрерывными операторами. Для нормированных пространств они приводились без доказательства.

Для самосопряженных операторов на непрерывном спектре даются соответствующие интегральные представления через дифференциальные решения при помощи интегралов Хеллингера. Приводятся примеры применения общей теории ограниченных операторов в l_2 L_2.

Последний параграф пятой главы посвящен теории неограниченных операторов в Гильбертовом пространстве. После доказательства общих теорем теории приводится большое число примеров дифференциальных операторов с одной и несколькими независимыми переменными. После общей теории расширения замкнутых симметричных операторов рассматривается специально случай полуограниченных операторов и, в частности, их расширение по Фридрихсу.

Предполагается выпуск шестого тома с изложением некоторых вопросов современной теории дифференциальных операторов с одной и несколькими независимыми переменными.

При составлении настоящей книги я пользовался, кроме специальных статей, многими книгами. Приведу основные из них: В. И. Гливенко „Интеграл Стилтьеса“; И. П. Натансон „Основы теории функций вещественного переменного“; Сакс „Теория интеграла“; Vallée-Poussin „Intégrales de Lebesgue. Fonctions d'ensembles. Classes de Baire“; Stone „Linear Transformation in Hilbert Space and their applications to Analysis“; Н. И. Ахиезер и И. М. Глазман „Теория линейных операторов“; А. И. Плеснер „Спектральная теория линейных операторов, I“ (Успехи математических наук, т. IX, 1941); Н. И. Ахиезер „Бесконечные матрицы Якоби и проблема моментов“ (там же); С. Л. Соболев „Некоторые

применения функционального анализа в математической физике.

Приношу мою благодарность С. М. Лозинскому, прочитавшему первоначальную рукопись книги и сделавшему ряд ценных указаний.

Изложение многих вопросов второй части этой книги принадлежит профессору О. А. Ладыженской, она является моим соавтором в этой части книги. С ней я подробно обсуждал план построения этой книги.

Большую помощь при составлении второй части книги оказал М. С. Бирман. Ему принадлежит изложение параграфов, посвященных теоремам вложения [114—118] и теории малых возмущений спектра [198]. Ценные советы были им даны по вопросу спектров симметричных операторов и их расширений, а также при изложении главы IV.

Приношу мою глубокую благодарность О. А. Ладыженской и М. С. Бирману. Без их помощи я не смог бы проделать всей работы.

Первые три главы книги были прочтены Г. П. Акиловым, от которого я получил ряд ценных советов, касающихся изложения отдельных вопросов. Приношу ему мою большую благодарность.

20 июля 1959 г.

В. Смирнов

ГЛАВА I

ИНТЕГРАЛ СТИЛТЬЕСА

1. Множества и их мощность. При применении математического анализа в современном естествознании большую роль играют различные понятия интеграла, и в первых двух главах мы изложим теорию интегрирования в более общем виде, чем это мы делали раньше. Предварительно в настоящем параграфе приведем некоторые первоначальные сведения из теории множеств. Они являются некоторым дополнением к тому, что мы излагали в [IV; 15].

Пусть имеются два множества A_1 и A_2, состоящие из каких-либо объектов (элементов). Говорят, что два множества имеют одинаковую мощность, если между элементами, входящими в A_1, и элементами, входящими в A_2, можно установить биоднозначное соответствие, т. е. такое соответствие, при котором каждому элементу из A_1 сопоставляется определенный элемент из A_2, причем в этом соответствии, наоборот, каждый элемент A_2 сопоставлен одному, и только одному, элементу A_1. Бесконечное множество (т. е. множество, содержащее бесконечное число элементов) называется исчислимым, или счетным, если оно имеет ту же мощность, что и множество всех целых положительных чисел, т. е. если элементы этого множества можно пронумеровать целыми положительными числами: $a_1, a_2, a_3, \ldots$ Два счетных множества имеют одинаковую мощность. Выясним некоторые свойства счетных множеств. Рассмотрим часть счетного множества, содержащую бесконечное множество элементов $a_{p_1}, a_{p_2}, \ldots$, где $p_1, p_2 \ldots$ — возрастающая последовательность целых положительных чисел. Элементы этого нового множества также пронумерованы. Номером каждого элемента является значок у p. Иначе говоря, они пронумерованы в порядке возрастания значков $p_1, p_2, \ldots$ Таким образом, бесконечная часть счетного множества есть счетное множество. Рассмотрим теперь два счетных множества: $A(a_1, a_2, a_3, \ldots)$, состоящее из элементов $a_1, a_2, a_3, \ldots$, и $B(b_1, b_2, b_3, \ldots)$, состоящее из элементов $b_1, b_2, b_3, \ldots$; составим их сумму, т. е. объединим в одно множество C элементы, входящие в оба указанных выше множества. Полученное таким образом новое множество C называется обычно суммой множеств A и B. Это новое множество также счетно. Действительно, достаточно, например, поставить элементы множества C в следующем порядке: $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$,

чтобы убедиться в счетности его. Если имеются одинаковые элементы a_k, b_l, то надо удержать один из них, а остальные вычеркнуть. Аналогичное рассуждение применимо и для суммы конечного числа счетных множеств, т. е. сумма конечного числа счетных множеств есть счетное множество.

Положим, что имеется счетное множество счетных множеств. Элементы всех этих множеств можно обозначить буквой с двумя целочисленными индексами $a_p^{(q)}$. Верхний индекс указывает номер того множества, к которому принадлежит элемент, а нижний — тот номер, который указанный элемент имеет в том счетном множестве, к которому он принадлежит. Нетрудно пронумеровать все элементы $a_p^{(q)}$. В качестве первого элемента возьмем тот элемент, у которого оба индекса равны единице: $a_1^{(1)}$. Возьмем затем те элементы, у которых сумма индексов есть три, и расположим в порядке возрастания верхнего индекса. Таким образом, мы получим второй и третий элементы суммы множеств: $a_2^{(1)}$, $a_1^{(2)}$. Возьмем теперь те элементы, у которых сумма индексов равна четырем, и расположим их в порядке возрастания верхнего индекса: $a_3^{(1)}$, $a_2^{(2)}$, $a_1^{(3)}$. Это даст нам четвертый, пятый и шестой элементы суммы множеств. Продолжая это построение, мы убеждаемся в том, что сумма счетного числа счетных множеств есть счетное множество. Это утверждение, очевидно, осталось бы в силе, если некоторые из слагаемых множеств были бы не счетными, а конечными множествами.

Пусть имеется некоторое бесконечное множество A. Выберем из него какой-нибудь элемент и припишем ему номер один. Оставшееся множество по-прежнему будет бесконечным. Выберем из него какой-нибудь элемент и припишем ему номер два. Продолжая так и дальше, мы видим, что из всякого бесконечного множества можно выделить счетное множество. Оставшееся после такого выделения множество может быть или пустым, т. е. не содержащим ни одного элемента, или конечным, или бесконечным. Покажем, что если это оставшееся множество бесконечно, то оно имеет ту же мощность, что первоначальное множество, т. е. справедливо следующее утверждение: если после выделения из бесконечного множества A счетного множества P остается бесконечное множество B, то множества A и B имеют одинаковую мощность. Выделим из бесконечного множества B вновь некоторое счетное множество Q, и пусть C — оставшееся множество. При этом первоначальное множество A разобьется на три множества $A = P + Q + C$, из которых множество C может быть и пустым, а может быть и бесконечным, а множества P и Q суть счетные множества. До второго выделения мы имели $A = P + B$. Нетрудно установить биоднозначное соответствие между элементами A и B. Действительно, мы имеем $A = P + Q + C$ и $B = Q + C$. Сумма счетных множеств $P + Q$ есть счетное множество, и, следовательно, между элементами $P + Q$ и Q можно уста-

новить биоднозначное соответствие. Каждый элемент множества C приведем в соответствие самому себе. Таким образом, и будет установлено биоднозначное соответствие между элементами A и B. Из доказанного утверждения непосредственно вытекает, что если к бесконечному множеству добавить счетное множество, то вновь полученное множество будет иметь ту же мощность, что и первоначальное множество. Оба утверждения о вычитании и добавлении счетного множества остаются в силе, если счетное множество заменить конечным. Доказательство приводится совершенно так же, как и выше.

Мы показали раньше [IV; 15], что множество рациональных чисел, принадлежащих некоторому промежутку $[a, b]$, или множество всех рациональных чисел есть счетное множество. Это доказывается совершенно так же, как и утверждение о счетности суммы счетного числа счетных множеств. Роль верхнего индекса играет числитель дроби, а роль нижнего индекса — ее знаменатель, причем сначала надо рассмотреть положительные дроби. Приведем теперь пример несчетного множества. Рассмотрим все вещественные числа, принадлежащие промежутку [0,1]. Каждое из них, кроме нуля, мы можем представить бесконечной десятичной дробью с целой частью, равной нулю, и наоборот каждой такой десятичной дроби будет соответствовать некоторое вещественное число из указанного промежутка. Конечными дробями мы не пользуемся, так как конечная дробь дает то же число, что и бесконечная, имеющая в периоде 9, например $0{,}37 = 0{,}36999\ldots$. Покажем, что множество упомянутых вещественных чисел несчетно. Ведем доказательство от обратного. Положим, что все указанные десятичные дроби совместно с дробью $0{,}00\ldots$, дающей левый конец промежутка, можно пронумеровать. Составим новую десятичную дробь с целой частью, равной нулю, следующим образом. В качестве первого десятичного знака возьмем какую-нибудь цифру, отличную от первого десятичного знака первой из пронумерованных десятичных дробей, в качестве второго десятичного знака возьмем какую-нибудь цифру, отличную от второго десятичного знака второй из пронумерованных дробей, и т. д. Получится бесконечная десятичная дробь (цифрой 0 при составлении десятичных знаков новой десятичной дроби мы пользоваться не будем), которая отлична от всех пронумерованных десятичных дробей. Таким образом, соответствующее ей вещественное число не пронумеровано, а это противоречит тому, что все вещественные числа из промежутка [0,1] пронумерованы. Таким образом, мы показали, что множество всех вещественных чисел, принадлежащих промежутку [0,1], несчетно. Говорят, что это множество имеет мощность континуума. Нетрудно видеть, что множество вещественных чисел, принадлежащих любому конечному промежутку $[a, b]$, имеет ту же мощность, что и множество вещественных чисел, принадлежащих промежутку [0, 1]. Биоднозначное соответствие между элементами этих множеств уста-

навливается формулой $y=\frac{x-a}{b-a}$. Когда x пробегает промежуток $[a, b]$, переменное y пробегает промежуток $[0, 1]$. Если использовать формулу $y=\operatorname{tg}\left(\pi x-\frac{\pi}{2}\right)$, то при изменении x внутри промежутка $[0,1]$ переменная y пробегает множество всех вещественных чисел, т. е. множество всех вещественных чисел также имеет мощность континуума. Если концы промежутка мы не будем причислять к множеству, то это не изменит его мощности, так как добавление или вычитание из бесконечного множества конечного множества не меняет его мощности.

В дальнейшем замкнутый промежуток мы будем обозначать символом $[a, b]$, а открытый промежуток, т. е. промежуток, к которому не присоединяются концы, символом (a, b). Если левый конец не присоединяется, а правый присоединяется, то будем пользоваться символом $(a, b]$, аналогичное значение имеет $[a, b)$. Числа a и b могут принимать и бесконечные значения: $a=-\infty$ и $b=+\infty$, т. е. рассматриваемые промежутки могут быть бесконечными налево и направо. Например, замкнутый промежуток $[-\infty, +\infty]$ содержит оба бесконечно далеких элемента. В соответствии с этим и функция $f(x)$ может быть определена при $x=-\infty$, и $x=+\infty$, и мы можем, например, писать $f(-\infty)$. Непрерывность при $x=-\infty$ равносильна условию $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=f(-\infty)$. Аналогично и для $x\to+\infty$.

Кроме того, можно пользоваться и обычными обозначениями $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=f(-\infty+0)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=f(+\infty-0)$.

Нетрудно показать [I; **43**], что функция $f(x)$, конечная и непрерывная в замкнутом промежутке $[-\infty, +\infty]$, равномерно непрерывна в этом промежутке.

2. Интеграл Стилтьеса и его основные свойства. Напомним определение интеграла Римана, которым мы обычно пользовались в предыдущих томах. Пусть $[a, b]$ — конечный промежуток и $f(x)$ — ограниченная функция, заданная в этом промежутке. Подразделяем промежуток на части $a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$, на каждом из частичных промежутков $[x_{k-1}, x_k]$ берем некоторую точку ξ_k и составляем сумму произведений:

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1}). \qquad (1)$$

Если при беспредельном измельчании подразделений и любом выборе точек ξ_k написанная сумма имеет определенный предел A, то этот предел и называют интегралом от $f(x)$ по промежутку $[a, b]$. Пусть δ — наибольшая из разностей x_k-x_{k-1}. Беспредельное измельчание промежутка $[a, b]$ на части равносильно тому, что $\delta\to 0$, и существо-

вание определенного предела A у суммы (1) равносильно следующему: при любом заданном положительном ε существует такое положительное η, что

$$\left| A - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right| \leqslant \varepsilon \qquad \text{при } \delta \leqslant \eta.$$

Совершенно аналогично можно построить более общее понятие интеграла. Оно было впервые введено голландским математиком Стилтьесом в 1894 г. в его исследованиях о непрерывных дробях и получило затем широкое развитие и применение как в чисто математических вопросах, так и в вопросах естествознания. Пусть на конечном промежутке $[a, b]$ заданы две функции $f(x)$ и $g(x)$, принимающие в каждой точке этого промежутка конечные значения. Вместо суммы (1) составим сумму

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})]. \tag{2}$$

Эту сумму назовем суммой Римана — Стилтьеса. Если при беспредельном измельчании подразделений и любом выборе точек ξ_k написанная сумма стремится к определенному конечному пределу, то говорят, что функция $f(x)$ интегрируема по функции $g(x)$ на промежутке $[a, b]$, и пишут

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \lim \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})].$$

В интеграле Римана роль $g(x)$ играет x. Введенный интеграл обладает, очевидно, многими свойствами, аналогичными свойствам интеграла Римана, и доказательства этих свойств проводятся совершенно так же, как и для интеграла Римана. Приведем эти свойства, считая, что все интегралы, входящие в нижеприведенные формулы, существуют:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_a^b \sum_{k=1}^{p} a_k f_k(x)\,dg(x) = \sum_{k=1}^{p} a_k \int_a^b f_k(x)\,dg(x);\\
&\int_a^b f(x)\,d\sum_{k=1}^{p} a_k g_k(x) = \sum_{k=1}^{p} a_k \int_a^b f(x)\,dg_k(x);\\
&\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^c f(x)dg(x) + \int_c^b f(x)dg(x).
\end{aligned}\right\} (a_k \text{ — постоянные}). \tag{3}$$

Кроме того, имеем очевидную формулу

$$\int_a^b dg(x) = g(b) - g(a). \tag{4}$$

В первой и второй формулах (3) из существования интегралов, входящих в правую часть, следует существование интеграла, стоящего слева.

Остановимся на выводе формулы интегрирования по частям. Положим, что существует интеграл от функции $g(x)$ по функции $f(x)$, и покажем, что при этом существует и интеграл от $f(x)$ по $g(x)$. Преобразуем сумму (2), собирая члены, содержащие значение функции $g(x)$ в совпадающих точках,

$$\sigma = -\sum_{k=1}^{n-1} g(x_k)\,[f(\xi_{k+1}) - f(\xi_k)] + g(b)\,f(\xi_n) - g(a)\,f(\xi_1).$$

Прибавляя и вычитая разность

$$[f(x)\,g(x)]_a^b = f(b)\,g(b) - f(a)\;\;g(a),$$

можем написать

$$\sigma = [f(x)\,g(x)]_a^b - \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} g(x_k)\,[f(\xi_{k+1}) - f(\xi_k)] + \right.$$

$$\left. + g(a)\,[f(\xi_1) - f(a)] + g(b)\,[f(b) - f(\xi_n)] \right\}. \tag{5}$$

В фигурных скобках стоит сумма Римана — Стилтьеса (2) для интеграла от $g(x)$ по $f(x)$. По условию существует интеграл от $g(x)$ по $f(x)$, т. е. при беспредельном измельчании деления фигурная скобка стремится к этому интегралу. Таким образом, в силу (5), сумма σ имеет предел, т. е. существует интеграл от $f(x)$ по $g(x)$, и мы можем написать формулу интегрирования по частям:

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = [f(x)\,g(x)]_a^b - \int_a^b g(x)\,df(x) \tag{6}$$

или

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) + \int_a^b g(x)\,df(x) = [f(x)g(x)]_a^b, \tag{7}$$

причем из существования одного из написанных интегралов следует существование другого интеграла.

Отметим два частных случая интеграла Стилтьеса. Положим, что промежуток $[a, b]$ разбивается на конечное число частей $a=c_0<c_1<\ldots<c_{p-1}<c_p=b$ и внутри каждого из промежутков (c_{k-1}, c_k) функция $g(x)$ сохраняет постоянное значение g_k. Таким образом, в каждой точке c_k, лежащей внутри промежутка $[a, b]$, функция $g(x)$ испытывает скачок $s_k=g_{k+1}-g_k$. Возможны также скачки и на концах промежутка: скачок $s_0=g_1-g(a)$ на левом конце и $s_p=g(b)-g_p$ на правом конце. Положим далее, что функция $f(x)$ непрерывна во всех точках разрыва c_k и на концах промежутка. Пусть точки c_q не являются точками деления промежутка на части, кроме c_0 и c_p. В сумме (2) все слагаемые, у которых x_{k-1} и x_k лежат внутри одного и того же промежутка (c_{q-1}, c_q), будут равны нулю, так как в этом случае $g(x_{k-1})=g(x_k)$. Если промежуток $[x_{k-1}, x_k]$ содержит точку разрыва c_q, то при беспредельном измельчании $f(\xi_k)$ будет стремиться к $f(c_q)$ и $g(x_k)-g(x_{k-1})$ к s_q, и непосредственно ясно, что в пределе сумма (2) даст следующую конечную сумму:

$$\lim \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,[g(x_k)-g(x_{k-1})]=\sum_{q=0}^{n} f(c_q)\,s_q. \tag{8}$$

Если точка c_q является точкой деления $[a, b]$ на части, то надо рассмотреть оба промежутка, имеющие c_q концами, и результат будет таким же. Рассмотрим теперь второй частный случай. Положим, что $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в $[a, b]$ и $g(x)$ имеет внутри $[a, b]$ производную $g'(x)$, интегрируемую по Риману и, следовательно, ограниченную. Применяя к разности $g(x_k)-g(x_{k-1})$ формулу Лагранжа, можем записать сумму (2) в виде

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,[g(x_k)-g(x_{k-1})]=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,g'(\xi'_k)\,(x_k-x_{k-1}), \tag{9}$$

где ξ'_k — значение, лежащее внутри $[x_{k-1}, x_k]$. Мы можем положить $f(\xi_k)=f(\xi'_k)+\varepsilon_k$, причем, в силу равномерной непрерывности $f(x)$ в $[a, b]$, наибольшее из $|\varepsilon_k|$ стремится к нулю при беспредельном измельчании подразделений, т. е. при любом заданном положительном ε существует такое положительное η, что $|\varepsilon_k|<\varepsilon$, если $\delta<\eta$. Сумму (9) мы можем переписать так:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,[g(x_k)-g(x_{k-1})]=$$

$$=\sum_{k=1}^{n} f(\xi'_k)\,g'(\xi'_k)\,(x_k-x_{k-1})+\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k g'(\xi'_k)\,(x_k-x_{k\ 1}), \tag{9$_1$}$$

Произведение двух функций, интегрируемых по Риману, также интегрируемо [I; **117**], и первое слагаемое правой части написанной формулы при беспредельном измельчании подразделений стремится к интегралу Римана от произведения $f(x)\,g(x)$. Нетрудно показать, что второе слагаемое стремится к нулю. Действительно, функция $g'(x)$, как упомянуто выше, ограничена, т. е. $|g'(x)|<M$, где M — определенное положительное число. Как мы упоминали, если задано положительное ε, то существует такое положительное η, что $|\varepsilon_k|<\varepsilon$ при $\delta<\eta$, и мы имеем оценку:

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k g'(\xi'_k)(x_k-x_{k-1})\right|\leqslant\sum_{k-1}^{n}\varepsilon M(x_k-x_{k\ 1})=\varepsilon M(b-a),$$

из которой, в силу произвольности ε, и следует, что второе слагаемое правой части формулы (9_1) стремится к нулю. Таким оброзом, в пределе получаем

$$\int_a^b f(x)\,dg\,(x)=\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx, \tag{10}$$

т. е. при сделанных предположениях интеграл Стилтьеса сводится к обычному интегралу Римана. В предыдущем случае он вырождался в конечную сумму. Нетрудно показать, что формула (10) остается справедливой, если вместо непрерывности $f(x)$ потребовать, чтобы она была интегрируемой по Риману. В дальнейшем мы рассмотрим вопрос о существовании интеграла Стилтьеса, определенного нами выше, и некоторых более общих интегралов, определение которых будет дано потом. Существенным при этом будет тот факт, что функция $g(x)$ будет считаться неубывающей в $[a, b]$.

Неубывающую функцию мы будем часто называть в дальнейшем возрастающей. У такой функции $g(b)$ является ее наибольшим значением и $g(a)$ наименьшим значением. Следующий параграф носит подготовительный характер. Он будет иметь основное значение не только при исследовании вопроса о существовании интеграла Стилтьеса, определенного нами выше, но и при исследовании того же вопроса для интегралов более общего типа, которые мы введем в дальнейшем.

3. Суммы Дарбу. При рассмотрении интеграла Римана мы вводили так называемые суммы Дарбу. Аналогичные суммы будут играть основную роль при всех обобщениях понятия интеграла, которые введем в дальнейшем. В настоящем параграфе мы построим эти суммы и исследуем их свойства для случая интеграла Стилтьеса, определенного выше. Все понятия, которые введем в настоящем параграфе, и факты, которые мы при этом докажем, будут с некоторыми несущественными изменениями повторяться и при дальнейших обобщениях понятия интеграла, и мы часто будем ссылаться на результаты настоящего параграфа.

Напомним прежде всего определение точных границ множества вещественных чисел [I; 39]. Пусть имеется некоторое множество $\mathfrak{E}$ вещественных чисел, и положим, что оно ограничено сверху, т. е. существует такое число L, что все числа множества меньше L. При этом существует одно определенное число M, обладающее следующим свойством: все числа множества $\mathfrak{E}$ не больше M, но при любом положительном ε имеются числа множества $\mathfrak{E}$, которые больше $M-\varepsilon$. Это число M называется точной верхней границей множества $\mathfrak{E}$. Совершенно аналогично, если множество ограничено снизу, т. е. если все числа множества больше некоторого определенного числа, то это множество имеет точную нижнюю границу m, которая обладает следующим свойством: все числа множества $\mathfrak{E}$ не меньше m, но при любом положительном ε имеются числа множества $\mathfrak{E}$, которые меньше $m+\varepsilon$. Если множество неограничено сверху, то говорят, что его точная верхняя граница равна $(+\infty)$, и, точно так же, если множество неограничено снизу, то говорят, что его точная нижняя граница равна $(-\infty)$. Пользуются следующей записью для обозначения точных границ:

$$m=\inf \mathfrak{E} \text{ и } M=\sup \mathfrak{E}.$$

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — ограниченные функции на промежутке $[a, b]$, который может быть как конечным, так и бесконечным, причем $g(x)$ — неубывающая функция, и пусть имеется некоторое разбиение промежутка $[a, b]$ на части:

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b,$$

которое мы символически обозначим одной буквой δ. В случае промежутка бесконечного налево $a=-\infty$, а в случае промежутка бесконечного направо $b=+\infty$. Пусть далее m_k и M_k — точная нижняя и точная верхняя границы значений $f(x)$ на промежутке $[x_{k-1}, x_k]$. Составим следующие суммы Дарбу — Стилтьеса, соответствующие указанному разбиению δ промежутка $[a, b]$:

$$s_\delta=\sum_{k=1}^{n} m_k[g(x_k)-g(x_{k-1})]; \qquad S_\delta=\sum_{k=1}^{n} M_k[g(x_k)-g(x_{k-1})] \tag{11}$$

Для ограниченной функции $f(x)$ мы имеем $|f(x)|\leqslant L$, где L — некоторое положительное число. Принимая во внимание, что $g(x_k)-g(x_{k-1})\geqslant 0$, получаем для сумм (11) при любом законе подразделения δ следующую оценку:

$$|s_\delta|\leqslant \sum_{k=1}^{r} L[g(x_k)-g(x_{k-1})]=L[g(b)-g(a)],$$

$$|S_\delta|\leqslant L[g(b)-g(a)].$$

Наряду с суммами (11) составим следующую сумму Римана — Стилтьеса:

$$\sigma_\delta = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,[g(x_k) - g(x_{k-1})], \tag{12}$$

где ξ_k — некоторая точка из промежутка $[x_{k-1}, x_k]$. Принимая во внимание, что $m_k \leqslant f(\xi_k) \leqslant M_k$ и $g(x_k) - g(x_{k-1}) \geqslant 0$, мы имеем для любого подразделения δ неравенство

$$s_\delta \leqslant \sigma_\delta \leqslant S_\delta. \tag{13}$$

Введем теперь некоторые новые термины. Подразделение δ' называется продолжением подразделения δ, если все точки деления подразделения δ являются и точками деления подразделения δ'. Пусть δ_1 и δ_2 — два каких-нибудь подразделения. Образуем новое подразделение, взяв за точки деления точки деления δ_1 и точки деления δ_2. Это новое подразделение назовем произведением подразделений δ_1 и δ_2 и обозначим символом $\delta_1\delta_2$. Подразделение $\delta_1\delta_2$ является, очевидно, продолжением как подразделения δ_1, так и подразделения δ_2. Понятие произведения подразделений мы можем, очевидно, ввести и для любого конечного числа подразделений $\delta_1\delta_2 \ldots \delta_n$. Отметим еще, что суммы s_δ и S_δ зависят только от выбора подразделения δ, что же касается суммы σ_δ, то она зависит еще от выбора точек ξ_k. Докажем теперь несколько совершенно простых теорем.

Теорема 1. *Если подразделение δ' есть продолжение подразделения δ, то $s_{\delta'} \geqslant s_\delta$ и $S_{\delta'} \leqslant S_\delta$.*

Докажем, например, неравенство $s_{\delta'} \geqslant s_\delta$. При переходе от δ к δ' каждый частичный промежуток, входящий в подразделение δ, может разбиться на конечное число частей:

$$x_{k-1} = x_0^{(k)} < x_1^{(k)} < \ldots < x_{p_k-1}^{(k)} < x_{p_k}^{(k)} = x_k,$$

и вместо слагаемого $m_\varkappa\,[g(x_k) - g(x_{k-1})]$ суммы s_δ мы получим следующую сумму:

$$\sum_{s=1}^{p_k} m_s^{(k)}\,[g(x_s^{(k)}) - g(x_{s-1}^{(k)})],$$

где $m_s^{(k)}$ есть точная нижняя граница значений $f(x)$ на промежутке $[x_{s-1}^{(k)}, x_s^{(k)}]$. Мы имеем, очевидно, $m_s^{(k)} \geqslant m_k$, и, следовательно, принимая во внимание неотрицательность разностей $g(x_s^{(k)}) - g(x_{s-1}^{(k)})$, будем иметь

$$\sum_{s=1}^{p_k} m_s^{(k)}\,[g(x_s^{(k)} - g(x_{s-1}^{(k)})] \geqslant \sum_{s=1}^{p_k} m_k\,[g(x_s^{(k)}) - g(x_{s-1}^{(k)})] =$$

$$= m_k\,[g(x_k) - g(x_{k-1})],$$

и теорема доказана [ср. **I; 112**].

Теорема 2. *Если* δ_1 *и* δ_2 *— любые два подразделения, то* $s_{\delta_1} \leqslant S_{\delta_2}$.

Неравенство $s_\delta \leqslant S_\delta$ для одного и того же подразделения непосредственно следует из того, что $m_k \leqslant M_k$ и $g(x_k) - g(x_{k-1}) \geqslant 0$. Таким образом, для подразделения $\delta_1\delta_2$ имеем $s_{\delta_1\delta_2} \leqslant S_{\delta_1\delta_2}$. С другой стороны, в силу теоремы 1, $s_{\delta_1} \leqslant s_{\delta_1\delta_2}$ и $S_{\delta_2} \geqslant S_{\delta_1\delta_2}$, откуда и следует, что $s_{\delta_1} \leqslant S_{\delta_2}$.

Обозначим через i точную верхнюю границу сумм s_δ при всевозможных законах подразделения δ и через I точную нижнюю границу сумм S_δ:

$$i = \sup\ s_\delta;\ I = \inf\ S_\delta. \tag{14}$$

Из определения точных границ и теоремы 2 непосредственно следует, что для любых подразделений δ_1 и δ_2 имеет место неравенство $s_{\delta_1} \leqslant i \leqslant I \leqslant S_{\delta_2}$, и, в частности,

$$s_\delta \leqslant i \leqslant I \leqslant S_\delta. \tag{15}$$

Укажем необходимое и достаточное условие равенства точных границ i и I. При этом существенную роль будет играть разность

$$S_\delta - s_\delta = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\,[g(x_k) - g(x_{k-1})]. \tag{16}$$

Теорема 3. *Для равенства* i *и* I *необходимо и достаточно, чтобы существовала такая последовательность подразделений* δ_n $(n = 1, 2, \ldots)$, *что* $S_{\delta_n} - s_{\delta_n} \to 0$.

Доказываем достаточность. Если последовательность подразделений δ_n, для которой $S_{\delta_n} - s_{\delta_n} \to 0$, существует, то, применяя к этой последовательности неравенство (15), получаем $i = I$.

Доказываем необходимость. Пусть $i = I = A$. В силу определения точных границ существует такая последовательность подразделений δ_n', что $s_{\delta_n'} \to A$, и такая последовательность подразделений δ_n'', что $S_{\delta_n''} \to A$. Возьмем последовательность подразделений $\delta_n = \delta_n'\,\delta_n''$. В силу теоремы 1, $s_{\delta_n} \geqslant s_{\delta_n'}$ и $S_{\delta_n} \leqslant S_{\delta_n''}$, причем $s_{\delta_n'}$ и $s_{\delta_n} \leqslant A$, а $S_{\delta_n''}$ и $S_{\delta_n} \geqslant A$. Таким образом, тем более $s_{\delta_n} \to A$ и $S_{\delta_n} \to A$, а потому $S_{\delta_n} - s_{\delta_n} \to 0$, и теорема доказана. Отметим, что в подразделениях δ_n частичные промежутки не должны обязательно беспредельно измельчаться. Может, например, случиться что все подразделения δ_n являются одним и тем же подразделением δ. Из (15) вытекает непосредственно следующее следствие:

Следствие. *Если* $S_{\delta_n} - s_{\delta_n} \to 0$, *то* $i = I$, $s_{\delta_n} \to i$ и $S_{\delta_n} \to i$.

Указанное выше необходимое и достаточное условие равенства $i = I$ может быть формулировано при помощи сумм σ_δ.

Теорема 4. *Для того чтобы разность* $S_{\delta_n} - s_{\delta_n}$ *стремилась к нулю, необходимо и достаточно, чтобы* σ_{δ_n} *имели определенный*

предел при любом выборе точек $\xi_k^{(n)}$, *и если это условие выполнено, то предел* σ_{δ_n} *равен* i (*или* $I = i$).

Доказываем необходимость. Если $S_{\delta_n} - s_{\delta_n} \to 0$, то, как мы видели, $s_{\delta_n} \to i$ и $S_{\delta_n} \to i$, а следовательно, и для σ_{δ_n}, которая удовлетворяет неравенству $s_{\delta_n} \leqslant \sigma_{\delta_n} \leqslant S_{\delta_n}$, имеем $\sigma_{\delta_n} \to i$. Доказываем достаточность. Пусть

$$\sigma_{\delta_n} = \sum_{k=1}^{p_n} f(\xi_k^{(n)}) [g(x_k^{(n)}) - g(x_{k-1}^{(n)})] \to A,$$

где $x_k^{(n)}$ суть точки деления подразделения δ_n и $\xi_k^{(n)}$ — некоторые точки из промежутка $[x_{k-1}^{(n)}, x_k^{(n)}]$. Обозначим еще через $m_k^{(n)}$ и $M_k^{(n)}$ точную нижнюю и точную верхнюю границы значений $f(x)$ на промежутке $[x_{k-1}^{(n)}, x_k^{(n)}]$. Пусть ε — любое заданное положительное число. В силу условия $\sigma_{\delta_n} \to A$ существует такое N, что

$$|A - \sigma_{\delta_n}| \leqslant \varepsilon \text{ при } n > N \tag{17}$$

и любом выборе точек $\xi_k^{(n)}$. По определению точной нижней границы мы можем выбрать точки $\xi_k^{(n)}$ так, чтобы выполнялись неравенства $0 \leqslant f(\xi_k^{(n)}) - m_k^{(n)} \leqslant \varepsilon$. При этом будем иметь

$$0 \leqslant \sigma_{\delta_n} - s_{\delta_n} = \sum_{k=1}^{p_n} [f(\xi_k^{(n)}) - m_k^{(n)}] [g(x_k^{(n)}) - g(x_{k-1}^{(n)})] \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{p_n} \varepsilon [g(x_k^{(n)}] - g(x_{k-1}^{(n)})] = \varepsilon [g(b) - g(a)], \tag{18}$$

и, следовательно, представляя разность $A - s_{\delta_n}$ в виде $A - s_{\delta_n} = (A - \sigma_{\delta_n}) + (\sigma_{\delta_n} - s_{\delta_n})$, мы получим, в силу (17) и (18): $|A - s_{\delta_n}| \leqslant |A - \sigma_{\delta_n}| + |\sigma_{\delta_n} - s_{\delta_n}| \leqslant \varepsilon [1 + g(b) - g(a)]$ при $n > N$, откуда, ввиду произвольности ε, следует, что $s_{\delta_n} \to A$. Совершенно так же можно доказать, что $S_{\delta_n} \to A$, а следовательно, $S_{\delta_n} - s_{\delta_n} \to 0$, и теорема доказана. Предел A совпадает очевидно с числами i и I, которые в данном случае равны между собой. Из доказанной теоремы и предыдущей теоремы вытекает непосредственно следующее следствие.

Следствие. *Для равенства* $i = I$ *необходимо и достаточно, чтобы существовала такая последовательность подразделений* δ_n, *что* σ_{δ_n} *имеет определенный предел при любом выборе точек* $\xi_k^{(n)}$. *Если это условие выполнено, то упомянутый предел равен* i (*или* $I = i$).

Теорема 5. *Если для последовательности подразделений* δ_n σ_{δ_n} *имеет определенный предел и* ε'_n *есть продолжение* δ_n, *то* $\sigma_{\delta'_n}$ *имеет тот же предел.*

Из условия теоремы и теоремы 4 следует, что $S_{\delta_n} - s_{\delta_n} \to 0$. В силу теоремы 1, $s_{\delta'_n} \geqslant s_{\delta_n}$ и $S_{\delta' n} \leqslant S_{\delta_n}$. Следовательно, и подавно $S_{\delta'_n} - s_{\delta'_n} \to 0$, т. е. $\sigma_{\delta'_n} \to i$, и теорема доказана.

В случае интеграла Римана, т. е. $g(x) = x$, мы показали раньше [**1; 112**], что для любой ограниченной функции $f(x)$, при беспредельном измельчании частичных промежутков, $s_{\delta_n} \to i$ и $S_{\delta_n} \to I$. Таким образом, в случае интеграла Римана равенство $i = I$ равносильно тому, что сумма σ_δ имеет определенный предел при беспредельном измельчании промежутков, причем этот предел равен i. В общем случае это не будет так. Если σ_δ имеет определенный предел при беспредельном измельчании частичных промежутков, то $i = I$ в силу следствия из теоремы 4. Но обратного утверждать нельзя. Из того, что $i = I$, следует только, что существует такая последовательность подразделений δ_n, что σ_{δ_n} имеет определенный предел. Но нельзя утверждать, что σ_δ будет иметь определенный предел для всякой последовательности подразделений при беспредельном измельчании частичных промежутков. В данном выше определении интеграла Стилтьеса мы потребовали, чтобы σ_δ имела определенный предел при беспредельном измельчании частичных промежутков. При дальнейших обобщениях понятия интеграла мы заменим это требование более слабым требованием существования равенства $i = I$. Кроме того, мы расширим наши возможности при разбиении основного промежутка интегрирования на части, что будет выяснено в дальнейшем при новых определениях интеграла. В следующем параграфе мы вернемся к интегралу Стилтьеса, определенному нами в [2], и дадим одно важное достаточное условие его существования.

4. Интеграл Стилтьеса от непрерывной функции.

Теорема 1. *Если* $f(x)$ *непрерывна на конечном промежутке* $[a, b]$ *и* $g(x)$ *— неубывающая ограниченная функция, то интеграл Стилтьеса от* $f(x)$ *по* $g(x)$ *на промежутке* $[a, b]$ *существует.*

Принимая во внимание неравенства (13) и (15), можем написать

$$|i - \sigma_\delta| \leqslant S_\delta - s_\delta = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})]. \qquad (19)$$

Пусть ε — заданное положительное число. В силу равномерной непрерывности $f(x)$, на промежутке $[a, b]$ существует такое положительное число η, что $0 \leqslant M_k - m_k \leqslant \varepsilon$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, если наибольшая из разностей $x_k - x_{k-1}$ не превышает η. При этом неравенство (19) дает нам $|i - \sigma_\delta| \leqslant \varepsilon [g(b) - g(a)]$, и, следовательно, $\sigma_\delta \to i$ при беспредельном измельчании промежутков. Совершенно

так же можно показать, что $\sigma_\delta \to I$, и, следовательно, $i = I$. Это равенство непосредственно вытекает также и из следствия теоремы 4 предыдущего параграфа в силу того, что σ_δ имеет определенный предел при беспредельном измельчании промежутков.

Бесконечность промежутка интегрирования не играет существенной роли в случае интеграла Стилтьеса. Надо только выяснить, что мы понимаем под беспредельным измельчанием частичных промежутков при разбиении бесконечного промежутка на части. Рассмотрим, например, промежуток $[-\infty, +\infty]$. Мы будем говорить, что для последовательности разбиений этого промежутка на конечное число частичных промежутков эти последние беспредельно измельчаются, если при любом заданном положительном A наибольшая из разностей $(x_k - x_{k-1})$ для тех промежутков $[x_{k-1}, x_k]$, которые имеют общие точки с $[-A, +A]$, стремится к нулю. Если $\varphi(x)$ непрерывна в промежутке $[-\infty, +\infty]$ и строго возрастает, т. е. $\varphi(\beta) > \varphi(\alpha)$ при $\beta > \alpha$, то замена переменной $t = \varphi(x)$ преобразует промежуток $-\infty \leqslant x \leqslant +\infty$ в конечный промежуток $[a, b]$, причем $a = \varphi(-\infty)$ и $b = \varphi(+\infty)$. Разбиения с беспредельным измельчанием частичных промежутков для $[-\infty, +\infty]$ сводятся к обычным разбиениям с беспредельным измельчанием частичных промежутков для конечного промежутка $[a, b]$.

Если, например, $f(x)$ непрерывна в замкнутом промежутке $[-\infty, +\infty]$, а $g(x)$ ограничена и не убывает, то интеграл по-прежнему существует. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно, например, ввести вместо x новую переменную $t = \operatorname{arc\,tg} x$. Полагая

$$f(\operatorname{tg} t) = f_1(t) \text{ и } g(\operatorname{tg} t) = g_1(t),$$

мы выразим интеграл по бесконечному промежутку $[-\infty, +\infty]$ через интеграл по конечному промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$;

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dh(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} f_1(t)\, dg_1(t),$$

причем $f_1(t)$ непрерывна и $g_1(t)$ ограничена и не убывает в промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$.

Укажем один практически важный случай видоизменения основной теоремы существования интеграла Стилтьеса:

Теорема 2. *Если $f(x)$ непрерывна внутри промежутка интегрирования и ограничена, а неубывающая функция $g(x)$ непрерывна на концах промежутка, то $f(x)$ интегрируема по $g(x)$.*

Положим, что промежутком интегрирования является бесконечный промежуток $[-\infty, +\infty]$.

Оценим слагаемые, стоящие в правой части формулы (19). В силу ограниченности $f(x)$, мы имеем $|f(x)| \leqslant L$, где L — определенное положительное число, и, следовательно, $0 \leqslant M_k - m_k \leqslant 2L$. Те слагаемые суммы (19), которые соответствуют промежуткам $[x_{k-1}, x_k]$, не имеющим общих точек $[-A, A]$, дадут сумму, не бóльшую, чем

$$2L[g(-A) - g(-\infty)] + 2L[g(+\infty) - g(A)]. \tag{20}$$

В силу предположенной непрерывности $g(x)$, в точках $\pm\infty$ можно выбрать A настолько большим, чтобы выражение (20) было меньше любого заданного положительного ε. Фиксируем таким образом A и рассмотрим остальные слагаемые суммы (19). Соответствующие им промежутки $[x_{k-1}, x_k]$ или целиком укладываются в $[-A, +A]$, или крайние два из них могут выходить из $[-A, +A]$, причем длина выходящих частей не больше η, где η — наибольшая из разностей $x_k - x_{k-1}$ для промежутков, имеющих общие точки с $[-A, +A]$. При беспредельном измельчании частичных промежутков это число η стремится к нулю, и, начиная с некоторого этапа подразделения, оно будет во всяком случае меньше единицы. Таким образом, все промежутки $[x_{k-1}, x_k]$, которые мы сейчас рассматриваем, начиная с некоторого этапа подразделения, будут принадлежать промежутку $[-A-1, A+1]$, на котором функция $f(x)$ равномерно непрерывна. В силу этого для всех достаточно малых значений η будем иметь $0 \leqslant M_k - m_k \leqslant \varepsilon$, и при этом для тех слагаемых суммы (19), которые соответствуют промежуткам $[x_{k-1}, x_k]$, имеющим общие точки с $[-A, +A]$, мы будем иметь оценку

$$0 \leqslant (M_k - m_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})] \leqslant \varepsilon[g(x_k) - g(x_{k-1})],$$

и сумма этих слагаемых будет не больше, чем

$$\varepsilon[g(A+1) - g(-A-1)].$$

Окончательно неравенство (19) даст нам

$$|i - \sigma_\delta| \leqslant \varepsilon[1 + g(A+1) - g(-A-1)] \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon[1 + g(+\infty) - g(-\infty)],$$

откуда, ввиду произвольности ε, и следует, что $\sigma_\delta \to i$, и теорема доказана.

Отметим некоторые дополнительные свойства интеграла Стилтьеса для случая непрерывной функции $f(x)$ и возрастающей функции $g(x)$. Если $|f(x)| \leqslant L$, то имеем оценку

$$\left| \int_a^b f(x)\, dg(x) \right| \leqslant L[g(b) - g(a)], \tag{21}$$

которая получается из очевидной оценки суммы σ_δ при переходе к пределу. Имеет, очевидно, место теорема о среднем [ср. **I; 92**]:

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = f(\xi)\,[g(b) - g(a)] \quad (\xi \text{ из } [a, b]). \qquad (21_1)$$

Положим теперь, что последовательность непрерывных в $[a, b]$ функций $f_n(x)$ стремится равномерно в этом промежутке к предельной функции $f(x)$. Последняя функция будет также непрерывной в $[a, b]$ и, следовательно, интегрируемой по $g(x)$. Для любого заданного положительного ε существует, в силу равномерной сходимости последовательности $f_n(x)$, такое N, что $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$ для x принадлежащих $[a, b]$, если $n > N$. Пользуясь оценкой (21), получаем

$$\left| \int_a^b [f(x) - f_n(x)]\,dg(x) \right| \leqslant \varepsilon\,[g(b) - g(a)],$$

откуда, в силу произвольности ε, следует

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dg(x) = \int_a^b f(x)\,dg(x). \qquad (22)$$

Пользуясь такими же оценками, что и при доказательстве теоремы 2, можно легко доказать, что формула (22) остается справедливой при следующих предположениях: функции $f_n(x)$ непрерывны внутри $[a, b]$ и ограничены одним и тем же числом, т. е. $|f_n(x)| \leqslant L$, где положительное число L одно и то же для всех n; $f_n(x) \to f(x)$ равномерно во всяком замкнутом промежутке, лежащем внутри $[a, b]$, и $g(x)$ непрерывна на концах промежутка $[a, b]$.

5. Несобственный интеграл Стилтьеса. Если $f(x)$ непрерывна внутри промежутка $[-\infty, +\infty]$ и ограничена, а $g(x)$ не убывает и непрерывна на концах указанного промежутка, то, как мы видели, интеграл от $f(x)$ по $g(x)$ на промежутке $[-\infty, +\infty]$ может быть определен обычным образом, как предел конечных сумм σ_δ. Положим теперь, что непрерывная внутри $[-\infty, +\infty]$ функция $f(x)$ неограничена, а $g(x)$ по-прежнему не убывает и ограничена. Мы можем для любых конечных a и b составить интеграл от $f(x)$ по $g(x)$ на промежутке $[a, b]$. Если при стремлении a к $(-\infty)$ и b к $(+\infty)$ этот интеграл имеет конечный определенный предел, то этот предел

мы и примем за величину интеграла по промежутку $(-\infty, +\infty)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dg(x) = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int_a^b f(x)\,dg(x). \tag{23}$$

Если выполнены условия, указанные в начале настоящего параграфа, и тем самым интеграл по промежутку $[-\infty, +\infty]$ существует как предел сумм σ_δ, то нетрудно показать, что имеет место формула (23).

Положим, что интегралы $\int_a^b |f(x)|\,dg(x)$ остаются ограниченными при любом выборе a и b. При этом существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dg(x) = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int_a^b |f(x)|\,dg(x),$$

и, очевидно, существует и интеграл (23) [ср. **II; 82**], который называется в этом случае абсолютно сходящимся.

Рассмотрим какое-либо разбиение бесконечного промежутка на части точками x_k $(k = \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots)$:

$$\ldots x_{-2} < x_{-1} < x_0 < x_1 < x_2 < \ldots \tag{24}$$

$$(\lim_{k\to-\infty} x_k = -\infty \text{ и } \lim_{k\to+\infty} x_k = +\infty).$$

Пусть m_i и M_i наименьшее и наибольшее значения $f(x)$ в промежутке $[x_{i-1}, x_i]$ и $\omega_i = M_i - m_i$. Пользуясь формулой (21_1) из [4], получаем

$$\left| \int_{x_i-1}^{x_i} f(x)\,dg(x) - f(\xi_i)\,[g(x_i) - g(x_{i-1})] \right| \leqslant \omega_i\,[g(x_i) - g(x_{i-1})]$$

и

$$\left| \int_{x_{-p}}^{x_q} f(x)\,dg(x) - \sum_{i=1-p}^{q} f(\xi_i)\,[g(x_i) - g(x_{i-1})] \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1-p}^{q} \omega_i\,[g(x_i) - g(x_{i-1})]. \tag{25}$$

Положим, что множество чисел ω_i $(i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ имеет конечную точную верхнюю границу $\omega = \sup \omega_i$. В силу непрерывности $f(x)$ мы можем построить в частности такое разбиение (24) бесконечного промежутка, при котором ω будет меньше любого

наперед заданного положительного числа. Введем следующие обозначения:

$$A = \lim_{x \to -\infty} g(x); \quad B = \lim_{x \to +\infty} g(x);$$

$$S_{p,q} = \sum_{i=1-p}^{q} f(\xi_i)\,[g(x_i) - g(x_{i-1})];$$

$$S'_{p,q} = \sum_{i=1-p}^{q} |f(\xi_i)|\,[g(x_i) - g(x_{i-1})].$$

Далее пусть ω'_i — значение ω_i для $|f(x)|$ и

$$\omega' = \sup \omega'_i.$$

Мы имеем, очевидно, $\omega'_i \leqslant \omega_i$ и $\omega' \leqslant \omega$. Из (25) следует

$$\left| \int_{x_{-p}}^{x_q} f(x)\,dg(x) - S_{p,q} \right| \leqslant \omega\,(B - A) \qquad (26_1)$$

и совершенно аналогично

$$\left| \int_{x_{-p}}^{x_q} |f(x)|\,dg(x) - S'_{p,q} \right| \leqslant \omega'\,(B - A), \qquad (26_2)$$

откуда следует

$$S'_{p,q} \leqslant \int_{x_{-p}}^{x_q} |f(x)|\,dg(x) + \omega'\,(B - A) \qquad (27)$$

и

$$\int_{x_{-p}}^{x_q} |f(x)|\,dg(x) \leqslant S'_{p,q} + \omega'\,(B - A). \qquad (28)$$

Докажем теперь теорему, которая даст необходимое и достаточное условие абсолютной сходимости интеграла (23).

Теорема. *Для абсолютной сходимости интеграла* (23) *необходимо и достаточно, чтобы существовало разбиение с конечным* ω *и для него такие числа* ξ_i, *удовлетворяющие неравенству* $x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$, *чтобы ряд*

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} f(\xi_i)\,[g(x_i) - g(x_{i-1})] \qquad (29)$$

абсолютно сходился. Если это условие выполнено, то ряд (29) *сходится при любом разбиении* (24) *с конечным* ω *и любом выборе* ξ_i *из промежутка* $[x_{i-1}, x_i]$, *и*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dg(x) = \lim_{\omega \to 0} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} f(\xi_i)\,[g(x_i) - g(x_{i-1})]. \qquad (30)$$

Положим, что интеграл (23) абсолютно сходится. При этом неравенство (27) дает для любого разбиения с конечным ω:

$$S'_{p,q} \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dg(x) + \omega'(B - A),$$

т. е. сумма $S_{p,q}'$, возрастающая при возрастании p и q, остается ограниченной, и, следовательно, ряд (29) абсолютно сходится при любом разбиении (24) с конечными ω. Далее из (26_1) непосредственно следует (30). Положим теперь наоборот, что ряд (29) абсолютно сходится при некотором разбиении (24) с конечными ω и при некотором выборе ξ_i. Из (28) непосредственно следует

$$\int_{x_{-p}}^{x_q} |f(x)|\,dg(x) \leqslant \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |f(\xi_i)|\,[g(x_i) - g(x_{i-1})] + \omega'(B - A),$$

откуда видно, что интеграл, стоящий слева, остается ограниченным при возрастании p и q, т. е. интеграл (23) абсолютно сходится. Но при этом, как мы только что видели, ряд (29) абсолютно сходится при любом разбиении с конечным ω и любом выборе ξ_i, и имеет место формула (30).

Замечание. Если $f(x)$ равномерно непрерывна внутри $[-\infty, +\infty]$, и δ — наибольшая из разностей $(x_i - x_{i-1})$, то условие $\delta \to 0$ влечет за собой $\omega \to 0$, и в формуле (30) вместо $\omega \to 0$ мы можем написать $\delta \to 0$. Это обстоятельство будет иметь, например, место, если $f(x) = x$.

6. Функция скачков. Проведем элементарный анализ свойств неубывающей функции $g(x)$. В силу того, что монотонная ограниченная переменная имеет предел, функция $g(x)$ будет в каждой внутренней точке промежутка $[a, b]$ иметь предел слева и справа: $g(x-0)$ и $g(x+0)$. На левом конце будет иметься предел справа $g(a+0)$ и на правом конце предел слева $g(b-0)$. Если $g(x-0) = g(x+0)$, то точка x есть точка непрерывности $g(x)$.

Аналогичным образом непрерывность на концах обуславливается ревенствами $g(a+0) = g(a)$ и $g(b-0) = g(b)$. В точках разрыва мы имеем $g(x+0) > g(x-0)$, и положительная разность

$S_x = g(x+0) - g(x-0)$ называется скачком $g(x)$ в точке x. Аналогично определяются скачки на концах.

Функция $g(x)$ может иметь бесконечное множество точек разрыва. Покажем, что в этом случае это множество точек разрыва $g(x)$ обязательно счетно. Полное возрастание функции $g(x)$ на промежутке $[a, b]$ выражается положительным числом $g(b) - g(a)$. Таким образом, число точек разрыва, в которых скачок больше единицы, не больше, чем целая часть числа $g(b) - g(a)$, т. е. таких точек разрыва конечное число. Точно так же число точек разрыва, в которых скачок больше $\frac{1}{2}$, не больше, чем целая часть числа $2[g(b) - g(a)]$ и т. д. Нетрудно теперь показать, что точки разрыва $g(x)$ можно пронумеровать. Сначала нумеруем в каком-нибудь порядке конечное число точек разрыва, в которых скачок больше единицы. Дальше продолжаем нумерацию для тех точек, в которых скачок больше $\frac{1}{2}$, и т. д.

При интегрировании непрерывной функции мы можем не пользоваться при разбиении промежутка интегрирования точками прерывности $g(x)$, лежащими внутри промежутка $[a, b]$, и значения $g(x)$ в этих точках, таким образом, не играют роли при образовании интеграла. Иначе обстоит дело в концах промежутка, которые обязательно входят в состав точек деления. Можно, например, считать, что в точках разрыва $g(x)$ непрерывна справа, т. е. $g(x) = g(x+0)$. Пусть $h(x)$ есть измененная таким образом функция $g(x)$, т. е. $h(x) = g(x)$ в точках непрерывности $g(x)$ и на правом конце и $h(x) = g(x+0)$ в точках разрыва. Может повлиять на величину интеграла лишь изменение $g(x)$ на левом конце промежутка, и мы будем иметь очевидную формулу.

$$\int_a^b f(x)\,dh(x) = \int_a^b f(x)\,dg(x) - f(a)[g(a+0) - g(a)].$$

Произведем теперь разбиение $g(x)$ в случае ее прерывности на два слагаемых, из которых одно $g_c(x)$ есть непрерывная неубывающая функция, а второе $g_d(x)$ дает сумму скачков $g(x)$ на промежутке $[a, x]$. Это последнее слагаемое называется обычно функцией скачков для $g(x)$. Приведем точное построение этой функции.

Пусть в промежутке $[a, b]$ имеется конечное или счетное множество точек c_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. Определим возрастающие функции $\varphi_k(x)$ и $\psi_k(x)$ следующими формулами:

$$\varphi_k(x) = \begin{matrix} 0 & \text{при } x < c_k, \\ \alpha_k & \text{при } x \geqslant c_k, \end{matrix} \qquad \psi_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant c_k, \\ \beta_k & \text{при } x > c_k. \end{cases}$$

где α_k и β_k — неотрицательные постоянные такие, что ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \tag{31}$$

сходятся. Если некоторая постоянная α_k равна нулю, то соответствующая функция $\varphi_k(x)$ равна тождественно нулю, и то же для $\psi_k(x)$, если $\beta_k = 0$. Мы удерживаем эти функции в дальнейших формулах для симметрии записи этих формул. Если $c_k = a$, то будем считать, что соответствующее α_k равно нулю, и если $c_k = b$, то мы будем считать, что соответствующее β_k равно нулю. Из сходимостей рядов (31) непосредственно следует, что ряды

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x); \quad \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(x), \tag{32}$$

члены которых суть неотрицательные возрастающие функции, равномерно сходятся для всех x и, в частности, на $[a, b]$. Если x отлично от c_k, то все члены этих рядов непрерывны в точке x, а следовательно, в силу равномерной сходимости, функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ непрерывны во всех точках x, отличных от c_k. В точке $x = c_k$ слагаемое $\varphi(x)$ имеет скачок слева, равный α_k, слагаемое $\psi_k(x)$ имеет скачок справа, равный β_k, а остальные слагаемые непрерывны. В силу равномерной сходимости и сумма остальных слагаемых непрерывна при $x = c_k$. Таким образом, в точке $x = c_k$ функция $\varphi(x)$ имеет скачок слева, равный α_k, и непрерывна справа, а функция $\psi(x)$ имеет скачок справа, равный β_k, и непрерывна слева. Все проведенное построение, очевидно, сохранит свою силу и в том случае, когда множество точек c_k конечно.

Положим теперь, что $g(x)$ есть некоторая возрастающая функция и $x = c_k$ — ее точки разрыва непрерывности, а α_k и β_k — ее скачки слева и справа в этих точках, т. е. $\alpha_k = g(c_k) - g(c_k - 0)$ и $\beta_k = g(c_k + 0) - g(c_k)$. Разность $g(b) - g(a)$ дает общее возрастание функции $g(x)$ в промежутке $[a, b]$, и сумма ее полных скачков $\gamma_k = \alpha_k + \beta_k$ в первых n точках $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ее разрыва непрерывности будет не больше, чем упомянутая разность при любом n. Таким образом, бесконечный ряд, составленный из полных скачков γ_k функции $g(x)$, обязательно сходится. Тем более сходятся ряды, составленные из скачков слева α_k и из скачков справа β_k. Построим функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ и положим $g_d(x) = \varphi(x) + \psi(x)$. Величина $g_d(x)$ равна, очевидно, сумме скачков $g(x)$ во всех точках прерывности, которые лежат левее x, и скачка слева в самой точке x, если он существует, а разность $g_d(\beta) - g_d(\alpha)$ равна сумме скачков в точках прерывности, лежащих между α и β, скачка справа в точке α и скачка слева в точке β. Разность $g(\beta) - g(\alpha)$ дает общее возрастание функции $g(x)$ при изменении x от α до β, а разность

$g_d(\beta) - g_d(\alpha)$ дает возрастание $g(x)$, которое получается лишь за счет скачков в ее точках прерывности. Мы имеем, таким образом, следующее очевидное неравенство:

$$g(\beta) - g(\alpha) \geqslant g_d(\beta) - g_d(\alpha) \quad \text{при } \beta > \alpha.$$

Положим $g_c(x) = g(x) - g_d(x)$. Если x — точка непрерывности $g(x)$, то она является и точкой непрерывности $g_d(x)$, а тем самым и точкой непрерывности $g_c(x)$. Положим теперь, что x равно одному c_k. В этой точке функция $g_d(x)$ имеет слева и справа те же скачки, что и $g(x)$, а потому $g_c(x)$ непрерывна и при $x = c_k$. Таким образом, мы можем утверждать, что $g_c(x)$ непрерывна и возрастает. Мы имеем, таким образом, искомое разложение

$$g(x) = g_d(x) + g_c(x). \tag{33}$$

Это разложение можно провести для любого промежутка, замкнутого или нет, конечного или бесконечного. Для любой непрерывной функции можем написать

$$\int_a^b f(x)\, dg(x) = \int_a^b f(x)\, dg_d(x) + \int_a^b f(x)\, dg_c(x). \tag{34}$$

Покажем, что первый из написанных интегралов может быть представлен в виде суммы

$$\int_a^b f(x)\, dg_d(x) = \sum_k f(c_k)\, \gamma_k, \tag{35}$$

где c_k — точки разрыва $g(x)$ и γ_k — полные скачки $g(x)$ в этих точках. Будем считать, что число точек разрыва бесконечно. Полагая $\omega_k(x) = \varphi_k(x) + \psi_k(x)$, можем написать

$$g_d(x) = s_m(x) + r_m(x),$$

где

$$s_m(x) = \sum_{k=1}^{m} \omega_k(x); \quad r_m(x) = \sum_{k=m+1}^{\infty} \omega_k(x).$$

Имеем неравенство $0 \leqslant r_m(x) \leqslant \gamma_{m+1} + \gamma_{m+2} + \ldots$, и, в силу сходимости ряда, составленного из γ_k, можем при любом заданном положительном ε фиксировать такое N, что для любого x

$$0 \leqslant r_m(x) \leqslant \varepsilon \quad \text{при} \quad m > N. \tag{36}$$

Далее, в силу непрерывности $f(x)$, имеем [2]

$$\int_a^b f(x)\, d\omega_k(x) = f(c_k)\, \gamma_k,$$

и, следовательно,

$$\int_a^b f(x)\,ds_m(x) = \sum_{k=1}^{m} f(c_k)\,\gamma_k. \tag{37}$$

Функция $f(x)$ ограничена, т. е. $|f(x)| \leqslant L$, и для слагаемых последней суммы имеем оценку $|f(c_k)\,\gamma_k| \leqslant L\,\gamma_k$, откуда видно, что ряд, составленный из чисел $f(c_k)\,\gamma_k$, абсолютно сходится.

Для интеграла по неубывающей функции $r_m(x)$ имеем, в силу (36), оценку

$$\left|\int_a^b f(x)\,dr_m(x)\right| \leqslant L\varepsilon \qquad (m > N),$$

откуда, в силу произвольности ε, следует, что разность

$$\int_a^b f(x)\,dg_d(x) - \int_a^b f(x)\,ds_m(x) = \int_a^b f(x)\,dr_m(x)$$

стремится к нулю при возрастании m, т. е.

$$\int_a^b f(x)\,dg_d(x) = \lim_{m\to\infty} \int_a^b f(x)\,ds_m(x),$$

откуда, в силу (37), и следует формула

$$\int_a^b f(x)\,dg_d(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f(c_k)\,\gamma_k. \tag{38}$$

7. Физическая интерпретация. Дадим физическую интерпретацию функции $g(x)$ и интеграла Стилтьеса. Положим, что на промежутке $[a, b]$ распределена материя, и пусть $g(x)$ — масса, находящаяся на промежутке $[a, x]$, и $g(a)$ — масса, находящаяся в точке $x = a$, если такая сосредоточенная масса существует. В противном случае полагаем $g(a) = 0$. Разность $g(d) - g(c)$ дает массу, содержащуюся на промежутке $(c, d]$. При стремлении положительного числа h к нулю промежуток $(x, x+h]$ сжимается, и любая точка выйдет из промежутка $(x, x+h]$ при достаточно малом h, так как левый конец не принадлежит этому промежутку. Функция $g(x)$ является возрастающей функцией (масса — положительна), и, в силу сказанного выше, естественно подчинить функцию $g(x)$, характеризующую распределение масс, условию $g(x+h) - g(x) \to 0$ или $g(x) = g(x+0)$, т. е. функция $g(x)$ должна быть непрерывна справа во всех точках разрыва непрерывности, кроме $x = b$. Не имеет смысла говорить о непрерывности на правом конце промежутка, ибо при $x > b$ функция

не определена. Внутри промежутка сосредоточенные массы имеются в точках разрыва непрерывности $g(x)$, и величина сосредоточенной массы определяется разностью $g(x) - g(x-0)$. То же и для правого конца промежутка. Общее количество материи на промежутке $[a, b]$ равно $g(b)$. Все сказанное годится как для конечного, так и для бесконечного промежутка. Характерным в предыдущих рассуждениях был тот факт, что мы не пользовались понятием плотности распределения. Центр тяжести распределенной материи будет определяться формулой

$$x_c = \frac{1}{g(b)} \int_a^b x \, dg(x).$$

Эта формула годится для конечного промежутка. В случае бесконечного промежутка интегрируемая функция $f(x) = x$ перестает быть ограниченной, и надо использовать определение несобственного интеграла.

В теории вероятностей функция $g(x)$ выражает обычно вероятность распределения некоторой случайной величины, а именно $g(x)$ равно вероятности того, что случайная величина принадлежит промежутку $(-\infty, x]$. При этом, как и выше, $g(x)$ непрерывна справа. Понятие интеграла Стилтьеса от непрерывной функции непосредственно распространяется, как мы увидим, на тот случай, когда $g(x)$ есть разность двух неубывающих функций: $g(x) = g_1(x) - g_2(x)$. Легко дать физическую интерпретацию $g(x)$ в этом случае. Положим, что на промежутке $(-\infty, +\infty)$ распределены положительные и отрицательные заряды. При этом $g_1(x)$ определяет общий положительный заряд на промежутке $(-\infty, x]$, а $g_2(x)$ — общий отрицательный заряд на этом промежутке.

8. Функции ограниченной вариации. До сих пор мы предполагали, что интегрирующая функция $g(x)$ возрастает. Для того, чтобы перейти к интегралам с более общими функциями $g(x)$, мы введем некоторый класс функций, который и будет служить для нас основным классом функций, к которому должны будут принадлежать все интегрирующие функции $g(x)$. Пусть на замкнутом конечном или бесконечном промежутке $[a, b]$ имеется функция $g(x)$, принимающая в каждой точке этого промежутка конечное значение. Пусть δ — некоторое разбиение $[a, b]$ на части $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Составляем сумму:

$$t_\delta = \sum_{k=1}^{n} |g(x_k) - g(x_{k-1})|. \tag{39}$$

Определение. *Если при всевозможных разбиениях δ множество значений этой суммы есть ограниченное множество, то функция*

$g(x)$ называется функцией с ограниченным изменением или функцией ограниченной вариации на промежутке $[a, b]$, а точная верхняя граница сумм (39) *называется полной вариацией или просто вариацией функции $g(x)$ на промежутке $[a, b]$.*

Мы ее будем обозначать символом $V_b^a(g)$. Отметим некоторые простые свойства сумм t_δ и полной вариации. Если между точками x_k и x_{k-1} ввести новую точку деления c, то из формулы

$$g(x_k) - g(x_{k-1}) = [g(x_k) - g(c)] + [g(c) - g(x_{k-1})]$$

непосредственно следует

$$|g(x_k) - g(x_{k-1})| \leqslant |g(x_k) - g(c)| + |g(c) - g(x_{k-1})|,$$

т. е. при добавлении новых точек деления сумма t_δ не убывает. Далее, если суммы t_δ, состоящие из неотрицательных слагаемых, остаются ограниченными для промежутка $[a, b]$, то они тем более остаются ограниченными и для любого промежутка $[\alpha, \beta]$, составляющего часть $[a, b]$, т. е. если $g(x)$ — ограниченной вариации на $[a, b]$, то она будет ограниченной вариации и на любой части $[\alpha, \beta]$ промежутка $[a, b]$ и $V_\alpha^\beta(g) \leqslant V_a^b(g)$.

Если взять промежуток $[a, b]$ целиком, то это есть одно из возможных разбиений δ, и так как мы имеем, очевидно, для любого разбиения неравенство $t_\delta \leqslant V_a^b(g)$, то, в частности, мы будем иметь

$$|g(b) - g(a)| \leqslant V_a^b(g). \tag{40}$$

Если $g(x)$ — монотонная функция на промежутке $[a, b]$, то все разности $g(x_k) - g(x_{k-1})$ имеют один и тот же знак, и сумма t_δ при любом δ равна $g(b) - g(a)$ для возрастающей функции и $g(a) - g(b)$ для убывающей функции, т. е. любая монотонная функция есть функция ограниченной вариации.

Формулируем теперь в виде отдельных теорем ряд свойств функций ограниченной вариации.

Теорема 1. *Если $g(x)$ — ограниченной вариации на $[a, b]$, то она ограничена на этом промежутке.*

Для любого x, принадлежащего $[a, b]$, можем написать $g(x) = g(a) + [g(x) - g(a)]$ и, следовательно, $|g(x)| \leqslant |g(a)| + |g(x) - g(a)|$, или, в силу (40), $|g(x)| \leqslant g(a) + V_a^x(g) \leqslant g(a) + V_a^b(g)$, что и доказывает ограниченность $g(x)$.

Теорема 2. *Если $g(x)$ и $h(x)$ — функции ограниченной вариации на $[a, b]$, то $cg(x)$ (c — постоянная) и $g(x) + h(x)$ — также ограниченной вариации.*

Проведем доказательство для суммы. Составим t_δ для $g(x)+h(x)$:

$$t_\delta=\sum_{k=1}^{n}|[g(x_k)+h(x_k)]-[g(x_{k-1})+h(x_{k-1})]|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{n}|g(x_k)-g(x_{k-1})|+\sum_{k=1}^{n}|h(x_k)-h(x_{k-1})|.$$

Последние две суммы ограничены, так как, по предположению, $g(x)$ и $h(x)$ — ограниченной вариации. Следовательно, t_δ и подавно ограничена, т. е. $g(x)+h(x)$ — ограниченной вариации.

Следствие. *Всякая конечная линейная комбинация функций ограниченной вариации,* т. е. *выражение вида* $c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+\ldots+c_pf_p(x)$ *есть также функция ограниченной вариации.*

Теорема 3. *Если* $g(x)$ *и* $h(x)$ *— ограниченной вариации, то и их произведение* $g(x)h(x)$ *— также ограниченной вариации. Если, кроме того,* $|h(x)|\geqslant m>0$, *то и частное* $g(x):h(x)$ *— ограниченной вариации.*

Рассмотрим произведение и построим для него t_δ:

$$t_\delta=\sum_{k=1}^{n}|g(x_k)h(x_k)-g(x_{k-1})h(x_{k-1})|. \tag{41}$$

Принимая во внимание ограниченность $g(x)$ и $h(x)$, можем написать $|g(x)|\leqslant L$ и $|h(x)|\leqslant L$, где L — некоторое положительное число.

Имеем очевидную формулу

$$g(x_k)h(x_k)-g(x_{k-1})h(x_{k-1})=g(x_k)[h(x_k)-h(x_{k-1})]+$$
$$+h(x_{k-1})[g(x_k)-g(x_{k-1})],$$

которая совместно с (41) дает нам

$$t_\delta\leqslant\sum_{k=1}^{n}|g(x_k)||h(x_k)-h(x_{k-1})|+\sum_{k=1}^{n}|h(x_{k-1})||g(x_k)-g(x_{k-1})|$$

или

$$t_\delta\leqslant L\sum_{k=1}^{n}|h(x_k)-h(x_{k-1})|+L\sum_{k=1}^{n}|g(x_k)-g(x_{k-1})|.$$

Но написанные суммы ограничены, так как, по предположению, $g(x)$ и $h(x)$ — ограниченной вариации, а потому и суммы t_δ ограничены, что и доказывает теорему.

Теорема 4. *Если* $a<c<b$ *и* $g(x)$ *— ограниченной вариации на* $[a, b]$, *то она — ограниченной вариации на* $[a, c]$ *и* $[c, b]$ *и на-*

оборот, если она ограниченной вариации на $[a, c]$ *и* $[c, b]$, *то она ограниченной вариации и на* $[a, b]$. *При этом имеет место формула*

$$V_a^b(g) = V_a^c(g) + V_c^b(g). \tag{42}$$

Выше мы видели, что если $g(x)$ — ограниченной вариации на $[a, b]$, то она ограниченной вариации на $[a, c]$ и $[c, b]$. Остается доказать обратное утверждение и формулу (42). Обозначим через t_δ сумму (39) для $[a, b]$ и через $t_{\delta_1}^{(1)}$ и $t_{\delta_2}^{(2)}$ аналогичные суммы для $[a, c]$ и $[c, b]$. Если точка c является точкой деления δ, то это подразделение δ разбивается на подразделение δ' промежутка $[a, c]$ и подразделение δ_2 промежутка $[c, b]$, и мы имеем $t_\delta = t_{\delta_1}^{(1)} + t_{\delta_2}^{(2)}$. Если $g(x)$ ограниченной вариации на $[a, c]$ и $[c, b]$, то предыдущая формула дает $t_\delta \leqslant V_a^c(g) + V_c^b(f)$. Таким образом, суммы t_δ остаются ограниченными, если c является точкой деления. Тем более они остаются ограниченными и для других подразделений, так как добавление точки деления может только увеличить сумму t_δ. Из этого рассуждения следует, что $g(x)$ — ограниченной вариации на $[a, b]$ и что $V_a^b(g) \leqslant V_a^c(g) + V_c^b(g)$. Докажем противоположное неравенство, откуда и будет следовать формула (42). Пусть ε — заданное положительное число. В силу определения точной верхней границы мы можем в формуле $t_\delta = t_{\delta_1}^{(1)} + t_{\delta_2}^{(2)}$ выбрать подразделения δ_1 и δ_2 так, чтобы иметь $t_{\delta_1}^{(1)} > V_a^c(g) - \varepsilon$ и $t_{\delta_2}^{(2)} > V_c^b(g) - \varepsilon$. При этом получим $t_\delta > V_a^c(g) + V_c^b(g) - 2\varepsilon$, откуда $V_a^b(g) > V_a^c(g) + V_c^b(g) - 2\varepsilon$ или, в виду произвольности ε, $V_a^b(g) \geqslant V_a^c(g) + V_c^b(g)$, что и доказывает окончательно теорему.

Следствие. Мы доказали теорему для случая разбиения промежутка $[a, b]$ на две части. Применяя ее несколько раз, получим аналогичный результат для случая разбиения $[a, b]$ на конечное число частичных промежутков, т. е. если промежуток $[a, b]$ разбит на конечное число частичных промежутков и $g(x)$ ограниченной вариации на всем промежутке, то она ограниченной вариации на каждом частичном промежутке и наоборот; далее, полная вариация по всему промежутку равна сумме полных вариаций на каждом из частичных промежутков. Это свойство называют обычно свойством аддитивности полной вариации. Оно может быть записано в виде

$$V_a^b(g) = V_a^{c_1}(g) + V_{c_1}^{c_2}(g) + \ldots V_{c_{n-1}}^b(g). \tag{43}$$

Теорема 5. *Для того, чтобы* $g(x)$ *была ограниченной вариации, необходимо и достаточно, чтобы ее можно было представить в виде разности двух возрастающих функций.*

Достаточность очевидна. Возрастающие функции суть функции ограниченной вариации, и разность таких функций, по следствию теоремы 2 есть также функция ограниченной вариации. Докажем теперь необходимость, т. е. покажем, что если $g(x)$ есть функция ограниченной вариации, то ее можно представить в виде разности двух возрастающих функций. Если положить

$$g_1(x)=\frac{1}{2}\left|V_a^x(g)+g(x)\right|;\quad g_2(x)=\frac{1}{2}\left|V_a^x(g)-g(x)\right|, \tag{44}$$

то будем иметь

$$g(x)=g_1(x)-g_2(x), \tag{45}$$

и достаточно показать, что функции $g_1(x)$ и $g_2(x)$ возрастают. Докажем это для $g_1(x)$. Пусть α и β принадлежат $[a, b]$ и $\alpha<\beta$. Имеем

$$g_1(\beta)-g_1(\alpha)=\frac{1}{2}\left[V_a^\beta(g)-V_a^\alpha(g)+g(\beta)-g(\alpha)\right],$$

или, в силу аддитивности полной вариации:

$$g_1(\beta)-g_1(\alpha)=\frac{1}{2}\left[V_\alpha^\beta(g)+g(\beta)-g(\alpha)\right].$$

Но, в силу (40), $V_\alpha^\beta(g)\geqslant|g(\beta)-g(\alpha)|$, откуда и следует, что $g_1(\beta)-g_1(\alpha)\geqslant 0$.

Возрастающие функции $g_1(x)$ и $g_2(x)$ могут иметь только конечное или счетное множество точек разрыва, и в каждой точке разрыва они имеют предел слева и справа. Следовательно, то же самое можно утверждать и относительно функции $g(x)$.

Теорема 6. *Если в некоторой точке $x=c$ функция $g(x)$ непрерывна, то в этой точке функция $V_a^x(g)=v(x)$ также непрерывна и наоборот. Если $g(x)$ непрерывна справа (слева), то и $v(x)$ непрерывна справа (слева) и наоборот.*

Положим, что $c<b$, и рассмотрим, например, непрерывность справа. Пусть ε — заданное положительное число. Делим $[c, b]$ на части $c=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$ так, чтобы имело место неравенство

$$\sum_{k=1}^{n}|g(x_k)-g(x_{k-1})|>V_c^b(g)-\varepsilon. \tag{46}$$

Если добавить новые точки деления, то написанное неравенство и подавно будет иметь место. Мы можем поэтому считать, что точка x_1 взята настолько близко к c, что $|g(x_1)-g(c)|<\varepsilon$. При этом используется непрерывность $g(x)$ справа. Неравенство (46) можем переписать так:

$$|g(x_1)-g(c)|+\sum_{k=2}^{n}|g(x_k)-g(x_{k-1})|>V_c^b(g)-\varepsilon,$$

откуда получаем, в силу $|g(x_1)-g(c)|<\varepsilon$;

$$\sum_{k=2}^{n}|g(x_k)-g(x_{k-1})|>V_c^b(g)-2\varepsilon.$$

Сумма, стоящая слева, есть некоторая сумма t_δ для промежутка $[x_1, b]$, и из последнего неравенства следует:

$$V_{x_1}^b(g)>V_c^b(g)-2\varepsilon,$$

или, в силу аддитивности полной вариации, мы получим $V_c^{x_1}(g)<2\varepsilon$, т. е. $v(x_1)-v(c)<2\varepsilon$. Функция $v(x)$ возрастает, и из последнего неравенства следует $v(c+0)-v(c)<2\varepsilon$, откуда, ввиду произвольности ε, получаем $v(c+0)=v(c)$, т. е. $v(x)=V_a^x(g)$ в точке $x=c$ непрерывна справа. Наоборот, если дано, что $v(x)$ непрерывна справа, то в силу (40) имеем $|g(c+h)-g(c)|\leqslant v(c+h)-v(c)$, и при стремлении положительного числа h к нулю правая часть стремится к нулю, а, следовательно, левая и подавно стремится к нулю, что и доказывает непрерывность $g(x)$ справа в точке $x=c$.

Если $g(x)$ непрерывна в точке c, то, в силу доказанного, функции $g_1(x)$ и $g_2(x)$, определяемые формулами (44), также непрерывны в точке $x=c$. Утверждение это справедливо, очевидно, для непрерывности справа или слева.

Теорема 7. *Если $g(x)$ — ограниченной вариации, и*

$$g(x)=g_1^*(x)-g_2^*(x) \tag{47}$$

есть какое-либо представление $g(x)$ в виде разности возрастающих функций, то для любых $\alpha<\beta$, принадлежащих $[a, b]$, имеют место неравенства

$$\begin{aligned} g_1(\beta)-g_1(\alpha)&\leqslant g_1^*(\beta)-g_1^*(\alpha);\\ g_2(\beta)-g_2(\alpha)&\leqslant g_2^*(\beta)-g_2^*(\alpha). \end{aligned} \tag{48}$$

Ограничимся доказательством первого из этих неравенств, которое можно записать в виде

$$\frac{1}{2}[V_\alpha^\beta(g)+g(\beta)-g(\alpha)]\leqslant g_1^*(\beta)-g_1^*(\alpha). \tag{49}$$

Доказываем это неравенство от обратного. Положим, что имеет место противоположное неравенство

$$\frac{1}{2}[V_\alpha^\beta(g)+g(\beta)-g(\alpha)]>g_1^*(\beta)-g_1^*(\alpha). \tag{50}$$

Берем такое подразделение δ промежутка $[\alpha, \beta]$, чтобы сумма t_δ была настолько близкой к полной вариации $V_\alpha^\beta(g)$, чтобы при замене этой полной вариации упомянутой суммой в неравенстве (50) это

неравенство по-прежнему имело бы место. Таким образом, для некоторого подразделения $\alpha = x_0 < x_1 < \dots x_{n-1} < x_n = \beta$ будем иметь

$$\frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n} |g(x_k) - g(x_{k-1})| + g(\beta) - g(\alpha)\right] > g_1^*(\beta) - g_1^*(\alpha). \quad (51)$$

С другой стороны, можем, очевидно, написать

$$g(\beta) - g(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} [g(x_k) - g(x_{k-1})];$$

$$g_1^*(\beta) - g_1^*(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} [g_1^*(x_k) - g_1^*(x_{k-1})],$$

и, следовательно, неравенство (51) может быть записано в виде

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} [|g(x_k) - g(x_{k-1})| + g(x_k) - g(x_{k-1})| > \\ > \sum_{n=1}^{n} [g_1^*(x_k) - g_1^*(x_{k-1})].$$

По крайней мере одно из слагаемых левой части должно быть больше соответствующего слагаемого правой части. Пусть это будет при $k = p$. Это приводит нас к следующему неравенству:

$$\frac{1}{2}[|g(x_p) - g(x_{p-1})| + g(x_p) - g(x_{p-1})] > \\ > g_1^*(x_p) - g_1^*(x_{p-1}). \quad (52)$$

Если $g(x_p) - g(x_{p-1}) \leqslant 0$, то это неравенство нелепо, так как его левая часть равна нулю, а правая неотрицательна, ибо по условию $g_1^*(x)$ возрастает. Остается считать, что $g(x_p) - g(x_{p-1}) > 0$. При этом неравенство (52) может быть записано в виде

$$g(x_p) - g(x_{p-1}) > g_1^*(x_p) - g_1^*(x_{p-1}),$$

или, в силу (47), оно приводит к неравенству

$$-[g_2^*(x_p) - g_2^*(x_{p-1})] > 0,$$

что нелепо, так как, по условию, $g_2^*(x)$ возрастает. Таким образом, мы пришли к нелепости, и неравенство (49), а тем самым и вся теорема доказаны.

Представление (45) в виде разности двух возрастающих функций $g_1(x)$ и $g_2(x)$, которые определяются по формулам (44), называется обычно каноническим представлением функции ограниченной вариации в виде разности двух возрастаю-

щих функций. В силу доказанной теоремы функции $g_1(x)$ и $g_2(x)$, входящие в каноническое представление, возрастают не интенсивнее, чем функции, входящие в какое-нибудь другое представление. Если добавить к $g_1(x)$ и $g_2(x)$ одну и ту же постоянную c, то это не изменит, очевидно, ни их разности, ни их приращения на любой части $[\alpha, \beta]$ промежутка $[a, b]$, и полученное представление $g(x)$ в виде разности $g_1(x)+c$ и $g_2(x)+c$ также можно назвать каноническим.

Замечание. Каждую из возрастающих функций $g_1(x)$ и $g_2(x)$ можно разбить на функцию скачков и непрерывную часть:

$$g_1(x)=g_{1d}(x)+g_{1c}(x); \quad g_2(x)=g_{2d}(x)+g_{2c}(x).$$

Это приведет нас к вполне определенному разбиению первоначальной функции $g(x)$ на функцию скачков и непрерывную часть

$$g(x)=[g_{1d}(x)-g_{2d}(x)]+[g_{1c}(x)-g_{2c}(x)]. \tag{53}$$

9. Интегрирующая функция ограниченной вариации. Если $f(x)$ — непрерывная функция на $[a, b]$ и $g(x)$ — ограниченной вариации, то, пользуясь представлением $g(x)$ в виде разности двух возрастающих функций, можем написать

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[g(x_k)-g(x_{k-1})]=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[g_1(x_k)-g_1(x_{k-1})]-$$

$$-\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[g_2(x_k)-g_2(x_{k-1})]. \tag{54}$$

Суммы, стоящие справа, имеют определенный предел при беспредельном измельчании промежутков, и, следовательно, то же можно утверждать и относительно суммы, стоящей слева, т. е. непрерывная функция интегрируема по функции ограниченной вариации. Предельный переход в формуле (54) дает:

$$\int_a^b f(x)\,dg(x)=\int_a^b f(x)\,dg_1(x)-\int_a^b f(x)\,dg_2(x). \tag{55}$$

Укажем на те изменения, которые надо внести в формулировку свойств интеграла Стилтьеса, если $g(x)$ есть функция ограниченной вариации.

Мы имеем

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[g(x_k)-g(x_{k-1})]\right| \leqslant L\sum_{k=1}^{n}|g(x_k)-g(x_{k-1})| \leqslant LV_a^b(g),$$

если $|f(x)| \leqslant L$. Предельный переход дает

$$\left| \int_a^b f(x)\, dg(x) \right| \leqslant L V_a^b(g). \tag{56}$$

Эта формула заменяет формулу (21) из [4]. Напомним еще формулу [2]

$$\int_a^b f(x)\, d \sum_{k=1}^{p} a_k g_k(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \int_a^b f(x)\, dg_k(x). \tag{57}$$

Если $g_k(x)$ — ограниченной вариации, то и их линейная комбинация $a_1 g_1(x) + \ldots + a_p g_p(x)$ есть также функция ограниченной вариации.

Рассмотрим интеграл Стилтьеса с переменным верхним пределом для того случая, когда $f(x)$ непрерывна и $g(x)$ — ограниченной вариации:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dg(t). \tag{58}$$

Покажем, что функция $F(x)$ есть функция ограниченной вариации. Составим для $[a, x]$ сумму t_δ:

$$t_\delta = \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\, dg(t) \right|.$$

Применяя формулу (56), получим

$$t_\delta \leqslant L \sum_{k=1}^{n} V_{x_{k-1}}^{x_k}(g) = L V_a^b(g),$$

откуда и следует наше утверждение. В тех точках, где $g(x)$ непрерывна, и функция $V_a^x(g)$ непрерывна, и из неравенства

$$\left| \int_x^{x+h} f(x)\, dg(x) \right| \leqslant L V_x^{x+h}(g)$$

непосредственно вытекает, что в этих точках и $F(x)$ непрерывна. Докажем еще следующее утверждение: если $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на $[a, b]$ и $g(x)$ — ограниченной вариации, то имеет место формула

$$\int_a^b \varphi(x)\, d\left[\int_a^x f(t)\, dg(t)\right] = \int_a^b \varphi(x) f(x)\, dg(x). \tag{59}$$

Достаточно доказать эту формулу для случая возрастающей $g(x)$. Составим для интеграла, стоящего в левой части формулы (59), сумму σ_δ:

$$\sigma_\delta = \sum_{k=1}^{n} \varphi(\xi_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\, dg(t),$$

или, согласно теореме о среднем [4]:

$$\sigma_\delta = \sum_{k=1}^{n} \varphi(\xi_k) f(\xi_k') [g(x_k) - g(x_{k-1})]. \tag{60}$$

Точки ξ_k и ξ_k' принадлежат одному и тому же промежутку, и, рассуждая совершенно так же, как это мы делали для формулы (9) из [2], убедимся, что сумма, стоящая в правой части формулы (60), в пределе дает интеграл, стоящий в правой части (59), и этим самым эта последняя формула доказана.

10. Существование интеграла Стилтьеса. До сих пор мы рассматривали интеграл Стилтьеса от непрерывной функции $f(x)$ по функции ограниченной вариации $g(x)$. Из формулы интегрирования по частям следует [2], что функция ограниченной вариации $g(x)$ интегрируема по непрерывной функции $f(x)$. Ниже мы укажем некоторые простые условия, касающиеся существования интеграла Стилтьеса в других случаях. Будем предполагать, что $f(x)$ и $g(x)$ ограничены на конечном промежутке $[a, b]$ и $g(x)$ — неубывающая функция. Поскольку в дальнейшем мы будем пользоваться интегралом Стилтьеса лишь в случае непрерывности $f(x)$, приведем указанные ниже результаты без доказательства.

I. *Для существования интеграла Стилтьеса необходимо, чтобы $f(x)$ была непрерывна во всех точках разрыва $g(x)$, и, если это условие выполнено, то $f(x)$ интегрируема по функции скачков $g_d(x)$ и интеграл от $f(x)$ по $g_d(x)$ выражается формулой (35).*

Если выполнено указанное необходимое условие интегрируемости, то вопрос об интегрируемости $f(x)$ по $g(x)$ сводится к вопросу об интегрируемости $f(x)$ по непрерывной неубывающей функции $g_c(x)$. Если, например, $f(x)$ — функция ограниченной вариации, то, как указано выше, интегрируемость имеет место. Приведем необходимое и достаточное условие интегрируемости $f(x)$ по $g_c(x)$.

II. *Для интегрируемости $f(x)$ по $g_c(x)$ необходимо и достаточно выполнение следующего условия: при любом заданном положительном ε можно покрыть точки разрыва непрерывности $f(x)$ конечным или счетным множеством промежутков $[a_k, b_k]$ (которые могут и перекрываться) так, что имеет место неравенство*

$$\sum_k [g_c(b_k) - g_c(a_k)] \leqslant \varepsilon. \tag{61}$$

Положим теперь, что $g(x)$ — функция ограниченной вариации. Пусть имеется каноническое разбиение этой функции (45) и какое-либо другое

разбиение (47). Составим разность $S_\delta - s_\delta$ для $g_1(x)$ и $g_1^*(x)$:

$$S_\delta - s_\delta = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\,[g_1(x_k) - g_1(x_{k-1})],$$
$$S_\delta^* - s_\delta^* = \sum_{k=1}^{n} (M_n - m_k)\,[g_1^*(x_k) - g_1^*(x_{k-1})]. \tag{62}$$

Мы видели выше, что

$$g_1(x_k) - g_1(x_{k-1}) \leqslant g_1^*(x_k) - g_1^*(x_{k-1}),$$

и, следовательно, если при беспредельном измельчании промежутков $S_\delta^* - s_\delta^* \to 0$, то и подавно $S_\delta - s_\delta \to 0$, т. е. если $f(x)$ интегрируема по $g_1^*(x)$, то она интегрируема и по $g_1(x)$. Совершенно аналогично, если $f(x)$ интегрируема по $g_2^*(x)$, то она интегрируема и по $g_2(x)$. Но из интегрируемости по $g_k(x)$ не следует интегрируемость по $g_k^*(x)$ $(k = 1,2)$. Таким образом, для испытания интегрируемости $f(x)$ по $g(x)$ надо испытать интегрируемость $f(x)$ по $g_1(x)$ и $g_2(x)$. Если $f(x)$ интегрируема по $g_1(x)$ и $g_2(x)$, то будет существовать интеграл от $f(x)$ по $g(x)$, и он будет выражаться формулой (55).

III. *Интегрируемость $f(x)$ по $g_1(x)$ и $g_2(x)$ равносильна интегрируемости $f(x)$ по полной вариации $V_a^x(g) = g_1(x) + g_2(x)$.*

Это утверждение, как и утверждение I, доказывается просто. Значительно более сложным является доказательство утверждения II.

11. Предельный переход в интеграле Стилтьеса. Мы укажем в этом и следующих параграфах некоторые теоремы, касающиеся предельного перехода под знаком интеграла Стилтьеса. Одну из таких теорем мы имели и раньше. Она касалась того случая, когда интегрируемые функции равномерно стремились к предельной функции $f(x)$. Пусть $f_n(x)$ непрерывны на промежутке $[a, b]$, $f_n(x) \to f(x)$ равномерно на $[a, b]$ и $g(x)$ — функция ограниченной вариации на $[a, b[$. На основании [4] и формулы (55) имеем

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dg(x) = \int_a^b f(x)\,dg(x). \tag{63}$$

Укажем на некоторые простые обобщения этого утверждения, причем ограничимся рассмотрением бесконечного промежутка.

Теорема 1. *Пусть $f_n(x)$ непрерывны внутри $[-\infty, +\infty]$ и ограничены одним и тем же числом $|f_n(x)| \leqslant L$, не зависящим от n, $f_n(x) \to f(x)$ равномерно в любом конечном промежутке и $g(x)$ — функция ограниченной вариации на промежутке $[-\infty, +\infty]$, непрерывная на концах этого промежутка. При этом для промежутка $[-\infty, +\infty]$ имеет место формула* (63).

Функция $f(x)$ непрерывна внутри $[-\infty, +\infty]$ и ограничена, а потому интегрируема по $g(x)$. Принимая во внимание, что $g(x)$, а потому и ее полная вариация непрерывны на концах промежутка, и что $|f(x) - f_n(x)| \leqslant 2L$, мы можем утверждать, принимая во внимание (56), что для любого заданного положительного ε существует такое положительное число A, что при любом n,

$$\left|\int_A^\infty [f(x) - f_n(x)]\,dg(x)\right| \leqslant \varepsilon; \quad \left|\int_{-\infty}^{-A} [f(x) - f_n(x)]\,dg(x)\right| \leqslant \varepsilon.$$

В промежутке $[-A, +A]$ предельный переход $f_n(x) \to f(x)$ имеет место равномерно, а потому, в силу упомянутой выше теоремы, мы имеем для всех достаточно больших n:

$$\left| \int_{-A}^{+A} [f(x) - f_n(x)]\, dg(x) \right| < \varepsilon$$

и, следовательно,

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} [f(x) - f_n(x)]\, dg(x) \right| \leqslant 3\varepsilon,$$

откуда, в виду произвольности ε, следует утверждение теоремы. Докажем теперь аналогичную теорему для того случая, когда функции $f_n(x)$ неограничены в промежутке $[-\infty, +\infty]$, и интеграл по этому промежутку приходится понимать как несобственный интеграл.

Теорема 2. *Пусть $f_n(x)$ непрерывны внутри $[-\infty, +\infty]$, несобственные интегралы*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\, dg(x) = \lim_{\substack{\alpha \to -\infty \\ \beta \to +\infty}} \int_{\alpha}^{\beta} f_n(x)\, dg(x) \tag{64}$$

существуют равномерно относительно n, $f_n(x) \to f(x)$ равномерно во всяком конечном промежутке и $g(x)$ есть функция ограниченной вариации в любом конечном промежутке. При этом интеграл от $f(x)$ по $g(x)$ (несобственный) на промежутке $[-\infty, +\infty]$ существует, и имеет место формула (63).

Функция $f(x)$ непрерывна в любом конечном промежутке и интегрируема на таком промежутке по $g(x)$. Докажем, что она интегрируема по бесконечному промежутку. Пусть ε — заданное положительное число. В силу того, что интегралы (64) сходятся равномерно относительно n, существует такое положительное A, что для любого промежутка $[B', B'']$, лежащего вне $[-A, +A]$ и любого значка n, имеем

$$\left| \int_{B'}^{B''} f_n(x)\, dg(x) \right| \leqslant \varepsilon. \tag{65}$$

Фиксируем каким-нибудь образом B' и B'' так, чтобы промежуток $[B', B'']$ лежал вне $[-A, +A]$. При этом, в силу равномерной сходимости $f_n(x) \to f(x)$ на промежутке $[B', B'']$, мы будем иметь для всех достаточно больших значений n:

$$\left| \int_{B'}^{B''} [f(x) - f_n(x)]\, dg(x) \right| \leqslant \varepsilon. \tag{66}$$

Принимая во внимание очевидное равенство

$$\int_{B'}^{B''} f(x)\, dg(x) = \int_{B'}^{B''} f_n(x)\, dg(x) + \int_{B'}^{B''} [f(x) - f_n(x)]\, dg(x),$$

получим на основании (65) и (66):

$$\left| \int_{B'}^{B''} f(x)\, dg(x) \right| \leqslant 2\varepsilon,$$

откуда и следует, что интеграл от $f(x)$ по $g(x)$ на промежутке $[-\infty, +\infty]$ существует. Для доказательства формулы (63) достаточно заметить, что интеграл от разности $f(x) - f_n(x)$ будет достаточно малым по абсолютной величине на достаточно далеких промежутках, а на конечных промежутках он будет малым при всех достаточно больших значениях n в силу равномерной сходимости $f_n(x)$ к $f(x)$.

Заметим, что в случае конечного промежутка для справедливости формулы (63) нет необходимости в равномерном стремлении $f_n(x)$ к $f(x)$. Достаточно потребовать, чтобы непрерывные функции $f_n(x)$ стремились к непрерывной функции $f(x)$, оставаясь ограниченными, независимо от значка n, т. е. должно существовать такое положительное число L, что при всяком n и всех x из $[a, b]$ имеется неравенство $|f_n(x)| \leqslant L$. Это утверждение будет нами доказано позже [50].

12. Теорема Хелли. Мы рассмотрим теперь теорему о предельном переходе для того случая, когда изменяется интегрирующая функция $g(x)$. Предварительно исследуем вопрос о стремлении функции ограниченной вариации к предельной функции. Пусть $g_n(x)$ последовательность функций ограниченной вариации на промежутке $[a, b]$, причем вариации всех этих функций ограничены одним и тем же числом L, не зависящим от n,

$$V_a^b(g_n) \leqslant L. \tag{67}$$

Положим, что $g_n(x)$ в каждой точке промежутка $[a, b]$ стремятся к предельной функции $g(x)$, имеющей конечные значения. Нетрудно видеть, что и функция $g(x)$ будет функцией ограниченной вариации. Действительно, суммы $t_\delta^{(n)}$ для функций $g_n(x)$ имеют оценку:

$$t_\delta^{(n)} = \sum_{k=1}^{m} |g_n(x_k) - g_n(x_{k-1})| \leqslant L,$$

откуда, переходя к пределу, получаем такую же оценку для сумм t_δ функции $g(x)$:

$$t_\delta = \sum_{k=1}^{m} |g(x_k) - g(x_{k-1})| \leqslant L,$$

откуда и следует, что вариация $g(x)$ также не больше L. Если функции $g_n(x)$ сходятся к функции $g(x)$ не во всех точках промежутка $[a, b]$, но лишь на плотном в $[a, b]$ множестве $\mathfrak{E}$ точек x_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, то уже нельзя утверждать, что функция $g(x)$ есть функция ограниченной вариации. В дальнейшем в указанном случае мы будем предполагать, что функция $g(x)$ есть функция ограниченной вариации. Отметим, что множество $\mathfrak{E}$ точек x_k называется плотным в $[a, b]$, если любая часть промежутка $[a, b]$ содержит бесчисленное множество точек из $\mathfrak{E}$. Положим, что $g_n(x)$ есть последовательность возрастающих функций и что эта последовательность в каждой точке $[a, b]$ стремится к предельной функции $g(x)$, имеющей конечные значения. При этом предельная функция будет также возрастающей, а следовательно, будет и функцией ограниченной вариации. Докажем следующую теорему:

Теорема 1. *Если функции $g_n(x)$, возрастающие на промежутке $[a, b]$, стремятся к функции $g(x)$ на плотном в $[a, b]$ множестве $\mathfrak{E}$ точек, то сходимость имеет место в каждой точке непрерывности $g(x)$, лежащей внутри $[a, b]$.*

Пусть x_0 — точка непрерывности $g(x)$, а x' и x'' — точки из множества $\mathfrak{E}$, лежащие слева и справа от x_0, т. е. $x' < x_0 < x''$. Мы имеем $g_n(x') \leqslant g_n(x_0) \leqslant g_n(x'')$ и, следовательно,

$$g(x_0) - g_n(x'') \leqslant g(x_0) - g_n(x_0) \leqslant g(x_0) - g_n(x').$$

Это неравенство мы можем переписать следующим образом:

$$[g(x_0) - g(x'')] + [g(x'') - g_n(x'')] \leqslant g(x_0) - g_n(x_0) \leqslant \\ \leqslant [g(x_0) - g(x')] + [g(x') - g_n(x')]. \qquad (68)$$

Пусть ε — заданное положительное число. Точки x' и x'' из множества $\mathfrak{E}$, повсюду плотного в $[a, b]$, мы можем взять настолько близкими к x_0, что $|g(x_0) - g(x'')| < \varepsilon$ и $|g(x_0) - g(x')| < \varepsilon$, ибо x_0 есть точка непрерывности $g(x)$. Фиксируя таким образом x' и x'', будем для всех достаточно больших значений n иметь неравенства $|g(x') - g_n(x')| < \varepsilon$ и $|g(x'') - g_n(x'')| < \varepsilon$, так как в точках x' и x'' функции $g_n(x)$ стремятся к $g(x)$. Приведенные неравенства, а также неравенство (68) дают нам непосредственно следующее неравенство:

$$-2\varepsilon \leqslant g(x_0) - g_n(x_0) \leqslant +2\varepsilon,$$

откуда, ввиду произвольности ε, и следует, что $g_n(x_0) \to g(x_0)$. Формулируем теперь основную теорему о предельном переходе.

Теорема 2 (Хелли). *Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, $g_n(x)$ — ограниченной вариации, причем вариации $V_a^b(g_n)$ не больше некоторого числа L, не зависящего от n, и $g_n(x) \to g(x)$ во всех точках $[a, b]$. При этом справедлива формула*

$$\lim_{n \to} \int_a^b f(x)\, dg_n(x) = \int_a^b f(x)\, dg(x). \qquad (69)$$

Как мы указали выше, функция $g(x)$ есть функция ограниченной вариации, а следовательно, $f(x)$ интегрируема по $g(x)$. Разобьем промежуток на частичные промежутки $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{m-1} < x_m = b$ и напишем очевидную формулу

$$\int_a^b f(x)\, dg(x) = \sum_{k=1}^{m} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\, dg(x) = \\ = \sum_{k=1}^{m} \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f(x) - f(x_k)]\, dg(x) + \sum_{k=1}^{m} f(x_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} dg(x),$$

т. е.

$$\int_a^b f(x)\, dg(x) = \sum_{k=1}^{m} \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f(x) - f(x_k)]\, dg(x) + \\ + \sum_{k=1}^{m} f(x_k)\, [g(x_k) - g(x_{k-1})]. \qquad (70)$$

Пусть ε — заданное положительное число. Можно фиксировать настолько мелкое разбиение $[a, b]$ на части, чтобы для разности $f(x) - f(x_k)$ при любом k имела место оценка $|f(x) - f(x_k)| \leqslant \varepsilon$. Это следует непосредственно из равномерной непрерывности $f(x)$ в $[a, b]$. При этом получим

$$\left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f(x) - f(x_k)]\, dg(x) \right| \leqslant \varepsilon V_{x_{k-1}}^{x_k}(g),$$

откуда

$$\left| \sum_{k=1}^{m} \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f(x) - f(x_k)]\, dg(x) \right| \leqslant \varepsilon \sum_{k=1}^{m} V_{x_{k-1}}^{x_k}(g),$$

т. е.

$$\left| \sum_{k=1}^{m} \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f(x) - f(x_k)]\, dg(x) \right| \leqslant \varepsilon V_a^b(g) \leqslant \varepsilon L.$$

Формулу (70) можем для фиксированного выше разбиения записать в виде

$$\int_a^b f(x)\, dg(x) = \theta\varepsilon L + \sum_{k=1}^{m} f(x_k)\, [g(x_k) - g(x_{k-1})],$$

где $|\theta| \leqslant 1$. Путем совершенно таких же рассуждений получим формулу

$$\int_a^b f(x)\, dg_n(x) = \theta_n \varepsilon L + \sum_{k=1}^{m} f(x_k)\, [g_n(x_k) - g_n(x_{k-1})],$$

где $|\theta_n| \leqslant 1$. Вычитая почленно, будем иметь

$$\int_a^b f(x)\, dg(x) - \int_a^b f(x)\, dg_n(x) =$$

$$= (\theta - \theta_n)\, \varepsilon L + \sum_{k=1}^{m} f(x_k) \{[g(x_k) - g_n(x_k)] - [g(x_{k-1}) - g_n(x_{k-1})]\}.$$

Точки x_k фиксированы, и, в силу сходимости $g_n(x)$ к $g(x)$ в этих точках для всех достаточно больших значений n сумма, входящая в последнюю формулу, будет по абсолютной величине меньше ε. Таким образом, из последней формулы для таких значений n вытекает оценка

$$\left| \int_a^b f(x)\, dg(x) - \int_a^b f(x)\, dg_n(x) \right| \leqslant \varepsilon (2L + 1),$$

и отсюда, в силу произвольности ε, следует (69).

Замечание. Положим, что $g_n(x)$ стремятся к $g(x)$ не везде на $[a, b]$, но лишь на плотном в $[a, b]$ множестве точек и в том числе на обоих концах промежутка, причем предполагается, что предельная функция $g(x)$ есть функ-

ция ограниченной вариации. При этом, если за точки деления x_k будем брать точки, принадлежащие к множеству точек, на которых $g_n(x) \to g(x)$, то предыдущее доказательство сохранит свою силу, и мы по-прежнему придем к формуле (69). Укажем теперь обобщения доказанной теоремы, аналогичные тем обобщениям, которые мы приводили в [11].

Теорема 3. *Положим, что $f(x)$ непрерывна внутри промежутка $[-\infty, +\infty]$ и ограничена, $g_n(x)$ и $g(x)$ — возрастающие функции на $[-\infty, +\infty]$, непрерывные на концах этого промежутка, и $g_n(x) \to g(x)$ на плотном множестве точек промежутка $[-\infty, +\infty]$ и, в частности, на обоих концах этого промежутка. При этом имеет место формула*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dg_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dg(x). \tag{71}$$

Отметим, что в данном случае полная вариация $g_n(x)$ выражается разностью $g_n(+\infty) - g_n(-\infty)$, и из условий теоремы непосредственно вытекает, что все эти полные вариации не больше некоторого L, не зависящего от n. Интегралы от $f(x)$ по $g_n(x)$ и по $g(x)$ существуют. Оценим разность этих интегралов, разбивая промежуток интегрирования на три части: $[-\infty, a]$, $[a, b]$, $[b, +\infty]$, где точки a и b принадлежат тому множеству, на котором $g_n(x) \to g(x)$:

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dg(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dg_n(x) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_{-\infty}^{a} - \int_{-\infty}^{a} \right| + \left| \int_{a}^{b} - \int_{a}^{b} \right| + \left| \int_{b}^{+\infty} - \int_{b}^{+\infty} \right|. \tag{72}$$

Функция $f(x)$ ограничена, т. е. $|f(x)| \leqslant L$. Для первой из разностей мы имеем оценку

$$\left| \int_{-\infty}^{a} f(x)\, dg(x) - \int_{-\infty}^{a} f(x)\, dg_n(x) \right| \leqslant$$

$$\leqslant L\,\{[g(a) - g(-\infty)] + [(g_n(a) - g_n(-\infty)]\},$$

которую можем записать в виде

$$\left| \int_{-\infty}^{a} - \int_{-\infty}^{a} \right| \leqslant L\,\{2\,[g(a) - g(-\infty)] + [g_n(a) - g(a)] +$$

$$+ [g(-\infty) - g_n(-\infty)]\}.$$

В силу непрерывности $g(x)$ при $x = -\infty$ мы можем фиксировать a настолько близким к $(-\infty)$, чтобы положительная разность $g(a) - g(-\infty)$ была меньше любого наперед заданного положительного числа. Зафиксировав таким образом a, заметим далее, что разности $g_n(a) - g(a)$ и $g(-\infty) - g_n(-\infty)$ также будут сколь угодно малыми по абсолютной величине при всех достаточно больших значениях n. Совершенно аналогичным образом можно разобрать и третье слагаемое правой части формулы (72). Таким образом, для любого заданного положительного ε можно фиксировать такие значения a и b из упомянутого выше множества, повсюду плотного в $[-\infty, +\infty]$,

что первое и третье слагаемые правой части формулы (72) будут меньше ε при всех достаточно больших значениях n. К конечному промежутку $[a, b]$ применима доказанная выше теорема, т. е. и второе слагаемое правой части (72) будет меньше ε при всех достаточно больших значениях n. Таким образом, левая часть неравенства (72) будет меньше 3ε при всех достаточно больших значениях n; откуда, ввиду произвольности ε, и следует формула (71).

Перейдем теперь ко второму обобщению теоремы 2, которое касается несобственных интегралов Стилтьеса.

Теорема 4. *Положим, что $f(x)$ непрерывна внутри промежутка $[-\infty, +\infty]$, $g_n(x)$ и $g(x)$ — ограниченной вариации на этом промежутке, причем вариации $g_n(x)$ не превышают некоторого числа, не зависящего от n. Пусть далее $g_n(x) \to g(x)$ на множестве, плотном в $[-\infty, +\infty]$, и несобственные интегралы*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dg_n(x) = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \int_a^b f(x)\, dg_n(x)$$

сходятся равномерно относительно n. При этом $f(x)$ интегрируема по $g(x)$ на $[-\infty, +\infty]$, и имеет место формула [71].

Пусть ε — заданное положительное число. Существует такое положительное A, что для любого промежутка $[B', B'']$, лежащего вне $[-A, +A]$, имеет место оценка

$$\left| \int_{B'}^{B''} f(x)\, dg_n(x) \right| \leqslant \varepsilon. \tag{73}$$

Фиксируем любой такой промежуток $[B', B'']$ и пишем очевидное неравенство

$$\left| \int_{B'}^{B''} f(x)\, dg(x) \right| \leqslant \left| \int_{B'}^{B''} f(x)\, dg_n(x) \right| + \left| \int_{B'}^{B''} f(x)\, dg(x) - \int_{B'}^{B''} f(x)\, dg_n(x) \right|.$$

В силу замечания к теореме 2 можно взять настолько большое n, чтобы второе слагаемое правой части было меньше ε. При этом из (73) будет непосредственно следовать, что

$$\left| \int_{B'}^{B''} f(x)\, dg(x) \right| \leqslant 2\varepsilon.$$

Это неравенство, ввиду произвольности ε, и доказывает существование интеграла от $f(x)$ по $g(x)$ на $[-\infty, +\infty]$. Формула (71) доказывается совершенно аналогично тому, что мы делали выше при помощи подразделения промежутка $[-\infty, +\infty]$ на три части.

13. Принцип выбора. Мы исследовали раньше принцип выбора для множества непрерывных функций [**IV; 15 и 16**]. Сейчас докажем теорему, которая даст нам принцип выбора для функций ограниченной вариации.

Теорема (*Хелли*). *Пусть $\mathfrak{E}$ — множество функций ограниченной вариации на промежутке $[a, b]$ (конечном или бесконечном), причем существует такое положительное число L, что для всех функций $g(x)$, принадлежащих $\mathfrak{E}$, имеют место неравенства*

$$|g(x)| \leqslant L; \qquad V_a^b(g) \leqslant L, \tag{74}$$

т. е. все функции $g(x)$ по абсолютной величине ограничены и их вариации на $[a, b]$ также ограничены некоторым числом. При этом из любой бесконечной последовательности $g_n(x)$ функций, принадлежащих множеству $\mathfrak{E}$, можно выделить подпоследовательность $g_{n_k}(x)$, которая во всех точках $[a, b]$ стремится к некоторой функции $g(x)$ ограниченной вариации.

Достаточно доказать лишь возможность выделения подпоследовательности $g_{n_k}(x)$, которая во всех точках $[a, b]$ стремится к пределу. После этого из условий теоремы, в силу сказанного в [12], будет непосредственно следовать, что и предельная функция $g(x)$ есть функция ограниченной вариации. Предварительно докажем лемму.

Лемма. *Если имеется некоторая последовательность функций $h_n(x)$, возрастающих на промежутке $[a, b]$ и ограниченных одним и тем же числом L, то из нее можно выделить подпоследовательность функций, имеющих во всех точках $[a, b]$ предел.*

Построим счетное множество точек x_k $(k = 1, 2, \ldots)$, содержащихся в $[a, b]$, и состоящее из левого конца $x = a$ и всех точек x, имеющих рациональную абсциссу. Это множество точек плотно в $[a, b]$, и мы можем выделить подпоследовательность $h_{n_k}(x)$, которая сходится во всех точках x_k. Таким образом, мы получаем предельную функцию $h(x)$, определенную пока только в точках a и x_k. Распространим ее на остальные точки $[a, b]$ следующим образом. Если x есть точка $[a, b]$, не принадлежащая упомянутому множеству точек x_k, то будем считать $h(x)$ равным точной верхней границе значений $h(x)$ для всех x_k, лежащих левее x, т. е. положим

$$h(x) = \sup_{x_k < x} h(x_k).$$

Построенная таким образом функция $h(x)$ будет, очевидно, возрастающей и ограниченной на промежутке $[a, b]$. Она может иметь только конечное или счетное множество точек разрыва: $\xi_1, \xi_2, \ldots$ Во всех точках x_k множества, повсюду плотного на $[a, b]$, последовательность $h_{n_k}(x)$ сходится к $h(x)$. Согласно теореме 1 из [12], сходимость будет иметь место и во всех точках непрерывности $h(x)$, лежащих внутри $[a, b]$. Таким образом, сходимость $h_{n_k}(x)$ к $h(x)$ может отсутствовать лишь в точках разрыва ξ_k функции $h(x)$ и на правом конце промежутка. Применяя к последовательности $h_{n_k}(x)$ еще раз принцип выбора, можем добиться того, чтобы сходимость имела место и в этих точках [IV; 15], и таким образом лемма доказана.

Теперь уже нетрудно доказать и основную теорему 1. Каждую функцию ограниченной вариации $g(x)$, принадлежащую множеству $\mathfrak{E}$, мы можем представить в виде разности возрастающих функций

$$g(x) = \frac{1}{2}\left[V_a^x(g) + g(x)\right] - \frac{1}{2}\left[V_a^x(g) - g(x)\right], \tag{75}$$

причем, в силу (74), обе эти возрастающие функции по абсолютной величине не превосходят числа L. Применяя лемму, можно утверждать, что из последовательности $g_n(x)$ можно выделить такую последовательность, для которой уменьшаемое в правой части (75) во всех точках $[a, b]$ стремится к предельной функции. Применяя еще раз лемму, можем утверждать, что из полученной последовательности можно выделить подпоследовательность, для которой и вычитаемое правой части (75) во всех точках $[a, b]$ стремится к предельной функции. Таким образом, получим такую подпоследовательность $g_{n_k}(x)$, которая во всех точках $[a, b]$ стремится к предельной функции, и тем самым теорема доказана.

14. Пространство непрерывных функций. Рассмотрим множество всех функций, принимающих вещественные значения и непрерывных на заданном конечном промежутке $[a, b]$, и назовем это множество пространством C. Элементом этого пространства (или его вектором) является любая непрерывная на $[a, b]$ функция. Различные непрерывные функции представляют собой различные элементы C. Функцию, тождественно равную нулю на $[a, b]$, назовем нулевым элементом C. Если мы составим любую конечную линейную комбинацию вещественных функций, непрерывных на $[a, b]$, с вещественными коэффициентами $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_m f_m(x)$, то получим вещественную непрерывную на C функцию, т. е. элементы C можно умножать на вещественные числа и складывать, после чего опять получается некоторый элемент C. Эта операция подчиняется обычным законам элементарной алгебры, например:

$$f_1(x) + f_2(x) = f_2(x) + f_1(x); \qquad c[f_1(x) + f_2(x)] = cf_1(x) + cf_2(x);$$
$$(c_1 + c_2) f(x) = c_1 f(x) + c_2 f(x); \qquad c_1(c_2 f(x)) = (c_1 c_2) f(x).$$

Введем в пространстве C понятие нормы элемента, т. е., иначе говоря, введем понятие о длине вектора в пространстве C. Нормой элемента $f(x)$ мы назовем наибольшее значение, которое принимает $|f(x)|$ на $[a, b]$. У нулевого элемента норма равна нулю, а у всякого другого она положительна. Будем обозначать норму элемента $f(x)$ символом $\|f\|$. Введем, наконец, в пространстве C понятие сходимости. Мы будем говорить, что последовательность элементов $f_n(x)$ из C сходится к элементу $f(x)$ из C, если $\|f(x) - f_n(x)\| \to 0$. Это последнее равносильно тому, что наибольшее значение $|f(x) - f_n(x)|$ на промежутке $[a, b]$ стремится к нулю, а это, очевидно, равносильно тому, что $f_n(x) \to f(x)$ равномерно на $[a, b]$.

Введем теперь понятие функционала и оператора в пространстве C. Функционалом в C назовем всякий определенный закон, согласно которому любому элементу $f(x)$ из C сопоставляется определенное вещественное число. Для функционалов вводят обычно следующие обозначения: $\Phi[f(x)]$, $\Psi[f(x)]$ и т. д. Понятие функционала является видоизменением обычного понятия функции. Роль аргумента в случае функционала играют элементы C, а значением функционала является вещественное число. Функционал называется дистрибутивным, если для любой конечной линейной комбинации элементов $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_m f_m(x)$ он удовлетворяет равенству

$$\Phi[c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_m f_m(x)] = \\ = c_1 \Phi[f_1(x)] + c_2 \Phi[f_2(x)] + \ldots c_m \Phi[f_m(x)]. \tag{76}$$

Функционал $\Phi[f(x)]$ называется ограниченным, если существует такое положительное число N, что для любого элемента $f(x)$ из C выполняется неравенство

$$|\Phi[f(x)]| \leqslant N \|f(x)\|. \tag{77}$$

В левой части неравенства стоит абсолютное значение вещественного числа $\Phi[f(x)]$, которым выражается значение функционала в C для элемента $f(x)$, а справа стоит произведение положительного числа N на норму элемента $f(x)$, т. е. произведение N на наибольшее значение, которое имеет $|f(x)|$ на промежутке $[a, b]$. Дистрибутивные и ограниченные функционалы будем называть линейными функционалами. Можно еще ввести понятие непрерывности функционала, а именно функционал $\Phi[f(x)]$ называется непрерывным при выполнении следующего условия; если $f_n(x) \to f(x)$

равномерно на $[a, b]$, то $\Phi[f_n(x)] \to \Phi[f(x)]$. Нетрудно видеть, что линейный функционал непрерывен. Действительно, пользуясь (76) и (77), можем написать

$$|\Phi[f(x)] - \Phi[f_n(x)]| = |\Phi[f(x) - f_n(x)]| \leqslant N \|f(x) - f_n(x)\|.$$

В силу равномерной сходимости $f_n(x)$ к $f(x)$, имеем $\|f(x) - f_n(x)\| \to 0$, и, следовательно, $\Phi[f(x)] - \Phi[f_n(x)] \to 0$, т. е. действительно $\Phi[f_n(x)] \to \Phi[f(x)]$. Мы могли бы при определении линейного функционала потребовать дистрибутивности и непрерывности и затем доказать его ограниченность, т. е. при наличии дистрибутивности ограниченность функционала и его непрерывность равносильны. Мы не будем останавливаться на доказательстве этого факта, которое не представляет никакого труда.

Приведем пример функционала. Пусть x_0 какая-либо фиксированная точка из промежутка $[a, b]$. Значения непрерывных функций в этой точке $f(x_0)$ представляют собой линейный функционал в C. Определенный интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

также представляет собой пример линейного функционала. Пусть $g(x)$ — функция ограниченной вариации на $[a, b]$. Для всякого элемента $f(x)$ из C можем составить интеграл Стилтьеса

$$\Phi[f(x)] = \int_a^b f(x)\,dg(x). \tag{78}$$

Он представляет собой линейный функционал $\Phi[f(x)]$. Его дистрибутивность вытекает из дистрибутивности интеграла по отношению к функции $f(x)$, а его ограниченность непосредственно следует из оценки

$$\left|\int_a^b f(x)\,dg(x)\right| \leqslant LV_a^b(g),$$

где L есть наибольшее значение $|f(x)|$ в промежутке $[a, b]$. Таким образом, для функционала (80) роль числа N, входящего в формулу (77), может играть полная вариация $V_a^b(g)$.

Вернемся к неравенству (77). Если оно имеет место при некотором выборе положительного числа N, то оно тем более имеет место при больших значениях N. Покажем, что существует наименьшее значение N, при котором (77) имеет место.

Отметим прежде всего, что если $\|f\| = 0$, то $f(x)$ тождественно равно нулю на $[a, b]$, т. е. $f(x)$ есть нулевой элемент C, если $\|f\| = 0$. Для всякого другого элемента $\|f\| > 0$. Но нулевой элемент C можно представить в виде произведения $f_0(x) = 0 \cdot f(x)$, где $f(x)$ — какая-либо непрерывная функция. Из (76) следует, что $\Phi(f_0) = 0$. $\Phi(f) = 0$, т. е. любой дистрибутивный функционал равен нулю на нулевом элементе C. Таким образом, для нулевого элемента неравенство (77) имеет вид $0 \leqslant N \cdot 0$, и оно соблюдено при любом выборе N, так что мы можем рассматривать (77) лишь при $\|f\| > 0$. Принимая во внимание (76), мы можем переписать (77) в виде

$$\left|\Phi\left[\frac{f(x)}{\|f\|}\right]\right| \leqslant N. \tag{79}$$

Но $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{\|f\|}$ есть элемент C с нормой единица.

Обозначим через n_Φ — точную верхнюю границу неотрицательных чисел $|\Phi(\varphi)|$, где $\varphi(x)$ — любой элемент C с нормой единица:

$$n_\Phi = \sup_{\|\varphi\| = 1} |\Phi(\varphi)|. \tag{80}$$

Из (78) непосредственно следует, что n_Φ и есть наименьшее возможное значение N в неравенстве (77). Это число n_Φ называется нормой функционала $\Phi(f)$. Его часто обозначают также через $\|\Phi\|$.

Имеем

$$|\Phi(f)| \leqslant n_\Phi \|f\|, \tag{81}$$

но (77) уже не может иметь место для всех $f(x)$ из C, если взять $N > n_\Phi$. Отметим еще, что $n_\Phi \geqslant 0$, и если $n_\Phi = 0$, то из (81) следует $\Phi(f) = 0$ для любого элемента $f(x)$ из C, т. е. функционал $\Phi(f)$ любому элементу $f(x)$ сопоставляет число нуль. Из сказанного выше следует, что норма функционала, представимого формулой (78), не превышает $V_a^b(g)$. Напомним, что в четвертом томе мы рассматривали пространство F непрерывных функций, но с другим определением нормы элемента [**IV, 35**].

15. Общая форма функционалов в C. Мы докажем сейчас важную теорему Ф. Рисса о том, что всякий линейный функционал $\Phi(f)$ в C может быть представлен формулой (78), где $g(x)$ — функция ограниченной вариации, определяющая этот функционал. Но, как мы видели выше, всякий интеграл (78), где $g(x)$ — фиксированная функция ограниченной вариации, — представляет собой линейный функционал в C. Таким образом, после доказательства теоремы Рисса можно утверждать, что интеграл (78), где $g(x)$ — функция ограниченной вариации, — представляет собой общую форму линейного функционала в C.

Теорема (*Ф. Рисса*) *Всякий линейный функционал в пространстве C может быть представлен формулой* (89), *где $g(x)$ есть некоторая функция ограниченной вариации.*

При доказательстве этой теоремы мы будем пользоваться полиномами специального вида, которые были впервые построены академиком С. Н. Бернштейном и о которых уже говорили раньше. Напомним построение и основное свойство этих полиномов. Пусть $f(x)$ — непрерывная функция на промежутке [0, 1]. Полином Бернштейна, соответствующий этой функции, имеет вид

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^{n} f\left(\frac{m}{n}\right) C_n^m x^m (1-x)^{n-m}; \left(C_n^m = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}\right). \tag{82}$$

Как мы показали раньше [**II; 154**], при беспредельном возрастании n последовательность полиномов $P_n(x)$ стремится равномерно на промежутке [0, 1] к функции $f(x)$. Для доказательства теоремы преобразуем промежуток $[a, b]$ в промежуток [0, 1] при помощи линейной замены независимой переменной $y = (x-a):(b-a)$. При этом пространство функций, непрерывных на $[a, b]$, перейдет в пространство функций, непрерывных на [0, 1], и при доказательстве мы будем считать, что основной промежуток $[a, b]$ есть уже промежуток [0, 1]. Пусть $\Phi[f(x)]$ — некоторый функционал в пространстве C. Мы должны доказать, что его можно представить по формуле (78) — где $g(x)$ — некоторая функция ограниченной вариации на промежутке [0, 1]. Мы имеем очевидное равенство

$$\sum_{m=0}^{n} C_n^m x^m (1-x)^{n-m} = 1.$$

и все слагаемые написанной суммы неотрицательны, если x принадлежит [0,1]. Отсюда следует, что если ε_m — числа, равные $+1$ или -1, то имеет место неравенство

$$\left| \sum_{m=0}^{n} \varepsilon_m C_n^m x^m (1-x)^{n-m} \right| \leqslant 1 \quad (0 \leqslant x \leqslant 1). \tag{83}$$

Применяя функционал $\Phi[f(x)]$ к полиному, стоящему в левой части неравенства (83), получим, в силу (77) и (83),

$$\left| \sum_{m=0}^{n} \varepsilon_m \Phi\,[C_n^m x^m (1-x)^{n-m}] \right| \leqslant n_\Phi\,. \tag{84}$$

Выберем теперь знаки ε_m так, чтобы произведение $\varepsilon_m \Phi[C_n^m x^m (1-x)^{n-m}]$ было неотрицательным при всяком m. При таком выборе ε_m неравенство (84) может быть записано в виде

$$\sum_{m=0}^{n} |\Phi[C_n^m x^m (1-x)^{n-m}]| \leqslant n_\Phi\,. \tag{85}$$

Разобьем промежуток [0,1] на n равных частей и определим функцию $g_n(x)$ так, чтобы она сохраняла постоянное значение на каждом из частичных промежутков, а именно определим эту функцию следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
&g_n(0) = 0 \\
&g_n(x) = \Phi[C_n^0 x^0 (1-x)^{n-0}] && \text{при } 0 < x < \frac{1}{n}, \\
&g_n(x) = \Phi[C_n^0 x^0 (1-x)^{n-0}] + \Phi[C_n^1 x (1-x)^{n-1}] \\
&\qquad\qquad && \text{при } \frac{1}{n} \leqslant x < \frac{2}{n}, \\
&g_n(x) = \sum_{m=0}^{2} \Phi[C_n^m x^m (1-x)^{n-m}] && \text{при } \frac{2}{n} \leqslant x < \frac{3}{n}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&g_n(x) = \sum_{m=0}^{n-1} \Phi[C_n^m x^m (1-x)^{n-m}] && \text{при } \frac{n-1}{n} \leqslant x < 1, \\
&g_n(1) = \sum_{m=0}^{n} \Phi[C_n^m x^m (1-x)^{n-m}].
\end{aligned}\right\} \tag{86}$$

Полная вариация функции $g_n(x)$ равна, очевидно, сумме абсолютных значений скачков $g_n(x)$ в точках деления и на концах промежутка. В силу (85) мы будем иметь $V_a^b(g_n) \leqslant n_\Phi$. Точно так же из (85) и определения функции $g_n(x)$ непосредственно следуют неравенства $|g_n(x)| \leqslant n_\Phi$. Таким образом, к последовательности функций $g_n(x)$ применима теорема 1 из [13], и мы можем утверждать, что существует такая последовательность возрастающих целых положительных чисел n_k, что во всех точках $[0, 1]$ $g_{n_k}(x)$ стремятся к некоторой

функции ограниченной вариации $g(x)$. Мы докажем сейчас, что эта функция $g(x)$ и будет входить в правую часть формулы (78). Составим интеграл Стилтьеса от $f(x)$ по $g_n(x)$. Он равен сумме произведений значений функции $f(x)$ в точках разрыва $g_n(x)$ на величину скачка в этих точках, т. е. [6]:

$$\int_0^1 f(x)\,dg_n(x) = \sum_{m=0}^{n} f\left(\frac{m}{n}\right)\Phi\left[C_n^m x^m (1-x)^{n-m}\right].$$

В силу формул (76) и (82) правая часть представляет собой значение функционала $\Phi[f(x)]$ для $f(x) = P_n(x)$, т. е.

$$\int_0^1 f(x)\,dg_n(x) = \Phi[P_n(x)].$$

Применим эту формулу при $n = n_k$:

$$\int_0^1 f(x)\,dg_{n_k}(x) = \Phi[P_{n_k}(x)]. \tag{87}$$

При беспредельном возрастании n_k $P_{n_k}(x) \to f(x)$ равномерно на [0, 1], и, в силу непрерывности функционала $\Phi[f(x)]$, формула (87) дает

$$\Phi[f(x)] = \lim_{n_k \to \infty} \int_0^1 f(x)\,dg_{n_k}(x).$$

К правой части применима теорема 1 из [12], и мы приходим, таким образом, к формуле

$$\Phi[f(x)] = \int_0^1 f(x)\,dg(x). \tag{88}$$

Покажем, что $n_\Phi = V_0^1(g)$. Из формулы (88) непосредственно следует, как мы видели в [14], что $n_\Phi \leqslant V_0^1(g)$. С другой стороны из указанного выше неравенства $V_0^1(g_{n_k}) \leqslant n_\Phi$ вытекает, что и $V_0^1(g) \leqslant n_\Phi$. Указанные два неравенства и приводят к равенству $n_\Phi = V_0^1(g)$. Рассмотрим вопрос об единственности представления функционала $\Phi(f)$ формулой (88). Пусть $h(x)$ — функция ограниченной вариации, значения которой отличны от значений $g(x)$ на некотором множестве $\mathfrak{E}$ точек промежутка $[a, b]$ причем $\mathfrak{E}$ есть конечное или счетное множество. Нетрудно видеть, что интеграл

$$\int_0^1 f(x)\,dh(x) \tag{89}$$

при любом выборе непрерывной функции $f(x)$ равен интегралу (88). Действительно, поскольку множество точек любого промежутка содержащегося в [0,1], имеет мощность континуума, точки, не принадлежащие $\mathfrak{E}$, образуют множество

плотное на [0, 1]. Таким образом, при составлении сумм Римана — Стилтьеса для интеграла (88)

$$\sum_{k=1}^{a} f(\xi_k)\,[g(x_k) - g(x_{k-1})]$$

и при беспредельном измельчании частичных промежутков мы можем брать точки деления, не входящие в $\mathfrak{E}$, откуда и следует совпадение интегралов (88) и (89).

Итак, изменяя функцию $g(x)$ в конечном или счетном множестве точек, но так, чтобы и новая функция $h(x)$ была функцией ограниченной вариации, получим интеграл (89), дающий тот же функционал в C, что и интеграл (88). В силу сказанного в [14], мы можем утверждать, что $n_\Phi \leqslant V_0^1(h)$, причем может иметь место и знак $<$. При построении $g(x)$ указанным при доказательстве теоремы образом мы имели $n_\Phi = V_a^b(g)$.

Поставим теперь следующий общий вопрос: для каких функций ограниченной вариации $h(x)$ интеграл (89) определяет тот же линейный функционал в C, что и интеграл (88)?

Вводя новую функцию ограниченной вариации $\omega(x) = h(x) - g(x)$, приходим к следующему вопросу: для каких функций ограниченной вариации $\omega(x)$ мы имеем

$$\int_0^1 f(x)\,d\omega(x) = 0 \tag{90}$$

для любой непрерывной на [0,1] функции $f(x)$? Ответом на этот вопрос является следующая теорема:

Теорема. *Для того, чтобы при любом выборе непрерывной функции $f(x)$ имела место формула* (90), *необходимо и достаточно, чтобы функция ограниченной вариации $\omega(x)$ удовлетворяла следующим условиям:* 1) *во всякой точке непрерывности $x = x_0$ функции $\omega(x)$, лежащей внутри* [0, 1], *имеет место равенство $\omega(x_0) = \omega(0)$;* 2) $\omega(1) = \omega(0)$.

Необходимость. Выберем настолько большое n, чтобы $x_0 > \frac{1}{n}$ и точка $x_0 + \frac{1}{n}$ находилась внутри [0, 1], и определим непрерывную функцию $f(x)$ следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant x_0, \\ -nx + (1 + nx_0) & \text{при } x_0 < x < x_0 + \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{при } x_0 + \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

На среднем промежутке $\left[x_0,\ x_0 + \frac{1}{n}\right]$ $f(x)$ есть линейная функция, убывающая от единицы до нуля. Равенство (90) при таком выборе $f(x)$ дает

$$\int_0^{x_0} d\omega(x) + \int_{x_0}^{x_0 + \frac{1}{n}} [-nx + (1 + nx_0)]\,d\omega(x) = 0$$

или

$$\omega(x_0) - \omega(0) + \int_{x_0}^{x_0+\frac{1}{n}} [-nx + (1 + nx_0)]\, d\omega(x) = 0. \tag{91}$$

Но мы имеем [9]

$$\left| \int_{x_0}^{x_0+\frac{1}{n}} [-nx + (1 + nx_0)]\, d\omega(x) \right| \leqslant 1 \cdot V_{x_0}^{x_0+\frac{1}{n}}(\omega).$$

Поскольку $\omega(x)$ по предположению непрерывна в точке $x = x_0$, можно утверждать, что $V_{x_0}^{x_0+\frac{1}{n}}(\omega) \to 0$ при беспредельном возрастании n, и формула (91) в пределе дает $\omega(x_0) = \omega(0)$. Второе условие $\omega(1) = \omega(0)$ получается из (90), если положить $f(x) = 1$.

Достаточность. Поскольку точки непрерывности функции ограниченной вариации расположены плотно на промежутке $[0, 1]$, мы можем при построении суммы Римана — Стилтьеса пользоваться только этими точками. Но при этом, в силу условий $\omega(x_0) = \omega(0) = \omega(1)$, все разности $\omega(x_k) - \omega(x_{k-1})$ будут равны нулю и, следовательно, будет иметь место (90) при любом выборе непрерывной функции $f(x)$. Теорема доказана.

Тем самым мы доказали, что для того, чтобы интеграл (89) давал тот же линейный функционал в C, что и интеграл (88), необходимо и достаточно, чтобы разность $h(x) - g(x)$ равнялась $h(0) - g(0)$ во всех точках, где она непрерывна, а также при $x = 1$.

Вернемся к формуле (88). Как известно, при любом представлении $\Phi(f)$ интегралом (88) должно быть $n_\Phi \leqslant V_0^1(h)$. Мы имеем в формуле (88) $n_\Phi = V_0^1(g)$. Далее к $g(x)$ можем, конечно, добавить любое постоянное слагаемое. Чтобы исключить эту многозначность, будем считать в формуле (88) $g(0) = 0$. У функции $g(x)$ может быть лишь конечное или счетное число точек разрыва. Рассмотрим такую точку разрыва ξ, что $g(\xi - 0) = g(\xi + 0)$, но $g(\xi) \neq g(\xi - 0)$ (устранимый разрыв). Если мы изменим $g(x)$ в одной точке $x = \xi$, положив $g(\xi) = g(\xi - 0)$, то устраним этот разрыв, не изменив интеграла (88), но уменьшив $V_0^1(g)$. Но этого быть не может, так как мы имели раньше $V_0^1(g) = n_\Phi$, а после указанного изменения получили бы невозможное равенство $V_0^1(g) < n_\Phi$. Таким образом, из $V_0^1(g) = n_\Phi$ следует, что $g(x)$ не имеет устранимых разрывов. Остаются те разрывы, в которых $g(\xi - 0) \neq g(\xi + 0)$. Если выбрать значение $g(\xi)$ сначала принадлежащим замкнутому промежутку i с концами $g(\xi - 0)$, $g(\xi + 0)$, а затем лежащим вне этого промежутка, то во втором случае $V_0^1(g)$ будет очевидно больше, чем в первом. Таким образом, в неустранимых точках разрыва из условия $V_0^1(g) = n_\Phi$ следует, что $g(\xi)$ принадлежит замкнутому промежутку i. Положение числа $g(\xi)$ в промежутке i не влияет на полную вариацию $V_a^b(g)$. Итак, при условии $V_0^1(g) = n_\Phi$ единственным произволом является определение $g(\xi)$ в точках разрыва, но так, что $g(\xi)$ принадлежит i. Обычно полагают

$$g(\xi) = \frac{g(\xi - 0) + g(\xi + 0)}{2},$$

или $g(\xi) = g(\xi + 0)$ — непрерывность справа, или $g(\xi) = g(\xi - 0)$ — непрерывность слева.

Можно аналогично предыдущему рассматривать пространство C комплексных функций $\varphi(x)+i\psi(x)$, непрерывных на промежутке $[0, 1]$. Элементы такого пространства можно умножать на комплексные числа и складывать. Определение нормы и линейного функционала сохраняются, но значения функционала могут быть и комплексными. Имеет место и теорема об общем виде линейного функционала, причем комплексные функции ограниченной вариации имеют вид $\lambda(x)+i\mu(x)$, где $\lambda(x)$ и $\mu(x)$ — вещественные функции ограниченной вариации.

16. Линейные операторы в C. Перейдем к определению оператора в пространстве C. Оператором в C назовем всякий определенный закон, согласно которому любому элементу $f(x)$ из C сопоставляется определенный элемент $\varphi(x)$ тоже из C.

Введем для оператора обозначение $F[f(x)]$. Для любой функции $f(x)$ из C символ $F[f(x)]$ определяет некоторую функцию $\varphi(x)$ также из C. Дистрибутивность оператора определяется так же, как и дистрибутивность функционала, т. е. формулой, аналогичной формуле (87). Ограниченность определяется формулой, аналогичной формуле (88), но только вместо абсолютного значения в левой части надо писать норму, поскольку $F[f(x)]$ есть не число, а элемент из C:

$$\|F[f(x)]\| \leqslant N\|f(x)\|. \tag{88$_1$}$$

Дистрибутивный и ограниченный оператор называется линейным оператором. Такой оператор будет обязательно непрерывным, т. е. если $f_n(x)\to f(x)$, то и $F[f_n(x)]\to F[f(x)]$, причем в обоих случаях сходимость есть равномерная сходимость соответствующей последовательности функций в $[a, b]$.

Приведем без доказательства основной результат, касающийся общей формы линейного оператора в C. Пусть $g(x, y)$ — функция, определенная на замкнутом двумерном промежутке $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$, ограниченной вариации по x на промежутке $[0, 1]$, при любом значении y из промежутка $[0, 1]$. Подставляя эту функцию $g(x, y)$ в правую часть формулы (96), мы получим в результате интегрирования уже не число, а некоторую функцию параметра y, определенную на промежутке $[0, 1]$:

$$\varphi(y)=\int_0^1 f(x)\,dg(x, y),$$

Для того чтобы написанная формула давала линейный оператор, необходимо и достаточно, чтобы функция $g(x, y)$ кроме вышеупомянутых свойств, обладала еще и таким свойством, что функция $\varphi(y)$, определяемая указанной формулой, являлась бы непрерывной функцией на промежутке $[0, 1]$ при любом выборе функции $f(x)$, непрерывной на $[0, 1]$. Если y_0 есть какое-либо значение из промежутка $[0, 1]$, и y_n $(n=1, 2, 3, \ldots)$ — последовательность чисел из промежутка $[0, 1]$, имеющая y_0 своим пределом, то определение непрерывности $\varphi(y)$ в точке y_0 приводит нас непосредственно к следующему необходимому условию, которому должна удовлетворять функция $g(x, y)$: для любого y_0 из промежутка $[0, 1]$ и для любой непрерывной функции $f(x)$ на этом промежутке должна быть справедлива формула

$$\lim_{y_n\to y_0}\int_0^1 f(x)\,d_x g(x, y_n)=\int_0^1 f(x)\,d_x g(x, y_0), \tag{92}$$

где y_n — любая последовательность чисел из промежутка $[0, 1]$, имеющая y_0 своим пределом. Функции $g(x, y)$, обладающие

таким свойством, называются обычно слабо непрерывными по параметру y. Если $g(x, y)$ — ограниченной вариации по x и слабо непрерывна по y, то формула (92) дает, очевидно, линейный оператор в C. Можно доказать и обратное предложение, т. е. всякий линейный оператор в C представим по формуле (92), где $g(x, y)$ — ограниченной вариации по x и слабо непрерывна по y. Доказательство этой теоремы и выяснение понятия слабой непрерывности можно найти в книге В. И. Гливенко «Интеграл Стилтьеса».

Если $K(x, y)$ есть функция, непрерывная на двумерном промежутке $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$), то формула

$$\varphi(y) = \int_0^1 K(y, x) f(x)\, dx$$

дает, очевидно, линейный оператор в C. С такими операторами мы имели дело в теории интегральных уравнений. Но не всякий оператор в C может быть представлен такой формулой.

17. Функции промежутков. При дальнейших обобщениях понятия интеграла нам будет удобнее пользоваться вместо функций точки функциями промежутков. Пусть на бесконечной оси $(-\infty, +\infty)$ дана неубывающая ограниченная функция $g(x)$. Сопоставим любому полуоткрытому слева промежутку $\Delta = (\alpha, \beta]$ неотрицательное число: $g(\beta + 0) - g(\alpha + 0)$ (масса, содержащаяся на этом промежутке). Таким образом, мы получим функцию полуоткрытых промежутков, которую обозначим через $G(\Delta)$:

$$G(\Delta) = g(\beta + 0) - g(\alpha + 0). \tag{93}$$

Для формулировки свойств этой функции введем одно новое понятие. Будем говорить, что последовательность $\Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}, \ldots$, полуоткрытых промежутков есть исчезающая последовательность, если каждый промежуток $\Delta^{(k+1)}$ принадлежит предыдущему $\Delta^{(k)}$, и ни одна точка не является общей точкой всех промежутков. Выясним структуру исчезающей последовательности промежутков. Пусть $\Delta^{(k)}$ есть $(a_k, b_k]$. По условию, $a_k \leqslant a_{k+1}$, $b_k \geqslant b_{k+1}$ и $b_k - a_k \to 0$ при беспредельном возрастании k. Монотонные последовательности a_k и b_k имеют общий предел c, причем для любого k мы имеем $a_k \leqslant c \leqslant b_k$. Поскольку ни одна точка, и в частности точка c, не является общей точкой всех промежутков $\Delta^{(k)}$, то для всех достаточно больших значений k точка c должна попасть на левый открытый конец промежутка, т. е. $\Delta^{(k)}$ есть $(c, b_k]$ для всех достаточно больших k и $b_k \to c$. При этом

$$G(\Delta^{(k)}) = g(b_k + 0) - g(c + 0) \to 0,$$

ибо $g(b_k + 0) \to g(c + 0)$. Из определения (93) и только что приведенных рассуждений непосредственно вытекают следующие три основные свойства $G(\Delta)$:

1) $G(\Delta)$ неотрицательна; 2) она аддитивна, т. е. если полуоткрытый промежуток Δ разбить на конечное число полуоткрытых

промежутков Δ_1, Δ_2, ..., Δ_q, попарно без общих точек, что выражают обычно равенством

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_q, \tag{94}$$

то

$$G(\Delta) = \sum_{k=1}^{q} G(\Delta_k); \tag{95}$$

3) функция $G(\Delta)$ стремится к нулю на исчезающей последовательности промежутков.

Это последнее свойство мы будем называть нормальностью функции $G(\Delta)$. Оно имеет очевидный физический смысл. Будем рассматривать не только полуоткрытые слева, но любые промежутки: $(\alpha, \beta]$, $[\alpha, \beta)$, $[\alpha, \beta]$ (α, β), и отдельную точку α будем рассматривать так же, как промежуток $[\alpha, \alpha]$. Исходя из неубывающей ограниченной функции точки $g(x)$, мы можем построить функцию $G(\Delta)$ любых промежутков, причем эта функция будет обладать указанными выше тремя свойствами. Для этого достаточно, кроме определения (93), ввести еще следующие определения:

$$\left.\begin{aligned} G([\alpha, \beta)) &= g(\beta - 0) - g(\alpha - 0); \\ G([\alpha, \beta]) &= g(\beta + 0) - g(\alpha - 0); \\ G((\alpha, \beta)) &= g(\beta - 0) - g(\alpha + 0), \end{aligned}\right\} \tag{96}$$

или, если $[\alpha]$ — промежуток, состоящий из одной точки, то

$$G([\alpha]) = g(\alpha + 0) - g(\alpha - 0). \tag{97}$$

Если неубывающая функция $g(x)$ определена только на конечном промежутке, например на промежутке $(a, b]$, то можно распространить ее на всю ось, полагая $g(x) = g(a + 0)$ при $x \leqslant a$ и $g(x) = g(b)$ при $x > b$.

Мы пришли к понятию функции промежутка $G(\Delta)$, исходя из неубывающей функции точки $g(x)$. Можно, наоборот, имея функцию промежутка $G(\Delta)$ с упомянутыми выше тремя свойствами, построить функцию точки $g(x)$, которая приведет по указанной выше схеме к $G(\Delta)$. Достаточно для этого положить

$$g(x) = G((-\infty, x]). \tag{98}$$

Построенная таким образом функция $g(x)$ будет, очевидно, непрерывной справа. Если $G(\Delta)$ определена только для промежутков, принадлежащих некоторому промежутку Δ_0, то ее можно определить и для всех промежутков, полагая $G(\Delta) = G(\Delta \cdot \Delta_0)$, где произведением промежутков $\Delta \cdot \Delta_0$ мы называем промежуток, составленный из точек, одновременно принадлежащих Δ и Δ_0. Если таких точек нет, т. е. $\Delta \cdot \Delta_0$ есть пустое множество, то естественно полагаем

$G(\Delta \cdot \Delta_0) = 0$. Отметим, что если добавить к $g(x)$ любую постоянную, то это не повлияет на значения $G(\Delta)$. Если $g(x)$ есть функция ограниченной вариации, то воспользуемся её каноническим представлением в виде разности неубывающих функций: $g(x) = g_1(x) - g_2(x)$. Функции $g_1(x)$ и $g_2(x)$ приведут нас к функциям промежутков $G_1(\Delta)$ и $G_2(\Delta)$ с указанными тремя свойствами, а функция $g(x)$ даст нам функцию промежутков $G(\Delta) = G_1(\Delta) - G_2(\Delta)$. Эта функция $G(\Delta)$ может быть непосредственно построена по функции $g(x)$ согласно формулам (93), (96) и (97). Она обладает свойством аддитивности и нормальностью, но может быть отрицательной.

Если бы мы имели замкнутый промежуток $[-\infty, +\infty]$, то вместо (98) должны были бы положить

$$g(x) = G((-\infty)) + G((-\infty, x]). \tag{99}$$

18. Общий интеграл Стилтьеса. Мы переходим теперь к обобщению понятия интеграла Стилтьеса. Как уже упоминали в [3], мы получим такое обобщение, если потребуем лишь того, чтобы числа i и I, определенные в [3], совпадали. Кроме того, будем рассматривать интегрирование по промежутку Δ любого типа и будем разбивать Δ тоже на частичные промежутки Δ_k любого типа, не имеющие общих точек ни внутри, на на концах. Мы допускаем, естественно, и отдельную точку как частичный промежуток.

Итак, пусть задан конечный или бесконечный промежуток Δ и на нем определены ограниченные функции $f(x)$ и $g(x)$, причем $g(x)$ — неубывающая функция. Делим Δ на частичные промежутки Δ_k $(k = 1, 2, \ldots, p)$ любого типа без общих точек. Пусть m_k и M_k — точная нижняя и точная верхняя границы $f(x)$ на Δ_k и ξ_k — какая-либо точка из Δ_k. Наряду с $g(x)$ вводим функцию промежутков $G(\Delta_k)$, определенную в [17], и составляем суммы:

$$\sigma_\delta = \sum_{k=1}^{p} m_k G(\Delta_k); \quad S_\delta = \sum_{k=1}^{p} M_k G(\Delta_k); \quad \sigma_\delta = \sum_{k=1}^{p} f(\xi_k)\, G(\Delta_k). \tag{100}$$

Отметим некоторые обстоятельства, связанные с использованием любых промежутков. Если точка P с абсциссой x входит как самостоятельный элемент подразделения Δ, то в суммах (100) соответствующее слагаемое одинаково и имеет вид $f(x)[g(x+0) - g(x-0)]$. Точки непрерывности $g(x)$ не имеет смысла вводить как самостоятельные элементы подразделения, и можно в дальнейшем считать, что точки как самостоятельный элемент подразделения — суть точки разрыва $g(x)$.

Если Δ' и Δ'' — два промежутка, то их произведением $\Delta'\Delta''$ называем множество точек, которые принадлежат одновременно Δ' и Δ''. Это есть тоже промежуток или пустое множество. Пусть δ' и δ' — два подразделения Δ. Произведением подразделений δ' и δ'' называется подразделение $\delta'\delta''$, состоящее из всевозможных промежутков $\Delta'\Delta''$, где Δ' принадлежит δ' и Δ'' принадлежит δ''. Промежутки $\Delta'\Delta''$, очевидно, попарно без общих точек и их сумма дает основной промежуток Δ. Подразделение δ' называется продолжением подразделения δ, если каждый элемент δ' целиком находится в одном из элементов подразделения δ. Произведение $\delta'\delta''$ есть продолжение как δ', так и δ''. Если промежуток Δ замкнут справа и $x = b$ есть правый конец Δ, то при определении $G(\Delta)$ надо считать $g(b+0) = g(b)$. Аналогично на левом конце $g(a-0) = g(a)$. Это относится и к тому случаю, когда $b = +\infty$ или $a = -\infty$. Как и в [3], через i обозначим точную верхнюю границу сумм S_δ и через I — точную ниж-

нюю границу S_δ при всевозможных законах подразделения. Для s_δ, S_δ, σ_δ, i и I — справедливо все сказанное в [3].

Определение. *Мы будем говорить, что $f(x)$ интегрируема по $g(x)$ (или $G(\Delta)$), если $i = I$, и величину i примем за величину интеграла*

$$i = \int_\Delta f(x)\, dg(x) = \int_\Delta f(x)\, G(d\Delta). \tag{101}$$

Определенный таким образом интеграл назовем общим интегралом Стилтьеса.

В отличие от общего интеграла мы будем называть интеграл, определенный в [2], просто интегралом Стилтьеса или первоначальным интегралом Стилтьеса. Дальше мы выясним условия существования и свойства общего интеграла.

Теорема 1. *Для существования интеграла (101) необходимо и достаточно, чтобы существовала такая последовательность подразделений δ_n $(n = 1, 2, \ldots)$, что разность $S_{\delta_n} - s_{\delta_n}$ стремится к нулю, или, что равносильно, σ_{δ_n} имеет определенный предел при любом выборе точек $\xi_k^{(n)}$. Этот предел A и дает величину интеграла. При этом $s_{\delta_n} \to A$ и $S_{\delta_n} \to A$.*

Эта теорема непосредственно следует из [3], причем в рассматриваемом случае частичные промежутки Δ_k не имеют общих точек. Отметим, что последовательность подразделений δ_n, о которой говорится в теореме, не должна быть обязательно последовательностью с беспредельно измельчающимися промежутками. Если, например, существует такое подразделение δ, что σ_δ не зависит от выбора точек ξ_k, то можем взять все δ_n совпадающими с δ.

Введем теперь новое понятие.

Определение. *Последовательность подразделений δ_n называется регулярной для функции $g(x)$ (или $G(\Delta)$), если выполнены следующие два условия: 1) каждая точка разрыва $g(x)$ входит самостоятельным элементом подразделения во все δ_n, начиная с некоторого значения n; 2) частичные промежутки подразделений δ_n беспредельно измельчаются при возрастании n, причем в случае бесконечного промежутка Δ бесконечное измельчание надо понимать так, как это указано в* [4].

Теорема 2. *Если δ_n — регулярная последовательность подразделений, то $s_{\delta_n} \to i$ и $S_{\delta_n} \to I$ при любом выборе ограниченной функции $f(x)$.*

Пусть δ — любое заданное подразделение Δ и $\delta'_n = \delta\delta_n$. Будем брать n настолько большим, что, во-первых, все точки разрыва $g(x)$, которые являются точками деления δ, уже входили бы как самостоятельные элементы подразделения в δ_n, и, во-вторых, так, чтобы всякий частичный промежуток δ_n содержал не больше одной точки деления δ. В дальнейшем надо иметь в виду, что число таких точек фиксированно. Рассмотрим разность $s_{\delta'_n} - s_{\delta_n}$. Слагаемые, соответствующие тем точкам деления δ, которые являются точками разрыва $g(x)$ в суммах $s_{\delta'_n}$ и s_{δ_n}, одинаковы, ибо, в силу сказанного выше, они самостоятельные элементы подразделения в δ_n и тем самым в δ'_n. Будем дальше говорить лишь о тех точках деления δ, в которых $g(x)$ непрерывна. Пусть их число равно q. Если частичный промежуток подразделения δ_n не содержит такой точки деления внутри себя, то соответствующие ему слагаемые в s_{δ_n} и $s_{\delta'_n}$ одинаковы. Остается не больше q частичных промежутков, входящих в δ_n, которые содержат упомянутые точки деления δ внутри себя. Пусть $x = x'$ точка деления δ, находящаяся внутри частичного промежутка $\Delta^{(n)}$ подразделения δ_n. При переходе от δ_n к δ'_n одно слагаемое вида $\lambda^{(n)} G(\Delta^{(n)})$ заменится двумя слагаемыми вида $\mu^{(n)} G(\Delta_1^{(n)}) + \nu^{(n)} G(\Delta_2^{(n)})$, причем $\Delta^{(n)}$ содержит $x = x'$ внутри

себя, а $\Delta_1^{(n)}$ и $\Delta_2^{(n)}$ — на концах (куда именно причислять x' неважно, ибо $g(x)$ непрерывна в точке $x = x'$). Через $\lambda^{(n)}$, $\mu^{(n)}$, $\nu^{(n)}$ обозначены числа, которые не превышают по абсолютной величине точной верхней границы $|f(x)|$ в Δ.

Поскольку в регулярной последовательности частичные промежутки беспредельно измельчаются при возрастании n, то это имеет место для $\Delta^{(n)}$, $\Delta_1^{(n)}$, $\Delta_2^{(n)}$ и поскольку эти промежутки содержат внутри себя или на границе фиксированную точку непрерывности $x = x'$ функции $g(x)$, мы можем утверждать, что

$$\lambda^{(n)} G(\Delta^{(n)}) \to 0 \text{ и } \mu^{(n)} G(\Delta_1^{(n)}) + \nu^{(n)} G(\Delta_2^{(n)}) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Принимая еще во внимание, что число точек x' не превышает q, мы можем утверждать, что $s_{\delta_n'} - s_{\delta_n} \to 0$ при $n \to \infty$.

С другой стороны, мы имеем неравенства $s_{\delta_n} \leqslant s_{\delta_n'} \leqslant i$ и $s_\delta \leqslant s_{\delta_n'} \leqslant i$. Подразделение δ можем выбирать так, чтобы s_δ было сколь угодно близким к i, т. е. при любом заданном положительном ε мы можем выбрать такое δ, что $i - s_\delta < \varepsilon$. Из неравенства $s_\delta \leqslant s_{\delta_n'} \leqslant i$ будет при этом непосредственно следовать, что $i - s_{\delta_n'} < \varepsilon$, и, наконец, полученный выше результат $s_{\delta_n'} - s_{\delta_n} \to 0$ покажет нам, что при всех достаточно больших n мы имеем $i - s_{\delta_n} < 2\varepsilon$, т. е., в виду произвольности ε, $s_{\delta_n} \to i$, что и требовалось доказать. Совершенно аналогично доказывается, что $S_{\delta_n} \to I$. Отметим, что если $g(x)$ непрерывна, то для регулярной последовательности характерным является лишь тот факт, что ее частичные промежутки беспредельно измельчаются. Это имеет место, например, для интеграла Римана, когда $g(x) = x$. Ввиду неограниченности x на бесконечном промежутке при построении собственного интеграла Римана мы должны были рассматривать лишь ограниченные промежутки.

Теорема 3. *Если интеграл* (111) *существует и равен A, то для любой регулярной последовательности подразделений* $\sigma_{\delta_n} \to A$. Из условия теоремы непосредственно следует $i = I = A$. При этом $s_{\delta n} \to A$ и $S_{\delta n} \to A$, в силу теоремы, а потому $\sigma_{\delta n}$, удовлетворяющая неравенству $s_{\delta n} \leqslant \sigma_{\delta n} \leqslant S_{\delta n}$ и подавно стремится к A при любом выборе точек $\xi_k^{(n)}$.

Из доказанных теорем непосредственно вытекает следующее следствие. *Если для некоторой регулярной последовательности* δ_n *существует предел* $\sigma_{\delta n} \to A$, *то он существует и для любой другой регулярной последовательности и равен тому же числу A. При этом интеграл существует и равен A. Если для некоторой регулярной последовательности* δ_n, $\sigma_{\delta n}$ *не имеет определенного предела, то интеграл* (111) *не существует*. Таким образом, использование сумм σ_δ с регулярными последовательностями подразделений сразу решает вопрос о существовании основного интеграла Стилтьеса.

Отметим еще, что если δ_n есть регулярная последовательность для $g(x)$ и δ_n' есть продолжение δ_n, то и δ_n' есть регулярная последовательность. Это вытекает непосредственно из определения регулярной последовательности.

19. Свойства (общего) интеграла Стилтьеса. Общий интеграл Стилтьеса может быть получен, как мы видели, как предел сумм σ_δ при некотором выборе последовательности подразделений. При этом, если σ_{δ_n} имеют определенный предел, и δ_n' есть продолжение δ_n, то и $\sigma_{\delta_n'}$ имеют тот же предел. Мы можем таким образом, пользуясь суммами σ_δ, доказывать свойства общего интеграла Стилтьеса так же, как это мы делали для интеграла Римана и первоначального интеграла Стилтьеса. Мы п иведем эти свойства с некоторыми

дополнениями. Во всем дальнейшем функции $f(x)$ и $g(x)$ считаются ограниченными в промежутке интегрирования и, кроме того, функция $g(x)$ считается неубывающей.

I. Если c_k — постоянные, то

$$\int_{\Delta} \sum_{k=1}^{p} c_k f_k(x)\, dg(x) = \sum_{k=1}^{p} c_k \int_{\Delta} f_k(x)\, dg(x), \tag{102}$$

причем из существования интегралов, стоящих в правой части, следует существование интеграла, стоящего в левой части.

Для доказательства достаточно взять какую-нибудь регулярную последовательность δ_n для функции $g(x)$.

II. Если $g_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, p)$ — неубывающие ограниченные функции и c_k — положительные постоянные, то

$$\int_{\Delta_1} f(x)\, d\left(\sum_{k=1}^{p} c_k g_k(x)\right) = \sum_{k=1}^{p} c_k \int_{\Delta_0} f(x)\, dg_k(x), \tag{103}$$

причем из существования интегралов, стоящих справа следует существование интеграла, стоящего слева, и наоборот.

Пусть $\delta_n^{(k)}$ регулярная последовательность подразделений для $g_k(x)$.

Последовательность $\delta_n = \delta_n^{(1)}, \delta_n^{(2)}, \ldots, \delta_n^{(p)}$ будет регулярной последовательностью для всех функций $g_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, p)$. Мы имеем очевидное равенство

$$S_{\delta n} - s_{\delta n} = \sum_{k=1}^{p} c_k \left(S_{\delta n}^{(k)} - s_{\delta n}^{(k)}\right), \tag{104}$$

где $s_{\delta n}$ и $S_{\delta n}$ относятся к интегралу, стоящему в левой части (103), а $s_{\delta n}^{(k)}$ и $S_{\delta n}^{(k)}$ — к интегралам, стоящим справа. Если интегралы, стоящие в правой части формулы (103), существуют, то $S_{\delta n}^{(k)} - s_{\delta n}^{(k)} \to 0$ $(k = 1, 2, \ldots, p)$ и, следовательно, $S_{\delta n} - s_{\delta n} \to 0$, т. е. существует интеграл, стоящий слева. Положим теперь, что существует этот последний интеграл. При этом должна существовать такая последовательность подразделений δ_n, что $S_{\delta n} - s_{\delta n} \to 0$. Слагаемые, стоящие в правой части формулы (104), неотрицательны и, следовательно, $S_{\delta n}^{(k)} - s_{\delta n}^{(k)} \to 0$ при $k = 1, 2, \ldots, p$, т. е. существуют интегралы, стоящие в правой части формулы (103). Сама формула (103) вытекает непосредственно из аналогичного свойства для конечных сумм $\sigma_{\delta n}$ и перехода к пределу.

III. Если промежуток Δ_0 разбивается на конечное число промежутков $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m$ без общих точек, то

$$\int_{\Delta} f(x)\, dg(x) = \sum_{k=1}^{m} \int_{\Delta_k} f(x)\, dg(x), \tag{105}$$

причем из существования интегралов в правой части следует существование интеграла в левой части и наоборот. Положим, что существует интеграл, стоящий слева. В силу теоремы 1 имеется такая последовательность δ_n подразделений Δ, что $S_{\delta n} - s_{\delta n} \to 0$. Обозначим

через δ подразделение Δ на части Δ_k $(k=1, 2, \ldots, m)$ и положим $\delta'_n = \delta_n \delta$. Имеем, очевидно, $S_{\delta' n} - s_{\delta' n} \to 0$, ибо $s_{\delta' n} \geqslant s_{\delta n}$ и $S_{\delta' n} \leqslant S_{\varepsilon n}$. Сумма вида (16), которая представляет $S_{\delta' n} - s_{\delta' n}$, может быть разбита на m неотрицательных слагаемых, каждое из которых представляет собой аналогичную сумму для некоторого Δ_k, и, поскольку вся сумма стремится к нулю, мы можем утверждать это же для отдельных слагаемых., т. е. существуют интегралы, стоящие в правой части формулы (105). Наоборот, положим, что существуют интегралы, стоящие справа. Для каждого из них имеется такая последовательность подразделений $\delta_n^{(k)}$, при которой разность $S_{\delta n}^{(k)} - s_{\delta n}^{(k)}$ стремится к нулю. Произведение этих последовательностей подразделений непосредственно приводит к такой последовательности подразделений всего промежутка Δ, при которых аналогичная разность для интеграла, стоящего слева, также стремится к нулю. Отметим, что для первоначального интеграла Стильтьеса в третьей из формул (3) существование интегралов, стоящих справа, не влечет за собой существования интеграла, стоящего слева.

IV. Если на промежутке Δ мы имеем $|f(x)| \leqslant L$, то

$$\left| \int_{\Delta} f(x)\, dg(x) \right| \leqslant LG(\Delta), \tag{106}$$

где $G(\Delta)$ — полное приращение функции $g(x)$ на промежутке Δ, причем предполагается, что интеграл существует.

V. Если на промежутке Δ функции $f_p(x)$ равномерно стремятся к $f(x)$ при $p \to \infty$ и интегралы от $f_p(x)$ по $g(x)$ существуют, то существует и интеграл от $f(x)$ по $g(x)$, и имеет место формула

$$\lim_{p \to \infty} \int_{\Delta} f_p(x)\, dg(x) = \int_{\Delta} f(x)\, dg(x). \tag{107}$$

Пусть $\Delta_k^{(n)}$ $(k=1, 2, \ldots, t_n)$ — интервалы подразделения некоторой регулярной последовательности подразделений δ_n для функции $g(x)$. Рассмотрим суммы $\sigma_{\delta_n}^{(p)}$ и σ_{δ_n} для функций $f_p(x)$ и для функции $f(x)$, которая, очевидно, ограничена в силу равномерной сходимости $f_p(x)$:

$$\sigma_{\delta_n}^{(p)} = \sum_{k=1}^{t_n} f_p(\xi_k^{(n)})\, G(\Delta_k^{(n)}); \qquad \sigma_{\delta_n} = \sum_{k=1}^{t_n} f(\xi_k^{(n)})\, G(\Delta_k^{(n)}). \tag{108}$$

Точки $\xi_k^{(n)}$ мы берем во всех суммах одними и теми же. Составим разность

$$\sigma_{\delta_n} - \sigma_{\delta_n}^{(p)} = \sum_{k=1}^{t_n} [f(\xi_k^{(n)}) - f_p(\xi_k^{(n)})]\, G(\Delta_k^{(n)}).$$

При любом заданном положительном ε существует, в силу равномерной сходимости $f_p(x)$, такое N, что $|f(x) - f_p(x)| < \varepsilon$ при $p > N$ и для любого x из Δ_0. Мы получим для разности $\sigma_{\delta_n} - \sigma_{\delta_n}^{(p)}$ при $p > N$ и при любом выборе $\xi_k^{(n)}$ следующую оценку: $|\sigma_{\delta_n} - \sigma_{\delta_n}^{(p)}| < \varepsilon\, G(\Delta)$. Отсюда видно, что $\sigma_{\delta_n}^{(p)}$ при $p \to \infty$ стремятся к σ_{δ_n} и притом равномерно относительно n и выбора точек $\xi_k^{(n)}$. По условию функции $f_p(x)$ интегрируемы по $g(x)$, и, следовательно, каждая из сумм $\sigma_{\delta_n}^{(p)}$ при беспредельном возрастании n имеет предел, который

мы обозначим через A_p. Этот предел и является интегралом от $f_p(x)$ по $g(x)$. Покажем теперь, что последовательность чисел A_p имеет предел.

В силу (106) имеем

$$|A_p - A_q| \leqslant G(\Delta) \max |f_p(x) - f_q(x)|.$$

По условию правая часть стремится к нулю при $p, q \to \infty$, и тем самым A_p имеет предел при $p \to \infty$, который обозначим через A. Нам остается доказать, что $\sigma_{\delta n} \to A$ при $n \to \infty$. Оценим разность $A - \sigma_{\delta n}$, которую запишем в виде

$$A - \sigma_{\delta n} = (A - A_p) + (A_p - \sigma_{\delta n}^{(p)}) + (\sigma_{\delta n}^{(p)} - \sigma_{\delta n}). \tag{109}$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Сначала выберем p настолько большим, чтобы иметь $|A - A_p| \leqslant \varepsilon$ и $|\sigma_{\delta n}^{(p)} - \sigma_{\delta n}| \leqslant \varepsilon$ при любых n и ξ_k.

Далее при всех достаточно больших n мы имеем для фиксированного выше p, что $|A_p - \sigma_{\delta n}^{(p)}| < \varepsilon$. Таким образом, $|A - \sigma_{\delta n}| < 3\varepsilon$, откуда, ввиду произвольности ε, и следует, что $\sigma_{\delta n} \to A$.

VI. Если существует интеграл от $f(x)$ по $g(x)$, то существует и интеграл от $|f(x)|$ по $g(x)$ и имеет место неравенство

$$\left| \int_{\Delta_0} f(x)\, dg(x) \right| \leqslant \int_{\Delta_0} |f(x)|\, dg(x). \tag{110}$$

Введем обычное обозначение m_k и M_k для функции $f(x)$. Если оба числа положительны, то для $|f(x)|$ мы будем иметь те же точные границы. Если оба числа отрицательны, то для $|f(x)|$ точной нижней и верхней границей будут служить числа $|M_k|$ и $|m_k|$, и разность между точной верхней и точной нижней границей останется прежней. Наконец, если m_k отрицательно, а M_k положительно, то для $|f(x)|$ точной верхней границей будет служить наибольшее из чисел $|m_k|$ и M_k, а точной нижней границей — число $\geqslant 0$. Таким образом, во всех случаях разность между точной верхней и точной нижней границей для $|f(x)|$ будет не больше чем для $f(x)$. Поэтому, если для некоторой последовательности подразделений разность $S_{\delta n} - s_{\delta n}$ для $f(x)$ стремится к нулю, то тем более она стремится к нулю при той же последовательности подразделений и для $|f(x)|$, т. е. из существования интеграла от $f(x)$ следует существование интеграла и для $|f(x)|$. Неравенство (110) непосредственно получается из аналогичного неравенства для сумм предельным переходом.

VII. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ интегрируемы по $g(x)$, то и их произведение $f_1(x) f_2(x)$ интегрируемо по $g(x)$. Докажем сначала, что если $f(x)$ интегрируемо по $g(x)$, то $f^2(x)$ интегрируемо по $g(x)$. Предположим пока, что $f(x)$ положительна, и составим суммы σ_δ для $f(x)$ и $f^2(x)$:

$$\sigma_\delta = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\, G(\Delta_k),$$

$$\sigma_{\delta'} = \sum_{k=1}^{n} (M_k^2 - m_k^2)\, G(\Delta_k) = \sum_{k=1}^{n} (M_k + m_k)(M_k - m_k)\, G(\Delta_k).$$

Если первая из них стремится к нулю для некоторой последовательности подразделений, то, в силу ограниченности множителя $M_k + m_k$, и вторая стремится к нулю для той же последовательности подразделений. Таким образом, для положительной функции $f(x)$ из интегрируемости $f(x)$ следует интегрируемость

$f^2(x)$. Если $f(x)$ неположительна, то ввиду ее ограниченности существует такая положительная постоянная, что функция $f(x)+a$ положительна. Эта последняя функция, в силу свойства 1, очевидно, интегрируема, а, следовательно, по доказанному, интегрируема и функция $[f(x)+a]^2 = f^2(x) + 2af(x) + a^2$, откуда непосредственно вытекает и интегрируемость функции $f^2(x)$, которую можно представить как сумму интегрируемых функций: $f^2(x) = [f(x)+a]^2 - 2af(x) - a^2$. Наконец, чтобы доказать интегрируемость $f_1(x)f_2(x)$, достаточно представить ее в следующем виде:

$$f_1(x)\,f_2(x), = \frac{1}{2}[f_1(x)+f_2(x)]^2 - \frac{1}{2}f_1^2(x) - \frac{1}{2}f_2^2(x).$$

Правая часть написанной формулы представляет собой сумму интегрируемых функций.

20. Существование общего интеграла Стилтьеса. Мы укажем ниже некоторые достаточные условия существования общего интеграла Стилтьеса.

Теорема. *Любая ограниченная функция $f(x)$ интегрируема по функции скачков $g_d(x)$ в смысле общего интеграла Стилтьеса.*

Положим сначала, что множество $c_1, c_2, \ldots, c_p$ точек разрыва непрерывности $g(x)$ конечно, и пусть δ — подразделение основного промежутка, определяемое следующим образом: концы промежутка, если они принадлежат области интегрирования, и точки $c_1, c_2, \ldots, c_p$ являются самостоятельными элементами δ, а остальными элементами δ являются те открытые промежутки, которые получились после выделения указанных точек. На каждом из этих промежутков $g_d(x)$ сохраняет постоянное значение, и суммы соответствующие интегралу от $f(x)$ по $g_d(x)$, очевидно, одинаковы и выражаются формулой

$$s_\delta = S_\delta = \sum_{k=1}^{p} f(c_k)\,\gamma_k. \tag{111}$$

Таким образом, интеграл от $f(x)$ по $g_d(x)$ существует и выражается суммой (111). Положим теперь, что множество точек разрыва c_k функции $g_d(x)$ бесконечно. Пусть δ_n — подразделение основного промежутка на части, произведенное так же, как и выше, причем в качестве самостоятельных элементов подразделений выделяются концы промежутков и первые n точек разрыва: $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Для построенной последовательности подразделений δ_n образуем суммы σ_{δ_n}. Сумма тех слагаемых, входящих в σ_{δ_n}, которые происходят от выделенных точек, как самостоятельных элементов подразделения, равна

$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\gamma_k$$

и не зависит от переменных точек ξ_k. Рассмотрим один из открытых интервалов (α,β), входящих в подразделение δ_n. Соответствующее ему слагаемое суммы σ_{δ_n} будет иметь вид

$$f(\xi)\,[g(\beta-0) - g(\alpha+0)] \qquad (\alpha < \xi < \beta).$$

Если $|f(x)| \leqslant L$, то мы имеем

$$|f(\xi)|\,[g(\beta-0) - g(\alpha+0)] \leqslant L\,[g(\beta-0) - g(\alpha+0)],$$

причем разность $g(\beta-0) - g(\alpha+0)$ представляет собой сумму скачков $g(x)$ внутри промежутка (α, β). Таким образом, сумма слагаемых, входящих в σ_δ и соответствующих открытым промежуткам подразделения δ_n, будет по абсолют-

ной величине не больше, чем произведение L на сумму всех скачков функции $g(x)$, кроме скачков в выделенных точках $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Эта сумма при беспредельном возрастании n стремится к нулю, а сумма, соответствующая выделенным точкам подразделения, при возрастании n дает в пределе сумму сходящегося ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(c_k)\,\gamma_k, \tag{112}$$

и, следовательно, интеграл от $f(x)$ по $g_d(x)$ существует и выражается рядом (112), что и требовалось доказать.

Таким образом, вопрос о существовании общего интеграла Стилтьеса свелся к вопросу о существовании интеграла от $f(x)$ по непрерывной неубывающей функции $g_c(x)$. Для этой последней функции регулярной последовательностью будет любая последовательность с бесконечно измельчающимися частичными промежутками. Если $f(x)$ — монотонная функция на промежутке Δ, то, в силу формулы интегрирования по частям [2], она интегрируема на Δ по $g_c(x)$. Таким образом, *всякая монотонная функция интегрируема по любой возрастающей ограниченной функции.*

Укажем еще класс функций, интегрируемых по любой возрастающей ограниченной функции $g(x)$. Назовем функцию $f(x)$ кусочно-постоянной на Δ, если этот промежуток можно разбить на конечное число промежутков $\Delta^{(1)}$, $\Delta^{(2)}, \ldots, \Delta^{(m)}$ попарно без общих точек так, что $f(x)$ на каждом промежутке $\Delta^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ сохраняет постоянное значение. Обозначим его буквой b_k. Нетрудно видеть, что *кусочно-постоянная функция интегрируема по любой возрастающей функции* $g(x)$. Действительно, если δ есть подразделение Δ на части $\Delta^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$, то суммы s_δ и S_δ одинаковы:

$$s_\delta = S_\delta = \sum_{k=1}^{m} b_k G(\Delta^{(k)}). \tag{113}$$

Повторяя это подразделение δ, мы и убедимся в том, что интеграл от кусочно-постоянной функции $f(x)$ по $g(x)$ существует и выражается суммой (113). Применяя свойство V из [19], видим, что если функция $f(x)$ на промежутке Δ есть предел равномерно сходящейся последовательности кусочно-постоянных функций, то $f(x)$ интегрируема по любой возрастающей ограниченной функции $g(x)$.

Отметим еще, что необходимое и достаточное условие интегрируемости $f(x)$ по $g_c(x)$ то же, что было указано в [10]. На доказательстве этого мы не останавливаемся.

Замечание 1. Мы определили выше [8] функцию ограниченной вариации $g(x)$ на замкнутом промежутке $[a, b]$. Совершенно аналогично можно ввести это понятие и на промежутках другого типа. Возьмем, например, открытый промежуток (a, b). Назовем функцию $g(x)$ — функцией ограниченной вариации на (a, b), если она ограниченной вариации на любом замкнутом промежутке $[c, x]$, лежащем внутри (a, b), и $V_c^x(g)$ для любых таких промежутков не больше некоторого числа. При уменьшении c величина $V_c^x(g)$ не убывает и, следовательно, при стремлении c к a имеет конечный предел, который мы обозначим $V_{a+0}^x(g)$. При стремлении x к b эта величина будет также иметь конечный предел, который называется полной вариацией $g(x)$ на (a, b). Формулы (44) определят функции $g_1(x)$ и $g_2(x)$, которые входят в каноническое представление $g(x)$ в виде разности неубывающих ограниченных функций $g(x) = g_1(x) - g_2(x)$. Общий интеграл Стилтьеса определится затем в виде

разности интегралов по неубывающим функциям $g_1(x)$ и $g_2(x)$:

$$\int_{\Delta} f(x)\,dg(x) = \int_{\Delta} f(x)\,dg_1(x) - \int_{\Delta} f(x)\,dg_2(x),$$

и существование интеграла от $f(x)$ по $g(x)$ обусловливается существованием интегралов от $f(x)$ по $g_1(x)$ и $g_2(x)$.

Принимая во внимание сказанное выше, мы можем утверждать, что в смысле общего интеграла Стилтьеса *функция ограниченной вариации и функция, которая является пределом равномерно сходящейся последовательности кусочно-постоянных функций, интегрируемы по любой функции ограниченной вариации.*

Замечание 2. При интегрировании по полуоткрытым промежуткам $(a, b]$ иногда вводят еще одно понятие интеграла, которое отличается от общего интеграла Стилтьеса только тем, что основной промежуток $(a, b]$ разбивается не на промежутки любого типа, но лишь на полуоткрытые промежутки типа $(c, d]$ без общих точек. Поскольку при этом множества чисел s_δ и S_δ могут оказаться лишь частью множеств этих же чисел для общего интеграла, то число i может уменьшиться, а число I — увеличиться. Это поведет к тому, что если для общего интеграла мы имели $i = I$, то при новом построении интеграла можем получить $i < I$, т. е. функция, интегрируемая в смысле общего интеграла, может оказаться неинтегрируемой при новом определении интеграла.

21. Функции промежутков на плоскости. Понятие аддитивной функции промежутков и построение интеграла Стилтьеса становятся более сложными на плоскости, в трехмерном пространстве и вообще в многомерном пространстве. Мы рассмотрим случай плоскости. Из приведенных рассуждений будет легко видно, как их надо видоизменить для пространств с большим числом измерений. Пусть имеется плоскость с осями X и Y, и положим, что на оси X задан некоторый промежуток Δ_x, а на оси Y некоторый промежуток Δ_y, причем понятие промежутка мы понимаем здесь в общем смысле, о котором говорили в [**20**]. Эти промежутки Δ_x и Δ_y определяют некоторый промежуток Δ на плоскости, а именно мы считаем, что точка (x, y) принадлежит Δ, если x принадлежит Δ_x и y принадлежит Δ_y. Эти промежутки на плоскости могут быть самого разнообразного типа. Это может быть, например, замкнутый промежуток, определяемый неравенствами $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, или полуоткрытый промежуток, определяемый неравенствами $a < x \leqslant b$, $c < y \leqslant d$, или полуоткрытый промежуток, определяемый неравенствами $a \leqslant x < b$, $c \leqslant y < d$, или полуоткрытый промежуток, определяемый неравенствами $a \leqslant x < b$, $c < y \leqslant d$, или отрезок прямой параллельной оси X: $a < x \leqslant b$, $y = c$, или точка $x = a$, $y = c$ и т. д. Числа a, b, c и d, входящие в указанные выше неравенства, могут быть как конечными, так и бесконечными. В дальнейшем большое значение будут иметь для нас полуоткрытые промежутки, определяемые неравенствами вида $a < x \leqslant b$; $c < y \leqslant d$, и для краткости речи только такие промежутки мы и будем называть в дальнейшем полуоткрытыми.

Положим, что для любого промежутка Δ, принадлежащего к некоторому основному промежутку Δ_0 на плоскости, определена неотрицательная функция $G(\Delta)$, которая обладает свойством аддитивности и нормальности. Иначе говоря, если Δ представляет собой сумму промежутков $\Delta^{(1)} + \Delta^{(2)} + \ldots + \Delta^{(m)}$ без общих точек, то

$$G(\Delta) = \sum_{k=1}^{m} G(\Delta^{(k)}),$$

и если $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ есть исчезающая последовательность промежутков, то $G(\Delta_n) \to 0$.

Выясним некоторые свойства таких функций. Из неотрицательности и аддитивности функции $G(\Delta)$ непосредственно следует, что $G(\Delta_0)$ будет наибольшим значением $G(\Delta)$ для Δ, принадлежащих Δ_0. Значение $G(\Delta)$ в тех случаях, когда промежуток Δ есть отдельная точка P, мы будем обозначать просто символом $G(P)$, причем в силу неотрицательности $G(\Delta)$ функция $G(P) \geqq 0$. Может случиться. что во всех точках P, принадлежащих Δ_0, мы имеем $G(P) = 0$. В таком случае функция $G(\Delta)$ называется непрерывной в Δ_0. Если же $G(P) > 0$, то точка P называется точкой разрыва $G(\Delta)$. Нетрудно показать, что множество точек разрыва конечно или счетно [**ср. 6**]. Возьмем те точки разрыва, в которых $G(P) > 1$. В силу аддитивности и неотрицательности $G(\Delta)$ число таких точек не больше, чем целая часть числа $G(\Delta_0)$. Точно так же число точек P, в которых $G(P) > \frac{1}{2}$, не больше, чем целая часть $2G(\Delta_0)$ и т. д. Отсюда совершенно так же, как в [**6**], мы и заключаем, что множество точек разрыва конечно или счетно. Если оно счетно, и $P_1, P_2, \ldots$ — последовательность точек разрыва, то ряд, составленный из положительных чисел $G(P_k)$, сходится и имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} G(P_k) \leqslant G(\Delta_0). \tag{114}$$

Совершенно так же, если l есть входящая в состав Δ_0 часть прямой, параллельной одной из осей координат, то она называется линией разрыва, если $G(l) > 0$. Всякая прямая, параллельная оси и проходящая через точку разрыва, дает линию разрыва. Но могут быть и такие линии разрыва, которые не содержат ни одной точки разрыва. Совершенно так же, как и выше, можно показать, что если линии разрыва существуют, то их множество или конечно, или счетно. При этом мы берем полный отрезок прямой, параллельной оси и входящей в Δ_0, не разбивая его на части. Пусть имеется последовательность промежутков Δ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ таких, что Δ_n содержит Δ_{n+1}, и точка P или все точки линии l

являются единственными точками, общими всем промежуткам Δ_n. В этом случае говорят, что Δ_n есть система вложенных промежутков, стремящихся к P или l (l — отрезок прямой, параллельной одной из осей). Пользуясь нормальностью функции $G(\Delta)$, можно показать, что если Δ_n есть система вложенных промежутков, стремящихся к P или l, то $G(\Delta_n) \to G(P)$ или $G(l)$. Проведем доказательство для случая точки P и будем считать, что эта точка находится внутри всех промежутков Δ_n, которые открыты. Проведем через P прямые, параллельные осям, и разобьем каждое из Δ_n на следующие части: точку P, четыре отрезка проведенных прямых, которые заключаются в Δ_n, и оставшиеся четыре промежутка. При беспредельном сжимании Δ_n к точке P все построенные элементы подразделения, кроме точки P, будут представлять собою исчезающую последовательность промежутков, и для каждой из этих последовательностей $G(\Delta)$ будет стремиться к нулю в силу нормальности $G(\Delta)$. Принимая во внимание аддитивность функции $G(\Delta)$, мы легко видим, что $G(\Delta_n) \to G(P)$. Совершенно аналогично можно разобрать другие случаи для точки P, а также случай линии l*).

Данные выше определения становятся совершенно ясными, если толковать $G(\Delta)$ как массу, которая находится на промежутке Δ при распределении материи на основном промежутке Δ_0. Если, например, $G(P) > 0$, то в точке P мы имеем сконцентрированную массу $G(P)$. Аналогичным образом, если $G(l) > 0$, то масса $G(l)$ распределена каким-то образом вдоль линии l. Положим, например, что имеется полуоткрытый промежуток Δ_0 ($0 < x \leqslant 2$; $0 < y \leqslant 2$), и в нем на прямой l_0 ($x = 1$, $0 < y \leqslant 1$) распределена масса с линейной плотностью, равной единице. В данном случае $G(\Delta)$ равно длине той части отрезка l_0, который содержится в Δ. В любой точке P, принадлежащей Δ_0, функция $G(P) = 0$. Если Δ_n есть система вложенных промежутков, стремящихся к l_0, то их площади стремятся к нулю, а $G(\Delta_n) = 1$ при всех n.

Отметим, что функцию $G(\Delta)$, определенную для всех промежутков, принадлежащих Δ_0, легко распространить вообще на все промежутки плоскости, причем функция останется неотрицательной, аддитивной и нормальной. Действительно, если Δ есть любой промежуток, и $\Delta\Delta_0$ есть произведение промежутков Δ и Δ_0, т. е. множество точек, принадлежащих одновременно Δ и Δ_0, то это произведение есть промежуток, принадлежащий Δ_0, и мы получим упомянутое выше расширение функции $G(\Delta)$, если положим $G(\Delta) = G(\Delta\Delta_0)$. Легко физически истолковать это расширение функции $G(\Delta)$, если понимать $G(\Delta)$ как массу, которая заключается на промежутке Δ, причем вся масса распределена по промежутку Δ_0.

---

*) В дальнейшем мы докажем указанное свойство $G(\Delta)$ не только для промежутков, но и для гораздо более общих точечных множеств.

В дальнейшем мы увидим, что если только на полуоткрытых промежутках задана неотрицательная, аддитивная и нормальная функция, то она единственным образом может быть распространена не только на все промежутки, но и на гораздо более широкий класс точечных множеств на плоскости при сохранении ее указанных свойств. При этом ее значения на точках и линиях l могут быть получены, как это было выше указано, предельным переходом при помощи системы вложенных промежутков, причем предел не зависит от того, какую именно систему вложенных промежутков мы берем.

Нетрудно произвести разбиение функции $G(\Delta)$ на функцию скачков и непрерывную часть. Пусть $G(\Delta)$ неотрицательна, аддитивна, нормальна и определена для всех Δ, принадлежащих Δ_0. Обозначим через P_k $(k=1, 2, \ldots)$ ее точки разрыва непрерывности. Определим функцию скачков $G_d(\Delta)$ следующим образом: $G_d(\Delta)$ равна сумме значений $G(P_k)$ в тех точках P_k, которые принадлежат Δ. Отметим, что если таких точек счетное множество, то ряд, составленный из $G(P_k)$, сходится. Разность $G(\Delta) - G_d(\Delta)$ обозначим через $G_c(\Delta)$. Эта последняя функция уже не имеет точек разрыва непрерывности. Нетрудно видеть, что обе функции $G_d(\Delta)$ и $G_c(\Delta)$ неотрицательны, аддитивны и нормальны. Нормальность непосредственно следует из неравенств: $0 \leqslant G_d(\Delta) \leqslant G(\Delta)$ и $0 \leqslant G_c(\Delta) \leqslant G(\Delta)$. Напишем полученное разложение функции $G(\Delta)$:

$$G(\Delta) = G_d(\Delta) + G_c(\Delta).$$

22. Переход к функции точки. Можно построить функцию промежутка $G(\Delta)$, пользуясь функцией точки $g(x, y)$. Положим, что имеется функция точки $g(x, y)$, которая определена, если x принадлежит к промежутку $\Delta_x^{(0)}$ оси X, и y — промежутку $\Delta_y^{(0)}$ оси Y, причем $\Delta_x^{(0)}$ и $\Delta_y^{(0)}$ определяют основной промежуток Δ_0 на плоскости. Предположим далее, что функция $g(x, y)$ не убывает по каждой переменной при любом фиксированном значении другой переменной и, кроме того,

$$g(x+h, y+k) - g(x+h, y) - g(x, y+k) + g(x, y) \geqslant 0 \quad (115)$$

при любых x и y и любых положительных h и k. Из сказанного следует, что существуют пределы $g(x, y \pm 0)$ и $g(x \pm 0, y)$, причем

1) $g(x_2, y+0) \geqslant g(x_1, y+0)$; $\quad g(x_2, y-0) \geqslant g(x_1, y-0)$ при $x_2 > x_1$ и

2) $g(x+0, y_2) \geqslant g(x+0, y_1)$; $\quad g(x-0, y_2) \geqslant g(x-0, y_1)$ при $y_2 > y_1$.

В силу монотонности, выражаемой этими формулами, мы можем переходить к пределу последовательно по одной и другой переменной. Составим пределы

$$A = \lim_{k \to +0} \lim_{h \to +0} g(x+h, y+k) \text{ и } B = \lim_{h \to +0} \lim_{k \to +0} g(x+h, y+k)$$

и докажем, что они равны. Мы имеем $g(x+h,\ y+k) \geqslant g(x+h,\ y+0)$ и, переходя к пределу сначала по h, а потом по k, получим $A \geqslant B$. Совершенно так же можно доказать, что $B \geqslant A$, и, следовательно, $A = B$. Величину $A = B$ естественно обозначить символом $g(x+0,\ y+0)$. Совершенно так же можно показать, что

$$\lim_{k \to +0} \lim_{h \to +0} g(x-h,\ y-k) = \lim_{h \to +0} \lim_{k \to +0} g(x-h,\ y-k),$$

и этот предел естественно обозначить символом $g(x-0,\ y-0)$. До сих пор мы пользовались лишь тем, что функция $g(x,\ y)$ не убывает по каждой переменной. Сейчас нам придется использовать и условие (115). Составим пределы

$$A_1 = \lim_{k \to +0} \lim_{h \to +0} g(x+h,\ y-k) \quad \text{и} \quad B_1 = \lim_{k \to +0} \lim_{h \to +0} g(x+h,\ y-k)$$

и докажем, что $A_1 = B_1$. Полагая $0 < h_1 < h$ и $0 < k_1 < k$, можем написать, в силу (115),

$$g(x+h,\ y-k_1) - g(x+h,\ y-k) - g(x+h_1,\ y-k_1) + g(x+h_1,\ y-k) \geqslant 0.$$

Устремляя к нулю сначала h_1 и затем k_1, получим

$$g(x+h,\ y-0) - g(x+h,\ y-k) - A_1 + g(x+0,\ y-k) \geqslant 0.$$

Устремляя теперь к нулю сначала h и затем k, будем иметь $B_1 - A_1 \geqslant 0$, т. е. $B_1 \geqslant A_1$. Совершенно так же можно доказать, что $A_1 \geqslant B_1$, и, следовательно, $A_1 = B_1$. Величину $A_1 = B_1$ естественно обозначить через $g(x+0,\ y-0)$. Совершенно так же

$$\lim_{k \to +0} \lim_{h \to +0} g(x-h,\ y+k) = \lim_{h \to +0} \lim_{k \to +0} g(x-h,\ y+k),$$

и этот повторный предел обозначим $g(x-0,\ y+0)$. Нетрудно показать, что во всех рассмотренных четырех случаях тот же предел получится и при любом одновременном стремлении h и k к $(+0)$. Например, можно утверждать следующее: при любом заданном положительном ε существует такое положительное η, что

$$|g(x+h,\ y-k) - g(x+0,\ y-0)| \leqslant \varepsilon$$
$$\text{при } 0 < h < \eta \text{ и } 0 < k < \eta.$$

Таким образом, при выполнении условия (115) имеют определенный смысл символы $g(x \pm 0,\ y \pm 0)$. При помощи $g(x,\ y)$ неотрицательная, аддитивная и нормальная функция $G(\Delta)$ строится следующим образом. Положим, что Δ_x и Δ_y суть промежутки на осях, определяющие промежуток Δ на плоскости, и пусть a и b — граничные точки промежутка Δ_x, а c и d — граничные точки проме-

жутка Δ_y. При этом $G(\Delta)$ равно следующему выражению:

$$g(b \pm 0,\ d \pm 0) - g(b \pm 0, c \pm 0) - g(a \pm 0,\ d \pm 0) + \\ + g(a \pm 0,\ c \pm 0),$$

где знак $+$ берется в том случае, когда промежуток закрыт на соответствующем правом конце или открыт на соответствующем левом конце, и знак —, когда промежуток открыт на соответствующем правом конце, или закрыт на соответствующем левом конце. Таким образом, например, в случае замкнутого промежутка $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$ мы имеем

$$G(\Delta) = g(b+0,\ d+0) - g(b+0,\ c-0) - g(a-0,\ d+0) + \\ + g(a-0,\ c-0).$$

В случае полуоткрытого промежутка $a < x \leqslant b$, $c < y \leqslant d$:

$$G(\Delta) = g(b+0,\ d+0) - g(b+0,\ c+0) - g(a+0,\ d+0) + \\ + g(a+0,\ c+0)$$

и в случае точки $x = a$, $y = c$:

$$G(\Delta) = g(a+0,\ c+0) - g(a+0,\ c-0) - g(a-0,\ c+0) + \\ + g(a-0,\ c-0).$$

Наоборот, если имеется функция $G(\Delta)$, то легко построить функцию точки $g(x, y)$, при помощи которой $G(\Delta)$ может быть получена указанным выше образом. Положим, например, что $G(\Delta)$ определена на всей открытой плоскости. При этом $g(x, y)$ можно считать равной значению $G(\Delta)$ для промежутка Δ_{xy}, который определяется следующими промежутками на осях: $-\infty < x' \leqslant x$; $-\infty < y' \leqslant y$. Построенная таким образом $g(x, y)$ будет непрерывной по x и y справа. Отметим, что левая часть (115) не изменится, если к $g(x, y)$ добавить произвольный полином первой степени относительно x и y. Отметим, что если $g(x, y)$ — непрерывная функция, то соответствующая ей $G(\Delta)$ не имеет ни точек, ни линий разрыва и наоборот. Если в точке (x, y) функция $g(x, y)$ имеет разрыв непрерывности, но

$$g(x+0,\ y+0) - g(x-0,\ y+0) - g(x+0,\ y-0) + \\ + g(x-0,\ y-0) = 0,$$

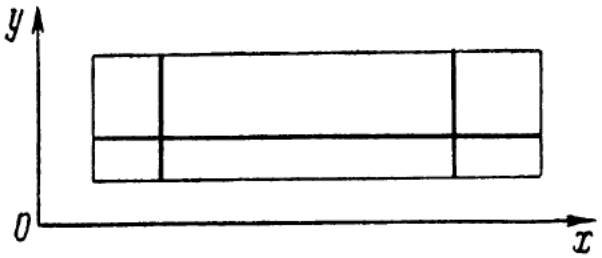
то эта точка не есть точка разрыва для $G(\Delta)$.

Рассмотрим в качестве примера то распределение массы, о котором мы упоминали выше, а именно положим, что масса распределена с линейной плотностью, равной единице, на отрезке: $x = 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. При этом $g(x, y) = 0$, если $x < 1$ или $y < 0$; $g(x, y) = y$, если $x \geqslant 1$ и $0 \leqslant y \leqslant 1$; $g(x, y) = 1$, если $x \geqslant 1$ и $y > 1$.

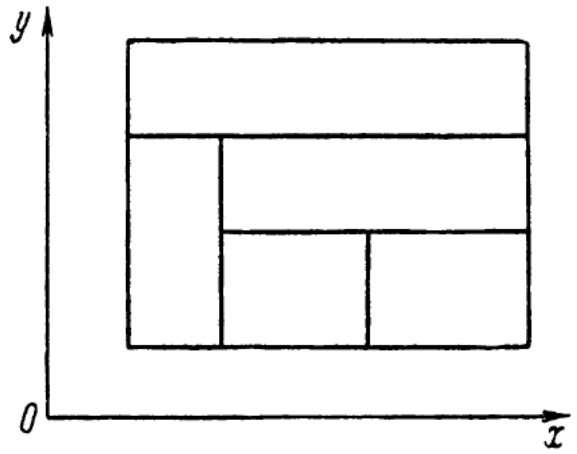
Совершенно аналогично можно рассмотреть промежутки в трехмерном пространстве с осями X, Y и Z. Такой промежуток опре-

деляется тремя промежутками на осях. Кроме точек и прямых, параллельных осям, надо будет рассматривать также и плоскости, параллельные координатным плоскостям. В остальном все рассуждения и результаты будут такими же, что и выше.

23. Интеграл Стилтьеса на плоскости. Нетрудно обобщить понятие интеграла Стилтьеса на случай плоскости. При этом мы встретимся, очевидно, с подразделениями двумерного промежутка на части. Если Δ — некоторый промежуток плоскости, определяемый промежутками Δ_x и Δ_y на осях, то мы назовем подразделением Δ такое разбиение Δ на частичные промежутки, которое получается при помощи разбиений Δ_x и Δ_y на частичные промежутки. Каждый частичный промежуток Δ определяется частичным промежутком из Δ_x и частичным промежутком из Δ_y. На черт. 1 указано разбиение полуоткрытого промежутка на шесть частичных промежутков, произведенное указанным образом.



Черт. 1



Черт. 2

На черт. 2 указано разбиение совершенно иного типа. В нем линии деления заканчиваются в середине промежутка Δ, и оно не может быть получено вышеуказанным путем подразделения промежутков Δ_x и Δ_y. Но легко перейти от подразделения второго типа к подразделению первого типа, продолжив все линии деления, и мы в дальнейшем будем пользоваться только подразделениями первого типа, что не играет существенной роли. Подразделение δ' называется продолжением подразделения δ, если подразделения Δ_x и Δ_y, соответствующие δ', являются продолжениями подразделений Δ_x и Δ_y, соответствующих δ. Если δ_1 и δ_2 — два подразделения Δ, а $\delta_x^{(1)}$, $\delta_x^{(2)}$ и $\delta_y^{(1)}$, $\delta_y^{(2)}$ — соответствующие подразделения Δ_x и Δ_y, то произведением $\delta_1\delta_2$ называется такое подразделение, которое определяется подразделениями $\delta_x^{(1)}\delta_x^{(2)}$ и $\delta_y^{(1)}\delta_y^{(2)}$ промежутков Δ_x и Δ_y. Подразделение $\delta_1\delta_2$ является, очевидно, продолжением δ_1 и δ_2. Отметим также, что если Δ' есть промежуток, принадлежащий Δ, то существуют такие подразделения Δ, в которых Δ' является одним из частичных промежутков.

Нетрудно построить понятие, аналогичное понятию интеграла Стилтьеса, на случай плоскости, трехмерного пространства или

вообще n-мерного пространства. Ограничимся случаем плоскости. В остальных случаях построения будут совершенно аналогичными.

Пусть на плоскости дан какой-то конечный промежуток Δ_0 и в нем определена равномерно непрерывная и тем самым ограниченная функция точки $f(P)$ и неотрицательная, аддитивная и нормальная функция промежутков $G(\Delta)$. Пусть δ — некоторое разбиение Δ_0 на промежутки $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ попарно без общих точек. Берем в каждом Δ_k некоторую точку P_k и составляем сумму

$$\sigma_\delta = \sum_{k=1}^{n} f(P_k)\, G(\Delta_k). \tag{116}$$

Как и в [4], можно показать, что эта сумма имеет определенный предел, когда наибольший из диаметров областей Δ_k стремится к нулю. Этот предел и называется интегралом от $f(P)$ по $G(\Delta)$:

$$\int_{\Delta_0} f(P)\, G(d\Delta) = \lim \sum_{k=1}^{n} f(P_k)\, G(\Delta_k). \tag{117}$$

Если $f(x, y)$ непрерывна в замкнутом промежутке $\Delta_0\,(a_1 \leqslant x \leqslant b_1;\ a_2 \leqslant y \leqslant b_2)$ и $g(x, y)$ обладает указанным выше свойством, то интеграл Стилтьеса можно определить как предел сумм

$$\sigma_\delta = \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{q} f(\xi_k, \eta_l)\,[g(x_k, y_l) - g(x_{k-1}, y_l) - g(x_k, y_{l-1}) + g(x_{k-1}, y_{l-1})], \tag{118}$$

где

$$a_1 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{p-1} < x_p = b_1;\ a_2 = y_0 < y_1 < \ldots < y_{q-1} < y_q = b_2;$$

$$x_{k-1} \leqslant \xi_k \leqslant x_k;\ y_{l-1} \leqslant \eta_l \leqslant y_l \tag{119}$$

при беспредельном измельчании промежутков.

Как и в [4], можно показать, что интеграл Стилтьеса существует при предположении, что $f(P)$ непрерывна внутри Δ_0 и ограничена, если $G(\Delta)$ удовлетворяет дополнительному условию, которое мы сейчас укажем.

Пусть $\Delta^{(n)}$ — замкнутые промежутки, лежащие внутри Δ_0, которые расширяются и стремятся к Δ_0 так, что любая внутренняя точка Δ_0 попадет в $\Delta^{(n)}$ при достаточно больших n. Мы требуем, чтобы $G(\Delta^{(n)}) \to G(\Delta_0)$. Это аналогично непрерывности $g(x)$ на концах промежутка, которую мы оговаривали в [4].

Интеграл Стилтьеса может быть определен и для всей плоскости $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$, которую обозначим через Q. Пусть $G(\Delta)$ — неотрицательная, аддитивная и нормальная функция, определенная для всех промежутков как конечных, так и бесконечных, принадлежащих Q. Пусть $\Delta^{(n)}$ — последовательность промежутков,

беспредельно расширяющихся по всем направлениям, например, пусть $\Delta^{(n)}$ есть $-n \leqslant x \leqslant n$; $-n \leqslant y \leqslant n$. Из нормальности $G(\Delta)$ следует, что $G(\Delta^{(n)}) - G(Q) \to 0$ при $n \to \infty$. Если $f(P)$ непрерывна и ограничена в Q, то существует интеграл Стилтьеса (117). При этом последовательность подразделений должна быть такой, чтобы при любом фиксированном n наибольший диаметр промежутков, имеющих общие точки с $\Delta^{(n)}$, стремился к нулю.

Областью интегрирования может быть и не промежуток Δ_0, а некоторая область S, которая представляет собой сумму конечного числа промежутков. Мы можем совершать сколь угодно тонкие разбиения на частичные промежутки, составлять суммы (116) и переходить к пределу. Интеграл по S сводится к конечной сумме интегралов по промежуткам, на которые можно разбить S, и он, очевидно, не зависит от способа разбиения S на промежутки.

Свойства двукратного интеграла Стилтьеса совершенно аналогичны указанным нами раньше свойствам простого интеграла.

24. Функция ограниченной вариации на плоскости. Рассмотрение функций ограниченной вариации на плоскости во многом аналогично предыдущему. Формулировки будут несколько иными, так как мы будем вести изложение не в терминах функции точки, а в терминах функции промежутков. Пусть $G(\Delta)$ — аддитивная и нормальная функция промежутков, определенная для всех промежутков (в общем смысле этого слова), принадлежащих некоторому основному промежутку Δ_0. Эту функцию $G(\Delta)$ мы не предполагаем неотрицательной. Пусть $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ — некоторое разбиение δ промежутка Δ_0 на частичные промежутки. Составляем суммы

$$t_\delta = \sum_{k=1}^{n} |G(\Delta_k)|. \tag{120}$$

Определение. *Если при всевозможных разбиениях δ множество значений t_δ ограничено, то функция $G(\Delta)$ называется функцией ограниченной вариации на промежутке Δ_0, а точная верхняя граница этих сумм t_δ называется полной вариацией или просто вариацией функции $G(\Delta)$ на промежутке Δ_0.* Мы ее будем обозначать символом $V_{\Delta_0}(G)$. Свойства сумм t_δ и полной вариации совершенно аналогичны тем свойствам, о которых говорили в [8], и большинство из этих свойств приведем без доказательства.

Если δ' есть продолжение подразделения δ, то $t_{\delta'} \geqslant t_\delta$. Если $G(\Delta)$ — ограниченной вариации на Δ_0, то она ограниченной вариации и на любом промежутке Δ', принадлежащем Δ_0, причем $V_{\Delta'}(G) \leqslant V_{\Delta_0}(G)$. Любая неотрицательная или неположительная функция $G(\Delta)$ есть функция ограниченной вариации. Если промежуток Δ' принадлежит Δ_0, то имеет место неравенство

$$|G(\Delta')| \leqslant V_{\Delta_0}(G), \tag{121}$$

и функция $G(\Delta)$, ограниченной вариации в Δ_0, будет ограниченной (по абсолютной величине) для всех Δ, принадлежащих Δ_0. Всякая линейная комбинация функций ограниченной вариации есть функция ограниченной вариации. Справедлива теорема 3 из [8] о произведении и частном. Полная вариация $V_\Delta(G)$ есть некоторая неотрицательная функция, определенная в Δ_0. Повторяя доказательство теоремы 4 из [8], мы покажем, что $V(\Delta)=V_\Delta(G)$ аддитивна. Докажем, что функция $V(\Delta)$ есть нормальная функция на Δ_0. Пусть Δ_m $(m=1, 2, 3, \ldots)$ есть исчезающая последовательность промежутков. Нам надо доказать, что $V(\Delta_m)\to 0$. Пусть ε — заданное положительное число. Берем такое подразделение δ: $\Delta^{(1)}$, $\Delta^{(2)}$, $\ldots$ $\Delta^{(p)}$ промежутка Δ_0, для которого

$$\sum_{k=1}^{p} |G(\Delta^{(k)})| \geqslant V(\Delta_0) - \varepsilon. \tag{122}$$

Для любого k из ряда чисел $k=1, 2, 3, \ldots, p$ произведение $\Delta_m \Delta^{(k)}$ $(m=1, 2, \ldots)$ есть исчезающая последовательность. В силу нормальности $G(\Delta)$ можно фиксировать такое значение $m=m_0$, что

$$|G(\Delta_m\Delta^{(k)})| \leqslant \frac{\varepsilon}{p} \text{ при } m > m_0 \quad (k=1, 2, \ldots, p). \tag{123}$$

Фиксируем любое $m>m_0$. Каждый промежуток $\Delta^{(k)}$ подвергаем дальнейшему раздроблению так, чтобы $\Delta_m\Delta^{(k)}$ было частичным промежутком. Пусть $\Delta_s^{(k)}$ $(s=1, 2, \ldots, n_k)$ остальные частичные промежутки при этом раздроблении $\Delta^{(k)}$. Таким образом, получится некоторое разбиение Δ_0, которое является продолжением разбиения δ, а, следовательно, для него и подавно справедливо неравенство (122), т. е.

$$\sum_{k=1}^{p} |G(\Delta_m\Delta^{(k)})| + \sum_{k=1}^{p}\sum_{s=1}^{n_k} |G(\Delta_s^{(k)})| \geqslant V(\Delta_0) - \varepsilon.$$

В силу аддитивности $V(\Delta)$ и неравенства $|G(\Delta_s^{(k)})| \leqslant V(\Delta_s^{(k)})$ последнее неравенство дает нам

$$\sum_{k=1}^{p} |G(\Delta_m\Delta^{(k)})| + \sum_{k=1}^{p}\sum_{s=1}^{n_k} V(\Delta_s^{(k)}) \geqslant V(\Delta_m) + \sum_{k=1}^{p}\sum_{s=1}^{n_k} V(\Delta_s^{(k)}) - \varepsilon$$

или

$$V(\Delta_m) \leqslant \sum_{k=1}^{p} |G(\Delta_m\Delta^{(k)})| + \varepsilon \quad \text{при } m > m_0.$$

Принимая во внимание (123), получим

$$V(\Delta_m) \leqslant \sum_{k=1}^{p} \frac{\varepsilon}{p} + \varepsilon = 2\varepsilon \quad \text{при} \quad m > m_0,$$

откуда, ввиду произвольности ε, и следует, что $V(\Delta_m) \to 0$. Таким образом, $V(\Delta)$ есть неотрицательная, аддитивная и нормальная функция промежутков на Δ_0. Определяем далее неотрицательные, аддитивные и нормальные функции по формулам

$$G_1(\Delta) = \frac{1}{2}[V(\Delta) + G(\Delta)]; \qquad G_2(\Delta) = \frac{1}{2}[V(\Delta) - G(\Delta)] \quad (124)$$

и получаем таким образом каноническое представление функции ограниченной вариации $G(\Delta)$ в виде разности двух неотрицательных, аддитивных и нормальных функций:

$$G(\Delta) = G_1(\Delta) - G_2(\Delta). \quad (125)$$

Если имеется какое-либо другое аналогичное представление:

$$G(\Delta) = G_1^*(\Delta) - G_2^*(\Delta), \quad (126)$$

то для любого Δ, принадлежащего Δ_0, имеем

$$G_1(\Delta) \leqslant G_1^*(\Delta) \quad \text{и} \quad G_2(\Delta) \leqslant G_2^*(\Delta).$$

Наоборот, если $G(\Delta)$ есть разность двух неотрицательных, аддитивных и нормальных функций, то $G(\Delta)$ — функция ограниченной вариации.

Если промежуток Δ есть точка P, то $V(P)$ совпадает с $G(P)$. Если $G(P) = 0$, то и $V(P) = 0$, т. е. непрерывность $G(\Delta)$ в некоторой точке влечет за собой и непрерывность $V(\Delta)$ в той же точке. Для отрезков, параллельных осям, дело обстоит несколько сложнее. Истолкуем $G(\Delta)$ как количество зарядов, расположенных на промежутке Δ. Если на некотором отрезке l прямой, параллельной одной из осей, расположены, например, с определенной линейной плотностью электрические заряды, общая сумма которых равна нулю, то $G(l) = 0$. С другой стороны, мы будем иметь $V(l) > 0$, так как $V(l)$ дает общую сумму зарядов, причем все заряды берутся со знаком плюс.

Можно было бы определить аддитивную и нормальную функцию $G(\Delta)$ только на полуоткрытых промежутках и пользоваться разбиениями только на полуоткрытые промежутки. При этом мы смогли бы провести все приведенные выше рассуждения и пришли бы к формуле (125). Неотрицательные, аддитивные и нормальные функции $G_1(\Delta)$ и $G_2(\Delta)$ полуоткрытых промежутков можно было бы распространить на всевозможные промежутки, и тем самым формула (126) дала бы нам распространение и заданной функции $G(\Delta)$ на всевозможные промежутки, и эта функция оказалась бы аддитивной, нормальной и ограниченной вариации для всевозможных промежутков.

Пользуясь каноническим представлением (145), можем определить интеграл по $G(\Delta)$ обычным образом:

$$\int\limits_{\Delta^{(0)}} f(P)\,G(d\Delta) = \int\limits_{\Delta^{(0)}} f(P)\,G_1(d\Delta) - \int\limits_{\Delta^{(0)}} f(P)\,G_2(d\Delta). \qquad (127)$$

Если имеется замкнутый промежуток $\Delta^{(0)}$ $(a_1 \leqslant x \leqslant b_1;\ a_2 \leqslant y \leqslant b_2)$, то пользуясь выражением (115), можем определить функцию ограниченной вариации $g(x, y)$ и полную вариацию так же, как и в [8], исходя из сумм

$$t_s = \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{q} |\,g(x_k, y_l) - g(x_{k-1}, y_l) - g(x_k, y_{l-1}) + g(x_{k\ 1}, y_{l-1})\,|. \qquad (128)$$

25. Пространство непрерывных функций многих переменных. Положим, что на некотором конечном замкнутом промежутке Δ_0 $(a_1 \leqslant x \leqslant b_1;\ a_2 \leqslant y \leqslant b_2)$ задана непрерывная функция $f(x, y)$. При помощи линейного преобразования $x' = ax + b$, $y' = cy + d$ (a и $c \neq 0$) мы можем свести Δ_0 к промежутку $0 \leqslant x' \leqslant 1$; $0 \leqslant y' \leqslant 1$, и непрерывная функция останется непрерывной и после преобразования. Будем считать, что уже первоначальный промежуток Δ_0 был промежутком $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Построим для $f(x, y)$ полиномы С. Н. Бернштейна [**II; 154**]:

$$P_{m,\,n}(x, y) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{n} f\left(\frac{k}{m}, \frac{l}{n}\right) C_m^k C_n^l\, x^k y^l (1-x)^{m-k} (1-y)^{n-l}. \qquad (129)$$

Пользуясь равномерной непрерывностью $f(x, y)$ в Δ_0, можно, как и в [**II; 154**], показать, что $P_{m,\,n}(x, y) \to f(x, y)$ при беспредельном возрастании m и n равномерно на Δ_0. Положим теперь, что имеется функция $f(x, y)$ — непрерывная на ограниченном замкнутом множестве F [**IV; 157**]. Используя, как и выше, линейное преобразование, можем считать, что F принадлежит указанному выше промежутку Δ_0. Далее мы можем распространить $f(x, y)$ на весь промежуток Δ_0 с сохранением непрерывности и наибольшего значения $|f(x, y)|$ [**IV; 157**]. Для таким образом распространенной $f(x, y)$ мы можем построить последовательность полиномов $P_{m,\,n}(x, y)$ так, что $P_{m,\,n}(x, y) \to f(x, y)$ равномерно на Δ_0 и тем более равномерно на F.

Рассмотрим теперь аналогично тому, как это мы делали в [**14**], пространство C функций непрерывных в Δ_0 со следующим определением нормы: $\|f\| = \max|f(x, y)|$ на Δ_0. Как и в [**15**], можно показать, что общая форма линейных функционалов в C есть интеграл Стилтьеса:

$$\Phi(f) = \int\limits_{\Delta_0} f(x, y)\,G(d\Delta), \qquad (130)$$

где $G(\Delta)$ — функция ограниченной вариации на Δ_0, характеризующая функционал $\Phi(f)$.

При определении функции ограниченной вариации можем пользоваться суммами (128), а интеграл (130) определять как предел сумм (118) при беспредельном измельчании промежутков. Сведения о пространстве непрерывных функций на ограниченных замкнутых множествах можно найти в статье Радона „О линейных функциональных преобразованиях и функциональных уравнениях“ („Успехи математических наук“, вып. 1, 1936 г.) и в книге Ф. Рисса и Б. Секефольви-Надя „Лекции по функциональному анализу“.

26. Интеграл Фурье—Стилтьеса. Рассмотрим функцию, представимую интегралом Фурье—Стилтьеса,

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\,dg(x) \quad (-\infty<t<+\infty), \tag{131}$$

где $g(x)$ — неубывающая ограниченная функция, непрерывная при $x=\pm\infty$, т. е.

$$g(-\infty)=\lim_{x\to-\infty} g(x); \quad g(+\infty)=\lim_{x\to+\infty} g(x).$$

Интеграл (131), очевидно, существует, поскольку функция e^{itx} непрерывна и ограничена [4]. Выясним простейшие свойства функции $\varphi(t)$. Мы имеем

$$|\varphi(t)|\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}|e^{itx}|\,dg(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}dg(x)=g(+\infty)-g(-\infty)=\varphi(0),$$

или $|\varphi(t)|\leqslant\varphi(0)$, т. е. $\varphi(t)$ — ограниченная функция. Из формулы (131) непосредственно следует также тождество

$$\varphi(-t)=\overline{\varphi(t)}. \tag{132}$$

Покажем еще, что функция $\varphi(t)$ равномерно непрерывна в промежутке $(-\infty, +\infty)$. Оценим абсолютное значение разности $\varphi(t+h)-\varphi(t)$:

$$|\varphi(t+h)-\varphi(t)|\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}|e^{ixt}||(e^{ixh}-1|\,dg(x)=2\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\sin\frac{hx}{2}\right|dg(x). \tag{133}$$

Сперва фиксируем n настолько большим, чтобы иметь

$$[g(-n)-g(-\infty)]\leqslant\varepsilon; \quad [g(+\infty)-g(n)]\leqslant\varepsilon.$$

Далее фиксируем такое η, не зависящее от t, чтобы на промежутке $-n\leqslant x\leqslant n$ имело место неравенство

$$2\left|\sin\frac{hx}{2}\right|\leqslant\varepsilon \quad \text{при} \quad |h|\leqslant\eta.$$

При этом, в силу (133), получим

$$|\varphi(t+h)-\varphi(t)|\leqslant[2+g(n)-g(-n)]\,\varepsilon\leqslant[2+g(+\infty)-g(-\infty)]\,\varepsilon,$$

откуда, ввиду произвольности ε и независимости η от t, и следует равномерная непрерывность $\varphi(t)$. Выясним еще одно свойство функции $\varphi(t)$. Возьмем какие-нибудь m вещественных чисел $t_1, t_2, \ldots, t_m$ и составим форму Эрмита:

$$\sum_{p,\,q=1}^{m}\varphi(t_p-t_q)\,\xi_p\overline{\xi_q} \tag{134}$$

переменных ξ_s. Принимая во внимание (131), можем написать

$$\varphi(t_p-t_q)\,\xi_p\overline{\xi_q}=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{it_px}\xi_p\overline{e^{it_qx}\xi_q}\,dg(x),$$

и для формы Эрмита (134) имеем следующее выражение:

$$\sum_{p,\,q=1}^{m} \varphi(t_p - t_q)\,\xi_p\overline{\xi_q} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{s=1}^{m} e^{it_s x}\xi_s \right|^2 dg(x),$$

откуда непосредственно следует, что при любом m и любом выборе t_s значений t форма Эрмита (134) неотрицательная, т. е.

$$\sum_{p,\,q=1}^{m} \varphi(t_p - t_q)\,\xi_p\overline{\xi_q} \geqslant 0. \tag{135}$$

Введём новое понятие. Функция $\varphi(t)$ называется положительно определенной, если она непрерывна и ограничена в промежутке $(-\infty, +\infty)$, удовлетворяет тождеству (132) и если, кроме того, форма Эрмита (134) при любом m и любом выборе точек t_s неотрицательна. Из предыдущих рассуждений следует, что если функция $\varphi(t)$ представима интегралом Фурье—Стилтьеса (131) с функцией $g(x)$ указанного типа, то она положительно определенна. Можно показать, что и наоборот: всякая положительно определенная функция $\varphi(t)$ представима интегралом (131) с функцией $g(x)$ указанного типа. (Bochner, Vorlesungen über Fouriersche Integrale, стр. 74, или Math. Annal. Bd. 108). Вернемся к интегралу (131) и представим функцию $g(x)$ в виде суммы $g(x) = g_d\ x) + g_c\ (x)$, где $g_d(x)$ — функция скачков и $g_c(x)$ — непрерывная часть функции $g(x)$. Функция $\varphi(t)$ при этом представится в виде суммы $\varphi(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t)$, где

$$\varphi_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dg_d(x); \quad \varphi_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dg_c(x). \tag{136}$$

Пусть x_k $(k = 1, 2, \ldots)$ — абсциссы точек разрыва $g(x)$ и $a_k = g(x_k + 0) - g(x_k - 0)$, причем, очевидно, $a_k > 0$, и ряд, составленный из a_k, сходится. Мы имеем разложение $\varphi_1(t)$ в равномерно сходящийся ряд:

$$\varphi_1(t) = \sum_k a_k e^{ix_k t}. \tag{137}$$

Если число точек x_k конечно, то и написанная сумма будет конечной.

Введем так называемое среднее значение какой-либо непрерывной функции $F(t)$, определенной на промежутке $(-\infty, +\infty)$,

$$M\{F(t)\} = \lim_{\omega \to +\infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{+\omega} F(t)\,dt, \tag{138}$$

если предел, стоящий справа, существует. Нетрудно показать, что для $\varphi_2(t)$, определенной формулой (136) с непрерывной функцией $g_c(x)$, мы имеем

$$M\{\varphi_2(t)\} = 0. \tag{139}$$

Действительно, производя интегрирование под знаком интеграла, получим

$$\frac{1}{\omega} \int_{-\omega}^{+\omega} \varphi_2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \omega x}{\omega x}\, dg_c(x).$$

Разобьем промежуток интегрирования $[-\infty, +\infty]$ на три части: $[-\infty, -a]$, $[-a, +a]$, $[a, +\infty]$. Производя элементарную оценку интегралов, получим

$$\left|\frac{1}{\omega}\int_{-\omega}^{+\omega}\varphi_2(t)\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{a\omega}[g_c(-a)-g_c(-\infty)]+\frac{1}{a\omega}[g_c(\infty)-g_c(a)]+[g_c(a)-g_c(-a)].$$

Пусть ε — заданное положительное число. Мы можем, в силу непрерывности $g_c(x)$, при $x=0$, выбрать a настолько малым, чтобы иметь: $g_c(a)-g_c(-a)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$. При фиксированном a первые два слагаемых правой части стремятся к нулю при $\omega\to\infty$, и, следовательно, при всех достаточно больших ω мы будем иметь

$$\left|\frac{1}{\omega}\int_{-\omega}^{+\omega}\varphi_2(t)\,dt\right|\leqslant\varepsilon,$$

откуда, ввиду произвольности ε, и следует (139). Возможность интегрирования по t под знаком интеграла Стилтьеса может быть легко оправдана. Рассмотрим теперь функцию $\varphi_2(t)\,e^{-i\lambda t}$, которую мы можем записать в виде

$$\varphi_2(t)\,e^{-i\lambda t}=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i(x-\lambda)t}\,dg_c(x),$$

или, пользуясь заменой переменной интегрирования,

$$\varphi_2(t)\,e^{-i\lambda t}=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}dg_c(x+\lambda),$$

и, в силу непрерывности функций $g_c(x)$, при любом вещественном λ будем иметь

$$M\{\varphi_2(t)\,e^{-i\lambda t}\}=0.$$

Далее, пользуясь равномерной сходимостью ряда (137) в промежутке $(-\infty, +\infty)$, а также тем, что

$$M\{e^{i\lambda t}\}=0 \quad \text{при} \quad \lambda\neq 0,$$

получим

$$M\{\varphi_1(t)\,e^{-i\lambda_k t}\}=a_k \quad (\lambda_k=x_k),$$

и

$$M\{\varphi_1(t)\,e^{-i\lambda t}\}=0,$$

если λ не совпадает ни с одним из x_k. Предыдущие рассуждения приводят нас к следующему общему результату: если $\varphi(t)$ представима интегралом (131) с неубывающей ограниченной функцией $g(x)$, то $M\{\varphi(t)\,e^{-i\lambda t}\}=g(\lambda+0)-g(\lambda-0)$, и правая часть равна нулю, если λ не есть точка разрыва $g(x)$. Среднее значение произведения $\varphi(t)\,e^{-i\lambda t}$ представляет собой обобщение понятия коэффициента Фурье для периодической функции. Мы вернемся еще к обобщенным коэффициентам Фурье в связи с обобщением формулы замкнутости [29]. В следующем параграфе мы выведем формулу обращения интеграла (131), т. е. формулу, выражающую $g(x)$ через $\varphi(t)$.

27. Формула обращения. Во втором томе мы доказали вторую теорему о среднем, разложимость функции в ряд Фурье и интегральную формулу Фурье в предположении, что исследуемая функция удовлетворяет условиям Дирихле. Просматривая все доказательства, нетрудно убедиться в том, что они сохраняют свою силу, если условие Дирихле заменить требованием, чтобы функция была ограниченной вариации. Для интеграла Фурье мы имеем таким образом следующий результат: если $f(x)$ есть функция ограниченной вариации на любом конечном промежутке и абсолютно интегрируема в смысле Римана по бесконечному промежутку, то из формулы

$$\varphi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,e^{itx}\,dx \tag{140}$$

вытекает следующая формула обращения:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,e^{-itx}\,dt, \tag{141}$$

причем последний интеграл надо понимать в смысле главного значения и в левой части $f(x)$ в точке разрыва надо заменить на $\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]$. Этот результат записывают иногда в несколько иной форме, а именно из формулы

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,e^{itx}\,dx \tag{142}$$

следует [**III; 130**]:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{V\cdot p}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\,e^{-itx}\,dt=\frac{1}{2\pi}\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{+N}\varphi(t)\,e^{-itx}\,dt. \tag{143}$$

Нашей задачей является построение формулы обращения для интеграла (131). Нетрудно предвидеть, какой вид должна иметь эта формула. Применим следующий эвристический прием, не имеющий, конечно, доказательной силы. Заменим в интеграле (131) $dg(x)$ на $g'(x)\,dx$, причём будем считать, что $g'(x)$ есть производная от $g(x)$. Таким образом, получим

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} g'(x)\,e^{itx}\,dx,$$

и формула обращения для обычного интеграла Фурье даст нам

$$g'(x)=\frac{1}{2\pi}\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{+N}\varphi(t)\,e^{-itx}\,dt.$$

Интегрируя обе части последней формулы по x, например от $x=0$ до некоторого значения x, и производя в правой части интегрирование под знаком интеграла, получим, окончательно, следующую формулу обращения:

$$g(x)-g(0)=\frac{1}{2\pi}\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{+N}\varphi(t)\,\frac{1-e^{-itx}}{it}\,dt. \tag{144}$$

В левую часть ее вошло значение $g(x)$ в фиксированной точке $x=0$, так как функция $g(x)$ определяется, очевидно, лишь с точностью до постоянного слагаемого. Мы должны теперь провести строгое доказательство формулы (144).

Фиксируя каким-нибудь образом значение переменной x, рассмотрим следующую функцию переменной y:

$$h(y)=g(y+x)-g(y). \tag{145}$$

Как разность двух возрастающих функций она будет функцией ограниченной вариации на любом конечном промежутке. Докажем еще, что она абсолютно интегрируема по бесконечному промежутку. Для определенности будем считать $x>0$. При $x<0$ доказательство проводится совершенно так же. Принимая во внимание, что функция $g(y)$ возрастает, можем написать

$$\int_p^q |h(y)|\,dy=\int_p^q [g(y+x)-g(y)]\,dy=\int_p^q g(y+x)\,dy-\int_p^q g(y)\,dy, \tag{146}$$

$$(q>p)$$

или, совершая в первом интеграле замену переменного интегрирования: $y+x=z$,

$$\int_p^q |h(y)\,dy=\int_{p+x}^{q+x} g(z)\,dz-\int_p^q g(z)\,dz=\int_q^{q+x} g(z)\,dz-\int_p^{p+x} g(z)\,dz.$$

Принимая во внимание, что в промежутке $[p,\ p+x]$ имеем $g(p)\leqslant g(z)$, а в промежутке $[q,\ q+x]$ имеем $g(q+x)\geqslant g(z)$, получим

$$\int_p^q |h(y)|\,dy\leqslant [g(q+x)-g(p)]\,x.$$

Отсюда видно, что для достаточно больших значений p и любых $q>p$ интеграл (146) сколь угодно мал, что и доказывает абсолютную интегрируемость функции $h(y)$ по бесконечному промежутку. Таким образом, к функции (145) применима формула Фурье

$$g(y+x)-g(y)=\frac{1}{2\pi}\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{+N} e^{-ity}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}[g(z+x)-g(z)]\,e^{itz}\,dz\right]dt$$

или, при $y=0$,

$$g(x)-g(0)=\frac{1}{2\pi}\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{+N}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}[g(z+x)-g(z)]\,e^{itx}\,dz\right]dt. \tag{147}$$

Рассмотрим внутренний интеграл I и применим к нему формулу интегрирования по частям:

$$I=\frac{1}{it}\int_{-\infty}^{+\infty}[g(z+x)-g(z)]\,de^{itz}=-\frac{1}{it}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itz}\,d\,[g(z+x)-g(z)],$$

откуда, пользуясь формулой (131), получим

$$I=\frac{1}{it}\varphi(t)-\frac{1}{it}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itz}\,dg(z+x),$$

Совершая в последнем интеграле замену переменных интегрирования $z + x = u$, придем, окончательно, к следующей формуле:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [g(z+x) - g(z)]\, e^{itz}\, dz = \frac{1 - e^{-itx}}{it}\, \varphi(t). \tag{148}$$

Подставляя это в формулу (147), получим формулу обращения (144).

Напомним, что в формуле (143), которая дает обращение обычного преобразования Фурье, левую часть $f(x)$ в точках разрыва этой функции надо считать, как мы знаем [**II: 143**], равной среднему арифметическому пределов слева и справа. Следовательно, то же замечание относится и к левой части формулы (143) и левой части формулы обращения (144). Формула обращения (144) для интеграла (131) справедлива и в том случае, когда $g(x)$ есть функция ограниченной вариации. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно представить $g(x)$ в виде разности двух возрастающих функций, разбить интеграл (131) на два интеграла и к каждому из них применить доказанную выше формулу обращения.

28. Теорема свертывания. Формула обращения для обычного интеграла Фурье непосредственно связана, как мы знаем, с формулой обращения для интеграла Лапласа [**IV; 44, 45**], и для последнего интеграла мы имели теорему о свертывании. Аналогичная теорема имеет место и для интеграла Фурье — Стилтьеса. Пусть $g_1(x)$ и $g_2(x)$ — две функции с указанными выше для $g(x)$ свойствами. Будет существовать следующий общий интеграл Стилтьеса:

$$g_3(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_2(t - x)\, dg_1(x). \tag{149}$$

Нетрудно показать, что $g_3(x)$ обладает упомянутыми выше свойствами и что если $g_1(x)$ и $g_2(x)$ непрерывны, то и $g_3(x)$ непрерывна.

Составим для функции $g_i(x)$ преобразование Фурье — Стилтьеса

$$\psi_k(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\, dg_k(x) \tag{150}$$

Теорема свертывания заключается в утверждении того, что *эти преобразованные функции удовлетворяют следующему простому равенству:*

$$\psi_3(t) = \psi_1(t)\, \psi_2(t). \tag{151}$$

Применим к функции $\psi_3(t)$ формулу (148)

$$\frac{1 - e^{-iut}}{it}\, \psi_3(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} [g_3(z+u) - g_3(z)]\, e^{itz}\, dz.$$

Заменяя $g_3(t)$ его выражением (149), получим

$$\frac{1 - e^{-iut}}{it}\, \psi_3(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} [g_2(z+u-x) - g_2(z-x)]\, dg_1(x) \right\} e^{itz}\, dz.$$

Переменим порядок интегрирования. На доказательстве возможности этого не останавливаемся. Это будет следовать из одной общей теоремы о перемене порядка интегрирования, которая будет доказана в дальнейшем. Таким образом, мы получим

$$\frac{1-e^{-iut}}{it}\psi_3(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}[g_2(z+u-x)-g_2(z-x)]\,e^{itz}\,dz\right\}dg_1(x).$$

Во внутреннем интеграле введем вместо z новую переменную интегрирования y по формуле $z-x=y$. При этом предыдущая формула может быть написана в виде

$$\frac{1-e^{-iut}}{it}\psi_3(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}[g_2(y+u)-g_2(y)]\,e^{ity}\,dy\right\}e^{itx}\,dg_1(x).$$

Внутренний интеграл может быть выражен через $\psi_2(t)$ по формуле (165), и мы приходим к формуле

$$\frac{1-e^{-iut}}{it}\psi_3(t)=\frac{1-e^{-iut}}{it}\psi_2(t)\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}\,dg_1(x),$$

которая и совпадает с формулой (151) в силу (150).

Из теоремы свертывания непосредственно следует, что если $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ представимы интегралом типа (131), т. е. принадлежат классу P положительно определенных функций, тогда то же можно утверждать и об их произведении. Непосредственно очевидно, что и линейная комбинация $c_1\psi_1(t)+c_2\psi_2(t)$ с положительными коэффициентами принадлежит тому же классу. Далее, если $\psi(t)$ принадлежит P, то и $\overline{\varphi(t)}$ принадлежит P, а именно, если $g_0(x)$ определяет $\psi(t)$, то для $\overline{\psi(t)}$ будем иметь

$$\overline{\varphi(t)}=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-itx}\,dg_0(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}\,dg_1(x),$$

где $g_1(x)=-g_0(-x)$. Таким образом, $|\psi(t)|^2$ будет принадлежать P и будет определяться функцией

$$h(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}g_0(x-t)\,dg_1(t).$$

Если $g_0(x)$ непрерывна, то и $h(x)$ будет непрерывной, и, в силу доказанного в [26], будем иметь

$$M\{|\psi(t)|^2\}=0.$$

Вернемся к функции $\varphi(t)$, определяемой формулой (131), и пусть, как и выше, a_k — обобщенные коэффициенты Фурье, соответствующие $\lambda=\lambda_k$. Принимая во внимание, что положительные числа a_k образуют сходящийся ряд и формулу (137), получим

$$\sum_k|a_k|^2=M\{\varphi_1(t)|^2\}. \tag{152}$$

С другой стороны, в силу доказанного выше,

$$M\{|\varphi_2(t)|^2\}=0. \tag{153}$$

Далее имеем

$$|\varphi(t)|^2=|\varphi_1(t)+\varphi_2(t)|^2=|\varphi_1(t)|^2+|\varphi_2(t)|^2+\varphi_1(t)\overline{\varphi_2(t)}+\overline{\varphi_1}(t)\varphi_2(t).$$

По неравенству Буняковского — Шварца

$$\left|\frac{1}{\omega}\int_{-\omega}^{+\omega}\varphi_1(t)\overline{\varphi_2(t)}\,dt\right|^2\leqslant\frac{1}{\omega}\int_{-\omega}^{+\omega}|\varphi_1(t)|^2\,dt\cdot\frac{1}{\omega}\int_{-\omega}^{+\omega}|\varphi_2(t)|^2\,dt,$$

и, принимая во внимание (152) и (153), можно утверждать, что правая часть стремится к нулю при беспредельном возрастании ω. Таким образом, $M\{\varphi_1(t)\overline{\varphi_2(t)}\}=0$, и, совершенно так же, $M\{\overline{\varphi_1(t)}\varphi_2(t)\}=0$. Из формул (152) и (153) получаем, таким образом, для любой функции из класса P следующую теорему замкнутости:

$$\sum_k a_k^2=M\{|\varphi|^2\}. \tag{154}$$

29. Интеграл Коши — Стилтьеса. Рассмотрим интеграл Коши, взятый по всей вещественной оси,

$$\omega(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\psi(x)}{x-z}\,dx. \tag{155}$$

При некоторых предположениях относительно $\psi(x)$ этот интеграл существует, и функция $\omega(z)$ комплексного переменного z будет регулярной функцией как в верхней, так и в нижней полуплоскости. В этих полуплоскостях упомянутые регулярные функции суть различные аналитические функции, и мы знаем, что $\psi(x)$ можно выразить через скачок $\omega(z)$ на вещественной оси, а именно имеет место формула **[IV; 85]**:

$$\psi(x)=\lim_{\tau\to+0}\frac{1}{2\pi i}[\omega(x+\tau i)-\omega(x-\tau i)].$$

Положим, что $g(x)$ есть функция ограниченной вариации на бесконечном промежутке $[-\infty, +\infty]$, и составим для комплексных значений z интеграл Коши — Стилтьеса:

$$\omega(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x-z}\,dg(x). \tag{156}$$

Интегрируемая функция $1:(x-z)$ непрерывна на всей вещественной оси и стремится к нулю при $x\to\pm\infty$. Таким образом, интеграл

(156) можем понимать как интеграл Стилтьеса [4]. Мы докажем для интеграла (156) следующую формулу обращения:

$$g(x) - g(0) = \lim_{\tau \to +0} \frac{1}{2\pi i} \int_0^x [\omega(\sigma + \tau i) - \omega(\sigma - \tau i)]\, d\sigma, \quad (157)$$

причем для точек разрыва функции $g(x)$ в левой части надо брать полусумму предельных значений слева и справа. Мы могли бы предугадать эту формулу обращения совершенно так же, как это делали выше при обращении интегралов Фурье — Стилтьеса.

Прежде чем доказывать формулу (167) рассмотрим интеграл Пуассона для случая полуплоскости. Положим $z = \sigma + \tau i$ и отделим в ядре Коши вещественную и мнимую часть:

$$\frac{1}{x - z} = \frac{x - \sigma}{(x - \sigma)^2 + \tau^2} + \frac{\tau}{(x - \sigma)^2 + \tau^2} i.$$

Отделяя в интеграле (155) мнимую часть и добавляя множитель $1 : \pi$, мы и придем к интегралу Пуассона для полуплоскости:

$$F(\sigma, \tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau}{(x - \sigma)^2 + \tau^2} \psi(x)\, dx. \quad (158)$$

Он представляет собой, очевидно, гармоническую функцию как в верхней, так и нижней полуплоскости. Докажем по поводу этого интеграла следующее: *если $\psi(x)$ — ограниченная функция, интегрируемая по Риману в любом конечном промежутке (например, функция ограниченной вариации $g(x)$), то интеграл* (158) (*он, очевидно, существует*) *при стремлении τ к 0 со стороны положительных значений стремится к $\psi(\sigma)$ в точках непрерывности $\psi(x)$ и к полусумме предельных значений слева и справа в точках разрыва первого рода, причем в любом замкнутом промежутке изменения τ, лежащем внутри промежутка непрерывности $\psi(x)$, это стремление к пределу равномерно относительно σ.* Для доказательства отметим, прежде всего, очевидное равенство

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\tau}{x^2 + \tau^2} dx = 1. \quad (159)$$

В интеграле (158) введем вместо x новую переменную интегрирования $y = x - \sigma$:

$$F(\sigma, \tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau}{y^2 + \tau^2} \psi(y + \sigma)\, dy.$$

Разобьем промежуток интегрирования на два: $[-\infty, 0]$, $[0, +\infty]$, и в первом из полученных интегралов введем новую переменную

интегрирования $y_1 = -y$. Таким образом, придем к следующей формуле:

$$F(\sigma, \tau) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\tau}{x^2 + \tau^2} \cdot \frac{\psi(\sigma + x) + \psi(\sigma - x)}{2} dx. \qquad (160)$$

Положим, что σ — точка непрерывности $\psi(x)$ или точка разрыва первого рода. Умножим обе части формулы (159) на $[\psi(\sigma + 0) + \psi(\sigma - 0)] : 2$ и вычтем почленно из формулы (160). Мы получим, таким образом, следующую формулу:

$$F(\sigma, \tau) - \frac{\psi(\sigma + 0) + \psi(\sigma - 0)}{2} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\tau}{x^2 + \tau^2} w(x)\, dx, \qquad (161)$$

где

$$w(x) = \frac{\psi(\sigma + x) - \psi(\sigma + 0)}{2} + \frac{\psi(\sigma - x) - \psi(\sigma - 0)}{2}. \qquad (162)$$

Пусть ε — заданное положительное число. При этом существует такое положительное η, что $|w(x)| < \varepsilon$ при $0 < x \leqslant \eta$. Если σ находится в замкнутом промежутке, лежащем внутри промежутка непрерывности $\psi(x)$, то, в силу равномерной непрерывности $\psi(x)$, число η определяется только числом ε и не зависит от σ. В интеграле (161) разобьем промежуток интегрирования на два $[0, \eta]$ и $[\eta, \infty]$. Для первого промежутка интегрирования имеем

$$\left| \frac{2}{\pi} \int_0^\eta \frac{\tau}{x^2 + \tau^2} w(x)\, dx \right| \leqslant \varepsilon \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^\eta \frac{\tau}{x^2 + \tau^2} dx < \varepsilon \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\tau}{x^2 + \tau^2} dx = \varepsilon.$$

Для оценки интеграла по второму промежутку заметим, что функция $w(x)$ ограничена, что вытекает из ограниченности функции $\psi(x)$, т. е. мы имеем $|w(x)| \leqslant L$, где L — некоторое положительное число. Таким образом, получим

$$\left| \frac{2}{\pi} \int_\eta^\infty \frac{\tau}{x^2 + \tau^2} w(x)\, dx \right| \leqslant L \cdot \frac{2}{\pi} \int_\eta^\infty \frac{\tau}{x^2 + \tau^2} dx = \frac{2L}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} \frac{\eta}{\tau} \right),$$

и для разности, стоящей в левой части формулы (162), получаем следующую оценку:

$$\left| F(\sigma, \tau) - \frac{\psi(\sigma + 0) + \psi(\sigma - 0)}{2} \right| \leqslant \varepsilon + \frac{2L}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} \frac{\eta}{\tau} \right).$$

Разность, стоящая во втором слагаемом, очевидно, стремится к нулю, когда положительное число τ стремится к нулю, и при всех τ, достаточно близких к нулю, это второе слагаемое будет меньше ε.

Таким образом, при всех τ, достаточно близких к нулю, мы получаем оценку

$$\left| F(\sigma, \tau) - \frac{\psi(\sigma+0)+\psi(\sigma-0)}{2} \right| \leqslant 2\varepsilon,$$

из которой вытекает, ввиду произвольности ε, справедливость высказанного выше утверждения. Близость τ к нулю обусловлена значением η, а это последнее не зависит от σ для упомянутых выше интервалов непрерывности $\psi(x)$. Отсюда следует равномерность стремления к пределу в упомянутых интервалах непрерывности. Переходим теперь к доказательству формулы обращения (157). Составим функцию

$$F_1(\sigma, \tau) = \frac{1}{2\pi i}[\omega(\sigma+\tau i) - \omega(\sigma-\tau i)] = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau}{(x-\sigma)^2+\tau^2}\, dg(x).$$

Применяя интегрирование по частям, можем написать

$$F_1(\sigma, \tau) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\tau}{(x-\sigma)^2+\tau^2}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\frac{\tau}{(x-\sigma)^2+\tau^2}\right) dx.$$

Ввиду ограниченности $g(x)$ написанный несобственный интеграл сходится равномерно относительно σ, принадлежащего любому конечному промежутку, и, интегрируя обе части последней формулы по σ на промежутке $[0, x_0]$, причем справа интегрирование производится под знаком интеграла, получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int_0^{x_0} [\omega(\sigma+\tau i) - \omega(\sigma-\tau i)]\, d\sigma =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau}{(x-x_0)^2+\tau^2} g(x)\, dx - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau}{x^2+\tau^2} g(x)\, dx.$$

Интегралы, стоящие справа, суть интегралы Пуассона, и, применяя доказанную выше теорему, мы и придем к формуле обращения (157). Эта формула впервые дана Стилтьесом и называется обычно формулой Стилтьеса. Отметим, что для интеграла (156) значения функции $g(x)$ на концах промежутка $[-\infty, +\infty]$ не существенны, так как интегрируемая функция стремится к нулю при стремлении x к $\pm\infty$.

ГЛАВА II

ФУНКЦИИ МНОЖЕСТВ И ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

§ 1. Функции множеств и теория измерения

30. Операции над множествами. При построении более общего понятия интеграла мы будем разбивать основной промежуток интегрирования не на промежутки, а на точечные множества более общего типа. Кроме того, и основной областью интегрирования будет часто служить нам не промежуток, а некоторое точечное множество более общего типа. Первый параграф настоящей главы и будет посвящен изучению таких множеств и функций, определенных на таких множествах более общего типа. Мы начнем с изложения основных понятий и основных фактов, касающихся не только точечных множеств, но и множеств, состоящих из любых элементов. Для таких общих множеств введем сначала некоторые основные понятия и обозначения, которыми мы в дальнейшем будем широко пользоваться. Главным образом будем пользоваться точечными множествами, т. е. множествами, элементы которых суть точки или прямой, или плоскости, или вообще многомерного пространства.

Если элемент x принадлежит множеству A, то это записывают в виде $x \in A$. Если же x не принадлежит A, то пишут так: $x \overline{\in} A$. Если все элементы, входящие в множество A, входят и в множество B, то говорят, что A есть часть B, и пишут $A \subset B$ или $B \supset A$. Если множества A и B содержат одни и те же элементы, то пишут $A = B$. Если все элементы, входящие в A, входят и в B, но среди элементов B есть и такие, которые не входят в A, то, чтобы подчеркнуть последнее обстоятельство, иногда говорят, что A есть правильная часть B. Если $A \subset C$ и $B \subset C$, то отсюда следует, что $A \subset C$. Пусть

$$A_1, A_2, A_3, \ldots \tag{1}$$

множества, число которых конечно или счетно. Суммой множеств (1) называется множество $\mathfrak{S}_1$, элементами которого являются элементы, принадлежащие по крайней мере одному из множеств A_n. Для обозначения суммы

множеств пользуются обычными символами

$$\mathfrak{E}_1 = A_1 + A_2 + \dots \quad \text{или} \quad \mathfrak{E}_1 = \sum_n A_n.$$

Произведением множеств (1) называется множество $\mathfrak{E}_2$, элементами которого являются элементы, входящие во все множества A_n. Произведение множеств обозначается обычным образом

$$\mathfrak{E}_2 = A_1 A_2 \dots \quad \text{или} \quad \mathfrak{E}_2 = \prod_n A_n.$$

Произведение множеств может не содержать ни одного элемента. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым множеством, и мы будем обозначать его символом Λ. Так, например, если A и B множества, не имеющие общих элементов, то мы имеем формулу $AB = \Lambda$. Сумма и произведение множеств подчиняются, очевидно, переместительному и сочетательному закону. Имеем например:

$$\begin{array}{ll} A + B = B + A; & A + (B + D) = (A + B) + D; \\ AB = BA; & A \cdot (BD) = (AB) \cdot D. \end{array} \tag{2}$$

Справедлив и распределительный закон, т. е. имеет место формула

$$B \sum_n A_n = \sum_n BA_n. \tag{3}$$

Для того чтобы доказать эту формулу, мы должны показать, что всякий элемент x, входящий в множество, стоящее в левой части формулы, входит и в множество, стоящее в правой части формулы, и наоборот. Если x есть элемент множества, стоящего в левой части формулы (3), то он принадлежит одновременно B и сумме множеств A_n, т. е. по крайней мере одному из множеств A_n. Пусть $x \in A_k$. Таким образом, $x \in B$ и $x \in A_k$, т. е. $x \in BA_k$, а следовательно, x принадлежит множеству, стоящему в правой части формулы (3). Наоборот, если x принадлежит этому множеству, то он принадлежит по крайней мере одному из произведений BA_n. Положим, что $x \in BA_k$, т. е. $x \in B$ и $x \in A_k$. Отсюда следует, что $x \in B$ и что x принадлежит сумме множеств A_n, т. е. x принадлежит множеству, стоящему в левой части формулы (3), и эта формула доказана. Если $B \subset A$, то очевидно $A + B = A$. Отсюда и из (2) и (3) непосредственно следует

$$(A + B)(A + D) = A + BD. \tag{4}$$

Определим теперь разность. Под разностью множеств $A - B$ мы разумеем множество, элементами которого

являются элементы A, не входящие в B. Если $A \subset B$, то $A - B$ есть пустое множество. Отметим, что при определении разности $A - B$ мы не предполагаем, что $B \subset A$. Если $B \subset A$, то имеет место очевидная формула

$$A = B + (A - B).$$

В общем случае имеем

$$A + B = B + (A - B). \tag{5}$$

Отметим некоторые формулы, которые будут нам полезны в дальнейшем. Их доказательства не представляют никакого труда. Если $A - B = \mathfrak{E}_2$ и $B - A = \mathfrak{E}_1$, то $A + \mathfrak{E}_1 = B + \mathfrak{E}_2$. Если $A_n \subset B_n$, то

$$\sum_n A_n \subset \sum_n B_n \quad \text{и} \quad \sum B_n - \sum A_n \subset \sum (B_n - A_n). \tag{6}$$

Укажем еще на формулы, связанные с понятием разности:

$$A - (B - D) \subset (A - B) + D \qquad (7); \qquad AB = A - (A - B); \tag{7_1}$$

$$(A_1 + A_2) - (B_1 - B_2) \subset (A_1 - B_1) + (B_2 - A_2); \tag{8}$$

$$A + B = (A - B) + (B - A) + AB. \tag{8_1}$$

Перейдем теперь к установлению понятия монотонной последовательности множеств и предела. Если для бесконечной последовательности множеств $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \ldots$ мы имеем

$$\mathfrak{E}_1 \subset \mathfrak{E}_2 \subset \mathfrak{E}_3 \subset \ldots, \tag{9}$$

то будем говорить, что эта последовательность множеств есть возрастающая последовательность. Убывающая последовательность множеств определяется условием

$$\mathfrak{E}_1 \supset \mathfrak{E}_2 \supset \mathfrak{E}_3 \supset \ldots \tag{10}$$

В случае (9) назовем пределом множеств $\mathfrak{E}_n$ такое множество $\mathfrak{E}$, элементами которого являются элементы, принадлежащие по крайней мере одному из $\mathfrak{E}_n$. При этом будем писать $\mathfrak{E} = \lim\limits_{n \to \infty} \mathfrak{E}_n$. Отметим, что если в случае (9) элемент x принадлежит множеству $\mathfrak{E}_k$, то он принадлежит и всем множествам $\mathfrak{E}_n$ при $n > k$. В случае (9) мы имеем очевидную формулу

$$\mathfrak{E} = \lim_{n \to \infty} \mathfrak{E}_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{E}_n, \tag{11}$$

которую можем также написать в виде

$$\mathfrak{E} = \lim_{n \to \infty} \mathfrak{E}_n = \mathfrak{E}_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (\mathfrak{E}_{k+1} - \mathfrak{E}_k). \tag{12}$$

В последней формуле множества, входящие в качестве слагаемых в правую часть, не имеют попарно общих точек. В случае (10) назовем пределом множеств $\mathcal{E}_n$ множество $\mathcal{E}$, элементами которого являются элементы, принадлежащие всем $\mathcal{E}_n$. В данном случае мы имеем

$$\mathcal{E} = \lim_{n\to\infty} \mathcal{E}_n = \prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_n, \tag{13}$$

и, кроме того, в случае (10) можем написать формулу

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E} + \sum_{k=1}^{\infty} (\mathcal{E}_k - \mathcal{E}_{k+1}). \tag{14}$$

В этой формуле слагаемые справа не имеют попарно общих элементов. Мы определили понятие предела последовательности множеств лишь для монотонных последовательностей. Можно было бы сделать это и в общем случае. Не будем на этом останавливаться, так как это нам не понадобится в дальнейшем.

Введем еще одно понятие специально для точечных множеств. Пусть $\mathcal{E}$ — множество точек на плоскости. Назовем множеством, дополнительным для $\mathcal{E}$, множество всех точек плоскости, не принадлежащих к $\mathcal{E}$. Это дополнительное множество обозначают обычно символом $C\mathcal{E}$. Отметим некоторые формулы, относящиеся к понятию дополнительного множества. Если дважды применить понятие дополнительного множества, то получим первоначальное множество, т. е. $C(C\mathcal{E}) = \mathcal{E}$. Если $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_2$, то $C\mathcal{E}_1 \supset C\mathcal{E}_2$. Отметим также следующие формулы:

$$\prod_n \mathcal{E}_n = C \sum_n C\mathcal{E}_n, \tag{15}$$

$$\sum_n \mathcal{E}_n = C \prod_n C\mathcal{E}_n, \tag{16}$$

$$C \prod_n \mathcal{E}_n = \sum_n C\mathcal{E}_n, \tag{17}$$

$$C \sum_n \mathcal{E}_n = \prod_n C\mathcal{E}_n, \tag{18}$$

$$C\mathcal{E}_1 - C\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1, \tag{19}$$

$$\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1 \cdot C\mathcal{E}_2, \tag{20}$$

которые доказываются без всякого труда. Понятие дополнительного множества можно ввести, очевидно, и по отношению к прямой, если основное множество расположено на прямой, и по отношению к любому многомерному пространству. Иногда вводят понятие дополнительного множества по отношению к некоторому множеству A. Если все точки множества $\mathcal{E}$ принадлежат A, то множеством дополнительным для $\mathcal{E}$ по отношению к A называют разность $A - \mathcal{E}$. Мы будем пользоваться понятием дополнительного множества только по отношению ко всему пространству, т. е. по отношению или к прямой, или к плоскости и т. д.

31. Точечные множества. Приведем теперь некоторые понятия и результаты, касающиеся специально точечных множеств. Во II томе, при изложении теории кратного интеграла Римана, мы привели некоторые сведения, касающиеся точечных множеств на плоскости или в любом n-мерном пространстве. Сейчас мы повторим сказанное во II томе с некоторыми существенными дополнениями. Для определенности будем говорить о точечных множествах на плоскости XY. Все сказанное легко можно распространить на случай прямой или любого n-мерного пространства.

Рассмотрим плоскость, отнесенную к прямолинейным осям XY, и точечные множества на такой плоскости. Множество называется ограниченным, если расстояние входящих в него точек от начала меньше некоторого определенного положительного числа N, т. е. для всех точек множества $x^2+y^2<N^2$. Назовем ε-окрестностью точки $P(a, b)$ замкнутый круг с центром P и радиусом ε, т. е. множества точек (x, y), удовлетворяющих условию $(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant\varepsilon^2$. Точка P называется предельной точкой или точкой сгущения множества $\mathfrak{E}$, если любой ε-окрестности точки P принадлежит бесчисленное множество точек из $\mathfrak{E}$. Сама точка P может или принадлежать или не принадлежать $\mathfrak{E}$. Если все предельные точки принадлежат $\mathfrak{E}$, то множество $\mathfrak{E}$ называется замкнутым. Точка P, принадлежащая множеству $\mathfrak{E}$, называется внутренней точкой $\mathfrak{E}$, если $\mathfrak{E}$ принадлежат все точки некоторой ε-окрестности точки P. Множество $\mathfrak{E}$ называется открытым множеством, если все его точки суть внутренние точки. Замкнутые множества обычно обозначают буквой F с различными значками (французское слово fermé — замкнутый), а открытые множества — буквой O (ouvert — открытый).

Пустым множеством будем называть „множество“, не содержащее ни одной точки. В дальнейших теоремах можем подразумевать и пустое множество, причем его надо считать и открытым и замкнутым. Границей открытого множества O называется множество l точек P, обладающих следующим свойством: сама точка P не принадлежит O, но в любой ε-окрестности P лежат точки, принадлежащие O. Поскольку O состоит из внутренних точек, можно утверждать, что в любой ε-окрестности P лежит бесчисленное множество точек O, и можно определить границу l открытого множества O как множество предельных точек O, не принадлежащих O. Нетрудно показать, что *граница открытого множества есть замкнутое множество* **[II; 89]**.

Пусть $\mathfrak{E}$ — некоторое множество. Присоединим к нему все его предельные точки и полученное множество обозначим через $\overline{\mathfrak{E}}$. Эта операция называется *замыканием множества* $\mathfrak{E}$. Если $\mathfrak{E}$ замкнутое множество, то $\overline{\mathfrak{E}}=\mathfrak{E}$. Покажем, что $\overline{\overline{\mathfrak{E}}}$ — замкнутое множество. Пусть P — предельная точка для $\overline{\mathfrak{E}}$, т. е. имеется бесконечная последовательность различных точек P_n $(n=1, 2, \ldots)$, принадлежащих $\overline{\mathfrak{E}}$, причем

$P_n \to P$. Если среди P_n имеется бесчисленное множество точек, принадлежащих $\mathfrak{E}$, то P является предельной точкой для $\mathfrak{E}$, а потому, в силу процесса замыкания, входит в $\overline{\mathfrak{E}}$. Положим теперь, что все точки P_n, начиная с некоторого номера n, не принадлежат $\mathfrak{E}$. По условию, они входят в $\overline{\mathfrak{E}}$ и, следовательно, являются предельными точками для $\mathfrak{E}$. В любой $\frac{\varepsilon}{2}$-окрестности точки P находится бесчисленное множество точек P_n, и в любой $\frac{\varepsilon}{2}$-окрестности каждой точки P_n находится бесчисленное множество точек $\mathfrak{E}$. Отсюда непосредственно следует, что в любой ε-окрестности точки P находится бесчисленное множество точек $\mathfrak{E}$, т. е. P является предельной точкой для $\mathfrak{E}$, а потому, в силу процесса замыкания, должно входить в $\overline{\mathfrak{E}}$.

Таким образом, мы показали, что множество $\overline{\mathfrak{E}}$, полученное в результате замыкания любого заданного множества $\mathfrak{E}$, есть обязательно замкнутое множество. Отметим, что вся плоскость является одновременно и замкнутым и открытым множеством. Бесконечно далекую точку мы не причисляем к плоскости. Всякое конечное множество точек есть замкнутое множество. Оно вовсе не имеет предельных точек.

Введем теперь понятие расстояния между множествами. Назовем расстоянием между множествами $\mathfrak{E}_1$ и $\mathfrak{E}_2$ точную нижнюю границу расстояний от всевозможных точек, принадлежащих $\mathfrak{E}_1$, до точек, принадлежащих $\mathfrak{E}_2$. Если множества имеют хотя бы одну общую точку, то расстояние между ними равно нулю. Но расстояние между множествами может равняться нулю и в том случае, когда множества не имеют общих точек. Точки двух множеств, не имеющих общих точек, могут все же беспредельно сближаться. Этого не может быть, если данные два множества ограничены и замкнуты, и во II томе мы доказали следующую теорему: если $\mathfrak{E}_1$ и $\mathfrak{E}_2$ — ограниченные и замкнутые множества без общих точек, то расстояние d между ними положительно, и найдется по крайней мере одна такая пара точек P из $\mathfrak{E}_1$ и Q из $\mathfrak{E}_2$, что $PQ = d$. Из доказательства этой теоремы непосредственно следует, что она справедлива и в том случае, когда только одно из данных замкнутых множеств ограничено. В частности, расстояние любой заданной точки открытого множества до границы этого множества положительно.

32. Свойства замкнутых и открытых множеств. Докажем теперь некоторые специальные свойства замкнутых и открытых множеств.

Теорема 1. *Сумма конечного или счетного числа открытых множеств есть открытое множество. Произведение конечного числа открытых множеств есть открытое множество.*

Рассмотрим сумму конечного или счетного числа открытых множеств:

$$\mathfrak{E} = \sum_n O_n.$$

Если $P \in \mathfrak{E}$, то P принадлежит по крайней мере одному из O_n. Пусть $P \in O_k$. Так как O_k — открытое множество, то некоторая ε-окрестность P также принадлежит O_k. Эта же ε-окрестность P принадлежит и сумме $\mathfrak{E}$, откуда и следует, что $\mathfrak{E}$ есть открытое множество. Рассмотрим теперь конечное произведение

$$\mathfrak{E} = \prod_{n=1}^{m} O_n,$$

и пусть P принадлежит $\mathfrak{E}$. Докажем, как и выше, что и некоторая ε-окрестность P принадлежит $\mathfrak{E}$. Раз P принадлежит $\mathfrak{E}$, то P принадлежит всем O_k ($k = 1, 2, \ldots, m$). Так как O_k — открытые множества, то для любого O_k существует некоторая ε_k-окрестность точки P, принадлежащая O_k. Если число ε взять равным наименьшему из ε_k ($k = 1, 2, \ldots, m$), число которых конечно, то ε-окрестность точки P будет принадлежать всем O_k, а следовательно, и $\mathfrak{E}$. Отметим, что нельзя утверждать, что произведение счетного числа открытых множеств есть открытое множество.

Теорема 2. *Множество CF — открытое и множество CO — замкнутое.*

Докажем первое утверждение. Пусть P принадлежит CF. Надо доказать, что некоторая ε-окрестность P принадлежит CF. Это следует из того, что, если бы в любой ε-окрестности P находились точки F, точка P, не принадлежащая по условию F, была бы предельной для F точкой и, в силу замкнутости F, должна была бы принадлежать F, что приводит к противоречию.

Теорема 3. *Произведение конечного или счетного числа замкнутых множеств есть замкнутое множество. Сумма конечного числа замкнутых множеств есть замкнутое множество.*

Докажем, например, что множество

$$\mathfrak{E} = \prod_n F_n$$

замкнуто. Переходя к дополнительным множествам, можем написать **[30]**

$$C\mathfrak{E} = \sum_n CF_n.$$

По теореме 2 CF_n — открытые множества, и, согласно теореме 1, множество $C\mathfrak{E}$ — тоже открытое, и тем самым дополнительное множество $\mathfrak{E}$ замкнуто. Отметим, что *сумма счетного числа замкнутых множеств может оказаться и незамкнутым множеством.*

Теорема 4. *Множество $O - F$ есть открытое множество и множество $F - O$ — замкнутое.*

Легко проверить следующие равенства:

$$O - F = O \cdot CF; \quad F - O = F \cdot CO.$$

Из них, в силу предыдущих теорем, следует теорема 4.

Мы будем говорить, что множество $\mathfrak{E}$ покрыто системой M некоторых множеств, если всякая точка $\mathfrak{E}$ входит по крайней мере в одно из множеств системы M.

Теорема 5 (*Бореля*). *Если замкнутое ограниченное множество F покрыто бесконечной системой α открытых множеств O, то из этой бесконечной системы можно извлечь конечное число открытых множеств, которые также покрывают F.*

Доказываем эту теорему от обратного. Положим, что никакое конечное число открытых множеств из системы α не покрывает F, и приведем это к противоречию. Раз F — ограниченное множество, то все точки F принадлежат некоторому конечному двумерному промежутку $\Delta_0 (a \leqslant x \leqslant b;\ c \leqslant y \leqslant d)$. Разобьем этот замкнутый промежуток Δ_0 на четыре равные части, деля промежутки $[a, b]$ и $[c, d]$ пополам. Каждый из полученных четырех промежутков будем брать замкнутым. Те точки F, которые попадут на один из этих четырех замкнутых промежутков, будут, в силу теоремы 2, представлять собой замкнутое множество, и по крайней мере одно из этих замкнутых множеств не может быть покрыто конечным числом открытых множеств из системы α. Берем тот из указанных выше четырех замкнутых промежутков, где это обстоятельство имеет место. Этот промежуток опять делим на четыре равные части и рассуждаем так же, как и выше. Таким образом, получим систему вложенных промежутков Δ_0, Δ_1, Δ_2, ..., из которых каждый следующий представляет собой четвертую часть предыдущего, и имеет место следующее обстоятельство: множество точек F, принадлежащих Δ_k, при любом k не может быть покрыто конечным числом открытых множеств из системы α. При беспредельном возрастании k промежутки Δ_k будут беспредельно сжиматься к некоторой точке P, которая принадлежит всем промежуткам Δ_k. Поскольку Δ_k при любом k содержат бесчисленное множество точек F, точка P является предельной точкой для F, а потому и принадлежит F, ибо F — замкнутое множество. Тем самым точка P покрывается некоторым открытым множеством O', принадлежащим к системе α. Некоторая ε-окрестность точки P будет также принадлежать открытому множеству O'. При достаточно больших значениях k промежутки Δ_k попадут внутрь указанной выше ε-окрестности точки P. Тем самым эти Δ_k будут целиком покрыты только одним открытым множеством O' системы α, а это противоречит тому, что точки F, принадлежащие Δ_k, при любом k не могут быть покрыты конечным числом открытых множеств, принадлежащих α. Тем самым теорема доказана.

Теорема 6. *Открытое множество может быть представлено как сумма счетного числа полуоткрытых промежутков попарно без общих точек.*

Напомним, что полуоткрытым промежутком на плоскости мы называем конечный промежуток, определяемый неравенствами вида $a > x \geqslant b;\ c > y \geqslant d$.

Нанесем на плоскости сетку квадратов со сторонами, параллельными осям, и с длиной стороны, равной единице. Множество этих квадратов есть счетное множество. Выберем из этих квадратов те квадраты, все точки которых принадлежат заданному открытому множеству O. Число таких квадратов может быть конечным или счетным, а может быть таких квадратов вовсе не будет. Каждый из оставшихся квадратов сетки разделим на четыре одинаковых квадрата и из вновь полученных квадратов выберем опять те, все точки которых принадлежат O. Каждый из оставшихся квадратов опять делим на четыре равные части и отбираем те квадраты, все точки которых принадлежат O, и т. д. Покажем, что всякая точка P множества O попадет в один из выбранных квадратов, все точки которого принадлежат O. Действительно, пусть d — положительное расстояние от P до границы O. Когда мы дойдем до квадратов, диагональ которых меньше d, то можно, очевидно, утверждать, что точка P уже попала в квадрат, все точки которого принадлежат O. Если выбранные квадраты считать полуоткрытыми, то они не будут попарно иметь общих точек, и теорема доказана. Число отобранных квадратов будет обязательно счетным, так как конечная сумма полуоткрытых промежутков не есть, очевидно, открытое множество. Обозначая через Δ_n те полуоткрытые квадраты, которые мы получили в результате указанного выше построения, можем написать

$$O = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta_n. \tag{21}$$

В случае одного измерения, т. е. прямой линии, легко доказать следующее утверждение: всякое открытое множество на прямой есть сумма конечного или счетного числа открытых промежутков попарно без общих точек.

Все сказанное в двух последних параграфах применимо и для точечных множеств на прямой, в трехмерном пространстве и вообще в n-мерном пространстве. Разница будет только в определении ε-окрестности и промежутка. В трехмерном пространстве ε-окрестность точки P есть сфера с центром P и радиусом ε, и промежуток есть прямоугольный параллелепипед, ребра которого параллельны осям. Полуоткрытый промежуток определяется неравенствами: $a_1 < x \leqslant b_1$; $a_2 < y \leqslant b_2$; $a_3 < z \leqslant b_3$. В случае прямой ε-окрестность точки x_0 определяется неравенством $x_0 - \varepsilon \leqslant x \leqslant x_0 + \varepsilon$.

33. Элементарная фигура. В дальнейшем основную роль для нас будут играть конечные полуоткрытые промежутки и для краткости речи мы их будем называть просто промежутками. Пусть задана неотрицательная, аддитивная и нормальная функция промежутков $G(\Delta)$. Наша задача распространить ее на некоторый широкий класс точечных множеств при сохранении всех ее указанных выше свойств. Назовем элементарной фигурой сумму конечного числа промежутков Δ_k ($k=1, 2, \ldots, m$) попарно без общих точек. Обозначая через R такую элементарную фигуру, можем написать

$$R=\sum_{k=1}^{m}\Delta_k. \tag{22}$$

Эту же элементарную фигуру мы можем конечно разбить и каким-либо иным образом на промежутки, не имеющие попарно общих точек,

$$R=\sum_{k=1}^{m'}\Delta'_k. \tag{23}$$

Нетрудно видеть, что для любых двух таких разбиений мы будем иметь

$$\sum_{k=1}^{m}G(\Delta_k)=\sum_{k=1}^{m'}G(\Delta'_k). \tag{24}$$

Для того чтобы убедиться в этом, достаточно произвести новое разбиение R, которое является произведением разбиений (22) и (23), и принять во внимание аддитивность $G(\Delta)$. При этом окажется, что как левая, так и правая части формулы (24) представляют собой сумму значений $G(\Delta)$ для промежутков указанного только что нового разбиения R. Для получения левой части формулы (24) достаточно сгруппировать слагаемые этой последней суммы, соответствующие тем частичным промежуткам, которые принадлежат одному и тому же Δ_k, а для получения правой части (24) эту группировку надо сделать для слагаемых, соответствующих частичным промежуткам, принадлежащим одному и тому же Δ'_k. Таким образом, если элементарная фигура R разбита каким-либо способом на частичные промежутки, не имеющие попарно общих точек, то сумма значений функции $G(\Delta)$ для полученных частичных промежутков имеет вполне определенное значение, т. е. не зависит от способа разбиения R. Эту сумму мы и принимаем за значение функции $G(R)$ для элементарной фигуры R, т. е.

$$G(R)=\sum_{k=1}^{m}G(\Delta_k) \tag{25}$$

при любом разбиении R на конечное число промежутков попарно без общих точек. Таким образом, мы совершенно просто распространили функцию $G(\Delta)$ на элементарные фигуры. Мы могли бы, пользуясь формулой (21), совершенно аналогичным образом распространить $G(\Delta)$ и на все открытые множества. Но мы пойдем несколько иным путем. При этом все же открытые множества будут играть в нашем изложении основную роль. В настоящем параграфе рассмотрим еще некоторые простые свойства промежутков и элементарных фигур.

Отметим, что если $R_1 \subset R_2$, то $G(R_1) \leqslant G(R_2)$. Это следует непосредственно из неотрицательности $G(\Delta)$, если использовать такое разбиение R_2 на промежутки, при котором частичные промежутки, имеющие общие точки с R_1, целиком входят в R_1. Пусть δ_k $(k = 1, \ldots, p)$ — промежутки, которые могут иметь и общие точки. Проводя прямые, на которых лежат стороны δ_k, мы разобьем сумму промежутков δ_k на частичные промежутки, причем эти частичные промежутки обладают следующим свойством: если два из них имеют общую точку, то они целиком совпадают. Считая налегающие друг на друга промежутки за один промежуток, получим некоторую элементарную фигуру R_0, которая представляет, очевидно, сумму промежутков $R_0 = \sum_{k=1}^{p} \delta_k$, причем мы имеем

$$G(R_0) \leqslant \sum_{k=1}^{p} G(\delta_k), \tag{26}$$

и знак $<$ имеет место, если хотя бы для одного из налегающих промежутков значение функции $G(\Delta)$ положительно.

Введем теперь новое понятие, которое будет использовано в дальнейших построениях. Пусть $\Delta\,(a < x \leqslant b,\ c < y \leqslant d)$ — некоторый промежуток и α — положительное число. Назовем α-сжатием промежутка Δ промежуток, определяемый неравенствами $a + \alpha < x \leqslant b$, $c + \alpha < y \leqslant d$, и обозначим этот промежуток символом ${}^{(\alpha)}\Delta$. Назовем α-расширением промежутка Δ промежуток, определяемый неравенствами $a < x \leqslant b + \alpha$, $c < y \leqslant d + \alpha$, и обозначим его символом $\Delta^{(\alpha)}$. Разности $\Delta - {}^{(\alpha)}\Delta = {}^{\alpha}R$ и $\Delta^{(\alpha)} - \Delta = R^{(\alpha)}$ суть элементарные фигуры. В силу неотрицательности $G(\Delta)$ имеем

$$G({}^{(\alpha)}R) = G(\Delta) - G({}^{(\alpha)}\Delta) \geqslant 0 \quad \text{и} \quad G(R^{(\alpha)}) = G(\Delta^{(\alpha)}) - G(\Delta) \geqslant 0,$$

а из нормальности функции $G(\Delta)$ непосредственно следует.

$$\lim_{\alpha \to +0} G({}^{(\alpha)}\Delta) = \lim_{\alpha \to +0} G(\Delta^{(\alpha)}) = G(\Delta). \tag{26$_1$}$$

Докажем теперь лемму, которая будет нам нужна в дальнейшем.

Лемма. *Если элементарная фигура R покрыта конечным или счетным числом промежутков δ'_k (которые могут иметь и общие точки), то*

$$\sum_k G(\delta'_k) \geqslant G(R)^*). \tag{27}$$

Утверждение этой леммы наглядно очевидно. Мы приведем его строгое доказательство, пользуясь теоремой 4. Пусть ε — заданное положительное число. Разбиваем R на конечное число промежутков Δ_k ($k = 1, 2, \ldots, m$) попарно без общих точек и подвергаем каждый из частичных промежутков Δ_k α-сжатию, причем положительное число α фиксируем настолько малым, чтобы сумма значений $G(\Delta)$ для сжатых промежутков оказалась $\geqslant G(R) - \varepsilon$. Обозначая через R_α элементарную фигуру, равную сумме сжатых промежутков, можем написать

$$G(R_\alpha) \geqslant G(R) - \varepsilon. \tag{28}$$

Каждый из промежутков δ'_k, входящих в покрытие R, подвергаем α_k-расширению, причем положительные числа α_k выбираем настолько малыми, чтобы иметь

$$G(\delta'^{(\alpha_k)}_k) \leqslant G(\delta'_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}. \tag{29}$$

Сжатые промежутки, сумма которых давала R_α, делаем замкнутыми промежутками, т. е. замыкаем каждый из этих промежутков. Сумма полученных замкнутых промежутков (их конечное число) есть некоторое замкнутое множество F, причем очевидно $F \subset R$. Если исключить из $\delta'^{(\alpha_k)}_k$ границу, т. е. две стороны и одну вершину, то останется открытый промежуток $\delta'^{(\alpha_k)}_k$. Принимая во внимание расширение промежутков δ'_k, можем утверждать, что открытые промежутки $\delta'^{(\alpha_k)}_k$ покрывают упомянутые выше замкнутые промежутки, т. е. покрывают ограниченное замкнутое множество F. Пусть, например, число промежутков δ'_k бесконечно. В силу теоремы 4 достаточно взять конечное число промежутков $\delta'^{(\alpha_k)}_k$ ($k = 1, 2, \ldots, q$) для того, чтобы покрыть F, а тем самым покрыть и R_α.

Сумма промежутков $\delta'^{(\alpha_k)}_k$ ($k = 1, 2, \ldots, q$) есть некоторая элементарная фигура R', причем $R_\alpha \subset R'$, и, следовательно, $G(R_\alpha) \leqslant G(R')$. В силу (26) и (29) имеем также

$$G(R') = \sum_{k=1}^{q} G(\delta'^{(\alpha_k)}_k) \leqslant \sum_{k=1}^{q} G(\delta'_k) + \varepsilon \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{2^k},$$

откуда непосредственно следует

$$G(R_\alpha) \leqslant G(R') \leqslant \sum_{k=1}^{q} G(\delta'_k) + \varepsilon,$$

*) $\sum_k$ обозначает $\sum_{k=1}^{m}$, где $m = \infty$ или конечно $u \geqslant 1$.

а потому и подавно

$$G(R_\alpha) \leqslant \sum G(\delta'_k) + \varepsilon.$$

Сравнивая с (28), получим

$$G(R) - \varepsilon \leqslant \sum G(\delta'_k) + \varepsilon, \quad \text{т. е.} \quad \sum G(\delta'_k) \geqslant G(R) - 2\varepsilon.$$

Сумма, стоящая слева, не зависит от ε, и, ввиду произвольности ε, мы и получаем неравенство (27). Отметим, что слагаемые суммы, стоящей в левой части (27), неотрицательны и конечны, а сама сумма может равняться и $(+\infty)$.

В дальнейшем нам часто придется иметь дело с суммами бесконечного числа неотрицательных слагаемых. Если хотя бы одно из слагаемых такой суммы равно $(+\infty)$, то и всю сумму надо считать равной $(+\infty)$. Но, как мы только что указали, может случиться и так, что все слагаемые конечны, а сумма равна $(+\infty)$, т. е. ряд расходится.

34. Внешняя мера и ее свойства. Пользуясь функцией $G(\Delta)$ мы поставим сейчас любому точечному множеству $\mathcal{E}$ плоскости некоторое неотрицательное число, которое назовем внешней мерой этого множества.

Определение. *Пусть промежутки* Δ_n $(n = 1, 2, \ldots)$, *число которых конечно или счетно, совершают покрытие множества* $\mathcal{E}$. *Внешней мерой* $\mathcal{E}$ *назовем точную нижнюю грань значений сумм:*

$$\sum_n G(\Delta_n) \tag{30}$$

при всевозможных покрытиях множества $\mathcal{E}$ *промежутками. Будем обозначать внешнюю меру символом* $|\mathcal{E}|_G$, *причем значок внизу указывает на ту функцию* $G(\Delta)$, *которая послужила основой при определении внешней меры.* Таким образом, для любого покрытия можем написать

$$\sum_n G(\Delta_n) \geqslant |\mathcal{E}|_G \quad \text{и} \quad |\mathcal{E}|_G = \inf \sum_n G(\Delta_n). \tag{31}$$

Если для любого покрытия суммы (30) равны $(+\infty)$, то и внешнюю меру надо считать равной $(+\infty)$. У ограниченного множества внешняя мера всегда конечная, ибо такое множество может быть покрыто одним промежутком Δ_0, и по условию $G(\Delta_0)$ конечно. Отметим, что неограниченное множество $\mathcal{E}$ нельзя покрыть конечным числом

промежутков, ибо каждый промежуток мы согласились брать конечным. Но все же внешняя мера неограниченного множества может оказаться и конечным числом. Докажем теперь ряд теорем относительно внешней меры.

Теорема 1. *Если* $\mathfrak{E}' \subset \mathfrak{E}''$, *то* $|\mathfrak{E}'|_G \leqslant |\mathfrak{E}''|_G$.

Всякое покрытие $\mathfrak{E}''$ есть тем самым и покрытие $\mathfrak{E}'$, а потому нижняя грань сумм (30) для $\mathfrak{E}'$ может оказаться меньше чем для $\mathfrak{E}''$, но во всяком случае не может быть больше, чем для $\mathfrak{E}''$, что и требовалось доказать.

Теорема 2. *Для всякой элементарной фигуры* R *внешняя мера равна* $G(R)$, *т. е.* $|R|_Q = G(R)$.

Если R разбить каким-нибудь образом на частичные промежутки Δ_k, то эти последние покрывают R и тем самым, в силу (25) и определения внешней меры, как нижней границы сумм (30), при всевозможных покрытиях R, мы имеем $|R|_G \leqslant G(R)$. Докажем теперь противоположное неравенство. Если промежутки Δ_n' совершают покрытие R, то, в силу леммы предыдущего параграфа, мы имеем $\sum_n G(\Delta_n') \geqslant G(R)$, откуда и следует непосредственно, что $|R|_G \geqslant G(R)$.

Доказанные два неравенства и приводят нас к равенству $|R|_G = G(R)$.

Теорема 3. *Для конечного или счетного числа слагаемых внешняя мера суммы множеств* $\leqslant$ *суммы внешних мер слагаемых множеств, т. е.*

$$\left|\sum_n \mathfrak{E}_n\right|_G \leqslant \sum_n |\mathfrak{E}_n|_G. \tag{32}$$

В дальнейшем мы будем часто обозначать покрытие некоторого множества одной буквой S. При этом сумму (30) для такого покрытия будем обозначать символом $\sigma(S)$. Пусть задано положительное ε. В силу определения точной нижней границы существует такое покрытие S_n множества $\mathfrak{E}_n$, что $\sigma(S_n) \leqslant |\mathfrak{E}_n|_G + \frac{\varepsilon}{2^n}$. Берем промежутки, входящие во все S_n $(n = 1, 2, \ldots)$. Они совершают некоторое покрытие S для $\sum_n \mathfrak{E}_n$, и для этого покрытия имеем очевидно

$$\sigma(S) = \sum_n \sigma(S_n) \leqslant \sum_n |\mathfrak{E}_n|_G + \varepsilon \sum_n \frac{1}{2^n} \leqslant \sum_n |\mathfrak{E}_n|_G + \varepsilon.$$

В силу определения точной нижней границы

$$\left|\sum_n \mathfrak{E}_n\right|_G \leqslant \sum_n |\mathfrak{E}_n|_G + \varepsilon,$$

и, ввиду произвольности ε, мы и получаем неравенство (32). Отметим, что сумма, стоящая в правой части (32), или даже отдельные

слагаемые этой суммы могут быть равны $(+\infty)$. Ввиду неотрицательности слагаемых порядок слагаемых не играет роли. Определив внешнюю меру, мы распространили функцию $G(\Delta)$ на всевозможные точечные множества плоскости, но при этом потеряли, вообще говоря, свойство аддитивности этой функции. Действительно, можно показать, что если множества $\mathcal{E}_n$ — попарно без общих точек, то все же в формуле (32) мы можем в некоторых случаях иметь знак $<$. В дальнейшем выделим некоторый класс множеств, для которых внешняя мера сохранит свойство аддитивности. Предварительно докажем еще одну теорему, касающуюся внешней меры.

Теорема 4. *Всякое множество $\mathcal{E}$ можно покрыть таким открытым множеством O, внешняя мера которого сколь угодно мало отличается от внешней меры $\mathcal{E}$, т. е. если $\mathcal{E}$ — любое множество и ε — любое заданное положительное число, то существует такое открытое множество O, что $\mathcal{E} \subset O$ и $|O|_G \leqslant |\mathcal{E}|_G + \varepsilon$.*

Если $|\mathcal{E}|_G = +\infty$, то неравенство $|O|_G \leqslant |\mathcal{E}|_G + \varepsilon$ выполняется при любом покрытии множества $\mathcal{E}$ открытым множеством. Будем в дальнейшем считать, что $|\mathcal{E}|_G$ конечно. Пусть ε — заданное положительное число. Выбираем покрытие $\mathcal{E}$ промежутками Δ_n так, чтобы имело место неравенство

$$\sum_n G(\Delta_n) \leqslant |\mathcal{E}|_G + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{33}$$

Каждый из промежутков Δ_n подвергаем α_n-расширению, и положительные числа α_n выбираем так, чтобы

$$G(\Delta_n^{(\alpha_n)}) \leqslant G(\Delta_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}. \tag{34}$$

Если исключим из $\Delta_n^{(\alpha_n)}$ границу, т. е. две стороны и одну вершину, то сумма полученных открытых промежутков $\Delta_n^{(\alpha_n)}$ даст некоторое открытое множество O, которое, очевидно, покрывается промежутками $\Delta_n^{(\alpha_n)}$. В силу определения точной нижней границы имеем

$$|O|_G \leqslant \sum_n G(\Delta_n^{(\alpha_n)}).$$

Пользуясь (34), можем далее написать

$$|O|_G \leqslant \sum_n G(\Delta_n) + \frac{\varepsilon}{2},$$

и, наконец, принимая во внимание (33), получаем окончательно

$$|O|_G \leqslant |\mathcal{E}|_G + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = |\mathcal{E}|_G + \varepsilon.$$

35. Измеримые множества. Мы выделим сейчас класс множеств, которые назовем измеримыми множествами и для которых в дальнейшем докажем аддитивность внешней меры. Для этих измеримых множеств внешнюю меру назовем просто мерой.

Определение. *Множество $\mathfrak{E}$ называется измеримым, если его можно покрыть открытым множеством O так, что внешняя мера разности $O-\mathfrak{E}$ сколь угодно мала, т. е. множество $\mathfrak{E}$ называется измеримым, если для любого заданного положительного ε существует такое открытое множество O, что $\mathfrak{E}\subset O$ и $|O-\mathfrak{E}|_G\leqslant\varepsilon$. Внешнюю меру измеримого множества будем называть просто мерой этого множества.*

То требование, которое входит в определение измеримого множества, сильнее, чем то свойство, которое формулировано в теореме 4. Это последнее свойство справедливо для всех множеств, а существуют, при некотором выборе функции $G(\Delta)$, такие множества, которые неизмеримы, т. е. которые не подчиняются данному выше определению. Для обозначения меры измеримого множества мы можем пользоваться символом $|\mathfrak{E}|_G$, так как для измеримого множества мера по определению совпадает с внешней мерой. Мы покажем сейчас, что любой промежуток Δ измерим. Его внешняя мера, в силу теоремы 1, равна $G(\Delta)$. В дальнейшем увидим, что и всякая элементарная фигура измерима. Мы имеем поэтому право меру любого измеримого множества $\mathfrak{E}$ обозначать просто символом $G(\mathfrak{E})$. Согласимся еще внешнюю меру и просто меру пустого множества считать равной нулю. Это находится в согласии с данными выше определениями. Введем еще одно определение: множество $\mathfrak{E}$ называется множеством меры нуль по отношению к $G(\Delta)$ или просто множеством меры нуль (поскольку $G(\Delta)$ считается фиксированным), если $|\mathfrak{E}|_G=0$. Из этого определения непосредственно следует, что всякая часть множества меры нуль есть также множество меры нуль. Докажем теперь ряд свойств измеримых множеств. Эти свойства будут служить основой во всем дальнейшем изложении.

Теорема 5. *Открытое множество измеримо.*

Если $\mathfrak{E}$ — открытое множество, то для проверки его измеримости достаточно взять O, совпадающим с $\mathfrak{E}$. При этом $|O-\mathfrak{E}|_G=0$.

Теорема 6. *Любой промежуток Δ есть измеримое множество, и его мера равна $G(\Delta)$.*

Пусть Δ — некоторый промежуток. Подвергая его α-расширению, получим промежуток $\Delta^{(\alpha)}$. Разность $\Delta^{(\alpha)}-\Delta$ есть элементарная фигура, и, в силу нормальности функции $G(\Delta)$, мы имеем $G(\Delta^{(\alpha)}-\Delta)=$ $=G(\Delta^{(\alpha)})-G(\Delta)\to 0$ при $\alpha\to+0$, т. е. для любого заданного положительного ε существует такое α, что $G(\Delta^{(\alpha)}-\Delta)\leqslant\varepsilon$. Пусть O — открытый промежуток $\Delta^{(\alpha)}$, т. е. промежуток, который получается из $\Delta^{(\alpha)}$ путем удаления границы $\Delta^{(\alpha)}$. В силу процесса расширения $\Delta\subset O$. Для доказательства измеримости Δ остается показать, что $|O-\Delta|_G\leqslant\varepsilon$.

Мы имеем $O \subset \Delta^{(\alpha)}$ и, в силу теоремы 1, имеем $|O - \Delta|_G \leqslant |\Delta^{(\alpha)} - \Delta|_G$. Но $\Delta^{(\alpha)} - \Delta$ есть элементарная фигура, и, в силу теоремы 2, имеем $|\Delta^{(\alpha)} - \Delta|_G = G(\Delta^{\alpha} - \Delta) \leqslant \varepsilon$, т. е. $|O - \Delta|_G \leqslant \mathfrak{E}$, что и требовалось доказать. Мера Δ, равная внешней мере Δ, совпадает с $G(\Delta)$, ибо Δ — частный случай элементарной фигуры.

Теорема 7. *Понятие множества меры нуль, т. е. множества с внешней мерой, равной нулю, совпадает с понятием измеримого множества, мера которого равна нулю.*

Если $|\mathfrak{E}|_G = 0$, то, согласно теореме 4, существует такое открытое множество O, что для любого заданного положительного ε: $\mathfrak{E} \subset O$ и $|O|_G \leqslant \varepsilon$, а потому, в силу теоремы 1, тем более $|O - \mathfrak{E}|_G \leqslant \varepsilon$, т. е. $\mathfrak{E}$ измеримо. Мера $\mathfrak{E}$ равна ее внешней мере, т. е. равна нулю. Наоборот, если $\mathfrak{E}$ — измеримое множество и его мера равна нулю, то, в силу определения меры, и внешняя мера $\mathfrak{E}$ равна нулю, и тем самым теорема доказана.

Теорема 8. *Сумма конечного или счетного числа измеримых множеств есть измеримое множество.*

Пусть $\mathfrak{E}_n$ — измеримые множества, $\mathfrak{E}$ — их сумма, $\mathfrak{E} = \sum_n \mathfrak{E}_n$, и ε — заданное положительное число. Согласно определению измеримого множества существуют такие открытые множества O_n, что $\mathfrak{E}_n \subset O_n$ и $|O_n - \mathfrak{E}_n| < \frac{\varepsilon}{2^n}$. Сумма открытых множеств O_n есть некоторое открытое множество O, причем очевидно $\mathfrak{E} \subset O$ и, в силу (6) из [**30**], имеем

$$O - \mathfrak{E} \subset \sum_n (O_n - \mathfrak{E}_n).$$

Пользуясь теоремами 1 и 3, получаем

$$|O - \mathfrak{E}|_G \leqslant |\sum_n (O_n - \mathfrak{E}_n)|_G \leqslant \sum_n |O_n - \mathfrak{E}_n|_G$$

или, в силу $|O_n - \mathfrak{E}_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2^n}$:

$$|O - \mathfrak{E}|_G < \varepsilon,$$

что и доказывает измеримость $\mathfrak{E}$. Мы переходим сейчас к доказательству измеримости замкнутых множеств. Предварительно докажем одну лемму.

Лемма. *Если расстояние между двумя множествами $\mathfrak{E}_1$ и $\mathfrak{E}_2$ выражается положительным числом, то* $|\mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2|_G = |\mathfrak{E}_1|_G + |\mathfrak{E}_2|_G$.

Пусть d — положительное расстояние между множеством $\mathfrak{E}_1$ и $\mathfrak{E}_2$. Для любого заданного положительного ε существует такое покрытие S множества $\mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2$, что

$$\sigma(S) \leqslant |\mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2|_G + \varepsilon, \qquad (35)$$

Каждый из промежутков, входящий в S, разбиваем на конечное число промежутков так, чтобы диагонали всех полученных промежутков оказались $< d$. При этом все промежутки, входящие в S, разобьются на три класса: к первому классу отойдут те промежутки, которые покрывают только точки $\mathfrak{E}_1$, ко второму те, которые покрывают только точки $\mathfrak{E}_2$, и, наконец, к третьему те, которые не покрывают ни точек $\mathfrak{E}_1$, ни точек $\mathfrak{E}_2$. Промежутков, которые бы покрывали и точки $\mathfrak{E}_1$, и точки $\mathfrak{E}_2$, не будет вовсе. Промежутки третьего класса мы можем просто выбросить из разбиения S. При этом сумма $\sigma(S)$ может только уменьшиться, и неравенство (35) сохранит свою силу. Таким образом, можем считать, что покрытие S распадается на покрытия S_1 и S_2, причем промежутки S_1 покрывают $\mathfrak{E}_1$ и не имеют общих точек с $\mathfrak{E}_2$, а промежутки S_2 покрывают $\mathfrak{E}_2$ и не имеют общих точек с $\mathfrak{E}_1$. Мы имеем $\sigma(S) = \sigma(S_1) + \sigma(S_2)$ и, в силу (35),

$$\sigma(S_1) + \sigma(S_2) \leqslant |\mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2|_G + \varepsilon. \tag{36}$$

Из определения точной нижней границы вытекает $|\mathfrak{E}_1|_G \leqslant \sigma(S_1)$ и $|\mathfrak{E}_2|_G \leqslant \sigma(S_2)$, и неравенство (36) приводит к неравенству $|\mathfrak{E}_1|_G + |\mathfrak{E}_2|_G \leqslant |\mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2|_G + \varepsilon$, откуда, ввиду произвольности ε, следует $|\mathfrak{E}_1|_G + |\mathfrak{E}_2|_G \leqslant |\mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2|_G$. С другой стороны, теорема 3 дает $|\mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2|_G \leqslant |\mathfrak{E}_1|_G + |\mathfrak{E}_2|_G$. Таким образом, получаем $|\mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2|_G = |\mathfrak{E}_1|_G + |\mathfrak{E}_2|_G$, что и доказывает лемму.

Следствие. *Если F_1 и F_2 — два замкнутых множества без общих точек, из которых по крайней мере одно ограничено, то $|F_1 + F_2|_G = |F_1|_G + |F_2|_G$. Если F_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ — замкнутые ограниченные множества попарно без общих точек, то* $\left|\sum_{k=1}^{m} F_k\right|_G = \sum_{k=1}^{m} |F_k|_G$. Для доказательства этого следствия достаточно воспользоваться тем, что было сказано в [**32**] относительно расстояния между замкнутыми множествами без общих точек.

Теорема 9. *Замкнутые множества измеримы.*

Предположим сначала, что F — некоторое ограниченное замкнутое множество, и пусть ε — заданное положительное число. Согласно теореме 4 существует такое открытое множество O, что $F \subset O$ и $|O|_G \leqslant |F|_G + \varepsilon$. Докажем, что это открытое множество O и будет удовлетворять неравенству

$$|O - F|_G \leqslant \varepsilon, \tag{37}$$

которое входит в определение измеримого множества. В силу теоремы 3 из [**33**] разность $O - F$ есть открытое множество, и, следовательно, на основании теоремы 5, ее можно представить в виде суммы счетного числа промежутков Δ_n, не имеющих попарно общих точек,

$$O - F = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta_n. \tag{38}$$

Фиксируя целое положительное m, рассмотрим сумму первых m слагаемых суммы (38), причем над каждым промежутком, входящим в эту сумму, произведем α-сокращение, выбрав положительное число α каким-нибудь образом. Таким образом, получим некоторую элементарную фигуру R:

$$R = \sum_{n=1}^{m} {}^{(\alpha)}\Delta_n.$$

Если мы замкнем каждый промежуток ${}^{(\alpha)}\Delta_n$ $(n = 1, 2, \ldots, m)$, то написанная сумма даст нам замкнутое множество, которое совпадает очевидно с замыканием $\bar{R}$ элементарной фигуры R. Каждый замкнутый промежуток $\overline{{}^{(\alpha)}\Delta_n}$ покрывается соответствующим промежутком Δ_n, входящим в состав суммы (38). Тем самым замкнутое множество $\bar{R}$ не имеет общих точек с F, а потому расстояние между ними положительно. Тем более будет положительным расстояние между R и F, и согласно лемме будем иметь

$$\left| \sum_{n=1}^{m} {}^{(\alpha)}\Delta_n + F \right|_G = \left| \sum_{n=1}^{m} {}^{(\alpha)}\Delta_n \right|_G + |F|_G.$$

Но, согласно (38), $\sum_{n=1}^{m} {}^{(\alpha)}\Delta_n + F \subset O$ и, следовательно,

$$\left| \sum_{n=1}^{m} {}^{(\alpha)}\Delta_n \right|_G + |F|_G \leqslant |O|_G.$$

Принимая во внимание неравенство $|O|_G \leqslant |F|_G + \varepsilon$, получим отсюда

$$\left| \sum_{n=1}^{m} {}^{(\alpha)}\Delta_n \right|_G + |F|_G \leqslant |F|_G + \varepsilon.$$

По условию, F — ограниченное множество, и, следовательно, $|F|_G$ есть конечное число. Последнее неравенство приводит нас к неравенству

$$\left| \sum_{n=1}^{m} {}^{(\alpha)}\Delta_n \right|_G \leqslant \varepsilon.$$

Но

$$\left| \sum_{n=1}^{m} {}^{(\alpha)}\Delta_n \right|_G = G(R) = \sum_{n=1}^{m} G({}^{(\alpha)}\Delta_n) = \sum_{n=1}^{m} |{}^{(\alpha)}\Delta_n|_G,$$

и предыдущее неравенство переписывается в виде

$$\sum_{n=1}^{m} |(\alpha)\,\Delta_n|_G \leqslant \varepsilon.$$

Устремляя сначала α к нулю, а затем m к бесконечности, получим неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta_n|_G \leqslant \varepsilon.$$

Наконец из формулы (38) и теоремы 3 следует

$$|O - F|_G \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\Delta_n|_G \leqslant \varepsilon,$$

т. е. неравенство (37). Положим теперь, что замкнутое множество F неограничено. Пусть γ_n — замкнутый круг с центром в начале и радиусом n. Строя замкнутые ограниченные множества $F_n = F \cdot \gamma_n$, можем написать

$$F = \sum_{n=1}^{\infty} F_n,$$

и измеримость F будет непосредственно следовать из теоремы 8. Таким образом теорема 9 доказана.

Теорема 10. *Если $\mathfrak{E}$ — измеримое множество, то и дополнительное множество $C\mathfrak{E}$ измеримо.*

В силу измеримости $\mathfrak{E}$ существуют такие открытые множества O_n, что $\mathfrak{E} \subset O_n$ и $|O_n - \mathfrak{E}|_G < \frac{1}{n}$. Построим замкнутые множества $F_n = CO_n$. В силу $\mathfrak{E} \subset O_n$ имеем $F_n \subset C\mathfrak{E}$ и, кроме того, в силу (1.9) из [**30**], можем написать равенство: $C\mathfrak{E} - F_n = O_n - \mathfrak{E}$. Заменяя в левой части F_n суммой всех F_n, получим

$$C\mathfrak{E} - \sum_{n=1}^{\infty} F_n \subset C\mathfrak{E} - F_n, \quad \text{т. е.} \quad C\mathfrak{E} - \sum_{n=1}^{\infty} F_n \subset O_n - \mathfrak{E},$$

и, в силу $|O_n - \mathfrak{E}|_G < \frac{1}{n}$, будем иметь

$$\left| C\mathfrak{E} - \sum_{n=1}^{\infty} F_n \right|_G < \frac{1}{n}.$$

Левая часть написанного неравенства не зависит от n, и, устремляя n к бесконечности, придем к равенству

$$\left| C\mathfrak{E} - \sum_{n=1}^{\infty} F_n \right|_G = 0,$$

из которого следует, что разность, стоящая слева, представляет собой множество $\mathfrak{E}_0$ меры нуль. Таким образом, можем написать $C\mathfrak{E}$ в виде суммы измеримых множеств:

$$C\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n,$$

откуда и следует, в силу теоремы 8, измеримость $\mathfrak{E}$. Согласно определению мы устанавливаем измеримость множества при помощи открытых множеств. В следующей теореме мы покажем, что аналогичным образом можно устанавливать измеримость множества при помощи замкнутых множеств.

Теорема 11. *Для того чтобы $\mathfrak{E}$ было измеримым, необходимо и достаточно, чтобы для любого заданного положительного ε существовало такое замкнутое множество F, что $F \subset \mathfrak{E}$ и $|\mathfrak{E} - F|_G < \varepsilon$.*

Измеримость $\mathfrak{E}$ равносильна измеримости $C\mathfrak{E}$, и для этого необходимо и достаточно, чтобы для любого заданного положительного ε существовало такое открытое множество O, что $C\mathfrak{E} \subset O$ и $|O - C\mathfrak{E}|_G \leqslant \varepsilon$. Если положить $F = CO$ и принять во внимание, что, в силу (19) из [**31**], $O - C\mathfrak{E} = \mathfrak{E} - CO = \mathfrak{E} - F$ и $F \subset \mathfrak{E}$, то мы и получим утверждение теоремы.

Теорема 12. *Произведение конечного или счетного числа измеримых множеств есть измеримое множество. Разность двух измеримых множеств есть измеримое множество.*

Если множества $\mathfrak{E}_n$ измеримы, то измеримость их произведения вытекает непосредственно из формулы [**31**]

$$\prod_n \mathfrak{E}_n = C \sum_n C\mathfrak{E}_n$$

и теорем 10 и 8. Если A и B измеримы, то измеримость их разности непосредственно следует из формулы [**31**]: $A - B = A \cdot CB$ и доказанной только что измеримости произведения.

Теорема 13. *Мера суммы конечного или счетного числа измеримых множеств попарно без общих точек равна сумме мер слагаемых множеств.*

Пусть $\mathfrak{E}_n$ — измеримые множества попарно без общих точек. Измеримость их суммы следует из теоремы 8. Положим сначала, что каждое из множеств $\mathfrak{E}_n$ ограничено. Согласно теореме 11 для любого

заданного положительного ε существуют такие замкнутые множества F_n, что $F_n \subset \mathfrak{E}_n$ и $|\mathfrak{E}_n - F_n|_G \leqslant \frac{\varepsilon}{2^n}$, причем множества F_n, очевидно, — ограниченные множества, не имеющие попарно общих точек. Из формулы $\mathfrak{E}_n = F_n + (\mathfrak{E}_n - F_n)$ непосредственно следует

$$|\mathfrak{E}_n|_G \leqslant |F_n|_G + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

С другой стороны, рассматривая первые m из множеств F_n, будем иметь

$$\sum_{n=1}^{m} F_n \subset \sum_{n} \mathfrak{E}_n \quad \text{и, следовательно,} \quad \left|\sum_{n=1}^{m} F_n\right|_G \leqslant \left|\sum_{n} \mathfrak{E}_n\right|_G.$$

К конечной сумме замкнутых множеств F_n попарно без общих точек мы можем применить доказанную выше лемму и, таким образом, получим, пользуясь еще неравенством $|F_n|_G \geqslant |\mathfrak{E}_n|_G - \frac{\varepsilon}{2^n}$,

$$\left|\sum_{n} \mathfrak{E}_n\right|_G \geqslant \sum_{n=1}^{m} |F_n|_G \geqslant \sum_{n=1}^{m} |\mathfrak{E}_n|_G - \sum_{n=1}^{m} \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Рассмотрим наиболее сложный случай, когда число множеств $\mathfrak{E}_n$ бесконечно. Увеличивая в последнем неравенстве беспредельно число m, будем иметь

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{E}_n\right|_G \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\mathfrak{E}_n|_G - \varepsilon,$$

или, в силу производности ε,

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{E}_n\right|_G \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\mathfrak{E}_n|_G.$$

Сравнивая это неравенство с неравенством (32), мы и приходим к равенству

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{E}_n\right|_G = \sum_{n=1}^{\infty} |\mathfrak{E}_n|_G, \tag{39}$$

которое и доказывает теорему. Принимая во внимание измеримость $\mathfrak{E}_n$ и их суммы, можем записать последнюю формулу в виде

$$G(\mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2 + \mathfrak{E}_3 + \ldots) = G(\mathfrak{E}_1) + G(\mathfrak{E}_2) + G(\mathfrak{E}_3) + \ldots \tag{40}$$

Рассмотрим теперь тот случай, когда среди множеств $\mathfrak{E}_n$ имеются неограниченные множества. Пусть γ_n — замкнутый круг с центром в начале и радиусом n. Рассмотрим множества

$$\mathfrak{E}_n^{(1)} = \mathfrak{E}_n \gamma_1; \quad \mathfrak{E}_n^{(2)} = \mathfrak{E}_n (\gamma_2 - \gamma_1); \quad \mathfrak{E}_n^{(3)} = \mathfrak{E}_n (\gamma_3 - \gamma_2); \ldots$$

Каждое из них ограничено, и все они измеримы, поскольку замкнутое множество γ_1 и разность замкнутых множеств $\gamma_k - \gamma_{k-1}$ суть измеримые множества, а произведение измеримых множеств тоже измеримо. Мы можем представить каждое из множеств $\mathcal{E}_n$ в виде суммы ограниченных измеримых множеств, не имеющих попарно общих точек:

$$\mathcal{E}_n = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{E}_n^{(k)},$$

и, в силу доказанного выше, будем иметь

$$|\mathcal{E}_n|_G = \sum_{k=1}^{\infty} |\mathcal{E}_n^{(k)}|_G. \tag{41}$$

Сумму $\mathcal{E}$ множеств $\mathcal{E}_n$ можем представить в виде двойной суммы ограниченных множеств $\mathcal{E}_n^{(k)}$, не имеющих попарно общих точек, причем некоторые из множеств $\mathcal{E}_n^{(k)}$ могут быть и пустыми:

$$\mathcal{E} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{E}_n^{(k)}.$$

В силу доказанного выше имеем

$$|\mathcal{E}|_G = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |\mathcal{E}_n^{(k)}|_G.$$

Порядок суммирования ввиду неотрицательности слагаемых несущественен [I; **134**]. Будем суммировать сначала по k, а потом по n. Принимая во внимание (41), придем таким образом опять к формуле (39), и теорема доказана полностью.

Замечание. Если мы откинем предположение о том, что измеримые множества $\mathcal{E}_n$ — попарно без общих точек, то для их суммы, которая измерима в силу теоремы 8, будем иметь вместо (40) неравенство

$$G(\mathcal{E}) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} G(\mathcal{E}_n). \tag{40$_1$}$$

Оно непосредственно следует из теоремы 3 и того, что для измеримых множеств внешняя мера совпадает просто с мерой. Если для всех множеств $\mathcal{E}_n$ мера равна нулю, то (40) дает $G(\mathcal{E}) \leqslant 0$. Но мера не может быть отрицательной, и потому $G(\mathcal{E}) = 0$, т. е. сумма конечного и счетного числа множеств меры нуль есть множество меры нуль.

Все доказанные выше теоремы были справедливы и для измеримых множеств бесконечной меры. В последних теоремах нам придется делать оговорку по этому поводу.

Теорема 14. *Если A и B измеримы, $B \subset A$, и B конечной меры, то*

$$G(A-B)=G(A)-G(B). \tag{42}$$

Разность $A-B=D$ измерима в силу теоремы 12. Мы имеем $A=B+D$, причем B и D — без общих точек. По теореме 13 $G(A)=G(B)+G(D)$, и, вычитая из обеих частей конечное число $G(B)$, получим (42).

Теорема 15. *Если $\mathfrak{E}_n$ $(n=1, 2, \ldots)$ — неубывающая последовательность измеримых множеств, то предельное множество $\mathfrak{E}$ измеримо и*

$$G(\mathfrak{E})=\lim_{n\to\infty} G(\mathfrak{E}_n). \tag{43}$$

Измеримость $\mathfrak{E}$ непосредственно следует из формулы

$$\mathfrak{E}=\lim_{n\to\infty}\mathfrak{E}_n=\mathfrak{E}_1+(\mathfrak{E}_2-\mathfrak{E}_1)+(\mathfrak{E}_3-\mathfrak{E}_2)+\ldots \tag{44}$$

Слагаемые, стоящие справа, — попарно без общих точек, и если все $\mathfrak{E}_n$ имеют конечную меру, то

$$G(\mathfrak{E})=G(\mathfrak{E}_1)+[G(\mathfrak{E}_2)-G(\mathfrak{E}_1)]+[G(\mathfrak{E}_3)-G(\mathfrak{E}_2)].$$

Сумма первых n слагаемых справа равна $G(\mathfrak{E}_n)$, т. е. из последней формулы следует (43). Если некоторое $\mathfrak{E}_n$ имеет бесконечную меру, то предельное множество и подавно имеет бесконечную меру, и формула (43) очевидна. Отметим, что в этой формуле допустимо значение $(+\infty)$ как для $G(\mathfrak{E}_n)$, так и для $G(\mathfrak{E})$.

Теорема 16. *Если $\mathfrak{E}_n$ $(n=1, 2, \ldots)$ — невозрастающая последовательность множеств конечной меры, то предельное множество $\mathfrak{E}$ измеримо, и имеет место формула* (43).

Представим $\mathfrak{E}_1$ в виде суммы множеств попарно без общих точек

$$\mathfrak{E}_1=\mathfrak{E}+(\mathfrak{E}_1-\mathfrak{E}_2)+(\mathfrak{E}_2-\mathfrak{E}_3)+(\mathfrak{E}_3-\mathfrak{E}_4)+\ldots \tag{45}$$

Измеримость $\mathfrak{E}$ вытекает из теоремы 8 и 14. Применяя к (45) теоремы 13 и 14, получим

$$G(\mathfrak{E}_1)=G(\mathfrak{E})+[G(\mathfrak{E}_1)-G(\mathfrak{E}_2)]+[G(\mathfrak{E}_2)-G(\mathfrak{E}_3)]+ \\ +[G(\mathfrak{E}_3)-G(\mathfrak{E}_4)]+\ldots,$$

т. е.

$$G(\mathfrak{E}_1)=G(\mathfrak{E})+G(\mathfrak{E}_1)-\lim_{n\to\infty} G(\mathfrak{E}_n),$$

откуда и следует (43).

Замечание. Измеримость предельного множества $\mathfrak{E}$ вытекает из (45) и без предположения конечности меры у $\mathfrak{E}_n$.

36. Измеримые множества (продолжение). Отметим ряд следствий из доказанных теорем об измеримых множествах. Элементарная фигура R, как сумма конечного числа промежутков, есть измеримое множество, и мера R, совпадающая с внешней мерой R, выражается формулой (25), где Δ_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ — какое-либо разбиение R на промежутке без общих точек. Обозначим через L_G семейство измеримых множеств, причем значок G указывает на ту функцию $G(\Delta)$, которая послужила основой при построении упомянутого семейства. Мы распространили функцию $G(\Delta)$ на все множества $\mathfrak{E}$, принадлежащие L_G, причем полученная функция $G(\mathfrak{E})$ неотрицательная и, в силу теоремы 13, аддитивна не только для конечного, но и для счетного числа слагаемых множеств, не имеющих попарно общих точек. Пусть $\mathfrak{E}_n$ — исчезающая последовательность множеств, принадлежащих L_G и имеющих конечную меру, т. е. $\mathfrak{E}_1 \supset \mathfrak{E}_2 \supset \mathfrak{E}_3 \supset \ldots$, и предельное множество $\mathfrak{E}$ для $\mathfrak{E}_n$ есть пустое множество. Из теоремы 16 непосредственно следует, что $G(\mathfrak{E}_n) \to 0$, т. е. функция $G(\mathfrak{E})$ будет не только неотрицательной и аддитивной, но и нормальной для семейства множеств L_G. Желая подчеркнуть ее аддитивность не только для конечного, но и для счетного числа множеств, входящих в L_G, мы будем называть эту функцию вполне аддитивной. Семейство L_G содержит и неограниченные множества. Некоторые из них могут иметь конечную меру, а для других мера может быть равной $(+\infty)$. Но, конечно, не всякое неограниченное множество обязано быть измеримым множеством. Часто при построении семейства измеримых множеств рассматривают лишь ограниченные множества или даже множества, принадлежащие определенному конечному промежутку. В предыдущем изложении мы не связывали себя таким ограничением. Отметим еще, что исходную функцию $G(\Delta)$ мы считали определенной для всех конечных промежутков. Если $G(\Delta)$ определена лишь для промежутков Δ, принадлежащих некоторому промежутку Δ_0, то ее можно естественно распространить на все промежутки Δ, пользуясь формулой $G(\Delta) = G(\Delta \cdot \Delta_0)$, причем надо помнить, что произведение промежутков есть также промежуток.

Семейство множеств L_G зависит от выбора исходной функции $G(\Delta)$. Но при любом выборе этой функции оно содержит во всяком случае все промежутки, элементарные фигуры, открытые множества и замкнутые множества. В дальнейшем мы дадим более полную характеристику тех множеств, которые входят в L_G при любом выборе $G(\Delta)$. Будем толковать функцию множеств как массу. Задание первоначальной функции $G(\Delta)$ сводится к заданию массы на любом промежутке Δ при выполнении, конечно, обычных условий неотрицательности, аддитивности и нормальности. Точечное множество $\mathfrak{E}$ измеримо, если имеет смысл говорить о массе, находящейся на $\mathfrak{E}$, и $G(\mathfrak{E})$ есть эта масса.

Можно дать простой пример, когда множество L_G содержит все точечные множества плоскости. Пусть имеется масса 1, сосредото-

ченная в точке P. При этом $G(\Delta)=1$, если промежуток Δ содержит P, и $G(\Delta)=0$, если промежуток Δ не содержит P. Нетрудно проверить, что семейство L_G для такой функции $G(\Delta)$ содержит все множества, причем $G(\mathfrak{E})=1$, если $\mathfrak{E}$ содержит P, и $G(\mathfrak{E})=0$, если $\mathfrak{E}$ не содержит P.

Рассмотрим тот важный частный случай, когда $G(\Delta)$ равна площади промежутка Δ. Семейство L_G для этого случая будем просто обозначать символом L. Здесь мы имеем расширение понятия площади для широкого семейства множеств L. Именно этот частный случай и был впервые рассмотрен французским математиком Лебегом. Функцию $G(\mathfrak{E})$ будем в этом случае обозначать символом $m(\mathfrak{E})$. Семейство множеств L называется обычно семейством множеств, измеримых по Лебегу. Для таких множеств имеет смысл говорить об их площади. Если $\mathfrak{E}$ есть конечное или счетное множество точек, то $m(\mathfrak{E})=0$. Точно так же, если $\mathfrak{E}$ есть отрезок прямой или вся прямая, то $m(\mathfrak{E})=0$. Если один и тот же промежуток Δ мы возьмем полуоткрытым, открытым или замкнутым, то во всех случаях $m(\Delta)$ имеет одно и то же значение. Если измеримое множество $\mathfrak{E}$ имеет внутренние точки, то, очевидно, $m(\mathfrak{E})>0$. Можно показать, что существуют такие ограниченные открытые множества, что для границы l такого множества (l — замкнуто, а потому измеримо) мы имеем $m(l)>0$. Для открытого множества $m(O)$ есть сумма площадей тех промежутков, которые входят в формулу (21), причем эта сумма не зависит от способа представления O в виде суммы промежутков. Если F — ограниченное замкнутое множество, то, покрывая его открытым промежутком Δ_0, мы можем определить $m(F)$ как разность значений для двух открытых множеств, а именно, $m(F)=m(\Delta_0)-m(\Delta_0-F)$.

Все построение семейства L_G можно провести совершенно так же, как и выше, в любом конечномерном пространстве. В частном случае семейство L в трехмерном пространстве есть семейство множеств, имеющих определенный «объем», а в случае одного измерения — семейство множеств, имеющих определенную «длину». Вместо этого для пространства с любым конечным числом измерений часто говорят просто о мере множества, если оно входит в L.

37. Критерии измеримости. Можно давать различные определения измеримых множеств, которые будут равносильны данному выше определению. Укажем некоторые из этих определений, причем сначала мы будем рассматривать лишь ограниченные множества.

Теорема 1. *Для того чтобы ограниченное множество $\mathfrak{E}$ входило в семейство L_G, необходимо и достаточно следующее: для любого заданного положительного ε существует такая элементарная фигура R, что*

$$\mathfrak{E}+e_1=R+e_2, \tag{46}$$

причем для множеств e_1 и e_2 имеют место неравенства

$$|e_1|_G\leqslant\varepsilon \quad \text{и} \quad |e_2|_G\leqslant\varepsilon, \tag{47}$$

Доказываем необходимость. Пусть $\mathfrak{E}$ входит в L_G. При этом существует такое открытое множество O, что $\mathfrak{E} \subset O$ и $|O - \mathfrak{E}|_G \leqslant \varepsilon$. Обозначая $O - \mathfrak{E} = e_1$, будем иметь $O = \mathfrak{E} + e_1$, и для e_1 справедливо неравенство (47). С другой стороны, в силу теоремы 6 из [32], O есть предел возрастающей последовательности элементарных фигур R_n, причем R_n есть сумма первых n слагаемых правой части формулы (21). В силу теоремы 15 мы имеем $G(O) = \lim\limits_{n \to \infty} G(R_n)$ и, следовательно, можем взять настолько большое значение $n = m$, что, полагая $R = R_m$, будем иметь $O = R + e_2$, где $|e_2|_G \leqslant \varepsilon$. Сравнивая оба полученных для O выражения, мы и приходим к формуле (46), причем для e_1 и e_2 выполнены неравенства (47). Доказываем достаточность. Пусть для любого заданного ε имеют место формула (46) и неравенства (47). В силу измеримости R существует такое открытое множество O_1, что $R \subset O_1$ и $|O_1 - R|_G \leqslant \varepsilon$. С другой стороны, в силу теоремы 4 [**34**], существует такое открытое множество O_2, что $e_2 \subset O_2$ и $|O_2|_G \leqslant |e_2|_G + \varepsilon$, или, в силу (47), мы будем иметь $|O_2|_G \leqslant 2\varepsilon$. Открытое множество $O = O_1 + O_2$ покрывает $\mathfrak{E} + e_1$, и мы имеем

$$O - \mathfrak{E} \subset [O - (\mathfrak{E} + e_1)] + e_1$$

или, в силу (6) из [30]:

$$O - \mathfrak{E} \subset [(O_1 + O_2) - (R + e_2)] + e_1 \subset (O_1 - R) + (O_2 - e_2) + e_1.$$

Принимая во внимание, что $|O_1 - R|_G \leqslant \varepsilon$, $|O_2 - e_2|_G \leqslant |O_2|_G \leqslant 2\varepsilon$ и (47), получаем отсюда $|O - \mathfrak{E}|_G \leqslant 4\varepsilon$, что дает, в силу произвольности ε, измеримость $\mathfrak{E}$.

Теорема 2. *Для того чтобы ограниченное множество $\mathfrak{E}$ принадлежало L_G, необходимо и достаточно следующее: для любого заданного положительного ε существует такая элементарная фигура R, что*

$$|\mathfrak{E} - R|_G \leqslant \varepsilon \quad \text{и} \quad |R - \mathfrak{E}|_G \leqslant \varepsilon \tag{48}$$

Доказываем необходимость. Пусть $\mathfrak{E}$ принадлежит L_G. Существует такая элементарная фигура R, что мы имеем (46) и (47). Неравенства (48) вытекают из очевидных соотношений $\mathfrak{E} - R \subset e_2$ и $R - \mathfrak{E} \subset e_1$. Доказываем достаточность. Пусть для любого заданного ε существует R, для которой выполняются неравенства (48). Если положить $\mathfrak{E} - R = e_2$ и $R - \mathfrak{E} = e_1$, то получим $\mathfrak{E} + e_1 = R + e_2$, причем e_1 и e_2 удовлетворяют неравенствам (47), и измеримость $\mathfrak{E}$ вытекает непосредственно из теоремы 1.

Теорема 3. *Для того чтобы множество $\mathfrak{E}$ (которое может быть и неограниченным) принадлежало L_G, необходимо и достаточно, чтобы для любого заданного положительного ε существовало такое открытое множество O и такое замкнутое множество F, что*

$$F \subset \mathfrak{E} \subset O \quad \text{и} \quad |O - F|_G \leqslant \varepsilon. \tag{49}$$

Если $\mathfrak{E}$ измеримо, то, в силу определения и теоремы 11 [**35**] существуют такие F и O, что $F \subset \mathfrak{E} \subset O$, $|\mathfrak{E} - F|_G \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ и $|O - \mathfrak{E}|_G \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Далее имеем $O - F = (O - \mathfrak{E}) + (\mathfrak{E} - F)$, откуда и следует (49). Наоборот, пусть имеем (49). При этом и подавно $|O - \mathfrak{E}|_G \leqslant \varepsilon$ и, следовательно, $\mathfrak{E}$ измеримо согласно определению.

Приведем без доказательства еще один критерий измеримости. Для измеримости $\mathfrak{E}$ необходимо и достаточно, чтобы при любом выборе множества A имела место формула

$$|A|_G = |A \cdot \mathfrak{E}|_G + |A - \mathfrak{E}|_G. \tag{50}$$

38. Тело множеств. Введем новое понятие, касающееся семейств точечных множеств, причем под семейством множеств мы понимаем некоторую совокупность множеств (множество множеств). Назовем *телом множеств* семейство множеств, обладающее следующими двумя свойствами: 1) если множества $\mathfrak{E}_1$ и $\mathfrak{E}_2$ входят в семейство, то и их разность $\mathfrak{E}_1 - \mathfrak{E}_2$ входит в семейство; 2) если $\mathfrak{E}_1$ и $\mathfrak{E}_2$ — без общих элементов и входят в семейство, то и их сумма $\mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2$ входит в семейство.

Отметим некоторые непосредственные следствия данного определения. *Пустое множество как разность двух одинаковых множеств, принадлежащих телу множеств, обязательно входит в любое тело множеств.* Далее из формул [**31**]

$$\mathfrak{E}_1\mathfrak{E}_2 = \mathfrak{E}_1 - (\mathfrak{E}_1 - \mathfrak{E}_2); \quad \mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2 = \mathfrak{E}_1 + (\mathfrak{E}_2 - \mathfrak{E}_1)$$

непосредственно следует, что произведение двух множеств, принадлежащих телу, также принадлежит телу, и сумма двух множеств, принадлежащих телу, принадлежит телу и в том случае, когда множества имеют общие точки. Это утверждение, очевидно, обобщается и на любое конечное число сомножителей и слагаемых, т. е. *сумма и произведение конечного числа множеств, принадлежащих телу, также принадлежит телу.*

Усилим требование, входящее во второй пункт определения тела множеств, а именно, потребуем принадлежности к телу суммы счетного числа множеств попарно без общих точек, принадлежащих к телу. Такое тело множеств называется замкнутым телом множеств. Итак, назовем *замкнутым телом множеств* семейство множеств, обладающее следующими двумя свойствами: 1) если множества $\mathfrak{E}_1$ и $\mathfrak{E}_2$ входят в семейство, то и их разность $\mathfrak{E}_1 - \mathfrak{E}_2$ входит в семейство; 2) если семейство содержит конечное или счетное число множеств $\mathfrak{E}_n$ попарно без общих точек, то оно содержит и их сумму. Совершенно так же, как и выше, мы убеждаемся в том, что *замкнутое тело множеств содержит любые конечные суммы и произведения входящих в него множеств.* Покажем, что *замкнутое тело множеств содержит*

суммы и произведения счетного числа входящих в него множеств. Для того чтобы убедиться в этом, напишем следующие две формулы:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{E}_n = \mathfrak{E}_1 + (\mathfrak{E}_2 - \mathfrak{E}_1) + [\mathfrak{E}_3 - (\mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2)] + \\ + [\mathfrak{E}_4 - (\mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2 + \mathfrak{E}_3)] + \ldots \quad (51)$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} \mathfrak{E}_n = \mathfrak{E}_1 - [(\mathfrak{E}_1 - \mathfrak{E}_2) + (\mathfrak{E}_1 - \mathfrak{E}_3) + \\ + (\mathfrak{E}_1 - \mathfrak{E}_4) + \ldots]. \quad (52)$$

Доказательство этих формул не представляет никакого труда. Достаточно проверить, что всякий элемент (точка), входящий в множество, стоящее в левой части, входит в множество, стоящее в правой части, и наоборот. Пусть $\mathfrak{E}_n$ входит в замкнутое тело множеств T. При этом слагаемые правой части формулы (51) попарно не имеют общих точек и входят в T. Следовательно, согласно определению замкнутого тела T, и сумма множеств $\mathfrak{E}_n$ входит в T. Слагаемые, стоящие в квадратной скобке правой части формулы (52), входят в T, а потому и их сумма входит в T. Следовательно, и вся правая часть, т. е. произведение множеств $\mathfrak{E}_n$, входит в T, что и требовалось доказать.

Из теорем, доказанных в [**36**], непосредственно следует, что L_G есть замкнутое тело множеств. Рассмотрим функцию промежутков $G(\Delta)$, которые мы распространили на замкнутое тело L_G. Семейство промежутков не представляет собой тела, ибо уже разность двух промежутков может не быть промежутком. Семейство элементарных фигур R уже является телом, но не замкнутым телом. Наш процесс распространения функций $G(\Delta)$ состоял в том, что мы сначала распространили $G(\Delta)$ на тело элементарных фигур, а затем и на замкнутое тело L_G. При этом функция $G(\mathfrak{E})$ оказалась неотрицательной, вполне аддитивной и нормальной в L_G в том смысле, который был указан в [**37**]. Выясним связь понятий нормальности и аддитивности функции множеств.

Пусть имеется некоторое тело T, которое может быть и незамкнутым. Функция $G(\mathfrak{E})$, определенная для всех множеств, входящих в T, называется вполне аддитивной в T при выполнении следующего условия: если множество $\mathfrak{E}$, принадлежащее T, есть сумма конечного или счетного числа множеств $\mathfrak{E}_n$, также принадлежащих T и не имеющих попарно общих точек, то

$$G(\mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2 + \ldots) = G(\mathfrak{E}_1) + G(\mathfrak{E}_2) + \ldots$$

Мы уже и раньше упоминали о понятии вполне аддитивной функции. Между понятиями вполне аддитивной и нормальной функции

имеется непосредственная связь, которая выражается следующей теоремой:

Теорема. *Для того чтобы функция $G(\mathfrak{E})$, определенная на некотором теле T и принимающая лишь конечные значения, была аддитивной и нормальной, необходимо и достаточно, чтобы она была вполне аддитивной.*

Из аддитивности непосредственно следует, что если $A \subset B$, то $G(B - A) = G(B) - G(A)$. Пусть функция $G(\mathfrak{E})$ аддитивна и нормальна, и докажем, что она вполне аддитивна. Положим, что $\mathfrak{E}$ есть сумма счетного числа множеств $\mathfrak{E}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ попарно без общих точек. Можем написать

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_1 + \ldots + \mathfrak{E}_n + [\mathfrak{E} - (\mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2 + \ldots + \mathfrak{E}_n)]$$

и, в силу аддитивности функции,

$$G(\mathfrak{E}) = G(\mathfrak{E}_1) + \ldots + G(\mathfrak{E}_n) + G[\mathfrak{E} - (\mathfrak{E}_1 + \ldots + \mathfrak{E}_n)]. \qquad (53)$$

Но $\mathfrak{E} - (\mathfrak{E}_1 + \ldots + \mathfrak{E}_n)$ есть исчезающая последовательность. В равенстве (53) переходим к пределу, учитывая нормальность,

$$G(\mathfrak{E}) = \lim_{n \to \infty} [G(\mathfrak{E}_1) + \ldots + G(\mathfrak{E}_n)] = \sum_{n=1}^{\infty} G(\mathfrak{E}_n).$$

Этим и доказано, что $G(\mathfrak{E})$ вполне аддитивна. Положим теперь наоборот, что $G(\mathfrak{E})$ вполне аддитивна и докажем, что она нормальна. Пусть $\mathfrak{E}_1' \supset \mathfrak{E}_2' \supset \ldots$ — какая-либо исчезающая последовательность. Надо доказать, что $G(\mathfrak{E}_n') \to 0$. Можем написать

$$\mathfrak{E}_1' = (\mathfrak{E}_1' - \mathfrak{E}_2') + (\mathfrak{E}_2' - \mathfrak{E}_3') + \ldots + (\mathfrak{E}_{n-1}' - \mathfrak{E}_n') + \mathfrak{E}_n',$$

причем слагаемые не имеют попарно общих точек, и отсюда, в силу аддитивности $G(\mathfrak{E})$, получим

$$G(\mathfrak{E}_n') = G(\mathfrak{E}_1') - [G(\mathfrak{E}_1' - \mathfrak{E}_2') + G(\mathfrak{E}_2' - \mathfrak{E}_3') + \ldots + G(\mathfrak{E}_{n-1}' - \mathfrak{E}_n')]. \qquad (54)$$

С другой стороны, из формулы

$$\mathfrak{E}_1' = \sum_{k=1}^{\infty} (\mathfrak{E}_k' - \mathfrak{E}_{k+1}')$$

следует, в силу того, что $G(\mathfrak{E})$ вполне аддитивна,

$$G(\mathfrak{E}_1') = \sum_{k=1}^{\infty} G(\mathfrak{E}_k' - \mathfrak{E}_{k+1}') = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} G(\mathfrak{E}_k' - \mathfrak{E}_{k-1}'),$$

и, сравнивая с (54), получаем $G(\mathfrak{E}_n') \to 0$, что и требовалось доказать. Выше мы построили распространение неотрицательной, аддитивной и нормальной функции промежутков $G(\Delta)$ на замкнутое тело

L_G, причем полученная таким образом функция $G(\mathfrak{E})$ оказалась вполне аддитивной. Можно доказать, что никакое другое распространение $G(\Delta)$ на L_G при условии полной аддитивности невозможно.

39. Независимость от выбора осей. Сделаем еще некоторые замечания по поводу независимости меры от выбора осей. Первоначальная функция $G(\Delta)$ была определена на полуоткрытых прямоугольниках, стороны которых параллельны осям X и Y.

Тело L_G содержит полуоткрытые прямоугольники плоскости с любым направлением сторон, ибо всякий такой прямоугольник есть разность замкнутого прямоугольника и замкнутого множества точек, состоящее из двух сторон и трех вершин прямоугольника. Таким образом, функция $G(\mathfrak{E})$ определена, в частности, на всех полуоткрытых прямоугольниках Δ', стороны которых параллельны некоторой другой декартовой системе осей X' и Y', причем функция $G(\Delta')$ на этих прямоугольниках аддитивна и нормальна. Если мы, выбирая новые оси X' и Y', будем исходить из функции $G(\Delta')$ и распространять ее так, как это указано выше, то придем к некоторому телу $L_{G'}$. Нетрудно показать, что это тело совпадает с телом L_G, и что при новом распространении, которое мы производим, исходя из $G(\Delta')$, получим на всех промежутках те же значения $G(\mathfrak{E})$, которые имели и при прежнем распространении, которое производили, исходя из $G(\Delta)$. В основе этого утверждения лежит тот факт, что всякое открытое множество O можно представить или как сумму промежутков Δ_k, попарно без общих точек, или как сумму Δ'_k, попарно без общих точек, причем

$$G(O)=\sum_{k=1}^{\infty} G(\Delta_k)=\sum_{k=1}^{\infty} G(\Delta'_k).$$

Отсюда, в силу теоремы 4 из [**36**], непосредственно следует, что внешние меры любого множества в обеих системах координат будут одни и те же. Из определения измеримости непосредственно следует далее, что измеримость множества будет иметь место одновременно в обеих координатных осях, т. е. тело $L_{G'}$ совпадает с телом L_G. Совпадение мер в обеих осях непосредственно вытекает из того, что, в силу указанной выше теоремы, $G(\mathfrak{E})$ есть точная нижняя граница мер открытых множеств, покрывающих $\mathfrak{E}$. Отметим еще, что если $G(\Delta)$ есть обычная площадь прямоугольника Δ, т. е. мера Лебега $m(\Delta)$, то и $G(\Delta')$ есть обычная площадь Δ' [ср. **II; 92**].

40. Тело B. Как мы указывали, замкнутое тело L_G зависит от выбора функции $G(\Delta)$. Мы укажем сейчас такое замкнутое тело, что множества, в него входящие, принадлежат любому замкнутому телу L_G и, в частности, принадлежат L. Рассмотрим всевозможные замкнутые тела T такие, что всякое T содержит все замкнутые промежутки,

и составим семейство множеств B, состоящее из множеств, принадлежащих всем вышеуказанным замкнутым телам T. Нетрудно видеть, что семейство множеств B есть также замкнутое тело. Действительно, если $\mathfrak{E}_1$ и $\mathfrak{E}_2$ принадлежат B, то они принадлежат всем указанным замкнутым телам T, а потому и разность $\mathfrak{E}_1 - \mathfrak{E}_2$ входит во все T, а тем самым и в семейство B. Аналогичным образом проверяется и второй пункт определения замкнутого тела. Таким образом, замкнутое тело B есть общая часть всех замкнутых тел, содержащих всевозможные замкнутые промежутки. Это замкнутое тело B входит, очевидно, и в состав каждого L_G, ибо это последнее содержит также все замкнутые промежутки. Всякое открытое множество можно, как мы видели [**33**], представить в виде суммы счетного числа замкнутых промежутков, и, таким образом, замкнутое тело B содержит все открытые множества. Любое замкнутое множество F является дополнением к некоторому открытому множеству O, т. е. может быть представлено в виде разности всей плоскости (открытое множество) и множества O, а потому тело B содержит и все замкнутые множества. Тело множеств B было впервые рассмотрено еще до Лебега французским математиком Борелем. Множества, принадлежащие телу B, называют иногда множествами измеримыми B или множествами, измеримыми по Борелю.

Тело B может быть определено иначе, чем это мы сделали выше, а именно следующим образом: мы считаем множество $\mathfrak{E}$ принадлежащим телу B, если оно может быть получено из замкнутых промежутков при помощи следующих двух операций, примененных конечное или счетное число раз: 1) построение суммы конечного или счетного числа множеств, построенных уже раньше; 2) построение произведения конечного или счетного числа множеств, построенных уже раньше. Это определение требует некоторых разъяснений, на которых мы не останавливаемся. Мы не будем также приводить доказательство того, что новое определение тела B равносильно прежнему. Докажем в заключение настоящего параграфа две простые теоремы.

Теорема 1. *Если $\mathfrak{E}$ — любое множество из L_G, то существуют таких два множества $\mathfrak{E}_1$ и $\mathfrak{E}_2$, принадлежащих телу B (и тем самым телу L_G), что*

$$\mathfrak{E}_1 \subset \mathfrak{E} \subset \mathfrak{E}_2 \quad \text{и} \quad G(\mathfrak{E}_1) = G(\mathfrak{E}_2) = G(\mathfrak{E}). \tag{55}$$

Мы знаем, что для множества $\mathfrak{E}$, принадлежащего L_G, существуют такие замкнутые множества F_n и открытые множества O_n, что

$$F_n \subset \mathfrak{E} \subset O_n; \quad G(\mathfrak{E} - F_n) \leqslant \frac{1}{n}; \; G(O_n - \mathfrak{E}) \leqslant \frac{1}{n}. \tag{56}$$

Множества F_n и O_n принадлежат телу B. Следовательно, в силу определения замкнутого тела, можно утверждать, что телу B принадлежат сумма множеств F_n и произведение множеств O_n:

$$\mathfrak{E}_1 = \sum_{n=1}^{\infty} F_n; \quad \mathfrak{E}_2 = \prod_{n=1}^{\infty} O_n. \tag{57}$$

Принимая во внимание, что $F_n \subset \mathfrak{E} \subset O_n$, мы можем утверждать, что $\mathfrak{E}_1 \subset \mathfrak{E} \subset \mathfrak{E}_2$. Кроме того, $\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_1 \subset \mathfrak{E} - F_n$ и $\mathfrak{E}_2 - \mathfrak{E} \subset O_n - \mathfrak{E}$ и, следовательно, $G(\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_1) \leqslant \frac{1}{n}$ и $G(\mathfrak{E}_2 - \mathfrak{E}) \leqslant \frac{1}{n}$ при любом n. Левая часть не зависит от n, а потому последнее неравенство приводит к равенству (55), и теорема доказана. Ее можно формулировать следующим образом: *всякое множество $\mathfrak{E}$ из L_G может быть заключено между множествами из B, имеющими ту же меру, что и заданное множество $\mathfrak{E}$.*

Выделим из тела B некоторое семейство множеств, которыми мы будем пользоваться в дальнейшем.

Определение. *Множество $\mathfrak{E}$ называется множеством G_δ, если оно есть открытое множество или произведение счетного числа открытых множеств.*

Отметим прежде всего, что, как мы упоминали уже выше [**32**], произведение счетного числа открытых множеств может и не быть открытым множеством. Из определения множеств G_δ непосредственно следует, что произведение конечного или счетного числа множеств G_δ есть также множество G_δ. Покажем, что всякий конечный замкнутый промежуток $\Delta[a \leqslant x \leqslant b;\ c \leqslant y \leqslant d]$ есть множество G_δ. Действительно, мы можем представить его как произведение открытых промежутков $\Delta_n(a - \varepsilon_n < x < b + \varepsilon_n;\ c - \varepsilon_n < y < d + \varepsilon_n)$, где ε_n есть последовательность положительных чисел, стремящихся к нулю. Нетрудно показать, что всякое замкнутое множество есть множество G_δ. В дальнейшем это нам не понадобится. Из доказательства приведенной выше теоремы непосредственно вытекает следующее утверждение:

Теорема 2. *Всякое измеримое множество $\mathfrak{E}$ может быть покрыто множеством H типа G_δ, таким, что $G(\mathfrak{E}) = G(H)$.*

Отметим еще, что *если $\mathfrak{E}$ принадлежит замкнутому промежутку Δ, то покрывающее множество H можно выбрать так, чтобы и оно принадлежало Δ.* Действительно, если H есть множество G_δ, покрывающее $\mathfrak{E}$ и удовлетворяющее условию $G(\mathfrak{E}) = G(H)$, то множество $H' = H\Delta$ будет также множеством G_δ, покрывающим $\mathfrak{E}$ и удовлетворяющим условию $G(\mathfrak{E}) = G(H')$, причём H', очевидно, принадлежит Δ.

41. Случай одного переменного. Теория измерения имеет более простую форму в случае одного переменного. Неотрицательная, аддитивная и нормальная функция полуоткрытых промежутков

сводится, как мы знаем, к неубывающей функции точки $g(x)$:

$$G(\Delta) = G((a,\ b]) = g(b+0) - g(a+0).$$

Исходя от этой функции $G(\Delta)$, как это указано выше, строим функцию множеств $G(\mathfrak{E})$, определенную для всех множеств, принадлежащих L_G. Значение $G(\mathfrak{E})$ для множества $\mathfrak{E}$, принадлежащего L_G, называют иногда изменением $g(x)$ на множестве $\mathfrak{E}$. Если $g(x) = x$, то мы получаем множества, измеримые по Лебегу, и $G(\mathfrak{E})$ — обобщение понятия длины для таких множеств. Если $g(x)$ определена только в некотором промежутке, то ее можно распространить, как это указывали раньше, на всю ось.

Введем вместо x новую переменную t по формуле

$$t = g(x), \tag{58}$$

причем эту замену переменных надо понимать так. Если в некоторой точке x функция $g(x)$ непрерывна, то соответствующее значение t определяется формулой (58). Если же x есть точка разрыва непрерывности, то такому значению x приводится в соответствие замкнутый промежуток $[g(x-0),\ g(x+0)]$ переменной t. При таком соответствии полуоткрытый промежуток $(a,\ b]$ переменной x переходит в полуоткрытый промежуток $(g(a+0),\ g(b+0)]$ переменной t, причем в случае $g(b+0), = g(a+0)$ последний полуоткрытый промежуток вырождается в точку. Если e_x — некоторые множества оси x и e_t — соответствующие множества оси t, то можно показать, что внешняя мера e_x относительно $g(x)$ равна внешней мере e_t, понимаемой в смысле Лебега, т. е. вычисляемой при условии, что в основу принята длина полуоткрытого промежутка. Элементарной фигурой в случае одного переменного будет сумма конечного числа полуоткрытых промежутков попарно без общих точек и, можно без труда показать, что если e_x — измеримое относительно $g(x)$ множество, то и e_t измеримо, по Лебегу, причем мера e_x относительно $g(x)$ равна лебеговой мере множества e_t.

§ 2. Измеримые функции

42. Определение измеримых функций. Задачей настоящего и следующих параграфов будет построение некоторого класса функций и исследование свойств этих функций. В дальнейшем на основе этого класса функций будет дано общее определение интеграла. При изложении мы будем считать, что функция $G(\Delta)$, лежащая в основе теории измерения, каким-нибудь образом фиксирована, т. е. будем рассматривать некоторое определенное тело L_G. Это может быть, например, тело множеств L, измеримых по Лебегу. Пусть на измеримом множестве $\mathfrak{E}$ задана функция точки $f(P)$, принимающая вещественные значения. Эти значения могут быть как конечными, так и бесконечными, т. е. функция $f(P)$ может, кроме конечных значений, принимать значение $(+\infty)$ или $(-\infty)$. Введем следующее обозна-

чение. Обозначим символом $\mathfrak{E}[f>a]$ множества тех точек $\mathfrak{E}$, в которых $f(P)>a$. Аналогичным образом символ $\mathfrak{E}[f\leqslant a]$ обозначает множество тех точек $\mathfrak{E}$, в которых $f(P)\leqslant a$. Если $f(P)$ и $g(P)$ — две функции, то символ $\mathfrak{E}[f=g]$ обозначает множество точек $\mathfrak{E}$, в которых $f(P)=g(P)$ и т. д.

Определение. *Функция $f(P)$, заданная на измеримом множестве $\mathfrak{E}$, называется измеримой, если для любого вещественного a множества*

$$\mathfrak{E}[f\geqslant a];\ \mathfrak{E}[f<a];\ \mathfrak{E}[f>a];\ \mathfrak{E}[f\leqslant a] \tag{1}$$

измеримы. Докажем прежде всего следующую теорему:

Теорема 1. *Для измеримости множеств* (1) *при любом a достаточно, чтобы одно из этих множеств было измеримо при любом a.*

Множества $\mathfrak{E}[f\geqslant a]$ и $\mathfrak{E}[f<a]$ суть дополнительные множества, и измеримость одного из них при любом a равносильна измеримости другого. Точно так же измеримость третьего из множеств (1) равносильна измеримости четвертого множества (1). Докажем, например, что из измеримости третьего множества при любом a следует и измеримость остальных множеств. Действительно, из измеримости третьего множества следует измеримость четвертого множества и множества $\mathfrak{E}[f\geqslant a]$, которое можно представить в виде

$$\mathfrak{E}[f\geqslant a]=\prod_{n=1}^{\infty}\mathfrak{E}\left[f>a-\frac{1}{n}\right],$$

а тем самым и второго множества.

Отметим еще, что множества $\mathfrak{E}[f=+\infty]$ и $\mathfrak{E}[f=-\infty]$ могут быть представлены в виде

$$\mathfrak{E}[f=+\infty]=\prod_{n=1}^{\infty}\mathfrak{E}[f>n];\quad \mathfrak{E}[f=-\infty]=\prod_{n=1}^{\infty}\mathfrak{E}[f<-n].$$

Заметим, что достаточно доказать измеримость (1) только для рациональных значений a. Действительно, всякое иррациональное число a можно представить как предел убывающей последовательности a_n рациональных чисел, и измеримость $\mathfrak{E}[f>a]$ непосредственно вытекает из формулы

$$\mathfrak{E}[f>a]=\sum_{n=1}^{\infty}\mathfrak{E}[f>a_n].$$

Выясним ряд простых свойств измеримых функций, непосредственно вытекающих из данного выше определения.

Теорема 2. *Если $f(P)$ измерима на $\mathfrak{E}$, то она измерима и на любой измеримой части $\mathfrak{E}'$ множества $\mathfrak{E}$. Если $f(P)$ измерима*

на конечном или счетном числе множеств $\mathcal{E}_n$ попарно без общих точек, то она измерима и на множестве $\mathcal{E}$, которое является суммой $\mathcal{E}_n$.

Утверждения теоремы непосредственно вытекают из следующих формул:

$$\mathcal{E}'[f>a]=\mathcal{E}[f>a]\cdot\mathcal{E}';\quad \mathcal{E}[f>a]=\sum_n \mathcal{E}_n[f>a].$$

Теорема 3. *Если $\mathcal{E}$ есть множество меры нуль, то любая функция $f(P)$ измерима на этом множестве.*

Действительно, при любом a множество $\mathcal{E}[f>a]$ есть часть множества $\mathcal{E}$, имеющего меру нуль, а следовательно, и множество $\mathcal{E}[f>a]$ имеет меру нуль, т. е. измеримо.

Определение. *Две функции $f(P)$ и $g(P)$, определенные на множестве $\mathcal{E}$, называются эквивалентными на этом множестве или просто эквивалентными, если множество $\mathcal{E}[f\neq g]$ имеет меру нуль.* Докажем относительно эквивалентных функций следующую теорему.

Теорема 4. *Если $f(P)$ и $g(P)$ — эквивалентные функции на измеримом множестве $\mathcal{E}$, и одна из них измерима, то и другая измерима.*

По условию теоремы, множество $\mathcal{E}[f\neq g]=A$ есть множество меры нуль. На измеримом множестве $\mathcal{E}'=\mathcal{E}-A$ мы имеем $f(P)=g(P)$. Из измеримости $f(P)$ на $\mathcal{E}$ следует и измеримость $f(P)$ на $\mathcal{E}'$, а потому и измеримость $g(P)$ на $\mathcal{E}'$. На множестве A функция $g(P)$ измерима в силу теоремы 3. Таким образом, в силу теоремы 2, $g(P)$ измерима на множестве $\mathcal{E}=\mathcal{E}'+A$, и теорема доказана.

Легко доказать, что если f_1 эквивалентна g_1 и f_2 эквивалентна g_2, то f_1+f_2 эквивалентна g_1+g_2, f_1f_2 эквивалентна g_1g_2 и $f_1:f_2$ эквивалентна $g_1:g_2$, если соответствующие действия имеют почти везде смысл.

Если две непрерывные функции эквивалентны в смысле лебеговой меры на некотором промежутке или всей плоскости, то нетрудно видеть, что их значения совпадают во всех точках. Действительно, если, например, в некоторой точке мы имели бы $f(P_0)-g(P_0)>0$, то это неравенство, в силу непрерывности функций, сохранилось бы в некоторой достаточно малой ε-окрестности δ точки P_0, причем $m(\delta)>0$, а это противоречит определению эквивалентности функций.

Укажем простые примеры измеримых функций. Положим, что $f(P)$ непрерывна на конечном замкнутом промежутке Δ_0. Рассмотрим при любом a множество $\Delta_0[f(P)\geqslant a]$ и покажем, что оно замкнуто. Отсюда будет непосредственно следовать, что оно измеримо, а потому $f(P)$ — измеримая функция. Если P_n $(n=1,\ 2,\ \ldots)$ — последовательность точек, имеющих предельную точку P, и $f(P_n)\geqslant a$, то, в силу

непрерывности функций, и $f(P) \geqslant a$, что показывает замкнутость множества $\Delta_0[f(P) \geqslant a]$. Точно так же, если $f(P)$ непрерывна на всей плоскости, то она измерима. Действительно, если Δ_0 — любой замкнутый промежуток, то, как мы только что показали, множество $\Delta_0[f(P) \geqslant a]$ измеримо. При расширении Δ_0 предельное множество будет также измеримым. Это предельное множество есть множество всех тех точек плоскости, где $f(P) \geqslant a$.

Положим теперь, что $f(P)$ имеет одну точку разрыва P_0. Накроем ее последовательностью открытых промежутков Δ_n $(n = 1, 2, \ldots)$, которые беспредельно сжимаются к P_0. Вне Δ_n функция $f(P)$ непрерывна и множество e_n тех точек P, в которых $f(P) \geqslant a$, замкнуто. При возрастании n множества e_n не убывают и стремятся к измеримому множеству e. К этому множеству надо еще добавить P_0, если $f(P_0) \geqslant a$, и получится таким образом множество всех точек, в которых $f(P) \geqslant a$, причем это множество, в силу предыдущего, измеримо. То же рассуждение применимо и в случае конечного числа точек разрыва, т. е. функция с конечным числом точек разрыва непрерывности измерима.

Отметим без доказательства следующее предложение: если $f(P)$ принимает конечные значения на замкнутом промежутке Δ_0 и множество ёе точек разрыва непрерывности имеет меру нуль, то $f(P)$ измерима на Δ_0. Но это условие измеримости является только достаточным. Легко дать пример, когда всякая точка множества $\mathfrak{E}$ есть точка разрыва, и все же функция измерима. Рассмотрим функцию $f(x)$, определенную на промежутке $[0,1]$ следующим образом: $f(x) = 0$, если x есть рациональное число, и $f(x) = 1$, если x иррационально. Возьмем лебегово измерение, т. е. тот случай, когда $G(\Delta)$ — длина промежутка. При этом мера любой точки равна нулю. Рациональные точки промежутка $[0,1]$ образуют счетное множество и в силу того, что мера вполне аддитивна, множество рациональных точек также имеет меру нуль. Построенная функция $f(x)$ отличается от функции, тождественно равной единице на всем промежутке, лишь на множестве рациональных точек, имеющих меру нуль, т. е. $f(x)$ эквивалентна функции, тождественно равной единице, и, в силу теоремы 4, $f(x)$ измерима. Но нетрудно видеть, что всякая точка x_0 промежутка $[0,1]$ есть точка разрыва $f(x)$. Действительно, в любой ε-окрестности x_0 находятся как рациональные, так и иррациональные значения x, т. е. в любой ε-окрестности $x = x_0$ функция $f(x)$ принимает и значение 0 и значение 1, а потому x_0 есть точка разрыва. В [45] мы укажем глубокую связь понятия измеримости с понятием непрерывности.

Рассмотрим еще так называемую кусочно-постоянную на измеримом множестве $\mathfrak{E}$ функцию, т. е. такую функцию $f(P)$, которая принимает на $\mathfrak{E}$ конечное или счетное число значений c_k $(k = 1, 2, \ldots)$. Если те множества $\mathfrak{E}_k$, на которых $f(P) = c_k$, суть измеримые множества, то из определения измеримости непосредственно следует, что

кусочно-постоянная функция $f(P)$ измерима на $\mathcal{E}$. Приведем еще один пример. Пусть $f(P)$ измерима на измеримом множестве $\mathcal{E}$. Положим ее равной нулю на дополнительном множестве $C\mathcal{E}$. Построенная таким образом функция измерима на $\mathcal{E}$ и на $C\mathcal{E}$, т. е., в силу теоремы 2, измерима на всей плоскости.

Рассмотрим еще случай одного переменного. Пусть $g(x)$ — неубывающая функция, положенная в основу измерения [**42**], и $f(x)$ — измеримая функция. В этом случае говорят иногда, что $f(x)$ измерима относительно $g(x)$, а если $g(x)=x$, то говорят просто, что $f(x)$ измерима.

43. Свойства измеримых функций. Выясним некоторые дальнейшие свойства измеримых функций.

Теорема 1. *Если $f(P)$ — измеримая функция, то и $|f(P)|$ — измеримая функция.*

Утверждение теоремы непосредственно следует из формулы

$$\mathcal{E}[|f|>a]=\mathcal{E}[f>a]+\mathcal{E}[f<-a].$$

Теорема 2. *Если $f(P)$ — измеримая функция и c — конечная постоянная, отличная от нуля, то $c+f(P)$ и $cf(P)$ — измеримые функции.*

Первое утверждение непосредственно вытекает из формулы

$$\mathcal{E}[c+f(P)>a]=\mathcal{E}[f(P)>a-c],$$

а второе из формул

$$\mathcal{E}[cf(P)>a]=\mathcal{E}\left[f(P)>\frac{a}{c}\right] \text{ при } c>0,$$

$$\mathcal{E}[cf(P)>a]=\mathcal{E}\left[f(P)<\frac{a}{c}\right] \text{ при } c<0.$$

Теорема 3. *Если $f(P)$ и $g(P)$ — измеримые функции, то множество $\mathcal{E}[f>g]$ измеримо.*

Пронумеруем все рациональные числа: $r_1, r_2, \ldots$ Измеримость упомянутого в теореме множества непосредственно вытекает из формулы

$$\mathcal{E}[f>g]=\sum_{k=1}^{\infty}\mathcal{E}[f>r_k]\,\mathcal{E}[g<r_k].$$

Теорема 4. *Если $f(P)$ и $g(P)$ — измеримые функции, принимающие конечные значения, то функции $f-g$, $f+g$, fg и $\frac{f}{g}$ (при $g\neq 0$) измеримы.*

Измеримость разности $f-g$ непосредственно следует из формулы

$$\mathcal{E}[f-g>a]=\mathcal{E}[f>a+g]$$

и теорем 2 и 3. Измеримость суммы следует из формулы $f+g=f-(-g)$ и теоремы 2 при $c=-1$. Измеримость квадрата f^2 измеримой функции f непосредственно следует из формулы

$$\mathcal{E}[f^2>a]=\mathcal{E}[f>\sqrt{a}]+\mathcal{E}[f<-\sqrt{a}],$$

а измеримость произведения fg из формулы

$$fg=\frac{1}{4}[(f+g)^2-(f-g)^2].$$

Докажем измеримость функции $\frac{1}{g}$ при условии, что g не принимает значения 0. Это непосредственно следует из следующих формул:

$$\mathcal{E}\left[\frac{1}{g}>a\right]=\mathcal{E}[g>0]\cdot\mathcal{E}\left[g<\frac{1}{a}\right] \text{ при } a>0;$$

$$\mathcal{E}\left[\frac{1}{g}>a\right]=\mathcal{E}[g>0]+\mathcal{E}\left[g<\frac{1}{a}\right] \text{ при } a<0;$$

$$\mathcal{E}\left[\frac{1}{g}>a\right]=\mathcal{E}[g>0] \text{ при } a=0.$$

Наконец, из формулы $\frac{f}{g}=f\frac{1}{g}$ следует измеримость частного. В приведенной теореме необходимо было сделать оговорку о том, что функции $f(P)$ и $g(P)$ принимают во всех точках $\mathcal{E}$ конечные значения. В противном случае действия над этими функциями могли бы потерять смысл. Если, например, в некоторой точке $f=+\infty$ и $g=-\infty$, то в этой точке мы ничего не можем сказать о сумме $f+g$. Если указанной неопределенности при производстве действия над f и g нет, то можно допустить и бесконечные значения для $f(P)$ и $g(P)$. Докажем в качестве примера следующую теорему:

Теорема 5. *Если $f(P)$ и $g(P)$ — измеримые функции, принимающие конечные значения и значение $(+\infty)$, то функция $f+g$ измерима.*

Пусть A — множество, на котором по крайней мере одна из функций равна $(+\infty)$. Это множество измеримо в силу измеримости f и g, и на множестве A сумма $f+g$ имеет постоянное значение $(+\infty)$ и, следовательно, измерима. На множестве $\mathcal{E}'=\mathcal{E}-A$ и функции f и g имеют конечные значения, и, в силу теоремы 4, сумма $f+g$ измерима и на $\mathcal{E}'$. Поэтому она измерима и на $\mathcal{E}=\mathcal{E}'+A$, что и требовалось доказать.

44. Предел измеримых функций. В этом параграфе мы исследуем предельный переход для измеримых функций. Основным результатом будет тот факт, что предельный переход для измеримых функций приводит вновь к измеримым функциям. Предварительно выясним некоторые обстоятельства, связанные с понятием предела. Пусть имеется последовательность вещественных чисел

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots, \qquad (2)$$

причем среди этих чисел могут быть и числа $(+\infty)$ или $(-\infty)$. Обозначим через s_n точную нижнюю границу множества чисел $[a_n, a_{n+1}, \ldots]$ и через t_n точную верхнюю границу упомянутого множества, т. е.

$$s_n = \inf [a_n, a_{n+1}, \ldots]; \quad t_n = \sup [a_n, a_{n+1}, \ldots]. \tag{3}$$

При возрастании n упомянутое множество чисел становится беднее, и, следовательно, s_n не убывает и t_n не возрастает. Таким образом, при беспредельном возрастании n монотонные последовательности s_n и t_n имеют конечные или бесконечные пределы:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = S; \quad \lim_{n\to\infty} t_n = T, \tag{4}$$

причем, в силу монотонности, имеем

$$S = \sup s_n; \quad T = \inf t_n, \tag{5}$$

и, кроме того, из $s_n \leqslant t_n$ следует $S \leqslant T$. Отметим при этом, что у последовательности $(+\infty)$, $(+\infty)$, ... мы считаем предел равным $(+\infty)$ и аналогично для $(-\infty)$. Число S называется обычно *нижним пределом последовательности* (2), а число T — *верхним пределом* этой последовательности.

Пользуются часто следующей записью:

$$S = \underline{\lim}\, a_n \text{ или } S = \lim_{n\to\infty} \cdot \inf a_n;$$

$$T = \overline{\lim}\, a_n \text{ или } T \lim_{n\to\infty} \cdot \sup a_n.$$

Докажем следующую лемму.

Лемма. *Для существования предела (конечного или бесконечного) у последовательности* (2) *необходимо и достаточно, чтобы* $S = T$, *и если это условие выполнено, то упомянутый предел равен* S.

Докажем сначала достаточность. Мы имеем $s_n \leqslant a_k \leqslant t_n$ при $k \geqslant n$, и если пределы s_n и t_n совпадают, т. е. $S = T$, то очевидно $a_n \to S$. Докажем теперь необходимость. Пусть последовательность (2) имеет конечный предел σ. При этом все числа a_n заключаются в промежутке $(\sigma - \varepsilon, \sigma + \varepsilon)$ при достаточно больших значениях n, причем ε — произвольно заданное малое положительное число. Поэтому в указанном же промежутке заключаются и все s_n и t_n при достаточно больших значениях n. Отсюда, ввиду произвольности ε, следует, что $s_n \to \sigma$ и $t_n \to \sigma$, т. е. $S = T = \sigma$. Совершенно аналогично рассматривается случай бесконечного предела у последовательности (2). Докажем теперь некоторые свойства последовательности измеримых функций.

Теорема 1. *Если* $f_n(P)$ — *последовательность измеримых функций, то точная нижняя и точная верхняя границы значений* $f_n(P)$

в любой точке P множества $\mathfrak{E}$ суть также измеримые функции, т. е. функции

$$\varphi(P) = \inf_n f_n(P) \text{ и } \psi(P) = \sup_n f_n(P) \tag{6}$$

измеримы.

Докажем, например, измеримость функции $\varphi(P)$. Если в точке P мы имеем $\varphi(P) < a$, то по крайней мере одно из значений $f_n(P)$ также $< a$, и наоборот, если по крайней мере одно из значений $f_n(P) < a$, то $\varphi(P) < a$. Таким образом, имеем

$$\mathfrak{E}[\varphi(P) < a] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{E}[f_n(P) < a],$$

откуда, в силу измеримости функций $f_n(P)$, и следует измеримость $\varphi(P)$.

Теорема 2. *Если имеется последовательность измеримых функций $f_n(P)$, монотонно возрастающая (или монотонно убывающая) в каждой точке P множества $\mathfrak{E}$, то предельная функция $f(P)$ также измерима.*

Теорема непосредственно следует из предыдущей, так как для монотонно возрастающей последовательности функций предельная функция совпадает с точной верхней границей $\psi(P)$, а для монотонно убывающей последовательности — с точной нижней границей $\varphi(P)$.

Теорема 3. *Если $f_n(P)$ — последовательность измеримых функций, то нижний предел $S(P)$ и верхний предел $T(P)$ этой последовательности суть также измеримые функции.*

Введем функции

$$s_n(P) = \inf[f_n(P), f_{n+1}(P), \ldots]; \quad t_n(P) = \sup[f_n(P), f_{n+1}(P), \ldots].$$

Они измеримы при любом n в силу теоремы 1. Функции $S(P)$ и $T(P)$ суть пределы монотонных последовательностей $s_n(P)$ и $t_n(P)$, а потому, в силу теоремы 2, они также суть измеримые функции.

Теорема 4. *Если $f_n(P)$ — последовательность измеримых функций, сходящаяся в каждой точке P множества $\mathfrak{E}$, то и предельная функция $f(P)$ измерима.*

Измеримость $f(P)$ непосредственно следует из теоремы 3, поскольку при наличии в каждой точке предела $f(P)$ он совпадает с $S(P)$ и $T(P)$. Последняя теорема является основной для дальнейшего, и мы ее сейчас несколько обобщим.

Говорят, что некоторое свойство имеет место почти везде на $\mathfrak{E}$, если оно имеет место во всех точках $\mathfrak{E}$, кроме множества точек, имеющих меру нуль.

Теорема 5. *Если $f_n(P)$ — последовательность измеримых на $\mathfrak{E}$ функций, сходящихся почти везде на $\mathfrak{E}$, то и предельная функция $f(P)$ измерима.*

Отметим, что предельная функция $f(P)$ может быть не определена на некоторой части A множества $\mathfrak{E}$, причем A имеет меру нуль.

Мы определим $f(P)$ на A любым образом. Последовательность $f_n(P)$ сходится во всех точках измеримого множества $\mathfrak{E}' = \mathfrak{E} - A$, и, по теореме 4, $f(P)$ измерима на $\mathfrak{E}'$. Кроме того, она измерима и на A в силу теоремы 3 из [42]. Следовательно, $f(P)$ измерима на множестве $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}' + A$, и теорема доказана.

Введем новое понятие сходимости последовательности функций.

Определение. *Пусть $f_n(P)$ и $f(P)$ — измеримые на $\mathfrak{E}$ функции, принимающие конечные значения. Говорят, что последовательность $f_n(P)$ сходится по мере* к $f(P)$ *на $\mathfrak{E}$, если при любом заданном положительном ε мера $G(\mathfrak{E}_n)$ множества $\mathfrak{E}_n$ точек, в которых выполняется неравенство $|f(P) - f_n(P)| \geqslant \varepsilon$, стремится к нулю при беспредельном возрастании n.*

В следующих двух теоремах будет установлена связь между сходимостью почти везде и сходимостью по мере.

Теорема 6. *Пусть $\mathfrak{E}$ — измеримое множество конечной меры и $f_n(P)$ — последовательность измеримых на $\mathfrak{E}$ функций, которые принимают почти везде на $\mathfrak{E}$ конечные значения и сходятся почти везде на $\mathfrak{E}$ к функции $f(P)$, также принимающей почти везде на $\mathfrak{E}$ конечные значения. При этом $f_n(P)$ сходится по мере к $f(P)$ на $\mathfrak{E}$.*

Пусть ε — заданное положительное число. Введем множество точек $\mathfrak{E}_n$:

$$\mathfrak{E}_n = \mathfrak{E}[|f(P) - f_n(P)| \geqslant \varepsilon].$$

Нам надо доказать, что $G(\mathfrak{E}_n) \to 0$. Введем множество точек, в которых $f(P)$ и $f_n(P)$ принимают бесконечное значение, и множество, в котором $f_n(P)$ не стремится к $f(P)$:

$$A = \mathfrak{E}[|f(P)| = +\infty]; \quad A_n = \mathfrak{E}[|f_n(P)| = +\infty];$$
$$B = \mathfrak{E}[f_n(P) \text{ не} \to f(P)].$$

По условию теоремы, все эти множества имеют меру нуль. То же можно утверждать и об их сумме [**36**]:

$$C = A + \sum_{n=1}^{\infty} A_n + B,$$

т. е. $G(C) = 0$. Если P_0 не принадлежит C, то $f_n(P_0)$ и $f(P_0)$ имеют конечные значения, и $f_n(P_0) \to f(P_0)$. Введем множества

$$R_n = \sum_{k=n}^{\infty} \mathfrak{E}_k \quad \text{и} \quad S = \prod_{n=1}^{\infty} R_n. \tag{7}$$

Последовательность R_n ($n = 1, 2, \ldots$) есть невозрастающая последовательность множеств конечной меры, поскольку $\mathfrak{E}$ имеет конечную меру, и S — предельное множество для R_n, так что

$$G(R_n) \to G(S). \tag{8}$$

Покажем, что $S \subset C$, т. е. покажем, что если P_0 не принадлежит C, то P_0 не принадлежит S. Действительно, если P_0 не принадлежит C, то $f_n(P_0)$ и $f(P_0)$ конечны и $f_n(P_0) \to f(P_0)$, т. е. существует такое N, что $|f(P_0) - f_n(P_0)| < \varepsilon$ при $n > N$. Отсюда следует, что P_0 не принадлежит $\mathcal{E}_n$ при $n > N$, т. е. P_0 не принадлежит R_n при $n > N$, а поэтому P_0 не принадлежит S. Итак, $S \subset C$. Но $G(C) = 0$, а поэтому $G(S) = 0$, и, в силу (8), $G(R_n) \to 0$. Но, в силу первой из формул (7), $\mathcal{E}_n \subset R_n$, а потому и подавно $G(\mathcal{E}_n) \to 0$, что и требовалось доказать.

Замечание. Отметим, что множество C мы можем присоединить ко всем $\mathcal{E}_n$. В силу $G(C) = 0$ и после такого присоединения будем иметь $G(\mathcal{E}_n) \to 0$, а во всех точках множества $(\mathcal{E} - \mathcal{E}_n)$ будет выполнено неравенство $|f(P) - f_n(P)| < \varepsilon$. Из сходимости по мере не вытекает сходимость почти везде, но имеет место следующая:

Теорема 7. *Пусть $\mathcal{E}$ — измеримое множество конечной меры, $f_n(P)$ и $f(P)$ — измеримые на $\mathcal{E}$ функции, причем $f_n(P)$ по мере стремится к $f(P)$ на $\mathcal{E}$. При этом существует такая подпоследовательность $f_{n_k}(P)$, которая стремится почти везде к $f(P)$ на $\mathcal{E}$.*

Выберем последовательность положительных чисел δ_k ($k = 1, 2, \ldots$) такую, что $\delta_k \to 0$ при $k \to \infty$, и последовательность таких положительных чисел ε_k, что ряд $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots$ сходится. В силу сходимости по мере, существует такая беспредельно возрастающая последовательность значков n_k, что для множеств $\mathcal{E}_k = \mathcal{E}[|f(P) - f_{n_k}(P)| \geqslant \delta_k]$ выполнено неравенство $G(\mathcal{E}_k) \leqslant \varepsilon_k$. Введем множества

$$R_n = \sum_{k=n}^{\infty} \mathcal{E}_k; \quad S = \prod_{n=1}^{\infty} R_n.$$

Нетрудно показать, что $G(S) = 0$. Действительно,

$$G(R_n) \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} G(\mathcal{E}_k) \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \varepsilon_k,$$

и последняя сумма $\to 0$ при $n \to \infty$, в силу сходимости ряда $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots$ Покажем теперь, что $f_{n_k}(P) \to f(P)$ на множестве $\mathcal{E} - S$. Поскольку $G(S) = 0$, то этим и будет доказана теорема.

Пусть точка $P_0 \in \mathcal{E} - S$ и тем самым $P_0 \overline{\in} S$. Отсюда следует, что P_0 не принадлежит R_k при всех достаточно больших k, а следовательно, P_0 не принадлежит $\mathcal{E}_k$ при всех достаточно больших k, т. е. существует такое N, что $P_0 \overline{\in} \mathcal{E}_k$ при $k \geqslant N$. Вспоминая определение $\mathcal{E}_k$, мы получаем $|f(P_0) - f_{n_k}(P_0)| < \delta_k$ при $k \geqslant N$, откуда и следует $f_{n_k}(P_0) \to f(P_0)$, ибо $\delta_k \to 0$ при $k \to \infty$.

Замечание. Можно было бы, очевидно, предположить, как и в теореме 6, что $f_n(P)$ и $f(P)$ лишь почти везде конечны на $\mathcal{E}$, и при исключении на $\mathcal{E}$ множеств A и A_n на оставшемся множестве $f_n(P)$ по мере сходятся к $f(P)$.

Существует теорема, которая связывает сходимость почти везде с равномерной сходимостью. Эта теорема была доказана в 1911 г. Д. Ф. Егоровым. В дальнейшем мы не будем ею пользоваться и ограничимся лишь ее формулировкой.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{E}$ — измеримое множество конечной меры и $f_n(P)$ — последовательность измеримых на $\mathfrak{E}$ функций, которые принимают почти везде на $\mathfrak{E}$ конечные значения и сходятся почти везде на $\mathfrak{E}$ к функции $f(P)$, также принимающей почти везде на $\mathfrak{E}$ конечные значения. При этом для всякого заданного положительного ε существует такое замкнутое множество F, принадлежащее $\mathfrak{E}$, что $G(\mathfrak{E}-F)<\varepsilon$ и сходимость $f_n(P)\to f(P)$ на F равномерна.*

45. Свойство *C*. Можно показать, что измеримость функции равносильна некоторому другому свойству — свойству C, которое определяется при помощи понятия непрерывности.

Предварительно введем некоторые новые понятия.

Функция $f(P)$, определенная на замкнутом множестве F, называется непрерывной в точке P_0 этого множества, если для любого заданного положительного ε существует такое положительное η, что $|f(P_0)-f(P)|\leqslant\varepsilon$, если $P\in F$ и принадлежит η-окрестности точки P_0. Функция $f(P)$ называется непрерывной на замкнутом множестве F, если она непрерывна в каждой точке этого множества. Отметим, что, в силу данного выше определения непрерывности, любая функция непрерывна в изолированной точке P_0 множества, т. е. в такой точке, у которой некоторая ее ε-окрестность не содержит никаких точек F, кроме P_0. Указанным выше образом можно ввести определение непрерывности функции и на любом, не обязательно замкнутом, множестве. Введем еще новое понятие.

Определение. *Говорят, что функция $f(P)$, определенная на измеримом множестве $\mathfrak{E}$, обладает на этом множестве свойством C, если для любого заданного положительного ε существует такое замкнутое множество F, принадлежащее $\mathfrak{E}$, что, во-первых, $G(\mathfrak{E}-F)\leqslant\varepsilon$ и, во-вторых, $f(P)$ непрерывна на F.*

Равносильность свойства C и измеримости устанавливается следующей теоремой, которая была доказана в 1913 г. акад. Н. Н. Лузиным.

Теорема. *Если функция $f(P)$ определена на измеримом множестве $\mathfrak{E}$ конечной меры и имеет почти везде на $\mathfrak{E}$ конечные значения, то для измеримости этой функции необходимо и достаточно, чтобы она на $\mathfrak{E}$ имела свойство C.*

Мы не будем пользоваться этой теоремой и на доказательстве ее не останавливаемся.

46. Кусочно-постоянные функции. Мы определим сейчас некоторый класс функций, которым часто пользуются в теоретических исследованиях.

Определение. *Функция $f(P)$, определенная на измеримом множестве $\mathfrak{E}$, называется кусочно-постоянной на этом множестве, если она принимает на $\mathfrak{E}$ лишь конечное или счетное множество значений.*

Пусть c_k $(k=1,\ 2,\ \ldots)$ — различные значения, принимаемые функцией $f(P)$ на $\mathfrak{E}$, причем среди этих значений могут быть зна-

чения $(-\infty)$ и $(+\infty)$. Для измеримости $f(P)$, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы множества точек $\mathcal{E}_k$, на которых $f(P)$ равно c_k, были при всех k измеримыми [42]. В дальнейшем мы будем рассматривать только измеримые кусочно-постоянные функции.

Введем новое понятие. Если $\mathcal{E}'$ — некоторое множество точек, то *характеристической функцией* этого множества назовем такую функцию $\omega_{\mathcal{E}'}(P)$, определенную на всей плоскости, что $\omega_{\mathcal{E}'}(P)=1$, если P принадлежит $\mathcal{E}'$ и $\omega_{\mathcal{E}'}(P)=0$, если P не принадлежит $\mathcal{E}'$. Кусочно-постоянная функция $f(P)$ есть линейная комбинация характеристических функций:

$$f(P)=\sum_k c_k \omega_{\mathcal{E}_k}(P), \tag{9}$$

причем P принадлежит $\mathcal{E}$. Поскольку $\mathcal{E}_k$ не имеют общих точек (c_k — различные числа) в написанной сумме только одно слагаемое отлично от нуля, кроме случая, когда c_k, соответствующее выбранной точке P, равно нулю. В последнем случае все слагаемые равны нулю.

Характеристическая функция $\omega_{\mathcal{E}'}(P)$ измерима, очевидно, в том и только в том случае, если $\mathcal{E}'$ — измеримое множество.

Мы покажем сейчас возможность получения измеримых функций как пределов кусочно-постоянных функций. Мы ограничимся при этом случаем неотрицательных функций.

Теорема 1. *Для всякой неотрицательной ограниченной и измеримой на измеримом множестве $\mathcal{E}$ функции существует возрастающая последовательность $f_n(P)$ неотрицательных измеримых кусочно-постоянных на $\mathcal{E}$ функций с конечным числом значений, которая равномерно на $\mathcal{E}$ стремится к $f(P)$ в каждой точке $\mathcal{E}$.*

В силу ограниченности $f(P)$ имеется такое положительное число L, что $0 \leqslant f(P) < L$. Промежуток $[0, L]$ делим на 2^n равных частей точками

$$x_k = k\frac{L}{2^n} \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ 2^n-1).$$

Введем в рассмотрение измеримые множества

$$\mathcal{E}_k^{(n)} = \mathcal{E}\left[k\frac{L}{2^n} \leqslant f(P) < (k+1)\frac{L}{2^n}\right]$$

и построим последовательность функций $f_n(P)$ следующим образом:

$$f_n(P)=k\frac{L}{2^n},\ \text{если}\ P \in \mathcal{E}_k^{(n)}. \tag{10}$$

Нетрудно проверить, что последовательность $f_n(P)$ удовлетворяет всем требованиям теоремы. Каждая из функций $f_n(P)$ принимает на $\mathcal{E}$ конечное число значений. Далее при переходе от n к $n+1$ каждый промежуток

$$\left[k\frac{L}{2^n},\ (k+1)\frac{L}{2^n}\right]$$

разобьется на два:

$$\left[2k\frac{L}{2^{n+1}},\ (2k+1)\frac{L}{2^{n+1}}\right]$$

и

$$\left[(2k+1)\frac{L}{2^{n+1}},\ (2k+2)\frac{L}{2^{n+1}}\right],$$

и тем самым каждое из множеств $\mathcal{E}_k^{(n)}$ разобьется на два множества:

$$\mathcal{E}_k^{(n)} = \mathcal{E}_{2k}^{(n+1)} + \mathcal{E}_{2k+1}^{(n+1)}.$$

На множестве $\mathcal{E}_{2k}^{(n+1)}$ функция $f_{n+1}(P)$ равна тому же числу $k\frac{L}{2}$, что и функция $f_n(P)$ на всем множестве $\mathcal{E}_k^{(n)}$, а на множестве $\mathcal{E}_{2k+1}^{(n+1)}$ функция $f_{n+1}(P)$ равна

$$k\frac{L}{2^n} + \frac{L}{2^{n+1}},$$

и, следовательно, последовательность функций $f_n(P)$ есть возрастающая последовательность. Далее, на любом множестве $\mathcal{E}_k^{(n)}$ имеем

$$f_n(P) = k\frac{L}{2^n}$$

и

$$k\frac{L}{2_n} \leqslant f(x) < (k+1)\frac{L}{2^n}.$$

Тем самым

$$0 \leqslant f(P) - f_n(P) < \frac{L}{2^n}$$

во всех точках P, принадлежащих $\mathcal{E}$, откуда и следует, что последовательность $f_n(P)$ стремится к $f(P)$ равномерно на $\mathcal{E}$. В следующей теореме мы рассмотрим тот случай, когда $f(P)$ может быть неограниченной.

Теорема 2. *Для всякой неотрицательной, принимающей конечные значения и измеримой на множестве $\mathcal{E}$, функции $f(P)$ существует возрастающая последовательность $f_n(P)$ неотрицательных кусочно-постоянных на $\mathcal{E}$ функций, которая равномерно на $\mathcal{E}$ стремится к $f(P)$.*

В данном случае делим на части бесконечный промежуток $[0, +\infty)$ при помощи точек

$$x_k = \frac{k}{2^n}$$

$$(k = 1,\ 2,\ 3, \ldots).$$

Определяем опять множества $\mathcal{E}_k^{(n)} = \mathcal{E}\left[\frac{k}{2^n} \leqslant f(P) < \frac{k+1}{2^n}\right]$ и функции

$$f_n(P) = \frac{k}{2^n},\ \text{если}\ P \in \mathcal{E}_k^{(n)}. \qquad (11)$$

Совершенно так же, как и в предыдущей теореме, можно показать, что последовательность $f_n(P)$ удовлетворяет всем требованиям теоремы. В случае неограниченности функции $f(P)$ функции $f_n(P)$ будут принимать счетное число значений. Если отказаться от равномерности приближения, то можно ограничиться кусочно-постоянными функциями с конечным числом значений. Кроме того, в следующей теореме мы будем считать и $(+\infty)$ возможным значением функции $f(P)$.

Теорема 3. *Для всякой неотрицательной измеримой на измеримом множестве $\mathcal{E}$ функции существует возрастающая последовательность $\varphi_n(P)$ неотрицательных кусочно-постоянных на $\mathcal{E}$ функций с конечным числом конечных значений, которая стремится к $f(P)$ в каждой точке $\mathcal{E}$.*

Кроме множеств $\mathcal{E}_k^{(n)}$ предыдущей теоремы, построим еще множество $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}[f(P) = +\infty]$ и введем последовательность функций $\varphi_n(P)$ следующим образом:

$$\varphi_n(P) = f_n(P), \text{ если } f_n(P) \leqslant n$$

и $\varphi_n(P) = n$, если $f_n(P) > n$ или $P \in \mathcal{E}_0$. Нетрудно видеть, что функции $\varphi_n(P)$ удовлетворяют всем требованиям теоремы. В дальнейшем нам придется пользоваться упомянутыми теоремами.

47. Класс *B*. В [41] мы указали некоторое замкнутое тело точечных множеств, такое, что всякое множество, принадлежащее этому телу, входит в любое тело множеств L_G. Совершенно аналогично мы укажем сейчас некоторое семейство функций, такое, что любая функция этого семейства является измеримой функцией при всяком выборе измеряющей функции $G(\Delta)$.

Определение. *Функция $f(P)$, определенная на множестве $\mathcal{E}$, измеримом B, называется B-функцией, если множества*

$$\mathcal{E}[f \geqslant a]; \quad \mathcal{E}[f < a]; \quad \mathcal{E}[f > a]; \quad \mathcal{E}[f \leqslant a]$$

для любого вещественного a суть множества, измеримые B.

Из этого определения непосредственно следует, что всякая B-функция измерима при любом выборе $G(\Delta)$. Можно указать другое определение B-функций, вполне аналогичное тому определению множеств, измеримых B, которое мы приняли в [41]. Рассмотрим всевозможные семейства функций, обладающие следующими двумя свойствами: во-первых, семейство содержит все функции, непрерывные на $\mathcal{E}$, и, во-вторых, если семейство содержит последовательность функций $f_n(P)$, сходящуюся в каждой точке $\mathcal{E}$, то это семейство содержит и предельную функцию. Семейством B-функций назовем семейство функций, принадлежащих всем семействам функций с указанными выше двумя свойствами. Мы не останавливаемся на доказательстве эквивалентности последнего определения и того, которое было указано выше.

Войдем в некоторые подробности, связанные с последним определением. Всякая непрерывная функция есть B-функция, и обычно

говорят, что такая функция принадлежит нулевому классу. Если функция $f(P)$ является предельной функцией для последовательности непрерывных функций, сходящейся в каждой точке $\mathcal{E}$, причем сама функция $f(P)$ не является непрерывной, то говорят, что такая функция $f(P)$ принадлежит первому классу. Все функции первого класса также суть B-функции. Если функция $f(P)$ является предельной функцией для последовательности функций первого класса, сходящейся в каждой точке $\mathcal{E}$, причем сама функция $f(P)$ не является функцией первого класса, то говорят, что $f(P)$ принадлежит второму классу. Все функции второго класса также суть B-функции. Аналогичным образом определяются следующие классы функций, и все функции этих классов суть B-функции. В этом построении можно идти и дальше. Пусть $f(P)$ есть предельная функция для последовательности функций $f_n(P)$, причем каждая функция $f_n(P)$ принадлежит некоторому классу с конечным номером, и сама функция $f(P)$ не принадлежит ни одному классу с конечным номером. При этом говорят, что функция $f(P)$ принадлежит классу функций с трансфинитным номером ω. Все функции этого класса суть B-функции. Дальше определяется класс функций с трансфинитным номером $(\omega + 1)$ и т. д. Указанным выше методом можно получить все B-функции. Это утверждение требует дополнительных разъяснений, касающихся трансфинитных чисел, на чем мы не можем останавливаться.

Можно показать, что всякая функция $f(P)$, измеримая на множестве $\mathcal{E}$, измеримом B, эквивалентна на этом множестве некоторой B-функции $\varphi(P)$.

§ 3. Интеграл Лебега

48. Интеграл от ограниченной функции. Мы дадим сейчас обычное определение интеграла от ограниченной функции, пользуясь разбиениями на всевозможные измеримые множества, и докажем, что всякая измеримая ограниченная функция интегрируема. Пусть на измеримом множестве $\mathcal{E}$ конечной меры задана ограниченная функция точки $f(P)$, т. е. на $\mathcal{E}$ имеем $|f(P)| \leqslant L$, где L — некоторое положительное число. Разбиваем $\mathcal{E}$ на конечное число измеримых подмножеств $\mathcal{E}_k$, не имеющих попарно общих точек:

$$\mathcal{E} = \sum_{k=1}^{n} \mathcal{E}_k. \tag{1}$$

Пусть m_k и M_k — точная нижняя и точная верхняя границы значений $f(P)$ на $\mathcal{E}_k$. Составляем обычные суммы:

$$s_\delta = \sum_{k=1}^{n} m_k G(\mathcal{E}_k); \quad S_\delta = \sum_{k=1}^{n} M_k G(\mathcal{E}_k), \tag{2}$$

где δ обозначает подразделение (1) множества $\mathfrak{E}$. Суммы s_δ и S_δ ограничены для любых подразделений, а именно $|s_\delta|$ и $|S_\delta| \leqslant L \cdot G(\mathfrak{E})$. Пусть далее i — точная верхняя граница сумм s_δ и I — точная нижняя граница сумм S_δ для всевозможных подразделений $\mathfrak{E}$ на конечное число измеримых множеств.

Определение. *Если $i = I$, то мы говорим, что $f(P)$ интегрируема по $G(\mathfrak{E})$ на множестве $\mathfrak{E}$, и величину интеграла считаем равной i:*

$$i = \int_{\mathfrak{E}} f(P)\, G(d\mathfrak{E}).$$

Определенный так интеграл назовем интегралом Лебега — Стилтьеса. Если δ есть подразделение (1) и δ' — какое-либо другое подразделение

$$\mathfrak{E} = \sum_{k=1}^{n'} \mathfrak{E}'_k, \tag{3}$$

то произведением подразделений $\delta\delta'$ называется подразделение, состоящее из всевозможных частичных множеств $\mathfrak{E}_k\mathfrak{E}'_i$. Эти множества не имеют, очевидно, попарно общих точек. Некоторые из них могут быть и пустыми. Подразделение (3) называется продолжением подразделения (1), если каждое множество $\mathfrak{E}'_i$ является частью одного из $\mathfrak{E}_k$. Если δ_2 есть продолжение δ_1, то пишут $\delta_2 \geqslant \delta_1$.

Кроме сумм (2) мы составим, как и для интеграла Стилтьеса, сумму

$$\sigma_\delta = \sum_{k=i}^{n} f(P_k)\, G(\mathfrak{E}_k), \tag{4}$$

где P_k — некоторая точка из $\mathfrak{E}_k$. Для величин s_δ, S_δ, σ_δ, i и I справедливо все сказанное в [3].

Мы укажем сейчас такую последовательность подразделений для любой ограниченной измеримой на $\mathfrak{E}$ функции $f(P)$, что $S_\delta - s_\delta \to 0$, и тем самым σ_δ имеет определенный предел. Из этого следует, что существует интеграл i от $f(P)$ по $G(\mathfrak{E})$, и что s_δ, S_δ и σ_δ стремятся к i для упомянутой последовательности подразделений [3].

Итак, пусть имеется ограниченная функция $f(P)$, определенная и измеримая на $\mathfrak{E}$, и пусть m и M — точная нижняя и точная верхняя границы значений $f(P)$ на $\mathfrak{E}$. Разбиваем промежуток $[m, M]$ изменения функции на части промежуточными точками y_k:

$$m = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_{n-1} < y_n = M, \tag{5}$$

и пусть η — наибольшая из разностей $y_k - y_{k-1}$. Определяем следующее разбиение δ множества $\mathfrak{E}$ на частичные измеримые множества $\mathfrak{E}_k$:

$$\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}[y_0 \leqslant f(x) \leqslant y_1]: \quad \mathfrak{E}_x = \mathfrak{E}[y_{k-1} < f(x) \leqslant y_k] \tag{6}$$

$$(k = 2,\ 3, \ldots,\ n).$$

Из этого определения множеств $\mathfrak{E}_k$ непосредственно вытекает, что $y_{k-1} \leqslant m_k$ и $y_k \geqslant M_k$ и, таким образом,

$$\sum_{k=1}^{n} y_{k-1} G(\mathfrak{E}_k) \leqslant s_\delta \leqslant S_\delta \leqslant \sum_{k=1}^{n} y_k G(\mathfrak{E}_k) \tag{7}$$

и тем более

$$\sum_{k=1}^{n} y_{k-1} G(\mathfrak{E}_k) \leqslant i \leqslant I \leqslant \sum_{k=1}^{n} y_k G(\mathfrak{E}_k). \tag{8}$$

Рассмотрим разность между крайними суммами:

$$\sum_{k=1}^{n} y_k G(\mathfrak{E}_k) - \sum_{k=1}^{n} y_{k-1} G(\mathfrak{E}_k) = \sum_{k=1}^{n} (y_k - y_{k-1}) G(\mathfrak{E}_k). \tag{9}$$

Принимая во внимание, что $y_k - y_{k-1} \leqslant \eta$ и аддитивность $G(\mathfrak{E})$, получим

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} y_k G(\mathfrak{E}_k) - \sum_{k=1}^{n} y_{k-1} G(\mathfrak{E}_k) \leqslant \eta G(\mathfrak{E}), \tag{10}$$

и, таким образом, при $\eta \to 0$ написанная разность стремится к нулю. Отсюда, в силу (7) и (8), непосредственно следует, что $i = I$ и $S_\delta - s_\delta \to 0$. Подразделение (6) основного множества $\mathfrak{E}$ на частичные множества $\mathfrak{E}_k$ назовем подразделением Лебега. Оно определяется подразделением (5) промежутка $[m, M]$ изменения функции $f(P)$. Соответствующие подразделению (6) суммы, входящие в неравенства (7) и (8), назовем суммами Лебега. Из сказанного выше вытекает следующая основная теорема.

Основная теорема. *Ограниченная измеримая функция $f(P)$, заданная на измеримом множестве $\mathfrak{E}$ конечной меры, интегрируема на $\mathfrak{E}$, и величина интеграла равна пределу сумм Лебега или сумм σ_δ при любом выборе точек P_k для подразделений Лебега при беспредельном измельчании подразделений промежутка $[m, M]$ изменения функции $f(P)$ на части.*

Отметим, что, как известно, суммы σ_δ будут иметь тот же предел и для любых продолжений тех подразделений, о которых говорится в основной теореме. Поскольку интеграл определяется обычным образом, как предел сумм σ_δ, он сохраняет и обычные свойства интеграла Римана и классического интеграла Стилтьеса. К доказательству этих свойств мы и перейдем в следующем параграфе.

Построенный интеграл мы назвали интегралом Лебега — Стилтьеса. Просто интегралом Лебега назовем построенный выше интеграл в том частном случае, когда $G(\Delta)$ есть площадь промежутка Δ.

Мы видели, что всякая ограниченная функция с конечным числом точек разрыва непрерывности измерима. Пусть имеется такая функция $f(P)$ на конечном замкнутом промежутке Δ. Мы знаем, что такая функция интегрируема в смысле Римана по промежутку Δ. Она, как ограниченная измеримая функция, интегрируема и по Лебегу. Покажем, что интеграл Лебега совпадает с интегралом Римана. Действительно, чтобы получить интеграл Лебега, достаточно взять какую-либо последовательность подразделений промежутка Δ на измеримые множества, для которой сумма (4) имеет определенный предел, который и дает величину интеграла Лебега. Но раз функция интегрируема по Риману, то уже подразделения Δ на промежутки при беспредельном измельчании частичных промежутков приводит к определенному пределу для сумм (4), и этот предел есть интеграл Римана. Из этих рассуждений и следует совпадение интегралов Лебега и Римана.

Как показал Лебег, для существования интеграла Римана по промежутку Δ необходимо и достаточно следующее: $f(P)$ ограничена и множество ее точек разрыва имеет лебегову меру, равную нулю [ср. **10**]. Такая функция, как мы указывали выше, измерима и по Лебегу. Совпадение интегралов Лебега и Римана может быть доказано совершенно так же, как и выше. Таким образом, всякая функция, интегрируемая на конечном замкнутом промежутке по Риману (в собственной смысле), интегрируема и по Лебегу, причем интегралы Лебега и Римана совпадают.

49. Свойства интеграла. Приведем основные свойства интеграла Лебега — Стилтьеса. Во всех следующих теоремах считается, что $\mathfrak{E}$ есть измеримое множество конечной меры.

1. Если c — постоянная, то

$$\int_{\mathfrak{E}} cG(d\mathfrak{E}) = cG(\mathfrak{E}). \tag{11}$$

Для любого подразделения δ суммы s_δ и S_δ имеют значение $cG(\mathfrak{E})$, откуда и следует (11) [**3**].

2. Если $f_1(P)$ и $f_2(P)$ ограничены и измеримы на $\mathfrak{E}$, то

$$\int_{\mathfrak{E}} [f_1(P) + f_2(P)]\, G(d\mathfrak{E}) = \int_{\mathfrak{E}} f_1(P)\, G(d\mathfrak{E}) + \int_{\mathfrak{E}} f_2(P)\, G(d\mathfrak{E}). \tag{12}$$

Пусть δ_n и δ_n' — подразделения, при которых σ_{δ_n} для функции $f_1(P)$ и $\sigma_{\delta_n'}$ для $f_2(P)$ имеют пределом соответствующие интегралы. Для подразделения $\delta_n'' = \delta_n\delta_n'$ суммы $\sigma_{\delta_n''}$ как для $f_1(P)$, так и для $f_2(P)$ имеют пределом соответствующие интегралы, и (12) получается непосредственно на основании теоремы о пределе суммы. В дальнейшем

мы не будем оговаривать измеримости и ограниченности функций.

3. $$\int_{\mathscr{E}} \sum_{k=1}^{p} c_k f_k(P)\, G(d\mathscr{E}) = \sum_{k=1}^{p} c_k \int_{\mathscr{E}} f_k(P)\, G(d\mathscr{E}). \tag{13}$$

Вынесение постоянного множителя за знак интеграла непосредственно следует из возможности вынесения этого множителя за скобку в суммах σ_{δ_n}. Кроме того, надо несколько раз применить свойство 2.

4. Если $f(P) \geqslant 0$ на $\mathscr{E}$, то

$$\int_{\mathscr{E}} f(P)\, G(d\mathscr{E}) \geqslant 0. \tag{14}$$

Все суммы σ_{δ_n} неотрицательны.

5. Если $f_1(P) \geqslant f_2(P)$, то

$$\int_{\mathscr{E}} f_1(P)\, G(d\mathscr{E}) \geqslant \int_{\mathscr{E}} f_2(P)\, G(d\mathscr{E}). \tag{15}$$

Достаточно применить 4 к разности $f_1(P) - f_2(P)$ и воспользоваться 3.

6. $$\left| \int_{\mathscr{E}} f(P)\, G(d\mathscr{E}) \right| \leqslant \int_{\mathscr{E}} |f(P)|\, G(d\mathscr{E}). \tag{16}$$

Для доказательства достаточно взять произведение разбиений (8) для f и $|f|$ и написать аналогичное неравенство для сумм σ_δ.

7. Если $a \leqslant f(P) \leqslant b$ на $\mathscr{E}$, то

$$a\, G(\mathscr{E}) \leqslant \int_{\mathscr{E}} f(P)\, G(d\mathscr{E}) \leqslant b\, G(\mathscr{E}) \tag{17}$$

непосредственно вытекает из 5 и 1.

8. Если $|f(P)| \leqslant L$, то

$$\left| \int_{\mathscr{E}} f(P)\, G(d\mathscr{E}) \right| \leqslant L\, G(\mathscr{E}). \tag{18}$$

Из условия следует, что $-L \leqslant f(P) \leqslant +L$ и неравенство (18) является следствием свойства 7.

9. Если $\mathscr{E} = \mathscr{E}' + \mathscr{E}''$, где $\mathscr{E}'$ и $\mathscr{E}''$ измеримы и без общих точек, то

$$\int_{\mathscr{E}} f(P)\, G(d\mathscr{E}) = \int_{\mathscr{E}'} f(P)\, G(d\mathscr{E}) + \int_{\mathscr{E}''} f(P)\, G(d\mathscr{E}). \tag{19}$$

Для доказательства достаточно взять подразделения (8) множеств $\mathscr{E}'$ и $\mathscr{E}''$, составить σ_δ для этих подразделений и взять их

сумму. Эта последняя сумма будет иметь определенный предел, чем и будет доказана формула (19).

10. Если $\mathfrak{E}$ разбита на конечное или счетное число измеримых множеств $\mathfrak{E}_k$, то

$$\int_{\mathfrak{E}} f(P)\,G(d\mathfrak{E}) = \sum_k \int_{\mathfrak{E}_k} f(P)\,G(d\mathfrak{E}). \tag{20}$$

Для конечного числа слагаемых формула непосредственно следует из многократного применения свойства 9. Рассмотрим случаи бесконечного числа множеств $\mathfrak{E}_k$. Пусть $|f(P)| \leqslant L$. Мы можем написать $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2 + \ldots + \mathfrak{E}_n + R_n$, где $R_n = \mathfrak{E} - (\mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2 + \ldots + \mathfrak{E}_n)$ есть очевидно исчезающая последовательность множеств, и, следовательно, $G(R_n) \to 0$ [**37**]. Применяя свойство для конечного числа слагаемых, получим

$$\int_{\mathfrak{E}} f(P)\,G(d\mathfrak{E}) = \sum_{k=1}^{n} \int_{\mathfrak{E}_k} f(P)\,G(d\mathfrak{E}) + \int_{R_n} f(P)\,G(d\mathfrak{E}). \tag{21}$$

Для последнего интеграла имеем оценку

$$\left| \int_{R_n} f(P)\,G(d\mathfrak{E}) \right| \leqslant LG(R_n),$$

и формула (21), в силу $G(R_n) \to 0$, в пределе даст (20). Доказанное свойство называют обычно полной аддитивностью интеграла.

11. *При любом заданном* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\eta > 0$, *что*

$$\int_e f(P)\,G(d\mathfrak{E}) \leqslant \varepsilon, \tag{22}$$

если $e \subset \mathfrak{E}$ *и* $G(e) \leqslant \eta$.

Это свойство непосредственно следует из оценки

$$\left| \int_e f(P)\,G(d\mathfrak{E}) \right| \leqslant LG(e).$$

Оно называется обычно *абсолютной непрерывностью интеграла.*

12. *Если* $\mathfrak{E}$ *— множество меры нуль, т. е.* $G(\mathfrak{E}) = 0$, *то для любой ограниченной на* $\mathfrak{E}$*-функции*

$$\int_{\mathfrak{E}} f(P)\,G(d\mathfrak{E}) = 0.$$

Функция $f(P)$ измерима на $\mathfrak{E}$ [**42**], и для любого подразделения суммы s_δ и S_δ равны нулю.

13. *Если* $f(P)$ *и* $g(P)$ *эквивалентны на* $\mathfrak{E}$, *то*

$$\int_{\mathfrak{E}} f(P)\,G(d\mathfrak{E}) = \int_{\mathfrak{E}} g(P)\,G(d\mathfrak{E}). \tag{23}$$

Пусть A та часть $\mathfrak{E}$, где $f \neq g$. Это множество A, по условию, есть множество меры нуль. На множестве $\mathfrak{E}' = \mathfrak{E} - A$ функции $f(P)$ и $g(P)$ совпадают. Таким образом, получаем два равенства:

$$\int_{A} f(P)\,G(d\mathfrak{E}) = \int_{A} g(P)\,G(d\mathfrak{E}) = 0;$$

$$\int_{\mathfrak{E}'} f(P)\,G(d\mathfrak{E}) = \int_{\mathfrak{E}'} g(P)\,G(d\mathfrak{E}),$$

сложение которых и дает (23).

14. Если $f(P) \geqslant 0$ на $\mathfrak{E}$ и

$$\int_{\mathfrak{E}} f(P)\,G(d\mathfrak{E}) = 0, \tag{24}$$

то $f(P)$ эквивалентна нулю. Нам надо доказать, что мера множества $\mathfrak{E}[f > 0]$ равна нулю. Это множество можно представить в виде суммы множеств

$$\mathfrak{E}[f > 0] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{E}\left[f > \frac{1}{n}\right],$$

и если его мера положительна, то положительной будет и мера по крайней мере одного из слагаемых множеств. Пусть, например, мера множества $B = \mathfrak{E}\left[f > \frac{1}{n_0}\right]$ положительна. Разбиваем интеграл на два слагаемых:

$$\int_{\mathfrak{E}} f(P)\,G(d\mathfrak{E}) = \int_{B} f(P)\,G(d\mathfrak{E}) + \int_{\mathfrak{E}-B} f(P)\,G(d\mathfrak{E}). \tag{25}$$

В силу $f \geqslant 0$ второе слагаемое неотрицательно. На множестве B мы имеем $f > \frac{1}{n_0}$, и, следовательно, первое слагаемое $\geqslant \frac{1}{n_0} G(B)$. Таким образом, в силу $G(B) > 0$, левая часть формулы положительна, что противоречит (24).

15. Если $f_n(P)$ — последовательность функций, измеримых на $\mathfrak{E}$ и равномерно ограниченных, т. е. $|f_n(P)| \leqslant L$, где L — определенное положительное число (не зави-

сящее от n) и эта последовательность почти везде на $\mathfrak{E}$ стремится к предельной функции $f(P)$, то

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathfrak{E}} f_n(P)\,G(d\mathfrak{E})=\int_{\mathfrak{E}} f(P)\,G(d\mathfrak{E}). \tag{26}$$

Предельная функция $f(P)$ почти везде на $\mathfrak{E}$ удовлетворяет неравенству $|f(P)|\leqslant L$. Переходя, если надо, к эквивалентной функции, можем считать, что указанное неравенство удовлетворяется везде на $\mathfrak{E}$. Интеграл от измеримой и ограниченной функции $f(P)$ на $\mathfrak{E}$ имеет смысл.

Составим интеграл от разности $f(P)-f_n(P)$ и применим к нему свойство 6:

$$\left|\int_{\mathfrak{E}}[f(P)-f_n(P)]\,G(d\mathfrak{E})\right|\leqslant\int_{\mathfrak{E}}|f(P)-f_n(P)|\,G(d\mathfrak{E}). \tag{27}$$

Пусть ε — заданное положительное число и $\mathfrak{E}_n$ — множество тех точек $\mathfrak{E}$, в которых $|f(P)-f_n(P)|\geqslant\varepsilon$. В силу теоремы 6 из [44], $G(\mathfrak{E}_n)\to 0$. В точках множества $(\mathfrak{E}-\mathfrak{E}_n)$ выполняется нёравенство $|f(P)-f_n(P)|<\varepsilon$. Кроме того, в любой точке P из $\mathfrak{E}$ имеем

$$|f(P)-f_n(P)|\leqslant|f(P)|+|f_n(P)|\leqslant 2L.$$

Интеграл, стоящий в правой части (27), разобьем на два:

$$\int_{\mathfrak{E}}|f(P)-f_n(P)|\,G(d\mathfrak{E})=$$

$$=\int_{\mathfrak{E}_n}|f(P)-f_n(P)|\,G(d\mathfrak{E})+\int_{\mathfrak{E}-\mathfrak{E}_n}|f(P)-f_n(P)|\,G|(d\mathfrak{E}).$$

Отсюда в силу сказанного выше, следует

$$\int_{\mathfrak{E}}|f(P)-f_n(P)|\,G(d\mathfrak{E})\leqslant 2LG(\mathfrak{E}_n)+\varepsilon\,G(\mathfrak{E}-\mathfrak{E}_n),$$

или, тем более,

$$\int_{\mathfrak{E}}|f(P)-f_n(P)|\,G(d\mathfrak{E})\leqslant 2LG(\mathfrak{E}_n)+\varepsilon\,G(\mathfrak{E}).$$

Из $G(\mathfrak{E}_n)\to 0$ следует далее, что существует такое N, что $G(\mathfrak{E}_n)\leqslant\varepsilon$ при $n>N$, и таким образом

$$\int_{\mathfrak{E}}|f(P)-f_n(P)|\,G(d\mathfrak{E})\leqslant[2L+G(\mathfrak{E})]\,\varepsilon\quad\text{при}\quad n>N.$$

Сравнивая с (27), получаем

$$\left|\int_{\mathfrak{E}} f(P)\,G(d\mathfrak{E}) - \int_{\mathfrak{E}} f_n(P)\,G(d\mathfrak{E})\right| \leqslant [2L + G(\mathfrak{E})]\,\varepsilon \quad \text{при} \quad n > N,$$

откуда, в силу произвольности ε, и следует (26). Отметим, что для доказательства (26) достаточно предположить, что $|f_n(P)| \leqslant L$ лишь почти везде на $\mathfrak{E}$. Переходя к эквивалентным функциям, если это необходимо, можем считать, что указанное неравенство соблюдается везде на $\mathfrak{E}$. Доказанное свойство устанавливает возможность предельного перехода под знаком интеграла при единственном предположении ограниченности $f_n(P)$ по абсолютной величине, независимо от значка n. Аналогичное свойство для интеграла Стилтьеса было нами указано в [11]. Оно является непосредственным следствием доказанной теоремы, поскольку при непрерывности $f_n(P)$ и $f(P)$ интеграл Лебега — Стилтьеса сводится к интегралу Стилтьеса. Отметим, что при формулировке свойства 15 можно заменить сходимость $f_n(P)$ к $f(P)$ почти везде сходимостью по мере. Доказательство в существенном остается тем же.

16. Если на множестве $f(P)$ имеем $m < f(P) \leqslant M$, то функция

$$g(y) = G(\mathfrak{E}[m < f(P) \leqslant y])$$

есть возрастающая функция y, и интеграл Лебега — Стилтьеса сводится к интегралу Стилтьеса согласно следующей формуле:

$$\int_{\mathfrak{E}} f(P)\,G(d\mathfrak{E}) = \int_m^M y\,dg(y). \tag{28}$$

Для того, чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что суммы Лебега (8) суть обычные суммы s_δ и S_δ для интеграла Стилтьеса, стоящего в правой части (28).

Для случая интеграла Лебега, т. е. для того случая, когда $G(\Delta)$ есть площадь промежутка, интеграл часто обозначают следующим образом:

$$\iint_{\mathfrak{E}} f(x,\ y)\,dx\,dy.$$

Для случая прямой линии и трехмерного пространства пользуются аналогичным образом следующими обозначениями для интеграла Лебега:

$$\int_{\mathfrak{E}} f(x)\,dy \quad \text{и} \quad \int_{\mathfrak{E}} f(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz.$$

50. Интеграл от неограниченной неотрицательной функции. Определим теперь интеграл для того случая, когда $f(P)$ есть неограниченная и неотрицательная измеримая функция

на измеримом множестве $\mathcal{E}$ конечной меры. В данном случае будем разбивать $\mathcal{E}$ не только на конечное, но и на счетное число измеримых подмножеств $\mathcal{E}_k$. В остальном построение интеграла будет совершенно таким же, что и для случая ограниченной функции. Пусть имеется некоторое разбиение $\mathcal{E}_k$:

$$\mathcal{E} = \sum_k \mathcal{E}_k. \tag{29}$$

Строим соответствующие ему суммы s_δ и S_δ:

$$s_\delta = \sum_k m_k G(\mathcal{E}_k); \qquad S_\delta = \sum_k M_k G(\mathcal{E}_k). \tag{30}$$

В данном случае будем иметь бесконечные ряды с неотрицательными слагаемыми, и некоторые из чисел m_k и M_k могут равняться $(+\infty)$. Если для какого-либо слагаемого $G(\mathcal{E}_k) = 0$, то соответствующее слагаемое мы считаем равным нулю и в том случае, когда первый множитель m_k или M_k равен $(+\infty)$. Суммы рядов (30) не зависят от порядка слагаемых [**I; 134**]. Отметим еще, что если взять конечное разбиение δ, то в сумме S_δ по крайней мере одно из чисел M_k будет равно $+\infty$ в силу неограниченности $f(P)$. Суммы s_δ и S_δ могут принимать и бесконечные значения. Они имеют те же свойства, что и конечные суммы s_δ и S_δ, которыми мы пользовались раньше. Пусть, как и раньше, i — точная верхняя граница s_δ и I — точная нижняя граница S_δ. Эти числа могут равняться и $(+\infty)$. Мы покажем, как и для случая ограниченной функции, что $i = I$. Разбиваем множество $\mathcal{E}$ на части следующим образом: выделяем из него сперва то множество $\mathcal{E}_0$, на котором $f(P) = +\infty$, если такое множество есть, а оставшееся множество разбиваем на множества $\mathcal{E}_k$ следующим образом: подразделяем промежуток $[0, +\infty)$ на части $0 = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots$ и строим множества

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}[y_0 \leqslant f \leqslant y_1]; \qquad \mathcal{E}_k = \mathcal{E}[y_{k-1} < f \leqslant y_k]. \tag{31}$$

Мы имеем очевидно $m_k \geqslant y_{k-1}$, $M_k \leqslant y_k$ и

$$(+\infty) G(\mathcal{E}_0) + \sum_{k=1}^{\infty} y_{k-1} G(\mathcal{E}_k) \leqslant s_\delta \leqslant S_\delta \leqslant (+\infty) G(\mathcal{E}_0) + \sum_{l=k}^{\infty} y_k G(\mathcal{E}_k) \tag{32}$$

и, тем более,

$$(+\infty) G(\mathcal{E}_0) + \sum_{k=1}^{\infty} y_{k-1} G(\mathcal{E}_k) \leqslant i \leqslant I \leqslant (+\infty) G(\mathcal{E}_0) + \sum_{k=1}^{\infty} y_k G(\mathcal{E}_k). \tag{33}$$

Если $G(\mathscr{E}_0) > 0$, то, очевидно, $i = I = +\infty$. Положим теперь, что $G(\mathscr{E}_0) = 0$. При этом неравенства (32) и (33) перепишутся в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_{k-1} G(\mathscr{E}_k) \leqslant s_\delta \leqslant S_\delta \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} y_k G(\mathscr{E}_k); \tag{34}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_{k-1} G(\mathscr{E}_k) \leqslant i \leqslant I \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} y_k G(\mathscr{E}_k). \tag{34$_1$}$$

Будем предполагать, что разбиение промежутка $[0, \infty)$ таково, что разности $(y_k - y_{k-1})$ $(k = 1, 2, \ldots)$ ограничены. Пусть η — их точная верхняя граница. Принимая во внимание, что $y_k \leqslant y_{k-1} + \eta$, можем написать

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_k G(\mathscr{E}_k) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} y_{k-1} G(\mathscr{E}_k) + \eta G(\mathscr{E}). \tag{35}$$

Отсюда непосредственно следует, что если при некотором разбиении с конечным η сумма, стоящая в правой части (34), равна $(+\infty)$, тогда то же можно утверждать и относительно суммы, стоящей в левой части (34). При этом, в силу (34$_1$), $i = I = +\infty$. Наоборот, если $I = +\infty$, то, в силу (34$_1$), сумма, стоящая в левой части (35), равна $(+\infty)$ при любом разбиении с конечным η, а потому и сумма, стоящая в правой части (35), также равна $(+\infty)$, и, в силу (34$_1$), $i = +\infty$. Отсюда, в силу (34), следует, что если при некотором разбиении с конечным η сумма S_δ равна $(+\infty)$, то и s_δ равна $(+\infty)$, и при этом s_δ и S_δ равны $(+\infty)$ для любого разбиения с конечным η. В этих случаях $i = I = +\infty$. В случае конечности сумм мы имеем, как и в [**49**]:

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} y_k G(\mathscr{E}_k) - \sum_{k=1}^{\infty} y_{k-1} G(\mathscr{E}_k) \leqslant \eta G(\mathscr{E}),$$

и при $\eta \to 0$ написанная разность стремится к нулю, откуда и следует $i = I$. При этом обе суммы Лебега (34), а также суммы s_δ и S_δ при $\eta \to 0$ стремятся к величине интеграла. То же можно утверждать и относительно суммы

$$\sigma_\delta = \sum_{k=1}^{\infty} f(P_k) G(\mathscr{E}_k) \tag{36}$$

при любом выборе P_k из $\mathscr{E}_k$. В случае $i = I = +\infty$ и сумма (36) равна, очевидно, $(+\infty)$. Если s_{δ_n}, S_{δ_n} и σ_{δ_n} стремятся к величине интеграла (случай конечного интеграла) и $\delta_n' \geqslant \delta_n$, тогда то же можно утверждать и относительно сумм $s_{\delta_n'}$, $S_{\delta_n'}$ и $\sigma_{\delta_n'}$.

Основная теорема из [49] без изменения переносится на случай неограниченных неотрицательных и измеримых функций. Особо важным является тот случай, когда величина интеграла конечна. В этом случае функция $f(P)$ называется суммируемой на множестве $\mathcal{E}$. Из сказанного выше непосредственно вытекает, что для суммируемости функции необходимо, чтобы множество $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}[f = +\infty]$ было множеством меры нуль.

Укажем другое определение интеграла от неограниченной неотрицательной и измеримой функции, которое равносильно данному выше определению. Обозначим через $[f(P)]_N$ ограниченную неотрицательную функцию, определенную следующим образом:

$$[f(P)]_N = \begin{cases} f(P), & \text{если } f(P) \leqslant N, \\ N, & \text{если } f(P) > N. \end{cases} \tag{37}$$

Измеримость этой функции непосредственно следует из формулы $\mathcal{E}[[f]_N > a] = \mathcal{E}[f > a]$ при $a < N$ и $\mathcal{E}[[f]_N > a] = \Lambda$ при $a \geqslant N$ где Λ — пустое множество. Составим интегралы

$$i_N = \int_{\mathcal{E}} [f]_N G(d\mathcal{E}). \tag{38}$$

При возрастании N они возрастают и предел этой монотонной переменной (конечный или бесконечный) при $N \to +\infty$ мы и назовем интегралом от $f(P)$. Покажем, что это новое определение интеграла равносильно прежнему. Положим сначала, что множество $\mathcal{E}_0$, на котором $f(P) = +\infty$, имеет меру нуль. Величина интеграла (38) равна верхней границе i_N сумм $s_\delta^{(N)}$ для функции $[f]_N$. Эти суммы не превосходят соответствующих сумм s_δ для f, и потому $i_N \leqslant i$. Нам надо доказать, что монотонная переменная i_N при $N \to +\infty$ имеет предел i. Доказываем от обратного. Пусть $i_N \to i' < i$ (тем самым i' конечно). Мы можем взять такую сумму s_δ для $f(P)$, что $s_\delta > i'$. Удержим в этой сумме конечное число слагаемых таким образом, чтобы и для полученной конечной суммы s'_δ мы имели бы $s'_\delta > i'$:

$$s'_\delta = \sum_k{}' m_k G(E_k) > i', \tag{*}$$

где сумма конечна, и суммирование распространяется на оставленные слагаемые, что указано штрихом у знака суммы. Если $m_k = +\infty$, то $f(P) = +\infty$ во всех точках $\mathcal{E}_k$, т. е. $\mathcal{E}_k \subset \mathcal{E}_0$, а потому $G(\mathcal{E}_k) = 0$, ибо по условию $G(\mathcal{E}_0) = 0$. Соответствующее слагаемое написанной суммы считается, как мы указывали выше, равным нулю, и мы можем его не писать. Таким образом, можно считать, что во

всех слагаемых суммы (*) все числа m_k конечны. Составим аналогичную сумму для $[f]_N$:

$$s'^{(N)}_{\delta} = \sum_k{}' m_k^{(N)} G(\mathcal{E}_k) \qquad (m_k^{(N)} = \inf [f]_N \text{ на } \mathcal{E}_k).$$

Если число N больше всех чисел m_k, входящих в сумму (*) (этих чисел — конечное число), то $m_k^{(N)} = m_k$ и $s'^{(N)}_{\delta} = s'_{\delta} > i'$. Тем более полная сумма $s^{(N)}_{\delta}$ для $[f]_N$ будет $> i'$, а следовательно, и $i_N = \sup s^{(N)}_{\delta} > i'$, а это противоречит тому, что i_N, возрастая, стремится к i'. Таким образом, $i_N \to i$, и *при втором определении интеграла величина интеграла оказывается той же, что и при первом определении.*

Если $G(E_0) > 0$, то при первом определении величина интеграла равна $(+\infty)$. Покажем, что то же будет и при втором определении. Принимая во внимание неотрицательность функции $[f]_N$, имеем

$$i_N = \int_{\mathcal{E}} [f]_N \, G(d\mathcal{E}) \geqslant \int_{\mathcal{E}_0} [f]_N \, G(d\mathcal{E}) = NG(\mathcal{E}_0),$$

ибо согласно определению $[f]_N = N$ во всех точках $\mathcal{E}_0$. Из неравенства $i_N \geqslant NG(\mathcal{E}_0)$ непосредственно следует $i_N \to +\infty$ при $N \to +\infty$, что и требовалось доказать.

51. Свойства интеграла. Пользуясь суммами σ_δ, мы можем доказывать некоторые свойства интеграла от неограниченной неотрицательной функции совершенно так же, как это делали в [**49**]. Кроме того, при доказательстве свойств можем пользоваться и вторым определением интеграла. Отметим еще, что если $f(P)$ — ограниченная неотрицательная функция, то $[f(P)]_N$ совпадает с $f(P)$ при достаточно больших N, и новое определение интеграла совпадает с прежним из [**48**].

Переходим к доказательству свойств интеграла. Как и в [**49**], мы считаем, что $\mathcal{E}$ — измеримое множество конечной меры.

1. Если $f_k(P)$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ — суммируемые функции, то и их линейная комбинация с постоянными положительными коэффициентами есть суммируемая функция, и имеет место формула (13).

Доказательство то же, что и в [**49**].

2. Если $f(P)$ суммируема на $\mathcal{E}$, то она суммируема и на любой измеримой части $\mathcal{E}'$ множества $\mathcal{E}$.

Для $[f(P)]_N$, в силу неотрицательности и свойства 9 из [**49**], имеем

$$\int_{\mathcal{E}'} [f(P)]_N \, G(d\mathcal{E}) \leqslant \int_{\mathcal{E}} [f(P)]_N \, G(d\mathcal{E}).$$

Переходя к пределу, получим

$$\int_{\mathfrak{E}'} f(P)\, G(d\mathfrak{E}) \leqslant \int_{\mathfrak{E}} f(P)\, G(d\mathfrak{E}), \tag{39}$$

и если правая часть конечна, то левая и подавно конечна.

3. Если $f(P)$ суммируема на $\mathfrak{E}$ и множество $\mathfrak{E}$ разбито на конечное или счетное число измеримых множеств, то имеет место формула (20).

Рассмотрим случай бесконечного числа множеств $\mathfrak{E}_k$. Для ограниченной функции $[f]_N$ имеем

$$\int_{\mathfrak{E}} [f]_N\, G(d\mathfrak{E}) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathfrak{E}_k} [f]_N\, G(d\mathfrak{E}), \tag{40}$$

откуда следует

$$\int_{\mathfrak{E}} [f]_N\, G(d\mathfrak{E}) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathfrak{E}_k} f(P)\, G(d\mathfrak{E}). \tag{41}$$

Беспредельно увеличивая N, получаем

$$\int_{\mathfrak{E}} f(P)\, G(d\mathfrak{E}) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathfrak{E}_k} f(P)\, G(d\mathfrak{E}). \tag{42}$$

Докажем противоположное неравенство. Ввиду неотрицательности $f(P)$ можем написать, в силу (40), для любого конечного значения m

$$\int_{\mathfrak{E}} [f]_N\, G(d\mathfrak{E}) \geqslant \sum_{k=1}^{m} \int_{\mathfrak{E}_k} [f]_N\, G(d\mathfrak{E}).$$

Беспредельно увеличивая N, в пределе получим

$$\int_{\mathfrak{E}} f(P)\, G(d\mathfrak{E}) \geqslant \sum_{k=1}^{m} \int_{\mathfrak{E}_k} f(P)\, G(d\mathfrak{E}).$$

Увеличивая теперь беспредельно m, мы и приходим к неравенству

$$\int_{\mathfrak{E}} f(P)\, G(d\mathfrak{E}) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathfrak{E}_k} f(P)\, G(d\mathfrak{E}),$$

противоположному неравенству (42).

4. Если $\mathfrak{E}$ разбито на конечное или счетное число измеримых множеств $\mathfrak{E}_k$, функция $f(P)$ суммируема на каждом $\mathfrak{E}_k$ и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathfrak{E}_k} f(P)\, G(d\mathfrak{E}) \tag{43}$$

с неотрицательными слагаемыми имеет конечную сумму (сходится), то $f(P)$ суммируема на $\mathfrak{E}$, и имеет место формула (20).

Для функции $[f]_N$ мы имеем, как и выше, формулу (40) и неравенство (41), правая часть которого представляет собой конечное число. Из этого неравенства непосредственно следует, что интегралы (38) имеют конечный предел, т. е. $f(P)$ суммируема на $\mathfrak{E}$. После этого формула (20) непосредственно следует из предыдущего свойства.

5. Если $f(P)$ суммируема на $\mathfrak{E}$, то при любом заданном $\varepsilon > 0$ существует такое $\eta > 0$, что

$$\int_e f(P)\, G(d\mathfrak{E}) \leqslant \varepsilon \tag{44}$$

при $e \subset \mathfrak{E}$ и $G(e) \leqslant \eta$.

Мы можем фиксировать такое N, что

$$\int_{\mathfrak{E}} [f - [f]_N]\, G(d\mathfrak{E}) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \qquad (f \geqslant [f]_N).$$

При этом, в силу (39), для любого $e \subset \mathfrak{E}$ будет

$$\int_e [f - [f]_N]\, G(d\mathfrak{E}) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \text{ т. е. } \int_e f\, G(d\mathfrak{E}) \leqslant \int_e [f]_N\, G(d\mathfrak{E}) + \frac{\varepsilon}{2},$$

и при $G(e) \leqslant \frac{\varepsilon}{2N}$ мы получим требуемое неравенство.

Последние два свойства показывают, что интеграл от неограниченной неотрицательной функции обладает, как и интеграл от ограниченной функции, свойствами полной аддитивности и абсолютной непрерывности.

6. Если $\mathfrak{E}$ есть множество меры нуль, то интеграл от $f(P)$ равен нулю.

Доказательство то же, что и в [49].

7. Интегралы эквивалентных на $\mathfrak{E}$ функций равны.

8. Если интеграл от $f(P)$ равен нулю, то эта функция эквивалентна нулю.

9. Если $f_2(P) \leqslant f_1(P)$ на $\mathfrak{E}$ и $f_1(P)$ суммируема, то и $f_2(P)$ суммируема и имеет место неравенство

$$\int_{\mathfrak{E}} f_2(P)\, G(d\mathfrak{E}) \leqslant \int_{\mathfrak{E}} f_1(P)\, G(d\mathfrak{E}). \tag{45}$$

10. Если $\omega_k(P)$ — последовательность неотрицательных суммируемых на $\mathfrak{E}$-функций и

$$\int_{\mathfrak{E}} \omega_n(P)\, G(d\mathfrak{E}) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

то $\omega_n(P) \to 0$ по мере на $\mathfrak{E}$.

Доказательство свойств 7, 8 и 9 то же, что и в [**49**]. Неравенство (45) имеем право писать для $[f_2]_N$ и $[f_1]_N$ и, переходя к пределу при $N \to \infty$, получаем (45). Свойство 10 доказываем от обратного. Если $\omega_n(P)$ не $\to 0$ по мере, то существует такое $\delta > 0$, что $G(\mathfrak{E}_n)$ не $\to 0$, где $\mathfrak{E}_n = \mathfrak{E}[\omega_n(P) \geqslant \delta]$. Отсюда следует, что существует такая подпоследовательность $\mathfrak{E}_{n_k}$, что $G(\mathfrak{E}_{n_k}) \geqslant d$, где d — положительное число. Имеем

$$\int_{\mathfrak{E}} \omega_{n_k}(P)\, G(d\mathfrak{E}) \geqslant \int_{\mathfrak{E}_{n_k}} \omega_{n_k}(P)\, G(d\mathfrak{E}) \geqslant \delta G(\mathfrak{E}_{n_k}) \geqslant \delta d,$$

откуда следует, что интеграл, стоящий слева, не $\to 0$, а это противоречит условию.

Переходим теперь к определению интеграла Лебега — Стилтьеса для неограниченной функции, которая может менять знак. Для отрицательных (неположительных) функций мы можем определить интеграл, как и выше.

52. Функция любого знака. Пусть на измеримом множестве $\mathfrak{E}$ конечной меры задана измеримая вещественная функция $f(P)$, которая может принимать значения обоих знаков. Введем так называемые положительную и отрицательную части функции $f(P)$:

$$f^+(P) = \begin{cases} f(P), & \text{если } f(P) \geqslant 0; \\ 0, & \text{если } f(P) < 0; \end{cases}$$
$$f^-(P) = \begin{cases} -f(P), & \text{если } f(P) \leqslant 0; \\ 0, & \text{если } f(P) > 0. \end{cases} \tag{46}$$

Иначе это определение можем написать в виде

$$f^+(P) = \frac{1}{2}[|f(P)| + f(P)]; \qquad f^-(P) = \frac{1}{2}[|f(P)| - f(P)]. \tag{46$_1$}$$

Для функции $f(P)$ имеем представление в виде разности двух неотрицательных функций:

$$f(P)=f^{+}(P)-f^{-}(P).$$

Определение. *Функция $f(P)$ называется суммируемой на $\mathfrak{E}$, если $f^{+}(P)$ и $f^{-}(P)$ суммируемы на $\mathfrak{E}$. При этом величина интеграла от функции $f(P)$ определяется формулой*

$$\int_{\mathfrak{E}} f(P)\,G(d\mathfrak{E})=\int_{\mathfrak{E}} f^{+}(P)\,G(d\mathfrak{E})-\int_{\mathfrak{E}} f^{-}(P)\,G(d\mathfrak{E}). \tag{47}$$

Отметим, что если только одна из функций $f^{+}(P)$ или $f^{-}(P)$ суммируема, то последняя формула дает для интеграла от $f(P)$ определенное, но бесконечное значение. Например, если $f^{+}(P)$ суммируема, а $f^{-}(P)$ нет, то интеграл от $f(P)$ равен $(-\infty)$.

Теорема. *Для того чтобы $f(P)$ была суммируема на $\mathfrak{E}$, необходимо и достаточно, чтобы неотрицательная функция $|f(P)|$ была суммируема на $\mathfrak{E}$.*

Если $f(P)$ суммируема, то суммируемы $f^{+}(P)$ и $f^{-}(P)$, а следовательно, суммируема и их сумма $|f(P)|=f^{+}(P)+f^{-}(P)$. Наоборот, если суммируема сумма $f^{+}(P)+f^{-}(P)$, то, в силу свойства 9 из [**51**], суммируемо каждое слагаемое, а потому и функция $f(P)$ также суммируема. Отметим, что и для ограниченной функции мы можем произвести разбиение на положительную и отрицательную части и для интеграла будет также иметь место формула (47). В дальнейшем термином „суммируемая функция“ мы будем часто пользоваться и для ограниченной измеримой функции. Перейдем теперь к указанию основных свойств интеграла от суммируемой функции любого знака. Эти свойства вытекают почти непосредственно из аналогичных свойств интеграла от неотрицательных функций $f^{+}(P)$ и $f^{-}(P)$.

1. Если $f_k(P)$ $(k=1, 2, \ldots, p)$ — суммируемые функции, то и их линейная комбинация с постоянными коэффициентами есть суммируемая функция, и имеет место формула (13).

Суммируемость линейной комбинации непосредственно следует из неравенства

$$\left|\sum_{k=1}^{p} c_k f_k(P)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{p} |c_k|\,|f_k(P)|,$$

доказанной выше теоремы и свойства 1 из [**51**]. Для доказательства формулы (13) рассмотрим отдельно случай умножения функции на постоянную и случай сложения двух функций. Пусть $f(P)$ суммируема и c — постоянная. Надо доказать формулу

$$\int_{\mathfrak{E}} cf(P)\,G(d\mathfrak{E})=c\int_{\mathfrak{E}} f(P)\,G(d\mathfrak{E}).$$

Для определенности будем считать c отрицательной. При этом мы имеем $(cf)^+ = -cf^-$ и $(cf)^- = -cf^+$. Определение (47) дает нам

$$\int_{\mathfrak{E}} cf\,G(d\mathfrak{E}) = -c\int_{\mathfrak{E}} f^-\,G(d\mathfrak{E}) + c\int_{\mathfrak{E}} f^+\,G(d\mathfrak{E}) = c\int_{\mathfrak{E}} f\,G(d\mathfrak{E}),$$

и формула доказана. Положим теперь, что $f_1(P)$ и $f_2(P)$ — суммируемые функции. Нам надо доказать формулу

$$\int_{\mathfrak{E}} (f_1+f_2)\,G(d\mathfrak{E}) = \int_{\mathfrak{E}} f_1\,G(d\mathfrak{E}) + \int_{\mathfrak{E}} f_2\,G(d\mathfrak{E}). \tag{48}$$

Разложим функции f_1, f_2 и $f=f_1+f_2$ на положительную и отрицательную части

$$f_1 = f_1^+ - f_1^-; \quad f_2 = f_2^+ - f_2^-; \quad f = f^+ - f^-.$$

Мы имеем

$$f_1^+ + f_2^+ + f^- = f_1^- + f_2^- + f^+.$$

Все написанные функции неотрицательны и суммируемы. Применяя свойство 1 из [**51**], получим

$$\int_{\mathfrak{E}} f_1^+\,G(d\mathfrak{E}) + \int_{\mathfrak{E}} f_2^+\,G(d\mathfrak{E}) + \int_{\mathfrak{E}} f^-\,G(d\mathfrak{E}) =$$

$$= \int_{\mathfrak{E}} f_1^-\,G(d\mathfrak{E}) + \int_{\mathfrak{E}} f_2^-\,G(d\mathfrak{E}) + \int_{\mathfrak{E}} f^+\,G(d\mathfrak{E}),$$

откуда

$$\int_{\mathfrak{E}} f^+\,G(d\mathfrak{E}) - \int_{\mathfrak{E}} f^-\,G(d\mathfrak{E}) =$$

$$= \int_{\mathfrak{E}} f_1^+\,G(d\mathfrak{E}) - \int_{\mathfrak{E}} f_1^-\,G(d\mathfrak{E}) + \int_{\mathfrak{E}} f_2^+\,G(d\mathfrak{E}) - \int_{\mathfrak{E}} f_2^-\,G(d\mathfrak{E}),$$

что и доказывает формулу (48).

2. Если $f_1(P)$ и $f_2(P)$ суммируемы на $\mathfrak{E}$ и $f_1(P) \geqslant f_2(P)$, то имеет место формула (15).

По свойству 1, неотрицательная функция $f_1(P) - f_2(P)$ суммируема и интеграл от нее (он неотрицателен) равен разности интегралов от $f_1(P)$ и $f_2(P)$, что и приводит к (15).

3. Если $f(P)$ суммируема, то имеет место формула (16).

Неравенство (16) равносильно следующему очевидному неравенству:

$$\left|\int_{\mathfrak{E}} [f^+(P) - f^-(P)]\,G(d\mathfrak{E})\right| \leqslant \int_{\mathfrak{E}} [f^+(P) + f^-(P)]\,G(d\mathfrak{E}).$$

4. Если $f(P)$ суммируема на $\mathfrak{E}$, то она суммируема и на любой измеримой части $\mathfrak{E}'$ множества $\mathfrak{E}$.

5. Если $f(P)$ суммируема на $\mathfrak{E}$, и множество $\mathfrak{E}$ разбито на конечное или счетное число измеримых множеств $\mathfrak{E}_k$, то имеет место формула (20).

Последние два свойства следуют из того, что эти свойства имеют место для $f^+(P)$ и $f^-(P)$.

6. Если $\mathfrak{E}$ разбито на конечное или счетное число измеримых множеств $\mathfrak{E}_k$, функция $f(P)$ суммируема на каждом $\mathfrak{E}_k$ и ряд

$$\sum_{k=1}^{\alpha} \int_{\mathfrak{E}_k} |f(P)|\, G(d\mathfrak{E}) \tag{49}$$

сходится, то $f(P)$ суммируема на $\mathfrak{E}$ и имеет место формула (20).

Неотрицательная функция $|f(P)|$ суммируема на всех $\mathfrak{E}_k$, и из сходимости ряда (49) следует, в силу свойства 4 из [**51**], что $|f(P)|$ суммируема на $\mathfrak{E}$, а следовательно, и $f(P)$ суммируема на $\mathfrak{E}$. После этого формула (20) следует из предыдущего свойства. Отметим, что сходимости ряда (43) недостаточно для утверждения о суммируемости $f(P)$.

7. Если $f(P)$ суммируема на $\mathfrak{E}$, то при любом заданном $\varepsilon > 0$ существует такое $\eta > 0$, что

$$\left| \int_e f(P)\, G(d\mathfrak{E}) \right| \leqslant \varepsilon$$

при $e \subset \mathfrak{E}$ и $G(e) \leqslant \eta$.

Это свойство непосредственно следует из того, что оно имеет место для $f^+(P)$ и $f^-(P)$.

Таким образом, мы доказали полную аддитивность и абсолютную непрерывность для интеграла от любой суммируемой функции.

8. Если $\mathfrak{E}$ есть множество меры нуль, то интеграл от любой функции $f(P)$ по $\mathfrak{E}$ равен нулю.

9. Интегралы эквивалентных на $\mathfrak{E}$ функций равны.

Оба свойства приводятся к аналогичным свойствам для $f^+(P)$ и $f^-(P)$, при этом надо отметить, что если две функции эквивалентны, то их положительные и отрицательные части также эквивалентны.

10. Если $f(P)$ измерима на $\mathfrak{E}$, $F(P)$ — измерима, неотрицательна и суммируема на $\mathfrak{E}$ и $|f(P)| \leqslant F(P)$, то $f(P)$ суммируема, и имеет место формула

$$\left| \int_{\mathfrak{E}} f(P)\, G(d\mathfrak{E}) \right| \leqslant \int_{\mathfrak{E}} F(P)\, G(d\mathfrak{E}). \tag{50}$$

В силу свойства 9 из [51] можно утверждать, что $|f(P)|$ суммируема, а, следовательно, и $f(P)$ суммируема. Неравенство (50) непосредственно вытекает из свойства 3 и свойства 9 из [51]. Из доказанного непосредственно следует, что произведение суммируемой функции на ограниченную измеримую функцию есть также суммируемая функция.

Отметим еще два свойства интеграла, которые нам понадобятся в дальнейшем.

11. Если $f(P)$ суммируема на конечном промежутке Δ_0, и интеграл от нее по любому промежутку Δ, принадлежащему Δ_0, равен нулю, то $f(P)$ эквивалентна нулю на Δ_0.

Доказываем от обратного. Если $f(P)$ не эквивалентна нулю, то существует такое положительное число a, что одно из множеств $\Delta_0[f(P) \geqslant a]$ или $\Delta_0[f(P) \leqslant -a]$ имеет меру больше нуля. Пусть это будет первое множество, и обозначим его через $\mathfrak{E}$. Мы имеем

$$\int_{\mathfrak{E}} f(P)\, G(d\mathfrak{E}) \geqslant a\, G(\mathfrak{E}) > 0.$$

Но существуют такие множества e_1 и e_2 со сколь угодно малой мерой, что $\mathfrak{E} + e_1 = R + e_2$, где R — элементарная фигура, т. е. конечная сумма промежутков попарно без общих точек. По условию интеграл от $f(P)$ по R должен равняться нулю, и можем написать

$$\int_{\mathfrak{E}} f(P)\, G(d\mathfrak{E}) = \int_{e_2} f(P)\, G(d\mathfrak{E}) - \int_{e_1} f(P)\, G(d\mathfrak{E}).$$

В силу абсолютной непрерывности интеграла, правая часть может быть сделана сколь угодно малой по абсолютной величине, а слева стоит определенное положительное число. Мы пришли к нелепости, и высказанное выше утверждение доказано.

12. Если $f(P)$ суммируема на $\mathfrak{E}$ и удовлетворяет условию

$$\int_{\mathfrak{E}} \varphi(P) f(P)\, G(d\mathfrak{E}) = 0 \tag{51}$$

при любом выборе $\varphi(P)$, измеримой и ограниченной на $\mathfrak{E}$, то $f(P)$ эквивалентна нулю. Если условие (51) выполняется при любом выборе $\varphi(P)$, измеримой и ограниченной на $\mathfrak{E}$ и такой, что

$$\int_{\mathfrak{E}} \varphi(P)\, G(d\mathfrak{E}) = 0, \tag{52}$$

то $f(P)$ эквивалентна постоянной.

Пусть $\mathfrak{E}'$ — та часть $\mathfrak{E}$, где $f(P) \geqslant 0$. Выбираем за $\varphi(P)$ функцию, равную единице на $\mathfrak{E}'$ и нулю на $\mathfrak{E} - \mathfrak{E}'$. Условие (51) покажет нам, что интеграл от $f^+(P)$ по $\mathfrak{E}$ равен нулю, и отсюда, в силу свойства 8 из [**52**], следует, что $f^+(P)$ эквивалентна нулю. Аналогично доказывается, что $f^-(P)$ эквивалентна нулю, а потому и $f(P)$ эквивалентна нулю.

Перейдем к доказательству второй части утверждения. Обозначим через $kG(\mathfrak{E})$ величину интеграла от $f(P)$ по $\mathfrak{E}$. В силу (52) функция $f(P) - k$ также удовлетворяет условию (51), т. е.

$$\int_{\mathfrak{E}} \varphi(P)[f(P) - k]\, G(d\mathfrak{E}) = 0.$$

Кроме того, в силу определения k, при любом выборе постоянной c имеем

$$\int_{\mathfrak{E}} c[f(P) - k]\, G(d\mathfrak{E}) = 0. \tag{53}$$

Пусть $\psi(P)$ — любая измеримая ограниченная на $\mathfrak{E}$ функция, и $cG(\mathfrak{E})$ — величина интеграла от нее. Функция $\varphi(P) = \psi(P) - c$ удовлетворяет условию (52), и мы имеем

$$\int_{\mathfrak{E}} [\psi(P) - c][f(P) - k]\, G(d\mathfrak{E}) = 0$$

или, в силу (53):

$$\int_{\mathfrak{E}} \psi(P)[f(P) - k]\, G(d\mathfrak{E}) = 0,$$

откуда следует, в силу доказанного выше, что $f(P) - k$ эквивалентна нулю, т. е. $f(P)$ эквивалентна k.

В заключение настоящего параграфа рассмотрим интегралы Лебега — Стилтьеса от одного переменного. Пусть $g(x)$ — неубывающая функция, которая лежит в основе измерения, и $f(x)$ измерима относительно $g(x)$ и суммируема на измеримом множестве $\mathfrak{E}$ оси X или на промежутке $[a, b]$, или на промежутке $(a, b]$ и т. д. Соответствующие интегралы пишут в виде

$$\int_{\mathfrak{E}} f(x)\, dg(x) \quad \text{или} \quad \int_{[a,\, b]} f(x)\, dg(x), \quad \text{или} \quad \int_{(a,\, b]} f(x)\, dg(x) \text{ и т. д.}$$

Если $g(x) = x$, то получаем интеграл Лебега. В этом случае мера любой точки равна нулю, и неважно, причисляются или нет к промежутку его концы, и интеграл по промежутку обычно обозначается в виде

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

При этом мы считаем $a<b$. Кроме того, принимают следующее соглашение:

$$\int_b^a f(x)\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx.$$

53. Комплексные суммируемые функции. Нетрудно ввести понятие суммируемых функций и определить интеграл и для функции $f(P)$, принимающей комплексные значения. Разделим у такой функции вещественную и мнимую части

$$f(P)=f_1(P)+if_2(P).$$

Функция $f(P)$ называется суммируемой, если суммируемы $f_1(P)$ и $f_2(P)$, и интеграл от $f(P)$ определяется в этом случае формулой

$$\int_{\mathfrak{E}} f(P)\,G(d\mathfrak{E})=\int_{\mathfrak{E}} f_1(P)\,G(d\mathfrak{E})+i\int_{\mathfrak{E}} f_2(P)\,G(d\mathfrak{E}). \tag{54}$$

В данном случае имеет место доказанная выше теорема: для того чтобы $f(P)$ была суммируемой, необходимо и достаточно, чтобы модуль $|f(P)|$ был суммируемой функцией.

Заметим прежде всего, что в силу измеримости $f_1(P)$ и $f_2(P)$ будет измеримой и сумма квадратов этих функций, а потому и арифметическое значение квадратного корня из этой суммы, т. е. $|f|=\sqrt{f_1^2+f_2^2}$, что непосредственно следует из формулы

$$\mathfrak{E}[\sqrt{f_1^2+f_2^2}>a]=\mathfrak{E}[f_1^2+f_2^2>a^2].$$

Далее из неравенств

$$|f_1|\leqslant\sqrt{f_1^2+f_2^2};\qquad |f_2|\leqslant\sqrt{f_1^2+f_2^2};\qquad \sqrt{f_1^2+f_2^2}\leqslant|f_1|+|f_2|$$

и свойств 9 и 1 из [51] непосредственно следует, что суммируемость $|f_1|$ и $|f_2|$ равносильна суммируемости $|f|$, откуда и следует непосредственно приведенное выше утверждение.

Далее имеют место указанные выше свойства 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10, а при составлении линейной комбинации функций $f_k(P)$ можем применять комплексные постоянные коэффициенты e_k. Остановимся лишь на доказательстве свойства 3:

$$\left|\int_{\mathfrak{E}} f\,G(d\mathfrak{E})\right|\leqslant\int_{\mathfrak{E}}|f|\,G(d\mathfrak{E}). \tag{55}$$

Функции f_1, f_2 и $\sqrt{f_1^2+f_2^2}$ суммируемы, а потому для этих трех функций суммы $\sigma_{\delta_n}^{(1)}$, $\sigma_{\delta_n}^{(2)}$, $\sigma_{\delta_n}^{(3)}$, соответствующие их последовательности

подразделений Лебега, стремятся к интегралам от этих функций. Если мы возьмем последовательность подразделений $\delta_n = \delta_n^{(1)}\delta_n^{(2)}\delta_n^{(3)}$, то суммы σ_{δ_n} для функций f_1, f_2 и $\sqrt{f_1^2+f_2^2}$ и подавно будут стремиться к соответствующим интегралам. Если δ_n есть подразделение $\mathfrak{E}$ на части $\mathfrak{E}_k^{(n)}$ и $P_k^{(n)}$ — какие-либо точки из $\mathfrak{E}_k^{(n)}$, то мы имеем

$$\left|\sum_k [f_1(P_k^{(n)}) + if_2(P_k^{(n)})]\, G(\mathfrak{E}_k^{(n)})\right| \leqslant \sum_k \left|f_1(P_k^{(n)}) + if_2(P_k^{(n)})\right| G(\mathfrak{E}_k^{(n)}),$$

и в пределе получается (55).

54. Предельный переход под знаком интеграла. Мы докажем некоторые теоремы, касающиеся предельного перехода под знаком интеграла для суммируемых функций.

Теорема 1. *Если $f_n(P)$ — последовательность функций, суммируемых на множестве $\mathfrak{E}$ конечной меры, причем для всех этих функций имеет место оценка*

$$|f_n(P)| \leqslant F(P), \tag{56}$$

где $F(P)$ суммируема на $\mathfrak{E}$, и $f_n(P) \to f(P)$ почти везде на $\mathfrak{E}$, то $f(P)$ суммируема на $\mathfrak{E}$, и

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathfrak{E}} f_n(P)\, G(d\mathfrak{E}) = \int_{\mathfrak{E}} f(P)\, G(d\mathfrak{E}). \tag{57}$$

Из условий теоремы следует, что предельная функция почти везде на $\mathfrak{E}$ удовлетворяет неравенству

$$|f(P)| \leqslant F(P). \tag{56_1}$$

Переходя к эквивалентной функции, можем считать, что это неравенство выполнено везде на $\mathfrak{E}$. В силу свойства 10 из [**52**], $f_n(P)$ и $f(P)$ суммируемы на $\mathfrak{E}$ и потому почти везде на $\mathfrak{E}$ имеют конечные значения. Рассмотрим интеграл от разности $f(P) - f_n(P)$ и применим к нему свойство 10 из [**51**]:

$$\left|\int_{\mathfrak{E}} [f(P) - f_n(P)]\, G(d\mathfrak{E})\right| \leqslant \int_{\mathfrak{E}} |f(P) - f_n(P)|\, G(d\mathfrak{E}). \tag{58}$$

Пусть ε — заданное положительное число, и $\mathfrak{E}_n$ — те множества, принадлежащие $\mathfrak{E}$, о которых говорилось в теореме 6 из [**44**]. Мы имеем, в силу этой теоремы,

$$G(\mathfrak{E}_n) \to 0 \text{ и } |f(P) - f_n(P)| \leqslant \varepsilon, \text{ если } P \in \mathfrak{E} - \mathfrak{E}_n. \tag{59}$$

Кроме того, в любой точке P из $\mathfrak{E}$ имеем

$$|f(P) - f_n(P)| \leqslant |f(P)| + |f_n(P)| \leqslant 2F(P). \tag{60}$$

Интеграл, стоящий в правой части (58), разобьем на два:

$$\int_{\mathfrak{E}} |f(P)-f_n(P)|\,G(d\mathfrak{E}) =$$

$$= \int_{\mathfrak{E}_n} |f(P)-f_n(P)|\,G(d\mathfrak{E}) + \int_{\mathfrak{E}-\mathfrak{E}_n} |f(P)-f_n(P)\,G(d\mathfrak{E}).$$

Отсюда, в силу (59) и (60), следует

$$\int_{\mathfrak{E}} |f(P)-f_n(P)|\,G(d\mathfrak{E}) \leqslant 2\int_{\mathfrak{E}_n} F(P)\,G(d\mathfrak{E}) + \varepsilon\,G(\mathfrak{E}-\mathfrak{E}_n),$$

или тем более:

$$\int_{\mathfrak{E}} |f(P)-f_n(P)|\,G\ (d\mathfrak{E}) \leqslant 2\int_{\mathfrak{E}_n} F(P)\,G(d\mathfrak{E}) + \varepsilon G(\mathfrak{E}). \qquad (61)$$

Из $G(\mathfrak{E}_n)\to 0$ и абсолютной непрерывности интеграла от $F(P)$ следует, что существует такое N, что

$$\int_{\mathfrak{E}_n} F(P)\,G(d\mathfrak{E}) \leqslant \varepsilon \quad \text{при } n > N,$$

и, в силу (61),

$$\int_{\mathfrak{E}} |f(P)-f_n(P)|\,G(d\mathfrak{E}) \leqslant [2+G(\mathfrak{E})]\,\varepsilon \quad \text{при } n > N.$$

Сравнивая с (58), получаем

$$\left|\int_{\mathfrak{E}} f(P)\,G(d\mathfrak{E}) - \int_{\mathfrak{E}} f_n(P)\,G(d\mathfrak{E})\right| \leqslant [2+G(\mathfrak{E})]\,\varepsilon,$$

откуда, в силу произвольности ε, и следует (57). Как и при доказательстве свойства 15 из [**49**], достаточно предположить, что неравенство (56) удовлетворяется лишь почти везде на $\mathfrak{E}$.

Замечание. Нетрудно видеть, что при доказательстве теоремы мы использовали лишь сходимость $f_n(P)\to f(P)$ по мере, и тем самым при формулировке теоремы сходимость $f_n(P)\to f(P)$ почти везде можно заменить сходимостью по мере.

Теорема 2. *Если $f_n(P)$ — неубывающая последовательность функций, суммируемых на множестве $\mathfrak{E}$ конечной меры, то у предельной функции $f(P)$ интеграл по $\mathfrak{E}$ равен конечной величине или $(+\infty)$ и имеет место формула* (57).

Суммируемые функции $f_n(P)$ почти везде на $\mathfrak{E}$ конечны, и неубывающая последовательность $f_n(P)$ в каждой точке имеет предел, который может равняться и $(+\infty)$. Рассмотрим неубывающую последо-

вательность неотрицательных функций $f_n(P) - f_1(P)$. Мы имеем, очевидно,

$$0 \leqslant f_n(P) - f_1(P) \leqslant f(P) - f_1(P).$$

Если неотрицательная функция $f(P) - f_1(P)$ суммируема по $\mathfrak{E}$, то и $f(P)$ суммируема. Разность $f(P) - f_1(P)$ может играть роль функции $F(P)$ теоремы 1 и, применяя эту теорему получим

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathfrak{E}} [f_n(P) - f_1(P)]\, G(d\mathfrak{E}) = \int_{\mathfrak{E}} [f(P) - f_1(P)]\, G(d\mathfrak{E}).$$

Добавляя к обеим частям интеграл от $f_1(P)$, получаем (57). Положим теперь, что интеграл от $f(P) - f_1(P)$ равен $(+\infty)$. При этом [поскольку $f_1(P)$ суммируема] интеграл от $f(P)$ также равен $(+\infty)$. Отметим далее, что если некоторая последовательность $\varphi_n(P)$ почти везде стремится к $\varphi(P)$, то для любого N: $[\varphi_n(P)]_N \to [\varphi(P)]_N$ почти везде.

Чтобы доказать это, достаточно отметить, что если в некоторой точке $\varphi_n(P) \to \varphi(P)$, то в этой точке $[\varphi_n(P)]_N \to [\varphi(P)]_N$. В этом легко убедиться, разбирая отдельно случаи $\varphi(P) \leqslant N$ и $\varphi(P) > N$. Таким образом, неубывающая последовательность неотрицательных функций $[f_n(P) - f_1(P)]_N$ почти везде стремится к $[f(P) - f_1(P)]_N$. Предельная функция ограничена и тем более суммируема. В силу доказанного выше

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathfrak{E}} [f_n(P) - f_1(P)]_N\, G(d\mathfrak{E}) = \int_{\mathfrak{E}} [f(P) - f_1(P)]_N\, G(d\mathfrak{E}). \quad (62)$$

Пусть K — любое заданное положительное число. Ввиду того, что интеграл от $[f(P) - f_1(P)]$ равен $(+\infty)$, можно фиксировать такое N, чтобы интеграл, стоящий в правой части (62), был больше K. Таким образом, имеем, в силу (62), для всех достаточно больших n:

$$\int_{\mathfrak{E}} [f_n(P) - f_1(P)]_N\, G(d\mathfrak{E}) > K,$$

и тем более

$$\int_{\mathfrak{E}} [f_n(P) - f_1(P)]\, G(d\mathfrak{E}) > K.$$

Ввиду произвольности K, отсюда следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \left[\int_{\mathfrak{E}} f_n(P)\, G(d\mathfrak{E}) - \int_{\mathfrak{E}} f_1(P)\, G(d\mathfrak{E}) \right] = +\infty,$$

т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathfrak{E}} f_n(P)\, G(d\mathfrak{E}) = +\infty,$$

и формула (57) доказана и в том случае, когда интеграл от $f(P)$ равен $(+\infty)$.

Замечание. Аналогичная теорема справедлива и для убывающей последовательности суммируемых функций. Только предельная функция может иметь интеграл, равный $(-\infty)$, а не $(+\infty)$. Если $f_n(P)$ — убывающая последовательность, то, полагая $\varphi_n = -f_n$ получаем возрастающую последовательность, и знак минус выносится за знак интеграла.

Выясним одно важное для дальнейшего следствие из доказанной теоремы.

Теорема 3. *Если функции $u_k(P)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ неотрицательны и суммируемы на $\mathfrak{E}$, и ряд с неотрицательными членами*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathfrak{E}} u_k(P)\, G(d\mathfrak{E}) \tag{63}$$

сходится, то почти везде на $\mathfrak{E}$ сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(P), \tag{64}$$

и $u_k(P) \to 0$ почти везде на $\mathfrak{E}$.

Рассмотрим неубывающую последовательность неотрицательных и суммируемых на $\mathfrak{E}$ функций

$$f_n(P) = \sum_{k=1}^{n} u_k(P),$$

и применим к этой последовательности доказанную выше теорему. В силу сходимости ряда (63), интегралы от $f_n(P)$ при беспредельном возрастании n имеют конечный предел. Следовательно, предельная функция, в данном случае выражаемая рядом (64)

$$f(P) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(P),$$

суммируема по $\mathfrak{E}$, а потому почти везде на $\mathfrak{E}$ имеет конечные значения, т. е. ряд (64) действительно сходится почти везде на $\mathfrak{E}$. Но члены сходящегося ряда стремятся к нулю при удалении от начала, т. е. $u_k(P) \to 0$ почти везде на $\mathfrak{E}$, и теорема полностью доказана.

Теорема 4. *Если $f_n(P)$ есть последовательность неотрицательных и суммируемых на $\mathfrak{E}$ функций, стремящаяся почти везде на $\mathfrak{E}$ к предельной функции $f(P)$, и интегралы от $f_n(P)$ при любом n не превышают некоторого числа A,* т. е.

$$\int_{\mathfrak{E}} f_n(P)\, G(d\mathfrak{E}) \leqslant A,$$

то $f(P)$ суммируема на $\mathfrak{E}$, и имеет место неравенство

$$\int_{\mathfrak{E}} f(P)\, G(d\mathfrak{E}) \leqslant A. \tag{65}$$

Мы имеем неравенство

$$\int_{\mathfrak{E}} [f_n]_N\, G(d\mathfrak{E}) \leqslant \int_{\mathfrak{E}} f_n\, G(d\mathfrak{E}) \leqslant A \tag{66}$$

и, в силу свойства 15 из [**49**], причем роль L играет число N, можем написать

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathfrak{E}} [f_n]_N\, G(d\mathfrak{E}) = \int_{\mathfrak{E}} [f]_N\, G(d\mathfrak{E}).$$

Переходя в неравенстве (66) к пределу при $n \to \infty$, получим

$$\int_{\mathfrak{E}} [f]_N\, G(d\mathfrak{E}) \leqslant A,$$

откуда следует, что $f(P)$ суммируема, а при $N \to \infty$ получаем (65).

55. Класс L_2. Мы рассмотрим в настоящем параграфе некоторый класс измеримых функций. Этот класс играет большую роль в приложениях построенной теории к различным вопросам математики и математической физики.

Определение. *Вещественная функция $f(P)$, измеримая на измеримом множестве $\mathfrak{E}$ конечной меры, называется функцией с суммируемым квадратом на $\mathfrak{E}$, если ее квадрат $f^2(P)$ суммируем на $\mathfrak{E}$, т. е. если*

$$\int_{\mathfrak{E}} f^2(P)\, G(d\mathfrak{E}) < +\infty.$$

Класс функций с суммируемым квадратом на $\mathfrak{E}$ обозначим символом L_2^G. Для случая интеграла Лебега, т. е. для того случая, когда $G(\Delta)$ есть площадь промежутка Δ, пользуются символом L_2. В дальнейшем для простоты письма будем вместо L_2^G писать просто L_2. Но надо помнить, что все сказанное дальше будет справедливо и при любом выборе $G(\Delta)$. Докажем ряд свойств класса L_2.

Теорема 1. *Если $f(P)$ и $g(P) \in L_2$, то $f(P)$ и произведение $f(P)\, g(P)$ суммируемо на $\mathfrak{E}$.*

Утверждения теоремы непосредственно вытекают из неравенств

$$|f| \leqslant \tfrac{1}{2}(1 + f^2); \quad |fg| \leqslant \tfrac{1}{2}(f^2 + g^2)$$

и свойств 1 и 10 из [52]. Отметим, что здесь и во всем дальнейшем мы подразумеваем вещественные функции.

Теорема 2. *Если* $f(P)$ *и* $g(P) \in L_2$, *то* $cf(P)$ *и* $f(P)+g(P)$ *также принадлежат* L_2.

Утверждение относительно $cf(P)$ очевидно, а для $f(P)+g(P)$ оно вытекает из формулы

$$(f+g)^2 = f^2 + 2fg + g^2$$

теоремы 1 и свойства 1 из [52].

Теорема 3. *Если* f *и* $g \in L_2$, *то имеет место неравенство* (Буняковского—Шварца):

$$\left[\int_{\mathfrak{E}} fg\, G(d\mathfrak{E})\right]^2 \leqslant \int_{\mathfrak{E}} f^2 G(d\mathfrak{E}) \int_{\mathfrak{E}} g^2 G(d\mathfrak{E}). \tag{67}$$

Доказательство точно такое же, что и для интеграла Римана. Повторим его. Заметим прежде всего, что если в квадратном трехчлене $au^2+2bu+c$ коэффициенты вещественны и $a>0$, то из тождества

$$au^2+2bu+c = \frac{1}{a}[(au+b)^2+(ac-b^2)]$$

непосредственно следует, что если указанный трехчлен при всех вещественных значениях u имеет неотрицательные значения, то $b^2 \leqslant ac$. Мы считаем, что функции f и g не эквивалентны нулю, ибо в противном случае неравенство (67) тривиально, ибо его левая часть при этом равна нулю. Напишем очевидную формулу

$$\int_{\mathfrak{E}} (fu+g)^2 G(d\mathfrak{E}) = u^2 \int_{\mathfrak{E}} f^2 G(d\mathfrak{E}) + 2u \int_{\mathfrak{E}} fgG(d\mathfrak{E}) + \int_{\mathfrak{E}} g^2 G(d\mathfrak{E}),$$

где u — некоторый параметр. Стоящий слева интеграл имеет для любого вещественного u неотрицательное значение. Следовательно, и трехчлен, стоящий справа, также обладает этим свойством. Для этого трехчлена мы должны иметь $b^2 \leqslant ac$, что и приводит нас к неравенству (67). Отметим, что коэффициент a в указанном трехчлене наверное положителен, так как функция f не эквивалентна нулю.

Следствие. Если $f \in L_2$, то очевидно и $|f| \in L_2$ и, представляя $|f|$ в виде произведения $|f| = |f| \cdot 1$, мы получим следующее неравенство:

$$\left|\int_{\mathfrak{E}} fG(d\mathfrak{E})\right| \leqslant \int_{\mathfrak{E}} |f|\, G(d\mathfrak{E}) \leqslant \sqrt{\int_{\mathfrak{E}} f^2 G(d\mathfrak{E}).\, G(\mathfrak{E})}. \tag{68}$$

Теорема 4. *Если* f *и* $g \in L_2$, *то имеет место неравенство*

$$\sqrt{\int_{\mathfrak{E}} (f+g)^2 G(d\mathfrak{E})} \leqslant \sqrt{\int_{\mathfrak{E}} f^2 G(d\mathfrak{E})} + \sqrt{\int_{\mathfrak{E}} g^2 G(d\mathfrak{E})}. \tag{69}$$

Из неравенства (67) получаем

$$\int_{\mathfrak{E}} fg\,G(d\mathfrak{E}) \leqslant \sqrt{\int_{\mathfrak{E}} f^2 G(d\mathfrak{E})}\,\sqrt{\int_{\mathfrak{E}} g^2 G(d\mathfrak{E})}.$$

Умножаем обе части этого неравенства на 2 и прибавляем к обеим частям полученного неравенства интеграл от f^2 и интеграл от g^2. Полученное неравенство

$$\int_{\mathfrak{E}} f^2 G(d\mathfrak{E}) + 2\int_{\mathfrak{E}} fgG(d\mathfrak{E}) + \int_{\mathfrak{E}} g^2 G(d\mathfrak{E}) \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\mathfrak{E}} f^2 G(d\mathfrak{E}) + 2\sqrt{\int_{\mathfrak{E}} f^2 G(d\mathfrak{E})}\,\sqrt{\int_{\mathfrak{E}} g^2 G(d\mathfrak{E})} + \int_{\mathfrak{E}} g^2 G(d\mathfrak{E})$$

может быть записано в виде

$$\int_{\mathfrak{E}} (f+g)^2\,G(d\mathfrak{E}) \leqslant \left[\sqrt{\int_{\mathfrak{E}} f^2 G(d\mathfrak{E})} + \sqrt{\int_{\mathfrak{E}} g^2 G(d\mathfrak{E})}\right]^2,$$

что и приводит нас непосредственно к неравенству (69).

Отметим еще, что если $f(P) \in L_2$, то, в силу суммируемости $f^2(P)$, функция $f(P)$ почти везде на $\mathfrak{E}$ принимает конечные значения.

56. Сходимость в среднем. Мы введем сейчас новое понятие сходимости в классе L_2.

Определение. *Говорят, что последовательность функций $f_n(P)$ из L_2 сходится в среднем к функции $f(P)$ из L_2 или просто сходится в L_2 к функции $f(P)$, если*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathfrak{E}} [f(P) - f_n(P)]^2\,G(d\mathfrak{E}) = 0. \tag{70}$$

Отметим, прежде всего, что если мы заменим $f(P)$ эквивалентной ей функцией $g(P)$, то интеграл, входящий в формулу (70), не изменится, и функция $g(P)$ будет также пределом в среднем для $f_n(P)$. В дальнейшем мы будет отождествлять эквивалентные функции, т. е. будем считать эквивалентные функции, принадлежащие L_2, за одну и ту же функцию. Докажем теперь единственность предела, т. е. докажем следующую теорему:

Теорема 5. *Если последовательность $f_n(P)$ из L_2 сходится в L_2 к двум функциям $f(P)$ и $g(P)$, то эти функции эквивалентны.*

Напишем очевидную формулу

$$f - g = (f - f_n) + (f_n - g),$$

и применим к правой части неравенство (69)

$$\sqrt{\int_{\mathfrak{E}} (f-g)^2\, G(d\mathfrak{E})} \leqslant \sqrt{\int_{\mathfrak{E}} (f-f_n)^2\, G(d\mathfrak{E})} + \sqrt{\int_{\mathfrak{E}} (g-f_n)^2 G(d\mathfrak{E})}.$$

При $n \to \infty$ правая часть стремится к нулю, а левая не зависит от n, и, следовательно, имеем

$$\int_{\mathfrak{E}} (f-g)^2\, G(d\mathfrak{E}) = 0.$$

В силу свойства 8 из [**52**], отсюда следует, что разность $f-g$ эквивалентна нулю, и тем самым функции f и g эквивалентны. Доказанная теорема устанавливает единственность предела $f_n(P)$ в L_2, но, конечно, не всякая последовательность функций имеет предел в среднем. Отметим, что из сходимости почти везде не следует сходимость в среднем и из сходимости в среднем не следует сходимость почти везде. Докажем в связи с этим теорему.

Теорема 6. *Если последовательность $f_n(P)$ из L_2 стремится к $f(P)$ в среднем на $\mathfrak{E}$, то из нее можно выделить подпоследовательность $f_{n_k}(P)$, которая сходится почти везде к $f(P)$ на $\mathfrak{E}$.*

Из (70) следует, в силу свойства 10 из [**51**], что $f_n(P) \to f(P)$ по мере на $\mathfrak{E}$, и теорема 6 есть следствие теоремы 7 из [**44**].

Следствие. *Если $f_n(P)$ стремится в среднем к $f(P)$ и стремится почти везде на $\mathfrak{E}$ к $\varphi(P)$, то $\varphi(P)$ и $f(P)$ эквивалентны на $\mathfrak{E}$.* Если $f_n(P) \to \varphi(P)$ почти везде, то тем более $f_{n_k}(P) \to \varphi(P)$ почти везде. Но, как мы видели, $f_{n_k}(P) \to f(P)$ почти везде, откуда и следует, что $\varphi(P)$ и $f(P)$ эквивалентны.

Для сходимости в среднем можно установить необходимое и достаточное условие, аналогичное условию Коши существования предела для числовых последовательностей [**1; 36**]. Предварительно введем новое определение.

Определение. *Говорят, что последовательность $f_n(P)$ функций из L_2 сходится в среднем в себе, если для любого заданного положительного ε существует такое N, что*

$$\int_{\mathfrak{E}} (f_n - f_m)^2\, G(d\mathfrak{E}) \leqslant \varepsilon \quad \text{при} \quad n \text{ и } m > N. \tag{71}$$

Теорема 7. *Для того чтобы последовательность $f_n(P)$ сходилась в среднем к некоторой функции из L_2, необходимо, чтобы она сходилась в среднем в себе.*

Дано, что последовательность сходится в среднем к некоторой функции $f(P)$. Представим разность $f_n(P) - f_m(P)$ в виде

$$f_n - f_m = (f_n - f) + (f - f_m),$$

и применим неравенство (69).

$$\sqrt{\int_{\mathfrak{E}} (f_n - f_m)^2 G(d\mathfrak{E})} \leqslant \sqrt{\int_{\mathfrak{E}} (f - f_n)^2 G d\mathfrak{E}} + \sqrt{\int_{\mathfrak{E}} (f - f_m)^2 G(d\mathfrak{E})}.$$

Пусть ε — заданное положительное число. В силу сходимости в среднем к $f(P)$ существует такое N, что при n и $m > N$ интегралы, стоящие под радикалами в правой части последнего неравенства, $\leqslant \frac{\varepsilon^2}{4}$. При этом последнее неравенство приводит непосредственно к неравенству (71), и теорема доказана. Докажем теперь обратную теорему.

Теорема 8. *Для того чтобы последовательность $f_n(P)$ сходилась в среднем к некоторой функции, достаточно, чтобы она сходилась в среднем в себе.*

Дано, что $f_n(P)$ сходится в себе, и надо доказать, что она сходится в среднем к некоторой функции. В силу сходимости в себе, существует такая возрастающая последовательность значков $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$, что

$$\int_{\mathfrak{E}} [f_{n_{k+1}}(P) - f_{n_k}(P)]^2 G(d\mathfrak{E}) \leqslant \frac{1}{2^{2k}}.$$

Применяя неравенство (67) в случае $f = |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|$ и $g \equiv 1$, получим

$$\int_{\mathfrak{E}} |f_{n_{k+1}}(P) - f_{n_k}(P)| G(d\mathfrak{E}) \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\int_{\mathfrak{E}} [f_{n_{k+1}}(P) - f_{n_k}(P)]^2 G(d\mathfrak{E})} \sqrt{\int_{\mathfrak{E}} G(d\mathfrak{E})},$$

или, в силу предыдущего неравенства,

$$\int_{\mathfrak{E}} |f_{n_{k+1}}(P) - f_{n_k}(P)| G(d\mathfrak{E}) \leqslant \frac{1}{2^k} \sqrt{G(\mathfrak{E})}.$$

Отсюда следует сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathfrak{E}} |f_{n_{k+1}}(P) - f_{n_k}(P)| G(d\mathfrak{E}),$$

и, в силу теоремы 3 из [54], ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(P) - f_{n_k}(P)|$$

сходится почти везде на $\mathfrak{E}$. Тем более, почти везде сходится ряд

$$f_{n_1}(P)+\sum_{k=1}^{\infty}[f_{n_{k+1}}(P)-f_{n_k}(P)],$$

сумма первых p членов которого равна $f_{n_p}(P)$, т. е. почти везде на $\mathfrak{E}$ последовательность

$$f_{n_1}(P),\quad f_{n_2}(P),\quad f_{n_3}(P),\ \ldots$$

стремится к некоторой функции $f(P)$ с конечными значениями. Мы покажем, что $f(P)\in L_2$ и что $f_n(P)$ сходятся в среднем к $f(P)$. В силу того, что последовательность $f_n(P)$ сходится в себе, для любого заданного положительного ε существует такое N, что

$$\int[f_{n_k}(P)-f_n(P)]^2\,G(d\mathfrak{E})\leqslant\varepsilon \text{ при } n_k \text{ и } n>N.$$

Устремляя в этом неравенстве n_k к бесконечности и пользуясь теоремой 4 из [**54**], получим

$$\int_{\mathfrak{E}}[f(P)-f_n(P)]^2\,G(d\mathfrak{E})\leqslant\varepsilon \text{ при } n>N. \tag{72}$$

Отсюда следует, между прочим, что разность $f(P)-f_n(P)\in L_2$. Но $f_n(P)$ также принадлежит L_2. Складывая $f(P)-f_n(P)$ и $f_n(P)$, получим, в силу теоремы 2, что и $f(P)\in L_2$. Неравенство (72) показывает, наконец, что $f_n(P)$ в среднем стремится к $f(P)$. Последние две теоремы приводят к следующему утверждению: сходимость последовательности $f_n(P)$ в среднем в себе является необходимым и достаточным условием того, что эта последовательность сходится в среднем к некоторой функции.

Теорема 9. *Если* $f_n(P)$ *и* $g_n(P)\in L_2$ *и* $f_n(P)\to f(P)$, $g_n(P)\to g(P)$ *в среднем, то*

$$\int_{\mathfrak{E}}f_n(P)\,g_n(P)\,G(d\mathfrak{E})\to\int_{\mathfrak{E}}f(P)\,g(P)\,G(d\mathfrak{E}).$$

Вводя для любых функций $\varphi(P)$ и $\psi(P)$ из L_2 обозначение [**IV; 35**]

$$(\varphi,\ \psi)=\int_{\mathfrak{E}}\varphi(P)\,\psi(P)\,G(d\mathfrak{E}),$$

можем записать неравенство Буняковского в виде

$$(\varphi,\ \psi)^2\leqslant(\varphi,\ \varphi)\ (\psi,\ \psi).$$

Положим теперь

$$f_n(P)-f(P)=\varphi_n(P);\ \ g_n(P)-g(P)=\psi_n(P).$$

По условию (φ_n, φ_n) и $(\psi_n, \psi_n) \to 0$. Составим разность

$$(f, g) - (f_n, g_n) = (f, g) - (f + \varphi_n, g + \psi_n) = \\ = -(f, \psi_n) - (\varphi_n, g) - (\varphi_n, \psi_n),$$

откуда

$$|(f, g) - (f_n, g_n)| \leqslant |(f, \psi_n)| + |(\varphi_n, g)| + |(\varphi_n, \psi_n)| \leqslant \\ \leqslant \sqrt{(f, f)}\sqrt{(\psi_n, \psi_n)} + \sqrt{(\varphi_n, \varphi_n)}\sqrt{(g, g)} + \sqrt{(\varphi_n, \varphi_n)}\sqrt{(\psi_n, \psi_n)}.$$

Правая часть стремится к нулю при $n \to \infty$, откуда $|(f, g) - (f_n, g_n)| \to 0$, т. е. $(f_n, g_n) \to (f, g)$, что и требовалось доказать.

57. Функциональное пространство Гильберта. Семейство функций L_2 представляет собой, как и семейство C [14] некоторое функциональное пространство. Элементом этого пространства является вещественная функция с суммируемым квадратом на $\mathfrak{E}$. Эквивалентные функции при этом отождествляются, т. е. им соответствует один и тот же элемент L_2.

Определено сложение элементов и их умножение на вещественное число, причем эти операции подчиняются обычным законам алгебры. Нормой элемента x (длина вектора) назовем неотрицательное число, определяемое следующей формулой:

$$\|f(P)\| = \sqrt{\int_{\mathfrak{E}} [f(P)]^2 G(d\mathfrak{E})}. \tag{73}$$

Говорят, что последовательность элементов $f_n(P)$ из L_2 сходится к элементу $f(P)$ из L_2, если $\|f(P) - f_n(P)\| \to 0$ при $n \to \infty$. Эта сходимость по норме, в силу (73), равносильна сходимости в среднем.

Введем еще понятие о скалярном произведении двух элементов $f(P)$ и $g(P)$. Оно определяется равенством

$$(f, g) = \int_{\mathfrak{E}} fg\, G(d\mathfrak{E}), \tag{74}$$

и, очевидно, имеет место формула

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)}. \tag{75}$$

Расстояние между двумя элементами f и g определяется формулой

$$\rho(f, g) = \|f - g\| = \sqrt{\int_{\mathfrak{E}} (f - g)^2 G(d\mathfrak{E})} = \sqrt{(f - g, f - g)}. \tag{76}$$

Пусть имеются три элемента f, g и h. Напишем формулу $f - h = (f - g) + (g - h)$ и применим неравенство (69). Мы получим, таким

образом, в силу определения (74), так называемое правило треугольника:

$$\rho(f, h) \leqslant \rho(f, g) + \rho(g, h). \tag{77}$$

Нулем пространства или нулевым элементом назовем функцию, тождественно равную нулю на $\mathfrak{E}$, или, что то же, функцию, эквивалентную нулю. Норма нулевого элемента равна нулю, а норма любого другого элемента, в силу свойства 8 из [51], положительна. Расстояние $\rho(f, g) \geqslant 0$, и знак „равно“ имеет место только тогда, когда элементы совпадают, т. е. функции f и g эквивалентны. Расстояние и скалярное произведение симметричны, т. е. $\rho(g, f) = \rho(f, g)$ и $(g, f) = (f, g)$. Для того, чтобы последовательность элементов имела предел в нашем функциональном пространстве, необходимо и достаточно, чтобы она сходилась в себе, т. е. для любого заданного ε существовало такое N, что $\|f_m - f_n\| < \varepsilon$ при n и $m > N$. Последнее свойство называют обычно полнотой пространства L_2.

Неравенство (77) справедливо, очевидно, и для любого конечного числа слагаемых:

$$\rho(f_1, f_m) \leqslant \rho(f_1, f_2) + \rho(f_2, f_3) + \ldots + \rho(f_{m-1}, f_m)$$

или

$$\|f_1 - f_m\| \leqslant \|f_1 - f_2\| + \|f_2 - f_3\| + \ldots + \|f_{m-1} - f_m\|. \tag{77$_1$}$$

Совершенно аналогично предыдущему можно построить функциональное пространство L_2 и для комплексных функций (54). Функция $f(P) = f_1(P) + if_2(P)$ называется функцией из L_2, если $f_1(P)$ и $f_2(P)$ принадлежат L_2. При этом квадрат модуля $|f(P)|^2$ есть суммируемая функция. Теоремы 1 и 2 сохраняются. Неравенства (67) и (69) переписываются в виде

$$\left.\begin{aligned} \left|\int_{\mathfrak{E}} fg\, G(d\mathfrak{E})\right|^2 &\leqslant \int_{\mathfrak{E}} |f|^2 G(d\mathfrak{E}) \int_{\mathfrak{E}} |g|^2 G(d\mathfrak{E}) \\ \sqrt{\int_{\mathfrak{E}} |f+g|^2 G(d\mathfrak{E})} &\leqslant \sqrt{\int_{\mathfrak{E}} |f|^2 G(d\mathfrak{E})} + \sqrt{\int_{\mathfrak{E}} |g|^2 G(d\mathfrak{E})}. \end{aligned}\right\} \tag{78}$$

В определении сходимости в среднем и сходимости в себе квадраты разности $(f - f_n)^2$ и $(f_n - f_m)^2$ надо заменить квадратами модулей разностей $|f - f_n|^2$ и $|f_n - f_m|^2$. Теоремы 7 и 8 сохраняются. При построении функционального пространства допускается умножение не только на вещественные, но и на комплексные числа. Норма элемента определяется формулой

$$\|f\| = \sqrt{\int_{\mathfrak{E}} |f|^2 G(d\mathfrak{E})}, \tag{79}$$

а скалярное произведение формулой

$$(f,\ g)=\int_{\mathfrak{E}} f\bar{g}\,G\,(d\mathfrak{E}), \tag{80}$$

где символом $\bar{\alpha}$ мы обозначаем, как всегда, комплексное число, сопряженное с α. По-прежнему имеет место формула (77). Расстояние между элементами определяется формулой (76) с заменой $(f-g)^2$ на $|f-g|^2$, и оно имеет те же свойства, что и для вещественного пространства. Для скалярного произведения имеем формулу $(g,\ f)=\overline{(f,\ g)}$. Все сказанное о пространстве комплексных функций непосредственно вытекает из того, что функции $f_1(P)$ и $f_2(P)$ принадлежат вещественному пространству L_2. Функциональное пространство L_2 называется часто функциональным пространством Гильберта.

Отметим один частный случай. Положим, что функция $G(\mathfrak{E})$ соответствует сосредоточенным массам, помещенным в точках $P_1, P_2, \ldots, P_m$ и равным единице. При этом интеграл Лебега — Стилтьеса для любой функции $f(P)$, принимающей конечные значения в указанных точках, по любому множеству $\mathfrak{E}$, содержащему вышеуказанные точки, превращается в конечную сумму

$$\int_{\mathfrak{E}} f(P)\,G\,(d\mathfrak{E})=\sum_{k=1}^{m} f(P_k).$$

Если рассматривать значение всякой функции $f(P)$ в точках $P_k\ (k=1, \ldots, m)$ как составляющие некоторого m-мерного комплексного вектора, то получим m-мерное пространство R_m, теорию которого мы излагали в третьем томе [**III, 25**]. Данные выше определения сложения, умножения на число, нормы, скалярного произведения и т. д. совпадают с тем, о чем говорили раньше.

58. Ортогональные системы функций. В непосредственной связи с функциональным пространством L_2 находится теория ортогональных систем функций. Мы уже излагали эту теорию раньше [**IV; 38, 80**]. Сейчас дополним это изложение, вводя в него понятие интеграла Лебега — Стилтьеса или Лебега. Мы будем сначала говорить о вещественных функциях.

Определение. *Говорят, что функции*

$$\varphi_1(P),\ \varphi_2(P),\ \ldots, \tag{81}$$

заданные на измеримом множестве $\mathfrak{E}$ конечной меры и принадлежащие L_2, образуют ортогональную и нормированную систему, если выполнены условия

$$\int_{\mathfrak{E}} \varphi_k(P)\cdot\varphi_l(P)\,G\,(d\mathfrak{E})=\begin{cases} 0 & \text{при } k\neq l,\\ 1 & \text{при } k=l. \end{cases} \tag{82}$$

Для любой функции $f(P)$ из L_2 мы можем составить ее коэффициенты Фурье относительно системы (81):

$$a_n = \int_{\mathfrak{G}} f(P)\varphi_n(P)\,G(d\mathfrak{G}), \tag{83}$$

и ее ряд Фурье

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(P). \tag{84}$$

Относительно сходимости этого ряда мы ничего утверждать не можем, но мы можем образовать отрезки этого ряда:

$$S_n(f) = \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(P). \tag{85}$$

Выражение

$$\int_{\mathfrak{G}} \left[f(P) - \sum_{k=1}^{n} b_k\varphi_k(P)\right]^2 G(d\mathfrak{G}) \tag{86}$$

имеет наименьшее значение, если коэффициенты b_k взять равными коэффициентам Фурье a_k. При этом для выражения (86) получаем следующую простую формулу:

$$\int_{\mathfrak{G}} [f(P) - S_n(f)]^2\,G(d\mathfrak{G}) = \int_{\mathfrak{G}} f^2(P)\,G(d\mathfrak{G}) - \sum_{k=1}^{n} a_k^2, \tag{87}$$

из которой вытекает неравенство Бесселя:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \leqslant \int_{\mathfrak{G}} f^2(P)\,G(d\mathfrak{G}) \tag{88}$$

и сходимость ряда, стоящего в левой части этого неравенства. Если в формуле (88) имеет место знак $=$, то полученная формула

$$\int_{\mathfrak{G}} f^2(P)\,G(d\mathfrak{G}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \tag{89}$$

называется уравнением замкнутости. В силу (87), уравнение замкнутости равносильно тому факту, что отрезки ряда Фурье $S_n(f)$ стремятся в среднем к функции $f(P)$. Докажем теперь следующую основную теорему.

Теорема 1 (*Рисса — Фишера*). *Если c_n — любая заданная последовательность вещественных чисел, квадраты которых образуют сходящийся ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < +\infty, \tag{90}$$

то существует единственная функция из L_2, для которой числа c_n суть ее коэффициенты Фурье относительно системы (81) *и для которой имеет место формула замкнутости* (89).

Образуем функции

$$S_n(P) = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(P). \tag{91}$$

В силу ортогональности и нормированности системы (81) имеем

$$\int_{\mathfrak{G}} [S_q(P) - S_p(P)]^2 G(d\mathfrak{G}) = c_{p+1}^2 + c_{p+2}^2 + \ldots + c_q^2, \quad (q > p)$$

и из сходимости ряда (90) вытекает, что правая часть написанной формулы стремится к нулю при беспредельном возрастании p, т. е. последовательность функций (91) из L_2 сходится в себе. Следовательно, существует такая функция $f(P)$ из L_2, к которой $S_n(P)$ сходятся в среднем:

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathfrak{G}} [f(P) - S_n(P)]^2 G(d\mathfrak{G}) = 0. \tag{92}$$

Покажем, что c_k суть коэффициенты Фурье a_k этой функции. Принимая во внимание (83), а также ортогональность и нормированность системы (81), можем написать

$$\int_{\mathfrak{G}} [f(P) - S_n(P)]^2 G(d\mathfrak{G}) =$$

$$= \Big[\int_{\mathfrak{G}} f^2(P) G(d\mathfrak{G}) - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \Big] + \sum_{k=1}^{n} (c_k - a_k)^2. \tag{93}$$

В правой части разность, стоящая в квадратных скобках, неотрицательна в силу неравенства Бесселя. Остальные слагаемые правой части также неотрицательны. При $n \to \infty$ левая часть стремится к нулю и, следовательно, то же можно утверждать и о правой части. Отсюда непосредственно следует, что каждое из неотрицательных слагаемых $(c_k - a_k)^2$ равно нулю, т. е. $c_k = a_k$, что мы и хотели доказать. Таким образом, функции (91) суть отрезки ряда Фурье

функции $f(P)$, и из (92) непосредственно следует, что для $f(P)$ имеет место формула замкнутости. Остается доказать, что функция $f(P)$ с указанными выше свойствами единственна. Если кроме $f(P)$ существует еще функция $g(P)$ с указанными свойствами, то (91) суть отрезки ряда Фурье как для $f(P)$, так и для $g(P)$. По условию, уравнение замкнутости имеет место как для $f(P)$, так и для $g(P)$, т. е. последовательность $S_n(P)$ стремится в среднем как к $f(P)$, так и к $g(P)$. В силу единственности предела в L_2 отсюда следует, что $f(P)$ и $g(P)$ эквивалентны, т. е. представляют собой один и тот же элемент L_2, и теорема полностью доказана. Введем теперь определение замкнутости систем.

Определение. *Ортогональная и нормированная система* (81) *называется замкнутой, если для любой функции $f(P)$ из L_2 имеет место уравнение замкнутости* (89).

При доказательстве теоремы 1 мы не предполагали, что система (81) замкнута. Если это имеет место, то не надо оговаривать, что для функции имеет место уравнение замкнутости, так как по определению замкнутых систем это имеет место для любой функции из L_2. Поэтому для замкнутых систем теорема 1 формулируется так:

Теорема 1'. *Если система* (81) *замкнута и c_n — любая заданная последовательность вещественных чисел, для которой ряд* (90) *сходится, то существует единственная функция из L_2, для которой числа c_n суть ее коэффициенты Фурье.*

Кроме понятия замкнутости системы, вводят еще понятие полноты системы.

Определение. *Система* (81) *называется полной, если в L_2 не существует функции, отличной от нуля (т. е. не эквивалентной нулю) и ортогональной ко всем $\varphi_k(P)$.*

Мы покажем сейчас, что понятия полноты и замкнутости эквивалентны.

Теорема 2. *Для того чтобы система* (81) *была полной, необходимо и достаточно, чтобы она была замкнутой.*

Доказываем необходимость от обратного. Дано, что система (81) полная и положим, что она не замкнута, т. е. существует такая функция $h(P)$ из L_2 с коэффициентами Фурье a_k, что

$$\int_{\mathfrak{G}} h^2(P)\,G(d\mathfrak{G}) > \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2. \tag{94}$$

С другой стороны, согласно теореме 1, существует функция $f(P)$ из L_2 с теми же коэффициентами Фурье a_k, для которой имеет место формула замкнутости (89). Сравнивая эту формулу с (94), получаем

$$\int_{\mathfrak{G}} h^2(P)\,G(d\mathfrak{G}) > \int_{\mathfrak{G}} f^2(P)\,G(d\mathfrak{G}). \tag{95}$$

Но разность $f(P) - h(P)$ имеет все коэффициенты Фурье равные нулю, т. е. она ортогональна ко всем $\varphi_k(P)$ и, в силу полноты,

упомянутая разность эквивалентна нулю, т. е. $h(P)$ и $f(P)$ эквивалентны, а это противоречит (95), и таким образом необходимость доказана. Доказываем достаточность. Дано, что система замкнута, и надо доказать ее полноту, т. е. надо доказать, что если все коэффициенты Фурье некоторой функции $f(P)$ равны нулю, то эта функция эквивалентна нулю. Поскольку предполагается замкнутость системы, мы можем для функции $f(P)$ написать уравнение замкнутости (89), которое, в силу равенства нулю всех коэффициентов Фурье функции $f(P)$, даст нам

$$\int_{\mathfrak{G}} f^2(P)\, G(d\mathfrak{G}) = 0,$$

откуда и следует, в силу свойства 8 из [**51**], что $f(P)$ эквивалентна нулю. Отметим, что для любой системы функций $\psi_n(P)$ из L_2 применим процесс ортогонализации, который мы описали раньше [**IV; 38**].

Все сказанное выше непосредственно обобщается и на случай комплексных функций из L_2. Свойства ортогональности и нормированности системы (81) выражаются при этом равенствами:

$$\int_{\mathfrak{G}} \varphi_k(P)\,\overline{\varphi_l(P)}\, G(d\mathfrak{G}) = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq l, \\ 1 & \text{при } k = l, \end{cases} \tag{96}$$

а коэффициенты Фурье определяются формулами:

$$a_n = \int_{\mathfrak{G}} f(P)\,\overline{\varphi_n(P)}\, G(d\mathfrak{G}). \tag{97}$$

В дальнейших формулах мы везде вместо квадратов функций и чисел должны писать квадраты модулей. Так, например, уравнение замкнутости будет иметь вид

$$\int_{\mathfrak{G}} |f(P)|^2\, G(d\mathfrak{G}) = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2. \tag{98}$$

Указанные выше теоремы сохраняются, но только вместо ряда (90) мы должны рассматривать ряд из чисел $|c_n|^2$.

Приведем еще так называемое обобщенное уравнение замкнутости. Пусть a_n и b_n — коэффициенты Фурье функций $f(P)$ и $g(P)$, и система (81) замкнута. Функция $f(P)+g(P)$ имеет коэффициенты Фурье a_n+b_n, и функция $f(P)+ig(P)$ — коэффициенты a_n+ib_n. Уравнения замкнутости для них имеют вид

$$\int_{\mathfrak{G}} |f+g|^2\, G(d\mathfrak{G}) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n+b_n|^2,$$

$$\int_{\mathfrak{G}} |f+ig|^2\, G(d\mathfrak{G}) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n+ib_n|^2,$$

или

$$\int_{\mathfrak{E}} [|f|^2 + |g|^2 + (\bar{f}g + f\bar{g})]\, G(d\mathfrak{E}) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} [|a_n|^2 + |b_n|^2 + (\overline{a}_n b_n + a_n \overline{b}_n)];$$

$$\int_{\mathfrak{E}} [|f|^2 + |g|^2 + i(\bar{f}g - \overline{fg})]\, G(d\mathfrak{E}) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} [|a_n|^2 + |b_n|^2 + i(\overline{a}_n b_n - a_n \overline{b}_n)].$$

Принимая во внимание уравнения замкнутости для f и g, умножая второе равенство почленно на i и складывая с первым, мы и получим обобщенное уравнение замкнутости

$$\int_{\mathfrak{E}} f\bar{g}\, G(d\mathfrak{E}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{b_n}. \tag{99}$$

В случае вещественных функций обобщенное уравнение замкнутости имеет вид

$$\int_{\mathfrak{E}} fg\, G(d\mathfrak{E}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n. \tag{100}$$

Из обобщенного уравнения замкнутости непосредственно следует возможность почленного интегрирования ряда Фурье любой функции $f(P)$ из L_2 по множеству $\mathfrak{E}$ или любой его измеримой части $\mathfrak{E}'$ [**II; 156**], а именно, если a_k $(k = 1, 2, \ldots)$ — коэффициенты Фурье $f(P)$, то

$$\int_{\mathfrak{E}'} f(P)\, G(d\mathfrak{E}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{\mathfrak{E}'} \varphi_k(P)\, G(d\mathfrak{E}). \tag{101}$$

Укажем еще одно свойство пространства L_2, из которого следует существование в L_2 замкнутой ортогональной нормированной системы. Это свойство называется обычно сепарабельностью и оно состоит в следующем: существует счетное множество элементов $\psi_k(P)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ из L_2, плотное в L_2, т. е. такое, что для любого $f(P)$ из L_2 и любого заданного положительного ε существует такой элемент $\psi_m(P)$ из указанного счетного множества, что $\|f(P) - \psi_m(P)\| \leqslant \varepsilon$. В одном из следующих параграфов мы докажем сепарабельность L_2. Сейчас мы докажем, что из сепарабельности вытекает существование замкнутой ортогональной нормированной системы. Применяя к $\psi_k(P)$ процесс ортогонализации, [**IV; 3**], получим некоторую ортогональную нормированную систему $\varphi_k(P)$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Докажем,

что она замкнута. В силу сказанного выше для любого $f(P)$ из L_2 и любого заданного положительного ε существует такое $\psi_m(P)$, что $\|f-\psi_m\|\leqslant\varepsilon$. Но $\psi_m(P)$ есть, согласно процессу ортогонализации, некоторая конечная линейная комбинация функций $\varphi_k(P)$, т. е. $\psi_m(P)=c_1\varphi_1(P)+c_2\varphi_2(P)+\ \ldots\ +c_l\varphi_l(P)$, и, таким образом,

$$\|f-\psi_m\|^2=\int_a^b\left[f(P)-\sum_{k=1}^{l}c_k\varphi_k(P)\right]^2 G(d\mathfrak{E})\leqslant\varepsilon^2.$$

Если мы заменим c_k коэффициентами Фурье $f(P)$ относительно системы $\varphi_k(P)$, то неравенство тем более сохранится [II; 148]:

$$\int_a^b[f(P)-S_l(f)]^2\,G(d\mathfrak{E})\leqslant\varepsilon^2,$$

где $S_l(f)$ — отрезок ряда Фурье функции $f(P)$. Из этого неравенства, в силу произвольности ε, и следует замкнутость системы $\varphi_k(P)$.

Отметим еще, что в том случае, когда $G(\mathfrak{E})$ соответствуют сосредоточенные массы, помещенные в точках $P_1, P_2, \ldots, P_m$, то замкнутая система содержит лишь m элементов, и этот случай не представляет интереса. Он приводит, как мы уже отмечали, к конечно-мерному пространству R_m.

59. Пространство l_2. Наряду с пространством L_2 рассмотрим пространство бесконечных последовательностей l_2, тесно связанное с L_2, причем мы сразу будем рассматривать комплексный случай. Элементом l_2 назовем бесконечную последовательность комплексных чисел $x(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ такую, что ряд, составленный из $|x_n|^2$, сходится. Непосредственно определяется умножение элемента на комплексное число и сложение элементов. Элемент cx по определению имеет координаты $(cx_1, cx_2, \ldots)$ и сумма элементов x и y с координатами x_n и y_n имеет координаты x_n+y_n, при этом сходимость ряда, составленного из чисел $|x_n+y_n|^2$, непосредственно следует из сходимости рядов, составленных из чисел $|x_n|^2$ и $|y_n|^2$, в силу очевидного неравенства $|x_n+y_n|^2\leqslant 2(|x_n|^2+|y_n|^2)$. Норма элемента x определяется формулой

$$\|x\|=\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2},\qquad(102)$$

и скалярное произведение элементов x и y формулой

$$(x, y)=\sum_{n=1}^{\infty}x_n\bar{y}_n,\qquad(103)$$

причем абсолютная сходимость ряда, стоящего справа, непосредственно вытекает из неравенства $|x_n\bar{y}_n| \leqslant \frac{1}{2}(|x_n|^2 + |y_n|^2)$.

Мы имеем

$$\|x\|^2 = (x, x). \tag{104}$$

Расстояние между элементами x и y определяется формулой

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x-y, x-y)} = \|x-y\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^2}. \tag{105}$$

Совершенно аналогично неравенствам (67) и (69) имеют место следующие неравенства:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} x_n\bar{y}_n\right|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2; \tag{106}$$

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^2} \leqslant \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2}. \tag{107}$$

Они доказываются так же, как и неравенства (67) и (69). Отметим, что неравенство (106) может быть записано в виде

$$|(x, y)|^2 \leqslant \|x\|^2 \cdot \|y\|^2. \tag{108}$$

Для расстояния, в силу (107), имеет место правило треугольника. Нулевым элементом пространства называется элемент, все координаты которого равны нулю. Мы говорим, что последовательность элементов $x^{(n)}$ сходится к элементу x, если $\|x - x^{(n)}\| \to 0$. Пусть $x_k^{(n)}$ — координаты $x^{(n)}$ и x_k — координаты x. Сходимость $x^{(n)}$ к x равносильна следующему:

$$\|x - x^{(n)}\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - x_k^{(n)}|^2 \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{109}$$

Укажем теперь на связь пространств L_2 и l_2. Возьмем какую-либо замкнутую ортогональную и нормированную систему (81). Каждой функции $f(P)$ из L_2 будет соответствовать последовательность комплексных чисел a_k — ее коэффициентов Фурье, причем ряд, составленный из $|a_k|^2$, сходится. Наоборот, каждой такой последовательности комплексных чисел, в силу теоремы 1 из [**59**], отвечает определенная функция из L_2. Таким образом, взяв какую-либо замкнутую систему (81), мы устанавливаем биоднозначное соответствие между элементами L_2 и l_2. Каждому элементу L_2 соответствует один определенный элемент из l_2, и наоборот. В силу того, что коэффициенты

Фурье конечной линейной комбинации функций $\sum_{k=1}^{m} c_k f_k(P)$ равны соответствующей линейной комбинации коэффициентов Фурье слагаемых функций $f_k(P)$, мы можем утверждать, что указанное выше биоднозначное соответствие дистрибутивно, т. е. если элементам $f_k(P)$ $(k=1, 2, \ldots, m)$ из L_2 соответствуют элементы $x^{(k)}$ из l_2, то элементу $\sum_{k=1}^{m} c_k f_k(P)$ соответствует элемент $\sum_{k=1}^{m} c_k x^{(k)}$. В силу обобщенного уравнения замкнутости (99) скалярные произведения соответствующих элементов в L_2 и l_2 при указанном соответствии одинаковы. Нормы элементов, в силу уравнения замкнутости (98), также одинаковы. Пространства L_2 и l_2 являются различными осуществлениями одного и того же абстрактного пространства. В дальнейшем мы изучим свойства этого абстрактного пространства и операторы в нем, описывая это пространство при помощи некоторой системы аксиом. Отметим еще понятие сходимости в себе в пространстве l_2. Мы говорим, что последовательность элементов $x^{(n)}$ сходится в себе в l_2, если для любого заданного положительного ε существует такое N, что $\| x^{(n)} - x^{(m)} \| \leqslant \varepsilon$ при m и $n > N$. Принимая во внимание указанное выше соответствие между L_2 и l_2 и теоремы 7 и 8 из [56], мы можем утверждать, что для того, чтобы последовательность $x^{(n)}$ имела предел в l_2, необходимо и достаточно, чтобы она сходилась в себе. Предел может быть только один.

Рассмотрим множество K элементов l_2, имеющих лишь конечное число координат, отличных от нуля, причем все эти координаты суть рациональные комплексные числа, т. е. числа вида $a+bi$, где a и b — рациональные вещественные числа. Принимая во внимание счетность множества рациональных чисел, видим, что упомянутое множество элементов K есть счетное множество. Покажем, что оно плотно в l_2. Пусть $x(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ — некоторый элемент из l_2 и $z(c_1, c_2, \ldots, c_n, 0, 0\ldots)$ — элемент из указанного выше множества K. Мы имеем

$$\| x - z \|^2 = \sum_{k=1}^{n} | x_k - c_k |^2 + \sum_{k=n+1}^{\infty} | x_k |^2. \qquad (110)$$

Пусть ε — заданное положительное число. В силу сходимости ряда, составленного из $| x_k |^2$, мы можем фиксировать такое значение $n = n_0$, что

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} | x_k |^2 \leqslant \frac{1}{2} \varepsilon^2.$$

В конечной сумме

$$\sum_{k=1}^{n_0} |x_k - c_k|^2$$

мы можем выбрать рациональные числа c_k настолько близкими к x_k, чтобы эта сумма была также $\leqslant \frac{1}{2}\varepsilon^2$. При этом будем иметь, в силу (110), $\|x-z\|^2 \leqslant \varepsilon^2$, т. е. $\|x-z\| \leqslant \varepsilon$. Этим и доказано, что упомянутое выше счетное множество K элементов из l_2 плотно в l_2. Таким образом, пространство l_2 сепарабельно. Элементы этого пространства

$$e_1(1, 0, 0, \ldots); \quad e_2(0, 1, 0, 0, \ldots); \quad e_3(0, 0, 1, 0, \ldots); \ \ldots$$

образуют замкнутую ортогональную и нормированную систему.

60. Линеалы в L_2. Мы введем теперь некоторые новые понятия, связанные с L_2.

Определение. *Множество U элементов L_2 (функций из L_2 называется линеалом при соблюдении следующего условия: если $\varphi(P)$ и $\psi(P) \in U$, то $c\varphi(P)$ при любом выборе вещественного числа c и $\varphi(P)+\psi(P)$ также принадлежат U.*

Из этого определения непосредственно следует, что если $f_k(P) \in U$ $(k=1, 2, \ldots, m)$, то и $c_1 f_1(P) + c_2 f_2(P) + \ldots + c_m f_m(P) \in U$ при любом выборе чисел c_k. Отметим некоторые примеры линеалов. Пусть M — множество ограниченных на $\mathfrak{E}$-функций, т. е. таких функций, что для любой $f(P) \in M$ существует такое число d_f, что $|f(P)| \leqslant d_f$ на $\mathfrak{E}$. Множество M — линеал в L_2.

Назовем функцию $f(P)$ *непрерывной на множестве* $\mathfrak{E}$ при соблюдении следующего условия: если точки P и $P_n (n=1, 2, \ldots)$ принадлежат $\mathfrak{E}$ и $P_n \to P$, то $f(P_n) \to f(P)$ [**IV; 157**]. Множество функций из L_2, непрерывных на $\mathfrak{E}$, есть, очевидно, также линеал.

Теорема 1. *Линеал непрерывных на ограниченном множестве $\mathfrak{E}$ функций из L_2 всюду плотен в L_2.* Нам надо доказать, что для любого элемента $f(P)$ из L_2 и любого заданного $\delta > 0$ существует такая непрерывная на $\mathfrak{E}$ функция $\varphi(P) \in L_2$, что

$$\|f-\varphi\|^2 = \int_{\mathfrak{E}} [f(P)-\varphi(P)]^2 G(d\mathfrak{E}) \leqslant \delta, \qquad (111)$$

причем для определенности рассматривается, как и выше, двумерный случай. Мы имеем $f(P) = f^+(P) - f^-(P)$, где $f^+(P)$ и $f^-(P)$ — положительная и отрицательная части $f(P)$. Можно считать, что эти функции, принадлежащие L_2 и тем самым суммируемые на $\mathfrak{E}$, принимают лишь конечные значения и являются предельными функциями возрастающей последовательности кусочно-постоянных функций $\omega_n^+(P)$ и

$\omega_n^-(P)$ с конечным числом значений, причем $\omega_n^+(P) \leqslant f^+(P)$ и $\omega_n^-(P) \leqslant f^-(P)$ [46]. Мы имеем [54]:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathfrak{E}} [f^+(P) - \omega_n^+(P)]^2 G(d\mathfrak{E}) = 0$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathfrak{E}} [f^-(P) - \omega_n^-(P)]^2 G(d\mathfrak{E}) = 0. \qquad (112)$$

Далее из неравенства $(x_1 + x_2)^2 \leqslant 2(x_1^2 + x_2^2)$ следует

$$[f - (\omega_n^+ - \omega_n^-)]^2 \leqslant 2(f^+ - \omega_n^+)^2 + 2(f^- - \omega_n^-)^2,$$

и, вводя кусочно-постоянную функцию $\omega_n(P) = \omega_n^+(P) - \omega_n^-(P)$ с конечным числом значений, мы можем, на основании (112), фиксировать такое n, что $\|f - \omega_n\| \leqslant \varepsilon_0$, где ε_0 — любое заданное положительное число. Принимая во внимание, что $\|f - \varphi\| \leqslant \|f - \omega_n\| + \|\omega_n - \varphi\|$, нам достаточно доказать существование такой непрерывной функции $\varphi(P)$, что $\|\omega - \varphi\| \leqslant \varepsilon$, где ε — любое заданное положительное число и $\omega(P)$ — заданная функция с конечным числом значений. Такая функция может быть представлена в виде

$$\omega(P) = \sum_{k=1}^{m} c_k \omega_{\mathfrak{E}_k}(P),$$

где $\omega_{\mathfrak{E}_k}(P)$ — характеристические функции фиксированных множеств $\mathfrak{E}_k$, принадлежащих $\mathfrak{E}$. Если $\varphi_k(P)$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ некоторые непрерывные на $\mathfrak{E}$ функции и $\varphi(P) = c_1\varphi_1(P) + c_2\varphi_2(P) + \ldots + c_m\varphi_m(P)$, то

$$\|\omega - \varphi\| \leqslant \sum_{k=1}^{m} |c_k| \|\omega_{\mathfrak{E}_k} - \varphi\|$$

и доказательство теоремы свелось к доказательству следующего утверждения: для характеристической функции $\omega_{\mathfrak{E}_0}(P)$ любого измеримого множества $\mathfrak{E}_0$, принадлежащего $\mathfrak{E}$, и любого заданного $\varepsilon > 0$ существует такая непрерывная на $\mathfrak{E}$ функция $\varphi(P)$, что $\|\omega - \varphi\| \leqslant \varepsilon$. Известно, что для любого заданного $\varepsilon_0 > 0$ существует такое замкнутое множество F, принадлежащее $\mathfrak{E}_0$, что $G(\mathfrak{E}_0 - F) \leqslant \varepsilon_0^2$ [35]. При этом

$$\|\omega_{\mathfrak{E}_0} - \omega_F\|^2 = \int_{\mathfrak{E}} [\omega_{\mathfrak{E}_0}(P) - \omega_F(P)]^2 G(d\mathfrak{E}) = \int_{\mathfrak{E}_0 - F} G(d\mathfrak{E}) = G(\mathfrak{E}_0 - F) \leqslant \varepsilon_0^2;$$

и, в силу неравенства $\|\omega_{\mathfrak{E}_0} - \varphi\| \leqslant \|\omega_{\mathfrak{E}_0} - \omega_F\| + \|\omega_F - \varphi\|$ достаточно доказать высказанное утверждение для характеристической функции ограниченного замкнутого множества F, принадлежащего $\mathfrak{E}$. Обозначим

через $r(P)$ расстояние от точки P до множества F. Мы имеем $r(Q_1) \leqslant r(Q) + |\overline{QQ_1}|$ и $r(Q) \leqslant r(Q_1) + |\overline{QQ_1}|$, где $|\overline{QQ_1}|$ — расстояние между Q и Q_1, откуда следует непрерывность функции $r(P)$. Далее $r(Q) = 0$, тогда и только тогда, когда $Q \in F$ [II; 89]. Нетрудно видеть, что $\omega_F(P)$ есть предел невозрастающей последовательности непрерывных на $\mathfrak{E}$ функций:

$$\varphi_n(P) = \frac{1}{1 + nr(P)}, \tag{113}$$

так что $\|\omega_F - \varphi_n\| \to 0$ [54] при $n \to \infty$, и, следовательно, для любого заданного $\varepsilon > 0$ существует такое n, что $\|\omega_F - \varphi_n\| \leqslant \varepsilon$, причем $\varphi_n(P)$ — непрерывна на $\mathfrak{E}$, и тем самым теорема доказана.

Следствие 1. Ограничиваясь для определенности случаем плоскости, положим, что $\mathfrak{E}$ есть замкнутый промежуток Δ ($a_1 \leqslant x \leqslant b_1$; $a_2 \leqslant y \leqslant b_2$). Для любой непрерывной на нем функции $\varphi(x, y)$ можно построить такой полином $p(x, y)$, что $|\varphi(x, y) - p(x, y)| \leqslant \varepsilon_0$ на Δ, где ε_0 — любое заданное положительное число. При этом

$$\|\varphi - p\|^2 = \int_{\Delta} [\varphi(x, y) - p(x, y)]^2 G(d\Delta) \leqslant \varepsilon_0^2 G(\Delta).$$

Принимая еще во внимание, что $\|f - p\| \leqslant \|f - \varphi\| + \|\varphi - p\|$, где $f(x, y) \in L_2$ на Δ и доказанную теорему, можно утверждать, что *линеал полиномов повсюду плотен в L_2 на Δ.*

Вместо промежутка Δ мы могли бы взять и любое ограниченное замкнутое множество F, поскольку непрерывную на F функцию можно распространить с сохранением непрерывности на замкнутый промежуток Δ, содержащий F [IV; 157]. При этом надо учесть, что

$$\|\varphi - p\|_F^2 = \int_F [\varphi(x, y) - p(x, y)]^2 G(dF) \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\Delta} [\varphi(x, y) - p(x, y)]^2 G(d\Delta).$$

Следствие 2. Если $p(x, y)$ — любой полином, то, поскольку рациональные числа лежат повсюду плотно на оси вещественных чисел, существует такой полином с рациональными коэффициентами $q(x, y)$, что при любом заданном $\varepsilon_0 > 0$ имеем $|p(x, y) - q(x, y)| \leqslant \varepsilon_0$ на Δ или F.

Отсюда непосредственно следует, что *полиномы с рациональными коэффициентами образуют множество повсюду плотное в L_2 на Δ или F.*

Покажем, что множество таких полиномов счетно. Сопоставим каждому такому полиному $q(x, y)$ положительное число: $\sigma = n + r + s$, где n — степень $q(x, y)$, r — общий наименьший знамена-

тель его коэффициентов (r — берется положительным) и s — сумма абсолютных значений числителей в его коэффициентах, приведенных к знаменателю r (исключение: если $q(x, y) \equiv 0$, то сопоставляем ему $\sigma = 0$). Нетрудно видеть, что число полиномов, которым соответствует одинаковое σ, — конечно. Мы можем пронумеровать все полиномы с рациональными коэффициентами в порядке возрастания соответствующих им чисел σ, причем порядок полиномов с одинаковым σ безразличен. Мы видим, что существует счетное множество элементов L_2, повсюду плотное в L_2, т. е. *L_2 на Δ или F — сепарабельно.*

Положим теперь, что $\mathfrak{E}$ — любое ограниченное измеримое множество. Возьмем его замыкание $\bar{\mathfrak{E}}$. Это — ограниченное замкнутое множество, и, как доказано, в L_2 на $\bar{\mathfrak{E}}$ существует счетное повсюду плотное множество $\varphi_k(x, y)$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Это будут функции из L_2 на $\bar{\mathfrak{E}}$ и, тем самым, и на $\mathfrak{E}$. Покажем, что $\varphi_k(x, y)$ повсюду плотны и на $\mathfrak{E}$. Возьмем некоторую функцию $f(x, y)$ из L_2 на $\mathfrak{E}$ и продолжим ее нулем на $\bar{\mathfrak{E}}$. Она будет из L_2 и на $\bar{\mathfrak{E}}$, и тем самым при любом заданном $\varepsilon > 0$ найдется такая функция $\varphi_k(x, y)$ из указанного счетного множества, что

$$\int_{\bar{\mathfrak{E}}} [f(x, y) - \varphi_k(x, y)]^2 G(d\mathfrak{E}) = \int_{\mathfrak{E}} [f(x, y) - \varphi_k(x, y)]^2 G(d\mathfrak{E}) + \\ + \int_{\bar{\mathfrak{E}} - \mathfrak{E}} [f(x, y) - \varphi_k(x, y)]^2 G(d\mathfrak{E}) \leqslant \varepsilon$$

и, тем более,

$$\int_{\mathfrak{E}} [f(x, y) - \varphi_k(x, y)]^2 G(d\mathfrak{E}) \leqslant \varepsilon$$

и т. д. Сепарабельность L_2 на любом измеримом множестве будет доказана ниже.

Докажем еще теорему, которая будет нам нужна в дальнейшем.

Теорема 2. *Если уравнение замкнутости имеет место для всех функций, принадлежащих некоторому множеству K, плотному в L_2, то оно имеет место и для любой функции L_2.*

Пусть $f(P)$ — какой-либо элемент L_2 и ε — заданное положительное число. В силу того, что K плотно в L_2, существует в K такой элемент $\varphi(P)$, что $\|f - \varphi\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. По условию для $\varphi(P)$ имеет место уравнение замкнутости, и, следовательно, можно взять такой отрезок $s_n(\varphi)$ ряда Фурье функции $\varphi(P)$, относительно ортонормированной системы функций $\varphi_k(P)$, что $\|\varphi - s_n(\varphi)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$.

Принимая во внимание равенство $f - s_n(f) = (f - \varphi) + (\varphi - s_n(\varphi)) + (s_n(\varphi) - s_n(f))$ и правило треугольника, получим $\|f - s_n(f)\| \leqslant \|f - \varphi\| + \|\varphi - s_n(\varphi)\| + \|s_n(\varphi) - s_n(f)\|$, откуда $\|f -$

$-s_n(f)\| \leqslant \frac{2}{3}\varepsilon + \|s_n(\varphi) - s_n(f)\|$. Но разность $s_n(\varphi) - s_n(f)$ отрезков ряда Фурье для φ и f есть отрезок ряда Фурье для разности $\varphi - f$, т. е. $s_n(\varphi) - s_n(f) = s_n(\varphi - f)$, и, в силу неравенства Бесселя, $s_n(\varphi) - s_n(f)\| \leqslant \|\varphi - f\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Окончательно $\|f - s_n(f)\| \leqslant \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$, откуда, в виду произвольности ε, следует, что замкнутость имеет место для функции $f(P)$ и теорема доказана.

Все сказанное выше непосредственно обобщается и на случай комплексных функций из L_2 [58].

61. Примеры замкнутых систем. Приведем некоторые простые примеры ортогональных нормированных систем, замкнутых на конечном промежутке $[a, b]$. Если мы применим процесс ортогонализации к целым неотрицательным степеням x. 1, x, $x^2, \ldots$ [**IV; 38**], то получим систему ортогональных полиномов $p_k(x)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ на промежутке $[a, b]$, причем $p_k(x)$ имеет степень k. Всякий полином $p(x)$ степени n может быть представлен в виде линейной комбинации

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k p_k(x). \tag{114}$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно определить c_n так, чтобы в правой части коэффициент при x^n был таким же, что и у $p(x)$. Затем надо определить c_{n-1} так, чтобы коэффициент при x^{n-1} у члена $c_{n-1}p_{n-1}(x)$ был таким же, что и у $p(x) - c_n p_n(x)$ и т. д. Коэффициенты c_k в формуле (114) равны, очевидно, коэффициентам Фурье $p(x)$ относительно $p_k(x)$. Из точного равенства (114) следует, что в случае ортогональной системы $p_k(x)$ уравнение замкнутости справедливо для любого полинома $p(x)$, а отсюда следует, в силу теоремы 2 предыдущего параграфа, что система ортогональных полиномов замкнута. Выше мы видели, что на промежутке $[-l, +l]$ для ортогональной системы

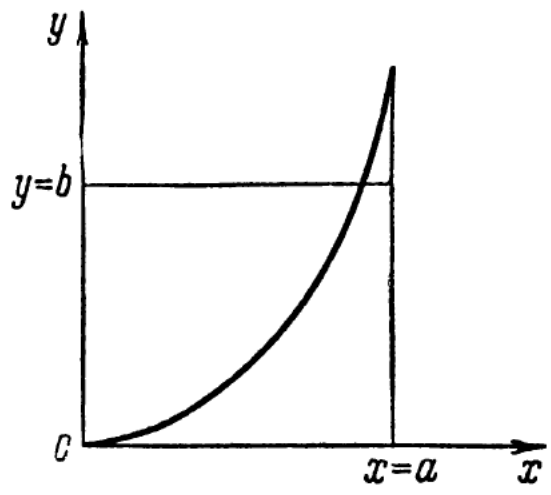
$$\sin\frac{n\pi x}{l};\ \cos\frac{n\pi x}{l}\ \ (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{115}$$

уравнение замкнутости выполнено для любой непрерывной функции [II; **148**], откуда следует, что система (115) замкнута в L_2. Точно так же на промежутке $[0, l]$ замкнутыми будут ортогональные системы функций

$$\sin\frac{n\pi x}{l}\ (n = 1, 2, \ldots) \text{ и } \cos\frac{n\pi x}{l}\ (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Раньше мы видели [**IV; 99**], что в случае собственных функций $\varphi_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ предельной задачи всякая функция с непрерывными производными до второго порядка и удовлетворяющая предельным условиям разлагается в равномерно сходящийся ряд Фурье

по функциям $\varphi_k(x)$. Тем более для таких функций будет иметь место уравнение замкнутости. Изменяя значения функции на узеньких промежутках вблизи концов интервала, мы убедимся без труда в том, что уравнения замкнутости соблюдаются для всех функций с непрерывными производными до второго порядка, без требования удовлетворения предельных условий на концах. Тем более уравнение замкнутости удовлетворяется для всех полиномов, а потому система собственных функций $\varphi_k(x)$ замкнута.



Черт. 3

62. Неравенства Гёльдера и Минковского. Наряду с классом L_2 рассматривают часто класс L_p измеримых функций $f(P)$, у которых p-ая степень абсолютного значения (или модуля для комплексных функций), т. е. $|f(P)|^p$ суммируема на $\mathcal{E}$ [ср. **55**]. Выведем сначала для сумм и интегралов неравенства, аналогичные неравенствам (67) и (69), для любого показателя p, большего единицы.

Пусть α — некоторое положительное число. На плоскости XY рассмотрим кривую $y=x^\alpha$ и проведем прямые $x=a$ и $y=b$, параллельные осям (черт. 3). Эти прямые, координатные оси и упомянутая кривая ограничивают две плоские области, имеющие следующие площади:

$$S_1=\int_0^a x^\alpha dx=\frac{a^{1+\alpha}}{1+\alpha};\quad S_2=\int_0^a y^{\frac{1}{\alpha}}\,dy=\frac{b^{1+\frac{1}{\alpha}}}{1+\frac{1}{\alpha}}.$$

Сумма этих площадей, как это непосредственно видно из чертежа, не меньше площади ab прямоугольника со сторонами a и b, т. е.

$$ab\leqslant\frac{a^{1+\alpha}}{1+\alpha}+\frac{b^{\frac{1+\alpha}{\alpha}}}{\frac{1+\alpha}{\alpha}}.$$

Обозначая $p=1+\alpha$ и $p'=1+\frac{1}{\alpha}$, можем переписать неравенство в виде

$$ab\leqslant\frac{a^p}{p}+\frac{b^{p'}}{p'},\tag{116}$$

причем числа p и p' связаны, очевидно, соотношением

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1.\tag{117}$$

Ввиду произвольности положительного числа α, неравенство (116) справедливо для любых положительных p и p', связанных соотношением (117). Оба эти числа должны быть, очевидно, больше единицы. Если $p=2$, то $p'=2$, и неравенство (116) приводит к очевидному неравенству: $2ab \leqslant a^2+b^2$. Из черт. 3 следует, что знак $=$ в формуле (116) имеет место в том и только в том случае, когда точка пересечения прямых $x=a$ и $y=b$ лежит на кривой $y=x^\alpha$, т. е. при $b=a^\alpha$. Положим далее, что положительные числа a'_k и b'_k $(k=1, 2, \ldots n)$ удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{k=1}^{n} a'^{p}_{k}=1 \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{n} b'^{p'}_{k}=1. \tag{118}$$

Подставим в (116) $a=a'_k$ и $b=b'_k$. Суммируя по k и принимая во внимание (117) и (118), получим

$$\sum_{k=1}^{n} a'_k b'_k \leqslant 1. \tag{119}$$

Рассмотрим теперь любые положительные числа a_k и b_k и обозначим

$$A=\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}; \qquad B=\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}. \tag{120}$$

Числа $a'_k=a_k:A$ и $b'_k=b_k:B$ удовлетворяют, очевидно, соотношениям (118), и мы имеем, следовательно, для них неравенство (119), которое в данном случае может быть записано в виде

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant AB,$$

т. е.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}. \tag{121}$$

Переходя к пределу, получим аналогичное неравенство и для бесконечных сумм

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}, \tag{122}$$

причем считаем, что ряды, стоящие справа, сходятся. При этом и ряд, стоящий слева, в силу написанного неравенства, будет сходящимся. Некоторые из чисел a_k и b_k могут равняться и нулю. Для комплексных чисел мы, пользуясь очевидным неравенством

$$\left|\sum_k a_k b_k\right| \leqslant \sum_k |a_k||b_k|,$$

можем написать предыдущие неравенства в виде

$$\left|\sum_k a_k b_k\right| \leqslant \left(\sum_k |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_k |b_k|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}. \qquad (123)$$

Выведенные неравенства называются обычно неравенствами Гёльдера для сумм. При $p = p' = 2$ они превращаются в обычное неравенство (106) из [**59**]. Совершенно аналогичные неравенства имеют место и для интегралов. Положим, что $f(P) \in L_p$ и $g(P) \in L_{p'}$. В силу (116) имеем

$$|f(P)\,g(P)| \leqslant \frac{|f(P)|^p}{p} + \frac{|g(P)|^{p'}}{p'}.$$

Правая часть суммируема по условию, а потому и произведение $f(P)\,g(P)$ есть суммируемая функция, т. е. если $f(P) \in L_p$ и $g(P) \in L_{p'}$, то произведение $f(P)\,g(P)$ есть суммируемая функция (ср. теорему 1 из [**55**]). Для интеграла от этого произведения имеет место неравенство Гёльдера, аналогичное неравенству (67) из [**55**]

$$\left|\int_{\mathfrak{E}} fg\,dx\,dy\right| \leqslant \left(\int_{\mathfrak{E}} |f|^p\,dx\,dy\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathfrak{E}} |g|^{p'}\,dx\,dy\right)^{\frac{1}{p'}}, \qquad (124)$$

которые мы пишем лишь для интегралов Лебега (оно верно и для интегралов Лебега—Стилтьеса). Оно получается обычным образом из неравенства (122) при помощи предельного перехода. Пусть δ'_n и δ''_n — беспредельно измельчающиеся последовательности подразделений Лебега для $|f|$ и $|g|$ и $\delta_n = \delta'_n \delta''_n$ — произведение этих подразделений. Пусть $\mathfrak{E}_k^{(n)}$ — составные части множества $\mathfrak{E}$ в подразделении δ_n, а $m'_{k,n}$ и $m''_{k,n}$ — точные верхние границы значений $|f|$ и $|g|$ на $\mathfrak{E}_k^{(n)}$. Принимая во внимание (117), можем написать

$$\sum_k m'_{k,n} m''_{k,n}\, m\left(\mathfrak{E}_k^{(n)}\right) = \sum_k m'_{k,n} m^{\frac{1}{p}}\left(\mathfrak{E}_k^{(n)}\right) m''_{k,n} m^{\frac{1}{p'}}\left(\mathfrak{E}_k^{(n)}\right).$$

Применим теперь к числам $a_k = m'_{k,n} m^{\frac{1}{p}}\left(\mathfrak{E}_k^{(n)}\right)$ и $b_k = m''_{k,n} m^{\frac{1}{p'}}\left(\mathfrak{E}_k^{(n)}\right)$ неравенство Гёльдера

$$\sum_k m'_{k,n} m''_{k,n}\, m\left(\mathfrak{E}_k^{(n)}\right) \leqslant \left(\sum_k m'^{p}_{k,n} m\left(\mathfrak{E}_k^{(n)}\right)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_k m''^{p'}_{k,n} m\left(\mathfrak{E}_k^{(n)}\right)\right)^{\frac{1}{p'}}. \qquad (125)$$

Обозначим через $m_{k,n}$ точную верхнюю границу значений произведения $|f|\,|g|$ на $\left(\mathfrak{E}_k^{(n)}\right)$. Мы имеем, очевидно, неравенство $m_{k,n} \leqslant m'_{k,n} m''_{k,n}$, и из (125) следует

$$\sum_k m_{k,n}\, m\left(\mathfrak{E}_k^{(n)}\right) \leqslant \left(\sum_k m'^{p}_{k,n} m\left(\mathfrak{E}_k^{(n)}\right)\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_k m''^{p'}_{k,n} m\left(\mathfrak{E}_k^{(n)}\right)\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Переходя к пределу для последовательности подразделений Лебега, получим

$$\int_{\mathfrak{G}} |f||g|\,dx\,dy \leqslant \left(\int_{\mathfrak{G}} |f|^p\,dx\,dy\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathfrak{G}} |g|^{p'}\,dx\,dy\right)^{\frac{1}{p'}}, \qquad (126)$$

откуда и вытекает непосредственно (124).

Докажем еще неравенство, аналогичное неравенству (69) из [**55**]. Сначала рассмотрим случай сумм. Пусть, как и выше, a_k и b_k — последовательность положительных чисел. Суммируя очевидное равенство

$$(a_k+b_k)^p = (a_k+b_k)^{p-1}a_k + (a_k+b_k)^{p-1}b_k,$$

получим

$$\sum_k (a_k+b_k)^p = \sum_k (a_k+b_k)^{p-1}a_k + \sum_k (a_k+b_k)^{p-1}b_k.$$

Применяя к суммам, стоящим справа, неравенство Гёльдера, придем к неравенству

$$\sum_k (a_k+b_k)^p \leqslant \left(\sum_k a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_k (a_k+b_k)^{(p-1)p'}\right)^{\frac{1}{p'}} + \\ + \left(\sum_k b_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_k (a_k+b_k)^{(p-1)p'}\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Но, в силу (117), $p' = p:(p-1)$, и последнее неравенство переписывается в виде

$$\sum_k (a_k+b_k)^p \leqslant \left(\sum_k (a_k+b_k)^p\right)^{1-\frac{1}{p}} \left[\left(\sum_k a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_k b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]$$

Деля обе части на множитель, стоящий перед квадратной скобкой, приходим к неравенству Минковского для сумм

$$\left(\sum_k (a_k+b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_k a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_k b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (127)$$

Из этого неравенства совершенно так же, как и выше, следует интегральное неравенство Минковского при $f(P)$ и $g(P) \in L_p$

$$\left(\int_{\mathfrak{G}} |f+g|^p\,dxdy\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_{\mathfrak{G}} |f|^p\,dxdy\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\mathfrak{G}} |g|^p dxdy\right)^{\frac{1}{p}}; \qquad (128)$$

если принять во внимание, что $|f+g| \leqslant |f| + |g|$. Неравенства (127) и (128) выведены нами в предположении $p > 1$. Они очевидны при $p = 1$, но уже перестают быть справедливыми при $p < 1$.

Пользуясь выведенными неравенствами, легко доказать для семейства функций $L_p\,(p > 1)$ те свойства, которые мы раньше имели для

L_2, причем считаем функции комплексными. Перечислим эти свойства, следуя [55]. Если $f(P) \in L_p$ и $g(P) \in L_{p'}$ $(p > 1)$, то $f(P)$ и произведение $f(P)g(P)$ суммируемы на $\mathfrak{E}$. Это следует из (124). Если $f(P)$ и $g(P) \in L_p$ и c — постоянная, то $c\,f(P)$ и $f(P) + g(P) \in L_p$ $(p \geqslant 1)$. Это следует из (128). Говорят, что последовательность функций $f_n(P)$ из L_p сходится в среднем в L_p $(p \geqslant 1)$ или сходится в среднем с показателем p к функции $f(P)$ из L_p, если

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathfrak{E}} |f(P) - f_n(P)|^p G(d\mathfrak{E}) = 0.$$

Предел в среднем в L_p единственен с точностью до эквивалентных функций. Если $f_n(P) \to f(P)$ в среднем, то из последовательности $f_n(P)$ можно выделить подпоследовательность $f_{n_k}(P)$, которая сходится почти везде на $\mathfrak{E}$ к $f(P)$. Сходимость в себе определяется условием, аналогичным (72),

$$\int_{\mathfrak{E}} |f_n(P) - f_m(P)|^p G(d\mathfrak{E}) \leqslant \varepsilon$$

при n и $m \geqslant N$, и сходимость последовательности $f_n(P)$ в себе в L_p является необходимым и достаточным условием того, что эта последовательность сходится в среднем к некоторой функции из L_p $(p \geqslant 1)$.

Если $f_n(P) \to f(P)$ в L_p и $g_n(P) \to g(P)$ в $L_{p'}$ $(p > 1)$, то

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathfrak{E}} f_n(P)\, g_n(P)\, G(d\mathfrak{E}) = \int_{\mathfrak{E}} f(P)\, g(P)\, G(d\mathfrak{E}).$$

Далее в L_p может быть введена норма $(p \geqslant 1)$:

$$\|f\| = \left(\int_{\mathfrak{E}} |f(P)|^p G(d\mathfrak{E}) \right)^{\frac{1}{p}},$$

и расстояние между двумя элементами $\delta(f, g) = \|f - g\|$, причем имеет место равенство $\|cf(P)\| = |c|\,\|f(P)\|$ и правило треугольника.

Докажем еще, что если $q > p$ и $f(P) \in L_q$, то $f(P) \in L_p$.

По условию

$$\int_{\mathfrak{E}} |f(P)|^q G(d\mathfrak{E}) = A < +\infty.$$

Рассмотрим интеграл:

$$\int_{\mathfrak{E}} |f(P)|^p G(d\mathfrak{E}) = \int_{\mathfrak{E}(|f(P)|\leqslant 1)} |f(P)|^p G(d\mathfrak{E}) + \int_{\mathfrak{E}(|f(P)|>1)} |f(P)|^p G(d\mathfrak{E}) \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\mathfrak{E}} G(d\mathfrak{E}) + \int_{\mathfrak{E}} |f(P)|^q G(d\mathfrak{E}) = G(\mathfrak{E}) + A,$$

откуда и следует, что $f(P) \in L_p$. При доказательстве мы использовали тот факт, что мера $G(\mathfrak{E})$ множества, $\mathfrak{E}$ конечна.

Но в Z_p (при $p \neq 2$) мы не имеем скалярного произведения, которое имели в L_2.

Совершенно так же, аналогично l_2, мы можем ввести пространство l_p, элементы которого суть бесконечные последовательности комплексных чисел $(x_1, x_2, \ldots)$, таких, что ряд, составленный из $|x_k|^p$, сходится. Он обладает при $p \geqslant 1$ свойствами, аналогичными свойствам l_2, совершенно так же, как это выше имело место для L_p по отношению к L_2. В $l_p (p \neq 2)$ нет скалярного произведения и нет той связи с L_p, которая была нами установлена между l_2 и L_2. Неравенства (106) и (107) заменяются неравенствами (122) и (127), в которых $a_k = |x_k|$ и $b_k = |y_k|$.

63. Интеграл по множеству бесконечной меры. До сих пор мы рассматривали интеграл на измеримом множестве $\mathfrak{E}$ конечной меры. Распространение на случай множеств бесконечной меры производится по существу так же, как это мы делали при определении интеграла Римана по бесконечному промежутку. Пусть на измеримом множестве $\mathfrak{E}$ бесконечной меры задана измеримая и неотрицательная функция $f(P)$. Рассмотрим какую-либо возрастающую бесконечную последовательность множеств конечной меры

$$\mathfrak{E}_1 \subset \mathfrak{E}_2 \subset \mathfrak{E}_3 \subset \ldots, \tag{129}$$

для которой $\mathfrak{E}$ является предельным множеством. Мы можем построить множества $\mathfrak{E}_n$, например, как произведение множества $\mathfrak{E}$ на промежуток $\Delta_n (-n \leqslant x \leqslant +n; -n \leqslant y \leqslant +n)$. Для ограниченных множеств существуют интегралы

$$\int\limits_{\mathfrak{E}_n} f(P)\, G(d\mathfrak{E}), \tag{130}$$

которые в силу неотрицательности $f(P)$ не убывают при возрастании n. Предел монотонной последовательности (130) мы и назовем интегралом от $f(P)$ по $\mathfrak{E}$:

$$\int\limits_{\mathfrak{E}} f(P)\, G(d\mathfrak{E}) = \lim_{n \to \infty} \int\limits_{\mathfrak{E}_n} f(P)\, G(d\mathfrak{E}). \tag{131}$$

Отметим, что интегралы (130) могут равняться и $(+\infty)$. При этом и интеграл от $f(P)$ по $\mathfrak{E}$ также очевидно равен $(+\infty)$. Может случиться, что все интегралы (130) конечны, а интеграл по $\mathfrak{E}$ равен $(+\infty)$. Для того, чтобы оправдать данное выше определение интеграла, мы должны показать, что предел числовой последовательности (130) не зависит от выбора монотонно возрастающей последовательности множеств $\mathfrak{E}_n$.

Теорема. *При любом выборе возрастающей последовательности измеримых множеств $\mathfrak{E}_n$ конечной меры, стремящейся к $\mathfrak{E}$, интегралы* (130) *имеют один и тот же предел.*

Доказываем от обратного. Пусть кроме последовательности множеств (129) имеется другая возрастающая последовательность множеств конечной меры $\mathfrak{E}_1' \subset \mathfrak{E}_2' \subset \mathfrak{E}_3' \subset \ldots$, имеющая $\mathfrak{E}$ предельным множеством, и такая, что мы имеем различные пределы последовательности интегралов (130) для множеств $\mathfrak{E}_n$ и $\mathfrak{E}_n'$.

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathfrak{E}_n} f(P)\, G(d\mathfrak{E}) = a \text{ и } \lim_{n\to\infty} \int_{\mathfrak{E}'_n} f(P)\, G(d\mathfrak{E}) = b > a. \tag{132}$$

Число a во всяком случае конечно, и мы имеем

$$\int_{\mathfrak{E}_n} f(P)\, G(d\mathfrak{E}) \leqslant a \tag{133}$$
$$(n = 1,\ 2, \ldots)$$

Положим сначала, что и число b конечно.

Выбрав положительное число $c < b - a$, можем фиксировать такое значение целого положительного числа m, что

$$\int_{\mathfrak{E}'_m} f(P)\, G(d\mathfrak{E}) > a + c. \tag{134}$$

В силу неотрицательности $f(P)$,

$$\int_{\mathfrak{E}'_m \mathfrak{E}_n} f(P)\, G(d\mathfrak{E}) \leqslant a. \tag{135}$$

Рассмотрим множества $\mathfrak{E}_m'\mathfrak{E}_n$. При возрастании n они возрастают, и, поскольку для $\mathfrak{E}_n$ предельным множеством является $\mathfrak{E}$, для множеств $\mathfrak{E}_m'\mathfrak{E}_n$ предельным множеством будет $\mathfrak{E}_m'$, откуда следует, что

$$\lim_{n\to\infty} G(\mathfrak{E}_m' - \mathfrak{E}_m'\mathfrak{E}_n) = 0. \tag{136}$$

Так как b конечно, то $f(P)$ суммируемо на $\mathfrak{E}_m'$, и, в силу формулы (136) и абсолютной непрерывности интеграла от $f(P)$, мы имеем

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathfrak{E}'_m \mathfrak{E}_n} f(P)\, G(d\mathfrak{E}) = \int_{\mathfrak{E}'_m} f(P)\, G(d\mathfrak{E}),$$

а это противоречит неравенствам (134) и (135). Если $b = +\infty$, то вместо $f(P)$ возьмем $[f(P)]_N$, выбрав N и m настолько большими, чтобы имело место неравенство

$$\int_{\mathfrak{E}_m} [f(P)]_N G(d\mathfrak{E}) > a + 1.$$

В силу (133), будем иметь также

$$\int_{\mathfrak{E}_m \mathfrak{E}_n} [f(P)]_N G(d\mathfrak{E}) \leqslant a.$$

Прежнее рассуждение приведет нас к противоречию, и, таким образом, теорема доказана.

Если величина интеграла неотрицательной функции $f(P)$ по $\mathfrak{E}$ конечна, то говорят, что $f(P)$ суммируема на $\mathfrak{E}$. Из этого и данного выше определения непосредственно следует, что если $f(P)$ суммируема, и неотрицательная функция $\varphi(P)$ удовлетворяет на $\mathfrak{E}$ неравенству $\varphi(P) \leqslant f(P)$, то и $\varphi(P)$ суммируема. Рассмотрим теперь измеримую на $\mathfrak{E}$ функцию, которая может менять знак, и разложим ее на положительную и отрицательную части:

$$f(P) = f^+(P) - f^-(P). \tag{137}$$

Функция $f(P)$ называется суммируемой на $\mathfrak{E}$, если суммируемы $f^+(P)$ и $f^-(P)$. При этом величина интеграла определяется формулой.

$$\int_{\mathfrak{E}} f(P) = \int_{\mathfrak{E}} f^+(P)\, G(d\mathfrak{E}) - \int_{\mathfrak{E}} f^-(P)\, G(d\mathfrak{E}). \tag{138}$$

Если только одна из функций $f^+(P)$ и $f^-(P)$ суммируема, то, как и в [**52**], интеграл от $f(P)$ будет иметь смысл, но его величина будет $(+\infty)$ или $(-\infty)$. Большей частью множеством $\mathfrak{E}$, на котором производится интегрирование, является вся плоскость или вся прямая или вообще все n-мерное пространство.

Для интегралов на измеримом множестве бесконечной меры справедлива теорема из [**52**] и свойства 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9 и 10. Мы докажем только полную аддитивность и абсолютную непрерывность. Доказательство теоремы и остальных свойств совершенно просто. Предварительно докажем следующую простую лемму.

Лемма. *Если неотрицательные числа* $a_k^{(s)}$ *не убывают при возрастании* s *и* $\lim\limits_{s \to \infty} a_k^{(s)} = a_k$, *то, обозначая*

$$a^{(s)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(s)},$$

мы имеем

$$\lim_{s\to\infty} a^{(s)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k. \tag{139}$$

Доказываем от обратного. Отметим, что написанная сумма может иметь значение $(+\infty)$. Обозначая через a предел $a^{(s)}$, положим сначала, что

$$a > \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Для достаточно больших значений s будем иметь $a^{(s)} > c$, где c — сумма ряда (139) и, фиксируя такое s, мы можем указать столь большое m, что

$$\sum_{k=1}^{m} a_k^{(s)} > \sum_{k=1}^{\infty} a_k,$$

а потому и подавно

$$\sum_{k=1}^{m} a_k > \sum_{k=1}^{\infty} a_k,$$

что противоречит $a_k \geqslant 0$. Положим теперь, что

$$a < \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Тем самым будем иметь для некоторого фиксированного m:

$$\sum_{k=1}^{m} a_k > a.$$

Мы можем теперь выбрать настолько большое s, чтобы иметь

$$\sum_{k=1}^{m} a_k^{(s)} > a.$$

Написанная конечная сумма очевидно $\leqslant a^{(s)}$, и потому $a^{(s)} > a$, что нелепо, так как последовательность $a^{(s)}$ стремится к a, не убывая. Лемма доказана.

Переходим к доказательству полной аддитивности интеграла. Пусть $f(P)$ суммируема на $\mathfrak{E}$ и это множество разбито на конечное или счетное число измеримых множеств $\mathfrak{E}_k$ конечной или бесконечной меры. При этом $f(P)$ будет суммируемой на каждом $\mathfrak{E}_k$. Положим далее, что $\mathfrak{E}^{(1)} < \mathfrak{E}^{2} < \ldots$ — возрастающая последовательность множеств конечной меры, стремящаяся к $\mathfrak{E}$. Вводим в рассмотрение множества $\mathfrak{E}_k^{(s)} = \mathfrak{E}_k \mathfrak{E}^{(s)}$ конечной меры. Они возрастают при возрастании s, $\lim\limits_{s\to\infty} \mathfrak{E}_k^{(s)} = \mathfrak{E}_k$ и $\mathfrak{E}^{(s)} = \mathfrak{E}_1^{(s)} + \mathfrak{E}_2^{(s)} + \mathfrak{E}_3^{(s)} + \ldots$, причем мно-

жества, стоящие справа, попарно без общих точек. Для множества $\mathfrak{E}^{(s)}$ конечной меры мы имеем

$$\int\limits_{\mathfrak{E}^{(s)}} f(P)\,G(d\mathfrak{E}) = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\mathfrak{E}_k^{(s)}} f(P)\,G(d\mathfrak{E}).$$

Считая пока функцию $f(P)$ положительной, переходя в этой формуле к пределу при $s \to \infty$ и пользуясь доказанной леммой, мы и получим формулу (20) из [**49**]. В общем случае утверждение справедливо на основании формулы (137) и того факта, что оно справедливо в отдельности для $f^+(P)$ и $f^-(P)$.

Совершенно так же доказывается свойство 6 из [**49**]. Докажем абсолютную непрерывность интеграла. Считаем, что $f(P) \geqslant 0$ и суммируема на $\mathfrak{E}$. Задано положительное ε. Берем m настолько большим, чтобы имело место неравенство

$$\int\limits_{\mathfrak{E}-\mathfrak{E}^{(m)}} fG(d\mathfrak{E}) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{140}$$

Для любого множества e, содержащегося в $\mathfrak{E}$, можем написать

$$\int\limits_{e} fG(d\mathfrak{E}) = \int\limits_{\mathfrak{E}^{(m)}e} fG(d\mathfrak{E}) + \int\limits_{(\mathfrak{E}-\mathfrak{E}^{(m)})e} fG(d\mathfrak{E}).$$

В силу абсолютной непрерывности интеграла на множестве $\mathfrak{E}^{(m)}$ конечной меры существует такое $\eta > 0$, что абсолютное значение интеграла по $\mathfrak{E}^{(m)}e$ не больше $\frac{\varepsilon}{2}$ при $e \in \mathfrak{E}$ и $G(e) \leqslant \eta$. Принимая во внимание (140), можем утверждать то же самое и для интеграла по $(\mathfrak{E} - \mathfrak{E}^{(m)})e$, откуда следует, что абсолютное значение интеграла по e не больше ε, если $e \subset \mathfrak{E}$ и $G(e) \leqslant \eta$, что и доказывает абсолютную непрерывность интеграла.

Теоремы 1, 2, 3, 4 из [**54**] также без труда переносятся на случай множества $\mathfrak{E}$ бесконечной меры. Для примера докажем теорему 1. Пусть ε — заданное положительное число. Выбираем настолько большое m, чтобы иметь неравенство

$$\int\limits_{\mathfrak{E}-\mathfrak{E}^{(m)}} F(P)\,G(d\mathfrak{E}) \leqslant \varepsilon. \tag{141}$$

Оцениваем затем интеграл от разности $f(P) - f_n(P)$:

$$\left|\int\limits_{\mathfrak{E}} (f-f_n)\,G(d\varepsilon)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\mathfrak{E}^{(m)}} (f-f_n)\,G(d\mathfrak{E})\Bigg| + \Bigg|\int\limits_{\mathfrak{E}-\mathfrak{E}^{(m)}} (f-f_n)\,G(d\mathfrak{E})\Bigg|. \tag{142}$$

На множестве $\mathfrak{E}-\mathfrak{E}^{(m)}$ пользуемся оценкой $|f-f_n|\leqslant 2F$ и, в силу (141), получим

$$\left|\int\limits_{\mathfrak{E}-\mathfrak{E}^{(m)}}(f-f_n)\,G(d\mathfrak{E})\right|\leqslant\int\limits_{\mathfrak{E}-\mathfrak{E}^{(m)}}|f-f_n|\,G(d\mathfrak{E})\leqslant\int\limits_{\mathfrak{E}-\mathfrak{E}^{(m)}}2FG(d\mathfrak{E})\leqslant 2\varepsilon.$$

Для множества $\mathfrak{E}^{(m)}$ конечной меры теорема 1 уже доказана, и, следовательно, существует такое N, что при $n>N$ первое слагаемое правой части (142) $\leqslant\varepsilon$. Таким образом, получаем

$$\left|\int\limits_{\mathfrak{E}}(f-f_n)G(d\mathfrak{E})\right|\leqslant 3\varepsilon \text{ при } n>N,$$

что, ввиду произвольности ε, и доказывает теорему. Совершенно аналогично доказываются и остальные теоремы из [**54**].

64. Класс L_2 на множестве бесконечной меры. Построение класса L_2 и теория ортогональных функций без труда переносится на случай множества $\mathfrak{E}$ бесконечной меры. Мы говорим, что функция $f(P)$ на множестве $\mathfrak{E}$ бесконечной меры принадлежит L_2, если она измерима на $\mathfrak{E}$ и ее квадрат $f^2(P)$ или квадрат ее модуля $|f(P)|^2$ есть суммируемая на $\mathfrak{E}$ функция. Все теоремы из [**55**], кроме теоремы 1, остаются в силе. В теореме 1 мы существенным образом использовали конечность меры $\mathfrak{E}$. Можно легко дать пример функции, принадлежащей L_2 и не суммируемой. Например, функция $\frac{1}{x}$ принадлежит L_2 на промежутке $[1, \infty]$, ибо $\frac{1}{x^2}$ суммируема, но сама функция $\frac{1}{x}$ не суммируема. Кроме того, мы использовали конечность меры $\mathfrak{E}$ при доказательстве теоремы 8. Покажем, что эта теорема остается справедливой и в том случае, когда мера $\mathfrak{E}$ бесконечна. Положим для определенности, что $\mathfrak{E}$ есть полная плоскость $\mathfrak{E}_\infty$. Пусть последовательность $f_n(P)$ $(n=1, 2, \ldots)$ функций, принадлежащих L_2 на $\mathfrak{E}_\infty$ сходится в себе. Пусть Δ_m — промежуток, определяемый неравенствами: $-m\leqslant x\leqslant m$, $-m\leqslant y\leqslant m$. Функции $f_n(P)$ принадлежат L_2 и сходятся в себе на каждом Δ_m, ибо интеграл от неотрицательной функции по Δ_m не больше интеграла от той же функции по всей плоскости. Из теоремы 8 [**56**] следует, что можно выбрать из последовательности $f_n(P)$ подпоследовательность $f_{n_1}^{(1)}(P)$, $f_{n_2}^{(1)}(P), \ldots$, которая сходится почти везде на Δ_1. Из указанной подпоследовательности мы можем выделить новую подпоследовательность $f_{n_1}^{(2)}(P)$, $f_{n_1}^{(2)}(P), \ldots$, которая сходится почти везде на Δ_2 и т. д. Нетрудно видеть, что подпоследовательность $f_{n_1}^{(1)}(P)$, $f_{n_2}^{(2)}(P), \ldots$, сходится почти везде на $\mathfrak{E}$ [**ф. IV; 15**] Пусть $f(P)$ — предельная функция для этой подпоследовательности. В силу того, что последовательность $f_n(P)$ сходится в себе на $\mathfrak{E}_\infty$ для любого

заданного положительного ε существует такое N, что

$$\int_{\mathfrak{E}_\infty} \left[f_{n_k}^{(k)}(P) - f_n(P)\right]^2 G(d\mathfrak{E}) \leqslant \varepsilon, \text{ при } n_k^{(k)} \text{ и } n > N.$$

Устремляя k к бесконечности, получаем, как и в [56],

$$\int_{\mathfrak{E}_\infty} \left| f(P) - f_n(P)\right|^2 G(d\mathfrak{E}) \leqslant \varepsilon \text{ при } n > N,$$

что и доказывает теорему 8.

Если $f(P) \in L_2$ на $\mathfrak{E}_\infty$ и задано $\varepsilon_0 > 0$, то существует такое N, что

$$0 \leqslant \int_{\mathfrak{E}_\infty - \Delta_N} f^2(P)\, G(d\mathfrak{E}) \leqslant \varepsilon_0^2.$$

Определим функцию $\psi(P)$ следующим образом: $\psi(P) = f(P)$ в Δ_N и $\psi(P) = 0$ вне Δ_N. Очевидно $\psi(P) \in L_2(\mathfrak{E}_\infty)$

$$\|f - \psi\|_{\mathfrak{E}_\infty}^2 = \int_{\mathfrak{E}_\infty} [f(P) - \psi(P)]^2 G(d\mathfrak{E}) = \int_{\mathfrak{E}_\infty - \Delta_N} f^2(P)\, G(d\mathfrak{E}) \leqslant \varepsilon_0^2,$$

и отсюда видно, что линеал функций $\psi(P)$, отличных от нуля лишь на некотором конечном промежутке, повсюду плотен в $L_2(\mathfrak{E}_\infty)$, т. е. в L_2 на $\mathfrak{E}_\infty$.

Докажем сепарабельность $L_2(\mathfrak{E}_\infty)$. На Δ_m $(m = 1, 2, \ldots)$, как доказано выше, существует повсюду плотное в L_2 множество функций $\varphi_{k,m}(P)$ $(k, m = 1, 2, \ldots)$. Продолжаем эти функции нулем на все $\mathfrak{E}_\infty$. Мы получим таким образом счетное множество функций $\varphi_{k,m}(P)$ из $L_2(\mathfrak{E}_\infty)$. Нетрудно видеть, что они повсюду плотны в $L_2(\mathfrak{E}_\infty)$. Действительно, пусть $f(P) \in L_2(\mathfrak{E}_\infty)$ и задано $\varepsilon > 0$. При этом существует такое m_0, что

$$\int_{\mathfrak{E}_\infty - \Delta_{m_0}} f^2(P)\, G(d\mathfrak{E}) \leqslant \frac{\varepsilon^2}{2},$$

и можно, согласно сказанному выше, выбрать такую функцию $\varphi_{k,m_0}(P)$ из указанного выше счетного множества, что

$$\int_{\Delta m_0} [f(P) - \varphi_{k,m_0}(P)]^2 G(d\mathfrak{E}) \leqslant \frac{\varepsilon^2}{2},$$

и отсюда, в силу того, что $\varphi_{kn_0}(P) = 0$ вне Δ_{m_0}:

$$\int_{\mathfrak{E}_\infty} [f(P) - \varphi_{k,m_0}(P)]^2 G(d\mathfrak{E}) \leqslant \mathfrak{E}^2,$$

что и доказывает сепарабельность $L_2\mathfrak{E}_\infty$.

Покажем теперь, что линеал непрерывных функций $\varphi(P)$, равных нулю вне некоторого конечного промежутка (различного для различных $\varphi(P)$), всюду плотен в $L_2(\mathcal{E}_\infty)$.

Этот линеал называется обычно *линеалом финитных непрерывных функций.*

Пусть $f(P) \in L_2(\mathcal{E}_\infty)$ и задано $\varepsilon > 0$. Покажем, что существует такая финитная непрерывная функция $\varphi(P)$, что $\|f - \varphi\|_{\mathcal{E}_\infty} \leqslant \varepsilon$. Как мы видели выше, существует такое m, что $\|f\|_{\mathcal{E}_\infty - \Delta_m} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Фиксируя это Δ_m, мы можем утверждать, что существует такая непрерывная в Δ_m функция $\varphi(P)$, что $\|f - \varphi\|_{\Delta_m} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Обозначим $M = \max_{P \in \Delta_m} |\varphi(P)|$. Берем какое-нибудь $h > 0$, полагаем $\varphi(P) = 0$ на границе Δ_{m+h} и продолжаем $\varphi(P)$ на весь промежуток Δ_{m+h} с сохранением непрерывности и без повышения $\max |\varphi(P)|$ [**IV:157**]. Вне Δ_{m+h} полагаем $\varphi(P) = 0$, так что $\varphi(P) = 0$, так что $\varphi(P)$ — финитная непрерывная функция. Принимая во внимание сказанное выше, получаем

$$\|f - \varphi\|^2_{\mathcal{E}_\infty} = \|f - \varphi\|^2_{\Delta_m} + \|f - \varphi\|^2_{\mathcal{E}_\infty - \Delta_m} \leqslant \frac{\varepsilon^2}{4} + 2\|f\|^2_{\mathcal{E}_\infty - \Delta_m} +$$

$$+ 2\|\varphi\|^2_{\mathcal{E}_\infty - \Delta_m} \leqslant \frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\varepsilon^2}{2} + 2\|\varphi\|^2_{\mathcal{E}_\infty - \Delta_m}.$$

Но $\|\varphi\|^2_{\mathcal{E}_\infty - \Delta_m}$ равна интегралу от $|\varphi(P)|^2$ по $\Delta_{m+h} - \Delta_m$. Для интеграла Лебега:

$$\|\varphi\|^2_{\mathcal{E}_\infty - \Delta_m} = \int\limits_{\Delta_{m+h} - \Delta_m} |\varphi(P)|^2 \, dxdy \leqslant M^2 (h^2 + 2mh),$$

и выбираем h таким, что $M^2(h^2 + 2mh) \leqslant \frac{\varepsilon^2}{8}$, после чего получаем $\|f - \varphi\|^2_\infty \leqslant \varepsilon^2$, что и требовалось доказать. Аналогичное утверждение справедливо и для интеграла Лебела-Стилтьеса.

Как и выше, доказывается теорема 2 из [**60**]. Отметим, что для интеграла Лебега полиномы не принадлежат $L_2(\mathcal{E}_\infty)$. Если $\mathcal{E}$ — любое измеримое множество, то, продолжая функции из $L_2(\mathcal{E})$ на $\mathcal{E}_\infty$ нулем, получим функции из $L_2(\mathcal{E}_\infty)$. Исходя из этого, мы можем распространить все сказанное выше и на случай любого неограниченного измеримого множества.

В качестве примера замкнутой ортогональной системы на промежутке $(-\infty, +\infty)$ приведем функции Эрмита [III_2, **156**]

$$\eta_k(x) = (-1)^k e^{\frac{1}{2}x^2} \frac{d^k}{dx^k}(e^{-x^2})$$

и на промежутке $(0, \infty)$ — функции Лагерра [III_2; **160**]

$$\psi_k(x) = e^{\frac{1}{2}x} \frac{d^k}{dx^k}(x^k e^{-x}).$$

Оба примера относятся к интегралу Лебега.

Простое доказательство замкнутости этих систем имеется в книге Гильберта — Куранта „Методы математической физики“, т. I, стр. 88.

Сказанное выше о $L_2(\mathfrak{E}_\infty)$ непосредственно переносится и на $L_p(\mathfrak{E}_\infty)$ $(p \geqslant 1)$, как это имело место и для случая ограниченного множества, а также на случай комплексных функций.

65. Интегрирующая функция ограниченной вариации. До сих пор при изучении интеграла Лебега — Стилтьеса мы предполагали, что функция $G(\mathfrak{E})$ неотрицательна. Мы переходим сейчас к тому случаю, когда интегрирующая функция $G(\mathfrak{E})$ получается из функции промежутков $G(\Delta)$, которая является функцией ограниченной вариации. Для такой функции мы имеем каноническое представление в виде разности двух неотрицательных функций

$$G(\Delta) = G_1(\Delta) - G_2(\Delta),$$

где

$$G_1(\Delta) = \frac{1}{2}[V(\Delta) + G(\Delta)]; \quad G_2(\Delta) = \frac{1}{2}[V(\Delta) - G(\Delta)],$$

и $V(\Delta)$ есть полная вариация $G(\Delta)$ на промежутке Δ. Каждая из функций $G_1(\Delta)$ и $G_2(\Delta)$ приводит к неотрицательной, аддитивной и нормальной функции $G_1(\mathfrak{E})$ и $G_2(\mathfrak{E})$ на замкнутом теле множеств L_{G_1} и L_{G_2}. Обозначим через L_G замкнутое тело множеств, являющееся общей частью L_{G_1} и L_{G_2}. На этом теле определяется вполне аддитивная и нормальная функция

$$G(\mathfrak{E}) = G_1(\mathfrak{E}) - G_2(\mathfrak{E}).$$

Возьмем неотрицательную, аддитивную и нормальную функцию промежутков

$$V(\Delta) = G_1(\Delta) + G_2(\Delta).$$

Ее распространение приводит к функции $V(\mathfrak{E})$, определённой на замкнутом теле L_V. Пользуясь последней формулой и неотрицательностью функции $G_i(\Delta)$, легко показать, что L_V есть общая часть L_{G_1} и L_{G_2}, т. е. L_V совпадает с L_G. Сначала надо показать, что для любого множества $\mathfrak{E}$ внешняя мера относительно функций $V(\Delta)$, т. е. $|\mathfrak{E}|_V$, равна сумме внешних мер относительно $G_1(\Delta)$ и $G_2(\Delta)$, т. е. $|\mathfrak{E}|_V = |\mathfrak{E}|_{G_1} + |\mathfrak{E}|_{G_2}$. Затем, пользуясь определением измеримости, легко показать, что если $\mathfrak{E}$ измеримо относительно $V(\Delta)$, то $\mathfrak{E}$ измеримо относительно G, (Δ и G_2 Δ) а также, наоборот, если оно измеримо относительно $G_1(\Delta)$ и $G_2(\Delta)$, то оно измеримо и относительно

$V(\Delta)$. При интегрировании надо рассматривать класс функций $f(P)$, измеримых относительно $V(\Delta)$, т. е. класс функций, измеримых одновременно относительно $G_1(\Delta)$ и $G_2(\Delta)$. Интеграл определяется естественно формулой

$$\int_{\mathfrak{E}} f(P)\, G(d\mathfrak{E}) = \int_{\mathfrak{E}} f(P)\, G_1(d\mathfrak{E}) - \int_{\mathfrak{E}} f(P)\, G_2(d\mathfrak{E}),$$

и его существование обусловлено существованием интегралов, стоящих справа, причем мы считаем, что оба эти интеграла имеют конечные значения. В противном случае правая часть написанной формулы может привести к неопределенному выражению. Две функции называются эквивалентными, если они эквивалентны относительно $V(\mathfrak{E})$. Свойства интеграла 1, 4, 5, 7, 8, 9 из **[52]** сохраняются без изменения. В свойстве 3 вместо неравенства (16) имеем неравенство

$$\left| \int_{\mathfrak{E}} f(P)\, G(d\mathfrak{E}) \right| \leqslant \int_{\mathfrak{E}} |f(P)|\, V(d\mathfrak{E}).$$

В свойстве 6 вместо сходимости ряда (49) мы должны потребовать сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathfrak{E}_k} |f(P)|\, V(d\mathfrak{E}),$$

и, наконец, в свойстве 10 вместо неравенства (50) будем иметь неравенство

$$\left| \int_{\mathfrak{E}} f(P)\, G(d\mathfrak{E}) \right| \leqslant \int_{\mathfrak{E}} f(P)\, V(d\mathfrak{E}).$$

Согласно определению интеграла, суммируемыми функциями будут функции, суммируемые относительно $V(\mathfrak{E})$. Теоремы 1 и 2 из **[54]** о предельном переходе остаются без изменения.

Нетрудно распространить понятие интеграла и на тот случай, когда функция $G(\Delta)$ является комплексной функцией:

$$G(\Delta) = G'(\Delta) + G''(\Delta)\, i,$$

где $G'(\Delta)$ и $G''(\Delta)$ суть функции ограниченной вариации. Пользуясь каноническим разбиением этих функций

$$G'(\Delta) = G_1'(\Delta) - G_2'(\Delta); \quad G''(\Delta) = G_1''(\Delta) - G_2''(\Delta),$$

приходим к формуле

$$G(\Delta) = (G_1'(\Delta) - G_2'(\Delta)) + (G_1''(\Delta) - G''_2(\Delta))\, i.$$

Функция $G(\Delta)$ приводит к функции $G(\mathfrak{E})$, определенной на замкнутом теле L_G, которое является общей частью замкнутых тел $L_{G_i'}$ и $L_{G_i''}$ $(i = 1, 2)$. Определение измеримых функций относительно $G(\mathfrak{E})$ и интеграла строится совершенно так же, как и выше,

причем и интегрируемая функция может быть комплексной функцией.

В случае одного переменного для функции ограниченной вариации мы имеем каноническое представление: $g(x) = g_1(x) - g_2(x)$ в виде разности двух неубывающих функций, и интеграл запишется в виде

$$\int_{\mathfrak{E}} f(x)\, dg_1(x) = \int_{\mathfrak{E}} f(x)\, dg_1(x) - \int_{\mathfrak{E}} f(x)\, dg_2(x).$$

Если введем полную вариацию $v(x) = g_1(x) + g_2(x)$, то будем иметь неравенство

$$\left| \int_{\mathfrak{E}} f(x)\, dg(x) \right| \leqslant \int_{\mathfrak{E}} |f(x)|\, dv(x),$$

и суммируемость $f(x)$ относительно $g_1(x)$ и $g_2(x)$ равносильна суммируемости $f(x)$ относительно $v(x)$.

66. Приведение кратных интегралов. Мы переходим к изложению основного результата из теории кратных интегралов Лебега, касающегося приведения кратного интеграла к последовательным простым квадратурам. Напомним соответствующие результаты из прежней теории кратных интегралов **[II; 97]**. Если, например, функция $f(x, y)$ непрерывна на конечном замкнутом промежутке $\Delta [a \leqslant x \leqslant b;\ c \leqslant y \leqslant d]$, то имеет место следующая формула приведения двойного интеграла к двум квадратурам:

$$\int\int_{\Delta} f(x,y)\, dx\, dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, dx \right] dy.$$

Мы формулируем сейчас аналогичную теорему для интеграла Лебега. Она была впервые доказана итальянским математиком Фубини в 1907 году.

Теорема Фубини. *Пусть $f(x, y)$ — суммируемая функция на конечном промежутке $\Delta [a \leqslant x \leqslant b;\ c \leqslant y \leqslant d]$. При этом функция $f(x, y)$ суммируема по y на промежутке $[c, d]$ для почти всех значений x из промежутка $[a, b]$, функция*

$$h(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy, \tag{143}$$

определенная почти везде в промежутке $[a, b]$, суммируема по этому промежутку, и имеет место равенство

$$\int\int_{\Delta} f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy \right] dx. \tag{144}$$

Совершенно аналогичные утверждения имеют место и при перемене порядка интегрирования. При этом получается формула

$$\int\int_{\Delta} f(x, y)\,dx\,dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\,dx\right] dx. \tag{145}$$

Отметим, что в указанной теореме интегралы понимаются в смысле Лебега и в этом же смысле, конечно, надо понимать и суммируемость функции. Утверждение о суммируемости включает, очевидно, и утверждение об измеримости функции. Обратим внимание на то, что функция (143) может быть определена не во всех точках промежутка $[a, b]$, но во всяком случае определена почти везде на этом промежутке. Аналогичное замечание относится и к функции

$$l(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx. \tag{146}$$

Для того чтобы сделать доказательство, которое довольно сложно, более отчетливым, мы формулировали теорему Фубини для частного случая. В дальнейшем укажем различные более общие формулировки этой теоремы. Доказательству этой теоремы предпошлём несколько лемм.

Лемма 1. *Если для функций $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$, ..., $f_m(x, y)$, суммируемых на промежутке Δ, справедлива теорема Фубини, то она справедлива и для любой линейной комбинации этих функций.*

$$f(x, y) = \sum_{k=1}^{m} c_k f_k(x, y). \tag{147}$$

Каждая из указанных функций $f_k(x, y)$, по условию леммы, суммируема по y на промежутке $[c, d]$, если исключить из промежутка $[a, b]$ изменения x некоторое множество A_k меры нуль. Если мы исключим из $[a, b]$ множество $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_m$, имеющее также меру нуль, то для оставшихся значений x функция (147) будет суммируемой по y на промежутке $[c, d]$. Все функции

$$h_k(x) = \int_c^d f_k(x, y)\,dy$$

будут определены на $[a, b]$ за исключением точек множества A. Далее, по условию леммы, для функций $f_k(x, y)$ справедлива формула (144). Принимая во внимание правила интегрирования суммы и вынесения постоянного множителя за знак интеграла, мы видим, что формула (144) справедлива и для функции (147), и тем самым лемма доказана.

Замечание. Если относительно функций $f_k(x, y)$ дано лишь то, что они измеримы по y на промежутке $[c, d]$ для почти всех значений x из $[a, b]$, то то же самое, очевидно, можно утверждать и относительно функции (147), ибо сумма измеримых функций есть также измеримая функция. При этом считается, конечно, что сумма имеет смысл [43].

Лемма 2. *Пусть на промежутке Δ имеется монотонная последовательность суммируемых функций $f_n(x, y)$, которая сходится к функции $f(x, y)$, суммируемой на Δ. Если при этом для каждой функции $f_n(x, y)$ справедлива теорема Фубини, то она справедлива и для предельной функции $f(x, y)$.*

При доказательстве будем считать, что $f_n(x, y)$ есть неубывающая последовательность. Случай невозрастающей последовательности приводится к указанному случаю, если заменить $f_n(x, y)$ на $-f_n(x, y)$. По условию леммы каждая из функций $f_n(x, y)$ измерима и суммируема по y на промежутке $[c, d]$, если исключить из промежутка $[a, b]$ изменения x некоторое множество A_n меры нуль. Если мы исключим из $[a, b]$ множество $A = A_1 + A_2 + \cdots$, также имеющее меру нуль, то для оставшегося множества значений x и предельная функция $f(x, y)$ будет измеримой по y на $[c, d]$. По условию леммы каждая из функций

$$h_n(x) = \int_c^d f_n(x, y)\, dy \tag{148}$$

определена на $[a, b]$, если исключить множество A_n значений x меры нуль. Если мы исключим из $[a, b]$ множество A, также имеющее меру нуль, то все функции (148) будут определены для оставшихся значений x, т. е. будут определены на множество $[a, b] - A$ и, по условию, суммируемы на $[a, b]$. Последовательность $h_n(x)$ есть возрастающая последовательность, и мы можем определить почти везде на $[a, b]$ измеримую предельную функцию $h(x) = \lim\limits_{n \to \infty} h_n(x)$. Принимая во внимание, что для функций $f_n(x, y)$, по условию, применима теорема Фубини и что предельная функция $f(x, y)$, по условию, суммируема на Δ, мы можем написать

$$\int_a^b h_n(x)\, dx = \int\int_\Delta f_n(x, y)\, dx\, dy \leqslant \int\int_\Delta f(x, y)\, dx\, dy.$$

Отсюда, в силу теоремы 2 из [54], мы можем утверждать, что $h(x)$ суммируема на $[a, b]$, и имеет место формула

$$\int_a^b h(x)\, dx = \lim_{n \to \infty} \int_a^b h_n(x)\, dx = \lim_{n \to \infty} \int\int_\Delta f_n(x, y) dx\, dy.$$

С другой стороны, в силу теоремы 2 из [54], мы имеем

$$\lim_{n\to\infty}\int\int_{\Delta} f_n(x, y)\,dx, dy = \int\int_{\Delta} f(x, y)\,dx\,dy,$$

и, таким образом, можем написать

$$\int_a^b h(x)\,dx = \int\int_{\Delta} f(x, y)\,dx\,dy. \tag{149}$$

Мы определили функцию $h(x)$ следующим образом:

$$h(x) = \lim_{a\to\infty} h_n(x) = \lim_{n\to\infty}\int_c^d f_n(x, y)\,dy.$$

Для полного доказательства леммы нам остается доказать, что функция $f(x, y)$ суммируема по y на $[c, d]$ для почти всех значений x из $[a, b]$ и что функция $h(x)$ почти везде на $[a, b]$ может быть выражена формулой

$$h(x) = \int_c^d f(x, y)\,dy. \tag{150}$$

После того как мы это докажем, получим, в силу (149), для функции $f(x, y)$ полностью теорему Фубини. Пусть B — множество тех точек из $[a, b]$, в которых функция $h(x)$ определена и равна $(+\infty)$. В силу суммируемости $h(x)$ множество B имеет меру нуль. Если исключить из $[a, b]$ множество $A + B$ меры нуль, то на оставшемся множестве, т. е. почти везде на $[a, b]$, возрастающая последовательность $h_n(x)$ стремится к функции $h(x)$, принимающей конечные значения, т. е. для всякой точки x, принадлежащей множеству $(a, b) - (A + B)$, интегралы по $[c, d]$ от неубывающей последовательности функций $f_n(x, y)$ от y ограничены числом $h(x)$. Согласно теореме 2 из [54], для указанных значений x, $f(x, y)$ суммируема по y на $[c, d]$, и имеет место формула

$$\int_c^d f(x, y)\,dy = \lim_{n\to\infty}\int_c^d f_n(x, y)\,dy,$$

и, в силу (148), функция $h(x)$ почти везде на $[a, b]$ выражается формулой (150). Таким образом лемма доказана.

Замечание. Из самого начала приведенного доказательства непосредственно следует, что если относительно функций $f_n(x, y)$ дано лишь то, что они измеримы по y на $[c, d]$ для почти всех значений x из $[a, b]$, то и предельная функция $f(x, y)$ измерима по y для почти всех значений x из $[a, b]$.

67. Случай характеристической функции. Целью настоящего параграфа является доказательство теоремы Фубини для того случая, когда подынтегральная функция есть характеристическая функция некоторого измеримого множества $\mathfrak{E}$, принадлежащего промежутку Δ, о котором говорится в теореме. Интеграл от $\omega_{\mathfrak{E}}(P) = \omega_{\mathfrak{E}}(x, y)$ дает, очевидно, меру $m(\mathfrak{E})$ множества $\mathfrak{E}$, как множества на плоскости. Пусть $\mathfrak{E}_{x_0}$ — множество тех точек $\mathfrak{E}$, которые имеют заданную абсциссу x_0, т. е. $\mathfrak{E}_{x_0}$ есть пересечение $\mathfrak{E}$ с прямой $x = x_0$,. Характеристическая функция этого множества равна $\omega_{\mathfrak{E}}(x_0, y)$. Измеримость $\mathfrak{E}_{x_0}$ по отношению к y равносильна измеримости функции $\omega_{\mathfrak{E}}(x_0, y)$ на промежутке $[c, d]$ и если это так, то линейная мера $\mathfrak{E}_{x_0}$, которую мы обозначим через $m'(\mathfrak{E}_{x_0})$, равна интегралу от $\omega_{\mathfrak{E}}(x_0, y)$ по указанному промежутку. Суммируемость $\omega_{\mathfrak{E}}(x_0, y)$ обеспечена ввиду ее ограниченности. Теорема Фубини для характеристической функции $\omega_{\mathfrak{E}}(x, y)$ приводится таким образом к следующему утверждению: функция $\omega_{\mathfrak{E}}(x, y)$ измерима по y на промежутке $[c, d]$ для почти всех значений x из $[a, b]$, ограниченная функция

$$h(x) = m'(\mathfrak{E}_x) = \int_c^d \omega(x, y)\, dy,$$

измерима в $[a, b]$, и имеет место формула

$$m(\mathfrak{E}) = \int_c^b \left[\int_c^d \omega(x, y)\, dy \right] dx. \tag{151}$$

Короче говоря, $\mathfrak{E}_x$ измерима по y при почти всех значениях x, и имеет место формула

$$m(\mathfrak{E}) = \int_a^b m'(\mathfrak{E}_x)\, dx. \tag{152}$$

Мы будем доказывать теорему Фубини для характеристической функции постепенно.

Лемма 3. *Теорема Фубини справедлива для характеристической функции любого полуоткрытого промежутка, открытого множества и множества G_δ, принадлежащих Δ.*

Если имеется полуоткрытый промежуток Δ' $[\alpha < x \leqslant \beta;\ \gamma < y \leqslant \delta]$, принадлежащий Δ, то $\omega_{\Delta'}(x, y)$ измерима по y при любом x,

$$h(x) = \int_c^d \omega_{\Delta'}(x, y)\, dy = \delta - \gamma,$$

если $\alpha < x \leqslant \beta$ и $h(x) = 0$, если x вне Δ'

и лемма очевидна, ибо мера Δ' равна произведению $(\beta - \alpha)(\delta - \gamma)$. Открытое множество $\mathfrak{E}_0$ есть сумма счетного числа полуоткрытых промежутков Δ_k без общих точек и

$$\omega_{\mathfrak{E}_0}(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \omega_{\Delta_k}(x, y).$$

В силу леммы 1, теорема Фубини справедлива для конечной суммы

$$\sum_{k=1}^{m} \omega_{\Delta_k}(x, y).$$

При возрастании m эти суммы образуют неубывающую последовательность, которая стремится к ограниченной и тем самым суммируемой функции $\omega_{\mathfrak{E}_0}(x, y)$, и, в силу леммы 2, теорема Фубини справедлива и для $\omega_{\mathfrak{E}_0}(x, y)$. Положим, наконец, что $\mathfrak{E}_0'$ есть некоторое множество G_δ, принадлежащее открытому промежутку Δ. Мы можем представить его в виде

$$\mathfrak{E}_0' = \prod_{k=1}^{\infty} O_k, \tag{153}$$

где O_k — открытые множества, принадлежащие открытому промежутку Δ. Отметим, что если бы некоторые O_k не принадлежали открытому промежутку Δ, то мы могли бы заменить O_k произведением O_k на открытый промежуток Δ. В силу (153) $\omega_{\mathfrak{E}_0'}(x, y)$ есть предел невозрастающей последовательности, характеристических функций $\omega_{\mathfrak{E}_m}(x, y)$ открытых множеств

$$\mathfrak{E}_m = \prod_{k=1}^{m} O_k,$$

и, поскольку для $\omega_{\mathfrak{E}_m}(x, y)$ теорема Фубини уже доказана, она, в силу леммы 2, справедлива и для $\omega_{\mathfrak{E}_0'}(x, y)$. Если некоторые из точек множества $\mathfrak{E}_0'$ типа G_δ лежат на контуре Δ, то мы несколько расширим Δ так, чтобы $\mathfrak{E}_0'$ лежало внутри расширенного промежутка Δ_0. Теорема Фубини будет справедлива для $\omega_{\mathfrak{E}_0}(x, y)$ на Δ_0. Отсюда, принимая во внимание, что $\omega_{\mathfrak{E}_0'}(x, y) = 0$ вне Δ, получим непосредственно теорему Фубини для $\omega_{\mathfrak{E}_0'}(x, y)$ и в промежутке Δ. Отметим, что во всех рассмотренных в этой лемме случаях $\omega_{\mathfrak{E}}(x, y)$ измеримо по y при всех значениях x.

Лемма 4. *Если $\mathfrak{E}$ есть множество, принадлежащее Δ и имеющее плоскую меру нуль, то почти при всех x из $[a, b]$ линейная мера $\mathfrak{E}_x$ равна нулю, и для $\omega_{\mathfrak{E}}(x, y)$ имеет место теорема Фубини.*

Построим множество $\mathfrak{E}_0'$ типа G_δ, принадлежащее Δ, покрывающее $\mathfrak{E}$ и такое, что $m(\mathfrak{E}_0' - \mathfrak{E}) = 0$ [**40**]. Мы имеем $\mathfrak{E}_0' = \mathfrak{E} + (\mathfrak{E}_0' - \mathfrak{E})$,

и, поскольку $m(\mathfrak{E})=0$ и $m(\mathfrak{E}_0'-\mathfrak{E})=0$, то и $m(\mathfrak{E}_0')=0$. Для $\mathfrak{E}_0'$ теорема Фубини справедлива, и можем написать

$$\int_a^b \left[\int_c^d \omega_{\mathfrak{E}_0'}(x,\ y)\,dy\right]dx=0.$$

Величина, стоящая в квадратных скобках, неотрицательна, и, в силу свойства 14 из [49], мы имеем почти везде на промежутке $a\leqslant x\leqslant b$;

$$\int_c^d \omega_{\mathfrak{E}_0'}(x,\ y)\,dy=0.$$

Отсюда видно, что линейная мера множества точек $\mathfrak{E}_0'$, лежащих на почти всех прямых, параллельных оси Y, равна нулю.

Так как $\mathfrak{E}\subset\mathfrak{E}_0'$, то это и подавно будет иметь место для множества $\mathfrak{E}$, т. е. при почти всех x из $[a,\ b]$,

$$\int_c^d \omega_{\mathfrak{E}}(x,\ y)\,dy=0,$$

а потому для $\omega_{\mathfrak{E}}(x,\ y)$ справедлива теорема Фубини

$$m(\mathfrak{E})=0=\int_a^b\left|\int_c^d \omega_{\mathfrak{E}}(x,\ y)\,dy\right|dx.$$

Лемма 5. *Теорема Фубини справедлива для* $\omega_{\mathfrak{E}}(x,\ y)$ *любого измеримого множества* $\mathfrak{E}$, *принадлежащего* Δ.

Построим множество $\mathfrak{E}_0'$ типа G_δ, принадлежащее Δ, покрывающее $\mathfrak{E}$ и такое, что $m(\mathfrak{E}_0'-\mathfrak{E})=0$. Согласно леммам 3 и 4, теорема Фубини справедлива для характеристических функций множеств $\mathfrak{E}_0'$ и $(\mathfrak{E}_0'-\mathfrak{E})$. Но $\omega_{\mathfrak{E}}(x,\ y)=\omega_{\mathfrak{E}_0'}(x,\ y)+\omega_{\mathfrak{E}_0'-\mathfrak{E}}(x,\ y)$, и по лемме 1 теорема Фубини справедлива и для $\omega_{\mathfrak{E}}(x,\ y)$.

Отметим, что если измеримое неограниченное множество $\mathfrak{E}$ имеет конечную меру, то $\mathfrak{E}_x$ измеримы почти при всех x, и имеет место формула (152). Это получается непосредственно предельным переходом от ограниченных множеств. Таким же образом легко показать, что если $\mathfrak{E}$ просто измеримо, то $\mathfrak{E}_x$ измеримо почти при всех x. Если, кроме того, $m(\mathfrak{E}_x)$ суммируемо, то $\mathfrak{E}$ имеет конечную меру, и имеет место формула (152). Лемма 4, очевидно, имеет место и для неограниченных множеств.

68. Теорема Фубини. Для полного доказательства теоремы Фубини нам понадобится еще одна простая лемма.

Лемма 6. *Теорема Фубини справедлива для измеримой функции* $f(x,\ y)$, *принимающей в* Δ *конечное число конечных значений.*

Пусть $f(x, y) = c_k$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$, если точка (x, y) принадлежит множеству $\mathfrak{E}_k$, причем $\Delta = \mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2 + \ldots + \mathfrak{E}_m$. Мы можем представить $f(x, y)$ в виде линейной комбинации характеристических функций множества $\mathfrak{E}_k$:

$$f(x, y) = \sum_{k=1}^{m} c_k \omega_{\mathfrak{E}_k}(x, y),$$

и справедливость теоремы Фубини для $f(x, y)$ непосредственно вытекает из лемм 1 и 5.

На основе последней леммы теорема Фубини доказывается весьма просто. Пусть $f(x, y)$ суммируема на Δ. Разобьем ее на положительную и отрицательную части $f(x, y) = f^+(x, y) - f^-(x, y)$. В силу леммы 1, достаточно доказать теорему для f^+ и f^-, т. е. при доказательстве мы можем считать, что суммируемая функция $f(x, y)$ неотрицательна. Как мы знаем **[46]**, такую функцию можно представить как предельную функцию для неубывающей последовательности измеримых, неотрицательных функций $f_n(x, y)$ с конечным числом значений. Согласно лемме 6, теорема Фубини справедлива для функций $f_n(x, y)$, а тогда, в силу леммы 2, она справедлива и для функции $f(x, y)$, и тем самым теорема Фубини доказана.

Отметим, что в теореме Фубини функция $f(x, y)$ предполагается симмируемой на промежутке Δ. При этом условии, согласно теореме Фубини, квадратуры, стоящие в правых частях формул (144) и (145), имеют смысл и дают двойной интеграл от $f(x, y)$ по Δ. Обратное заключение о существовании двойного интеграла, если имеют смысл квадратуры, стоящие в правой части, может оказаться неправильным. Существуют примеры, когда повторные интегралы, стоящие в правых частях формул (144) и (145), имеют смысл, и результаты равны между собой, а функция $f(x, y)$ неизмерима на Δ или измерима, но не суммируема. Но если $f(x, y)$ неотрицательна на промежутке Δ, то обратное заключение справедливо, и имеет место следующая теорема.

Теорема. *Если $f(x, y)$ измерима и неотрицательна на промежутке Δ, то из существования повторного интеграла, стоящего в правой части (144), следует, что функция $f(x, y)$ суммируема на Δ, и тем самым для нее справедлива теорема Фубини.*

Положим, что имеет смысл повторный интеграл, стоящий в правой части (144), т. е. почти везде по отношению к x на промежутке $[a, b]$ существует функция (143), суммируемая на промежутке $[a, b]$. Введем функции

$$[f(x, y)]_n = \begin{cases} f(x, y), & \text{если } f(x, y) \leqslant n \\ n, & \text{если } f(x, y) > n. \end{cases}$$

Они ограничены, измеримы и образуют неубывающую последовательность, которая стремится к $f(x, y)$. Они, очевидно, суммируемы

на Δ, и для них справедлива теорема Фубини. Мы можем написать

$$\int\int_{\Delta} |f(x, y)|_n \, dx\, dy = \int_a^b \left[\int_c^d |f(x, y)|_n \, dy \right] dx,$$

но $|f(x, y)|_n \leqslant f(x, y)$, и, следовательно,

$$\int\int_{\Delta} |f(x, y)|_n \, dx\, dy \leqslant \int_a^b h(x)\, dx,$$

откуда следует [**50**], что $f(x, y)$ суммируема на Δ.

Следствие 1. Если $f(x, y)$ меняет знак, но для $|f(x, y)|$ мы имеем существование правой части (144), то по теореме $|f(x, y)|$ суммируема, а поэтому и $f(x, y)$ суммируема на Δ, и к ней применима теорема Фубини.

Следствие 2. Если $f(x, y)$ измерима на Δ и суммируема по y для почти всех значений x, то $h(x)$, определяемая формулой (143), есть измеримая функция. Мы, как всегда, можем считать $f(x, y)$ неотрицательной. Для урезанной функции $|f(x, y)|_n$ (она ограничена) мы имеем теорему Фубини, и

$$h_n(x) = \int_c^d |f(x, y)|_n \, dy$$

измерима. Устремляя n к бесконечности, видим, что и предельная функция $h(x)$ измерима.

Отметим некоторые простые обобщения формулировки теоремы Фубини. Если $f(x, y)$ суммируема на измеримом ограниченном множестве $\mathfrak{E}$, то имеет место формула

$$\int\int_{\mathfrak{E}} f(x, y)\, dx\, dy = \int_{B_x} \left| \int_{\mathfrak{E}_x} f(x, y)\, dy \right| dx = \int_{B_y} \left| \int_{\mathfrak{E}_y} f(x, y)\, dx \right| dy, \quad (154)$$

где $\mathfrak{E}_x$ — множество точек $\mathfrak{E}$, имеющих заданную абсциссу x, и $\mathfrak{E}_y$ — аналогичное множество для y, а B_x и B_y — проекции $\mathfrak{E}$ на оси X и Y. Интегралы по $\mathfrak{E}_x$ и $\mathfrak{E}_y$ могут не иметь смысла для значений x и y, образующих множество меры нуль. Для доказательства формулы (154) достаточно покрыть $\mathfrak{E}$ конечным промежутком Δ и построить функцию $f_0(x, y)$, равную $f(x, y)$ в точках $\mathfrak{E}$ и нулю во всех точках Δ, не принадлежащих $\mathfrak{E}$. Покажем теперь, как распространить теорему Фубини на случай неограниченных множеств. В качестве примера рассмотрим всю плоскость. Достаточно рассмотреть неотрицательные функции. Итак, положим, что функция $f(x, y)$ измерима,

неотрицательна и суммируема на плоскости, т. е. существует двойной интеграл:

$$A=\int_{-\infty}^{+\infty}\int f(x,\ y)\,dx\,dy. \tag{155}$$

Функция $f(x, y)$ будет суммируемой и на любом конечном промежутке $\Delta_{mn}\,[-m\leqslant x\leqslant m;\ -n\leqslant y\leqslant n]$. На таком промежутке мы будем иметь теорему Фубини, т. е.

$$\int_{\Delta_{mn}}\int f(x,\ y,)\,dx\,dy=\int_{-m}^{+m}\left[\int_{-n}^{+n} f(x,\ y)\,dy\right]dx.$$

С другой стороны, в силу неотрицательности функции $f(x, y)$, имеем:

$$\int_{\Delta_{mn}}\int f(x,\ y)\,dx\,dy\leqslant A,$$

и, следовательно,

$$\int_{-m}^{+m}\left[\int_{-n}^{+n} f(x,\ y)\,dy\right]dx\leqslant A.$$

Беспредельно увеличивая n и применяя теорему 4 из [54], получим

$$\int_{-m}^{+m}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\ y)\,dy\right]dx\leqslant A.$$

Увеличивая затем m и пользуясь определением интеграла по бесконечной прямой, мы приходим к неравенству

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\ y)\,dy\right]dx\leqslant A. \tag{156}$$

Покажем, наконец, что знак $<$ в этом неравенстве не может иметь места. Если он имеет место, то существует такое положительное α, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\ y)\,dy\right]dx<A-\alpha$$

и тем более

$$\int_{\Delta_{nn}}\int f(x,\ y)\,dx\,dy=\int_{-n}^{+n}\left[\int_{-n}^{+n} f(x,\ y)\,dy\right]dx<A-\alpha,$$

что нелепо, так как интеграл по промежутку Δ_{nn} должен стремиться к интегралу (155) при беспредельном возрастании n. Таким образом, в формуле (156) должны иметь знак $=$ и, сравнивая с (155), мы и получаем для всей плоскости ту формулу, которая входит в теорему Фубини. Из проведенного доказательства следует, очевидно, и существование повторного интеграла, входящего в эту формулу.

Теорема Фубини может быть формулирована и для интегралов любой кратности. Формулируем соответствующий результат. Пусть Δ_{m+n} есть промежуток в пространстве R_{m+n}, имеющем $(m+n)$ измерений, определяемый неравенствами:

$$a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1; \quad a_2 \leqslant x_2 \leqslant b_2; \quad a_{m+n} \leqslant x_{m+n} \leqslant b_{m+n},$$

а Δ_m и Δ_n промежутки в пространствах R_m и R_n, определяемые неравенствами:

$$\Delta_m : a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1;\ a_2 \leqslant x_2 \leqslant b_2; \ldots; a_m \leqslant x_m \leqslant b_m;$$
$$\Delta_n : a_{m+1} \leqslant x_{m+1} \leqslant b_{m+1}; \ldots; a_{m+n} \leqslant x_{m+n} \leqslant b_{m+n}.$$

Пусть далее $f(P)$ — функция, суммируемая на промежутке Δ_{m+n}. Если мы фиксируем некоторую точку $P_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ из Δ_m, то функция $f(P)$ будет суммируемой функцией в Δ_n при любом выборе P_0, кроме, может быть, множества точек P_0, имеющего меру нуль в R_m. Полученный интеграл от $f(P)$ по Δ_n:

$$h(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \int_{\Delta_n} f(P)\, dx_{m+1} \ldots dx_{m+n}$$

даст суммируемую функцию в Δ_m, и имеет место формула

$$\int_{\Delta_{m+n}} f(P)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_{m+n} = \int_{\Delta_m} \left[\int_{\Delta_n} f(P)\, dx_{m+1}\, dx_{m+2} \ldots dx_{m+n} \right] \times$$
$$\times\, dx_1 dx_2 \ldots dx_m. \quad (157)$$

Теорема Фубини допускает еще простое обобщение на случай интегралов Лебега-Стилтьеса. Положим, что мы имеем две возрастающие и ограниченные функции $g(x)$ и $k(y)$. Пользуясь этими функциями, мы можем определить меру $G(\Delta)$ и $K(\Delta)$ полуоткрытых промежутков и затем распространить указанные функции на замкнутые тела L_G и L_K. Таким образом, мы получим аддитивные неотрицательные и нормальные функции $G(\mathfrak{E})$ и $K(\mathfrak{E})$ на L_G и L_K. Совершенно так же, исходя от функции $g(x)\,k(y)$, определенной на плоскости, мы можем построить аддитивную, неотрицательную и нормальную функцию $M(\mathfrak{E})$ на некотором замкнутом теле L_M множеств на плоскости. Если $f(P) = f(x, y)$ измерима относительно $M(\mathfrak{E})$ и суммируема на некотором промежутке Δ плоскости, то эта функция сум-

мируема по y на промежутке Δ_y оси Y, соответствующем промежутку Δ плоскости, по отношению к функции $K(\mathcal{E})$

$$h(x)=\int_{\Delta_y} f(x,\ y)\,K(d\mathcal{E})=\int_{\Delta_y} f(x,\ y)\,dk(y),$$

если исключить из промежутка Δ_x оси X, соответствующего промежутку Δ плоскости, некоторое множество значений, имеющее меру нуль по отношению к $G(\mathcal{E})$. Функция $h(x)$ суммируема на Δ_x по отношению к $G(\mathcal{E})$, и имеет место формула

$$\int\int_{\Delta} f(P)\,M(d\mathcal{E})=\int\int_{\Delta} f(x,\ y)\,dd\,[g(x)\,k(y)\,]=$$

$$=\int_{\Delta_x}\left[\int_{\Delta_y} f(x,\ y)\,dk(y)\right]dg(x,$$

Переставляя порядок интегрирования, получим аналогичную вторую формулу. Доказательство этого обобщения теоремы Фубини проводится буквально так же, как и доказательство основной теоремы Фубини, но только везде интеграл Лебега надо заменить интегралами Лебега-Стилтьеса и измеримость в смысле Лебега надо заменить измеримостью по отношению к функциям $G(\mathcal{E})$, $K(\mathcal{E})$ и $M(\mathcal{E})$.

Замечание. Отметим, что если относительно функции $f(x, y)$ дано лишь то, что она измерима на промежутке Δ плоскости, то отсюда следует, что для почти всех значений x из $[a\ b]$ она измерима по y на $[c, d]$, и для почти всех значений y из $[c, d]$ она измерима по x на $[a, b]$. Это замечание непосредственно следует из замечания, которое мы приводили после доказательств лемм 1 и 2, и всего дальнейшего доказательства теоремы Фубини.

69. Перестановка порядка интегрирования. Укажем еще одну теорему, касающуюся перестановки порядка интегрирования.

Теорема. *Пусть функция $g(x, t)$ суммируема по t на промежутке $[c, d]$ для всех значений x из промежутка $[a, b]$ и ограниченной вариации по x на этом промежутке для всех значений t из $[c, d]$, кроме, может быть, множества значений t, имеющего лебегову меру, равную нулю. Пусть далее полная вариация $g(x, t)$ по отношению к x на промежутке $[a, b]$ при всех указанных значениях t не превышает некоторой неотрицательной и измеримой на $[c, d]$ функции $F(t)$, для которой существует интеграл*

$$\int_c^d F(t)\,dt. \tag{158}$$

При этом функция

$$\int_c^d g(x, t)\,dt \tag{159}$$

есть функция ограниченной вариации от x на $[a, b]$, и для любой непрерывной на $[a, b]$ функции $f(x)$ имеет место формула

$$\int_c^d \left| \int_a^b f(x)\, d_x g(x, t) \right| dt = \int_a^b f(x)\, d_x \left| \int_c^d g(x, t)\, dt \right|, \tag{160}$$

причем интегралы по t суть интегралы Лебега.

Для доказательства того, что функция (159) есть функция ограниченной вариации, разобьем промежуток $[a, b]$ на части: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ и составим сумму t_δ [8] для этого разбиения. Мы получим

$$t_\delta = \sum_{k=1}^{n} \left| \int_c^d g(x_k, t)\, dt - \int_c^d g(x_{k-1}, t)\, dt \right| = \sum_{k=1}^{n} \left| \int_e^d [g(x_k, t) - g(x_{k-1}, t)]\, dt \right|$$

откуда

$$t_\delta \leqslant \int_c^d \sum_{k=1}^{n} |g(x_k, t) - g(x_{k-1}, t)|\, dt.$$

Но, по условию теоремы,

$$\sum_{k=1}^{n} |g(x_k, t) - g(x_{k-1}, t)| \leqslant F(t),$$

и, следовательно,

$$t_\delta \leqslant \int_c^d F(t)\, dt,$$

откуда и вытекает, что функция (159) есть функция ограниченной вариации

Напишем очевидную формулу:

$$\int_c^d \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) [g(x_k, t) - g(x_{k-1}, t)]\, dt = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \left[\int_c^d g(x_k, t)\, dt - \int_c^d g(x_{k-1}, t)\, dt \right], \tag{161}$$

где ξ_k — некоторая точка промежутка $[x_{k-1}, x_k]$. При беспредельном измельчании частичных промежутков правая часть этой формулы стремится к интегралу, стоящему в правой части формулы (160). Для непрерывной в промежутке $[a, b]$ функции $f(x)$ имеет неравенство $|f(x)| \leqslant L$, где L — некоторое положительное число. Для подынтегральной функции интеграла, стоящего в левой части формулы (161), имеем оценку

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) [g(x_k, t) - g(x_{k-1}, t)] \right| \leqslant L \sum_{k=1}^{n} \left| g(x_k, t) - g(x_{k-1}, t) \right| \leqslant LF(t).$$

Применяя теорему 1 из [54], мы видим, что в интеграле, стоящем в левой части формулы (161), можем при беспредельном измельчании промежутков переходить к пределу под знаком интеграла, причем упомянутая подынтегральная функция в пределе дает интеграл Стилтьеса:

$$\int_a^b f(x)\, d_x g(x, t).$$

Окончательно предельный переход в формуле (161) и приводит нас к формуле (160). Доказанная теорема допускает некоторые элементарные обобщения. Можно, например, считать промежуток $[a, b]$ бесконечным и функцию $f(x)$ непрерывной внутри этого промежутка и ограниченной. Интеграл Лебега по t можно заменить интегралом Лебега-Стилтьеса. Первоначальный интеграл Стилтьеса по $g(x, t)$ можно заменить общим интегралом Стилтьеса и считать функцию $f(x)$ лишь ограниченной на промежутке $[a, b]$. При этом из существования интеграла, стоящего в правой части формулы (160), будут следовать существование интеграла, стоящего в левой части, и равенство этих интегралов.

70. Непрерывность в среднем. Возвращаемся к $L_p\,(p \geqslant 1)$ и докажем, что всякая функция из L_p непрерывна, если оценивать ее приращение в норме L_p. Рассмотрим случай ограниченного измеримого множества $\mathfrak{E}$. Интегралы мы берем в смысле Лебега и для определенности рассматриваем случай плоскости.

Теорема. *Если $f(x, y) \in L_p$ на ограниченном измеримом множестве $\mathfrak{E}$, то при любом заданном $\varepsilon > 0$ существует такое $\eta > 0$, что*

$$\|f(x+h, y+k) - f(x, y)\|_{\mathfrak{E}}^p = \int_{\mathfrak{E}} |f(x+h, y+k) - f(x, y)|^p\, dxdy \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon^p, \quad \text{если } |h| \text{ и } |k| \leqslant \eta. \tag{162}$$

Точка $(x+h, y+k)$ может уже не принадлежать $\mathfrak{E}$, и мы продолжаем $f(x, y)$ во вне $\mathfrak{E}$ нулем. Значок у нормы показывает, по какому множеству берется норма. Мы можем заключить $\mathfrak{E}$ в конечный замкнутый промежуток $\Delta_0\,(a_1 \leqslant x \leqslant b_1;\ a_2 \leqslant y \leqslant b_2)$. По теореме 1 из [60], существует такая непрерывная в Δ_0 функция $\varphi(x, y)$, что $\|f - \varphi\|_{\Delta_0} \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$. Мы можем продолжить $\varphi(x, y)$ с сохранением непрерывности на более широкий промежуток, например, на промежуток $\Delta_1\,(a_1 - 1 \leqslant x \leqslant b_1 + 1;\ a_2 - 1 \leqslant y \leqslant b_2 + 1)$. Представим разность $f(x+h, y+k) - f(x, y)$ в виде:

$$f(x+h, y+k) - f(x, y) = f(x+h, y+k) - \varphi(x+h, y+k) +$$
$$+ \varphi(x+h, y+k) - \varphi(x, y) + \varphi(x, y) - f(x, y).$$

Будем иметь

$$\|f(x+h, y+k) - f(x, y)\|_{\Delta_0} \leqslant \|f(x+h, y+k) - \varphi(x+h, y+k)\|_{\Delta_0} + \|\varphi(x+h, y+k) - \varphi(x, y)\|_{\Delta_0} + \|\varphi(x, y) - f(x, y)\|_{\Delta_0}.$$

Мы имели $\|\varphi(x, y) - f(x, y)\|_{\Delta_0} \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$. В силу равномерной непрерывности $\varphi(x, y)$ в Δ_1, существует такое $\eta_1 > 0$ (мы считаем $\eta_1 < 1$), что $\|\varphi(x+h, y+k) - \varphi(x, y)\|_{\Delta_0} \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$ при $|h|$ и $|k| \leqslant \eta_1$, так что

$$\|f(x+h, y+k) - f(x, y)\|_{\Delta_0} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \|f(x+h, y+k) - \varphi(x+h, y+k)\|_{\Delta_0}. \quad (163)$$

при $|h|, |k| \leqslant \eta$.

Мы имеем

$$\|f(x+h, y+k) - \varphi(x+h, y+k)\|^p_{\Delta_0} = \int\limits_{\Delta_0} |f(x+h, y+k) - \varphi(x+h, y+k)|^p \, dxdy,$$

или

$$\|f(x+h, y+k) - \varphi(x+h, y+k)\|^p_{\Delta_0} = \int\limits_{\Delta_0(h,k)} |f(x, y) - \varphi(x, y)|^p dxdy,$$

где $\Delta_0(h, k)$ — промежуток, который получается из Δ_0 параллельным переносом на вектор (h, k). Полагая, например, h и $k > 0$, получаем

$$\|f(x+h, y+k) - \varphi(x+h, y+k)\|^p_{\Delta_0} = \|f(x, y) - \varphi(x, y)\|^p_{\Delta'} + \int\limits_{\substack{a_1+h \leqslant x \leqslant b_1+h, \\ b_2 \leqslant y \leqslant b_2+k}} |\varphi(x, y)|^p \, dxdy + \int\limits_{\substack{b_1 \leqslant x \leqslant b_1+h \\ a_2+k \leqslant y \leqslant b_2+k}} |\varphi(x, y)|^p \, dxdy$$

где Δ' часть Δ_0, так что $\|f(x, y) - \varphi(x, y)\|_{\Delta_2} \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$. Последние два интеграла очевидно стремятся к нулю при h и $k \to 0$, и, следовательно, существует такое $\eta_2 > 0$, что

$$\|f(x+h, y+k) - \varphi(x+h, y+k)\|_{\Delta_0} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при } |h| \text{ и } |k| \leqslant \eta,$$

где $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$. Из (163) получаем $\|f(x+h, y+k) - f(x, y)\|_{\Delta_0} \leqslant \leqslant \varepsilon$ при $|h|$ и $|k| \leqslant \eta$, и тем более $\|f(x+h, y+k) - f(x, y)\|_{\mathfrak{G}} \leqslant \varepsilon$ при $|h|$ и $|k| \leqslant \eta$, что и требовалось доказать.

Теорема может быть доказана и для случая неограниченного измеримого множества.

71. Средние функции. Мы введем некоторый процесс усреднения для любой суммируемой функции $f(P)$. Он приведет нас к последовательности функций, которые будут иметь производные всех порядков и будут в известном смысле стремиться к $f(P)$. Для определенности мы будем рассматривать случай плоскости и вместо точек

будем вводить их координаты. Пусть $\omega_1(P; Q) = \omega_1(x, y; \xi, \eta)$ — функция, зависящая только от расстояния

$$r = |\overline{PQ}| = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2},$$

равная нулю при $r \geqslant 1$, непрерывная и имеющая непрерывные производные всех порядков по всем четырем координатам. Отметим при этом, что дифференцирование $\omega_1(P; Q)$ по x и y можно заменять дифференцированием по ξ и η с переменой знака у результата. Предположим, кроме того, что

$$\int \omega_1(x, y; \xi, \eta)\, dxdy = 1. \tag{164}$$

Мы не пишем области интегрирования, предполагая, что интеграл берется по всей плоскости. В силу сказанного выше, фактически интегрирование совершается по кругу $(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 \leqslant 1$. Если в формуле (164) интегрирование по (x, y) заменить интегрированием по (ξ, η), то результат будет тот же.

Введем теперь следующее обозначение:

$$\omega_\rho(x, y; \xi, \eta) = \omega_1\left(\frac{x}{\rho}, \frac{y}{\rho}; \frac{\xi}{\rho}, \frac{\eta}{\rho}\right) \quad (\rho > 0). \tag{165}$$

Функция ω_ρ обладает теми же дифференциальными свойствами, что и ω_1, но $\omega_\rho = 0$ при $r \geqslant \rho$, и

$$\int \omega_\rho(x, y; \xi, \eta)\, dx\, dy = \rho^2. \tag{166}$$

Дальше мы укажем одну из возможностей выбора функции $\omega_1(P; Q)$ [**ср. IV; 157**]. Символом $C_\rho(\xi, \eta)$ мы в дальнейшем будем обозначать круг с центром (ξ, η) и радиусом ρ. Введем еще следующее обозначение:

$$\int |\omega_1(x, y; \xi, \eta)|\, dxdy = C, \tag{167}$$

откуда

$$\int |\omega_\rho(x, y; \xi, \eta)|\, dxdy = C\rho^2. \tag{168}$$

Пусть в ограниченной открытой или замкнутой области D_0 имеется суммируемая функция $f(x, y)$ (вместо области мы могли бы взять любое ограниченное измеримое множество). Продолжим ее нулем на всю плоскость и составим от нее *среднюю функцию*:

$$f_\rho(\xi, \eta) = \frac{1}{\rho^2} \int f(x, y)\, \omega_\rho(x, y; \xi, \eta)\, dxdy. \tag{169}$$

Положительное число ρ называется обычно *радиусом усреднения*.

Подынтегральная функция равна нулю вне круга $C_\rho(\xi, \eta)$, и, если расстояние d от точки (ξ, η) до D_0 больше нуля, то $f_\rho(\xi, \eta) = 0$ при $\rho \leqslant d$.

Теорема 1. *Функция $f_\rho(\xi, \eta)$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные любого порядка на всей плоскости.*

Принимая во внимание, что ω_ρ зависит только от разностей $x-\xi$ и $y-\eta$, имеем

$$|f_\rho(\xi+h,\ \eta+k)-f_\rho(\xi,\ \eta)|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\rho^2}\int|f(x,y)|\,|\omega_\rho(x-h,\ y-k;\ \xi,\ \eta)-\omega_\rho(x,\ y;\ \xi,\ \eta)|\,dxdy. \quad (170)$$

Из равномерной непрерывности ω_ρ как функции x, y, ξ, η следует, что при любом заданном $\varepsilon>0$ существует такое $\eta>0$, что

$|\omega_\rho(x-h,\ y-k;\ \xi,\ \eta)-\omega_\rho(x,\ y;\ \xi,\ \eta)|\leqslant\varepsilon$ при $|h|$ и $|k|\leqslant\eta$,

и, следовательно,

$$|f_\rho(\xi+h,\ y+k)-f_\rho(\xi,\ \eta)|\leqslant\frac{\varepsilon}{\rho^2}\int|f(x,y)|\,dxdy\ (|h|\text{ и }|k|\leqslant\eta),$$

откуда, в силу произвольности ε, и следует непрерывность $f_\rho(\xi, \eta)$. Докажем теперь существование и непрерывность производной по ξ:

$$\frac{f_\rho(\xi+h,\ \eta)-f_\rho(\xi,\ \eta)}{h}=$$

$$=\frac{1}{\rho^2}\int f(x,\ y)\,\frac{\omega_\rho(x-h,\ y;\ \xi,\ \eta)-\omega_\rho(x,\ y;\ \xi,\ \eta)}{h}\,dxdy. \quad (171)$$

По теореме о среднем

$$\frac{\omega_\rho(x-h,\ y;\ \xi,\ \eta)-\omega_\rho(x,\ y;\ \xi,\ \eta)}{h}=-\frac{\partial}{\partial x}\omega_\rho(x-\theta h,\ y;\ \xi,\ \eta)\ (0<\theta<1).$$

При любых h правая часть по абсолютной величине не превосходит некоторого числа K, и в интеграле (171) подынтегральная функция по абсолютной величине не превосходит суммируемой функции $K|f(x, y)|$, так что возможен предельный переход под знаком интеграла, и мы получаем

$$\frac{\partial f_\rho(\xi,\ \eta)}{\partial\xi}=-\frac{1}{\rho^2}\int f(x,\ y)\,\frac{\partial\omega_\rho(x,\ y;\ \xi,\ \eta)}{\partial x}\,dx\,dy=$$

$$=\frac{1}{\rho^2}\int f(x,\ y)\,\frac{\partial\omega_\rho(x,\ y;\ \xi,\ \eta)}{\partial\xi}\,dx\,dy.$$

Непрерывность этой частной производной может быть доказана совершенно так же, как и непрерывность $f_\rho(\xi, \eta)$. Приведенное доказательство применимо и к дальнейшим производным, и они получаются дифференцированием под знаком интеграла:

$$\frac{\partial^k f_\rho(\xi,\ \eta)}{\partial\xi^p\,\partial\eta^q}=\frac{1}{\rho^2}\int f(x,\ y)\,\frac{\partial^k\omega_\rho(x,\ y;\ \xi,\ \eta)}{\partial\xi^p\,\partial\eta^q}\,dx\,dy. \quad (172)$$

Теорема 2. *Если* $f(x, y) \in L_2(D_0)$, т. е. L_2 на D_0, *то*

$$\int |f_\rho(x, y)|^2 \, dxdy \leqslant C_1 \int |f(x, y)|^2 \, dxdy, \tag{173}$$

где C_1 — *постоянная, и*

$$\lim_{\rho \to 0} \|f - f_\rho\|^2 = \lim_{\rho \to 0} \int |f(x, y) - f_\rho(x, y)|^2 \, dxdy = 0. \tag{174}$$

Мы имеем

$$|f_\rho(\xi, \eta)| \leqslant \frac{1}{\rho^2} \int \sqrt{|\omega_\rho(x, y; \xi, \eta)|} \sqrt{|\omega_\rho(x, y, \xi, \eta)|} \, |f(x, y)| \, dxdy.$$

Применяем неравенство Буняковского:

$$|f_\rho(\xi, \eta)|^2 \leqslant \frac{1}{\rho^2} \int |\omega_\rho(x, y; \xi, \eta)| dxdy \cdot \frac{1}{\rho^2} \int |f(x, y)|^2 |\omega_\rho(x, y; \xi, \eta)| dxdy. \tag{175}$$

Пользуясь (168), интегрируя по (ξ, η) и переставляя порядок интегрирования [69], получим

$$\int |f_\rho(\xi, \eta)|^2 \, d\xi, d\eta \leqslant C \int |f(x, y)|^2 \left[\frac{1}{\rho^2} \int |\omega_\rho(x, y; \xi, \eta)| \, d\xi d\eta \right] dxdy,$$

откуда, в силу (168), получаем (173) ($C_1 = C^2$), причем справа интегрирование производится по D_0, так как $f(x, y) = 0$ вне D_0.

Переходим к доказательству формулы (174). Принимая во внимание (166) и (169), можем написать

$$\|f - f_\rho\|^2 = \int |f(\xi, \eta) - f_\rho(\xi, \eta)|^2 \, d\xi \, d\eta =$$

$$= \int \left| \frac{1}{\rho^2} \int [f(\xi, \eta) - f(x, y)] \, \omega_\rho(x, y; \xi, \eta) \, dxdy \right|^2 d\xi \, d\eta. \tag{176}$$

Во внутреннем интеграле вводим вместо (x, y) новые переменные интегрирования (u, v) по формулам $x = \xi + u$; $y = \eta + v$, и принимая во внимание, что $\omega_\rho(\xi + u, \eta + v; \xi, \eta) = 0$ при $u^2 + v^2 \geqslant \rho^2$, получим, применяя неравенство Буняковского:

$$\left| \int [f(\xi, \eta) - f(x, y)] \, \omega_\rho(x, y; \xi, \eta) \, dxdy \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{u^2 + v^2 \leqslant \rho^2} |f(\xi, \eta) - f(\xi + u; \eta + v)|^3 \, dudv \times$$

$$\times \int\limits_{u^2 + v^2 \leqslant \rho^2} \omega_\rho^2(\xi + u, \eta + v; \xi, \eta) \, dudv.$$

Но $\omega_\rho^2 \leqslant C_2$ (C_2 — постоянная, не зависящая от ρ), и, следовательно, правая часть не превосходит

$$C_2 \pi \rho^2 \int\limits_{u^2 + v^2 \leqslant \rho^2} |f(\xi, \eta) - f(\xi + u, \eta + v)|^2 dudv.$$

В результате формула (176) дает

$$\|f-f_\rho\|^2 \leqslant \frac{C_2\pi}{\rho^2}\int\left|\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant\rho^2}|f(\xi,\eta)-f(\xi+u,\eta+v)|^2\,dudv\right|d\xi d\eta. \quad (177)$$

Переставляем порядок интегрирования

$$\|f-f_\rho\|^2 \leqslant \frac{C_2\pi}{\rho^2}\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant\rho^2}\left[\int|f(\xi,\eta)-f(\xi+u,\eta+v)|^2\,d\xi d\eta\right]dudv. \quad (178)$$

В силу непрерывности в среднем при любом заданном $\varepsilon>0$ существует такое $\eta>0$, что

$$\int|f(\xi,\eta)-f(\xi+u,\eta+v)|^2\,d\xi d\eta\leqslant\varepsilon, \text{ если } u^2+v^2\leqslant\eta^2.$$

При этом неравенство (178) дает

$$\|f-f_\rho\|^2\leqslant\frac{C_2\pi\varepsilon}{\rho^2}\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant\rho^2}dudv=C_2\pi^2\varepsilon \text{ при } 0<\rho<\eta,$$

что, в силу произвольности ε, и приводит к (174).

Докажем еще одну теорему, которая нам будет нужна в дальнейшем.

Теорема 3. *Пусть U — множество функций $f(x, y)$ из $L_2(D_0)$, ограниченных по норме одним и тем же числом. При этом соответствующие функции $f_\rho(x,y)$ при фиксированном ρ ограничены по модулю одним и тем же числом и равностепенно непрерывны.*

По условию существует такое положительное число m, что для всех функций $f(x,y)$ из U:

$$\iint\limits_{D_0}|f(x,y)|^2\,dxdy\leqslant m. \quad (179)$$

Применяя к правой части (169) неравенство Буняковского, получим

$$|f_\rho(\xi,\eta)|^2\leqslant\frac{1}{\rho^4}\int\omega_\rho^2(x,y;\xi,\eta)\,dxdy.\int|f(x,y)|^2\,dxdy\leqslant\frac{C_2\pi}{\rho^2}m.$$

Остается доказать равностепенную непрерывность. Применяем к правой части (170) неравенство Буняковского и пользуемся (179):

$$|f_\rho(\xi+h,\ \eta+k)-f_\rho(\xi,\ \eta)|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{m}{\rho^4}\int|\omega_\rho(x-h,\ y-k;\ \xi,\ \eta)-\omega_\rho(x,\ y;\ \xi,\ \eta)|^2\,dx\,dy\ ,$$

и из равномерной непрерывности функции ω_ρ следует равностепенная непрерывность функций $f_\rho(\xi,\ \eta)$ при любом выборе $f(x,\ y)$ из U.

Указанные выше доказательства применимы и для L_p при $p \geqslant 1$. Если $p > 1$, то вместо неравенства Буняковского надо воспользоваться неравенством Гёльдера и формулой

$$|\omega_\rho(x, y; \xi, \eta)| = |\omega_\rho(x, y; \xi, \eta)|^{\frac{1}{p}} |\omega_\rho(x, y; \xi, \eta)|^{\frac{1}{p'}} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right).$$

При $p = 1$ все доказывается, как и выше, без применения неравенств Буняковского и Гёльдера. Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 2'. *Если* $f(x, y) \in L_p(D_0)$ $(p \geqslant 1)$, *то*

$$\int |f_\rho(x, y)|^p \, dx\, dy \leqslant C_1 \int |f(x, y)|^p \, dx\, dy; \tag{180}$$

$$\lim_{\rho \to 0} \int |f(x, y) - f_\rho(x, y)|^p \, dx\, dy = 0. \tag{181}$$

Имеет место и теорема 3 с заменой L_2 на L_p. Доказательство остается в силе и в том случае, когда D_0 есть неограниченное измеримое множество, например, вся плоскость $\mathfrak{E}_\infty$. Пользуясь теоремой 3, легко показать, что линеал непрерывных финитных функций с непрерывными производными всех порядков повсюду плотен в $L_p(\mathfrak{E}_\infty)$.

Отметим еще, что все сказанное выше имеет место как для вещественного, так и для комплексного пространства L_p. Выше мы рассматривали средние функции в предположении, что $f(x, y) \in L_p$ $(p \geqslant 1)$. Положим теперь, что $f(x, y)$ — непрерывная в открытой области D_0 и пусть D' любая фиксированная замкнутая область, лежащая внутри D_0. В силу равномерной непрерывности $f(x, y)$ в любой замкнутой области, лежащей внутри D_0, при заданном $\varepsilon > 0$, существует такое $\eta > 0$, что $|f(x, y) - f(\xi, \eta)| \leqslant \varepsilon$, если $(x, y) \in C_\rho(\xi, \eta)$ при $\rho \leqslant \eta$ и (ξ, η) — любая точка D'. Из неравенства

$$|f(\xi, \eta) - f_\rho(\xi, \eta)| \leqslant \frac{1}{\rho^2} \int |f(\xi, \eta) - f(x, y)| \, |\omega_\rho(x, y; \xi, \eta)| \, dx\, dy$$

получаем

$$|f(\xi, \eta) - f_\rho(\xi, \eta)| \leqslant \varepsilon C \text{ при } \rho \leqslant \eta \text{ и } (\xi, \eta) \in D'. \tag{182}$$

Если, кроме того, функция $f(x, y)$ имеет в D_0 непрерывные производные до некоторого порядка, то, заменяя в формуле (172) дифференцирование по ξ и η дифференцированием по x и y, производя интегрирование по частям и пользуясь свойствами функции ω_ρ, получим для $(\xi, \eta) \in D'$ и достаточно малых ρ:

$$\frac{\partial^k f_\rho(\xi, \eta)}{\partial \xi^p \, \partial \eta^q} = \frac{1}{\rho^2} \int \frac{\partial^k f(x, y)}{\partial x^p \, \partial y^q} \omega_\rho(x, y; \xi, \eta) \, dx\, dy, \tag{183}$$

т. е. производная средней функции равна средней функции от производной при $(\xi, \eta) \in D'$ *и достаточно малом* ρ.

Отметим, что при указанных условиях $\omega_\rho(x, y; \xi, \eta)$ равна нулю вблизи границы D, и за счет этого при интегрировании по частям обращаются в нуль криволинейные интегралы. Пути интегрирования в этих интегралах можно брать достаточно гладкими линиями, лежащими в достаточной близости к границе D.

Из сказанного выше следует:

Теорема 4. *Если $f(x, y)$ непрерывна вместе со своими производными до некоторого порядка l внутри D_0, то в любой замкнутой области D', лежащей внутри D_0, средняя функция и ее производные до порядка l стремятся равномерно к $f(x, y)$ и ее соответствующим производным при $\rho \to 0$.*

Отметим еще, что если $f(x, y)$ ограничена: $|f(x, y)| \leqslant m$, то

$$|f_\rho(\xi, \eta)| \leqslant \frac{1}{\rho^2} \int |f(x, y)|\,|\omega_\rho(x, y; \xi, \eta)|\,dxdy \leqslant Cm. \tag{184}$$

Теорема 5. *Если $F(x, y)$ суммируема по любой замкнутой области D', лежащей внутри D_0, и обладает тем свойством, что*

$$\int_{D_0} F(x, y)\,\varphi(x, y)\,dxdy = 0 \tag{185}$$

при любом выборе $\varphi(x, y)$ — непрерывной с непрерывными производными до некоторого порядка l внутри D_0 и равной нулю вне некоторой замкнутой области, лежащей внутри D_0, то F эквивалентна нулю.

Достаточно доказать, что из условий теоремы следует, что (185) имеет место для любой ограниченной измеримой финитной $\varphi(x, y)$, т. е. равной нулю вне некоторой замкнутой области, лежащей внутри D_0 (эта область, как и в условиях теоремы, может быть различной для различных $\varphi(x, y)$. После этого доказательство того, что $F(x, y)$ эквивалентна нулю, проводится совершенно так же, как доказательство теоремы 12 из [52]. Пусть $\varphi(x, y)$ — такая функция, причем $|\varphi(x, y)| \leqslant m$ и $\varphi_\rho(x, y)$ — средние функции, так что $|\varphi_\rho(x, y)| \leqslant Cm$. Функция $\varphi_\rho(x, y)$ финитна при достаточно малых ρ и имеет непрерывные производные всех порядков, так что по условию теоремы

$$\int_{D_0} F(x, y)\,\varphi_\rho(x, y)\,dxdy = 0. \tag{186}$$

Функции $\varphi_\rho(x, y)$ сходятся при $\rho \to 0$ в L_1 к $\varphi(x, y)$ на D_0, и существует такая последовательность $\varphi_{\rho_n}(x, y)$, которая стремится к $\varphi(x, y)$ почти везде. Кроме того, $|F(x, y)\,\varphi_\rho(x, y)| \leqslant Cm\,|F(x, y)|$, причем $F(x, y)\,\varphi_\rho(x, y)$ финитны и, справа стоит суммируемая функция. Переходя к пределу в равенстве (186) при $\rho = \rho_n$, мы получаем (185), и теорема доказана.

Укажем теперь на одну из возможностей выбора функции $\omega_1(x, y; \xi, \eta)$, а именно положим [ср. IV; 157]:

$$\omega_1(x, y; \xi, \eta) = \begin{cases} C_0 e^{\frac{r^2}{r^2-1}} & \text{при } r < 1, \\ 0 & \text{при } r \geqslant 1, \end{cases} \qquad (187)$$

$$(r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2),$$

где постоянная C_0 выбрана так, что выполняется условие (164). Наличие непрерывных производных всех порядков при $r < 1$ и $r > 1$ очевидно. При $r \to 1$ от меньших значений $e^{\frac{r^2}{r^2-1}} \to 0$. По индукции легко проверяется, что производная любого порядка при $r < 1$ имеет вид

$$\frac{\partial^n e^{\frac{r^2}{r^2-1}}}{\partial \xi^l \partial \eta^m} = \frac{p_{l,m}(x-\xi, y-\eta)}{(r^2-1)^{2n}} e^{\frac{r^2}{r^2-1}},$$

где $p_{l,m}(u, v)$ — полином. При приближении точки (ξ, η) к окружности $r = 1$ это выражение стремится к нулю. Пользуясь формулой конечных приращений, получим, что и производная в любой точке этой окружности существует и равна нулю. В указанном примере (187) $\omega_1 > 0$ при $r < 0$ постоянная C формулы (167) равна единице.

ГЛАВА III

ФУНКЦИИ МНОЖЕСТВ. АБСОЛЮТНАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ. ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ ИНТЕГРАЛА

72. Аддитивные функции множеств. Пусть функция точки $f(P)$ измерима относительно неотрицательной, аддитивной и нормальной функции $G(\mathfrak{E})$. Составим неопределённый интеграл

$$\varphi(\mathfrak{E}) = \int_{\mathfrak{E}} f(P)\, G(d\mathfrak{E}). \tag{1}$$

Он определён для всех тех множеств $\mathfrak{E}$, принадлежащих замкнутому телу L_G, на которых $f(P)$ суммируема. При этом, если $f(P)$ суммируема на $\mathfrak{E}$, то она суммируема и на любой измеримой части $\mathfrak{E}'$ множества $\mathfrak{E}$, и если $\mathfrak{E}$ разбито на конечное или счётное число множеств $\mathfrak{E}_k$ попарно без общих точек, то $\varphi(\mathfrak{E})$ равно сумме $\varphi(\mathfrak{E}_k)$ (полная аддитивность). Мы изучим сейчас свойства вполне аддитивных функций, заданных не в форме неопределённого интеграла, а любым образом. Итак, пусть $\varphi(\mathfrak{E})$ принимает конечные вещественные значения для множеств, принадлежащих некоторому семейству C множеств из некоторого замкнутого тела множеств T, содержащего все замкнутые и открытые множества. При этом мы считаем, что если $\mathfrak{E}$ принадлежит C, то и всякая часть $\mathfrak{E}$, принадлежащая T, также принадлежит C. Кроме того, считаем $\varphi(\mathfrak{E})$ вполне аддитивной, т. е. если $\mathfrak{E}$, принадлежащее C, разбито на множества $\mathfrak{E}_k$ попарно без общих точек, число которых конечно или счетно, причём все $\mathfrak{E}_k$ из T и тем самым из C

$$\mathfrak{E} = \sum_k \mathfrak{E}_k, \tag{2}$$

то

$$\varphi(\mathfrak{E}) = \sum_k \varphi(\mathfrak{E}_k). \tag{3}$$

При бесконечном числе слагаемых написанный ряд должен сходиться абсолютно. В случае формулы (1) замкнутым телом T служит тело L_G, и семейство C состоит из тех множеств $\mathfrak{E}$ из L_G, на которых $f(P)$ суммируема. Наиболее важным в дальнейшем будет тот случай, когда C состоит из некоторого $\mathfrak{E}_0$, принадлежащего L_G,

и тех множеств $\mathfrak{E}$ из L_G, которые принадлежат $\mathfrak{E}_0$. При этом само C есть, очевидно, замкнутое тело.

Отметим, что если $\varphi(\mathfrak{E})$ определена для множеств из T, принадлежащих, например, некоторому замкнутому промежутку Δ, то она может быть определена для всех множеств $\mathfrak{E}$ из T по формуле

$$\varphi(\mathfrak{E}) = \varphi(\mathfrak{E}\Delta). \tag{4}$$

При этом она будет принимать конечные значения и будет вполне аддитивной на всем теле T. В дальнейшем, когда мы будем говорить о $\varphi(\mathfrak{E})$, то будем, конечно, считать, что $\mathfrak{E} \in C$. В силу аддитивности мы должны иметь $\varphi(\mathfrak{E}) = 0$, если $\mathfrak{E}$ — пустое множество. Из аддитивности непосредственно следует, что если $\mathfrak{E}'$ и $\mathfrak{E}''$ принадлежат C и $\mathfrak{E}' \subset \mathfrak{E}''$, то

$$\varphi(\mathfrak{E}'' - \mathfrak{E}') = \varphi(\mathfrak{E}'') - \varphi(\mathfrak{E}'). \tag{5}$$

Далее из полной аддитивности следует, что если $\mathfrak{E}_n$ $(n = 1,2,\ldots)$ — монотонная последовательность множеств из C и если предельное множество $\mathfrak{E}$ также принадлежит C, то $\varphi(\mathfrak{E}_n) \to \varphi(\mathfrak{E})$. В случае неубывающей последовательности множеств мы имеем $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_1 + (\mathfrak{E}_2 - \mathfrak{E}_1) + (\mathfrak{E}_3 - \mathfrak{E}_2) + \ldots$ и, в силу полной аддитивности, $\varphi(\mathfrak{E}) = \varphi(\mathfrak{E}_1) + [\varphi(\mathfrak{E}_2) - \varphi(\mathfrak{E}_1)] + [\varphi(\mathfrak{E}_3) - \varphi(\mathfrak{E}_2)] + \ldots$, т. е. $\varphi(\mathfrak{E}_n) \to \varphi(\mathfrak{E})$. В случае невозрастающей последовательности $\mathfrak{E}_n$ доказательство аналогично, причём $\mathfrak{E}$ обязательно принадлежит C. Отметим еще, что конечная линейная комбинация $c_1\varphi_1(\mathfrak{E}) + c_2\varphi_2(\mathfrak{E}) + \ldots + c_p\varphi_p(\mathfrak{E})$ вполне аддитивных функций есть, очевидно, также вполне аддитивная функция. Переходим к доказательству основных теорем теории:

Теорема 1. *Значения $\varphi(\mathfrak{E})$ для всех множеств $\mathfrak{E}$, принадлежащих любому множеству $\mathfrak{E}_1$ из C, ограничены по абсолютной величине одним и тем же числом.*

Доказываем от обратного. Если это не так, то существует такое $\mathfrak{E}_2 \subset \mathfrak{E}_1$, что $|\varphi(\mathfrak{E}_2)| \geqslant 2$ и $|\varphi(\mathfrak{E}_1 - \mathfrak{E}_2)| \geqslant 2$. При этом надо принять во внимание, что

$$\varphi(\mathfrak{E}_1) = \varphi(\mathfrak{E}_2) + \varphi(\mathfrak{E}_1 - \mathfrak{E}_2),$$

и что неограниченность одного из слагаемых влечет неограниченность второго слагаемого, ибо $\varphi(\mathfrak{E}_1)$ есть заданное число. Для $\mathfrak{E}_2$ или $\mathfrak{E}_1 - \mathfrak{E}_2$ теорема невыполнена. Можем считать, что она не выполнена для $\mathfrak{E}_2$, и существует такое $\mathfrak{E}_3 \subset \mathfrak{E}_2$, что $|\varphi(\mathfrak{E}_3)| \geqslant 3$ и $|\varphi(\mathfrak{E}_2 - \mathfrak{E}_3)| \geqslant 3$ и т. д. Мы имеем: $\mathfrak{E}_1 \supset \mathfrak{E}_2 \supset \mathfrak{E}_3 \ldots$ и, обозначая $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_1\mathfrak{E}_2 \ldots$, в силу сказанного выше, $\varphi(\mathfrak{E}_n) \to \varphi(\mathfrak{E})$, что нелепо, ибо $\varphi(\mathfrak{E}_n)$ беспредельно растут по абсолютной величине, и теорема доказана.

Пусть δ — некоторое разбиение $\mathfrak{E}$ на конечное число $\mathfrak{E}_\kappa$. Составим сумму

$$t_\delta = \sum_\kappa |\varphi(\mathfrak{E}_\kappa)| \tag{6}$$

и покажем, что множество значений t_δ для любых δ ограничено. Пусть $\mathfrak{E}_\delta'$ — сумма тех $\mathfrak{E}_\kappa$, для которых $\varphi(\mathfrak{E}_\kappa) \geqslant 0$, и $\mathfrak{E}_\delta''$ — сумма тех

$\mathfrak{E}_\kappa$, для которых $\varphi(\mathfrak{E}_\kappa) < 0$. Принимая во внимание аддитивность $\varphi(\mathfrak{E})$, можем написать

$$t_\delta = \varphi(\mathfrak{E}_\delta') - \varphi(\mathfrak{E}_\delta''). \tag{7}$$

Принимая еще во внимание, что $\mathfrak{E}_\delta' + \mathfrak{E}_\delta'' = \mathfrak{E}$, и следовательно, $\varphi(\mathfrak{E}) = \varphi(\mathfrak{E}_\delta') + \varphi(\mathfrak{E}_\delta'')$, можем переписать (7) в виде

$$t_\delta = 2\varphi(\mathfrak{E}_\delta') - \varphi(\mathfrak{E}) = \varphi(\mathfrak{E}) - 2\varphi(\mathfrak{E}_\delta''). \tag{8}$$

Обозначим через $\bar{\varphi}(\mathfrak{E})$ и $\underline{\varphi}(\mathfrak{E})$ точную верхнюю и точную нижнюю границу значений $\varphi(e)$, если $e \subset \mathfrak{E}$, причем пустое множество также считается принадлежащим $\mathfrak{E}$:

$$\bar{\varphi}(\mathfrak{E}) = \sup \varphi(e); \quad \underline{\varphi}(\mathfrak{E}) = \inf \varphi(e); \quad (e \in \mathfrak{E}) \tag{9}$$

В силу теоремы 1, можем утверждать, что $\bar{\varphi}(\mathfrak{E})$ и $\underline{\varphi}(\mathfrak{E})$ конечны. Из первой из формул (8) следует, что t_δ при любом выборе δ ограничена: $t_\delta \leqslant 2\bar{\varphi}(\mathfrak{E}) - \varphi(\mathfrak{E})$. Точная верхняя граница сумм t_δ при всевозможных разбиениях δ называется полной вариацией $\varphi(\mathfrak{E})$ на множестве $\mathfrak{E}$. Мы её обозначим через $\Phi(\mathfrak{E})$. Если δ_n есть такая последовательность подразделений, что t_{δ_n} стремится к $\Phi(\mathfrak{E})$, то из первой из формул (8) следует, что при этом и $\varphi(\mathfrak{E}'_{\delta_n})$ стремится к $\bar{\varphi}(\mathfrak{E})$, а вторая из формул (8), которую можно переписать в виде

$$2\varphi(\mathfrak{E}''_{\delta_n}) = \varphi(\mathfrak{E}) - t_{\delta_n}$$

показывает, что $\varphi(\mathfrak{E}''_{\delta_n}) \to \underline{\varphi}(\mathfrak{E})$, так что в пределе формула (8) при замене δ на δ_n даёт

$$\Phi(\mathfrak{E}) = 2\bar{\varphi}(\mathfrak{E}) - \varphi(\mathfrak{E}) = \varphi(\mathfrak{E}) - 2\underline{\varphi}(\mathfrak{E}),$$

откуда

$$\bar{\varphi}(\mathfrak{E}) = \frac{1}{2}[\Phi(\mathfrak{E}) + \varphi(\mathfrak{E})]; \qquad \underline{\varphi}(\mathfrak{E}) = -\frac{1}{2}[\Phi(\mathfrak{E}) - \varphi(\mathfrak{E})],$$

$$\Phi(\mathfrak{E}) = \bar{\varphi}(\mathfrak{E}) - \underline{\varphi}(\mathfrak{E}), \tag{10}$$

$$\varphi(\mathfrak{E}) = \bar{\varphi}(\mathfrak{E}) + \underline{\varphi}(\mathfrak{E}) = \bar{\varphi}(\mathfrak{E}) - [-\underline{\varphi}(\mathfrak{E})]. \tag{11}$$

Из определения $\bar{\varphi}(\mathfrak{E})$ и $\underline{\varphi}(\mathfrak{E})$ следует, что $\bar{\varphi}(\mathfrak{E}) \geqslant 0$ и $\underline{\varphi}(\mathfrak{E}) \leqslant 0$. Функции $\bar{\varphi}(\mathfrak{E})$ и $-\underline{\varphi}(\mathfrak{E})$ называются обычно положительной и отрицательной вариациями $\varphi(\mathfrak{E})$ на $\mathfrak{E}$.

Теорема 2. *Положительная, отрицательная и полная вариации суть вполне аддитивные на C функции.*

Пусть имеется любое разбиение $\mathfrak{E}$ на части $\mathfrak{E}_k$. Составим ряд с неотрицательными членами

$$S = \sum_k \varphi(\mathfrak{E}_k),$$

и докажем, что $S=\bar{\varphi}(\mathfrak{E})$. Прежде всего покажем, что $S<+\infty$. Действительно, если бы оказалось, что $S=+\infty$, то при соответствующем выборе $e_k<\mathfrak{E}_k$ сумма

$$\sum \varphi(e_k)$$

могла бы принимать сколь угодно большие значения.

Но эта сумма равна $\varphi(e)$, где

$$e=\sum_k e_k \quad (e<\mathfrak{E}),$$

мы пришли к противоречию с утверждением теоремы 1. Пусть задано $\varepsilon>0$. При подходящем выборе e_κ получим $\varphi(e)\geqslant S-\varepsilon$ и, следовательно, и подавно $\bar{\varphi}(\mathfrak{E})\geqslant S-\varepsilon$, откуда, в виду произвольности ε, имеем $\bar{\varphi}(\mathfrak{E})\geqslant S$. Докажем противоположное неравенство. Выбираем $e\subset\mathfrak{E}$ так что $\varphi(e)\geqslant\bar{\varphi}(\mathfrak{E})-\varepsilon$, пусть $e_\kappa=e\,\mathfrak{E}_\kappa$. Мы имеем

$$\varphi(e)=\sum_k \varphi(e_k), \quad \text{т. е.} \quad \bar{\varphi}(\mathfrak{E})-\varepsilon\leqslant\sum_k \varphi(e_k),$$

откуда и подавно

$$\bar{\varphi}(\mathfrak{E})-\varepsilon\leqslant\sum_k \bar{\varphi}\,\mathfrak{E}_k,$$

и, ввиду произвольности ε, имеем $\bar{\varphi}(\mathfrak{E})\leqslant\sum_\kappa \bar{\varphi}(\mathfrak{E})$, и окончательно

$$\bar{\varphi}(\mathfrak{E})=\sum_k \bar{\varphi}(\mathfrak{E}_\kappa).$$

Аналогично полную аддитивность имеет и отрицательная вариация, а следовательно, в силу (10), и полная вариация. Формула (11) показывает, что всякая вполне аддитивная функция есть разность вполне аддитивных неотрицательных функций. Отметим еще, если бы мы при составлении сумм (6) пользовались разбиениями $\mathfrak{E}$ на бесконечное число множеств, то получили бы, прежнюю точную верхнюю границу.

Любая точка (замкнутое множество) принадлежит T. Если $\mathfrak{E}\in C$, то любая точка P из $\mathfrak{E}$ принадлежит C, и мы можем говорить о значении $\varphi(P)$ функции $\varphi(\mathfrak{E})$ в точке P. Если $\varphi(P)\neq 0$, точка P называется точкой разрыва непрерывности $\varphi(\mathfrak{E})$. В противном случае точкой непрерывности $\varphi(\mathfrak{E})$. Если $\varphi(P)>0$, то из данных выше определений следует, что $\varphi(P)=\bar{\varphi}(P)$ и $\underline{\varphi}(P)=0$, а если $\varphi(P)<0$, то $\bar{\varphi}(P)=0$ и $\underline{\varphi}(P)=\varphi(P)$. Точки непрерывности $\varphi(\mathfrak{E})$ суть также точки непрерывности $\bar{\varphi}(\mathfrak{E})$ и $\underline{\varphi}(\mathfrak{E})$. В силу конечности $\bar{\varphi}(\mathfrak{E})$ и $\underline{\varphi}(\mathfrak{E})$ число точек разрыва, принадлежащих $\mathfrak{E}$, и таких, что $\varphi(P)\geqslant a$ или $\varphi(P)\leqslant -a$, где a — заданное положительное число,

конечно, и число всех точек разрыва конечно или счетно. Пусть P_k эти точки. Если множество точек P_k счетно, то ряд, составленный из $\varphi(P_k)$, абсолютно сходится. Введем новую функцию множеств, определенную на семействе C:

$$\varphi_d(\mathfrak{E}) = \sum_{P_k \in \mathfrak{E}} \varphi(P_k), \tag{12}$$

где суммирование распространяется на точки P_k из $\mathfrak{E}$. Эта функция также вполне аддитивна. Она называется функцией скачков. Разность

$$\varphi_c(\mathfrak{E}) = \varphi(\mathfrak{E}) - \varphi_d(\mathfrak{E}) \tag{13}$$

есть вполне аддитивная функция без точек разрыва непрерывности.

73. Сингулярная функция. В дальнейшем телом T будет служить тело L_G. Оказывается, что не всякая вполне аддитивная на семействе C из L_G функция $\varphi(\mathfrak{E})$ может быть представлена в виде интеграла (1).

Мы докажем позже следующую основную теорему, которой мы уже сейчас будем пользоваться.

Теорема. *Всякая вполне аддитивная на C функция $\varphi(\mathfrak{E})$ может быть представлена для всех множеств $\mathfrak{E}$, принадлежащих любому фиксированному множеству $\mathfrak{E}_0$ из C, формулой*

$$\varphi(\mathfrak{E}) = \varphi(\mathfrak{E}H) + \int_{\mathfrak{E}} f(P)\, G(d\mathfrak{E}), \tag{14}$$

где H — определенное множество из $\mathfrak{E}_0$, такое, что $G(H) = 0$ и $f(P)$ измерима и суммируема на $\mathfrak{E}_0$. Слагаемое $\varphi(\mathfrak{E}H)$ называется сингулярной частью $\varphi(\mathfrak{E})$. Сингулярная часть определяется значениями $\varphi(\mathfrak{E})$ на множествах меры нуль. Второе слагаемое, которое мы назовем абсолютно непрерывной частью, равно нулю на любом множестве меры нуль. Докажем теперь единственность разбиения на сингулярную и, абсолютно непрерывную часть. Пусть наряду с (14) мы имеем для $\mathfrak{E}$ из C, принадлежащих $\mathfrak{E}$, формулу

$$\varphi(\mathfrak{E}) = \varphi(\mathfrak{E}H_1) + \int_{\mathfrak{E}} f_1(P)\, G(d\mathfrak{E}),$$

где $G(H_1) = 0$. Из этой формулы и (14) получаем

$$\varphi(\mathfrak{E}H) - \varphi(\mathfrak{E}H_1) = \int_{\mathfrak{E}} f_1(P)\, G(d\mathfrak{E}) - \int_{\mathfrak{E}} f(P)\, G(d\mathfrak{E}).$$

Заменим $\mathfrak{E}$ множеством $\mathfrak{E}H + \mathfrak{E}H_1$, принадлежащим $\mathfrak{E}_0$. Принимая во внимание, что $G(\mathfrak{E}H + \mathfrak{E}H_1) = 0$ и, следовательно, интеграл по

$\mathfrak{E}H+\mathfrak{E}H_1$ равен нулю и что $(\mathfrak{E}H+\mathfrak{E}H_1)H=\mathfrak{E}H$ и $(\mathfrak{E}H+\mathfrak{E}H_1)H_1=\mathfrak{E}H_1$, мы получим $\varphi(\mathfrak{E}H)=\varphi(\mathfrak{E}H_1)$, и отсюда следует, что абсолютно непрерывные части должны быть одинаковы, т. е.

$$\int_{\mathfrak{E}} f(P)\,G(d\mathfrak{E})=\int_{\mathfrak{E}} f_1(P)\,G(d\mathfrak{E}). \tag{15}$$

При доказательстве теоремы мы будем исходить из любого, но фиксированного множества $\mathfrak{E}_0$, принадлежащего C, и будем считать, что все $\mathfrak{E}\subset\mathfrak{E}_0$, как это формулировано в теореме. При разбиении $\varphi(\mathfrak{E})$ на сингулярную и абсолютно непрерывную часть мы исходили от некоторого множества $\mathfrak{E}_0$ и считали, что все $\mathfrak{E}$ принадлежат $\mathfrak{E}_0$. При этом мы получили единственность указанного разбиения. Если бы мы исходили из другого множества $\mathfrak{E}_0'$, отличного от $\mathfrak{E}_0$ и принадлежащего C, то нетрудно видеть, что для всех множеств, одновременно принадлежащих $\mathfrak{E}_0$ и $\mathfrak{E}_0'$, мы получим то же разбиение, которое мы имели раньше с основным множеством $\mathfrak{E}_0$. Действительно, в противном случае мы имели бы для множеств, принадлежащих произведению $\mathfrak{E}_0''=\mathfrak{E}_0\mathfrak{E}_0'$, которое также входит в семейство C, два различных разбиения $\varphi(\mathfrak{E})$, чего быть не может, как мы видели выше.

В указанном смысле мы можем говорить, что разбиение $\varphi(\mathfrak{E})$ на сингулярную и абсолютно непрерывную часть на всем семействе C единственно.

Покажем, что и функция $f(P)$, входящая под знак интеграла в формуле (14), вполне определена, причем мы, как всегда, отождествляем функции, эквивалентные относительно $G(\mathfrak{E})$. Нам надо показать, что если имеет место (15) для всех $\mathfrak{E}$, принадлежащих $\mathfrak{E}_0$, то разность $\psi(P)=f_1(P)-f(P)$ эквивалентна нулю на $\mathfrak{E}_0$.

Пусть $\mathfrak{E}_0^+$ — та часть $\mathfrak{E}_0$, где $\psi(P)\geqslant 0$, и $\mathfrak{E}_0^-=\mathfrak{E}_0-\mathfrak{E}_0^+$. Множества $\mathfrak{E}_0^+$ и $\mathfrak{E}_0^-$ принадлежат C, и мы имеем, заменяя в (15) $\mathfrak{E}$ на $\mathfrak{E}_0^+$ и на $\mathfrak{E}_0^-$:

$$\int_{\mathfrak{E}_0^+}\psi(P)\,G(d\mathfrak{E})=\int_{\mathfrak{E}_0^-}\psi(P)\,G(d\mathfrak{E})=0,$$

откуда и следует, что $\psi(P)$ эквивалентна нулю на $\mathfrak{E}_0^+$ и $\mathfrak{E}_0^-$, а потому и на $\mathfrak{E}_0$. Если мы составим функцию $f(P)$ для двух множеств $\mathfrak{E}_0$ и $\mathfrak{E}_0'$ из C, то, как и выше, на $\mathfrak{E}_0''=\mathfrak{E}_0\mathfrak{E}_0'$ эти две функции эквивалентны. В этом смысле мы можем говорить и об единственности функции $f(P)$. Если, например, все конечные промежутки принадлежат C, то применяя предыдущие рассуждения к расширяющимся промежуткам $-n\leqslant x\leqslant+n$; $-n\leqslant y\leqslant+n$ $(n=1,2,\ldots)$, мы определим единственным образом $f(P)$ на всей плоскости. Функция $f(P)$ называется обычно производной от $\varphi(\mathfrak{E})$ по $G(\mathfrak{E})$. Пусть $k_P^{(\varepsilon)}$ — круг (или сфера) с центром P и радиусом ε. Можно показать, что для всех P, кроме, может быть, множества

меры нуль относительно $G(\mathfrak{E})$, отношение $\varphi\left(k_P^{(\varepsilon)}\right) : G\left(k_P^{(\varepsilon)}\right)$, при стремлении ε к нулю, стремится к функции, эквивалентной $f(P)$ относительно $G(\mathfrak{E})$. При этом, конечно, считается, что $\varphi(\mathfrak{E})$ определена на круге $k_P^{(\varepsilon)}$ при достаточно малых ε. В дальнейшем мы не будем пользоваться указанным утверждением и не приводим его доказательства.

Определение. *Функция $\varphi(\mathfrak{E})$ называется абсолютно непрерывной относительно $G(\mathfrak{E})$, если для любого фиксированного $\mathfrak{E}_0$ из C и любого заданного положительного ε существует такое положительное η, что $|\varphi(e)| \leqslant \varepsilon$, если $e \in \mathfrak{E}_0$ и $|G(e)| \leqslant \eta$.* Если $\varphi(\mathfrak{E})$ абсолютно непрерывна относительно $G(\mathfrak{E})$, то, очевидно, $\varphi(\mathfrak{E}) = 0$, если $\mathfrak{E} \in C$ и $G(\mathfrak{E}) = 0$. Второе слагаемое формулы (14) является, как мы знаем, абсолютно непрерывной функцией на C. Наоборот, если известно, что $\varphi(\mathfrak{E})$ абсолютно непрерывна, то $\varphi(\mathfrak{E}H) = 0$, ибо $G(\mathfrak{E}H) = 0$ и $\varphi(\mathfrak{E})$ представимо формулой

$$\varphi(\mathfrak{E}) = \int_{\mathfrak{E}} f(P)\, G(d\mathfrak{E}), \tag{16}$$

т. е. сингулярная часть отсутствует. Из этого рассуждения вытекает следующее следствие основной теоремы:

Следствие. *Если $\varphi(\mathfrak{E}) = 0$ при $G(\mathfrak{E}) = 0$, то $\varphi(\mathfrak{E})$ представимо формулой* (16) *и является абсолютно непрерывной относительно $G(\mathfrak{E})$ функцией на всяком множестве $\mathfrak{E}_0$ из C.*

Отметим, что если $G(\mathfrak{E})$ не непрерывна, то и $\varphi(\mathfrak{E})$, определяемая формулой (16), не будет, вообще говоря, непрерывной. Если, например, $G(P_0) = a \neq 0$, то $\varphi(P_0) = a f(P_0)$. Но $\varphi(\mathfrak{E})$ абсолютно непрерывна по отношению к $G(\mathfrak{E})$ в указанном выше смысле.

Если $G(\mathfrak{E})$ — непрерывна, то и $\varphi(\mathfrak{E})$, определяемая формулой (16), очевидно, непрерывна. Если $G(\Delta)$ есть площадь промежутка Δ и, следовательно, L_G есть тело L множеств, измеримых по Лебегу, формула (14) принимает вид

$$\varphi(\mathfrak{E}) = \varphi(\mathfrak{E}H) + \int\int_{\mathfrak{E}} f(x, y)\, dx\, dy,$$

где H имеет лебегову меру, равную нулю. Формула (16) принимает вид

$$\varphi(\mathfrak{E}) = \int\int_{\mathfrak{E}} f(x, y)\, dx\, dy,$$

и в этом случае $\varphi(\mathfrak{E})$, очевидно, непрерывна в каждой точке.

Точная верхняя граница значений $\varphi(e)$ для множеств e, принадлежащих $\mathfrak{E}$, в случае формулы (16), получится, очевидно, если мы проинтегрируем $f(P)$ по множеству, на котором $f(P) \geqslant 0$, и точная

нижняя граница получится, если мы проинтегрируем по множеству, на котором $f(P) \leqslant 0$. Мы имеем, таким образом, следующие формулы для положительной, отрицательной и полной вариации функции $\varphi(\mathfrak{E})$, определенной формулой (16):

$$\bar{\varphi}(\mathfrak{E}) = \int_{\mathfrak{E}} f^{+}(P)\, G(d\mathfrak{E}); \quad \underline{\varphi}(\mathfrak{E}) = \int_{\mathfrak{E}} f^{-}(P)\, G(d\mathfrak{E});$$

$$\Phi(\mathfrak{E}) = \int_{\mathfrak{E}} |f(P)|\, G(d\mathfrak{E}). \tag{17}$$

Если мы выделим из функции $\varphi(\mathfrak{E})$ функцию скачков $\varphi_d(\mathfrak{E})$ и к оставшейся непрерывной функции применим разложение по формуле (14), то получим разложение $\varphi(\mathfrak{E})$ на три слагаемые

$$\varphi(\mathfrak{E}) = \varphi_d(\mathfrak{E}) + \varphi_c(\mathfrak{E}H) + \int_{\mathfrak{E}} f_c(P)\, G(d\mathfrak{E}). \tag{18}$$

74. Случай одного переменного. Пусть $\mathfrak{E}$ есть, например, конечный промежуток $[a, b]$. Вместо $G(\mathfrak{E})$ естественно ввести соответствующую неубывающую функцию точки $g(x)$. Вместо функции множеств вводим функцию точки $\omega(x) = \varphi([a, x])$, и формула (14) для нее будет иметь вид

$$\omega(x) = \varphi([a, x]\, H) + \int_{[a, x]} f(x)\, dg(x), \tag{19}$$

и для лебеговых интегралов

$$\omega(x) = \varphi([a, x]\, H) + \int_{a}^{x} f(x)\, dx. \tag{20}$$

В случае абсолютной непрерывности $\varphi(\mathfrak{E})$ получаем формулы

$$\omega(x) = \int_{[a, x]} f(x)\, dg(x) \quad \text{и} \quad \omega(x) = \int_{a}^{x} f(x)\, dx. \tag{21}$$

Рассмотрим более подробно случай интеграла Лебега. При переходе от функции промежутка к функции точки мы можем добавлять к последней постоянные слагаемые и можем написать

$$\omega(x) = \int_{a}^{x} f(x)\, dx + \omega(a). \tag{22}$$

где $f(x)$ — измеримая функция, суммируемая по $[a, b]$. Принимая во внимание абсолютную непрерывность интеграла от $f(x)$, мы имеем для функции (22) следующее свойство: любому заданному положительному ε отвечает такое положительное η,

что если (a_k, b_k) $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — непересекающиеся промежутки, для которых

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) \leqslant \eta, \tag{23}$$

то

$$\left| \sum_{k=1}^{n} [\omega(b_k) - \omega(a_k)] \right| \leqslant \varepsilon. \tag{24}$$

Будем исходить от функции точки и назовем функцию точки $\omega(x)$, определенную на промежутке $[a, b]$, абсолютно непрерывной на этом промежутке, если она имеет указанное только что свойство. Абсолютно непрерывная функция, очевидно, и просто непрерывна, так как, в частности, можно взять $n = 1$. Как мы увидим в дальнейшем, существуют монотонные, непрерывные функции точки, которые не являются абсолютно непрерывными. Из указанного свойства вытекает и следующее свойство: любому заданному положительному ε отвечает такое положительное η, что если выполнено (23), то

$$\sum_{k=1}^{n} |\omega(b_k) - \omega(a_k)| \leqslant \varepsilon. \tag{25}$$

Действительно, если $\omega(x)$ имеет указанное выше свойство (24), т. е. абсолютно непрерывна, то заданному ε отвечает такое η, что при выполнении (23) мы имеем

$$\left| \sum_{k=1}^{n} [\omega(b_k) - \omega(a_k)] \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{26}$$

Любую систему интервалов (a_k, b_k), удовлетворяющих (23), мы разобьем на два класса, отнеся к классу I те интервалы, для которых $\omega(b_k) - \omega(a_k) \geqslant 0$, и к классу II — те, для которых $\omega(b_k) - \omega(a_k) < 0$. В силу (26) имеем

$$\sum_{\mathrm{I}} |\omega(b_k) - \omega(a_k)| = \sum_{\mathrm{I}} [\omega(b_k) - \omega(a_k)] \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\sum_{\mathrm{II}} |\omega(b_k) - \omega(a_k)| = \left| \sum_{\mathrm{II}} [\omega(b_k) - \omega(a_k)] \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

откуда и следует (25). Принимая во внимание неотрицательность слагаемых суммы (25) и произвольность n, мы получаем и следующее свойство абсолютно непрерывных функций: любому заданному положительному ε отвечает такое положительное η, что если (a_k, b_k) — конечное или счетное множество попарно непересекающихся интервалов, удовлетворяющих условию

$$\sum_{k} (b_k - a_k) \leqslant \eta, \tag{27}$$

то

$$\sum_k |\omega(b_k) - \omega(a_k)| \leqslant \varepsilon. \tag{28}$$

Наоборот, если выполнено это условие, то тем более выполнено и первоначальное условие (24), и $\omega(x)$ абсолютно непрерывна.

Теорема 1. *Сумма, разность и произведение двух абсолютно непрерывных функций суть абсолютно непрерывные функции. Частное* $\frac{\omega_1(x)}{\omega_2(x)}$ *двух абсолютно непрерывных функций также абсолютно непрерывная функция, если* $\omega_2(x)$ *не обращается в нуль.*

Докажем только абсолютную непрерывность произведения $\omega_1(x)\omega_2(x)$. Функции $\omega_1(x)$ и $\omega_2(x)$ ограничены в $[a, b]$, т. е. $|\omega_1(x)| \leqslant l_1$ и $|\omega_2(x)| \leqslant l_2$. Мы имеем

$$|\omega_1(b_k)\omega_2(b_k) - \omega_1(a_k)\omega_2(a_k) \leqslant |\omega_2(b_k)||\omega_1(b_k) - \omega_1(a_k)| +$$
$$+ |\omega_1(a_k)||\omega_2(b_k) - \omega_2(a_k)| \leqslant l_2|\omega_1(b_k) - \omega_1(a_k)| +$$
$$+ l_1|\omega_2(b_k) - \omega_2(a_k).$$

Суммируя по k и принимая во внимание абсолютную непрерывность $\omega_1(x)$ и $\omega_2(x)$, докажем свойство (25) и для произведения $\omega_1(x) \cdot \omega_2(x)$.

Теорема 2. *Абсолютно непрерывная функция* $\omega(x)$ *есть функция ограниченной вариации, и ее полная вариация* $v(x)$ *есть также абсолютно непрерывная функция.*

Пусть η_0 — такое положительное число, что при соблюдении условия (23) для $\eta = \eta_0$ мы имеем

$$\sum_k |\omega(b_k) - \omega(a_k)| \leqslant 1. \tag{29}$$

Разложим $[a, b]$ на части фиксированными точками $a = c_0 < c_1 < c_2 < \ldots < c_{N-1} < c_N = b$ так, что $c_k - c_{k-1} \leqslant \eta_0$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$. При любом разбиении промежутка для $[c_{k-1}, c_k]$ имеем неравенство (29), и суммы t_δ, а тем самым и полная вариация $\omega(x)$ на каждом из промежутков $[c_{k-1}, c_k]$ не больше единицы, а на всем промежутке $[a, b]$ не больше N. Пусть η соответствует ε так, что при соблюдении (23) выполняется (25). Будем подразделять каждый из промежутков $[a_k, b_k]$, входящих в условие (23), на частичные промежутки. Сумма длин полученных промежутков будет попрежнему удовлетворять условию (23), и соответствующая полученным частичным промежуткам сумма (25) будет попрежнему $\leqslant \varepsilon$. Точная верхняя граница суммы слагаемых, отвечающих частичным промежуткам из $[a_k, b_k]$, даст, очевидно, $v(b_k) - v(a_k)$ и, таким образом, при выполнении условия (23) будем иметь

$$\sum_{k=1}^{n} [v(b_k) - v(a_k)] \leqslant \varepsilon,$$

откуда и следует, что $v(x)$ абсолютно непрерывна, и теорема доказана.

Строя функции

$$\omega_1(x)=\frac{1}{2}[v(x)+\omega(x)];\ \omega_2(x)=\frac{1}{2}[v(x)-\omega(x)], \qquad (30)$$

которые не убывают [8] и абсолютно непрерывны, в силу теоремы 1, мы представляем $\omega(x)$ в виде разности двух неубывающих абсолютно непрерывных функций

$$\omega(x)=\omega_1(x)-\omega_2(x). \qquad (31)$$

Как мы указали, неопределенный интеграл (22) от суммируемой функции $f(x)$ дает абсолютно непрерывную функцию точки $\omega(x)$ в смысле указанного выше определения (23), (24) или (23), (25). Докажем теперь обратное предложение.

Теорема 3. *Всякая абсолютно непрерывная функция $\omega(x)$ представима неопределенным интегралом*

$$\omega(x)=\int_a^x f(x)\,dx+\omega(a). \qquad (32)$$

Пользуясь функцией $\omega_1(x)$ и полагая $\omega_1(x)=\omega_1(a)$ при $x<a$ и $\omega_1(x)=\omega_1(b)$ при $x>b$, мы можем сопоставить промежутку $\Delta[\alpha,\beta]$ неотрицательное число $\varphi_1(\Delta)=\omega_1(\beta)-\omega_1(\alpha)$, причем ввиду непрерывности $\omega_1(x)$ неважно, является ли промежуток Δ замкнутым или открытым. Если некоторое линейное множество $\mathfrak{E}$ измеримо по Лебегу, то существует такое открытое множество O, содержащее $\mathfrak{E}$, что множество $(O-\mathfrak{E})$ можно покрыть конечным или счетным числом промежутков $[a_k, b_k]$, сумма длин которых сколь угодно мала [35]. В силу абсолютной непрерывности $\omega(x)$ в $[a, b]$ и ее продолжения постоянной вне $[a, b]$, мы можем совершить это покрытие и таким образом, чтобы сумма неотрицательных слагаемых $\omega_1(b_k)-\omega_1(a_k)$ для покрывающих промежутков $[a_k, b_k]$ была сколь угодно малой, т. е. если $\mathfrak{E}$ измеримо по Лебегу, то $\mathfrak{E}$ измеримо и относительно $\omega_1(x)$. Таким образом, мы можем распространить $\varphi_1(\Delta)$ на все множества из L, принадлежащие $[a, b]$, со свойством полной аддитивности. Из предыдущих рассуждений следует также, что если лебегова мера $m(\mathfrak{E})=0$, то и $\varphi_1(\mathfrak{E})=0$, а потому имеем

$$\varphi_1(\mathfrak{E})=\int_{\mathfrak{E}} f_1(x)\,dx. \qquad (33)$$

Совершенно аналогично, строя $\varphi_2(\Delta)=\omega_2(\beta)-\omega_2(\alpha)$, получим

$$\varphi_2(\mathfrak{E})=\int_{\mathfrak{E}} f_2(x)\,dx, \qquad (34)$$

где $f_2(x)$ суммируема на $[a, b]$, и

$$\varphi(\mathfrak{E}) = \varphi_1(\mathfrak{E}) - \varphi_2(\mathfrak{E}) = \int_{\mathfrak{E}} [f_1(x) - f_2(x)]\, dx = \int_{\mathfrak{E}} f(x)\, dx. \quad (35)$$

Если за $\mathfrak{E}$ возьмем промежуток $[a, x]$, то и придем к формуле (22).

Можно утверждать, что функция $f(x)$, входящая в формулу (22), определяется единственным образом с точностью до слагаемого, почти везде равного нулю. Действительно, если бы наряду с (22) мы имели для $\omega(x)$ вторую такую же формулу с подынтегральной функцией $g(x)$, то интеграл от разности $f(x) - g(x)$ по любому промежутку, принадлежащему $[a, b]$, был бы равен нулю, и, в силу свойства 11 из [52], мы могли бы утверждать, что упомянутая разность эквивалентна нулю. Функция $f(x)$, входящая в формулу (22), называется производной от $\omega(x)$ и обозначается обычным символом: $f(x) = \omega'(x)$. Можно показать, чего мы делать не будем, что для всех x из $[a, b]$, кроме, может быть, множества значений лебеговой меры нуль, имеется предел:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\omega(x+h) - \omega(x)}{h} = F(x),$$

причем $F(x)$ эквивалентна $f(x)$. Если $f(x)$ — непрерывная функция в $[a, b]$, то при всех x из $[a, b]$ существует обычная производная $\omega'(x) = f(x)$ от интеграла по верхнему пределу. Если $f'(x)$ не только непрерывна, но и абсолютно непрерывна в $[a, b]$, то имеем очевидно

$$\omega'(x) = f(x) = \int_a^x h(x)\, dx + C,$$

где $h(x)$ суммируема. Мы имеем $f'(x) = h(x)$, и $h(x)$ называется производной второго порядка от $\omega(x)$ и обозначается обычным символом $h(x) = \omega''(x)$. Совершенно аналогично $\omega(x)$ может иметь абсолютно непрерывные производные до порядка k и тем самым суммируемую производную порядка $(k+1)$. При этом она представима в виде

$$\omega(x) = \int_a^x dx \int_a^x dx \ldots \int_a^x \omega^{(k+1)}(x)\, dx + \omega(a) + \frac{\omega'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{\omega^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Вся изложенная теория легко распространяется на тот случай, когда $\omega(x)$ абсолютно непрерывна относительно неубывающей функции $g(x)$, которую мы будем считать непрерывной, т. е. любому

заданному положительному ε отвечает такое положительное η, что если (a_k, b_k) — непересекающиеся промежутки, для которых

$$\sum_{k=1}^{n} [g(b_k) - g(a_k)] \leqslant \eta, \tag{36}$$

то

$$\left| \sum_{k=1}^{n} [\omega(b_k) - \omega(a_k)] \right| \leqslant \varepsilon. \tag{37}$$

Совершенно так же, как и выше, мы можем вместо (37) писать (28) и функция $\omega(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Вместо (32) мы получаем формулу

$$\omega(x) = \int_a^x f(x)\, dg(x) + \omega(a). \tag{38}$$

75. Абсолютно непрерывные функции множеств. Вернемся к общему случаю множеств на плоскости и исследуем подробнее преобразование, совершаемое формулой (16), причем будем считать, что $f(P)$ неотрицательна и суммируема на всей плоскости. Если $f(P)$ определена и суммируема на некотором измеримом множестве $\mathfrak{E}_0$, то, продолжая ее нулем во вне $\mathfrak{E}_0$, мы получим функцию, суммируемую на всей плоскости. Формула (16) определяет вполне аддитивную функцию $\varphi(\mathfrak{E})$ на теле L_G. Тем самым эта функция определена для всех полуоткрытых промежутков, и мы можем продолжать эту функцию промежутков $\varphi(\Delta)$ на теле L_φ, как это мы делали раньше относительно $G(\Delta)$.

Теорема 1. *Всякое множество $\mathfrak{E}$ из L_G принадлежит L_φ, и формула* (16) *дает меру $\varphi(\mathfrak{E})$ этого множества, получаемую при указанном продолжении $\varphi(\Delta)$.*

Всякое открытое множество O есть сумма счетного числа полуоткрытых промежутков Δ_k $(k = 1, 2, \ldots)$ попарно без общих точек. Суммируя по k обе части формулы

$$\varphi(\Delta_k) = \int_{\Delta_k} f(P)\, G(d\mathfrak{E}),$$

мы слева получаем меру $\varphi(O)$ в силу аддитивности меры и справа интеграл по O в силу аддитивности интеграла, т. е. формула (16) дает меру $\varphi(O)$ любого открытого множества. Принимая во внимание, что всякое замкнутое множество F есть разность всей плоскости $\mathfrak{E}'$ (открытое множество) и некоторого открытого множества O (разности $O = \mathfrak{E}' - F$) и вычитая почленно формулы

$$\varphi(\mathfrak{E}') = \int_{\mathfrak{E}'} f(P)\, G(d\mathfrak{E}); \quad \varphi(O) = \int_O f(P)\, G(d\mathfrak{E}),$$

получаем, как и выше, что формула (16) дает меру $\varphi(F)$ любого замкнутого множества F. Формула (16) дает меру любого открытого множества. Если при помощи формулы: $\mathfrak{E}_1 = O - F$, где $F \subset O$. Пусть $\mathfrak{E}$ — некоторое множество из L_G и ε_n — последовательность положительных чисел, стремящихся к нулю. Мы знаем, что существует последовательность F_n и O_n замкнутых и открытых множеств таких, что $F_n \subset \mathfrak{E} \subset O_n$ и $G(O_n - F_n) = G(O_n) - G(F_n) \leqslant \varepsilon_n$. В силу абсолютной непрерывности интеграла (16) $\varphi(O_n - F_n) - 0$ и, следовательно, $\mathfrak{E}$ принадлежит L_φ [38]. При этом мера $\mathfrak{E}$ в L_φ является, очевидно, пределом $\varphi(F_n)$ или $\varphi(O_n)$, т. е. пределом интегралов

$$\int_{F_n} f(P)\, G(d\mathfrak{E}),$$

причем $F_n \subset \mathfrak{E}$ и $G(\mathfrak{E} - F_n) - 0$ и, в силу абсолютной непрерывности интеграла, этот предел есть интеграл по $\mathfrak{E}$, т. е. мера $\mathfrak{E}$ в L_φ выражается интегралом (16), и теорема доказана. Теорема остается справедливой и при предположении, что неотрицательная функция $f(P)$ суммируема лишь по любому ограниченному множеству, и доказательство остается по существу прежним. В следующей теореме мы уточним состав L_φ.

Теорема 2. *Для принадлежности множества $\mathfrak{E}$ к L_φ необходимо достаточно, чтобы $\mathfrak{E}$ можно было представить в виде суммы*

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}^{(1)} + \mathfrak{E}^{(2)}, \tag{39}$$

где $\mathfrak{E}^{(1)} \in L_G$ и в точках P из $\mathfrak{E}^{(2)}$ мы имеем $f(P) = 0$.

Доказываем необходимость. Пусть $\mathfrak{E}$ принадлежит L_φ. Вводим множества

$$\mathfrak{E}_0 = \mathfrak{E}\,[f(P) = 0];\ \mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}\,[f(P) >];\ \mathfrak{E}_n = \mathfrak{E}\left[\frac{1}{n} < f(P) \leqslant \frac{1}{n-1}\right] \tag{40}$$

$$(n = 2,\ 3,\ \ldots)$$

и обозначим еще через $\mathfrak{E}'$ множество точек, в которых $f(P)$ не определена или равна $(+\infty)$. Множество $\mathfrak{E}'$ измеримо относительно $G(\mathfrak{E})$ и $G(\mathfrak{E}') = 0$. То же можно сказать и о любой части $\mathfrak{E}'$. Функция $f(P)$, измеримая относительно $G(\mathfrak{E})$, тем самым измерима и относительно $\varphi(\mathfrak{E})$, и все множества (40), как и $\mathfrak{E}'$, принадлежат L_φ. Определим далее множества

$$\mathfrak{E}^{(1)} = \mathfrak{E}\,\mathfrak{E}' + \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{E}\,\mathfrak{E}_n;\ \mathfrak{E}^{(2)} = \mathfrak{E}\,\mathfrak{E}_0. \tag{41}$$

При этом справедлива формула (39). В точках $\mathfrak{E}^{(2)}$ $f(P)$ обращается в нуль, и нам надо доказать, что $\mathfrak{E}^{(1)} \in L_G$. Множество $\mathfrak{E}\mathfrak{E}'$ имеет по отношению к $G(\mathfrak{E})$ меру нуль, и достаточно доказать, что множества $\mathfrak{E}\mathfrak{E}_n$ измеримы относительно $G(\mathfrak{E})$. В силу того, что $\mathfrak{E}\mathfrak{E}_n$

измеримо относительно $\varphi(\mathfrak{E})$, существуют замкнутые множества F_n и открытые O_n такие, что

$$F_n \subset \mathfrak{E}\mathfrak{E}_n \subset O_n \quad \text{и} \quad \varphi(O_n - F_n) \leqslant \frac{\varepsilon}{n}, \tag{42}$$

где ε — заданное положительное число. Строим множества

$$D_n = \mathfrak{E}_n(O_n - F_n) = \mathfrak{E}_n O_n - \mathfrak{E}_n F_n, \tag{43}$$

т. е. D_n есть множество тех точек $O_n - F_n$, в которых $\frac{1}{n} < f(P) \leqslant \frac{1}{n-1}$ или $f(P) > 1$ (при $n = 1$). Поскольку $O_n - F_n \in L_G$, и $f(P)$ измерима относительно $G(\mathfrak{E})$, множества $D_n \in L_G$. Далее из $F_n \subset \mathfrak{E}\mathfrak{E}_n$ следует, что $F_n \subset \mathfrak{E}_n$ и $\mathfrak{E}_n F_n = F_n$. Из $\mathfrak{E}\mathfrak{E}_n \subset O_n$ следует, что $\mathfrak{E}\mathfrak{E}_n \subset O_n\mathfrak{E}_n$ и, в силу (43), $\mathfrak{E}\mathfrak{E}_n - F_n \subset D_n$, и поэтому $|\mathfrak{E}\mathfrak{E}_n - F_n|_G \leqslant |D_n|_G$. Но множество $D_n \in L_G$, и мы можем написать $|D_n|_G = G(D_n)$, т. е.

$$|\mathfrak{E}\mathfrak{E}_n - F_n|_G \leqslant G(D_n). \tag{44}$$

Далее в силу (43) и $\mathfrak{E}_n F_n = F_n$, имеем $D_n \subset O_n - F_n$ и, пользуясь (42), получаем

$$\int_{D_n} f(P)\, G(d\mathfrak{E}) = \varphi(D_n) \leqslant \varphi(O_n - F_n) \leqslant \frac{\varepsilon}{n}. \tag{45}$$

Множество D_n входит в $\mathfrak{E}_n$ в силу (43), и на последнем множестве $f(P) > \frac{1}{n}$. Таким образом, получаем оценку

$$\int_{D_n} f(P)\, G(d\mathfrak{E}) \geqslant \frac{1}{n} G(D_n),$$

и неравенство (45) приводится к неравенству

$$\frac{G(D_n)}{n} < \frac{\varepsilon}{n},$$

т. е. $G(D_n) < \varepsilon$. На основании (44) получаем $|\mathfrak{E}\mathfrak{E}_n - F_n|_G < \varepsilon$ и, ввиду произвольности ε, видим отсюда, что $\mathfrak{E}\mathfrak{E}_n \in L_G$; необходимость условия (39) доказана.

Доказываем достаточность. Дана формула (39), причем $\mathfrak{E}^{(1)} \in L_G$ и $f(P) = 0$ в точках $\mathfrak{E}^{(2)}$. Надо доказать, что $\mathfrak{E} \in L_\varphi$. Множество $\mathfrak{E}^{(1)} \in L_\varphi$ в силу теоремы 1. Остается доказать то же для $\mathfrak{E}^{(2)}$. Множество H всех точек, в которых $f(P) = 0$, измеримо относительно $G(\mathfrak{E})$, а потому $H \in L_\varphi$, и, в силу формулы (16), $\varphi(H) = 0$. Но $\mathfrak{E}^{(2)} \subset H$, а потому $\mathfrak{E}^{(2)}$ измеримо относительно $\varphi(\mathfrak{E})$ и имеет меру нуль. Таким образом, теорема доказана. Принимая во внимание, что $\mathfrak{E}^{(2)} \subset H$ и, следовательно, $\varphi(\mathfrak{E}^{(2)}) = 0$, можем утверждать, что

$\varphi(\mathfrak{E}) = \varphi(\mathfrak{E}^{(1)})$, т. е. для вычисления $\varphi(\mathfrak{E})$ надо применить формулу (16), заменяя в ней $\mathfrak{E}$ на $\mathfrak{E}^{(1)}$. Отметим еще, что в формуле (39) все точки множества $\mathfrak{E}^{(1)}$, в которых $f(P) = 0$, можно отнести к $\mathfrak{E}^{(2)}$. Множество этих точек $\mathfrak{E}^{(1)}\mathfrak{E}_0$ измеримо относительно $G(\mathfrak{E})$.

Докажем теперь теорему, которая даст нам возможность сводить интеграл Лебега-Стилтьеса по $\varphi(\mathfrak{E})$ к интегралу по $G(\mathfrak{E})$.

Теорема 3. *Если $F(P)$ определена, измерима относительно $\varphi(\mathfrak{E})$ и суммируема на некотором множестве $\mathfrak{E}$, измеримом и конечной меры относительно $\varphi(\mathfrak{E})$, то произведение $F(P)f(P)$ измеримо относительно $G(\mathfrak{E})$ в $\mathfrak{E}^{(1)}$, и имеет место формула*

$$\int_{\mathfrak{E}} F(P)\,\varphi(d\mathfrak{E}) = \int_{\mathfrak{E}^{(1)}} F(P)f(P)\,G(d\mathfrak{E}), \tag{46}$$

что может быть написано в виде

$$\int_{\mathfrak{E}} F(P)\left[\int_{d\mathfrak{E}} f(P)\,G(d\mathfrak{E})\right] = \int_{\mathfrak{E}^{(1)}} F(P)f(P)\,G(d\mathfrak{E}). \tag{46$_1$}$$

Продолжая $F(P)$ во вне $\mathfrak{E}$ нулем, можно считать, что $F(P)$, как и $f(P)$, определена везде. Кроме того, можем считать, что $F(P)$ и $f(P)$ во всех точках имеют конечные значения. Функция $F(P)$ измерима относительно $\varphi(\mathfrak{E})$ и $f(P)$ измерима относительно $G(\mathfrak{E})$, а следовательно, и относительно $\varphi(\mathfrak{E})$. Введем новую функцию $F_0(P)$, полагая $F_0(P) = F(P)$, если $f(P) \neq 0$, и $F_0(P) = 0$, если $f(P) = 0$. Иначе говоря, $F_0(P) = F(P)\,\omega_H(P)$, где $\omega_H(P)$ есть характеристическая функция множества H тех точек, в которых $f(P) = 0$. Как мы упоминали, $H \in L_G$ и, следовательно, $H \in L_\varphi$, т. е. как $F(P)$, так и $\omega_H(P)$ измеримы относительно $\varphi(\mathfrak{E})$, а потому и $F_0(P)$ измерима относительно $\varphi(\mathfrak{E})$. Покажем, что $F_0(P)$ измерима и относительно $G(\mathfrak{E})$. Поскольку $F_0(P)$ измерима относительно $\varphi(\mathfrak{E})$, при любом a, множество $\mathfrak{E}_a$ тех точек, в которых $F_0(P) > 0$, может быть представлено в виде $\mathfrak{E}_a = \mathfrak{E}_a^{(1)} + \mathfrak{E}_a^{(2)}$, где $\mathfrak{E}_a^{(1)} \in L_G$ и $f(P) = 0$ в точках $\mathfrak{E}_a^{(2)}$. Если $a \geqslant 0$, то, в силу определения $F_0(P)$, множество $\mathfrak{E}_a^{(2)}$ отсутствует, и, следовательно, $\mathfrak{E}_a \in L_G$. Если же $a < 0$, то множество $\mathfrak{E}_a$ содержит все множество H, и, как мы упоминали выше, можно считать в этом случае, что $\mathfrak{E}_a^{(2)}$ совпадает с H, т. е. что $f(P) > 0$ во всех точках $\mathfrak{E}_a^{(1)}$. Но $H \in L_G$, а потому и $\mathfrak{E}_a = \mathfrak{E}_a^{(1)} + H \in L_G$. Таким образом, $\mathfrak{E}_a \in L_G$ при всех a, $F_0(P)$ измерима относительно $G(\mathfrak{E})$, а потому и произведение $F_0(P)f(P)$ также измеримо относительно $G(\mathfrak{E})$. Обратимся к множеству $\mathfrak{E}^{(1)}$, указанному в теореме. В точках этого множества произведение $F_0(P)f(P)$ совпадает с $F(P)f(P)$, т. е. $F(P)f(P)$ измеримо относительно $G(\mathfrak{E})$ в $\mathfrak{E}^{(1)}$. При доказательстве формулы (46) ограничимся тем случаем, когда $F(P)$ ограничена. Для неограниченных функций доказательство совершенно

аналогично. Пусть $|F(P)|<L$ и $\mathfrak{E}_{n\,k}$ — множество тех точек P из $\mathfrak{E}$, в которых выполняется неравенство

$$\frac{k}{2^n}L<F(P)\leqslant\frac{k+1}{2^n}L$$

$$(k=-2^n,-2^n+1,\ldots,2^n-1).$$

Строим кусочно-постоянные функции

$$F_n(P)=\frac{k}{2^n}L,\text{ если }P\in\mathfrak{E}_{n.k}.$$

Последовательность $F_n(P)$ при возрастании n возрастает и ограничена по абсолютной величине числом L. Мы имеем

$$\int_{\mathfrak{E}}F_n(P)\varphi(d\mathfrak{E})=\sum_{k=-2^n}^{2^n-1}\frac{k}{2^n}L\,\varphi(\mathfrak{E}_{n.k})=\sum_{k=-2^n}^{2^n-1}\frac{k}{2^n}L\int_{\mathfrak{E}_{n.k}^{(1)}}f(P)G(d\mathfrak{E}),$$

где $\mathfrak{E}_{n.k}^{(1)}$ получается из $\mathfrak{E}_{n.k}$ по формуле (39). Суммируя по всем указанным значениям k, получаем множество $\mathfrak{E}^{(1)}$ и, внося в последней формуле $\frac{k}{2^n}L$ под знак интеграла, приходим к формуле

$$\int_{\mathfrak{E}}F_n(P)\varphi(d\mathfrak{E})=\int_{\mathfrak{E}^{(1)}}F_n(P)f(P)G(d\mathfrak{E}).$$

Подынтегральная функция правой части по абсолютной величине не больше суммируемой функции $Lf(P)$, и в обеих частях возможен предельный переход под знаком интеграла, что и приводит к формуле (46). Если множество $\mathfrak{E}$ измеримо и относительно $G(\mathfrak{E})$, то в формуле (46) можно заменить $\mathfrak{E}^{(1)}$ на $\mathfrak{E}$, ибо $\mathfrak{E}^{(2)}=\mathfrak{E}-\mathfrak{E}^{(1)}$ и $f(P)=0$ на $\mathfrak{E}^{(2)}$, так что интеграл по $\mathfrak{E}^{(2)}$ равен нулю.

Доказательство последних трех теорем взято из книги Stone'a „Linear transformations in Hilbert Space and their applications to Analysis“.

Если $G(\Delta)$ — функция ограниченной вариации, то пользуясь каноническим представлением в виде разности двух неотрицательных функций, получаем

$$G(\mathfrak{E})=G_1(\mathfrak{E})-G_2(\mathfrak{E})$$

и применяем теорему к $G_1(\mathfrak{E})$ и $G_2(\mathfrak{E})$. Вместо L_G имеем в данном случае L_V, где $V(\mathfrak{E})=G_1(\mathfrak{E})+G_2(\mathfrak{E})$. Для функции $\varphi(\mathfrak{E})$ получаем представление также в виде разности двух неотрицательных функций $\varphi(\Delta)=\varphi_1(\Delta)-\varphi_2(\Delta)$ и вместо L_φ имеем L_{V_1}, где $V_1(\Delta)=\varphi_1(\Delta)+\varphi_2(\Delta)$. Совершенно аналогично рассматривается тот случай, когда $f(P)$ меняет знак. При этом надо представить $f(P)$ в виде разности положительной и отрицательной части

$$f(P)=f^+(P)-f^-(P)$$

и доказывать теорему и формулу для каждого отдельного слагаемого. При этом $\varphi(\Delta)$ представится в виде разности двух неотрицательных функций, и тело множеств L_φ заменится телом множеств, измеримых относительно функции:

$$\psi(\mathfrak{E}) = \int_{\mathfrak{E}} |f(P)|\, G(d\mathfrak{E}).$$

Совершенно аналогично теорема распространяется и на случай комплексных функций $f(P)$ и $G(\mathfrak{E})$.

Рассмотрим еще ту форму, которую имеет доказанная теорема в случае одного переменного. Пусть $g(x)$ — неубывающая и ограниченная функция на конечном промежутке $[a, b]$ и $f(x)$ — неотрицательна и суммируема по $g(x)$ на $[a, b]$. Рассматриваем функцию

$$\omega(x) = \int_{[a,\, x]} f(x)\, dg(x).$$

Всякое множество, измеримое относительно $g(x)$, будет измеримым и относительно $\omega(x)$, и для измеримости множества $\mathfrak{E}$ относительно $\omega(x)$ необходимо и достаточно, чтобы его можно было представить в виде (39), где $\mathfrak{E}^{(1)}$ измеримо относительно $g(x)$ и $f(x) = 0$ во всех точках $\mathfrak{E}^{(2)}$. Если $F(x)$ суммируема по $\omega(x)$ на множестве $\mathfrak{E}$, измеримом относительно $\omega(x)$, то имеет место формула

$$\int_{\mathfrak{E}} F(x)\, d\left[\int_{[a,\, x]} f(x)\, dg(x)\right] = \int_{\mathfrak{E}^{(1)}} F(x) f(x)\, dg(x), \tag{47}$$

где $\mathfrak{E}^{(1)}$ — часть множества $\mathfrak{E}$, входящая в формулу (39). Если $F(x)$ на $\mathfrak{E}$ измерима относительно $g(x)$, то $\mathfrak{E}^{(1)}$ можно заменить на $\mathfrak{E}$. В случае $g(x) = x$, получаем формулу

$$\int_{\mathfrak{E}} F(x)\, d\left[\int_a^x f(x)\, dx\right] = \int_{\mathfrak{E}^{(1)}} F(x) f(x)\, dx. \tag{48}$$

Таким образом, если $\omega(x)$ не имеет сингулярного слагаемого, то интеграл Лебега—Стилтьеса от $F(x)$ по $\omega(x)$ выражается через интеграл Лебега. Если $\mathfrak{E}$ есть промежуток $[a, b]$, то формулы (47) и (48) можно написать в виде

$$\int_{[a,\, b]} F(x)\, d\left[\int_{[a,\, x]} f(x)\, dg(x)\right] = \int_{[a,\, b]} F(x) f(x)\, dg(x), \tag{49}$$

$$\int_a^b F(x)\, d\left[\int_a^x f(x)\, dx\right] = \int_a^b F(x) f(x)\, dx, \tag{49_1}$$

причем, например, в последней формуле $F(x)$ считается суммируемой по неопределенному интегралу от $f(x)$. Положим, что $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ абсолютно непрерывные функции, т. е.

$$\Phi(x) = \int_a^x \Phi'(x)\,dx + C_1; \qquad \Psi(x) = \int_a^x \Psi'(x)\,dx + C_2, \tag{50}$$

где $\Phi'(x)$ и $\Psi'(x)$ суммируемы на $[a, b]$. Пользуясь формулой (49_1), можем написать

$$\int_a^b \Phi(x)\,\Psi'(x)\,dx + \int_a^b \Psi(x)\,\Phi'(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b \Phi(x)\,d\Psi(x) + \int_a^b \Psi(x)\,d\Phi(x),$$

причем интегралы, стоящие справа, суть обычные интегралы Стилтьеса, поскольку $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ — непрерывны и ограниченной вариации. Для правой части мы имеем формулу [2]

$$\int_a^b \Phi(x)\,d\Psi(x) + \int_a^b \Psi(x)\,d\Phi(x) = [\,\Phi(x)\,\Psi(x)\,]_{x=a}^{x=b}$$

и, подставляя в предыдущую формулу, получаем формулу интегрирования по частям.

$$\int_a^b \Phi(x)\,\Psi'(x)\,dx + \int_a^b \Psi(x)\,\Phi'(x)\,dx = [\Phi(x)\,\Psi(x)]_{x=a}^{x=b}. \tag{51}$$

Из (50) непосредственно следует, что для суммы $\Phi(x) + \Psi(x)$ подынтегральная функция равна $\Phi'(x) + \Psi'(x)$, т. е. $[\Phi(x) + \Psi(x)]' = \Phi'(x) + \Psi'(x)$. Полагая в (51) $b = x$, получаем

$$\Phi(x)\,\Psi(x) = \int_a^x \Big| \Phi'(x)\,\Psi(x) + \Phi(x)\,\Psi'(x) \Big| dx + \Phi(a)\,\Psi(a),$$

т. е.

$$[\Phi(x)\,\Psi(x)]' = \Phi'(x)\,\Psi(x) + \Phi(x)\,\Psi'(x).$$

Нетрудно рассмотреть совершенно аналогично и случай бесконечного промежутка.

76. Пример. Мы укажем пример неубывающей непрерывной функции, которая не является абсолютно непрерывной и для которой в формуле (20) отсутствует второе, т. е. абсолютно непрерывное, слагаемое. Предварительно построим на промежутке $[0,1]$ некоторое

замкнутое множество F_0. Разделив промежуток $[0,1]$ точками $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$ на три равные части, удалим из него средний открытый промежуток $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Каждый из оставшихся промежутков $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ и $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ разделим на три равные части: первый — точками $\frac{1}{9}$ и $\frac{2}{9}$, а второй — точками $\frac{7}{9}$ и $\frac{8}{9}$. Удалим затем из каждого из указанных промежутков их средние части, т. е. промежутки $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ и $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$. Каждый из оставшихся четырех промежутков

$$\left[0, \frac{1}{9}\right]; \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right]; \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right]; \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

опять делим на три равные части и удаляем из каждого из четырех указанных промежутков открытый средний промежуток и т. д. Таким образом, окончательно мы удалим из промежутка $[0,1]$ счетное число открытых промежутков, не имеющих попарно общих точек и даже общих концов:

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right), \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right), \left(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right), \left(\frac{7}{27}, \frac{8}{27}\right), \left(\frac{19}{27}, \frac{20}{27}\right), \left(\frac{25}{27}, \frac{26}{27}\right), \ldots, \tag{52}$$

т. е. удалим некоторое открытое множество H_0 и оставшееся множество, которое обозначим через F_0, будет замкнутым. На первом шаге удаляем один открытый промежуток длины $\frac{1}{3}$, на втором шаге — два промежутка длины $\frac{1}{3^2}$, на третьем шаге — 2^2 промежутка длины $\frac{1}{3^3}$ и вообще на n-ом шаге 2^{n-1} промежутков длины $\frac{1}{3^n}$. Таким образом, лебегова мера открытого множества H_0 равна

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 1$$

и оставшееся на промежутке $[0,1]$ множество F_0 имеет, следовательно, меру нуль. Определим теперь на промежутке $[0,1]$ функцию $f(x)$ следующим образом. Положим

$$f(x) = \frac{1}{2}, \quad \text{если } x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right);$$

$$f(x) = \frac{1}{4}, \text{ если } x \in \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right); \quad f(x) = \frac{3}{4}, \text{ если } x \in \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right);$$

вообще положим $f(x)$ равной $\frac{1}{2^n}, \frac{3}{2^n}, \frac{5}{2^n}, \ldots, \frac{2^n-1}{2^n}$ на после-

довательных слева направо интервалах, которые мы удаляем на n-ом шаге. Таким образом, функция $f(x)$ определена пока в точках множества H_0 и сохраняет постоянное значение на каждом из открытых промежутков (51), из которых состоит это множество. Определим ещё $f(x)$ на концах $[0,1]$ полагая $f(0)=0$ и $f(1)=1$. Принцип, по которому мы определили функцию $f(x)$ на каждом из промежутков (52), состоит в следующем: мы полагаем $f(x)$ на некотором промежутке множества H_0, полученном на n-ом шаге, равной среднему арифметическому её значений на соседних промежутках, полученных ранее, или на концах промежутка $[0,1]$, если с одной стороны взятого нового промежутка из H_0 нет ранее полученных промежутков множества H_0. Отсюда непосредственно следует, что $f(x)$ — неубывающая функция на множестве H_0. Продолжим определение $f(x)$ на F_0. Пусть $x_0 \in F_0$. Так как F_0 имеет меру нуль, то в любой ε-окрестности x_0 есть точки H_0, и если точка x по множеству H_0 стремится к x_0 слева, то $f(x)$ не убывает и имеет предел, который мы и примем за значение $f(x)$ при $x=x_0$. Иначе говоря, предыдущее определение сводится к тому, что мы считаем $f(x_0)$ равным точной верхней границе значений $f(x)$ при x меньших x_0 и принадлежащих H_0. В точке $x=1$ это определение приводит, очевидно, к прежнему значению $f(1)=1$. Таким образом, определенная на всем промежутке $[0,1]$ функция, очевидно, не убывает. Нетрудно показать, что она непрерывна. Действительно, если она имеет точку разрыва $x=x'$, то по крайней мере один из интервалов $[f(x'-0), f(x')]$ или $[f(x'), f(x'+0)]$ не сводится к точке и не содержит внутри себя значений $f(x)$ в силу монотонности этой функции. Но определённые выше, только на множестве H_0, значения $f(x)$ заполняют промежуток $[0,1]$ повсюду плотно, и мы пришли к нелепости, допуская разрывность $f(x)$. Напомним, что на каждом из промежутков (52) $f(x)$ сохраняет постоянное значение. На основе неубывающей непрерывной функции $f(x)$ можем построить вполне аддитивную неотрицательную функцию множеств $\varphi(\mathfrak{E})$, определённую во всяком случае на B-множествах. В силу сказанного выше, $\varphi(H_0)=0$, и тем более $\varphi(\mathfrak{E})$ равно нулю на всяком B-множестве, составляющем часть H_0. Если возьмём промежуток $[0,\ x]$, то можем написать:

$$[0,\ x]=[0,\ x]\,H_0+[0,\ x]\,F_0,$$

и, следовательно,

$$f(x)=\varphi([0,\ x])=\varphi([0,\ x]\,H_0)+\varphi([0,\ x|\,F_0).$$

Первое слагаемое равно нулю в силу сказанного выше, а мера F_0 равна нулю, и, следовательно, $f(x)$ сводится к одной сингулярной части [**74**]:

$$f(x)=\varphi([0,x]\,F_0),$$

причём F_0 играет роль H формулы (20) и $f(x)$ — роль $\omega(x)$.

Исследуем еще множество F_0. Непрерывная неубывающая функция $f(x)$ принимает все вещественные значения от нуля до единицы. На каждом из исключённых промежутков, включая и его концы, $f(x)$ сохраняет постоянное значение, причём множество исключённых промежутков счётно. Множество всех значений $f(x)$ не счётно (имеет мощность континуума). Таким образом, очевидно, что F_0 содержит точки, отличные от концов исключенных промежутков. Можно показать, что F_0 имеет мощность континуума.

77. Абсолютно непрерывные функции многих переменных. Аналогично тому, как мы строили абсолютно непрерывные функции точки от одной переменной [74], введем понятие абсолютно непрерывной функции многих переменных. Ограничимся случаем функций двух переменных. Пусть на двумерном промежутке $\Delta_0\ [a \leqslant x \leqslant b;\ c \leqslant y \leqslant d]$ задана непрерывная функция $F(x, y)$. Мы можем с ее помощью построить функцию промежутков $\varphi(\sigma)$, содержащихся в Δ_0, а именно, если промежуток δ определяется неравенствами $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, $y_1 \leqslant y \leqslant y_2$, то положим, как и раньше,

$$\varphi(\delta) = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1), \tag{53}$$

причём замкнутость или незамкнутость δ не играет роли, ибо $F(x, y)$ по условию непрерывна. Если мы добавим к $F(x, y)$ сумму $f_1(x) + f_2(y)$, в которой первое слагаемое зависит только от x и второе только от y, то это не повлияет на $\varphi(\delta)$. Функция промежутков $\varphi(\delta)$ называется абсолютно непрерывной, если она удовлетворяет условию, аналогичному условию (24) из [74], т. е. если любому заданному положительному ε отвечает такое положительное η, что если $\delta_k\ (k = 1, 2, \ldots, n)$ — попарно не налегающие друг на друга промежутки, сумма площадей которых $\leqslant \eta$, то

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \varphi(\delta_k) \right| \leqslant \varepsilon.$$

Определение. *Функция $F(x, y)$ называется абсолютно непрерывной функцией двух переменных (x, y), если $\varphi(\delta)$, определяемая формулой* (53), *есть абсолютно непрерывная функция промежутков, и, если, кроме того, $F(a, y)$ и $F(x, c)$ — абсолютно непрерывные функции y и x.*

Последняя оговорка об абсолютной непрерывности $F(x, y)$ на нижней и левой сторонах промежутка Δ_0 необходима ввиду возможности добавления к $F(x, y)$ упомянутой выше суммы $f_1(x) + f_2(y)$. Напишем очевидную формулу

$$F(x, y) = [F(x, y) - F(a, y) - F(x, c) + F(a, c)] + [F(x, c) - F(a, c)] + \\ + [F(a, y) - F(a, c)] + F(a, c).$$

Первое слагаемое справа есть $\varphi(\delta_{x, y})$, где $\delta_{x, y}$ есть промежуток $a \leqslant x' \leqslant x$, $c \leqslant y' \leqslant y$, и эта функция, как и в [75], представима неопределённым двойным интегралом от суммируемой функции. Второе и третье слагаемые справа суть абсолютно непрерывные функции x и y и, следовательно, представимы простыми неопределёнными интегралами. Таким образом, всякая абсолютно непрерывная функция $F(x, y)$ может быть представлена формулой

$$F(x, y) = \int_a^x \int_c^y f(x, y)\, dx\, dy + \int_a^x g(x)\, dx + \int_c^y h(y)\, dy + F(a, c). \tag{54}$$

Наоборот, нетрудно видеть, что всякая представимая последней формулой, функции абсолютно непрерывна. Мы можем переписать, пользуясь теоремой Фубини, последнюю формулу в виде

$$F(x, y) = \int_a^x \left| \int_c^y f(x, y)\, dy + g(x) \right| dx + \int_c^y h(y)\, dy + F(a, c), \qquad (55)$$

или

$$F(x, y) = \int_c^y \left| \int_a^x f(x, y)\, dx + h(y) \right| dy + \int_a^x g(x)\, dx + F(a, c). \qquad (56)$$

Отсюда видно, что если $F(x, y)$ — абсолютно непрерывная функция двух переменных, то она есть абсолютно непрерывная функция x при любом фиксированном значении y и абсолютно непрерывная функция y при любом фиксированном значении x. Обратное утверждение неправильно, т. е. функция может быть абсолютно непрерывной по каждой переменной и не быть в то же время абсолютно непрерывной функцией двух переменных.

Подынтегральная функция первых слагаемых формул (55) и (56) даёт в силу определения [74] частные производные от абсолютно непрерывной функции $F(x, y)$:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = \int_c^y f(x, y)\, dy + g(x); \quad \frac{\partial F(x, y)}{dy} = \int_a^x f(x, y)\, dx + h(y). \qquad (57)$$

Подынтегральная функция в этих формулах определяет смешанную производную второго порядка:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}\right] = f(x, y).$$

Если частные производные F_x и F_y сами суть абсолютно непрерывные функции двух переменных, то мы можем определить все частные производные второго порядка. Если все они суть также абсолютно непрерывные функции двух переменных, то мы можем определить все производные третьего порядка и т. д.

Можно показать, что частные производные суть почти везде в Δ_0 пределы соответствующих отношений. Так, например, F_x есть предел отношения $[F(x + h, y) - F(x, y)] : h$. Абсолютно непрерывную функцию $F(x, y)$ можно толковать как функцию точки $F(M)$ на плоскости. Если мы введем на этой плоскости вместо прежних декартовых координат (x, y) новые (x', y'), то получим новую функцию $F(x', y')$, и она может оказаться уже не абсолютно непрерывной по новым переменным. В качестве примера рассмотрим абсолютно непрерывную функцию

$$F(x, y) = \int_0^x f(t)\, dt,$$

где $f(t)$ — непрерывная, но не абсолютно непрерывная функция, построенная нами в [76] для промежутка $[0,1]$. Мы ее продолжаем, считая $f(x) = 0$ при $x < 0$ и $f(x) = 1$ при $x > 1$. Предыдущая формула определяет абсолютно непрерывную функцию $F(x, y)$ на всей плоскости (она фактически зависит только

от x). Поворачивая координатные оси вокруг начала на 45°, получим в новых координатах

$$F(x', y') = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y')} f(t)\,dt,$$

Частная производная этой функции x', выражаемая формулой

$$F_{x'} = \frac{1}{\sqrt{2}} f\left(\frac{1}{\sqrt{2}} x' + \frac{1}{\sqrt{2}} y'\right),$$

не является абсолютной непрерывной функцией y' при заданном x', что, в силу (57), должно было бы иметь место, если бы $F(x', y')$ была абсолютно непрерывной функцией двух переменных. Отметим, что построенная функция при любом выборе декартовых координат абсолютно непрерывна по каждой переменной при всех значениях другой переменной. Аналогично предыдущему строится теория абсолютно непрерывных функций любого числа переменных.

В следующей главе мы дадим более общее определение частных производных, которое будет применимо не только к абсолютно непрерывным функциям многих переменных.

78. Вспомогательные предложения. В ближайших двух параграфах мы введем новые понятия и докажем вспомогательные предложения, которые нам необходимы для доказательства основной теоремы из [73] и для дальнейшего обобщения понятия интеграла.

Будем рассматривать функции $\varphi(\mathfrak{E})$ вполне аддитивные на семействе C, состоящем из некоторого множества $\mathfrak{E}_0$ из L_G и всех множеств $\mathfrak{E}$ из L_G, составляющих часть $\mathfrak{E}_0$, причем считаем $G(\mathfrak{E}_0)$ конечным и отличным от нуля. Обозначим через V_1 множество всех таких функций. Если $\varphi_1(\mathfrak{E})$ и $\varphi_2(\mathfrak{E}) \in V_1$, то $C_1\varphi_1(\mathfrak{E}) + C_2\varphi_2(\mathfrak{E})$ также $\in V_1$. Как мы знаем, для всякой $\varphi(\mathfrak{E})$ из V_1 суммы

$$t_\delta(\varphi) = \sum_k |\varphi(\mathfrak{E}_k)| \tag{58}$$

остаются ограниченными при любом разбиении $\mathfrak{E}_0$ на конечное число множеств $\mathfrak{E}_k$ [72]. Точную верхнюю границу сумм t_δ, т. е. полную вариацию $\varphi(\mathfrak{E})$ на $\mathfrak{E}_0$, обозначим через $\|\varphi\|_1$. Имеем, очевидно, $\|c\varphi\|_1 = |c| \cdot \|\varphi\|_1$, где c — постоянная. Если подразделение δ' есть продолжение подразделения δ, то пишем $\delta' \geqslant \delta$. Принимая во внимание, что для любого разбиения $e = e' + e''$ мы имеем $|\varphi(e)| \leqslant |\varphi(e')| + |\varphi(e'')|$, можем утверждать, что $t_{\delta'}(\varphi) \geqslant t_\delta(\varphi)$, если $\delta' \geqslant \delta$. Если δ_n — такая последовательность подразделений, что $t_{\delta_n}(\varphi) \to \|\varphi\|_1$, и $\delta_n' \geqslant \delta_n$, то тем более $t_{\delta_n'}(\varphi) \to \|\varphi\|_1$. Если $t_{\delta_n}(\varphi) \to \|\varphi\|_1$, $t_{\delta_n'}(\psi) \to \|\psi\|_1$ и $t_{\delta_n''}(\varphi + \psi) \to \|\varphi + \psi\|_1$, то, полагая $\delta_n''' = \delta_n \delta_n' \delta_n''$, получим

$$t_{\delta_n'''}(\varphi) \to \|\varphi\|_1; \quad t_{\delta_n'''}(\psi) \to \|\psi\|_1; \quad t_{\delta_n'''}(\varphi + \psi) \to \|\varphi + \psi\|_1.$$

Если $\mathfrak{E}_{k,n}'''$ — частичные множества в δ_n''', то из неравенства

$$|\varphi(\mathfrak{E}_{k,n}''') + \psi(\mathfrak{E}_{k,n}''')| \leqslant |\varphi(\mathfrak{E}_{k,n}''')| + |\psi(\mathfrak{E}_{k,n}''')|$$

путем суммирования и предельного перехода получаем

$$\|\varphi+\psi\|_1 \leqslant \|\varphi\|_1 + \|\psi\|_1. \tag{59}$$

Наряду с суммой (58) рассмотрим для функций $\varphi(\mathfrak{E})$, удовлетворяющих условию

$$\varphi(\mathfrak{E}) = 0 \text{ при } G(\mathfrak{E}) = 0, \tag{60}$$

сумму

$$S_\delta(\varphi) = \sum_k \frac{\varphi^2(\mathfrak{E}_k)}{G(\mathfrak{E}_k)}. \tag{61}$$

Если $G(\mathfrak{E}_k) = 0$, то соответствующее слагаемое имеет вид $\frac{0}{0}$, и мы его считаем равным нулю. Мы могли бы не делать такой оговорки, если бы согласились рассматривать только такие δ, для которых все $G(\mathfrak{E}_k) \neq 0$, что сводится к присоединению тех $\mathfrak{E}_k$, для которых $G(\mathfrak{E}_k) = 0$, к другим частичным множествам. Множество значений $S_\delta(\varphi)$ не обязательно ограничено. Обозначим через V_2 множество тех функций $\varphi(\mathfrak{E})$, которые удовлетворяют условию (60) и для которых множество $S_\delta(\varphi)$ ограничено. Множество V_2 составляет часть V_1. Нетрудно видеть, что если $\varphi(\mathfrak{E}) \in V_2$ и $\psi(\mathfrak{E}) \in V_2$, то $c\varphi(\mathfrak{E}) \in V_2$ и $\varphi(\mathfrak{E}) + \psi(\mathfrak{E}) \in V_2$. Точную верхнюю границу сумм $S_\delta(\varphi)$ обозначим через $\|\varphi\|_2$. Покажем, что если $\delta' \geqslant \delta$, то $S_{\delta'}(\varphi) \geqslant S_\delta(\varphi)$. Для этого достаточно показать, что если $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}' + \mathfrak{E}''$ есть некоторое разбиение $\mathfrak{E}$, то

$$\frac{\varphi^2(\mathfrak{E}')}{G(\mathfrak{E}')} + \frac{\varphi^2(\mathfrak{E}'')}{G(\mathfrak{E}'')} \geqslant \frac{\varphi^2(\mathfrak{E})}{G(\mathfrak{E})}. \tag{62}$$

Это неравенство равносильно следующему:

$$G(\mathfrak{E})\,G(\mathfrak{E}'')\,\varphi^2(\mathfrak{E}') + G(\mathfrak{E})\,G(\mathfrak{E}')\,\varphi^2(\mathfrak{E}'') - G(\mathfrak{E}')\,G(\mathfrak{E}'')\,\varphi^2(\mathfrak{E}) \geqslant 0,$$

которое может быть переписано, в силу $G(\mathfrak{E}) = G(\mathfrak{E}') + G(\mathfrak{E}'')$ и $\varphi(\mathfrak{E}) = \varphi(\mathfrak{E}') + \varphi(\mathfrak{E}'')$, в виде

$$[G(\mathfrak{E}'')\,\varphi(\mathfrak{E}') - G(\mathfrak{E}')\,\varphi(\mathfrak{E}'')]^2 \geqslant 0.$$

Как и выше, если $S_{\delta_n}(\varphi) \to \|\varphi\|_2$ и $\delta_n' \geqslant \delta_n$, то и $S_{\delta_n'}(\varphi) \to \|\psi\|_2$.

Установим теперь для функций из V_2 неравенство, связывающее $\|\varphi\|_1$ и $\|\varphi\|_2$. Применяя неравенство Коши получаем

$$t_\delta(\varphi) = \sum_k |\varphi(\mathfrak{E}_k)| = \sum_k \frac{|\varphi(\mathfrak{E}_k)|}{\sqrt{G(\mathfrak{E}_k)}} \sqrt{G(\mathfrak{E}_k)} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_k \frac{\varphi^2(\mathfrak{E}_k)}{G(\mathfrak{E}_k)}} \cdot \sqrt{\sum_k G(\mathfrak{E}_k)} = \sqrt{\sum_k \frac{\varphi^2(\mathfrak{E}_k)}{G(\mathfrak{E}_k)}} \sqrt{G(\mathfrak{E}_0)},$$

т. е. $t_\delta(\varphi) \leqslant \sqrt{S_\delta(\varphi)}\sqrt{G(\mathfrak{E}_0)}$. Совершенно так же, как и при выводе (59), можно построить такую последовательность подразделений δ_n, что $t_{\delta_n}(\varphi) \to \|\varphi\|_1$ и $S_{\delta_n}(\varphi) \to \|\varphi\|_2$, и неравенство $t_{\delta_n}(\varphi) \leqslant$

$\leqslant |\overline{S_{\delta n}(\varphi)}|\, G(\mathfrak{E}_0)$ в пределе дает

$$|\varphi|_1 \leqslant \sqrt{|\varphi|_2}\,\sqrt{G(\mathfrak{E}_0)}. \tag{63}$$

Отметим еще одно семейство функций $\varphi(\mathfrak{E})$. Функцию $\varphi(\mathfrak{E})$ назовем существенно ограниченной, если существует такая постоянная C, что для любого $\mathfrak{E}$ из L_G, принадлежащего $\mathfrak{E}_0$, имеем

$$|\varphi(\mathfrak{E})| \leqslant CG(\mathfrak{E}), \tag{64}$$

и множество всех существенно ограниченных функций (при разных значениях C) обозначим через V_0. Из (61) непосредственно следует, что, если $\varphi(\mathfrak{E}) \in V_0$, то $S_\delta(\varphi) \leqslant C^2 G(\mathfrak{E}_0)$ при любом δ, т. е. V_0 составляет часть V_2.

Раньше мы рассматривали кусочно-постоянные функции точки [46]. Введем теперь кусочно-постоянные функции множеств. Функция $\psi(\mathfrak{E})$, удовлетворяющая условию (60), называется кусочно-постоянной в $\mathfrak{E}_0$, если существует такое разбиение $\mathfrak{E}_0$ на конечное число множеств $\mathfrak{E}_k$, что

$$\left.\begin{aligned} &\psi(\mathfrak{E}) = \frac{\psi(\mathfrak{E}_k)}{G(\mathfrak{E}_k)}\, G(\mathfrak{E}), \text{ если } \mathfrak{E} \subset \mathfrak{E}_k \text{ и } G(\mathfrak{E}_k) \neq 0; \\ &\psi(\mathfrak{E}) = 0, \text{ если } \mathfrak{E} \subset \mathfrak{E}_k \text{ и } G(\mathfrak{E}_k) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{65}$$

Если отношение $\psi(\mathfrak{E}_k) : G(\mathfrak{E}_k)$ обозначим через a_k (считаем $a_k = 0$, если $G(\mathfrak{E}_k) = 0$), то указанная кусочно-постоянная функция $\psi(\mathfrak{E})$ может быть, очевидно, представлена интегралом

$$\psi(\mathfrak{E}) = \int_{\mathfrak{E}} \sum_k a_k\, \omega_{\mathfrak{E}_k}(P)\, G(d\mathfrak{E}), \tag{66}$$

где $\omega_{\mathfrak{E}_k}(P)$ — характеристическая функция множества $\mathfrak{E}_k$. Под знаком интеграла стоит кусочно-постоянная функция точки, равная a_k на множестве $\mathfrak{E}_k$. Наоборот, всякий интеграл указанного вида дает кусочно-постоянную функцию множеств $\psi(\mathfrak{E})$.

При любом заданном подразделении δ множества $\mathfrak{E}_0$ на конечное число множеств $\mathfrak{E}_k$ сопоставим любой вполне аддитивной на $\mathfrak{E}_0$ функции множеств $\varphi(\mathfrak{E})$, удовлетворяющей условию (60), и любой функции точки $f(P)$, измеримой и суммируемой на $\mathfrak{E}_0$, кусочно-постоянные функции $\varphi_\delta(\mathfrak{E})$ и $f_\delta(P)$. Именно определим $\varphi_\delta(\mathfrak{E})$ для $\mathfrak{E}$, принадлежащего $\mathfrak{E}_k$, формулой

$$\frac{\varphi_\delta(\mathfrak{E})}{G(\mathfrak{E})} = \frac{\varphi(\mathfrak{E}_k)}{G(\mathfrak{E}_k)}, \tag{67}$$

т. е. для любого $\mathfrak{E}$ из $\mathfrak{E}_0$ формулой

$$\varphi_\delta(\mathfrak{E}) = \int_{\mathfrak{E}} \sum_k a_k\, \omega_{\mathfrak{E}_k}(P)\, G(d\mathfrak{E}), \text{ где } a_k = \frac{\varphi(\mathfrak{E}_k)}{G(\mathfrak{E}_k)}. \tag{68}$$

Функцию $f_\delta(P)$ положим равной постоянной

$$f_\delta(P) = \frac{1}{G(\mathfrak{E}_k)} \int\limits_{\mathfrak{E}_k} f(P)\, G(d\mathfrak{E}), \tag{69}$$

если $P \in \mathfrak{E}_k$. Если $G(\mathfrak{E}_k) = 0$, то и выражение (69) считаем равным нулю. Если $\varphi(\mathfrak{E})$ представлено интегралом:

$$\varphi(\mathfrak{E}) = \int\limits_{\mathfrak{E}} f(P)\, G(d\mathfrak{E}), \tag{70}$$

то, очевидно,

$$\varphi_\delta(\mathfrak{E}) = \int\limits_{\mathfrak{E}} f_\delta(P) G(d\mathfrak{E}). \tag{71}$$

Из определения $\varphi_\delta(\mathfrak{E})$ и $f_\delta(P)$ непосредственно следует:

$$\left.\begin{aligned} (c_1\varphi(\mathfrak{E}) + c_2\psi(\mathfrak{E}))_\delta &= c_1\varphi_\delta(\mathfrak{E}) + c_2\psi_\delta(\mathfrak{E}); \\ (c_1 f(P) + c_2 F(P))_\delta &= c_1 f_\delta(P) + c_2 F_\delta(P). \end{aligned}\right\} \tag{72}$$

Покажем, что если $\delta' \geqslant \delta$, то

$$(\varphi_\delta(\mathfrak{E}))_{\delta'} = \varphi_\delta(\mathfrak{E}). \tag{73}$$

При δ' имеем подразделения каждого $\mathfrak{E}_k$ на некоторые множества $\mathfrak{E}'_{k,s}$, причем, в силу (67),

$$a_k = \frac{\varphi_\delta(\mathfrak{E}'_{k,s})}{G(\mathfrak{E}'_{k,s})} = \frac{\varphi(\mathfrak{E}_k)}{G(\mathfrak{E}_k)},$$

откуда следует

$$(\varphi_\delta(\mathfrak{E}))_{\delta'} = \int\limits_{\mathfrak{E}} \sum_{k,s} a_k\, \omega_{\mathfrak{E}'_{k,s}}(P)\, G(d\mathfrak{E}) = \int\limits_{\mathfrak{E}} \sum_k a_k \sum_s \omega_{\mathfrak{E}'_{k,s}}(P) G(d\mathfrak{E}) =$$

$$= \int\limits_{\mathfrak{E}} \sum_k a_k \omega_{\mathfrak{E}_k}(P)\, G(d\mathfrak{E}) = \varphi_\delta(\mathfrak{E}).$$

Если c — наибольшее из a_k, то, в силу (65), $|\psi(\mathfrak{E})| \leqslant cG(\mathfrak{E})$, т. е. всякая кусочно-постоянная функция множеств существенно ограничена. Отметим, что мы рассматриваем кусочно-постоянные функции лишь при разбиении $\mathfrak{E}_0$ на конечное число множеств.

Пусть $\delta' \geqslant \delta$ и $\mathfrak{E}'_{k,s}$ — указанные выше частичные множества. Из определения $\varphi_\delta(\mathfrak{E})$ следует, что

$$\frac{\varphi_\delta(\mathfrak{E}'_{k,s})}{G(\mathfrak{E}'_{k,s})} = \frac{\varphi_\delta(\mathfrak{E}_k)}{G(\mathfrak{E}_k)}; \quad \varphi_\delta(\mathfrak{E}_k) = \varphi(\mathfrak{E}_k),$$

а потому

$$S_{\delta'}(\varphi_\delta) = \sum_{k,s} \frac{\varphi_\delta^2(\mathfrak{E}'_{k,s})}{G(\mathfrak{E}'_{k,s})} = \sum_{k,s} \frac{\varphi_\delta(\mathfrak{E}_k)}{G(\mathfrak{E}_k)} \varphi_\delta(\mathfrak{E}'_{k,s}) =$$

$$= \sum_k \frac{\varphi(\mathfrak{E}_k)}{G(\mathfrak{E}_k)} \varphi_\delta(\mathfrak{E}_k) = \sum_k \frac{\varphi^2(\mathfrak{E}_k)}{G(\mathfrak{E}_k)},$$

т. е.

$$S_{\delta'}(\varphi_\delta) = \mathfrak{E}_\delta(\varphi). \tag{74}$$

Если $S_{\delta_n}(\varphi_\delta) \to \|\varphi_\delta\|_2$, то при $\delta'_n = \delta_n \delta$ и подавно $S_{\delta'_n}(\varphi_\delta) \to \|\varphi_\delta\|_2$. Но $\delta'_n \geqslant \delta$ и, в силу (74), $S_{\delta'_n}(\varphi_\delta) = S_\delta(\varphi)$ и не зависит от n, откуда следует

$$\|\varphi_\delta\|_2 = S_\delta(\varphi). \tag{75}$$

Если $\varphi(\mathfrak{E}) \in V_2$, то существует такая последовательность подразделений $\delta^{(n)}$, что $S_{\delta^{(n)}}(\varphi) \to \|\varphi\|_2$, и, следовательно, существует такая последовательность подразделений, что

$$\|\varphi_{\delta^{(n)}}\|_2 \to \|\varphi\|_2. \tag{76}$$

Величину (75) нетрудно выразить интегралом. Пусть $g_\delta(P)$ — подынтегральная функция в интеграле (66) для кусочно-постоянной функции $\varphi_\delta(\mathfrak{E})$

$$g_\delta(P) = a_k = \varphi(\mathfrak{E}_k) : G(\mathfrak{E}_k), \text{ если } P \in \mathfrak{E}_k.$$

Мы имеем

$$\varphi_\delta^2(\mathfrak{E}_k) = \varphi^2(\mathfrak{E}_k) = a_k^2 G^2(\mathfrak{E}_k) = G(\mathfrak{E}_k) \int_{\mathfrak{E}_k} g_\delta^2(P)\, G(d\mathfrak{E}),$$

и, следовательно,

$$S_\delta(\varphi) = \sum_k \frac{\varphi^2(\mathfrak{E}_k)}{G(\mathfrak{E}_k)} = \sum_k \int_{\mathfrak{E}_k} g_\delta^2(P)\, G(d\mathfrak{E}),$$

т. е.

$$S_\delta(\varphi) = \|\varphi_\delta\|_2^2 = \int_{\mathfrak{E}_0} g_\delta^2(P)\, G(d\mathfrak{E}), \tag{77}$$

и, применяя обычное обозначение нормы в L_2,

$$\|\varphi_\delta\|_2 = \|g_\delta(P)\|_{\mathfrak{E}_0}^2. \tag{78}$$

Выведем еще две формулы, необходимые нам в дальнейшем. В силу (73) имеем $[\varphi(\mathfrak{E}) - \varphi_\delta(\mathfrak{E})]_{\delta'} = \varphi_{\delta'}(\mathfrak{E}) - \varphi_\delta(\mathfrak{E})$ при $\delta' \geqslant \delta$. Разность $g_{\delta'}(P) - g_\delta(P)$, сохраняющая постоянные значения в точках

частичных множеств $\mathfrak{E}'_{k,s}$ подразделения δ', есть подинтегральная функция в формуле (66) для $\varphi_{\delta'}(\mathfrak{E}) - \varphi_{\delta}(\mathfrak{E})$, т. е.

$$\varphi_{\delta'}(\mathfrak{E}) - \varphi_{\delta}(\mathfrak{E}) = \int_{\mathfrak{E}_0} [g_{\delta'}(P) - g_{\delta}(P)]\, G(d\mathfrak{E}),$$

и, в силу (78), можем написать

$$\| (\varphi - \varphi_{\delta})_{\delta'} \|_2 = \| \varphi_{\delta'} - \varphi_{\delta} \|_2 = \| g_{\delta'}(P) - g_{\delta}(P) \|_{\mathfrak{E}_0}. \tag{79}$$

Последняя формула будет касаться функции $g_{\delta'}(P)$. Она сохраняет постоянное значение $a'_{k,s} = \varphi(\mathfrak{E}'_{k,s}) : G(\mathfrak{E}'_{k,s})$ в точках $\mathfrak{E}'_{k,s}$ и, согласно определению $f_{\delta}(P)$, функция $(g_{\delta'}(P))_{\delta}$ принимает в точках $\mathfrak{E}_k$ постоянное значение

$$\frac{1}{G(\mathfrak{E}_k)} \sum_s \int_{\mathfrak{E}'_{k,s}} \frac{\varphi(\mathfrak{E}'_{k,s})}{G(\mathfrak{E}'_{k,s})}\, G(d\mathfrak{E}) = \frac{1}{G(\mathfrak{E}_k)} \sum_s \frac{\varphi(\mathfrak{E}'_{k,s})}{G(\mathfrak{E}'_{k,s})}\, G(\mathfrak{E}'_{k,s}) = \frac{\varphi(\mathfrak{E}_k)}{G(\mathfrak{E}_k)},$$

т. е.

$$(g_{\delta'}(P))_{\delta} = g_{\delta}(P). \tag{80}$$

79. Вспомогательные предложения (продолжение). Введем новое понятие, важное для дальнейших построений. Пусть $\varphi(\mathfrak{E})$ и $\psi(\mathfrak{E}) \in V_1$ и $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}' + \mathfrak{E}''$ — некоторое разбиение $\mathfrak{E}$ на два подмножества без общих точек. Обозначим через $\inf[\varphi, \psi]$ точную нижнюю границу сумм $\varphi(\mathfrak{E}') + \psi(\mathfrak{E}'')$ для всевозможных разбиений $\mathfrak{E}$:

$$\inf[\varphi, \psi] = \inf_{\mathfrak{E} = \mathfrak{E}' + \mathfrak{E}''} [\varphi(\mathfrak{E}') + \psi(\mathfrak{E}'')] = \omega(\mathfrak{E}), \tag{81}$$

т. е.

$$\varphi(\mathfrak{E}') + \psi(\mathfrak{E}'') \geqslant \omega(\mathfrak{E}), \tag{82}$$

и для любого заданного положительного ε существует такое разбиение $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}' + \mathfrak{E}''$, что

$$\varphi(\mathfrak{E}') + \psi(\mathfrak{E}'') \leqslant \omega(\mathfrak{E}) + \varepsilon. \tag{83}$$

Функция $\omega(\mathfrak{E})$ при любом $\mathfrak{E}$ из L_G имеет конечное значение, ибо $\varphi(\mathfrak{E}')$ и $\psi(\mathfrak{E}'')$ ограничены. Если взять за $\mathfrak{E}'$ само $\mathfrak{E}$ и за $\mathfrak{E}''$ пустое множество или наоборот, то получим

$$\omega(\mathfrak{E}) \leqslant \varphi(\mathfrak{E}); \quad \omega(\mathfrak{E}) \leqslant \psi(\mathfrak{E}). \tag{84}$$

Докажем, что $\omega(\mathfrak{E})$ вполне аддитивна. Пусть имеется разбиение $\mathfrak{E}$ на конечное и бесконечное число множеств $\mathfrak{E}_k$ (попарно без общих точек). Мы имеем

$$\varphi(\mathfrak{E}) = \sum_k \varphi(\mathfrak{E}_k); \quad \psi(\mathfrak{E}) = \sum_k \psi(\mathfrak{E}_k),$$

причем написанные ряды сходятся абсолютно. В силу (84), положительные $\omega(\mathfrak{E}_k)$ образуют сходящийся ряд, ибо ряды с членами $\varphi(\mathfrak{E}_k)$

и $\psi(\mathfrak{E}_k)$ абсолютно сходятся, а потому и весь ряд, составленный из $\omega(\mathfrak{E}_k)$, имеет определенную сумму, не зависящую от порядка слагаемых [I; **134**]. Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Существует такое разбиение $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}' + \mathfrak{E}''$, что

$$\varphi(\mathfrak{E}') + \psi(\mathfrak{E}'') \geqslant \omega(\mathfrak{E}) \quad \text{и} \quad \varphi(\mathfrak{E}') + \psi(\mathfrak{E}'') \leqslant \omega(\mathfrak{E}) + \varepsilon. \tag{85}$$

Обозначим $\mathfrak{E}'_k = \mathfrak{E}_k \mathfrak{E}'$ и $\mathfrak{E}''_k = \mathfrak{E}_k \mathfrak{E}''$, так что

$$\mathfrak{E}'_k + \mathfrak{E}''_k = \mathfrak{E}_k; \quad \sum_k \mathfrak{E}'_k = \mathfrak{E}'; \quad \sum_k \mathfrak{E}''_k = \mathfrak{E}''.$$

Пользуясь определением $\omega(\mathfrak{E})$, можем написать $\varphi(\mathfrak{E}'_k) + \psi(\mathfrak{E}''_k) \geqslant \omega(\mathfrak{E}_k)$ и, суммируя по k, в силу полной аддитивности $\varphi(\mathfrak{E})$ и $\psi(\mathfrak{E})$, получим

$$\sum_k \omega(\mathfrak{E}_k) \leqslant \varphi(\mathfrak{E}') + \psi(\mathfrak{E}''),$$

и второе из неравенств (85) дает

$$\sum_k \omega(\mathfrak{E}_k) \leqslant \omega(\mathfrak{E}) + \varepsilon,$$

откуда, в силу произвольности ε, следует

$$\sum_k \omega(\mathfrak{E}_k) \leqslant \omega(\mathfrak{E}). \tag{86}$$

Докажем теперь противоположное неравенство. Берем такое разбиение $\mathfrak{E}_k = \mathfrak{E}_{k,1} + \mathfrak{E}_{k,2}$, чтобы выполнялось неравенство

$$\varphi(\mathfrak{E}_{k,1}) + \psi(\mathfrak{E}_{k,2}) < \omega(\mathfrak{E}_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}. \tag{87}$$

Суммируя по k, обозначая сумму $\mathfrak{E}_{k,1}$ через $\mathfrak{E}_1$ и сумму $\mathfrak{E}_{k,2}$ через $\mathfrak{E}_2$ получим

$$\varphi(\mathfrak{E}_1) + \psi(\mathfrak{E}_2) \leqslant \sum_k \omega(\mathfrak{E}_k) + \varepsilon, \tag{88}$$

причем $\mathfrak{E}_1 \mathfrak{E}_2 = 0$ и $\mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2 = \mathfrak{E}$. Но $\varphi(\mathfrak{E}_1) + \psi(\mathfrak{E}_2) \geqslant \omega(\mathfrak{E})$, в силу определения $\omega(\mathfrak{E})$, и неравенство (88) дает

$$\omega(\mathfrak{E}) \leqslant \sum_k \omega(\mathfrak{E}_k) + \varepsilon,$$

и, ввиду произвольности ε, получаем неравенство, противоположное (86), откуда и следует полная аддитивность $\omega(\mathfrak{E})$:

$$\omega(\mathfrak{E}) = \sum_k \omega(\mathfrak{E}_k).$$

Из сказанного выше следует, что $\omega(\mathfrak{E})$, определяемая формулой (81), принадлежит V_1.

Введем еще следующее обозначение для любой функции $\varphi(\mathfrak{E})$ из V_1:

$$\varphi_n(\mathfrak{E}) = \inf[\varphi, nG]. \tag{89}$$

Принимая во внимание, что $G(\mathfrak{E}) \geqslant 0$, можем утверждать, что $\varphi_{n+1}(\mathfrak{E}) \geqslant \varphi_n(\mathfrak{E})$, и, кроме того, в силу (84), $\varphi_n(\mathfrak{E}) \leqslant \varphi(\mathfrak{E})$. Таким образом, при всяком $\mathfrak{E}$, принадлежащем $\mathfrak{E}_0$, последовательность $\varphi_n(\mathfrak{E})$ имеет конечный предел при $n \to \infty$. Напомним еще определение абсолютной непрерывности:

$\varphi(\mathfrak{E})$ называется абсолютно непрерывной на $\mathfrak{E}_0$, если для любого заданного положительного ε существует такое положительное η, что $|\varphi(\mathfrak{E})| \leqslant \varepsilon$, если $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{E}_0$, $\mathfrak{E}$ — принадлежит L_G и $G(\mathfrak{E}) \leqslant \eta$.

Лемма 1. *Если $\varphi(\mathfrak{E})$ абсолютно непрерывна на $\mathfrak{E}_0$, то $\varphi_n(\mathfrak{E}) \to \varphi(\mathfrak{E})$ для всякого $\mathfrak{E}$.*

Пусть $\varepsilon > 0$ задано. При некотором разбиении $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}'_n + \mathfrak{E}''_n$, в силу (83), имеем

$$\varphi(\mathfrak{E}'_n) + nG(\mathfrak{E}''_n) < \varphi_n(\mathfrak{E}) + \varepsilon \leqslant \varphi(\mathfrak{E}) + \varepsilon. \tag{90}$$

Но по теореме из [**72**] 1 $\varphi(\mathfrak{E}'_n) \geqslant l$, где l — определенное число, и из (90) следует

$$G(\mathfrak{E}''_n) < \frac{\varphi(\mathfrak{E}) + \varepsilon - l}{n}, \tag{91}$$

причем правая часть $\leqslant \eta$ при всех достаточно больших n, откуда, в силу абсолютной непрерывности $\varphi(\mathfrak{E})$, имеем $|\varphi(\mathfrak{E}''_n)| \leqslant \varepsilon$ при достаточно больших n. Первое из неравенств (90) дает $\varphi(\mathfrak{E}'_n) \leqslant \varphi_n(\mathfrak{E}) + \varepsilon$. Но $\varphi(\mathfrak{E}'_n) = \varphi(\mathfrak{E}) - \varphi(\mathfrak{E}''_n)$ и, следовательно, $\varphi(\mathfrak{E}) \leqslant \varphi_n(\mathfrak{E}) + \varepsilon + \varphi(\mathfrak{E}''_n)$ и, в силу $|\varphi(\mathfrak{E}''_n)| \leqslant \varepsilon$, имеем $\varphi(\mathfrak{E}) - \varphi_n(\mathfrak{E}) \leqslant 2\varepsilon$, откуда, ввиду произвольности ε, и следует $\varphi_n(\mathfrak{E}) \to \varphi(\mathfrak{E})$.

Лемма 2. *Для неотрицательной вполне аддитивной функции $\varphi(\mathfrak{E})$ предел $\varphi_n(\mathfrak{E})$ есть вполне аддитивная функция, абсолютно непрерывная на $\mathfrak{E}_0$.*

Обозначим $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(\mathfrak{E}) = \varphi^{(ac)}(\mathfrak{E})$. Принимая во внимание, что $\varphi_n(\mathfrak{E})$ вполне аддитивны и неотрицательны и лемму из [**63**], можем утверждать, что $\varphi^{(ac)}(\mathfrak{E})$ вполне аддитивна. Из (84) следует, что $0 \leqslant \varphi_n(\mathfrak{E}) \leqslant nG(\mathfrak{E})$, а потому каждая из $\varphi_n(\mathfrak{E})$ абсолютно непрерывна.

Далее из неравенства $\varphi^{(ac)}(\mathfrak{E}_0 - \mathfrak{E}) \geqslant \varphi_n(\mathfrak{E}_0 - \mathfrak{E})$, где $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{E}_0$, следует $\varphi^{(ac)}(\mathfrak{E}_0) - \varphi^{(ac)}(\mathfrak{E}) \geqslant \varphi_n(\mathfrak{E}_0) - \varphi_n(\mathfrak{E})$, т. е.

$$0 \leqslant \varphi^{(ac)}(\mathfrak{E}) - \varphi_n(\mathfrak{E}) \leqslant \varphi^{(ac)}(\mathfrak{E}_0) - \varphi_n(\mathfrak{E}_0). \tag{92}$$

Отсюда видно, что $\varphi_n(\mathfrak{E})$ стремится к $\varphi^{(ac)}(\mathfrak{E})$ равномерно по отношению ко всем $\mathfrak{E}$ из $\mathfrak{E}_0$. Принимая во внимание абсолютную непрерывность $\varphi_n(\mathfrak{E})$, можем утверждать и абсолютную непрерывность $\varphi^{(ac)}(\mathfrak{E})$ на $\mathfrak{E}_0$. Действительно, пусть ε — заданное положительное число. Мы можем фиксировать такое $n = n_0$, что $\varphi^{(ac)}(\mathfrak{E}_0) -$

$-\varphi_{n_0}(\mathfrak{E}_0) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. При этом, в силу (92), имеем $\varphi^{(ac)}(\mathfrak{E}) \leqslant \varphi_{n_0}(\mathfrak{E}) + \frac{\varepsilon}{2}$. В силу абсолютной непрерывности $\varphi_{n_0}(\mathfrak{E})$ существует такое положительное η, что $\varphi_{n_0}(\mathfrak{E}) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, если $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{E}_0$ и $G(\mathfrak{E}) \leqslant \eta$, и из написанного выше неравенства следует, что $\varphi^{(ac)}(\mathfrak{E}) \leqslant \varepsilon$, если $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{E}_0$ и $G(\mathfrak{E}) \leqslant \eta$, и лемма доказана.

Лемма 3. *Если $\varphi(\mathfrak{E}) \in V_1$, неотрицательна и абсолютно непрерывна на $\mathfrak{E}_0$, то для любого заданного $\varepsilon > 0$ имеется такая существенно ограниченная функция $\psi(\mathfrak{E})$, что*

$$\| \varphi - \psi \|_1 \leqslant \varepsilon. \tag{93}$$

Из (84) следует, как мы уже указывали, что $0 \leqslant \varphi_n(\mathfrak{E}) \leqslant nG(\mathfrak{E})$, т. е. каждая из $\varphi_n(\mathfrak{E})$ — существенно ограничена. Кроме того, $\varphi(\mathfrak{E}) - \varphi_n(\mathfrak{E}) \geqslant 0$ и, следовательно, полная вариация этой разницы на $\mathfrak{E}_0$ равна ее значению при $\mathfrak{E}_0$, т. е. $\| \varphi(\mathfrak{E}) - \varphi_n(\mathfrak{E}) \|_1 = \varphi(\mathfrak{E}_0) - \varphi_n(\mathfrak{E}_0)$. Но, в силу абсолютной непрерывности $\varphi(\mathfrak{E})$, мы имеем, согласно лемме 1 : $\varphi_n(\mathfrak{E}_0) \to \varphi(\mathfrak{E}_0)$, т. е. $\| \varphi(\mathfrak{E}) - \varphi_n(\mathfrak{E}) \|_1 \to 0$, и чтобы удовлетворить неравенству (93), достаточно взять за $\psi(\mathfrak{E})$ функцию $\varphi_n(\mathfrak{E})$ при некотором достаточно большом n. Оказывается, можно удовлетворить неравенству (93), выбирая за $\psi(\mathfrak{E})$ некоторую кусочно-постоянную на $\mathfrak{E}_0$ функцию. Предварительно докажем это для функций $\varphi(\mathfrak{E})$ из V_2.

Теорема 1. *Если $\varphi(\mathfrak{E}) \in V_2$, то для любого заданного $\varepsilon > 0$ существует такая кусочно-постоянная функция $\omega(\mathfrak{E})$, что*

$$\| \varphi - \omega \|_2 \leqslant \varepsilon. \tag{94}$$

Пусть $f(P)$ — измеримая функция из L_2 на $\mathfrak{E}_0$ и

$$a = \frac{1}{G(\mathfrak{E})} \int_{\mathfrak{E}} f(P)\, G(d\mathfrak{E}),$$

причем считаем это выражение равным нулю, если $G(\mathfrak{E}) = 0$. Мы имеем очевидное равенство

$$\int_{\mathfrak{E}} [f(P) - a]^2\, G(d\mathfrak{E}) = \int_{\mathfrak{E}} f^2(P)\, G(d\mathfrak{E}) - a^2 G(\mathfrak{E}).$$

Полагая в нем $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_k$ и $a = \int_{\mathfrak{E}_k} f(P)\, G(d\mathfrak{E}) : G(\mathfrak{E}_k)$, где $\mathfrak{E}_k$ — частичные множества из некоторого разбиения δ множества $\mathfrak{E}_0$, и суммируя по k, получим

$$\| f(P) - f_\delta(P) \|^2_{\mathfrak{E}_0} = \| f(P) \|^2_{\mathfrak{E}_0} - \| f_\delta(P) \|^2_{\mathfrak{E}_0}. \tag{95}$$

Если примем $f(P) = g_{\delta'}(P)$, где $\delta' > \delta$ и $g_\delta(P)$ функция, входящая в формулу (77), то, в силу (80), $f_\delta(P) = g_\delta(P)$ и (95) даёт:

$$\| g_{\delta'}(P) - g_\delta(P) \|^2_{\mathfrak{E}_0} = \| g_{\delta'}(P) \|^2_{\mathfrak{E}_0} - \| g_\delta(P) \|^2_{\mathfrak{E}_0}. \tag{96}$$

Принимая во внимание (78) и (79), может написать

$$\| (\varphi - \varphi_\delta)_{\delta'} \|_2 = \| \varphi_{\delta'} \|_2 - \| \varphi_\delta \|_2. \tag{97}$$

В силу (76) существуют такие последовательности подразделений δ_n и δ'_n, что $\| (\varphi - \varphi_\delta)_{\delta_n} \|_2 \to \| \varphi - \varphi_\delta \|_2$ и $\| \varphi_{\delta'_n} \|_2 \to \| \varphi \|_2$. Для последовательности $\delta''_n = \delta_n \delta'_n$ мы имеем и подавно $\| (\varphi - \varphi_\delta)_{\delta''_n} \|_2 \to \| \varphi - \varphi_\delta \|_2$ и $\| \varphi_{\delta''_n} \|_2 \to \| \varphi \|_2$. Полагая в (97) $\delta' = \delta''_n$ и переходя к пределу, получим

$$\| \varphi - \varphi_\delta \|_2 = \| \varphi \|_2 - \| \varphi_\delta \|_2. \tag{98}$$

Принимая во внимание опять (76), можем утверждать, что существует такое разбиение δ, что правая часть (98) $\leqslant \varepsilon$, и, полагая $\omega(\mathfrak{E}) = \varphi_\delta(\mathfrak{E})$, мы и получим (94).

Теорема 2. *Если $\varphi(\mathfrak{E}) \in V_1$ и абсолютно непрерывна в $\mathfrak{E}_0$, то для любого заданного $\varepsilon > 0$ существует такая кусочно-постоянная на $\mathfrak{E}_0$ функция $\omega(\mathfrak{E})$, что*

$$\| \varphi - \omega \|_1 \leqslant \varepsilon. \tag{99}$$

Мы можем представить φ в виде разности двух неотрицательных функций из V_1: $\varphi(\mathfrak{E}) = \varphi_1(\mathfrak{E}) - \varphi_2(\mathfrak{E})$, и если существуют кусочно-постоянные функции $\omega_1(\mathfrak{E})$ и $\omega_2(\mathfrak{E})$ такие, что $\| \varphi_1 - \omega_1 \|_1 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ и $\| \varphi_2 - \omega_2 \| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, то, вводя кусочно-постоянную функцию $\omega(\mathfrak{E}) = \omega_1(\mathfrak{E}) + \omega_2(\mathfrak{E})$, получим, в силу (59),

$$\| \varphi - \omega \|_1 \leqslant \| \varphi_1 - \omega_1 \|_1 + \| \varphi_2 - \omega_2 \|_1 \leqslant \varepsilon,$$

и, таким образом, достаточно доказать теорему для случая неотрицательных функций $\varphi(\mathfrak{E})$.

Согласно лемме 3 существует такая существенно ограниченная функция $\psi(\mathfrak{E})$, что $\| \varphi - \psi \|_1 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Функция $\psi(\mathfrak{E}) \in V_2$ [78] и, следовательно, существует такая кусочно-постоянная функция $\omega(\mathfrak{E})$, что $\| \psi - \omega \|_2 \leqslant \frac{\varepsilon^2}{4G(\mathfrak{E}_0)}$. В силу (63), имеем $\| \psi - \omega \|_1 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, и, пользуясь (59), можем написать

$$\| \varphi - \omega \|_1 \leqslant \| \varphi - \psi \|_1 + \| \psi - \omega \|_1 \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

и теорема доказана. Утверждение теоремы 1 сводится к тому, что в V_2 при норме $\| \varphi \|_2$ кусочно-постоянные функции повсюду плотны, а теорема 2 сводится к тому, что кусочно-постоянные функции повсюду плотны в пространстве абсолютно непрерывных функций из V_1 при норме $\| \varphi \|_1$.

80. Основная теорема. Переходим к доказательству основной теоремы, формулированной нами в [**73**]. Как и выше, достаточно доказать теорему для случая неотрицательной функции $\varphi(\mathfrak{E})$ из V_1. Обозначим, как всегда, через $\varphi^{(ac)}(\mathfrak{E})$ предел $\varphi_n(\mathfrak{E})$, определенных формулой (**89**). Равенство $\varphi^{(ac)}(\mathfrak{E}) = \varphi(\mathfrak{E})$, в силу лемм 1 и 2, имеет место в том и только в том случае, когда $\varphi(\mathfrak{E})$ абсолютно непрерывна в $\mathfrak{E}_0$. Пусть $\varphi(\mathfrak{E})$ не абсолютно непрерывна. Построим неотрицательную вполне аддитивную в $\mathfrak{E}_0$ функцию

$$\varphi^{(s)}(\mathfrak{E}) = \varphi(\mathfrak{E}) - \varphi^{(ac)}(\mathfrak{E}). \tag{100}$$

Мы покажем, что $\varphi^{(s)}(\mathfrak{E})$ есть сингулярное слагаемое в формуле (14) из [**73**]. Образуем

$$\varphi_n^{(s)}(\mathfrak{E}) = \inf[\varphi^{(s)}, nG] = \inf_{\mathfrak{E} = \mathfrak{E}' + \mathfrak{E}''} [\varphi(\mathfrak{E}') - \varphi^{(ac)}(\mathfrak{E}') + nG(\mathfrak{E}'')]. \tag{101}$$

Вспомним разбиение $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_n' + \mathfrak{E}_n''$, удовлетворяющее условию (90), и неравенство (91), в силу которого $G(\mathfrak{E}_n'') \to 0$ при $n \to \infty$. Принимая во внимание определение (101), можем написать

$$\varphi_n^{(s)}(\mathfrak{E}) \leqslant \varphi(\mathfrak{E}_n') + nG(\mathfrak{E}_n'') - \varphi^{(ac)}(\mathfrak{E}_n') =$$
$$= \varphi(\mathfrak{E}_n') + nG(\mathfrak{E}_n'') - [\varphi^{(ac)}(\mathfrak{E}) - \varphi^{(ac)}(\mathfrak{E}_n'')],$$

т. е., в силу (90),

$$\varphi_n^{(s)}(\mathfrak{E}) \leqslant \varphi_n(\mathfrak{E}) + \varepsilon - [\varphi^{(ac)}(\mathfrak{E}) - \varphi^{(ac)}(\mathfrak{E}_n'')].$$

Но, ввиду абсолютной непрерывности $\varphi^{(ac)}(\mathfrak{E})$, имеем $0 \leqslant \varphi^{(ac)}(\mathfrak{E}_n'') \leqslant \varepsilon$ для всех достаточно больших n и, следовательно,

$$\varphi_n^{(s)}(\mathfrak{E}) \leqslant \varphi_n(\mathfrak{E}) - \varphi^{(ac)}(\mathfrak{E}) + 2\varepsilon.$$

Принимая во внимание, что $\varphi_n(\mathfrak{E}) \to \varphi^{(ac)}(\mathfrak{E})$, получим $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n^{(s)}(\mathfrak{E}) \leqslant 2\varepsilon$, или, ввиду произвольности ε, можем написать $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n^{(s)}(\mathfrak{E}) = 0$ при всяком $\mathfrak{E}$. Но $\varphi_n^{(s)}(\mathfrak{E})$ неотрицательны и не убывают при возрастании n, и потому при всяком n имеем

$$\varphi_n^{(s)}(\mathfrak{E}) = \inf_{\mathfrak{E} = \mathfrak{E}' + \mathfrak{E}''} [\varphi^{(s)}(\mathfrak{E}') + nG(\mathfrak{E}'')] = 0.$$

Применяя это к $\mathfrak{E}_0$ при $n = 1$, можем утверждать, что для любого заданного $\varepsilon > 0$ существуют такие множества $\mathfrak{E}_n$, принадлежащие $\mathfrak{E}_0$ и L_G, что

$$\varphi^{(s)}(\mathfrak{E}_n) + G(\mathfrak{E}_0 - \mathfrak{E}_n) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^n},$$

откуда, в силу неотрицательности $\varphi^{(s)}(\mathfrak{E})$ и $G(\mathfrak{E})$,

$$\varphi^{(s)}(\mathfrak{E}_n) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^n} \text{ и } G(\mathfrak{E}_0 - \mathfrak{E}_n) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^n}. \tag{102}$$

Образуем множество $\mathfrak{E}'_\varepsilon = \mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2 + \ldots$, принадлежащее $\mathfrak{E}_0$ и L_G. Принимая во внимание, что $\mathfrak{E}_n \subset \mathfrak{E}'_\varepsilon$ при любом n, можем написать $G(\mathfrak{E}_0 - \mathfrak{E}'_\varepsilon) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^n}$ и, устремляя n к бесконечности, получим $G(\mathfrak{E}_0 - \mathfrak{E}'_\varepsilon) = 0$. С другой стороны, принимая во внимание, что

$$\mathfrak{E}'_\varepsilon = \mathfrak{E}_1 + (\mathfrak{E}_2 - \mathfrak{E}_1) + (\mathfrak{E}_3 - \mathfrak{E}_1 - \mathfrak{E}_2) + \ldots,$$

первое из неравенств (102) и неотрицательность $\varphi^{(s)}(\mathfrak{E})$, получим $\varphi^{(s)}(\mathfrak{E}'_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$. Итак,

$$\varphi^{(s)}(\mathfrak{E}'_\varepsilon) \leqslant \varepsilon \quad \text{и} \quad G(\mathfrak{E}_0 - \mathfrak{E}'_\varepsilon) = 0.$$

Обозначая $\mathfrak{E}_0 - \mathfrak{E}'_\varepsilon = \mathfrak{E}_\varepsilon$, можем утверждать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое множество $\mathfrak{E}_\varepsilon$ из $\mathfrak{E}_0$, что

$$\varphi^{(s)}(\mathfrak{E}_0 - \mathfrak{E}_\varepsilon) \leqslant \varepsilon \text{ и } G(\mathfrak{E}_\varepsilon) = 0.$$

Пусть ε_n положительны и $\varepsilon_n \to 0$. Можем написать

$$\varphi(\mathfrak{E}_0 - \mathfrak{E}_{\varepsilon_n}) \leqslant \varepsilon_n \quad \text{и} \quad G(\mathfrak{E}_{\varepsilon_n}) = 0.$$

Введем множество $H = \mathfrak{E}_{\varepsilon_1} + \mathfrak{E}_{\varepsilon_2} + \ldots$. В силу второго из последних неравенств $G(H) = 0$, и принимая во внимание, что $\mathfrak{E}_{\varepsilon_n} \subset H$ при любом n, имеем, в силу первого неравенства: $\varphi^{(s)}(\mathfrak{E}_0 - H) \leqslant \varepsilon_n$, и устремляя n к бесконечности, получим $\varphi^{(s)}(\mathfrak{E}_0 - H) = 0$. Итак, существует такое H, что

$$\varphi^{(s)}(\mathfrak{E}_0 - H) = 0 \text{ и } G(H) = 0. \tag{103}$$

Всякое $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}H + (\mathfrak{E} - \mathfrak{E}H)$, но $\mathfrak{E} - \mathfrak{E}H \subset \mathfrak{E}_0 - H$, и первая из формул (103), в силу положительности $\varphi^{(s)}(\mathfrak{E})$, дает $\varphi^{(s)}(\mathfrak{E} - \mathfrak{E}H) = 0$, и, следовательно, $\varphi^{(s)}(\mathfrak{E}) = \varphi^{(s)}(\mathfrak{E}H)$. Итак, существует такое H, что

$$\varphi^{(s)}(\mathfrak{E}) = \varphi^{(s)}(\mathfrak{E}H) \text{ и } G(H) = 0.$$

Таким образом, $\varphi^{(s)}(\mathfrak{E})$ есть сингулярное слагаемое в формуле (14) из [73] и, принимая во внимание (100) и абсолютную непрерывность $\varphi^{(ac)}(\mathfrak{E})$, нам для доказательства теоремы из [73] остается доказать следующую теорему:

Теорема 3. *Всякая абсолютно непрерывная функция $\varphi(\mathfrak{E})$ из V_1 может быть представлена интегралом*

$$\varphi(\mathfrak{E}) = \int_{\mathfrak{E}} f(P)\, G(d\mathfrak{E}), \tag{104}$$

где $f(P)$ измерима и суммируема на $\mathfrak{E}_0$.

Согласно теореме 2, существуют такие кусочно-постоянные функции $\omega_n(\mathfrak{E})$, что

$$\|\varphi - \omega_n\|_1 \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}, \tag{105}$$

откуда следует, в силу (59),

$$\| \omega_{n+1} - \omega_n \|_1 \leqslant \| \varphi - \omega_{n+1} \|_1 + \| \varphi - \omega_n \|_1 < \frac{1}{2^n} .$$

Но всякая $\omega_n(\mathfrak{E})$ есть интеграл от кусочно-постоянной функции $g_n(P)$ с конечным числом конечных значений на $\mathfrak{E}_0$ [**78**]:

$$\omega_n(\mathfrak{E}) = \int_{\mathfrak{E}} g_n(P)\, G(d\mathfrak{E})$$

и

$$\omega_{n+1}(\mathfrak{E}) - \omega_n(\mathfrak{E}) = \int_{\mathfrak{E}} [g_{n+1}(P) - g_n(P)]\, G(d\mathfrak{E}).$$

Полная вариация этой функции множеств, представимой интегралом, выражается формулой [**73**]:

$$\| \omega_{n+1} - \omega_n \|_1 = \int_{\mathfrak{E}_0} | g_{n+1}(P) - g_n(P) |\, G(d\mathfrak{E}),$$

откуда

$$\int_{\mathfrak{E}_0} | g_{n+1}(P) - g_n(P) |\, G(d\mathfrak{E}) \leqslant \frac{1}{2^n} , \tag{106}$$

и ряд, составленный из этих интегралов, сходится. При этом почти везде в $\mathfrak{E}_0$ сходится ряд [**54**]:

$$| g_1(P) | + | g_2(P) - g_1(P) | + | g_3(P) - g_2(P) | + \ldots \tag{107}$$

и тем более почти везде сходится ряд

$$f(P) = g_1(P) + [g_2(P) - g_1(P)] + [g_3(P) - g_2(P)] + \ldots,$$

т. е. почти везде в $\mathfrak{E}_0$: $g_n(P) \to f(P)$. Сумма ряда (107) есть, в силу оценки (106), суммируемая на $\mathfrak{E}_0$ функция. Но $|f(P)| \leqslant$ этой суммы, а потому $f(P)$ также суммируема. Мы можем написать

$$f(P) = g_n(P) + [g_{n+1}(P) - g_n(P)] + [g_{n+2}(P) - g_{n+1}(P)] + \ldots,$$

и, принимая во внимание оценку (106), получим для любого $\mathfrak{E}$ из $\mathfrak{E}_0$:

$$\int_{\mathfrak{E}} | f(P) - g_n(P) |\, G(d\mathfrak{E}) \leqslant \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \ldots = \frac{1}{2^{n-1}},$$

откуда непосредственно следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \omega_n(\mathfrak{E}) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathfrak{E}} g_n(P)\, G(d\mathfrak{E}) = \int_{\mathfrak{E}} f(P) G(d\mathfrak{E})$$

при всяком $\mathfrak{E}$. С другой стороны, из определения полной вариации по $\mathfrak{E}_0$ и (105) следует

$$|\varphi(\mathfrak{E}) - \omega_n(\mathfrak{E})| \leqslant \|\varphi - \omega_n\|_1 \leqslant \frac{1}{2^{n+1}},$$

откуда $\omega_n(\mathfrak{E}) \to \varphi(\mathfrak{E})$ при всяком $\mathfrak{E}$, т. е.

$$\varphi(\mathfrak{E}) = \int_{\mathfrak{E}} f(P) G(d\mathfrak{E}),$$

и теорема доказана. До сих пор мы предполагали, что $G(\mathfrak{E}_0)$ конечное число. Если $G(\mathfrak{E}_0) = +\infty$, то результат получается предельным переходом от множеств $\mathfrak{E}_n$ с конечным значением $G(\mathfrak{E}_n)$, для которых теорема доказана, причем $f(P)$ не зависит от n.

81. Интеграл Хеллингера. Исследуем более подробно семейство V_2. Отметим прежде всего, что из условия (60) следует, что если $\varphi(\mathfrak{E}) \in V_2$, то она абсолютно непрерывна. При этом мы имели формулу (98)

$$\|\varphi - \varphi_\delta\|_2 = \|\varphi\|_2 - \|\varphi_\delta\|_2 \tag{108}$$

и, кроме того [**78**]:

$$\varphi_\delta(\mathfrak{E}) = \int_{\mathfrak{E}} g_\delta(P) G(d\mathfrak{E}) \text{ и } \|\varphi_\delta\|_2 = \int_{\mathfrak{E}_0} g^2_\delta(P) G(d\mathfrak{E}). \tag{109}$$

В силу (76), можем выбрать последовательность подразделений $\mathfrak{E}_0$ так, чтобы иметь неравенство

$$\|\varphi - \varphi_{\delta_n}\|_2 = \|\varphi\|_2 - \|\varphi_{\delta_n}\|_2 \leqslant \frac{1}{4^{n+1} G(\mathfrak{E}_0)}. \tag{110}$$

При этом, в силу (62), будем иметь $\|\varphi - \varphi_{\delta n}\|_1 \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$, и из доказательства теоремы предыдущего параграфа следует, что $g_{\delta n}(P) \to f(P)$ почти везде на $\mathfrak{E}_0$ и

$$\varphi(\mathfrak{E}) = \int_{\mathfrak{E}} f(P) G(d\mathfrak{E}). \tag{111}$$

Из (100) и (110) следует, что при этом

$$\int_{\mathfrak{E}_0} g^2_{\delta_n}(P) G(d\mathfrak{E}) \leqslant \|\varphi\|_2 \text{ и } \int_{\mathfrak{E}_0} g^2_{\delta_n}(P) G(d\mathfrak{E}) \to \|\varphi\|_2.$$

Пользуясь теоремой 4 из [**54**], можем написать

$$\int_{\mathfrak{E}_0} f^2(P) G(d\mathfrak{E}) \leqslant \|\varphi\|_2, \tag{112}$$

откуда следует, что $f(P) \in L_2$ на $\mathfrak{E}_0$. Докажем теперь неравенство противоположное (112).

Применяя к (111) неравенство Буняковского, напишем

$$\varphi^2(\mathfrak{E}_k) \leqslant \int_{\mathfrak{E}_k} f^2(P) G(d\mathfrak{E}) \int_{\mathfrak{E}_k} G(d\mathfrak{E}) = G(\mathfrak{E}_k) \int_{\mathfrak{E}_k} f^2(P) G(d\mathfrak{E}).$$

Деля на $G(\mathfrak{E}_k)$ и суммируя по k, получим

$$S_\delta(\varphi) = \sum_k \frac{\varphi^2(\mathfrak{E}_k)}{G(\mathfrak{E}_k)} \leqslant \int_{\mathfrak{E}_0} f^2(P) G(d\mathfrak{E}), \tag{113}$$

а потому и для точной верхней границы написанных сумм будем иметь

$$\|\varphi\|_2 \leqslant \int_{\mathfrak{E}_0} f^2(P) G(d\mathfrak{E}).$$

Сравнивая с (112), получаем

$$\|\varphi\|_2 = \int_{\mathfrak{E}_0} f^2(P) G(d\mathfrak{E}). \tag{114}$$

Мы доказали, что для всякой $\varphi(\mathfrak{E})$ из V_2 функция $f(P)$, входящая в представление (111), принадлежит L_2, и что имеет место формула (114). Наоборот, если нам известно, что $\varphi(\mathfrak{E})$ представимо формулой (111), где $f(P) \in L_2$ на $\mathfrak{E}_0$, то из оценки (113), выведенной лишь на основе (111), следует, что $\varphi(\mathfrak{E}) \in V_2$. Принимая во внимание единственность представления в виде (111), можем утверждать и справедливость формулы (114). Мы приходим, таким образом, к следующей важной теореме:

Теорема 1. *Для того, чтобы $\varphi(\mathfrak{E})$ принадлежала V_2 на $\mathfrak{E}_0$ необходимо и достаточно, чтобы $\varphi(\mathfrak{E})$ имело представление* (111), *где $f(P) \in L_2$ на $\mathfrak{E}_0$. Если это условие выполнено, то имеет место формула* (114).

Укажем другое необходимое и достаточное условие принадлежности $\varphi(\mathfrak{E})$ к V_2.

Теорема 2. *Для того чтобы $\varphi(\mathfrak{E})$ принадлежала V_2 на $\mathfrak{E}_0$, необходимо и достаточно существование такой вполне аддитивной на $\mathfrak{E}$ неотрицательной функции $H(\mathfrak{E})$, что выполняется неравенство*

$$\varphi^2(\mathfrak{E}) \leqslant G(\mathfrak{E}) H(\mathfrak{E}). \tag{115}$$

Действительно, если это условие выполнено, то суммы $S_\delta(\varphi)$ ограничены:

$$S_\delta(\varphi) = \sum_k \frac{\varphi^2(\mathfrak{E}_k)}{G(\mathfrak{E}_k)} \leqslant \sum_k H(\mathfrak{E}_k) = H(\mathfrak{E}_0).$$

Наоборот, если $\varphi(\mathfrak{E}) \in V_2$, то имеет место формула (111) и $f(P) \in L_2$ на $\mathfrak{E}_0$, а следовательно, и на любом измеримом относительно $G(\mathfrak{E})$ подмножестве $\mathfrak{E}_0$. Положим

$$H(\mathfrak{E}) = \int_{\mathfrak{E}} f^2(P)\, G(d\mathfrak{E}). \tag{116}$$

Применяя к (111) неравенство Буняковского, мы получим (115), и, таким образом, теорема доказана.

Если $\varphi(\mathfrak{E}) \in V_2$ на $\mathfrak{E}_0$, то точная верхняя граница сумм $S_\delta(\varphi)$ называется интегралом Хеллингера и обозначается следующим символом:

$$\|\varphi\|_2 = \sup_\delta S_\delta(\varphi) = \int_{\mathfrak{E}_0} \frac{\varphi^2(d\mathfrak{E})}{G(d\mathfrak{E})}. \tag{117}$$

Формула (114) дает при этом преобразование интеграла Хеллингера в интеграл Лебега:

$$\int_{\mathfrak{E}_0} \frac{\varphi^2(d\mathfrak{E})}{G(d\mathfrak{E})} = \int_{\mathfrak{E}_0} f^2(P)\, G(d\mathfrak{E}). \tag{118}$$

Если подразделение δ' есть продолжение δ, и i есть интеграл (117), т. е. точная верхняя граница сумм $S_\delta(\varphi)$, то, как мы знаем, $S_\delta(\varphi) \leqslant S_{\delta'}(\varphi) \leqslant i$. Принимая это во внимание, можем утверждать, что интеграл (117) обладает следующим свойством: при любом заданном $\varepsilon > 0$ существует такое подразделение δ_ε, что для любого его продолжения имеет место неравенство

$$|i - S_{\delta'}(\varphi)| \leqslant \varepsilon \quad (\delta' \text{ — продолжение } \delta_\varepsilon). \tag{119}$$

Покажем, что число i с указанным свойством может быть только одно. Пусть имеется еще число i' с указанным свойством. Кроме (119) мы будем еще иметь $|i' - S_{\delta'_\varepsilon}(\varphi)| \leqslant \varepsilon$, где δ'_ε играет роль δ_ε в (119). Взяв произведение $\delta''_\varepsilon = \delta_\varepsilon \delta'_\varepsilon$, можем написать оба неравенства

$$|i - S_\delta(\varphi)| \leqslant \varepsilon \text{ и } |i' - S_\delta(\varphi)| \leqslant \varepsilon; \quad (\delta \text{ — продолжение } \delta''_\varepsilon).$$

Для указанных δ, получим в силу $i' - i = (i' - S_\delta(\varphi)) + (S_\delta(\varphi) - i)$:

$$|i' - i| \leqslant |i' - S_\delta(\varphi)| + |i - S_\delta(\varphi)| \leqslant 2\varepsilon,$$

откуда, в силу произвольности ε, и следует, что $i' = i$. Пусть $\varphi(\mathfrak{E})$ и $\varphi_1(\mathfrak{E}) \in V_2$; рассмотрим сумму

$$S_\delta(\varphi, \varphi_1) = \sum_k \frac{\varphi(\mathfrak{E}_k)\, \varphi_1(\mathfrak{E}_k)}{G(\mathfrak{E}_k)}, \tag{120}$$

которая может быть, очевидно, представлена в виде

$$S(\varphi, \varphi_1) = \frac{1}{2} \sum_k \frac{[\varphi(\mathfrak{E}_k) + \varphi_1(\mathfrak{E}_k)]^2}{G(\mathfrak{E}_k)} - \frac{1}{2} \sum_k \frac{\varphi^2(\mathfrak{E}_k)}{G(\mathfrak{E}_k)} - \frac{1}{2} \sum_k \frac{\varphi_1^2(\mathfrak{E}_k)}{G(\mathfrak{E}_k)}, \quad (121)$$

т. е.

$$S_\delta(\varphi, \varphi_1) = \frac{1}{2} S_\delta(\varphi + \varphi_1) - \frac{1}{2} S_\delta(\varphi) - \frac{1}{2} S_\delta(\varphi_1).$$

Для каждой из сумм, стоящих справа, мы имеем свойство (119), причём δ мы можем считать одним и тем же, так как различные δ можем заменить их произведением. Таким образом, и для сумм $S_\delta(\varphi, \varphi_1)$ мы имеем свойство (119); соответствующее число i для сумм (120) обозначается так:

$$i = \int_{\mathfrak{E}_0} \frac{\varphi(d\mathfrak{E})\, \varphi_1(d\mathfrak{E})}{G(d\mathfrak{E})}. \quad (122)$$

Принимая во внимание (121), можем написать

$$\int_{\mathfrak{E}_0} \frac{\varphi(d\mathfrak{E})\, \varphi_1(d\mathfrak{E})}{G(d\mathfrak{E})} = \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{E}_0} \frac{[\varphi(d\mathfrak{E}) + \varphi_1(d\mathfrak{E})]^2}{G(d\mathfrak{E})} - \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{E}_0} \frac{\varphi^2(d\mathfrak{E})}{G(d\mathfrak{E})} - \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{E}_0} \frac{\varphi_1^2(d\mathfrak{E})}{G(d\mathfrak{E})},$$

или, принимая во внимание (118),

$$\int_{\mathfrak{E}_0} \frac{\varphi(d\mathfrak{E})\, \varphi_1(d\mathfrak{E})}{G(d\mathfrak{E})} = \int_{\mathfrak{E}_0} f(P) f_1(P)\, G(d\mathfrak{E}), \quad (123)$$

где $f_1(P)$ — функция точки из L_2, соответствующая $\varphi_1(\mathfrak{E})$:

$$\varphi_1(\mathfrak{E}) = \int_{\mathfrak{E}} f_1(P)\, G(d\mathfrak{E}). \quad (124)$$

Более общие суммы вида

$$\sigma_\delta = \sum_k u(P_k) \frac{\varphi(\mathfrak{E}_k)\, \varphi_1(\mathfrak{E}_k)}{G(\mathfrak{E}_k)}, \quad (125)$$

где $u(P)$ ограничена и измерима относительно $G(\mathfrak{E})$, и P_k — любая точка из $\mathfrak{E}_k$, изучаются так же. Можно показать, что и для этих сумм существует единственное число i, обладающее свойством (119), в котором S_δ надо заменить на σ_δ, причем указанное в (119) неравенство выполняется при любом выборе P_k. Это число i может быть выражено интегралом Лебега — Стилтьеса:

$$i = \int_{\mathfrak{E}_0} u(P) f(P) f_1(P)\, G(d\mathfrak{E}). \quad (126)$$

Свойство (119) лежит в основе общего определения интеграла. В следующих параграфах мы более подробно рассмотрим случай одного переменного.

82. Случай одного переменного. При исследовании случая одного переменного мы будем исходить от функции точки и рассматривать простейший случай непрерывных функций. Для краткости письма будем пользоваться следующим обозначением: если Δ — некоторый промежуток $[\alpha, \beta]$, то символом $\Delta\tau(x)$ будем обозначать разность $\tau(\beta) - \tau(\alpha)$. Пусть $g(x)$ — неубывающая непрерывная на конечном промежутке $[a, b]$ функция и $F(x)$ — вещественная непрерывная на этом промежутке функция, обладающая тем свойством, что $\Delta F(x) = 0$, если $\Delta g(x) = 0$. Пусть δ — некоторое разбиение промежутка $[a, b]$ на конечное число частичных промежутков Δ_k и

$$S_\delta = \sum_k \frac{(\Delta_k F)^2}{\Delta_k g}, \tag{127}$$

Слагаемые, имеющие вид $0:0$, считаются равными нулю. Эта сумма не убывает при добавлении новых точек деления [**78**]. Мы пользуемся разбиением только на промежутки и должны будем приводить доказательства теорем, аналогичных тем, которые имели при разбиении на множества, измеримые относительно $G(\mathfrak{E})$.

Теорема 1. *Для ограниченности множества значений сумм S_δ необходимо и достаточно, чтобы существовала такая неубывающая ограниченная на $[a, b]$ функция $h(x)$, что для любого промежутка из $[a, b]$ выполняется неравенство,*

$$(\Delta F)^2 \leqslant \Delta g \cdot \Delta h. \tag{128}$$

Если это условие выполнено, то слагаемые суммы S_δ не превышают $\Delta_k h$ и для любого разбиения имеем $S_\delta \leqslant h(b) - h(a)$.

Докажем теперь необходимость (128). Если суммы S_δ ограничены для всего промежутка $[a, b]$, то тем более они ограничены и для любого частичного промежутка. Обозначим через $h(x)$ точную верхнюю границу S_δ для промежутка $[a, x]$.

$$h(x) = \sup_\delta S_\delta \text{ для промежутка } [a, x].$$

Совершенно так же, как мы доказывали аддитивность полной вариации [**8**], можно доказать, что точная верхняя граница S_δ для любого частичного промежутка $[\alpha, \beta]$ равна $h(\beta) - h(\alpha) = \Delta h$, и, следовательно, $h(x)$ есть неубывающая и ограниченная функция. Если мы не будем делить Δ на частичные промежутки, то сумма S_δ для промежутка Δ приведётся к одному слагаемому $(\Delta F)^2 : \Delta g$, и оно меньше точной верхней границы Δh сумм S_δ для Δ, и, следовательно, $(\Delta F)^2 : \Delta g \leqslant \Delta h$, что и приводит к (128).

Пусть $G(\mathfrak{E})$ — функция множеств на $[a, b]$, порождённая функцией точки $g(x)$, и предположим, что $F(x)$ имеет вид

$$F(x) = \int_a^x f(x)\, G(d\mathfrak{E}) + C, \tag{129}$$

где $f(x) \in L_2$. Имеем

$$\Delta F = \int_\Delta f(x)\, G(d\mathfrak{E}) = \int_\Delta f(x)\, dg(x),$$

и, применяя неравенство Буняковского, получаем

$$(\Delta F)^2 \leqslant \int_\Delta f^2(x)\, G(d\mathfrak{E}) \int_\Delta G(d\mathfrak{E}) = \Delta g(x) \int_\Delta f^2(x)\, G(d\mathfrak{E}),$$

т. е. выполнено условие (128), и

$$h(x) = \int_a^x f^2(x)\, G(d\mathfrak{E}), \tag{130}$$

причем, в силу непрерывности $g(x)$, указание на замкнутость или незамкнутость промежутка $[a, x]$ несущественно.

Формула (129) приводит к вполне аддитивной функции множеств

$$\varphi(\mathfrak{E}) = \int_{\mathfrak{E}} f(x)\, G(d\mathfrak{E}),$$

определенной для множеств $\mathfrak{E}$, измеримых относительно $G(\mathfrak{E})$ и принадлежащих $[a, b]$, причем $\Delta F = \varphi(\Delta)$. Суммы

$$\sum_k \frac{\varphi^2(\mathfrak{E}_k)}{G(\mathfrak{E}_k)} \tag{131}$$

имеют точную верхнюю границу i, выражаемую формулой (118):

$$i = \int_a^b f^2(x)\, G(d\mathfrak{E}). \tag{132}$$

Покажем, что ту же верхнюю границу имеют и суммы (127), соответствующие разбиению $[a, b]$ лишь на промежутки. Она не может быть, во всяком случае, больше i. Пользуясь абсолютной непрерывностью $\varphi(\mathfrak{E})$, мы покажем, что интеграл (132) является и точной верхней границей сумм (127), которые получаются при разбиении $[a, b]$ на промежутки. В силу сказанного выше, для любого задан-

ного положительного ε существует такое разбиение δ промежутка $[a, b]$ на измеримые множества $\mathfrak{E}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, что

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi^2(\mathfrak{E}_k)}{G(\mathfrak{E}_k)} \geqslant i - \varepsilon, \tag{133}$$

где буквою i мы обозначили интеграл (132). Принимая во внимание необходимость условия в теореме 1 из [**37**], можем утверждать, что для любого $\mathfrak{E}_k$ существует элементарная фигура R_k, т. е. конечная сумма полуоткрытых промежутков без общих точек, такая, что

$$R_k + e'_k = \mathfrak{E}_k + e''_k \tag{134}$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n),$$

где меры e'_k и e''_k — сколь угодно малы. Множества $\mathfrak{E}_k$ попарно без общих точек, но R_k могут иметь общие точки за счет e''_k, т. е. $R_k R_l \subset e''_k e''_l$, и меры этих общих частей также сколь угодно малы. В каждом из равенств (134) мы можем общую часть R_k с остальными R_l, которая представляет собой сумму конечного числа полуоткрытых промежутков, отнести к e'_k. Если η_l — наибольшая из мер e'_k и e''_k, то при таком переносе для новых e'_k будем иметь $G(e'_k) \leqslant (n+1)\eta_l$, ибо $G(R_k R_l) \leqslant G(e''_k e''_l) \leqslant \eta_l$. Таким образом, можем считать, что в равенствах (134) R_k не имеют попарно общих точек, и меры e'_k и e''_k сколь угодно малы.

Принимая во внимание (133), а также абсолютную непрерывность $\varphi(\mathfrak{E})$ и взяв меры e'_k и e''_k достаточно малыми, можем написать

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi^2(R_k)}{G(R_k)} \geqslant i - 2\varepsilon.$$

Пусть Δ_s $(s = 1, 2, \ldots, m)$ — промежутки, входящие в состав всех R_k. Принимая во внимание (62), получим

$$\sum_{s=1}^{m} \frac{\varphi^2(\Delta_s)}{G(\Delta_s)} \geqslant i - 2\varepsilon. \tag{135}$$

В силу непрерывности $g(x)$ и $F(\mathfrak{E})$, можем Δ_s считать замкнутыми или открытыми промежутками. Эти промежутки могут не покрывать $[a, b]$. Добавляя неотрицательные слагаемые, соответствующие оставшимся промежуткам, мы для полной суммы тем более будем иметь (135) и, в силу произвольности ε, следует, что интеграл (132) есть точная верхняя граница сумм (127) при условии (129), где $f(x) \in L_2$. Отметим еще, что, в силу предположенной непрерывности $g(x)$, функция $h(x)$, определяемая формулой (130), непрерывна.

Покажем теперь, что если выполнено условие (128), т. е. суммы (127) ограничены, то $F(x)$ представима формулой (129), где $f(x) \in L_2$.

Пусть Δ — некоторый промежуток из $[a, b]$ и Δ'_k — частичные промежутки его некоторого разбиения. Из (128) следует, в силу неравенства Буняковского:

$$\left(\sum_k |\Delta'_k F|\right)^2 \leqslant \left(\sum_k \sqrt{\Delta'_k h}\,\sqrt{\Delta'_k g}\right)^2 \leqslant \sum_k \Delta'_k h \sum_k \Delta'_k g, \qquad (136)$$

т. е.

$$\left(\sum_k |\Delta'_k F|\right)^2 \leqslant \Delta g \cdot \Delta h.$$

Для точной верхней границы сумм, стоящих слева, при любых разбиениях справедливо то же неравенство и, следовательно, $F(x)$ есть функция ограниченной вариации и для ее полной вариации $v(x)$ мы имеем неравенство

$$(\Delta v(x))^2 \leqslant \Delta g\, \Delta h. \qquad (137)$$

Если Δ'_k — какие угодно неперекрывающиеся промежутки из $[a, b]$, то из (136) следует

$$\left(\sum_k |\Delta'_k F|\right)^2 \leqslant \sum_k \Delta'_k g\, |h(b) - h(a)|.$$

Если сумма, стоящая справа, $\leqslant \varepsilon$, то имеем

$$\sum_k |\Delta'_k F| \leqslant \sqrt{\varepsilon}\,\sqrt{h(b) - h(a)},$$

и, в силу произвольности ε, отсюда следует, что $F(x)$ абсолютно непрерывна по отношению $g(x)$, и, следовательно,

$$F(x) = \int_a^x f(x)\, dg(x) + C. \qquad (138)$$

Остается показать, что $f(x) \in L_2$. Построим ограниченную функцию:

$$f_n(x) = f(x), \text{ если } |f(x)| \leqslant n; \quad f_n(x) = \begin{cases} n, \text{ если } f(x) > n, \\ -n, \text{ если } f(x) < -n, \end{cases}$$

и положим

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(x)\, dg(x). \qquad (139$$

Функция $f_n(x) \in L_2$ и, следовательно, в силу доказанного выше,

$$\sup_\delta \sum_k \frac{(\Delta_k F_n)^2}{\Delta_k g} = \int_a^b f_n^2(x)\, dg(x). \qquad (140)$$

Если интеграл (138) мы будем брать по различным множествам $\mathfrak{E}$ из $[a, b]$, измеримым относительно $g(x)$, то получим функцию мно-

жеств, полная вариация которой на $[a, x]$ выражается интегралом [73]:

$$v(x) = \int_a^x |f(x)|\, dg(x). \tag{141}$$

Если будем разбивать $[a, x]$ только на промежутки, то получим для функции (138) ту же полную вариацию [74].

Принимая во внимание (137), имеем

$$\sup_{\delta} \sum_k \frac{(\Delta_k v)^2}{\Delta_k g} = M, \tag{142}$$

где M — конечное число. С другой стороны, в силу (139) и (141), имеем $|\Delta_k F_n| \leqslant \Delta_k v$ и, принимая во внимание (140) и (142), получаем при любом n:

$$\int_a^b f_n^2(x)\, dg(x) \leqslant M,$$

откуда и следует, что $f(x) \in L_2$. Предыдущие рассуждения дают следующую теорему.

Теорема 2. *Условие* (128) *равносильно тому, что* $F(x)$ *представима в виде* (138), *где* $f(x) \in L_2$, *и если условие* (128) *выполнено, то точная верхняя граница сумм* (127) *выражается интегралом* (132).

Во всем предыдущем мы можем не считать $g(x)$ и $F(x)$ непрерывными. При этом основной промежуток берем полуоткрытым и делим его на полуоткрытые промежутки, для которых $\Delta g = g(\beta + 0) - g(\alpha + 0)$. Все результаты, кроме непрерывности $h(x)$, сохранятся. Отметим, что из условия (128) и непрерывности $g(x)$ следует, что можно написать условие (128) с непрерывной $h(x)$.

83. Свойства интеграла Хеллингера. Точная верхняя граница сумм (127) есть интеграл Хеллингера, который обозначается аналогично (117):

$$\int_a^b \frac{[dF(x)]^2}{dg(x)}, \tag{143}$$

причем имеем для него формулу

$$\int_a^b \frac{[dF(x)]^2}{dg(x)} = \int_a^b f^2(x)\, dg(x). \tag{144}$$

Докажем, что этот интеграл является просто пределом сумм (127) при беспредельном измельчании промежутков Δ_k.

Теорема 3. *Если* $F(x)$ *удовлетворяет условию* (128) *и* $F_1(x)$ — *аналогичному условию*

$$(\Delta F_1)^2 \leqslant \Delta g \, \Delta h_1 , \tag{145}$$

($g(x)$ — *непрерывна*), *то сумма* (127) *и сумма,*

$$\sum_k \frac{\Delta_k F \, \Delta_k F_1}{\Delta_k g} \tag{146}$$

имеют определенный предел при беспредельном измельчании Δ_k, *причем предел суммы* (127) *равен точной верхней границе таких сумм, т. е. интегралу* (143).

Пусть, как и выше, i — точная верхняя граница сумм (127). Для заданного $\varepsilon > 0$ существует такое фиксированное разбиение δ_0 на промежутки, что $S_{\delta_0} \geqslant i - \varepsilon$. Пусть δ настолько тонкое разбиение, что каждый частичный промежуток δ содержит не более одной точки деления из δ_0, и что приращение непрерывной функции $h(x)$ на каждом частичном промежутке δ не больше ε. Для разбиения $\delta\delta_0$ мы имеем

$$S_{\delta\delta_0} \geqslant S_{\delta_0} \geqslant i - \varepsilon. \tag{147}$$

Если p есть число точек деления в разбиении δ_0, то не больше p частичных промежутков δ при переходе к $\delta\delta_0$ разобьются на два промежутка, и при этом соответствующее неотрицательное слагаемое суммы S_δ заменяется двумя неотрицательными слагаемыми суммы $S_{\delta\delta_0}$. Каждое из этих трех слагаемых, в силу сказанного выше о приращении $h(x)$ и свойства (128), не больше ε, и, следовательно,

$$0 \leqslant S_{\delta\delta_0} - S_\delta \leqslant 2p\varepsilon.$$

Сравнивая с (147), получаем $S_\delta \geqslant i - (2p+1)\varepsilon$, откуда, в силу произвольности ε, и следует, что сумма (127) при беспредельном измельчании Δ_k стремится к i. Для исследования сумм (146) отметим, что $F(x) + F_1(x)$ представима формулой вида (138), где $f(x) + f_1(x) \in L_2$, и суммы

$$\sum_k \frac{[\Delta_k (F + F_1)]^2}{\Delta_k g},$$

так же, как и аналогичные суммы для $F_1(x)$, имеют предел при беспредельном измельчании Δ_k. Отсюда следует, что и сумма

$$\sum_k \frac{\Delta_k F \, \Delta_k F_1}{\Delta_k g} = \frac{1}{2} \sum_k \frac{[\Delta_k (F + F_1)]^2}{\Delta_k g} - \frac{1}{2} \sum_k \frac{(\Delta_k F)^2}{\Delta_k g} - \frac{1}{2} \sum_k \frac{(\Delta_k F_1)^2}{\Delta_k g}$$

также имеет предел. Он совпадает с интегралом (122). Таким образом, получаем следующие интегралы Хеллингера:

$$\int_a^b \frac{(dF)^2}{dg} = \lim \sum_k \frac{(\Delta_k F)^2}{\Delta_k g}; \quad \int_a^b \frac{dF\,dF_1}{dg} = \lim \sum_k \frac{\Delta_k F \cdot \Delta_k F_1}{\Delta_k g}. \quad (148)$$

В силу сказанного в [81],

$$\int_a^b \frac{dF\,dF_1}{dg} = \int_a^b f(x) f_1(x)\, dg(x),$$

где

$$F_1(x) = \int_a^x f_1(x)\, dg(x). \quad (149)$$

Можно рассматривать более общие суммы

$$\sum_k u(\xi_k) \frac{(\Delta_k F)^2}{\Delta_k g} \quad (150)$$

и

$$\sum_k u(\xi_k) \frac{\Delta_k F\, \Delta_k F_1}{\Delta_k g}, \quad (151)$$

где $u(x)$ непрерывна в $[a, b]$, существуют интегралы (148) и ξ_k — любое значение из Δ_k. Эти суммы также имеют определенный предел при беспредельном измельчении Δ_k. Достаточно доказать это для сумм (150). Рассмотрим суммы

$$\sum_k m_k \frac{(\Delta_k F)^2}{\Delta_k g}, \quad (152)$$

где m_k — наименьшее значение непрерывной функции $u(x)$ на замкнутом промежутке Δ_k. Совершенно так же, как и выше, можно показать, что суммы не убывают при добавлении новых точек деления, что они ограничены и имеют определенный предел при беспредельном измельчении Δ_k. В силу равномерной непрерывности $u(x)$ и условия (128), разность сумм (150) и (152) стремится к нулю при беспредельном измельчении Δ_k, и, следовательно, суммы (150) также имеют определенный предел. Мы получаем, таким образом, следующие интегралы Хеллингера:

$$\left.\begin{aligned} \int_a^b u(x) \frac{(dF)^2}{dg} &= \lim \sum_k u(\xi_k) \frac{(\Delta_k F)^2}{\Delta_k g}, \\ \int_a^b u(x) \frac{dF\,dF_1}{dg} &= \lim \sum_k u(\xi_k) \frac{\Delta_k F\, \Delta_k F_1}{\Delta_k g}. \end{aligned}\right\} \quad (153)$$

Изложенную теорию можно распространить и на тот случай, когда $g(x)$ разрывна. Указанные суммы имеют определенный предел для регулярной в смысле общего интеграла Стилтьеса последовательности подразделений δ_n.

Вся изложенная теория остается, очевидно, справедливой и для того случая, когда $F(x)$, $F_1(x)$ и $u(x)$ — комплексные функции, причем $F(x)$ и $F_1(x)$ должны удовлетворять условию

$$|\Delta F| \leqslant \Delta g\, \Delta h; \quad |\Delta F_1| \leqslant \Delta g\, \Delta h_1.$$

Везде надо заменить квадраты на квадраты модуля, т. е. $(\Delta_k F)^2$ на $|\Delta_k F|^2$.

Отметим еще некоторые простые свойства интеграла Хеллингера. Пусть $\Phi(x)$ удовлетворяет условию (128) и не убывает. Построим функцию

$$F(x) = \int_a^x u(x)\, d\Phi(x), \tag{154}$$

где $u(x)$ непрерывна, и рассмотрим суммы

$$\sum_k \frac{(\Delta_k F)^2}{\Delta_k g}. \tag{155}$$

Применяем теорему о среднем:

$$\Delta_k F = \int_{\Delta_k} u(x)\, d\Phi(x) = u(\xi_k)\, \Delta_k \Phi,$$

где $\xi_k \in \Delta_k$. Сумма (155) перепишется в виде

$$\sum_k \frac{(\Delta_k F)^2}{\Delta_k g} = \sum_k u^2(\xi_k) \frac{(\Delta_k \Phi)^2}{\Delta_k g},$$

и в пределе получим

$$\int_a^b \frac{(dF)^2}{dg} = \int_a^b u^2(x) \frac{(d\Phi)^2}{dg}.$$

Совершенно аналогично, если наряду с (179) имеем

$$F_1(x) = \int_a^x u_1(x)\, d\Phi_1(x),$$

где $\Phi_1(x)$ удовлетворяет условию (128) и не убывает, а $u_1(x)$ — непрерывна, то получим

$$\int_a^b \frac{dF\,dF_1}{dg} = \int_a^b u(x)\,u_1(x)\,\frac{d\Phi\,d\Phi_1}{dg}\,. \tag{156}$$

Если $\Phi(x)$ и $\Phi_1(x)$ удовлетворяют условию (128), но не монотонны, то получим также формулу (156), пользуясь каноническим представлением $\Phi(x)$ и $\Phi_1(x)$ в виде разности неубывающих функций. Отметим, что $F(x)$ и $F_1(x)$ также, очевидно, удовлетворяют условию (128).

ГЛАВА IV

МЕТРИЧЕСКИЕ И НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

84. Метрическое пространство. Начало настоящей главы мы посвятим изложению теории некоторых абстрактных пространств, а затем укажем приложения этой теории к различным конкретным пространствам — главным образом к функциональным пространствам, т. е. к множествам функций определенного класса. Одно и то же абстрактное пространство может иметь несколько различных конкретных осуществлений, и изложение теории абстрактных пространств является поэтому целесообразным.

Всякое абстрактное пространство есть непустое множество элементов, которое подчиняется некоторым аксиомам. Природа элементов не определяется, и теория какого-либо абстрактного пространства есть следствие тех аксиом, которые определяют это пространство. Мы будем, для связности изложения, сначала полностью проводить теорию абстрактного пространства, а в конце — применения этой теории при различных конкретных осуществлениях этого пространства. Начнем с теории так называемых метрических пространств.

Множество X элементов, которые мы будем обозначать последними буквами латинского алфавита (x, y, z и т. д.), называется м е т р и ч е с к и м п р о с т р а н с т в о м, если в нем, каждой паре элементов x, y сопоставляется неотрицательное число $\rho(x, y)$ (расстояние между x и y), причем имеют место следующие условия:

1. $\rho(x, y) \geqslant 0$, причем знак $=$ тогда и только тогда, когда $x = y$, т. е. x и y — один и тот же элемент;
2. $\rho(y, x) = \rho(x, y)$ — аксиома симметрии; (1)
3. $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$ — аксиома треугольника. (2)

Эти условия должны иметь место для любых элементов $x, y, z \in X$. Если $y_1, y_2, \ldots, y_m$ — какие-либо элементы X, то применяя несколько раз (2), получаем

$$\rho(y_1, y_m) \leqslant \rho(y_1, y_2) + \rho(y_2, y_3) + \cdots + \rho(y_{m-1}, y_m). \qquad (2_1)$$

Пусть x_n ($n = 1, 2, \ldots$) — некоторая бесконечная последовательность элементов и пусть существует такой элемент x_0, что $\rho(x_0, x_n) \to 0$ при $n \to \infty$. При этом говорят, что x_0 е с т ь п р е д е л последовательности x_n, и пишут $x_n \Rightarrow x_0$ или $\lim x_n = x_0$. Нетрудно видеть,

что последовательность не может иметь более одного предела. Действительно, пусть $x_n \Rightarrow x_0$ и $x_n \Rightarrow y_0$. Надо доказать, что $x_0 = y_0$. По (2) имеем $\rho(x_0, y_0) \leqslant \rho(x_0, x_n) + \rho(x_n, y_0)$. При беспредельном возрастании n правая часть стремится к нулю, и в пределе получаем $\rho(x_0, y_0) \leqslant 0$. Но $\rho(x_0, y_0) \geqslant 0$, и из этих двух неравенств следует, что $\rho(x_0, y_0) = 0$ и, следовательно, $x_0 = y_0$. Если $x_n \Rightarrow x_0$, то очевидно, что и всякая бесконечная подпоследовательность $x_{n_k} \Rightarrow x_0$.

Покажем, что $\rho(x, y)$ есть непрерывная функция x и y, т. е. если $x_n \Rightarrow x_0$, и $y_n \Rightarrow y_0$, то $\rho(x_n, y_n) \to \rho(x_0, y_0)$.

В силу (2_1) можем написать

$$\rho(x_n, y_n) \leqslant \rho(x_n, x_0) + \rho(x_0, y_0) + \rho(y_0, y_n);$$
$$\rho(x_0, y_0) \leqslant \rho(x_0, x_n) + \rho(x_n, y_n) + \rho(y_n, y_0),$$

откуда

$$\rho(x_n, y_n) - \rho(x_0, y_0) \leqslant \rho(x_n, x_0) + \rho(y_0, y_n);$$
$$\rho(x_0, y_0) - \rho(x_n, y_n) \leqslant \rho(x_0, x_n) + \rho(y_n, y_0),$$

т. е.

$$|\rho(x_0, y_0) - \rho(x_n, y_n)| \leqslant \rho(x_0, x_n) + \rho(y_0, y_n).$$

При $n \to \infty$ правая часть стремится к нулю, откуда и следует $\rho(x_n, y_n) \to \rho(x_0, y_0)$.

Если последовательность x_n имеет предел ($x_n \Rightarrow x_0$), то при любом заданном $\varepsilon > 0$ существует такое N, что

$$\rho(x_m, x_n) \leqslant \varepsilon \text{ при } m \text{ и } n \geqslant N. \tag{3}$$

Это непосредственно следует из неравенства $\rho(x_m, x_n) \leqslant \rho(x_m, x_0) + \rho(x_0, x_n)$, правая часть которого стремится к нулю при m и $n \to \infty$. Но из (3) не следует, на основе принятых аксиом, что последовательность x_n имеет предел (достаточность признака Коши существования предела не имеет места). Если ввести дополнительное требование, что из (3) следует существование предела у последовательности x_n, то такое метрическое пространство называется полным метрическим пространством.

Пусть U есть некоторое множество элементов метрического пространства. Оно называется ограниченным, если существует такой элемент x_0 и такое положительное число A, что $\rho(x_0, x) \leqslant A$ для всех x из U. Пусть x_1 — какой-либо фиксированный элемент, отличный от x_0. Мы имеем: $\rho(x_1, x) \leqslant \rho(x_1, x_0) + \rho(x_0, x)$ и для элементов U получим: $\rho(x_1, x) \leqslant \rho(x_1, x_0) + A$, причем в правой части этого неравенства стоит некоторое положительное число. Таким образом, при определении ограниченности множества U безразличен выбор элемента x_0. Нетрудно показать, что если последовательность x_n имеет предел, то множество элементов x_n ограничено.

Элемент x_0 называется предельным элементом множества U элементов X, если существует такая последовательность x_n элементов из U, что $x_n \Rightarrow x_0$. Множество U, содержащее все свои предельные элементы, называется замкнутым. Если U незамкнуто, и мы присоединим к нему все его предельные элементы, то новое множество, которое мы обозначим $\overline{U}$, — замкнутое множество [31]. Переход от U к $\overline{U}$ называется замыканием U. Если U замкнуто, то $\overline{U} = U$. Если U — пустое множество (не содержит ни одного элемента), то и $\overline{U}$ надо считать пустым. Множество элементов, удовлетворяющих условию $\rho(x_0, x) < R$, где x_0 — фиксированный элемент и R — положительное число, называется открытой сферой с центром x_0 и радиусом R, а в случае неравенства $\rho(x_0, x) \leqslant R$ — замкнутой сферой.

Нетрудно показать, пользуясь непрерывностью $\rho(x_0, x)$ как функции x, что замкнутая сфера есть замкнутое множество в смысле указанного выше определения.

Отметим, что всякое непустое множество U из X есть также метрическое пространство, если для элементов сохранить то же определение $\rho(x, y)$, что и во всем X. Пространство X может состоять и из конечного числа элементов.

Пусть имеются два метрических пространства X и X', и пусть между их элементами можно установить биоднозначное соответствие так, что $\rho(x, y) = \rho(x', y')$, где x и x', y и y' — любые соответствующие элементы X и X'. В этом случае X и X' называются изометричными. С точки зрения абстрактной теории, изометричные пространства не имеет смысла различать.

85. Пополнение метрического пространства. Назовем последовательность x_n элементов X фундаментальной (или сходящейся в себе), если для нее выполнено условие (3). Если X — не полное пространство, то не всякая фундаментальная последовательность имеет предел. Покажем, что в этом случае к пространству можно присоединить новые элементы (иногда их называют „идеальными элементами“) при соответствующем расширении понятия расстояния так, что полученное таким образом метрическое пространство будет уже полным.

Начнем с доказательства леммы:

Лемма. *Если x_n и y_n — две фундаментальные последовательности, то существует предел числовой последовательности* $\rho(x_n, y_n)$. В силу (2_1), $\rho(x_n, y_n) \leqslant \rho(x_n, x_m) + \rho(x_m, y_m) + \rho(y_m, y_n)$, откуда $\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m) \leqslant \rho(x_n, x_m) + \rho(y_m, y_n)$. Переставляя значки m и n и пользуясь (1), получим $\rho(x_m, y_m) - \rho(x_n, y_n) \leqslant \rho(x_n, x_m) + \rho(y_m, y_n)$. Из последних двух неравенств следует:

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m)| \leqslant \rho(x_n, x_m) + \rho(y_m, y_n).$$

При беспредельном возрастании m и n правая часть стремится к нулю, и, следовательно, для числовой последовательности $\rho(x_n, y_n)$ выполнен признак Коши существования предела, что и требовалось доказать.

Распределим все фундаментальные последовательности на классы, а именно, отнесем к одному классу такие фундаментальные последовательности x_n и x'_n, для которых $\rho(x_n, x'_n) \to 0$. Если x_n и x'_n, а также x_n и x''_n входят в один класс, то x'_n и x''_n входят в один класс, ибо из $\rho(x_n, x'_n) \to 0$ и $\rho(x_n, x''_n) \to 0$ следует, в силу (2_1), что $\rho(x'_n, x''_n) \to 0$. Для последовательностей x_n и y_n, входящих в разные классы, предел $\rho(x_n, y_n)$ будет отличным от нуля (положительным). Из (2) следует также, что если последовательность x_n имеет в X предел x_0, то любая другая последовательность x'_n того же класса также сходится и имеет тот же предел x_0. В силу непрерывности расстояния, последовательности, входящие в различные классы, не могут иметь одного и того же предела. Указанные классы фундаментальных последовательностей разобьются, таким образом, на два типа. Опишем сначала классы первого типа. Пусть x_0 — какой-либо элемент X. Мы будем иметь класс последовательностей, имеющих предел, равный x_0. К этому классу принадлежит, например, последовательность x_n, у которой все элементы равны x_0. Для всякого x_0 будет свой класс последовательностей. Классы второго типа состоят из последовательностей x_n, не имеющих предела в X. Если X — полное, то классов второго типа нет. Пусть X — не полное пространство. Построим теперь новое метрическое пространство $\tilde{X}$, за элементы которого примем указанные выше классы фундаментальных последовательностей X. В $\tilde{X}$ надо ввести еще понятие расстояния и проверить справедливость его трех основных свойств. Пусть $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ — два элемента $\tilde{X}$. Возьмем из соответствующих им классов последовательностей две какие-либо последовательности z_n и y_n и определим $\rho(\tilde{x}, \tilde{y})$ формулой

$$\rho(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_{n \to \infty} \rho(x_n, y_n). \tag{4}$$

Покажем, что неотрицательное число $\rho(\tilde{x}, \tilde{y})$ не зависит от выбора x_n и y_n из классов, соответствующих $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$. Пусть x'_n и y'_n — какие-нибудь последовательности из этих классов и $\rho'(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_{n \to \infty} \rho(x'_n, y'_n)$. Нам надо доказать что $\rho'(\tilde{x}, \tilde{y}) = \rho(\tilde{x}, \tilde{y})$. В силу (2_1): $\rho(x_n, y_n) \leqslant \rho(x_n, x'_n) + \rho(x'_n, y'_n) + \rho(y'_n, y_n)$.

Принимая во внимание, что $\rho(x_n, x'_n) \to 0$, $\rho(y'_n, y_n) \to 0$ и переходя в написанном неравенстве к пределу, получим $\rho(\tilde{x}, \tilde{y}) \leqslant \rho'(\tilde{x}, \tilde{y})$. Совершенно аналогично можно получить $\rho'(\tilde{x}, \tilde{y}) \leqslant \rho(\tilde{x}, \tilde{y})$ и тем самым $\rho'(\tilde{x}, \tilde{y}) = \rho(\tilde{x}, \tilde{y})$. Таким образом, формула (4) определяет однозначно $\rho(\tilde{x}, \tilde{y})$. Проверим теперь три основных свойства. Очевидно $\rho(\tilde{x}, \tilde{y}) \geqslant 0$.

1) Пусть $\rho(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$, т. е. $\rho(x_n, y_n) \to 0$. Отсюда следует, что последовательности x_n и y_n из одного класса, т. е. $\tilde{x} = \tilde{y}$.

2) Свойство $\tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \rho(\tilde{y}, \tilde{x})$ непосредственно следует из $\rho(x_n, y_n) = \rho(y_n, x_n)$.

3) Выбираем из классов последовательностей соответствующих $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ и $\tilde{z}$ последовательности x_n, y_n и z_n. Имеем

$$\rho(\tilde{x}, \tilde{z}) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, z_n) \leqslant \lim_{n\to\infty} [\rho(x_n, y_n) + \rho(y_n, z_n)] \leqslant \rho(\tilde{x}, \tilde{y}) + \rho(\tilde{y}, \tilde{z}).$$

Пусть элементу $\tilde{x}$ соответствует класс первого типа и x_0 есть предел последовательностей этого класса. Мы можем отождествить такой элемент $\tilde{x}$ из $\tilde{X}$ с указанным элементом x_0 из X. Элементы $\tilde{x}$, которым соответствуют классы второго типа, являются теми элементами $\tilde{X}$, которые не входили в X. Если $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ — элементы соответствующие классам первого типа, а x_0 и y_0 — отождествленные с ними по предыдущему элементы из X, то в формуле (4) можем положить $x_n = x_0$ и $y_n = y_0$ при всяком n и получим

$$\rho(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_0, y_0) = \rho(x_0, y_0),$$

т. е. для элементов, входящих в X, новое расстояние совпадает с прежним. Если $\tilde{x}$ соответствует классу первого типа (x_0 — соответствующий элемент X), а y — второго типа, то формула (4) дает

$$\rho(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_0, y_n).$$

Покажем еще, что если последовательность x_n входит в класс, определяющий элемент $\tilde{x}$, то $\rho(\tilde{x}, x_n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Мы имеем по определению $\rho(\tilde{x}, x_n) = \lim_{m\to\infty} \rho(x_m, x_n)$. Но, в силу того, что x_n — фундаментальная последовательность имеет место (3) и $\rho(\tilde{x}, x_n) \leqslant \varepsilon$ при $n \geqslant N$, т. е. $\rho(\tilde{x}, x_n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Покажем теперь, что X плотно в $\tilde{X}$, т. е. если $\tilde{x}$ — любой элемент $\tilde{X}$ и ε — любое заданное положительное число, то существует такой элемент x из X, что $\rho(\tilde{x}, x) \leqslant \varepsilon$. Если элементу $\tilde{x}$ соответствует класс первого типа и $\tilde{x}$ отождествлен с элементом x_0 из X, то при любом $\varepsilon > 0$ мы можем положить $x = x_0$, ибо $\rho(\tilde{x}, x_0) = \rho(x_0, x_0) = 0$. Пусть $\tilde{x}$ не входит в X, и ему соответствует фундаментальная последовательность x_n. Фиксируем такое m, что $\rho(x_n, x_m) \leqslant \varepsilon$ при $n \geqslant m$, и покажем, что можем положить $x = x_m$. Действительно, $\rho(\tilde{x}, x_m) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x_m)$ и, в силу $\rho(x_n, x_m) \leqslant \varepsilon$ при $n \geqslant m$, получаем $\rho(\tilde{x}, x_m) \leqslant \varepsilon$.

Докажем теперь, что $\tilde{X}$ есть полное пространство. Пусть $\tilde{x}_n$ есть фундаментальная последовательность в $\tilde{X}$, т. е. $\rho(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m) \leqslant \varepsilon$ при n и $m \geqslant N$. Надо доказать, что в $\tilde{X}$ существует такой элемент $\tilde{x}$, что $\rho(\tilde{x}, \tilde{x}_n) \to 0$ при $n \to \infty$. В силу доказанного выше, при любом n существует такой элемент x_n из X, что $\rho(\tilde{x}_n, x_n) \leqslant \frac{1}{n}$. Нетрудно видеть, что последовательность x_n элементов X суть фундаментальная:

$$\rho(x_n, x_m) \leqslant \rho(x_n, \tilde{x}_n) + \rho(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m) + \rho(\tilde{x}_m, x_m) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \rho(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m).$$

Последовательность x_n входит в некоторый класс, определяющий некоторый элемент $\tilde{x}$ из $\tilde{X}$. Покажем, что $\rho(\tilde{x}, \tilde{x}_n) \to 0$. Это следует из неравенства

$$\rho(\tilde{x}, \tilde{x}_n) \leqslant \rho(\tilde{x}, x_n) + \rho(x_n, \tilde{x}_n) \leqslant \rho(\tilde{x}, x_n) + \frac{1}{n}$$

и того, что $\rho(\tilde{x}, x_n) \to 0$, как это мы видели выше. Полнота $\tilde{X}$ доказана.

Докажем еще теорему об единственности пополнения метрического пространства X.

Теорема. *Пополнение пространства X, при котором X плотно в новом пространстве, единственно с точностью до изометрии.*

Пусть Y — полное метрическое пространство, содержащее X, и в котором X плотно. Нам надо доказать, что Y изометрично $\tilde{X}$. При этом предполагается, конечно, что расстояние между двумя элементами из Y, принадлежащими X, такое же, что и в X. Пусть y — некоторый элемент Y. Поскольку X плотно в Y, существует такая последовательность элементов x_n из X, что $\rho(y, x_n) \to 0$ в Y, и тем самым x_n — фундаментальная последовательность в Y и в X. Этой последовательности соответствует определенный элемент $\tilde{x}$ из $\tilde{X}$. Нетрудно видеть, что $\tilde{x}$ не зависит от выбора x_n, важно лишь, что $\rho(y, x_n) \to 0$. Приведем $\tilde{x}$ в соответствие указанному элементу y из Y. Пусть теперь у нас имеется определенный элемент $\tilde{x}'$ из $\tilde{X}$. Берем какую-нибудь определяющую его последовательность элементов x'_n из X. Она является фундаментальной в полном пространстве Y и тем самым определяет элемент y' из Y. Нетрудно видеть, что y' не зависит от выбора последовательности x'_n, важно лишь, что она определяет $\tilde{x}'$. Приводим y' в соответствие с $\tilde{x}'$. Таким путем, как легко видеть, мы устанавливаем биоднозначное соответствие между элементами Y и $\tilde{X}$. Остается доказать, что $\rho(\tilde{x}, \tilde{x}') = \rho(y, y')$.

Это следует из определения $\rho(\tilde{x}, \tilde{x}')$ в $\tilde{X}$ и непрерывности расстояния в Y:

$$\rho(\tilde{x}, \tilde{x}') = \lim_{n \to \infty} \rho(x_n, x_n') = \rho(y, y').$$

Мы подробно остановились на пополнении метрического пространства, поскольку в приложении теории метрических пространств этот процесс играет существенную роль, и он позволяет ограничиваться рассмотрением полных пространств. Приведем три простых примера.

1. Пусть X — пространство всех вещественных рациональных чисел $x, y, z, \ldots$, причем расстояние определяется формулой $\rho(x, y) = |x - y|$. Очевидно, что $\rho(x, y)$ удовлетворяет всем трем условиям, входящим в определение метрического пространства. Возьмем некоторую фундаментальную последовательность вещественных рациональных чисел x_n. По признаку Коши она обязательно имеет предел, но если этот предел есть иррациональное число, то последовательность x_n в X не имеет предела, и, следовательно, X есть неполное пространство. Его пополнение вводит еще и все иррациональные числа, и пространство $\tilde{X}$ всех вещественных чисел есть уже полное пространство.

2. Рассмотрим пространство C всех вещественных функций $x(t), y(t), z(t), \ldots$, непрерывных на конечном промежутке $[a, b]$, и определим расстояние $\rho(x, y)$ формулой [**14**]:

$$\rho(x, y) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - y(t)|.$$

Нетрудно проверить допустимость такого определения $\rho(x, y)$. Сходимость $\rho(x, x_n) \to 0$ есть в данном случае равномерная сходимость $x_n(t) \to x(t)$ на промежутке $a \leqslant t \leqslant b$, и если $|x_n(t) - x_m(t)| \to 0$ при n и $m \to \infty$, то существует такая непрерывная функция $x(t)$, что $x_n(t) \to x(t)$ равномерно [**I; 144**], т. е. C — пространство полное.

3. Рассмотрим теперь пространство F тех же непрерывных функций на промежутке (a, b), но с другим определением расстояния:

$$\rho(x, y) = \left[\int_a^b [x(t) - y(t)]^2 \, dt \right]^{\frac{1}{2}}. \tag{5}$$

Оно также является допустимым. Возьмем фундаментальную последовательность $\{x_n(t)\}$ из F:

$$\int_a^b \left| x_n(t) - x_m(t) \right|^2 dt \to 0 \text{ при } n \text{ и } m \to \infty.$$

Она имеет предел в смысле метрики (5) [**56**], но предельная функция может быть любой функцией из L_2, поскольку непрерыв-

ные функции повсюду плотны L_2 [60]. Если предельная функция не эквивалентна непрерывной функции, то такая фундаментальная в F последовательность не имеет предела в F, т. е. пространство F неполное. Его пополнение дает функции из L_2, не эквивалентные непрерывным функциям, и превращает F в L_2.

Вместо функции одной переменной мы могли бы рассмотреть множество функций n-переменных $x(t_1, t_2, ..., t_n)$, — непрерывных на ограниченном замкнутом множестве n-мерного пространства.

Отметим еще раз, что при пополнении конкретного метрического пространства важно уметь истолковать конкретный смысл новых элементов, получающихся при пополнении. В последнем примере это функции из L_2, не эквивалентные непрерывным функциям. Отметим еще, что, как мы видели выше, пространство L_2 можно рассмотреть на любом измеримом множестве. Мы рассмотрели случай ограниченного замкнутого множества, поскольку исходили из пространства F непрерывных функций.

Укажем одну теорему, которая имеет место в полных метрических пространствах. В дальнейшем открытую сферу в X с центром x и радиусом r будем обозначать $S(x, r)$ и замкнутую сферу $\overline{S}(x, r)$.

Теорема. *Пусть в полном метрическом пространстве X имеется такая последовательность замкнутых сфер $\overline{S}(x_n, r_n)$ $(n = 1, 2, ...)$, что каждая последующая сфера принадлежит предыдущей и радиусы $r_n \to 0$ при $n \to \infty$. При этом существует точка, принадлежащая всем $\overline{S}(x_n, r_n)$, и такая точка единственна.*

По условию $\overline{S}(x_{n+p}, r_{n+p}) \subset \overline{S}(x_n, r_n)$ $(p > 0)$, и, следовательно, $\rho(x_{n+p}, x_n) \leqslant 2r_n$ при всяком $\rho > 0$, т. е. последовательность x_n фундаментальна, и, в силу полноты X, x_n имеет предел, который обозначим x_0. Возьмем какую-либо фиксированную сферу $\overline{S}(x_n, r_n)$ и покажем, что $x_0 \in \overline{S}(x_n, r_n)$.

Действительно, все элементы последовательности $x_n, x_{n+1}, \ldots$, имеющей x_0 пределом, принадлежат $\overline{S}(x_n, r_n)$ по условию теоремы, и, поскольку $\overline{S}(x_n, r_n)$ есть замкнутое множество, и $x_0 \in \overline{S}(x_n, r_n)$.

Предположим теперь, что существует элемент x_0', принадлежащий всем $\overline{S}(x_n, r_n)$. Докажем, что $x_0' = x_0$. Так как x_0 и x_0' принадлежат всем $\overline{S}(x_n, r_n)$, то $\rho(x_0, x_0') \leqslant \rho(x_0, x_n) + \rho(x_n, x_0') \leqslant 2r_n$. В пределе это неравенство дает $\rho(x_0, x_0') \leqslant 0$, т. е. $\rho(x_0, x_0') = 0$, откуда следует, что x_0' совпадает с x_0. Теорема доказана.

Отметим еще, что *всякое замкнутое множество U полного метрического пространства X есть также полное метрическое пространство* (при этом предполагается, очевидно, что расстояние $\rho(x, y)$ в U равно расстоянию между x и y в X). Сказанное выше непосредственно следует из того, что всякая фундаментальная в U последовательность x_n имеет предел в X, и этот предел должен принадлежать U, поскольку U — замкнутое множество.

86. Операторы и функционалы. Принцип сжатых отображений. Пусть даны два метрических пространства X и X'. Соответствие $x'=Ax$, относящее элементам x из X определенные элементы x' из X', называется оператором, действующим из X в X'. Оператор может быть определен не во всем X. Множество элементов x из X, на которых определен оператор A, называется областью определения A и будет обозначаться нами через $D(A)$. Множество значений Ax будем обозначать через $R(A)$. Это — некторое множество элементов X'. Если $R(A)$ есть все X', то уравнение

$$x'=Ax \tag{6}$$

имеет при всяком x' из X' по крайней мере одно решение. Положим, что A устанавливает биоднозначное соответствие между D и R, т. е. что при различных x из $D(A)$ получаются согласно (6) различные x' из $R(A)$. В этом случае уравнение (6) имеет при всяком x' из $R(A)$ единственное решение из $D(A)$.

Частным, но весьма важным случаем операторов являются функционалы. Так называются операторы в том случае, когда X' есть пространство вещественных чисел при указанном в [**85**] определении расстояния $\rho(x', y')=|x'-y'|$. Иногда берут и пространство всех комплексных чисел при том же определении расстояния.

Приведем один признак однозначной разрешимости уравнения $x-Ax=0$ для того случая, когда X' совпадает с X.

Теорема *(принцип сжатых отображений). Если оператор A отображает полное метрическое пространство X в себя, $D(A)=X$ и для любых x и y из X:*

$$\rho(Ax, Ay)\leqslant\alpha\rho(x, y), \tag{7}$$

где α — число, удовлетворяющее условию $0<\alpha<1$, то уравнение $x=Ax$ имеет одно и только одно решение. Это решение может быть получено как предел последовательности

$$x_2=Ax_1,\ x_3=Ax_2\ x_4=Ax_3,\ \ldots, \tag{8}$$

построенной при любом выборе исходного элемента x_1.

В рассматриваемом случае $D(A)=X$ и $R(A)\subset X$. Мы имеем

$$\rho(x_n, x_{n+1})=\rho(Ax_{n-1}, Ax_n)\leqslant\alpha\rho(x_{n-1}, x_n).$$

Применяя эту же оценку к $\rho(x_{n-1}, x_n)$ и т. д., получим $\rho(x_n, x_{n+1})\leqslant\alpha^{n-1}\rho(x_1, x_2)$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$, откуда следует при $m>n$:

$$\rho(x_n, x_m)\leqslant\rho(x_n, x_{n+1})+\rho(x_{n+1}, x_{n+2})+\ldots+\rho(x_{m-1}, x_m)\leqslant$$

$$\leqslant\alpha^{n-1}(1+\alpha+\ldots+\alpha^{m-n-1})\rho(x_1, x_2)\leqslant\frac{\alpha^{n-1}}{1-\alpha}\rho(x_1, x_2).$$

Принимая во внимание, что $\rho(x_n, x_n)=0$ и $\rho(x_n, x_m)=\rho(x_m, x_n)$, видим, что $\rho(x_n, x_m)\to 0$ при n и $m\to\infty$. В силу полноты X пос-

ледовательность x_n имеет предел, который мы обозначим x_0 ($x_n \Rightarrow x_0$). Покажем, что $Ax_n \Rightarrow Ax_0$:

$$\rho(Ax_n, Ax_0) \leqslant \alpha\rho(x_{n-1}, x_0) \to 0,$$

ибо $\rho(x_{n-1}, x_0) \to 0$. Переходя в равенстве $x_n = Ax_{n-1}$ к пределу, получим $x_0 = Ax_0$. Остается показать, что решение уравнения $x = Ax$ единственно. Пусть x' есть решение указанного уравнения: $x' = Ax'$. Надо доказать, что $x' = x_0$. Имеем $\rho(x_0, x') = \rho(Ax_0, Ax') \leqslant \alpha\rho(x_0 x')$, т. е. $(1-\alpha)\rho(x_0, x') = 0$, откуда $\rho(x_0, x') = 0$, и, следовательно, x' совпадает с x_0. Теорема доказана.

Замечание. Пусть U — некоторое замкнутое множество из X. Если $D(A)$ есть U, $R(A) \subset U$ и выполнено условие (7) $(0 < \alpha < 1)$, то теорема имеет место, причем $x_0 \in U$, и всякое x', удовлетворяющее уравнению $x' = Ax'$, совпадает с x_0. При этом считается, что $x' \in U$, ибо A определено в U.

87. Примеры. Прежде чем переходить к примерам применения принципа сжатых отображений, приведем примеры полных метрических пространств.

1. Пространство R_n всевозможных последовательностей n вещественных чисел. Расстояние между элементами $x(a_1, a_2, ..., a_n)$ и $y(b_1, b_2, ..., b_n)$ из R_n определяется следующим образом:

$$\rho(x, y) = \left[\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k)^2\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{9}$$

Можно определить и комплексное пространство R_n последовательностей n комплексных чисел. В формуле для расстояния (9) надо заменить $(a_k - b_k)^2$ на $|a_k - b_k|^2$. Это замечание относится и к дальнейшим примерам пространств последовательностей или функций.

2. Пространство m бесконечных последовательностей чисел $x(a_1, a_2, ...)$, ограниченных в совокупности, т. е. для каждого элемента x из m существует такое положительное число m_x, что $|a_i| \leqslant m_x$ при всяком i.

Формула для $\rho(x, y)$:

$$\rho(x, y) = \sup_k |a_k - b_k|. \tag{10}$$

Сходимость в m равносильна покоординатной сходимости, равномерной относительно номера составляющей.

3. Пространство s всех бесконечных последовательностей чисел, причем

$$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k - b_k|}{2^k(1 + |a_k - b_k|)}. \tag{11}$$

Допустимость такого определения $\rho(x, y)$ может быть проверена так же, как это мы сделаем ниже для аналогичного функционального пространства S.

В пространстве s, как и в R_n, сходимость равносильна покоординатной сходимости.

4. Пространство l_p $(p \geqslant 1)$ бесконечных последовательностей комплексных чисел a_k таких, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p < +\infty, \tag{12}$$

причем

$$\rho(x, y)=\left[\sum_{k=1}^{\infty}|a_k-b_k|^p\right]^{\frac{1}{p}}. \tag{13}$$

Правило треугольника получается из неравенства Минковского для сумм при $p \geq 1$ [62] и очевидно при $p=1$.

5. Пространство C функций $\varphi(x)$, где x — точка n-мерного пространства R_n, непрерывных на некотором ограниченном замкнутом множестве $\mathfrak{E}$, причем

$$\rho(\varphi, \psi)=\max_{x \in \mathfrak{E}}|\varphi(x)-\psi(x)|. \tag{14}$$

6. Пространство M функций $\varphi(x)$, определенных на некотором измеримом (по Лебегу) множестве $\mathfrak{E}$ из R_n. Эквивалентные функции отождествляются, и всякая функция из M ограничена (или эквивалентна ограниченной).

Определение расстояния:

$$\rho(\varphi, \psi)=\inf_{m(\mathfrak{E}_0)=0} \sup_{\mathfrak{E}-\mathfrak{E}_0}|\varphi(x)-\psi(x)|. \tag{15}$$

Смысл этого определения следующий: исключаем из $\mathfrak{E}$ какое-либо множество $\mathfrak{E}_0$ меры нуль, определяем точную верхнюю границу $|\varphi(x)-\psi(x)|$ на оставшемся множестве $\mathfrak{E}-\mathfrak{E}_0$, выбираем указанное множество $\mathfrak{E}_0$ всеми возможными способами и определяем точную нижнюю границу полученного множества неотрицательных точных верхних границ $\sup_{\mathfrak{E}-\mathfrak{E}_0}|\varphi(x)-\psi(x)|$. Иногда вместо (15) пишут

$$\rho(\varphi, \psi)=v\,rai\max|\varphi(x)-\psi(x)|. \tag{16}$$

Если $\mathfrak{E}$ — ограниченное замкнутое множество, то C — часть M и $\rho(\varphi, \psi)$ для D то же, что и для M, т. е. C изометрично части M.

7. Пространство S всех функций $\varphi(x)$, измеримых на измеримом точечном множестве $\mathfrak{E}$ конечной меры из R_n, причем

$$\rho(\varphi, \psi)=\int_{\mathfrak{E}} \frac{|\varphi(x)-\psi(x)|}{1+|\varphi(x)-\psi(x)|}\,dx. \tag{17}$$

Здесь и в дальнейшем будем подразумевать меру и интеграл Лебега в соответствующем R_n.

8. Пространство $L_p(\mathfrak{E})$ $(p \geqslant 1)$ функций $\varphi(x)$, измеримых на измеримом множестве $\mathfrak{E}$ и таких, что

$$\int_{\mathfrak{E}}|\varphi(x)|^p\,dx<+\infty,$$

причем

$$\rho(\varphi, \psi)=\left[\int_{\mathfrak{E}}|\varphi(x)-\psi(x)|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}}. \tag{18}$$

Имеют место указанные в аксиомах свойства $\rho(\varphi, \psi)$ [62].

9. Пространство $V[a, b]$ функций $\varphi(x)$ ограниченной вариации на замкнутом промежутке $a \leqslant x \leqslant b$, непрерывных справа во внутренних точках этого промежутка и равных нулю при $x=a$, причем

$$\rho(\varphi, \psi)=\overset{b}{\underset{a}{V}}|\varphi(x)-\psi(x)|. \tag{19}$$

Если отбросить требование $\varphi(a)=0$, то $\rho(\varphi, \psi)$ определяется следующим образом:

$$\rho(\varphi, \psi)=|\varphi(a)-\psi(a)|+\overset{b}{\underset{a}{V}}|\varphi(x)-\psi(x)|. \tag{20}$$

При этом пространство расширяется, и первоначальное пространство изометрично части расширенного.

Все указанные выше пространства полные.

Для L_p и l_p полнота была доказана. В других случаях доказательство полноты не представляет труда, и мы его не будем приводить.

Остановимся подробнее на пространстве S. Принимая во внимание, что $\omega(t)=\dfrac{t}{1+t}=1-\dfrac{1}{1+t}$ возрастает при $t\geqslant 0$, мы можем написать

$$\frac{|t+\tau|}{1+|t+\tau|}\leqslant\frac{|t|+|\tau|}{1+|t|+|\tau|}\leqslant\frac{|t|}{1+|t|}+\frac{|\tau|}{1+|\tau|},$$

и отсюда следует аксиома треугольника для S. Покажем теперь, что сходимость в S равносильна сходимости по мере.

Пусть $\varphi_n(x)\to\varphi(x)$ по мере на $\mathfrak{E}$. Докажем, что $\rho(\varphi, \varphi_n)\to 0$. Введем множества $\mathfrak{E}_n(\delta)=\mathfrak{E}[|\varphi(x)-\varphi_n(x)|\geqslant\delta]$. По условию $m[\mathfrak{E}_n(\delta)]\to 0$ при $n\to\infty$ и любом фиксированном $\delta>0$. Мы имеем

$$\rho(\varphi, \varphi_n)=\int\limits_{\mathfrak{E}}\frac{|\varphi(x)-\varphi_n(x)|}{1+|\varphi(x)-\varphi_n(x)|}\,dx\leqslant\int\limits_{\mathfrak{E}_n(\delta)}1\cdot dx+$$

$$+\int\limits_{\mathfrak{E}-\mathfrak{E}_n(\delta)}\frac{|\varphi(x)-\varphi_n(x)|}{1+|\varphi(x)-\varphi_n(x)|}\,dx,$$

откуда, принимая во внимание возрастание функции $\omega(t)$ и тот факт, что $|\varphi(x)-\varphi_n(x)|<\delta$ на множестве $\mathfrak{E}-\mathfrak{E}_n(\delta)$, получим

$$\rho(\varphi, \varphi_n)\leqslant m[\mathfrak{E}_n(\delta)]+\frac{\delta}{1+\delta}\,m(\mathfrak{E}).$$

Пусть задано положительное число ε. Можно фиксировать $\delta>0$ так, чтобы иметь $\dfrac{\delta}{1+\delta}\,m(\mathfrak{E})\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$. Далее существует такое N, что $m[\mathfrak{E}_n(\delta)]\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$ при $n\geqslant N$, и, следовательно, $\rho(\varphi, \varphi_n)\leqslant\varepsilon$ при $n\geqslant N$, т. е. $\rho(\varphi, \varphi_n)\to 0$. Положим теперь, что $\rho(\varphi, \varphi_n)\to 0$, и докажем, что $\varphi_n(x)\to\varphi(x)$ по мере на $\mathfrak{E}$. Мы имеем, в силу сказанного выше относительно $\omega(t)$, что $|\varphi(x)-\varphi_n(x)|:[1+|\varphi(x)-\varphi_n(x)|]\geqslant\delta:(1+\delta)$, если $x\in\mathfrak{E}_n(\delta)$.

Таким образом,

$$\rho(\varphi, \varphi_n)\geqslant\int\limits_{\mathfrak{E}_n(\delta)}\frac{\delta}{1+\delta}\,dx=\frac{\delta}{1+\delta}\,m\mathfrak{E}_n(\delta),$$

где $\delta>0$ считаем фиксированным. По условию $\rho(\varphi, \varphi_n)\to 0$, и из последнего неравенства следует, что $m[\mathfrak{E}_n(\delta)]\to 0$, что и требовалось доказать.

Пользуясь теоремой из [44] и доказанным выше, можем утверждать, что если $\rho(\varphi, \varphi_n)\to 0$ в S, то существует такая подпоследовательность $\varphi_{n_k}(x)$, что $\varphi_{n_k}(x)\to\varphi(x)$ почти везде на $\mathfrak{E}$. Полнота S может быть доказана совершенно так же, как и для L_2.

При построении функциональных пространств L_p, M и S мы могли бы применять меру и интеграл Лебега-Стилтьеса.

88. Примеры применения принципа сжатых отображений.

1. Рассмотрим систему n-уравнений с n неизвестными:

$$\xi_i = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\xi_k + b_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{21}$$

где λ — численный параметр. Будем рассматривать правые части, как оператор Ax из R_n в R_n, примененный к элементу $x(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ и действующий во всем R_n. Из неравенства Коши получим

$$\rho(Ax, Ay) \leqslant |\lambda| \left[\sum_{i,k=1}^{n} |a_{ik}|^2\right]^{\frac{1}{2}} \rho(x, y).$$

Таким образом, принцип сжатых отображений будет применим в R_n, если

$$|\lambda| < \left[\sum_{i,k=1}^{n} |a_{ik}|^2\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

2. Рассмотрим бесконечную систему уравнений

$$\xi_i = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\xi_k + b_i \quad (i = 1, 2, 3. \ldots), \tag{22}$$

причем мы считаем, что последовательность $(b_1, b_2. \ldots)$ есть элемент m. Если

$$\sup_i \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}| = c$$

есть конечное положительное число, то правые части (22) дают оператор A из m в m, определенный во всем m, и принцип сжатых отображений применим, если $|\lambda| c < 1$. Если $(b_1, b_2, \ldots,)$ есть элемент l_2 и

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} |a_{ik}|^2 = d < +\infty,$$

то правые части (22) дают оператор из l_2 в l_2, определенный во всем l_2, и принцип сжатых отображений применим, если $|\lambda| d < 1$. Отметим, что единственность решения имеет место в указанных пространствах, но могут существовать решения, не принадлежащие этим пространствам.

3. Рассмотрим интегральное уравнение (одномерный случай)

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t)\,dt + f(x), \tag{23}$$

где $[a, b]$ — конечный промежуток и $K(x, t)$ непрерывна в квадрате $Q(a \leqslant x \leqslant b;$ $a \leqslant t \leqslant b)$. Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то правая часть (23) есть опера-

тор из $C[a, b]$ в $C[a, b]$, определенный во всем C, и принцип сжатых отображений применим к уравнению (23), если

$$|\lambda| \max_{a \leqslant x \leqslant b} \int_a^b |K(x, t)|\, dt < 1.$$

Если $K(x, t) \in L_2$ на Q и $f(x) \in L_2$ на $[a, b]$ (в данном случае промежуток может быть и бесконечным), то правая часть есть оператор из $L_2[a, b]$ в $L_2[a, b]$, определенный на всем $L_2[a, b]$, и принцип сжатых отображений применим к уравнению (23), если

$$|\lambda| \left[\int_a^b \int_a^b |K(x, t)|^2\, dx dt \right]^{\frac{1}{2}} < 1$$

Сказанное выше справедливо и для многомерных интегральных уравнений.

4. Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение:

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K[x, t, \varphi(t)]\, dt, \tag{24}$$

где $[a, b]$ — конечный промежуток, $K(x, t, z)$ — непрерывная функция своих аргументов при $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant t \leqslant b$ и $|z| < C$, где C — данное положительное число. При любом выборе функции $\varphi(t)$, непрерывной при $a \leqslant t \leqslant b$ и удовлетворяющей условию $|\varphi(t)| \leqslant C$, $K[x, t, \varphi(t)]$ — непрерывная функция (x, t) в указанном выше квадрате Q. Пусть $|K(x, t, z)| \leqslant d$ при $(x, t) \in Q$ и $|z| \leqslant C$. Если $|\lambda|\, d(b-a) \leqslant C$, то правая часть (24) есть оператор $A\varphi$ в $C[a, b]$, у которого $D(A)$ есть сфера $\rho(0, \varphi) \leqslant C$, где 0 есть непрерывная функция, равная нулю на $[a, b]$, и $R(A)$ принадлежит этой же сфере. Отметим, что неравенство $\rho(0, \varphi) \leqslant C$ можно записать в виде $|\varphi(x)| \leqslant C$. Положим, кроме того, что ядро $K(x, t, z)$ по третьему аргументу удовлетворяет условию Липшица, т. е.

$$|K(x, t, z_1) - K(x, t, z_2)| \leqslant N |z_1 - z_2|,$$

если $(x, t) \in Q$, а $|z_1|$ и $|z_2| \leqslant C$. При этом

$$\rho(A\varphi, A\psi) \leqslant |\lambda| N (b-a) \rho(\varphi, \psi),$$

и, следовательно, при соблюдении условий

$$|\lambda|\, d(b-a) \leqslant C \quad \text{и} \quad |\lambda| N (b-a) < 1$$

к уравнению (24) применим принцип сжатых отображений в указанной выше сфере. Это уравнение имеет единственное решение в указанной сфере, которое может быть построено по методу последовательных приближений при любом выборе начального приближения $\varphi_1(x)$ из этой сферы. Рассмотренный метод дает равномерную сходимость приближений к решению на промежутке $[a, b]$.

5. Пусть D — область трехмерного пространства, ограниченная поверхностью Ляпунова S. Рассмотрим краевую задачу для эллиптического уравнения:

$$\Delta u - \lambda f(x, y, z, u) = 0 \quad \text{внутри} \quad (D), \tag{25}$$

$$u|_S = 0, \tag{26}$$

где Δ — оператор Лапласа. Мы считаем, что $f(x, y, z, u)$ непрерывна в четырехмерной замкнутой области пространства (x, y, z, u), соответствующей

изменению (x, y, z) в замкнутой области D при $|u| \leqslant C$, и имеет непрерывные производные по своим аргументам внутри этой области, причем эти производные непрерывны вплоть до ее границы. Положим далее, что $|f(x, y, z, u)| \leqslant d$ при $(x, y, z) \in D$ и $|u| \leqslant C$ и

$$|f(x, y, z, u_1) - f(x, y, z, u_2)| \leqslant N|u_1 - u_2|$$

при указанных условиях ($|u_1|$ и $|u_2| \leqslant C$). Пусть $G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$ — функция Грина оператора Лапласа для области D при предельном условии (26) [**IV**; **220**]. Введем точки $P(x, y, z)$ и $Q(\xi, \eta, \zeta)$ из D. Решение задачи (25) и (26) равносильно решению интегрального уравнения

$$u(P) = \lambda \int_D G(P; Q) f[Q; u(Q)] d\tau_Q \tag{27}$$

в пространстве $C(D)$ функций $u(Q)$, непрерывных в $\bar{D}$ [**IV, 224**]. Известно, что $G(P; Q) \geqslant 0$ в D [**IV, 221**], и существует конечный

$$\max_{P \in \bar{D}} \int_D G(P; Q)\, d\tau_Q = G_0.$$

Если $|\lambda| G_0 d \leqslant c$, то правая часть (27) есть оператор в $C(\bar{D})$, у которого $D(A)$ есть сфера $\rho(0, u) \leqslant c$ в $C(\bar{D})$, (т. е. $|u(P)| \leqslant c$ в $\bar{D}$) и $R(A)$ принадлежит этой сфере. Принцип сжатых отображений применим к уравнению (27), если $|\lambda| NG_0 < 1$. Таким образом, при выполнении условий

$$|\lambda| G_0 d \leqslant c \qquad \text{и} \qquad |\lambda| NG_0 < 1$$

задачи (25) и (26) имеет в сфере $|u(P)| \leqslant c$ одно единственное решение. Оно может быть получено по методу последовательных приближений, примененному к (27) при любом выборе начального приближения из указанной сферы, и приближения сходятся равномерно к решению в $\bar{D}$.

89. Компактность. Мы вводили раньше понятие компактности для одного частного случая [**IV; 36**]. Сейчас мы рассмотрим это понятие для общего метрического пространства X. Множество U элементов X называется компактным в пространстве X или просто компактным, если любая последовательность элементов x_n из U содержит сходящуюся подпоследовательность. Если, кроме того, U замкнуто, то оно называется компактным в себе.

Нетрудно видеть, что ограниченность множества U есть необходимое условие его компактности. Действительно, если U неограничено, то существует такая последовательность x_n из U, что $\rho(a, x_n) \to +\infty$, где a — какой-либо фиксированный элемент. Из этой последовательности x_n нельзя выделить сходящейся подпоследовательности, ибо всякая сходящаяся последовательность ограничена. Ограниченность U является и достаточным условием компактности в R_n [**IV; 15**]. В общем случае метрического пространства это не имеет места, и мы установим сейчас необходимое и достаточное условие компактности.

Введем сначала одно новое понятие. Будем говорить, что множество U имеет конечную ε сеть, где ε — заданное положи-

тельное число, если существует конечное множество x_k ($k = 1, 2, \ldots, l$) элементов X таких, что для любого x из U найдется такой элемент x_s из указанных элементов, что $\rho(x, x_s) \leqslant \varepsilon$. Отметим, что элементы x_k могут и не принадлежать U.

Теорема. *Для того чтобы множество U элементов полного метрического пространства было компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно имело при любом $\varepsilon > 0$ конечную ε-сеть.*

Необходимость. Предположим, что при некотором $\varepsilon_0 > 0$ для U нет конечной ε_0-сети, и покажем, что U не компактно. Возьмем некоторый элемент $x_1 \in U$. Можно утверждать, что найдется такой элемент $x_2 \in U$, что $\rho(x_1, x_2) > \varepsilon_0$. Действительно, в противном случае мы имели бы $\rho(x_1, x) \leqslant \varepsilon_0$ для всякого $x \in U$, и один элемент x_1 давал бы ε_0-сеть для U. Далее найдется такой элемент x_3, что $\rho(x_i, x_3) > \varepsilon_0$ ($i = 1, 2$), ибо в противном случае элементы x_1 и x_2 давали бы ε_0-сеть для U и т. д.

Таким образом, получим бесконечную последовательность элементов x_n из U такую, что $\rho(x_p, x_q) > \varepsilon_0$ при всех $p \neq q$. Для любой подпоследовательности x_{n_k} ($k = 1, 2, \ldots$) будем также иметь $\rho(x_{n_k}, x_{n_l}) > \varepsilon_0$ при $n_k \neq n_l$, и, следовательно, никакая подпоследовательность для x_n не может быть сходящейся, т. е. U не компактно.

Достаточность. Предполсжим, что U имеет конечную ε-сеть при любом $\varepsilon > 0$, и пусть x_n — какая-либо последовательность элементов U.

Нам надо доказать, что из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Если при бесконечном числе значений n элементы x_n совпадают с одним и тем же элементом y, то подпоследовательность $y, y, y, \ldots$ есть сходящаяся подпоследовательность. Положим, что указанное обстоятельство не имеет места. Тогда, оставляя в последовательности x_n из группы равных элементов только один (например, элемент с наименьшим номером), мы получим последовательность различных элементов. Можно считать, что уже основная последовательность обладает этим свойством. Фиксируем какое-нибудь положительное число ε. В силу существования для U конечной $\frac{\varepsilon}{2}$ сети существует конечное число замкнутых сфер радиуса $\frac{\varepsilon}{2}$ таких, что все элементы U, тем самым и все x_n, принадлежат этим сферам. По крайней мере одной из них принадлежит бесчисленное множество x_n.

Обозначим одну из таких сфер $S_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$. Далее существует конечное число сфер радиуса $\frac{\varepsilon}{2^2}$, которым принадлежат все x_n из $S_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$. Возьмем из них ту сферу $S_2\left(\frac{\varepsilon}{2^2}\right)$, которая содержит бесчисленное множество упомянутых элементов. Точно так же существует сфера $S_3\left(\frac{\varepsilon}{2^3}\right)$ радиуса $\frac{\varepsilon}{2^3}$, содержащая бесчисленное множество элементов

x_n, принадлежащих одновременно $S_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ и $S_2\left(\frac{\varepsilon}{2^2}\right)$. Продолжая так и дальше, получим бесконечную последовательность замкнутых сфер $S_k\left(\frac{\varepsilon}{2^k}\right)$ таких, что радиус $S_k\left(\frac{\varepsilon}{2^k}\right)$ есть $\frac{\varepsilon}{2^k}$, и $S_k\left(\frac{\varepsilon}{2^k}\right)$ содержит бесчисленное множество элементов x_n, принадлежащих одновременно всем сферам $S_m\left(\frac{\varepsilon}{2^m}\right)$ при $m<k$. Из каждой из указанных сфер $S_k\left(\frac{\varepsilon}{2^k}\right)$ мы берем по одному элементу x_{n_k}, причем можем считать $n_l>n_k$ при $l>k$. Таким путем у нас получается бесконечная подпоследовательность x_{n_k} последовательности x_n. Принимая во внимание, что для любых двух элементов x и y, принадлежащих одной и той же сфере радиуса r, мы имеем, в силу аксиомы треугольника, $\rho(x, y)\leqslant 2r$, можем утверждать, что

$$\rho(x_{n_l}, x_{n_k})\leqslant\frac{\varepsilon}{2^{k-1}} \text{ при } n_l>n_k.$$

Отсюда, в силу полноты пространства, следует, что x_{n_k} есть сходящаяся последовательность. Теорема доказана.

Замечание 1. Для компактности достаточно наличие не конечной, но лишь компактной ε-сети при любом $\varepsilon>0$. Это значит, что при любом $\varepsilon>0$ существуют такие сферы радиуса ε, содержащие все элементы U, центры которых образуют компактное множество. Обозначим это множество центров через U_1. Для U_1 по доказанной теореме (необходимость) существует конечная ε-сеть, и из аксиомы треугольника непосредственно следует, что эта сеть будет конечной 2ε сетью для U, откуда, в силу произвольности ε и доказанной теоремы (достаточность), и следует, что U — компактное множество.

Замечание 2. Отметим, что U может совпадать с X, так что можно говорить и о компактности всего пространства X. Пользуясь непрерывностью расстояния, легко доказать, что всякое компактное пространство есть полное пространство. Тем самым всякое компактное в себе множество U элементов X есть полное метрическое пространство.

90. Компактность в C. Пусть C — пространство функций, непрерывных на конечном промежутке $[a, b]$, и U — некоторое множество элементов C. Мы видели, что ограниченность и равностепенная непрерывность функций, входящих в U, есть достаточные условия компактности U [IV; **16**]. Докажем, что эти условия и необходимы. Пусть U компактно. По доказанной теореме, при любом заданном $\varepsilon>0$ существует конечное число функций $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t), \ldots, \varphi_p(t)$ из C таких, что для любой функции $\varphi(t)$ из U имеем $|\varphi(t)-\varphi_s(t)|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}$ при $a\leqslant t\leqslant b$,

где $\varphi_s(t)$ — одна из указанных выше функций. Для всех этих функций, поскольку их конечное число, существует такое положительное η, что

$$|\varphi_k(t+h)-\varphi_k(t)|\leqslant\frac{\varepsilon}{3} \quad \text{при } |h|\leqslant\eta\ (k=1, 2, \ldots, p),$$
$$(t \text{ и } t+h\in[a, b])$$

причем η зависит только от ε.

Отсюда получаем

$$|\varphi(t+h)-\varphi(t)|\leqslant|\varphi(t+h)-\varphi_s(t+h)|+$$
$$+|\varphi_s(t+h)-\varphi_s(t)|+|\varphi_s(t)-\varphi(t)|.$$

При $|h|\leqslant\eta$ все слагаемые правой части $\leqslant\frac{\varepsilon}{3}$, и, следовательно, $|\varphi(t+h)-\varphi(t)|\leqslant\varepsilon$ при $|h|\leqslant\eta$, и равностепенная непрерывность функций, входящих в U, доказана. Их ограниченность непосредственно следует из того, что ограниченность U есть необходимое условие компактности [**89**]. Указанный критерий компактности совершенно так же доказывается для функций многих переменных, определенных на конечной замкнутой области из R_n. Если функции определены на ограниченном замкнутом множестве, то доказательство в существенном то же.

91. Компактность в L_p. Рассмотрим пространство L_p функций $\varphi(x, y)$ на некотором измеримом ограниченном множестве $\mathfrak{E}$ плоскости (x, y). В дальнейшем мы будем считать, что все эти функции продолжены нулем во вне $\mathfrak{E}$ и что интегрирование производится по всей плоскости. Фактически интегралы будут сводиться к интегралам по ограниченным измеримым множествам.

Теорема. *Для компактности множества U элементов L_p необходимо и достаточно, чтобы все функции $\varphi(x, y)$ из U удовлетворяли следующим двум условиям:*

1. Существует такое $C>0$, что

$$\|\varphi\|=\left[\int\limits_{\mathfrak{E}}|\varphi(x, y)|^p\,dxdy\right]^{\frac{1}{p}}\leqslant C \text{ (ограниченность)}, \tag{28}$$

где $\|\varphi\|$ — обозначение левой части неравенства (28). Эта величина называется нормой $\varphi(x, y)$ в L_p на $\mathfrak{E}$ [**62**].

2. При любом заданном $\varepsilon>0$ существует $\eta>0$, одно и то же для всех $\varphi(x, y)$ из U, такое, что

$$\|\delta_{hk}\varphi\|=\left[\int|\varphi(x+h, y+k)-\varphi(x, y)|^p dxdy\right]^{\frac{1}{p}}\leqslant\varepsilon$$
$$\text{при } \sqrt{h^2+k^2}\leqslant\eta. \tag{29}$$

Мы знаем, что для всякой фиксированной функции из L_p при заданном $\varepsilon > 0$ существует $\eta > 0$ такое, что имеет место (29) (непрерывность в среднем) [**70**]. Это же очевидно имеет место и для конечного числа функций $\varphi_k(x, y)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ из L_p. Достаточно взять наименьшее из η, соответствующих каждой $\varphi_k(x, y)$. Свойство (29), которое должно иметь место для всех $\varphi(x, y)$ из U, можно назвать равностепенной непрерывностью в среднем всех функций из U. Отметим еще, что $\varphi(x+h, y+k)$ — измеримая функция и $\varphi(x+h, y+k) - \varphi(x, y) = 0$ вне некоторого ограниченного измеримого множества.

Необходимость указанных условий доказывается совершенно так же, как и для C. Только везде абсолютное значение разности $\varphi - \psi$ надо заменить на $\|\varphi - \psi\| = \rho(\varphi, \psi)$ в L_p. Действительно, ограниченность (28), которую можно записать в виде $\rho(0, \varphi) \leqslant C$, как мы знаем, необходима для компактности. Далее из компактности следует существование конечной $\frac{\varepsilon}{3}$ сети, т. е. конечного числа таких функций $\psi_k(x, y)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ из L_p, что для любой $\varphi(x, y) \in U$ найдется такая $\psi_s(x, y)$, что $\|\varphi - \psi_s\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Для всех $\psi_k(x, y)$ существует $\eta > 0$ такое, что выполняется условие

$$\|\delta_{h,k}\,\psi_s\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{при } \sqrt{h^2+k^2} \leqslant \eta. \tag{30}$$

Далее пишем

$$|\varphi(x+h, y+k) - \varphi(x, y)| \leqslant |\varphi(x+h, y+k) - \varphi_s(x+h, y+k)| + \\ + |\varphi_s(x+h, y+k) - \varphi_s(x, y)| + |\varphi_s(x, y) - \varphi(x, y)|$$

и, применяя при $p > 1$ неравенство Минковского, получаем (29), в силу (30) и $\|\varphi - \psi_s\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. При $p = 1$ (29) получается непосредственно.

Будем теперь доказывать достаточность условий (28) и (29). Обозначим через $\varphi_\rho(x, y)$ среднюю функцию для $\varphi(x, y)$ [**71**]. Мы имели формулу (178) из [**71**]. При любом $p \geqslant 1$ она имеет вид

$$\|\varphi - \varphi_\rho\|^p \leqslant \frac{C_1}{\rho^2} \int\limits_{u^2+v^2 \leqslant \rho^2} \left[\int |\varphi(\xi, \eta) - \varphi(\xi + u, \eta + v)|^p d\xi d\eta \right] du dv, \tag{31}$$

где C_1 — постоянная. В силу условия (29) при любом заданном $\varepsilon > 0$ существует $\eta > 0$, одно и то же для всех функций $\varphi(x, y) \in U$, такое, что

$$\int |\varphi(\xi, \eta) - \varphi(\xi + u, \eta + v)|^p \, d\xi d\eta \leqslant \frac{\varepsilon^p}{C_1 \pi} \quad \text{при } u^2 + v^2 \leqslant \eta^2,$$

и неравенство (31) дает нам для любой $\varphi(x, y) \in U$:

$$\|\varphi - \varphi_\rho\| \leqslant \varepsilon \quad \text{при } \rho \leqslant \eta. \tag{32}$$

Норма слева берется по всей плоскости $\mathfrak{E}_\infty$ (фактически по ограниченному множеству). Тем более $\|\varphi - \varphi_\rho\|_{\mathfrak{E}} \leqslant \varepsilon$ при $\rho \leqslant \eta$. Фиксируя $\rho \leqslant \eta$, мы можем утверждать, что функции $\varphi_\rho(x, y)$ образуют ε-сеть для множества U функций $\varphi(x, y)$. Пусть $\Delta\ (a \leqslant x \leqslant b;\ c \leqslant y \leqslant d)$ — промежуток, содержащий $\mathfrak{E}$. В силу условия (28) и теоремы 3 из [**71**] можно утверждать, что множество $\varphi_\rho(x, y)$ компактно в C на Δ и, тем более, компактно в L_p на $\mathfrak{E}$. Таким образом, функции $\varphi_\rho(x, y)$ образуют компактную ε сеть для U и, в силу произвольности ε, можно утверждать, что множество U компактно. Достаточность (28) и (29) доказана.

Рассмотрим теперь тот случай, когда $\mathfrak{E}$ есть полная плоскость $\mathfrak{E}_\infty$. Предыдущее доказательство уже теряет силу, ибо множество функций $\varphi_\rho(x, y)$ может оказаться некомпактным. Необходимость условий (28) и (29) для компактности доказывается, как и выше. Но эти условия недостаточны. К ним надо добавить еще одно условие, а именно: для любого заданного $\varepsilon > 0$ существует такое положительное N, одно и то же для всех функций $\varphi(x, y)$ из U, что

$$\int\limits_{\mathfrak{E}_\infty - \Delta_N} |\varphi(x, y)|^p\, dx\, dy \leqslant \varepsilon^p, \tag{33}$$

где Δ_m есть промежуток $(-m \leqslant x \leqslant m;\ -m \leqslant y \leqslant m)$. Отметим, что если условие (33) выполнено для некоторого N, то оно сохраняется и при увеличении N.

Докажем необходимость условия (33). Если множество U компактно, то для него существует конечная $\frac{\varepsilon}{2}$ сеть функций $\varphi_k(x, y)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Для каждой из этих функций выполняется условие (33) и ввиду того, что их конечное число, при любом заданном $\varepsilon > 0$ существует такое N, что

$$\int\limits_{\mathfrak{E}_\infty - \Delta_N} |\varphi_k(x, y)|^p\, dx\, dy \leqslant \frac{\varepsilon^p}{2^p} (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{34}$$

Возьмем какую-либо $\varphi(x, y) \in U$. Найдется такая функция $\varphi_s(x, y)$, что $\|\varphi - \varphi_s\|_{\mathfrak{E}_\infty} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Из неравенства

$$\|\varphi\|_{\mathfrak{E}_\infty - \Delta_N} \leqslant \|\varphi - \varphi_s\|_{\mathfrak{E}_\infty - \Delta_N} + \|\varphi_s\|_{\mathfrak{E}_\infty - \Delta_N},$$

неравенства (34) и $\|\varphi - \varphi_s\|_{\mathfrak{E}_\infty - \Delta_N} \leqslant \|\varphi - \varphi_s\|_{\mathfrak{E}_\infty} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ следует

$$\|\varphi\|_{\mathfrak{E}_\infty - \Delta_N} = \left[\int\limits_{\mathfrak{E}_\infty - \Delta_N} |\varphi(x, y)|^p\, dx\, dy\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что и доказывает (33) для любой $\varphi(x, y) \in U$.

Докажем теперь достаточность условий (28), (29) и (33). Пусть для функций $\varphi(x, y) \in U$ эти условия выполнены и $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y), \ldots$ — любая последовательность функций из U. Надо доказать, что из нее можно выбрать подпоследовательность, которая сходится в L_p на $\mathfrak{E}_\infty$. Из (28) и (29) следует, что можно выбрать подпоследовательность $\varphi_{n_1^{(1)}}(x, y)$, $\varphi_{n_2^{(1)}}(x, y), \ldots$, которая сходится в L_p на Δ_1. Из этой последней можно выбрать новую подпоследовательность $\varphi_{n_1^{(2)}}(x, y)$, $\varphi_{n_2^{(2)}}(x, y), \ldots$, которая сходится в L_p на Δ_2, и т. д. Составим подпоследовательность

$$\varphi_{n_1^{(1)}}(x, y),\ \varphi_{n_2^{(2)}}(x, y),\ \varphi_{n_3^{(3)}}(x, y), \ldots, \tag{35}$$

которая является подпоследовательностью для основной последовательности $\varphi_k(x, y)$. Если m — любое целое положительное число, то все члены последовательности (35), начиная с $\varphi_{n_m^{(m)}}(x, y)$ принадлежат той последовательности $\varphi_{n_1^{(m)}}(x, y)$, $\varphi_{n_2^{(m)}}(x, y), \ldots$, которая сходится в L_p на Δ_m, т. е. последовательность (35) сходится в L_p на любом конечном промежутке Δ_m $(m = 1, 2, \ldots)$. Докажем, что она сходится в L_p и на $\mathfrak{E}_\infty$. Рассмотрим интеграл:

$$\| \varphi_{n_q^{(q)}} - \varphi_{n_r^{(r)}} \|^p_{\mathfrak{E}_\infty} = \int\limits_{\Delta_m} | \varphi_{n_q^{(q)}}(x, y) - \varphi_{n_r^{(r)}}(x, y) |^p \, dx\, dy +$$

$$+ \int\limits_{\mathfrak{E}_\infty - \Delta_m} | \varphi_{n_q^{(q)}}(x, y) - \varphi_{n_r^{(r)}}(x, y) |^p \, dx\, dy.$$

Принимая во внимание очевидное неравенство $|x + y|^p \leqslant 2^p |x|^p + 2^p |y|^p$, получим

$$\| \varphi_{n_q^{(q)}} - \varphi_{n_r^{(r)}} \|^p_{\mathfrak{E}_\infty} \leqslant \int\limits_{\Delta_m} | \varphi_{n_q^{(q)}}(x, y) - \varphi_{n_r^{(r)}}(x, y) |^p \, dx\, dy +$$

$$+ 2^p \int\limits_{\mathfrak{E}_\infty - \Delta_m} | \varphi_{n_q^{(q)}}(x, y) |^p \, dx\, dy + 2^p \int\limits_{\mathfrak{E}_\infty - \Delta_m} | \varphi_{n_r^{(r)}}(x, y) |^p dx\, dy.$$

В силу условия (33), при любом заданном $\varepsilon > 0$ существует такое m, что сумма слагаемых правой части, кроме первого, меньше $\frac{\varepsilon^p}{2}$. Фиксируя такое m, получим

$$\| \varphi_{n_q^{(q)}} - \varphi_{n_r^{(r)}} \|^p_{\mathfrak{E}_\infty} \leqslant \int\limits_{\Delta_m} | \varphi_{n_q^{(q)}}(x, y) - \varphi_{n_r^{(r)}}(x, y) |^p \, dx\, dy + \frac{\varepsilon^p}{2}.$$

Но из сходимости последовательности (35) в L_p на Δ_m следует, что стоящий в правой части интеграл не больше $\frac{\varepsilon^p}{2}$ при всех доста-

точно больших q и r, и, следовательно, существует такое M, что

$$\| \varphi_{n_q^{(q)}} - \varphi_{n_r^{(r)}} \|_\infty^p \leqslant \varepsilon^p \quad \text{при } q \text{ и } r \geqslant M,$$

т. е. последозательность (35) сходится в себе в $L_p(\mathscr{E}_\infty)$, и, в силу полноты $L_p(\mathscr{E}_\infty)$, эта последовательность имеет предел в $L_p(\mathscr{E}_\infty)$. Достаточность условий (28), (29) и (33) доказана. Легко убедиться в том, что последнее условие не есть следствие двух первых.

Мы для определенности рассмотрели случай плоскости. Все сказанное, очевидно, справедливо и в любом пространстве R_n. Обозначая через $x(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ точку этого пространства и вводя обозначение $dx = dx_1 dx_2, \ldots, dx_1$, запишем условия (28) и (29) в виде

$$\left[\int_{\mathscr{E}} |\varphi(x)|^p \, dx\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant C \tag{36}$$

$$\left[\int_{\mathscr{E}} |\varphi(x+y) - \varphi(x)^p \, dx\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \varepsilon \quad \text{при} \quad |y| \leqslant \eta, \tag{37}$$

где y имеет составляющие $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ и $|y| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2}$.

92. Компактность в l_p. Докажем следующую теорему:

Теорема. *Для компактности множества U элементов l_p $(p \geqslant 1)$ необходимо и достаточно, чтобы все элементы $x(\xi_1, \xi_2, \ldots)$ из U удовлетворяли следующим двум условиям:*

1. Существует такое число $C > 0$, что

$$\| x \| = \left(\sum_{l=1}^{\infty} |\xi_p|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant C \quad \text{(ограниченность)}. \tag{38}$$

2. При любом заданном $\varepsilon > 0$ существует целое положительное n_ε, одно и то же для всех $x \in U$, такое, что

$$\left(\sum_{l=n_\varepsilon}^{\infty} |\xi_l|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \varepsilon. \tag{39}$$

Необходимость. Ограниченность (38), как мы знаем, необходима для компактности. Далее из компактности U следует существование конечного числа элементов x_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ из l_p таких, что для любого $x \in U$ имеем: $\rho(x, x_s) = \| x - x_s \| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, где x_s один из элементов x_k. Для элементов $x_k(\xi_1^k, \xi_2^k, \ldots)$, поскольку их конечное число, существует такое целое положительное n_ε, что

$$\left(\sum_{\substack{l=n_\varepsilon \\ (k=1,\ 2,\ \ldots,\ m)}}^{\infty} |\xi_l^k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{40}$$

Но из $\|x - x_s\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ следует

$$\left(\sum_{l=n_\varepsilon}^{\infty} |\xi_l - \xi_l^s|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{l=1}^{\infty} |\xi_l - \xi_l^s|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

и, применяя неравенство Минковского для сумм ($p > 1$), получим

$$\left(\sum_{l=n_\varepsilon}^{\infty} |\xi_l|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{l=n_\varepsilon}^{\infty} |\xi_l - \xi_l^{(s)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{l=n_\varepsilon}^{\infty} |\xi_l^{(s)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \varepsilon,$$

что и доказывает необходимость условия (39). При $p = 1$ доказательство не использует неравенство Минковского.

Достаточность. Предполагаем, что элементы U удовлетворяют условиям (38) и (39) и доказываем компактность U. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Каждому элементу $(\xi_1, \xi_2, \ldots)$ из U сопоставляем урезанный элемент $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n_\varepsilon - 1}, 0, 0, \ldots)$, и пусть U_ε — множество этих урезанных элементов. Из (39) следует, что для любого $x \in U$ существует такой элемент $y \in U_\varepsilon$, что $\|x - y\| \leqslant \varepsilon$, т. е. множество U_ε есть ε-сеть для U. Остается доказать, что U_ε — компактное множество [**89**]. Доказательство этого аналогично доказательству того, что всякое ограниченное в R_n множество — компактно.

В силу (38) имеем $|\xi_s| \leqslant C$ для любой составляющей элементов U из U_ε. Мы можем из любой последовательности элементов U_ε выбрать подпоследовательность, у которой первые $(n_\varepsilon - 1)$ составляющих имеют конечный предел. Остальные составляющие этих элементов равны нулю, и отсюда следует, что упомянутая подпоследовательность сходится в l_p к элементу, у которого все составляющие ξ_s при $s \geqslant n_\varepsilon$ равны нулю. Тем самым компактность U_ε доказана. Из доказанной теоремы следует, что сфера $\|x\| \leqslant r$ в l_p не компактна.

93. Функционалы на компактных в себе множествах. Положим, что функционал $l(x)$, принимающий вещественные значения, определен на компактном в себе множестве U метрического пространства X. Он называется непрерывным, если из $x_n \Rightarrow x_0$ следует $l(x_n) \to l(x_0)$.

Для таких функционалов имеет место теорема, аналогичная теореме о непрерывных функциях на ограниченных замкнутых множествах пространства R_n.

Теорема 1. *Если U — компактное в себе множество пространства X и $l(x)$ — вещественный непрерывный функционал на U, то он ограничен и достигает на U своей точной нижней и верхней границ.*

Будем доказывать только ограниченность снизу и достижимость точной нижней границы. Ограниченность доказывается от обратного. Если бы множество значений $l(x)$ было неограниченным снизу, то существовала бы последовательность элементов x_n из U, такая, что $l(x_n) \to -\infty$. В силу компактности U, можно выделить из x_n сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k} \Rightarrow x_0$ и, в силу компактности в себе, $x_0 \in U$. При этом, в силу непрерывности $l(x)$, имеем $l(x_{n_k}) \to l(x_0)$, что противоречит $l(x_{n_k}) \to -\infty$, ибо $l(x_0)$ — конечное число.

Пусть a — точная нижняя граница множества значений $l(x)$ на U. При этом существует такая последовательность элементов $x_n \in U$, что $a \leqslant l(x_n) \leqslant a + \frac{1}{n}$. Как и выше, можем считать, что $x_{n_k} \Rightarrow x_0$, где $x_0 \in U$, и, следовательно, $l(x_{n_k}) \to l(x_0)$. Но из $a \leqslant l(x_{n_k}) \leqslant a + \frac{1}{n_k}$ следует, что $l(x_{n_k}) \to a$, откуда $l(x_0) = a$, что и требовалось доказать.

Выше мы ввели понятие нижнего и верхнего пределов последовательности вещественных чисел a_n $(n = 1, 2, \ldots)$. Введем для них обозначения

$$S = \underline{\lim}\, a_n; \qquad T = \overline{\lim}\, a_n.$$

Эти пределы могут быть равны $+\infty$ или $-\infty$.

Если последовательность a_n имеет предел, то S и T совпадают с этим пределом. Кроме того, из определения S и T следует, что никакая подпоследовательность a_{n_k} последовательности a_n не может иметь предела, который меньше S или больше T, но есть хоть одна подпоследовательность, которая имеет предел S, и такая, которая имеет предел T. Функционал $l(x)$ называется полунепрерывным снизу на U, если из $x_n \Rightarrow x_0$ следует, что $\underline{\lim}\, l(x_n) \geqslant l(x_0)$, и полунепрерывным сверху, если из $x_n \Rightarrow x_0$ следует $\overline{\lim}\, l(x_n) \leqslant l(x_0)$.

Докажем важное в приложениях обобщение теоремы 1.

Теорема 2. *Функционал $l(x)$, определенный на компактном в себе множестве U метрического пространства и полунепрерывный снизу (сверху), ограничен снизу (сверху) и достигает на U своей точной нижней (верхней) границы.* Берем функционал, полунепрерывный снизу, и доказываем, как и в теореме 1, ограниченность снизу. Предположение $l(x_n) \to -\infty$ приводит к подпоследовательности $x_{n_k} \Rightarrow x_0$, где $x_0 \in U$ и $l(x_{n_k}) \to -\infty$. Но, в силу полунепрерывности снизу, $\underline{\lim}\, l(x_{n_k}) \geqslant l(x_0)$, где $l(x_0)$ — конечное число, что противоречит $l(x_{n_k}) \to -\infty$.

Пусть a — точная нижняя граница множества значений $l(x)$ на U. Как и в доказательстве теоремы 1, получим подпоследовательность $x_{n_k} \Rightarrow x_0$ и $a \leqslant l(x_{n_k}) \leqslant a + \frac{1}{n_k}$. Из первого следует: $\underline{\lim}\, l(x_{n_k}) \geqslant l(x_0)$, а из второго $\lim l(x_{n_k}) = a$, откуда $l(x_0) \leqslant a$. Но a — точная нижняя граница значений $l(x)$ и, следовательно, $l(x_0) = a$, что и требовалось доказать.

94. Сепарабельность. Метрическое пространство X, содержащее бесчисленное множество элементов, называется сепарабельным, если существует счетное множество элементов X: $x_1, x_2, \ldots$, плотное в X, т. е. для любого $x \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ имеется такой элемент x_s из упомянутого множества, что $\rho(x, x_s) \leqslant \varepsilon$.

Выше мы доказали сепарабельность l_p и L_p $(p \geqslant 1)$ [**59, 60**]. В пространстве C упомянутое счетное множество есть, например, множество всех полиномов с рациональными коэффициентами. В пространстве R_n таким множеством является множество элементов $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, у которого все числа a_k рациональны или (в случае комплексного пространства) имеют вид $a_k = \alpha_k + \beta_k i$, где α_k и β_k — вещественные рациональные числа.

В пространстве s это множество есть множество элементов вида $(a_1\ a_2, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)$, причем все a_k — рациональные числа.

Покажем, что пространство m не сепарабельно. Рассмотрим множество U различных элементов $x(a_1, a_2, \ldots)$ из m таких, что числа a_k равны или нулю или единице. Считая, что a_k есть k-ый знак после запятой у числа, написанного по системе счисления с основанием два, мы видим, что множество U несчетно. Принимая во внимание сказанное в [1], легко видеть, что оно имеет мощность континуума. Для любых двух различных элементов x и y из U имеем $\rho(x, y) = 1$. Пусть пространство m сепарабельно, т. е. имеется счетное множество $x_k\,(k = 1, 2, \ldots)$ элементов m, плотное в m, и S_k — сферы с центром x_k и радиусом $\frac{1}{3}$. Множество этих сфер счетно, и, по крайней мере, в одной из них принадлежит более одного элемента U. Пусть y и z — различные элементы U, находящиеся в одной из указанных сфер. Мы имеем: $\rho(y, z) \leqslant 2\frac{1}{3}$, что противоречит $\rho(x, y) = 1$, и несепарабельность m доказана.

Теорема. *Всякое множество U элементов сепарабельного пространства X сепарабельно.*

Нам надо доказать существование конечного или счетного множества элементов U, плотного в U. В силу сепарабельности X, имеется счетное множество $x_n\,(n = 1, 2, \ldots)$ элементов X, плотное в X. Через $S(x_n, r)$ обозначим сферу с центром x и радиусом r. Рассмотрим сферы $S\left(x_n, \frac{1}{2^k}\right)$ $(k = 1, 2, \ldots)$, и, если какая-либо из этих

сфер содержит элементы U, выберем один из этих элементов. Таким образом, получим конечное или счетное множество u_m $(m=1, 2, \ldots)$ элементов U. Пусть u — любой элемент U и $\varepsilon > 0$ — заданное положительное число. Докажем, что, по крайней мере, для одного из элементов u_m выполняется неравенство $\|u-u_m\| \leqslant \varepsilon$. Мы можем при этом считать $\varepsilon < 1$, так что существует такое целое положительное число l, что

$$\frac{1}{2^{l-1}} \leqslant \varepsilon < \frac{1}{2^{l-2}}.$$

В силу того, что множество x_n плотно в X, существует такое $n=n_0$, что $\|u-x_{n_0}\| \leqslant \frac{\varepsilon}{4} < \frac{1}{2^l}$, откуда следует, что сфера $S\left(x_{n_0}, \frac{1}{2^l}\right)$ содержит элементы U. Пусть u_n — тот элемент U, который мы выбрали из этой сферы (он может и не совпадать с u). Поскольку u и $u_n \in S\left(x_{n_0}, \frac{1}{2^l}\right)$, имеем $\|u-u_n\| < \frac{1}{2^{l-1}} \leqslant \varepsilon$, что и требовалось доказать.

95. Линейные нормированные пространства. Мы введем теперь абстрактные пространства, которые являются метрическими, но обладают и другими свойствами. Элементы пространства будем, как и выше, обозначать последними буквами алфавита $x, y, z, \ldots$, а числа первыми $a, b, c, \ldots$. Эти числа можно считать или вещественными, или комплексными. В первом случае мы имеем вещественное пространство, во втором — комплексное. Дальше, если не будет оговорено особо, мы будем рассматривать комплексные пространства.

Множество X элементов $x, y, z \ldots$ называется линейным пространством, если его элементы удовлетворяют указанным ниже аксиомам.

Аксиома А. *Элементы X можно умножать на числа и складывать, т. е. если x и y элементы X и a — число, то ax и $x+y$ суть также определенные элементы X.*

Указанные операции подчиняются следующим законам:

1) $x+y=y+x$;
2) $x+(y+z)=(x+y)+z$;
3) $a(x+y)=ax+ay$;
4) $(a+b)x=ax+bx$;
5) $a(bx)=(ab)x$;
6) $1x=x$;
7) если $x+y=x+z$, то $y=z$.

Введём понятие нулевого элемента. Пусть x и y — любые два элемента из H. Мы покажем сейчас, что $0x=0y$. Обозначим $0x=\theta$ и $0y=\theta_1$. Пользуясь законами 4 и 6, можем написать

$$x+\theta = 1x+0x = (1+0)x = 1x = x$$

и совершенно аналогично $y+\theta_1=y$. Далее, в силу законов 1 и 2, имеем

$$(x+y)+\theta=(x+\theta)+y=x+y,$$

и совершенно аналогично $(x+y)+\theta_1=x+y$, откуда следует, что $(x+y)+\theta=(x+y)+\theta_1$, и, в силу 7, мы и имеем $\theta=\theta_1$. Таким образом, при умножении любого элемента на число 0 мы получаем один и тот же элемент, который и назовём нулевым элементом. Обозначим нулевой элемент символом θ. Нетрудно проверить следующие простые следствия указанных выше законов. Произведение $a\theta$ при любом комплексном a равно θ. Если $ax=\theta$ и $a\neq 0$, то $x=\theta$. Если $ax=bx$ и $x\neq\theta$, то $a=b$. Если $ax=ay$ и $a\neq 0$, то $x=y$. Символом $(-x)$ обозначим произведение $(-1)x$. Разность $x-y$ определим формулой:

$$x-y=x+(-y).$$

Нетрудно проверить, что и для разности справедливы обычные правила алгебры. В дальнейшем нулевой элемент мы будем обозначать просто символом 0. Это не вызовет путаницы с числом 0, если внимательно относиться к тем равенствам, которые в дальнейшем будем писать. Если одна часть равенства есть элемент X, а в другой части стоит 0, то его надо понимать как нулевой элемент X.

Определение. *Элементы $x_1, x_2, \ldots, x_m$ называются линейно независимыми, если равенство*

$$c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_mx_m=0$$

возможно лишь в том случае, когда все числа c_k $(k=1, 2, \ldots, m)$ равны нулю.

Для n-мерного комплексного пространства, рассмотренного нами в третьем томе, максимальное число линейно независимых элементов равно n. Иногда вводят аксиому, которая исключит возможность конечномерного пространства.

Аксиома B. *Для любого целого положительного n существует n линейно независимых элементов.* В дальнейшем она не играет существенной роли. Введем еще одну аксиому.

Аксиома C. *Каждому элементу x сопоставляется определенное вещественное неотрицательное число $\|x\|$ — норма этого элемента, и эта норма должна удовлетворять следующим трем условиям:*

1) $\|\theta\|=0$ и $\|x\|>0$, при $x\neq\theta$

2) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$,

3) $\|ax\|=|a|\cdot\|x\|$,

где a — любое число и $|a|$ — модуль a. Из второго и третьего свойств нормы следует, что $\|-x\|=\|x\|$ и

$$\|x-y\|\geqslant\|x\|-\|y\|;\ \|x-y\|\geqslant\|y\|-\|x\|,$$

т. е.

$$\|x-y\|\geqslant|\|x\|-\|y\||. \tag{41}$$

Расстояние между элементами определяется формулой $\rho(x, y)=\|x-y\|$, и нетрудно видеть, что $\rho(x, y)$ удовлетворяет всем трем условиям, указанным при определении метрического пространства, т. е. всякое линейное нормированное пространство есть в то же время и метрическое пространство, так что для линейных нормированных пространств справедливо все то, что мы говорили о метрических пространствах. Норма может быть выражена через расстояние очевидной формулой $\|x\|=\rho(x-\theta)$.

Если присоединить требование полноты, то линейное нормированное пространство будем называть пространством типа B или пространством B. Все дальнейшее относится к пространствам B.

Неполное линейное нормированное пространство можем пополнением довести до полного [85]. Норма добавляемых элементов определяется формулой $\|x\|=\rho(x-\theta)$. При пополнении сохраняются все аксиомы и, в частности, аксиома A. Последнее следует из непрерывности суммы $x+y$ и произведения ax, о чем мы будем говорить ниже. В дальнейшем будем иметь сходящиеся последовательности чисел и элементов. Для сходящейся последовательности чисел будем, как и выше, писать $a_n\to a_0$, а для элементов $x_n\Rightarrow x_0$.

Сходимость $x_n\Rightarrow x_0$ равносильна $\|x_0-x_n\|\to 0$. Мы можем рассматривать в B бесконечные ряды $u_1+u_2+u_3+\ldots$, где $u_k\in B\,(k=1, 2, \ldots)$. Обозначим $x_n=u_1+u_2+\ldots+u_n$.

Если последовательность x_n элементов B имеет предел x_0, то говорят, что указанный ряд сходится и имеет сумму x_0.

Покажем, что выражения $x+y$ и ax непрерывны, т. е. если $x_n\Rightarrow x_0$, $y_n\Rightarrow y_0$ и $a_n\to a_0$, то $x_n+y_n\Rightarrow x_0+y_0$ и $a_nx_n\Rightarrow a_0x_0$. Мы имеем

$$\|(x_0+y_0)-(x_n+y_n)\|\leqslant\|x_0-x_n\|+\|y_0-y_n\|.$$

Правая часть стремится к нулю, а следовательно, и левая, т. е. $x_n+y_n\Rightarrow x_0+y_0$. Разность $a_0x_0-a_nx_n$ пишем в виде $a_0x_0-a_nx_0+a_nx_0-a_nx_n$, имеем

$$\|a_0x_0-a_nx_n\|\leqslant\|a_0x_0-a_nx_0\|+\|a_nx_0-a_nx_n\|=|a_0-a_n|\,\|x_0\|+$$

$$+|a_n|\,\|x_0-x_n\|$$

и, принимая во внимание, что из $a_n\to a_0$ следует ограниченность $|a_n|$, видим, что правая часть стремится к нулю. Отметим еще, что если $x_n\Rightarrow x_0$, то $\|x_n\|\to\|x_0\|$. Это следует из формулы $\|x_n\|=\rho(x_n, \theta)$ и непрерывности расстояния. Определим линеал в B: множество

элементов U называется линеалом при соблюдении условия: если $x_k \in U\,(k=1, 2, \ldots, m)$, то и их любая линейная комбинация $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_mx_m \in U$. Достаточно убедиться в том, что если x и $y \in U$, то $x+y \in U$ и $ax \in U$ при любом выборе числа a. Полагая $a=0$, видим, что нулевой элемент принадлежит всякому непустому линеалу. Замкнутый линеал будем называть подпространством. Нетрудно видеть, что если U — незамкнутый линеал, то замкнутое множество $\bar{U}$ есть подпространство, т. е. замыкание линеала приводит к подпространству. Это вытекает из доказанной выше непрерывности выражений $x+y$ и ax. Если множество U не линеал, то, образуя всевозможные конечные линейные комбинации $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_mx_m$ элементов $x_k \in U$, получим новое множество элементов V, которое будет уже линеалом. Оно называется обычно линейной оболочкой U. Это — наименьший линеал, содержащий U.

Если $x_1\ x_2, \ldots x_k$ — линейно независимые элементы, то множество U элементов B, представимых формулой $x = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_kx_k$ при всевозможном выборе чисел c_s, является, очевидно, линеалом. Легко показать, что этот линеал — замкнутое множество (подпространство). В силу линейной независимости x_s представление x указанной выше формулой единственно. Такой линеал называется обычно конечномерным. Можно выразить все элементы U по формуле: $x = c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ky_k$, где $y_s\,(s=1, 2, \ldots, k)$ — любые линейно независимые элементы U и c_s — произвольные числа, и во всякой формуле, представляющие все элементы U в виде такой формулы, число слагаемых всегда равно k. Это число называется размерностью U.

Отметим, что всякое подпространство B является также пространством B.

Мы определили выше понятие изометричности для метрических пространств. Приведем определение изометричности, для пространств B. Два таких пространства X и X' называются изометричными, если между их элементами можно установить биоднозначное соответствие так, что соблюдаются следующие два условия: 1) если x и x', y и y' — две любые пары соответствующих элементов из X и X', то $ax+by$ и $ax'+by'$ при любом выборе чисел a и b также соответствующие элементы; 2) нормы соответствующих элементов одинаковы.

Из сказанного следует, что нулевые элементы X и X' обязательно должны быть соответствующими элементами и что расстояния между соответствующими элементами в X и X' одинаковы.

С точки зрения абстрактной теории изометричные пространства не имеет смысла различать, и мы будем писать $X = X'$.

96. Примеры нормированных пространств. 1. Все указанные в [87] пространства кроме s и S суть пространства B, если положить для них $\|x\| = \rho(0, x)$. При этом для пространств последовательностей умножение элемента на число a сводится по определению к умножению каждого числа последова-

тельности на a и сложение элементов к сложению чисел этих последовательностей, имеющих одинаковый номер:

$$a(\xi_1, \xi_2, \dots) = (a\xi_1, a\xi_2, \dots); \quad (\xi_1, \xi_2, \dots) + (\eta_1, \eta_2, \dots) = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \dots).$$

Для функциональных пространств умножение элемента на число a сводится по определению к умножению функции на a и сложение элементов к сложению соответствующих функций. Нулевой элемент в пространстве последовательностей есть последовательность, состоящая из нулей, а в пространстве функций — функция, тождественно равная нулю (в C и V) или эквивалентная нулю (в M, S и L_p).

2. Рассмотрим в R_n ограниченную область D и множество $C^{(l)}$ функций $\varphi(x)$, имеющих внутри D непрерывные частные производные до порядка l, причем эти производные имеют предельные значения на границе D и представляют собой функции, непрерывные в замкнутой области $\overline{D}$. В этом случае мы будем короче говорить, что функция имеет производные непрерывные в $\overline{D}$. Указанное множество функций есть линейное пространство. Введем в нем следующую норму:

$$\|\varphi\|_{C^{(l)}} = \max_{\substack{x \in \overline{D} \\ 0 \leqslant k \leqslant l}} |\mathrm{D}^{(k)}\varphi|, \tag{42}$$

где $\mathrm{D}^k\varphi$ означает любую производную порядка k. Максимум берется по всем x, принадлежащим $\overline{D}$, для функции $\varphi(x)$ и всех ее производных до порядка l. Легко видеть, что норма удовлетворяет трем основным условиям [95].

Сходимость в $C^{(l)}$ есть равномерная сходимость в D функции и всех ее производных до порядка l. Согласно признаку сходимости Коши и известной теореме о почленном дифференцировании последовательностей функций можно утверждать, что если последовательность элементов $\varphi_n(x) \in C^{(l)}$ сходится в себе, то она сходится к некоторому элементу $\varphi(x) \in C^{(l)}$, т. е. пространство $C^{(l)}$ есть пространство B.

97. Операторы в нормированных пространствах. Выше мы определили операторы в метрических пространствах X. В линейных нормированных пространствах появляются новые моменты. Мы будем считать, что оператор A определен на некотором линеале $D(A)$ пространства X типа B, а множество его значений $R(A)$ принадлежит некоторому пространству X' тоже типа B. Оператор называется дистрибутивным, если для $x_k \in D(A)$ и любых чисел c_k соблюдено условие

$$A(c_1x_1 + c_2x_2 \dots + c_mx_m) = c_1Ax_1 + c_2Ax_2 + \dots + c_mAx_m \tag{43}$$

Достаточно проверить, что $A(c_1x_1) = cAx$ и $A(x+y) = Ax + Ay$. Из (43) непосредственно следует, что $R(A)$ есть линеал в X' и что если θ есть нулевой элемент в X и θ' — в X', то $A\theta = \theta'$. Действительно, $A(\theta) = A(0x)$, где $x \in D(A)$, но $A(0x) = 0Ax = \theta'$.

Дальше будем говорить лишь о дистрибутивных операторах, определенных на линеалах. Напомним определение непрерывности. Оператор A называется непрерывным на элементе x_0 при соблюдении следующего условия: если x_n $(n = 1, 2, \dots)$ и $x \in D(A)$ и $x_n \Rightarrow x_0$ в X, то $Ax_n \Rightarrow Ax_0$ в X'. Легко показать, что если

дистрибутивный оператор A непрерывен на некотором элементе $y_0 \in D(A)$, то он непрерывен и на любом элементе $z_0 \in D(A)$. Пусть z_n и $z_0 \in D(A)$ и $z_n \Rightarrow z_0$, надо доказать, что $Az_n \Rightarrow Az_0$. Строим элементы $y_n = (z_n - z_0) + y_0$ из $D(A)$, причем $y_n \Rightarrow y_0$. Имеем $Az_n = Az_0 + Ay_n - Ay_0$ и, в силу $Ay_n \Rightarrow \Rightarrow Ay_0$, имеем $Az_n \Rightarrow Az_0$.

Таким образом, не имеет смысла говорить о непрерывности на элементе $D(A)$, но о непрерывности на всем $D(A)$. Дистрибутивный оператор A называется ограниченным, если существует такое положительное число C, что для любого $x \in D(A)$:

$$\|Ax_n\| \leqslant C\|x\|. \tag{44}$$

Отметим, что справа норма берется в X, а слева в X'. Покажем, что для дистрибутивного оператора ограниченность и непрерывность на $D(A)$ равносильны.

В силу сказанного выше, достаточно рассматривать непрерывность на нулевом элементе θ. Пусть имеет место (44). Докажем, что если $x_n \in D(A)$ и $x_n \Rightarrow \theta$, то $Ax_n \Rightarrow \theta'$. Из $x_n \Rightarrow \theta$ следует, что при любом заданном $\varepsilon > 0$ существует такое N, что $\|x_n\| \leqslant \varepsilon$ при $n \geqslant N$ и, в силу (44), $\|Ax_n\| \leqslant C\varepsilon$ при $n \geqslant N$, откуда, ввиду произвольности ε, и следует, что $Ax_n \Rightarrow \theta'$. Положим теперь, что $Ax_n \Rightarrow \theta'$, если $x_n \Rightarrow \Rightarrow \theta$, и докажем (44). Если $x = \theta$, то (44) приводится к неравенству $\|\theta'\| \leqslant C\|\theta\|$, т. е. $0 \leqslant CO$, которое выполнено (со знаком $=$) при любом выборе C, и достаточно доказать (44) при $x \neq \theta$. Доказываем от обратного. Если (44) не имеет места, то существует такая последовательность $x_n \in D(A)$ ($\|x_n\| > 0$), что $\|Ax_n\| = C_n\|x_n\|$, где $C_n \to \to +\infty$. Вводя элементы $z_n = \dfrac{1}{C_n\|x_n\|} x_n \in D(A)$, у которых $\|z_n\| \to 0$, получаем $\|Az_n\| = 1$, что противоречит непрерывности оператора Ax на нулевом элементе.

Если A есть оператор анулирования, т. е. $Ax = \theta'$ для любого $x \in D(A)$, то в (44) можно положить $C = 0$. Для всякого другого оператора обязательно $C > 0$, и существует наименьшее положительное C, при котором имеет место неравенство (44). Оно называется нормой оператора A и получается по формуле:

$$n_A = \sup_{\substack{\|x\| = 1 \\ x \in D(A)}} \|Ax\|. \tag{45}$$

Норму оператора n_A обозначают также символом $\|A\|$, так что мы можем написать

$$\|Ax\| \leqslant n_A\|x\| \text{ или } \|Ax\| \leqslant \|A\|\|x\|. \tag{46}$$

Сказанное выше совершенно аналогично тому, что мы имели, например, в [IV; 36] для частного случая.

Теорема 1. *Если для дистрибутивного ограниченного оператора A линеал $D(A)$ плотен в X, то A можно распространить на все X с сохранением дистрибутивности и нормы.* Поскольку $\overline{D(A}=X$, можем любой элемент $x_0\in X$ представить как предел $x_n\Rightarrow x_0$, где $x_n\in D(A)$. Покажем, что в X существует предел Ax_n, который не зависит от того, какую именно последовательность x_n мы взяли. Действительно,

$$\|Ax_n - Ax_m\| = \|A(x_n - x_m)\| \leqslant \|A\|\,\|x_n - x_m\|$$

и, в силу $x_n\Rightarrow x_0$, правая часть $\to 0$, при n и $m\to +\infty$, но тогда и $\|Ax_n - Ax_m\|\to 0$, и, в силу полноты X', существует предел Ax_n. Остается доказать независимость предела Ax_n от выбора последовательности x_n. Пусть x_n и $x'_n\in D(A)$, причем $x_n\Rightarrow x_0$ и $x'_n\Rightarrow x_0$. Надо доказать, что пределы Ax_n и Ax'_n совпадают. Самое существование пределов вытекает из предыдущего.

Нетрудно видеть, что последовательность x_1, x'_1, x_2, x'_2, x_3, x'_3...., также имеет предел x_0. Следовательно, и последовательность Ax_1, Ax'_1, Ax_2, Ax'_2, Ax_3, Ax'_3, ..., имеет некоторый предел $y\in X'$. Но тогда и подпоследовательности Ax_n и Ax'_n имеют тот же предел y, т. е. одинаковый предел.

Если $x_0\in X$, но $x_0\overline{\in} D(A)$, то берем какую-нибудь последовательность $x_n\in D(A)$ и $x_n\Rightarrow x_0$ и полагаем $Ax_0=\lim\limits_{n\to\infty} Ax_n$. Докажем, что определенный таким образом в X оператор дистрибутивен и его норма при переходе от $D(A)$ к X не увеличилась. Пусть x'_0 и $x''_0\in X$ x'_n и x''_n — две последовательности из $D(A)$, имеющие пределы x'_0 и x''_0 (если, например, $x'_0\in D(A)$, то можно положить все $x'_n=x'_0$). Принимая во внимание, что в $D(A)$ оператор A дистрибутивен, а также непрерывность сложения и умножения на число, получим

$$A(c_1x'_0 + c_2x''_0) = \lim_{n\to\infty} A(c_1x'_n + c_2x'_n) = c_n \lim_{n\to\infty} Ax'_n + c_2 \lim_{n\to\infty} Ax'_n = \\ = c_1Ax'_0 + c_2Ax''_0.$$

Сохранение нормы вытекает из неравенства $\|Ax'_n\|\leqslant\|A\|\|x'_n\|$, в котором справа $\|A\|$ есть норма A в $D(A)$, после перехода к пределу. Норма не может, очевидно, понизиться. Теорема доказана.

Указанный выше способ распространения A называют обычно распространением по непрерывности.

Покажем еще, что распространение A из $D(A)$ на X в известном смысле единственно: если B — дистрибутивный ограниченный в X оператор, совпадающий с A на $D(A)$, то B везде совпадает с расширением A по непрерывности. Пусть $x_0\overline{\in} D(A)$, $x_n\in D(A)$ и $x_n\Rightarrow x_0$. В силу непрерывности B и совпадения B и A на $D(A)$, имеем

$$Bx_0 = \lim_{n\to\infty} Bx_n = \lim_{n\to\infty} Ax_n = Ax_0,$$

что и требовалось доказать. Если оператор A определен во всем пространстве X, дистрибутивен и ограниченен, то будем называть его линейным оператором (иногда в этом случае говорят — ограниченный линейный оператор). Если различным x из линеала $D(A)$ соответствуют различные Ax из $R(A)$, то существует обратный оператор, определенный на $R(A)$ и сопоставляющий каждому x' из $R(A)$ один единственный элемент x из $D(A)$, связанный с x' соотношением $x' = Ax$. Из дистрибутивности A непосредственно следует дистрибутивность и A^{-1}. Но из ограниченности A не следует ограниченность A^{-1}.

В качестве примера рассмотрим в пространстве C на отрезке $[0,1]$ оператор $\varphi = Af$:

$$\varphi(x) = \int_0^x f(t)\,dt, \tag{47}$$

причем мы считаем, что X' есть то же самое пространство C. Это возможно, ибо $\varphi(x) \in C$ на $[0,1]$. Оператор (47) переводит все C в линеал, состоящий из функций $\varphi(x)$, имеющих непрерывную производную и равных нулю при $x = 0$. На этом линеале функций $\varphi(x)$ существует обратный дистрибутивный оператор $f(x) = \varphi'(x)$, но он неограничен. Действительно, функции $\varphi_n(x) = \sin n\pi x$, принадлежащие этому линеалу, имеют норму 1 при любом выборе числа n, а $\varphi_n'(x) = n\pi \cos n\pi x$ имеет норму $n\pi$, которая беспредельно растет при $n \to \infty$.

Теорема 2. *Если B — линейный оператор в X, $R(B) \subset X$ и $\|B\| = \alpha < 1$, то оператор $(E - B)$, где E — оператор тождественного преобразования* (т. е. $Ex = x$), *имеет обратный $(E - B)^{-1}$, определенный во всем X, дистрибутивный и ограниченный.*

Рассмотрим уравнение

$$y = x - Bx \qquad (48), \quad \text{или} \quad x = y + Bx; \tag{49}$$

где y — заданный и x — искомый элемент X. Нетрудно проверить, что оператор $Ax = y + Bx$ (A — обозначение из [86]) удовлетворяет условию применимости принципа сжатых отображений. Действительно,

$$\|Ax_2 - Ax_1\| = \|B(x_2 - x_1)\| \leqslant \alpha \|x_2 - x_1\|. \quad (0 < \alpha < 1).$$

Таким образом, уравнение (48) или (49) имеет единственное решение при любом $y \in X$, т. е. существует обратный оператор $x = (E - B)^{-1} y$, определенный во всем X. Его дистрибутивность очевидна. Докажем ограниченность. Имеем

$$\|x - y\| = \|Bx\| \leqslant \alpha \|x\|$$

и тем более

$$\|x\| - \|y\| \leqslant \alpha \|x\|, \text{ т. е. } \|x\| < \frac{1}{1-\alpha} \|y\|,$$

откуда следует, что норма $(E - B)^{-1}$ не больше $\frac{1}{1-\alpha}$.

Теорема 3. *Линейный оператор преобразует компактное множество в компактное.* Пусть U — компактное множество элементов X, $x_n\,(n=1,2,\ldots)$ — какая-либо последовательность элементов U и A — линейный оператор. Нам надо доказать, что из последовательности $Ax_n\,(n=1,2,\ldots)$ можно выбрать сходящуюся в X' подпоследовательность. Из компактности U следует существование подпоследовательности x_{n_k}, имеющей предел: $x_{n_k}\Rightarrow x_0$ в X. При этом, в силу непрерывности A, имеем $Ax_{n_k}\Rightarrow Ax_0$ в X', что и требовалось доказать.

Приведем без доказательства еще следующую теорему:

Теорема 4. *Если в пространстве X (типа B) определен линейный оператор A, преобразующий X биоднозначно во все пространство X' (типа B), то обратный оператор A^{-1} (определенный во всем X') есть также линейный оператор.*

98. Линейные функционалы. Рассмотрим вещественное пространство X типа B (элементы X умножаются лишь на вещественные числа). Функционалом в X называется оператор, область значений которого находится в пространстве вещественных чисел. Последнее есть вещественное пространство типа B при обычном определении сложения вещественных чисел и их умножения на вещественное число. Норма — абсолютное значение вещественного числа [**87**].

Все сказанное в [**97**] об операторах справедливо и для функционалов. Ограниченность функционала определяется неравенством

$$|l(x)|\leqslant\|l\|\,\|x\|, \tag{50}$$

где $|l(x)|$ — абсолютное значение вещественного числа $l(x)$ и $\|l\|$ — норма $l(x)$. Линейный функционал — частный случай линейного оператора. При этом $D(l)$ совпадает со всем X.

Теорема 1. *Если на некотором линеале U задан дистрибутивный ограниченный функционал $l(x)$, то его можно распространить на все X так, что $l(x)$ будет в X линейным функционалом с той же нормой, что и в U.*

По условию, кроме дистрибутивности $l(x)$, имеем

$$|l(x)|\leqslant\|l\|_U\|x\| \qquad (x\in U), \tag{51}$$

где $\|l\|_U$ — норма $l(x)$ в U. При доказательстве будем считать, что пространство X сепарабельно, что упростит рассуждения. Но теорема верна и для несепарабельных пространств.

В силу сепарабельности, существует счетное множество элементов, плотное в X. Оставим в этом счетном множестве лишь элементы, не принадлежащие U. Если таких элементов не будет, то U повсюду плотно в X, и мы можем продолжить $l(x)$ по непрерывности на всем X [**97**]. В противном случае оставшиеся элементы счетного множества можно также пронумеровать: $x_1, x_2, x_3, \ldots$

Рассмотрим множество U_1 элементов z вида: $z=y+tx_1$, где y — любой элемент U и t — любое вещественное число. Нетрудно видеть, что U_1 есть, как и U, линеал. Покажем, что представление z в указанном виде единственно. Если z имеет два различных представления:

$$z=y+tx_1=y'+t'x_1, \tag{52}$$

то в этих представлениях $t\neq t'$, ибо если $t=t'$, то и $y=y'$. Покажем, что неравенство $t\neq t'$ приведет нас к нелепости. Из (52) имеем $x_1=\frac{1}{t-t'}(y'-y)$, откуда следует, что $x_1\in U$, а это противоречит сказанному выше. Возьмем теперь два любых элемента x' и x'' из U и установим одно неравенство. Имеем

$$l(x')-l(x'')=l(x'-x'')\leqslant|l|_U|\,x'-x''\|. \tag{53}$$

Отметим, что если слева стоит отрицательное число, то неравенство тривиально. Принимая во внимание, что $\|x'-x''\|=\|(x'+x_1)-(x''+x_1)\|\leqslant\|x'+x_1\|+\|x''+x_1\|$, получим, в силу (53): $l(x')-\|l\|_U\|x'+x_1\|\leqslant l(x'')+\|l\|_U\|x''+x_1\|$.

Взяв точную нижнюю границу множества чисел, стоящих справа, и точную верхнюю границу для левой части, когда x' и x'' независимо пробегают все U, получим

$$\sup_{x\in U}[l(x)-\|l\|_U\|x+x_1\|]\leqslant\inf_{x\in U}[l(x)+\|l\|_U\|x+x_1\|],$$

причем правая часть, очевидно, конечна, а, следовательно, и левая. Таким образом, существует вещественное число a, удовлетворяющее неравенству

$$\sup_{x\in U}[l(x)-\|l\|_U\|x+x_1\|]\leqslant a\leqslant\inf_{x\in U}[l(x)+\|l\|_U\|x+x_1\|]. \tag{54}$$

Распространим теперь $l(x)$ с U на U_1. Пусть $z=y+tx_1$ — любой элемент U_1. Положим

$$l(z)=l(y)-ta, \tag{55}$$

где a — фиксированное вещественное число, удовлетворяющее неравенству (54). Если $z\in U$, то $t=0$, и $l(z)$ совпадает с $l(y)$, т. е. формула (55) определяет на U_1 функционал, совпадающий с прежним на U. Поэтому мы сохранили для расширенного функционала прежнее обозначение. Дистрибутивность $l(z)$ непосредственно следует из (55), дистрибутивности $l(y)$ на U и формул

$$z=y+tx_1;\quad cz=cy+ctx_1;$$
$$z'=y'+t'x_1;\quad z''=y''+t''x_1;\quad z'+z''=(y'+y'')+(t'+t'')x_1.$$

Покажем наконец, что норма $l(z)$ в U_1 не больше, чем $\|l\|_U$ (понизиться она не может). Будем считать $t>0$. Принимая во внимание, что $l(y)=tl\left(\frac{1}{t}y\right)$, причем $\frac{1}{t}y\in U$, получим

$$l(z)=t\left[l\left(\frac{1}{t}y\right)-a\right]. \tag{56}$$

Но из (54) следует

$$a\geqslant l\left(\frac{1}{t}y\right)-\|l\|_U\left\|\frac{1}{t}y+x_1\right\|,$$

и заменяя в (56) a меньшим числом, стоящим в правой части этого неравенства, получим ($t>0$):

$$l(z)\leqslant t\|l\|_U\left\|\frac{1}{t}y+x_1\right\|=\|l\|_U\|y+tx_1\|=\|l\|_U\|z\|.$$

Переходим к случаю $t<0$. Из (54) следует

$$a\leqslant l\left(\frac{1}{t}y\right)+\|l\|_U\left\|\frac{1}{t}y+x_1\right\|$$

и, заменяя в (56) в разности $l\left(\frac{1}{t}y\right)-a$ число a большим, получим ($|t|=-t$):

$$l\left(\frac{1}{t}y\right)-a\geqslant-\|l\|_U\left\|\frac{1}{t}y+x_1\right\|=-\frac{1}{|t|}\|l\|_U\|y+tx_1\|=\frac{1}{t}\|l\|_U\|z\|.$$

Умножая обе части этого неравенства на отрицательное t и принимая во внимание (56), получим $l(z)\leqslant\|l\|_U\|z\|$. Если $t=0$, то $z\in U$, и написанное неравенство очевидно. Таким образом, при всяком $z\in U_1$ имеем $l(z)\leqslant\|l\|_U\|z\|$. Меняя в этом неравенстве z на $(-z)$ и принимая во внимание, что $l(-z)=-l(z)$ и $\|-z\|=\|z\|$, получим $-l(z)\leqslant\|l\|_U\|z\|$. Эти два неравенства приводят нас окончательно к неравенству

$$|l(z)|\leqslant\|l\|_U\|z\|, \tag{57}$$

из которого и следует, что при указанном распространении $l(x)$ из U на U_1 норма остается прежней.

Переходим теперь к дальнейшему распространению. Если элемент x_2 из указанной выше последовательности принадлежит U_1, то отбрасываем его. Если же нет, то распространяем $l(x)$, как и выше, с линеала U_1 на линеал U_2, состоящий из элементов $z=y+tx_2$, где y — любой элемент U_1 и t — любое вещественное число. Продолжая так и дальше, удержим прежнее обозначение $x_1, x_2, \ldots$ для элементов, которые не отбрасывались при указанном выше построении (их может быть и конечное число). Таким путем мы продолжим $l(x)$ на линеал V элементов, имеющих вид

$$y+c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n,$$

где y — любой элемент U, n — любое целое положительное (не большее числа элементов x_k, если это число конечно) и c_k — любые вещественные числа. Этот линеал V плотен в B, и на нем функционал $l(x)$ дистрибутивен, ограничен и с нормой $\|l\|_U$. Теперь остается продолжить $l(x)$ на все X по непрерывности. Теорема доказана.

Для случая комплексного пространства типа B доказательство теоремы 1 имеется, например, в работе Г. А. Сухомлинова (Матем. сб., **3**, 1938 г.) и в книге Ф. Рисса и Б. Секефальви-Надя „Лекции по функциональному анализу".

Доказанная теорема не распространяется на операторы.

Теорема 2. *Если x_0 какой-либо фиксированный элемент X, отличный от нулевого, то существует линейный функционал $l(x)$ с нормой единица ($\|l\|=1$) такой, что $l(x_0)=\|x_0\|$.*

Рассмотрим линеал U элементов вида $x=tx_0$, где t — любое вещественное число, и определим на U дистрибутивный функционал $l(x)$ формулой $l(tx_0)=t\|x_0\|$. При $t=1$ имеем $l(x_0)=\|x_0\|$ и $\|l\|_U=1$. По теореме 1 мы можем распространить $l(x)$ на все X с сохранением нормы, и теорема доказана. Из нее вытекает, между прочим, что во всяком пространстве типа B существуют функционалы с положительной нормой.

Отметим, что теорема справедлива и в том случае, когда $x_0=\theta$ есть нулевой элемент. Достаточно взять какой-либо элемент x_1, отличный от θ, и образовать по теореме линейный функционал $l(x)$ такой, что $\|l\|=1$ и $l(x_1)=\|x_1\|$. Для него $l(x_0)=l(\theta)=0=\|x_0\|$.

99. Сопряженные пространства. Рассмотрим пространство X^*, элементы которого суть всевозможные линейные функционалы в пространстве X типа B. Функционалы в X, т. е. вещественные числа, соответствующие элементам x, обозначаются через $l(x)$, $m(x)$, $n(x)$... Как элементы X^* мы будем их обозначать одной буквой: l, m, n, ... Пространство X^* есть линейное пространство. Сложение и умножение функционалов на число вводятся следующим естественным образом:

$$(l+m)(x)=l(x)+m(x); \qquad (al)x=al(x),$$

причем выполнены все свойства из аксиомы A. Нулевой элемент X^* есть функционал аннулирования, т. е. такой, что $l(x)=0$ для любого $x\in X$. Норма l элемента X^* принимается равной норме соответствующего функционала. Эта норма $\geqslant 0$, причем знак $=$ имеет место только для функционала аннулирования. Имеют место и два других свойства аксиомы C.

Второе вытекает из неравенств $|l_1(x)+l_2(x)|\leqslant|l_1(x)|+|l_2(x)|\leqslant\|l_1\|\|x\|+\|l_2\|\|x\|=(\|l_1\|+\|l_2\|)\|x\|$, а третье очевидно. Докажем, что X^* — полное пространство. Пусть имеется сходящаяся в себе последовательность элементов X^*:

$$\|l_n-l_m\|\to 0 \quad \text{при } n \text{ и } m\to\infty, \tag{58}$$

Надо доказать, что существует такой элемент $l \in X^*$, что $\|l - l_n\| \to 0$ при $n \to \infty$. Обозначим $l_n - l_m = l_{nm} \in X^*$. Мы имеем $l_m = l_m + l_{nm}$ и $\|l_n\| \leqslant \|l_m\| + \|l_{nm}\|$. В силу (58) существует такое N, что $\|l_{nm}\| \leqslant 1$ при n и $m \geqslant N$. Фиксируя $m = m_0 \geqslant N$, получаем $\|l_n\| \leqslant \|l_{m_0}\| + 1$ при $n \geqslant N$, а среди конечного числа неотрицательных чисел $\|l_n\|$ $(n = 1, 2, \ldots, N-1)$ имеется наибольшее. Таким образом, из (58) следует, что существует такое $C > 0$, что $\|l_n\| \leqslant C$ при всех значках n. Мы имеем далее $|l_n(x) - l_m(x)| \leqslant \|l_n - l_m\| \|x\|$, и из (58) следует, что $|l_n(x) - l_m(x)| \to 0$ при n и $m \to \infty$ и любом выборе $x \in X$. В силу признака Коши (для чисел) существует предел последовательности чисел $l_n(x)$. Этот предел, который мы обозначим $l(x)$ $(l_n(x) \to l(x))$ есть некоторый функционал, определенный во всем X. Покажем, что он есть линейный функционал. Его дистрибутивность вытекает из равенств: $l_n(x+y) = l_n(x) + l_n(y)$ и $l_n(ax) = al_n(x)$, а ограниченность — из неравенства $\|l_n\| \leqslant C$, т. е. $|l_n(x)| \leqslant C\|x\|$ путем предельного перехода при $n \to \infty$. Таким образом, $l(x)$ есть линейный функционал в X, т. е. $l \in X^*$. Остается доказать, что $\|l - l_n\| \to 0$. При любом $\varepsilon > 0$, в силу (58), существует такое N, что $|l_n(x) - l_m(x)| \leqslant \varepsilon \|x\|$ при n и $m \geqslant N$. Переходя к пределу при $m \to \infty$, получим $|l_n(x) - l(x)| \leqslant \varepsilon \|x\|$ при $n \geqslant N$, т. е. $\|l - l_n\| \leqslant \varepsilon$, при $n \geqslant N$, что и дает $\|l - l_n\| \to 0$. Полнота X^* доказана. Таким образом, пространство X^* есть пространство типа B. Оно называется сопряженным с X.

Введем второе сопряженное пространство $X^{**} = (X^*)^*$, элементы которого суть всевозможные линейные функционалы в X^*. Пространство X^{**} получается из X^* совершенно так же, как X^* из X, и X^{**} есть пространство типа B.

Если мы фиксируем $x \in X$, то любому элементу $l \in X^*$ будет соответствовать определенное вещественное число $l(x)$, т. е. $l(x)$ при фиксированном x и изменении l в X^* есть функционал в X^*. Обозначим его символом $L_x(l)$. Из $(l_1 + l_2)(x) = l_1(x) + l_2(x)$ и $(al_1)(x) = al_1(x)$ следует $L_x(l_1 + l_2) = L_x(l_1) + L_x(l_2)$ и $L_x(al) = aL_x(l)$, т. е. $L_x(l)$ дистрибутивный функционал в X^*.

Из неравенства

$$|l(x)| \leqslant \|l\| \|x\|, \tag{59}$$

в силу $L_x(l) = l(x)$, следует

$$|L_x(l)| \leqslant \|x\| \|l\|, \tag{60}$$

где $\|x\|$ — норма x в X и $\|l\|$ норма l в X^*. Из (60) следует, что норма функционала $L_x(l)$ в X^* не больше $\|x\|$, т. е. он ограничен в X^*. Итак, $L_x(l)$ есть линейный функционал в X^*. Если $x = \theta$ есть нулевой элемент X, то $L_\theta(l) = l(\theta) = 0$ для любого $l \in X^*$, т. е. $L_\theta(l)$ есть нулевой элемент X^{**}. Из (60) следует, что норма $L_x(l)$ не больше $\|x\|$. Но в силу теоремы 2 из [98] при любом $x \neq \theta$ существует такой функционал $l(x)$, что $l(x) = \|x\|$ и

$\|l\|=1$. Для такого l обе части (60) равны $\|x\|$ и имеет место знак $=$, откуда следует, что норма $L_x(l)$ равна $\|x\|$. Далее из $l(x_1+x_2)=l(x_1)+l(x_2)$ и $l(c_1x_1)=c_1l(x_1)$ следует, что $L_{x_1+x_2}(l)=L_{x_1}(l)+L_{x_2}(l)$, $L_{c_1x_1}(l)=c_1L_{x_1}(l)$ и вообще $L_{c_1x_1+c_2x_2}(l)=c_1L_{x_1}(l)+c_2L_{x_2}(l)$. В частности, $L_{x_1-x_2}(l)=L_{x_1}(l)-L_{x_2}(l)$, откуда, в силу сказанного выше о норме, следует: $\|L_{x_1}-L_{x_2}\|=\|x_1-x_2\|$, а отсюда следует, что различным x соответствуют различные элементы L_x пространства X^{**}.

Из предыдущего вытекает следующее важное утверждение:

Теорема. *Всякому элементу $x\in X$ можно сопоставить элемент $L_x\in X^{**}$. При этом соответствии: различным x соответствуют различные L_x, сложению и умножению на число в X соответствуют те же операции для соответствующих элементов в X^{**}, и нормы соответствующих элементов в X и X^{**} одинаковы.*

Это утверждение дает возможность отождествить L_x с x, т. е. погрузить X в X^{**}, что записываем в виде $X\subseteq X^{**}$. Иными словами, X изометрично части X^{**}.

Мы увидим дальше, что в некоторых случаях X изометрично всему X^{**}, т. е. $X^{**}=X$. Такое пространство X называется регулярным. Часто вместо $l(x)=L_x(l)$ пользуются обозначением (l, x) или (x, l):

$$(x, l)=(l, x)=l(x), \tag{61}$$

и (x, l) называют внутренним произведением элемента $l\in X^*$ на элемент $x\in X$. Элементы l и x называют ортогональными, если $(x, l)=0$.

Неравенство (59) записывается в виде;

$$|(x, l)|\leqslant\|l\|\|x\|, \tag{62}$$

из сказанного выше следует:

$(ax, bl)=ab(x, l)$; $(x_1+x_2, l)=(x_1, l)+(x_2, l)$; $(x, l_1+l_2)=(x, l_1)+(x, l_2)$,

где a и b — любые вещественные числа.

До сих пор мы рассматривали вещественные пространства типа B. Все сказанное выше сохраняется и для комплексных пространств типа B (умножение элементов x на любые комплексные числа). В этом случае и функционалы могут принимать любые комплексные значения. В дальнейшем через $\bar\alpha$ мы, как и раньше, будем обозначать число комплексное, сопряженное с α ($\alpha=a+bi$; $\bar\alpha=a-bi$). Отметим, что если $l(x)$ есть линейный функционал в B, то $\overline{l(x)}$ есть также ограниченный в X, но не линейный функционал, ибо $\overline{l(x)}$ умножается на $\bar c$ при умножении x на комплексное число c. Сопряженное пространство X^* определяется не как множество всех $l(x)$, а как множество всех $\overline{l(x)}$.

Сложение элементов X^* и умножение на комплексное число есть

обычное сложение и умножение комплексных чисел. Норма $\|\bar{l}\|$ берется равной $\|l\|$, при этом $|\overline{l(x)}| \leqslant \|\bar{l}\| \cdot \|x\|$, и число $\|\bar{l}\|$ нельзя заменить меньшим. Пространство — X^* типа B. Внутренние произведения определяются формулами

$$(l, x) = \overline{l(x)}; \quad (x, l) = (\overline{l, x}) = l(x). \tag{63}$$

При этом для любых комплексных a и b

$$(al, bx) = a\bar{b}(l, x), \tag{64}$$

Пространство $X^{**} = (X^*)^*$ имеет ту же связь с X, что и в случае вещественного пространства.

100. Слабая сходимость функционалов. Мы рассматривали в [99] следующую сходимость последовательности линейных функционалов $l_n(x)$ к функционалу $l(x)$: $\|l - l_n\| \to 0$ и тем более $l_n(x) \to l(x)$ при любом $x \in X$. Такую сходимость называют обычно сходимостью по норме. При этом из [99] следует, что нормы $l_n(x)$ ограничены, т. е. не превышают при любом n некоторого положительного числа. Введем теперь новое понятие сходимости. Говорят, что последовательность линейных функционалов $l_n(x)$ слабо сходится, если для любого $x \in X$ числовая последовательность $l_n(x)$ имеет предел (конечный). Обозначим этот предел через $l(x)$. Это есть функционал, определенный во всем X. Его дистрибутивность вытекает из дистрибутивности $l_n(x)$, и мы смогли бы утверждать и его ограниченности (и тем самым линейность), если бы знали, что последовательность $\|l_n\|$ ограничена. Оказывается, что это действительно имеет место.

Теорема 1. *Пусть L есть некоторое множество линейных функционалов $l(x)$, причем для любого элемента x существует такое положительное число m_x, что $|l(x)| \leqslant m_x$, если $l \in L$, т. е. при фиксированном x множество чисел $|l(x)|$ ограничено. При этом нормы функционалов $l(x)$ $(l \in L)$ ограничены.*

Покажем сначала, что для доказательства теоремы достаточно установить ограниченность $|l(x)|$ в какой-либо сфере. Действительно, пусть существует такое положительное число b, что

$$|l(x)| \leqslant b \qquad (l \in L), \tag{65}$$

если x принадлежит некоторой замкнутой сфере $\bar{S}(x_0, a)$ ($\|x - x_0\| \leqslant a$) и пусть y — любой элемент X, отличный от нулевого. Элемент $x = \frac{a}{\|y\|} y + x_0$ принадлежит $S(x_0, a)$ и, в силу (65), имеем

$$\left| \frac{a}{\|y\|} l(y) + l(x_0) \right| \leqslant b$$

и тем более

$$\frac{a}{\|y\|} \left| l(y) \right| - \left| l(x_0) \right| \leqslant b,$$

откуда

$$|l(y)| \leqslant \frac{b+|l(x_0)|}{a}\|y\| \leqslant \frac{2b}{a}\|y\| \tag{66}$$

для любого $y \in X$, т. е. $\|l\| \leqslant \frac{2b}{a}$, что и составляет утверждение теоремы. Тем самым, если множество чисел $|l(x)|$ ограничено в какой-либо сфере, то теорема доказана. Теперь доказываем теорему от обратного. Предполагаем, что указанное множество неограничено в любой замкнутой сфере и приводим это к противоречию.

Фиксируем какую-нибудь замкнутую сферу $\bar{S}_1$. По доказанному имеется такой элемент $x_1 \in \bar{S}_1$ и такой функционал $l_1 \in L$, что $|l_1(x_1)| > 1$. В силу непрерывности $l_1(x)$ можно считать, что x_1 лежит внутри $\bar{S}_1$ и что неравенство $l_1(x) > 1$ выполняется во всей сфере $\bar{S}(x_1, r_1)$, где r_1 — достаточно мало положительное число. Как и выше, найдется такой элемент x_2, лежащий внутри $\bar{S}(x_1, r_1)$, такой функционал $l_2 \in \bar{S}$ и такое малое положительное r_2, что сфера $\bar{S}(x_2, r_2)$ принадлежит $\bar{S}(x_1, r_1)$ и во всей этой сфере выполняется неравенство $|l_2, (x_2)| > 2$. Продолжая так и дальше, получим последовательность вложенных сфер

$$\bar{S}(x_1\, r_1) \supset \bar{S}(x_2, r_2) \supset \bar{S}(x_3, r_3) \supset \ldots$$

и функционалов $l_k \in L$ таких, что во всей сфере $\bar{S}(x_k, r_k)$ выполняется неравенство $|l_k(x)| > k$. При этом можно считать, конечно, что $r_k \to 0$ при $k \to \infty$. В точке x_0, принадлежащей всем этим сферам [85], выполняется тем самым неравенство $|l_k(x_0)| > k$, что противоречит тому, что множество чисел $|l_k(x_0)|$ должно быть ограничено. Теорема доказана.

Если некоторая последовательность функционалов $l_n(x)$ при любом x имеет конечный предел, то тем самым последовательность чисел $|l_n(x)|$ при любом x ограничена, и, в силу теоремы, последовательность $\|l_n\|$ ограничена. Как мы выше отметили, отсюда следует, что предел $l(x)$ слабо сходящейся последовательности линейных функционалов есть также линейный функционал.

Если последовательность $\|l_n\|$ ограничена, то оказывается, что для слабой сходимости функционалов достаточно потребовать существование предела $l_n(x)$ не на всем X, а лишь на плотном в X линеале.

Теорема 2. *Для того чтобы последовательность функционалов $l_n(x)$ слабо сходилась, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\|l_n\|$ была ограниченной и чтобы существовал предел $l_n(x)$ на линеале, плотном в X.* Необходимость первого условия вытекает из теоремы 1, а второго — очевидна. Переходим к доказательству достаточности. Обозначим через U линеал, о котором говорится во втором условии теоремы. В силу первого условия $\|l_n\| \leqslant C$, где C — положительное число. Обозначая через $l(x)$ предел $l_n(x)$ при $x \in U$, мы можем утверждать, что $l(x)$ — дистрибутивный ограниченный на U функционал (его норма не превышает C)

Мы можем распространить его по непрерывности на все X. Будем по-прежнему через $l(x)$ обозначать полученный таким образом линейный функционал и докажем, что $l_n(x) \to l(x)$ при любом $x \in X$. Если $x \in U$, то это имеет место. Пусть $x_0 \in U$. При любом заданном $\varepsilon > 0$ существует такой элемент $x_0' \overline{\in} U$, что $\|x_0 - x_0'\| \leqslant \frac{\varepsilon}{4C}$. Принимая во внимание, что нормы $l_n(x)$ и $l(x)$ не превышают C, можем написать

$$|l(x_0) - l_n(x_0)| \leqslant |l(x_0) - l(x_0')| + |l(x_0') - l_n(x_0')| + |l_n(x_0') - l_n(x_0)| \leqslant \|l\| \|x_0 - x_0'\| + |l(x_0') - l_n(x_0')| + \|l_n\| \cdot \|x_0' - x_0\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + |l(x_0') - l_n(x_0')|.$$

Но $l_n(x_0') \to l(x_0')$, и, следовательно, существует такой значок N, что $|l(x_0') - l_n(x_0')| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ при $n \geqslant N$, и из предыдущего неравенства: $|l(x_0) - l_n(x_0)| \leqslant \varepsilon$ при $n \geqslant N$, откуда и следует, что $l_n(x_0) \to l(x_0)$.

Замечание. Второе условие теоремы можно заменить следующим: существует предел $l_n(x)$ на множестве элементов V, линейная оболочка которого U (линеал) плотна в X. Действительно, из сходимости $l_n(x)$ на V, в силу дистрибутивности $l_n(x)$, следует сходимость $l_n(x)$ на U.

Понятие слабой сходимости функционалов приводит естественно к понятию слабой компактности. Множество W элементов X^* называется слабо компактным, если из любой последовательности функционалов $l_n \in W$ можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность.

Теорема 3. *Если X сепарабельно, то, любое ограниченное множество функционалов ($\|l\| \leqslant r$ $(r > 0)$) слабо компактно.*

Нам надо показать, что если у последовательности линейных функционалов $l_n(x)$ нормы ограничены $\|l_n\| \leqslant r$, то можно выбрать подпоследовательность $l_{n_k}(x)$, сходящуюся для всякого $x \in X$. Пусть $x_1, x_2 \ldots$ — счетное множество V элементов X, плотное в X. При любом m имеем $|l_n(x_m)| \leqslant r\|x_m\|$, т. е. последовательность чисел $l_n(x_m)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ ограничена. Применяя обычный диагональный процесс [**IV; 15**], мы образуем подпоследовательность $l_{n_k}(x)$, сходящуюся на всех элементах V. Из замечания к предыдущей теореме следует, что последовательность сходится на всем X, и теорема доказана.

Замечание. Слабо компактным является, очевидно, и всякое ограниченное множество элементов X^*, поскольку его можно заключить в некоторую сферу $\|l\| \leqslant r$.

101. Слабая сходимость элементов. Введем теперь понятие слабой сходимости элементов пространства X типа B. Говорят, что последовательность x_n элементов X слабо сходится к элементу x_0, и пишут $x_n \xrightarrow{\text{сл.}} x_0$, если $l(x_n) \to l(x)$ для любого линейного функцио-

нала $l(x)$. Элемент x_0 называется слабым пределом x_n. Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ не может слабо сходиться к разным пределам. Действительно, если $x_n \xrightarrow{\text{сл.}} x_0$ и $x_n \xrightarrow{\text{сл.}} y_0$, то, по определению, $l(x_n) \to l(x_0)$ и $l(x_n) \to l(y_0)$ для любого $l \in X^*$, откуда $l(y_0) = l(x_0)$ или $l(y_0 - x_0) = 0$ для любого $l \in X^*$. Но если $y_0 \neq x_0$, т. е. $y_0 - x_0$ не есть нулевой элемент, то существует такой элемент $l \in X^*$, что $l(y_0 - x_0) = \|y_0 - x_0\| > 0$, что противоречит сказанному выше, и тем самым сформулированное выше утверждение доказано. Если $x_n \xrightarrow{\text{сл.}} x_0$, то, очевидно, что и всякая подпоследовательность $x_{n_k} \xrightarrow{\text{сл.}} x_0$. Если $x_n \xrightarrow{\text{сл.}} x_0$, $y_n \xrightarrow{\text{сл.}} y_0$ и $a_n \to a_0$, то $a_n x_n \xrightarrow{\text{сл.}} a_0 x_0$, $x_n + y_n \xrightarrow{\text{сл.}} x_0 + y_0$. Это непосредственно следует из дистрибутивности функционалов.

Сходимость по норме $\|x_0 - x_n\| \to 0$, которую мы записывали выше в виде $x_n \Rightarrow x_0$, называют иногда сильной сходимостью. Мы ее называли просто сходимостью. В силу непрерывности линейного функционала из $x_n \Rightarrow x_0$ следует, что $l(x_n) \to l(x_0)$ для любого $l \in X^*$, т. е. из сильной сходимости следует слабая сходимость.

Из слабой сходимости, вообще говоря, не следует сильной. Приведем пример. Рассмотрим пространство L_2 на отрезке $[0, 1]$. В качестве последовательности x_n возьмем функции $\sin n\pi t$ ($n = 1, 2, \ldots$).

Как будет показано ниже [**102**], общий вид функционалов в $L_2[0, 1]$ дается формулой

$$l(x) = \int_0^1 f(t)\, x(t)\, dt,$$

где $f(t)$ — фиксированная функция из $L_2[0, 1]$ и $x(t)$ — любой элемент этого пространства. В частности, для элементов $x_n(t) = \sin n\pi t$ имеем:

$$l(x_n) = \int_0^1 f(t) \sin n\pi t\, dt,$$

откуда видно, что, с точностью до множителя $\sqrt{2}$, $l(x_n)$ суть коэффициенты Фурье $f(t)$ относительно системы $\sin n\pi t$ на промежутке $[0, 1]$. Мы знаем, что $l(x_n) \to 0$ при любом выборе $f(t)$ из $L_2[0, 1]$, т. е. $l(x_n) \to l(\theta)$, где θ — нулевой элемент $L_2[0, 1]$ (функция, эквивалентная нулю). Таким образом, $\sin n\pi t \xrightarrow{\text{сл.}} \theta$ при $n \to \infty$ в $L_2[0, 1]$. В то же время сильной сходимости нет, так как

$$\|\theta - x_n\|^2 = \int_0^1 \sin^2 n\pi t\, dt = \frac{1}{2}.$$

Теорема 1. *Если* $x_n \xrightarrow{\text{сл.}} x_0$, *то последовательность* $\|x_n\|$ *ограничена.*

Мы можем рассматривать x_n и x_0 как элементы X^{**}. При этом из $x_n \xrightarrow{\text{сл.}} x_0$ следует, что соответствующие x_n функционалы в X^* сходятся слабо к функционалу, соответствующему x_0. Но при этом, по теореме 1 из [**100**], нормы упомянутых функционалов, равные $\|x_n\|$, образуют ограниченное множество, и теорема доказана.

Слабая компактность множества элементов X определяется так же, как и слабая компактность множества функционалов. Всякое ограниченное множество элементов x ($\|x\| \leqslant C$) является ограниченным множеством в X^{**}, но это последнее множество, при сепарабельности X^*, слабо компактно, как множество функционалов в X^*. Если X — регулярное пространство, т. е. $X^{**} = X$, то из сказанного следует:

Теорема 2. *Если* X *— регулярно, а* X *и* X^* *сепарабельны, то всякое ограниченное множество элементов* X *слабо компактно.*

Отметим, что если X не регулярное пространство, т. е. X^{**} шире X, то предел последовательности элементов X^{**} может быть таким элементом X^{**}, которому не соответствует элемент X. Можно доказать, что если X сепарабельно и регулярно, то и X^* сепарабельно.

Из указанного выше соответствия элементам $x \in X$ элементов X^{**} и теоремы 2 из [**100**] непосредственно следует:

Теорема 3. *Для того чтобы последовательность* x_n *элементов регулярного пространства* X *слабо сходилась, необходимо и достаточно, чтобы последовательность* $\|x_n\|$ *была ограниченной и чтобы существовал предел* $l(x_n)$ *на некотором линеале* U *элементов* $l \in X^*$, *плотном в* X^*.

Как и в [**100**], линеал U можно заменить таким множеством V элементов X^*, линейная оболочка которого плотна в X^*.

Теорема 4. *Пусть* A *— линейный оператор в пространстве* X *типа* B *и* $R(A)$ *принадлежит пространству* X' *также типа* B. *Если* $x_n \xrightarrow{\text{сл.}} x_0$ *в* X, *то* $Ax_n \xrightarrow{\text{сл.}} Ax_0$ *в* X'.

Пусть $m(y)$ — любой линейный функционал в X'. Нетрудно видеть, что $m(Ax)$ есть линейный функционал в X, и из $x_n \xrightarrow{\text{сл.}} x_0$ в X следует, что $m(Ax_n) \to m(Ax_0)$. Это имеет место для любого функционала в X', и, следовательно, $Ax_n \xrightarrow{\text{сл.}} Ax_0$ в X', и теорема доказана. Мы знаем, что линейный оператор непрерывен в смысле сильной сходимости. Теорема 4 утверждает, что он непрерывен и в смысле слабой сходимости.

Мы видели, что если $x_n \Rightarrow x_0$, то $\|x_n\| \to \|x_0\|$ [**95**]. Для слабой сходимости этого свойства может и не быть. Обратимся к указанному выше примеру последовательности функций $\sin n\pi x$ из L_2 на $[0, 1]$. Мы видели, что $\sin n\pi x \xrightarrow{\text{сл.}} 0$, а $\|\sin n\pi x\| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Теорема 5. *Если* $x_n \xrightarrow{\text{сл.}} x_0$, *то* $\|x_0\| \leqslant \overline{\lim}\, \|x_n\|$. Отметим прежде всего, что $\overline{\lim}\, \|x_n\|$ — конечен в силу теоремы 1. Доказываем теорему

от обратного. Пусть $\|x_0\| > \overline{\lim}\|x_n\|$. Возьмем какое-нибудь число m, удовлетворяющее неравенству

$$\|x_0\| > m > \overline{\lim}\|x_n\|. \tag{67}$$

Отсюда следует, что существует такое N, что $\|x_n\| < m$ при $n \geqslant N$. Далее имеется такой линейный функционал $l(x)$, что $l(x_0) = \|x_0\|$ и $\|l\| = 1$ [**98**], и мы имеем $|l(x_n)| \leqslant \|l\| \cdot \|x_n\|$, т. е. $|l(x_n)| \leqslant \|x_n\| < m$ при $n \geqslant N$, а, в силу (67), $l(x_0) = \|x_0\| > m$.

Таким образом, $l(x_n)$ не стремится к $l(x_0)$, что противоречит условию теоремы, и теорема доказана.

Положим, что пространство X удовлетворяет следующему условию: при любом заданном $\delta > 0$ существует число $\eta < 1$ такое, что если $\|x\| = \|y\| = 1$ и $\|x - y\| = \delta$, то $\frac{\|x+y\|}{2} < \eta$. При этом говорят, что X — равномерно выпуклое пространство. Для таких пространств справедливо следующее утверждение: если $x_n \xrightarrow{\text{сл.}} x_0$ и $\|x_n\| \to \|x_0\|$, то $x_n \Rightarrow x_0$. В дальнейшем мы докажем это для частного случая пространства — гильбертова пространства. Свойство равномерной выпуклости имеет место для пространства L_p при $p > 1$ (см., например, С. Л. Соболев „Некоторые применения функционального анализа в математической физике“).

Теорема 6. *Если* $x_n \xrightarrow{\text{сл.}} x_0$, *то* x_0 *принадлежит замыканию* (*по норме*) *линейной оболочки множества элементов* x_n $(n = 1, 2...)$. Доказываем это от обратного. Пусть U — линейная оболочка элементов x_n, предположим, что x_0 не принадлежит U, т. е.

$$\inf_{y \in U} \|x_0 - y\| = d > 0. \tag{68}$$

Для всякого числа t, отличного от нуля, имеем

$$\|tx_0 + y\| \geqslant |t|\, d. \tag{69}$$

Действительно,

$$\|tx_0 + y\| = |t| \cdot \left\|x_0 - \frac{1}{-t} y\right\|.$$

Но если $y \in U$, то и $\frac{1}{-t} y \in U$, и (69) непосредственно следует из (68). Рассмотрим теперь множество элементов вида

$$x = tx_0 + y, \tag{70}$$

где $y \in U$ и t — любое число. Как и в [**98**], легко видеть, что представление x в виде (70) единственно, и что указанное множество элементов x — линеал. Обозначим его буквой V и определим на нем дистрибутивный функционал формулой $l(x) = t$, так что $l(y) = 0$, если $y \in U$. Докажем, что этот функционал ограничен на V. Пусть $t \neq 0$. В силу (69) можем написать $|l(tx_0 + y)| = |t| \leqslant \frac{1}{d}\|tx_0 + y\|$. При $t = 0$ это неравенство очевидно.

Таким образом, $\|l\| \leqslant \frac{1}{d}$ на V. Мы можем продолжить l на все X с той же оценкой нормы и получим некоторый линейный функционал $l(x)$. По определению $l(x_0)=1$ и $l(x_n)=0$, ибо все $x_n \in U$. Мы видим, что $l(x_n)$ не стремится к $l(x_0)$, что противоречит условию теоремы: $x_n \xrightarrow{\text{сл.}} x_0$. Теорема доказана.

Доказанную теорему можно сформулировать еще следующим образом: если $x_n \xrightarrow{\text{сл.}} x_0$, то существует последовательность линейных комбинаций элементов x_n: $c_1^k x_1 + c_2^k x_2 + \ldots + c_{n_k}^k x_{n_k}$ $(k=1,2,\ldots)$, которая сильно стремится к x_0: $c_1^k x_1 + c_2^k x_2 + \ldots + c_{n_k}^k x_{n_k} \Rightarrow x_0$ при $k \to \infty$.

Можно доказать более сильное утверждение: если $x_n \xrightarrow{\text{сл.}} x_0$, то существует такая подпоследовательность x_{n_k} $(k=1,2,\ldots)$, что

$$\frac{1}{k}(x_{n_1} + x_{n_2} + \ldots + x_{n_k}) \Rightarrow x_0 \text{ при } k \to \infty.$$

Теорема 7. *Если пространство X регулярно и последовательность $x_n \in X$ слабо сходится в себе, т. е. $l(x_n) - l(x_m) = l(x_n - x_m) \to 0$ при n и $m \to \infty$ для всякого элемента $l \in X^*$, то эта последовательность x_n — слабо сходящаяся.*

Из условия теоремы и признака Коши для числовых последовательностей следует, что $l(x_n)$ имеет предел для любого $l \in X^*$, т. е. линейные функционалы $L_{x_n}(l) = l(x_n)$ в X^* имеют предел для любого $l \in X^*$. Этот предел есть также некоторый линейный функционал в X^*. Но из регулярности X следует, что этот предельный функционал имеет вид $L_{x_0}(l) = l(x_0)$, т. е. для любого $l \in X^*$ имеем $l(x_n) \to l(x_0)$, т. е. $x_n \xrightarrow{\text{сл.}} x_0$, что и требовалось доказать.

Иначе теорему 7 можно формулировать так: *регулярное пространство X обладает слабой полнотой.*

102. Линейные функционалы в C, L_p и l_p. 1. Мы знаем, что в C на конечном промежутке $[a,b]$ общий вид линейного функционала есть [15]:

$$l(f) = \int_a^b f(x)\,dg(x), \tag{71}$$

где $g(x)$ — функция ограниченной вариации, непрерывная справа и удовлетворяющая условию $g(a)=0$, причем различные функции $g(x)$ с указанными свойствами порождают различные функционалы $l(f)$. Мы знаем также, что $\|l\| = \overset{b}{V}_a g(x)$. Можем, таким образом, сопоставить каждому $l(f)$ в C функцию $g(x)$ с указанными свойствами и

с нормой $\|g\| = \overset{b}{V}_{a} g(x)$ и отождествить пространство C^* с пространством V указанных функций. Пространство V есть пространство типа B [96].

Рассмотрим теперь функционалы в C^*, т. е. в V. Формула (71) при любой фиксированной непрерывной на $[a, b]$ функции $f(x)$ дает такой функционал.

Этим самым пространство C погружается в C^{**}. Покажем, что не все функционалы в V представимы формулой (71). Возьмем в качестве функционала $l_0(f)$ в V сумму скачков $g(x)$ и покажем, что он не представим формулой (71) ни при каком выборе непрерывной функции $f(x)$. Построим следующий элемент V:

$$g_0(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } a \leqslant x < c, \\ 1 \text{ при } c \leqslant x \leqslant b. \end{cases} \qquad (c > a).$$

Если бы мы имели формулу (71), то получили бы $l_0(g_0) = f(c)$. Но сумма скачков $g_0(x)$ есть единица и, следовательно, $f(c) = 1$, т. е. непрерывная функция $f(x) \equiv 1$. Но тогда формула (71) дает $l_0(g) = g(b) - g(a)$, а эта разность не для всякой функции $g(x) \in V$ есть сумма скачков. Таким образом, C^{**} шире, чем C, т. е. C — не регулярное пространство. Все сказанное выше относится к вещественным функциям, но может быть распространено и на комплексные функции:

2. Установим теперь общую форму линейного функционала в пространстве L_p $(p > 1)$ вещественных функций на ограниченном измеримом множестве $\mathcal{E}_0$ из R_n. Пусть $l(f)$ — такой функционал и $\omega_{\mathcal{E}}(x)$ — характеристическая функция какого-либо измеримого множества $\mathcal{E}$, входящего в $\mathcal{E}_0$. Очевидно $\omega_{\mathcal{E}}(x) \in L_p(\mathcal{E}_0)$, и мы обозначим

$$l(\omega_{\mathcal{E}}) = F(\mathcal{E}). \tag{72}$$

Покажем, что эта функция множеств, определенная для всех измеримых $\mathcal{E}$ из $\mathcal{E}_0$, вполне аддитивна. Пусть $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \ldots$, где измеримые множества $\mathcal{E}_k$ не имеют попарно общих точек. Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \omega_{\mathcal{E}_k}(x) \tag{73}$$

сходится в $L_p(\mathcal{E}_0)$. Действительно,

$$\left\| \sum_{k=p}^{q} \omega_{\mathcal{E}_k}(x) \right\|_{L_p(\mathcal{E}_0)} = \left[\sum_{k=p}^{q} \int_{\mathcal{E}_k} dx \right]^{\frac{1}{p}} = \left[\sum_{k=p}^{q} m(\mathcal{E}_k) \right]^{\frac{1}{p}},$$

и последняя сумма стремится к нулю при p и $q \to \infty$, в силу полной аддитивности меры. В каждой точке x из $\mathcal{E}$ ряд (73) сходится к $\omega_{\mathcal{E}}(x)$.

Следовательно, и в $L_p(\mathfrak{E}_0)$ он сходится к $\omega_{\mathfrak{E}}(x)$ [**62**] (или к эквивалентной ей функции), т. е.

$$\omega_{\mathfrak{E}}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_{\mathfrak{E}_k}(x), \tag{74}$$

причем сходимость можно понимать, как сходимость в $L_p(\mathfrak{E}_0)$. В силу непрерывности функционала $l(f)$ в $L_p(\mathfrak{E}_0)$ из (74) получаем $F(\mathfrak{E}) = F(\mathfrak{E}_1) + F(\mathfrak{E}_2) + \ldots$, т. е. полную аддитивность функции $F(\mathfrak{E})$. Если $\mathfrak{E}'$ есть множество меры нуль, то

$$|l[\omega_{\mathfrak{E}'}(x)]| \leqslant \|l\| \cdot \|\omega_{\mathfrak{E}'}(x)\|_{L_p(\mathfrak{E}_0)} \leqslant \|l\| \left[\int_{\mathfrak{E}'} dx\right]^{\frac{1}{p}} = 0.$$

т. е. $l[\omega_{\mathfrak{E}'}(x)] = 0$, если $m(\mathfrak{E}') = 0$, и теорема из [**73**] дает для $F(\mathfrak{E})$ представление:

$$F(\mathfrak{E}) = \int_{\mathfrak{E}} \psi(x)\, dx,$$

где относительно $\psi(x)$ мы можем утверждать пока, что она суммируема на $\mathfrak{E}_0$. Таким образом доказано, что

$$l[\omega_{\mathfrak{E}}(x)] = \int_{\mathfrak{E}_0} \psi(x)\, \omega_{\mathfrak{E}}(x)\, dx.$$

В силу дистрибутивности $l(f)$, имеем

$$l(\varphi) = \int_{\mathfrak{E}_0} \psi(x)\varphi(x)\, dx \tag{75}$$

для любой ограниченной функции $\varphi(x)$ с конечным числом значений. Покажем теперь, что формула верна и для любой ограниченной измеримой на $\mathfrak{E}_0$ функции $\varphi(x)$ (такая функция принадлежит $L_p(\mathfrak{E}_0)$). Положим сначала, что $\varphi(x) \geqslant 0$. По теореме 1 из [**46**] существует последовательность функций $\varphi_n(x)$ с конечным числом конечных значений такая, что $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ равномерно на $\mathfrak{E}_0$. Тем самым, $\varphi_n(x)$ ограничены на $\mathfrak{E}_0$ одним и тем же числом. Для $\varphi_n(x)$ мы имеем формулу

$$l(\varphi_n) = \int_{\mathfrak{E}} \psi(x)\, \varphi_n(x)\, dx. \tag{76}$$

Очевидно, что $\varphi_n(x) \Rightarrow \varphi(x)$ в $L_p(\mathfrak{E}_0)$, и можно переходить к пределу под знаком интеграла [**54**] в последней формуле. Непрерывность функционала $l(\varphi)$ приводит к формуле (75), которая таким образом установлена для любой неотрицательной ограниченной измеримой на $\mathfrak{E}_0$ функции $\varphi(x)$. Случай ограниченной функции любого

знака непосредственно сводится к рассмотренному путем представления: $\varphi(x)=\varphi^+(x)-\varphi^-(x)$, где $\varphi^+(x)$ и $\varphi^-(x)$ — положительная и отрицательная части $\varphi(x)$. Докажем теперь, что $\psi(x)\in L_{p'}(\mathcal{E}_0)$, где $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. Подставляя в (75) ограниченную измеримую функцию $\varphi(x)$, определяемую следующим образом:

$$\varphi(x)=\begin{cases}|\psi(x)|^{p'-1}\operatorname{sgn}\psi(x) & \text{при } |\psi(x)|\leqslant N,\\ N^{p'-1}\operatorname{sgn}\psi(x) & \text{при } |\psi(x)|>N,\end{cases} \tag{77}$$

где

$$\operatorname{sgn}\alpha=\begin{cases}1 & \text{при } \alpha>0,\\ -1 & \text{при } \alpha<0,\\ 0 & \text{при } \alpha=0,\end{cases}$$

получим

$$l(\varphi)\geqslant\int\limits_{\mathcal{E}_0}|\varphi(x)|^p\,dx, \tag{78}$$

ибо $|\psi(x)|\geqslant|\varphi(x)|^{\frac{1}{p'-1}}$ и $\frac{p'}{p'-1}=p$.

С другой стороны,

$$l(\varphi)\leqslant\|l\|\cdot\|\varphi\|=\|l\|\left[\int\limits_{\mathcal{E}_0}|\varphi(x)|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}},$$

и, в силу (78), имеем

$$\int\limits_{\mathcal{E}_0}|\varphi(x)|^p\,dx\leqslant\|l\|\left[\int\limits_{\mathcal{E}_0}|\varphi(x)|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}},$$

откуда

$$\left[\int\limits_{\mathcal{E}_0}|\varphi(x)|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p'}}\leqslant\|l\|.$$

Но из (77) следует

$$|\varphi(x)|^p=\begin{cases}|\psi(x)|^{p'} & \text{при } |\psi(x)|\leqslant N,\\ N^{p'} & \text{при } |\psi(x)|>N\end{cases}$$

и, следовательно,

$$\left[\int\limits_{\mathcal{E}_0}|\psi_N(x)|^{p'}\right]^{\frac{1}{p'}}\leqslant\|l\|, \tag{79}$$

где $\psi_N(x)$ — урезанная функция $\psi(x)$. Отсюда следует, что $\psi(x)\in L_{p'}(\mathcal{E}_0)$ и что

$$\|l\|\geqslant\|\psi\|_{L_{p'}(\mathcal{E}_0)}. \tag{80}$$

Пусть теперь $\varphi(x)$ — любая функция из $L_p(\mathcal{E}_0)$. Существует последовательность измеримых ограниченных функций $\varphi_n(x)$, которая в $L_p(\mathcal{E}_0)$ стремится к $\varphi(x)$. В силу непрерывности функционала: $l(\varphi_n) \to l(\varphi)$ и в силу [62]:

$$\int_{\mathcal{E}_0} \psi(x)\,\varphi_n(x)\,dx \to \int_{\mathcal{E}_0} \psi(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

Для $\varphi_n(x)$ мы имеем формулу (75), и из сказанного выше следует, что она имеет место и для любой функции $\varphi(x) \in L_p(\mathcal{E}_0)$. В силу неравенства Гёльдера:

$$|l(\varphi)| = \left[\int_{\mathcal{E}_0} |\psi(x)|^{p'}\,dx\right]^{\frac{1}{p'}} \|\varphi\|_{L_p(\mathcal{E}_0)},$$

$$\|l\| \leqslant \|\psi\|_{L_{p'}(\mathcal{E}_0)}, \tag{81}$$

что, совместно с (80), дает

$$\|l\| = \|\psi\|_{L_{p'}(\mathcal{E}_0)}. \tag{82}$$

Таким образом, всякий линейный функционал в $L_p(\mathcal{E}_0)$ представим формулой (75), где $\psi(x) \in L_{p'}(\mathcal{E}_0)$, и имеет место формула (82).

Пусть $\psi(x)$ — любая фиксированная функция из $L_{p'}(\mathcal{E}_0)$. В силу неравенства Гёльдера формула (75) дает линейный функционал в $L_p(\mathcal{E}_0)$, норма которого удовлетворяет неравенству (81), т. е. (75) есть общая форма линейного функционала в $L_p(\mathcal{E}_0)$. Принимая во внимание, что из $p(p'-1) = p'$ следует, что функция $\varphi(x) = |\psi(x)|^{p'-1} \operatorname{sgn}\psi(x)$ принадлежит $L_p(\mathcal{E}_0)$, можем подставить это $\varphi(x)$ в формулу (75):

$$l\left[|\psi(x)|^{p'-1} \operatorname{sgn}\psi(x)\right] = \int_{\mathcal{E}_0} |\psi(x)|^{p'}\,dx. \tag{83}$$

Норма $\varphi(x) = |\psi(x)|^{p'-1} \operatorname{sgn}\psi(x)$ в $L_p(\mathcal{E}_0)$ равна:

$$\left[\int_{\mathcal{E}_0} |\varphi(x)|^{p}\,dx\right]^{\frac{1}{p}} = \left[\int_{\mathcal{E}_0} |\psi(x)|^{p'}\,dx\right]^{\frac{1}{p}},$$

и из (83) получаем

$$\int_{\mathcal{E}_0} |\psi(x)|^{p'}\,dx \leqslant \|l\| \left[\int_{\mathcal{E}_0} |\psi(x)|^{p'}\right]^{\frac{1}{p}},$$

откуда

$$\|l\| \geqslant \|\psi(x)\|_{L_{p'}(\mathcal{E}_0)},$$

что совместно с (81) опять дает (82). Таким образом, формула (75), где $\psi(x)$ — любая функция из $L_{p'}(\mathcal{E}_0)$, дает общую форму линейного функционала в $L_p(\mathcal{E})$, причем имеет место формула (82).

Эквивалентные функции $\psi(x)$ дают, очевидно, одинаковые функционалы (совпадающие на всех $\varphi(x) \in L_p(\mathcal{E}_0)$. Покажем, что неэквивалентные $\psi(x)$ дают различные функционалы. Это сводится, очевидно, к доказательству следующего утверждения: если $\psi_0(x) \in L_{p'}(\mathcal{E}_0)$ и для любого $\varphi(x) \in L_p(\mathcal{E}_0)$:

$$\int_{\mathcal{E}_0} \psi_0(x)\,\varphi(x)\,dx = 0,$$

то $\psi_0(x)$ эквивалентна нулю. Полагая $\varphi(x) = |\psi_0(x)|^{p'-1} \operatorname{sgn} \psi_0(x)$, получим

$$\int_{\mathcal{E}_0} |\psi_0(x)|^{p'}\,dx = 0,$$

откуда непосредственно следует, что $\psi_0(x)$ эквивалентна нулю [51].

Рассмотрим теперь пространство $L_p(\mathcal{E}_\infty)$, где $\mathcal{E}_\infty$ — все пространство R_n. Как и выше, доказывается, что если $\psi(x)\, L_{p'} \in (\mathcal{E}_\infty)$, то формула (75) определяет линейный функционал в $L_p(\mathcal{E}_\infty)$ и имеет место равенство (82). Докажем, что всякий функционал в $L_p(\mathcal{E}_\infty)$ представим в виде (75), где $\psi(x) \in L_{p'}(\mathcal{E}_\infty)$. Рассмотрим те функции $\varphi(x)$ из $L_p(\mathcal{E}_\infty)$, которые равны нулю вне промежутка Δ_m ($-m \leqslant x_k \leqslant +m$; $k = 1, 2, \ldots, n$). Они образуют пространство $L_p(\Delta_m)$. Функционал $l(\varphi)$ на $L_p(\mathcal{E}_\infty)$ для таких функций является функционалом и на $L_p(\Delta_m)$, и его общий вид есть

$$l_m(\varphi) = \int_{\mathcal{E}_\infty} \psi_m(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

где $\psi_m(x) \in L_{p'}(\Delta_m)$, причем $\|\psi_m(x)\|_{L_{p'}(\Delta_m)} \leqslant \|l\|$. Из сказанного выше непосредственно следует, что $\psi_{m+k}(x)$ и $\psi_m(x)$ эквивалентны на Δ_m при $k > 0$. Таким путем мы получаем функцию $\psi(x) \in L_{p'}(\mathcal{E}_\infty)$, эквивалентную $\psi_m(x)$ на Δ_m, и имеем

$$l(\varphi) = \int_{\mathcal{E}_\infty} \psi(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

Поскольку финитные функции повсюду плотны в $L_p(\mathcal{E}_\infty)$, мы приходим к тому, что все сказанное выше для $L_p(\mathcal{E}_0)$ имеет место и для $L_p(\mathcal{E}_\infty)$. Легко распространить полученные результаты и на комплексное пространство $L_p(\mathcal{E}_0)$, причем и функционалы могут принимать комплексные значения. Из сказанного выше непосредственно следует, что пространство $L_p^*(\mathcal{E}_0)$ можно отождествить с $L_{p'}(\mathcal{E}_0)$ и

тем самым $L_p^{**}(\mathcal{E}_0)$, т. е. $L_{p'}^{*}(\mathcal{E}_0)$ совпадает с $L_p(\mathcal{E}_0)$. Иначе говоря, правая часть формулы (75) при фиксированном $\varphi(x) \in L_p(\mathcal{E}_0)$ дает общий вид линейного функционала в $L_{p'}(\mathcal{E}_0)$ с нормой, равной $\|\varphi\|_{L_p(\mathcal{E}_0)}$. Таким образом, пространство $L_p(\mathcal{E}_0)$ регулярно. В силу того, что $L_p(\mathcal{E}_0) = L_{p'}^{*}(\mathcal{E}_0)$ и $L_{p'}(\mathcal{E}_0)$ сепарабельно, можно утверждать, что всякая сфера в $L_p(\mathcal{E}_0)$ (или всякое ограниченное множество) слабо компактна. При $p=2$ имеем $p'=2$: т. е. $L_2^{*}(\mathcal{E}_0)$ есть $L_2(\mathcal{E}_0)$. Мы рассмотрим подробно этот случай в следующей главе. Все сказанное выше справедливо и для $L_p(\mathcal{E}_\infty)$. Пользуясь установленной выше формулой линейного функционала в $L_p(\mathcal{E}_0)$ $(p>1)$, докажем следующую теорему:

Теорема. *Если $\psi(x)$ — измеримая на ограниченном измеримом множестве $\mathcal{E}_0$ функция и произведение $\psi(x)\varphi(x)$ суммируемо на $\mathcal{E}_0$ при любой $\varphi(x) \in L_p(\mathcal{E}_0)$ $(p>1)$, то $\psi(x) \in L_{p'}(\mathcal{E}_0)$.*

Из условия теоремы непосредственно следует, что $\psi(x)$ может принимать бесконечное значение лишь на множестве меры нуль, и мы можем считать, что $\psi(x)$ принимает лишь конечные значения. Определим последовательность функций:

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{если } |\psi(x)| \leqslant n, \\ n & \text{если } |\psi(x)| > n, \end{cases} \tag{84}$$

которая стремится к $\psi(x)$ во всякой точке x. Если $\varphi(x)$ любая функция из $L_p(\mathcal{E}_0)$, то $|\psi_n(x)\varphi(x)| \leqslant |\psi(x)\varphi(x)|$, причем произведение $\psi(x)\varphi(x)$, по условию, суммируемо на $\mathcal{E}_0$. Отсюда следует:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathcal{E}_0} \psi_n(x)\varphi(x)\,dx = \int_{\mathcal{E}_0} \psi(x)\varphi(x)\,dx.$$

Но $\psi_n(x)$, как ограниченные функции, принадлежат $L_{p'}(\mathcal{E}_0)$, и интегралы, стоящие в левой части, суть линейные функционалы от $\varphi(x)$ в $L_p(\mathcal{E}_0)$. Из того, что они на любом элементе $\varphi(x) \in L_p(\mathcal{E}_0)$ имеют предел, следует, что их нормы ограничены некоторым числом A [**100**]

$$\int_{\mathcal{E}_0} |\psi_n(x)|^{p'} dx \leqslant A^{p'},$$

откуда в пределе получаем [**54**]

$$\int_{\mathcal{E}_0} |\psi(x)|^{p'} dx \leqslant A^{p'},$$

что и требовалось доказать.

Случай $p=1$ представляет особенность. Можно показать, что пространство L_1^{*} изометрично M (пространству измеримых ограниченных функций) и L_1 — нерегулярное пространство.

3. Рассмотрим теперь линейные функционалы в $l_p\,(p>1)$. Пусть $l(x)$ — такой функционал. Всякому элементу пространства l_p: $x(\xi_1, \xi_2, \ldots)$ соответствует урезанный элемент $x_n(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, 0, 0, \ldots)$, и из того факта, что ряд с общим членом $|\xi_k|^p$ сходится, непосредственно следует, что $x_n \Longrightarrow x$. Введем элементы $y_k(\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \ldots)$ $(k=1, 2, \ldots)$ такие, что $\xi_i^{(k)}=0$ при $i\neq k$ и $\xi_i^{(i)}=1$. Обозначим $l(y_k)=a_k$. В силу дистрибутивности $l(x)$ имеем $l(x_n)=a_1\xi_1+a_2\xi_2+\ldots+a_n\xi_n$, и, пользуясь непрерывностью $l(x)$, получим

$$l(x)=a_1\xi_1+a_2\xi_2+\ldots \tag{85}$$

Займемся числами a_k. Введем элементы $z_N(\eta_1^{(N)}, \eta_2^{(N)}, \ldots)$ из l_p следующим образом:

$$\eta_k^{(N)}=\begin{cases} |a_k|^{p'-1}\operatorname{sgn} a_k & \text{при } k\leqslant N,\\ 0 & \text{при } k>N.\end{cases}$$

Мы имеем

$$l(z_N)=\sum_{k=1}^{N}|a_k|^{p'}$$

и

$$\sum_{k=1}^{N}|a_k|^{p'}=l(z_N)\leqslant\|l\|\cdot\|z_N\|=\|l\|\left[\sum_{k=1}^{N}|a_k|^{p'}\right]^{\frac{1}{p}},$$

откуда

$$\left[\sum_{k=1}^{N}|a_k|^{p'}\right]^{\frac{1}{p'}}\leqslant\|l\|$$

и в пределе при $N\to\infty$:

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^{p'}\right]^{\frac{1}{p'}}\leqslant\|l\|,$$

т. е. $v(a_1, a_2\ldots)\in l_{p'}$ и

$$\|v\|_{l_{p'}}\leqslant\|l\|. \tag{86}$$

Далее, неравенство Гёльдера, примененное к сумме (85), показывает, что $\|l\|\leqslant\|v\|_{l_{p'}}$, и, в силу (86), получаем

$$\|l\|=\|v\|_{l_{p'}}. \tag{87}$$

Совершенно так же, как и для L_p, можно показать, что формула (85), где $v(a_1, a_2, \ldots)$ — любой элемент $l_{p'}$, дает общую форму линейного функционала в l_p, причем элемент v определяется функционалом $l(x)$ единственным образом и имеет место формула (87). Отсюда следует, что l_p^* есть $l_{p'}$ и что l_p — регулярное пространство.

Имеет место теорема, совершенно аналогичная теореме, доказанной выше: если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k a_k,$$

где b_k фиксированы, сходятся при любом выборе $(a_1, a_2, \ldots) l_p \in (p > 1)$, то $(b_1, b_2, \ldots) \in l_{p'}$.

103. Слабая сходимость в C, L_p и l_p. 1. Слабая сходимость элементов $f_n(x) \in C$ к элементу $f(x) \in C$ (на конечном промежутке $[a, b]$) определяется равенством

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dg(x) = \int_a^b f(x)\, dg(x) \tag{88}$$

для всякой функции ограниченной вариации $g(x)$. Укажем необходимые и достаточные условия этой сходимости: а) существует такое число $C > 0$, что $|f_n(x)| \leqslant C$ $(n = 1, 2, \ldots)$; в) $f_n(x) \to f(x)$ при любом $x \in [a, b]$.

Условие: а) непосредственно следует из [**101**]. Далее, если $x = x_0$ — любое фиксированное значение из $[a, b]$ и $f(x)$ — любой элемент C, то $l_0(f) = f(x_0)$ является, очевидно, линейным функционалом в C, и, поскольку $f_n(x) \xrightarrow{\text{сл.}} f(x)$, мы должны иметь $l_0(f_n) \to l_0(f)$, т. е. $f_n(x_0) \to f(x_0)$. Теперь надо показать, что из «а» и «в» следует (88) при любом выборе функции ограниченной вариации $g(x)$. В силу $|f_n(x)| \leqslant C$ и $f_n(x) \to f(x)$ предельный переход в (88) допустим, если рассматривать интегралы, как интегралы Лебега — Стилтьеса [**54**]. Но, в силу непрерывности $f(x)$ и $f_n(x)$, эти интегралы можно рассматривать и как обычные интегралы Стилтьеса.

Отметим еще, что в силу теоремы из [**101**], при соблюдении условий «а» и «в» существует такая последовательность линейных комбинаций $f_n(x)$, которая стремится к $f(x)$ равномерно на $[a, b]$. Функции $f_n(x)$ и $f(x)$ предполагаются, как это указано выше, непрерывными.

Отметим, что нерегулярное пространство C не является слабо полным. Этот факт соответствует тому, что предел последовательности $f_n(x)$ непрерывных функций, сходящихся в каждой точке из $[a, b]$ и ограниченных в совокупности $(|f_n(x)| \leqslant m)$, может и не быть непрерывной функцией.

2. Слабая сходимость элементов $\varphi_n(x) \in L_p(\mathfrak{E}_0)$ $(p > 1)$ к элементу $\varphi(x) \in L_p(\mathfrak{E}_0)$ определяется равенством

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathfrak{E}_0} \psi(x)\, \varphi_n(x)\, dx = \int_{\mathfrak{E}_0} \psi(x)\, \varphi(x)\, dx \tag{89}$$

для всякой функции $\psi(x) \in L_{p'}(\mathcal{E}_0)$. В силу теоремы 3 из [101] необходимые и достаточные условия слабой сходимости в $L_p(\mathcal{E}_0)$ можно сформулировать так: а) нормы $\varphi_n(x)$ — ограничены, т. е.

$$\left[\int\limits_{\mathcal{E}_0} |\varphi_n(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant C, \tag{90}$$

и в) формула (89) имеет место на множестве элементов $\psi(x)$ из $L_{p'}(\mathcal{E}_0)$, линейная оболочка которого повсюду плотна в $L_{p'}(\mathcal{E}_0)$. При выполнении условия (90) достаточно, например, чтобы формула (89) имела место для всех характеристических функций $\omega_{\mathcal{E}}(x)$ измеримых множеств $\mathcal{E}$, входящих в $\mathcal{E}_0$ ($\mathcal{E}_0$ — ограниченное множество). Для того случая, когда $\mathcal{E}_0$ есть одномерный конечный или бесконечный промежуток, достаточно выполнения условия (90) и равенств

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_c^{\xi} \varphi_n(x)\, dx = \int\limits_c^{\xi} \varphi(x)\, dx, \tag{91}$$

где c — любое фиксированное число из указанного промежутка и ξ — произвольное число из этого промежутка.

3. Слабая сходимость элементов $(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)} \ldots)$ $l_p (p > 1)$ к элементу $(\xi_1, \xi_2, \ldots) \in l_p$ определяется равенством

$$\lim_{n\to\infty} (b_1\xi_1^{(n)} + b_2\xi_2^{(n)} + \ldots) = b_1\xi_1 + b_2\xi_2 + \ldots \tag{92}$$

для любого элемента $(b_1, b_2, \ldots) \in l_{p'}$. Сформулируем необходимые и достаточные условия слабой сходимости:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k^{(n)}|^p \leqslant C^p \tag{93}$$

$$\xi_k^{(n)} \to \xi_k \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{94}$$

Условие (93) обычно, а необходимость (94) вытекает из (92), если взять $b_i = 0$ при $i \neq k$ и $b_k = 1$. Положим, что выполнены условия (93) и (94). Из (94) следует, что (92) выполняется на элементах вида $(0, 0, \ldots, 0, 1, 0, 0, \ldots)$ (ортах пространства $l_{p'}$). Но линейная оболочка ортов плотна в $l_{p'}$, ибо урезанные элементы, все составляющие которых, начиная с некоторого номера (своего для каждого элемента), равны нулю, плотны в $l_{p'}$ [59]. Таким образом, достаточность (93) и (94) вытекает из сказанного в [101].

104. Пространство линейных операторов и сходимость последовательности операторов. Выше мы рассматривали пространство линейных функционалов и вопросы сходимости последовательности функционалов (по норме и слабой). Обратимся к тем же вопросам

для линейных операторов в пространстве X типа B. Пусть Y — пространство всевозможных линейных операторов в X с областью значений в некотором пространстве X' типа B. Сложение и умножение на число определяются, как и для функционалов

$$(A+B)x = Ax + Bx; \quad (cA)x = c(Ax). \tag{95}$$

Норма элемента $A \in Y$ вводится, как норма $\|A\|$ соответствующего оператора. Как и в [**99**], доказывается, что Y есть пространство типа B.

Рассмотрим теперь последовательность линейных операторов A_n $(n = 1, 2, \ldots)$ из X в X'. В силу сказанного выше, если $\|A_n - A_m\| \to 0$ при n и $m \to \infty$, то существует такой линейный оператор A, что $\|A - A_n\| \to 0$, и тем самым для любого $x \in X$ мы имеем $A_n x \Rightarrow Ax$ в X'. Сходимость $\|A - A_n\| \to 0$ называется сходимостью операторов по норме. При этом $\|A_n\|$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ограничены, что следует из неравенства: $\|A_n\| \leqslant \|A\| + \|A_n - A\|$.

Отметим, что для сходимости по норме $\|A - A_n\| \to 0$ необходима и достаточна сходимость по норме в себе, т. е. $\|A_n - A_m\| \to 0$ при n и $m \to \infty$ (полнота пространства операторов).

Напишем очевидное неравенство

$$\|Ax - A_n x\| \leqslant \|A - A_n\| \cdot \|x\|. \tag{96}$$

Если x принадлежит некоторому ограниченному множеству U пространства X, то существует такое d, что $\|x\| \leqslant d$, если $x \in U$, и (96) дает $\|Ax - A_n x\| \leqslant \|A - A_n\| d$. Отсюда следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такой значок N (зависящий от ε и не зависящий от x), что $\|Ax - A_n x\| \leqslant \varepsilon$ при $n \geqslant N$ и $x \in U$, т. е. сходимость $A_n x$ к Ax на любом ограниченном множестве U равномерная. Поэтому вместо сходимости операторов по норме иногда говорят равномерная сходимость операторов. Рассмотрим другой вид сходимости операторов. Говорят, что последовательность линейных операторов A_n сильно сходится к линейному оператору A, если $A_n x \Rightarrow Ax$ в X' для любого $x \in X$.

Как и в [**99**], доказывается, что если $A_n x$ есть сходящаяся в X последовательность при любом $x \in X$, то последовательность норм $\|A_n\|$ ограничена, а также следующее утверждение: для сильной сходимости последовательности A_n достаточно ограниченности $\|A_n\|$ $(\|A_n\| \leqslant C)$ и сходимости $A_n x$ на плотном в X линеале. Положим, что $A_n x$ сходится в X' при любом $x \in X$. Обозначим через Ax предел $A_n x$ $(A_n x \Rightarrow Ax$ в $X')$. Оператор A дистрибутивен в X, в силу дистрибутивности A_n, и ограничен, в силу ограниченности последовательности $\|A_n\|$, т. е. A — линейный оператор. Таким образом, если $A_n x$ — сходящаяся в X' последовательность при любом $x \in X$, то последовательность A_n сильно сходится к линейному

оператору A. В силу полноты X' вместо сходимости последовательности $A_n x$ достаточно потребовать сходимости ее в себе. Таким образом, пространство линейных операторов оказывается полным не только относительно сходимости по норме, но и относительно сильной сходимости. Как мы уже отметили выше, из сходимости по норме следует сильная сходимость.

Рассмотрим еще третью сходимость операторов. Говорят, что последовательность линейных операторов A_n слабо сходится к линейному оператору A, если $A_n x \xrightarrow{\text{сл.}} Ax$ в X' для любого $x \in X$. Из сильной сходимости операторов вытекает, очевидно, слабая сходимость. Для функционалов сильная и слабая сходимости совпадают.

Выше мы определили сложение линейных операторов и их умножение на число. Можно, естественно, определить и умножение операторов. Если A есть линейный оператор из X в X' и B — линейный оператор из X' в X'', то оператор BA, определяемый формулой

$$(BA)\,x = B\,(Ax),$$

есть линейный оператор из X в X''. Его дистрибутивность следует из дистрибутивности A и B, а ограниченность — из очевидного неравенства

$$\|(BA)\,x\| \leqslant \|B\| \cdot \|Ax\|_{X'} \leqslant \|B\| \cdot \|A\| \cdot \|x\|_X.$$

Отсюда следует, что $\|BA\| \leqslant \|B\| \cdot \|A\|$. Можно образовать и произведение нескольких сомножителей. Если A — линейный оператор из X в X, то можно брать его целые положительные степени: $A^2 = A\,(Ax)$ и т. д.

Отметим, что произведение сомножителей может зависеть от их порядка. Если, например, A и B — линейные операторы из X в X, то имеет смысл говорить о следующих линейных операторах из X в X: $(BA)\,x = B\,(Ax)$ и $(AB)\,x = A\,(Bx)$. Эти операторы могут быть различными. Аналогичное замечание относится и к случаю нескольких сомножителей.

Сильную сходимость операторов иногда называют просто сходимостью. Мы будем пользоваться для нее обозначением $A_n \to A$. Пусть A_n и B_n — последовательности линейных операторов из X в X' и a — числовая последовательность. Нетрудно показать, что если $a_n \to a$, $A_n \to A$ и $B_n \to B$, то $a_n A_n \to aA$ и $A_n + B_n \to A + B$. Аналогичное утверждение имеет место и для сходимости по норме. Если A_n — линейные операторы из X в X' и B_n из X' в X'', то из $A_n \to A$ и $B_n \to B$ следует $B_n A_n \to BA$ (то же для сходимости по норме). Докажем последнее утверждение.

Мы имеем

$$BAx - B_n A_n x = (B - B_n)\,(Ax) + B_n\,(A - A_n)\,x$$

и

$$\|BAx - B_n A_n x\|_{X''} \leqslant \|(B - B_n)\,(Ax)\|_{X''} + \|B_n\| \cdot \|(A - A_n)\,x\|_{X'}.$$

Первое слагаемое стремится к нулю, ибо $B_n \to B$, и второе — в силу того, что $\|B_n\|$ ограничены и $A_n \to A$.

105. Сопряженные операторы. Пусть A — линейный оператор из X в X' (X и X' — типа B) и $l'(x)$ — какой-либо функционал в X' ($l' \in X'^*$).

Легко видеть, что $l'(Ax)$ будет при этом линейным функционалом в X:

$$l'(Ax) = l(x).$$

При данном A это равенство приводит в соответствие всякому элементу $l' \in X'^*$ элемент $l \in X^*$. Можно написать это в виде $l = A^* l'$, где оператор A^*, определенный во всем X'^* с областью значений в X^*, называется сопряженным с A. Из дистрибутивности линейных функционалов и оператора A следует дистрибутивность A^*. Покажем теперь ограниченность A^*, а также тот факт, что $\|A^*\| = \|A\|$, причем левая часть есть норма оператора в X'^* и правая в X. Мы имеем

$$|l(x)| = |l'(Ax)| \leqslant \|l'\| \cdot \|Ax\| \leqslant \|l'\| \cdot \|A\| \cdot \|x\|,$$

откуда $\|l\| \leqslant \|l'\| \cdot \|A\|$. Но $l = A^* l'$, и, следовательно, $\|A^*\| \leqslant \|A\|$. Пусть далее x_0 — любой фиксированный элемент X и l' — такой элемент X'^*, что $\|l'\| = 1$ и $l'(Ax_0) = \|Ax_0\|$. Получаем

$$\|Ax_0\| = l'(Ax_0) = l(x_0) \leqslant \|l\| \cdot \|x_0\| = \\ = \|A^* l'\| \cdot \|x_0\| \leqslant \|A^*\| \cdot \|l'\| \cdot \|x_0\| = \|A^*\| \cdot \|x_0\|,$$

т. е. $\|Ax_0\| \leqslant \|A^*\| \cdot \|x_0\|$, откуда $\|A\| \leqslant \|A^*\|$, что, совместно с $\|A^*\| \leqslant \|A\|$ и дает $\|A^*\| = \|A\|$. Это приводит нас к следующей теореме.

Теорема. *Оператор A^*, сопряженный с линейным оператором A из X в X', есть линейный оператор* из X'^* в X^* и $\|A^*\| = \|A\|$.

Замечание. Отметим, что если X' совпадает с X, то A^* есть линейный оператор в X^* с областью значений также в X^*.

Если A и B — линейные операторы из X в X', то из определения сопряженного оператора следует $(A+B)^* = A^* + B^*$. Если A и B — линейные операторы из X в X, то $(BA)^* = A^* B^*$, как это следует из равенств $l(BAx) = (B^* l)(Ax) = A^*(B^* l)(x) = (A^* B^* l)(x)$. В случае вещественного пространства $(cA)^* = cA^*$ и для комплексного $(cA)^* = \bar{c} A^*$.

106. Вполне непрерывные операторы. Линейный оператор A из X в X' называется вполне непрерывным, если всякое ограниченное в X множество он преобразует в компактное в X'. Нетрудно видеть, что дистрибутивный оператор A, определенный во всем X и преобразующий всякое ограниченное множество в компактное, есть ограниченный оператор, т. е. линейный оператор. Действительно, по условию A преобразует сферу $\|x\| \leqslant 1$ в компактное множество Ax.

Но всякое компактное множество ограничено, т. е. существует такое положительное число C, что $\|Ax\| \leqslant C$ при $\|x\| \leqslant 1$, откуда и следует, что A — ограниченный оператор. Таким образом определение вполне непрерывного оператора можно сформулировать и следующим образом: дистрибутивный оператор A, определенный во всем X, называется вполне непрерывным, если он преобразует всякое ограниченное множество в компактное. Из указанного выше следует, что определенный таким образом вполне непрерывный оператор будет и линейным оператором.

Теорема 1. *Если A вполне непрерывный оператор и $x_n \xrightarrow{\text{сл.}} x_0$, то $Ax_n \Rightarrow Ax_0$.* Мы знаем, что $Ax_n \xrightarrow{\text{сл.}} Ax_0$, если A — линейный оператор. По условию теоремы $x_n \xrightarrow{\text{сл.}} x_0$, и потому последовательность чисел $\|x_n\|$ ограничена. Из последовательности Ax_n, в силу полной непрерывности A, можно выбрать подпоследовательность, которая сильно сходится к некоторому элементу $y_0 \in X'$. С другой стороны, из сказанного выше следует, что эта подпоследовательность слабо сходится к Ax_0, и потому $y_0 = Ax_0$. Следовательно, всякая сильно сходящаяся подпоследовательность из последовательности Ax_n сильно сходится к Ax_0. Нам надо доказать, что вся эта последовательность сильно сходится к Ax_0.

Доказываем от обратного. Предполагаем, что существует такое число $\delta > 0$ и такая бесконечная подпоследовательность Ax_{n_k}, что $\|Ax_{n_k} - Ax_0\| \geqslant \delta$.

Из последовательности Ax_{n_k} можно выбрать сильно сходящуюся подпоследовательность, и эта подпоследовательность, как указано выше, должна сильно стремиться к Ax_0, что противоречит неравенству $\|Ax_{n_k} - Ax_0\| \geqslant \delta > 0$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть A_m $(m = 1, 2, \ldots)$ — последовательность вполне непрерывных операторов, которые по норме стремятся к линейному оператору A $(\|A - A_m\| \to 0)$. При этом и оператор A вполне непрерывен.* Надо доказать, что A преобразует всякую ограниченную последовательность элементов $x_n \in X$ $(n = 1, 2, \ldots)$ в компактную. Последовательность $A_m x_n$ при любом фиксированном m компактна. С другой стороны, из сходимости по норме следует равномерная сходимость на всяком ограниченном множестве. Таким образом, для любого заданного $\varepsilon > 0$ существует такое m, что $\|Ax_n - A_m x_n\| \leqslant \varepsilon$ $(n = 1, 2, \ldots)$, т. е. Ax_n имеет компактную ε-сеть $A_m x_n$, откуда и следует компактность Ax_n.

Можно показать, что если A — вполне непрерывный оператор, то и A^*, определенный в X'^* и имеющий область значений в X^*, также вполне непрерывен.

Мы докажем это в дальнейшем для операторов в гильбертовом пространстве. Для этого пространства мы изложим теорию вполне непрерывных операторов более подробно.

107. Операторные уравнения. Мы будем теперь предполагать, что линейные операторы A, определенные в пространстве X, имеют область значений, также принадлежащую X (X' совпадает с X). При этом A^*, определенный в X^*, имеет область значений также в X^*. Буквой E мы будем, как и выше, обозначать оператор тождественного преобразования в любом пространстве типа B, т. е. $Ex = x$ для любого $x \in X$. Напомним еще, что оператором аннулирования мы называем линейный оператор, преобразующий любой элемент x в нулевой элемент. Его норма равна нулю, а у всякого другого линейного оператора она положительна.

Рассмотрим уравнение

$$(A - E)\,x = y, \tag{97}$$

где y — данный и x — искомый элемент X. Переписываем уравнение (97) в виде

$$x = Ax - y. \tag{98}$$

Правая часть этого равенства есть оператор из X в X. Обозначим $Bx = Ax - y$ (B не есть линейный оператор). Мы имеем $Bx_1 - B_1x_2 = Ax_1 - Ax_2$, откуда $\| Bx_1 - Bx_2 \| \leqslant \| A \| \cdot | x_1 - x_2 \|$. Если $\| A \| < 1$, то к уравнению (98) применим принцип сжатых отображений. Мы получаем следующий результат.

Теорема. *Если* $\| A \| < 1$, *то уравнение* (97) *при любом заданном* $y \in X$ *имеет единственное решение, и это решение может быть получено методом последовательных приближений из уравнения* (98) *при любом исходном приближении.* В дальнейшем мы часто будем иметь дело с уравнением, содержащим параметр

$$(A - \lambda E)\,x = y. \tag{99}$$

Если X — вещественное пространство типа B, то λ — вещественное число. Для комплексных пространств оно может быть и комплексным. Считая $\lambda \neq 0$, перепишем (99) в виде $\left(\frac{1}{\lambda} A - \mathcal{E}\right) x = \frac{1}{\lambda} y$. Из доказанной теоремы следует, что если $|\lambda| > \|A\|$, то уравнение (99) при любом y имеет единственное решение, и это решение может быть получено по методу последовательных приближений из уравнения $x = \frac{1}{\lambda} Ax - \frac{1}{\lambda} y$.

Иногда уравнение (97) пишут в виде

$$(\lambda A - E)\,x = y \text{ или } (E - \lambda A)\,x = y.$$

При этом условие $|\lambda| > \| A \|$ заменяется условием $|\lambda| < \| A \|^{-1}$.

Положим теперь, что A — в п о л н е н е п р е р ы в н ы й оператор, и напишем два уравнения: одно в пространстве X и другое в X^*:

$$(A - E)\,x = y \tag{100}$$

$$(A^* - E)\,x^* = y^*, \tag{101}$$

где y и y^* — данные элементы, а x и x^* — искомые.

Напишем еще соответствующие однородные уравнения

$$(A - E)\,x = \theta \tag{102}$$

$$(A^* - E)\,x^* = \theta^*, \tag{103}$$

где θ и θ^* — нулевые элементы соответственно в X и X^*. Множества решений этих уравнений являются линеалами. Мы сформулируем сейчас результаты, касающиеся написанных уравнений. Доказательство их будет нами дано в следующей главе для случая гильбертова пространства.

Если одно из уравнений (100) или (101) имеет решение при любой правой части, то и другое уравнение обладает этим же свойством. При этом каждое из указанных уравнений имеет единственное решение при любой правой части, и, тем самым, уравнения (102) и (103) имеют только тривиальные решения $x = \theta$ и $x^* = \theta^*$.

Если одно из уравнений (102) или (103) имеет решения, отличные от нулевого, то и другое уравнение обладает этим же свойством, и число линейно независимых решений уравнений (102) и (103) конечно и одинаково. Линеалы решений суть конечномерные подпространства. При этом для разрешимости уравнения (100) необходимо и достаточно, чтобы y был ортогонален ко всем решениям уравнения (103), а для разрешимости уравнения (101) необходимо и достаточно, чтобы y^* был ортогонален ко всем решениям уравнения (102) [**IV; 9**].

Эти результаты сохраняются, естественно, и для уравнений с параметром. В случае комплексного пространства типа B эти уравнения запишем в виде:

$$(A - \lambda E)\,x = y \quad (104); \qquad (A^* - \overline{\lambda} E)\,x^* = y^*; \quad (105)$$

$$(A - \lambda E)\,x = \theta \quad (106); \qquad (A^* - \overline{\lambda} E)\,x^* = \theta^*. \quad (107)$$

Сформулируем еще один результат. Имеется лишь конечное число значений λ, удовлетворяющих условию $|\lambda| \leqslant R$, где R — любое заданное положительное число, при которых уравнение (106) и, следовательно, (107) имеют решения, отличные от тривиального $x = \theta$ (или $x^* = \theta^*$).

Указанные результаты вполне аналогичны теоремам, которые мы имели в теории интегральных уравнений.

Если X — вещественное пространство типа B, то λ надо брать вещественным и $\overline{\lambda} = \lambda$.

Число λ, при котором уравнение (106) имеет решения, отличные от тривиального, называется собственным значением оператора A, а число линейно независимых решений этого уравнения — **рангом** соответствующего собственного значения. Решения $x_1, x_2, \ldots, x_m$ образуют полный набор линейно независимых решений уравнения (106), если общий вид всех решений этого уравне-

ния: $x = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_mx_m$, где c_k — произвольные числа. Представление всякого решения x в указанном виде единственно в виду линейной независимости x_k. Линейно независимые решения можно выбирать различным образом, но в полном наборе линейно независимых решений число их всегда одно и то же. Если уравнение (106) имеет решения, отличные от тривиального, и элемент y, входящий в уравнение (104), удовлетворяет указанному выше условию разрешимости, то все решения уравнения (104) представимы формулой

$$x = x_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_mx_m, \tag{108}$$

где x_0 — какое-либо решение уравнения (104), $x_1, x_2, \ldots, x_m$ — полный набор линейно независимых решений уравнения (106) и c_k — произвольные числа. Все это непосредственно следует из линейности уравнений (104) и (106) [**IV; 9, 10**].

108. Вполне непрерывные операторы в C, L_p и l_p. 1. Рассмотрим в C интегральный оператор

$$\varphi(x) = \int_a^b K(x, t)\psi(t)\,dt, \tag{109}$$

где $[a, b]$ — конечный промежуток. Если ядро $K(x, t)$ непрерывно в квадрате $Q[a \leqslant x \leqslant b;\ a \leqslant y \leqslant b]$, то формула (109) дает, очевидно, дистрибутивный оператор из C в C. Его ограниченность непосредственно следует из неравенства

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b} |\varphi(x)| \leqslant \max_{a\leqslant t\leqslant b} |\psi(t)| \max_{a\leqslant x\leqslant b} \int_a^b |K(x, t)|\,dt. \tag{110}$$

Если U — ограниченное множество функций $\psi(t)$ в C, т. е. $\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b} |\psi(t)| \leqslant A$, то нетрудно видеть, что множество соответствующих $\varphi(x)$ компактно. Ограниченность непосредственно следует из (110), в силу $\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b} |\psi(t)| \leqslant A$, а равностепенная непрерывность — из неравенства

$$|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| \leqslant A \int_a^b |K(x_2, t) - K(x_1, t)|\,dt. \tag{111}$$

Таким образом, при непрерывности ядра в Q оператор (109) вполне непрерывен в C.

Можно показать, что норма оператора (109) в точности равна:

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b} \int_a^b |K(x, t)|\,dt.$$

Оператор (109) будет вполне непрерывным в C и при меньших предположениях об ядре. Положим, например, что $K(x, t)$ — ограниченная измеримая в квадрате Q функция и что

$$\lim_{x' \to x} K(x', t) = K(x, t) \tag{112}$$

при любом x из $[a, b]$ для почти всех t. При этом [**54**]:

$$\lim_{x' \to x} \int_a^b |K(x', t) - K(x, t)|\, dt = 0$$

и при любом заданном $\varepsilon > 0$ существует такое $\eta > 0$, что

$$\int_a |K(x_2, t) - K(x_1, t)|\, dt \leqslant \varepsilon \text{ при } |x_2 - x_1| \leqslant \eta.$$

Это последнее доказывается аналогично тому, как доказывается равномерная непрерывность функции, непрерывной на конечном замкнутом промежутке [I′ **43**].

Ограниченность и равностепенная непрерывность $\varphi(x)$ доказываются совершенно так же, как и выше. В дальнейшем мы подробно исследуем интегральные операторы с полярным ядром.

2. Рассмотрим теперь оператор (109) в L_p $(p > 1)$ в предположении, что ядро $K(x, t) \in L_{p'}(Q)$, т. е.

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, t)|^{p'}\, dx\, dt = A^{p'} < +\infty. \tag{113}$$

Если $\psi(x)$ — любая функция из $L_p[a, b]$, то интеграл (109) имеет смысл. Нетрудно показать, что он определяет измеримую функцию $\varphi(x)$ [ср. 68]. Согласно формуле Гёльдера имеем

$$|\varphi(x)| \leqslant \left[\int_a^b |K(x, t)|^{p'}\, dt\right]^{\frac{1}{p'}} \left[\int_a^b |\psi(x)|^{p}\, dx\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Возводя обе части в степень p' и интегрируя по x, получим

$$\|\varphi\|_{L_{p'}}^{p'} \leqslant A^{p'} \|\psi\|_{L_{p'}}^{p'}, \quad \text{т. е.} \quad \|\varphi\|_{L_{p'}} \leqslant A \|\psi\|_{L_p}, \tag{114}$$

т. е. (114) есть линейный оператор из L_p в $L_{p'}$. Можно показать, что A есть норма этого оператора. Докажем, что это вполне непрерывный оператор. Пусть U — ограниченное в L_p множество функций $\psi(x)$, V — множество соответствующих функций $\varphi(x) \in L_{p'}$. Надо доказать компактность V. По условию $\|\psi\|_{L_p} \leqslant C$, если $\psi(x) \in U$, и из (114) следует $\|\varphi\|_{L_{p'}} \leqslant AC$. Остается доказать, что $\varphi(x)$ равно-

степенно непрерывны в среднем. Продолжая $\varphi(x)$ нулем вне $[a, b]$ и $K(x, t)$ нулем вне Q, имеем

$$\varphi(x+h)-\varphi(x)=\int_a^b [K(x+h, t)-K(x, t)]\,\psi(t)\,dt,$$

откуда, как и выше,

$$\|\varphi(x+h)-\varphi(x)\|_{L_{p'}} \leqslant \left|\int_a^b\int_a^b |K(x+h, t)-K(x, t)|^{p'}\,dx\,dt\right|^{\frac{1}{p'}} \|\psi\|_{L_p}$$

т. е.

$$\|\varphi(x+h)-\varphi(x)\|_{L_{p'}} \leqslant \left|\int_a^b\int_a^b |K(x+h, t)-K(x, t)|^{p'}\,dx\,dt\right|^{\frac{1}{p'}} C. \quad (115)$$

В силу того, что $K(x, t)$ непрерывна в среднем в $L_{p'}$ на Q, при любом заданном $\varepsilon > 0$ существует такое $\eta > 0$, что

$$\int_a^b\int_a^b |K(x+h, y)-K(x, y)|^{p'}\,dx\,dt \leqslant \frac{\varepsilon^{p'}}{C^{p'}} \quad \text{при } |h| \leqslant \eta,$$

и из (115) следует, что

$$\|\varphi(x+h)-\varphi(x)\|_{L_{p'}} \leqslant \varepsilon \quad \text{при } |h| \leqslant \eta,$$

причем η одно и то же для всех $\varphi(x) \in V$, что и требовалось доказать. Аналогично проводится доказательство для случая бесконечного промежутка и многих независимых переменных.

3. Рассмотрим теперь оператор из l_p в $l_{p'}$ $(p>1)$, задаваемый формулами:

$$\eta_i = a_{i1}\,\xi_1 + a_{i2}\,\xi_2 + \ldots \quad (116)$$

при условии

$$\sum_{i,\,k=1}^{\infty} |a_{ik}|^{p'} = A^{p'} < +\infty \quad (117)$$

Вводя обозначения для элементов $x(\xi_1, \xi_2, \ldots)$ и $y(\eta_1, \eta_2, \ldots)$ и применяя неравенство Гёльдера для сумм, получим совершенно так же, как и выше

$$\|y\|_{l_{p'}} \leqslant A\|x\|_{l_p}, \quad (118)$$

так что оператор (116) есть линейный оператор из l_p в $l_{p'}$. Докажем, что он вполне непрерывен. Пусть U — ограниченное множество элементов $x \in l_p$ $(\|x\| \leqslant C)$ и V — соответствующее множество элементов $y \in l_{p'}$. Надо доказать его компактность. Его ограниченность

следует из (118) и остается доказать, что при любом заданном $\varepsilon > 0$ существует такое целое положительное число n_ε, что

$$\sum_{i=n_\varepsilon}^{\infty} |\eta_i|^{p'} \leqslant \varepsilon^{p'}. \tag{119}$$

Из (116) и неравенства Гёльдера следует

$$\sum_{i=n_\varepsilon}^{\infty} |\eta_i|^{p'} \leqslant \sum_{i=n_\varepsilon}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^{p'} |x|_p^{p'} \leqslant \sum_{i=n_\varepsilon}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^{p'} C^{p'}. \tag{120}$$

В силу (117), двойной ряд с общим членом $|a_{ik}|^{p'}$ сходится, и, следовательно, существует такое n_ε, что

$$\sum_{i=n_\varepsilon}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^{p'} \leqslant \frac{\varepsilon^{p'}}{C^{p'}}, \tag{121}$$

отсюда, в силу (120), и следует (119).

109. Обобщенные производные. Мы введем сейчас новое понятие производной, которое часто применяется в современной математической физике. Пусть D — ограниченная область n-мерного эвклидова пространства R_n, точки которого x определяются декартовыми координатами $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Под областью будем всегда подразумевать открытое связное множество и будем считать, что границы областей, о которых мы будем говорить, имеют объемную меру нуль. Через $\overline{D}$, как всегда, будем обозначать область D вместе с ее границей (замкнутая область). Будем говорить, что область D' лежит строго внутри D, если $D' \subset D$ и расстояние от D' до границы D положительно. Это равносильно тому, что $\overline{D'} \subset D$. Как и раньше, будем называть функцию финитной в D, если она равна нулю вне некоторой области D', лежащей строго внутри D (D' может быть разной для разных функций). Положим, что функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ имеют непрерывные производные до порядка l внутри D и функция $\psi(x)$ финитна. Рассмотрим какую-либо производную порядка l

$$D^l \varphi = \frac{\partial^l \varphi}{\partial x_1^{l_1} \partial x_2^{l_2} \ldots \partial x_n^{l_n}}. \tag{122}$$

Применяя формулу интегрирования по частям, получим, принимая во внимание финитность $\psi(x)$,

$$\int_D D^l \varphi(x) \psi(x)\, dx = (-1)^l \int_D \varphi(x) D^l \psi(x)\, dx. \tag{123}$$

Формула (123) может быть положена в основу более общего понятия производной.

Определение 1. *Пусть функции $\varphi(x)$ и $\chi(x)$ суммируемы по любой строго внутренней подобласти D' области D и для любой финитной l раз непрерывно дифференцируемой функции $\psi(x)$ удовлетворяют соотношению*

$$\int_D \chi(x)\psi(x)\,dx = (-1)^l \int_D \varphi(x)\,\mathrm{D}^l\psi(x)\,dx. \qquad (124)$$

Тогда функция $\chi(x)$ называется обобщенной производной вида (122) *функции $\varphi(x)$ в D.*

Убедимся, что *у заданной функции $\varphi(x)$ может существовать только одна обобщенная производная данного вида.* Пусть $\chi(x)$ и $\chi_1(x)$ — две обобщенные производные. Для $\varphi(x)$ и $\chi_1(x)$ также справедливо равенство (124). Вычитая почленно, получим

$$\int_D [\chi(x) - \chi_1(x)]\,\psi(x)\,dx = 0, \qquad (125)$$

откуда, ввиду произвольности финитной функции $\psi(x)$, следует, что $\chi(x)$ и $\chi_1(x)$ — эквивалентные в D функции [**71**].

Если $\varphi(x)$ имеет внутри D непрерывные производные до порядка l, то имеет место (123) и $\chi(x) = \mathrm{D}^l\varphi(x)$. В дальнейшем мы сохраним обозначение (122) и для обобщенных производных. Отметим некоторые свойства обобщенной производной, непосредственно вытекающие из ее определения. Обобщенная производная $\mathrm{D}^l\varphi(x)$ не зависит от того, в каком порядке записано дифференцирование, ибо в формуле (124) можно произвольно переставлять порядок дифференцирования у функции $\psi(x)$, имеющей непрерывные производные. Если $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ имеют обобщенные производные вида (122): $\chi_1(x)$ и $\chi_2(x)$, то $c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x)$ имеет обобщенную производную $c_1\chi_1(x) + c_2\chi_2(x)$ того же вида (c_1 и c_2 — постоянные). Если $\chi(x)$ есть обобщенная производная $\varphi(x)$ в D, то она будет обобщенной производной того же вида и в любой области D', принадлежащей D.

Если $\varphi(x)$ имеет обобщенную производную $\dfrac{\partial\varphi(x)}{\partial x_1} = \chi(x)$ и $\chi(x)$ имеет обобщенную производную $\dfrac{\partial\chi(x)}{\partial x_2}$, то $\varphi(x)$ имеет обобщенную производную $\dfrac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x_1\,\partial x_2} = \dfrac{\partial\chi(x)}{\partial x_2}$. Аналогично и для производных других видов. Далее, если $\varphi(x)$ имеет обобщенные производные $\dfrac{\partial\varphi(x)}{\partial x_2}$ и $\dfrac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x_1\,\partial x_2}$, то $\dfrac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x_1\,\partial x_2}$ есть обобщенная производная от $\dfrac{\partial\varphi(x)}{\partial x_2}$ по x_1. Ниже мы покажем также, что при некоторых дополнительных ограничениях справедлива обычная формула дифференцирования произведения:

$$\frac{\partial[\varphi_1(x)\varphi_2(x)]}{\partial x_1}=\frac{\partial\varphi_1(x)}{\partial x_1}\varphi_2(x)+\varphi_1(x)\frac{\partial\varphi_2(x)}{\partial x_1}. \tag{126}$$

Установим теперь связь между обобщенным дифференцированием и операцией усреднения. Пусть $\omega_1(|x-y|)$ — какое-либо усредняющее ядро, зависящее от расстояния между точками x и y, и $\varphi_h(x)$ — средние функции, построенные для $\varphi(x)$:

$$\varphi_h(x)=\frac{1}{h^n}\int\omega_h(|x-y|)\varphi(y)\,dy. \tag{127}$$

Предполагая, что $\varphi(x)$ имеет в D обобщенную производную $\chi(x)=\mathrm{D}^l\varphi(x)$ вида (122), вычислим соответствующую (очевидно, обычную) производную от средних функций [71]:

$$\mathrm{D}^l_x\varphi_h(x)=\frac{1}{h^n}\int\varphi(y)\,\mathrm{D}^l_x\omega_h(|x-y|)\,dy=$$

$$=\frac{(-1)^l}{h^n}\int\varphi(y)\,\mathrm{D}^l_y\omega_h(|x-y|)\,dy. \tag{128}$$

Будем считать точку $x\in D$ отстоящей от границы D на расстояние, большее чем h. Так как функция $\omega_h(|x-y|)$ обращается в нуль вне шара радиуса h с центром в точке x, то ее можно взять в качестве финитной функции в формуле (124). Вместе с (128) это приводит к соотношению

$$\mathrm{D}^l_x\varphi_h(x)=\frac{1}{h^n}\int\omega_h(|x-y|)\,\mathrm{D}^l_y\varphi(y)\,dy, \tag{129}$$

которое можно сформулировать так: *средние функции от обобщенных производных совпадают с производными того же вида от средних функций во всех точках области D, расстояние которых до границы D больше радиуса усреднения.*

На основании свойств средних функций [71] можем теперь утверждать, что при $h\to 0$ $\varphi_h(x)\to\varphi(x)$ и $\mathrm{D}^l\varphi_h(x)\to\mathrm{D}^l\varphi(x)$ в $L(D')$, где D' — любая строго внутренняя подобласть области D. Более того, если дополнительно предположить, что $\varphi(x)$ суммируема по любой строго внутренней подобласти D' с какой-либо степенью $p\geqslant 1$, а обобщенная производная $\mathrm{D}^l\varphi(x)$ — с какой-либо степенью $q\geqslant 1$, то сходимость $\varphi_h(x)$ и $\mathrm{D}^l\varphi_h(x)$ имеет место в $L_p(D')$ и $L_q(D')$ соответственно. Сделаем одно предостережение. Пусть функция $\varphi(x)$ доопределена каким-либо образом на все R_n: например, положена равной нулю вне D. Тогда функции $\varphi_h(x)$ также определены во всем пространстве и при $h\to 0$ сходятся к $\varphi(x)$ в $L_p(D)$. Однако функции $\mathrm{D}^l\varphi_h(x)$, вообще говоря, не будут сходиться к $\mathrm{D}^l\varphi(x)$ в пространстве $L_q(D)$. Это связано с тем, что так продолженная функция $\varphi(x)$ может не иметь соответствующей обобщенной производной во всем R_n.

Вернемся теперь к доказательству формулы (126) дифференцированию произведения. Докажем сначала одно простое утверждение. Пусть $\varphi_1(x) \in L_p(D')$ $(p > 1)$ и $\varphi_2(x) \in L_{p'}(D')$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$ в любой строго внутренней для D области D' и $\psi(x)$ — ограниченная финитная в D функция. Тогда

$$\int_D \varphi_{1h}(x)\,\varphi_{2h}(x)\,\psi(x)\,dx \underset{h\to 0}{\to} \int_D \varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\,\psi(x)\,dx.$$

Действительно, используя неравенство Гёльдера, найдем

$$\left|\int_D |\varphi_{1h}(x)\,\varphi_{2h}(x) - \varphi_1(x)\,\varphi_2(x)|\psi(x)dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_D |\varphi_{1h}(x)| \cdot |\varphi_{2h}(x) - \varphi_2(x)| \cdot |\psi(x)|\,dx +$$

$$+ \int_D |\varphi_2(x)| \cdot |\varphi_{1h}(x) - \varphi_1(x)| \cdot |\psi(x)|dx \leqslant$$

$$\leqslant C\left[\|\varphi_{1h}\|_{L_p(D')} \cdot \|\varphi_{2h} - \varphi_2\|_{L_{p'}(D')} + \|\varphi_2\|_{L_{p'}(D')} \cdot \|\varphi_{1h} - \varphi_1\|_{L_p(D')}\right].$$

Здесь $C = \sup|\psi(x)|$ и D' — подобласть D, вне которой $\psi(x)$ равна нулю. Правая часть последнего неравенства стремится к нулю при $h \to 0$, так как $\varphi_{2h}(x) \to \varphi_2(x)$ в $L_{p'}(D')$, $\varphi_{1h}(x) \to \varphi_1(x)$, в $L_p(D')$ и сходящаяся в $L_p(D')$ последовательность $\varphi_{1h}(x)$ ограничена в $L_p(D')$ по норме.

Установим теперь формулу (126) в предложении, что $\varphi_1(x)$ и $\frac{\partial\varphi_1(x)}{\partial x_1} \in L_p(D')$, а $\varphi_2(x)$ и $\frac{\partial\varphi_2(x)}{\partial x_1} \in L_{p'}(D')$ для любой строго внутренней подобласти D'. Используя предыдущее утверждение, имеем для любой непрерывно дифференцируемой финитной функции $\psi(x)$, равной нулю вне D' [**62**]:

$$\int_D \varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\,\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_1}\,dx = \lim_{h\to 0}\int_D \varphi_{1h}(x)\,\varphi_{2h}(x)\,\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_1}\,dx$$

и, следовательно,

$$\int_D \varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\,\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_1}\,dx = -\lim_{h\to 0}\int_D\left[\frac{\partial\varphi_{1h}(x)}{\partial x_1}\,\varphi_{2h}(x) + \varphi_{1h}(x)\,\frac{\partial\varphi_{2h}(x)}{\partial x_1}\right]\times$$

$$\times\,\psi(x)\,dx. \qquad (130)$$

При достаточно малом h можно применить в D' формулу (129) и заменить в (130) $\frac{\partial\varphi_{1h}(x)}{\partial x_1}$ на $\left(\frac{\partial\varphi_1(x)}{\partial x_1}\right)_h$ и $\frac{\partial\varphi_{2h}(x)}{\partial x_1}$ на $\left(\frac{\partial\varphi_2(x)}{\partial x_1}\right)_h$,

Применяя еще раз наше вспомогательное утверждение к правой части (130), получим:

$$\int_D \varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\,\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_1}\,dx = -\int_D \left|\frac{\partial\varphi_1(x)}{\partial x_1}\,\varphi_2(x) + \varphi_1(x)\,\frac{\partial\varphi_2(x)}{\partial x_1}\right|\psi(x)\,dx.$$

Последнее равенство означает, что произведение $\varphi_1(x)\,\varphi_2(x)$ имеет в D обобщенную производную по x_1, которая может быть вычислена по формуле (126).

Заметим, что формула (126) справедлива и при $p=1$. В этом случае нужно только принять $p'=\infty$, т. е. считать $\varphi_2(x)$ и $\frac{\partial\varphi_2(x)}{\partial x_1}$ ограниченными в любой подобласти D'.

Покажем теперь, что можно дать другое определение обобщенной производной и на основе формулы (129) установить его эквивалентность первоначальному определению.

Определение 2. *Функция $\chi(x)$ называется обобщенной производной вида* (122) *функции $\varphi(x)$ в D, если существует последовательность l раз непрерывно дифференцируемых внутри D функций $\varphi_m(x)$, таких, что $\varphi_m(x)$ и $\mathrm{D}^l\varphi_m(x)$ сходятся соответственно к $\varphi(x)$ и $\chi(x)$ в $L_1(D')$, где D' — любая строго внутренняя подобласть D.*

Теорема 1. *Определения 1 и 2 равносильны.* Положим, что $\chi(x)$ — обобщенная производная от $\varphi(x)$ по второму определению. Имеет место формула (123), при замене $\varphi(x)$ на $\varphi_m(x)$, и, поскольку $\varphi_m(x)\to\varphi(x)$ и $\mathrm{D}^l\varphi_m(x)\to\chi(x)$ в $L(D')$, мы можем при любом выборе финитной функции $\psi(x)$ с указанными свойствами перейти к пределу под знаком интеграла [ср. **62**], откуда и следует формула (124).

Положим теперь, что $\chi(x)$ — обобщенная производная от $\varphi(x)$ в смысле первого определения. Тогда, в силу (129) и теоремы 4 из [**71**], требуемую вторым определением последовательность функций $\varphi_m(x)$ дадут средние функции $\varphi_{h_m}(x)$ при какой-либо последовательности h_m, стремящейся к нулю (при этом $\varphi(x)$ считаем продолженной нулем вне D). Теорема 1 доказана. Из этой теоремы следует, что и в смысле второго определения обобщенная производная единственна, если она существует.

Докажем теперь теорему, которая показывает, что обобщенные производные выдерживают слабый предельный переход в $L_p(D')$.

Теорема 2. *Пусть функции $\varphi_k(x)$ $(k=1, 2, \ldots)$, определенные внутри D, слабо сходятся к некоторой функции $\varphi(x)$ в $L_p(D')$ $(p>1)$, где D' — любая область, лежащая строго внутри D, имеют в D обобщенные производные $\mathrm{D}^l\varphi_k(x)$ вида* (122) *и нормы $\mathrm{D}^l\varphi_k(x)$ в $L_p(D')$ ограничены некоторым числом $M(D')$, которое зависит от выбора D'. Тогда $\varphi(x)$ имеет в D обобщенную производную $\mathrm{D}^l\varphi(x)$ вида* (122), *равную слабому пределу $\mathrm{D}^l\varphi_k(x)$ в $L_p(D')$.*

Доказательство. В силу слабой компактности ограниченных множеств в L_p при $p > 1$, из неравенства

$$\| D^l \varphi_k \|_{L_p(D')} \leqslant M(D') \tag{131}$$

вытекает существование подпоследовательности $\varphi_{n_k}(x)$ такой, что $D^l \varphi_{n_k}(x)$ слабо сходятся в $L_p(D')$. Беря последовательность строго внутренних расширяющихся областей D'_m, сходящихся к D, мы с помощью диагонального процесса построим подпоследовательность $D^l \varphi_{m_k}(x)$, для которой производные $D^l \varphi_{m_k}(x)$ слабо сходятся в $L_p(D')$ к некоторой функции $\chi(x)$ в любой строго внутренней подобласти D'. Ясно, что $\chi(x)$ определена всюду в D и принадлежит $D_p(D')$ для любой строго внутренней области D'.

Равенство (123) справедливо при замене $\varphi(x)$ на $\varphi_{m_k}(x)$. Переходя в нем к пределу при фиксированной функции $\psi(x)$, приходим ввиду финитности $\psi(x)$, к равенству (124), (слабая сходимость), откуда следует, что $\chi(x)$ есть обобщенная производная $\varphi(x)$ в D. Из сказанного выше вытекает, что любая слабо сходящаяся подпоследовательность $D^l \varphi_{m_k}(x)$ имеет один и тот же предел $\chi(x)$ (единственность обобщенной производной), и отсюда легко заключить, что и вся последовательность $D^l \varphi_k(x)$ слабо сходится к $\chi(x)$.

Замечания. 1. Из доказанной теоремы следует, что если $\varphi(x) \in L_p(D')$ и производные средних функций $\varphi_h(x)$ имеют оценку (131), то в D существует обобщенная производная $D^l \varphi(x) \in L_p(D')$. Мы уже видели, что в этом случае $D^l \varphi_h(x) \to D^l \varphi(x)$ в $L_p(D')$ и, следовательно, норма $D^l \varphi(x)$ удовлетворяет оценке (131).

2. В условиях теоремы 2 функции $\varphi(x)$ и $D^l \varphi(x)$ могут принадлежать $L_p(D')$ и $L_q(D')$ соответственно и при $p \neq q$.

3. Теорема 2 сохраняет силу при $p = 1$, если вместо (131) предположить слабую компактность функций $D^l \varphi_k(x)$ в $L(D')$ для всякой строго внутренней подобласти D' области D.

110. Обобщенные производные (продолжение). Установим теперь связь между существованием обобщенных производных и абсолютной непрерывностью функций. Мы рассмотрим случай одного независимого переменного и основной областью D будем считать промежуток $0 < x < 1$. Пусть функция $\varphi(x)$ абсолютно непрерывна на промежутке $[0,1]$. Как известно [**74**], $\varphi(x)$ имеет на промежутке $[0, 1]$ производную $\varphi'(x)$, которая является суммируемой на $[0, 1]$ функцией. Формула интегрирования по частям [**74**] дает при любой непрерывно дифференцируемой финитной функции $\psi(x)$ соотношение

$$\int_0^1 \varphi(x) \psi'(x)\, dx = -\int_0^1 \varphi'(x) \psi(x)\, dx, \tag{132}$$

которое показывает, что $\varphi'(x)$ является обобщенной производной функции $\varphi(x)$.

Пусть теперь $\varphi(x) \in L$ ([0, 1]) и имеет обобщенную производную $\frac{d\varphi(x)}{dx}$ в D, принадлежащую L ([0, 1]). Покажем, что при этом $\varphi(x)$ эквивалентна некоторой абсолютно непрерывной в [0, 1] функции.

Обозначим

$$\varphi_1(x) = \int_0^x \frac{d\varphi(t)}{dt}\, dt$$

и заметим, что $\varphi_1(x)$ абсолютно непрерывна и ее производная $\varphi_1'(x)$ эквивалентна $\frac{d\varphi(x)}{dx}$ [74]. Разность $\varphi^*(x) = \varphi(x) - \varphi_1(x)$ имеет, очевидно, производную, эквивалентную нулю. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим промежуток $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$. При достаточно малом h производная от средней функции $\varphi_h^*(x)$ равна нулю в $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ и, следовательно, $\varphi_h^*(x)$ есть постоянная в $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$. Так как пределом постоянных может быть лишь постоянная, и $\varphi_h^*(x) \to \varphi^*(x)$ в $L([\varepsilon, 1-\varepsilon])$, то $\varphi^*(x)$ эквивалентна постоянной в промежутке $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$. Отсюда непосредственно вытекает, что всюду в D

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \int_0^x \frac{d\varphi(t)}{dt}\, dt \qquad (133)$$

с точностью до эквивалентности. Таким образом, мы установили, что существование обобщенной производной равносильно абсолютной непрерывности $\varphi(x)$. Для случая многих независимых переменных аналогично доказывается, что если $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет обобщенную производную $\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_1}$, например, в кубе $|0 < x_k < 1;\ k = 1, 2, \ldots, n|$ и $\varphi(x)$ и $\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_1} \in L_p$ $(p \geqslant 1)$ в этом кубе, то для почти всех значений $(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ из куба $|0 < x_k < 1;\ k = 2, 3, \ldots, n)$ $\varphi(x)$ абсолютно непрерывна при $0 \leqslant x_1 \leqslant 1$ и имеет место равенство

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi(0, x_2, \ldots, x_n) + \int_0^{x_1} \frac{\partial\varphi(t, x_2, \ldots, x_n)}{\partial t}\, dt \qquad (134)$$

для всех x_1 из $0 \leqslant x_1 \leqslant 1$.

Это равенство, так же как и равенство (133), нуждается в пояснениях. Именно функция $\varphi(x)$ и ее обобщенная производная $D\varphi(x)$ определены с точностью до множества меры нуль. Поэтому равенства (133) и (134) надо понимать в том смысле, что существуют функции из класса эквивалентных $\varphi(x)$ функций, для которых они справедливы.

Приведем теперь пример функции $\varphi(x_1, x_2)$, имеющей обобщенную смешанную производную $\frac{\partial^2\varphi(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$ и не имеющей обобщенных первых производных. Этим свойством обладает функция $\varphi(x_1, x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ $(0 \leqslant x_k \leqslant 1: k = 1, 2)$, где $f(x)$ есть непрерывная функция из [76]. Функция $\varphi(x_1, x_2)$ не имеет обобщенных первых производных, ибо $f(x)$ не есть абсолютно непрерывная функция. Обобщенная же производная $\frac{\partial^2\varphi(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$ существует и равна тождественно нулю. Действительно, для любой гладкой финитной функции $\psi(x_1, x_2)$ мы имеем

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x_1) \frac{\partial^2\psi(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 = \int_0^1 dx_1 \int_0^1 \frac{\partial \left| f(x_1) \frac{\partial\psi(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right|}{\partial x_2} dx_2 = 0,$$

и аналогично для $f(x_2)$, т. е.

$$\int_0^1 \int_0^1 |f(x_1) + f(x_2)| \frac{\partial^2\psi(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 = 0,$$

откуда и следует (определение 1), что обобщенная производная

$$\frac{\partial^2\varphi(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = 0.$$

Полезно заметить, что если функция $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ непрерывна в D и если область D может быть разбита при помощи конечного числа гладких поверхностей на конечное число областей D_i $(i = 1, 2, \ldots, l)$, в каждой из которых $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируема по некоторому x_k вплоть до границы, то $\varphi(x)$ имеет в D обобщенную производную, равную $\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_k}$, в каждой из D_i. Эта производная может иметь разрывы первого рода на упомянутых выше поверхностях. Сформулированное утверждение непосредственно получается из формулы интегрирования по частям:

$$\int_{D_i} \varphi(x) \frac{\partial\psi(x)}{\partial x_k} dx = -\int_{D_i} \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_k} \psi(x) dx + \int_{S_i} \varphi(x)\psi(x) \cos(n, x_k) dS, \quad (135)$$

где S_i — граница D_i и n — направление нормали к S_i, внешней по отношению к D_i. Нужно лишь заметить что интегралы по поверхностям S_i при суммировании по i сокращаются.

Если $\varphi(x)$ имеет различные предельные значения на каком-нибудь $(n-1)$-мерном куске Σ поверхности, находящейся в D, и направление x_k не лежит в касательной плоскости к этой поверхности, то в D не существует обобщенной производной $\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_k}$. Это следует из установленной выше связи между абсолютной непрерывностью $\varphi(x)$ и существованием обобщенной производной.

Замечание. Можно вводить понятие не отдельной обобщенной производной суммируемой функции $\varphi(x)$, а обобщенного линейного дифференциального оператора любого порядка, например:

$$L(\varphi) = \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{k=1}^{n} b_k \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_k} + c\varphi(x), \qquad (136)$$

где коэффициенты достаточно гладкие функции от $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Такой обобщенный оператор определяется равенством, аналогичным (124):

$$\int_D \varphi(x)\, M(\psi)\, dx = \int_D L(\varphi)\, \psi(x)\, dx, \qquad (137)$$

где $M(\psi)$ — сопряженный дифференциальный оператор и $\psi(x)$ — любая гладкая финитная в D функция [**IV; 158**]. Существование отдельных производных, входящих в оператор $L(\varphi)$, при этом не предполагается.

111. Случай звездной области. Выше мы показали [**109**] при помощи средних функций, что для всякой $\varphi(x)$ из $L_p(D')$ $(p \geqslant 1)$, имеющей обобщенную производную $\chi(x) = \mathrm{D}^l\varphi(x)$ также из $L_p(D')$, существует последовательность l раз непрерывно дифференцируемых в $\overline{D}$ функций $\varphi_k(x)$ таких, что $\varphi_k(x) \to \varphi(x)$ и $\mathrm{D}^l\varphi_k(x) \to \chi(x)$ в $L_p(D')$. (Здесь, как и раньше, D' — любая строго внутренняя подобласть D). Мы покажем теперь, что для одного важного класса областей аналогичная аппроксимация функций $\varphi(x)$ и $\mathrm{D}^l\varphi(x)$ возможна и в пространстве $L_p(D)$.

Назовем область D областью звездного типа, если существует такая внутренняя точка x_0 области, что всякий радиус-вектор, выходящий из x_0, пересекает границу только в одной точке. Говорят также, что такая область звездна относительно точки x_0.

Теорема. *Пусть область D — звездного типа и пусть $\varphi(x)$ имеет в D обобщенную производную $\mathrm{D}^l\varphi(x)$, причем $\varphi(x)$ и $\mathrm{D}^l\varphi(x)$ принадлежат $L_p(D)$ $(p \geqslant 1)$. Тогда существует последовательность $\varphi_k(x)$ l раз непрерывно дифференцируемых в $\overline{D}$ функций таких, что $\varphi_k(x)$ и $\mathrm{D}^l\varphi_k(x)$ сходятся к $\varphi(x)$ и $\mathrm{D}^l\varphi(x)$ в $L_p(D)$.*

Мы говорим о l раз непрерывно дифференцируемых в $\overline{D}$ функциях $\varphi_k(x)$, если $\varphi_k(x)$ непрерывны в $\overline{D}$, непрерывно дифференцируемы внутри D до порядка l, и их производные могут быть доопределены на границе D так, что получаются функции, непрерывные в $\overline{D}$.

Примем упомянутую выше точку x_0 за начало координат и построим последовательность функций $\varphi\left(\frac{k-1}{k} x\right)$ $(k = 2, 3, 4, \ldots)$,

определенных внутри областей D_k, содержащих D строго внутри себя, причем D_k получается из D преобразованием подобия с коэффициентом подобия $\frac{k}{k-1}$.

Обозначим $\varphi\left(\frac{k-1}{k}x\right)=\varphi^{(k)}(x)$ и покажем, что функции $\varphi^{(k)}(x)$ сходятся в $L_p(D)$ к $\varphi(x)$, а обобщенные производные $\mathrm{D}^l\varphi^{(k)}(x)$ сходятся в $L_p(D)$ к $\chi(x)=\mathrm{D}^l\varphi(x)$. Установим, например, второе утверждение. Мы имеем

$$\|\mathrm{D}^l\varphi(x)-\mathrm{D}^l\varphi^{(k)}(x)\|=\left[\int_D\left|\chi(x)-\left(\frac{k-1}{k}\right)^l\chi\left(\frac{k-1}{k}x\right)\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}\leqslant$$

$$\leqslant\left|1-\left(\frac{k-1}{k}\right)^l\right|\left[\int_D\left|\chi\left(\frac{k-1}{k}x\right)\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}+\left[\int_D\left|\chi(x)-\chi\left(\frac{k-1}{k}x\right)\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Расстояние между точками $\frac{k-1}{k}x$ и x не превосходит $\frac{d}{k}$, где d — диаметр D, и, следовательно, стремится к нулю равномерно в D. Повторяя рассуждение теоремы о непрерывности в среднем [**70**], мы убеждаемся в том, что второе слагаемое правой части последнего неравенства стремится к нулю при $k\to\infty$.

В первом слагаемом множитель $1-\left(\frac{k-1}{k}\right)^l$ стремится к нулю, а второй множитель, в силу сказанного выше, сходится к $\|\chi(x)\|_{L_p(D)}$ (непрерывность нормы). Еще проще устанавливается сходимость $\varphi^{(k)}(x)$ к $\varphi(x)$ в $L_p(D)$. Заметим теперь, что при фиксированном k область D является строго внутренней по отношению к D_k, и потому средние функции $\varphi_h^{(k)}(x)$ сходятся к $\varphi^{(k)}(x)$, а их производные $\mathrm{D}^l\varphi_h^{(k)}(x)$ сходятся к $\mathrm{D}^l\varphi^{(k)}(x)$ в $L_p(D)$ при $h\to 0$. Отсюда следует, что функции $\varphi(x)$ и $\chi(x)$ можно аппроксимировать в метрике $L_p(D)$ бесконечно дифференцируемыми в $\overline{D}$ функциями $\varphi_{h_k}^{(k)}(x)$ и $\mathrm{D}^l\varphi_{h_k}^{(k)}(x)$ при подходящем выборе последовательности $h_k\to 0$. Функции $\varphi_{h_k}^{(k)}(x)$ можно принять за функции $\varphi_k(x)$, указанные в формулировке теоремы. Теорема доказана.

112. Пространства $\mathring{W}_p^{(l)}$ и $W_p^{(l)}$. Пусть, как и выше, D — ограниченная область n-мерного пространства. Рассмотрим множество всех функций $\varphi(x)$, имеющих все обобщенные производные порядка l, причем $\varphi(x)$ и все $\mathrm{D}^l\varphi(x)$ принадлежат $L_p(D)$ $(p\geqslant 1)$. Этот класс функций будем обозначать через $\mathring{W}_p^{(l)}(D)$; мы превратим его в нормированное пространство, если введем норму по формуле:

$$\|\varphi\|^p_{\mathring{W}_p^{(l)}(D)}=\int_D|\varphi(x)|^p dx+\int_D\sum_{l_1+l_2+\ldots+l_n=l}\left|\frac{\partial^l\varphi(x)}{\partial x_1^{l_1}\ldots\partial x_n^{l_n}}\right|^p dx. \quad (138)$$

Здесь и в дальнейшем $\sum_{l_1+l_2+\ldots+l_n=l}$ означает суммирование по всевозможным наборам натуральных чисел $(l_1, l_2, \ldots, l_n)$, в сумме дающих l. Нетрудно проверить наличие основных свойств нормы, указанных в [**95**]. Покажем, что пространство $\tilde{W}_p^{(l)}$ — полное. Пусть $\varphi_k(x)$ — сходящаяся в себе последовательность в $\tilde{W}_p^{(l)}(D)$, т. е.

$$\int_D \left[|\varphi_k(x) - \varphi_m(x)|^p + \sum_{l_1+l_2+\ldots+l_n=l} \left| \frac{\partial^l \varphi_k(x)}{\partial x_1^{l_1} \ldots \partial x_n^{l_n}} - \frac{\partial^l \varphi_m(x)}{\partial x_1^{l_1} \ldots \partial x_n^{l_n}} \right|^p \right] dx \to 0$$

при k и $m \to \infty$. Отсюда следует, что последовательности $\varphi_k(x)$ и $D^l\varphi_k(x)$ сходятся в себе в $L_p(D)$. В силу полноты $L_p(D)$ и теоремы 2 из [**109**], получаем, что $\varphi_k(x)$ сходятся в $L_p(D)$ к некоторой функции $\varphi(x)$, причем эта функция имеет всевозможные обобщенные производные порядка l из $L_p(D)$ и $D^l\varphi_k(x) \to D^l\varphi(x)$ в $L_p(D)$. Сказанное равносильно сходимости $\varphi_k(x)$ к $\varphi(x)$ в $\tilde{W}_p^{(l)}(D)$. Пространство $\tilde{W}_p^{(l)}(D)$ является, таким образом, пространством типа B (полным линейным нормированным пространством). Остановимся теперь на доказательстве сепарабельности пространства $\tilde{W}_p^{(l)}(D)$. С этой целью представим область D в виде счетного множества непересекающихся полуоткрытых промежутков [**32**]. Соответствующие им открытые промежутки пронумеруем, обозначим D_k $(k = 1, 2, \ldots)$ и введем множество $V_p^{(l)}(D)$ функций $\varphi(x)$, принадлежащих $\tilde{W}_p^{(l)}(D_k)$ в каждом промежутке D_k и таких, что сходится ряд

$$\|\varphi\|^p_{V_p^{(l)}(D)} = \sum_{k=1}^{\infty} \|\varphi\|^p_{\tilde{W}_p^{(l)}(D_k)}. \tag{139}$$

Задание нормы по формуле (139) превращает $V_p^{(l)}(D)$ в линейное нормированное пространство. Легко видеть, что функции из $\tilde{W}_p^{(l)}(D)$ входят в $V_p^{(l)}(D)$ и $\|\varphi\|_{\tilde{W}_p^{(l)}(D)} = \|\varphi\|_{V_p^{(l)}(D)}$. Таким образом, $\tilde{W}_p^{(l)}(D)$ есть подпространство пространства $V_p^{(l)}(D)$, и нам достаточно установить сепарабельность последнего [**94**].

Множество функций из $V_p^{(l)}(D)$, отличных от нуля лишь в конечном числе промежутков, плотно в $V_p^{(l)}(D)$. Действительно, пусть $\varphi(x) \in V_p^{(l)}(D)$ и $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Положим $\varphi_m(x) = \varphi(x)$ при $x \in \sum_{k=1}^{m} D_k$ и $\varphi(x) = 0$ в остальной части D. Очевидно, $\varphi_m(x) \in V_p^{(l)}(D)$, и при достаточно большом m:

$$\|\varphi - \varphi_m\|^p_{V_p^{(l)}(D)} = \sum_{k=m+1}^{\infty} \|\varphi\|^p_{\tilde{W}_p^{(l)}(D_k)} \leqslant \varepsilon^p,$$

в силу сходимости ряда (139). Функции $\varphi_m(x)$ в каждом из промежутков D_k $(k \leqslant m)$ можно приблизить в метрике $\tilde{W}_p^{(l)}(D_k)$ l раз непрерывно дифференцируемыми функциями [111] последние в свою очередь можно вместе с производными равномерно приблизить в $\overline{D_k}$ многочленами с рациональными коэффициентами. Отсюда вытекает, что в $V_p^{(l)}(D)$ плотно множество функций, каждая из которых отлична от нуля лишь в конечном числе промежутков D_k и в каждом из этих промежутков совпадают с многочленом с рациональными коэффициентами. Легко видеть, что множество таких функций счетно и, следовательно, $V_p^{(l)}(D)$ сепарабельно. Этим доказана и сепарабельность пространства $\tilde{W}_p^{(l)}(D)$.

Остановимся теперь на одном специальном вопросе. Пусть в некотором линейном нормированном пространстве X наряду с основной нормой $\|x\|$ введена еще норма $\|x\|_1$, причем для всех $x \in X$

$$c_2 \|x\| \leqslant \|x\|_1 \leqslant c_1 \|x\|, \tag{140}$$

где $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$ — постоянные. Нормы, удовлетворяющие условию (140), называются эквивалентными. Очевидно, что последовательность x_n, сходящаяся в одной норме, сходится в другой. При решении вопросов полноты, сепарабельности, компактности и т. п. безразлично, какую из эквивалентных норм рассматривать. Точно так же дистрибутивный оператор, ограниченный в одной норме, окажется ограниченным и относительно другой (эквивалентной) нормы. При этом норма ограниченного оператора, вообще говоря, меняется при переходе к эквивалентной нормировке пространства, но остается конечной.

Рассмотрим подробнее вопрос об эквивалентных нормировках в n-мерном вещественном эвклидовом пространстве R_n. Мы ввели в R_n норму формулой

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}. \tag{141}$$

Пусть теперь функция $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ обладает свойствами нормы [95] и, кроме того, непрерывна на поверхности единичной сферы $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1$. Покажем, что $\|x\|_1 = f(x)$ представляет собой норму, эквивалентную норме (141). Непрерывная функция $f(x)$ достигает на поверхности единичной сферы своего наибольшего и наименьшего значения. Обозначим $c_1 = \sup f(x)$ и $c_2 = \inf f(x)$ при $\|x\| = 1$. В силу положительности и непрерывности $f(x)$, имеем $0 < c_2 \leqslant c_1 < +\infty$. В силу свойств $f(x)$ всюду в R_n,

$$c_2 \|x\| \leqslant f(x) \leqslant c_1 \|x\|,$$

т. е. нормы (141) и $f(x)$ эквивалентны.

В качестве $f(x)$ можно взять, например, выражения:

$$f(x)=\left[\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right]^{\frac{1}{p}}\ (p>1) \quad \text{или} \quad f(x)=\max_k|x_k|.$$

Основываясь на этих соображениях, легко проверить, что нормы, заданные в пространстве $\tilde{W}_p^{(l)}(D)$ формулами:

$$\|\varphi\|=\sum_{l_1+\ldots=l_n=l}\|D^l\varphi\|_{L_p(D)}+\|\varphi\|_{L_p(D)} \tag{142}$$

$$\|\varphi\|=\max_{l_1+\ldots+l_n=l}\|D^l\varphi\|_{L_p(D)}+\|\varphi\|_{L_p(D)} \tag{143}$$

$$\|\varphi\|=\left\{\int_D\left|\sum_{l_1+\ldots+l_n=l}(D_\varphi^l)^2\right|^{\frac{p}{2}}dx\right\}^{\frac{1}{p}}+\|\varphi\|_{L_p(D)} \tag{144}$$

эквивалентны основной норме (138). Этим замечанием мы будем пользоваться в дальнейшем.

Введем теперь еще одно функциональное пространство. На множестве функций, имеющих всевозможные обобщенные производные в D до порядка l включительно и принадлежащих вместе с этими производными $L_p(D)$, определим норму формулой

$$\|\varphi\|_{W_p^{(l)}(D)}=\sum_{k=0}^{l}\sum_{k_1+\ldots+k_n=k}\|D_\varphi^k\|_{L_p(D)}. \tag{145}$$

Полученное линейное нормированное пространство будем обозначать $W_p^{(l)}(D)$. Так же, как это было сделано для пространства $\tilde{W}_p^{(l)}(D)$, можно доказать, что пространство $W_p^{(l)}(D)$ — полное и сепарабельное. Сделанное выше замечание о эквивалентных нормах в $\tilde{W}_p^{(l)}(D)$ в равной мере относится и к пространству $W_p^{(l)}(D)$. Ниже [**116**] мы покажем, что для довольно широкого класса областей пространства $W_p^{(l)}(D)$ и $\tilde{W}_p^{(l)}(D)$ состоят из одного и того же множества функций, и нормы (138) и (145) эквивалентны. При $l=0$ и $l=1$ пространства $W_p^{(l)}(D)$ и $\tilde{W}_p^{(l)}(D)$ совпадают по определению, причем, очевидно, $W_p^{(0)}(D)$ есть $L_p(D)$.

113. Свойства функций класса $W_p^{(l)}(D)$. Систематическое изучение свойств функций пространств $W_p^{(l)}(D)$ и $\tilde{W}_p^{(l)}(D)$ будет нами предпринято в ряде следующих параграфов, посвященных так называемым теоремам вложения. Результаты настоящего параграфа являются

частными случаями этих общих теорем. Однако, ввиду важности упомянутых результатов, мы даем им здесь независимые, значительно более простые доказательства.

Отметим прежде всего одно свойство пространства $W_p^{(l)}(D)$, непосредственно вытекающее из его определения. Пусть имеется замена переменных $x(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на $y(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ такая, что D биоднозначно преобразуется в некоторую область D_1, причем преобразование в обе стороны выражается функциями, имеющими непрерывные производные до порядка l в соответствующей замкнутой области. Если у функций совершить указанную замену независимых переменных, то при этом пространство $W_p^{(l)}(D)$ переходит в $W_p^{(l)}(D_1)$.

Из определения пространства $W_p^{(l)}(D)$ непосредственно следует, что если $\varphi(x) \in W_p^{(l)}(D)$, то $\varphi(x) \in W_q^{(m)}(D)$ при $q \leqslant p$ и $m \leqslant l$. Докажем в связи с этим следующую теорему.

Теорема 1. *Если U есть множество элементов $\varphi(x) \in W_p^{(l)}(D)$, ограниченное в $W_p^{(l)}(D)$ $(l \geqslant 1)$, то оно компактно в $W_p^{(l-1)}(D')$, где D' — любая область, лежащая строго внутри D.* Докажем сначала теорему при $l = 1$. По условию существует такая постоянная C, что, если $\varphi(x) \in U$, то

$$\|\varphi\|^p_{W_p^{(1)}(D)} = \int_D \left[|\varphi(x)|^p + \sum_{s=1}^{n} \left| \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_s} \right|^p \right] dx \leqslant C^p. \qquad (146)$$

Надо доказать, что множество U компактно в $L_p(D')$, где D' — фиксированная область, лежащая строго внутри D. Ограниченность U в $L_p(D')$ непосредственно следует из (146). Остается доказать равностепенную непрерывность в среднем функций $\varphi(x) \in U$ в $L_p(D')$ [**70**]. Мы докажем, что для достаточно малых $|\Delta x| = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \ldots + (\Delta x_n)^2}$ имеет место неравенство:

$$\int_{D'} |\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)|^p \, dx \leqslant C_1 |\Delta x|^p, \qquad (147)$$

где C_1 — постоянная, одна и та же для всех $\varphi(x) \in U$, откуда и следует упомянутая равностепенная непрерывность.

Поворачивая, если нужно, оси координат, мы можем считать, что Δx есть $(\Delta x_1, 0, 0, \ldots, 0)$ и $\Delta x_1 > 0$. Пусть D'' есть область того же типа, что и D', причем D' находится строго внутри D''. Величину Δx_1 будем считать настолько малой, что $x + \Delta x$ не выходит из области D'', когда $x \in D'$. Предположим сперва, что функция $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируема в $\overline{D}$. Очевидно,

$$R = \int_{D'} |\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)|^p \, dx = \int_{D'} \left| \int_0^{\Delta x_1} \frac{\partial \varphi(x_1 + \tau, x_2, \ldots, x_n)}{\partial \tau} \, d\tau \right|^p dx,$$

При $p > 1$ внутренний интеграл оцениваем по неравенству Гёльдера:

$$R \leqslant \int\limits_{D'} (\Delta x_1)^{\frac{p}{p'}} \left| \int\limits_0^{\Delta x_1} \left| \frac{\partial \varphi (x_1 + \tau, x_2, \ldots, x_n)}{\partial \tau} \right|^p d\tau \right| dx =$$

$$= (\Delta x_1)^{\frac{p}{p'}} \int\limits_0^{\Delta x_1} \left| \int\limits_{D'} \left| \frac{\partial \varphi (x_1 + \tau, x_2, \ldots, x_n)}{\partial \tau} \right|^p dx \right| d\tau \leqslant$$

$$\leqslant (\Delta x_1)^{\frac{p}{p'}} \int\limits_0^{\Delta x_1} \| \varphi \|^p_{W_p^{(1)}(D'')} d\tau = (\Delta x_1)^p \| \varphi \|^p_{W_p^{(1)}(D'')}.$$

Откуда

$$\int\limits_{D_1} \left| \varphi (x + \Delta x) - \varphi (x) \right|^p dx \leqslant (\Delta x_1)^p \| \varphi \|^p_{W_p^{(1)}(D'')}. \qquad (148)$$

При $p = 1$ эта оценка непосредственно получается перестановкой порядка интегрирования. Неравенство (148) справедливо не только для непрерывно дифференцируемых функций, но и для любой функции $\varphi(x)$ из $W_p^{(1)}(D)$. В этом легко убедиться, выбирая последовательность сходящихся к $\varphi(x)$ в $W_p^{(1)}(D)$ непрерывно дифференцируемых функций и переходя к пределу в (148). Вместе с (146) оценка (148) приводит к неравенству (147). Теорема тем самым доказана при $l = 1$. Положим теперь, что $l = 2$. Принимая во внимание, что, например, $\frac{\partial^2 \varphi (x)}{\partial x_1^2}$ есть обобщенная производная по x_1, от $\frac{\partial \varphi (x)}{\partial x_1}$, мы, применяя теорему при $l = 1$, докажем ее и для $l = 2$. Аналогично рассматривается и случай любого l.

Отметим еще одну теорему, которая непосредственно следует из теоремы, доказанной в [**IV; 156**].

Теорема 2. *Если последовательность функций $\varphi_k(x)$, непрерывных и имеющих непрерывные производные до порядка $l = \left| \frac{n}{2} \right| + 1$ сходится в $W_2^{(l)}(D')$, где D' — любая область, лежащая строго внутри D, то $\varphi_k(x)$ сходится равномерно в любой области D'.*

Из сказанного непосредственно следует, что предельная функция $\varphi(x)$ непрерывна внутри D. Положим теперь, что мы имеем некоторую функцию $\varphi(x) \in W_2^{(l)}(D)$, причем $l \geqslant \left| \frac{n}{2} \right| + 1$, и $\varphi_k(x)$ — средние для $\varphi(x)$, причем радиус усреднения стремится к нулю при $k \to \infty$. Принимая во внимание свойство средних функций от обобщенных производных [**109**] и теорему 2, мы приходим к следующему утверждению: если $\varphi(x) \in W_2^{(l)}(D)$ и $l \geqslant \left| \frac{n}{2} \right| + 1$, то $\varphi(x)$ эквивалентна непрерывной в D функции.

Положим теперь, что последовательность функций $\varphi_k(x)$ сходится в $W_p^{(l)}$. Исследуем эти функции на каком-либо сечении области D. Пусть $\overline{D}$ — цилиндр, определяемый условиями: $0 \leqslant x_n \leqslant a$ (a — конечное число) и $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ принадлежит замыканию $\overline{\mathfrak{G}}$ некоторой конечной области $\mathfrak{G}$ плоскости $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$. Сечения $\overline{D}$ плоскостями $x_n = \text{const}$ будем обозначать $\mathfrak{G}_{x_n}$.

Теорема 3. *Пусть* $\varphi_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *непрерывны и имеют непрерывную производную* $\frac{\partial \varphi_k(x)}{\partial x_n}$ *в* D *и как* $\varphi_k(x)$, *так и* $\frac{\partial \varphi_k(x)}{\partial x_n}$ *сходятся в* $L_p(D)$ $(p > 1)$. *Тогда* $\varphi_k(x)$ *сходятся в* $L_p(\mathfrak{G}_{x_n})$ *равномерно относительно* x_n *из* $[0, a]$, *предельная функция* $\varphi(x)$ *из* $L_p(D)$ *определяется этим на всех сечениях* $\mathfrak{G}_{x_n}$ *и как элемент* $L_p(\mathfrak{G}_{x_n})$ *непрерывно зависит от* x_n. Сначала докажем утверждение теоремы для $x_n \in \left| \frac{a}{2}, a \right|$. Возьмем непрерывно дифференцируемую на промежутке $[0, a]$ функцию $\zeta(x_n)$, равную нулю при $x_n = 0$ и единице при $x_n \in \left| \frac{a}{2}, a \right|$. Непосредственно проверяется, что функции $\psi_k(x) = \zeta(x_n)\varphi_k(x)$ и $\frac{\partial \psi_k(x)}{\partial x_n}$ сходятся в $L_p(D)$.

Пользуясь формулой

$$\psi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int_0^{x_n} \frac{\partial \psi_k(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \tau)}{\partial \tau} d\tau \qquad (149)$$

и неравенством Гёльдера, получим

$$\int_{\mathfrak{G}} |\psi_l(x) - \psi_k(x)|^p dx_1 \ldots dx_{n-1} =$$

$$= \int_{\mathfrak{G}} \left| \int_0^{x_n} \left| \frac{\partial \psi_l(x_1, \ldots, x_{n-1}, \tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial \psi_k(x_1, \ldots, x_{n-1}, \tau)}{\partial \tau} \right| d\tau \right|^p dx_1 \ldots dx_{n-1} \leqslant$$

$$\leqslant x_n^{\frac{p}{p'}} \int_{\mathfrak{G}} \int_0^{x_n} \left| \frac{\partial \psi_l(x_1, \ldots, x_{n-1}, \tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial \psi_k(x_1, \ldots, x_{n-1}, \tau)}{\partial \tau} \right|^p dx_1 \ldots dx_{n-1} d\tau \leqslant$$

$$\leqslant a^{\frac{p}{p'}} \left\| \frac{\partial \psi_l}{\partial x_n} - \frac{\partial \psi_k}{\partial x_n} \right\|^p_{L_p(D)}.$$

Отсюда следует, что $\psi_k(x)$ сходятся в норме $L_p(\mathfrak{G}_{x_n})$ равномерно относительно x_n к некоторой функции $\psi(x)$. Тем самым, в силу $\zeta(x_n) = 1$ при $x_n \in \left| \frac{a}{2}, a \right|$, мы получаем для $\varphi_k(x)$ предельную функцию $\varphi(x)$ в $L_p(\mathfrak{G}_{x_n})$, определенную на каждом сечении $\mathfrak{G}_{x_n}$, если

$x_n \in \left[\frac{a}{2}, a\right]$. Это утверждение доказывается совершенно аналогично и для $x_n \in \left|0, \frac{a}{2}\right|$, и очевидно, что эта предельная функция $\varphi(x)$, определенная на всех сечениях $\mathfrak{G}_{x_n}$, будет предельной для $\varphi_k(x)$ и в $L_p(D)$. Остается доказать непрерывную зависимость $\varphi(x)$, как элемента $L_p(\mathfrak{G}_{x_n})$, от x_n, т. е. доказать, что

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{\mathfrak{G}_{x_n}} |\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}\, x_n + \delta) - \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)|^p dx_1 \ldots dx_{n-1} = 0.$$

Мы имеем, в силу неравенства Гёльдера:

$$\int_{\mathfrak{G}_{x_n}} |\psi_k(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n + \delta) - \psi_k(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)|^p dx_1 \ldots dx_{n-1} =$$

$$= \int_{\mathfrak{G}_{x_n}} \left| \int_{x_n}^{x_n + \delta} \frac{\partial \psi_k(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)}{\partial x_n} dx_n \right|^p dx_1, \ldots, dx_{n-1} \leqslant$$

$$\leqslant \delta^{\frac{p}{p'}} \int_{\mathfrak{G}_{x_n}} \int_{x_n}^{x_n + \delta} \left| \frac{\partial \psi_k}{\partial x_n} \right|^p dx \leqslant \delta^{\frac{p}{p'}} \left\| \frac{\partial \psi_k}{\partial x_n} \right\|^p_{L_p(D)}$$

и в пределе

$$\int_{\mathfrak{G}_{x_n}} |\psi(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n + \delta) - \psi(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)|^p dx_1 \ldots dx_{n-1} \leqslant$$

$$\leqslant \delta^{\frac{p}{p'}} \left\| \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \right\|^p_{L_p(D)},$$

откуда и следует требуемое соотношение при $x_n \in \left|\frac{a}{2}, a\right|$. То же имеет место и для $x_n \in \left|0, \frac{a}{2}\right|$.

Замечание. В теореме условие непрерывности производных $\frac{\partial \varphi_m(x)}{\partial x_n}$ можно ослабить, потребовав лишь наличия обобщенных производных из $L_p(D)$. В этом случае равенство (149) будет иметь место [**110**] для всех $x_n \in [0, a]$ и почти всех $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ из $\mathfrak{G}$, и все дальнейшие рассуждения сохраняют свою силу. Предел $\frac{\partial \varphi_m(x)}{\partial x_n}$ в $L_p(D)$ будет, очевидно, обобщенной производной $\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_n}$ в D. Из доказанной теоремы и свойств обобщенных производных следует, что если функция $\varphi(x)$ задана, например, в кубе $Q[0 \leqslant x_i \leqslant 1; i = 1, 2, \ldots, n]$ и принадлежит $L_p(Q)$ $(p \geqslant 1)$ вместе с обобщенной

производной $\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_n}$, то она эквивалентна функции, определенной на каждом сечении куба Q плоскостью $x_n = b$ $(0 \leqslant b \leqslant 1)$, принадлежащей на этих сечениях $L_p(\mathfrak{G}_{x_n})$ и непрерывно зависящей от x_n в норме $L_p(\mathfrak{G})$. Это следует из того, что такую функцию $\varphi(x)$ можно аппроксимировать [111] непрерывно дифференцируемыми в $\bar{Q}$ функциями $\varphi_k(x)$ так, как это указано в условиях теоремы. В частности, будут существовать в указанном смысле и предельные значения $\varphi(x)$ на гранях куба $x_n = 0$ и $x_n = 1$.

Положим теперь, что функция $\varphi(x)$ задана в некоторой ограниченной области D и принадлежит $W_p^{(1)}(D)$. Пусть далее граница D содержит гладкий кусок S размерности $(n-1)$. Отобразим часть D, примыкающую к S, с помощью непрерывно дифференцируемого вплоть до границы преобразования $y = y(x)$ в параллелепипед (считается, что S таково, что указанное преобразование возможно). Если

$$x_n = F(x_1, \ldots, x_{n-1}) \quad (\alpha \leqslant x_k \leqslant \beta;\ k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

есть уравнение S, и точки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющие условиям $\alpha \leqslant x_k \leqslant \beta$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$; $0 \leqslant x_n - F(x_1, \ldots, x_{n-1}) \leqslant \gamma$, принадлежат $\bar{D}$, то в качестве новых переменных y_k можно взять

$$y_1 = x_1;\ y_2 = x_2;\ \ldots;\ y_n = x_n - F(x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

Параллелепипед определится неравенствами: $\alpha \leqslant y_k \leqslant \beta$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$; $0 \leqslant y_n \leqslant \gamma$. В новых переменных $\varphi(y)$ будет принадлежать $W_p^{(1)}(Q)$, где Q — упомянутый параллелепипед, и для нее будет справедливо сказанное выше.

В частности, при приближении к грани T куба Q, являющейся образом куска S, значение функции $\varphi(y)$ будет приближаться в норме $L_p(T)$ к значениям $\varphi(y)$ на самой грани. В старых координатах это означает, что значения $\varphi(x)$ на S и значения $\varphi(x)$ на „соответствующим образом сдвинутых поверхностях“ близки друг к другу в смысле нормы $L_p(S)$. В этом смысле для функций $\varphi(x)$ из $W_p^{(1)}(D)$ можно говорить о их значениях на гладких поверхностях размерности $n-1$ (в частности, о их значениях на гладких кусках границы размерности $n-1$) и о непрерывном принятии этих значений.

Покажем сейчас, что для функций пространства $W_p^{(1)}(D)$ при указанных ниже условиях справедлива обычная формула интегрирования по частям

$$\int_D \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_k}\psi(x)\,dx = -\int_D \varphi(x)\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_k}\,dx + \int_S \varphi(x)\psi(x)\cos(n, x_k)\,dS, \tag{15б}$$

где n — внешняя нормаль к границе S области D. Предположим, что область D можно разбить на конечное число областей D_k, каждая

из которых звездна по отношению к какой-нибудь своей точке и имеет кусочно-гладкую границу. Если мы докажем справедливость формулы (150) для каждой из D_k, то, складывая эти равенства по всем D_k, убедимся в справедливости (150) и для всей области D. Итак, пусть D звездна и $\varphi(x) \in W_p^{(1)}(D)$, $\psi(x) \in W_{p'}^{(1)}(D)$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$. В силу теоремы из [111] существуют последовательности непрерывно дифференцируемых в $\overline{D}$ функций $\varphi_k(x)$ и $\psi_k(x)$, сходящиеся к $\varphi(x)$ в $W_p^{(1)}(D)$ и $W_{p'}^{(1)}(D)$ соответственно. В силу теоремы 3 $\varphi_k(x) \to \varphi(x)$ в $L_p(S)$, а $\psi_k(x) \to \psi(x)$ в $L_{p'}(S)$. Для функций $\varphi_k(x)$ и $\psi_k(x)$ формула (150) справедлива. Переходя в ней к пределу по k, мы и убедимся в справедливости (150) для $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

При решении предельных задач математической физики рассматривают некоторые подпространства пространств $W_p^{(l)}(D)$, состоящие из элементов, удовлетворяющих каким-либо однородным предельным условиям. Впервые они были введены К. Фридрихсом (см. Гильберт — Курант, «Методы математической физики», т. II, гл. VII). Пусть D, как и выше, — ограниченная область пространства $x(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Обозначим $\dot{C}^{(l)}(D)$ — множество всех финитных непрерывных и непрерывно дифференцируемых до порядка l в D функций. В этом линеале введем норму $W_p^{(l)}(D)$, и результат замыкания $\dot{C}^{(l)}(D)$ по этой норме обозначим через $\mathring{W}_p^{(l)}(D)$. Если $\varphi(x) \in \dot{C}^{(l)}(D)$ и $\psi(x) \in W_{p'}^{(l)}(D)$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$, то мы имеем по определению обобщенных производных:

$$\int_D \mathrm{D}^k \varphi(x)\, \psi(x)\, dx = (-1)^k \int_D \varphi(x)\, \mathrm{D}^k \psi(x)\, dx. \qquad (151)$$

Принимая во внимание, что элементы $\mathring{W}_p^{(l)}(D)$ суть пределы элементов из $\dot{C}^{(l)}(D)$ в норме $W_p^{(l)}(D)$, мы можем утверждать, что формула (151) имеет место для любых $\varphi(x) \in \mathring{W}_p^{(l)}(D)$ и $\psi(x) \in W_{p'}^{(l)}(D)$. Очевидно, что $\mathring{W}_p^{(l)}(D)$ входит в $W_p^{(l)}(D)$. Нетрудно видеть, что $\mathring{W}_p^{(l)}(D)$ есть правильная часть $W_n^{(l)}(D)$ $(l \geqslant 1)$. Действительно, рассмотрим, например, случай $l = 1$. Напишем формулу интегрирования по частям

$$\int_D \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_1}\, \psi(x)\, dx = -\int_D \varphi(x)\, \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_1}\, dx + \int_S \varphi(x)\, \psi(x) \cos(n, x_1)\, dS,$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — непрерывно дифференцируемые в $\overline{D}$ функции. В $W_p^{(l)}(D)$ имеются функции $\varphi(x)$ указанного типа, не равные нулю на S, и для них, при соответствующем выборе $\psi(x)$, интеграл по S будет отличным от нуля. Для любой же функции $\varphi(x)$ из $\mathring{W}_p^{(l)}(D)$

имеет место формула (151) при $k=1$, в которой интеграл по поверхности отсутствует.

Формула (151), ввиду произвольности $\psi(x)\in W_{p'}^{(l)}(D)$, дает нам право говорить, что функции $\varphi(x)$ из $\mathring{W}_p^{(l)}(D)$ „обращаются в нуль на границе вместе со своими производными до порядка $l-1$“.

Если граница S области обладает достаточной гладкостью, то $\varphi(x)$ и ее производные до порядка $(l-1)$ стремятся к нулю в норме $L_p(S)$ при приближении к S, как это указано выше.

В общем случае указанное предельное условие имеет место лишь в том смысле, что для любых $\varphi(x)\in \mathring{W}_p^{(l)}(D)$ и $\psi(x)\in W_{p'}^{(l)}(D)$ имеет место формула (151). При рассмотрении пространства $\mathring{W}_p^{(l)}(D)$ гладкость границы не играет существенной роли, ибо, поместив D внутрь некоторого шара D_1 и доопределив $\varphi(x)$ в D_1 нулем (вне D), получим $\varphi(x)\in \mathring{W}_p^{(l)}(D_1)$. Такое распространение функций из $\mathring{W}_p^{(l)}(D)$ дает возможность делать более полные заключения без введения областей D', находящихся строго внутри D. В частности: 1) функции $\varphi(x)$ из $\mathring{W}_p^{(l)}(D)$ можно аппроксимировать в норме $W_p^{(l)}(D)$ бесконечно дифференцируемыми финитными в D функциями; 2) если $\varphi(x)\in \mathring{W}_2^{(l)}(D)$ с $l\geqslant\left[\frac{n}{2}\right]+1$, то $\varphi(x)$ эквивалентна непрерывной в $\overline{D}$ функции, равной нулю на границе D.

В заключение покажем, что замыкание функций из $\dot{C}^{(\infty)}(D)$ в $W_p^{(0)}(D)$ $(p\geqslant 1)$, т. е. в $L_p(D)$, дает все пространство $L_p(D)$. Иначе говоря, в пространстве $L_p(D)$ гладкие финитные функции образуют плотное множество.

Действительно, пусть D_δ есть множество точек, расстояние которых до границы D не меньше δ и для любой $\varphi(x)\in L_p(D)$:

$$\varphi^{(\delta)}(x)=\begin{cases}\varphi(x), & \text{если } x\in D_\delta,\\ 0, & \text{если } x\overline{\in} D_\delta.\end{cases}$$

Очевидно, функции $\varphi^{(\delta)}(x)$ плотны в $L_p(D)$, так как при $\delta\to 0$

$$\|\varphi-\varphi^{(\delta)}\|^p_{L_p(D)}=\int\limits_{D-D_\delta}|\varphi(x)|^p\,dx\to 0.$$

Построим средние для $\varphi^{(\delta)}(x)$ функции $\varphi_h^{(\delta)}(x)$ при $h\leqslant\frac{\delta}{2}$. Это гладкие финитные в D функции, сходящиеся в $L_p(D)$ при $h\to 0$ к $\varphi^{(\delta)}(x)$. Эти функции $\varphi_h^{(\delta)}(x)$ образуют плотное в $L_p(D)$ множество. Таким образом, мы показали, что при $l=0$ пространства $W_p^{(l)}(D)$ и $\mathring{W}_p^{(l)}(D)$ совпадают.

114. Теоремы вложения. Мы переходим теперь к подробному изучению свойств функций пространства $W_p^{(l)}(D)$ и установим зависимость между поведением функций и их производных в самой области и на ее сечениях различных размерностей. В связи с этим мы получим ряд важных неравенств и на их основе рассмотрим вопрос об эквивалентных нормировках пространства $W_p^{(l)}(D)$. Совокупность этих результатов обычно называют „теоремами вложения" С. Л. Соболева. В настоящем параграфе мы приведем формулировки упомянутых теорем.

Будем считать, что D — звездна относительно всех точек некоторого шара K, лежащего внутри D, или что D можно разбить гладкими поверхностями на конечное число областей такого типа.

Для областей указанного типа доказывается, что *если* $\varphi(x)$ *имеет в* D *все обобщенные производные порядка* $l \geqslant 1$, *причем* $\varphi(x)$ *и эти производные принадлежат* $L_p(D)$ $(p > 1)$, *то* $\varphi(x)$ *имеет все обобщенные производные до порядка* l, *причем они также принадлежат* $L_p(D)$. Другими словами, класс функций $\tilde{W}_p^{(l)}(D)$ вкладывается в класс $\tilde{W}_p^{(m)}(D)$ при $m < l$, а также в класс $W_p^{(m)}(D)$. Отсюда, между прочим, вытекает, что для областей упомянутого выше вида классы $W_p^{(l)}(D)$ и $\tilde{W}_p^{(l)}(D)$ состоят из одних и тех же функций. Условимся для краткости обозначать

$$\|\varphi\|_{p,\,l} = \|\varphi\|_{\tilde{W}_p^{(l)}(D)}.$$

Доказывается, что имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{l-1} \|\varphi\|_{p,\,k} \leqslant A\ \|\varphi\|_{p,\,l}, \tag{152}$$

где A — положительная постоянная, не зависящая от выбора $\varphi(x) \in \tilde{W}_p^{(l)}(D)$. Неравенство (152) показывает, что нормы пространств $W_p^{(l)}(D)$ и $\tilde{W}_p^{(l)}(D)$ эквивалентны. В дальнейшем мы можем не различать пространства $W_p^{(l)}(D)$ и $\tilde{W}_p^{(l)}(D)$. Высказанные утверждения содержатся как частные случаи в более общих теоремах, к формулировке которых мы переходим.

Указанные выше утверждения и теоремы, которые мы формулируем ниже, будут доказаны в **[115—118]**.

Предварительно введем пространство $C^{(l)}(D)$ функций непрерывных в $\bar{D}$ и имеющих все производные до порядка l включительно также непрерывные в $\bar{D}$, причем норма в этом пространстве определяется следующим образом:

$$\|\varphi\|_{C^{(l)}(D)} = \max_{\substack{x \in \bar{D} \\ 0 \leqslant k \leqslant l}} |\mathrm{D}^k \varphi(x)|,$$

где $D^k\varphi(x)$ — любая производная порядка k и максимум берется по $x \in D$ и по всевозможным производным до порядка l. Напомним, что непрерывность какой-либо производной $D^k\varphi(x)$ в $\bar{D}$ понимается следующим образом: $\varphi(x)$ имеет внутри D непрерывную производную $D^k\varphi(x)$, и эту последнюю можно доопределить на границе D так, что получится функция, непрерывная в $\bar{D}$. Вместо указанной выше нормы в $C^{(l)}(D)$ можно ввести эквивалентную норму по формуле

$$\|\varphi\| = \sum_{k=0}^{l} \sum_{k_1 + \ldots + k_n = k} \max_{x \in \bar{D}} \left| \frac{\partial^k \varphi(x)}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \right|.$$

Пространство $C^{(l)}(D)$ есть, очевидно, полное пространство типа B. Пространство $C^{(0)}D$ мы, как и раньше, будем обозначать $C(D)$.

Теорема 1. *Если $p > 1$ и $pl > n$, то всякая функция $\varphi(x) \in W_p^{(l)}(D)$ эквивалентна функции из $C(D)$ и*

$$\|\varphi\|_{C(D)} \leqslant M \|\varphi\|_{W_p^{(l)}(D)}, \tag{153}$$

где M — постоянная, зависящая только от области D. Всякое множество U, ограниченное в $W_p^{(l)}(D)$, компактно в $C(D)$.

Теорема 2. *Если $p > 1$ и $pl \leqslant n$, то всякая функция $\varphi(x) \in W_p^{(l)}(D)$ эквивалентна такой функции $\varphi(x)$, которая определена почти везде на сечении D_s области D любой плоскостью размерности $s > n - pl$, причем $\varphi(x)$ суммируема на D_s с любой степенью q, которая удовлетворяет неравенству*

$$q < \frac{ps}{n - pl} \tag{154}$$

и

$$\|\varphi\|_{L_q(D_s)} \leqslant M_1 \|\varphi\|_{W_p^{(l)}(D)}, \tag{155}$$

где M_1 — постоянная, зависящая только от области D и сечения D_s. Кроме того, при любом заданном $\varepsilon > 0$ существует $\eta > 0$, одно и то же для всех $\varphi(x)$, нормы которых в $W_p^{(l)}(D)$ не превышают любого фиксированного числа, такое, что

$$\int_{D_s} |\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)|^q \, ds \leqslant \varepsilon, \tag{156}$$

если $|\Delta x| \leqslant \eta$ и точки x и $x + \tau\Delta x$ $(0 \leqslant \tau \leqslant 1)$ принадлежат D. Из сказанного вытекает, что *множество, ограниченное в $W_p^{(l)}(D)$, компактно в $L_q(D_s)$.*

Отметим, что за D_s мы можем брать как полное, так и неполное плоское s-мерное сечение D, а также n-мерную область, входящую в D. Если $pl = n$, то в последней теореме q можно брать любое,

большее единицы. При $pl < n$ правая часть (154) больше единицы. Теорема остается справедливой, если плоскость заменить гладкой поверхностью.

Замечание. Согласно теореме 1 всякая функция $\varphi(x) \in W_p^{(l)}(D)$ при $pl > n$ оказывается и функцией из $C(D)$, т. е. из $W_p^{(l)}(D)$ она вкладывается в $C(D)$. Согласно (153) оператор вложения, сопоставляющий каждой функции из $W_p^{(l)}(D)$ ее же, но как элемент $C(D)$, оказывается ограниченным оператором, а последнее утверждение теоремы сводится к тому, что этот оператор является и вполне непрерывным оператором. Аналогичное замечание можно привести и для теоремы 2. Укажем еще на некоторые следствия теорем вложения. Если $pl > n$ и целое число m удовлетворяет неравенству $0 < m < l - \frac{n}{p}$, то любая $\varphi(x) \in W_p^{(l)}(D)$ непрерывно дифференцируема в $\bar{D}$ до порядка m, причем функции $\mathrm{D}^k\varphi(x)$ при $k \leqslant m$ эквивалентны соответствующим непрерывным в $\bar{D}$ производным от $\varphi(x)$, и существует такое положительное число A, зависящее только от D, что

$$|\mathrm{D}^k\varphi(x)| \leqslant A \|\varphi\|_{W_p^{(l)}(D)}. \tag{157}$$

Отсюда следует, что $W_p^{(l)}(D)$ при $pl > n$ есть часть пространства функций, непрерывно дифференцируемых в D до порядка: $l - \left|\frac{n}{p}\right| - 1$ (часть пространства $C^{l-\left[\frac{p}{n}\right]-1}$). Если

$$m \geqslant 0, \quad m \geqslant l - \frac{n}{p} \quad \text{и} \quad s > n - (l-m)p,$$

то на всяком достаточно гладком s-мерном многообразии F_s в D:

$$\mathrm{D}^m\varphi(x) \in L_q(F_s) \quad \text{при} \quad q < \frac{sp}{n-(l-m)p}, \tag{158}$$

и существует такое положительное число A_1, зависящее только от D и F_s, что

$$\|\mathrm{D}^m\varphi(x)\|_{L_q(D_s)} \leqslant A_1 \|\varphi\|_{W_p^{(l)}(D)}. \tag{159}$$

Во всех перечисленных случаях соответствующие операторы вложения вполне непрерывны.

Теоремы 1 и 2 позволяют построить различные нормы в $W_p^{(l)}(D)$, эквивалентные основной норме (145) или (138). Более общий результат в этом направлении дает следующая теорема 3.

Теорема 3. *Пусть линейные ограниченные в $W_p^{(l)}(D)$ функционалы $l_k(u)$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$ таковы, что они не обращаются одно-*

временно в нуль ни на одном отличном от тождественного нуля полиноме степени не выше $l-1$. Тогда формула

$$|\varphi|^{(0)}=\sum_{l_1+l_2+\ldots+l_n=l}|D^l\varphi|^p_{L_p(D)}+\sum_{k=1}^{N}|l_k(\varphi)|^p \tag{160}$$

определяет норму, эквивалентную основной норме (144) или (138).

Отметим предварительно, что, в силу сказанного в |112|, норма (160) эквивалентна, например, норме

$$\|\varphi\|=\sum_{l_1+l_2+\ldots+l_n=l}|D^l\varphi|_{L_p(D)}+\sum_{k=1}^{N}|l_k(\varphi)| \tag{161}$$

и другим аналогичным выражениям.

Приведем некоторые примеры эквивалентных норм в пространстве $W_p^{(1)}(D)$. Из теоремы 3 следует, что в $W_p^{(1)}(D)$ можно задать норму формулой

$$\|\varphi\|=\sum_{k=1}^{n}\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right\|_{L_p(D)}+\left|\int_D\varphi(x)\,dx\right|. \tag{162}$$

Действительно, функционал $\int_D\varphi(x)\,dx$ линеен в $W_p^{(1)}(D)$ в силу неравенства

$$\left|\int_D\varphi(x)\,dx\right|\leqslant\|\varphi\|_{L_p(D)}(mD)^{\frac{1}{p'}}\leqslant\|\varphi\|_{W_p^{(1)}(D)}(mD)^{\frac{1}{p'}},$$

и $\int_D c\,dx\neq 0$ ни при какой постоянной $c\neq 0$ (здесь mD обозначает меру области D).

Из теоремы 2 вытекает, что норма

$$|\varphi|=\sum_{k=1}^{n}\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right\|_{L_p(D)}+\|\varphi\|_{L_q(D)} \tag{163}$$

эквивалентна норме (138) при всяком q, удовлетворяющем условию $1\leqslant q<\frac{pn}{n-p}$ $(p<n)$. При $p=n$ можно брать любое $q\geqslant 1$. Если же $p>n$, то также можно брать любое $q\geqslant 1$ или даже заменять второе слагаемое формулы (163) на $\|\varphi\|_{C(D)}$. Такое же замечание относится и к последующей формуле (164). Читатель легко проверит, что выражение

$$\|\varphi\|=\sum_{k=1}^{n}\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right\|_{L_p(D)}+\|\varphi\|_{L_q(S)}, \tag{164}$$

где S — какое-либо гладкое многообразие $(n-1)$ измерения, лежащее в D, и показатель q удовлетворяет условию $1 \leqslant q < \frac{p(n-1)}{n-p} (p < n)$, также определяет норму, эквивалентную норме (138). Аналогичные соображения приводят к разнообразным эквивалентным нормировкам пространства $W_p^{(l)}(D)$ при $l \geqslant 1$.

115. Интегральные операторы с полярным ядром. Мы переходим теперь к изложению доказательств теорем вложения, о которых мы говорили в предыдущем параграфе. Предварительно нам надо рассмотреть некоторый класс интегральных операторов с полярным ядром. Как обычно, через D обозначим ограниченную область n-мерного пространства R_n. Пусть σ_n — сфера радиуса единица в R_n (размерности $n-1$) и $|\sigma_n|$ — площадь этой сферы. Для элемента объема в R_n имеем формулу [II, 173] $dx = dx_1 dx_2 \ldots dx_n = r^{n-1} dr d\sigma_n$, где

$$d\sigma_n = \sin^{n-2}\theta_1 \sin^{n-3}\theta_2 \ldots \sin\theta_{n-2} d\theta_1 d\theta_2 \ldots d\theta_{n-2} d\varphi.$$

Теорема 1. *Пусть $B(x, y)$ — ограниченное при x и $y \in \bar{D}$ и непрерывное при $x \neq y$ ядро. Интегральный оператор*

$$u(x) = \int_D \frac{B(x, y)}{|x-y|^{\lambda}} f(y)\, dy \tag{165}$$

вполне непрерывен (и тем самым ограничен) как оператор из $L_p(D)$ в $C(D)$ при $\lambda < \frac{n}{p'}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$.[*)]

По условию $|B(x, y)| \leqslant B$, где B — постоянная. По неравенству Гёльдера:

$$|u(x)| \leqslant B \left[\int_D |f(y)|^p dy\right]^{\frac{1}{p}} \left|\int_{K_R} r^{-\lambda p'} dy\right|^{\frac{1}{p'}},$$

где K_R — шар радиуса R с центром в начале координат, содержащий D, и $r = |x-y|$. Переходя к сферическим координатам с началом в точке x, получим

$$\left|\int_{K_R} r^{-\lambda p'} dy\right|^{\frac{1}{p'}} \leqslant \left|\int_0^{2R} r^{n-1-\lambda p'} dr \int_{\sigma_n} d\sigma_n\right|^{\frac{1}{p'}} \tag{166}$$

и, следовательно,

$$|u(x)| \leqslant B \left(\frac{|\sigma_n|}{n-\lambda p'}\right)^{\frac{1}{p'}} (2R)^{\frac{n}{p'}-\lambda} \|f\|_{L_p(D)}. \tag{167}$$

Эта оценка показывает, что если $\|f\|_{L_p(D)} \leqslant C$, где C — некоторая постоянная, то соответствующие функции $u(x)$ равномерно ограничены в $\bar{D}$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что они равностепенно непрерывны. Пусть $\delta > 0$ достаточно малое число и $D^{(\delta)}$ — множество тех точек $y \in D$,

---

*) Здесь и в дальнейшем считаем $p > 1$.

для которых $|y-x| \geqslant \delta$. Для x и $x+\Delta x \in D$ получим

$$|u(x+\Delta x)-u(x)| \leqslant \int\limits_{D^{(\delta)}} \left| \frac{B(x, y)}{|x-y|^{\lambda}} - \frac{B(x+\Delta x, y)}{|x+\Delta x-y|^{\lambda}} \right| \cdot |f(y)|\, dy +$$

$$+ B \int\limits_{D-D^{(\delta)}} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{\lambda}}\, dy + B \int\limits_{D-D^{(\delta)}} \frac{|f(y)|}{|x+\Delta x-y|^{\lambda}}\, dy,$$

причем мы считаем $|\Delta x| \leqslant \frac{\delta}{2}$. При любом заданном $\varepsilon > 0$ существует такое $\eta > 0$, что абсолютное значение разности, входящей в первый интеграл, $\leqslant \varepsilon$, если $|\Delta x| \leqslant \eta$. Применяя неравенство Гёльдера, получим для первого интеграла оценку $\varepsilon |D|^{\frac{1}{p'}} C$, где $|D|$ — мера D. Второй интеграл можно оценить по неравенству (167) при $2R = \delta$, а третий интеграл не превосходит интеграл от соответствующей подынтегральной функции по той части шара

$$|y-(x+\Delta x)| \leqslant \frac{3\delta}{2},$$

которая принадлежит D, и оценка этого интеграла также получается из (167) при $2R = \frac{3\delta}{2}$.

Окончательно

$$|u(x+\Delta x)-u(x)| \leqslant \varepsilon |D|^{\frac{1}{p'}} C + B \left(\frac{|\sigma_n|}{n-\lambda p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \left| \delta^{\frac{n}{p'}-\lambda} + \left(\frac{3\delta}{2} \right)^{\frac{n}{p'}-\lambda} \right|,$$

откуда, ввиду произвольности выбора δ и ε, и следует равностепенная непрерывность $u(x)$ при $\|f\|_{L_p(D)} \leqslant C$. Тем самым теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть $n > \lambda \geqslant \frac{n}{p'}$, целое число $s > n-(n-\lambda)p$ $\left($или, что то же, $\frac{s}{p} > \lambda - \frac{n}{p'}\right)$ и $s \leqslant n$. Интегральный оператор* (165) *вполне непрерывен как оператор из $L_p(D)$ в $L_q(D_s)$, где D_s — какое-либо s-мерное плоское сечение и q — любое число, удовлетворяющее неравенству*

$$q < q^* = \frac{sp}{n-(n-\lambda)p}.$$

Предполагая, что $B(x, y)$ определено в области D_1, содержащей D внутри себя, и обладает в D_1 указанными выше свойствами, получаем, кроме того:

$$\|u(x+\alpha x^0)-u(x)\|_{L_q(D_s)} \leqslant \varepsilon(\alpha)\|f\|_{L_p(D)}, \tag{168}$$

где x^0 — фиксированный вектор, а $\varepsilon(\alpha)$ непрерывна при $0 \leqslant \alpha \leqslant \delta$, где δ-некоторое положительное число, равна нулю при $\alpha = 0$ и определяется постоянной B, а также размерами D и D_s. При $s = n$ за D_s можно брать любую подобласть D.

Замечание. Можно не предполагать, что $B(x, y)$ определено в более широкой области D_1, но при этом в формуле (168) надо считать сдвиги αx^0 допустимыми, т. е. такими, что точки $x+\alpha x^0$ находятся в D. Отметим также, что при $n-(n-\lambda)p = 0$ показатель q — любой.

Доказательство разобьем на две части.

Лемма 1. *При указанных условиях оператор* (165) *ограничен как оператор из* $L_p(D)$ *в* $L_q(D_s)$.

Из условий теоремы следует, что $q^* > p$, и будем пока считать, что $q > p$. Мы имеем

$$\frac{s}{q} > \frac{s}{q^*} = \lambda - \frac{n}{p'}, \quad \text{т. е.} \quad \lambda = \frac{s}{q} - \frac{n}{p'} - 2\beta \qquad (\beta > 0).$$

Положим

$$\alpha_1 = \frac{1}{q}; \quad \alpha_2 = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}; \quad \alpha_3 = \frac{1}{p'} \qquad (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = 1.$$

Пользуясь дважды неравенством Гёльдера, придем к следующему неравенству с тремя множителями:

$$\int_D |f_1 f_2 f_3| \, dx \leqslant \left| \int_D |f_1|^{\frac{1}{\alpha_1}} \right|^{\alpha_1} \left| \int_D |f_2|^{\frac{1}{\alpha_2}} \right|^{\alpha_2} \left| \int_D |f_3|^{\frac{1}{\alpha_3}} \right|^{\alpha_3}.$$

Применяя его к интегралу, стоящему в правой части следующей очевидной оценки:

$$|u(x)| \leqslant B \int_{K_R} (|f(y)|^{\frac{p}{q}} r^{-\frac{s}{q}+\beta})(|f(y)|^{p\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)})(r^{-\frac{n}{p'}+\beta}) \, dy,$$

причем $f(y)$ продолжена нулем на часть шара, лежащую вне D, получим

$$|u(x)| \leqslant B \left[\int_{K_R} |f(y)|^p r^{-s+q\beta} dy \right]^{\frac{1}{q}} \left[\int_{K_R} |f(y)|^p dy \right]^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \left[\int_{K_R} r^{-n+p'\beta} dy \right]^{\frac{1}{p'}}.$$

Второй множитель справа есть $\|f\|_{L_p(D)}^{1-\frac{p}{q}}$. Третий оценивается известным образом:

$$\int_{K_R} r^{-n+p'\beta} \, dy \leqslant \frac{|\sigma_n| (2R)^{p'\beta}}{p'\beta},$$

откуда

$$|u(x)| \leqslant B \left(\frac{|\sigma_n|}{p'\beta} \right)^{\frac{1}{p'}} (2R)^{\beta} \|f\|_{L_p(D)}^{1-\frac{p}{q}} \left[\int_{K_R} |f(y)|^p r^{-s+q\beta} \, dy \right]^{\frac{1}{q}}$$

и

$$\int_{D_s} |u(x)|^q \, dx^{(s)} \leqslant B^q \left(\frac{|\sigma_n|}{p'\beta} \right)^{\frac{q}{p'}} (2R)^{q\beta} \|f\|_{L_p(D)}^{q-p} \int_{D_s} dx^{(s)} \int_{K_R} |f(y)|^p \, r^{-s+q\beta} \, dy, \quad (169)$$

где дифференциал $dx^{(s)}$ относится к D_s. Меняем порядок интегрирования и оцениваем внутренний интеграл от $r^{-s+q\beta}$ по D_s, который берется при постоянном y. Заметим сперва, что

$$-s + q\beta = -q\left(\frac{s}{q} - \beta\right) = -q\left(\lambda - \frac{n}{p'} + \beta\right) < 0,$$

Вводя в D_s — сферические координаты, центр которых есть проекция y на D_s, получим $dx^{(s)} = \rho^{s-1}\, d\rho d\sigma_s$, и $r^{-s+q\beta} \leqslant \rho^{-s+q\beta}$, ибо $\rho \leqslant r$ и $-s + q\beta < 0$. Отсюда

$$\int_{D_s} r^{-s+p\beta}\, dx^{(s)} \leqslant \int_{D_s} \rho^{-s+q\beta}\, \rho^{s-1}\, d\rho d\sigma_s = \frac{|\sigma_s|\,(2R)^{q\beta}}{q\beta},$$

и, в силу (169):

$$|u|_{L_q(D_s)} \leqslant (2R)^{2\beta} C\, |f|_{L_p(D)}, \tag{170}$$

где

$$C = B\left(\frac{|\sigma_n|}{p'\beta}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\frac{|\sigma_s|}{q\beta}\right)^{\frac{1}{q}} \tag{171}$$

не зависит от размеров D.

Мы считали $q > p$. Если взять $q \leqslant p$, то достаточно использовать неравенство

$$|u|_{L_q(D_s)} \leqslant |u|_{L_{q_1}(D_s)}\, |D_s|^{1-\frac{q}{q_1}} \qquad (p < q_1 < q^*) \tag{172}$$

($|D_s|$ — мера D_s), которое непосредственно следует из неравенства Гёльдера, и в выражение C войдет еще множитель $|D_s|^{1-\frac{q}{q_1}}$

Лемма 2. *Оператор (165) непрерывен по сдвигу в указанном в теореме 2 смысле.*

Как и в теореме 1

$$|u(x+\Delta x) - u(x)| \leqslant \int_{D^{(\delta)}} \left| \frac{B(x,\, y)}{|y-x|^{\lambda}} - \frac{B(x+\Delta x,\, y)}{|y-(x+\Delta x)|^{\lambda}} \right| \cdot |f(y)|\, dy +$$

$$+ B \int_{|y-x| \leqslant \delta} \frac{|f(y)|}{|y-x|^{\lambda}}\, dy + B \int_{|y-x| \leqslant \delta} \frac{|f(y)|}{|y-(x+\Delta x)|^{\lambda}}\, dy, \tag{173}$$

причем, как и выше, $|\Delta x| \leqslant \frac{\delta}{2}$. При заданном $\varepsilon > 0$ существует такое $\eta > 0$, что при $|\Delta x| \leqslant \eta$ мы имеем

$$\|u(x+\Delta x) - u(x)\|_{L_q(D_s)} \leqslant \varepsilon\, |D|^{\frac{1}{p'}}\, |D_s|^{\frac{1}{q}}\, \|f\|_{L_p(D)} + \ldots,$$

и многоточие — сумма норм второго и третьего слагаемых правой части формулы (173). Для этих норм мы имеем оценку (170) при $2R = \delta$ и $2R = \frac{3\delta}{2}$, так что

$$\|u(x+\Delta x) - u(x)\|_{L_q(D_s)} \leqslant (C_1\varepsilon + C_2\delta^{2\beta})\, \|f\|_{L_p(D)}, \tag{174}$$

где

$$C_1 = |D|^{\frac{1}{p'}}\, |D_s|^{\frac{1}{q}}; \quad C_2 = B\left(\frac{|\sigma_n|}{p'\beta}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\frac{|\sigma_s|}{q\beta}\right)^{\frac{1}{q}} \left[1 + \left(\frac{3}{2}\right)^{2\beta}\right] \qquad (q > p).$$

При $q \leqslant p$ в выражении C_2 добавляется еще один множитель.

Для доказательства теоремы 2 остается показать, что при $\|f\|_{L_p(D)} \leqslant A$, где A — постоянная, получается компактное в $L_q(D_s)$ множество функций $u(x)$. Ограниченность $u(x)$ в $L_q(D_s)$ следует из (170), а равностепенная непрерывность в $L_q(D_s)$ из (174), если считать, что Δx лежит в D_s и принять

во внимание, что упомянутое выше число $\eta > 0$, которое определялось по ε, зависит от ядра $B(x, y)$, но зависит от $f(y)$. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть $B_1(x, y)$ и $B_2(x, y)$ — ограниченные ядра при x и $y \in D$ и непрерывные при $x \neq y$. Тогда интеграл*

$$I(x, z) = \int_D \frac{B_1(x, y)\, B_2(y, z)}{|x-y|^{\lambda} |y-z|^{\mu}}\, dy \qquad (\lambda < n; \quad \mu < n) \tag{175}$$

при x и $z \in D$ представим в виде

$$I(x, z) = B(x, z)\, \varphi(|x-z|), \tag{176}$$

где $B(x, z)$ обладает теми же свойствами, что $B_i(x, y)$ $(i = 1, 2)$ и

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} \xi^{-(\lambda+\mu-n)} & \text{при} \quad \lambda+\mu > n, \\ 1 + |\lg \xi| & \text{при} \quad \lambda+\mu = n, \\ 1 & \text{при} \quad \lambda+\mu < n. \end{cases} \tag{177}$$

Пусть $x \neq z$. Разобьем D на две части: $D = D_1 + D_2$, так, чтобы D_1, из двух точек x и z содержала только точку x и D_2 только z. Выбирая $p' > 1$ так, что $\lambda < \frac{n}{p'}$ и принимая в операторе (165) $f(y) = B_2(y, z)\,|y-z|^{\mu}$, мы на основании теоремы 1 можем утверждать, что интеграл (175), взятый по D_1, есть непрерывная функция (x, z). Аналогично и для интеграла по D_2. Таким образом, непрерывность $I(x, z)$ при $x \neq z$ доказана.

Для доказательства (176) достаточно доказать неравенство

$$\int_D \frac{dy}{|x-y|^{\lambda} |y-z|^{\mu}} \leqslant C\varphi(|x-z|), \tag{178}$$

где C — положительная постоянная.

1. Пусть $\lambda + \mu > n$. Обозначим $|x-z| = \delta$ и введем новые координаты

$$x' = \frac{x}{\delta}; \quad y' = \frac{y}{\delta}; \quad z' = \frac{z}{\delta},$$

так что $|x'-z'| = 1$. Обозначая, как обычно, через R_n все n-мерное пространство, получим

$$\int_D \frac{dy}{|x-y|^{\lambda} |y-z|^{\mu}} \leqslant \int_{R_n} \frac{dy}{|x-y|^{\lambda} |y-z|^{\mu}} = \frac{\delta^n}{\delta^{\lambda}\delta^{\mu}} \int_{R_n} \frac{dy'}{|x'-y'|^{\lambda} |y'-z'|^{\mu}}.$$

При вычислении интеграла по R_n поместим начало в точку x' и ось y'_1 направим из x' в z'. При этом получим

$$\int_D \frac{dy}{|x-y|^{\lambda} |y-z|^{\mu}} \leqslant \delta^{-(\lambda+\mu-n)} \int_{R_n} \frac{dy'}{|y'|^{\lambda} |y'-z'_0|^{\mu}},$$

где z'_0 имеет координаты $(1, 0, 0, \ldots, 0)$. Последний интеграл сходится, ибо $\lambda < n$, $\mu < n$ и $\lambda + \mu > n$, и, очевидно, не зависит от x, z, откуда и следует:

$$\int_D \frac{dy}{|x-y|^{\lambda} |y-z|^{\mu}} \leqslant C\,|x-z|^{-(\lambda+\mu-n)},$$

2. Случай $\lambda+\mu=n$. Вводя шар K_R с центром в начале и радиусом R, содержащий D, и вводя те же координаты, что и выше, получим

$$\int\limits_D \frac{dy}{|x-y|^\lambda |y-z|^\mu} \leqslant \int\limits_{K_R} \frac{dy'}{|x-y|^\lambda |y-z|^\mu} =$$

$$= \int\limits_{\frac{K_R}{\delta}} \frac{dy'}{|x'-y'|^\lambda |y'-z'|^\mu} \leqslant \int\limits_{\frac{K_{2R}}{\delta}} \frac{dy'}{|y'|^\lambda |y'-z_0'|^\mu}.$$

В последнем интеграле мы увеличили радиус вдвое, но зато можем интегрировать по-прежнему по шару с центром в начале координат. Положительное δ можем считать достаточно малым. Пусть $\frac{2R}{\delta}>2$. Интеграл по $\frac{K_{2R}}{\delta}$ разбиваем на два: по K_2 и по $\frac{K_{2R}}{\delta}-K_2$. Интегрирование по K_2 дает некоторую положительную постоянную C_1. Остается оценить интеграл:

$$I_1 = \int\limits_{\frac{K_{2R}}{\delta}-K_2} \frac{dy'}{|y'|^\lambda |y'-z_0'|^\mu},$$

В силу $|y'-z_0'| \geqslant |y'|-1$ получим, обозначая $|y'|=r$:

$$I_1 \leqslant |\sigma_n| \int\limits_2^{\frac{2R}{\delta}} \frac{r^{n-1}}{r^\lambda (r-1)^\mu}\, dr = |\sigma_n| \int\limits_2^{\frac{2R}{\delta}} \frac{dr}{r\left(1-\frac{1}{r}\right)^\mu} \qquad (\lambda+\mu=n),$$

или, в силу $r \geqslant 2$,

$$I_1 \leqslant |\sigma_n| 2^\mu \int\limits_2^{\frac{2R}{\delta}} \frac{dr}{r} < |\sigma_n| 2^\mu \lg \frac{2R}{\delta}.$$

Окончательно

$$\int\limits_D \frac{dy}{|y-z|^\lambda |z-y|^\mu} \leqslant C_1 + C_2 |\lg \delta| \leqslant C(1+\lg|x-z|),$$

$$(C \geqslant C_1; \quad C \geqslant C_2).$$

откуда и следует оценка (178) при $\lambda+\mu=n$.

3. Исследования случая $\lambda+\mu<n$ в основном то же, что и предыдущего. Отметим, что при этом интеграл сходится (178) и при $x=z$. Совершенно так же, как и в предыдущем случае, имеем оценку:

$$\int\limits_D \frac{dy}{|x-y|^\lambda |y-z|^\mu} \leqslant \delta^{n-\lambda-\mu} \int\limits_{\frac{K_{2R}}{\delta}} \frac{dy'}{|y'|^\lambda |y'-z_0'|^\mu} \leqslant$$

$$\leqslant \delta^{n-\lambda-\mu}\left[C_1 + |\sigma_n| \int\limits_2^{\frac{2R}{\delta}} \frac{r^{n-1}dr}{r^{\lambda+\mu}\left(1-\frac{1}{r}\right)^\mu}\right] \leqslant \delta^{n-\lambda-\mu}\left[C_1 + |\sigma_n| 2^\mu \int\limits_2^{\frac{2R}{\delta}} r^{n-\lambda-\mu-1}\, dr\right] <$$

$$< \delta^{n-\lambda-\mu}\left[C_1 + \frac{|\sigma_n| 2^\mu}{n-\lambda-\mu}\left(\frac{2R}{\delta}\right)^{n-\lambda-\mu}\right],$$

т. е. мы имеем оценку

$$\int_D \frac{dy}{|x-y|^{\lambda}|y-z|^{\mu}} \leqslant C,$$

и теорема 3 доказана.

116. Интегральные представления С. Л. Соболева. Будем предполагать теперь, что область D звездна по отношению ко всем точкам некоторого шара K, лежащего внутри D. Центр этого шара примем за начало координат и через R обозначим его радиус. Введем следующую бесконечно дифференцируемую функцию [71]:

$$p(y) = \begin{cases} Ce^{-\frac{R^2}{R^2-|y|^2}} & \text{при } |y| < R, \\ 0 & \text{при } |y| \geqslant R. \end{cases} \tag{179}$$

где постоянная C выбрана так, что интеграл от $p(y)$ по K равен единице.

Пусть $u(y)$ — какая-либо непрерывная и непрерывно дифференцируемая в $\bar{D}$ функция. Вводя сферические координаты с началом в некоторой точке x, мы можем рассматривать $u(y)$ как функцию x, r и ω_n, где через ω_n обозначаем совокупность угловых сферических координат [**IV**; **156**], т. е. $u(y) = u(x, r, \omega_n)$, причем $u(x, 0, \omega_n) = u(x)$. Рассмотрим интеграл от произведения $u(y)p(y)$ по D. Фактически интегрирование ограничивается шаром K. Представляя $p(y)$ в виде $p(x, r, \omega_n)$ и интегрируя по частям по переменной r, получим

$$\int_D u(y)p(y)\,dy = \int_{\omega_n}\left[\int_0^{\infty} u(x, r, \omega_n)\,p(x, r, \omega_n)\,r^{n-1}\,dr\right]d\omega_n =$$

$$= -\int_{\omega_n}\left\{\int_0^{\infty} u(x, r, \omega_n)\,d_r\left[\int_r^{\infty} p(x, \rho, \omega_n)\,\rho^{n-1}\,d\rho\right]\right\}d\omega_n =$$

$$= -\int_{\omega_n}\left[u(x, r, \omega_n)\int_r^{\infty} p(x, \rho, \omega_n)\,\rho^{n-1}\,d\rho\right]_{r=0}^{r=\infty} d\omega_n +$$

$$+\int_{\omega_n}\left\{\int_0^{\infty}\frac{\partial u(x, r, \omega_n)}{\partial r}\left[\int_r^{\infty} p(x, \rho, \omega_n)\,\rho^{n-1}\,d\rho\right]dr\right\}d\omega_n = u(x) +$$

$$+\int_{\omega_n}\left[\int_0^{\infty}\frac{1}{r^{n-1}}\,\frac{\partial u(x, r, \omega_n)}{\partial r}\left(\int_r^{\infty} p(x, \rho, \omega_n)\,\rho^{n-1}\,d\rho\right)r^{n-1}\,dr\right]d\omega_n$$

и окончательно

$$\int_D u(y)p(y)\,dy = u(x) - \int_D \frac{\partial u(x, r, \omega_n)}{\partial r}\,\frac{1}{r^{n-1}}\,B(x, y)\,dy, \tag{180}$$

где

$$B(x, y) = -\int_r^{\infty} p(x, \rho, \omega_n)\,\rho^{n-1}\,d\rho, \tag{181}$$

и точка y строится по сферическим координатам (r, ω_n) с началом в x. Функция $B(x, y)$ ограничена, если x и $y \in \bar{D}$, и непрерывна при $x \neq y$. Если $y \to x$ по прямолинейному лучу, то $B(x, y)$ имеет предел

$$-\int_0^\infty p(x, \rho, \omega_n)\, \rho^{n-1}\, d\rho,$$

зависящий от угловых координат луча. Из определения $B(x, y)$ непосредственно следует, что если x принадлежит шару K, то $B(x, y) = 0$ для y, принадлежащих D и лежащих вне K, а если x находится вне K, то $B(x, y) = 0$ для y, принадлежащих D и лежащих вне области, образуемой шаром K и той частью конуса с вершиной x, касательного к шару, которая лежит между x и шаром K. Принимая во внимание формулу

$$\frac{\partial u(y)}{\partial r} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(y)}{\partial y_i} \cos(r, y_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(y)}{\partial y_i} \frac{y_i - x_i}{|y - x|},$$

получим, в силу (180),

$$u(x) = U + \sum_{i=1}^{n} \int_D \frac{\partial u(y)}{\partial y_i} \frac{B_i(x, y)}{|x - y|^{n-1}}\, dy, \tag{182}$$

где

$$U = \int_D u(y)\, p(y)\, dy; \quad B_i(x, y) = B(x, y) \frac{y_i - x_i}{|y - x|}. \tag{183}$$

Ядра $B_i(x, y)$ обладают, очевидно, теми же свойствами, что и ядро $B(x, y)$: ограничены при x и $y \in \bar{D}$, непрерывны при $x \neq y$ и обращаются в нуль в указанной выше части области D.

Предположим теперь, что $u(y)$ непрерывна и имеет непрерывные производные до порядка l в $\bar{D}$ и выведем формулу, выражающую $u(x)$ через ее производные порядка l. Пользуясь формулой (182), можем написать

$$\frac{\partial u(y)}{\partial y_i} = U_i + \sum_{k=1}^{n} \int_D \frac{\partial^2 u(z)}{\partial z_i \partial z_k} \frac{B_k(y, z)}{|y - z|^{n-1}}\, dz, \tag{184}$$

где

$$U_i = \int_D \frac{\partial u(y)}{\partial y_i}\, p(y)\, dy. \tag{185}$$

Подставляя (184) в (182) и пользуясь теоремой 3 из [115], получим

$$u(x) = U + \sum_{i=1}^{n} U_i b_i(x) + \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u(z)}{\partial z_i \partial z_k} \frac{B_{ik}(x, z)}{|x - z|^{n-2}}\, dz, \tag{186}$$

где

$$b_i(x) = \int_D \frac{B_i(x, y)}{|x - y|^{n-1}}\, dy; \quad \frac{B_{ik}(x, z)}{|x - z|^{n-2}} = \int_D \frac{B_i(x, y)\, B_k(y, z)}{|x - y|^{n-1}\, |y - z|^{n-1}}\, dy, \tag{187}$$

причем ядра $B_{i,k}(x, z)$ обладают теми же свойствами, что ядро $B(x, y)$, и $b_i(x)$, в силу теоремы 1 из [115] (при $f(y) \equiv 1$), непрерывны в $\bar{D}$. Аналогично получается представление $u(x)$ через производные порядка l:

$$u(x) = U + \sum_{1 \leqslant k \leqslant l-1} \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{n} U_{i_1, \ldots, i_k} b_{i_1, \ldots, i_k}(x) + \\ + \sum_{i_1, \ldots, i_l = 1}^{n} \int_D \frac{\partial^l u(y)}{\partial y_{i_1}, \ldots, \partial y_{i_l}} \frac{B_{i_1, \ldots, i_l}(x, y)}{|x - y|^{n-l}} dy, \qquad (188)$$

где $b_{i_1, \ldots, i_k}(x)$ непрерывны в $\bar{D}$ и ядра $B_{i_1, \ldots, i_l}(x, y)$ обладают теми же свойствами, что и ядро $B(x, y)$,

$$U_{i_1, \ldots, i_k} = \int_D \frac{\partial^k u(y)}{\partial y_{i_1}, \ldots, \partial y_{i_k}} p(y)\, dy, \qquad (189)$$

и суммирование по $i_1, \ldots, i_l$ есть суммирование по всем видам производных порядка l. Отметим, что в случае $n < l$ ядра в представлении (188) ограничены [115].

Отметим также, что величины $U_{i_1, \ldots, i_k}$ являются линейными функционалами в $L_p(D)$. В этом можно убедиться, представляя их в виде

$$U_{i_1, \ldots, i_k} = (-1)^k \int_D u(y) \frac{\partial^k p(y)}{\partial y_{i_1}, \ldots, \partial y_{i_k}} dy. \qquad (190)$$

Перейдем теперь к рассмотрению пространства $\tilde{W}_p^{(l)}(D)$. Напомним, что норма в нем задается формулой

$$\| u \|^p_{\tilde{W}_p^{(l)}(D)} = \| u \|^p_{L_p(D)} + \int_D \sum_{i_1, \ldots, i_l} \left| \frac{\partial^l u(y)}{\partial y_{i_1}, \ldots, \partial y_{i_l}} \right|^p dy \qquad (191)$$

(одна из эквивалентных норм [112]). Покажем, что интегральное представление (188) справедливо для любой функции $u(x) \in \tilde{W}_p^{(l)}(D)$. Пусть $u_m(x)$ — последовательность функций из $C^{(l)}(D)$, сходящаяся к $u(x)$ в $\tilde{W}_p^{(l)}(D)$ [111]. Записывая (188) для функций $u_m(x)$ и придавая величинам $U_{i_1, \ldots, i_k}$ форму (190), перейдем к пределу при $m \to \infty$. В силу теорем 1 и 2 из [115] интегральные операторы с ядрами $B_{i_1, \ldots, i_l}(x, y)\, |x - y|^{-(n-l)}$ непрерывны в $L_p(D)$, что позволяет перейти к пределу под знаком интеграла. Таким образом, *интегральное представление* (188) *справедливо для любых функций из* $\tilde{W}_p^{(l)}(D)$. Покажем теперь, что *функции из* $\tilde{W}_p^{(l)}$ *имеют всевозможные обобщенные производные любого порядка* $k < l$ из $L_p(D)$. Применяя формулу (182) к производной от $u_m(x)$ порядка $(l-1)$, получим

$$\frac{\partial^{l-1} u_m(x)}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_{l-1}}} = U^{(m)}_{i_1, \ldots, i_{l-1}} + \int_D \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^l u_m(y)}{\partial y_{i_1} \ldots \partial y_{i_{l-1}} \partial y_k} \frac{B_k(x, y)}{|x - y|^{n-1}} dy, \qquad (192)$$

где

$$U^{(m)}_{i_1,\ldots,i_{l-1}} =$$

$$= \int_D \frac{\partial^{l-1} u_m(y)}{\partial y_{i_1}\ldots\partial y_{i_{l-1}}}\, p(y)\, dy = (-1)^{l-1}\int_D u_m(y)\,\frac{\partial^{l-1} p(y)}{\partial y_{i_1}\ldots\partial y_{i_{l-1}}}\, dy.$$

На основании теоремы 1 или 2 из [**115**] в зависимости от того, будет ли $n-1<\frac{n}{p'}$ или $n-1\geqslant\frac{n}{p'}$, мы можем утверждать, что интегральный оператор, стоящий в правой части (192), непрерывен как оператор из $L_p(D)$ в $C(D)$ или $L_p(D)$, т. е. во всяком случае в $L_p(D)$. По условию $u_m(x)$ сходятся в норме $\tilde{W}^{(l)}_p(D)$ к $u(x)$; отсюда следует, что при $m\to\infty$ правая часть формулы (192) имеет предел в $L_p(D)$, и, следовательно, функция $u(x)$ имеет в D обобщенные производные порядка $(l-1)$, из $L_p(D)$, для которых справедлива формула (192) с заменой $u_m(x)$ на $u(x)$ и $U^{(m)}_{i_1,\ldots,i_{l-1}}$ на

$$U_{i_1,\ldots,i_{l-1}} = (-1)^{l-1}\int_D u(y)\,\frac{\partial^{l-1} p(y)}{\partial y_{i_1}\ldots\partial y_{l-1}}\, dy.$$

Используя интегральные представления производных любого порядка $k<l$ через производные порядка l, аналогичные (188) и (192), мы совершенно также установим существование всевозможных обобщенных производных низших порядков из $L_p(D)$. Упомянутые интегральные представления при этом автоматически распространяются на все $\tilde{W}^{(l)}_p(D)$. Отметим, что соответствующие интегральные операторы имеют ядра с полярностью порядка $n-(l-k)$. Ограниченность этих интегральных операторов в $L_p(D)$ непосредственно приводит к оценке

$$\left\| \frac{\partial^k u(x)}{\partial x_{i_1},\ldots,\partial x_{i_k}} \right\|_{L_p(D)} \leqslant C\left[\|u\|_{L_p(D)} + \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_l \\ (k=1,2,\ldots,l-1).}} \left\| \frac{\partial^l u(x)}{\partial x_1\ldots\partial x_{i_l}} \right\|_{L_p(D)}\right], \quad (193)$$

откуда следует неравенство (152).

Величинам (190) можно теперь вернуть форму (189). Мы доказали, таким образом, *что для звездных относительно некоторого шара областей пространства* $W^{(l)}_p$ *и* $\tilde{W}^{(l)}_p$ *состоят из одного и того же множества функций* u, *в силу* (193), *нормировки этих пространств эквивалентны.**)

Интегральное представление (188) функций из $W^{(l)}_p(D)$ в несколько иной форме было получено С. Л. Соболевым (См. С. Л. Соболев „Некоторые применения функционального анализа в математической физике", ЛГУ, 1950).

Мы докажем теперь для звездных относительно шара областей общие теоремы вложения, сформулированные в [**114**], а затем покажем, каким образом перенести эти теоремы на более широкий класс областей. Наше утверждение относительно эквивалентности $W^{(l)}_p(D)$ и $\tilde{W}^{(l)}_p(D)$ также будет, тем самым, перенесено на упомянутый класс областей.

117. Теоремы вложения. Вернемся к рассмотрению интегрального представления (188). Внеинтегральные члены правой части (188) являются вполне непрерывными операторами из $W^{(l)}_p(D)$ в $C(D)$. Действительно, любая функция $u(x)\in W^{(l)}_p(D)$ переводится таким оператором в одну и ту же непрерывную

*) В дальнейшем мы можем не различать $\tilde{W}^{(l)}_p(D)$ и $W^{(l)}_p(D)$.

в $\bar{D}$ функцию $b_{i_1, \ldots, i_k}(x)$, умноженную на число $U_{i_1, \ldots, i_k}$, представляющее собой непрерывный в $W_p^{(l)}(D)$ функционал. Если множество функций $u(x)$ ограничено в $W_p^{(l)}(D)$, то из чисел $U_{i_1, \ldots, i_k}$ можно выбрать сходящуюся последовательность. Соответствующая последовательность функций $U_{i_1, \ldots, i_k} b_{i_1, \ldots, i_k}(x)$ сходится в $\bar{D}$ равномерно. К интегральным членам (188) применимы теоремы 1 или 2 из [115]. Таким образом, мы непосредственно получаем следующие две теоремы вложения [115].

Теорема 1. *Если $pl > n$, то всякая функция $u(x) \in W_p^{(l)}(D)$ непрерывна в $\bar{D}$ ($W_p^{(l)}(D) \subset C(D)$) и оператор вложения ограничен*

$$\max_{\bar{D}} |u(x)| = \|u\|_{C(D)} \leqslant K \|u\|_{W_p^{(l)}(D)} \qquad (K > 0 \text{ — постоянная})$$

и вполне непрерывен, т. е. преобразует всякое множество функций, ограниченное в $W_p^{(l)}(D)$, в компактное множество в $C(D)$.

Теорема 2. *Пусть $pl \leqslant n$ и $s > n - pl$. Тогда функции $u(x)$ из $W_p^{(l)}(D)$ на всяком плоском s-мерном сечении D_s области D принадлежат $L_q(D_s)$ при любом*

$$q < q^* = \frac{ps}{n - lp}. \tag{194}$$

Оператор вложения $W_p^{(l)}(D)$ в $L_q(D_s)$ ограничен и вполне непрерывен. Как элемент $L_q(D_s)$ функция $u(x)$ непрерывна в метрике $L_q(D_s)$ по отношению к параллельному сдвигу сечения D_s, если последний допустим.

Замечания 1. Функции $u(x)$ из $W_p^{(l)}(D)$ определяются с точностью до эквивалентности, и утверждение теоремы о поведении $u(x)$ на сечениях относится к некоторому выбору из класса эквивалентных [ср. **113**]. Отметим, что формула (188) определяет, как это следует из предыдущего, такую именно функцию.

2. Если в теореме 2 заменить $L_q(D_s)$ на $L_{q^*}(D_s)$, то, как можно доказать, утверждения теоремы останутся справедливыми до слова „ограничен“ включительно.

3. Если в D взять s-мерное многообразие T_s (оно может лежать и на границе D), которое может быть преобразовано (хотя бы по кускам) в плоское при помощи l-раз непрерывно дифференцируемой и однозначно обратимой замены переменных $y_i = y_i(x_1, \ldots, x_n)$ $(i = 1, \ldots, n)$, то теорема 2 остается справедливой при замене D_s на T_s. При этом требуется, чтобы указанная замена переменных была определена в некоторой n-мерной окрестности T_s.

Мы уже отмечали, что для функций $u(x) \in W_p^{(l)}(D)$ обобщенные производные порядка $m < l$ выражаются формулами, аналогичными (188), через производные порядка l с помощью интегральных операторов с полярностью порядка $n - (l - m)$. Применяя теоремы из [115], получаем, как и выше, следующие теоремы:

Теорема 3. *Если $pl > n$ и $0 < m < l - \frac{n}{p}$, то у функций $u(x) \in W_p^{(l)}(D)$ обобщенные производные порядка m непрерывны в $\bar{D}$, и оператор вложения из $W_p^{(l)}(D)$ в $C^{(m)}(D)$ ограничен и вполне непрерывен.*

Теорема 4. *Если $m \geqslant l - \frac{n}{p}$ и $s > n - (l - m)p$, то у функций $u(x) \in W_p^{(l)}(D)$ обобщенные производные порядка m принадлежат $L_q(D_s)$ на*

s — мерных плоских сечениях D_s области D при любых

$$q < q^* = \frac{ps}{n-(l-m)p}, \tag{195}$$

причем

$$\text{а)} \quad \| D^m u \|_{L_p(D_s)} \leqslant K \| u \|_{W_p^{(l)}(D)}; \tag{196}$$

в) *для ограниченного в $W_p^{(l)}(D)$ множества функций $u(x)$ множество $D^m u(x)$ компактно в $L_q(D_s)$;*

с) *функции $D^m u(x)$ в метрике $L_q(D_s)$ непрерывны относительно допустимого параллельного переноса D_s.*

К теореме 4 можно сделать замечания, аналогичные замечаниям к теореме 2.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 3 из [114] относительно эквивалентных норм в $W_p^{(l)}(D)$. Напомним соответствующую формулировку.

Пусть линейные ограниченные в $W_p^{(l)}(D)$ функционалы $l_k(u)$ $(k = 1,2, ..., N)$ таковы, что они не обращаются одновременно в нуль ни на одном отличном от тождественного нуля полинома степени не выше $l-1$. Тогда норма в $W_p^{(l)}(D)$, определяемая формулой

$$\| u \|^p = \int_D \sum_{i_1, \ldots, i_l} \left| \frac{\partial^l u(x)}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_l}} \right|^p dx + \sum_{k=1}^{N} | l_k(u) |^p, \tag{197}$$

эквивалентна норме (191)

Доказательство. Очевидно, норма (197) оценивается через норму (191), ввиду ограниченности в последней норме функционалов $l_k(u)$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$.

Перейдем к доказательству обратного неравенства. Будем временно обозначать норму (197) просто $\| u \|$ и норму (191), эквивалентную норме (145), через $\| u \|_{W_p^{(l)}(D)}$.

Нам нужно показать, что для всех функций из $W_p^{(l)}(D)$ справедлива оценка

$$\| u \|_{W_p^{(l)}(D)} \leqslant A \| u \|. \tag{198}$$

Предположим обратное, т. е., что существует такая бесконечная последовательность положительных чисел A_m $(m = 1, 2, \ldots)$ и элементов $u_m(x)$ из $W_p^{(l)}(D)$, что $A_m \to +\infty$ при $m \to \infty$ и

$$\| u_m \|_{W_p^{(l)}(D)} \geqslant A_m \| u_m \|. \tag{199}$$

Вводя в $u_m(x)$ постоянные множители, можем считать

$$\| u_m \|_{W_p^{(l)}(D)} = 1. \tag{200}$$

Из (199) и (200) вытекает, что $\| u_m \| \to 0$ при $m \to 0$, и, следовательно, все обобщенные производные порядка l функций $u_m(x)$ сходятся в $L_p(D)$ к нулю. В силу (200) и теоремы 2 последовательность $u_m(x)$ компактна в $L_p(D)$. Выделим из нее сходящуюся подпоследовательность, которую обозначим снова через $u_m(x)$, и пусть $u_m(x) \to u_0(x)$ в $L_p(D)$ при $m \to \infty$. Из теоремы 2 [109]

теперь вытекает, что все обобщенные производные порядка l от $u_0(x)$ существуют и равны нулю. Заметим также, что $u_m(x)$ сходится к $u_0(x)$ в смысле нормы (191). Покажем теперь, что $u_0(x) = 0$. Рассмотрим какую-либо строго внутреннюю подобласть D' области D. В D' производные от средних функций $u_{0h}(x)$ при достаточно малом h совпадают [**109**] со средними функциями от производных $D^l u(x)$. Отсюда непосредственно следует, что все производные порядка l от средних функций $u_{0h}(x)$ равны нулю в D' и, тем самым, $u_{0h}(x)$ суть полиномы от $x_1, \ldots, x_n$ степени не выше $l-1$ в соответствующей подобласти. Поскольку множество таких полиномов образует подпространство в $L_p(D')$, и $u_{0h}(x) \to u_0(x)$ в $L_p(D)$, то мы видим, что $u_0(x)$ есть некоторый полином степени не выше $l-1$ в любой внутренней подобласти, а значит и всюду в D. Заметим теперь, что в силу непрерывности функционалов $l_k(u)$ в $W_p^{(l)}(D)$, $l_k(u_m) \to l_k(u_0)$ при $m \to \infty$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$. В то же время из (199) и (200) следует, что $l_k(u_m) \to 0$ при $m \to \infty$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$. Мы получаем, таким образом, что $l_k(u_0) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$, и, по условию доказываемой теоремы, $u_0(x) = 0$. Последнее, однако, противоречит (200) и сходимости $u_m(x)$ к $u_0(x)$ в $W_p^{(l)}(D)$. Теорема доказана. Приведем теперь несколько простых примеров использования доказанных теорем.

1. Пусть $u(x) \in W_2^{(2)}(D)$, т. е. функция $u(x)$ вместе со своими обобщенными производными до второго порядка включительно суммируема по D с квадратом. При $n \leqslant 3$ из теоремы 1 следует, что $u(x)$ непрерывна в $\bar{D}$. При $n \geqslant 4$ это утверждение может оказаться неверным.

2) Норма (162) в $W_p^{(1)}(D)$, полученная нами с помощью теоремы 3 в [**114**], приводит при $p = 2$ к известному неравенству Пуанкаре:

$$\int_D u^2(y)\,dy \leqslant B\left|\int_D \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial u(y)}{\partial y_k}\right)^2 dy + \left(\int_D u(y)\,dy\right)^2\right|. \tag{201}$$

3) Аналогичным образом норма (164) при $p = 2$ и $q = 2$ дает:

$$\int_D u^2(y)\,dy \leqslant C\left|\int_D \left(\frac{\partial u(y)}{\partial x_k}\right)^2 dy + \int_S u^2(y)\,ds\right|. \tag{202}$$

Здесь S — достаточно гладкое $(n-1)$-мерное многообразие в D. В частности, если граница области D — кусочно-гладкая, то она может быть взята в (202) в качестве многообразия S. В этом последнем случае неравенство (202) известно, как *неравенство Фридрихса.*

118. Области более общего типа. Мы займемся теперь перенесением теорем вложения на более широкий класс областей. *Пусть ограниченная область D может быть разбита кусочно-гладкими $(n-1)$-мерными многообразиями на конечное число областей, в каждой из которых справедливо все доказанное в* [**117**]. *Тогда это справедливо и в области D.* Очевидно, достаточно рассмотреть случай, когда D разбита некоторой поверхностью S_0 на две непересекающиеся части D_1 и D_2. Пусть функция $u(x) \in \tilde{W}_p^{(l)}(D)$. Покажем прежде всего, что $u(x)$ имеет в D все обобщенные производные низших порядков из $L_p(D)$. Очевидно, $u(x) \in \tilde{W}_p^{(l)}(K)$, где K — любой шар, лежащий в D. Применяя к этому шару сказанное в [**116**], убеждаемся, что $u(x)$ имеет в K всевозможные обобщенные производные вида $\chi_k(x) = D^k u(x)$ $(0 \leqslant k < l)$, принадлежащие $L_p(K)$. Функция $\chi_k(x)$ определена всюду в D и принадлежит $L_p(D)$. Действительно, в D_1 и D_2 $u(x)$ имеет производную $D^k u(x)$ из $L_p(D_1)$ и $L_p(D_2)$ соответственно. Единственность обобщенной производной позволяет утверждать, что $\chi_k(x)$ совпадает с $D^k u(x)$ в D_1 и D_2, и, следовательно, $\chi_k(x) \in L_p(D)$. Пока-

жем теперь, что $\gamma(x)$ есть обобщенная производная $D^k u(x)$ в D. Пусть D' — произвольная строго внутренняя подобласть D и $\delta > 0$ — расстояние D' до границы D. Пусть x — произвольная точка D' и $0 < h < \delta$. В шаре радиуса δ с центром в точке x $u(y)$ имеет обобщенную производную $D^k u(y) = \gamma(y)$. Образуя средние с радиусом усреднения h, мы можем утверждать [109], что в центре шара $D^k u_h(x) = \gamma_h(x)$. Так как $u_h(x) \to u(x)$ при $h \to 0$ и $D^k u_h(x) \to \gamma(x)$ в $L_p(D')$, то по второму определению обобщенной производной [109] $\gamma(x)$ есть, обобщенная производная $D^k u(x)$ функции $u(x)$ в D. Остается напомнить, что $\gamma(x) \in L_p(D)$.

Замечание. *Наше рассуждение показывает, что в любой области D функции из $\tilde{W}_p^{(l)}(D)$ имеют обобщенные производные всех низших порядков из $L_p(D')$.*

Рассмотрим теперь вопрос о перенесении на нашу область D теоремы 1 из [117]. Предположим, что $n < pl$ и, следовательно, $u(x)$ непрерывна в $\overline{D_1}$ и $\overline{D_2}$. Покажем, что $u(x)$ непрерывна в $\overline{D}$, для чего достаточно установить непрерывность $u(x)$ в точках поверхности S_0. В любой внутренней точке D непрерывность $u(x)$ вытекает из теоремы вложения $W_p^{(l)}$ в C, примененной к достаточно малому шару. Для точек S_0, лежащих на границе D, предельное значение $u(x)$, получаемое по любому пути, лежащему в D_1, в силу непрерывности $u(x)$ в $\overline{D_1}$, совпадают с предельным значением, полученным по пути, лежащему в S_0. То же самое можно сказать и о предельных значениях при приближении из D_2. Отсюда следует, что предельные значения функции $u(x)$ по любым путям совпадают, и $u(x)$ непрерывна в $\overline{D}$. Полная непрерывность (и, следовательно, ограниченность) оператора вложения вытекает из того, что для ограниченного в $W_p^{(l)}(D)$ множества можно сначала выделить последовательность, сходящуюся в $C(D_1)$, а затем из нее выделить подпоследовательность, сходящуюся в $C(D_2)$. Эта подпоследовательность, очевидно, сходится в $\overline{D}$ равномерно.

Совершенно также доказывается возможность перенесения в рассматриваемом случае теоремы 3 из [117]. Не возникает трудностей и при распространении теоремы 2 [117]. Нужно лишь заметить, что s-мерное сечение D_s, вообще говоря, также разбивается на две части: $D_s = D_s' + D_s''$, где $D_s' = D_s \cdot D_1$, $D_s'' = D_s \cdot D_2$. Применяя теорему 2 [117] в D_1 и D_2, получим

$$\|u\|_{L_q(D_s)} \leqslant \|u\|_{L_q(D_s')} + \|u\|_{L_q(D_s'')} \leqslant C\left[\|u\|_{W_p^{(l)}(D_1)} + \|u\|_{W_p^{(l)}(D_2)}\right] \leqslant$$

$$\leqslant 2C\|u\|_{W_p^{(l)}(D)}. \tag{203}$$

Таким образом, устанавливается ограниченность оператора вложения из $W_p^{(l)}(D)$ в $L_q(D_s)$. Этим же путем переносится и утверждение о сильной непрерывности в $L_q(D_s)$ функций из $W_p^{(l)}(D)$ относительно параллельного переноса сечения D_s. Полная непрерывность оператора вложения из $W_p^{(l)}(D)$ в $L_q(D_s)$ непосредственно вытекает из (203) и сильной непрерывности относительно сдвига.

Распространение теоремы 4 из [117] не требует никаких новых соображений.

Остается справедливой и теорема 3 из [114] об эквивалентных нормах в $W_p^{(l)}(D)$, так как ее доказательство, данное в [117], опиралось лишь на теоремы вложения.

Мы можем утверждать теперь, что, если каждая из составляющих D частичных областей звездна относительно некоторого шара, то для области D справедливы все теоремы вложения, рассмотренные в [114] и [117].

119. Пространство $\mathring{C}^{(l)}(D)$. Пусть D — конечная или бесконечная область пространства R_n и $\dot{C}^{(l)}(D)$ — множество всех финитных непрерывных в D функций $\varphi(x)$, имеющих в D непрерывные производные до порядка l. Очевидно, что $\dot{C}^{(l)}(D)$ есть линейное пространство. Введем в нем аналогично случаю $C^{(l)}(D)$ [**114**], следующую норму:

$$\|\varphi\|_{\dot{C}^{(l)}(D)} = \max_{\substack{x \in \overline{D} \\ 0 \leqslant k \leqslant l}} |D^{(k)}\varphi(x)|, \tag{204}$$

Замыкание $\dot{C}^{(l)}(D)$ по этой норме приведет нас к пространству типа B, которое мы обозначим через $\mathring{C}^{(l)}(D)$. Элементы этого пространства суть ограниченные функции, непрерывно дифференцируемые в $\overline{D}$ до порядка l, причем на границе D сама функция и ее упомянутые производные обращаются в нуль.

При различных значениях $l = 0, 1, \ldots$ пространства $\mathring{C}^{(l)}(D)$ естественно вкладываются одно в другое: $C^{(l_1)}(D) \subset C^{(l_2)}(D)$, если $l_1 > l_2$, причем множество элементов $\mathring{C}^{(l_1)}(D)$ плотно в $\mathring{C}^{(l_2)}(D)$. Это легко показать, применяя процесс усреднения.

Рассмотрим сопряженное с $\mathring{C}^{(l)}(D)$ пространство и обозначим его через $U^{(l)}(D)$ (пространство линейных функционалов для $\mathring{C}^{(l)}(D)$). Легко видеть, что $U^{(l_2)}(D) \subset U^{(l_1)}(D)$ для $l_1 > l_2$.

Примерами элементов $U^{(l)}(D)$ могут служить функционалы, определяемые с помощью суммируемого по D ядра $\psi(x)$ равенством

$$(m, \varphi) = \int_D \psi(x)\,\varphi(x)\,dx. \tag{205}$$

Их норма удовлетворяет неравенству

$$\|m\| \leqslant \int_D |\psi(x)|\,dx.$$

Такие функционалы нередко называют функционалами типа функции и отождествляют с ядрами, определяющими эти функционалы. Остальные функционалы называют обобщенными функциями. Функционалы типа функции не исчерпывают всего $U^{(l)}(D)$. Так, например, функционал $\delta(x - x_0)$, определяемый равенством

$$(\delta(x - x_0), \varphi) = \varphi(x_0), \tag{206}$$

где x_0 — фиксированная точка D, не допускает представления (205) с суммируемым по D ядром. Говорят, что соответствующее этому функционалу ядро есть дельта-функция $\delta(x - x_0)$, сосредоточенная в точке x_0, и пишут

$$\int_D \delta(x - x_0)\,\varphi(x)\,dx = \varphi(x_0). \tag{207}$$

Но функция $\delta(x-x_0)$ не является функцией в обычном смысле. Однако, как мы покажем, элементы $U^{(l)}(D)$, представимые в форме (205), с кусочно-непрерывным ядром плотны в $U^{(l)}(D)$. Точнее, имеет место:

Теорема. *Функционалы типа функции с кусочно-непрерывным ядром плотны в $\mathring{C}^{(l)}(D)$ в смысле слабой сходимости функционалов.* Предварительно докажем следующую лемму:

Лемма. *Для любого фиксированного элемента $\varphi(x)\in\mathring{C}^{(l)}(D)$ при заданном $\varepsilon>0$ существует такая область D_ε, лежащая строго внутри D, что*

$$\max_{\substack{x\in\overline{D}-D_\varepsilon\\0\leqslant k\leqslant l}}|\mathrm{D}^{(k)}\varphi|\leqslant\varepsilon. \tag{208}$$

В силу определения $\mathring{C}^{(l)}(D)$ существует последовательность $\varphi_m(x)$ элементов $\dot{C}^{(l)}(D)$, которая стремится к $\varphi(x)$ в норме (204), и потому существует такой значок m_ε, что при любом $p>0$

$$\|\varphi_{m_\varepsilon}-\varphi_{m_\varepsilon+p}\|_{\dot{C}^{(l)}(D)}\leqslant\varepsilon.$$

Функция $\varphi_{m_\varepsilon}(x)$ отлична от нуля лишь в некоторой области D_ε указанного выше типа, так что для $x\in D-D_\varepsilon$ из последнего неравенства следует:

$$\max_{\substack{x\in\overline{D}-D_\varepsilon\\0\leqslant k\leqslant l}}|\mathrm{D}^{(k)}\varphi_{m_\varepsilon+p}(x)|\leqslant\varepsilon$$

и в пределе при $p\to\infty$ мы и получаем (208).

Переходим к доказательству формулированной выше теоремы. Пусть $m\in U^{(l)}(D)$. Возьмем усредняющее ядро $\omega_\rho(|x-y|)$. Очевидно, что для x, принадлежащего какой-либо ограниченной области D_ρ, лежащей внутри D и отстоящей от границы D на расстояние, не меньшее 2ρ, $\omega_\rho(|x-y|)$, как функция y, принадлежит $\mathring{C}^{(l)}(D)$, так что функция

$$m_\rho(x)=(m,\ \omega_\rho(|x-y|)) \tag{209}$$

определена для $x\in D_\rho$. В силу бесконечной дифференцируемости $\omega_\rho(|x-y|)$ и непрерывности функционала m, она также будет иметь непрерывные производные всех порядков по x. Определим теперь для всех $x\in D$ кусочно-непрерывную функцию

$$\tilde{m}_\rho(x)=\begin{cases}m_\rho(x) & \text{при } x\in D_\rho,\\ 0 & \text{при } x\in D-D_\rho,\end{cases}$$

и возьмем последовательность $\rho=\rho_1,\ \rho_2,\ \ldots$, стремящуюся к нулю, причем будем считать D_{ρ_k} выбранными так, что $D_{\rho_k}\subset D_{\rho_{k+1}}$ и D_{ρ_k}

в пределе стремится к D. Докажем, что функционалы $\tilde{m}_{\rho_k}$, определяемые равенством

$$(\tilde{m}_{\rho_k},\ \varphi)=\int\limits_{\dot{D}}\tilde{m}_{\rho_k}(x)\,\varphi(x)\,dx=\int\limits_{\dot{D}_{\rho_k}}m_{\rho_k}(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

стремятся к взятому функционалу m. Для этого возьмем произвольную функцию $\varphi(x)\in\overset{\circ}{C}{}^{(l)}(D)$ и докажем, что разность

$$r_k=(m,\ \varphi)-(\tilde{m}_{\rho_k},\ \varphi)=(m,\ \varphi)-\int\limits_{\dot{D}_{\rho_k}}(m,\ \omega_{\rho_k}(|x-y|))\,\varphi(x)\,dx \quad (210)$$

стремится к нулю при $k\to\infty$, откуда и будет следовать теорема. Согласно лемме при заданном $\varepsilon>0$ можно указать такую ограниченную область D_ε, лежащую строго внутри D, что для $\varphi(x)$ будет справедливо неравенство (208). Будем считать k настолько большим, что $D_\varepsilon\subset D_{\rho_k}$. Обозначим

$$\varphi_k(y)=\int\limits_{\dot{D}_{\rho_k}}\varphi(x)\,\omega_{\rho_k}(|x-y|)\,dx.$$

Суммы Римана для этого интеграла

$$I(y)=\sum_s\varphi(\xi_s)\,\omega_{\rho_k}(|\xi_s-y|)\,\Delta_s x,$$

где $\Delta_s x$ — мера частичных областей, а ξ_s принадлежат этим областям, и их производные до порядка l по y сходятся равномерно по y к функции $\varphi_k(y)$ и ее соответствующим производным при беспредельном измельчании $\Delta_s x$ частичных областей ввиду непрерывности $\varphi(x)$ и бесконечной дифференцируемости $\omega_{\rho_k}(|x-y|)$ по y. Но, в силу дистрибутивности функционала и его непрерывности в норме (204), мы имеем

$$\sum_s(m,\ \varphi(\xi_s)\,\omega_{\rho_k}(|\xi_s-y|)\,\Delta_s x)=(m,\ \sum_s\varphi(\xi_s)\,\omega_{\rho_k}(|\xi_s-y|)\,\Delta_s x),$$

и в пределе

$$\int\limits_{\dot{D}_{\rho_k}}(m,\ \varphi(x)\,\omega_{\rho_k}(|x-y|))\,dx=(m,\int\limits_{\dot{D}_{\rho_k}}\varphi(x)\,\omega_{\rho_k}(|x-y|)\,dx),$$

так что выражение (210) для r_k можно записать в виде

$$r_k=(m,\ \varphi(y)-\int\limits_{\dot{D}_{\rho_k}}\varphi(x)\,\omega_{\rho_k}(|x-y|)\,dx). \quad (211)$$

Функция $\varphi_k(x)$ не есть обычное усреднение $\varphi(x)$ с ядром $\omega_{\rho_k}(|x-y|)$, ибо область интегрирования D_{ρ_k} может не содержать всего шара $|x-y|\leqslant\rho_k$, если $y\in D$. Однако если y принадлежит какой-либо строго внутренней ограниченной подобласти области D, то шар $|x-y|\leqslant\rho_k$ будет принадлежать D_{ρ_k} при всех достаточно больших k, и $\varphi_k(y)$ для таких y есть усреднение $\varphi(x)$ с ядром $\omega_{\rho_k}(|x-y|)$. Ясно, что $\varphi_k(y)\in\dot{C}^{(l)}(D)$. Покажем, что $\varphi_k(y)$ сходятся к $\varphi(y)$ в норме (204). Для этого возьмем $\delta>0$ меньше расстояния D_ε до границы D и обозначим через D_δ область, полученную присоединением к D_ε всех шаров радиуса δ с центром в D_ε. Для $y\in D_\delta$ и всех достаточно больших k: $D_\delta\subset D_{\rho_k}$ и

$$\varphi_k(y)=\int\limits_{|x-y|\leqslant\rho_k}\varphi(x)\,\omega_{\rho_k}(|x-y|)\,dx.$$

Поэтому $\varphi_k(y)$ сходятся к $\varphi(y)$ при $k\to\infty$ равномерно по $y\in D_\delta$ вместе со всеми своими производными по y до порядка l [71]. Если же $y\in D-D_\delta$, то обе функции $\varphi(y)$ и $\varphi_k(y)$ равномерно малы вместе со своими производными до порядка l, ибо для $\varphi(y)$ справедливо неравенство (208) при $y\in D-D_\varepsilon$. Итак, $\varphi_k(y)$ сходятся к $\varphi(y)$ в норме (204), и из (211) следует, что $r_k\to 0$ при $k\to\infty$. Теорема доказана.

Можно было бы показать, что функционалы типа функции с гладкими ядрами также плотны в $U^{(l)}(D)$.

Определим теперь операцию умножения на функцию $a(x)$ и операцию дифференцирования $\dfrac{\partial}{\partial x_k}$ для элементов $U^{(l)}(D)$.

Пусть $a(x)\in C^{(r)}(D)$. Если D — бесконечная область, то считаем, что $a(x)$ и ее производные ограничены. Введем линейный оператор:

$$A\varphi=a(x)\,\varphi(x),$$

который переводит $\varphi(x)\in\mathring{C}^{(l)}(D)$ в $a(x)\,\varphi(x)\in\mathring{C}^{(s)}(D)$, где $s=\min(l,r)$. Операцию умножения элемента m из $U^{(l)}(D)$ на $a(x)$ определим как оператор A^*, сопряженный с A, т. е. определим его равенством

$$(m,\ A\varphi)=(A^*m,\ \varphi),\tag{212}$$

которое должно выполняться для всех $\varphi(x)\in\mathring{C}^{(l)}(D)$.

При этом оператор A^* применим к элементам из $U^{(s)}(D)$ и $A^*m\in U^{(l)}(D)$. Если функционал m имеет вид (205) с суммируемым по D ядром, то

$$(m,\ A\varphi)=\int\limits_D\psi(x)\,[a(x)\,\varphi(x)]\,dx=\int\limits_D[\psi(x)\,a(x)]\,\varphi(x)\,dx,$$

т. е. функционал A^*m также есть функционал типа функции с ядром $a(x)\psi(x)$. Рассмотрим теперь оператор дифференцирования

$$B\varphi = -\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_k}.$$

Он является ограниченным оператором из $\mathring{C}^{(l)}(D)$ $(l \geqslant 1)$ в $\mathring{C}^{(l-1)}(D)$. Сопряженный ему оператор B^* формально также определяется равенством вида (212)

$$(m,\ B\varphi) = (B^*m,\ \varphi) \tag{213}$$

и переводит элементы m из $U^{(l-1)}(D)$ в $U^{(l)}(D)$. Для функционалов m, представимых в виде (205) с непрерывно дифференцируемым ядром $\psi(x)$, это равенство показывает, что функционалу B^*m соответствует ядро $\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_k}$, ибо

$$(m,\ B\varphi) = -\int_D \psi(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_k}\,dx = \int_D \frac{\partial\psi(x)}{\partial x_k}\varphi(x)\,dx = (B^*m,\ \varphi).$$

Посмотрим, как вычисляются операторы A^* и B^* от функционала, задаваемого δ — функцией, т. е. от функционала (206).

Пусть $\varphi(x) \in \mathring{C}^{(l)}(D)$ $(l \geqslant 1)$. Тогда

$$\begin{aligned}(\delta(x-x_0),\ A\varphi) &= (A^*\delta(x-x_0),\ \varphi) = a(x_0)\varphi(x_0)\\ (\delta(x-x_0),\ B\varphi) &= (B^*\delta(x-x_0),\ \varphi) = -\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_k}\Big|_{x=x_0}\end{aligned} \tag{214}$$

Можно ввести и последующие дифференцирования, причем, как легко доказать, результат не зависит от порядка дифференцирования. Таким образом, для элементов из $U^{(l)}(D)$ можно определить производные до порядка l и различные дифференциальные операторы. Для этих операторов можно ставить те же задачи, что и для обычных функций; именно задачу Коши и различные краевые задачи. Впервые обобщенные функции были введены С. Л. Соболевым при решении задачи Коши для линейных гиперболических уравнений (1936 г.). Такое расширение класса объектов, оказывается полезным с двух точек зрения: во-первых, может оказаться, что в классе обычных функций задача не имеет решения, а в классе обобщенных функций (функционалов) решение есть. Во-вторых, иногда легче доказать существование „плохого" решения, являющегося обобщенной функцией, а затем уже исследовать вопрос о том, когда эта обобщенная функция будет обычной.

Оба эти обстоятельства отчетливо видны на примере задачи Коши для различных систем дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial u_i(x,\ t)}{\partial t} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} a_{ij}^{k} \frac{\partial u_j(x,\ t)}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^{N} a_{ij}\, u_j(x,\ t) + f_i(x,\ t). \tag{215}$$

$$u_i(x,\ 0) = \varphi_i(x).$$

$$(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N)$$

Применяя преобразование Фурье по x, эту задачу сводят к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, зависящими от числовых параметров α_k. Применение обратного преобразования Фурье позволяет перейти от решения этих обыкновенных дифференциальных уравнений к решениям исходной задачи. Если оставаться в рамках классических преобразований Фурье, то придется ограничиться рассмотрением только убывающих в определенном смысле начальных функций и свободных членов f_i. При этом предположении вопрос исследован И. Г. Петровским. Однако в его же работах из дополнительных соображений было показано, что существует класс так называемых гиперболических систем, для которых решение в произвольной точке пространства $(x_0,\ t_0)$ определяется значениями начальных функций $\varphi_i(x)$ лишь в некоторой ограниченной части пространства x, зависящей от точки $(x_0,\ t_0)$. Тем самым было установлено, что задача (215) для гиперболических систем однозначно разрешима при любом поведении $\varphi_i(x)$ при безграничном возрастании $|x|$.

Далее в работах А. Н. Тихонова, О. А. Ладыженской и С. Д. Эйдельмана было показано, что для так называемых параболических систем начальные функции также можно брать не только неубывающими при $|x| \to \infty$, но даже неограниченно (экспоненционально) растущими. Однако для сохранения теоремы единственности на этот раз надо накладывать определенные ограничения на порядок роста. Наконец, для обратной задачи Коши для уравнения теплопроводности (т. е. задачи Коши для уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$, решаемой вниз по t) было известно, что она имеет обычное решение лишь при специальных начальных данных.

Все эти факты требовали более внимательного изучения задачи (215) и в связи с этими преобразования Фурье от функций, произвольным образом ведущих себя на бесконечности. Это изучение было начато в работах Л. Шварца и подробно проведено в работах И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова. Преобразование Фурье от функций, растущих на бесконечности, есть, вообще говоря, уже не функция, а функционал в некотором $\mathring{C}^{(l)}(R_n)$. В классе этих функционалов и приходится в дальнейшем рассматривать задачу Коши для

систем обыкновенных дифференциальных уравнений, а затем от них переходить к решениям задачи (215), которые в одних случаях оказываются обычными, а в других — обобщенными функциями. Мы не будем приводить здесь результатов всех этих исследований, проведенных И. М. Гельфандом, Г. Е. Шиловым и их учениками, а отошлем читателя к работам И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова по обобщенным функциям и их приложениям. *)

Здесь же мы отметим некоторые факты, касающиеся решений в функционалах для линейных уравнений второго порядка эллиптического, параболического и гиперболического типов с переменными, но гладкими коэффициентами. Рассмотрим одно из таких уравнений

$$L(u) = f(x), \tag{216}$$

в котором $f(x)$ есть функция, имеющая особенность в точке $x = x_0$. Оказывается, что для уравнений эллиптического и параболического типов все решения уравнения (216) будут обычными функциями, гладкими всюду, за исключением может быть точки x_0, где они могут иметь особенность. Ниже мы покажем на примере оператора Лапласа, что даже если $f(x)$ есть дельта-функция, сосредоточенная в точке x_0, то и тогда решения уравнения (216) будут обычными функциями, имеющими лишь полярность в точке x_0. Если же уравнения (216) возьмем однородными, то все их решения будут обычными функциями.

Не то имеет место в случае гиперболических уравнений. Для них особенность $f(x)$ распространяется на целые области, и решение может оказаться не обычной, а обобщенной функцией. Приведем пример этому. Возьмем волновое уравнение $u_{tt} = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3}$. Одно из его решений определяется формулой Пуассона [II; 71]

$$u(x, t) = \frac{t}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \varphi(x + t\vec{n}) \sin\theta d\theta d\varphi. \tag{217}$$

Известно, что при трижды непрерывно дифференцируемой функции $\varphi(x)$ эта формула дает дважды непрерывно дифференцируемое решение волнового уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $u(x, 0) = 0$; $u_t(x, 0) = \varphi(x)$. Пусть $\varphi_m(x)$ суть трижды непрерывно дифференцируемые неотрицательные функции, стремящиеся при $m \to \infty$ к функции $\varphi(x) = \dfrac{1}{x_1^2 + x_2^2}$. Из формулы (217) видно, что соответствующие им решения $u_m(x, t)$ будут стремиться к $+\infty$ для (x, t), лежащих в области $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leqslant t$ полупространства $t \geqslant 0$. Это говорит за то, что решения волнового уравнения, соответствующего начальным условиям $u(x, 0) = 0$, $u_t = (x, 0) = \dfrac{1}{x_1^2 + x_2^2}$ в виде обычной функции не существует. Тем не менее в классе функционалов оно есть и единственно. Аналогично, используя формулу Кирхгофа, можно убедиться, что неоднородное волновое уравнение с правой частью $f(x)$, равной $\delta(x - x_0)$, также не имеет решений в классе обычных функций, но имеет их в классе функционалов.

В следующем томе мы предполагаем рассмотреть все эти вопросы более подробно. Как мы упоминали, первыми математическими работами, в которых ставились и решались задачи в классе обобщенных функций, были работы С. Л. Соболева по задаче Коши для уравнений гиперболического типа.

В заключение приведем доказательство утверждений, высказанных выше относительно решений уравнения Лапласа.

---

*) Только что вышли три выпуска большой работы И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова, посвященной обобщенным функциям и их приложениям.

Пусть D — ограниченная трехмерная область и $|x-x_0|=r$ — расстояние от переменной точки x до точки x_0. Считая границу D достаточно гладкой и применяя формулу Грина, получим для $\varphi(x)\in\mathring{C}^{(2)}(D)$:

$$\varphi(x_0)=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\dot{D}}\frac{\Delta\varphi(x)}{r}\,dx$$

или

$$\int\limits_{\dot{D}}\left(-\frac{1}{4\pi r}\right)\Delta\varphi(x)\,dx=\delta(x-x_0)\,\varphi(x),$$

откуда на основании определения производной от функционала видно, что функционал m_0 с ядром $\left(-\frac{1}{4\pi r}\right)$ удовлетворяет неоднородному уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 m_0}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 m_0}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 m_0}{\partial x_3^2}=\delta(x-x_0). \tag{218}$$

Тем самым мы показали, что одним из решений уравнения (218) является функционал типа функции. Для нахождения всех решений уравнения (218) достаточно найти все решения в функционалах однородного уравнения Лапласа:

$$\Delta m=\frac{\partial^2 m}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 m}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 m}{\partial x_3^2}=0. \tag{219}$$

Мы покажем, что все функционалы m, удовлетворяющие этому уравнению, представимы через ядра, и эти ядра суть гармонические в D функции. Уравнение (219) эквивалентно следующему:

$$(m,\ \Delta_x\varphi)=0 \tag{220}$$

для любой функции $\varphi(x)\in\mathring{C}^{(2)}(D)$. Возьмем в качестве $\varphi(x)$ следующую функцию:

$$\varphi(x)=\frac{1}{4\pi|x-y|}\left|\psi\left(\frac{|x-y|}{\rho_1}\right)-\psi\left(\frac{|x-y|}{\rho_2}\right)\right|, \tag{221}$$

где $\psi(\xi)$ есть неотрицательная бесконечно дифференцируемая функция, равная 1 при $\xi\in\left|0,\frac{1}{2}\right|$ и нулю при $\xi\geqslant 1$. Если точка y лежит внутри D, то $\varphi(x)\in\mathring{C}^{(2)}(D)$ при достаточно малых ρ_1 и ρ_2. Функцию

$$\omega_\rho(|x-y|)=\begin{cases}0 & \text{при } x=y\\ \Delta_x\left|\dfrac{1}{4\pi|x-y|}\psi\left(\dfrac{|x-y|}{\rho}\right)\right| & \text{при } |x-y|>0,\end{cases}$$

равную нулю при $|x-y|\leqslant\frac{1}{2}\rho$ и при $|x-y|\geqslant\rho$, можно взять в качестве усредняющего ядра, ибо

$$\int\omega_\rho(|x-y|)\,dx=\int\limits_{|x-y|\leqslant\rho}\Delta_x\left|\frac{1}{4\pi|x-y|}\psi\left(\frac{|x-y|}{\rho}\right)\right|dx=$$

$$=\int\limits_{r=1}\frac{\partial}{\partial r}\left|\frac{1}{4\pi r}\psi(r)\right|dS-\int\limits_{r=\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial r}\left|\frac{1}{4\pi r}\psi(r)\right|dr=1,$$

и

$$\omega_\rho(|x-y|)=\frac{1}{\rho^3}\chi\left(\frac{|x-y|}{\rho}\right),$$

где

$$\chi(\xi)=\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{2}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\left[\frac{1}{4\pi\xi}\psi(\xi)\right].$$

Подставив в (220) вместо $\varphi(x)$ функцию (221), получим

$$0=(m,\ \omega_{\rho_1}(|x-y|)-\omega_{\rho_2}(|x-y|)). \tag{222}$$

Согласно обозначению (209) это равенство можно переписать в виде

$$m_{\rho_1}(y)=m_{\rho_2}(y)$$

для y, расстояние которых до границы D больше $\max(\rho_1, \rho_2)$. Рассмотрим совокупность V_δ всех $\varphi(x)$ из $\overset{\circ}{C}{}^{(2)}(D)$, равных нулю вне некоторой области D_δ, отстоящей от границы D на расстояние δ, большее $2\max(\rho_1, \rho_2)$. Для таких $\varphi(x)$ имеем

$$\int_{D_\delta}\varphi(y)\,m_{\rho_1}(y)\,dy=(\tilde{m}_{\rho_1},\ \varphi)=\int_{D_\delta}\varphi(y)\,m_{\rho_2}(y)\,dy=(\tilde{m}_{\rho_2},\ \varphi).$$

С другой стороны, было доказано, что $(\tilde{m}_{\rho_1}, \varphi)\to(m, \varphi)$ при $\rho_1\to 0$. Следовательно, для всех $\rho_k<\frac{\delta}{2}$ и взятых нами $\varphi(x)$:

$$(m,\ \varphi)=(\tilde{m}_{\rho_k},\varphi)=\int_{D_\delta}\varphi(y)\,m_{\rho_k}(y)\,dy\qquad(k=1,\ 2),$$

т. е. функционал m задается ядром

$$\tilde{m}_{\rho_k}(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\in D-D_{\rho_k},\\ m_{\rho_k}(x) & \text{при } x\in D_{\rho_k}.\end{cases}$$

Покажем, что $m_{\rho_k}(x)$ есть гармоническая в D_δ функция. Действительно, для $\varphi(x)\in V_\delta$ из (220) следует

$$0=(m,\ \Delta_x\varphi)=\int_{D_\delta}m_{\rho_1}(x)\,\Delta_x\varphi(x)\,dx=\int_{D_\delta}\varphi(x)\,\Delta_x m_{\rho_1}(x)\,dx,$$

и, так как V_δ плотно в $L_2(D_\delta)$, то для $x\in D_\delta$:

$$\Delta_x m_{\rho_1}(x)=0.$$

Так как число $\delta>0$ было взято произвольно и так как $m_{\delta'}(x)=m_\delta(x)$ при $\delta'<\delta$ для $x\in D_\delta$, то мы можем утверждать, что семейство гармонических функций $m_\delta(x)$ определяет гармоническую в D функцию $m(x)$, совпадающую с $m_\delta(x)$ для $x\in D_\delta$. Эта гармоническая функция и порождает исследуемый нами функционал m, ибо если мы возьмем произвольную $\varphi(x)$ из $\overset{\circ}{C}{}^{(1)}(D)$, то она равна нулю вне некоторой области D_δ и потому для нее, в силу изложенного, будем иметь

$$(m,\ \varphi)=\int_{D_\delta}m_\delta(x)\,\varphi(x)\,dx=\int_D m(x)\,\varphi(x)\,dx. \tag{223}$$

Поведение $m(x)$ при приближении x к границе D определяется тем, что интеграл (223) должен сходиться для любой функции $\varphi(x)$ из $\mathring{C}^{(l)}(D)$.

Укажем на одно следствие полученного результата. Положим, что $\dot{\psi}(x)$ — суммируемая в D функция (D — конечная область) и

$$\int_D \dot{\psi}(x)\,\Delta_x \varphi(x)\,dx = 0$$

для любой $\varphi(x)$ из $\dot{C}^{(2)}(D)$.

Функционал

$$(m,\ \varphi) = \int_D \dot{\psi}(x)\,\varphi(x)\,dx$$

удовлетворяет уравнению (219) и, в силу сказанного выше, мы можем утверждать, что $\dot{\psi}(x)$ эквивалентна гармонической в D функции.

Аналогично предыдущему можно рассматривать линейные функционалы на различных семействах функций. Приведем один пример. Пусть K — семейство вещественных функций $\varphi(x)$, определенных во всем пространстве R_n, финитных и имеющих непрерывные производные всех порядков. Семейство K есть линейное пространство. Оно не нормируемо в обычном смысле этого слова, и мы введем для этого пространства лишь одно следующее определение:

Определение. *Будем говорить, что последовательность* $\varphi_k(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *функций из* K *стремится к нулю, если существует такая ограниченная область, вне которой все* $\varphi_k(x)$ *равны нулю, и если* $\varphi_k(x)$ *и всякая производная этих функций равномерно стремятся к нулю при* $k \to \infty$.

Функционал (m, φ) на K определяется тем, что каждому $\varphi(x) \in K$ сопоставляется некоторое вещественное число (m, φ). Такой функционал называется линейным (или линейным и непрерывным), если он дистрибутивен, т. е. $(m, c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1(m_1\varphi_1) + c_2(m_1\varphi_2)$, и обладает тем свойством, что при стремлении последовательности $\varphi_k(x)$ к нулю и $(m, \varphi_k) \to 0$. Функционалы типа функции определяются формулой (205), где D есть R_n и $\psi(x)$ какая-либо суммируемая в любой ограниченной области функция. Умножение функционала на функцию $\omega(x)$, имеющую непрерывные производные всех порядков, определяется равенством $(\omega m, \varphi) = (m, \omega\varphi)$ и дифференцирование функционала равенством

$$(\mathrm{D}^k m,\ \varphi) = (-1)^k (m,\ \mathrm{D}^k \varphi).$$

Функционал имеет производные всех порядков. Теория функционалов на пространстве K изложена в указанной выше работе И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова.

ГЛАВА V

ПРОСТРАНСТВО ГИЛЬБЕРТА

§ 1. Теория ограниченных операторов

120. Аксиомы пространства. При изучении функционального пространства L_2 и пространства последовательностей l_2 мы выяснили тождественность их структуры. Они являются осуществлением одного и того же абстрактного пространства, изучению которого и будет посвящена настоящая глава. Оно было впервые введено в виде l_2 Гильбертом и называется обычно пространством H, или пространством Гильберта. Как мы увидим ниже, пространство H является частным случаем пространства типа B, и все, что мы говорили об этих последних пространствах, будет приложимо и к пространству H. Но пространство H обладает сверх того и своими специфическими свойствами.

Переходим к перечислению аксиом, определяющих H. Пространство H есть линейное пространство, элементы которого удовлетворяют аксиоме A из [**95**]. Мы при этом считаем, что элементы H можно умножать на комплексные числа (комплексное линейное пространство).

Далее мы будем считать, что если не оговорено противное, что для любого целого положительного n существует n линейно независимых элементов (аксиома B из [**95**]). Введем теперь новую аксиому, относящуюся к понятию скалярного произведения:

Аксиома C. *Каждой паре элементов x и y из H сопоставляется определенное комплексное число, которое называется скалярным произведением x на y. Оно обозначается символом (x, y). Это скалярное произведение обладает следующими свойствами:*

$$\left.\begin{array}{ll} (y, x) = \overline{(x, y)}; & (x' + x'', y) = (x', y) + (x'', y); \\ (x, x) > 0, \text{ если } x \neq 0; & (ax, y) = a(x, y). \end{array}\right\} \quad (1)$$

Напомним: $x \neq 0$ означает, что x не есть нулевой элемент. Из указанных свойств непосредственно вытекают следующие следствия:

$$\left.\begin{array}{ll} (x, y' + y'') = (x, y') + (x, y''); & (x, ay) = \bar{a}(x, y); \\ (x, x) = 0, \text{ если } x = 0; & (x, y) = 0, \text{ если } x \text{ или } y = 0. \end{array}\right\} \quad (2)$$

Выражение $\sqrt{(x, x)}$, в котором значение корня считается $\geqslant 0$, назовем *нормой элемента* x и обозначим, как и в [**95**], через $\|x\|$. Проверим теперь, что таким образом определенная норма удовлетворяет трем условиям, входящим в аксиому C из [**95**]. Из ее определения непосредственно вытекает, что $\|x\| \geqslant 0$, причем знак $=$ имеет место только для нулевого элемента. Далее имеем

$$\|ax\|^2 = (ax, ax) = |a|^2 (x, x) = |a|^2 \cdot \|x\|^2, \quad \text{т. е.}$$
$$\|ax\| = |a| \cdot \|x\|. \tag{3}$$

Отсюда следует $\|-x\| = \|x\|$ [95].

Остается проверить неравенство

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|. \tag{4}$$

Предварительно докажем неравенство

$$|(x, y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|, \tag{5}$$

которое в дальнейшем будем называть неравенством Буняковского [ср. **IV; 35**].

Пусть x и y — любые элементы H и a и b — любые комплексные числа. Мы имеем

$$\|ax + by\|^2 = (ax + by, ax + by) = a\bar{a}(x, x) + a\bar{b}(x, y) + \bar{a}b(y, x) + b\bar{b}(y, y) \geqslant 0.$$

У написанной положительной формы Эрмита (относительно переменных a и b) дискриминант должен быть неотрицательным, т. е.

$$(x, x)(y, y) - (x, y)(y, x) \geqslant 0 \quad \text{или} \quad \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 - |(x, y)|^2 \geqslant 0,$$

откуда и следует (5). Переходим к доказательству (4). Принимая во внимание очевидное равенство

$$(x, y) + (y, x) = 2R(x, y), \tag{6}$$

где R есть обозначение вещественной части, получаем

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2R(x, y),$$

откуда, в силу $|R(x, y)| \leqslant |(x, y)|$ и неравенства (5), следует

$$\|x + y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2,$$

и мы приходим к неравенству (4).

Из (4), как и в [**95**], следует неравенство

$$\|x - y\| \geqslant \|x\| - \|y\|$$

и

$$\|x - y\| \leqslant \|x - z\| + \|z - y\|. \tag{7}$$

Из понятия нормы следует, как и в [95], понятие расстояния между элементами x и y: $\rho(x, y) = \|x - y\|$ и понятие предела последовательности x_n (сильная сходимость):

$$x_n \Rightarrow x_0, \quad \text{если} \quad \|x_0 - x_n\| \to 0. \tag{8}$$

Справедливо все то, что мы говорили раньше о пределе. Мы видели [95], что если $a_n \to a_0$, $x_n \Rightarrow x_0$ и $y_n \Rightarrow y_0$, то $a_n x_n \Rightarrow a_0 x_0$ и $x_n + y_n \Rightarrow x_0 + y_0$. Докажем теперь теорему.

Теорема. *Если* $x_n \Rightarrow x_0$ *и* $y_0 \Rightarrow y_0$, *то* $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$. Положим $u_n = x_n - x_0$ и $v_n = y_n - y_0$. По условию $\|u_n\|$ и $\|v_n\| \to 0$. Мы имеем

$$(x_0, y_0) - (x_n, y_n) = (x_0, y_0) - (x_0 + u_n, y_0 + v_n) =$$
$$= -(x_0, v_n) - (u_n, y_0) - (u_n, v_n)$$

и, применяя (5), можем написать

$$|(x_0, y_0) - (x_n, y_n)| \leqslant \|x_0\| \cdot \|v_n\| + \|u_n\| \cdot \|y_0\| + \|u_n\| \cdot \|v_n\|,$$

откуда, в силу $\|u_n\|$ и $\|v_n\| \to 0$, и следует $(x_n, y_n) \to (x_0, y)$.

При $y_n = x_n$ отсюда получается: *если* $x_n \Rightarrow x_0$, *то* $\|x_n\| \to \|x_0\|$ [ср. 95].

Если последовательность x_n имеет предельный элемент, то она сходится в себе, т. е. $\|x_n - x_m\| \to 0$ при n и $m \to \infty$ [95]. Будем считать пространство H полным.

Аксиома D. *Если последовательность* x_n *сходится в себе, то существует такой элемент* x_0 *из* H, *что* $x_n \Rightarrow x_0$. Кроме того, мы примем следующую аксиому:

Аксиома E. *Пространство* H *сепарабельно.* Иначе говоря, существует счетное множество элементов из H, плотное в H.

Из сказанного выше непосредственно следует, что H есть пространство типа B.

121. Ортогональность и ортогональные системы элементов. Если $(x, y) = 0$, то, в силу (1), и $(y, x) = 0$, и в этом случае элементы x и y называются взаимно ортогональными, или просто ортогональными, и пишут $x \perp y$. В силу (2), нулевой элемент ортогонален любому элементу.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_m$ — попарно ортогональные элементы, т. е. $(x_p, x_q) = 0$ при $p \neq q$. Составляем квадрат нормы суммы этих элементов:

$$\|x_1 + x_2 + \ldots + x_m\|^2 = (x_1 + x_2 + \ldots + x_m, x_1 + x_2 + \ldots + x_m).$$

Раскрывая скалярное произведение согласно (1) и (2) и пользуясь указанной ортогональностью, получаем для попарно ортогональных элементов следующую теорему Пифагора:

$$\|x_1 + x_2 + \ldots + x_m\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \ldots + \|x_m\|^2. \tag{9}$$

Пользуясь понятием предела, мы можем, как и [95], ввести понятие о сходимости бесконечных рядов, составленных из элементов H:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots \tag{10}$$

Такой ряд называется сходящимся, если сумма первых его n членов: $s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ стремится к пределу $s_n \Rightarrow u$ при $n \to \infty$. Элемент u называется в этом случае суммой ряда (10). Из аксиомы полноты и сказанного выше о сходимости в себе непосредственно следует необходимое и достаточное условие сходимости ряда (10): для любого заданного $\varepsilon > 0$ существует такое N, что

$$\| u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p} \| \leqslant \varepsilon \quad \text{при } n \geqslant N \text{ и } p \geqslant 1. \tag{10_1}$$

Особенно простую форму имеет это условие сходимости в том случае, когда члены ряда (10) попарно ортогональны, т. е. $(u_p, u_q) = 0$ при $p \neq q$.

Теорема. *Если члены ряда (10) попарно ортогональны, то для его сходимости необходимо и достаточно, чтобы сходился следующий ряд, составленный из неотрицательных чисел:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \| u_k \|^2. \tag{11}$$

Действительно, условие (10_1) в этом случае, в силу теоремы Пифагора, может быть записано в виде

$$\| u_{n+1} \|^2 + \| u_{n+2} \|^2 + \dots + \| u_{n+p} \|^2 \leqslant \varepsilon \quad \text{при } n \geqslant N \text{ и } p \geqslant 1,$$

а это последнее условие необходимо и достаточно для сходимости ряда (11).

При любой перестановке членов ряда (10) в ряде (11) произойдет такая же перестановка членов. Но это не влияет на его сходимость. Следовательно, и перестановка членов ряда (10) не влияет на его сходимость — если он был сходящимся, то он и после перестановки останется сходящимся; если он не был сходящимся, то не будет сходящимся и после перестановки. Нетрудно показать, пользуясь теоремой Пифагора и сходимостью ряда (11), что в рассматриваемом случае сумма ряда не зависит от порядка слагаемых.

Мы говорим, что последовательность элементов

$$x_1, x_2, x_3, \dots \tag{12}$$

образует ортогональную нормированную (ортонормированную) систему, если

$$(x_p, x_q) = \begin{cases} 0 & \text{при } p \neq q, \\ 1 & \text{при } p = q. \end{cases} \tag{13}$$

Принимая во внимание доказанную теорему, мы можем утверждать, что для сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \tag{14}$$

необходимо и достаточно, чтобы сходился следующий ряд из неотрицательных чисел:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2. \tag{15}$$

Положим, что это условие выполнено, и обозначим через x сумму ряда (15). Составим скалярное произведение

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k,\ x_p\right).$$

При $n \geqslant p$ оно, в силу (13), равно a_p, и, следовательно, переходя к пределу при $n \to \infty$, мы получим

$$a_p = (x,\ x_p). \tag{16}$$

Числа a_p, определенные по этой формуле, называются коэффициентами Фурье элемента x относительно системы (12), а ряд (14) — рядом Фурье элемента x. Мы имеем очевидно

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2, \tag{17}$$

и при беспредельном возрастании n получаем уравнение замкнутости

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2. \tag{18}$$

Из предыдущих рассуждений следует, что если ряд (14) сходится, то он есть ряд Фурье для своей суммы x, и имеет место уравнение замкнутости (18). Положим теперь наоборот, что задан некоторый элемент x из H. Составляем его коэффициенты Фурье (16) и пишем формулу (17). Из нее вытекает неравенство Бесселя

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \leqslant \|x\|^2. \tag{19}$$

Ряд, стоящий слева, обязательно сходится, т. е. ряд Фурье любого элемента x обязательно сходится. Если в формуле (19) имеет место знак $=$, то это значит, в силу (17), что сумма ряда Фурье элемента x равна именно этому элементу x. Система (12) называется замкнутой, если в формуле (19) для любого элемента x из H имеет место знак $=$. Система (12) называется полной, если не существует никакого элемента из H, кроме нулевого, который был бы ортогонален ко всем x_k. Совершенно так же, как и раньше [**58**], можно показать, что замкнутость и полнота эквивалентны. Если система (12) замкнута, то всякий элемент x из H представим единственным образом в виде сходящегося ряда (14), а именно своего ряда Фурье. Пусть a_k — коэффициенты Фурье элемента x и b_k — элемента y. Если система (12) замкнута, то, как и в [**58**], мы получим обобщенное уравнение замкнутости

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \bar{b}_k. \tag{18$_1$}$$

Отметим еще, что если c_k — любые комплексные числа и a_k — коэффициенты Фурье элемента x, то имеет место формула [ср. **58**]

$$\| x - \sum_{k=1}^{n} c_k x_k \|^2 = \| x \|^2 - \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 + \sum_{k=1}^{n} |c_k - a_k|^2.$$

Сравнивая с (17), мы видим, что левая часть последней формулы принимает наименьшее значение, если c_k суть коэффициенты Фурье элемента x.

Отметим, что если принять осуществление пространства H в виде функционального пространства L_2, то сходимости в H будет соответствовать сходимость в среднем в L_2, о которой мы говорили в [**56**]. Сходимость ряда Фурье сводится при этом к уравнению замкнутости из [**58**].

Напомним теперь процесс ортогонализации, который мы уже применяли в случае n-мерного комплексного пространства [**III; 29**]. Пусть имеется бесконечная последовательность элементов из H, отличных от нулевого элемента:

$$z_1, z_2, z_3, \ldots \tag{20}$$

Строим нормированный элемент $x_1 = z_1 : |z_1|$. Пусть z_s — первый из элементов (20) после z_1, который не может быть представлен в виде $a_1 x_1$. Строим элемент $y_2 = z_s - (z_s, x_1) x_1$, который, наверное, отличен от нулевого, и нормируем его, т. е. строим $x_2 = y_2 : |y_2|$. Пусть далее z_t — первый из элементов (20) после z_s, который не может быть представлен в виде $a_1 x_1 + a_2 x_2$. Строим элемент

$$y_3 = z_t - (z_t, x_1) x_1 - (z_t, x_2) x_2,$$

который, наверное, отличен от нулевого, и нормируем его, т. е. строим $x_3 = y_3 / \|y_3\|$. Продолжая так и дальше, мы получим ортогональную и нормированную систему (12), которая обладает следующим свойством: всякий элемент x_k есть конечная линейная комбинация элементов (20) и наоборот, причем элемент x_k выражается лишь через первые k из элементов y_s. Отметим, что попарно ортогональные и отличные от нулевого элементы y_s ($s = 1, 2, \ldots, m$) линейно независимы. Действительно, пусть имеет место равенство

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_m y_m = 0.$$

Умножая его обе части на y_k и принимая во внимание упомянутую ортогональность, получим $c_k \|y_k\|^2 = 0$, т. е. $c_k = 0$ ($k = 1, 2, \ldots, m$), откуда и следует линейная независимость y_s.

В силу сепарабельности H, существует счетное множество M элементов

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, \tag{21}$$

плотное в H. Если мы ортогонализуем последовательность u_k, то получим полную (замкнутую) ортонормированную систему x_k ($k = 1, 2, \ldots$), состоящую из счетного множества элементов. Замкнутость непосредственно следует из того, что множество (21) повсюду плотно в H. Если бы после ортогонализации осталось лишь конечное число элементов, то H было бы конечномерным.

Наоборот, если в H существует полная ортонормированная система x_k ($k = 1, 2, \ldots$), состоящая из счетного множества элементов, то нетрудно показать, что конечные суммы $c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_k x_k$ с комплексными рациональными коэффициентами c_s ($c_s = a_s + b_s i$, где a_s и b_s — вещественные рациональные числа) — образуют счетное множество, плотное в H, т. е. свойство сепарабельности равносильно тому, что в H существует полная ортонормированная система, представляющая собой счетное множество элементов.

Покажем еще, что из сепарабельности H следует, что всякая ортонормированная система $\mathfrak{S}(v)$ состоит из конечного или счетного множества элементов.

Пусть x и y — два взаимно ортогональных и нормированных элемента, т. е. $(x, y) = 0$ и $\|x\| = \|y\| = 1$. Мы имеем $\|x - y\|^2 = (x - y, x - y) = 2$ или $\|x - y\| = \sqrt{2}$, т. е. расстояние между двумя ортогональными и нормированными элементами равно $\sqrt{2}$. Положим теперь, что имеется некоторое множество $\mathfrak{S}(v)$ ортонормированных элементов. Фиксируем ε так, что $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Для любого v из $\mathfrak{S}(v)$ существует такой элемент u_k из множества (21), плотного в H, что $\|u_k - v\| \leqslant \varepsilon$. С другой стороны, при фиксированном k только один элемент $\mathfrak{S}(v)$ может удовлетворять неравенству $\|u_k - v\| \leqslant \varepsilon$, ибо если бы два различных элемента v_1 и v_2 удовле-

творяли этому неравенству, то, в силу правила треугольника, мы получили бы $\|v_2 - v_1\| \leqslant 2\varepsilon < \sqrt{2}$, а должно быть $\|v_2 - v_1\| = \sqrt{2}$. Из сказанного непосредственно следует, что множество $\mathfrak{G}(v)$ конечно или счетно.

122. Проекция. В дальнейшем существенную роль будут играть понятия линеала и подпространства [95].

Множество элементов, принадлежащих любому фиксированному подпространству L, удовлетворяет всем перечисленным выше аксиомам, кроме, может быть, аксиомы B, ибо подпространство L может быть и конечномерным. Таким образом, всякое бесконечномерное подпространство L можно рассматривать как самостоятельное комплексное гильбертово пространство. Сказанное выше совершенно очевидно по отношению ко всем аксиомам, кроме аксиомы сепарабельности. По отношению к этой аксиоме надо доказать следующее утверждение: если H сепарабельно, то и всякое его подпространство L представляет собой сепарабельное гильбертово пространство. Доказательство этого утверждения не представляет никакого труда [94].

Два подпространства L и M называются взаимно ортогональными, если любой элемент из L ортогонален любому элементу из M. Пишут при этом $L \perp M$. Элемент x называется ортогональным подпространству L, если x ортогонален любому элементу из L. Пишут $x \perp L$. Докажем теперь теорему, имеющую основное значение для всего дальнейшего.

Теорема. *Если L — подпространство, то любой элемент x из H может быть представлен в виде*

$$x = y + z, \tag{22}$$

где $y \in L$ и $z \perp L$. Указанное представление (22) *единственно.*

Если $x \in L$, то мы получим представление (22), положив $x = x + 0$. Положим теперь, что x не принадлежит L. Пусть d — точная нижняя граница множества положительных чисел $\|x - y\|^2$, когда y пробегает подпространство L:

$$d = \inf_{y \in L} \|x - y\|^2. \tag{23}$$

Существует такая последовательность элементов y_n, принадлежащих L, что

$$(x - y_n,\ x - y_n) = \|x - y_n\|^2 = d_n \to d. \tag{24}$$

Пусть u — любой элемент из L. В силу того, что L есть подпространство, элементы $y_n + \varepsilon u$ для любого вещественного ε (и даже комплексного ε) принадлежат L, и, принимая во внимание (23), мы

можем написать $(x-y_n-\varepsilon u,\ x-y_n-\varepsilon u)\geqslant d$. Раскрывая написанное скалярное произведение, получим неравенство

$$(u,\ u)\varepsilon^2-2R(x-y_n,\ u)\varepsilon+(d_n-d)\geqslant 0.$$

Трехчлен, стоящий слева, для любых вещественных ε неотрицателен, и потому мы должны иметь

$$|R(u,\ x-y_n)|\leqslant\sqrt{d_n-d}\,\|u\|. \tag{25}$$

Усилим это неравенство. Пусть φ — аргумент комплексного числа $(u,\ x-y_n)$, т. е. $(u,\ x-y_n)=|(u,\ x-y_n)|\,e^{i\varphi}$. Заменим в (25) элемент u элементом $ue^{-i\varphi}$, также принадлежащим L. Принимая во внимание, что $\|ue^{-i\varphi}\|=\|u\|$ и

$$(ue^{-i\varphi},\ x-y_n)=e^{-i\varphi}(u,\ x-y_n)=|(u,\ x-y_n)|,$$

мы из неравенства (25) получим более точное неравенство

$$|(u,\ x-y_n)|\leqslant\sqrt{d_n-d}\,\|u\|. \tag{26}$$

Напомним, что в этом неравенстве x — заданный элемент из H, y_n — последовательность элементов из L, удовлетворяющая условию (24), и u — любой элемент из L. Оценим теперь модуль скалярного произведения $(u,\ y_n-y_m)$. Представляя разность y_n-y_m в виде $y_n-y_m=(y_n-x)+(x-y_m)$ и пользуясь неравенством (26), получим

$$|(u,\ y_n-y_m)|\leqslant|(u,\ x-y_n)|+|(u,\ x-y_m)|\leqslant$$
$$\leqslant(\sqrt{d_n-d}+\sqrt{d_m-d})\,\|u\|.$$

Полагая в этом неравенстве $u=y_n-y_m$ и сокращая обе части на $\|y_n-y_m\|$, мы придем к неравенству

$$\|y_n-y_m\|\leqslant\sqrt{d_n-d}+\sqrt{d_m-d}.$$

Отметим, что если $\|y_n-y_m\|=0$, то это неравенство очевидно. При беспредельном возрастании m и n правая его часть, в силу (23), стремится к нулю, и, следовательно, последовательность элементов y_n сходится в себе. В силу аксиомы полноты, существует такой элемент y, что $y_n\Rightarrow y$, и, так как L есть подпространство, то $y\in L$. С другой стороны, переходя к пределу в неравенстве (26), мы получаем для любого элемента u, принадлежащего L: $(u,\ x-y)=0$, т. е. разность $x-y$ ортогональна к L. Обозначая эту разность через z, мы и получаем формулу (22), в которой $y\in L$ и $z\perp L$. Остается доказать единственность полученного представления (22). Пусть имеются два представления

$$x=y+z=y_1+z_1,$$

где y и $y_1\in L$, а z и $z_1\perp L$. Мы имеем, очевидно, $y-y_1=z_1-z$. Левая часть этого равенства представляет собой элемент, принадле-

жащий L, а правая — элемент, ортогональный L. Отсюда следует, что $(y-y_1,\ y-y_1)=0$, т. е. $\|y-y_1\|=0$, а потому $y_1=y$ и, следовательно, $z_1=z$. Теорема доказана полностью.

Элемент y, входящий в формулу (22) и принадлежащий L, называется проекцией элемента x в подпространство L. Множество элементов, ортогональных к подпространству L, образует, очевидно, некоторое подпространство. Обозначим его буквой M. В силу доказанной теоремы каждый элемент x из L может быть единственным образом представлен в виде суммы двух элементов, из которых один принадлежит L, а другой M. Множество элементов, ортогональных к M, образует подпространство L. В этом отношении связь между подпространствами L и M взаимна, и такие два подпространства называются взаимно дополнительными подпространствами. В случае вещественного трехмерного пространства взаимно дополнительными пространствами будут, например, множества векторов, образующих плоскость XY и ось Z.

Обычно пишут в указанном выше случае

$$H=L\oplus M \tag{27}$$

или

$$L=H\ominus M:\qquad M=H\ominus L, \tag{28}$$

так что $H\ominus M$ есть подпространство элементов H, ортогональных к подпространству M.

123. Линейные функционалы. Мы имели выше определение линейного функционала $l(x)$ в пространстве типа B и тем самым в H. Мы считаем, что он определен во всем H. Напомним, что его норма, которую мы будем обозначать n_l, определяется формулой

$$n_l=\sup_{\|x\|=1}|l(x)| \tag{29}$$

и

$$|l(x)|\leqslant n_l\|x\|. \tag{30}$$

Укажем пример линейного функционала. Пусть y — фиксированный элемент H. Положим

$$l(x)=(x,\ y). \tag{31}$$

Его дистрибутивность следует из (1), а ограниченность из (5):

$$|l(x)|\leqslant\|y\|\cdot\|x\|. \tag{32}$$

Отметим, что в этом неравенстве при $x=y$ имеет место знак $=$, т. е. множитель $\|y\|$ нельзя заменить меньшим, и $\|y\|$ есть норма функционала (31). Если y есть нулевой элемент, то $(x,\ y)=0$ при любом x (функционал аннулирования).

Оказывается, что формула (31) дает всевозможные функционалы в H, т. е. имеет место следующая важная теорема:

Теорема. *Всякий линейный функционал $l(x)$ представим единственным образом формулой* (29), *где y — некоторый фиксированный элемент из H.*

Из дистрибутивности функционала следует, что $l(\theta)=0$, где θ — нулевой элемент H. Пусть L — множество всех элементов x, для которых $l(x)=0$. В силу дистрибутивности и непрерывности $l(x)$, L есть подпространство. Может случиться, что L есть полное пространство H, т. е. что $l(x)=0$ для любого элемента x. Такой функционал мы можем, очевидно, представить в виде $l(x)=(x, \theta)$. Рассмотрим теперь общий случай, когда подпространство L есть часть H. Пусть z — некоторый фиксированный элемент H, не принадлежащий L. Мы можем представить его в виде $z=u+v$, где $u\in L$ и $v\perp L$, причем $v\neq 0$. [**122**]. Так как v не принадлежит L, мы имеем: $l(v)\neq 0$. Пусть x — любой элемент из H. Строим элемент $w=x-\frac{l(x)}{l(v)}v$ и рассмотрим $l(w)$:

$$l(w)=l(x)-\frac{l(x)}{l(v)}l(v)=l(x)-l(x)=0.$$

Таким образом, видим, что элемент $w=x-\frac{l(x)}{l(v)}v$ принадлежит L, и выше мы видели, что $v\perp L$. Таким образом, можем написать

$$\left(x-\frac{l(x)}{l(v)}v,\ v\right)=0,$$

или, раскрывая скалярное произведение,

$$(x,\ v)-\frac{l(x)}{l(v)}\|v\|^2=0,$$

откуда и следует представление $l(x)$ в виде скалярного произведения

$$l(x)=\left(x,\ \frac{\overline{l(v)}}{\|v\|^2}v\right)=(x,\ y),\ \text{где}\ y=\frac{\overline{l(v)}}{\|v\|^2}v.$$

Остается доказать единственность представления $l(x)$ в виде скалярного произведения. Пусть $l(x)=(x, y)=(x, y_1)$. Отсюда для любого x из H следует $(x, y-y_1)=0$. Полагая $x=y-y_1$, получим $\|y-y_1\|=0$, т. е. $y_1=y$, и теорема доказана полностью.

Иногда определенный выше функционал называют линейным функционалом первого рода. При этом линейным функционалом второго рода называют ограниченный функционал, для которого мы имеем следующее свойство:

$$l_1(c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_mx_m)=$$
$$=\bar{c}_1l_1(x_1)+\bar{c}_2l_1(x_2)+\ldots+\bar{c}_ml_1(x_m),$$

т. е. постоянные множители при вынесении за знак функционала переходят в комплексные сопряженные числа. Примером линейного функционала второго рода является скалярное произведение, в котором переменный элемент x стоит на втором месте, а фиксированный элемент y — на первом месте:

$$l_1(x)=(y,\ x). \tag{31_1}$$

Если $l_1(x)$ есть линейный функционал второго рода, то $l(x)=\overline{l_1(x)}$ есть линейный функционал первого рода. Из этого замечания и теоремы непосредственно следует, что формула (31_1) дает общий вид линейных функционалов второго рода.

Из теоремы следует также, что всякий линейный функционал $l(x)$ вполне определяется элементом y из H, т. е. пространство H^*, сопряженное с H, есть H. Напомним еще, что если на линеале L_1, повсюду плотном в H, имеется дистрибутивный ограниченный функционал $l(x)$, то его единственным образом можно распространить на все H так, что он будет линейным (ограниченным) на H с той же нормой, какую он имел на L_1 [**97**].

124. Линейные операторы. Рассмотрим теперь линейные (ограниченные) операторы, определенные во всем H, и значения которых также принадлежат H. В дальнейшем, если не оговорено особо, мы будем пользоваться терминами «линейный функционал» и «линейный оператор» для дистрибутивных ограниченных функционалов и операторов, заданных на всем H [**97, 98**]. Норму оператора A мы будем обозначать через $\|A\|$ или n_A. Напомним формулу

$$\|A\|=n_A=\sup_{\|x\|=1}\|Ax\|. \tag{33}$$

Через E будем обозначать оператор тождественного преобразования, т. е. $Ex=x$ для любого $x\in H$ ($\|E\|=1$). Если $\|A\|=0$, то A есть оператор аннулирования, т. е. $Ax=0$ для любого $x\in H$. Пусть L — некоторое подпространство. Согласно теореме из [**122**] мы имеем для любого $x\in H$ единственное представление в виде $x=y+z$, где $y\in L$ и $z\perp L$. Оператор, переводящий x в y, называется оператором проектирования, или проектором в L, и обозначается следующим образом:

$$y=P_Lx. \tag{34}$$

Если L есть все H, то $P_L=E$. Если L состоит из одного нулевого элемента, то P_L есть оператор аннулирования. В общем случае $\|P_Lx\|\leqslant\|x\|$, причем знак $=$ тогда и только тогда, когда $x\in L$. Если P_L не есть оператор аннулирования, то $\|P_L\|=1$. Дистрибутивность P_L следует из того, что если мы имеем два разложения: $x_1=y_1+z_1$ и $x_2=y_2+z_2$, где y_1 и $y_2\in L$, а z_1 и $z_2\perp L$, то

$x_1 + x_2 = (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2)$, где $y_1 + y_2 \in L$, а $z_1 + z_2 \perp L$, т. е. $P_L(x_1 + x_2) = P_L x_1 + P_L x_2$. Аналогично $P_L(ax) = aP_L(x)$.

Введем теперь некоторые новые понятия и отметим элементарные свойства линейных операторов [ср. **97**]. Слово «линейный» мы будем часто опускать.

Если A и B — два таких оператора, что для любого элемента x мы имеем $Ax = Bx$, то говорим, что операторы A и B совпадают, и пишем $A = B$. Если дистрибутивный и ограниченный оператор A задан на некотором линеале L_1, повсюду плотном в H, то так же, как и в случае функционала, его можно единственным образом продолжить на все H с сохранением дистрибутивности и ограниченности, и при этом продолжении его норма, которую он имел в L_1, не повысится.

Если A и B — два оператора, а a и b — два комплексных числа, то $aA + bB$ есть линейный оператор, определяемый равенством

$$(aA + bB)x = aAx + bBx. \tag{35}$$

Принимая во внимание, что

$$\|aAx + bBx\| \leqslant |a| \cdot \|Ax\| + |b| \cdot \|Bx\| \leqslant (|a| n_A + |b| n_B)\|x\|,$$

видим, что у оператора $aA + bB$ норма $\leqslant |a| n_A + b|n_B$. Таким образом, операторы можно умножать на комплексные числа и складывать. Эта операция подчиняется обычным законам алгебры. Последовательное применение операторов A и B представляет собой также линейный оператор, который мы обозначим символом BA. Применение тех же операторов, но в другом порядке, приводит к линейному оператору AB, отличному, вообще говоря, от BA. Мы назовем операторы BA и AB произведением операторов A и B. Это определение непосредственно распространяется и на случай любого конечного числа сомножителей. Если $AB = BA$, то говорят, что операторы коммутируют. Мы имеем

$$\|BAx\| \leqslant n_B \|Ax\| \leqslant n_B n_A \|x\|,$$

и, следовательно, норма произведений BA и $AB \leqslant n_B n_A$. Отметим еще, что если a — комплексное число и A — оператор, то норма aA в точности равна $|a| n_A$. Произведение операторов подчиняется, очевидно, сочетательному закону, т. е.

$$C(BA) = (CB)A,$$

и распределительному закону

$$(A + B)C = AC + BC \quad \text{и} \quad C(A + B) = CA + CB.$$

Переходим теперь к введению понятия сопряженного оператора. Пусть A — некоторый линейный оператор; рассмотрим скалярное произведение $(Ax.\ y)$. Для любого фиксированного элемента y

оно представляет собой функционал от x. Дистрибутивность его вытекает из дистрибутивности скалярного произведения, а ограниченность — из очевидной формулы

$$|(Ax, y)| \leqslant n_A \, y \| x \|.$$

Но всякий функционал мы можем представить единственным образом в виде скалярного произведения. Таким образом, для любого фиксированного элемента y существует такой определенный элемент y^*, что

$$(Ax, y) = (x, y^*) \tag{36}$$

для любого x из H. Таким образом, написанная формула дает определенный закон, согласно которому каждому элементу y соответствует определенный элемент y^*. Запишем этот закон в виде $y^* = A^* y$, где A^* — символ некоторого оператора. Его дистрибутивность непосредственно следует из дистрибутивности скалярных произведений (Ax, y) и (x, y^*) по отношению ко второму аргументу. Дальше мы докажем и ограниченность оператора A^*. Этот оператор A^* и называется сопряженным с A. Формулу (36) мы можем теперь записать в виде

$$(Ax, y) = (x, A^* y). \tag{37}$$

Из данного выше определения сопряженного оператора непосредственно вытекают следующие формулы составления сопряженного оператора для суммы и произведения операторов:

$$(aA)^* = \bar{a} A^*; \; (A + B)^* = A^* + B^*; \; (AB)^* = B^* A^*; \; (A^*)^* = A. \tag{38}$$

Докажем, например, третью из написанных формул. Применяя дважды определение (37), получим

$$(ABx, y) = (Bx, A^* y) = (x, B^* A^* y),$$

откуда и следует, что $(AB)^* = B^* A^*$. Докажем еще последнюю из формул (38). Мы имеем, пользуясь определением (37) и свойством $(u, v) = \overline{(v, u)}$:

$$(A^* x, y) = \overline{(y, A^* x)} = \overline{(Ay, x)} = (x, Ay),$$

откуда и следует, что $(A^*)^* = A$. Докажем, наконец, ограниченность оператора A^*.

Теорема 1. *Норма сопряженного оператора равна норме первоначального оператора, т. е.* $n_{A^*} = n_A$.

Полагая в формуле (37) $x = A^* y$ и пользуясь неравенствами (5) и (33), мы получим

$$\| A^* y \|^2 = |(A(A^* y), y)| \leqslant \| A(A^* y) \| \cdot \| y \| \leqslant n_A \| A^* y \| \cdot \| y \|,$$

откуда следует, что $\| A^* y \| \leqslant n_A \| y \|$, а потому $n_{A^*} \leqslant n_A$. В силу $(A^*)^* = A$ мы, в силу доказанного, имеем: $n_A \leqslant n_{A^*}$, откуда и следует, что $n_{A^*} = n_A$.

Оператор A называется самосопряженным, если $A^* = A$. Таким образом, для самосопряженного оператора характерным является равенство

$$(Ax, y) = (x, Ay). \tag{39}$$

Если положить в этом равенстве $y = x$ и принять во внимание $(Ax, x) = \overline{(x, Ax)}$, то мы увидим, что в случае самосопряженного оператора (Ax, x) вещественно для любого элемента x. Справедливо и обратное утверждение.

Теорема 2. *Для самосопряженности A необходимо и достаточно, чтобы (Ax, x) был вещественным для любого элемента x.*

Необходимость мы показали выше. Положим теперь, что (Ax, x) вещественно при любом выборе x, и докажем, что A — самосопряженный оператор. По условию мы имеем

$$(A(x+y),\ x+y) = (x+y,\ A(x+y)) \text{ и } (A(x+iy),\ x+iy) = \\ = (x+iy,\ A(x+iy)).$$

Раскрывая скалярные произведения и принимая во внимание, что $(Ax, x) = (x, Ax)$ и $(Ay, y) = (y, Ay)$, получим

$$(Ay, x) + (Ax, y) = (y, Ax) + (x, Ay);$$
$$(Ay, x) - (Ax, y) = (y, Ax) - (x, Ay).$$

Вычитая почленно, приходим к равенству (39), откуда и следует, что A — самосопряженный оператор. Принимая во внимание формулы (38), видим, что любая линейная комбинация $a_1A_1 + a_2A_2 + \ldots + a_mA_m$ самосопряженных операторов A_k с вещественными коэффициентами есть самосопряженный оператор, а произведение AB самосопряженных операторов будет самосопряженным оператором тогда и только тогда, когда A и B коммутируют.

Пусть L — некоторое подпространство и M — дополнительное к нему. В силу теоремы из [**122**], имеем

$$E = P_L + P_M. \tag{40}$$

Нетрудно видеть, что всякий проектор P_L есть самосопряженный оператор. Действительно, принимая во внимание ортогональность L и M и формулу (40), получим

$$(P_Lx, y) = (P_Lx,\ P_Ly + P_My) = (P_Lx,\ P_Ly) = (P_Lx + P_My,\ P_Ly) = \\ = (x,\ P_Ly).$$

Пусть A — любой линейный оператор. Построим следующие два оператора:

$$A_1 = \frac{1}{2}(A + A^*);\quad A_2 = \frac{1}{2i}(A - A^*). \tag{41}$$

Принимая во внимание формулы (38), видим, что A_1 и A_2 — самосопряженные операторы. Таким образом, получаем следующее выражение любого линейного оператора через самосопряженные операторы: $A = A_1 + iA_2$.

125. Билинейные и квадратичные функционалы. Мы укажем сейчас возможность определения любого линейного оператора при помощи особого рода функционала. Назовем билинейным функционалом определенный закон, согласно которому любой паре элементов x и y из H сопоставляется определенное комплексное число $l(x, y)$, причем $l(x, y)$ дистрибутивен по отношению к первому аргументу как функционал первого рода и по отношению ко второму аргументу как функционал второго рода:

$$l(ax_1 + bx_2, y) = al(x_1, y) + bl(x_2, y);\ l(x, ay_1 + by_2) = \\ = \bar{a}l(x, y_1) + \bar{b}l(x, y_2). \tag{42}$$

Кроме того, считаем билинейный функционал и ограниченным, т. е. считаем, что существует такое положительное число N, что для любых элементов x и y из H имеет место неравенство

$$|l(x, y)| \leqslant N\|x\| \cdot \|y\|. \tag{43}$$

Наименьшее значение N в этом неравенстве — норма билинейного функционала n_l — определяется формулой:

$$n_l = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ \|y\|=1}} |l(x, y)|. \tag{44}$$

Если A — любой линейный оператор, то формула

$$l(x, y) = (Ax, y) \tag{45}$$

дает, как нетрудно проверить, билинейный функционал. При этом

$$|l(x, y)| \leqslant n_A \|x\| \cdot \|y\|,$$

так что для билинейного функционала (45): $n_l \leqslant n_A$.

Докажем теперь, что формула (45) дает всевозможные билинейные функционалы.

Теорема. *Всякий билинейный функционал представим единственным образом формулой* (45), *где* A *— некоторый линейный оператор, и норма билинейного функционала* n_l *равна норме оператора* n_A.

Если фиксировать x, то $l(x, y)$ есть функционал второго рода от y, и мы можем написать [**123**]: $l(x, y) = (z, y)$, где z определяется единственным образом, если фиксировано x, т. е. $z = Ax$, где A — некоторый оператор, определенный во всем H. Его дистрибутивность следует непосредственно из (42) и дистрибутивности

(z, y) по отношению z. Докажем ограниченность A. Принимая во внимание (43) при $N = n_l$, можем написать

$$|(Ax, y)| \leqslant n_l \|x\| \cdot \|y\|.$$

Полагая $y = Ax$ и сокращая обе части полученного неравенства на $\|Ax\|$, будем иметь $\|Ax\| \leqslant n_l \|x\|$ (если $\|Ax\| = 0$, то последнее неравенство очевидно). Отсюда и следует ограниченность оператора A и неравенство $n_A \leqslant n_l$. Но мы имели выше $n_l \leqslant n_A$, и, следовательно, $n_l = n_A$.

Остается доказать единственность представления (45). Пусть

$$l(x, y) = (Ax, y) = (A_1 x, y).$$

Отсюда следует, что для любых x и y имеет место равенство $(Ax - A_1 x, y) = 0$. Полагая в нем $y = Ax - A_1 x$, получим $\|Ax - A_1 x\| = 0$, т. е. для любого x мы имеем $A_1 x = Ax$, операторы A и A_1 совпадают, и теорема полностью доказана. Из доказанной теоремы следует, что задание линейного оператора равносильно заданию билинейного функционала. Совершенно аналогично в алгебре задание элементов a_{ik} матрицы равносильно заданию билинейной формы

$$\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik} x_k \bar{y}_i.$$

Всякий билинейный функционал $l(x, y)$ порождает соответствующий ему квадратичный функционал (квадратичная форма), если положить в нем $y = x$:

$$l(x, x) = (Ax, x).$$

Нетрудно выразить билинейный функционал через квадратичную форму, которая им порождена, а именно легко проверить следующее равенство:

$$(Ax, y) = [(Ax_1, x_1) - (Ax_2, x_2)] + i[(Ax_3, x_3) - (Ax_4, x_4)], \quad (46)$$

где

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}(x + y); \quad & x_2 &= \frac{1}{2}(x - y); \\ x_3 &= \frac{1}{2}(x + iy); \quad & x_4 &= \frac{1}{2}(x - iy). \end{aligned} \quad (47)$$

В правой части (46) стоят четыре квадратичных функционала. Вещественность квадратичного функционала (Ax, x) для любого элемента x является, как мы видели, характерной особенностью самосопряженного оператора.

Положим, что оператор A обладает тем свойством, что $(Ax, x) = 0$ для любого элемента x. Из (46) при этом следует, что $(Ax, y) = 0$ для любых x и y. Но таким свойством, очевидно, обладает билиней-

ный функционал (Ax, y), если A есть оператор аннулирования, и, принимая во внимание единственность, указанную в теореме, мы можем утверждать, что если для любого x имеем $(Ax, x)=0$, то A есть оператор аннулирования. Отсюда непосредственно следует, что если операторы A и B таковы, что при любом x имеем $(Ax, x)=(Bx, x)$, то $A=B$.

126. Границы самосопряженного оператора. Пусть A — самосопряженный оператор. Принимая во внимание (5) и (33), мы можем написать $|(Ax, x)|\leqslant n_A\|x\|^2$, или, если принять, что $\|x\|=1$, то получим $|(Ax, x)|\leqslant n_A$. Таким образом, если взять всевозможные нормированные элементы x, т. е. такие элементы, что $\|x\|=1$, то множество вещественных чисел (Ax, x) ограничено снизу и сверху. Обозначим через m точную нижнюю границу и через M точную верхнюю границу этого множества:

$$m=\inf_{\|x\|=1}(Ax, x); \quad M=\sup_{\|x\|=1}(Ax, x). \tag{48}$$

Числа m и M называются обычно границами самосопряженного оператора A. Согласно определению точных границ, мы можем написать неравенства

$$m\leqslant(Ax, x)\leqslant M \quad \text{при} \quad \|x\|=1. \tag{49}$$

Принимая во внимание возможность вынесения постоянных множителей из скалярного произведения, можем написать для элемента x с любой нормой следующие неравенства:

$$m\|x\|^2\leqslant(Ax, x)\leqslant M\|x\|^2. \tag{50}$$

Оказывается, что норма оператора n_A чрезвычайно просто выражается через его границы m и M, а именно имеет место следующая теорема:

Теорема 1. *Норма n_A равна наибольшему из двух чисел $|m|$ и $|M|$.*

Доказательство этого утверждения является буквальным повторением доказательства теоремы 3 из [**IV; 36 и 39**], в которой доказывается, что $n_A=\sup_{|x|=1}|(Ax, x)|$, а это и совпадает с утверждением формулированной теоремы. Отметим еще, что теорема 2 из [**IV; 36**] совпадает с утверждением $n_l=n_A$, которое было доказано в предыдущем параграфе.

Введем некоторые новые понятия.

Определение. *Самосопряженный оператор A называется положительным (неотрицательным), если соответствующий ему квадратичный функционал $(Ax, x)\geqslant 0$.* Для положительного оператора характерным является неравенство $m\geqslant 0$, т. е. тот факт, что его нижняя граница неотрицательна. Далее мы говорим, что самосопря-

женный оператор A больше самосопряженного оператора B, и пишем $A > B$, если A и B не совпадают и разность $A - B$ есть положительный оператор. Совершенно аналогично определяется отрицательный оператор. Напомним, что в случае n-мерного пространства самосопряженная матрица называется положительной, если соответствующая ей форма Эрмита

$$\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik} x_i \bar{x}_k \qquad (a_{ki} = \bar{a}_{ik})$$

принимает лишь неотрицательные значения. Положительность матрицы равносильна тому, что среди ее собственных значений нет отрицательных. Если $(Ax,\ x)$ меняет знак при различном выборе x, то самосопряженный оператор A нельзя, конечно, назвать ни положительным, ни отрицательным. В случае конечномерного пространства это будут те самосопряженные матрицы, у которых имеются собственные значения разных знаков.

Теорема 2. *Если A — самосопряженный оператор, то A^2 — положительный оператор. Если A — любой линейный оператор, то операторы AA^* и A^*A — самосопряженные и положительные.*

Первое утверждение непосредственно следует из формулы

$$(A^2x,\ x) = (Ax,\ Ax) = \|Ax\|^2 \geqslant 0,$$

и второе утверждение из формул

$$(AA^*x,\ x) = (A^*x,\ A^*x) = \|A^*x\|^2 \geqslant 0, \tag{51}$$

$$(A^*Ax, x) = (Ax,\ Ax) = \|Ax\|^2 \geqslant 0. \tag{52}$$

127. Обратный оператор. Важным в теории операторов является понятие обратного оператора (ср. понятие обратной матрицы в III_1). Это понятие может быть определено различным образом. Цель настоящего параграфа — дать различные определения обратного оператора.

В этом параграфе, как и выше, линейным оператором мы будем называть дистрибутивный, ограниченный оператор, заданный на всем H.

Определение. *Говорят, что линейный оператор A имеет ограниченный обратный оператор B, если B — ограниченный оператор, определенный во всем H, и*

$$AB = BA = E, \tag{53}$$

где E — оператор тождественного преобразования. Ограниченность оператора B определяется обычным неравенством $\|Bx\| \leqslant N\|x\|$. Нетрудно видеть, что ограниченный обратный оператор может быть только один. Действительно, если мы имеем $AC = E$, то, умножая слева на B, пользуясь (53) и принимая во внимание, что $BE = B$ и

$EC=C$, получим $B=C$. Определенный выше оператор B обозначается обычно символом A^{-1}, и мы имеем

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E. \tag{54}$$

Напишем формулу

$$y=Ax \quad (x\in H). \tag{55}$$

Поскольку A^{-1} определен во всем H, мы можем применить к обеим частям оператора A^{-1} и получим

$$x=A^{-1}y. \tag{56}$$

Отсюда видно, что если A имеет ограниченный обратный оператор A^{-1}, то A производит биоднозначное преобразование пространства H в себя, т. е. любому элементу $x\in H$ соответствует, согласно (55), определенный элемент y, и, наоборот, любому элементу $y\in H$ соответствует определенный элемент x, который определяется формулой (56). Точно так же и A^{-1} преобразует H биоднозначно в себя. Из дистрибутивности A вытекает, что и A^{-1} — дистрибутивный оператор, т. е. A^{-1} линейный оператор. Из (54) непосредственно следует, что

$$(A^{-1})^{-1}=A. \tag{57}$$

Можно дать более общее определение обратного оператора. Отметим прежде всего, что, в силу дистрибутивности линейного оператора, множество элементов y, определяемых формулой (55), есть некоторый линеал, который мы обозначали $R(A)$. Укажем теперь то свойство, которым должен обладать оператор A для того, чтобы соответствие между элементами x из H и элементами y из $R(A)$ было биоднозначным. В силу формулы (55), любому x из H соответствует определенный элемент y из $R(A)$. Нам надо, чтобы и, наоборот, любому элементу y из $R(A)$ соответствовал определенный элемент x из H. Пусть x_1 и x_2 — два различные элемента из H, а y_1 и y_2 — соответствующие элементы из $R(A)$:

$$y_1=Ax_1; \quad y_2=Ax_2.$$

Вычитая, получим

$$y_2-y_1=A(x_2-x_1).$$

Если бы оказалось, что $y_2=y_1$, т. е. что различным элементам x_1 и x_2 из H соответствует один и тот же элемент из $R(A)$, то мы получим $A(x_2-x_1)=0$, т. е. уравнение

$$Ax=0 \tag{58}$$

должно иметь решения, отличные от нулевого элемента. Наоборот, если уравнение (58) имеет решение x_0, отличное от нулевого, то различным элементам $x=x_0$ и $x=0$ соответствует один и тот же

элемент $y=0$. Таким образом, для того чтобы, согласно формуле (55), имелось биоднозначное соответствие между элементами x из H и элементами y из $R(A)$, необходимо и достаточно, чтобы уравнение (58) имело только нулевое решение. При этом в линеале $R(A)$ определен оператор B, обратный A. Он переводит элемент y из $R(A)$ в элементы x из H так, что y выражается через x формулой (55). Этот оператор мы будем называть просто обратным оператору A в отличие от ограниченного обратного, который мы определим выше. Оператор B определен только на линеале $R(A)$, который может и не совпадать с H, и мы ничего не можем утверждать относительно ограниченности B. Но, в силу дистрибутивности A, можем утверждать, что B есть дистрибутивный оператор на линеале $R(A)$. Обозначая B прежним символом A^{-1}, можем написать $A^{-1}(Ax)=x$, если $x\in H$ и $A(A^{-1}x)=x$, если $x\in R(A)$.

Мы докажем дальше, что если уравнение (56) имеет только нулевое решение и $R(A)$ есть все H, то вышеуказанный оператор $B=A^{-1}$ ограничен, т. е. A имеет ограниченный обратный [ср. **97**].

Положим, что оператор A имеет ограниченный обратный оператор, и в равенствах (53) перейдем к сопряженным операторам

$$(A^{-1})^*\cdot A^*=A^*(A^{-1})^*=E^*=E.$$

Отсюда следует формула

$$(A^{-1})^*=(A^*)^{-1}. \tag{59}$$

Формула (53) требует, чтобы ограниченный оператор B был обратным для A как слева, так и справа, и в этом случае мы его называли просто ограниченным обратным оператором.

Рассмотрим теперь вопрос об ограниченных обратных операторах только слева или только справа.

Мы говорим, что оператор A имеет ограниченный обратный слева, или просто обратный слева, если существует такой, линейный оператор B, что $BA=E$. Точно так же, если $AC=E$, то C называется ограниченным обратным справа.

Теорема 1. *Если A имеет по крайней мере один обратный B слева и по крайней мере один обратный C справа, то имеется только один обратный слева, только один обратный справа и они совпадают, т. е. существует ограниченный обратный оператор A^{-1}.*

По условию $BA=E$ и $AC=E$, откуда следует, что $(BA)C=C$ и $B(AC)=B$. Левые части написанных равенств совпадают, а потому $B=C$, т. е. всякий левый обратный совпадает со всяким правым обратным, а потому может иметься только один левый обратный и только один правый обратный.

Теорема 2. *Если существует единственный левый обратный, то существует и правый обратный. Если существует единствен-*

ный правый обратный, то существует и левый обратный. В обоих случаях оба обратных единственны и совпадают (*по теореме* 1).

Докажем первое утверждение теоремы. Пусть имеется единственный обратный оператор B слева, т. е. $BA=E$. Умножая слева на A, получим $ABA=A$ или $(AB-E)A=0$, причем нуль в правой части обозначает оператор аннулирования. Добавляя к обеим частям $BA=E$, можем написать $(AB-E+B)A=E$. Но по условию B является единственным обратным слева, а потому $AB-E+B=B$, откуда $AB=E$, т. е. B является обратным и справа.

Отметим еще, что если A имеет два различных обратных оператора B и C слева (или справа), то имеется бесчисленное множество обратных операторов слева. Действительно если $BA=E$ и $CA=E$, то нетрудно проверить, что оператор $B+a(C-B)$ при любом выборе числа a будет обратным слева:

$$(B+aC-aB)A=BA+aCA-aBA=E+aE-aE=E.$$

Из предыдущих результатов следует, что мыслимы следующие четыре случая:

I) существует единственный обратный слева и справа;
II) не существует обратных ни слева, ни справа;
III) существует бесконечное множество обратных слева и ни одного справа;
IV) существует бесконечное множество обратных справа и ни одного слева.

В дальнейшем мы увидим, что могут осуществляться все указанные случаи. Сейчас мы дадим простой теоретический критерий, при помощи которого можно различить эти случаи. Рассмотрим самосопряженные положительные (неотрицательные) операторы A^*A и AA^*. Нижние границы этих операторов, которые мы обозначим через $m(A^*A)$ и $m(AA^*)$, больше нуля или равны нулю [**126**]. Положим, что существует по крайней мере один обратный слева: $BA=E$, и пусть $k>0$ есть норма B. Мы имеем $\|BAx\|=\|x\|$ и, с другой стороны, $\|BAx\|\leqslant k\|Ax\|$, откуда следует $k\|Ax\|\geqslant\|x\|$ и $\|Ax\|\geqslant\frac{1}{k}\|x\|$. При этом $(A^*Ax,\ x)\geqslant\frac{1}{k^2}\|x\|^2$, и, следовательно, $m(A^*A)\geqslant\frac{1}{k^2}$, т. е. $m(A^*A)>0$. Покажем теперь, что и наоборот, если $m(A^*A)>0$, то A имеет ограниченный обратный слева. В дальнейшем покажем, что если нижняя граница самосопряженного оператора F положительна, то F имеет ограниченный обратный оператор [**129**]. Применяя это к $F=A^*A$, видим, что существует такой ограниченный оператор D, что $DA^*A=E$, т. е. $(DA^*)A=E$, откуда и следует, что DA^* есть ограниченный обратный слева для A. Точно так же, для того, чтобы существовал по крайней мере один ограниченный обратный справа, необходимо и достаточно, чтобы $m(AA^*)>0$.

Из этих рассуждений непосредственно следует, что для осуществления указанных выше четырех случаев необходимы и достаточны условия:

I. $m(A^*A) > 0$ и $m(AA^*) > 0$; II. $m(A^*A) = 0$ и $m(AA^*) = 0$;
III. $m(A^*A) > 0$ и $m(AA^*) = 0$; IV. $m(A^*A) = 0$ и $m(AA^*) > 0$.

Отметим, что если A коммутирует с A^* (например, $A = A^*$, т. е. A — самосопряженный оператор), то случаи III и IV не могут иметь места. Принимая во внимание формулы (51) и (52), можем сформулировать результат в первом случае следующим образом: для того чтобы существовал обратный оператор слева и справа, необходимо и достаточно существование такого положительного числа l, что для любого элемента имеют место неравенства: $\|Ax\| \geqslant l\|x\|$ и $\|A^*x\| \geqslant l\|x\|$. Во всем сказанном выше мы нигде не использовали дистрибутивности операторов B и C. Важно лишь, что они определены во всем H и ограничены. В случае I единственный обратный слева и справа оператор есть, как мы видели выше, обязательно линейный оператор. В случае III имеется линейный оператор $B = DA^*$, обратный слева и аналогично в случае IV. В дальнейшем мы будем иметь дело с обратным дистрибутивным оператором A^{-1}, определенным на $R(A)$. Отметим еще, что если $BA = E$, то $A^*B^* = E$ и, следовательно, если для A имеет место случай III, то для A^* имеет место случай IV.

Обратные операторы играют основную роль при решении уравнения $Ax = y$, где y — заданный и x — искомый элементы. Если существует обратный оператор B слева, то, умножая обе части уравнения на B, получим обязательное равенство $x = By$, т. е. при наличии обратного оператора слева решение, если оно есть, представимо в виде $x = By$ и потому единственно. Если же существует обратный оператор C справа, то, подставляя $x = Cy$ в уравнение $Ax = y$, очевидно, удовлетворим ему, т. е. существование обратного оператора справа гарантирует существование решения $x = Cy$.

128. Спектр оператора. Основной задачей в приложениях теории операторов к математическому анализу является решение однородного уравнения

$$Ax = \lambda x \quad (60), \qquad \text{т. е.} \quad (A - \lambda E)x = 0, \qquad (60_1)$$

и неоднородного уравнения

$$Ax = \lambda x + y, \quad (61), \quad \text{т. е.} \quad (A - \lambda E)x = y, \qquad (61_1)$$

где x — искомый элемент, y — заданный элемент, λ — численный параметр. Число λ называется собственным значением оператора A, если однородное уравнение (60) имеет решения, отличные от нулевого элемента; эти решения называются собственными

элементами оператора A, соответствующими указанному собственному значению.

Если λ есть собственное значение A, и мы присоединим к соответствующим собственным элементам нулевой элемент, который удовлетворяет однородному уравнению (60) при любом λ, то, в силу линейности и однородности уравнения (61) и непрерывности оператора A, можем утверждать, что упомянутое множество собственных элементов с присоединенным к нему нулевым элементом образует подпространство. Мы будем называть его подпространством собственных элементов, соответствующих указанному собственному значению.

Если это подпространство собственных элементов имеет конечную размерность r, т. е. если максимальное число линейно независимых элементов, принадлежащих указанному подпространству, равно конечному числу r, то говорят, что соответствующее собственное значение λ имеет ранг или кратность r. Если упомянутое подпространство собственных элементов бесконечномерно, то говорят, что ранг соответствующего собственного значения равен бесконечности. В случае самосопряженного оператора A имеет место следующая теорема:

Теорема 1. *Собственные значения самосопряженного оператора вещественны и собственные элементы, соответствующие различным собственным значениям, взаимно ортогональны.*

Пусть λ — собственное значение самосопряженного оператора A и x — соответствующий собственный элемент (отличный от нулевого). Умножая обе части (60_1) справа на x, получим

$$(Ax,\ x) = \lambda \|x\|^2.$$

В силу самосопряженности A, левая часть написанного равенства вещественна, а следовательно, и число λ вещественно. Пусть λ' и λ'' — два различных собственных значения, а x' и x'' — соответствующие собственные элементы:

$$Ax' = \lambda' x';\quad Ax'' = \lambda'' x''.$$

Умножаем скалярно первое из равенств справа на x'', второе — слева на x' и почленно вычитаем полученные равенства:

$$(Ax',\ x'') - (x',\ Ax'') = (\lambda' - \lambda'')(x',\ x'').$$

Левая часть равна нулю, в силу самосопряженности A, и $\lambda' - \lambda'' \neq 0$. Таким образом, $(x',\ x'') = 0$, и теорема доказана.

Решение неоднородного уравнения (61_1) сводится к нахождению оператора $(A - \lambda E)^{-1}$, обратного оператору $A - \lambda E$. Если λ есть собственное значение оператора A, то однородное уравнение (60_1) имеет решения, отличные от нулевого элемента, и, в силу сказанного в [127], обратный оператор $(A - \lambda E)^{-1}$, наверное, не существует. Если λ не есть собственное значение оператора A, то обратный

оператор $(A-\lambda E)^{-1}$ существует, но он может быть ограниченным обратным оператором или просто обратным оператором. Отметим, что параметр λ при этом может быть любым комплексным числом. Введем следующее определение.

Определение. *Значение λ или точка λ (плоскости комплексного переменного) называется регулярной точкой оператора A, если оператор $A-\lambda E$ имеет ограниченный обратный оператор*

$$R_\lambda=(A-\lambda E)^{-1}, \tag{62}$$

и этот линейный оператор R_λ, определенный для всех регулярных точек λ, называется резольвентой оператора A. Спектром оператора A называется множество точек λ, которые не являются регулярными точками оператора A.

В силу сказанного выше, всякое собственное значение оператора A принадлежит его спектру. В дальнейшем мы увидим, что спектру могут принадлежать и такие значения λ, которые не являются собственными значениями.

Если λ есть точка регулярности, то при любом заданном элементе y неоднородное уравнение (61_1) имеет единственное решение, определяемое формулой

$$x=(A-\lambda E)^{-1}y. \tag{63}$$

Если λ не есть точка регулярности и не совпадает с собственным значением оператора A, то уравнение (61_1) имеет также единственное решение, если y принадлежит линеалу $R(A-\lambda E)$. Этот линеал состоит из элементов y, определяемых формулой

$$y=(A-\lambda E)x \qquad (x\in H), \tag{64}$$

когда x пробегает все H.

Таким образом, на линеале $R(A-\lambda E)$, если λ — не собственное значение, определен обратный оператор $(A-\lambda E)^{-1}$. Если при этом λ не есть точка регулярности A, то и в этом случае оператор $(A-\lambda E)^{-1}$ называют резольвентой A.

Теорема 2. *Элементы $R(A-\lambda E)$ ортогональны ко всем решениям уравнения $(A^*-\bar{\lambda}E)z=0$.*

Утверждение теоремы непосредственно вытекает из очевидного равенства

$$((A-\lambda E)x,\ z)=(x,\ (A^*-\bar{\lambda}E)z).$$

Отметим, что если A — самосопряженный оператор и λ — его собственное значение (оно вещественно), то из теоремы 2 следует, что элементы $R(A-\lambda E)$ ортогональны собственным элементам A, соответствующим собственному значению λ. В следующем параграфе мы докажем некоторые теоремы, которые характеризуют спектр самосопряженного оператора.

Сделаем еще одно замечание по поводу собственных элементов самосопряженного оператора A. Как мы видели, собственные значе-

ния, соответствующие некоторому собственному значению $\lambda=\lambda'$, образуют подпространство. В этом подпространстве мы можем ввести полную ортонормированную систему. Если собственное значение $\lambda=\lambda'$ имеет конечный ранг r, то эта ортонормированная система будет содержать r-элементов. Мы знаем, что собственные элементы, соответствующие различным собственным значениям, взаимно ортогональны. Таким образом, вводя, как было указано выше, ортонормированную систему в каждом из подпространств, соответствующих фиксированному собственному значению, мы получим ортогональную систему K в H. Будем говорить, что самосопряженный оператор порождает ортонормированную систему K. Эта система определяется с точностью до выбора полной ортонормированной системы в каждом из упомянутых подпространств. Может случиться, что A вовсе не имеет собственных значений. В этом случае системы K не будет. Мы знаем, что если ортонормированная система может содержать лишь конечное или счетное множество элементов. Отсюда непосредственно следует, что если K имеет бесчисленное множество различных собственных значений, то это множество счетно.

Ортонормированная система K может быть как полной, так и неполной в H. Ее свойство быть полной или неполной не зависит, как нетрудно видеть, от выбора полной нормированной системы в подпространствах собственных элементов, соответствующих фиксированному собственному значению. Если K — полная система, то говорят, что оператор A имеет чисто точечный спектр.

129. Спектр самосопряженного оператора. В этом параграфе мы будем рассматривать самосопряженные операторы.

Теорема 1. *Если λ не есть собственное значение самосопряженного оператора A, то формула* (64) *определяет линеал $R(A-\lambda E)$, плотный в H.*

Доказываем от обратного. Положим, что $R(A-\lambda E)$ не плотен в H, т. е. что замыкание $R(A-\lambda E)$ приводит к подпространству, отличному от H. При этом, в силу теоремы из [**122**], существует элемент x_0, отличный от нулевого и ортогональный к упомянутому подпространству и тем самым к $R(A-\lambda E)$, т. е. $((A-\lambda E)x, x_0)=0$ для любого x из H, или, пользуясь самосопряженностью A: $(x, (A-\bar\lambda E)x_0)=0$. Полагая $x=(A-\bar\lambda E)x_0$, получим $\|(A-\bar\lambda E)x_0\|=0$, т. е. $Ax_0=\bar\lambda x_0$. Если λ — вещественно, т. е. $\bar\lambda=\lambda$, то оказывается, что λ — собственное значение A, что противоречит предположению. Если λ не вещественно, то равенство $Ax_0=\bar\lambda x_0$ показывает, что невещественное число $\bar\lambda$ есть собственное значение самосопряженного оператора A, чего не может быть, и теорема доказана.

Если λ — регулярная точка, то $R(A-\lambda E)$ совпадает с H. Это следует из определения регулярной точки. Если λ есть собственное значение, то все элементы $R(A-\lambda E)$ ортогональны к соответствую-

щим собственным элементам A, и линеал $R(A-\lambda E)$ не может быть плотным в H. Дальше мы увидим, что если λ не есть регулярная точка и не есть собственное значение, то линеал $R(A-\lambda E)$ не есть H, (он плотен в H).

Установим теперь необходимое и достаточное условие регулярности λ.

Теорема 2. *Для того чтобы λ было регулярной точкой самосопряженного оператора A, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое положительное число p, что для любого x из H выполнялось бы неравенство*

$$\|(A-\lambda E)x\| \geqslant p\|x\|. \tag{65}$$

Всякое невещественное значение λ и вещественные значения, лежащие вне промежутка $[m, M]$, где m и M — границы A, регулярны.

Доказываем необходимость условия (65). Пусть λ — точка регулярности. При этом существует ограниченный обратный оператор (62). Обозначая через q его норму, имеем

$$\|(A-\lambda E)^{-1}y\| \leqslant q\|y\|,$$

или, полагая в этом неравенстве $y=(A-\lambda E)x$, приходим к неравенству (65) при $p=\frac{1}{q}$. Доказываем достаточность условия (65). Из этого условия вытекает прежде всего, что λ не есть собственное значение, и, таким образом, линеал $R(A-\lambda E)$, определенный в теореме 1, плотен в H. Мы покажем сейчас, что он замкнут, а потому совпадает с H. Положим, что элементы $y_n=(A-\lambda E)x_n$ принадлежат $R(A-\lambda E)$ и $y_n \Rightarrow y$. Нам надо доказать, что и $y \in R(A-\lambda E)$. В силу (65), мы имеем $\|y_n-y_m\| \geqslant p\|x_n-x_m\|$. Последовательность y_n сходится в себе, и, в силу последнего неравенства, можно утверждать, что и последовательность x_n сходится в себе, т. е. существует такой элемент x, что $x_n \Rightarrow x$. Из формулы $y_n=(A-\lambda E)x_n$ вытекает, что $y_n \Rightarrow y=(A-\lambda E)x$, и таким образом $y \in R(A-\lambda E)$. Итак, линеал $R(A-\lambda E)$ совпадает с H и оператор $(A-\lambda E)^{-1}$, обратный $A-\lambda E$, определен во всем H. Для доказательства регулярности точки λ нам остается доказать, что оператор $(A-\lambda E)^{-1}$ ограничен. Полагая в условии (65) $x=(A-\lambda E)^{-1}y$, получим

$$\|(A-\lambda E)^{-1}y\| \leqslant \frac{1}{p}\|y\|,$$

откуда и следует ограниченность $(A-\lambda E)^{-1}$, и первая часть теоремы доказана. Положим, что $\lambda=\sigma+\tau i$, где $\tau \neq 0$. Полагая $(A-\lambda E)x=y$, можем написать

$$((A-\lambda E)x, x)=(y, x) \quad \text{и} \quad ((A-\bar{\lambda}E)x, x)=(x, (A-\lambda E)x)=(x, y).$$

Вычитая из первого равенства второе, получим

$$(\bar{\lambda} - \lambda)(x, x) = (y, x) - (x, y)$$

или

$$2|\tau|\|x\|^2 \leqslant |(y, x)| + |(x, y)|,$$

и, пользуясь неравенством (6), приходим к неравенству

$$2|\tau|\|x\| \leqslant 2\|y\|,$$

т. е.

$$\|(A - \lambda E)x\| \geqslant |\tau|\|x\|$$
$$(\lambda = \sigma + \tau i).$$

Мы пришли к неравенству (65) при $p = |\tau|$, и, таким образом, всякое невещественное значение λ регулярно. Положим теперь, что λ вещественно, но лежит вне промежутка $[m, M]$. Положим, например, что $\lambda > M$, и докажем, что при этом выполняется условие (65). Мы можем написать

$$((A - \lambda E)x, x) = (Ax, x) - \lambda\|x\|^2,$$

или

$$((A - \lambda E)x, x) = [(Ax, x) - M\|x\|^2] - (\lambda - M)\|x\|^2.$$

Из определения верхней границы M оператора A следует, что разность, стоящая в квадратных скобках, неположительна. Кроме того, по предположению, $\lambda > M$, и последняя формула дает

$$|((A - \lambda E)x, x)| \geqslant (\lambda - M)\|x\|^2.$$

С другой стороны, имеем неравенство

$$|((A - \lambda E)x, x)| \leqslant \|(A - \lambda E)x\| \cdot \|x\|.$$

Последние два неравенства приводят к следующему неравенству:

$$\|(A - \lambda E)x\| \geqslant (\lambda - M)\|x\|,$$

откуда, при $\lambda > M$, следует (65), что и требовалось доказать.

Из теоремы вытекают следующие следствия.

Следствие 1. *Для того, чтобы λ принадлежало спектру, необходимо и достаточно выполнение следующего условия: существует такая последовательность нормированных элементов x_n, что*

$$\|(A - \lambda E)x_n\| \to 0.$$

Действительно, если такая последовательность есть, то условие (65) не может быть выполнено при $p > 0$, и, тем самым, λ принадлежит спектру. Наоборот, если λ принадлежит спектру, то условие (65) не выполнено ни при каком $p > 0$, т. е. существует такая последовательность нормированных элементов x_n, что $\|(A - \lambda E)x_n\| \to 0$. Отметим, что если λ — собственное значение, то за x_n мы можем

при любом n взять один и тот же элемент, а именно какой-либо нормированный собственный элемент x_0. При этом $(A-\lambda E)x_n=0$ при любом n.

Следствие 2. *Если нижняя граница* $m(A)>0$, *то* $\lambda=0$ *лежит вне* $[m, M]$, *и* A *имеет ограниченный обратный оператор.* Мы пользовались этим в [**127**].

Следствие 3. *Совокупность регулярных точек вещественной оси* λ *есть открытое множество.*

Пусть λ — точка регулярности. Нам надо доказать, что и все точки $\lambda\pm\varepsilon$ при всех достаточно малых положительных ε суть также точки регулярности. По условию существует такое положительное p, что имеет место (65), откуда

$$\|(A-(\lambda\pm\varepsilon)E)x\|\geqslant\|(A-\lambda E)x\|-\varepsilon\|x\|\geqslant(p-\varepsilon)\|x\|,$$

откуда и следует, что при $\varepsilon<p$ все точки $\lambda\pm\varepsilon$ суть точки регулярности.

Следствие 4. *Точки спектра самосопряженного оператора образуют замкнутое множество.* Непосредственно следует из следствия 3 [**32**].

Теорема 3. *Значения* $\lambda=m$ *и* $\lambda=M$ *принадлежат спектру.*

Предполагая $M>m$, докажем утверждение теоремы для $\lambda=M$. Введем самосопряженный оператор $B=A-mE$, имеющий границы 0 и $M_1=M-m>0$. Его норма равна M_1 [**126**]. Из определения верхней границы следует, что существует такая последовательность x_n нормированных элементов, что $(Bx_n, x_n)=M_1-\delta_n$, где $\delta_n\geqslant 0$ и $\delta_n\to 0$. Мы имеем

$$\|Bx_n-M_1x_n\|^2=\|Bx_n\|^2-2M_1(Bx_n, x_n)+M_1^2\leqslant$$
$$\leqslant M_1^2-2M_1(M_1-\delta_n)+M_1^2=2M_1\delta_n,$$

откуда следует, что $\|(B-M_1)x_n\|\to 0$, и, в силу следствия 1 теоремы 2, $B-M_1E=A-ME$ не имеет ограниченного обратного.

Покажем теперь, что и $\lambda=m$ принадлежит спектру. Для самосопряженного оператора $(-A)$ границами будут $(-M)$ и $(-m)$, причем $-M<-m$, так что, по доказанному выше, $-A+mE$ не имеет ограниченного обратного, т. е. не удовлетворяет условию (65), но тогда и $A-mE$ не удовлетворяет этому условию.

Мы видели выше, что если λ принадлежит спектру, но не есть собственное значение, то линеал $R(A-\lambda E)$ повсюду плотен в H. Мы покажем, что в этом случае $R(A-\lambda E)$ не есть все H. Это непосредственно вытекает из следующей теоремы [ср. **97**]:

Теорема 4. *Если* $R(A)$ *есть все* H, *то обратный оператор* A^{-1} *ограничен.*

Отметим прежде всего, что если $R(A)$ есть H, то из сказанного в начале этого параграфа следует, что $\lambda=0$ не есть собственное

значение A, и, следовательно, существует обратный оператор A^{-1}, определенный во всем H.

Пусть x — некоторый элемент H. Элемент Ax будем обозначать той же буквой со штрихом, т. е. $x'=Ax$, $y'=Ay$ и т. д. Нетрудно видеть, что оператор A^{-1} обладает следующим свойством симметрии:

$$(A^{-1}x',\ y')=(x',\ A^{-1}y'), \tag{66}$$

где x' и y' — любые элементы H. Действительно, написанное равенство равносильно равенству $(x,\ Ay)=(Ax,\ y)$, которое имеет место в силу самосопряженности A. Выражение (66) при любом выборе нормированного элемента y' представляет собой линейный функционал $l_{y'}(x')$ от x'. Для этого семейства функционалов числа $|l_{y'}(x')|$ для любого фиксированного элемента x' ограничены. Действительно, $|l_{y'}(x')|=|(A^{-1}x',\ y')|\leqslant\|A^{-1}x'\|$. Отсюда следует, что нормы функционалов (66) при $\|y'\|=1$ ограничены [**100**]. Но эти нормы равны $\|A^{-1}y'\|$ [**123**], и тем самым существует такое число q, что $\|A^{-1}y'\|\leqslant q$ при $\|y'\|=1$, что и требовалось доказать.

Теорема имеет, очевидно, место и для оператора $A-\lambda E$ при вещественном λ. Случай же невещественного λ был рассмотрен выше. В следующем разделе, посвященном неограниченным операторам, мы подробнее изучим спектр самосопряженных операторов.

130. Резольвента. Если λ не есть собственное значение A, то существует резольвента A:

$$R_\lambda=(A-\lambda E)^{-1}.$$

Она определена на $R(A-\lambda E)$ и преобразует биоднозначно этот линеал на H. Из определения обратного оператора следует, что если x принадлежит $R(A-\lambda E)$ и $R_\lambda x=0$, то $x=0$.

Дальше будем рассматривать тот случай, когда λ — регулярная точка A. При этом $R(A-\lambda E)$ есть H, и R_λ есть ограниченный оператор, определенный во всем H.

Докажем следующие две формулы (для регулярных λ и μ):

$$\left.\begin{aligned} R_\lambda^*&=R_{\bar\lambda},\\ R_\mu-R_\lambda&=(\mu-\lambda)\,R_\mu R_\lambda. \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

Если λ не вещественно, то $\bar\lambda$ также не вещественно и, следовательно, также регулярная точка. Таким образом, для вещественных и невещественных λ можно утверждать, что любые элементы x' и y' из H можно представить в виде

$$x'=(A-\lambda E)\,x;\quad y'=(A-\bar\lambda E)\,y.$$

Отсюда следует

$$(R_\lambda x',\ y')=(x,\ (A-\bar\lambda E)\,y)=((A-\lambda E)\,x,\ y)=(x',\ R_{\bar\lambda}y'),$$

и из полученного равенства непосредственно следует первая из формул (67). Докажем вторую. Из определения резольвенты следуют формулы

$$R_\lambda x = R_\mu (A - \mu E) R_\lambda x; \quad R_\mu x = R_\mu (A - \lambda E) R_\lambda x.$$

Вычитая их почленно, приходим ко второй из формул (67).

131. Последовательности операторов. Все, что мы говорили о последовательностях линейных операторов в пространствах типа B [**104**], имеет место и для H. Напомним основные факты и сделаем некоторые добавления. Сходимость по норме последовательности линейных операторов A_n к линейному оператору A определяется условием $\|A - A_n\| \to 0$ при $n \to \infty$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы $\|A_n - A_m\| \to 0$ при n и $m \to \infty$.

Сильная сходимость (или просто сходимость) определяется тем, что $A_n x \Rightarrow Ax$ при любом $x \in H$. При этом нормы $\|A_n\|$ ограничены. Необходимое и достаточное условие сильной сходимости $\|A_n x - A_m x\| \to 0$ при n и $m \to \infty$ и любом $x \in H$. Из сходимости по норме следует сильная сходимость. Если $A_n \to A$, $B_n \to B$ (в смысле сильной сходимости или сходимости по норме) и числа $a_n \to a$, то $a_n A_n \to aA$, $A_n + B_n \to A + B$ и $B_n A_n \to BA$.

Покажем, что если A_n — самосопряженные операторы и $A_n \to A$, то и A — самосопряженный оператор. Действительно, $(A_n x, x)$ — вещественно при любом n и любом $x \in H$. Отсюда следует, что и $(Ax, x) = \lim\limits_{n \to \infty} (A_n x, x)$ — вещественно при любом $x \in H$, и, следовательно, A — самосопряженный оператор.

Имея понятие предела, мы можем рассматривать бесконечные ряды, составленные из линейных операторов в H,

$$B_1 + B_2 + B_3 + \ldots$$

и говорить об их сходимости в том или ином смысле. Рассмотрим один важный для дальнейшего пример. Пусть A — линейный оператор и $\|A\| = q < 1$. Составим ряд:

$$S = E + \alpha A + \alpha^2 A^2 + \ldots, \tag{68}$$

где α — комплексное число. Обозначая через S_n оператор, равный сумме первых n-членов этого ряда, получим

$$\|S_{n+p} - S_n\| = \|\alpha^{n+1} A^{n+1} + \alpha^{n+3} A^{n+2} + \ldots + \alpha^{n+p-1} A^{n+p-1}\|,$$

откуда, считая $|\alpha| \leqslant 1$,

$$\|S_{n+p} - S_n\| \leqslant q^{n+1} + q^{n+2} + \ldots = \frac{q^{n+1}}{1-q},$$

и, следовательно, $\|S_{n+p} - S_n\| \to 0$ при $n \to \infty$ и любом $p > 0$, т. е. ряд (68) сходится по норме при $|\alpha| \leqslant 1$. Поскольку оценка для

$\|S_{n+p} - S_n\|$ не содержит α, говорят, что ряд (68) сходится равномерно по α при $|\alpha| \leqslant 1$. Принимая во внимание, что $\|A\| = q < 1$, мы можем утверждать, что ряд (68) сходится по норме равномерно относительно α, если $|\alpha| \leqslant 1 + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ выбрано настолько малым, что $(1 + \varepsilon) q < 1$.

Умножая ряд (68) на $(E - \alpha A)$ и принимая во внимание сказанное выше о предельном переходе для последовательности операторов, получим $(E - \alpha A) S = S(E - \alpha A) = E$, т. е. сумма ряда (68) при $|\alpha| \leqslant 1 + \varepsilon$ есть ограниченный обратный оператор для $(E - \alpha A)$, т. е. $S = (E - \alpha A)^{-1}$.

Совершенно так же, как и выше, можно доказать следующее утверждение: если нормы операторов A_k не превышают положительных чисел δ_k, которые образуют сходящийся ряд, то ряд

$$A = A_1 + A_2 + \ldots$$

сходится по норме, и норма оператора A не больше суммы ряда, составленного из чисел δ_k. Последнее утверждение следует из того, что если бы норма A оказалась больше этой суммы, то при достаточно большом n и норма оператора

$$S_n = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$$

оказалась бы больше этой суммы, что противоречит очевидному неравенству

$$\|S_n\| \leqslant \|A_1\| + \|A_2\| + \ldots + \|A_n\| \leqslant \delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n.$$

Утверждение, аналогичное вышеуказанному, имеет, очевидно, место и для нормированных пространств.

132. Слабая сходимость. Поскольку мы имеем общую форму линейного функционала в H [**123**], слабая сходимость $x_n \xrightarrow{\text{сл.}} x_0$ равносильна тому, что $(x_n, y) \to (x_0, y)$ при любом $y \in H$. Напомним, что из $x_n \xrightarrow{\text{сл.}} x_0$ следует существование такого числа $m > 0$, что $\|x_n\| \leqslant m$ при всех значениях n. Далее, поскольку сопряженное пространство H^* совпадает с H, всякое ограниченное в H множество слабо компактно, и H обладает слабой полнотой, т. е. если $(x_n - x_m, y) \to 0$ при n и $m \to \infty$ и любом $y \in H$, то последовательность x_n — слабо сходящаяся. Мы знаем также, что если $x_n \xrightarrow{\text{сл.}} x_0$ и A — линейный оператор, то $Ax_n \xrightarrow{\text{сл.}} Ax_0$. Покажем теперь, что если z_k $(k = 1, 2, \ldots)$ — ортонормированная система, полная в H, и $\|x_n\| \leqslant m$, то для того чтобы показать, что $x_n \xrightarrow{\text{сл.}} x_0$, достаточно показать, что $(x_n, z_k) \to (x_0, z_k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Действительно, пусть $(x_n, z_k) \to (x_0, z_k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Любой эле-

мент $y \in H$ можно представить в виде

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} b_k z_k,$$

причем

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2 = \|y\|^2.$$

Напишем

$$(x_n - x_0,\ y) = \left(x_n - x_0,\ \sum_{k=1}^{N} b_k z_k\right) + \left(x_n - x_0,\ \sum_{k=N+1} b_k z_k\right),$$

и пусть нам задано $\varepsilon > 0$. В силу $\|x_n\| \leqslant m$ имеем [121]:

$$\left|\left(x_n - x_0,\ \sum_{k=N+1}^{\infty} b_k z_k\right)\right| \leqslant \|x_n - x_0\| \cdot \left\| \sum_{k=N+1}^{\infty} b_k z_k \right\| \leqslant$$

$$\leqslant (|m| + \|x_0\|) \sqrt{\sum_{k=N+1}^{\infty} |b_k|^2}$$

и можем фиксировать такое N, что правая часть написанного неравенства $\leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. При этом

$$|(x_n - x_0,\ y)| \leqslant \left| \sum_{k=1}^{N} (x_n - x_0,\ b_k z_k) \right| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

В силу $(x_n,\ z_k) \to (x_0,\ z_k)$ при всех достаточно больших n первое слагаемое правой части $\leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ и $\|(x_n - x_0,\ y)\| \leqslant \varepsilon$, откуда и следует, что $(x_n,\ y) \to (x_0,\ y)$.

Докажем следующую теорему:

Теорема 1. *Если* $x_n \xrightarrow{\text{сл.}} x_0$ *и* $y_n \Rightarrow y_0$, *то* $(x_n,\ y_n) \to (x_0,\ y_0)$ *и* $(y_n,\ x_n) \to (y_0,\ x_0)$. Достаточно доказать, что $(x_n,\ y_n) \to (x_0,\ y_0)$. Второе утверждение получится перестановкой элементов. Мы можем написать

$$|(x_0,\ y_0) - (x_n,\ y_n)| \leqslant |(x_0,\ y_0) - (x_n,\ y_0)| + |(x_n,\ y_0) - (x_n,\ y_n)|,$$

или

$$|(x_0,\ y_0) - (x_n,\ y_n)| \leqslant |(x_0,\ y_0) - (x_n,\ y_0)| + |(x_n,\ y_0 - y_n)|.$$

Принимая во внимание, что из $x_n \xrightarrow{\text{сл.}} x_0$ следует существование такого числа $m > 0$, что $\|x_n\| \leqslant m$ и используя неравенство Буняковского, получим

$$|(x_0, y_0) - (x_n, y_n)| \leqslant m\|y_0 - y_n\| + |(x_0, y_0) - (x_n, y_0)|.$$

Первое слагаемое справа $\to 0$, ибо $y_n \Rightarrow y_0$, а второе $\to 0$, ибо $x_n \xrightarrow{\text{сл.}} x_0$. Таким образом, $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$, и теорема доказана.

Теорема 2. *Если* $x_n \xrightarrow{\text{сл.}} x_0$ *и* $\|x_n\| \to \|x_0\|$, *то* $x_n \Rightarrow x_0$. Мы имеем

$$\|x_0 - x_n\|^2 = \|x_0\|^2 + \|x_n\|^2 - (x_n, x_0) - (x_0, x_n).$$

Из условий теоремы следует, что $(x_n, x_0) \to \|x_0\|^2$, $(x_0, x_n) \to \|x_0\|^2$ и $\|x_n\|^2 \to \|x_0\|^2$, и, следовательно, $\|x_0 - x_n\|^2 \to 0$, что и требовалось доказать.

Эта теорема, как указано в [**101**], имеет место и для некоторых пространств типа B.

133. Вполне непрерывные операторы. Мы имели определение вполне непрерывного оператора для пространства типа B и тем самым для H. Вполне непрерывный оператор в H есть такой линейный оператор, который преобразует всякое ограниченное в H множество в компактное.

Мы знаем, что всякий линейный оператор преобразует компактное множество в компактное. Отметим, что оператор тождественного преобразования не вполне непрерывен. Он преобразует сферу $\|x\| \leqslant 1$ (ограниченное множество) биоднозначно в себя, а такая сфера некомпактна. Чтобы убедиться в этом, достаточно взять какую-нибудь бесконечную ортонормированную последовательность элементов z_k ($k = 1, 2, \ldots$). Она ограничена, ибо $\|z_k\| = 1$, но некомпактна, так как $\|z_p - z_q\| = \sqrt{2}$ при $p \neq q$.

Мы дадим ниже два новых определения вполне непрерывного оператора и докажем их равносильность указанному выше основному определению. Предварительно сделаем одно простое замечание.

Если из двух последовательностей x_n и y_n одна сходится слабо, а другая сильно соответственно к x_0 и y_0, а A — ограниченный линейный оператор, то

$$\lim_{n \to \infty} (Ax_n, y_n) = (Ax_0, y_0). \tag{69}$$

Это вытекает непосредственно из теоремы 1 [**132**] и того факта, что если $x_n \xrightarrow{\text{сл.}} x_0$, то $Ax_n \xrightarrow{\text{сл.}} Ax_0$ и если $x_n \Rightarrow x_0$, то $Ax_n \Rightarrow Ax_0$. Дадим теперь два новых определения вполне непрерывного оператора.

Определение 1. *Говорят, что линейный оператор* A *вполне непрерывен, если формула* (69) *имеет место для любых последовательностей* x_n *и* y_n, *слабо сходящихся к* x_0 *и* y_0.

Определение 2. *Говорят, что линейный оператор* A *вполне непрерывен, если из* $x_n \xrightarrow{\text{сл.}} x_0$ *следует* $Ax_n \Rightarrow Ax_0$.

Покажем, что эти определения равносильны. Пусть A удовлетворяет условию (69) для слабо сходящихся последовательностей x_n и y_n. Мы можем написать

$$\|Ax_n - Ax_0\|^2 = (Ax_n,\ Ax_n - Ax_0) - (Ax_0,\ Ax_n - Ax_0).$$

Если $x_n \xrightarrow{\text{сл.}} x_0$, то $Ax_n - Ax_0 \xrightarrow{\text{сл.}} 0$, и оба члена второй части, в силу (69), стремятся к нулю, т. е. $\|Ax_n - Ax_0\| \to 0$ или $Ax_n \Rightarrow Ax_0$. Таким образом, из первого определения вытекает второе. Положим теперь, что из $x_n \to x_0$ следует $Ax_n \Rightarrow Ax_0$. При этом формула (69) непосредственно следует из теоремы 1. Имея равносильность указанных двух определений, для доказательства равносильности их основному определению достаточно доказать, что основное определение равносильно определению 2. Положим, что A удовлетворяет определению 2 и x_n — ограниченная последовательность элементов. Мы можем выбрать подпоследовательность x_{n_k} так, что $x_{n_k} \xrightarrow{\text{сл.}} x$, и тем самым, в силу определения 2, $Ax_{n_k} \Rightarrow Ax$, т. е. множество Ax_n компактно, и из определения 2 следует основное определение. Положим наоборот, что A удовлетворяет основному определению, и пусть $x_n \xrightarrow{\text{сл.}} x_0$. Надо доказать, что $Ax_n \Rightarrow Ax_0$. Доказываем от обратного. Пусть Ax_n не $\Rightarrow Ax_0$, т. е. существует такая подпоследовательность значков, что $\|Ax_{n_k} - Ax_0\| \geqslant a > 0$. В силу основного определения множество Ax_{n_k} компактно, и можно считать, что Ax_{n_k} сильно сходится к некоторому элементу x', который, в силу $\|Ax_{n_k} - Ax_0\| \geqslant a > 0$, должен быть отличен от Ax_0. Но $x_{n_k} \xrightarrow{\text{сл.}} x_0$ и, следовательно, $Ax_{n_k} \xrightarrow{\text{сл.}} Ax_0$, а по предыдущему $Ax_{n_k} \Rightarrow x' \neq Ax_0$ и тем более $Ax_{n_k} \xrightarrow{\text{сл.}} x' \neq Ax_0$. Мы получили противоречие.

Таким образом, доказано, что новые определения вполне непрерывного оператора равносильны основному определению. В дальнейшем мы выясним понятие слабой сходимости в l_2 и L_2.

Теорема. *Если $A \to$ линейный оператор и A^*A вполне непрерывен, то и A вполне непрерывен.* Пусть $x_n\ (n = 1, 2, \ldots)$ — ограниченная последовательность элементов ($\|x_n\| \leqslant a$). По условию теоремы A^*Ax_n компактна, т. е. имеется сходящаяся подпоследовательность $A^*Ax_{n_k}$. Покажем, что и Ax_{n_k} — сходящаяся подпоследовательность, откуда и будет следовать теорема. Мы имеем

$$\|Ax_{n_k} - Ax_{n_l}\|^2 = (A^*A(x_{n_k} - x_{n_l}),\ x_{n_k} - x_{n_l}) \leqslant$$

$$\leqslant \|A^*Ax_{n_k} - A^*Ax_{n_l}\| \cdot \|x_{n_k} - x_{n_l}\| \leqslant 2a\|A^*Ax_{n_k} - A^*Ax_{n_l}\|.$$

Ввиду сходимости последовательности $A^*Ax_{n_k}$ правая часть $\to 0$ при n_k и $n_l \to \infty$, а, следовательно, и $\|Ax_{n_k} - Ax_{n_l}\| \to 0$, т. е. Ax_{n_k} — сходящаяся последовательность.

Следствие. *Если A вполне непрерывен, то и A^* вполне непрерывен.*

Если A вполне непрерывен, то вполне непрерывен оператор $AA^* = (A^*)^* A^*$, но, тогда, согласно теореме 2, примененной к A^*, и A^* — вполне непрерывный оператор.

Напомним следующее свойство последовательностей операторов: если последовательность A_n вполне непрерывных операторов сходится по норме к линейному оператору A, то A — также вполне непрерывный оператор [**106**]. Отметим специальный класс вполне непрерывных операторов.

Определение. *Линейный оператор D называется конечномерным, если он может быть представлен в виде*

$$Dx = \sum_{k=1}^{m} (x, v_k) u_k, \tag{70}$$

где u_k и v_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ — фиксированные элементы H.

Нетрудно видеть, что конечномерный оператор вполне непрерывен. Действительно, из $x_n \xrightarrow{\text{сл.}} x_0$ следует $(x_n, v_k) \to (x_0, v_k)$ и, в силу (70), $Dx_n \rightrightarrows Dx_0$.

Из сказанного выше непосредственно следует, что если A_n — последовательность конечномерных операторов, стремящаяся по норме к линейному оператору A, то A — вполне непрерывный оператор.

Мы покажем в следующем параграфе, что всякий вполне непрерывный оператор может быть представлен как предел по норме последовательности конечномерных операторов.

134. Пространства H и l_2. Пусть

$$z_1, z_2, z_3, \ldots \tag{71}$$

какая-либо полная ортонормированная система в H. Пользуясь ею, мы можем отобразить H биоднозначно в пространство l_2, элементами которого являются бесконечные последовательности комплексных чисел $(\xi_1, \xi_2, \ldots)$ при условии, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 \tag{72}$$

сходится [**121**]. Любой элемент $x \in H$ характеризуется своими коэффициентами Фурье: $\xi_k = (x, z_k)$, и имеет место представление

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k z_k. \tag{73}$$

Наоборот, если дан элемент $(\xi_1, \xi_2, \ldots)$ из l_2, то ряд (73) сходится в H и дает соответствующий элемент из H. Соответствие это

биоднозначно, причем скалярное произведение в H равно скалярному произведению соответствующих элементов l_2 [**60, 121**]:

$$(x,\ y) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \overline{\eta_k},$$

где x соответствует $(\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots)$ и y — $(\eta_1,\ \eta_2,\ \ldots)$. Тем самым $\|x\|$ равна норме соответствующего элемента в l_2 и сходимости в H и l_2 равносильны. Мы имеем, таким образом, изоморфное отображение H в l_2. Элементам z_k ортонормированной системы (71) соответствуют следующие элементы l_2:

$$(1,\ 0,\ 0,\ 0,\ \ldots);\ (0,\ 1,\ 0,\ 0,\ \ldots);\ (0,\ 0,\ 1,\ 0,\ \ldots);\ \ldots$$

Пусть $\xi\ (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ — некоторый элемент l_2 и $\xi^{(n)}\ (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, 0, \ldots)$ — урезанный элемент, у которого первые n-составляющих равны соответствующим составляющим ξ, а остальные равны нулю. Мы имеем

$$\|\xi - \xi_n\|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |\xi_k|^2,$$

и, в силу сходимости ряда (72), $\xi^{(n)} \Rightarrow \xi$ в l_2.

Пусть A — некоторый линейный оператор в H. Принимая во внимание его непрерывность и формулу (73), можем написать

$$y = Ax = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k A z_k. \tag{74}$$

Составляющие $(\eta_1,\ \eta_2,\ \ldots)$ элемента l_2, соответствующего элементу y, определятся формулой

$$\eta_l = (y,\ z_l) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k (Az_k,\ z_l). \tag{75}$$

Мы использовали при этом непрерывность скалярного произведения. Вводя числа

$$a_{lk} = (Az_k,\ z_l), \tag{76}$$

видим, что линейному оператору A в H соответствует в l_2 оператор

$$\eta_l = \sum_{k=1}^{\infty} a_{lk} \xi_k, \tag{77}$$

$$(l = 1,\ 2,\ \ldots)$$

который определяется бесконечной матрицей с элементами $a_{lk} = (Az_k, z_l)$. Сопряженному оператору A^* будет соответствовать матрица с элементами

$$a^*_{lk} = (A^*z_k, z_l) = (z_k, Az_l) = \overline{(Az_l, z_k)},$$

т. е.

$$a^*_{lk} = \overline{a_{kl}}. \tag{78}$$

Самосопряженный оператор характеризуется равенством

$$a_{kl} = \overline{a_{lk}}. \tag{79}$$

Введем множество L элементов H, представимых в виде

$$x = \sum_{k=1}^{m} \xi_k z_k,$$

где ξ_k — любые комплексные числа и m — фиксированное целое положительное число. Мы имеем $\xi_k = (x, z_k)$, и нетрудно показать, что L — подпространство. Ортогональное к нему подпространство M есть, очевидно, множество элементов x, представимых в виде

$$x = \sum_{k=m+1}^{\infty} \xi_k z_k,$$

где ξ_k — такие комплексные числа, что ряд

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} |\xi_k|^2 \tag{80}$$

сходится. Пространство H представимо в виде [**122**]:

$$H = L \oplus M. \tag{81}$$

Обозначая через P_L и P_M проекторы в L и M, имеем

$$E = P_L + P_M. \tag{82}$$

Пусть A — некоторый линейный оператор. Введем следующие два оператора:

$$A_1 = P_L A; \quad A_2 = P_M A. \tag{83}$$

В силу (82): $A = A_1 + A_2$. Поскольку $P_L Ax \in L$ при любом $x \in H$:

$$P_L Ax = \sum_{k=1}^{m} a_k z_k,$$

где

$$a_k = (P_L Ax, z_k) = (Ax, P_L z_k) = (Ax, z_k) = (x, A^* z_k),$$

т. е.

$$P_L A x = A_1 x = \sum_{k=1}^{m} (x,\ A^* z_k)\, z_k, \tag{84}$$

откуда следует, что $P_L A = A_1$ есть конечномерный оператор.

Совершенно аналогично имеем

$$A_2 x = \sum_{k=m+1}^{\infty} (Ax,\ z_k)\, z_k = \sum_{k=m+1}^{\infty} (x,\ A^* z_k)\, z_k. \tag{85}$$

Таким образом, элементу $A_2 x$ будет соответствовать элемент $\xi_1, \xi_2, \ldots$), составляющие которого определяются формулами

$$\xi_k = 0 \text{ при } k \leqslant m \text{ и } \xi_k = (Ax,\ z_k) = (x,\ A^* z_k) \text{ при } k > m. \tag{86}$$

Положим теперь, что A — вполне непрерывный оператор, и U есть множество нормированных элементов ($\|x\| = 1$). При этом, если $x \in U$, то Ax — компактное множество, и тем самым будет компактным и соответствующее множество в l_2. Составляющие элементов этого множества определяются формулой $\xi_k = (Ax,\ z_k)$, и, в силу компактности, мы можем утверждать, что при любом нормированном x существует такое положительное число C, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(Ax,\ z_k)|^2 \leqslant C$$

и что при любом заданном $\varepsilon > 0$ существует такое целое положительное число m_ε, что [92]

$$\sum_{k=m_\varepsilon+1}^{\infty} |(Ax,\ z_k)|^2 \leqslant \varepsilon^2.$$

Но из (85) следует, что

$$\|A_2 x\|^2 = \sum_{k=m+1}^{\infty} |(Ax,\ z_k)|^2,$$

и потому при любом заданном $\varepsilon > 0$ существует такое $m = m_\varepsilon$, что $\|A_2 x\| \leqslant \varepsilon$ при $\|x\| = 1$, т. е. $\|A_2\| \leqslant \varepsilon$. Мы пришли к следующей теореме.

Теорема 1. *Если A — вполне непрерывный оператор и $\varepsilon > 0$ — любое заданное число, то существует такое целое положительное число m, что для определенного выше оператора A_2 мы имеем $\|A_2\| \leqslant \varepsilon$.*

Взяв последовательность положительных чисел ε_n, стремящуюся к нулю, получим последовательность конечномерных операторов $A_1^{(\varepsilon_n)}$ такую, что $\|A - A_1^{(\varepsilon_n)}\|$ стремится к нулю, т. е. всякий вполне непрерывный оператор есть предел по норме конечномерных операторов.

Принимая во внимание сказанное в [**133**], мы можем утверждать, что следующее определение вполне непрерывного оператора равносильно исходному (линейный оператор, преобразующий всякое ограниченное множество в компактное).

Определение. *Линейный оператор называется вполне непрерывным, если он является пределом по норме последовательности конечномерных операторов.*

135. Линейные уравнения со вполне непрерывными операторами. Рассмотрим в пространстве H вопрос о разрешимости уравнений вида

$$x - Ax = y, \tag{87}$$

$$x - A^*x = y, \tag{88}$$

где A — вполне непрерывный оператор, A^* — сопряженный с ним, y — заданный элемент H и x — искомый. Как показал Ф. Рисс, основные теоремы теории интегральных уравнений (теоремы Фредгольма) остаются справедливыми для уравнений (87) и (88) не только в пространстве H, но, как мы указали в [**107**], и в пространствах типа B. Исследуем эти уравнения в H.

Фиксируем число m, входящее в построение операторов A_1 и A_2 предыдущего параграфа так, чтобы иметь $\|A_2\| < 1$. Тем самым и $\|A_2^*\| < 1$. Итак,

$$\|A_2\| = \|A_2^*\| < 1, \tag{89}$$

и уравнения (87) и (88) можно переписать в виде

$$(E - A_2)\,x - A_1x = y, \tag{90}$$

$$(E - A_2^*)\,x - A_1^*x = y. \tag{91}$$

В силу (89) операторы $(E - A_2)$ и $(E - A_2^*)$ имеют ограниченные обратные. [**131**]

Введем следующие обозначения:

$$\tilde{x} = (E - A_2)\,x;\ \tilde{y} = (E - A_2^*)^{-1}y. \tag{92}$$

Уравнение (90) переписываем, вводя $\tilde{x}$ вместо x, и к обеим частям (91) применяем оператор $(E - A_2^*)^{-1}$. Таким образом, получаем уравнения

$$\tilde{x} - B\tilde{x} = y, \tag{93}$$

$$x - B^*x = \tilde{y}, \tag{94}$$

где $\tilde{y}$, — заданный элемент и

$$B = A_1 (E - A_2)^{-1};\ B^* = (E - A_2^*)^{-1} A_1^*,$$

причем B^* — оператор, сопряженный с B. Уравнение (94) равносильно (91), и решение уравнения (90) сводится к решению уравнения (93) и формуле $x = (E - A_2)^{-1} \tilde{x}$. Таким образом, решение уравнений (90) и (91) сводится к решению уравнений (93) и (94). Напишем еще соответствующие однородные уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \tilde{x} - B\tilde{x} &= 0, \\ x - Bx^* &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{95}$$

Оператор $B = P_L A (E - A_2)^{-1}$ — конечномерный, и Bx выражается формулой (84), в которой A надо заменить на $A (E - A_2)^{-1}$. Матрица, соответствующая оператору B в l_2, будет иметь элементы:

$$a_{kl} = (P_L A (E - A_2)^{-1} z_l,\ z_k) = (A (E - A_2)^{-1} z_l,\ P_L z_k). \tag{96}$$

Но $P_L z_k = 0$ при $k > m$, и, следовательно, $a_{kl} = 0$ при $k > m$. Пусть $\tilde{\xi}_l$ и η_l — составляющие элементов l_2, соответствующих элементам $\tilde{x}$ и y из H. Уравнение (93) в l_2 принимает вид

$$\tilde{\xi}_k - \sum_{\substack{l=1 \\ (k=1,\ 2,\ \ldots,\ m)}}^{\infty} a_{kl} \tilde{\xi}_l = \eta_k, \tag{97}$$

$$\tilde{\xi}_k = \eta_k, \quad \underset{(k=m+1,\ m+2,\ \ldots),}{} \tag{98}$$

где $\tilde{\xi}_k$ — искомые и η_k — заданные числа. Таким образом, все $\tilde{\xi}_k$ при $k > m$ известны, и решение уравнения (93) сводится в l_2 к решению системы m уравнений с m неизвестными $\tilde{\xi}_k (k = 1,\ 2, \ldots,\ m)$:

$$\tilde{\xi}_k - \sum_{l=1}^{m} a_{kl} \tilde{\xi}_l = \eta_k + \sum_{l=m+1}^{\infty} a_{kl} \eta_l. \tag{99}$$

Оператору B^* соответствует матрица $a_{lk}^* = \bar{a}_{lk}$ [134], так что уравнение (94) в l_2 имеет вид

$$\xi_k - \sum_{\substack{l=1 \\ (k=1,\ 2,\ \ldots)}}^{m} \bar{a}_{lk} \xi_l = \tilde{\eta}_k, \tag{100}$$

где ξ_l и $\tilde{\eta}_l$ — составляющие элементов l_2, соответствующих элементам x и $\tilde{y}$ из H.

Каждому решению $(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \ldots, \xi_m^{(0)})$ первых m уравнений написанной системы

$$\xi_k - \sum_{\substack{l=1 \\ (k=1, 2, \ldots, m)}}^{m} \bar{a}_{lk}\xi_l = \tilde{\tau}_{lk} \tag{101}$$

соответствует одно определенное решение $(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \ldots, \xi_m^{(0)}, \xi_{m+1}^{(0)}, \ldots)$ всей системы (100), каковы бы ни были остальные $\tilde{y}_k$ $(k = m+1, m+2, \ldots)$, в котором остальные неизвестные ξ_k $(k = m+1, m+2, \ldots)$ определяются по формулам

$$\xi_k = \tilde{\tau}_{lk} + \sum_{\substack{l=1 \\ (k=m+1,\ m+2,\ \ldots).}}^{m} \bar{a}_{lk}\xi_l \tag{102}$$

Отметим, что $\tilde{\xi}_k$, получаемые из (98) и (99) и ξ_k из (101) и (102), таковы, что ряды с общим членом $|\tilde{\xi}_k|^2$ и $|\xi_k|^2$ сходятся. Для $\tilde{\xi}_k$ это непосредственно следует из (98), а для ξ_k — из (102), если принять во внимание сходимость рядов по k с общим членом $|\tilde{\tau}_{lk}|$ и $|\bar{a}_{lk}|^2$. Последнее следует из того, что, в силу (96),

$$\bar{a}_{lk} = ((E - A_2^*)^{-1} A^* P_L z_l,\ z_k).$$

В однородном случае надо положить $y_k = \tilde{y}_k = 0$. Однородная система (99) переписывается в виде

$$\tilde{\xi}_k - \sum_{\substack{l=1 \\ (k=1, 2, \ldots, m)}}^{m} a_{kl}\tilde{\xi}_l = 0 \tag{103}$$

и $\tilde{\xi}_k = 0$ при $k > m$; система (101) — в виде

$$\xi_k - \sum_{\substack{l=1 \\ (k=1, 2, \ldots, m)}}^{m} \bar{a}_{lk}\xi_l = 0 \tag{104}$$

и

$$\xi_k = \sum_{l=1}^{m} \bar{a}_{lk}\xi_l \text{ при } k > m. \tag{105}$$

Отметим, что линейно независимые решения конечной однородной системы (104) порождают, в силу (105), линейно независимые решения всей однородной системы бесконечного числа уравнений, соответствующей однородному уравнению (94) в H. Линейно зависимые решения системы (104) порождают линейно зависимые решения всей системы. Принимая во внимание основные результаты, касающиеся решения систем уравнений, и тот факт, что таблицы коэффициентов

систем (103) и (104) имеют одинаковый ранг, мы получаем следующую теорему:

Теорема 1. *Неоднородные уравнения* (87) *и* (88) *разрешимы при любых правых частях y тогда и только тогда, когда соответствующие однородные уравнения* ($y=0$) *имеют только нулевое решение. В этом случае решение уравнений* (87) *и* (88) *при любом y единственно. Однородные уравнения $x-Ax=0$ и $x-A^*x=0$ имеют одинаковое конечное число линейно независимых решений.*

Рассмотрим теперь неоднородное уравнение (87) в том случае, когда однородное уравнение имеет решения, отличные от нулевого, и докажем для этого случая теорему.

Теорема 2. *Для того чтобы в рассматриваемом случае неоднородное уравнение* (87) *имело решения, необходимо и достаточно следующее: свободный член y должен быть ортогонален ко всем решениям однородного уравнения*

$$x-A^*x=0. \tag{106}$$

Необходимость. Проводим доказательство, не прибегая к l_2. Пусть уравнение (87) имеет решение x_0, т. е. $x_0-Ax_0=y$ и пусть z — какое-либо решение уравнения (106), т. е. $z-A^*z=0$. Надо доказать, что $(y,\ z)=0$. Имеем

$$(y,\ z)=(x_0-Ax_0,\ z)=(x_0,\ z-A^*z)=(x_0,\ 0)=0.$$

Достаточность. Дано, что y ортогонально ко всем решениям (106), и надо доказать, что уравнение (87) имеет решения. Переходя в l_2, мы имеем по условию

$$\sum_{k=1}^{\infty}\eta_k\overline{\xi}_k=0, \tag{107}$$

где $(\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_m)$ — любое решение системы (104) и ξ_k при $k>m$ определяются формулами (105). Подставляя эти выражения ξ_k при $k>m$, переписываем (107) в виде

$$\sum_{k=1}^{m}\Big(\eta_k+\sum_{l=m+1}^{\infty}a_{kl}\eta_l\Big)\overline{\xi}_k=0.$$

Принимая во внимание, что суммы, стоящие в круглых скобках, суть правые части уравнений (99), а $(\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_m)$ — любое решение системы (104), мы можем утверждать, что система (99) имеет решения [**III$_1$; 15**], тем самым и уравнение (87) имеет решения, и теорема доказана.

Рассмотрим теперь уравнение

$$x-\mu Ax=y, \tag{108}$$

где A — вполне непрерывный оператор и μ — комплексный параметр. Оператор μA также вполне непрерывен, и к уравнению (108) применимы доказанные выше теоремы. В частности, уравнение (108) разрешимо при любом y (и притом однозначно), если однородное уравнение

$$x - \mu A x = 0 \text{ или } Ax = \lambda x \left(\lambda = \frac{1}{\mu}\right) \tag{109}$$

имеет только нулевое решение (при $\mu = 0$ это очевидно). Если уравнение (109) имеет решения, отличные от нулевого, то соответствующее значение λ есть собственное значение оператора A. Докажем теперь теорему.

Теорема 3. *Может существовать лишь конечное число собственных значений, удовлетворяющих условию* $|\lambda| \geqslant r$, *где* r — *любое заданное положительное число.* Иначе говоря, нам надо доказать, что может существовать лишь конечное число значений μ, удовлетворяющих условию $|\mu| \leqslant \frac{1}{r}$, при которых уравнение (109) имеет ненулевые значения. Доказательство этого утверждения непосредственно связано с той конструкцией, которую мы использовали при доказательстве теоремы 1.

Положим, как и там,

$$A = A_1 + A_2 = P_L A + P_M A,$$

причем фиксируем m настолько большим, чтобы иметь неравенство $\frac{1}{r}\|A_2\| = q < 1$. При этом оператор $(E - \mu A_2)$ имеет ограниченный обратный при $|\mu| \leqslant \frac{1}{r}$, и он представим рядом

$$(E - \mu A_2)^{-1} = E + \mu A_2 + \mu^2 A_2^2 + \ldots, \tag{110}$$

сходящимся по норме равномерно относительно μ при $|\mu| \leqslant \frac{1}{r} + \varepsilon$ [131], где ε — достаточно малое положительное число. Значения μ, при которых уравнение имеет ненулевые решения, мы получим, если приравняем нулю определитель системы (103), т. е. определитель Δ с элементами $\delta_{kl} - a_{kl}$, где $\delta_{kl} = 0$ при $k \neq l$ и $\delta_{kl} = 1$ при $k = l$, и

$$a_{kl} = (P_L \mu A (E - \mu A_2)^{-1} z_l, \; z_k).$$

Принимая во внимание сходимость ряда (110), сказанное выше о предельном переходе для последовательности операторов и непрерывность скалярного произведения, можем утверждать, что a_{kl} — регулярные функции в круге $|\mu| \leqslant \frac{1}{r}$. Тем же свойством обладает, очевидно, и определитель Δ, а потому уравнение $\Delta = 0$ может иметь лишь конечное число корней, удовлетворяющих условию $|\mu| \leqslant \frac{1}{r}$, что и требовалось доказать.

Доказанную теорему иначе можно формулировать так: собственные значения λ вполне непрерывного оператора могут иметь предельной точкой только точку $\lambda = 0$.

Из сказанного выше следует, что ранг всякого собственного значения λ, удовлетворяющего условию $|\lambda| \leqslant \frac{1}{r}$, не превышает числа m, входящего в систему (103) при условии $\frac{1}{r}\|A_2\| = q < 1$. Если A — несамосопряженный оператор, то он может и не иметь собственных значений [**IV; 13**].

136. Вполне непрерывные самосопряженные операторы. Мы исследовали свойства спектра и разложение по собственным функциям вполне непрерывного самосопряженного оператора в [**IV; 38, 39**]. Все доказательства переносятся без всяких изменений и для пространства H. Но в H мы постулировали полноту пространства, которой не пользовались в доказательствах IV тома. Тем самым для H мы получим новые результаты. Сначала сформулируем теорему, которая получается из результатов IV тома: напомним, что все собственные значения самосопряженного оператора вещественны.

Теорема 1. *Всякий самосопряженный вполне непрерывный оператор A, отличный от оператора аннулирования, имеет по крайней мере одно собственное значение, отличное от нуля. Все собственные значения A имеют конечный ранг и вне любого промежутка $[-\varepsilon, +\varepsilon]$, где $\varepsilon > 0$, может находиться лишь конечное число собственных значений. Всякий элемент вида Ax $(x \in H)$ разлагается в ряд Фурье по ортогональной нормированной системе собственных элементов x_k, соответствующих собственным значениям, отличным от нуля:*

$$Ax = \sum_k (Ax,\ x_k)\, x = \sum_k (x,\ x_k)\, \lambda_k x_k. \tag{111}$$

Сумма (111) может содержать как конечное, так и бесконечное число слагаемых. Напомним еще, что собственные значения λ_k и собственные элементы x_k, образующие ортогональную нормированную систему, получаются в результате решения последовательных экстремальных задач для квадратичной формы (Ax, x). На этом и основано доказательство основной теоремы в IV томе.

Положим, что сумма (111) содержит бесконечное число слагаемых. Пусть x — любой элемент H. Составим разность:

$$z = x - \sum_{k=1}^{\infty} (x,\ x_k)\, x_k. \tag{112}$$

Написанный ряд сходится [121]. В силу (111)

$$A\left[x-\sum_{k=1}^{\infty}(x,\ x_k)\,x_k\right]=0.$$

Отсюда видим, что z удовлетворяет уравнению

$$Az=0,\ \text{или}\ Az=Oz, \tag{113}$$

т. е. z или есть нулевой элемент или собственный элемент A, соответствующий собственному значению $\lambda=0$. Пусть $z_1,\ z_2,\ldots$ — полная ортонормированная система собственных элементов, соответствующих собственному значению $\lambda=0$. Если $\lambda=0$ не есть собственное значение, то таких элементов не будет. Если $\lambda=0$ собственное значение, то оно может быть как конечного, так и бесконечного ранга. Принимая во внимание, что z есть решение уравнения (113), можем утверждать, что

$$x-\sum_{k=1}^{\infty}(x,\ x_k)\,x_k=\sum_{l}c_l z_l, \tag{114}$$

где

$$c_k=(x-\sum_{k=1}^{\infty}(x,\ x_k)\,x_k,\ z_l),$$

или, принимая во внимание, что $(x_k,\ z_l)=0$ [128], получим $c_k=(x,\ z_l)$, и из (114) следует, что любой элемент x разлагается в ряд Фурье по собственным элементам A, если принять во внимание собственные элементы, соответствующие собственному значению $\lambda=0$. Мы доказали таким образом теорему.

Теорема 2. *Ортогональная нормированная система собственных элементов вполне непрерывного самосопряженного оператора есть полная система.*

Иначе говоря, пользуясь терминологией из [128], можем сказать, что *вполне непрерывный самосопряженный оператор имеет чисто точечный спектр.*

Все приведенные выше рассуждения применимы и для того случая, когда сумма (111) состоит из конечного числа слагаемых. Если $\lambda=0$ не есть собственное значение, то сумма (111) содержит бесконечное число слагаемых (аксиома *3*), и для любого элемента H имеем

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}(x,\ x_k)\,x_k. \tag{115}$$

Замечание. Как и в случае интегральных уравнений [IV; 29], имеем для самосопряженного вполне непрерывного оператора A

следующий результат. Если λ отлично от собственного значения и нуля, то неоднородное уравнение

$$Ax = \lambda x + y \tag{116}$$

при любом заданном y имеет единственное решение, определяемое формулой

$$x = -\frac{1}{\lambda} y + \sum_k \frac{\lambda_k (y, x_k)}{\lambda (\lambda_k - \lambda)} x_k. \tag{117}$$

Если λ совпадает с собственным значением и выполнено условие разрешимости уравнения, т. е. y ортогонально ко всем соответствующим собственным элементам, то общее решение уравнения (116) дается формулой (117), в которой все множители при x_k, у которых знаменатель равен нулю, надо заменить произвольными постоянными. Положим, что имеются как положительные, так и отрицательные собственные значения. Пронумеруем как те, так и другие в порядке невозрастающего абсолютного значения, и первые обозначим через λ_k^+, а вторые — через λ_k^-, а соответствующие собственные функции через x_k^+ и x_k^-. Принимая во внимание разложение (111), получим

$$(Ax, x) = \sum_k \lambda_k^+ |(x, x_k^+)|^2 + \sum_k \lambda_k^- |(x, x_k^-)|^2, \tag{118}$$

отсюда непосредственно следует новая формулировка экстремальных свойств λ_k и x_k, о которых мы говорили выше [ср. **IV; 26**].

Теорема 3. *Собственное значение λ_1^+ есть наибольшее значение (Ax, x) при $\|x\| = 1$, и оно достигается при $x = x_1^+$, а собственное значение $\lambda_n^+ (n > 1)$ есть наибольшее значение (Ax, x) при условиях*

$$\|x\| = 1 \quad \text{и} \quad (x, x_1^+) = (x, x_2^+) = \ldots = (x, x_{n-1}^+) = 0,$$

и оно достигается при $x = x_n^+$.

Аналогично λ_1^- есть наименьшее значение (Ax, x) при $\|x\| = 1$ и оно достигается при $x = x_1^-$, а $\lambda_n^- (n > 1)$ есть наименьшее значение (Ax, x) при условиях

$$\|x\| = 1 \text{ и } (x, x_1^-) = (x, x_2^-) = \ldots = (x, x_{n-1}^-) = 0,$$

и оно достигается при $x = x_n^-$.

Докажем теперь теорему Куранта [**IV; 187**] для пространства H.

Теорема 4. *Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ — любые фиксированные элементы H и $m(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1})$ — точная верхняя граница значений (Ax, x) при условиях*

$$\|x\| = 1 \text{ и } (x, z_1) = (x, z_2) = \ldots = (x, z_{n-1}) = 0. \tag{119}$$

При этом μ_n^+ есть наименьшее из чисел $m(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1})$ при всех возможных выборах элементов $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$. Доказательство аналогично доказательству из [**IV; 187**]. Мы имеем

$m(x_1^+, x_2^+, \ldots, x_{n-1}^+) = \mu_n^+$, и нам остается доказать, что при любом выборе z_k $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$

$$m(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}) \geqslant \mu_n^+. \tag{120}$$

Будем искать элемент x, подчиняющийся условиям (119), в виде

$$x = \sum_{k=1}^{n} c_k x_k^+. \tag{121}$$

Условия (119) запишутся в виде следующих уравнений для c_k:

$$\sum_{k=1}^{n} c_k (x_k^+, z_s) = 0, \quad (s = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{122}$$

$$\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 = 1. \tag{123}$$

Однородная система (122) $(n-1)$-уравнений с n-неизвестными c_k имеет решения, отличные от нулевого. Добавляя к такому решению постоянный множитель, можем удовлетворить и условию (123). Таким образом, мы нашли элемент вида (121), удовлетворяющий условиям (119). Для этого элемента имеем

$$(Ax, x) = \left(\sum_{k=1}^{n} c_k \lambda_k^+ x_k^+, \sum_{k=1}^{n} c_k x_k^+ \right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^+ |c_k|^2.$$

Принимая во внимание, что $\mu_1^+ \geqslant \mu_2^+ \geqslant \ldots \geqslant \mu_n^+$ и равенство (123) получаем $(Ax, x) \geqslant \mu_n^+$, причем x удовлетворяет условиям (119). Тем более $m(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1})$, равное точной верхней границе (Ax, x) при условиях (119), не меньше μ_n^+. Тем самым неравенство (120) и теорема доказаны. Совершенно аналогично формулируется теорема и для λ_n^-.

Замечание. Нетрудно показать, что *точная верхняя граница* $m(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1})$ *значений* (Ax, x) *достигается на некотором элементе* x_0, *удовлетворяющем условиям* (119).

Действительно, по условию имеется такая последовательность элементов y_n, удовлетворяющих условиям (119), что $(Ay_n, y_n) \to m(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1})$. Принимая во внимание, что $|y_n| = 1$, можем считать, что y_n слабо сходятся к некоторому элементу x_0, причем из слабой сходимости следует [**132**]:

$$|x_0| \leqslant 1 \text{ и } (x_0, z_1) = (x_0, z_2) = \ldots = (x_0, z_{n-1}) = 0.$$

В силу полной непрерывности A мы имеем $(Ax_0, x_0) = m(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1})$. Остается доказать, что $|x_0| = 1$. Из $m(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}) \geqslant \mu_n^+$ следует, что $m(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}) > 0$ и

$\|x_0\| > 0$. Если $\|x_0\| < 1$, то, вводя нормированный элемент $y_0 = \frac{1}{\|x_0\|} x_0$, удовлетворяющий условиям (119), мы получили бы

$$(Ay_0, y_0) = \frac{1}{\|x_0\|^2} A(x_0, x_0) = \frac{m(z_1, z_2, \ldots z_{n-1})}{\|x_0\|^2} > m(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}).$$

Но из определения $m(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1})$ следует, что $(Ay_0, y_0) \leqslant m(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1})$. Полученное противоречие показывает, что $\|x_0\| = 1$, и утверждение о том, что (Ax, x) достигает своей точной верхней границы $m(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1})$, — доказано. Принимая во внимание теорему 2 из [**132**], можем утверждать, что $y_n \Rightarrow x_0$.

Теорема применяется при сравнении собственных значений различных операторов [ср. **IV; 188**].

Отметим еще одно непосредственное следствие формулы (118) [ср. **IV; 26**]. Для того чтобы вполне непрерывный самосопряженный оператор A был положительным: $((Ax, x) \geqslant 0$ при $x \in H)$, необходимо и достаточно, чтобы он не имел отрицательных собственных значений.

Докажем теперь, что вполне непрерывный самосопряженный оператор вполне определяется тем характером спектра, который описан в теоремах 1 и 2.

Теорема 5. *Пусть линейный самосопряженный оператор обладает следующими свойствами: ортогональная нормированная система его собственных элементов x_k $(k = 1, 2, \ldots)$ — полная, все собственные значения λ_k, отличные от нуля, имеют конечный ранг и вне любого промежутка $[-\varepsilon, +\varepsilon]$, где $\varepsilon > 0$, может находиться лишь конечное число собственных значений. При этом оператор A — вполне непрерывный.*

По условию теоремы мы можем расположить λ_k в порядке невозрастающего абсолютного значения

$$|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant |\lambda_3| \geqslant \ldots \tag{124}$$

и $\lambda_n \to 0$ при $n \to \infty$. Напомним, что если собственные значения имеют ранг r, то оно фигурирует в последовательности (124) r раз (собственное значение $\lambda = 0$ может иметь бесконечный ранг).

Для любого элемента $x \in H$ мы имеем, в силу полноты системы x_k, разложение в ряд Фурье

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \tag{125}$$

и

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \lambda_k x_k. \tag{126}$$

Пусть U — ограниченное множество элементов x, т. е. существует такое положительное число l, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \leqslant l^2, \tag{127}$$

если $x \in U$. Нам надо доказать, что множество Ax компактно. Ограниченность множества следует из неравенства $\|Ax\| \leqslant n_A l$. Остается доказать [92], что если выполнено (127), то при любом заданном $\varepsilon > 0$ существует такое целое положительное m_ε, что

$$\sum_{k=m_\varepsilon}^{\infty} |a_k|^2 \lambda_k^2 \leqslant \varepsilon^2.$$

В силу $\lambda_n \to 0$ при $n \to \infty$ существует такое n_ε, что $|\lambda_n| < \frac{\varepsilon}{l}$ при $n \geqslant n_\varepsilon$. При этом

$$\sum_{k=n_\varepsilon}^{\infty} |a_k|^2 \lambda_k^2 < \frac{\varepsilon^2}{l^2} \sum_{k=m_\varepsilon}^{\infty} |a_k|^2 \leqslant \frac{\varepsilon^2}{l^2} l^2 = \varepsilon^2,$$

и теорема доказана.

137. Унитарные операторы. Наряду с самосопряженными операторами рассмотрим еще один класс линейных операторов.

Определение. *Линейный оператор*

$$y = Ux \tag{128}$$

называется унитарным, если он не меняет нормы элементов, т. е. $\|Ux\| = \|x\|$, *и преобразует* H *на все* H, *т. е. для любого* $y \in H$ *существует прообраз* x, *т. е. такой элемент* x, *что имеет место формула* (128).

Отметим, что из этого определения следует, что норма унитарного оператора равна единице. В следующей теореме указаны основные свойства унитарных операторов.

Теорема 1. *Унитарный оператор преобразует* H *биодно-значно в* H, *имеет ограниченный обратный оператор, определяемый формулой*

$$U^{-1} = U^*, \tag{129}$$

т. е.

$$UU^* = U^*U = E, \tag{130}$$

причем U^{-1} *— также унитарный оператор, и* U *не меняет скалярного произведения. Условие* (130) *достаточно для того, чтобы* U *было унитарным оператором.*

Если x_1 и x_2 — два элемента H, то, по определению унитарного оператора, $\| Ux_1 - Ux_2 \| = \| U(x_1 - x_2) \| = \| x_1 - x_2 \|$, а потому, если $Ux_1 = Ux_2$, то и $x_1 = x_2$, т. е. для различных элементов x формула (128) дает и различные y, т. е. U определяет биоднозначное преобразование H в себя. Таким образом, существует ограниченный обратный оператор U^{-1}, определенный во всем H, причем в силу того, что U не меняет нормы, имеем $\| U^{-1}y \| = \| y \|$, т. е. оператор U^{-1} также унитарен. Принимая во внимание неизменность нормы, можем написать $(Ux,\ Ux) = (x,\ x)$, откуда непосредственно следует равенство

$$(U^*Ux,\ x) = (x,\ x).$$

Но равенство квадратичных функционалов равносильно равенству входящих в них операторов, т. е. $U^*U = E$, откуда следует, что U^* обратен U слева, и, поскольку для U существует ограниченный обратный оператор, мы имеем также $UU^* = E$, и (129) доказано. Утверждение о том, что U не меняет скалярного произведения, непосредственно следует из равенств

$$(Ux,\ Uy) = (U^*Ux,\ y) = (x,\ y). \tag{131}$$

Наконец, покажем, что из (130) вытекает, что U — унитарный оператор. В силу (130) U имеет ограниченный обратный оператор, определяемый формулой (129). Остается доказать, что U не меняет нормы. Это следует, в силу (130), из (131) при $y = x$.

Отметим еще, что если U_1 и U_2 — два унитарных оператора, то и их произведение U_1U_2 есть также унитарный оператор. Это непосредственно следует из того, что если U_1 и U_2 преобразуют биоднозначно H в H и не меняют нормы, то такие же свойства имеет, очевидно, и их произведение. Таким образом оператор, обратный унитарному, унитарен, и произведение унитарных операторов есть унитарный оператор, т. е. унитарные операторы образуют группу.

Пусть

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots \tag{132}$$

— замкнутая ортогональная и нормированная система. Применяя к ней унитарное преобразование U, получим, в силу доказанных свойств U, ортогональную нормированную систему

$$y_1 = Ux_1;\quad y_2 = Ux_2;\quad y_3 = Ux_3;\ \ldots \tag{133}$$

Для любого вектора x имеем разложение по элементам системы

$$x = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots \tag{134}$$

и тем самым для преобразованного элемента Ux имеем разложение по элементам системы (133) с теми же коэффициентами:

$$Ux = a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3 + \ldots \tag{135}$$

Элемент Ux может быть любым элементом из H, и, следовательно, система (133) также замкнута. Наоборот, если имеются две замкнутые ортогональные, нормированные системы x_k и y_k $(k=1, 2, \ldots)$, и мы определим оператор U для любого элемента x, имеющего представление (134), формулой (135), то такой оператор преобразует биоднозначно H в H и не меняет нормы

$$\|Ux\|^2 = \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2,$$

т. е. такой оператор U унитарен. Таким образом, всякий унитарный оператор может быть определен при помощи преобразования элементов одной замкнутой ортогональной нормированной системы в элементы другой такой же системы.

Пусть A — некоторый линейный оператор и $y = Ax$. Возьмем какой-либо унитарный оператор U и положим $y' = Uy$ и $x' = Ux$. В силу $y = Ax$ мы можем выразить y' через x' по формуле

$$y' = (UAU^{-1})\, x', \tag{136}$$

и говорят, что оператор $B = UAU^{-1}$ унитарно эквивалентен A. Из написанной формулы следует $A = U^{-1}BU$, откуда видно, что если B унитарно эквивалентен A, то и A унитарно эквивалентен B. Если P — проектор в подпространство L_P, то UPU^{-1} есть, очевидно, проектор в подпространство, получаемое применением U к подпространству L_P. Если x_0 — собственный элемент A, соответствующий собственному значению λ_0, т. е. $Ax_0 = \lambda_0 x_0$, то, обозначая $x_0' = Ux_0$, имеем, очевидно, $(UAU^{-1})\, x_0' = \lambda_0 x_0'$, т. е. унитарно эквивалентные операторы имеют одинаковые собственные значения, а собственные элементы этих операторов связаны соответствующим унитарным преобразованием. Пользуясь (129), легко проверить, что если A самосопряженный оператор, то и B самосопряженный оператор.

Теорема 2. *Собственные значения унитарного оператора по модулю равны единице, а собственные элементы, соответствующие различным собственным значениям, взаимно ортогональны.*

Путь U — унитарный оператор и x_0 — его собственный элемент, соответствующий собственному значению λ_0, т. е. $Ux_0 = \lambda_0 x_0$. Принимая во внимание, что U не меняет нормы, можем написать

$$(x_0,\ x_0) = (Ux_0,\ Ux_0) = (\lambda_0 x_0,\ \lambda_0 x_0) = |\lambda_0|^2 (x_0,\ x_0),$$

т. е. $\|x_0\| = |\lambda_0|\, \|x_0\|$, откуда и следует, в силу $\|x_0\| \neq 0$, что $|\lambda_0| = 1$. Пусть x_0 и x_1 — собственные элементы, соответствующие различным собственным значениям λ_0 и λ_1, т. е. $Ux_0 = \lambda_0 x_0$ и $Ux_1 = \lambda_1 x_1$.

Принимая во внимание, что U не меняет скалярного произведения, можем написать

$$(x_0,\ x_1) = (Ux_0,\ Ux_1) = (\lambda_0 x_0,\ \lambda_1 x_1) = \lambda_0\overline{\lambda}_1\,(x_0,\ x_1).$$

Если бы оказалось, что $(x_0,\ x_1) \neq 0$, то из написанного равенства следовало бы, что $\lambda_0\overline{\lambda}_1 = 1$. Но, в силу доказанного выше, $|\lambda_0| = 1$ и, следовательно, $\overline{\lambda}_1 = 1$: $\lambda_0 = \overline{\lambda}_0$, т. е. $\lambda_1 = \lambda_0$, что нелепо, ибо λ_0 и λ_1, по условию, различны. Введем еще один класс операторов.

Определение. *Линейный оператор V называется изометрическим, если он не меняет нормы элементов, т. е. $\|Vx\| = \|x\|$ при $x \in H$.*

Как всякий линейный оператор V определен во всем H, но не требуется, чтобы V преобразовало H во все H, и изометрический оператор может и не быть унитарным. Дадим этому пример. Пусть, как и выше, x_k $(k = 1,\ 2,\ \ldots)$ — замкнутая ортонормированная в H система, так что всякий элемент x представим своим рядом Фурье (134). Определим V формулой

$$Vx = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_{k+1}. \tag{137}$$

Очевидно, что V — линейный оператор и

$$\|Vx\|^2 = \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2.$$

Из (137) следует, что V преобразует H биоднозначно в подпространство элементов, ортогональных x_1.

138. Абсолютная норма оператора. Введем теперь новое понятие о норме линейного оператора. Пусть A — линейный оператор, а x_k и y_k $(k = 1, 2, \ldots)$ — две какие-либо замкнутые ортонормированные в H системы. Составим следующую сумму неотрицательных слагаемых:

$$\sum_{p,\ q=1}^{\infty} (Ax_p,\ y_q)\,(y_q,\ Ax_p) = \sum_{p,\ q=1}^{\infty} |(Ax_p,\ y_q)|^2. \tag{138}$$

Положительное значение корня квадратного из этой суммы обозначим $N(A;\ x_p,\ y_q)$. Эта величина может равняться и $(+\infty)$. Покажем, что она не зависит от выбора ортонормированных систем x_p и y_q. Принимая во внимание, что $(Ax_p,\ y_q)$ суть коэффициенты Фурье элемента Ax_p относительно системы y_q, можем написать вместо (138), в силу уравнения замкнутости,

$$N^2(A;\ x_p,\ y_q) = \sum_{p=1}^{\infty} \|Ax_p\|^2. \tag{139}$$

С другой стороны, принимая во внимание, что $(Ax_p, y_q) = (x_p, A^*y_q)$, получим

$$N^2(A; x_p, y_q) = N^2(A^*; y_q, x_p) = \sum_{q=1}^{\infty} \| A^*y_q \|^2. \tag{140}$$

Из уравнения (139) следует, что $N^2(A; x_p, y_q)$ не зависит от выбора системы y_q, а из (140) следует, что эта величина не зависит от выбора системы x_p, и, таким образом, вместо $N^2(A; x_p, y_q)$ естественно писать просто $N^2(A)$. Положительное число $N(A)$ назовем абсолютной нормой оператора A. Эта норма может равняться $(+\infty)$. Принимая во внимание (139) и (140) и независимость $N(A)$ от выбора системы x_p и y_q, получим

$$N(A) = N(A^*). \tag{141}$$

Далее формула

$$N^2(A+B) = \sum_{p=1}^{\infty} \| Ax_p + Bx_p \|^2$$

и неравенство (107) из [59] дают непосредственно

$$N(A+B) \leqslant N(A) + N(B). \tag{142}$$

Пусть U — унитарный оператор. При этом $U^{-1}x_p$ образуют замкнутую ортогональную нормированную систему и $\| UAz \| = \| Az \|$. Отсюда следует, в силу (139),

$$N(UAU^{-1}) = N(A), \tag{143}$$

т. е. унитарно эквивалентные операторы имеют одну и ту же абсолютную норму. Положим, что $N(A)$ конечно и пусть x — какой-либо нормированный элемент. Мы можем принять его за первый элемент в ортогональной нормированной системе и при этом из формулы (139) получим $N^2(A) \geqslant \| Ax \|$, т. е.

$$\| Ax \| \leqslant N(A) \quad \text{при} \quad \| x \| = 1,$$

откуда следует, что обычная норма оператора $\leqslant$ его абсолютной нормы.

Теорема. *Если абсолютная норма оператора A конечна, то A — вполне непрерывный оператор, и если, кроме того, A — самосопряженный оператор, то имеет место формула*

$$N^2(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2, \tag{144}$$

где λ_k — собственные значения A (кратные входят несколько раз).

Пусть U — какое-либо ограниченное множество. Нам надо доказать, что если $N(A) < +\infty$, то множество Ax, где $x \in U$, компактно. По условию существует такое положительное число l, что $\| x \| \leqslant l$, если $x \in U$. Ограниченность множества A непосредственно следует из того, что $\| Ax \| \leqslant n_A l$. Вводя какую-либо замкнутую ортонормированную систему y_k $(k = 1, 2, \ldots)$, преобразуем H в l_2, и нам остается доказать, что при любом заданном $\varepsilon > 0$ существует такое целое положительное число n_ε, что

$$\sum_{k=n_\varepsilon}^{\infty} | (Ax, y_k) |^2 \leqslant \varepsilon^2. \tag{145}$$

Мы имеем

$$\sum_{k=n_\varepsilon}^{\infty} |(Ax, y_k)|^2 = \sum_{k=n_\varepsilon}^{\infty} |(x, A^*y_k)|^2 \leqslant l^2 \sum_{k=n_\varepsilon}^{\infty} \|A^*y_k\|^2.$$

Но, в силу $N(A) < +\infty$, ряд (140) сходится и существует такое n_ε (не зависящее от выбора $x \in U$), что

$$\sum_{k=n_\varepsilon}^{\infty} \|A^*y_k\|^2 \leqslant \frac{\varepsilon^2}{l^2},$$

откуда следует (145), и доказано, что A — вполне непрерывный оператор. Если A — самосопряженный оператор, то выберем за y_k замкнутую ортонормированную систему его собственных элементов, так что $Ay_k = \lambda_k y_k$ и $\|Ay_k\|^2 = \|A^*y_k\|^2 = \lambda_k^2$. При этом, в силу (140), мы получаем формулу (144), и конечность величины $N(A)$ равносильна сходимости ряда, стоящего в правой части (144).

Мы покажем в дальнейшем, что если A — самосопряженный положительный оператор, т. е. $(Ax, x) \geqslant 0$ при $x \in H$, то существует линейный положительный оператор B такой, что $B^2 = A$. Обычно обозначают $B = \sqrt{A}$. Пользуясь этим оператором, мы введем понятие следа линейного положительного вполне непрерывного самосопряженного оператора.

$$N^2(B) = \sum_{p=1}^{\infty} \|Bx_p\|^2 = \sum_{p=1}^{\infty} (Bx_p, Bx_p) = \sum_{p=1}^{\infty} (B^2x_p, x_p) = \sum_{p=1}^{\infty} (Ax_p, x_p).$$

Отсюда мы видим, что для самосопряженного положительного оператора сумма

$$\sum_{p=1}^{\infty} (Ax_p, x_p)$$

не зависит от выбора системы x_p. Эту сумму называют следом оператора A и обозначают символом $Sp(A)$. Из предыдущих вычислений следует, что

$$Sp(A) = N^2(\sqrt{A}) = \sum_{p=1}^{\infty} (Ax_p, x_p).$$

Если A имеет чисто точечный спектр и мы возьмем за x_p замкнутую ортогональную нормированную систему собственных элементов A, то получим, в силу $Ax_p = \mu_p x_p$,

$$Sp(A) = \sum_{p=1}^{\infty} \mu_p.$$

139. Операции над подпространствами. Этот и следующий параграфы посвящены изложению операций над подпространствами и свойств операции проектирования. Это будет нам необходимо в дальнейшем при изложении теории самосопряженных операторов.

Пусть L_k $(k=1, 2, \ldots, m)$ — попарно ортогональные подпространства. Введем понятие об их сумме [ср. **122**]:

$$L = L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_m. \tag{146}$$

Через L мы обозначаем множество элементов x вида

$$x = x_1 + x_2 + \ldots + x_m, \tag{147}$$

где $x_k \in L_k$. Из ортогональности L_k следует, что $x_k = P_{L_k} x$ $(k=1, 2, \ldots, m)$, и имеет место равенство

$$\|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \ldots + \|x_m\|^2.$$

Нетрудно показать, что L — подпространство. Оно называется ортогональной суммой подпространства L_k. Рассмотрим теперь бесконечную сумму попарно ортогональных подпространств:

$$L = L_1 \oplus L_2 \oplus L_3 \oplus \ldots \tag{148}$$

Через L обозначаем множество элементов x, представимых в виде суммы сходящегося ряда

$$x = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots, \tag{149}$$

где $x_k \in L_k$. Написанное равенство равносильно следующему [**122**]:

$$\|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \|x_3\|^2 + \ldots, \tag{150}$$

и при его выполнении $x_k = P_{L_k} x$. Если x — любой элемент H, $x_k = P_{L_k} x$ и $s_m(x) = x_1 + x_2 + \ldots + x_m$, то

$$\|x - s_m(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{m} \|x_k\|^2. \tag{151}$$

Равенство (150) равносильно $\|x - s_m(x)\| \to 0$ при $m \to \infty$. Нетрудно видеть, что L — линеал. Покажем, что L — подпространство. Пусть $x^{(n)} \in L$ и $x^{(n)} \Rightarrow x$ при $n \to \infty$. Надо доказать, что и $x \in L$. Имеем очевидное неравенство

$$\|x - s_m(x)\| \leqslant \|x - x^{(n)}\| + \|x^{(n)} - s_m(x^{(n)})\| + \|s_m(x^{(n)} - x)\|.$$

Но $s_m(x^{(n)} - x)$ есть проекция $x^{(n)} - x$ в подпространство $L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_m$, так что $\|s_m(x^{(n)} - x)\| \leqslant \|x^{(n)} - x\|$, и можем написать

$$\|x - s_m(x)\| \leqslant 2\|x - x^{(n)}\| + \|x^{(n)} - s_m(x^{(n)})\|. \tag{152}$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Фиксируем такое n, что $\|x - x^{(n)}\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Но $\|x^{(n)} - s_m(x^{(n)})\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$ при всех достаточно больших m, ибо

$x^{(n)} \in L$, и из (152) следует $\| x - s_m(x) \| \leqslant \varepsilon$, т. е. $x \in L$, и доказано, что z-подпространство. Элемент $P_L y$ при любом $y \in H$ представим в виде

$$P_L y = z_1 + z_2 + \ldots, \tag{153}$$

где $z_k = P_{L_k}(P_L y)$. Но, поскольку L_k входит в L, мы имеем $P_L(P_{L_k} y) = P_{L_k} y$, т. е. $P_L P_{L_k} = P_{L_k}$, и, переходя к сопряженным операторам $P_{L_k} P_L = P_{L_k}$, откуда $z_k = P_{L_k} y$, и формула (153) переписывается в виде

$$P_L y = P_{L_1} y + P_{L_2} y + P_{L_3} y + \ldots, \tag{154}$$

т. е.

$$P_L = P_{L_1} + P_{L_2} + P_{L_3} + \ldots, \tag{155}$$

причем сходимость ряда надо понимать в смысле сильной сходимости последовательности операторов.

Отметим, что если $x_1, x_2, \ldots$ — попарно ортогональные и нормированные элементы, то, считая, что каждый из них x_k порождает одномерное подпространство L_k элементов ax_k, где a — любое комплексное число, мы имеем ортогональную сумму этих подпространств, образованную элементами вида

$$\sum_k c_k x_k,$$

где ряд, составляемый из чисел $|c_k|^2$, сходится, и проектор в подпространство L имеет вид

$$P_L y = \sum_k a_k x_k,$$

где $a_k x_k = P_{L_k} y$ и $a_k = (y, x_k)$.

Говорят, что подпространство M есть часть подпространства L ($M \subset L$), если все элементы M входят в L. При этом разностью подпространств $L \ominus M$ называют множество элементов L, ортогональных M [**122**]. Если обозначить $L \ominus M = M_1$, то $L = M \oplus M_1$, и подпространства M и M_1 взаимно дополнительны по отношению к L [**122**].

Произведением подпространств $L_1 L_2$ называется множество элементов, общих L_1 и L_2. Нетрудно показать, что это множество есть подпространство. Это определение произведения применимо и к любому конечному или бесконечному числу подпространств.

140. Операторы проектирования. Мы видели, что оператор проектирования P_L в подпространство L есть самосопряженный оператор с нормой единица (исключая случай, когда P_L — оператор аннулирования [**124**]). Из его определения непосредственно следует

$$P_L^2 = P \tag{156}$$

и потому

$$(P_L x,\ x) = (P_L^2 x,\ x) = (P_L x,\ P_L x) = |P_L x|^2 \geqslant 0,$$

т. е. P_L — положительный оператор. Докажем некоторые теоремы о проекторах.

Теорема 1. *Если A есть самосопряженный оператор, удовлетворяющий соотношению*

$$A^2 = A, \tag{157}$$

то A есть проектор P_L в подпространство L, образованное элементами $y = Ax$, когда x пробегает все H.

Множество L элементов $y = Ax$, когда x пробегает H, в силу дистрибутивности оператора A, есть линеал. Докажем, что L есть подпространство. Пусть y_n — последовательность элементов из L и $y_n \Rightarrow y$. Надо доказать, что $y \in L$. Принимая во внимание, что $y_n \in L$, можем утверждать, что существуют такие элементы x_n, что $y_n = Ax_n$, или, в силу (157), $y_n = A(Ax_n)$, т. е. $y_n = Ay_n$, откуда, переходя к пределу и пользуясь непрерывностью оператора A, получим $y = Ay$ и, следовательно, $y \in L$. Для доказательства теоремы нам остается показать, что элемент $(x - Ax)$ ортогонален любому элементу из L, т. е. ортогонален элементу Az, где z — любой элемент из H. Мы имеем

$$(x - Ax,\ Az) = (x,\ Az) - (Ax,\ Az).$$

В силу самосопряженности A мы можем перекинуть A с первого элемента x на второй элемент z. Таким образом, получим

$$(x - Ax,\ Az) = (x,\ Az) - (x,\ A^2 z)$$

и из (157) следует, что правая часть равна нулю, т. е. $(x - Ax,\ Az) = 0$, и теорема доказана.

Назовем два проектора P_L и P_M взаимно ортогональными, если выполнено условие

$$P_L P_M = 0, \tag{158}$$

причем символ 0, стоящий справа, обозначает оператор аннулирования. Переходя в формуле (158) к сопряженным операторам и принимая во внимание самосопряженность проектора, получим, наряду с (158), формулу

$$P_M P_L = 0. \tag{159}$$

Теорема 2. *Для того чтобы проекторы P_L и P_M были взаимно ортогональны, необходимо и достаточно, чтобы подпространства L и M были взаимно ортогональны.*

Доказываем необходимость. Если бы L и M не были взаимно ортогональными, то существовал бы элемент x_0, принадлежащий M и неортогональный L. Для такого элемента мы получили бы $P_M x = x$ и,

следовательно, $P_L(P_M x) = P_L x \neq 0$, что противоречит (158). Доказываем достаточность. Если $L \perp M$, то $P_M x$ ортогонально к L для любого элемента x, и, следовательно, $P_L(P_M x) = 0$, т. е. формула (158) справедлива.

Теорема 3. *Для того чтобы сумма $P_L + P_M$ была проектором, необходимо и достаточно, чтобы подпространства L и M были взаимно ортогональны. Если это условие выполнено, то $P_L + P_M$ есть проектор в $L \oplus M$.*

Доказываем необходимость. Пусть $P_L + P_M$ есть проектор. При этом мы должны иметь, в силу (156),

$$(P_L + P_M)(P_L + P_M) = P_L + P_M, \tag{160}$$

и, раскрывая скобки и принимая во внимание, что $P_L^2 = P_L$ и $P_M^2 = P_M$, получим

$$P_L P_M + P_M P_L = 0. \tag{161}$$

Умножаем слева на P_L:

$$P_L P_M + P_L P_M P_L = 0. \tag{162}$$

Умножая это равенство справа на P_L, получаем формулу $P_L P_M P_L = 0$, которая, в силу (162), приводит нас к формуле $P_L P_M = 0$, из которой, в силу теоремы 1, и следует, что L и M взаимно ортогональны. Доказываем достаточность. Если L и M взаимно ортогональны, то, в силу (158) и (159), выполняется равенство (161), а тем самым и равенство $(P_L + P_M)^2 = P_L + P_M$, и, в силу теоремы 1, $P_L + P_M$ есть проектор. Подпространство, соответствующее этому проектору, определяется формулой

$$y = (P_L + P_M) x = P_L x + P_M x, \tag{163}$$

где x пробегает H. Слагаемое $P_L x \in L$ и слагаемое $P_M x \in M$. Таким образом, любой элемент y, определяемый формулой (163), принадлежит $L \oplus M$. Наоборот, если мы возьмем любой элемент $u + v$, принадлежащий $L \oplus M$, причем $u \in L$ и $v \in M$, то, подставляя в формулу (163) $x = u + v$, получим $y = u + v$. Таким образом, формула (163) определяет действительно подпространство $L \oplus M$, и теорема таким образом доказана.

Говорят, что оператор P_M есть часть оператора P_L, если выполнено условие

$$P_L P_M = P_M. \tag{164}$$

Переходя в этой формуле к сопряженным операторам, получим следующую формулу:

$$P_M P_L = P_M. \tag{165}$$

Теорема 4. *Для того чтобы P_M было частью P_L, необходимо и достаточно, чтобы подпространство M было частью под-*

пространства L. Это условие равносильно тому, что при всяком x

$$\|P_M x\| \leqslant \|P_L x\|, \tag{166}$$

или тому, что

$$P_M \leqslant P_L. \tag{167}$$

Если выполнено условие (164) и мы возьмем элемент x_0, принадлежащий M, то $P_M x_0 = x_0$, и из (164) следует, что $P_L x_0 = x_0$, т. е. $x_0 \in L$ и M есть часть L. Наоборот, если M есть часть L, то при любом выборе x элемент $P_M x$ принадлежит M, а следовательно, и L, а потому $P_L(P_M x) = P_M x$, т. е. условие (164) выполнено. При этом, согласно формуле (165), мы можем написать для любого элемента x: $\|P_M x\| = \|P_M(P_L x)\| \leqslant \|P_L x\|$, откуда вытекает неравенство (93). Покажем теперь, наоборот, что из неравенства (93) следует, что M есть часть L. Если бы это было не так, то существовал бы элемент x_0, принадлежащий M и не принадлежащий L. Для этого элемента мы имели бы $\|P_M x_0\| = \|x_0\|$ и $\|P_L x_0\| < \|x_0\|$, что противоречит (166). Наконец, неравенство (166), в силу (157), мы можем записать в виде $(P_L x, x) \geqslant (P_M x, x)$ или $((P_L - P_M)x, x) \geqslant 0$, откуда и следует, что (167) равносильно (166); теорема полностью доказана.

Теорема 5. *Для того чтобы разность $P_L - P_M$ была проектором, необходимо и достаточно, чтобы M было частью L. Если это условие выполнено, то $P_L - P_M$ есть проектор в $L \ominus M$.*

Если $P_L - P_M$ есть проектор, то мы должны иметь

$$(P_L - P_M)(P_L - P_M) = P_L - P_M, \tag{168}$$

или, раскрывая скобки, получим

$$P_L P_M + P_M P_L = 2P_M. \tag{169}$$

Умножая сначала слева, а затем справа на P_L, приходим к двум равенствам

$$P_L P_M + P_L P_M P_L = 2P_L P_M \quad \text{и} \quad P_L P_M P_L + P_M P_L = 2P_M P_L,$$

из которых следует, что $P_L P_M = P_M P_L$, и, в силу (169), мы имеем $P_L P_M = P_M P_L = P_M$, т. е. соблюдено условие (164), и M есть часть L. Наоборот, если M есть часть L, т. е. соблюдены условия (164) и (165), то из них следует формула (169), и тем самым формула (168), а потому, согласно теореме 1, $P_L - P_M$ есть проектор. Соответствующее ему подпространство определяется формулой

$$y = (P_L - P_M)x = P_L x - P_M x, \tag{170}$$

причем x пробегает все H. Элементы $P_L x$ и $P_M x$ принадлежат L, ибо по условию M есть часть L. Таким образом, формула (170) дает элементы, принадлежащие L. Покажем, что элементы y, кроме того, ортогональны M. Пусть z — любой элемент из M. Мы имеем $P_M z = z$ и можем написать

$$(P_L x - P_M x, z) = (P_L x - P_M x, P_M z).$$

Переводя P_M справа налево и пользуясь условием (165), получим

$$(P_L x - P_M x,\ z) = (P_M x - P_M x,\ z) = 0,$$

т. е. действительно $P_L x - P_M x \perp M$. Таким образом, формула (170) дает элементы y, принадлежащие $L \ominus M$. Если u есть любой элемент, принадлежащий $L \ominus M$, т. е. $u \in L$ и $u \perp M$, то $y = P_L u - P_M u = P_L u = u$, и, таким образом, окончательно можно утверждать, что формула (170) определяет подпространство $L \ominus M$, и теорема доказана.

Теорема 6. *Для того чтобы произведение $P_L P_M$ было проектором, необходимо и достаточно, чтобы P_L и P_M коммутировали, т. е.*

$$P_L P_M = P_M P_L. \tag{171}$$

Если это условие выполнено, то $P_L P_M$ есть проектор в подпространство LM.

Необходимость условия (171) вытекает из того, что для самосопряженности $P_L P_M$ необходимо и достаточно (171). Проверим теперь, что при наличии условия (171) оператор $P_L P_M$ удовлетворяет условию (157):

$$(P_L P_M)(P_L P_M) = P_L^2 P_M^2 = P_L P_M.$$

Таким образом, первая часть теоремы доказана. Если x — любой элемент из H, то элемент

$$y = (P_L P_M) x = P_L (P_M x) = P_M (P_L x), \tag{172}$$

очевидно, принадлежит как L, так и M, т. е. принадлежит LM. Наоборот, если мы возьмем любой элемент x_0, принадлежащий LM, то формула (172) при $x = x_0$ даст нам $y = x_0$. Таким образом, формула (172) определяет подпространство LM, и теорема полностью доказана.

Теорема 7. *Предел сходящейся последовательности проекторов есть проектор.*

Мы имеем $P_n \to P$, причем P_n суть проекторы и P есть самосопряженный оператор [**131**]. Переходя в равенстве $P_n^2 = P_n$ к пределу, получаем равенство $P^2 = P$, из которого, в силу теоремы 1, следует, что P есть проектор.

Теорема 8. *Всякая монотонная последовательность проекторов имеет предел.*

Рассмотрим сначала неубывающую последовательность проекторов:

$$P_1 \leqslant P_2 \leqslant P_3 \leqslant \ldots \tag{173}$$

Для доказательства существования предела у последовательности (173) нам надо показать, что $P_n x$ имеет предел при любом выборе x, т. е. для любого заданного положительного ε должно существовать такое N, что

$$\| P_n x - P_m x \| \leqslant \varepsilon \quad \text{при} \quad n > m > N. \tag{174}$$

В силу (173) и теоремы 4

$$\|P_1x\| \leqslant \|P_2x\| \leqslant \|P_3x\| \leqslant \ldots,$$

причем для любого n мы имеем $\|P_nx\| \leqslant \|x\|$. Таким образом, неубывающая последовательность неотрицательных чисел $\|P_nx\|$ имеет предел, и для любого заданного положительного ε существует такое N, что

$$\|P_nx\|^2 - \|P_mx\|^2 \leqslant \varepsilon^2 \quad \text{при} \quad n > m > N.$$

Согласно (157) мы можем записать это неравенство в виде

$$((P_n - P_m)x,\ x) \leqslant \varepsilon^2 \quad \text{при} \quad n > m > N.$$

Так как P_m есть часть P_n, то $P_n - P_m$ есть проектор, и последнее неравенство, в силу (157), приводит к неравенству (174); теорема доказана. Отметим, что, в силу теоремы 7, предельный оператор P для последовательности (173) есть проектор и, переходя в неравенстве $((P_n - P_m)x,\ x) \geqslant 0$ к пределу при $n \to \infty$, мы получаем $((P - P_m)x,\ x) \geqslant 0$, т. е. $P \geqslant P_m$. Совершенно аналогично доказывается, что и убывающая последовательность проекторов имеет предел, и этот предел есть также проектор.

Теорема 9. *Если L_k $(k = 1, 2, \ldots)$ — счетное число попарно ортогональных подпространств, то сумма*

$$\sum_k P_{L_k} \tag{175}$$

есть проектор в подпространство

$$L = L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \tag{176}$$

Это утверждение непосредственно следует из сказанного в [**139**].

141. Разложение единицы. Интеграл Стилтьеса. Дальнейшее развитие теории самосопряженных операторов основано на общей формуле, дающей представление любого самосопряженного оператора. Для построения этой формулы надо предварительно ввести одно новое важное понятие.

Определение. *Назовем разложением единицы семейство проекторов $\mathcal{E}_\lambda$, зависящее от вещественного параметра λ и удовлетворяющее следующим условиям:* 1) *проектор $\mathcal{E}_\lambda$ не убывает при возрастании λ, т. е. если $\mu > \lambda$, то $\mathcal{E}_\mu \geqslant \mathcal{E}_\lambda$;* 2) *существуют такие конечные значения $\lambda = a$ и $\lambda = b$, что $\mathcal{E}_a = 0$ и $\mathcal{E}_b = E$;* 3) *проектор $\mathcal{E}_\lambda$ непрерывен справа по отношению к параметру λ, т. е.*

$$\lim_{\lambda \to \lambda' + 0} \mathcal{E}_\lambda = \mathcal{E}_{\lambda'}. \tag{177}$$

Отметим, что, в силу теоремы 7 [**140**], при любом значении λ' существует предел $\mathcal{E}_\lambda$ при стремлении λ к λ' как слева, так и справа.

Эти пределы суть проекторы, которые естественно обозначить символами $\mathcal{E}_{\lambda'-0}$ и $\mathcal{E}_{\lambda'+0}$. В силу (177) мы должны иметь $\mathcal{E}_{\lambda'+0}=\mathcal{E}_{\lambda'}$. Будем говорить, что $\mathcal{E}_\lambda$ непрерывен в точке λ, если $\mathcal{E}_\lambda=\mathcal{E}_{\lambda-0}$. Условие (177) требует для проектора $\mathcal{E}_\lambda$ в каждой точке непрерывности справа. Это условие добавлено лишь для того, чтобы фиксировать значение $\mathcal{E}_\lambda$ в каждой его точке разрыва по отношению к λ.

Отметим некоторые свойства разложения единицы $\mathcal{E}_\lambda$. Пусть m — точная верхняя граница тех значений λ, для которых $\mathcal{E}_\lambda=0$, т. е.

$$\mathcal{E}_\lambda=0 \text{ при } \lambda<m \quad \text{и} \quad \mathcal{E}_\lambda>0 \text{ при } \lambda>m. \tag{178}$$

В самой точке $\lambda=m$ проектор $\mathcal{E}_\lambda$ будет отличным от нулевого оператора, если в этой точке $\mathcal{E}_\lambda$ имеет скачок. Через M обозначим точную нижнюю границу тех значений λ, для которых $\mathcal{E}_\lambda=E$. В силу непрерывности $\mathcal{E}_\lambda$ справа мы должны иметь $\mathcal{E}_M=E$, и, таким образом, значение M определяется следующими условиями:

$$\mathcal{E}_\lambda<E \quad \text{при} \quad \lambda<M \quad \text{и} \quad \mathcal{E}_\lambda=E \quad \text{при} \quad \lambda\geqslant M. \tag{179}$$

Если ε_0 — любое фиксированное положительное число, то мы можем сказать, что при изменении λ в промежутке $[m-\varepsilon_0, M]$ проектор $\mathcal{E}_\lambda$ меняется от 0 до E. Далее, в силу теоремы 5, можно утверждать, что при $\mu>\lambda$ разность $\mathcal{E}_\mu-\mathcal{E}_\lambda$ есть проектор, и имеет место формула

$$\mathcal{E}_\lambda\mathcal{E}_\mu=\mathcal{E}_\mu\mathcal{E}_\lambda=\mathcal{E}_\lambda. \tag{180}$$
$$(\mu>\lambda)$$

Устремляя в разности $\mathcal{E}_\mu-\mathcal{E}_\lambda$ число λ к μ слева, увидим, что $\mathcal{E}_\mu-\mathcal{E}_{\mu-0}$ есть проектор. Точно так же можно показать, что $\mathcal{E}_\nu-\mathcal{E}_{\mu-0}$ при $\nu>\mu$ есть проектор. Введем новое обозначение, которым в дальнейшем будем часто пользоваться. Пусть Δ — некоторый промежуток $[\alpha, \beta]$. Обозначим

$$\Delta\mathcal{E}_\lambda=\mathcal{E}_\beta-\mathcal{E}_\alpha. \tag{181}$$

Если Δ' и Δ'' — два промежутка, не имеющие общих внутренних точек, то, в силу (180), мы имеем

$$\Delta'\mathcal{E}_\lambda\cdot\Delta''\mathcal{E}_\lambda=0 \tag{182}$$
$$(\Delta' \text{ и } \Delta'' \text{ без общих внутренних точек}).$$

Пользуясь теоремой 2 [**140**], мы можем утверждать, что последнее равенство равносильно следующему: при любом выборе элементов x и y мы имеем

$$\Delta'\mathcal{E}_\lambda x\perp\Delta''\mathcal{E}_\lambda y \quad (x \text{ и } y \text{ любые}) \tag{183}$$
$$(\Delta' \text{ и } \Delta'' \text{ без общих внутренних точек}).$$

Если Δ_0 — общая часть промежутков Δ' и Δ'', то, в силу (180), мы имеем

$$\Delta'\mathcal{E}_\lambda\cdot\Delta''\mathcal{E}_\lambda=\Delta_0\mathcal{E}_\lambda. \tag{184}$$

Мы умеем складывать операторы и совершать переход к пределу для последовательности операторов. Это даст нам сейчас возможность построить, пользуясь разложением единицы $\mathcal{E}_\lambda$, «интеграл Стилтьеса» для любой непрерывной функции. Пусть на промежутке $[m-\varepsilon_0, M]$, где ε_0 — фиксированное положительное число, задана непрерывная функция $f(\lambda)$, которая может быть и комплексной. Делим указанный промежуток на части:

$$m-\varepsilon_0=\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_{n-1}<\lambda_n=M, \tag{185}$$

и для этого подразделения δ-промежутка $[m-\varepsilon_0, M]$ составляем соответствующую ему «сумму Римана — Стилтьеса»:

$$\sigma_\delta=\sum_{k=1}^{n} f(\nu_k)\,\Delta_k\mathcal{E}_\lambda=\sum_{k=1}^{n} f(\nu_k)\,(\mathcal{E}_{\lambda_k}-\mathcal{E}_{\lambda_{k-1}}), \tag{186}$$

где ν_k — какое-либо значение из промежутка $[\lambda_{k-1}, \lambda_k]$. Сумма σ_δ есть некоторый линейный оператор. Обозначим через η_δ наибольшую из разностей $\lambda_k-\lambda_{k-1}$. Имеет место следующая основная теорема:

Теорема. *Для любой последовательности подразделений δ_n при условии $\eta_{\delta_n}\to 0$ последовательность операторов σ_{δ_n}, в смысле сильной сходимости операторов, имеет определенный предел.*

Предварительно докажем две леммы.

Лемма 1. *Если α и α_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ — комплексные числа и $x=x_1+x_2+\ldots+x_n$, причем элементы x_k попарно ортогональны, то имеет место неравенство*

$$\|\alpha x-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k\|\leqslant\delta\,\|x\|, \tag{187}$$

где δ — наибольшее из чисел $|\alpha-\alpha_k|$.

Можем написать

$$\alpha x-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k=\sum_{k=1}^{n}(\alpha-\alpha_k)\,x_k,$$

откуда, в силу теоремы Пифагора, следует

$$\|\alpha x-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k\|^2=\sum_{k=1}^{n}|\alpha-\alpha_k|^2\,\|x_k\|^2\leqslant\delta^2\sum_{k=1}^{n}\|x_k\|^2. \tag{188}$$

Теорема Пифагора дает также

$$\|x\|^2=\sum_{k=1}^{n}\|x_k\|^2,$$

неравенство (188) непосредственно приводит к (187), и лемма доказана.

Лемма 2. *Если* δ *— разбиение* (185) *промежутка* $[m-\varepsilon_0, M]$ *и* δ' *— какое-либо другое разбиение*

$$m-\varepsilon_0=\lambda'_0<\lambda'_1<\lambda'_2<\ldots<\lambda'_{n'-1}<\lambda'_{n'}=M$$

того же промежутка, то для любого элемента x *имеет место неравенство*

$$\|\sigma_\delta x-\sigma_{\delta'}x\|\leqslant 2\omega\|x\|, \tag{189}$$

где ω *— наибольшее колебание функции* $f(\lambda)$ *в промежутках* $[\lambda_{k-1}, \lambda_k]$ *и* $[\lambda'_{k-1}, \lambda'_k]$, *т. е.* ω *есть такое число, что*

$$|f(\alpha)-f(\beta)|\leqslant\omega, \tag{190}$$

если α *и* β *принадлежат одному и тому же промежутку* $[\lambda_{k-1}, \lambda_k]$ *или одному и тому же промежутку* $[\lambda'_{k-1}, \lambda'_k]$.

Составим произведение подразделений $\delta\delta'$. При переходе от подразделения δ к подразделению $\delta\delta'$ каждый частичный промежуток Δ_k подразделения δ разобьется на конечное число промежутков $\Delta_s^{(k)}$ $(s=1, 2, \ldots, m_k)$. При этом каждое слагаемое $f(\nu_k)\Delta_k\mathcal{E}_\lambda x$ суммы

$$\sigma_\delta x=\sum_{k=1}^{n} f(\nu_k)\Delta_k\mathcal{E}_\lambda x \tag{191}$$

заменится суммой

$$\sum_{s=1}^{m_k} f(\nu_k^{(s)})\Delta_k^{(s)}\mathcal{E}_\lambda x,$$

где $\nu_k^{(s)}$ — некоторое значение из промежутка $\Delta_k^{(s)}$. Тем самым значения ν_k и $\nu_k^{(s)}$ принадлежат одному и тому же промежутку Δ_k подразделения δ, и мы имеем, в силу (190),

$$|f(\nu_k)-f(\nu_k^{(s)})|\leqslant\omega \tag{192}$$
$$(s=1, 2, \ldots, m_k).$$

Составим разность

$$\sigma_\delta x-\sigma_{\delta\delta'}x=\sum_{k=1}^{n}\left[f(\nu_k)\Delta_k\mathcal{E}_\lambda x-\sum_{s=1}^{m_k} f(\nu_k^{(s)})\Delta_k^{(s)}\mathcal{E}_\lambda x\right].$$

В силу (183) элементы $\Delta_k\mathcal{E}_\lambda x$, $\Delta_k^{(s)}\mathcal{E}_\lambda x$ для различных значений k взаимно ортогональны, и, пользуясь теоремой Пифагора, мы можем написать

$$\|\sigma_\delta x-\sigma_{\delta\delta'}x\|^2=\sum_{k=1}^{n}\|f(\nu_k)\Delta_k\mathcal{E}_\lambda x-\sum_{s=1}^{m_k} f(\nu_k^{(s)})\Delta_k^{(s)}\mathcal{E}_\lambda x\|^2. \tag{193}$$

Кроме того, имеем $\Delta_k \mathcal{E}_\lambda x = \sum_{s=1}^{m_k} \Delta_k^{(s)} \mathcal{E}_\lambda x,$

и элементы $\Delta_k^{(s)} \mathcal{E}_\lambda x$ $(s = 1, 2, \ldots, m_k)$ также попарно ортогональны. Пользуясь леммой 1 и принимая во внимание неравенство (192), получаем оценку

$$\| f(\nu_k) \Delta_k \mathcal{E}_\lambda x - \sum_{s=1}^{m_k} f(\nu_k^{(s)}) \Delta_k^{(s)} \mathcal{E}_\lambda x \| \leqslant \omega \| \Delta_k \mathcal{E}_\lambda x \|$$

и, следовательно, в силу (193),

$$\| \sigma_\delta x - \sigma_{\delta\delta'} x \|^2 \leqslant \omega^2 \sum_{k=1}^{n} \| \Delta_k \mathcal{E}_\lambda x \|^2. \tag{194}$$

Принимая во внимание, что $\mathcal{E}_{m-\varepsilon_0} = 0$ и $\mathcal{E}_M = E$, можем написать

$$x = \sum_{k=1}^{n} \Delta_k \mathcal{E}_\lambda x, \tag{195}$$

причем элементы, стоящие справа, попарно ортогональны. Теорема Пифагора дает

$$\| x \|^2 = \sum_{k=1}^{n} \| \Delta_k \mathcal{E}_\lambda x \|^2, \tag{196}$$

и неравенство (194) можно переписать в виде

$$\| \sigma_\delta x - \sigma_{\delta\delta'} x \| \leqslant \omega \| x \|.$$

Совершенно так же можно показать, что

$$\| \sigma_{\delta'} x - \sigma_{\delta\delta'} x \| \leqslant \omega \| x \|,$$

и утверждение леммы непосредственно вытекает из неравенства

$$\| \sigma_\delta x - \sigma_{\delta'} x \| \leqslant \| \sigma_\delta x - \sigma_{\delta\delta'} x \| + \| \sigma_{\delta'} x - \sigma_{\delta\delta'} x \|.$$

Переходим теперь к доказательству теоремы. Нам надо показать, что при любом выборе элемента x последовательность элементов $\sigma_{\delta_n} x$ имеет предел, т. е. $\sigma_{\delta_n} x \Rightarrow y$. Если мы это докажем, то нетрудно видеть, что предельный элемент y не зависит от выбора последовательности δ_n. Действительно, если δ_n и $\delta_{n'}$ — две последовательности подразделений, удовлетворяющие указанному в теореме условию, причем если $\sigma_{\delta_n} \Rightarrow y$ и $\sigma_{\delta_n'} x \Rightarrow y'$, то последовательность подразделений $\delta_1, \delta_1', \delta_2, \delta_2', \ldots$ также удовлетворяет условию теоремы, а потому последовательность элементов $\sigma_{\delta_1} x, \sigma'_{\delta_1} x, \sigma_{\delta_2} x, \sigma'_{\delta_2} x, \ldots$

должна иметь предел. Отсюда и вытекает непосредственно, что $y' = y$.

Предварительно установим одно неравенство.

Элементы $\Delta_k \mathcal{E}_\lambda x$, входящие в сумму σ_δ, попарно ортогональны, и и по теореме Пифагора

$$\| \sigma_\delta x \|^2 = \sum_{k=1}^{n} | f(\nu_k) |^2 \| \Delta_k \mathcal{E}_\lambda x \|^2. \tag{197}$$

Далее, непрерывная функция $f(\lambda)$ ограничена по модулю, т. е. $| f(\lambda) | \leqslant p$, где p — некоторое положительное число. Формула (197) приводит нас к неравенству

$$\| \sigma_\delta x \|^2 \leqslant p^2 \sum_{k=1}^{n} \| \Delta_k \mathcal{E}_\lambda x \|^2, \tag{197$_1$}$$

из которого, в силу (196), следует, что $\| \sigma_\delta x \| \leqslant p \| x \|$, т. е. при любом разбиении норма оператора σ_δ не превышает p. Докажем теперь, что последовательность элементов $\sigma_{\delta_n} x$ имеет предел при любом выборе x. В силу условия теоремы о равномерной непрерывности $f(\lambda)$ на промежутке $[m - \varepsilon_0, M)$ для любого заданного положительного ε существует такое N, что

$$| f(\lambda') - f(\lambda'') | \leqslant \varepsilon,$$

если λ' и λ'' принадлежат одному и тому же частичному промежутку подразделения δ_n при $n > N$. Применяя лемму 2, мы можем утверждать, что имеет место неравенство

$$\| \sigma_{\delta_n} x - \sigma_{\delta_m} x \| \leqslant 2\varepsilon \| x \| \text{ при } n \text{ и } m > N,$$

т. е. последовательность $\sigma_{\delta_n} x$ сходится в себе, а потому стремится к некоторому предельному элементу, и теорема доказана полностью. Для обозначения предела последовательности операторов при беспредельном измельчании частичных промежутков (в смысле сильной сходимости операторов) естественно воспользоваться обычным обозначением интеграла Стилтьеса:

$$\lim \sum_{k=1}^{n} f(\nu_k) \Delta_k \mathcal{E}_\lambda = \int_{m-\varepsilon_0}^{M} f(\lambda)\, d\mathcal{E}_\lambda. \tag{198}$$

Для обозначения предельного элемента последовательности элементов (191) при беспредельном измельчании частичных промежутков используем следующее обозначение:

$$\lim \sum_{k=1}^{n} f(\nu_k) \Delta_k \mathcal{E}_\lambda x = \int_{m-\varepsilon_0}^{M} f(\lambda)\, d\mathcal{E}_\lambda\, x. \tag{199}$$

Совершенно аналогично можно доказать существование соответствующих интегралов

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda)\, d\mathcal{E}_\lambda \quad \text{и} \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda)\, d\mathcal{E}_\lambda\, x \tag{200}$$

по любой части $[\alpha, \beta]$ промежутка $[m-\varepsilon_0, M]$. Отметим, что вне промежутка $[m-\varepsilon_0, M]$ оператор $\mathcal{E}_\lambda$ и элемент $\mathcal{E}_\lambda x$ сохраняют постоянные значения, и, в связи с этим, часто интеграл по конечному промежутку $[m-\varepsilon_0, M]$ записывают в виде интеграла по бесконечному промежутку

$$\int_{m-\varepsilon_0}^{M} f(\lambda)\, d\mathcal{E}_\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\, d\mathcal{E}_\lambda; \quad \int_{m-\varepsilon_0}^{M} f(\lambda)\, d\mathcal{E}_\lambda x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\, d\mathcal{E}_\lambda x. \tag{201}$$

Выделяя скачок $\mathcal{E}_m$ оператора $\mathcal{E}_\lambda$ в точке $\lambda = m$, если этот скачок существует, можем привести написанные интегралы к интегралам по промежутку $[m, M]$:

$$\left.\begin{aligned} \int_{m-\varepsilon_0}^{M} f(\lambda)\, d\mathcal{E}_\lambda &= f(m)\,\mathcal{E}_m + \int_{m}^{M} f(\lambda)\, d\mathcal{E}_\lambda; \\ \int_{m-\varepsilon_0}^{M} f(\lambda)\, d\mathcal{E}_\lambda x &= f(m)\,\mathcal{E}_m x + \int_{m}^{M} f(\lambda)\, d\mathcal{E}_\lambda x. \end{aligned}\right\} \tag{202}$$

Отметим элементарную оценку интеграла, аналогичную (197_1), а именно, если на промежутке $[\alpha, \beta]$ мы имеем $|f(\lambda)| \leqslant p_1$, то

$$\left\| \int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda)\, d\mathcal{E}_\lambda x \right\| \leqslant p_1 \| (\mathcal{E}_\beta - \mathcal{E}_\alpha)\, x \|. \tag{203}$$

В дальнейшем мы будем вместо нижнего предела $(m-\varepsilon_0)$ писать просто m. Написанный таким образом интеграл по промежутку $[m, M]$ будет равносилен интегралу по указанному промежутку, сложенному с выражением $f(m)\,\mathcal{E}_m$ или $f(m)\,\mathcal{E}_m x$.

142. Спектральная функция самосопряженного оператора. Если значения $f(\lambda)$ вещественны, то оператор σ_δ как линейная комбинация проекторов с вещественными коэффициентами есть самосопряженный оператор, и предел σ_δ при беспредельном измельчании частичных промежутков есть также самосопряженный оператор. Полагая $f(\lambda) = \lambda$, получаем некоторый самосопряженный оператор A:

$$A = \int_{m}^{M} \lambda\, d\mathcal{E}_\lambda \tag{204}$$

или

$$Ax = \int_m^M \lambda d\mathcal{E}_\lambda x. \tag{205}$$

Формула (204) и является основной формулой всей теории самосопряженных операторов. Мы пришли к ней, исходя из некоторого разложения единицы $\mathcal{E}_\lambda$. Всякому разложению единицы $\mathcal{E}_\lambda$ соответствует определенный самосопряженный оператор A согласно формуле (204). Можно доказать и обратную теорему.

Теорема. *Для любого заданного самосопряженного оператора A существует разложение единицы $\mathcal{E}_\lambda$ такое, что A выражается формулой* (204).

Доказательство этой теоремы довольно сложно, и, чтобы не прерывать изложения, мы приведем его в конце настоящего параграфа. В дальнейшем мы докажем формулу, согласно которой можно определить $\mathcal{E}_\lambda$ по заданному самосопряженному оператору A. Из этой формулы будет следовать, что различным разложениям единицы соответствуют и различные операторы A. В силу теоремы формула (204) представляет собой общую форму ограниченных самосопряженных операторов. Если мы умножим сумму (191) при $f(\lambda) = \lambda$ на какой-либо элемент y и перейдем к пределу, то получим выражение скалярного произведения (Ax, y) в виде интеграла Стилтьеса

$$(Ax, y) = \int_m^M \lambda d(\mathcal{E}_\lambda x, y). \tag{206}$$

Напомним, что если $\mathcal{E}_m$ отлично от нуля, то правую часть надо понимать как следующую сумму:

$$m(\mathcal{E}_m x, y) + \int_m^M \lambda d(\mathcal{E}_\lambda x, y), \tag{207}$$

где последний интеграл есть обычный интеграл Стилтьеса. Мы могли бы принять формулу (206) за основную вместо формулы (204), так как оператор A вполне определяется заданием билинейного функционала. Напомним, что скалярное произведение $(\mathcal{E}_\lambda x, y)$ выражается линейно через четыре скалярных произведения вида $(\mathcal{E}_\lambda z, z) = \|\mathcal{E}_\lambda z\|^2$ [**125**].

В силу $\mathcal{E}_\mu \geqslant \mathcal{E}_\lambda$ при $\mu > \lambda$, $\|\mathcal{E}_\lambda z\|^2$ не убывает при возрастании λ, и, таким образом, функция $(\mathcal{E}_\lambda x, y)$, стоящая под знаком дифференциала (вообще говоря, комплексная), представляет собой функцию ограниченной вариации от λ. Если положим $y = x$, то получим выражение квадратичного функционала в виде интеграла Стилтьеса

$$(Ax, x) = \int_m^M \lambda d(\mathcal{E}_\lambda x, x). \tag{208}$$

В данном случае под знаком дифференциала стоит возрастающая функция $(\mathcal{E}_\lambda x,\ x) = \|\mathcal{E}_\lambda x\|^2$.

Семейство проекторов $\mathcal{E}_\lambda$ называют обычно спектральной функцией самосопряженного оператора A, определяемого формулой (204). Покажем, что числа m и M, определенные выше, совпадают с границами оператора A, которые мы определили в [126]. Напишем квадратичный функционал $(Ax,\ x)$ в виде

$$(Ax,\ x) = m\|\mathcal{E}_m x\|^2 + \int_{m}^{M} \lambda d\|\mathcal{E}_\lambda x\|^2.$$

Под знаком дифференциала стоит неубывающая функция λ. Заменяя λ сначала на m и затем на M, приходим к неравенствам

$$m\|\mathcal{E}_M x\|^2 \leqslant (Ax,\ x) \leqslant m\|\mathcal{E}_m x\|^2 + M[\|\mathcal{E}_M x\|^2 - \|\mathcal{E}_m x\|^2],$$

или, в силу $\mathcal{E}_M x = x$, к неравенствам

$$m\|x\|^2 \leqslant (Ax,\ x) \leqslant M\|x\|^2.$$

Остается показать, что m и M суть точные границы для $(Ax,\ x)$ при $\|x\| = 1$. Покажем, например, что M есть точная верхняя граница. Разность $\mathcal{E}_M - \mathcal{E}_{M-\varepsilon} = E - \mathcal{E}_{M-\varepsilon}$, где ε — любое заданное положительное число, есть проектор, отличный от нулевого оператора. Положим, что нормированный элемент x принадлежит подпространству, соответствующему этому проектору. При этом $(E - \mathcal{E}_{M-\varepsilon})x = x$, т. е. $\mathcal{E}_{M-\varepsilon}x = 0$, и тем более $\mathcal{E}_\lambda x = 0$ при $\lambda \leqslant M - \varepsilon$. Мы можем, таким образом, написать, заменяя в (208) множитель λ на $(M - \varepsilon)$ и считая $\|x\| = 1$:

$$(Ax,\ x) > (M - \varepsilon)\|(E - \mathcal{E}_{M-\varepsilon})x\|^2 = (M - \varepsilon),$$

откуда, ввиду произвольности ε, и следует, что M есть точная верхняя граница $(Ax,\ x)$ при $\|x\| = 1$.

Выведем еще одну формулу. Умножим обе части равенства

$$\sigma_\delta = \sum_{k=1}^{n} \nu_k \Delta_k \mathcal{E}_\lambda = \sum_{k=1}^{n} \nu_k (\mathcal{E}_{\lambda_k} - \mathcal{E}_{\lambda_{k-1}}) \tag{209}$$

на $\mathcal{E}_\lambda$, считая, что λ есть одна из точек деления λ_k. При этом, в силу (180), будем иметь $\mathcal{E}_\lambda \cdot \Delta_k \mathcal{E}_\lambda = \Delta_k \mathcal{E}_\lambda \cdot \mathcal{E}_\lambda = 0$ при $\lambda < \lambda_k$ и $\mathcal{E}_\lambda \cdot \Delta_k \mathcal{E}_\lambda = \Delta_k\ \mathcal{E}_\lambda \cdot \mathcal{E}_\lambda = \Delta_k \mathcal{E}_\lambda$ при $\lambda \geqslant \lambda_k$, и, таким образом, получим

$$\mathcal{E}_\lambda \sigma_\delta = \sigma_\delta \mathcal{E}_\lambda = \sum_{\lambda_k \leqslant \lambda} \nu_k \Delta_k \mathcal{E}_\lambda,$$

и, переходя к пределу, будем иметь формулу

$$\mathcal{E}_\lambda A = A\mathcal{E}_\lambda = \int_m^\lambda \lambda d\mathcal{E}_\lambda \qquad (\lambda > m) \tag{210}$$

и аналогичную формулу для билинейного функционала

$$(\mathcal{E}_\lambda Ax,\ y) = \int_m^\lambda \lambda d\,(\mathcal{E}_\lambda x,\ y). \tag{211}$$

143. Непрерывные функции самосопряженного оператора. Если A — самосопряженный оператор, определенный формулой (204), то любой функции $f(\lambda)$, непрерывной в промежутке $[m, M]$, мы сопоставим оператор $f(A)$, определяемый формулой

$$f(A) = \int_m^M f(\lambda)\, d\mathcal{E}_\lambda. \tag{212}$$

Это соответствие между непрерывными функциями $f(\lambda)$ и операторами $f(A)$ дистрибутивно, т. е. непрерывной функции $c_1 f_1(\lambda) + c_2 f_2(\lambda)$ соответствует оператор $c_1 f_1(A) + c_2 f_2(A)$. Это непосредственно вытекает из дистрибутивности интеграла (212) по отношению к функции $f(\lambda)$. Кроме того, указанное соответствие и мультипликативно, а именно функции $f_1(\lambda) f_2(\lambda)$ соответствует оператор $f_1(A) f_2(A)$ или равный ему оператор $f_2(A) f_1(A)$. Для того чтобы показать это, составим произведение сумм σ_δ для функций $f_1(\lambda)$ и $f_2(\lambda)$:

$$\sum_{k=1}^n f_1(\nu_k)\,\Delta_k\mathcal{E}_\lambda \cdot \sum_{k=1}^n f_2(\nu_k)\,\Delta_k\mathcal{E}_\lambda.$$

Принимая во внимание (182) и (184), мы можем представить написанное произведение в виде

$$\sum_{k=1}^n f_1(\nu_k)\,\Delta_k\mathcal{E}_\lambda \cdot \sum_{k=1}^n f_2(\nu_k)\,\Delta_k\mathcal{E}_\lambda = \sum_{k=1}^n f_1(\nu_k) f_2(\nu_k)\,\Delta_k\mathcal{E}_\lambda, \tag{213}$$

и, переходя к пределу, получим формулу

$$\int_m^M f_1(\lambda)\, d\mathcal{E}_\lambda \cdot \int_m^M f_2(\lambda)\, d\mathcal{E}_\lambda = \int_m^M f_1(\lambda) f_2(\lambda)\, d\mathcal{E}_\lambda, \tag{214}$$

которую мы и хотели доказать. Наряду с формулой (212) мы можем написать соответствующие формулы для билинейного и квадратичного функционала:

$$(f(A)x,\ y)=\int_m^M f(\lambda)\,d(\mathcal{E}_\lambda x,\ y);\quad (f(A)x,\ x)=\int_m^M f(\lambda)\,d\|\mathcal{E}_\lambda x\|^2. \quad (215)$$

Далее, аналогично формуле (211), имеем формулу

$$\mathcal{E}_\lambda f(A)=f(A)\,\mathcal{E}_\lambda=\int_m^\lambda f(\lambda)\,d\mathcal{E}_\lambda. \quad (216)$$

Принимая во внимание формулу (214), получаем следующую формулу для целых положительных степеней A:

$$A^n=\int_m^M \lambda^n d\mathcal{E}_\lambda \quad (217)$$

$$(n=1,\ 2,\ 3,\ldots)$$

и для полиномов:

$$a_0A^n+a_1A^{n-1}+\ldots+a_{n-1}A+a_n=$$

$$=\int_m^M (a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\lambda+a_n)\,d\mathcal{E}_\lambda. \quad (218)$$

Как мы выше упоминали, если $f(\lambda)$ — вещественная функция, го оператор σ_δ есть самосопряженный оператор, и предел для σ_δ, т. е. $f(A)$, есть также самосопряженный оператор. Если $f(\lambda)\geqslant 0$ на промежутке $[m,\ M]$, то, в силу формулы (215), оператор $f(A)$ положителен. Положим теперь, что $f(\lambda)$ есть комплексная функция $f(\lambda)=\varphi(\lambda)+\psi(\lambda)i$. При этом мы имеем $f(A)=\varphi(A)+i\psi(A)$, где $\varphi(A)$, и $\psi(A)$ — самосопряженные операторы. Составляя оператор $F(A)=\varphi(A)-i\psi(A)$, мы можем, пользуясь свойством самосопряженности операторов $\varphi(A)$ и $\psi(A)$, написать

$$(f(A)x,\ y)=(x,\ F(A)y),$$

т. е. оператор $F(A)$ будет сопряженным с $f(A)$.

Отметим еще некоторые свойства коммутирования. Из формулы (210) следует, что оператор $\mathcal{E}_\lambda$ при любом значении λ коммутирует с A. Поэтому и оператор $\Delta\mathcal{E}_\lambda=\mathcal{E}_\beta-\mathcal{E}_\alpha$ при любых значениях α и β коммутирует с A. Тем самым сумма σ_δ также коммутирует с A, и, переходя к пределу, мы получим, что оператор $f(A)$ коммутирует с A. Докажем теперь следующую теорему:

Теорема 1. *Оператор $f(A)$ коммутирует с любым оператором B, коммутирующим с A.*

Пусть ε_n — последовательность положительных чисел, стремящихся к нулю. В силу теоремы Вейерштрасса [**II; 154**], существует такая последовательность полиномов $P_n(\lambda)$, что

$$|f(\lambda) - P_n(\lambda)| \leqslant \varepsilon_n \quad (m \leqslant \lambda \leqslant M). \tag{219}$$

Составим разность

$$f(A) - P_n(A) = \int_m^M [f(\lambda) - P_n(\lambda)]\, d\mathcal{E}_\lambda.$$

Принимая во внимание формулы (203) и (219), мы можем написать

$$\|[f(A) - P_n(A)]\, x\| \leqslant \varepsilon_n \|x\|, \tag{220}$$

откуда $P_n(A) \to f(A)$. Оператор B, коммутирующий с A, коммутирует и с любым полиномом $P_n(A)$, т. е. $BP_n(A) = P_n(A)\, B$. Переходя к пределу, мы получаем $Bf(A) = f(A)\, B$, и теорема таким образом доказана. В дальнейшем мы покажем [**161**], что и спектральная функция $\mathcal{E}_\lambda$ при любом λ коммутирует с любым оператором B, коммутирующим с A. Наоборот, если B коммутирует с $\mathcal{E}_\lambda$, то B коммутирует с любым оператором $\Delta\mathcal{E}_\lambda$ и тем самым он коммутирует с суммой (209) и в пределе с оператором A. Таким образом, имеет место следующая теорема:

Теорема 2. *Для того чтобы оператор коммутировал с A, необходимо и достаточно, чтобы он при любом λ коммутировал с $\mathcal{E}_\lambda$.*

Приведем один пример функции от оператора, которым мы пользовались выше [**138**]. Пусть A — положительный оператор, т. е. $m \geqslant 0$, и положим $f(\lambda) = \sqrt{\lambda}$ $(\lambda \geqslant 0)$, где берется арифметическое значение радикала. Мы можем определить положительный оператор $\sqrt{A}$:

$$\sqrt{A} = \int_m^M \sqrt{\lambda}\, d\mathcal{E}_\lambda$$

или

$$(\sqrt{A}\, x,\ y) = \int_m^M \sqrt{\lambda}\, d\,(\mathcal{E}_\lambda x,\ y).$$

В силу (214) мы имеем $\sqrt{A}\,\sqrt{A} = A$.

144. Формула для резольвенты и характеристика регулярных значений λ.

Пользуясь спектральной функцией, мы можем дать формулу для резольвенты [**130**] и указать новую характеристику регулярных значений λ. В дальнейшем будем говорить о резольвенте R_l лишь при регулярных значениях l.

Теорема 1. *Если l — невещественное число или вещественное, но лежащее вне промежутка $[m, M]$, то резольвента R_l оператора A определяется формулой:*

$$R_l = \int_m^M \frac{\lambda}{\lambda - l}\, d\mathcal{E}_\lambda. \tag{221}$$

При условиях теоремы функция $\frac{1}{\lambda - l}$ непрерывна в промежутке $[m - \varepsilon_0, M]$ при достаточно малом ε_0. Пользуясь формулой (214), мы можем написать

$$\int_m^M \frac{1}{\lambda - l}\, d\mathcal{E}_\lambda \cdot \int_m^M (\lambda - l)\, d\mathcal{E}_\lambda =$$

$$= \int_m^M (\lambda - l)\, d\mathcal{E}_\lambda \cdot \int_m^M \frac{1}{\lambda - l}\, d\mathcal{E}_\lambda = \int_m^M d\mathcal{E}_\lambda = E, \tag{222}$$

но

$$\int_m^M (\lambda - l)\, d\mathcal{E}_\lambda = A - lE,$$

и (222) непосредственно приводит к (221).

Теорема 2. *Если l принадлежит промежутку $[m, M]$, но находится внутри некоторого промежутка $[\alpha, \beta]$, в котором $\mathcal{E}_\lambda$ постоянна, т. е. $\mathcal{E}_\beta = \mathcal{E}_\alpha$, то резольвента R_l существует и выражается формулой* (221).

Разобьем $[m - \varepsilon_0, M]$ на три части: $[m - \varepsilon_0, \alpha]$, $[\alpha, \beta]$ и $[\beta, M]$. На промежутках $[m - \varepsilon_0, \alpha]$ и $[\beta, M]$ функция $1 : (\lambda - l)$ непрерывна, а на промежутке $[\alpha, \beta]$ $\mathcal{E}_\lambda$ постоянна, и для этого промежутка все операторы $\Delta_k \mathcal{E}_\lambda$ суть операторы аннулирования. Продолжим функцию $1 : (\lambda - l)$ из крайних промежутков в средний $[\alpha, \beta]$ так, чтобы она оказалась непрерывной во всем промежутке $[m - \varepsilon_0, M]$. Обозначим построенную таким образом функцию через $\varphi(\lambda)$. Значение интеграла

$$R_l = \int_m^M \varphi(\lambda)\, d\mathcal{E}_\lambda \tag{223}$$

не зависит, очевидно, от значений $\varphi(\lambda)$ на промежутке $[\alpha, \beta]$. Пользуясь формулой (214), мы можем написать

$$\int_m^M \varphi(\lambda)\, d\mathcal{E}_\lambda \cdot \int_m^M (\lambda - l)\, d\mathcal{E}_\lambda =$$

$$= \int_m^M (\lambda - l)\, d\mathcal{E}_\lambda \cdot \int_m^M \varphi(\lambda)\, d\mathcal{E}_\lambda = \int_m^M (\lambda - l)\, \varphi(\lambda)\, d\mathcal{E}_\lambda,$$

и, принимая во внимание, что $\varphi(\lambda) = 1:(\lambda - l)$ при $\lambda \leqslant \alpha$ и $\lambda \geqslant \beta$ и что $\mathfrak{E}_\lambda$ постоянна на промежутке $[\alpha, \beta]$, получим

$$\int_m^M \varphi(\lambda)(\lambda - l)\, d\mathfrak{E}_\lambda) = \int_m^\alpha d\mathfrak{E}_\lambda + \int_\beta^M d\mathfrak{E}_\lambda = \mathfrak{E}_\alpha + (E - \mathfrak{E}_\beta) = E,$$

откуда и следует, что (223) дает резольвенту. Вместо интеграла (223) мы можем, очевидно, взять интеграл (221), производя интегрирование от $m - \varepsilon_0$ до α и от β до M. Из доказанной теоремы следует, что значение $\lambda = l$, принадлежащее $[m, M]$, регулярно, если его можно покрыть промежутком постоянства $\mathfrak{E}_\lambda$. В следующей теореме мы покажем, что это условие не только достаточно для регулярности, но и необходимо.

Теорема 3. *Если при вещественном значении $\lambda = l$ существует резольвента R_l, то l находится внутри некоторого промежутка $[\alpha, \beta]$, в котором $\mathfrak{E}_\lambda$ постоянно.*

Пусть $[\alpha, \beta]$ — любой промежуток, содержащий l внутри себя, и $\Delta\mathfrak{E}_\mu = \mathfrak{E}_\beta - \mathfrak{E}_\alpha$. Согласно определению резольвенты, $\Delta\mathfrak{E}_\mu x = R_l(A - lE)\Delta\mathfrak{E}_\mu x$. Но, в силу (216), можем написать

$$(A - lE)\Delta\mathfrak{E}_\mu x = \int_\alpha^\beta (\lambda - l)\Delta\mathfrak{E}_\lambda x,$$

и, таким образом,

$$\Delta\mathfrak{E}_\mu x = R_l\left[\int_\alpha^\beta (\lambda - l)\, d\mathfrak{E}_\lambda x\right]$$

$$(\alpha < l < \beta).$$

Обозначим через N норму оператора R_l:

$$\|\Delta\mathfrak{E}_\mu x\| \leqslant N\left\|\int_\alpha^\beta (\lambda - l)\, d\mathfrak{E}_\lambda x\right\|. \tag{224}$$

На промежутке $[\alpha, \beta]$ мы имеем $|\lambda - l| < \beta - \alpha$, и, в силу (203), неравенство (224) приводит к неравенству

$$\|\Delta\mathfrak{E}_\mu x\| \leqslant N(\beta - \alpha)\|\Delta\mathfrak{E}_\mu x\|. \tag{225}$$

Выберем промежуток $[\alpha, \beta]$, содержащий l внутри себя, настолько малым, чтобы имело место неравенство $N(\beta - \alpha) < 1$. При этом из неравенства (225) будет непосредственно следовать, что $|\Delta\mathfrak{E}_\mu| = 0$, т. е. $\mathfrak{E}_\beta = \mathfrak{E}_\alpha$, и промежуток $[\alpha, \beta]$ оказывается промежутком постоянства $\mathfrak{E}_\lambda$. Сопоставляя теоремы 2 и 3, приходим к следующему следствию:

Следствие. *Для регулярности вещественного значения λ необходимо и достаточно, чтобы λ заключалось внутри некоторого промежутка постоянства $\mathfrak{E}_\lambda$.*

Из этого следствия непосредственно вытекает, что если некоторое вещественное значение λ регулярно, то все вещественные значения λ, к нему достаточно близкие, также регулярны, т. е. регулярные значения λ образуют открытое множество на вещественной оси, и, следовательно, приходим еще к следствию: *точки спектра образуют замкнутое множество.*

Напишем формулу билинейного функционала для оператора R_l:

$$(R_l x, y) = \int_m^M \frac{1}{\lambda - l}\, d\,(\mathcal{E}_\lambda x, y). \tag{226}$$

В этом интеграле мы можем за промежуток интегрирования взять промежуток $(-\infty, +\infty)$ [**108**], и $(\mathcal{E}_\lambda x, y)$ есть функция ограниченной вариации от λ. Полагая $\lambda = \sigma + i\tau$ и применяя формулу обращения интеграла Коши — Стилтьеса [**30**], мы получим следующее выражение спектральной функции через резольвенту:

$$\frac{1}{2}\left[(\mathcal{E}_{\lambda-0} x, y) + (\mathcal{E}_{\lambda+0} x, y)\right] =$$

$$= \lim_{\tau \to +0} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\lambda} ((R_{\sigma+\tau i} - R_{\sigma-\tau i})\, x, y)\, d\sigma. \tag{227}$$

Если λ — точка непрерывности $\mathcal{E}_\lambda$, то левая часть написанной формулы равна $(\mathcal{E}_\lambda x, y)$. В точках разрыва значение $(\mathcal{E}_\lambda x, y)$ определяется по непрерывности справа. Отметим, что резольвента R_l определяется через сам оператор A, тем самым из формулы (227) следует, что у заданного самосопряженного оператора A имеется только одна спектральная функция, через которую он выражается формулой (204). Отметим еще, что в силу теоремы 1, из [**143**] операторы R_l при различных l коммутируют.

145. Собственные значения и собственные элементы. Пользуясь спектральной функцией, можно очень просто определить собственные значения и собственные элементы самосопряженного оператора.

Теорема. *Для того чтобы $\lambda = \lambda_0$ было собственным значением самосопряженного оператора A со спектральной функцией $\mathcal{E}_\lambda$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathcal{E}_\lambda$ имело точку λ_0 точкой разрыва непрерывности, т. е. $\mathcal{E}_{\lambda_0} - \mathcal{E}_{\lambda_0 - 0} > 0$. При этом $\mathcal{E}_{\lambda_0} - \mathcal{E}_{\lambda_0 - 0}$ есть проектор в подпространство M_0 собственных элементов, соответствующих собственному значению λ_0.*

Пусть M_0 есть подпространство, соответствующее проектору $\mathcal{E}_{\lambda_0} - \mathcal{E}_{\lambda_0 - 0}$. Если λ_0 есть точка непрерывности $\mathcal{E}_{\lambda_0}$, то M_0 состоит только из нулевого элемента. Доказательство теоремы сводится к доказательству следующих двух утверждений: если $x_0 \in M_0$, то $(A - \lambda_0 E)\, x_0 = 0$, и обратно, если $(A - \lambda_0 E)\, x_0 = 0$, то $x_0 \in M_0$. Итак,

положим сначала, что $x_0 \in M_0$, т. е. $(\mathcal{E}_{\lambda_0} - \mathcal{E}_{\lambda_0 - 0})\, x_0 = x_0$. При этом тем более $\mathcal{E}_{\lambda_0} x_0 = x_0$ и, следовательно, $\mathcal{E}_{\lambda_0 - 0} x_0 = 0$. Принимая во внимание, что $\mathcal{E}_\lambda$ не убывает при возрастании λ, мы можем утверждать, что $\mathcal{E}_\lambda x_0 = x_0$ при $\lambda \geqslant \lambda_0$ и $\mathcal{E}_\lambda x_0 = 0$ при $\lambda < \lambda_0$. Применим к элементу x_0 формулу (205):

$$Ax_0 = \int_m^M \lambda d\mathcal{E}_\lambda x_0, \tag{228}$$

и при составлении сумм σ_δ будем считать, что λ_0 есть точка деления. В силу предыдущего все разности $\Delta_k \mathcal{E}_\lambda x_0$ обратятся в нуль, кроме одной, соответствующей частичному промежутку с правым концом λ_0, т. е.

$$Ax_0 = \lim_{\varepsilon \to 0} \nu_0 (\mathcal{E}_{\lambda_0} - \mathcal{E}_{\lambda_0 - \varepsilon})\, x_0,$$

где $\lambda_0 - \varepsilon \leqslant \nu_0 \leqslant \lambda_0$. Переходя к пределу, мы получим

$$Ax_0 = \lambda_0 (\mathcal{E}_{\lambda_0} - \mathcal{E}_{\lambda_0 - \varepsilon})\, x_0,$$

но по условию $x_0 \in M_0$, и, следовательно, правая часть последней формулы равна $\lambda_0 x_0$, т. е. x_0 удовлетворяет уравнению $(A - \lambda_0 E)\, x_0 = 0$. Положим теперь наоборот, что x_0 удовлетворяет этому уравнению, и покажем, что $x_0 \in M_0$. Из $(A - \lambda_0 E)\, x_0 = 0$ следует:

$$((A - \lambda_0 E)^2 x_0,\ x_0) = 0, \tag{229}$$

или, выражая билинейный функционал через интеграл Стилтьеса:

$$\int_m^M (\lambda - \lambda_0)^2\, d \| \mathcal{E}_\lambda x_0 \|^2 = 0. \tag{230}$$

Интегрируемая функция $(\lambda - \lambda_0)^2$ неотрицательна, и функция, стоящая под знаком дифференциала, есть неубывающая функция λ. Отсюда следует, что все элементы интеграла (230) неотрицательны, и величина этого интеграла по любой части промежутка интегрирования также должна равняться нулю. Взяв некоторое положительное число ε, мы можем написать

$$\int_{\lambda_0 + \varepsilon}^M (\lambda - \lambda_0)^2\, d \| \mathcal{E}_\lambda x_0 \|^2 = 0. \tag{231}$$

Интегрируемая функция $(\lambda - \lambda_0)^2$ на промежутке интегрирования $\geqslant \varepsilon^2$, и из формулы (231) тем более следует, что

$$\varepsilon^2 \int_{\lambda_0 + \varepsilon}^M d \| \mathcal{E}_\lambda x_0 \|^2 = 0,$$

т. е.

$$\varepsilon^2 [\, \| x_0 \|^2 - \| \mathcal{E}_{\lambda_0 + \varepsilon} x_0 \|^2] = 0.$$

Ввиду произвольности ε отсюда вытекает, что $\mathcal{E}_\lambda x_0 = x_0$ при $\lambda > \lambda_0$. Совершенно аналогично можно показать, что $\mathcal{E}_\lambda x_0 = 0$ при $\lambda < \lambda_0$. Отсюда непосредственно вытекает, что $x_0 = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} (\mathcal{E}_{\lambda_0+\varepsilon} - \mathcal{E}_{\lambda_0-\varepsilon}) x_0 = (\mathcal{E}_{\lambda_0} - \mathcal{E}_{\lambda_0-0}) x_0$, и теорема таким образом доказана.

Если оператор A имеет собственные значения, то, вводя в каждом подпространстве собственных элементов, соответствующих фиксированному собственному значению, замкнутую ортонормированную систему, мы придем к ортонормированной системе собственных элементов оператора A [**128**]:

$$x_1, \; x_2, \; x_3, \; \ldots, \tag{232}$$

и к последовательности соответствующих собственных значений

$$\mu_1, \; \mu_2 \; \mu_3, \; \ldots \tag{233}$$

Если r — ранг некоторого собственного значения, то оно фигурирует r раз в последовательности (233). Число r может равняться и бесконечности.

Обозначая через λ_k ($k = 1, 2, \ldots$) точки разрыва $\mathcal{E}_\lambda$ и через L_k соответствующие подпространства собственных элементов, мы можем написать

$$P_{L_k} = \mathcal{E}_{\lambda_k} - \mathcal{E}_{\lambda_k - 0}. \tag{234}$$

Составим ортогональную сумму подпространств L_k:

$$H' = L_1 \oplus L_2 \oplus L_3 \oplus \ldots \tag{235}$$

Оператор проектирования в подпространство H' выражается, как мы знаем, формулой

$$P_{H'} = P_{L_1} + P_{L_2} + P_{L_3} + \ldots \tag{236}$$

Подпространство H' есть подпространство, состоящее из элементов x, которые могут быть выражены через элементы ортогональной и нормированной системы (232) при помощи сходящегося ряда

$$x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \ldots \tag{237}$$

146. Чисто точечный спектр. Говорят, что самосопряженный оператор A имеет чисто точечный спектр, если ортогональная нормированная система (232) замкнута в пространстве H (сепарабельном) [**ср. 128**]. Это равносильно тому, что подпространство H', определяемое формулой (235), совпадает с H, или тому, что проектор $P_{H'}$, определяемый формулой (236), есть тождественное преобразование, т. е.

$$E = \sum_k P_{L_k}. \tag{238}$$

Умножая обе части этой формулы на $\mathcal{E}_\lambda$ и принимая во внимание, что $(\mathcal{E}_{\lambda_k} - \mathcal{E}_{\lambda_k - 0})\mathcal{E}_\lambda = 0$ при $\lambda < \lambda_k$ и равно $\mathcal{E}_{\lambda_k} - \mathcal{E}_{\lambda_k - 0}$ при $\lambda \geqslant \lambda_k$, мы получим выражение для $\mathcal{E}_\lambda$ через скачки этого проектора:

$$\mathcal{E}_\lambda = \sum_{\lambda_k \leqslant \lambda} P_{L_k} = \sum_{\lambda_k \leqslant \lambda} (\mathcal{E}_{\lambda_k} - \mathcal{E}_{\lambda_k - 0}). \tag{239}$$

В рассматриваемом случае любой элемент x представляется рядом (237), причем a_k суть коэффициенты Фурье x относительно системы (232). Применяя к обеим частям формулы (237) оператор A и принимая во внимание, что $Ax_k = \mu_k x_k$, мы получим

$$Ax = \sum_s a_s \mu_s x_s. \tag{240}$$

Умножая скалярно на y и обозначая через b_s коэффициенты Фурье элемента y, т. е.

$$b_s = (y, x_s); \qquad \bar{b}_s = (x_s, y),$$

получаем выражение для билинейного функционала:

$$(Ax, y) = \sum_s \mu_s a_s \bar{b}_s. \tag{241}$$

При $y = x$ получаем формулу для квадратичного функционала

$$(Ax, x) = \sum_s \mu_s |a_s|^2, \tag{242}$$

которая вполне аналогична формуле представления квадратичной формы (формы Эрмита) в виде суммы квадратов. Таким образом, в случае чисто точечного спектра имеем очень простое представление для самого оператора A, билинейного и квадратичного функционалов при помощи ортогональной нормированной системы (232). Переходим к рассмотрению так называемого чисто непрерывного спектра.

147. Непрерывный простой спектр. Говорят, что самосопряженный оператор A имеет чисто непрерывный спектр, если спектральная функция $\mathcal{E}_\lambda$ непрерывна при всех значениях λ. Нашей задачей является построение для случая чисто непрерывного спектра формул, аналогичных формулам предыдущего параграфа. Предварительно нам надо будет ввести одно новое понятие.

Пусть e — некоторое множество элементов из H и $x_1, x_2 \ldots, x_n$ — какие-либо элементы H, принадлежащие e. Образуем их линейные комбинации $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ с произвольными коэффициентами c_k. Множество элементов H, которое можно, таким образом, представить в виде конечных линейных комбинаций элементов, при-

надлежащих e, представляет собой, очевидно, некоторый линеал L. Введем новое понятие.

Определение. *Замкнутой линейной оболочкой множества E элементов H называется замыкание указанного линеала L.*

Замкнутая линейная оболочка есть подпространство, и характерное свойство принадлежащих ему элементов x состоит в следующем: для любого заданного положительного ε существует такое конечное множество элементов $x_1, x_2 \ldots, x_n$, принадлежащих e, и такие числа c_k, что

$$\| x - (c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n) \| \leqslant \varepsilon.$$

В частности, упомянутому подпространству принадлежат, очевидно, все конечные линейные комбинации элементов из e.

Пусть $\mathcal{E}_\lambda$ — спектральная функция оператора с чисто непрерывным спектром. Отметим, что в этом случае $\mathcal{E}_m = 0$. Берем некоторый элемент x, отличный от нулевого, и образуем множество элементов

$$\mathcal{E}_\lambda x, \tag{243}$$

где λ пробегает все значения от m до M. Обозначим через C_x замкнутую линейную оболочку элементов (243). Для любого элемента y из H мы можем составить соответствующую ему непрерывную функцию от λ

$$\varphi_y(\lambda) = (y, \mathcal{E}_\lambda x). \tag{244}$$

Эта функция, очевидно, дистрибутивна по отношению к значку y, т. е.

$$\varphi_{ay+bz}(\lambda) = a\varphi_y(\lambda) + b\varphi_z(\lambda).$$

Составим, кроме того, следующие две непрерывные функции от λ:

$$\rho(\lambda) = (\mathcal{E}_\lambda x, x) = \| \mathcal{E}_\lambda x \|^2; \quad h_y(\lambda) = (\mathcal{E}_\lambda y, y) = \| \mathcal{E}_\lambda y \|^2. \tag{245}$$

Они, как мы знаем, не убывают при возрастании λ. Если Δ есть любой промежуток $[\alpha, \beta]$, то введем для любой функции $f(\lambda)$ обычное обозначение

$$\Delta f(\lambda) = f(\beta) - f(\alpha). \tag{246}$$

Мы имеем, например:

$$\Delta\rho(\lambda) = (\Delta\mathcal{E}_\lambda x, x) = ((\mathcal{E}_\beta - \mathcal{E}_\alpha) x, x),$$

т. е.

$$\Delta\rho(\lambda) = \| \Delta\mathcal{E}_\lambda x \|^2, \tag{247}$$

и аналогично

$$\Delta h_y(\lambda) = \| \Delta\mathcal{E}_\lambda y \|^2. \tag{248}$$

Для функции $\varphi_y(\lambda)$ имеем

$$\Delta\varphi_y(\lambda) = (y, \Delta\mathcal{E}_\lambda x) = (y, (\Delta\mathcal{E}_\lambda)^2 x) = (\Delta\mathcal{E}_\lambda y, \Delta\mathcal{E}_\lambda x),$$

и, следовательно:

$$|\Delta\varphi_y(\lambda)|^2 \leqslant \|\Delta\mathcal{E}_\lambda x\|^2 \cdot \|\Delta\mathcal{E}_\lambda y\|^2,$$

т. е.

$$|\Delta\varphi_y(\lambda)|^2 \leqslant \Delta\rho(\lambda)\Delta h_y(\lambda).$$

Отсюда видно, что существует интеграл [81]

$$\int_m^M \frac{d\varphi_y(\lambda)\,\overline{d\varphi_y(\lambda)}}{d\rho(\lambda)} = \int_m^M \frac{|d\varphi_y(\lambda)|^2}{d\rho(\lambda)}. \tag{249}$$

Мы покажем дальше, что если $y \in C_x$, то этот интеграл равен $\|y\|^2$. Разобьем промежуток $[m, M]$ на частичные промежутки Δ_k $(k = 1, 2 \ldots, n)$ и составим следующие элементы пространства H:

$$\frac{\Delta_k\mathcal{E}_\lambda x}{\sqrt{\Delta_k\rho(\lambda)}}. \tag{250}$$

Если на интервале Δ_k функция $\rho(\lambda)$ постоянна, то и $\Delta_k\mathcal{E}_\lambda x = 0$, и соответствующее выражение (250) не имеет смысла. Мы условимся такие не имеющие смысла члены выбрасывать из дальнейших формул. В силу (183) и (247) остальные элементы (250) попарно ортогональны и нормированы. Коэффициенты Фурье элемента y относительно системы (250) имеют вид

$$\frac{(y, \Delta_k\mathcal{E}_\lambda x)}{\sqrt{\Delta_k\rho(\lambda)}} = \frac{\Delta_k\varphi_y(\lambda)}{\sqrt{\Delta_k\rho(\lambda)}}.$$

Квадрат нормы разности элемента y и его ряда Фурье выражается, как известно [121], формулой

$$\left\|y - \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta_k\varphi_y(\lambda)}{\Delta_k\rho(\lambda)}\,\Delta_k\mathcal{E}_\lambda x\right\|^2 = \|y\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{|\Delta_k\varphi_y(\lambda)|^2}{\Delta_k\rho(\lambda)}, \tag{251}$$

что приводит к неравенству Бесселя

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|\Delta_k\varphi_y(\lambda)|^2}{\Delta_k\rho(\lambda)} \leqslant \|y\|^2, \tag{252}$$

и в пределе:

$$\int_m^M \frac{|d\varphi_y(\lambda)|^2}{d\rho(\lambda)} \leqslant \|y\|^2. \tag{253}$$

Теорема 1. *Если $y \in C_x$, то имеет место формула*

$$\|y\|^2 = \int_m^M \frac{|d\varphi_y(\lambda)|^2}{d\rho(\lambda)}. \tag{254}$$

Если $y \in C_x$, то, в силу того, что C_x есть замкнутая линейная оболочка $\mathcal{E}_\lambda x$, для любого заданного положительного ε существует такое конечное множество элементов $\mathcal{E}_{\lambda_s} x\,(s = 1, 2 \ldots, p)$ из $\mathcal{E}_\lambda x$ и такие числа c_s, что

$$y = \sum_{s=1}^{p} c_s \mathcal{E}_{\lambda_s} x + z \quad \text{и} \quad \|z\| \leqslant \varepsilon. \tag{255}$$

Примем точки $\lambda_s\,(s = 1, 2, \ldots, p)$ за точки деления промежутка $[m, M]$, добавив еще точки $\lambda_0 = m$ и $\lambda_{p+1} = M$, если их не было среди прежних λ_s, и введем полученные таким образом частичные промежутки $[\lambda_{s-1}, \lambda_s]$ $(s = 1, 2, \ldots, p+1)$, обозначая их через Δ'_s. Мы имеем $\mathcal{E}_{\lambda_0} = 0$ и $\mathcal{E}_{\lambda_{p+1}} = E$ и можем написать, вводя обычное обозначение $\Delta'_s \mathcal{E}_\lambda = \mathcal{E}_{\lambda_s} - \mathcal{E}_{\lambda_{s-1}}$:

$\mathcal{E}_{\lambda_1} = \Delta'_1 \mathcal{E}_\lambda$; $\mathcal{E}_{\lambda_2} = \Delta'_1 \mathcal{E}_\lambda + \Delta'_2 \mathcal{E}_\lambda$; $\mathcal{E}_{\lambda_3} = \Delta'_1 \mathcal{E}_\lambda + \Delta'_2 \mathcal{E}_\lambda + \Delta'_3 \mathcal{E}_\lambda$;

Сравнивая это неравенство с (253) и учитывая произвольность ε, видим, что точная верхняя граница сумм, входящих в неравенство (252), равна $\|y\|^2$, т. е. имеет место формула (254). Пользуясь этой формулой и формулой

$$(y, z) = \frac{1}{2}\|y+z\|^2 + \frac{i}{2}\|y+iz\|^2 - \frac{1+i}{2}[\|y\|^2 + \|z\|^2],$$

мы получим для y и z, принадлежащих C_x, более общую формулу

$$(y, z) = \int_m^M \frac{d\varphi_y(\lambda)\,\overline{d\varphi_z(\lambda)}}{d\rho(\lambda)}, \tag{256}$$

где

$$\varphi_z(\lambda) = (z, \mathcal{E}_\lambda x). \tag{257}$$

Для вывода аналогичных формул для билинейного функционала докажем теорему.

Теорема 2. *Если $y \in C_x$, то $\mathcal{E}_\lambda y$ и Ay также принадлежат C_x.*

Раз $y \in C_x$, то или y есть конечная линейная комбинация элементов $\mathcal{E}_{\lambda_s} x$:

$$y = \sum_{s=1}^{p} c_s \mathcal{E}_{\lambda_s} x, \tag{258}$$

или y есть предел таких линейных комбинаций. В первом случае

$$\mathcal{E}_\lambda y = \sum_{s=1}^{p} c_s \mathcal{E}_\lambda \mathcal{E}_{\lambda_s} x.$$

Но, в силу (180), $\mathcal{E}_\lambda \mathcal{E}_{\lambda_s} = \mathcal{E}_\lambda$ при $\lambda \leqslant \lambda_s$ и $\mathcal{E}_\lambda \mathcal{E}_{\lambda_s} = \mathcal{E}_{\lambda_s}$ при $\lambda \geqslant \lambda_s$, т. е. $\mathcal{E}_\lambda y$ есть также конечная линейная комбинация элементов из C_x и $\mathcal{E}_\lambda y \in C_x$. Если y есть предел конечных линейных комбинаций элементов из C_x:

$$y = \lim_{n\to\infty} \sum_{s=1}^{p_n} c_s^{(n)} \mathcal{E}_{\lambda_s^{(n)}} x,$$

то

$$\mathcal{E}_\lambda y = \lim_{n\to\infty} \sum_{s=1}^{p_n} c_s^{(n)} \mathcal{E}_\lambda \mathcal{E}_{\lambda_s^{(n)}} x,$$

т. е. $\mathcal{E}_\lambda y$ есть также предел конечных линейных комбинаций из C_x, а потому и в этом случае $\mathcal{E}_\lambda y \in C_x$. Элемент Ay, в силу (205), есть предел конечных линейных комбинаций $\mathcal{E}_\lambda y$. Любое $\mathcal{E}_\lambda y \in C_x$ по доказанному, а потому всякая конечная линейная комбинация $\mathcal{E}_\lambda y$ и предел таких линейных комбинаций также принадлежат C_x, т. е. $Ay \in C_x$, и теорема доказана.

Таким образом, мы можем написать формулу (256), заменив y на Ay.

При этом $\varphi_y(\lambda)$ заменится функцией

$$\varphi_{Ay}(\lambda) = (Ay, \mathcal{E}_\lambda x) = \int_m^M \mu d_\mu (\mathcal{E}_\mu y, \mathcal{E}_\lambda x) = \int_m^M \mu d_\mu (y, \mathcal{E}_\mu \mathcal{E}_\lambda x),$$

и, принимая во внимание (180), получим

$$\varphi_{Ay}(\lambda) = \int_m^\lambda \mu d_\mu \varphi_y(\mu),$$

и формула (256) даст нам

$$(Ay, z) = \int_m^M \frac{d\left(\int_m^\lambda \mu d_\mu \varphi_y(\mu)\right)\overline{d\varphi_z(\lambda)}}{d\rho(\lambda)},$$

или, принимая во внимание свойство интегралов Хеллингера [83], получим формулу

$$(Ay, z) = \int_m^M \lambda \frac{d\varphi_y(\lambda)\,\overline{d\varphi_z(\lambda)}}{d\rho(\lambda)}. \tag{259}$$

Далее, в силу (254), при беспредельном измельчании частичных промежутков Δ_k выражение, стоящее в правой части формулы (251), стремится к нулю, и, следовательно,

$$\sum_{k=1}^n \frac{\Delta_k \varphi_y(\lambda)}{\Delta_k \rho(\lambda)} \Delta_k \mathcal{E}_\lambda x \Rightarrow y.$$

Слагаемые написанной суммы суть элементы H, и предел этой суммы естественно записать в виде интеграла Хеллингера, как это мы делали для обычных сумм:

$$y = \int_m^M \frac{d\varphi_y(\lambda)}{d\rho(\lambda)} d\mathcal{E}_\lambda x. \quad (y \varepsilon C_x) \tag{260}$$

Если применить эту формулу к элементу Ay вместо y, то, рассуждая аналогично, получим формулу

$$Ay = \int_m^M \lambda \frac{d\varphi_y(\lambda)}{d\rho(\lambda)} d\mathcal{E}_\lambda x \tag{261}$$

или, как предел суммы,

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \frac{\Delta_k \varphi_y(\lambda)}{\Delta_k \rho(\lambda)} \Delta_k \mathcal{E}_\lambda x \Rightarrow Ay. \tag{262}$$

Отметим, что, пользуясь аналогичными суммами и предельным переходом в H, мы можем вообще определить интеграл Хеллингера для элементов H. Применим теперь формулы (256) и (260) не к элементу Ay, а к элементу $\mathcal{E}_\mu y$, который также принадлежит C_x, где μ — фиксированное число из промежутка $[m, M]$. Мы имеем

$$\varphi_{\mathcal{E}_\mu y}(\lambda) = (\mathcal{E}_\mu y,\ \mathcal{E}_\lambda x) = (y,\ \mathcal{E}_\mu \mathcal{E}_\lambda x) = \begin{cases} (y,\ \mathcal{E}_\lambda x) & \text{при } \lambda \leqslant \mu, \\ (y,\ \mathcal{E}_\mu x) & \text{при } \lambda \geqslant \mu, \end{cases}$$

т. е.

$$\varphi_{\mathcal{E}_\mu y}(\lambda) = \begin{cases} \varphi_y(\lambda) & \text{при } \lambda \leqslant \mu, \\ \varphi_y(\mu) & \text{при } \lambda \geqslant \mu, \end{cases}$$

и упомянутые выше формулы дают нам непосредственно

$$(\mathcal{E}_\mu y,\ z) = \int_m^\mu \frac{d\varphi_y(\lambda)\, \overline{d\varphi_z(\lambda)}}{d\rho(\lambda)}, \tag{263}$$

$$\mathcal{E}_\mu y = \int_m^\mu \frac{d\varphi_y(\lambda)}{d\rho(\lambda)}\, d\mathcal{E}_\lambda x. \tag{264}$$

Отметим, что формула (256) равносильна обобщенному уравнению замкнутости, а формулы (259) и (261) — формулам (241) и (240) предыдущего параграфа. Упомянутые формулы настоящего параграфа выведены в предположении, что y и $z \in C_x$. Говорят, что самосопряженный оператор A имеет простой непрерывный спектр, если существует такой элемент x из H, что C_x совпадает с H. Если это имеет место, и мы возьмем за x только что указанный элемент, то упомянутые формулы справедливы для любых элементов y и z из H.

148. Инвариантные подпространства. Для исследования непростого непрерывного спектра и смешанного спектра, т. е. того случая, когда собственные элементы существуют, но не образуют замкнутой системы элементов, нам надо предварительно ввести новое понятие и доказать некоторые факты.

Определение. *Подпространство L называется инвариантным подпространством для оператора A при соблюдении следующего условия: если $x \in L$, то и $Ax \in L$. Иначе в этом случае говорят, что L приводит A.*

Смысл этого определения состоит в следующем. Если L приводит A, то оператор A можно рассматривать отдельно как оператор, определенный в L, причем L или конечномерно, или его можно считать гильбертовым пространством. Иначе говоря, оператор A, определенный во всем H, индуцирует оператор, определенный в L, который для элементов из L совпадает с A. Рассмотрение A на отдельных инвариантных подпространствах облегчает изучение A. Отметим, что если A — самосопряженный оператор в H, то он будет, очевидно, самосопряженным оператором и в любом инвариантном для него подпространстве. В дальнейшем мы будем изучать инвариантные подпространства лишь для самосопряженных операторов.

Теорема 1. *Если подпространство L приводит самосопряженный оператор A, то и дополнительное подпространство $H \ominus L$ приводит A. Для того чтобы L приводило самосопряженный оператор A, необходимо и достаточно, чтобы проектор P_L коммутировал с A, т. е.*

$$P_L A = A P_L. \tag{265}$$

Если L приводит A, то при $z \in L$ и $Az \in L$. Нам надо доказать, что если $x \perp L$, то и $Ax \perp L$. Пусть z — любой элемент из L. При этом $Az \in L$, и мы имеем

$$(Ax,\ z) = (x,\ Az) = 0,$$

и высказанное выше утверждение доказано. Переходим к доказательству условия (265). Пишем очевидное равенство

$$Ax = AP_L x + A(E - P_L)x.$$

Если L приводит A, то $A(P_L x) \in L$ и, в силу только что доказанного, $A[(E - P_L)x] \in H \ominus L$, и, следовательно, первое слагаемое правой части есть проекция Ax в L, т. е. $P_L Ax = AP_L x$ при любом x, и необходимость (265) доказана. Пусть, наоборот, выполнено (265) и $x \in L$. При этом $Ax = A(P_L x) = P_L(Ax)$, т. е. $Ax \in L$, и теорема полностью доказана. Пользуясь теоремой 2 из [143], получаем следующее непосредственное следствие доказанной теоремы:

Следствие. *Для того чтобы подпространство L приводило A, необходимо и достаточно, чтобы оно приводило $\mathfrak{E}_\lambda$ при любом λ.*

Теорема 2. *Если попарно ортогональные подпространства L_k $(k = 1, 2, \ldots)$ приводят A, то и их ортогональная сумма*

$$L = L_1 \oplus L_2 \oplus L_3 \oplus \ldots$$

приводит A.

По условию теоремы A коммутирует со всеми P_{L_k}, и тем самым оно коммутирует с их суммой

$$P_L = P_{L_1} + P_{L_2} + P_{L_3} + \ldots,$$

что и доказывает теорему. Теорема 2 справедлива и в том случае, когда A несамосопряженный оператор.

Отметим некоторые простые факты, связанные с понятием инвариантного подпространства самосопряженного оператора. Если проектор P_M коммутирует с проектором P_L, то L приводит P_M, и оператор P_M индуцирует в L проектор P_{LM} в подпространство LM. Пусть далее L приводит A и тем самым приводит его спектральную функцию $\mathcal{E}_\lambda$. Обозначим через $A^{(1)}$ и $\mathcal{E}_\lambda^{(1)}$ те операторы, которые индуцируются в L операторами A и $\mathcal{E}_\lambda$. Нетрудно проверить, что $\mathcal{E}_\lambda^{(1)}$ есть разложение единицы для $A^{(1)}$. Если в формуле (205) $x \in L$, то мы можем заменить A на $A^{(1)}$ и $\mathcal{E}_\lambda$ на $\mathcal{E}_\lambda^{(1)}$, и $\mathcal{E}_\lambda^{(1)}$ есть спектральная функция оператора $A^{(1)}$, определенного в L. В силу (223), L приводит и резольвенту R_l оператора A, причем R_l индуцирует в L резольвенту оператора $A^{(1)}$. Пусть $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, $\mathcal{E}_\lambda^{(1)}$ и $\mathcal{E}_\lambda^{(2)}$ — операторы, индуцированные самосопряженным оператором A и $\mathcal{E}_\lambda$ в инвариантном подпространстве L и дополнительном подпространстве $H \ominus L$, а $x = x_1 + x_2$ и $y = y_1 + y_2$ — разложение x и y в L и $H \ominus L$. Имеем очевидные равенства:

$$\left.\begin{aligned} Ax = A^{(1)}x_1 + A^{(2)}x_2; \quad \mathcal{E}_\lambda x = \mathcal{E}_\lambda^{(1)}x_1 + \mathcal{E}_\lambda^{(2)}x_2; \\ (Ax,\ y) = (A^{(1)}x_1,\ y) + (A^{(2)}x_2,\ y). \end{aligned}\right\} \tag{266}$$

Аналогичные формулы имеют место при разложении H на конечное или счетное число попарно ортогональных подпространств, приводящих A. Все пространство H и нулевое подпространство, т. е. подпространство, содержащее один нулевой элемент, являются тривиальными инвариантными подпространствами для любого оператора. Если оператор не имеет других инвариантных подпространств, то он называется неприводимым оператором. Всякое подпространство собственных элементов, соответствующих некоторому собственному значению λ_0 оператора A, есть инвариантное подпространство для A, и в этом подпространстве оператор A сводится к умножению элемента на число λ_0. Если x_0 — какой-либо собственный элемент, соответствующий собственному значению λ_0, то совокупность элементов вида ax_0, где a — любое комплексное число, есть также подпространство, приводящее A. Если L_k $(k = 1, 2, \ldots)$ суть все подпространства собственных элементов самосопряженного оператора A, то их ортогональная сумма H' приводит A. Пусть A' и $\mathcal{E}'_\lambda$ — операторы, индуцированные в H' операторами A и $\mathcal{E}_\lambda$. Мы имеем, согласно (234) и (236),

$$\left.\begin{aligned} A'x = \sum_k A\,(\mathcal{E}_{\lambda_k} - \mathcal{E}_{\lambda_k - 0})\,x, \\ \mathcal{E}'_\lambda x = \sum_k \mathcal{E}_\lambda\,(\mathcal{E}_{\lambda_k} - \mathcal{E}_{\lambda_k - 0})\,x = \sum_{\lambda_k \leqq \lambda} (\mathcal{E}_{\lambda_k} - \mathcal{E}_{\lambda_k - 0})\,x, \end{aligned}\right\} \tag{267}$$

т. е. $\mathcal{E}'_\lambda$ сводится к сумме скачков функции $\mathcal{E}_\lambda$ в точках λ_k, удовлетворяющих условию $\lambda_k \leqslant \lambda$. Оператор $\mathcal{E}''_\lambda$, индуцированный $\mathcal{E}_\lambda$ в подпространстве H'', дополнительном для H', представляет собой проектор в подпространство $H''M_\lambda$, где M_λ — подпространство, соответствующее проектору $\mathcal{E}_\lambda$. Любой элемент H'' ортогонален во всем L_k, т. е. $(\mathcal{E}_{\lambda_k} - \mathcal{E}_{\lambda_k - 0})\, x = 0$, если $x \in H''$, и для любого x, принадлежащего H'', мы можем представить $\mathcal{E}''_\lambda$ в виде разности

$$\mathcal{E}''_\lambda = \mathcal{E}_\lambda - \sum_{\lambda_k \leq \lambda} (\mathcal{E}_{\lambda_k} - \mathcal{E}_{\lambda_k - 0}),$$

и, следовательно, $\mathcal{E}''_\lambda$ непрерывно при всех λ. Таким образом, если спектр A не чисто точечный, то подпространство H'' содержит элементы, отличные от нулевого, спектральная функция непрерывна в нем, и оператор не имеет вовсе собственных значений в H''. В H' собственные элементы образуют замкнутую систему, и оператор A' имеет чисто точечный спектр в H'.

149. Общий случай непрерывного спектра. Мы видели, что если элемент y принадлежит подпространству C_x, построенному в [147], то и $Ay \in C_x$, т. е. C_x, приводит A. Если оператор A не имеет точечного спектра, т. е. его спектральная функция $\mathcal{E}_\lambda$ непрерывна при всех значениях λ, и его непрерывный спектр не является простым, то, как мы покажем, пространство H можно представить в виде ортогональной суммы подпространств типа C_x. В каждом из этих подпространств индуцированный оператором A оператор будет иметь простой непрерывный спектр, и для элементов, принадлежащих такому подпространству, мы будем иметь формулы, выведенные в [147]. Соответственные формулы для любых элементов из H будут получаться при помощи разложения элемента по упомянутым выше подпространствам, и, в силу (266), эти формулы будут получаться путем сложения соответствующих формул для отдельных подпространств. Приведем упомянутое представление H, в виде ортогональной суммы подпространств типа C_x, считая пространство H сепарабельным. Возьмем какую-нибудь замкнутую ортогональную нормированную систему

$$u_1, u_2, u_3, \ldots$$

Положив $y_1 = u_1$, построим C_{y_1}. Элемент u_2 мы можем представить в виде $u_2 = v_2 + y_2$, где $v_2 \in C_{y_1}$ и $y_2 \perp C_{y_1}$. Если $y_2 \neq 0$, то строим C_{y_2}. Покажем, что $C_{y_2} \perp C_{y_1}$. По условию, при любом λ мы имеем $(y_2, \mathcal{E}_\lambda y_1) = 0$, ибо $\mathcal{E}_\lambda y_1 \in C_{y_1}$. Получим далее: $(\mathcal{E}_\mu y_2, \mathcal{E}_\lambda y_1) = (y_2, \mathcal{E}_\mu \mathcal{E}_\lambda y_1) = 0$. Отсюда следует, что любая линейная комбинация элементов $\mathcal{E}_\mu y_2$ ортогональна любой линейной комбинации $\mathcal{E}_\lambda y_1$, и в пределе любой элемент из C_{y_2} ортогонален любому элементу из C_{y_1}. Далее берем элемент u_3 и представляем его в виде $u_3 = v_3 + y_3$,

где $v_3 \in C_{y_1} \oplus C_{y_2}$ и $y_3 \perp \dot{C}_{y_1} \oplus \dot{C}_{y_2}$, и строим C_{y_3}. Как и выше, доказываем, что $C_{y_3} \perp C_{y_1}$ и $C_{y_3} \perp C_{y_2}$ и т. д. Таким образом, мы получим конечное или счетное число попарно ортогональных подпространств C_{y_k}, и поскольку каждый элемент x из H разлагается по элементам u_k, которые образуют замкнутую систему, то тем самым ортогональная сумма подпространств C_{y_k} дает все H:

$$H = C_{y_1} \oplus C_{y_2} \oplus C_{y_3} \oplus \ldots \tag{268}$$

В каждом из подпространств C_{y_k} мы будем иметь формулы, указанные в [147], и таким образом для любых элементов y и z из H можем написать

$$(y,\ z) = \sum_k \int_m^M \frac{d(y,\ \mathcal{E}_\lambda y_k)\, d(\mathcal{E}_\lambda y_k,\ z)}{d\rho_k(\lambda)}, \tag{269}$$

$$(\mathcal{E}_\mu y,\ z) = \sum_k \int_m^\mu \frac{d(y,\ \mathcal{E}_\lambda y_k)\, d(\mathcal{E}_\lambda y_k,\ z)}{d\rho_k(\lambda)}, \tag{270}$$

$$(Ay,\ z) = \sum_k \int_m^M \lambda \frac{d(y,\ \mathcal{E}_\lambda y_k)\, d(\mathcal{E}_\lambda,\ y_k z)}{d\rho_k(\lambda)}, \tag{271}$$

$$y = \sum_k \int_m^M \frac{d(y,\ \mathcal{E}_\lambda y_k)}{d\rho_k(\lambda)} d\mathcal{E}_\lambda y_k;\quad Ay = \sum_k \int_m^M \lambda \frac{d(y,\ \mathcal{E}_\lambda y_k)}{d\rho_k(\lambda)} d\mathcal{E}_\lambda y_k, \tag{272}$$

$$\mathcal{E}_\mu y = \sum_k \int_m^\mu \frac{d(y,\ \mathcal{E}_\lambda\ y_k)}{d\rho_k(\lambda)}\, d\mathcal{E}_\lambda y_k, \tag{273}$$

где $\rho_k(\lambda) = \| \mathcal{E}_\lambda y_k \|^2$, и написанные суммы могут быть как конечными, так и бесконечными. В последнем случае для формул (272) и (273), содержащих элементы H, сходимость ряда надо понимать как сходимость элементов H.

Указанный выше прием построения подпространств C_y можно записать в виде формул, которые мы сейчас укажем. Если v — любой элемент H, то его проекция в C_{y_k} определяется соответствующим слагаемым первой из формул (272), т. е.

$$v_k = \int_m^M \frac{d(v,\ \mathcal{E}_\lambda y_k)}{d\rho_k(\lambda)}\, d\,\mathcal{E}_\lambda y_k,$$

и для $\mathcal{E}_\lambda v_k$ получаем, принимая, как всегда, во внимание (180),

$$\mathcal{E}_\lambda v_k = \int_m^\lambda \frac{d(v,\ \mathcal{E}_\mu\ y\ )}{d\rho_k(\mu)}\, d\mathcal{E}_\mu y_k. \tag{274}$$

Из этого замечания непосредственно вытекают следующие формулы, которые соответствуют указанному выше процессу построения подпространств C_{y_k}:

$$\mathcal{E}_\lambda y_1 = \mathcal{E}_\lambda u_1;\ \mathcal{E}_\lambda y_k = \mathcal{E}_\lambda u_k - \sum_{s=1}^{k-1} \int_m^\lambda \frac{d(u_k, \mathcal{E}_\mu y_s)}{d\rho_s(\mu)}\, d\mathcal{E}_\mu y_s. \quad (275)$$

При различном выборе исходной системы u_k подпространства C_{y_k} получаются, вообще говоря, различными. Может случиться, что и число этих подпространств окажется различным. Целесообразно с самого начала по возможности расширять эти подпространства.

Можно показать, что возможно такое построение C_{y_k}, при кото-

В дополнительном подпространстве H'' оператор A имеет лишь чисто непрерывный спектр. Принимая во внимание формулы из [149] и из [146], получаем следующие общие формулы, в которых суммы происходят от точечного спектра в H', и интегралы от непрерывного спектра в H'':

$$(y,\ z)=\sum_k a_k\bar{b}_k+\sum_k\int_m^M \frac{d(y,\ \mathcal{E}_\lambda y_k)\,d(\mathcal{E}_\lambda y_k,\ z)}{d\rho_k(\lambda)}, \tag{277}$$

$$(Ay,\ z)=\sum_k \mu_k a_k\bar{b}_k+\sum_k\int_m^M \lambda\frac{d(y,\ \mathcal{E}_\lambda y_k)\,d(\mathcal{E}_\lambda y_k,\ z)}{d\rho_k(\lambda)}, \tag{278}$$

$$y=\sum_k a_k x_k+\sum_k\int_m^M \frac{d(y,\ \mathcal{E}_\lambda y_k)}{d\rho_k(\lambda)}d\mathcal{E}_\lambda y_k, \tag{279}$$

$$Ay=\sum_k \mu_k a_k x_k+\sum_k\int_m^M \lambda\frac{d(y,\ \mathcal{E}_\lambda y_k)}{d\rho_k(\lambda)}\,d\mathcal{E}_\lambda y_k, \tag{280}$$

где a_k и b_k — коэффициенты Фурье элементов y и z относительно системы (276) и μ_k — собственные значения A, соответствующие собственным элементам x_k.

Пользуясь указанным выше разбиением оператора на оператор с чисто точечным спектром в H' и оператор с непрерывным спектром в H'', мы можем произвести классификацию точек спектра.

Определение. *Говорят, что λ_0 принадлежит точечному спектру, если λ_0 есть собственное значение A. Говорят, что точка λ_0 принадлежит предельному спектру, если λ_0 есть предельная точка для точечного спектра, т. е. в любой ее ε-окрестности находятся собственные значения, отличные от λ_0. Наконец, говорят, что λ_0 принадлежит непрерывному спектру, если λ_0 входит в спектр оператора A'', индуцированного оператором A в H'', т. е. если в любом интервале, содержащем λ_0 внутри себя, спектральная функция $\mathcal{E}''_\lambda$ оператора A непостоянна.*

Всякая точка спектра оператора A принадлежит по крайней мере одной из указанных трех категорий, но может случиться, например, что точка λ_0 принадлежит одновременно всем трем категориям. Иногда вводят еще понятие точки сгущения спектра, а именно точка λ_0 называется точкой сгущения спектра, если она есть или собственное значение бесконечного ранга, или элемент предельного спектра, или элемент непрерывного спектра.

151. Дифференциальные решения. Рассматриваем оператор с чисто непрерывным спектром. Элементы $\mathcal{E}_\lambda x$ при любом выборе x удовлетворяют некоторому уравнению, аналогичному уравнению $Ax=\lambda x$ в случае точечного спектра. Пусть $\Delta[\lambda_1,\ \lambda_2]$ — любой промежу-

ток. Пользуясь свойством (180), можем написать следующее уравнение, аналогичное уравнению (213):

$$\int_m^M \lambda d\mathcal{E}_\lambda \cdot \Delta\mathcal{E}_\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \lambda d\mathcal{E}_\lambda.$$

Введем элемент $x(\lambda) = \mathcal{E}_\lambda x$, непрерывно зависящий от параметра λ на промежутке $[m, M]$ в том смысле, что $\| x(\lambda_0) - x(\lambda) \| \to 0$ при $\lambda \to \lambda_0$ для любого λ_0 из $[m, M]$. Из предыдущего равенства мы видим, что $x(\lambda)$ удовлетворяет уравнению

$$A[\Delta x(\lambda)] = \int_\Delta \lambda\, dx(\lambda). \tag{281}$$

При этом говорят, что $x(\lambda)$ есть дифференциальное решение уравнения $Ax = \lambda x$. Векторы $y_k(\lambda) = \mathcal{E}_\lambda y_k$, построенные в [**149**], являются, таким образом, дифференциальными решениями. При разных значениях k они находятся в ортогональных подпространствах C_{y_k}, и потому для любых интервалов Δ_1 и Δ_2 мы имеем

$$(\Delta_1 y_p(\lambda),\ \Delta_2 y_q(\lambda)) = 0 \tag{282}$$
$$(p \neq q).$$

Если Δ_1 и Δ_2 не имеют общих внутренних точек, то, в силу (180),

$$(\Delta_1 y_p(\lambda),\ \Delta_2 y_p(\lambda)) = 0 \tag{283}$$

(Δ_1 и Δ_2 — без общих внутренних точек). Если Δ_1 и Δ_2 имеют общую часть $\Delta_{1,2}$, то, в силу (180),

$$(\Delta_1 y_p(\lambda),\ \Delta_2 y_p(\lambda)) = \| \Delta_{1,2} y_p(\lambda) \|^2. \tag{284}$$

Введем понятие полной системы дифференциальных решений. Какая-либо система $y_p(\lambda)$ дифференциальных решений, ортогональная в смысле (282), называется полной, если элемент x, ортогональный ко всем $y_p(\lambda)$, т. е. удовлетворяющий при любом p и любом λ условию

$$(y_p(\lambda),\ x) = 0, \tag{285}$$

есть нулевой элемент. Нетрудно показать, что построенные выше решения $y_p(\lambda) = \mathcal{E}_\lambda y_p$ обладают полнотой. Действительно, из (285) заключаем, что элемент x ортогонален к тому подпространству C_{y_p}, которое является замкнутой линейной оболочкой $y_p(\lambda) = \mathcal{E}_\lambda y_p$, и это имеет место при любом p. Но ортогональная сумма C_{y_p} есть все H, и, таким образом, элемент x, ортогональный ко всему H, есть, действительно, нулевой элемент.

При построении решений уравнения (281) мы исходили от спектральной функции $\mathcal{E}_\lambda$. Будем теперь исходить из самого уравнения. Пусть каким-нибудь образом нам удалось построить решение $x(\lambda)$

уравнения (281). В этом уравнении $x(\lambda)$ входит только под знаками разности и дифференциала, и, вычитая из $x(\lambda)$ какой-либо элемент, не зависящий от λ, мы получаем также решение уравнения. В частности, решением будет разность $x(\lambda) - x(m)$, и можем, таким образом, всегда считать, что $x(m) = 0$. В дальнейшем покажем, что любое решение уравнения (281), непрерывно зависящее от λ в промежутке $[m, M]$ и удовлетворяющее условию $x(m) = 0$, обязательно имеет вид $x(\lambda) = \mathcal{E}_\lambda x$. Положим, что нам удалось каким-нибудь образом построить конечное или бесконечное число решений $y_p(\lambda)$ уравнения (281), попарно ортогональных в смысле (282). Каждое из них, согласно сказанному выше, имеет вид $y_p(\lambda) = \mathcal{E}_\lambda y_p$, где y_p — некоторый элемент H. Замкнутая линейная оболочка каждого $y_p(\lambda)$ есть некоторое подпространство C_{y_p}, причем, в силу (282), эти подпространства C_{y_p} попарно ортогональны. Полнота решений $y_p(\lambda)$ сводится к тому, что ортогональная сумма C_{y_p} есть все H. Если эта полнота имеется, то мы можем написать формулы из [**149**], заменяя в них $\mathcal{E}_\lambda y_k$ на $y_k(\lambda)$. Таким образом, при построении этих формул мы можем исходить из какой угодно ортогональной полной системы непрерывных дифференциальных решений. Полнота построенной каким-либо образом системы попарно ортогональных решений может быть проверена формулой (271) для билинейного функционала или формулой (273), если известна спектральная функция $\mathcal{E}_\mu$.

Отметим еще, что для $x(\lambda) = \mathcal{E}_\lambda x$ можно построить уравнения, отличные от (281). Полагая, что промежуток Δ не содержит $\lambda = 0$, напишем, в силу (180), уравнение

$$\int_m^M \lambda d\mathcal{E}_\lambda \cdot \int_\Delta \frac{1}{\lambda} d\mathcal{E}_\lambda = \Delta\mathcal{E}_\lambda$$

и отсюда для $x(\lambda)$ получаем уравнение

$$A\left[\int_\Delta \frac{1}{\lambda} dx(\lambda)\right] = \Delta x(\lambda)$$

или

$$\int_\Delta \frac{1}{\lambda} d[Ax(\lambda)] = \Delta x(\lambda). \qquad (281_1)$$

Переходим теперь к доказательству утверждения, которое мы сделали выше.

Теорема. *Всякое решение уравнения* (281), *непрерывное в промежутке* $[m, M]$ *и равное нулевому элементу при* $\lambda = m$, *имеет вид* $x(\lambda) = \mathcal{E}_\lambda x(M)$.

При условии $x(m) = 0$ уравнение (281) дает

$$\int_m^\lambda \mu\, dx(\mu) = Ax(\lambda),$$

причем здесь и в дальнейшем μ является переменной интегрирования. Фиксируя каким-либо образом два числа $\mu_1 < \mu_2$, получим

$$\int_m^\lambda \mu\, d\,(x(\mu),\ x(\mu_2) - x(\mu_1)) = (Ax(\lambda),\ x(\mu_2) - x(\mu_1)).$$

Пользуясь самосопряженностью A и уравнением (281), можем написать

$$(Ax(\lambda),\ x(\mu_2) - x(\mu_1)) = (x(\lambda),\ Ax(\mu_2) - Ax(\mu_1)) = \int_{\mu_1}^{\mu_2} \mu d\,(x(\lambda),\ x(\mu)),$$

и, следовательно, приходим к равенству

$$\int_m^\lambda \mu d\,(x(\mu),\ x(\mu_2) - x(\mu_1)) = \int_{\mu_1}^{\mu_2} \mu d\,(x(\lambda),\ x(\mu)).$$

Интеграл, стоящий справа, интегрируем по частям и к полученному интегралу применяем теорему о среднем

$$\int_m^\lambda \mu d\,(x(\mu),\ x(\mu_2) - x(\mu_1)) =$$

$$= \mu_2 (x(\lambda),\ x(\mu_2)) - \mu_1 (x(\lambda),\ x(\mu_1)) - (\mu_2 - \mu_1)(x(\lambda),\ x(\mu_3))$$

(μ_3 принадлежит $[\mu_1, \mu_2]$),

или

$$\int_m^\lambda \mu d\,(x(\mu),\ x(\mu_2) - x(\mu_1)) =$$

$$= (\mu_2 - \mu_1)(x(\lambda),\ x(\mu_2)) + \mu_1 (x(\lambda),\ x(\mu_2) - x(\mu_1)) - (\mu_2 - \mu_1)(x(\lambda),\ x(\mu_3)),$$

и эту формулу мы можем переписать в виде

$$\int_m^\lambda (\mu - \mu_1)\, d\,\frac{(x(\mu),\ x(\mu_2) - x(\mu_1))}{\mu_2 - \mu_1} = (x(\lambda),\ x(\mu_2) - x(\mu_3)).$$

Вводя непрерывные функции

$$\omega(\mu) = \frac{(x(\mu),\ x(\mu_2) - x(\mu_1))}{\mu_2 - \mu_1}, \quad f(\lambda) = (x(\lambda),\ x(\mu_2) - x(\mu_3)), \tag{286}$$

перепишем это уравнение

$$\int_m^\lambda (\mu - \mu_1)\, d\omega(\mu) = f(\lambda),$$

причем мы считаем $\lambda < \mu_1 < \mu_2$ и, очевидно, $\omega(m) = 0$. Последнее уравнение легко решить относительно $\omega(\mu)$. Для этого достаточно к левой части применить

интегрирование по частям и положить $\omega(\lambda) = f(\lambda) : (\lambda - \mu_1) + u(\lambda)$, где $u(\lambda)$ — новая искомая функция, равная нулю при $\lambda = m$:

$$\omega(\lambda) = \frac{f(\lambda)}{\lambda - \mu_1} + \int_m^\lambda \frac{f(\mu)}{(\mu - \mu_1)^2}\, d\mu,$$

или, вспоминая обозначения (286),

$$\frac{(x(\lambda),\ x(\mu_2) - x(\mu_1))}{\mu_2 - \mu_1} = \frac{(x(\lambda),\ x(\mu_2) - x(\mu_3))}{\lambda - \mu_1} + \int_m^\lambda \frac{(x(\mu),\ x(\mu_2) - x(\mu_3))}{(\mu - \mu_1)^2}\, d\mu.$$

Если $\mu_1 \to \mu_2$, то $\mu_3 \to \mu_2$, и первое слагаемое справа стремится к нулю. То же можно утверждать и об интеграле, ибо $|(x(\mu),\ x(\mu_2) - x(\mu_3)| \leqslant C\,|x(\mu_2) - x(\mu_3)|$, где C — наибольшее значение $\|x(\mu)\|$ в промежутке $[m, M]$. Мы рассмотрели тот случай, когда $\mu_1 \to \mu_2$ от меньших значений. Совершенно так же мы могли бы рассмотреть и случай $\lambda < \mu_2 < \mu_1$ и $\mu_1 \to \mu_2$. Из последней формулы таким образом следует

$$\frac{d}{d\mu}(x(\lambda),\ x(\mu)) = 0 \text{ при } \mu > \lambda,$$

и, следовательно,

$$(x(\lambda),\ x(\mu)) = (x(\lambda),\ x(\lambda)) = \|x(\lambda)\|^2 \quad \text{при } \mu > \lambda.$$

Применяя эту формулу при $\mu = M$ к решению $y(\lambda) = x(\lambda) - \mathcal{E}_\lambda x(M)$ уравнения (281), которое обращается в нуль при $\lambda = m$ и $\lambda = M$, получим $\|y(\lambda)\|^2 = 0$, т. е. $x(\lambda) = \mathcal{E}_\lambda x(M)$, и теорема доказана.

152. Операция умножения на независимую переменную. Вернемся к результатам из [**147**] и рассмотрим функциональное пространство $L_2^{(x)}$ функции $f(\lambda)$ с интегрируемым квадратом по отношению к функции $\rho(\lambda)$, определенной формулой (245). Класс $L_2^{(x)}$ есть класс функций $f(\lambda)$, определенных на промежутке $[m, M]$, измеримых по отношению к $\rho(\lambda)$ и таких, что

$$\int_m^M |f(\lambda)|^2\, d\rho(\lambda) < +\infty. \tag{287}$$

Пространство $L_2^{(x)}$ является осуществлением пространства H. В этом пространстве оператор умножения на независимую переменную

$$A_0[f(\lambda)] = \lambda f(\lambda) \tag{288}$$

является, очевидно, ограниченным самосопряженным оператором, ибо

$$\|\lambda f(\lambda)\| \leqslant n\,\|f(\lambda)\|,$$

где n — наибольшее из чисел $|m|$ и $|M|$, и, в силу вещественности λ,

$$(\lambda f(\lambda),\ g(\lambda)) = (f(\lambda),\ \lambda g(\lambda)) = \int_m^M \lambda f(\lambda)\,\overline{g(\lambda)}\, d\rho(\lambda).$$

Установим теперь связь между пространством C_x и функциональным пространством $L_2^{(x)}$. В силу существования интеграла Хеллингера (249) любому элементу y из C_x соответствует такая функция $y(\lambda)$ из $L_2^{(x)}$, что [82]

$$\varphi_y(\lambda) = (y, \mathcal{E}_\lambda x) = \int_m^\lambda y(\mu)\, d\rho(\rho). \tag{289}$$

При этом различным элементам y и z из C_x соответствуют и различные элементы $y(\lambda)$ и $z(\lambda)$ из $L_2^{(x)}$. Действительно, если бы элементам y и z соответствовали эквивалентные функции $y(\lambda)$ и $z(\lambda)$, то, в силу (289), мы имели бы $(y-z, \mathcal{E}_\lambda x) = 0$ при любом λ. Тем самым разность $y-z$ была бы ортогональной ко всем линейным комбинациям $\mathcal{E}_\lambda x$, и, переходя к пределу, мы видим, что разность $y-z$ должна была бы быть ортогональной ко всему подпространству C_x. Но $y-z \in C_x$, и мы получили бы $(y-z, y-z) = \|y-z\|^2 = 0$, т. е. $y=z$. Наоборот, для двух неэквивалентных функций из $L_2^{(x)}$ интеграл, входящий в формулу (289), не может при всех значениях λ иметь одно и то же значение [52]. Таким образом, формула (289) устанавливает биоднозначное соответствие между элементами y из C_x и элементами некоторого линеала M из $L_2^{(x)}$. Докажем, что M совпадает с $L_2^{(x)}$. Сначала покажем, что M — замкнутый линеал. Формулу (256) мы можем переписать, пользуясь интегралами Лебега — Стилтьеса в виде [82]

$$(y, z) = \int_m^M y(\lambda)\, \overline{z(\lambda)}\, d\rho(\lambda), \tag{290}$$

где $z(\lambda)$ — элемент $L_2^{(x)}$, соответствующий элементу z из C_x, т. е.

$$(z, \mathcal{E}_\lambda x) = \int_m^\lambda z(\mu)\, d\rho(\mu). \tag{291}$$

Пусть $y^{(n)}(\lambda)$ — последовательность элементов из M и $y^{(n)}$ — соответствующие элементы из C_x. Полагая в формуле (290) $y = z = y^{(n)} - y^{(m)}$, получим

$$\|y^{(n)} - y^{(m)}\|^2 = \int_m^M |y^{(n)}(\lambda) - y^{(m)}(\lambda)|^2\, d\rho(\lambda). \tag{292}$$

Если $y^{(n)}(\lambda)$ стремятся в среднем к некоторому элементу $y_0(\lambda)$ из $L_2^{(x)}$, то при n и $m \to +\infty$ правая часть (292) стремится к нулю, а потому последовательность элементов $y^{(n)}$ сходится в себе, и существует такой элемент u, что $y^{(n)} \Rightarrow u$, причем $u \in C_x$, так как C_x есть подпространство. Пусть $u(\lambda)$ — элемент M, соответствующий элементу u согласно формуле (289). Покажем, что элемент $u(\lambda)$ экви-

валентен $y_0(\lambda)$. Отсюда будет следовать, что $y_0(\lambda) \in M$, т. е. что M — замкнутый линеал. Из формулы (290) при $y = z = u - y^{(n)}$ следует формула

$$\| u - y^{(n)} \|^2 = \int_m^M | u(\lambda) - y^{(n)}(\lambda) |^2 \, d\rho(\lambda),$$

из которой видно, что $y^{(n)}(\lambda)$ стремятся в среднем к $u(\lambda)$, а потому функция $u(\lambda)$ эквивалентна $y_0(\lambda)$, ибо предел в среднем единственен. Покажем теперь, что замкнутый линеал M совпадает с $L_2^{(x)}$. Если бы это было не так, то существовал бы элемент $f_0(\lambda)$ из $L_2^{(x)}$, не эквивалентный нулевому элементу и ортогональный ко всем элементам из M. Для элемента $y = \mathcal{E}_\nu x$ формула (289), в силу $\mathcal{E}_\nu \mathcal{E}_\lambda = \mathcal{E}_\nu$ при $\nu \leqslant \lambda$ и $\mathcal{E}_\nu \mathcal{E}_\lambda = \mathcal{E}_\lambda$ при $\nu \geqslant \lambda$, принимает вид

$$(\mathcal{E}_\nu x, \ \mathcal{E}_\lambda x) = (x, \ \mathcal{E}_\nu \mathcal{E}_\lambda x) = \| \mathcal{E}_\nu \mathcal{E}_\lambda x \|^2 = \int_m^\nu d\rho(\lambda) \qquad \text{при } \lambda \geqslant \nu,$$

$$(\mathcal{E}_\nu x, \ \mathcal{E}_\lambda x) = \int_m^\lambda d\rho(\lambda). \qquad \text{при } \lambda \leqslant \nu,$$

т. е. функция $f(\lambda)$ из M, соответствующая $\mathcal{E}_\nu x$, эквивалентна функции, определяемой формулой

$$f(\lambda) = 1 \text{ при } \lambda < \nu \text{ и } f(\lambda) = 0 \text{ при } \lambda > \nu.$$

Значение $f(\lambda)$ при $\lambda = \nu$ не существенно ввиду непрерывности $\rho(\lambda)$. Ортогональность $f_0(\lambda)$ к только что определенной функции дает нам при любом ν:

$$\int_m^\nu f_0(\lambda) \, d\rho(\lambda) = 0,$$

а отсюда, как известно [**52**], следует, что $f_0(\lambda)$ эквивалентна нулю относительно $\rho(\lambda)$, и, таким образом, подпространство M должно совпадать с $L_2^{(x)}$. Предыдущие рассуждения приводят нас к следующей теореме:

Теорема 1. *Формула* (289) *устанавливает биоднозначное соответствие между элементами y из C_x и элементами $y(\lambda)$ из $L_2^{(x)}$.*

В силу формулы (290) при этом соответствии сохраняется величина скалярного произведения, а следовательно, и нормы соответствующих элементов одинаковы. Кроме того, соответствие, очевидно, дистрибутивно в силу дистрибутивности скалярного произведения $(y, \mathcal{E}_\lambda x)$ относительно y и дистрибутивности интеграла, входящего в формулу (289). Таким образом, при указанном соответствии функциональное пространство $L_2^{(\nu)}$ является

осуществлением гильбертова пространства C_x. В этом пространстве определен оператор A, для которого $\mathcal{E}_\lambda$ является спектральной функцией. Докажем следующую теорему:

Теорема 2. *Замене y на Ay в C_x соответствует умножение $y(\mu)$ на μ в $L_2^{(x)}$, т. е. оператору A в C_x соответствует оператор умножения на независимую переменную* (288) *в $L_2^{(x)}$.*

Пользуясь формулами (206) и (289) и свойством интеграла Лебега — Стилтьеса из [**75**], можем написать, считая, что $y \in C_x$:

$$(Ay,\ \mathcal{E}_\lambda x) = \int_m^M \mu\, d_\mu (\mathcal{E}_\mu y,\ \mathcal{E}_\lambda x) = \int_m^\lambda \mu d_\mu (y,\ \mathcal{E}_\mu x) =$$

$$= \int_m^\lambda \mu d_\mu \left[\int_m^\mu y(\nu)\, d\rho(\nu) \right] = \int_m^\lambda \mu\, y(\mu)\, d\rho(\mu),$$

т. е.

$$(Ay,\ \mathcal{E}_\lambda x) = \int_m^\lambda \mu y(\mu)\, d\rho(\mu),$$

откуда и следует, путем сравнения с формулой (289), что замене y на Ay соответствует умножение $y(\mu)$ на μ. Отметим еще, что общая формула (259) для билинейного функционала $(Ay,\ z)$, где y и $z \in C_x$, может быть написана, в силу (290) и доказанной теоремы, при помощи интеграла Лебега — Стилтьеса так:

$$(Ay,\ z) = \int_m^M \lambda y(\lambda)\, \overline{z(\lambda)}\, d\rho(\lambda). \tag{293}$$

153. Унитарная эквивалентность самосопряженных операторов. Пусть $\mathcal{E}_\lambda$ — разложение единицы для самосопряженного оператора A, U — некоторый унитарный оператор и $B = UAU^{-1}$. Оператор $\mathcal{E}'_\lambda = U\mathcal{E}_\lambda U^{-1}$, как нетрудно видеть, также является разложением единицы. Пусть B' — соответствующий самосопряженный оператор, так что $B'x$ определяется как предел суммы:

$$\sum_{k=1}^n \nu_k \Delta_k (U\mathcal{E}_\lambda U^{-1})\, x = U\left(\sum_{k=1}^n \nu_k \Delta_k \mathcal{E}_\lambda \right) U^{-1} x,$$

откуда видно, что B' совпадает с B, т. е. $\mathcal{E}'_\lambda = U\mathcal{E}_\lambda U^{-1}$ есть спектральная функция оператора B. Отсюда следует, что унитарно эквивалентные самосопряженные операторы должны иметь одинаковый спектр.

В случае чисто точечного спектра совпадение собственных значений вместе с их рангом является не только необходимым, но и

достаточным условием унитарной эквивалентности. Соответствующий унитарный оператор U легко строится как оператор, преобразующий подпространство собственных элементов B в подпространство собственных элементов A, соответствующих тому же собственному значению. Вопрос об условиях унитарной эквивалентности становится гораздо более сложным при наличии непрерывного спектра. Приведем без доказательства основной относящийся к этому случаю результат (пространство считается сепарабельным).

Для унитарной эквивалентности двух самосопряженных операторов $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ необходимо и достаточно выполнение следующих условий: 1) спектры этих операторов принадлежат одному и тому же типу (чисто точечный спектр, чисто непрерывный спектр или смешанный спектр); 2) при наличии точечного спектра он состоит для обоих операторов из одних и тех же значений с одинаковым для обоих операторов рангом; 3) при наличии непрерывного спектра число инвариантных подпространств в нормальном разбиении непрерывной части спектральной функции для операторов одно и то же, и если ввести для нормальных представлений непрерывного спектра $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ функции

$$\| \mathcal{E}_\lambda^{(1)} y_k^{(1)} \|^2 = \rho_k^{(1)}(\lambda) \quad \text{и} \quad \| \mathcal{E}_\lambda^{(2)} y_k^{(2)} \|^2 = \rho_k^{(2)}(\lambda),$$

которые мы строили в [**149**], то множество меры нуль по отношению $\rho_k^{(1)}(\lambda)$ должно быть множеством меры нуль по отношению $\rho_k^{(2)}(\lambda)$ и, наоборот, т. е. при всяком k

$$\rho_k^{(1)}(\lambda) = \int_m^\lambda \varphi_k^{(1)}(\lambda)\, d\rho_k^{(2)}(\lambda) \quad \text{и} \quad \rho_k^{(2)}(\lambda) = \int_m^\lambda \varphi_k^{(2)}(\lambda)\, d\rho_k^{(1)}(\lambda),$$

где $\varphi_k^{(1)}(\lambda)$ измерима по отношению $\rho_k^{(2)}(\lambda)$, не отрицательна и суммируема, и аналогично для $\varphi_k^{(2)}(\lambda)$.

154. Спектральное разложение унитарных операторов. Пусть A — некоторый самосопряженный оператор и $\mathcal{E}_\lambda$ — его спектральная функция, причем

$$\mathcal{E}_\lambda = 0 \text{ при } \lambda = 0 \text{ и } \mathcal{E}_\lambda = E \text{ при } \lambda = 1. \tag{294}$$

Построим оператор U по формуле

$$U = \int_0^1 e^{2\pi i\lambda}\, d\mathcal{E}_\lambda = e^{2\pi iA}. \tag{295}$$

Для построения сопряженного оператора достаточно функцию $e^{2\pi i\lambda}$ заменить сопряженной $e^{-2\pi i\lambda}$ [**143**], т. е.

$$U^* = \int_0^1 e^{-2\pi i\lambda}\, d\mathcal{E}_\lambda,$$

и, в силу формулы (214), приходим к равенствам $UU^* = U^*U = \mathcal{E}$, т. е. оператор U, определенный формулой (295) при условии (294), есть унитарный оператор. Приведем без доказательства обратное утверждение.

Теорема. *Если брать всевозможные разложения единицы, удовлетворяющие условиям* (294), *то формула* (295) *представляет собой общую форму унитарных операторов, причем различным разложениям единицы* $\mathcal{E}_\lambda$ *соответствуют различные унитарные операторы* U.

В [**143**] мы определили функции $f(A)$ самосопряженного оператора A, соответствующие непрерывным функциям $f(t)$. В следующем параграфе мы обобщим это определение на широкий класс функций $f(t)$.

155. Функции самосопряженного оператора. Пусть A — некоторый самосопряженный оператор и $\mathcal{E}_\lambda$ — его спектральная функция. Если $f(\lambda)$ непрерывна в промежутке $[m, M]$, то оператор $f(A)$ мы определили формулой

$$f(A) = \int_m^M f(\lambda)\, d\mathcal{E}_\lambda$$

или эквивалентной формулой для билинейного функционала

$$(f(A)\, x,\ y) = \int_m^M f(\lambda)\, d\,(\mathcal{E}_\lambda x, y), \tag{296}$$

причем $(\mathcal{E}_\lambda x,\ y)$ есть комплексная функция ограниченной вариации от λ. Она, как известно [**125**], является линейной комбинацией четырёх неубывающих функций вида $\| \mathcal{E}_\lambda z \|^2$, где z — некоторый элемент из H. Таким образом, если $f(\lambda)$ — любая ограниченная функция, измеримая по отношению к неубывающим функциям

$$\| \mathcal{E}_\lambda z \|^2 \tag{297}$$

при любом выборе z, то интеграл (296) существует для любых x и y, и тем самым определен билинейный функционал $(f(A)\, x,\ y)$. Дистрибутивность этого функционала очевидна из дистрибутивности $(\mathcal{E}_\lambda x,\ y)$. Докажем ограниченность этого функционала, причем будем считать функцию $f(\lambda)$ вещественной, что, впрочем, несущественно. В силу ограниченности, $|f(\lambda)| \leqslant C$, где C — некоторое положительное число. Полагая $y = x$, приходим к выражению для квадратичного функционала

$$(f(A)\, x,\ x) = \int_m^M f(\lambda)\, d\,\| \mathcal{E}_\lambda x \|^2. \tag{298}$$

Напомним, что если $\mathcal{E}_m$ отлично от нуля, то последний интеграл равносилен сумме

$$f(m)\,\|\mathcal{E}_m x\|^2 + \int_m^M f(\lambda)\,d\,\|\mathcal{E}_\lambda x\|^2,$$

где последний интеграл понимается как обычный предел сумм. Из неравенства $|f(\lambda)| \leqslant C$ и $\|\mathcal{E}_M x\| = \|x\|$ получаем для интеграла (298) оценку

$$|(f(A)\,x,\ x)| \leqslant C\,\|x\|^2. \qquad (298_1)$$

Далее имеем, обозначая через R вещественную часть:

$$4R\int_m^M f(\lambda)\,d\,(\mathcal{E}_\lambda x,\ y) =$$

$$= \int_m^M f(\lambda)\,d\,(\mathcal{E}_\lambda (x+y),\ x+y) - \int_m^M f(\lambda)\,d\,(\mathcal{E}_\lambda (x-y),\ x-y),$$

или

$$4R\int_m^M f(\lambda)\,d\,(\mathcal{E}_\lambda x,\ y) =$$

$$= \int_m^M f(\lambda)\,d\,\|\mathcal{E}_\lambda (x+y)\|^2 - \int_m^M f(\lambda)\,d\,\|\mathcal{E}_\lambda (x-y)\|^2,$$

и, в силу (298_1),

$$4\left|R\int_m^M f(\lambda)\,d\,(\mathcal{E}_\lambda x,\ y)\right| \leqslant C[\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2] = 2C[\|x\|^2 + \|y\|^2].$$

Рассуждая, как и в [**122**], можем из этого тождества непосредственно получить такое же без знака вещественной части:

$$4\left|\int_m^M f(\lambda)\,d\,(\mathcal{E}_\lambda x,\ y)\right| \leqslant 2C[\|x\|^2 + \|y\|^2].$$

При $\|x\| = \|y\| = 1$ получаем оценку

$$|(f(A)\,x,\ y)| = \left|\int_m^M f(\lambda)\,d\,(\mathcal{E}_\lambda x,\ y)\right| \leqslant C. \qquad (299)$$

Если x и y имеют любую положительную норму, то можем написать

$$(f(A)\,x,\ y) = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \left(f(A)\frac{x}{\|x\|},\ \frac{y}{\|y\|}\right),$$

причем элементы $\frac{x}{\|x\|}$ и $\frac{y}{\|y\|}$ имеют норму, равную единице, и, в силу оценки (299),

$$|(f(A)x, y)| \leqslant C\|x\| \cdot \|y\|,$$

откуда и следует ограниченность билинейного функционала $(f(A)x, y)$.

Таким образом, мы приходим к следующему основному результату: *если $f(\lambda)$ — ограниченная функция, измеримая относительно неубывающих функций (297) при любом выборе z, то формула (296) определяет линейный оператор $f(A)$.* Отметим некоторые свойства операторов $f(A)$. *Если $f(\lambda)$ вещественна, то из (296) при $y=x$ непосредственно следует, что $f(A)$ — самосопряженный оператор.* Если $f(\lambda)$ комплексна, то сопряженный оператор $f(A)^*$ получаем по формуле (296) при замене $f(\lambda)$ сопряженной функцией. Если $f(\lambda) \geqslant 0$, то из (298) следует, что $f(A)$ — положительный оператор. Рассмотрим функцию $f_\mu(\lambda)$, определенную следующим образом:

$$f_\mu(\lambda)=1 \text{ при } \lambda \leqslant \mu \text{ и } f_\mu(\lambda)=0 \text{ при } \lambda > \mu. \tag{300}$$

Эта функция есть, очевидно, B-функция, и мы можем составить интеграл (296). Разбивая область интегрирования на $[m-\varepsilon_0, \mu]$ и $[\mu, M]$, получим

$$(f_\mu(A)\ x, y)=\int_m^\mu d(\mathcal{E}_\lambda x, y)=(\mathcal{E}_\mu x, y),$$

откуда следует

$$\mathcal{E}_\mu = f_\mu(A). \tag{301}$$

Мы получим эту формулу, допуская, что всякий самосопряженный оператор A имеет спектральную функцию $\mathcal{E}_\lambda$, через которую он выражается по формуле (204), т. е. при выводе формулы (301), мы основывались на теореме из [**142**], которую мы оставили без доказательства. Это доказательство по существу будет сводиться к тому, что мы определим для любого самосопряженного оператора A функцию $f_\mu(A)$, не пользуясь спектральной функцией $\mathcal{E}_\lambda$, и, полагая $\mathcal{E}_\mu = f_\mu(A)$, докажем затем основную формулу (204).

Пользуясь известными свойствами интеграла Лебега — Стилтьеса, мы легко установим свойства функций самосопряженного оператора A. При этом будем, конечно, считать, что все функции $f(\lambda)$, о которых мы будем говорить, принадлежат определенному выше классу, т. е. ограничены и измеримы относительно функций (210) при любом выборе z.

Теорема 1. *Линейной комбинации функций $a_1 f_1(\lambda) + a_2 f_2(\lambda) + \ldots + a_p f_p(\lambda)$ соответствует оператор $a_1 f_1(A) + a_2 f_2(A) + \ldots + a_p f_p(A)$.*

2. *$f(A)$ коммутирует с $\mathcal{E}_\mu$ и A.*

3. *Имеет место формула*

$$(f_1(A)x,\ f_2(A)y)=\int_m^M f_1(\lambda)\overline{f_2(\lambda)}\,d(\mathcal{E}_\lambda x,\ y) \tag{302}$$

4. *Функции* $f_1(\lambda)f_2(\lambda)$ *соответствует оператор*

$$f_1(A)f_2(A)=f_2(A)f_1(A). \tag{303}$$

Докажем, например, что $f(A)$ коммутирует с $\mathcal{E}_\mu$:

$$(f(A)\mathcal{E}_\mu x,\ y)=\int_m^M f(\lambda)\,d(\mathcal{E}_\lambda\mathcal{E}_\mu x,\ y)=\int_m^M f(\lambda)\,d(\mathcal{E}_\lambda x,\ \mathcal{E}_\mu\ y)=$$
$$=(f(A)x,\ \mathcal{E}_\mu y)=(\mathcal{E}_\mu f(A)x,\ y),$$

откуда и следует, что $f(A)\mathcal{E}_\mu=\mathcal{E}_\mu f(A)$. Отметим еще, что из написанных формул, в силу (180), следует формула

$$(f(A)\mathcal{E}_\mu x,\ y)=\int_m^\mu f(\lambda)\,d(\mathcal{E}_\lambda x,\ y). \tag{304}$$

Формула (302) вытекает из следующей цепи равенств:

$$(f_1(A)x,\ f_2(A)y)=\int_m^M f_1(\lambda)\,d(\mathcal{E}_\lambda x,\ f_2(A)y)=\int_m^M f_1(\lambda)\,d\overline{(f_2(A)\mathcal{E}_\lambda y,\ x)}=$$
$$=\int_m^M f_1(\lambda)\,d\left[\overline{\int_m^\lambda f_2(\mu)\,d(\mathcal{E}_\mu y,\ x)}\right]=\int_m^M f_1(\lambda)\overline{f_2(\lambda)}\,d(\mathcal{E}_\lambda x,\ y). \tag{305}$$

Наконец,

$$(f_1(A)f_2(A)x,\ y)=\int_m^M f_1(\lambda)\,d(\mathcal{E}_\lambda f_2(A)x,\ y)=$$
$$=\int_m^M f_1(\lambda)\,d\int_m^\lambda f_2(\mu)\,d(\mathcal{E}_\mu x,\ y)=\int_m^M f_1(\lambda)f_2(\lambda)\,d(\mathcal{E}_\lambda x,\ y)$$

и такая же формула для произведения $f_2(A)f_1(A)$. Совершенно так же, как и в [**143**], мы можем показать, что $f(A)$ коммутирует с любым оператором B, коммутирующим с A. Верно и обратное предложение, т. е. если ограниченный линейный оператор C коммутирует с любым оператором B, коммутирующим с A, то существует такая функция $f(\lambda)$, что $C=f(A)$. Доказательство этого важного предложения

можно найти в статье Ф. Рисса «О функциях эрмитовых операторов в гильбертовом пространстве» («Успехи математических наук», IX).

Если в формуле (305) положим $f_2(\lambda) \equiv f_1(\lambda)$ и $y = x$, то получим

$$\|f_1(A)\,x\|^2 = \int_m^M |f_1(\lambda)|^2\, d\|\mathcal{E}_\lambda x\|^2. \tag{306}$$

Отметим еще некоторые простые факты, касающиеся функций самосопряженного оператора. Если $|f(\lambda)| \equiv 1$, то $f(A)$ — унитарный оператор. Если $f(\lambda)$ принимает только значения 0 и 1, то $f(A)$ — проектор. Докажем, что если $\lambda = \lambda_0$ есть собственное значение A и x_0 — соответствующий собственный элемент, то $f(\lambda_0)$ есть собственное значение $f(A)$ с тем же собственным элементом x_0. Мы знаем, что $\mathcal{E}_\lambda x_0 = 0$ при $\lambda < \lambda_0$ и $\mathcal{E}_\lambda x_0 = x_0$ при $\lambda \geqslant \lambda_0$, и формула (296) дает нам при любом y: $(f(A)\,x_0, y) = f(\lambda_0)\,(x_0, y) = (f(\lambda_0)\,x_0, y)$, откуда, ввиду произвольности y, и следует, что $f(A)\,x_0 = f(\lambda_0)\,x_0$. Отметим, что если $f(\lambda)$ имеет конечное число разрывов, то она измерима относительно всех функций (297), и тем самым $f(A)$ имеет определенный смысл. То же самое будет и в том случае, когда $f(\lambda)$ есть B-функция [**47**], чем мы уже пользовались выше.

156. Коммутирующие операторы. Рассмотрим вопрос о коммутирующих самосопряженных операторах.

Теорема 1. *Для того чтобы два самосопряженных оператора A и B коммутировали, необходимо и достаточно, чтобы их спектральные функции $\mathcal{E}_\lambda$ и F_μ коммутировали при любых λ и μ.*

Мы знаем, что спектральная функция любого самосопряженного оператора C коммутирует с C и любым оператором, коммутирующим с C [**143**]. Отсюда следует, что если $AB = BA$, то F_μ коммутирует с A, а потому $\mathcal{E}_\lambda$ коммутирует с F_μ. Наоборот, если $\mathcal{E}_\lambda$ коммутируется F_μ, то суммы Римана — Стилтьеса в интегральном представлении операторов A и B коммутируют, а потому и сами эти операторы коммутируют.

Теорема 2. *Если самосопряженные операторы A, B и C, имеющие чисто точечный спектр, попарно коммутируют, то имеется замкнутая ортогональная нормированная система элементов, являющихся собственными элементами каждого из указанных операторов.*

Пусть $\mathcal{E}_\lambda$, F_μ и G_ν — спектральные функции указанных операторов. В силу теоремы 1, они попарно коммутируют. Пусть λ, μ и ν — какие-либо собственные значения операторов A, B и C, а L_λ, M_μ и N_ν — подпространства соответствующих собственных элементов и $\Delta'_\lambda = \mathcal{E}_\lambda - \mathcal{E}_{\lambda-0}$; $\Delta''_\mu = F_\mu - F_{\mu-0}$; $\Delta'''_\nu = G_\nu - G_{\nu-0}$ — проекторы в эти подпространства. Эти проекторы попарно коммутируют, а потому их произведение

$$\Delta_{\lambda\mu\nu} = \Delta'_\lambda \Delta''_\mu \Delta'''_\nu$$

есть проектор в подпространство $R_{\lambda\mu\nu}$, которое состоит из элементов, общих L_λ, M_μ и N_ν [**140**]. Если возьмем два различных таких подпространства $R_{\lambda\mu\nu}$ и $R_{\lambda'\mu'\nu'}$, то по крайней мере одна из пар чисел (λ, λ'), (μ, μ') и (ν, ν') состоит из различных чисел. Пусть, например $\lambda \neq \lambda'$. При этом, если $x \in R_{\lambda\mu\nu}$ и $x' \in R_{\lambda'\mu'\nu'}$, то x и x' суть собственные элементы A, соответствующие различным собственным значениям, а потому они взаимно ортогональны. Таким

образом, подпространства $R_{\lambda\mu\nu}$ попарно ортогональны. Покажем, что их ортогональная сумма есть все H. Для этого достаточно показать, что не существует элемента, отличного от нулевого, который был бы ортогонален ко всем подпространствам $R_{\lambda\mu\nu}$, т. е. достаточно доказать, что если элемент x_0 отличен от нулевого, то он не ортогонален по крайней мере одному из $R_{\lambda\mu\nu}$. Для подпространств L_λ, M_μ и N_ν это очевидно, ибо по условию A, B и C имеют чисто точечные спектры, а потому ортогональная сумма, например, L_λ есть все H. Возьмем элемент $x_0 \neq 0$. Согласно только что сказанному, существует такое собственное значение λ оператора A, что $\Delta'_\lambda x_0 \neq 0$. Далее, опять по тем же соображениям, существует такое собственное значение μ оператора B, что $\Delta''_\mu(\Delta'_\lambda x_0) \neq 0$, и такое собственное значение ν оператора C, что $\Delta'''_\nu(\Delta''_\mu \Delta'_\lambda x_0) \neq 0$, откуда и следует, что x_0 не ортогонален $R_{\lambda\mu\nu}$. Таким образом, ортогональная сумма $R_{\lambda\mu\nu}$ есть все H. Если в каждом $R_{\lambda\mu\nu}$ возьмем замкнутую ортогональную нормированную систему, то получим ортогональную нормированную систему, замкнутую в H, и каждый элемент ее, принадлежащий некоторому $R_{\lambda\mu\nu}$, является собственным элементом каждого из операторов A, B и C. Теорема совершенно так же доказывается и для любого конечного числа попарно коммутирующих самосопряженных операторов. Выше мы видели, что различные функции одного и того же самосопряженного оператора суть коммутирующие операторы [155]. Мы докажем теперь обратное утверждение для того случая, когда заданные операторы имеют чисто точечный спектр.

Теорема 3. *Если самосопряженные операторы A, B и C, имеющие чисто точечный спектр, попарно коммутируют, то они являются функциями одного и того же самосопряженного оператора D.*

Пространство H предполагается сепарабельным. Согласно теореме 2 имеется замкнутая ортогональная нормированная система элементов

$$x_1, x_2, x_3, \ldots,$$

являющихся собственными элементами A, B и C, т. е.

$$Ax_n = \lambda_n x_n; \quad Bx_n = \mu_n x_n; \quad Cx_n = \nu_n x_n \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Положим $\rho_m = \frac{1}{m}$, и пусть x — любой элемент. Он разлагается по элементам x_k:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k,$$

и мы определим самосопряженный оператор D, полагая

$$Dx = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \rho_k x_k.$$

Ряд, стоящий справа, очевидно, сходится, ибо раз числа $|a_k|^2$ образуют сходящийся ряд, то числа $|a_k \rho_k|^2$ и подавно образуют сходящийся ряд. Из этого определения непосредственно следует, что x_k суть собственные элементы D, соответствующие собственным значениям ρ_k, т. е. D имеет чисто точечный спектр. Мы можем построить ограниченную функцию $f_1(\lambda)$, которая в точках $\lambda = \rho_k$ равна λ_k и непрерывна везде, кроме, может быть, точки $\lambda = 0$. Точно так же можем построить $f_2(\lambda)$ с аналогичными свойствами так, что $f_2(\rho_k) = \mu_k$, и $f_3(\lambda)$ так, что $f_3(\rho_k) = \nu_k$. Для функций $f_k(\lambda)$ мы можем, согласно результатам предыдущего параграфа, построить соответствующие операторы $f_1(D)$, $f_2(D)$ и $f_3(D)$. Оператор $f_1(D)$ имеет собственные элементы

x_k и собственные значения $f_1(\rho_k) = \lambda_k$, причем x_k образуют замкнутую систему. Такие же собственные значения и собственные элементы имеет оператор A. Но если два оператора с чисто точечными спектрами имеют одинаковые собственные значения и соответствующие им собственные элементы, то из их интегральных представлений через спектральную функцию следует, что они совпадают, т. е. $A = f_1(D)$. Совершенно аналогично $B = f_2(D)$ и $C = f_3(D)$; теорема доказана. Отметим, что она совершенно так же доказывается для случая любого конечного числа самосопряженных операторов. Теорему можно доказать и для того случая, когда спектры операторов и не чисто точечные, но мы на этом не останавливаемся (J. Neumann, Annals of Math., т. 32, 1931 г.).

157. Возмущение спектра самосопряженного оператора. Напомним, что точками сгущения спектра самосопряженного оператора называются те значения λ, которые являются или предельными точками точечного спектра, или собственными значениями бесконечного ранга, или точками непрерывного спектра. Мы докажем ниже следующую теорему:

Теорема 1. *Если к самосопряженному оператору A добавить вполне непрерывный самосопряженный оператор C, то при этом множество точек сгущения спектра останется прежним.*

Но оказывается, что добавление вполне непрерывного оператора может существенно изменить характер спектра, а именно имеет место следующая теорема:

Теорема 2. *К любому заданному самосопряженному оператору A можно прибавить такой самосопряженный вполне непрерывный оператор C с абсолютной нормой, не превышающей любого заданного положительного числа ε, что $A + C$ будет иметь чисто точечный спектр.*

Пользуясь этой теоремой, можно доказать следующее предложение:

Теорема 3. *Если у самосопряженных операторов A_1 и A_2 одно и то же множество точек сгущения спектра, то существует такой унитарный оператор U и такой самосопряженный вполне непрерывный оператор C, что $A_2 = UA_1V^{-1} + C$.*

Мы докажем лишь теорему 1. Предварительно докажем две леммы.

Лемма 1. *Если $\lambda = \mu$ есть точка сгущения спектра самосопряженного оператора A, то существует такая последовательность нормированных элементов x_n, слабо сходящихся к нулю, что*

$$\| Ax_n - \mu x_n \| \to 0. \tag{307}$$

Если μ — предельная точка точечного спектра или собственное значение бесконечного ранга, то существует бесконечная последовательность попарно ортогональных нормированных элементов x_n, для которых соответствующие собственные значения λ_n стремятся к μ. Если z — любой элемент, то его коэффициенты Фурье $c_n = (z, x_n)$ стремятся к нулю и, следовательно, $x_n \overset{\text{сл.}}{\to} 0$, и утверждение леммы для рассматриваемого случая вытекает из формулы

$$\| Ax_n - \mu x_n \| = \| (A - \lambda_n E) x_n + (\lambda_n - \mu) x_n \| = | \lambda_n - \mu | \cdot \| x_n \| = | \lambda_n - \mu |.$$

Положим теперь, что μ есть точка непрерывного спектра и $\mathcal{E}'_\lambda$ — непрерывная часть спектральной функции. Разность $\mathcal{E}'_{\mu+\delta} - \mathcal{E}'_{\mu-\delta}$ при любом малом положительном δ есть проектор в некоторое подпространство L_δ. Возьмем последовательность положительных чисел δ_n такую, что $\delta_n \to 0$, и последовательность нормированных элементов x_n из L_{δ_n}. Покажем, что при этом также выполняется утверждение леммы. По определению δ_n имеем $(\mathcal{E}'_{\mu+\delta_n} - \mathcal{E}'_{\mu-\delta_n}) x_n = x_n$ и для любого элемента z

$$(z, x_n) = (z, (\mathcal{E}'_{\mu+\delta_n} - \mathcal{E}'_{\mu-\delta_n}) x_n) = ((\mathcal{E}'_{\mu+\delta_n} - \mathcal{E}'_{\mu-\delta_n}) z, x_n)$$

$$|(z, x_n)| \leqslant \| (\mathcal{E}'_{\mu+\delta_n} - \mathcal{E}'_{\mu-\delta_n}) z \|.$$

Но мы имеем $\mathcal{E}'_{\mu+\delta_n} - \mathcal{E}'_{\mu-\delta_n} \to 0$, и слабая сходимость $x_n \xrightarrow{\text{сл.}} 0$ доказана. Для доказательства (307) надо воспользоваться следующей очевидной формулой

$$\| Ax_n - \mu x_n \|^2 = \int_{m-\varepsilon}^{M} (\lambda-\mu)^2 \, d\,(\mathcal{E}'_\lambda x_n, x_n) =$$

$$= \int_{m-\varepsilon_0}^{M} (\lambda-\mu)^2 \, d\,(\mathcal{E}'_\lambda (\mathcal{E}'_{\mu+\delta_n} - \mathcal{E}'_{\mu-\delta_n}) x_n, x_n) =$$

$$= \int_{\mu-\delta_n}^{\mu+\delta_n} (\lambda-\mu)^2 \, d \| (\mathcal{E}'_\lambda - \mathcal{E}'_{\mu-\delta_n}) x_n \|^2 \leqslant \delta_n^2 \| (\mathcal{E}'_{\mu+\delta_n} - \mathcal{E}'_{\mu-\delta_n}) x_n \|^2 = \delta_n^2 \to 0.$$

Лемма 2. *Если $\lambda = \mu$ не есть точка сгущения спектра, то для любой последовательности нормированных элементов x_n, слабо сходящейся к нулю, существует такое положительное число a, что для всех достаточно больших n имеем*

$$\| Ax_n - \mu x_n \| \geqslant a > 0. \tag{308}$$

По условию леммы существует такое положительное число d, что в промежутке $\mu - d \leqslant \lambda \leqslant \mu + d$ спектральная функция $\mathcal{E}_\lambda$ или постоянна, или ее изменение сводится к скачку в точке $\lambda = \mu$, причем подпространство собственных элементов L_μ, соответствующих этому скачку, имеет конечную размерность. Мы имеем

$$\| Ax_n - \mu x_n \|^2 = \int_{m-\varepsilon_0}^{M} (\lambda-\mu)^2 d \| \mathcal{E}_\lambda x_n \|^2 \geqslant \int_{m-\varepsilon_0}^{\mu-d} (\lambda-\mu)^2 d \| \mathcal{E}_\lambda x_n \|^2 +$$

$$+ \int_{\mu+d}^{M} (\lambda-\mu)^2 d \| \mathcal{E}_\lambda x_n \|^2 \geqslant d^2 [\| \mathcal{E}_{\mu-d} x_n \|^2 + d^2 (\| x_n \|^2 - \mathcal{E}_{\mu+d} x_n \|^2)] =$$

$$= d^2 - d^2 [\| \mathcal{E}_{\mu+d} x_n \|^2 - \| \mathcal{E}_{\mu-d} x_n \|^2],$$

или

$$\| Ax_n - \mu x_n \|^2 \geqslant d^2 - d^2 ((\mathcal{E}_{\mu+d} - \mathcal{E}_{\mu-d}) x_n, x_n). \tag{309}$$

Если $\mathcal{E}_{\mu+d} - \mathcal{E}_{\mu-d} = 0$, то получим (308), положив $a = d$. Положим теперь, что $\mathcal{E}_\lambda$ имеет скачок при $\lambda = \mu$, и пусть $z_1, z_2, \ldots, z_m$ — полная ортонормированная система в L_μ. При этом

$$(\mathcal{E}_{\mu+d} - \mathcal{E}_{\mu-d}) x_n = \sum_{s=1}^{m} (x_n, z_s) z_s,$$

в силу $x_n \xrightarrow{\text{сл.}} 0$, имеем $(\mathcal{E}_{\mu+d} - \mathcal{E}_{\mu-d}) x_n \Rightarrow 0$, и из формулы (309) следует, что (308) выполнено для достаточно больших n, если, например, положить $a = \frac{1}{2} d$. Из доказанных лемм непосредственно следует, что, для того, чтобы $\lambda = \mu$ было точкой сгущения спектра, необходимо и

достаточно, чтобы существовала такая последовательность нормированных элементов x_n, что $x_n \xrightarrow{\text{сл.}} 0$ и имеет место (307).

Теперь уже нетрудно доказать теорему 1. Прибавим к оператору A вполне непрерывный самосопряженный оператор C, и пусть $A_1 = A + C$. При этом $A = A_1 + (-C)$, где $(-C)$ — также вполне непрерывный самосопряженный оператор. Пусть $\lambda = \mu$ — точка сгущения спектра A и x_n — последовательность, удовлетворяющая условию (307). При этом, в силу $x_n \xrightarrow{\text{сл.}} 0$, $Cx_n \Rightarrow 0$, и из неравенства $\| A_1 x_n - \mu x_n \| \leqslant \| Ax_n - \mu x_n \| + \| Cx_n \|$ следует, что $\| A_1 x_n - \mu x_n \| \to 0$, т. е. $\lambda = \mu$ есть точка сгущения спектра и для A_1. Точно так же из формулы $A = A_1 + (-C)$ следует и наоборот, что всякая точка сгущения спектра A_1 есть и точка сгущения спектра A; теорема таким образом доказана.

158. Нормальные операторы. Укажем еще на один частный тип линейных операторов. Это так называемые нормальные операторы. Линейный оператор A называется нормальным, если он коммутирует со своим сопряженным оператором [ср. **IV, 41**], т. е.

$$AA^* = A^*A. \tag{310}$$

Частным случаем нормальных операторов являются самосопряженный и унитарный операторы. Если положить

$$A_1 = \frac{1}{2}(A + A^*), \qquad A_2 = \frac{1}{2i}(A - A^*), \tag{311}$$

то мы можем выразить A и A^* через самосопряженные операторы A_1 и A_2

$$A = A_1 + iA_2; \qquad A^* = A_1 - iA_2. \tag{312}$$

Из последних формул непосредственно следует, что для того чтобы оператор был нормальным, необходимо и достаточно, чтобы самосопряженные операторы A_1 и A_2 коммутировали. Если это так, то спектральные функции $\mathcal{E}_\lambda^{(1)}$ и $\mathcal{E}_\mu^{(2)}$ этих операторов коммутируют для любых λ и μ. Определим семейство проекторов $\mathcal{E}_\alpha$, зависящее от комплексного переменного $\alpha = \lambda + \mu i$, полагая

$$\mathcal{E}_\alpha = \mathcal{E}_\lambda^{(1)} \mathcal{E}_\mu^{(2)} \qquad (\alpha = \lambda + \mu i). \tag{313}$$

Этот проектор $\mathcal{E}_\alpha$ будет переменным лишь на некотором промежутке Δ_0 плоскости комплексного переменного α, и мы будем иметь для оператора A формулы, совершенно аналогичные формулам для самосопряженного оператора:

$$A = \iint\limits_{\Delta_0} \alpha d d\mathcal{E}_\alpha; \qquad (Ax, y) = \iint\limits_{\Delta_0} \alpha d d(\mathcal{E}_\alpha x, y). \tag{314}$$

Докажем, например, вторую из этих формул. Положим, что промежуток Δ_0 определяется неравенствами $a \leqslant \lambda \leqslant b$; $c \leqslant \mu \leqslant d$. Мы имеем

$$\iint\limits_{\Delta_0} \alpha d d(E_\alpha x, y) = \iint\limits_{\Delta_0} \lambda d_\lambda d_\mu (\mathcal{E}_\lambda^{(1)} \mathcal{E}_\mu^{(2)} x, y) + i \iint\limits_{\Delta_0} \mu d_\lambda d_\mu (\mathcal{E}_\lambda^{(1)} \mathcal{E}_\mu^{(2)} x, y).$$

В первом из написанных интегралов можно после образования суммы Римана — Стилтьеса просуммировать по μ, так как подынтегральная функция

не зависит от μ, и при этом надо принять во внимание, что $\mathcal{E}_c^{(2)} = 0$ и $\mathcal{E}_d^{(2)} = E$. Точно так же во втором интеграле можно просуммировать по λ, причем $\mathcal{E}_a^{(1)} = 0$ и $\mathcal{E}_b^{(1)} = E$. Таким образом, получим

$$\iint_{\Delta_0} \alpha d d\,(\mathcal{E}_\alpha x,\ y) = \int_a^b \lambda d\,(\mathcal{E}_\lambda^{(1)} x,\ y) + i \int_c^d \mu d\,(\mathcal{E}_\mu^{(2)} x,\ y) = (A_1 x,\ y) + i\,(A_2 x,\ y).$$

С другой стороны,

$$(Ax,\ y) = (A_1 x,\ y) + i\,(A_2 x,\ y),$$

и, сравнивая, получаем вторую формулу (314). Дальнейшая общая теория нормальных операторов может быть развита по аналогии с теорией самосопряженных операторов.

Пусть в случае нормального оператора A самосопряженные операторы A_1 и A_2 имеют чисто точечный спектр. Мы можем взять замкнутую ортогональную нормированную систему элементов x_k ($k = 1, 2, 3, \ldots$), являющихся собственными элементами A_1 и A_2 [**156**], т. е.

$$A_1 x_k = \mu_k^{(1)} x_k; \qquad A_2 x_k = \mu_k^{(2)} x_k.$$

При этом очевидно

$$Ax_k = (A_1 + iA_2)\, x_k = (\mu_k^{(1)} + \mu_k^{(2)} i)\, x_k,$$

и, таким образом, x_k будут собственными элементами A, соответствующими собственным значениям $\mu_k^{(1)} + \mu_k^{(2)} i$.

Рассмотрим еще тот случай, когда нормальный оператор A вполне непрерывен. Мы знаем, что при этом и оператор A^* вполне непрерывен и, в силу (311), операторы A_1 и A_2 также вполне непрерывны. Нетрудно распространить на нормальные вполне непрерывные операторы и теорему из [**136**]. Пусть μ_k — собственные значения A_1, отличные от нуля, и x_k — соответствующие собственные элементы, т. е.

$$A_1 x_k = \mu_k x_k.$$

Принимая во внимание, что A_2 коммутирует с A_1, получим, применяя к обеим частям A_2:

$$A_1 (A_2 x_k) = \mu_k A_2 x_k,$$

т. е. $A_2 x_k$ есть или нулевой элемент, или собственный элемент A_1, соответствующий тому же собственному значению. Положим, что μ_k есть собственное значение ранга h и $\mu_k = \mu_{k+1} = \ldots = \mu_{k+h-1}$. При этом, в силу сказанного выше, мы должны иметь

$$A_2 x_j = \sum_{s=k}^{k+h-1} c_{js} x_s$$

$$(j = k,\ k+1,\ \ldots,\ \ k+h-1)$$

и

$$c_{js} = (A_2 x_j,\ x_s) = (x_j,\ A_2 x_s) = \bar{c}_{sj},$$

т. е. c_{js} образуют конечную эрмитову матрицу. Совершая над x_s унитарное преобразование, что несущественно, мы можем привести эту матрицу к диагональному виду и таким образом, сохраняя прежнее обозначение элементов, можем написать

$$A_1 x_j = \mu_j x_j; \qquad A_2 x_j = \nu_j x_j$$

$$(j = k,\ k+1,\ \ldots,\ \ k+h-1),$$

где некоторые из чисел ν_j, или даже все эти числа, могут быть равны нулю. Мы можем проделать эту операцию для всех собственных значений A_1, отличных от нуля. После этого мы можем и не получить всех собственных значений A_2, отличных от нуля. Если мы возьмем эти неполученные собственные значения A_2, отличные от нуля, и совершим операцию, аналогичную предыдущей, отправляясь от A_2 и переходя к A_1, то окончательно получим конечное или счетное множество элементов y_k ($k = 1, 2, \ldots$), попарно ортогональных, нормированных и таких, что

$$A_1 y_k = \mu_k^{(1)} y_k; \qquad A_2 y_k = \mu_k^{(2)} y_k,$$

причем из двух вещественных чисел $\mu_k^{(1)}$ и $\mu_k^{(2)}$ по крайней мере одно отлично от нуля, а всякий собственный элемент A_1, соответствующий собственному значению, отличному от нуля, выражается линейно через конечное число y_k и аналогично для A_2. Далее имеем, очевидно,

$$Ay_k = (\mu_k^{(1)} + \mu_k^{(2)} i)\, y_k; \qquad A^* y_k = (\mu_k^{(1)} - \mu_k^{(2)} i) y_k.$$

Положим, что

$$x = Ay = A_1 y + i A_2 y.$$

Мы имеем [136]:

$$A_1 y = \sum_k a_k y_k \quad \text{и} \quad A_2 y = \sum_k b_k y_k,$$

и, таким образом, любой элемент x, который выражается в виде Ay, может быть разложен по элементам y_k:

$$x = Ay = \sum_k (a_k + b_k i)\, y_k.$$

Отметим, что если, например, $\mu_k^{(1)} = 0$, то в разложении $A_1 y$ будет отсутствовать член, содержащий y_k. Выше мы видели [155], что если оператор A есть функция самосопряженного оператора B, то и A^* есть функция от B, а потому A и A^* коммутируют, т. е. A есть нормальный оператор. Таким образом, любая функция самосопряженного оператора есть нормальный оператор. Верно и обратное утверждение: всякий нормальный оператор есть функция некоторого самосопряженного оператора. Действительно, пусть имеется нормальный оператор $A = A_1 + iA_2$. Самосопряженные операторы A_1 и A_2 коммутируют, а потому, как мы упоминали в [156], они суть функции одного и того же самосопряженного оператора B: $A_1 = F_1(B)$ и $A_2 = F_2(B)$. Строя функцию $F(\lambda) = F_1(\lambda) + iF_2(\lambda)$, получим $A = F(B)$, что мы и хотели показать.

159. Вспомогательные предложения. Задачей этого и следующих параграфов является доказательство основной теоремы из [142] и того факта, что если некоторый оператор коммутирует с самосопряженным оператором A, то он коммутирует и с его спектральной функцией E_λ при любом λ. При изложении этого доказательства мы можем пользоваться теми результатами, которые были получены до [142]. Предварительно нам надо изложить некоторые вспомогательные леммы.

Лемма 1. *Если A и B — коммутирующие самосопряженные операторы, удовлетворяющие соотношению*

$$A^2 = B^2, \tag{315}$$

и P — оператор проектирования в подпространство L, образованное элементами x, которые удовлетворяют уравнению

$$(A + B)\, x = 0, \quad \text{т. е.} \quad Ax = -Bx, \tag{316}$$

то имеют место следующие свойства:

1) *если некоторый оператор D коммутирует с $(A+B)$, то он коммутирует и с P;*

2) *если $Ax=0$, то $x \in L$, т. е. $Px=x$;*

3) *оператор A может быть выражен формулой*

$$A=(E-2P)B. \tag{317}$$

1. По условию имеем

$$D(A+B)=(A+B)D. \tag{318}$$

Если $x \in L$, то, в силу (316), $D(A+B)x=0$, а потому и $(A+B)Dx=0$, т. е. и $Dx \in L$. Если z — любой элемент из H, то $Pz \in L$ и по только что доказанному $DPz \in L$, а потому можем написать для любого элемента z из H: $PDPz=DPz$, т. е.

$$PDP=DP. \tag{319}$$

Переходя в (318) к сопряженным операторам и принимая во внимание, что A и B — самосопряженные, получим [**124**]:

$$(A+B)D^*=D^*(A+B),$$

т. е. и D^* коммутирует с $A+B$, и мы можем и для него написать формулу (319), т. е.

$$PD^*P=D^*P.$$

Переходя в этом равенстве к сопряженным операторам и принимая во внимание, что P — самосопряженный оператор, получим $PDP=PD$. Сравнивая это равенство с (319), будем иметь $DP=PD$, т. е. D действительно коммутирует с P, что мы и хотели доказать. В частности, операторы A и B по условию коммутируют с $(A+B)$, а потому A и B коммутируют с P.

2. Из равенств

$$\|Az\|^2=(Az,\ Az)=(A^2z,\ z); \quad \|Bz\|^2=(Bz,\ Bz)=(B^2z,\ z)$$

и условия (315) следует, что $\|Az\|=\|Bz\|$ для любого элемента z. Если $Ax=0$, то и $Bx=0$ и, следовательно, x удовлетворяет уравнению (316), т. е. $x \in L$ и $Px=x$, что мы и хотели доказать.

3. Из того, что A и B коммутируют, и из условия (315) следует, что $(A+B)(A-B)=0$, т. е. если z — любой элемент H, то $(A-B)z \in L$, и следовательно, $P(A-B)z=(A-B)z$, т. е.

$$P(A-B)=A-B.$$

Далее для любого элемента z элемент $Pz \in L$, и, следовательно, $(A+B)Pz=0$, т. е.

$$(A+B)P=0.$$

Вычитая из этого равенства предыдущее и принимая во внимание, что A и B коммутируют с P, получим $2PB=-A+B$, откуда и следует (317); лемма доказана.

Лемма 2. *Если самосопряженный оператор $C \geqslant 0$ и самосопряженный оператор F коммутируют с C, то $F^2C=CF^2 \geqslant 0$.*

Принимая во внимание условие леммы, можем написать, обозначая $Fx=y$:

$$(CF^2x,\ x)=(FCFx,\ x)=(CFx,\ Fx)=(Cy,\ y) \geqslant 0,$$

что и доказывает лемму. Отметим один частный случай леммы. Если проектор P коммутирует с C, то, в силу $P^2=P$, можем утверждать, что $PC \geqslant 0$.

Если $P(t)=a_0+a_1t+\ldots+a_nt^n$ — некоторый полином и A — оператор, то, как мы видели, мы можем сопоставить полиному $P(t)$ оператор $P(A)=$

$= a_0E + a_1A + \ldots + a_nA^n$. Если A — самосопряженный оператор и коэффициенты a_k вещественны, то и $P(A)$ — самосопряженный оператор. Для выяснения свойств полиномов от операторов нам понадобятся еще две леммы.

Лемма 3. *Если полином $P(t)$ положителен в промежутке* [0, 1], *то для всех достаточно больших значений p мы можем представить его в виде*

$$P(t) = \sum_{s=0}^{p} c_s t^s (1-t)^{p-s}, \tag{320}$$

где все коэффициенты c_s положительны.

Для полиномов первой степени это вытекает из формулы

$$P(t) = c_0(1-t) + c_1 t, \quad \text{где} \quad c_0 = f(0) \quad \text{и} \quad c_1 = f(1).$$

Рассмотрим положительный полином второй степени, который не разлагается на вещественные множители первой степени:

$$P(t) = \alpha + 2\beta t + \gamma t^2 \qquad (\alpha > 0,\ \gamma > 0,\ \alpha\gamma - \beta^2 > 0).$$

Принимая во внимание формулу

$$[(1-t) + t]^k = \sum_{s=0}^{k} C_k^s t^s (1-t)^{k-s} = 1,$$

можем написать предыдущий полином в виде

$$P(t) = \alpha \sum_{s=0}^{p} C_p^s t^s (1-t)^{p-s} + 2\beta t \sum_{s=1}^{p} C_{p-1}^{s-1} t^{s-1} (1-t)^{p-s} + \gamma t^2 \sum_{s=2}^{p} C_{p-2}^{s-2} t^{s-2} (1-t)^{p-s},$$

или, приводя подобные члены,

$$P(t) = \sum_{s=0}^{p} \frac{(p-2)!}{s!\,(p-s)!} t^s (1-t)^{p-s} [p(p-1)\alpha + 2s(p-1)\beta + s(s-1)\gamma]. \tag{321}$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, положительно при всех вещественных s и при всех достаточно больших значениях p. Действительно, дискриминант этого трехчлена относительно s

$$p(p-1)\alpha\gamma - \frac{1}{4}(2p\beta - 2\beta - \gamma)^2 = p^2(\alpha\gamma - \beta^2) + p(2\beta^2 + 2\beta\gamma + \alpha) - \frac{1}{4}(2\beta + \gamma)^2,$$

в силу $\alpha\gamma - \beta^2 > 0$, положителен при всех достаточно больших p. Таким образом, формула (321) и приводит к формуле (320) с положительными c_s для всех достаточно больших значений p. Возьмем теперь любой положительный полином в промежутке [0, 1]. Его можно представить в виде произведения положительных полиномов первой степени и положительных полиномов второй степени с мнимыми корнями. Для каждого множителя имеем разложение (320). Тем самым

получим такое же разложение и для их произведения, причем степень p будет равна сумме степеней отдельных сомножителей.

Замечание. При помощи замены переменных $t_1 = \frac{t-a}{b-a}$ мы можем свести любой конечный промежуток $a \leqslant t \leqslant b$ к промежутку $0 \leqslant t_1 \leqslant 1$, и для полиномов, положительных в промежутке $[a, b]$, получаем, вместо формулы (320), следующую:

$$P(t) = \sum_{s=0}^{p} c_s (t-a)^s (b-t)^{p-s}. \tag{322}$$

Лемма 4. *Если m и M — границы самосопряженного оператора A, т. е. квадратичного функционала (Ax, x) при $|x| = 1$, и $P(t)$ — неотрицательный в промежутке $[m, M]$ полином, то $P(A)$ — положительный оператор, т. е.*

$$(P(A)x, x) \geqslant 0. \tag{323}$$

Достаточно доказать лемму в том случае, когда $P(t) > 0$ в промежутке $[m, M]$. Действительно, положим, что в этом случае лемма доказана и что $Q(t) \geqslant 0$ в промежутке $[m, M]$. Полагая $P(t) = Q(t) + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, будем иметь $P(t) > 0$ в промежутке $[m, M]$ и, следовательно, по предыдущему:

$$((Q(A) + \varepsilon)x, x) = (Q(A)x, x) + \varepsilon(x, x) \geqslant 0.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим неравенство (323) и для $Q(A)$. Переходим к доказательству леммы для положительного $P(t)$. В силу (322) при $a = m$ и $b = M$ достаточно доказать положительность оператора

$$(A - mE)^s (ME - A)^{p-s}, \tag{324}$$

причем число p мы возьмем нечетным (сумма положительных операторов положительна). Положим, например, что $s = 2j$ — чётно, и представим оператор (324) в виде

$$A_2^2 A_1,$$

где $A_1 = (ME - A)$; $A_2 = (A - mE)^j (ME - A)^{\frac{p-2j-1}{2}}$,

причем A_2 коммутирует с A_1, и A_1 есть положительный оператор, ибо $(A_1 x, x) = M - (Ax, x) \geqslant 0$ при $|x| = 1$. В силу леммы 2 мы можем утверждать положительность оператора (324). При нечетном s надо взять $A_1 = (A - mE)$.

Следствие 1. *Если в промежутке $[m, M]$ полиномы $P_1(t)$ и $P_2(t)$ удовлетворяют неравенству $P_2(t) \geqslant P_1(t)$, т. е. $P_2(t) - P_1(t) \geqslant 0$, то $P_2(A) \geqslant P_1(A)$.* В частности, если $|P(t)| \leqslant \varepsilon$, т. е. $-\varepsilon \leqslant P(t) \leqslant \varepsilon$, то $-\varepsilon E \leqslant P(A) \leqslant \varepsilon E$, т. е. $-\varepsilon \leqslant (P(A)x, x) \leqslant \varepsilon$ при $|x| = 1$, и, следовательно, норма $P(A)$ не больше ε [126].

Следствие 2. *Из предыдущего следствия вытекает, что если последовательность полиномов $P_n(t)$ стремится равномерно в промежутке $[m, M]$ к полиному $P(t)$, то $P_n(A) \to P(A)$, и даже норма разности $P(A) - P_n(A)$ стремится к нулю.*

160. Степенной ряд от оператора. Напомним еще лемму, доказанную в [131], результат которой сводится к следующему: если нормы последовательности операторов A_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) не превышают положительных чисел δ_n, которые образуют сходящийся ряд, то ряд

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$$

сходится, и норма оператора A не превышает суммы чисел δ_n. В частности если имеется степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n,$$

который абсолютно сходится в промежутке $|t| \leqslant k$, и норма оператора A не превышает k, то сходится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n.$$

Для дальнейшего нам понадобится следующая формула бинома Ньютона:

$$\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} t^n, \quad |t| \leqslant 1, \tag{325}$$

где

$$\binom{\frac{1}{2}}{0} = 1; \quad \binom{\frac{1}{2}}{n} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}. \tag{326}$$

Формула (325) дает арифметическое значение радикала и остается справедливой при $t = \pm 1$ [1; 138]. Коэффициенты разложения (326) положительны при нечетном и отрицательны при четном $n > 0$. Поэтому, полагая в формуле (325) $t = -1$, получим все члены, кроме первого, отрицательными, откуда следует

$$0 = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left|\binom{\frac{1}{2}}{n}\right| \quad \text{или} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left|\binom{\frac{1}{2}}{n}\right| = 1, \tag{327}$$

и ряд (325) сходится абсолютно и равномерно при $|t| \leqslant 1$ [1; 146.]. Заменяя в формуле (291) t на $t^2 - 1$, получим слева абсолютное значение квадратного корня из t^2, т. е. абсолютное значение $|t|$, и будем иметь для него следующее разложение в абсолютно сходящийся ряд в промежутке $|t| \leqslant 1$:

$$|t| = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} (t^2-1)^n. \tag{328}$$

Именно это разложение мы и применим к самосопряженному оператору. Пусть A — самосопряженный оператор с нормой m_A. Составим самосопряженный оператор $C = \frac{1}{m_A^2} A^2 - E$. Мы имеем

$$(Cx, x) = \frac{1}{m_A^2}(A^2x, x) - \|x\|^2 = \frac{1}{m_A^2}\|Ax\|^2 - \|x\|^2,$$

откуда видно, что $-1 \leqslant (Cx, x) \leqslant 0$ при $\|x\| = 1$, а норма C не превышает единицы. Мы имеем возможность составить ряд

$$B = m_A \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} C^n = m_A \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} \left(\frac{1}{m_A^2} A^2 - E\right)^n. \tag{329}$$

Если $S_n(t)$ — отрезок ряда (328), то $S_n^2(t) \to t^2$ равномерно в промежутке $[-1, +1]$, и, следовательно, $S_n^2\left(\frac{1}{m_A} A\right) \to \frac{1}{m_A^2} A^2$, и в пределе самосопряженный оператор B, определяемый формулой (329), удовлетворяет условию $B^2 = A^2$.

Далее, если оператор D коммутирует с A, то он коммутирует с отрезком ряда (329), и, следовательно, в пределе коммутирует с B. Из этого следует, в частности, что A коммутирует с B, т. е. $AB = BA$.

Покажем еще, что B — положительный оператор. Принимая во внимание, что норма C не больше единицы, получим $|(C^n x, x)| \leqslant \|x\|^2$ и, написав выражение (329) в виде

$$B = m_A \left[E + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} C^n \right],$$

придем к неравенству

$$(Bx, x) \geqslant m_A \left[(x, x) - \sum_{n=1}^{\infty} \left| \binom{\frac{1}{2}}{n} \right| |(C^n x, x)| \right] \geqslant$$

$$\geqslant m_A \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left| \binom{\frac{1}{2}}{n} \right| \right] \|x\|^2,$$

откуда, в силу (327), и следует, что $(Bx, x) \geqslant 0$.

Таким образом, окончательно получаем следующие свойства: B есть самосопряженный, положительный оператор, коммутирующий с A и удовлетворяющий равенству $B^2 = A^2$; всякий оператор, коммутирующий с A, коммутирует и с B. В следующем параграфе мы, пользуясь оператором B и леммой 1, построим спектральную функцию $\mathcal{E}_\lambda$ оператора A и докажем основную формулу (204) из [142].

161. Спектральная функция. ***Теорема.*** *Всякому самосопряженному оператору A соответствует проектор $\mathcal{E}_0$ со следующими свойствами:* 1) *если оператор D коммутирует с A, то он коммутирует и с $\mathcal{E}_0$;* 2) *если $Az = 0$, то $\mathcal{E}_0 z = z$;* 3) *самосопряженные операторы $A\mathcal{E}_0$ и $A(E - \mathcal{E}_0)$ удовлетворяют условиям*

$$A\mathcal{E}_0 \leqslant 0; \qquad A(E - \mathcal{E}_0) \geqslant 0. \tag{330}$$

Принимаем за $\mathcal{E}_0$ проектор P, входящий в лемму 1. Если D коммутирует с A, то он коммутирует и с B, а потому и с $(A + B)$, и первые два утверждения теоремы вытекают из леммы 1. Далее из формулы $A = (E - 2\mathcal{E}_0) B$ и того, что $\mathcal{E}_0$ коммутирует с A и B и $\mathcal{E}_0^2 = \mathcal{E}_0$, следует, что

$$AE_0 = -B\mathcal{E}_0; \qquad A(E - \mathcal{E}_0) = B(E - \mathcal{E}_0).$$

Но произведение положительного оператора B на проекторы $\mathcal{E}_0$ и $(E - \mathcal{E}_0)$, с которыми он коммутирует, суть положительные операторы, и из последних формул непосредственно следуют неравенства (330), и теорема доказана.

Пусть λ — любое вещественное число. Мы можем построить для самосопряженного оператора $(A - \lambda E)$ проектор, о котором говорится в доказанной теореме. Обозначим его через $\mathcal{E}_\lambda$. Он обладает следующими свойствами: 1) если некоторый оператор D коммутирует с $(A - \lambda E)$ или, что то же, с A, то он коммутирует с $\mathcal{E}_\lambda$; 2) если $(A - \lambda E) z = 0$, то $\mathcal{E}_\lambda z = z$, 3) имеют место неравенства

$$(A - \lambda E)\mathcal{E}_\lambda \leqslant 0; \qquad (A - \lambda E)(E - \mathcal{E}_\lambda) \geqslant 0. \tag{331}$$

Отметим еще, что $\mathcal{E}_\lambda$ при любом λ коммутирует с $(A-\lambda E)$, т. е. с A. Покажем, что $\mathcal{E}_\lambda$ представляет собой разложение единицы. Всякое $\mathcal{E}_{\lambda_1}$ коммутирует с A, а потому, в силу сказанного выше, и с любым $\mathcal{E}_{\lambda_2}$. Пусть $\lambda < m$. Покажем при этом, что $\mathcal{E}_\lambda = 0$. Если бы это было не так, то мы имели бы такой элемент x с нормой единица, что $\mathcal{E}_\lambda x = x$, и, следовательно,

$$((A-\lambda E)\,\mathcal{E}_\lambda x,\ x) = ((A-\lambda E)\,x,\ x) = (Ax,\ x) - \lambda > 0,$$

ибо $\lambda < m$, а это противоречит первому из неравенств (331). Итак, $\mathcal{E}_\lambda = 0$ при $\lambda < m$. Совершенно так же, пользуясь вторым из неравенств (331), мы докажем, что $\mathcal{E}_\lambda = E$ при $\lambda > M$. Остается доказать, что $\mathcal{E}_\lambda \leqslant \mathcal{E}_\mu$ при $\lambda < \mu$, т. е. что $\mathcal{E}_\lambda \mathcal{E}_\mu = \mathcal{E}_\lambda$ при $\lambda < \mu$ или, что то же, надо доказать формулу

$$\mathcal{E}_\lambda\,(E - \mathcal{E}_\mu) = 0. \tag{332}$$

Обозначим левую часть написанного равенства через R:

$$\mathcal{E}_\lambda\,(E-\mathcal{E}_\mu) = (E-\mathcal{E}_\mu)\,\mathcal{E}_\lambda = R. \tag{333}$$

Нам надо доказать, что для любого элемента x мы имеем $Rx = 0$. Обозначим $Rx = y$. Из формулы (333) непосредственно следует

$$\mathcal{E}_\lambda R = \mathcal{E}_\lambda^2\,(E-\mathcal{E}_\mu) = \mathcal{E}_\lambda\,(E-\mathcal{E}_\mu) = R \quad \text{и аналогично} \quad (E-\mathcal{E}_\mu)\,R = R. \tag{334}$$

В силу (331) имеем

$$((A-\lambda E)\,\mathcal{E}_\lambda y,\ y) \leqslant 0; \quad ((A-\mu E)\,(E-\mathcal{E}_\mu)\,y,\ y) \geqslant 0. \tag{335}$$

С другой стороны, в силу (334),

$$\mathcal{E}_\lambda y = \mathcal{E}_\lambda R x = Rx = y; \quad (E-\mathcal{E}_\mu)\,y = (E-\mathcal{E}_\mu)\,Rx = Rx = y,$$

и первое из неравенств (335) переписывается в виде $((A-\lambda E)\,y,\ y) \leqslant 0$, и, совершенно аналогично, второе переписывается в виде $((A-\mu E)\,y,\ y) \geqslant 0$. Вычитая последнее неравенство из предыдущего, получим $((\mu-\lambda)\,y,\ y) \leqslant 0$, т. е. $(\mu-\lambda)\,\|y\|^2 \leqslant 0$, откуда, в силу $\lambda < \mu$, и следует, что $y = 0$, т. е. $Rx = 0$, и формула (332) доказана. Непрерывность $\mathcal{E}_\lambda$ справа докажем позже.

Для доказательства интегрального представления оператора A через $\mathcal{E}_\lambda$ выведем одно неравенство. Введем проектор

$$\Delta = \mathcal{E}_\mu - \mathcal{E}_\lambda \qquad (\mu > \lambda); \tag{336}$$

мы можем написать для любого элемента x:

$$((A-\mu E)\,\mathcal{E}_\mu\,\Delta x,\ \Delta x) \leqslant 0; \qquad ((A-\lambda E)\,(E-\mathcal{E}_\lambda)\,\Delta x,\ \Delta x) \geqslant 0.$$

Принимая во внимание очевидные равенства

$$\Delta^2 = \Delta; \qquad \mathcal{E}_\mu \Delta = (E-\mathcal{E}_\lambda)\,\Delta = \Delta,$$

можем переписать эти неравенства так:

$$((A-\mu E)\,\Delta x,\ x) \leqslant 0; \qquad ((A-\lambda E)\,\Delta x,\ x) \geqslant 0$$

или

$$\lambda\,(\Delta x,\ x) \leqslant (A\,\Delta x,\ x) \leqslant \mu\,(\Delta x,\ x).$$

Взяв любое число ν, удовлетворяющее условию $\lambda \leqslant \nu \leqslant \mu$, получим отсюда

$$|((A-\nu E)\,\Delta x,\ x)| \leqslant (\mu-\lambda)\,(\Delta x,\ x)$$

или, принимая во внимание, что $(\Delta x,\ x) = \|\Delta x\|^2 \leqslant \|x\|^2$, имеем

$$|((A-\nu E)\,\Delta x,\ x)| \leqslant (\mu-\lambda)\,\|x\|^2.$$

Отсюда видно [126], что норма оператора $(A - \nu E)\,\Delta$ не превышает $(\mu - \lambda)$, т. е.

$$\| (A - \nu E)\,\Delta x \| \leqslant (\mu - \lambda) \| x \|.$$

Заменяя в этом неравенстве x на Δx и принимая во внимание, что $\Delta^2 = \Delta$, получим основное для дальнейшего неравенство

$$\| A\,\Delta x - \nu\,\Delta x \| \leqslant (\mu - \lambda) \| \Delta x \|. \tag{337}$$

В этом неравенстве $\lambda \leqslant \nu \leqslant \mu$ и Δ определяются формулой (336). Переходим к доказательству формулы (204). Берем некоторое положительное число ε_0 и разбиваем промежуток $[m - \varepsilon_0, M]$ на части:

$$m - \varepsilon_0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_{n-1} < \lambda_n = M;$$

затем вводим проекторы $\Delta_k = \mathcal{E}_{\lambda k} - \mathcal{E}_{\lambda k - 1}$, причем

$$E = \sum_{k=1}^{n} \Delta_k \qquad \text{и} \qquad \Delta_k \Delta_l = 0 \qquad \text{при } k \neq l. \tag{338}$$

Имеем разложение любого элемента x на попарно ортогональные слагаемые

$$x = \sum_{k=1}^{n} \Delta_k x = \sum_{k=1}^{n} x_k,$$

$$Ax = \sum_{k=1}^{n} Ax_k.$$

Нетрудно видеть, что

$$(Ax_k, Ax_l) = 0 \text{ и } (Ax_k, x_l) = 0 \qquad \text{при } k \neq l.$$

Например, первое из этих равенств доказывается так:

$$(Ax_k, Ax_l) = (A\,\Delta_k x, A\,\Delta_l x) = (A\,\Delta_l \Delta_k x, Ax),$$

а последнее выражение равно нулю в силу (338). Составим теперь выражение

$$Ax - \sum_{k=1}^{n} \nu_k \Delta_k x = \sum_{k=1}^{n} (Ax_k - \nu_k x_k),$$

где ν_k — любое значение из промежутка $[\lambda_{k-1}, \lambda_k]$. Слагаемые суммы, стоящей справа, попарно ортогональны, и пользуясь теоремой Пифагора, можем написать

$$\| Ax - \sum_{k=1}^{n} \nu_k \Delta_k x \|^2 = \sum_{k=1}^{n} \| Ax_k - \nu_k x_k \|^2. \tag{339}$$

Пусть δ — наибольшая из разностей $\lambda_k - \lambda_{k-1}$. Пользуясь неравенством (337), получим из (339):

$$\| Ax - \sum_{k=1}^{n} \nu_k \Delta_k x \|^2 \leqslant \delta^2 \sum_{k=1}^{n} \| x_k \|^2,$$

или, в силу теоремы Пифагора,

$$\| Ax - \sum_{k=1}^{n} \nu_k \Delta_k x \|^2 \leqslant \delta^2 \| x \|^2,$$

и отсюда следует, что при $\delta \to 0$ мы имеем для любого элемента x:

$$Ax = \lim \sum_{k=1}^{n} \nu_k \Delta_k x.$$

Таким образом, получаем основную формулу

$$A = \int_m^M \lambda \, d\mathcal{E}_\lambda.$$

Остается доказать, что $\mathcal{E}_\lambda$ непрерывна справа. При стремлении μ к λ проектор Δ, определяемый формулой (336), не увеличивается и стремится к некоторому пределу Δ_0, и нам надо показать, что Δ_0 есть оператор аннулирования. Переходя в (337) к пределу, получим $(A - \lambda E)\Delta_0 x = 0$. Отсюда, в силу второго свойства $\mathcal{E}_\lambda$, следует, что $\mathcal{E}_\lambda \Delta_0 x = \Delta_0 x$, т. е. $(E - \mathcal{E}_\lambda)\Delta_0 x = 0$. С другой стороны, $(E - \mathcal{E}_\lambda)\Delta = \Delta$, и, переходя к пределу, получим $(E - \mathcal{E}_\lambda)\Delta_0 = \Delta_0$. Принимая во внимание $(E - \mathcal{E}_\lambda)\Delta_0 x = 0$, получим $\Delta_0 x = 0$, т. е. Δ_0 действительно аннулирует любой элемент x. Отметим еще, что любой оператор D, коммутирующий с A, коммутирует и с $\mathcal{E}_\lambda$.

§ 2. Пространства l_2 и L_2

162. Линейные операторы в l_2. Мы переходим к применению общей теории к пространствам l_2 и L_2. Выше мы уже видели, что, выбирая в H некоторую замкнутую ортонормированную систему, мы приводим в биоднозначное соответствие элементы абстрактного пространства H и l_2. Можно, конечно, рассматривать l_2 и самостоятельно как некоторое осуществление H, поскольку при обычных определениях алгебры и скалярного произведения в l_2 имеют место все аксиомы H.

Введем понятие урезанного элемента [ср. 134]. Пусть $x(\xi_1, \xi_2, \ldots)$ — некоторый элемент l и $x^{(k)}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k\, 0, 0, \ldots)$ имеет первые k-составляющие те же, что у x, а остальные его составляющие равны нулю. Элемент $x^{(k)}$ и называется урезанным элементом x. Мы имеем

$$\| x - x^{(k)} \|^2 = \sum_{m=k+1}^{\infty} |\xi_k|^2 \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty, \tag{1}$$

т. е. $x^{(k)} \Rightarrow x$ при $m \to \infty$. Через $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ обозначим орты l_2, т. е. у φ_k составляющая $\xi_k = 1$, а остальные равны нулю. Для элемента x имеем

$$x = \sum_{m=1}^{\infty} \xi_m \varphi_m. \tag{2}$$

Если A — линейный оператор в l_2 и $x' = Ax$, то, вводя составляющие $x'(\xi_1' \xi_2', \ldots)$, имеем

$$\xi_n = (x', \varphi_n) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} \xi_m, \tag{3}$$

$$(n = 1, 2, \ldots)$$

где

$$a_{nm} = (A\varphi_m, \varphi_n). \tag{4}$$

Таким образом, линейный оператор в l_2 представим матрицей с элементами (4). Сопряженному оператору A^* соответствует матрица [ср. **134**]:

$$a^*_{nm} = (A^*\varphi_m, \varphi_n) = (\varphi_m, A\varphi_n) = \overline{a_{mn}}. \tag{5}$$

Самосопряженный оператор характеризуется равенством

$$a_{nm} = \overline{a_{mn}} \tag{6}$$

Для билинейного функционала имеем формулу

$$(Ax, y) = (x, A^*y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}\xi_m\right)\overline{\eta_n}\right) = \sum_{m=1}^{\infty}\xi_m\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{nm}\overline{\eta_n}\right), \tag{7}$$

где y имеет составляющие $(\eta_1, \eta_2, \ldots)$.

Образуя для x и y урезанные элементы $x^{(k)}$ и $y^{(l)}$, получим

$$(Ax^{(k)}, y^{(l)}) = \sum_{n=1}^{l}\sum_{m=1}^{k} a_{nm}\xi_m\overline{\eta_n}.$$

Но $(Ax^{(k)}, y^{(l)}) \to (Ax, y)$ при k и $l \to \infty$, и, следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}\xi_m\right)\overline{\eta_n} = \lim_{\substack{k\to\infty\\ l\to\infty}}\sum_{n=1}^{l}\sum_{m=1}^{k} a_{nm}\xi_m\overline{\eta_n}. \tag{8}$$

Если a_{pq} и b_{pq} — элементы матриц, соответствующих операторам A и B, то для оператора $D = BA$ имеем матрицу d_{pq}, определяемую формулой

$$d_{pq} = (D\varphi_q, \varphi_p) = (BA\varphi_q, \varphi_p) = (A\varphi_q, B^*\varphi_p),$$

или, в силу формулы скалярного произведения в l_2,

$$d_{pq} = \sum_{s=1}^{\infty}(A\varphi_q, \varphi_s)\cdot\overline{(B^*\varphi_p, \varphi_s)} = \sum_{s=1}^{\infty} a_{sq}\overline{b^*_{sp}}.$$

Принимая во внимание (5), получим окончательно

$$d_{pq} = \sum_{s=1}^{\infty} b_{ps}a_{sq}. \tag{9}$$

Обозначая бесконечные матрицы теми же буквами A и B, что и соответствующие операторы, а элементы этих матриц обозначая

символами $\{A\}_{pq}$ и $\{B\}_{pq}$, можем записать предыдущую формулу в виде

$$\{BA\}_{pq}=\sum_{s=1}^{\infty}\{B\}_{ps}\{A\}_{sq}. \tag{10}$$

Если имеются три линейных ограниченных оператора A, B и C, то, в силу сочетательного закона $(CB)A=C(BA)$, можно написать следующую формулу перестановки суммирования:

$$\sum_{t=1}^{\infty}\left(\sum_{s=1}^{\infty}\{C\}_{ps}\{B\}_{st}\right)\{A\}_{tq}=\sum_{s=1}^{\infty}\{C\}_{ps}\left(\sum_{t=1}^{\infty}\{B\}_{st}\{A\}_{tq}\right). \tag{11}$$

163. Ограниченные операторы. Всякий ограниченный линейный оператор A порождает, как мы видели, бесконечную матрицу a_{pq}. Поставим обратный вопрос: каковы должны быть элементы a_{pq} бесконечной матрицы для того, чтобы формула (3) давала ограниченный линейный оператор в l_2? Мы требуем, таким образом, чтобы ряды (3) сходились для любого элемента $(\xi_1, \xi_2, \ldots)$ из l_2 и чтобы существовало такое число N, что для любого элемента $x\in l_2$ имеет место неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}\xi_k\right|^2\leqslant N^2\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^2. \tag{12}$$

Напомним, что для билинейного функционала, в случае ограниченного оператора A, мы должны иметь оценку

$$|(Ax, y)|\leqslant N\|x\|\cdot\|y\|.$$

Применяя эту оценку к урезанным элементам, получим следующее необходимое условие для a_{pq}, содержащее конечные суммы:

$$\left|\sum_{n=1}^{l}\sum_{m=1}^{k}a_{nm}\xi_m\bar{\eta}_n\right|^2\leqslant N^2\sum_{m=1}^{k}|\xi_m|^2\cdot\sum_{n=1}^{l}|\eta_n|^2. \tag{13}$$

Это условие оказывается не только необходимым, но и достаточным, т. е. имеет место следующая теорема:

Теорема 1. *Для того чтобы a_{pq} были элементами матрицы линейного ограниченного преобразования, необходимо и достаточно, чтобы для любых целых положительных k и l и для любых комплексных чисел ξ_m и η_n выполнялось условие (13) при некотором выборе числа N (не зависящего от ξ_p, η_q k и l).*

Необходимость условия была выяснена выше. Доказываем его достаточность. Пусть $(\xi_1, \xi_2, \ldots)$ — любой элемент из l_2. В условии (13) полагаем $l=k$ и

$$\eta_n=\sum_{m=1}^{k}a_{nm}\xi_m$$

$$(n=1, 2, 3, \ldots k,).$$

Оно дает при этом

$$\left(\sum_{n=1}^{k}\left|\sum_{m=1}^{k}a_{nm}\xi_m\right|^2\right)^2 \leqslant N^2\sum_{m=1}^{k}|\xi_m|^2\cdot\sum_{n=1}^{k}\left|\sum_{m=1}^{k}a_{nm}\xi_m\right|^2$$

или

$$\sum_{n=1}^{k}\left|\sum_{m=1}^{k}a_{nm}\xi_m\right|^2 \leqslant N^2\sum_{m=1}^{k}|\xi_m|^2$$

и тем более

$$\sum_{n=1}^{k}\left|\sum_{m=1}^{k}a_{nm}\xi_m\right|^2 \leqslant N^2\sum_{m=1}^{\infty}|\xi_m|^2. \tag{14}$$

Покажем, что из этих неравенств следует сходимость рядов

$$\sum_{m=1}^{\infty}a_{nm}\xi_m \tag{15}$$

$$(n=1,\ 2,\ \ldots)$$

для любого элемента из l_2. Пусть при некотором выборе элемента $(\xi_1^{(0)},\ \xi_2^{(0)}\ldots)$ и числа n этот ряд расходится. При этом и подавно расходится ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty}|a_{nm}\xi_m^{(0)}|,$$

и конечная сумма этого ряда

$$\sum_{m=1}^{k}|a_{nm}\xi_m^{(0)}|$$

будет беспредельно возрастать при увеличении k. Изменим аргументы комплексных чисел $\xi_m^{(0)}$ так, чтобы произведения $a_{nm}\ \xi_m^{(0)}$ оказались положительными числами. Применяя к полученному таким образом элементу l_2 неравенство (14) и отбрасывая слева все слагаемые, кроме слагаемого соответствующего упомянутому значению n, будем иметь

$$\left(\sum_{m=1}^{k}a_{nm}\xi_m^{(0)}\right)^2 \leqslant N^2\sum_{m=1}^{\infty}|\xi_m^{(0)}|^2.$$

При беспредельном возрастании k левая часть этого неравенства беспредельно растет, и мы пришли к противоречию. Таким образом, все ряды (15) действительно сходятся для любого элемента x. Покажем теперь, что из (14) следует неравенство

$$\sum_{n=1}^{k}\left|\sum_{m=1}^{\infty}a_{nm}\xi_m\right|^2 \leqslant N^2\sum_{m=1}^{\infty}|\xi_m|^2. \tag{16}$$

Действительно, если бы при некотором k и для некоторого элемента x из l_2 мы имели бы противоположное неравенство, то при

этом же k и достаточно большом l (причем мы можем, очевидно, считать $l \geqslant k$) мы имели бы

$$\sum_{n=1}^{k} \left| \sum_{m=1}^{l} a_{nm}\xi_m \right|^2 \geqslant N^2 \sum_{m=1}^{\infty} |\xi_m|^2$$

и тем более

$$\sum_{n=1}^{l} \left| \sum_{m=1}^{l} a_{nm}\xi_m \right|^2 \geqslant N^2 \sum_{m=1}^{\infty} |\xi_m|^2,$$

а это противоречит (14) при $k = l$. Таким образом, неравенство (16) доказано. Беспредельно увеличивая в нем k, мы придем к (12), и теорема доказана.

Замечание. Отметим, что при доказательстве достаточности условия (13), мы пользовались им только в случае $l = k$. Покажем, что достаточно проверить это условие только для квадратичной формы, т. е. для ограниченности оператора достаточно проверить при любом k неравенство

$$\left| \sum_{n,\, m=1}^{k} a_{nm}\xi_m\bar{\xi} \right| \leqslant N \sum_{m=1}^{k} |\xi_m|^2. \tag{17}$$

Принимая во внимание формулу, выражающую билинейный функционал через соответствующую квадратичную форму, и (17), можем написать

$$\left| \sum_{m,\, n=1}^{k} a_{nm}\xi_m\bar{\eta}_n \right| \leqslant \frac{N}{4}\left[\sum_{m=1}^{k} |\xi_m + \eta_m|^2 + \sum_{m=1}^{k} |\xi_m - \eta_m|^2 + \right.$$
$$\left. + \sum_{m=1}^{k} |\xi_m + i\eta_m|^2 + \sum_{m=1}^{k} |\xi_m - i\eta_m|^2 \right].$$

Считая нормы элементов x и y равными единице, мы получаем, принимая во внимание, что $|\alpha + \beta|^2 \leqslant 2[|\alpha|^2 + |\beta|^2]$,

$$\left| \sum_{m,\, n=1}^{k} a_{nm}\xi_m\bar{\eta}_n \right| \leqslant 4N,$$

а для элементов любой нормы

$$\left| \sum_{m,\, n=1}^{k} a_{nm}\xi_m\bar{\eta}_n \right| \leqslant 4N\left[\sum_{m=1}^{k} |\xi_m|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{m=1}^{k} |\eta_m|^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

т. е. из (17) следует условие (13) при $l = k$ и тем самым ограниченность оператора, определяемого матрицей a_{nm}. Отметим еще некоторые обстоятельства, связанные с условием (13). Если a_{pq} удовлетворяют условию (13), то элементы матрицы сопряженного оператора $\{A^*\}_{pq} = \overline{a_{qp}}$ также, очевидно, удовлетворяют этому условию, как это и должно быть, согласно общей теории. Введем еще матрицу

транспонированного оператора и матрицу комплексного сопряженного оператора

$$\{A'\}_{pq} = a_{qp};\ \{\bar{A}\}_{pq} = \overline{a_{pq}}. \tag{18}$$

Мы имеем, очевидно,

$$A^* = (\bar{A})' = \bar{A}', \tag{19}$$

и элементы матриц операторов $\bar{A}'$ и A, очевидно, удовлетворяют условию (13), если ему удовлетворяют элементы основной матрицы A. Из (13) непосредственно вытекает, что все a_{pq} должны быть ограничены по модулю числом, не зависящим от p и q, а именно, полагая $\xi_p = \eta_q = 1$, а остальные ξ_m и η_n равными нулю, получим $|a_{pq}| \leqslant N$. Отметим еще одно необходимое условие, которому должны удовлетворять элементы матрицы ограниченного преобразования. Из формулы (4) следует, что a_{nk} суть составляющие элемента $A\varphi_k$. Поэтому должен сходиться ряд, составленный из квадратов модулей элементов любого столбца:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{nk}|^2 < +\infty \tag{20}$$
$$(k = 1, 2, \ldots).$$

Переходя к A^*, видим, что то же должно иметь место и по отношению к строкам

$$\sum_{m=1}^{\infty} |a_{km}|^2 < +\infty \tag{21}$$
$$(k = 1, 2, \ldots).$$

Отметим одно простое достаточное условие ограниченности преобразования, соответствующего матрице a_{nm}.

Теорема 2. *Если существует такое положительное число l (не зависящее от m и n), что выполняются неравенства*

$$\sum_{m=1}^{\infty} |a_{nm}| \leqslant l; \quad (22) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |a_{nm}| \leqslant l \tag{23}$$
$$(n = 1, 2, \ldots) \qquad (m = 1, 2, \ldots),$$

то матрица a_{nm} дает ограниченное преобразование.

Достаточно показать, что при $|x| \leqslant 1$ и $|y| \leqslant 1$ сумма

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |a_{nm}| |\xi_m| |\eta_n| \tag{24}$$

ограничена. При этом условие (13) и подавно будет выполнено.

Принимая во внимание, что $|ab| \leqslant \frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2)$, можем написать

$$S \leqslant \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |a_{nm}| (|\xi_m|^2 + |\eta_n|^2) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left[|\xi_m|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |a_{nm}| \right] + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[|\eta_n|^2 \sum_{m=1}^{\infty} |a_{nm}| \right],$$

или, в силу (22) и (23),

$$S \leqslant \frac{l}{2} \sum_{m=1}^{\infty} |\xi_m|^2 + \frac{l}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n|^2 = \frac{l}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2) \leqslant l,$$

и теорема доказана. В случае самосопряженной матрицы условия (23) следуют из (22). Отметим, что не для всякой ограниченной матрицы ряд (24) будет сходящимся.

В качестве примера рассмотрим следующие две бесконечные матрицы:

$$A = \begin{Vmatrix} 0, & 0, & 0, & \dots \\ 1, & 0, & 0, & \dots \\ 0, & 1, & 0, & \dots \\ 0, & 0, & 1, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{Vmatrix} \qquad B = \begin{Vmatrix} a_1, & 1, & 0, & 0, & 0, & \dots \\ a_2, & 0, & 1, & 0, & 0, & \dots \\ a_3, & 0, & 0, & 1, & 0, & \dots \\ a_4, & 0, & 0, & 0, & 1, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{Vmatrix},$$

где a_k — последовательность таких вещественных чисел, что ряд с общим членом $|a_k|$ сходится. На основании теоремы 2 легко проверить, что матрицам A и B соответствуют линейные преобразования. Далее легко проверить на основании формулы (9), что $BA = E$ при любом выборе a_k (соблюдено указанное выше условие). Таким образом, линейный оператор A имеет бесчисленное множество обратных ограниченных операторов слева и, тем самым, ни одного ограниченного обратного справа. Если перейдем к сопряженным матрицам, т. е., в силу вещественности a_k, просто к транспонированным матрицам A' и B', то получим $A'B' = E$. Уравнение $Ax = y$ имеет вид $\xi_1 = \eta_2$; $\xi_2 = \eta_3$; ... и при любом $y \in l_2$ оно имеет единственное решение в l_2. Уравнение $A'x = y$ имеет вид $\xi_2 = \eta_1$; $\xi_3 = \eta_2$; ..., и оно имеет бесчисленное множество решений ввиду произвольности ξ_1. Это связано с тем, что A' не имеет ограниченного обратного оператора слева.

164. Унитарные матрицы и матрицы проектирования. Напомним основное свойство унитарного преобразования U:

$$U^*U = UU^* = E.$$

Если u_{pq} — элементы матрицы, соответствующей унитарному оператору U, то эти условия запишутся в виде

$$\sum_{s=1}^{\infty} u_{ps}^{*} u_{sq} = \delta_{pq}; \quad \sum_{s=1}^{\infty} u_{ps} u_{sq}^{*} = \delta_{pq}, \tag{25}$$

где $\delta_{pq} = 0$ при $p \neq q$ и $\delta_{pp} = 1$. Принимая во внимание, что $u_{mn}^{*} = \overline{u_{nm}}$, можем написать последние равенства в виде

$$\sum_{s=1}^{\infty} \overline{u_{sp}} u_{sq} = \delta_{pq}; \tag{26}$$

$$\sum_{s=1}^{\infty} u_{ps} \overline{u_{qs}} = \delta_{pq}, \tag{27}$$

т. е. получается ортогональность матрицы u_{pq} по столбцам и строкам. Отметим, что в случае конечных матриц условия (27) суть следствия (26) [**III; 28**]. В случае бесконечных матриц эти условия независимы.

Теорема 3. *Для того чтобы комплексные числа u_{pq} образовывали матрицу, соответствующую унитарному преобразованию, необходимы и достаточны условия (26) и (27).*

Необходимость условий (26) и (27) вытекает из приведенных выше рассуждений. Остается доказать их достаточность, т. е. нам надо доказать, что при наличии этих условий матрице u_{pq} соответствует линейное (ограниченное) преобразование. После этого унитарность этого преобразования следует из того, что условия (26) и (27) равносильны (25), а эти последние характерны для унитарного преобразования [**137**].

Условие (27) показывает, что

$$\sum_{s=1}^{\infty} |u_{ps}|^2 = 1,$$

и, следовательно, для любого элемента x сходятся ряды [**59**]

$$\xi_n' = \sum_{k=1}^{\infty} u_{nk} \xi_k. \tag{28}$$

Составим выражение

$$\sum_{p=1}^{m} \left| \sum_{q=1}^{n} u_{pq} \xi_q \right|^2 = \sum_{p=1}^{m} \sum_{s=1}^{n} \sum_{t=1}^{n} u_{ps} \overline{u_{pt}} \xi_s \overline{\xi_t} = \sum_{s=1}^{n} \sum_{t=1}^{n} \left(\sum_{p=1}^{m} u_{ps} \overline{u_{pt}} \right) \xi_s \overline{\xi_t}.$$

Беспредельно увеличивая m, получаем, в силу условия (26),

$$\sum_{p=1}^{\infty} \left| \sum_{q=1}^{n} u_{pq} \xi_q \right| = \sum_{q=1}^{n} \left| \xi_q \right|^2,$$

и тем более

$$\sum_{p=1}^{m}\left|\sum_{q=1}^{n}u_{pq}\xi_q\right|^2\leqslant\sum_{q=1}^{\infty}|\xi_q|^2,$$

где m — какое-либо фиксированное конечное число. Отсюда совершенно так же, как и в теореме 1 предыдущего параграфа, следует при помощи рассуждения от обратного, написанное неравенство при $n=\infty$, и беспредельно увеличивая затем m, приходим к неравенству

$$\sum_{p=1}^{\infty}\left|\sum_{q=1}^{\infty}u_{pq}\xi_q\right|^2\leqslant\sum_{q=1}^{\infty}|\xi_q|^2, \tag{29}$$

и тем самым ограниченность оператора U доказана. Отметим, что, в силу унитарности U, мы имеем в формуле (29) обязательно знак равенства.

Рассмотрим теперь матрицу p_{ik}, соответствующую некоторому проектору P в подпространство L. Принимая во внимание, что P — самосопряженный оператор и $P^2=P$, получаем следующие условия:

$$p_{ki}=\overline{p_{ik}};\quad\sum_{s=1}^{\infty}p_{is}p_{sk}=p_{ik}. \tag{30}$$

Аналогично тому, как это мы делали выше для унитарных преобразований, можно показать, что эти условия не только необходимы, но и достаточны для того, чтобы матрице p_{ik} соответствовал проектор. Выберем замкнутую ортогональную нормированную систему так, чтобы часть ортов образовывала замкнутую систему в подпространстве L, а другая часть в дополнительном пространстве $H-L$. Первые орты в результате применения проектора P останутся неизменными, а другие аннулируются. Таким образом, при выбранной системе ортов проектору P соответствует чисто диагональная матрица, главная диагональ которой состоит лишь из единиц и нулей. Иначе говоря, матрица проектирования унитарно эквивалентна чисто диагональной матрице, главная диагональ которой состоит лишь из единиц и нулей.

165. Самосопряженные матрицы. Самосопряженные матрицы A характеризуются условиями (13) и (6). Собственные значения и собственные элементы таких матриц определяются из того условия, что бесконечная система

$$\sum_{s=1}^{\infty}a_{is}\xi_s=\lambda\xi_i \tag{31}$$

$$(i=1,\ 2,\ \ldots)$$

имеет в l_2 решение, отличное от нулевого. Если собственные элементы ψ_k образуют замкнутую ортогональную нормированную систему,

и мы примем ψ_k за орты, то оператору A будет соответствовать матрица с элементами

$$a_{pq} = (A\psi_q, \psi_p) = \lambda_q (\psi_q, \psi_p) = \begin{cases} 0 & \text{при } p \neq q, \\ \lambda_p & \text{при } p = q, \end{cases} \tag{32}$$

т. е. мы получим чисто диагональную матрицу с числами λ_p на главной диагонали. Вообще для того, чтобы самосопряженная матрица имела чисто точечный спектр, необходимо и достаточно, чтобы она была унитарно эквивалентна чисто диагональной матрице. В указанном выше случае выбора ортов ψ_k мы имеем

$$(Ax, y) = \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s \xi_s \bar{\eta}_s; \quad (Ax, x) = \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s |\xi_s|^2 \tag{33}$$

В общем случае для самосопряженной матрицы a_{ik} существует такое разложение единицы $\mathcal{E}_\lambda$, т. е. неубывающая матрица проектирования $l_{ik}(\lambda)$, что

$$l_{ik}(a) = 0; \quad l_{ik}(b) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq k, \\ 1 & \text{при } i = k, \end{cases} \tag{34}$$

$$(i, k = 1, 2, \ldots);$$

и имеют место формулы

$$x_i' = \sum_{s=1}^{\infty} a_{is} \xi_s = (Ax, \varphi_i) = \int_a^b \lambda d (\mathcal{E}_\lambda x, \varphi_i) = \int_a^b \lambda d \left(\sum_{s=1}^{\infty} l_{is}(\lambda) \xi_s \right),$$

т. е.

$$a_{is} = \int_a^b \lambda d l_{is}(\lambda) \tag{35}$$

и

$$\left.\begin{aligned} (Ax, y) &= \int_a^b \lambda d \left(\sum_{s,t=1}^{\infty} l_{st}(\lambda) \xi_t \bar{\eta}_s \right); \\ (Ax, x) &= \int_a^b \lambda d \left(\sum_{s,t=1}^{\infty} l_{st}(\lambda) \xi_t \bar{\xi}_s \right) \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

При этом мы, в силу свойств разложения единицы, имеем

$$\sum_{s=1}^{\infty} l_{is}(\lambda_1) l_{sk}(\lambda_2) = \sum_{s=1}^{\infty} l_{is}(\lambda_2) l_{sk}(\lambda_1) = l_{ik}(\lambda_1) \text{ при } \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \tag{37}$$

и вообще

$$\sum_{s=1}^{\infty} \Delta_1 l_{is}(\lambda) \cdot \Delta_2 l_{sk}(\lambda) = \Delta_1 \Delta_2 l_{ik}(\lambda), \tag{38}$$

причем в правой части стоит разность значений $l_{ik}(\lambda)$ на концах промежутка $\Delta_1\Delta_2$, являющегося пересечением промежутков Δ_1 и Δ_2. Если $f(\lambda)$ — непрерывная функция на промежутке $[a, b]$, то оператору $f(A)$ соответствует матрица с элементами

$$\{f(A)\}_{ik} = \int_a^b f(\lambda)\, dl_{ik}(\lambda). \tag{39}$$

Можем написать [43]

$$\sum_{s=1}^{\infty} \int_a^b f_1(\lambda)\, dl_{is}(\lambda) \cdot \int_a^b f_2(\lambda)\, dl_{sk}(\lambda) = \int_a^b f_1(\lambda) f_2(\lambda)\, dl_{ik}(\lambda). \tag{40}$$

Принимая во внимание, что билинейная форма

$$(\mathscr{E}_\lambda x, y) = \sum_{s,t=1}^{\infty} l_{st}(\lambda)\, \xi_t \bar{\eta}_s \tag{41}$$

есть функция ограниченной вариации от λ, можем утверждать, что функции $l_{st}(\lambda)$ суть функции ограниченной вариации от λ. При $y = x$ выражение (41) дает неубывающую функцию от λ, и отсюда непосредственно следует, что функции $l_{ss}(\lambda)$ не убывают. Если понимать интегралы (39) как интегралы Лебега—Стилтьеса, то формула (39) применима для широкого класса функций $f(\lambda)$, который был нами указан в [155]. Достаточно предположить, что $f(\lambda)$ ограничена и есть B-функция [47]. При этом она будет измеримой и относительно любой неубывающей функции. В случае чисто непрерывного спектра все функции $l_{ik}(\lambda)$ непрерывны. Верно и обратное утверждение. В случае смешанного спектра рассматриваем подпространство L, в котором оператор A имеет чисто точечный спектр, и дополнительное подпространство $H - L$, в котором A имеет чисто непрерывный спектр. Вводим в этих подпространствах замкнутые ортогональные и нормированные системы. Обозначая через $(\xi'_1, \xi'_2, \ldots)$ элементы в L и через $(\xi''_1, \xi''_2, \ldots)$ элементы в $H - L$, можем написать билинейную и квадратичную форму в виде

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i,k=1}^{\infty} a_{ik}\, \xi_k \bar{\eta}_i &= \sum_k \lambda_k\, \xi'_k \bar{\eta}'_k + \int_a^b \lambda d\left(\sum_{s,t=1}^{\infty} l_{st}(\lambda)\, \xi''_t \overline{\eta''_s} \right) \\ \sum_{i,k=1}^{\infty} a_{ik}\, \xi_k \bar{\xi}_i &= \sum_k \lambda_k |\, \xi'_k\,|^2 + \int_a^b \lambda d\left(\sum_{s,t=1}^{\infty} l_{st}(\lambda)\, \xi''_t \overline{\xi'_s} \right) \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

где $l_{st}(\lambda)$ непрерывны.

Рассмотрим резольвенту матрицы A, т. е. матрицу с элементами $\{R(\lambda)\}_{ik}$, определяемую формулой

$$\{R(\lambda)\}_{ik} = \{(A - \lambda E)^{-1}\}_{ik}.$$

Мы имеем

$$\{R(\lambda)\}_{ik} = \int_a^b \frac{dl_{ik}(\mu)}{\mu - \lambda}, \tag{43}$$

причем считается, что λ не принадлежит спектру A. Отметим, что, в силу формулы (39), целые положительные степени A имеют представление вида

$$\{A^m\}_{ik} = \int_a^b \lambda^m dl_{ik}(\lambda). \tag{44}$$

Если $\lambda = 0$ не принадлежит спектру A, т. е. все $l_{ik}(\lambda)$ постоянны в некоторой окрестности $\lambda = 0$, то существует ограниченная обратная матрица A^{-1}, и для ее степеней мы имеем формулы

$$\{A^{-m}\}_{ik} = \int_a^b \lambda^{-m} dl_{ik}(\lambda). \tag{45}$$

166. Случай непрерывного спектра. Как известно, можно произвести дальнейшее расчленение $H - L$ на инвариантные относительно A подпространства, в каждом из которых A имеет простой непрерывный спектр. Пусть H_1 — такое подпространство. Введем в нем замкнутую ортогональную систему и положим, что дальнейшее относится к H_1, которое мы можем рассматривать как некоторое пространство Гильберта, в котором введены орты $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, так что всякий элемент x определяется своими составляющими $(\xi_1, \xi_2, \ldots)$. Пусть x — такой элемент H_1, что замкнутая линейная оболочка $\mathfrak{E}_\lambda x$ есть все H_1, причем $a \leqslant \lambda \leqslant b$. Обозначим через $p_k(\lambda)$ составляющие элемента $\mathfrak{E}_\lambda x$. Любому элементу $y(\eta_1, \eta_2, \ldots)$ из H_1 сопоставляется функция

$$\varphi_y(\lambda) = (y, \mathfrak{E}_\lambda x) = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{p_k(\lambda)}\, \eta_k. \tag{46}$$

Принимая во внимание формулу (259) из [**147**], можем записать билинейный функционал в виде

$$(Ay, z) = \sum_{i,k=1}^{\infty} a_{ik}\eta_{ik}\zeta_i = \int_a^b \lambda \frac{d\sum_{k=1}^{\infty} \overline{p_k(\lambda)}\,\eta_{ik} \cdot d\sum_{i=1}^{\infty} p_i(\lambda)\,\zeta_i}{d\rho(\lambda)},$$

где

$$\rho(\lambda) = \|\mathfrak{E}_\lambda x\|^2 = \sum_{s=1}^{\infty} |p_s(\lambda)|^2, \tag{47}$$

и, следовательно, элементы матрицы, определяющей преобразование A в H_1, при принятой системе ортов, будут

$$a_{ik} = \int_a^b \lambda \frac{\overline{dp_k(\lambda)}\, dp_i(\lambda)}{d\rho(\lambda)}. \tag{48}$$

Далее, любому элементу y из H_1 соответствует функция $y(\lambda)$ из L_2 по отношению $\rho(\lambda)$ на промежутке $[a, b]$ такая, что

$$\varphi_y(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{p_k(\lambda)}\, \eta_k = \int_a^{\lambda} y(\mu)\, d\rho(\mu), \tag{49}$$

и, наоборот, любой функции $y(\lambda)$ из L_2 соответствует определенный элемент y из H_1. При этом соответствии сохраняются нормы и скалярные произведения. Если обозначим через $\varphi_k(\lambda)$ функцию $y(\lambda)$, соответствующую орту φ_k, то получим

$$\overline{p_k(\lambda)} = \int_a^{\lambda} \varphi_k(\mu)\, d\rho(\mu), \tag{50}$$

и $\varphi_k(\lambda)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ образуют замкнутую ортогональную нормированную систему в L_2. Оператору A в H_1 соответствует умножение на λ в L_2 и для $a_{ik} = (A\varphi_k, \varphi_i)$ мы можем написать вместо (48) формулы

$$a_{ik} = \int_a^b \lambda\, \varphi_k(\lambda)\, \overline{\varphi_i(\lambda)}\, d\rho(\lambda). \tag{51}$$

Положим, что вместо $\varphi_k(\lambda)$ мы взяли другую полную ортогональную нормированную систему $\psi_k(\lambda)$ в L_2, причем этим $\psi_k(\lambda)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ соответствует некоторая полная система ортов ψ_k в H_1. Введем унитарное преобразование U в H_1, переводящее орты φ_k в орты ψ_k, т. е. $U\varphi_k = \psi_k$. Этому унитарному преобразованию U в H_1 будет соответствовать некоторая матрица, которая сама зависит от выбора ортов. Если мы выберем за орты φ_k или ψ_k, то получим одну и ту же матрицу с элементами

$$c_{ik} = (U\varphi_k, \varphi_i) = (\psi_k, \varphi_i),$$

или

$$c_{ik} = (U\psi_k, \psi_i) = (\psi_k, U^*\psi_i) = (\psi_k, U^{-1}\psi_i) = (\psi_k, \varphi_i).$$

Поскольку переход от H_1 к L_2 не меняет скалярного произведения, можем написать

$$c_{ik} = \int_a^b \psi_k(\lambda)\, \overline{\varphi_i(\lambda)}\, d\rho(\lambda). \tag{52}$$

В новых ортах элементы матрицы, соответствующей оператору A, будут определяться формулами, аналогичными формулам (51):

$$b_{ik} = \int_a^b \lambda \psi_k(\lambda) \overline{\psi_i(\lambda)}\, d\rho(\lambda). \tag{53}$$

Если ξ_k $(k = 1, 2, \ldots)$ — составляющие некоторого элемента в ортах φ_k, и ξ'_k — составляющие того же элемента в ортах ψ_k, то $\xi_k = (x, \varphi_k)$ и $\xi'_k = (x, \psi_k) = (x, U\varphi_k) = (U^{-1}x, \varphi_k)$, откуда видно, что $(\xi'_1, \xi'_2, \ldots)$ выражается через $(\xi_1, \xi_2, \ldots)$ при помощи матрицы, обратной унитарной матрице c_{ik}. Таким образом, если обозначить через A, B и C матрицы с элементами a_{ik}, b_{ik} и c_{ik}, то будем иметь матричное равенство

$$B = C^{-1}AC. \tag{54}$$

Пользуясь формулой (263) из [**147**], (49) и (50), можем написать

$$\{\mathcal{E}_\mu\}_{ik} = l_{ik}(\mu) = \int_a^\mu \varphi_k(\lambda) \overline{\varphi_i(\lambda)}\, d\rho(\lambda). \tag{55}$$

Принимая во внимание (39), можем написать выражение для элементов матрицы $f(A)$ (в ортах φ_k), где $f(\lambda)$ — любая ограниченная B-функция, определенная на промежутке $[a,b]$:

$$\{f(A)\}_{ik} = \int_a^b f(\lambda)\varphi_k(\lambda) \overline{\varphi_i(\lambda)}\, d\rho(\lambda). \tag{56}$$

При $f(\lambda) = 1:(\lambda - \mu)$ получаем резольвенту указанного оператора

$$\{R(\mu)\}_{ik} = \int_a^b \frac{\varphi_k(\lambda)\overline{\varphi_i(\lambda)}}{\lambda - \mu}\, d\rho(\lambda). \tag{57}$$

Если $f(\lambda)$ — вещественная функция, то $f(A)$ — самосопряженный оператор, и, совершенно аналогично (55), можно написать элементы для спектральной функции $\mathcal{E}'_\mu$ оператора $f(A)$:

$$\{\mathcal{E}'_\mu\}_{ik} = \int_{C_\mu} \varphi_k(\lambda) \overline{\varphi_i(\lambda)}\, d\rho(\lambda), \tag{58}$$

где C_μ — множество значений λ, определяемое неравенством $f(\lambda) \leqslant \mu$. На доказательстве этой формулы не останавливаемся. Спектр $f(A)$ может иметь различный характер в зависимости от свойств $f(\lambda)$.

Выше мы исходили от заданного самосопряженного в H_1 оператора A и определенного элемента x такого, что замкнутая линейная оболочка $\mathcal{E}_\lambda x$ есть H_1. Вводя орты φ_k, мы приходили к l_2 и бес-

конечным матрицам, причем имели место указанные выше формулы. Можно, наоборот, выбрать произвольную непрерывную, неубывающую на промежутке $[a,b]$, функцию $\rho(\lambda)$, равную нулю при $\lambda = a$, и замкнутую ортогональную нормированную систему $\varphi_k(\lambda)$. После этого формулы (51) определят элементы a_{ik}, удовлетворяющие, очевидно, условию $\overline{a_{ik}} = a_{ki}$. Нетрудно показать, что матрице с элементами a_{ik} соответствует ограниченный оператор в l_2. Действительно, обозначая через N наибольшую величину абсолютного значения $|\lambda|$ на промежутке $[a, b]$, мы имеем, в силу (51),

$$\left| \sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}\xi_k\xi_i \right| \leqslant N \int_a^b \left| \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(\lambda)\xi_k \right|^2 d\rho(\lambda),$$

или, принимая во внимание ортогональность и нормированность $\varphi_k(\lambda)$:

$$\left| \sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}\xi_k\overline{\xi_i} \right| \leqslant N \sum_{k=1}^{m} |\xi_k|^2,$$

откуда и следует ограниченность соответствующего оператора. Его самосопряженность вытекает из $\overline{a_{ik}} = a_{ki}$. Формулы (55) определяют элементы оператора проектирования, зависящего от параметра μ и являющегося разложением единицы, причем, очевидно,

$$a_{ik} = \int_a^b \lambda d\{\mathcal{E}_\lambda\}_{ik},$$

т. е. $\mathcal{E}_\lambda$ есть спектральная функция оператора A. Если в формулах (50) перейти к сопряженным величинам, то получим составляющие $p_k(\lambda)$ элемента $\mathcal{E}_\lambda x$ и при $\lambda = b$ — составляющие самого элемента x. Из (50), в силу уравнения замкнутости, следует, что $\rho(\lambda)$ выражается формулой (47). В общем случае самосопряженного оператора A с непрерывным спектром мы образуем попарно ортогональные инвариантные подпространства H_1, H_2,..., в каждом из которых A имеет простой спектр. Вводя в каждом из A_k свои орты, получаем для каждого H_k формулы указанного выше вида. Затем окончательное выражение, например для билинейной формулы (Ax, y), может быть получено путем сложения билинейных форм в каждом из H_k.

Можно легко обобщить понятие простого спектра, отказавшись от требования непрерывности спектральной функции $\mathcal{E}_\lambda$. Но по-прежнему должен существовать такой элемент x, что $\mathcal{E}_\lambda x$ образует все H. При этом неубывающая функция $\rho(\lambda)$, определяемая формулой (47), не обязательно непрерывна. Мы можем, очевидно, считать x нормированным элементом и при этом будем иметь, кроме $\rho(a) = 0$, еще $\rho(b) = 1$. Если, например, A имеет чисто точечный спектр и все собственные значения имеют ранг, равный единице, то, взяв за x

любой элемент, у которого все коэффициенты Фурье относительно замкнутой системы собственных элементов отличны от нуля, мы можем утверждать, что $\mathcal{E}_\lambda x$ образует все H, и указанный спектр будет простым. При наличии кратных собственных значений спектр, как нетрудно видеть, не может быть простым. Мы получим общий случай простого спектра, если при разбиении всего H на подпространство собственных элементов и подпространство непрерывного спектра будем иметь в обоих подпространствах простые спектры. В первом подпространстве спектр будет простым тогда и только тогда, когда все собственные значения — простые. Если простой спектр не непрерывен, то $\mathcal{E}_\mu$ имеет скачки, и $\rho(\lambda)$, определенная формулой (47), также должна иметь разрыв непрерывности в точках разрыва $\mathcal{E}_\lambda$. Действительно, если бы в точке разрыва $\lambda = \lambda'$ спектральной функции $\mathcal{E}_\lambda$ функция $\rho(\lambda)$ оказалась бы непрерывной, то мы имели бы $(\mathcal{E}_{\lambda'} - \mathcal{E}_{\lambda'-0})x = 0$, и все элементы пространства, образованного $\mathcal{E}_\lambda x$, оказались бы ортогональными к собственным элементам, соответствующим собственному значению $\lambda = \lambda'$, и отсюда следовало бы, что $\mathcal{E}_\lambda x$ не может образовать всего H.

167. Матрицы Якоби. Пусть в бесконечномерном пространстве H самосопряженный оператор A имеет простой непрерывный спектр. Ортогонализуя степени λ по отношению к $\rho(\lambda)$ на промежутке $[a, b]$, получим в качестве замкнутой системы $\varphi_k(\lambda)$ предыдущего параграфа систему вещественных полиномов $P_k(\lambda)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ степени k:

$$\int_a^b P_i(\lambda) P_k(\lambda) d\rho(\lambda) = \begin{cases} 0 \text{ при } i \neq k, \\ 1 \text{ при } i = k. \end{cases} \tag{59}$$

Старший коэффициент в каждом полиноме $P_k(\lambda)$ можно считать положительным. В прежних обозначениях мы нумеровали функции $\varphi_k(\lambda)$, начиная с $k = 1$. Теперь нумеруем $P_k(\lambda)$, начиная с $k = 0$, поскольку k обозначает степень $P_k(\lambda)$. Таким образом, $P_k(\lambda)$ заменяют $\varphi_{k+1}(\lambda)$. При указанном выборе ортов элементы матрицы, соответствующей оператору A, определяются, согласно (51), формулами

$$a_{ik} = \int_a^b \lambda P_i(\lambda) P_k(\lambda) d\rho(\lambda) \tag{60}$$

$$(i, k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Положим, что $k - i > 1$. При этом произведение $\lambda P_i(\lambda)$ есть полином степени ниже k; это произведение выражается линейно через $P_s(\lambda)$ при $s < k$ и, в силу (59), интеграл (60) при этом равен нулю. Совершенно так же он равен нулю и при $i - k > 1$, ибо

$a_{ki} = a_{ik}$, т. е. $a_{ik} = 0$ при $|i-k| > 0$. Введем следующие обозначения:

$$a_k = \int_a^b \lambda P_k^2(\lambda)\, d\rho(\lambda); \qquad b_k = \int_a^b \lambda P_k(\lambda)\, P_{k+1}(\lambda)\, d\rho(\lambda) \tag{61}$$

$$(k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Число b_k входит в линейное представление произведения $\lambda P_k(\lambda)$ через $P_s(\lambda)$ $(s = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k+1)$:

$$\lambda P_k(\lambda) = b_k P_{k+1}(\lambda) + \sum_{s=0}^{k} c_s^{(k)} P_s(\lambda), \tag{62}$$

и из положительности старших коэффициентов у полиномов $P_m(\lambda)$ следует, что $b_k > 0$. Из (60) и сказанного выше следует:

$$a_{k,k} = a_k; \quad a_{k,k+1} = a_{k+1,k} = b_k; \tag{63}$$
$$a_{ik} = 0 \text{ при } |i-k| > 1,$$

и, таким образом, при выбранной системе ортов матрица преобразования имеет вид

$$\left\| \begin{array}{ccccc} a_0 & b_0 & 0 & 0 & 0 \ldots \\ b_0 & a_1 & b_1 & 0 & 0 \ldots \\ 0 & b_1 & a_2 & b_2 & 0 \ldots \\ 0 & 0 & b_2 & a_3 & b_3 \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array} \right\|, \tag{64}$$

причем $b_k > 0$. Вещественная, самосопряженная, удовлетворяющая условиям (63) матрица называется матрицей Якоби. Таким образом, при подходящем выборе ортов матрица самосопряженного оператора с простым непрерывным спектром есть матрица Якоби.

Пользуясь формулой (59) и обозначениями (61), нетрудно вычислить коэффициенты в разложении (62), умножая обе части на $P_m(\lambda)\, d\rho(\lambda)$ и интегрируя по λ. При $m < k-1$ интеграл от $\lambda P_k(\lambda)\, P_m(\lambda)\, d\rho(\lambda)$, как мы видели выше, равен нулю, и, отсюда следует, что $c_m^{(k)} = 0$ при $m < k-1$. При вычислениях остальных коэффициентов пользуемся обозначениями (61) и приходим к следующим соотношениям между полиномами $P_m(\lambda)$:

$$\lambda P_k(\lambda) = b_k P_{k+1}(\lambda) + a_k P_k(\lambda) + b_{k-1} P_{k-1}(\lambda), \tag{65}$$

причем

$$P_{-1}(\lambda) = 0; \qquad P_0(\lambda) = 1. \tag{66}$$

Последнее равенство вытекает из того, что, как мы указывали выше, можно считать $\rho(b) = 1$, а первое принимается за определение

Можно, как и в предыдущем параграфе, исходить от непрерывной, неубывающей функции $\rho(\lambda)$, строить систему полиномов, ортогональных относительно $\rho(\lambda)$, и элементы матрицы Якоби по формулам (60). В силу сказанного в [**163**], элементы матрицы (64) должны быть ограничены по абсолютной величине. Это легко получить и из (61). Предыдущие рассуждения приводят нас к следующему результату:

Теорема 4. *Всякая самосопряженная матрица, соответствующая ограниченному оператору с простым непрерывным спектром, унитарно эквивалентна некоторой матрице Якоби вида* (64) *с ограниченными элементами и* $b_k > 0$. *Мы можем получить все такие матрицы по формуле* (60), *где* $[a, b]$ — *любой конечный промежуток,* $\rho(\lambda)$ — *неубывающая, непрерывная на нем функция, подчиненная условию* $\rho(a) = 0$ *и* $\rho(b) = 1$ *(последнее несущественно), и* $P_i(\lambda)$ — *ортогональная нормированная относительно* $\rho(\lambda)$ *система полиномов.*

Будем исходить из заданной матрицы Якоби, причем мы считаем, что в этой матрице элементы $a_{ik} = a_{ki}$ при $|i-k| = 1$ отличны от нуля. Если мы от исходной системы ортов перейдем к новой, умножая каждый из ортов на выражение вида $e^{i\omega_k}$, то при подходящем выборе ω_k получим, как нетрудно проверить, матрицу Якоби, унитарно эквивалентную заданной, такую, что элементы a_{ik} при $|i-k| = 1$ положительны. Мы можем, таким образом, считать, что заданная матрица Якоби имеет вид (64), причем a_k, очевидно, вещественны и $b_k > 0$. Принимая во внимание теорему 2 из [**163**] и одно из следствий теоремы 1, можем утверждать, что для того, чтобы матрица (64) осуществляла линейное ограниченное преобразование, необходимо и достаточно потребовать ограниченность чисел a_k и b_k одним и тем же числом N, не зависящим от k:

$$|a_k| \leqslant N; \quad |b_k| \leqslant N. \tag{67}$$

Мы это будем предполагать в дальнейшем. Пусть

$$\psi_0, \ \psi_1, \ \psi_2, \ldots \tag{68}$$

— основная система ортов. Обозначая через A самосопряженный оператор, соответствующий матрице (64), можем написать

$$A\psi_k = b_{k-1}\psi_{k-1} + a_k\psi_k + b_k\psi_{k+1} \quad (k = 0, \ 1, \ldots; \ \psi_{-1} = 0). \tag{69}$$

Если мы введем полиномы $P_k(\lambda)$, определяемые соотношениями (65) и (66), то, пользуясь последней формулой, можем выразить любой орт ψ_k непосредственно через первый орт ψ_0 по формуле

$$\psi_k = P_k(A)\psi_0. \tag{70}$$

Пусть $\mathcal{E}_\lambda$ — спектральная функция оператора A, т. е. матрицы (64). Из формулы (70) непосредственно следует, что элементы $\mathcal{E}_\lambda \psi_0$ образуют все H. Действительно, в силу (70),

$$\psi_k = \int_a^b P_k(\lambda)\, d\mathcal{E}_\lambda \psi_0,$$

где a и b — границы оператора (64), т. е. ψ_k является пределом линейных комбинаций элементов $\mathcal{E}_\lambda \psi_0$, и всякий элемент разлагается по ортам ψ_k. Таким образом, матрице Якоби соответствует простой спектр (не обязательно непрерывный), и роль основного элемента x может играть первый орт ψ_0. На основании (70) мы можем написать

$$(\psi_i,\ \psi_k) = (P_i(A)\,\psi_0,\ P_k(A)\,\psi_0) = (P_i(A)\,P_k(A)\,\psi_0,\ \psi_0),$$
$$(A\psi_i,\ \psi_k) = (AP_i(A)\,P_k(A)\,\psi_0,\ \psi_0),$$

и, вводя функцию

$$\rho(\lambda) = (\mathcal{E}_\lambda \psi_0,\ \psi_0) = \|\mathcal{E}_\lambda \psi_0\|^2, \tag{71}$$

на основании этих равенств получим

$$(\psi_i\ \psi_k) = \int_a^b P_i(\lambda)\,P_k(\lambda)\,d\rho(\lambda) = \begin{cases} 0 \text{ при } i \neq k, \\ 1 \text{ при } i = k, \end{cases}$$

$$(A\psi_i\ \psi_k) = \int_a^b \lambda P_i(\lambda)\,P_k(\lambda)\,d\rho(\lambda),$$

откуда непосредственно следует, что полиномы $P_i(\lambda)$ образуют ортогональную нормированную систему относительно $\rho(\lambda)$, и что элементы матрицы (64) выражаются через них по формулам (60). Если функция $\mathcal{E}_\lambda$ имеет разрывы, то всякому такому разрыву, как мы видели в предыдущем параграфе, соответствует собственное значение с рангом, равным единице. Отсюда видно, что функция $\mathcal{E}_\lambda$ не может сводиться к конечному числу скачков, и то же можно утверждать относительно $\rho(\lambda)$. Наоборот, можно строить любые матрицы Якоби по формулам (60), выбирая за $\rho(\lambda)$ не обязательно непрерывную, но любую неубывающую функцию, которая только не сводится к конечному числу скачков.

168. Дифференциальные решения. Рассмотрим самосопряженный оператор (матрицу) с чисто непрерывным спектром. Как мы видели, можно построить последовательность попарно ортогональных нормированных элементов $y^{(s)}$ ($s = 1, 2, \ldots$), таких, что $\mathcal{E}_\lambda y^{(s)}$ образуют попарно ортогональные подпространства H_s, ортогональная сумма которых есть все H. Число элементов $y^{(s)}$ может быть как конечным,

так и бесконечным. Пусть $p_k^{(s)}(\lambda)$ $(k = 1, 2, \dots)$ — составляющие элемента $\mathfrak{E}_\lambda y^{(s)}$. Функции $p_k^{(s)}(\lambda)$ суть функции ограниченной вариации, и при всяком s в любом промежутке, содержащемся в промежутке $[a, b]$, они удовлетворяют уравнениям

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \Delta p_k^{(s)}(\lambda) = \int_{\Delta} \lambda \, dp_i^{(s)}(\lambda) \tag{72}$$

$$(i = 1, 2, \dots).$$

Мы можем утверждать следующие свойства ортогональности решений $p_k^{(s)}(\lambda)$ [151]:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Delta_1 p_k^{(s)}(\lambda) \cdot \overline{\Delta_2 p_k^{(t)}(\lambda)} = 0 \tag{73}$$

$(s \neq t$; промежутки Δ_1 и Δ_2 — любые),

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Delta_1 p_k^{(s)}(\lambda) \cdot \overline{\Delta_2 p_k^{(s)}(\lambda)} = 0 \tag{73$_1$}$$

(Δ_1 и Δ_2 — без общих внутренних точек).

Основные формулы из [149] дают следующие формулы, содержащие построенные дифференциальные решения:

$$\sum_s \int_a^b \frac{\overline{d p_k^{(s)}(\lambda)} \, dp_i^{(s)}(\lambda)}{d\rho_s(\lambda)} = \begin{cases} 0 & (k \neq i), \\ 1 & (k = i), \end{cases} \tag{74}$$

$$a_{ik} = \sum_s \int_a^b \lambda \frac{\overline{dp_k^{(s)}(\lambda)} \, dp_i^{(s)}(\lambda)}{d\rho_s(\lambda)}, \tag{75}$$

$$l_{ik}(\lambda) = \sum_s \int_a^\lambda \frac{\overline{dp_k^{(s)}(\mu)} \, dp^{(s)}(\mu)}{d\rho_s(\mu)}, \tag{76}$$

где $l_{ik}(\lambda)$ — элементы спектральной матрицы. Если мы каким-либо образом построили решения системы (72), удовлетворяющие условиям ортогональности (73) и (73$_1$), и проверили справедливость формулы (76) при любом λ, то можем быть уверены, что полученная система решений — полная, и что имеют место остальные формулы. Пусть y и z — элементы из l_2, и

$$y^{(s)}(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \overline{p_k^{(s)}(\lambda)}; \qquad z^{(s)}(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k \overline{p_k^{(s)}(\lambda)}.$$

Формула (272) из [149] записывается в виде

$$(Ay,\ z)=\sum_{s}\int_{a}^{b}\lambda\,\frac{dy^{(s)}(\lambda)\,\overline{dz^{(s)}(\lambda)}}{d\rho_s(\lambda)}. \qquad (76_1)$$

Она является непосредственным следствием (75). Аналогично записываются и остальные формулы из [149]. Нетрудно доказать, что если некоторое дифференциальное решение $v_k(\lambda)$ $(k=1,\ 2,\ \ldots)$ ортогонально ко всем указанным выше дифференциальным решениям, образующим полную систему дифференциальных решений, то все $v_k(\lambda)$ суть постоянные. Случай постоянных $v_k(\lambda)$ дает тривиальное решение системы (72), ибо при этом $\Delta v_k(\lambda)=0$ и $dv_k(\lambda)=0$. Дифференциальные решения $p_k^{(s)}(\lambda)$, получаемые после выделения точечного спектра, ортогональны, очевидно, и ко всем собственным элементам оператора A. Вернемся к системе (72), и пусть $p_k(\lambda)$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ — некоторое дифференциальное решение этой системы:

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}\,\Delta p_k(\lambda)=\int_{\Delta}\lambda\,dp_i(\lambda)$$

$$(i=1,\ 2,\ \ldots).$$

Положим, что все функции $p_k(\lambda)$ имеют непрерывную производную $p_k'(\lambda)$. При этом написанные интегралы Стилтьеса превратятся в обычные интегралы от непрерывных функций, и, применяя к ним теорему о среднем и обозначая через λ' и λ'' концы интервала Δ, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}\,|p_k(\lambda'')-p_k(\lambda')|=\lambda_i\,p_i'(\lambda_i)\,(\lambda''-\lambda'), \qquad (77)$$

где $\lambda'<\lambda_i<\lambda''$. Применяя к левой части формулу Лагранжа, деля обе части на $(\lambda''-\lambda')$ и устремляя λ' и λ'' к общему пределу λ, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}p_k'(\lambda)=\lambda p_i'(\lambda) \qquad (78)$$

$$(i=1,2,\ldots).$$

При этом предполагается, что мы можем переходить почленно к пределу в бесконечной сумме, стоящей в левой части (77). Это будет, наверное, так, если эта сумма конечна, т. е. если матрица a_{ik} имеет в каждой своей строке, а тем самым и в каждом столбце, лишь конечное число элементов, отличных от нуля. Из формул (78) мы видим, что при указанных условиях, в случае непрерывного спектра, $p_k'(\lambda)$ $(k=1,\ 2,\ldots)$ удовлетворяют при любом λ тем же уравнениям, которые имели для собственных элементов, но $p_k'(\lambda)$ не принадлежат l_2, т. е. сумма, составленная из $|p_k'(\lambda)|^2$, равна $+\infty$,

ибо в случае чисто непрерывного спектра не существует собственных элементов. При наличии смешанного спектра дифференциальные решения могут накладываться на обычные решения из l_2, которые дают собственные элементы.

169. Примеры. 1. В промежутке $[-1, +1]$ положим

$$\rho(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{\lambda} \sqrt{1-\lambda^2}\, d\lambda.$$

Условие (59) для полиномов $P_i(\lambda)$ запишется в виде

$$\frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-\lambda^2}\, P_i(\lambda)\, P_k(\lambda)\, d\lambda = \begin{cases} 0 \text{ при } i \neq k, \\ 1 \text{ при } i = k. \end{cases} \tag{79}$$

Нетрудно проверить, что этим условиям удовлетворяют полиномы

$$P_n(\lambda) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}, \text{ где } \cos\theta = \lambda.$$

Пользуясь формулой Моавра, легко показать, что написанная дробь есть действительно полином степени n от $\cos\theta$. Условия (79) проверяются непосредственной подстановкой, если ввести вместо λ новую переменную, полагая $\lambda = \cos\theta$. Числа a_k и b_k, входящие в матрицу (64), определятся по формулам

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \lambda \sqrt{1-\lambda^2}\, P_k^2(\lambda)\, d\lambda; \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \lambda \sqrt{1-\lambda^2}\, P_k(\lambda)\, P_{k+1}(\lambda)\, d\lambda.$$

Введя переменную θ и вычисляя полученные интегралы, будем иметь, при любом k, $a_k = 0$ и $b_k = \frac{1}{2}$, т. е. элементы соответствующей матрицы определяются формулами $a_{k,k+1} = a_{k+1,k} = \frac{1}{2}$, и остальные $a_{ik} = 0$. Эта матрица имеет простой чисто непрерывный спектр. Единственное дифференциальное решение системы, согласно (50), определяется формулами

$$p_n(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{\lambda} \sqrt{1-\lambda^2}\, P_{n-1}(\lambda)\, d\lambda = -\frac{2}{\pi} \int_{\pi}^{\theta} \sin\theta \sin n\theta\, d\theta,$$

откуда $p_n'(\lambda) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-\lambda^2} P_{n-1}(\lambda) = \frac{2}{\pi} \sin n\theta$. Отбрасывая множитель $\frac{2}{\pi}$, видим, что система (34)

$$\frac{1}{2} x_2 = \lambda x_1; \quad \frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{2} x_3 = \lambda x_2; \ldots; \quad \frac{1}{2} x_{n-1} + \frac{1}{2} x_{n+1} = \lambda x_n; \ldots$$

имеет решение $x_n = \sin(n \arccos\lambda)$, где $-1 \leqslant \lambda \leqslant +1$.

2. Рассмотрим на промежутке $|-\pi, +\pi|$ замкнутую ортогональную и нормированную систему $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Формулы (51) при

$\rho(\lambda)=\lambda$ дадут нам следующие элементы для соответствующей матрицы: $a_{pq}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\lambda e^{i(p-q)\lambda}\,d\lambda=\frac{(-1)^{p-q}}{i(p-q)}$ при $p\neq q$ и $a_{pp}=0$, причем значки p и q идут от $(-\infty)$ до $(+\infty)$. Согласно (50):

$$p_k(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\lambda}e^{-ik\lambda}\,d\lambda;\quad p_k'(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ik\lambda},$$

и формулы (78) приводят к равенствам

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\frac{(-1)^{s-k}}{i(s-k)}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ik\lambda}=\lambda\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-is\lambda},$$

причем штрих у знака суммы показывает, что надо исключить значение $k=s$.

Предыдущая формула может быть переписана в виде

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\frac{(-1)^{s-k}}{i(s-k)}e^{i(s-k)\lambda}=\lambda,$$

или в виде

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}{}'\frac{(-1)^{j}}{ij}e^{ij\lambda}=\lambda,$$

причем исключается значение $j=0$. Последняя формула представляет собой обычное разложение λ в ряд Фурье, причем написанный ряд расходится на концах промежутка, т. е. при $\lambda=\pm\pi$. Последнее происходит в силу того, что разложение написано в комплексной форме. Применим теперь формулу (56), полагая $f(\lambda)=-\pi-\lambda$ при $\lambda<0$ и $f(\lambda)=\pi-\lambda$ при $\lambda>0$. Мы получим матрицу

$$b_{pq}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}(-\pi-\lambda)\,e^{i(p-q)\lambda}\,d\lambda+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}(\pi-\lambda)\,e^{i(p-q)\lambda}\,d\lambda,$$

или

$$b_{pq}=\frac{i}{p-q}\text{ при }p\neq q\text{ и }b_{pp}=0. \tag{80}$$

Принимая во внимание, что $|f(\lambda)|\leqslant\pi$ в промежутке $[-\pi,+\pi]$, мы имеем следующую оценку для квадратичной формы [155]:

$$\left|\sum_{p,q=-s}^{+t}{}'\frac{\xi_p\bar{\xi}_q}{p-q}\,i\right|\leqslant\pi\sum_{k=-s}^{+t}|\xi_k|^2. \tag{81}$$

В этой оценке множитель i слева может быть, очевидно, отброшен. Если положим $\xi_p=0$ при $p\leqslant 0$ и остальные ξ_p вещественными, получаем следующую оценку, данную Гильбертом:

$$\left|\sum_{p,q=1}^{n}{}'\frac{\xi_p\xi_q}{p-q}\right|\leqslant\pi\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2. \tag{82}$$

Нетрудно показать, что матрице с элементами $a_{pq}=1:|p-q|$ при $p\neq q$ и $a_{pp}=0$ уже не соответствует ограниченный оператор. Действительно, если мы положим $\xi_k=1:\sqrt{n}$ при $1\leqslant k\leqslant n$ и $\xi_k=0$ при $k>n$, то норма элемента $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots)$ будет равна единице, а соответствующая квадратичная форма будет

$$\sum_{p,q=1}^{n}\frac{\xi_p\xi_q}{|p-q|}=\frac{2}{n}\sum_{q<p}^{1,2,\ldots,n}\frac{1}{p-q}=\frac{2}{n}\sum_{p=2}^{n}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{p-2}+\frac{2}{p-1}\right)=$$

$$=\frac{2}{n}\left(\frac{n-1}{1}+\frac{n-2}{2}+\ldots+\frac{n-(n-1)}{n-1}\right)=$$

$$=2\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1}-\frac{n-1}{n}\right),$$

и последнее выражение беспредельно возрастает при возрастании n, так как сумма $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1}$ беспредельно растет, а дробь $(n-1):n$ стремится к единице. Мы не имеем в случае (80) абсолютной сходимости бесконечного двойного ряда, но можем утверждать, что для любых двух элементов из l_2 имеется предел

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}\sum_{p=1}^{m}{}'\sum_{q=1}^{n}{}'\frac{\xi_p\overline{\eta_q}}{p-q}\,i=\sum_{q=1}^{\infty}\left[\sum_{p=1}^{\infty}{}'\frac{\xi_p}{p-q}\,i\right]\overline{\eta}_q,$$

причем во внутреннем суммировании по p исключается значение $p=q$, а слева те слагаемые, у которых $p=q$.

3. Рассмотрим теперь вместо системы $e^{ik\lambda}$ вещественную замкнутую ортогональную нормированную систему

$$\varphi_k(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\sin k\lambda+\cos k\lambda)$$

$$(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Применяя формулу (56), придем к матрице

$$b_{pq}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(\lambda)(\sin p\lambda+\cos p\lambda)(\sin q\lambda+\cos q\lambda)\,d\lambda,$$

или

$$b_{pq}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(\lambda)\cos(p-q)\lambda\,d\lambda+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(\lambda)\sin(p+q)\lambda\,d\lambda.$$

Полагая, как и раньше, $f(\lambda)=-\pi-\lambda$ при $\lambda<0$ и $f(\lambda)=\pi-\lambda$ при $\lambda>0$, мы получим следующую матрицу:

$$b_{pq}=\frac{1}{p+q}\text{ при }p+q\neq 0\text{ и }b_{pq}=0\text{ при }p+q=0.$$

Аналогично неравенству (81), мы приходим к неравенству

$$\left|\sum_{p,q=-s}^{+t}{}'\frac{\xi_p\overline{\xi_q}}{p+q}\right|\leqslant\pi\sum_{k=-s}^{+t}|\xi_k|^2, \tag{83}$$

где штрих показывает, что надо исключить слагаемые, для которых $p+q=0$. Неравенству (81) будет соответствовать неравенство

$$\left|\sum_{p,q=1}^{n}{}'\frac{\xi_p\xi_q}{p+q}\right| \leqslant \pi\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2. \tag{84}$$

Все числа мы можем считать положительными, и написанный двойной ряд будет абсолютно сходящимся для любого элемента l_2, так что можем написать:

$$\sum_{p,q=1}^{\infty}{}'\frac{\xi_p\xi_q}{p+q} \leqslant \pi\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k^2. \tag{85}$$

170. Слабая сходимость в l_2. Пусть имеется последовательность элементов $x^n(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots)$ $(n=1, 2, \ldots)$, которая сильно сходится к элементу $x(\xi_1, \xi_2, \ldots)$, т. е. $x^{(n)} \Rightarrow x$. Это можно записать так:

$$\sum_{k=1}|\xi_k - \xi_k^{(n)}|^2 \to 0 \qquad \text{при } n\to\infty. \tag{86}$$

Отсюда следует

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k^{(n)}|^2 \to \sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^2 \tag{87}$$

и $\|x^{(n)}\|$ ограничены числом l (не зависящим от n).

Из (86) непосредственно следует

$$\xi_k^{(n)} \to \xi_k, \tag{88}$$

$$(k=1, 2, \ldots),$$

но из (88) не следует (86).

Покажем, что условие (88) совместно с ограниченностью норм элементов $x^{(n)}$,

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k^{(n)}|^2 \leqslant l^2 \tag{89}$$

равносильно слабой сходимости $x^{(n)} \xrightarrow{\text{сл}} x$.

Если имеет место слабая сходимость, то $\|x^{(n)}\|$ должны быть ограничены, т. е. должно иметь место (89) при некотором выборе l и, кроме того, должно быть $(x^{(n)}, \varphi_k)\to(x, \varphi_k)$, где φ_k — упомянутые выше орты, а это приводит к (88).

Наоборот, если выполнены условия (88) и (89), то слабая сходимость $x^{(n)}$ к x непосредственно следует из сказанного в [132].

Мы можем, таким образом, формулировать следующую теорему.

Теорема. *Условия* (88) *и* (89) *необходимы и достаточны для существования слабого предела последовательности элементов* $x^{(n)}(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots)$, *и, если они выполнены, то предельный элемент имеет составляющие* $(\xi_1, \xi_2, \ldots)$.

171. Вполне непрерывные операторы в l_2. Мы получили выше [108] достаточное условие того, что бесконечная матрица определяет вполне непрерывный оператор в l_2, а именно, если двойной *ряд*

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} |a_{nm}|^2 \tag{90}$$

сходится, то матрица a_{nm} определяет вполне непрерывный оператор в l_2.

Сходимость ряда (90) является только достаточным условием того, чтобы оператор, определяемый матрицей a_{nm}, был вполне непрерывным. Можно показать, что необходимое и достаточное условие состоит в том, что предельный переход, указанный в формуле (8), имел место равномерно для всех x и y, нормы которых не превышают единицы. Уравнение $(E - \mu A)x = y$ в l_2 имеет вид

$$\xi_n - \mu \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}\xi_m = \eta_n, \tag{91}$$

где $(\eta_1, \eta_2, \ldots)$ — данный и $(\xi_1, \xi_2, \ldots)$ — искомый элементы l_2. Если A — вполне непрерывный оператор, то для системы (91) имеет место все, что было сказано в [135]. Пусть A — самосопряженный вполне непрерывный оператор и ψ_k $(k = 1, 2 \ldots)$ — полная ортонормированная система его элементов. Пусть U — унитарный оператор в l_2, определяемый условиями $\psi_k = U\varphi_k$, где φ_k — прежние орты l_2. Если принять ψ_k за новые орты в l_2, то оператор A в новых будет: $B = UAU^{-1}$. Его составляющие определятся формулами $\{B\}_{nm} = (B\psi_m, \psi_n) = \lambda_m(\psi_m, \psi_n)$, ибо $B\psi_m = \lambda_m\psi_m$.

Следовательно,

$$\{B\}_{n,m} = \begin{cases} \lambda_m & \text{при } m = n, \\ 0 & \text{при } m \neq n, \end{cases} \tag{92}$$

т. е. в ортах ψ_k оператору B отвечает диагональная матрица, на диагонали которой стоят собственные значения оператора. Это остается справедливым и для любого линейного самосопряженного или унитарного оператора с чисто точечным спектром [146].

Оператор A унитарно эквивалентен B, а именно $A = U^{-1}BU$. Принимая во внимание сказанное выше, можно утверждать, что матрицы, соответствующие вполне непрерывным самосопряженным операторам в l_2, суть матрицы, унитарно эквивалентные диагональным матрицам, у которых диагональные элементы λ_m удовлетворяют условиям, указанным в [136].

172. Интегральные операторы в L_2. Мы уже рассматривали интегральные операторы в L_p. Рассмотрим теперь их более подробно в L_2:

$$\varphi(x)=\int_a^b K(x, y) f(y)\, dy, \tag{93}$$

где $K(x, y)$ — измеримая функция в промежутке Δ_0 ($a \leqslant x \leqslant b$; $a \leqslant y \leqslant b$), а потому почти для всех x из $[a, b]$ измерима по y и наоборот. Положим далее, что почти для всех x она принадлежит L_2 как функция от y и наоборот, т. е.

$$K^2(x)=\int_a^b |K(x, y)|^2\, dy < +\infty, \tag{94}$$

$$K_1^2(y)=\int_a^b |K(x, y)|^2\, dx < +\infty, \tag{95}$$

где $K(x)$ и $K_1(y)$ — измеримые неотрицательные функции [**67, 68**]. Из (94) следует, что при любой $f(y) \in L_2$ существует интеграл (93) для почти всех x, и функция $\varphi(x)$ есть измеримая функция [**67, 68**]. Для того, чтобы при наличии (94) преобразование (93) было линейным ограниченным преобразованием, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено следующее условие: при любом выборе $f(x)$ из L_2 существует такое положительное число N, что

$$\int_a^b |\varphi(x)|^2\, dx=\int_a^b \left|\int_a^b K(x, y) f(y)\, dy\right|^2 dx \leqslant N^2 \int_a^b |f(y)|^2\, dy, \tag{96}$$

Укажем простое достаточное условие ограниченности оператора, соответствующего ядру $K(x, y)$, совершенно аналогичное условиям ограниченности матрицы: существует такое положительное число l, что

$$\int_a^b |K(x, y)|\, dy \leqslant l \quad \text{и} \quad \int_a^b |K(x, y)|\, dx \leqslant l. \tag{97}$$

Достаточно показать ограниченность соответствующего билинейного функционала. Заменяя в повторном интеграле, выражающем этот функционал, все функции их модулями, мы можем заменить

повторный интеграл двойным:

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, y)| f_1(y) \| f_2(x) | \, dxdy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b |K(x, y)| [|f_1(y)|^2 + |f_2(x)|^2] \, dxdy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_a^b \left[\int_a^b |K(x, y)| \, dx \right] |f_1(y)|^2 \, dy +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_a^b \left[\int_a^b |K(x, y)| \, dy \right] |f_2(x)|^2 \, dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{l}{2} \left[\int_a^b |f_1(y)|^2 \, dy + \int_a^b |f_2(x)|^2 \, dx \right].$$

Но последнее выражение равно l, если $\|f_1\| = \|f_2\| = 1$. При помощи совершенно такого же метода доказательства можно дать более общее достаточное условие ограниченности оператора (93), а именно следующее: существует такое положительное число l и такая положительная непрерывная в $[a, b]$ функция $\omega(x)$, что

$$\int_a^b |K(x, y)| \, \omega(y) \, dy \leqslant l\omega(x); \quad \int_a^b |K(x, y)| \, \omega(x) \, dx \leqslant l\omega(y). \tag{98}$$

173. Сопряженный оператор. В случае ограниченного оператора интеграл

$$\int_a^b K(x) \tau(x) \, dx, \tag{99}$$

где неотрицательная функция $K(x)$ определяется формулой (94), может не иметь смысла для некоторых $\tau(x)$ из L_2. Множество тех $\tau(x)$ из L_2, для которых он имеет смысл, есть, очевидно, некоторый линеал l в L_2.

Теорема 1. *Линеал l повсюду плотен в L_2.*

Нам надо доказать, что замыкание l дает все L_2. Если бы это было не так, то существовал бы ненулевой элемент $\pi(x)$ из L_2, ортогональный к подпространству, полученному замыканием l, и тем самым ко всем $\tau(x)$ из l. Таким образом, нам достаточно доказать,

что если $\pi(x)=\pi_1(x)+i\pi_2(x)$ ортогонально ко всем $\tau(x)$ из l, т. е.

$$\int_a^b \tau(x)\,\overline{\pi(x)}\,dx=0, \tag{100}$$

то $\pi(x)$ эквивалентно нулю. Выберем $\tau(x)$ из l специальным образом. Пусть m — какое-либо конечное положительное число, e_m — множество тех x, для которых $K(x)\leqslant m$ и e'_m — любая часть e_m меры $\leqslant m$. Определим $\tau(x)$ так, что $\tau(x)=1$, если $x\in e'_m$, и $\tau(x)=0$ для других x. Такое $\tau(x)$ принадлежит l, и, применяя (100), получим

$$\int_{e'_m}\overline{\pi(x)}\,dx=\int_{e'_m}[\pi_1(x)-i\pi_2(x)]\,dx=0. \tag{101}$$

Это равенство справедливо и для любой части e'_m, а потому, например,

$$\int_{e'_m}\pi_1^{+}(x)\,dx=0, \tag{102}$$

где $\pi_1^{+}(x)$ есть положительная часть $\pi_1(x)$, т. е. $\pi_1^{+}(x)$ эквивалентна нулю на e'_m. Беспредельно увеличивая m и принимая во внимание (94), получим, что $\pi_1^{+}(x)$ эквивалентна нулю на $[a, b]$. Аналогично можем утверждать то же и для $\pi_1^{-}(x)$ $\pi_2^{+}(x)$ и $\pi_2^{-}(x)$, и лемма доказана. Отметим, что при доказательстве леммы мы пользовались лишь тем, что $K(x)$ — любая заданная неотрицательная, почти везде конечная и измеримая на $[a, b]$ функция. В дальнейшем через l_1 будем обозначать аналогичный линеал для произведения $K_1(x)\tau(x)$. Он также повсюду плотен в L_2.

Теорема 2. *Если формула (93) определяет ограниченный оператор, то сопряженный оператор есть интегральный оператор с ядром.*

$$K^*(x, y)=K(y, x). \tag{103}$$

Обозначая через A оператор (93) и принимая во внимание определение сопряженного оператора $(Ax, y)=(x, A^* y)$, можем написать

$$\int_a^b\left[\int_a^b K(x, y)\,\tau(y)\,dy\right]\overline{g(x)}\,dx=\int_a^b \tau(y)\,\overline{g^*(y)}\,dy, \tag{104}$$

где $g^*(x)=A^*g(x)$, и мы считаем, что $\tau(y)\in l_1$.

Принимая во внимание неравенство

$$\int_a^b\left|K(x, y)\,\overline{g(x)}\right|dx\leqslant\left(\int_a^b|K(x, y)|^2\,dx\right)^{1/2}\cdot\left(\int_a^b|g(x)|^2dx\right)^{1/2}=$$

$$=K_1(y)\cdot\|g\|$$

и тот факт, что $\tau(x) \in l_1$, можем утверждать, что существует один из повторных интегралов для $|K(x, y)\overline{g(x)}\tau(y)|$, и, следовательно, в интеграле, стоящем в левой части (104), мы можем менять порядок интегрирования, а потому можем переписать формулу (104) в виде

$$\int_a^b \tau(y)\left[\int_a^b K(x, y)\,\overline{g(x)}\,dx - \overline{g^*(y)}\right]dy = 0.$$

Повторяя доказательство теоремы 1, убедимся в том, что разность, стоящая в квадратных скобках, эквивалентна нулю, и, переходя к сопряженным величинам, можно написать

$$g^*(y) = \int_a^b \overline{K(x, y)}\,g(x)\,dx, \tag{105}$$

откуда и следует утверждение теоремы. Равенство $(Ax, y) = (x, A^*y)$ запишется для интегральных операторов, в силу доказанной теоремы, в виде

$$\int_a^b\left[\int_a^b K(x, y)f(y)\,dy\right]\overline{g(x)}\,dx = \int_a^b\left[\int_a^b K(x, y)\,\overline{g(x)}\,dx\right]f(y)\,dy, \tag{106}$$

что сводится к возможности изменения порядка интегрирования. Соответствующий двойной интеграл может и не существовать. Если ядро удовлетворяет, кроме указанных условий, еще условию

$$K(x, y) = \overline{K(y, x)}, \tag{107}$$

то оператор (105) совпадает с оператором (93), т. е. оператор (93) — самосопряженный.

174. Вполне непрерывные операторы. Выше мы видели, что если измеримая в квадрате Δ_0 функция $K(x, y)$ удовлетворяет условию

$$\iint_{\Delta_0} |K(x, y)|^2\,dx\,dy < +\infty, \tag{108}$$

то оператор (93) вполне непрерывен в L_2. Для интегрального уравнения

$$\int_a^b K(x, y)f(y)\,dy = \lambda f(x) + \psi(x), \tag{109}$$

где $\psi(x)$ — заданная и $f(x)$ — искомая функция из L_2 на $[a, b]$, имеет место сказанное в [135].

Если оператор (93) — самосопряженный, т. е. $K(x, y)$ эквивалентна $\overline{K(y, x)}$, то к уравнению (109) применимо сказанное в [136].

Покажем, что *интеграл* (108) *равен абсолютной норме оператора* (93). Предварительно докажем лемму.

Лемма. *Если* $\varphi_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ *есть замкнутая ортонормированная система на промежутке* $[a, b]$, то $\varphi_{m,n}(x, y)=\varphi_m(x)\varphi_n(y)$ *есть замкнутая ортонормированная в квадрате* Δ_0 *система.*

По условию

$$\int_a^b \varphi_i(x)\overline{\varphi_k(x)}\,dx=\begin{cases}0 \text{ при } i\neq k,\\ 1 \text{ при } i=k.\end{cases}$$

Функции $\varphi_{mn}(x, y)$ принадлежат, очевидно, $L_2(\Delta_0)$, и, в силу теоремы Фубини,

$$\iint_{\Delta_0}\psi_{mn}(x, y)\overline{\psi_{p,q}(x, y)}\,dxdy=\int_a^b\varphi_m(x)\overline{\varphi_p(x)}\,dx\int_a^b\varphi_n(y)\overline{\varphi_q(y)}\,dy,$$

откуда следует ортонормированность $\varphi_{m,n}(x, y)$ в Δ_0. Для доказательства замкнутости этой системы достаточно показать, что если f ортогональна ко всем $\psi_{m,n}$, то она эквивалентна нулю в Δ_0 [58].

Итак, пусть

$$\iint_{\Delta_0} f(x, y)\overline{\varphi_m(x)}\,\varphi_n(y)\,dx\,dy=0,$$

т. е.

$$\int_a^b\left[\int_a^b f(x, y)\varphi_n(y)\,dy\right]\overline{\varphi_m(x)}\,dx=0,$$

и, в силу замкнутости системы $\varphi_m(x)$, переходя к сопряженным величинам, получим

$$\int_a^b\overline{f(x, y)}\,\overline{\varphi_n(y)}\,dy=0 \text{ почти везде по } x \text{ в } [a, b],$$

и, в силу тех же соображений, можем утверждать, что $f(x, y)=0$ почти везде в Δ_0, и лемма доказана. Пусть b_{mn} — коэффициент Фурье ядра $K(x, y)$, принадлежащего L_2 в Δ_0, в силу (108):

$$b_{mn}=\iint_{\Delta_0}K(x, y)\overline{\varphi_m(x)}\,\varphi_n(y)\,dx\,dy.$$

Определим квадрат абсолютной нормы оператора A, соответствующего этому ядру [138],

$$N^2(A)=\sum_{m,n}|(A\varphi_n, \varphi_m)|^2=\sum_{m,n}\left|\int_a^b\left[\int_a^b K(x, y)\varphi_n(y)\,dy\right]\overline{\varphi_m(x)}\,dx\right|^2=$$

$$=\sum_{m,n}\left|\iint_{\Delta_0}K(x, y)\varphi_m(x)\varphi_n(y)\,dx\,dy\right|^2=\sum_{m,n}|b_{m,n}|^2,$$

но последняя сумма, в силу уравнения замкнутости, и равна интегралу (108). Если выполнено условие (108) и A — самосопряженный оператор, то

$$\int\int_{\Delta_0} |K(x, y)|^2 dx\, dy = \sum_k \lambda_k^2, \tag{110}$$

где λ_k — собственные значения.

Все сказанное в [135] и [136] сохраняется в случае бесконечного промежутка и для многомерного оператора

$$\varphi(x) = \int_D K(x, y) f(y)\, dy, \tag{111}$$

где $x(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $y(y_1, y_2, ..., y_n)$ — точки n-мерного пространства R_n; $dy = dy_1 dy_2 ... dy_n$ и D — некоторая область R_n.

175. Спектральная функция. Обозначим буквой K оператор (93), считая его вполне непрерывным и самосопряженным. Укажем для него построение спектральной функции $\mathcal{E}_\lambda$ и резольвенты $R_l = (A - lE)^{-1}$.

Вместо $\mathcal{E}_\lambda$ мы введем другую функцию для того, чтобы иметь возможность представить ее в виде интегрального оператора, а именно мы положим

$$\theta_\lambda = \mathcal{E}_\lambda \quad \text{при } \lambda < 0; \quad \theta_\lambda = \mathcal{E}_\lambda - E \quad \text{при } \lambda > 0 \text{ и } \theta_0 = 0. \tag{112}$$

Принимая во внимание, что спектр чисто точечный, мы можем утверждать, что $\mathcal{E}_\lambda$ есть оператор проектирования в подпространство тех собственных функций $\varphi_k(x)$, для которых $\lambda_k \leqslant \lambda$. Проекция функции $f(x)$ на одномерное подпространство собственной функции $\varphi_k(x)$ представляет собой произведение $a_k \varphi_k(x)$, где a_k — коэффициент Фурье $f(x)$:

$$a_k \varphi_k(x) = \int_a^b \varphi_k(x) \overline{\varphi_k(y)} f(y)\, dy.$$

Таким образом, оператор проектирования на указанное одномерное подпространство есть интегральный оператор с ядром $\varphi_k(x) \overline{\varphi_k(y)}$, и можем написать

$$\theta_\lambda f(x) = \int_a^b \sum_{\lambda_k \leqslant \lambda} \varphi_k(x) \overline{\varphi_k(y)} f(y)\, dy \quad \text{при } \lambda < 0,$$

где суммирование распространяется на те значения k, для которых $\lambda_k \leqslant \lambda$, и написанная сумма содержит конечное число слагаемых в силу свойства спектра вполне непрерывного оператора. Таким образом, оператор θ_λ, при $\lambda < 0$ есть интегральный оператор с ядром

$$\theta(x, y; \lambda) = \sum_{\lambda_k \leqslant \lambda} \varphi_k(x) \overline{\varphi_k(y)} \text{ при } \lambda < 0. \tag{113}$$

Принимая во внимание формулу (112) и сказанное выше относительно $\mathcal{E}_\lambda$, можем утверждать, что θ_λ при $\lambda > 0$ есть интегральный оператор с ядром

$$\theta(x, y; \lambda) = -\sum_{\lambda_k > \lambda} \varphi_k(x) \overline{\varphi_k(y)} \text{ при } \lambda > 0, \tag{114}$$

где сумма также содержит конечное число слагаемых. Когда λ проходит через собственное значение, то ядро меняется скачком. Из формулы (112) непосредственно следует, что $\theta_\lambda^2 = \theta_\lambda$ при $\lambda < 0$ и $\theta_\lambda^2 = -\theta_\lambda$ при $\lambda > 0$, что может быть записано в виде

$$\int_a^b \theta(x, t; \lambda)\,\theta(t, y; \lambda)\,d\theta = \pm\,\theta(x, y; \lambda) \begin{cases} + \text{ при } \lambda < 0, \\ - \text{ при } \lambda > 0. \end{cases} \tag{115}$$

Функция $R_l f(x)$ является, очевидно, решением уравнения (109) при $\lambda = l$, причем предполагается, что $l \neq 0$ и не совпадает ни с одним из λ_k. Можно дать другую формулу для резольвенты, исходя из формулы

$$R_l f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mathcal{E}_\lambda f(x)}{\lambda - l}, \tag{116}$$

где интегрирование фактически происходит по конечному промежутку, содержащему спектр оператора.

Пусть $\lambda = 0$ не есть собственное значение. Заменяя $\mathcal{E}_\lambda$ на θ_λ согласно (112) и учитывая дополнительный скачок θ_λ, равный $(-E)$ при переходе $\lambda = 0$, можем написать предыдущую формулу в виде

$$R_l f(x) = -\frac{1}{l} f(x) + \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to +0 \\ \varepsilon_2 \to +0}} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon_1} \frac{d_\lambda \left[\int_a^b \theta(x, y; \lambda) f(y)\,dy \right]}{\lambda - l} + \right.$$
$$\left. + \int_{\varepsilon_2}^{\infty} \frac{d_\lambda \left[\int_a^b \theta(x, y; \lambda) f(y)\,dy \right]}{\lambda - l} \right]. \tag{117}$$

176. Спектральная функция (продолжение). Спектральная функция была введена для весьма общих интегральных операторов Карлеманом в его работе „Sur les équations intégrales singuliéres á noyau réel et symétrique“ (1921). Изложение этой теории с современной точки зрения имеется в книге Stone'a „Linear transformations in Hilbert Space...“. (1932) и в статье Н. И. Ахиезера „Интегральные операторы с ядрами Карлемана“ („Успехи математических наук“, 1947). В этих работах исследуются интегральные операторы более общего типа, чем самосопряженные ограниченные операторы, о которых сейчас мы говорим. Случай ограниченных самосопряженных операторов исследовался Гильбертом, Хеллингером и другими.

Мы приведем в общих чертах результаты для последнего случая. Ядро $K(x, y)$ ограниченного самосопряженного оператора K можно аппроксимировать ядрами $K^{(n)}(x, y)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, которым соответствуют вполне непрерывные самосопряженные операторы. Это дает возможность показать, что оператор θ_λ, определяемый формулами (112), где $\mathcal{E}_\lambda$ — спектральная функция оператора K есть при $\lambda \neq 0$ интегральный оператор и имеют место формулы

$$\theta_\lambda f(x) = \int_a^b \theta(x, y; \lambda) f(y)\,dy. \tag{118}$$

$$\int_a^b K(x, y) f(y)\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, d_\lambda \left[\int_a^b \theta(x, y; \lambda) f(y)\, dy \right], \tag{119}$$

а также формула (115). В формуле (119) интеграл, стоящий справа, надо понимать как несобственный.

Будем считать, что оператор (97) не имеет точечного спектра, и приведем для него формулы общей теории из (117). Пусть $\omega_k(x)$ суть элементы L_2, соответствующие y_k из [149], причем можно считать, что $\omega_k(x)$ образуют ортонормированную систему. Пользуясь $\theta(x, y; \lambda)$, можно получить полный набор дифференциальных решений:

$$\pi_k(x, \lambda) = \int_a^b \theta(x, y; \lambda)\, \omega_k(y)\, dy \text{ при } \lambda < 0,$$

$$\pi_k(x, \lambda) = \int_a^b \theta(x, y; \lambda)\, \omega_k(y)\, dy + \omega_k(x) \text{ при } \lambda > 0.$$

В точке $\lambda = 0$ оператор θ_λ имеет скачок, равный $(-E)$.
Мы имеем

$$\rho_k(\lambda) = \int_a^b |\pi_k(x, \lambda)|^2 dx, \tag{120}$$

и, если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — какие-либо два элемента из L_2, то полагая

$$g_k(\lambda) = \int_a^b \pi_k(x, \lambda)\, \overline{\varphi(x)}\, dx, \tag{121}$$

$$h_k(\lambda) = \int_a^b \pi_k(x, \lambda)\, \overline{\psi(x)}\, dx, \tag{122}$$

можем написать формулы из [149] в виде

$$\int_a^b \varphi(x)\, \overline{\psi(x)}\, dx = \sum_k \int_m^M \frac{\overline{dg_k(\lambda)}\, dh_k(\lambda)}{d\rho_k(\lambda)}, \tag{123}$$

$$\int_a^b \int_a^b K(x, y)\, \varphi(y)\, \overline{\psi(x)}\, dx\, dy = \sum_k \int_m^M \lambda\, \frac{\overline{dg_k(\lambda)}\, dh_k(\lambda)}{d\rho_k(\lambda)}, \tag{124}$$

$$\int_a^b \mathcal{E}_\lambda \varphi(x)\, \overline{\psi(x)}\, dx = \sum_k \int_m^\lambda \frac{\overline{dg_k(\mu)}\, dh_k(\mu)}{d\rho_k(\mu)}. \tag{125}$$

где m и M — границы оператора, а интеграл, стоящий в левой части формулы (124), надо понимать как повторный в каком-либо порядке. Если $\varphi(x)$ принадлежит линеалу l, на котором интеграл (99) имеет смысл, то указанный интеграл существует как двойной интеграл. Остальные формулы из [149] имеют вид

$$\varphi(x) = \sum_k \int_m^M \frac{\overline{dg_k(\lambda)}}{d\rho_k(\lambda)}\, d\pi_k(x, \lambda), \tag{126}$$

$$\int_a^b K(x, y)\,\varphi(y)\,dy = \sum_k \int_m^M \lambda\, \frac{\overline{dg_k(\lambda)}}{d\rho_k(\lambda)}\, d\pi_k(x, \lambda), \tag{127}$$

$$\mathcal{E}_\lambda \varphi(x) = \sum_k \int_m^\lambda \frac{\overline{dg_k(\mu)}}{d\rho_k(\mu)}\, d\pi_k(x, \mu). \tag{128}$$

В случае бесконечного числа слагаемых ряды должны сходиться в среднем к величинам, стоящим слева.

Дифференциальные решения $\pi(x, \lambda)$ удовлетворяют уравнению

$$\int_a^b K(x, y)\,\pi(y, \lambda)\,dy = \int_m^\lambda \mu\, d\,\pi(x, \mu), \tag{129}$$

причем мы, как всегда, считаем $\pi(x, m) = 0$. Свойства ортогональности таких решений выражаются формулой

$$\int_a^b \Delta_1 \pi_p(x, \lambda) \cdot \overline{\Delta_2 \pi_q(x, \lambda)}\, dx = 0.$$

$$(p \neq q).$$

При построении указанных выше формул можно исходить из любой полной ортогональной системы дифференциальных решений $\pi_k(x, \lambda)$. В следующих параграфах мы рассмотрим примеры интегральных операторов в L_2.

177. Унитарные преобразования в L_2. Не всякое унитарное преобразование $\varphi(x) = Uf(x)$ в L_2 может быть представлено в интегральной форме.

В качестве примера укажем тождественное преобразование $\varphi(x) = f(x)$. Но его можно записать в интегральной форме, если перейти к первообразной функции:

$$\int_0^x \varphi(y)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x, y) f(y)\,dy,$$

причем в качестве основного промежутка мы взяли промежуток $(-\infty, +\infty)$, а $K(x, y) = 1$ при $0 \leqslant y \leqslant x$ и $K(x, y) = 0$ при $y < 0$ и $y > x$, если $x > 0$, и аналогично при $x < 0$. Подобный результат имеет место и для любого ограниченного оператора A. Пусть

основным промежутком является промежуток $(-\infty, +\infty)$. Фиксируем какое-либо значение x и рассмотрим первообразную для $Af(x)$:

$$l(f)=\int_0^x [Af(t)]\,dt.$$

Мы имеем дистрибутивность $l(f)$ и, в силу неравенства Буняковского, оценку

$$|l(f)|\leqslant\left|\int_0^x |Af(t)|^2\,dt\right|^{\frac{1}{2}}\left|\int_0^x dt\right|^{\frac{1}{2}}\leqslant\|A\|\sqrt{x}\,\|f\|.\quad (x>0).$$

Отсюда следует, что мы можем рассматривать $l(f)$ как линейный ограниченный функционал, зависящий от параметра x, и, в силу теоремы из [**123**], имеем

$$\int_0^x [Af(t)]\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty} K(x,\ y)f(y)\,dy,$$

причем $K(x,\ y)\in L_2(-\infty,\ +\infty)$ по y (при любом $x\in(-\infty,\ +\infty)$) и

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|K(x,\ y)|^2\,dy\leqslant\|A\|^2|x|.$$

Мы докажем сейчас теорему, которая, при помощи перехода к первообразной функции, дает общий аналитический вид унитарных преобразований. Эта теорема была впервые доказана Бохнером (Annals of Mathem, Vol. 35, № 1, 1934), причем он рассматривал промежуток $0\leqslant x<+\infty$. Доказательство не зависит от выбора промежутка. Для определенности мы возьмем промежуток $(-\infty, +\infty)$ и через L_2 будем обозначать класс функций L_2 на $(-\infty, +\infty)$ (см. Ф. Рисс и Б. Секефальви-Надь „Лекции по функциональному анализу“, стр. 316).

Теорема. *Пусть $K(x, y)$ и $L(x, y)$ при любом фиксированном x из $(-\infty, +\infty)$ принадлежат L_2 по y, причем имеют место при всех a и b из $(-\infty, +\infty)$ формулы*

$$\begin{vmatrix}\int_{-\infty}^{+\infty} K(a,\ y)\,\overline{K(b,\ y)}\,dy & \int_{-\infty}^{+\infty} K(a,\ y)\,\overline{L(b,\ y)}\,dy\\ \int_{-\infty}^{+\infty} L(a,\ y)\,\overline{K(b,\ y)}\,dy & \int_{-\infty}^{+\infty} L(a,\ y)\,\overline{L(b,\ y)}\,dy\end{vmatrix}=\begin{cases}\min(|a|,\ |b|) & \text{при } ab>0\\ 0 & \text{при } ab\leqslant 0\end{cases}\qquad (130)$$

и

$$\int_0^b K(a, y)\,dy = \int_0^a \overline{L(b, y)}\,dy. \tag{131}$$

При этом формулы

$$\int_0^a \varphi(y)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{L(a, y)} f(y)\,dy, \tag{132}$$

$$\int_0^a f(y)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{K(a, y)}\,\varphi(y)\,dy \tag{133}$$

определяют унитарное преобразование $\varphi(x) = Uf(x)$ *и обратное ему.*

Наоборот, если имеется унитарное преобразование $\varphi(x) = Uf(x)$, *то существуют функции* $K(x\ y)$, $L(x, y)$ *с указанными выше свойствами, с помощью которых* U и U^{-1} *выражаются формулами* (132) *и* (133).

Начнем с доказательства первой половины теоремы.

Введем функцию $f_a(x)$:

$$f_a(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } 0 < x \leqslant a \\ 0 \text{ при } x \leqslant 0 \text{ и } x > a \end{cases} \quad (a > 0);$$

$$f_a(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } a \leqslant x < 0 \\ 0 \text{ при } x < a \text{ и } x \geqslant 0 \end{cases} \quad (a < 0)$$

и $f_0(x) \equiv 0$, и определим операторы U_0 и V_0 следующим образом:

$$K(a, x) = U_0 f_a(x); \quad L(a, x) = V_0 f_a(x). \tag{134}$$

Составляя всевозможные конечные линейные комбинации функций $f_a(x)$ при различных a, мы получим линеал l кусочно-постоянных функций, т. е. функций, принимающих постоянные значения на конечном числе конечных промежутков и равных нулю вне этих промежутков. При этом значения функций на концах промежутков не играют роли, поскольку мы отождествляем эквивалентные функции. Распространим операторы U_0 и V_0 на линеал l, приняв за основу дистрибутивность U_0 и V_0. Нетрудно видеть, что это распространение единственно. Мы обозначим через Uf и Vf, полученные на l дистрибутивные операторы.

Формулы (130), (131) и (134) дают нам

$$(U_0 f_a, U_0 f_b) = (f_a, f_b); \ (V_0 f_a, V_0 f_b) = (f_a, f_b), \tag{135}$$

$$(U_0 f_a, f_b) = (f_a, V_0, f_b). \tag{136}$$

Пользуясь дистрибутивностью, можем написать такие же формулы для U и V на l:

$$(Uf,\ Ug)=(f,\ g);\quad (Vf,\ Vg)=(f,\ g), \tag{137}$$

$$(Uf,\ g)=(f,\ Vg), \tag{138}$$

где f и $g\in l$. Из (137) следует, что операторы U и V на l не меняют нормы элементов, и, поскольку линеал l плотен в L_2 [**60**], мы получаем единственное распространение операторов U и V (по непрерывности) на все L_2. В силу непрерывности скалярного произведения, на L_2 сохраняются формулы (137) и (138), и операторы U и V не меняют нормы и скалярного произведения на L_2. Из (138) следует, что $V=U^*$. Заменяя в (138) f на Vf и пользуясь (137), получим $UU^*=E$, и, аналогично, заменяя g на Ug, получим $U^*U=E$. Отсюда следует, что U — унитарное преобразование и V ему обратное [**137**]. Остается получить формулы (132) и (133). Первая получается из (138), если положить $g(x)=f_a(x)$, а вторая — если положить $f(x)=f_a(x)$ и перейти к сопряженным величинам.

Переходим к доказательству второй части теоремы. Дан унитарный оператор U и $V=U^{-1}=U^*$. Строим функции:

$$K(a,\ x)=Uf_a(x);\quad L(a,\ x)=U^{-1}f_a(x). \tag{139}$$

Вводя, как и выше, обозначения $\varphi(x)=Uf(x)$ и пользуясь унитарностью U, получим

$$(\varphi,\ f_a)=(Uf,\ f_a)=(f,\ U^{-1}f_a);\ (f,\ f_a)=(U^{-1}\varphi,\ f_a)=(\varphi,\ Uf_a),$$

что и приводит, в силу (139), к (132) и (133). Формулы (137) и (138) имеют место для указанных выше U и V. Полагая в них $f(x)=f_a(x)$ и $g(x)=f_b(x)$, получаем (130) и (131). Теорема полностью доказана.

178. Преобразования Фурье. Для промежутка $0\leqslant x<+\infty$ Ватсон рассматривал ядра вида

$$K(a,\ x)=\frac{\overline{\gamma(ax)}}{x};\quad L(a,\ x)=\frac{\gamma(ax)}{x},$$

причем предполагается, что $\gamma(0)=0$ и $\dfrac{\gamma(x)}{x}\in L_2(0,+\infty)$.

Условия (130) принимают вид

$$\int_0^\infty \frac{\gamma(a,x)\,\overline{\gamma(bx)}}{x^2}\,dx=\min(a,\ b)\quad (a>0;\ b>0),$$

а условие (131) выполняется автоматически.

Мы переходим к рассмотрению преобразования Фурье, для которого основным промежутком является $(-\infty, +\infty)$ и

$$K(a, x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-iax}-1}{-ix};\quad L(a, x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{iax}-1}{ix}. \tag{140}$$

Модуль числителя не превышает двух, и обе функции принадлежат L_2. Легко проверяется условие (131). Проверим условия (130). Они сводятся, как и выше, к одному:

$$I=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(e^{-iax}-1)\,(e^{ibx}-1)}{x^2}\,dx=\begin{cases}\min(|a|, |b|) & \text{при } ab>0,\\ 0 & \text{при } ab\leqslant 0.\end{cases} \tag{141}$$

Легко получить формулу

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2\alpha x}{x^2}\,dx=\pi|\alpha| \quad (\alpha \text{ — вещественно}), \tag{142}$$

применяя дифференцирование по параметру α. Интеграл I легко преобразуется к виду:

$$I=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2\frac{a}{2}x+\sin^2\frac{b}{2}x-\sin^2\frac{a-b}{2}x}{x^2}\,dx,$$

и применяя формулу (142), получим

$$I=\frac{1}{2}(|a|+|b|-|a-b|),$$

откуда и следует формула (141). Таким образом, мы получаем унитарное преобразование Фурье, для которого применим символ T: $F(x)=Tf(x)$, в следующем виде:

$$\int_0^a F(x)\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-iax}-1}{-ix}f(x)\,dx;$$

$$\int_0^a f(x)\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iax}-1}{ix}F(x)\,dx. \tag{143}$$

Преобразованию Фурье можно придать другую форму, которую мы применяли раньше [**II; 160**].

Положим сначала, что $f(x)$ равна нулю вне некоторого конечного промежутка $[-n, +n]$. По условию $f(x)\in L_2$ на $[-n, +n]$

и, тем самым, L_1 на $[-n, +n]$, так что при любом вещественном y существует интеграл

$$F_1(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-n}^{+n} e^{-iyx} f(x)\,dx. \tag{144}$$

Нетрудно доказать, что $F_1(y)$ непрерывна и имеет производные. Мы имеем $|e^{-iyx} f(x)|=|f(x)|$ и можем интегрировать по y по конечному промежутку под знаком интеграла:

$$\int_0^a F_1(y)\,dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-n}^{+n}\frac{e^{-iax}-1}{-ix} f(x)\,dx,$$

Сравнивая эту формулу с (143) и принимая во внимание произвольность a и тот факт, что по условию $f(x)$ равна нулю вне промежутка $[-n, +n]$, можем утверждать, что $F_1(y)$ эквивалентна, $F(y)$ т. е. в рассматриваемом случае преобразование Фурье может быть записано в виде

$$F(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-n}^{+n} e^{-iyx} f(x)\,dx. \tag{145}$$

В общем случае интеграл

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iyx} f(x)\,dx \tag{146}$$

может не иметь смысла, так как из того, что $f(x)$ принадлежит L^2 на промежутке $(-\infty, +\infty)$, не следует, что она принадлежит L_1. Рассмотрим функцию $f_{nm}(x)$, которая равна $f(x)$ при $-n\leqslant x\leqslant m$ и нулю при $x>m$ и $x<-n$. Как мы видели, преобразование Фурье этой функции выражается формулой

$$F_{nm}(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-n}^{m} e^{-iyx} f_{nm}(x)dx. \tag{147}$$

Но $f_{nm}(x)\Rightarrow f(x)$ в L_2 при $n\to\infty$ и $m\to\infty$ и, следовательно, $Tf_{nm}(x)\Rightarrow Tf(x)$. Обозначая предел в среднем (в L_2) символом lim, мы можем записать преобразование Фурье для любой функции из L_2 в виде

$$F(y)=Tf=\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-n}^{m} e^{-iyx} f(x)\,dx. \tag{148}$$

Если функция $f(x)$ принадлежит не только L_2, но и L_1 на промежутке $(-\infty, +\infty)$, то при любом вещественном y существует

интеграл (146), который является пределом интеграла (147) при $n \to \infty$. Но если существует предел в среднем и предел везде, то они совпадают, и следовательно, в рассматриваемом случае преобразование Фурье может быть записано в виде

$$F(y) = Tf = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iyx} f(x)\, dx \quad (f(x) \in L_2 \text{ и } L_1). \tag{149}$$

Все сказанное выше имеет место и для сопряженного (обратного) преобразования. Вместо (148), полагая $m = n$, мы будем иметь

$$f(y) = T^*F = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{+n} e^{iyx} F(x)\, dx \tag{150}$$

и вместо (149):

$$f(y) = T^*F = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iyx} F(x)\, dx \quad (F(x) \in L_2 \text{ и } L_1). \tag{151}$$

Для преобразования Фурье имеет место формула свертывания, которую мы сейчас выведем [ср. **IV; 45**]. Пусть $g(t)$ и $f(t) \in L_2$. Функция $g(x-t)$ при любом вещественном x как функция t принадлежит очевидно, L_2. Определим $T[g(x-t)]$:

$$T[g(x-t)] = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{+a} g(x-t)\, e^{-iyt}\, dt =$$

$$= \lim_{a\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x-a}^{x+a} g(u)\, e^{-iy(x-u)}\, du = e^{-iyx} \lim_{a\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x-a}^{x+a} g(t)\, e^{iyt}\, dt,$$

т. е. $T[g(x-t)] = e^{-iyx}\, T^*[g(t)]$, и, принимая во внимание, что унитарное преобразование не меняет скалярного произведения, можем написать

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t)\, f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iyx} T^*[g(t)]\, \overline{T[\overline{f(t)}]}\, dy,$$

где

$$T^*[g(t)] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{+n} g(t)\, e^{iyt}\, dt;$$

$$\overline{T[\overline{f(t)}]} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{+n} f(t)\, e^{iyt}\, dt = T^*f,$$

и окончательно

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t) f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} G_1(y) F_1(y) e^{-iyx}\, dy, \qquad (152)$$

где $G_1(y) = T^* g$ и $F_1(y) = T^* f$.

Основная теорема совершенно так же может быть доказана и для случая функций многих переменных. При этом унитарное преобразование T определяется формулой

$$Tf =$$

$$= \lim_{m_k \to \infty} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{-m_1}^{+m_1} \dots \int_{-m_n}^{+m_n} f(x_1, \dots, x_n)\, e^{-i(x_1 y_1 + \dots + x_n y_n)}\, dx_1 \dots dx_n \qquad (153)$$

и обратное преобразование — формулой

$$T^*(F) =$$

$$= \lim_{m_k \to \infty} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{-m_1}^{+m_1} \dots \int_{-m_n}^{+m_n} F(y_1, \dots, y_n)\, e^{i(x_1 y_1 + \dots + x_n y_n)}\, dy_1 \dots dy_n. \qquad (154)$$

Возвращаясь к случаю одного переменного, отметим еще некоторые свойства преобразования Фурье. Если в (148) заменить x на $(-x)$, сопоставить с (150) и принять во внимание, что $T^* = T^{-1}$, то получим $T^2 f(x) = f(-x)$ и аналогично $T^{*2} F(y) = F(-y)$. Если $f(x)$ — четная функция, то и преобразование T, даст функцию, эквивалентную четной функции, и мы будем иметь

$$F(y) = \lim_{n \to \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^n f(x) \cos xy\, dx; \quad f(x) = \lim_{n \to \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^n F(y) \cos xy\, dy.$$

Эти формулы дают унитарное преобразование для функций из L_2 на промежутке $(0, \infty)$. Меняя знак и умножая на i (эти операции суть, очевидно, унитарные преобразования), получаем, в случае нечетных функций, следующие взаимно обратные унитарные преобразования на промежутке $(0, \infty)$;

$$F(y) = \lim_{n \to \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^n f(x) \sin xy\, dx; \quad f(x) = \lim_{n \to \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^n F(y) \sin xy\, dy.$$

179. Преобразование Фурье и функции Эрмита. Мы покажем сейчас, что преобразование Фурье имеет четыре собственных значения ± 1, $\pm i$, которым соответствует замкнутая ортонормированная на промежутке $(-\infty, +\infty)$ система собственных функций, а именно это суть функции Эрмита [III$_2$; 156].

Напомним основные формулы, относящиеся к функциям Эрмита. Полиномы Эрмита определяются формулой

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$$

и функции Эрмита

$$\psi_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x).$$

Они ортогональны на промежутке $(-\infty, +\infty)$. Нормированные функции Эрмита будут:

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \sqrt{n!}\, \sqrt[4]{\pi}} \psi_n(x).$$

Они образуют замкнутую ортонормированную систему. Докажем, что $\varphi_n(x)$ есть собственная функция оператора T, соответствующая собственному значению $(-i)^n$, т. е.

$$T\varphi_n = (-i)^n \varphi_n(y). \tag{155}$$

Иначе говоря, нам надо доказать формулу

$$I_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iyx + \frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})\, dx = (-i)^n e^{\frac{y^2}{2}} \frac{d^n}{dy^n}(e^{-y^2}).$$

Интегрируем по частям и принимаем во внимание обращение в нуль внеинтегральных членов:

$$I_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-iyx + \frac{x^2}{2}})\, dx.$$

Умножаем вне знака интеграла на $e^{\frac{y^2}{2}}$ и под знаком на $e^{-\frac{y^2}{2}}$:

$$I_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{y^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{1}{2}(x-iy)^2}\, dx =$$

$$= \frac{(-1)^n i^n}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{y^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \frac{d^n}{dy^n} e^{-\frac{1}{2}(x-iy)^2}\, dx =$$

$$= (-i)^n e^{\frac{y^2}{2}} \frac{d^n}{dy^n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} - ixy}\, dx.$$

Дифференцируя по параметру y, легко показать, что последний интеграл равен $e^{-\frac{y^2}{2}}$, и, таким образом, формула (155) доказана. Учитывая замкнутость системы функций Эрмита, можно показать, что точки $\lambda = \pm 1$ и $\lambda = \pm i$ исчерпывают весь спектр оператора T.

180. Операция умножения. Рассмотрим операцию умножения на независимую переменную на конечном промежутке, причем за левый конец промежутка возьмем $x=0$. Итак, рассмотрим L_2 на конечном промежутке $[0, a]$ и операцию умножения на независимую переменную:

$$Af(x)=xf(x). \tag{156}$$

Мы имеем

$$(Af,\ g)=\int_0^a xf(x)\,\overline{g(x)}\,dx \quad \text{и} \quad (Af, f)=\int_0^a x\,|f(x)|^2\,dx,$$

откуда видно, что A есть самосопряженный оператор, и что его норма не превышает a. Если брать $f(x)$ отличными от нуля лишь в малой окрестности $x=a$, то нетрудно убедиться в том, что норма A в точности равна a. Границы квадратичной формы (Af, f) при условии $\|f\|=1$ равны: $m=0$ и $M=a$. Уравнение для собственных значений и собственных элементов имеет вид $xf(x)=\lambda f(x)$ или $(x-\lambda)f(x)=0$, откуда видно, что $f(x)$ эквивалентна нулю, т. е. собственных значений нет, и спектр чисто непрерывный. Резольвента имеет, очевидно, вид $R_\lambda f(x)=f(x):(x-\lambda)$. Если λ лежит вне промежутка $[0, a]$, то $R_\lambda f(x)\in L_2$. Если же λ лежит на промежутке $[0, a]$, то $R_\lambda f(x)$ не при всяком $f(x)$ принадлежит L_2. При этом оператор $(A-\lambda E)f(x)=(x-\lambda)f(x)$ преобразует L_2 биоднозначно на линеал M_λ таких функций $\varphi(x)=(x-\lambda)f(x)$, что $\varphi(x):(x-\lambda)\in L_2$. Определим спектральную функцию $\mathcal{E}_\lambda$, причем λ надо считать принадлежащим промежутку $[0, a]$. Принимая во внимание, что

$$\lim_{\tau\to+0}\int_{-\infty}^{\lambda}\frac{2\tau i}{(\sigma-x)^2+\tau^2}\,d\sigma=2i\lim_{\tau\to+0}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{\lambda-x}{\tau}+\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}0 & \text{при } \lambda<x,\\ 2\pi i & \text{при } \lambda>x,\end{cases}$$

получаем для любых элементов $f(x)$ и $\psi(x)$ [**144**]:

$$(\mathcal{E}_\lambda f,\psi)=\lim_{\tau\to+0}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\lambda}\left[\int_0^a\frac{2\tau i}{(x-\sigma)^2+\tau^2}f(x)\,\overline{\psi(x)}\,dx\right]d\sigma=\int_0^\lambda f(x)\psi(x)\,dx,$$

откуда следует

$$\mathcal{E}_\lambda f(x)=\begin{cases}f(x) & \text{при } x\leqslant\lambda,\\ 0 & \text{при } x>\lambda.\end{cases} \tag{157}$$

Взяв $f(x)\equiv 1$, получим дифференциальное решение $\pi(x,\lambda)=1$ при $x\leqslant\lambda$ и $\pi(x,\lambda)=0$ при $x>\lambda$. Пользуясь формулой (157) и свойством 11 из [**52**], нетрудно убедиться, что ортогональных к нему решений не имеется.

Рассмотрим более общий самосопряженный оператор

$$Bf(x)=\omega(x)f(x), \tag{158}$$

где $\omega(x)$ — вещественная, измеримая и ограниченная в промежутке $[0, a]$ функция. Уравнение для собственных значений и собственных элементов имеет вид $[\omega(x)-\lambda]f(x)=0$. Пусть K_λ есть множество значений x, удовлетворяющих уравнению $\omega(x)=\lambda$. Если мера K_λ равна нулю, то λ не есть собственное значение. Если мера K_λ больше нуля, то λ есть собственное значение, и любая полная ортогональная на множестве K_λ система функций представляет собой полную систему собственных функций, соответствующих указанному собственному значению, причем вне K_λ эти функции надо считать равными нулю. Если при любом λ мера K_λ равна нулю, то оператор (158) имеет чисто непрерывный спектр. Совершенно аналогично (157) его спектральная функция определяется формулой

$$\mathcal{E}_\lambda f(x)=\begin{cases} f(x) & \text{при } \omega(x)\leqslant\lambda, \\ 0 & \text{при } \omega(x)>\lambda. \end{cases} \tag{159}$$

Все сказанное легко распространяется на случай функций многих переменных. Так, например, для функций $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, принадлежащих L_2 на некотором конечном промежутке $a_s\leqslant x_s\leqslant b_s$ $(s=1, 2, \ldots, n)$, мы можем определить самосопряженный оператор умножения на независимую переменную x_k: $Af=x_kf$. Этот оператор имеет чисто непрерывный спектр на промежутке $a_k\leqslant\lambda\leqslant b_k$ и его спектральная функция определяется следующим образом:

$$\mathcal{E}_\lambda f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\begin{cases} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) & \text{при } x_k\leqslant\lambda, \\ 0 & \text{при } x_k>\lambda. \end{cases} \tag{160}$$

Вернемся к случаю одного переменного. Оператор умножения на независимое переменное на бесконечном промежутке уже не является ограниченным оператором. Мы его рассмотрим в дальнейшем. Если же мы возьмем оператор (158) и будем считать функцию $\omega(x)$ ограниченной на бесконечном промежутке, то получим ограниченный линейный оператор. Итак, возьмем за основу пространство L_2 на промежутке $(-\infty, +\infty)$, и пусть $\omega(x)$ — вещественная, измеримая и ограниченная на этом промежутке функция. При этом формула (158) определяет самосопряженный ограниченный оператор. Если $\omega(x)$ непрерывная в замкнутом промежутке $[-\infty, +\infty]$, то границы оператора совпадают с наименьшим и наибольшим значениями $\omega(x)$.

181. Ядра, зависящие от разности. Пользуясь оператором (158) на промежутке $(-\infty, +\infty)$ и переходя с помощью преобразования T к унитарно-эквивалентным операторам, легко строить ограниченные самосопряженные интегральные операторы с ядром, зависящим от разности.

Наметим схему такого построения. Оператор $B'=T^*BT$, унитарно-эквивалентный (158), выражается, очевидно, формулой

$$B'f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\omega(y)\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,e^{-ity}\,dt\right]e^{ixy}\,dy.$$

Здесь и в дальнейшем вместо $\lim_{n\to\infty}$ мы пишем просто интеграл с бесконечными пределами. Считая, что $\omega(y)$ не только ограничена, но и суммируема на промежутке $(-\infty, +\infty)$ и что $f(t)$ из L_2 также суммируема, сможем переставить порядок интегрирования и получим

$$B'f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(y)\, e^{iy(x-t)}\, dy\right] f(t)\, dt$$

или, вводя функцию

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(y)\, e^{iyu}\, dy = T^*\omega, \tag{161}$$

можем написать оператор B' в виде

$$B'f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t) f(t)\, dt. \tag{162}$$

Спектральная функция B' выражается, как мы знаем, формулой $\mathcal{E}_\lambda' = T^*\mathcal{E}_\lambda T$, где $\mathcal{E}_\lambda$ — спектральная функция B. Если ядро удовлетворяет, как это будет в последующих примерах, условию (97) из [172], т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(u)|\, du < +\infty, \tag{163}$$

то формула (162) применима, очевидно, не только к тем $f(x)$, которые суммируемы на промежутке $(-\infty, +\infty)$, но и ко всему L_2. Рассмотрим примеры применения указанной схемы.

1. Пусть

$$Bf(x) = \frac{2}{1+x^2} f(x). \tag{164}$$

Границами оператора являются: $m = 0$ и $M = 2$. При любом λ из промежутка $[0, 2]$ уравнение $2:(1+x^2) = \lambda$ имеет не более двух корней и оператор (164) имеет чисто непрерывный спектр.

Ядро оператора B' определяется формулой

$$g(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iyu}}{1+y^2}\, dy = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos yu}{1+y^2}\, dy = \sqrt{2\pi}\ e^{-|u|}$$

и

$$B'f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-y|} f(y)\, dy, \tag{165}$$

Полученное ядро удовлетворяет условию (94) из [172]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |K(x, y)]\, dy = \int_{-\infty}^{x} e^{y-x}\, dy + \int_{x}^{\infty} e^{x-y}\, dy = 2.$$

В силу (159), спектральная функция оператора (164) определяется так: $\mathcal{E}_\lambda f(x) = f(x)$ при $2:(1+x^2) \leqslant \lambda$ и $\mathcal{E}_\lambda f(x) = 0$ при $2:(1+x^2) > \lambda$, т. е.

$$\mathcal{E}_\lambda f(x) = \begin{cases} f(x) \text{ при } |x| \geqslant \mu, \\ 0 \text{ при } |x| < \mu, \end{cases}$$

где $\mu = \sqrt{(2-\lambda):\lambda}$ и

$$\mathcal{E}_\lambda' f(x) = T^* \mathcal{E}_\lambda T f(x) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{-\mu} + \int_{\mu}^{+\infty}\right)\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-ity}\, dt\right| e^{ixy} dy,$$

т. е.

$$\mathcal{E}_\lambda' f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-ity}\, dt\right| e^{ixy}\, dy -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\mu}^{+\mu}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{ity}\, dt\right] e^{-ixy}\, dy.$$

Написанные несобственные интегралы с бесконечными пределами надо понимать в смысле среднего квадратичного приближения. Меняя в последнем интеграле порядок интегрирования, возможность чего легко оправдать, и принимая во внимание, что $T^*T = E$, получим

$$\mathcal{E}_\lambda f(x) = f(x) - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\mu(x-t)}{x-t} f(t)\, dt. \tag{166}$$

Оператор B' имеет чисто непрерывный спектр, и $\mathcal{E}_\lambda' f(x)$ должно стремиться (в среднем) к нулю при $\lambda \to 0$, т. е.

$$\lim_{\mu\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\mu(x-t)}{x-t} f(t)\, dt = f(x). \tag{167}$$

Построим дифференциальные решения для оператора (165). Легко видеть что однородное уравнение $B'f(x) = \lambda f(x)$ имеет решения $\cos\mu x$ и $\sin\mu x$ не принадлежащие L_2, т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-y|}\cos\mu y\, dy = \lambda\cos\mu x; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-y|}\sin\mu y\, dy = \lambda\sin\mu x.$$

Умножая обе части на $e^{-\mu}\frac{d\mu}{d\lambda}$ и интегрируя по λ от 0 до λ, или, что то же, по μ от $\mu = \infty$ до μ, получим следующие два дифференциальных решения:

$$\left.\begin{aligned} \pi_1(x,\lambda) &= \int_{\infty}^{\mu} e^{-\mu}\cos\mu x\, d\mu = -e^{-\mu}\left(\frac{\cos\mu x}{1+x^2} - \frac{x\sin\mu x}{1+x^2}\right), \\ \pi_2(x,\lambda) &= \int_{\infty}^{\mu} e^{-\mu}\sin\mu x\, d\mu = -e^{-\mu}\left(\frac{x\cos\mu x}{1+x^2} + \frac{\sin\mu x}{1+x^2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{168}$$

Эти функции уже принадлежат L_2, и из самого способа их построения следует, что они удовлетворяют уравнению (129) и обращаются в нуль при $\lambda = 0$, т. е. при $\mu = \infty$. Множитель $e^{-\mu}$ нами добавлен для того, чтобы иметь возможность интегрировать от $\mu = \infty$ и получить таким образом решения, непрерывные вплоть до $\lambda = 0$. Решения (168) взаимно ортогональны [**176**] в основном промежутке $(-\infty, +\infty)$, так как одно из них есть четная, а другое нечетная функция.

Выписываем формулы (120) и (121) из [**176**]. Простое вычисление дает

$$\rho_1(\lambda) = \rho_2(\lambda) = \frac{\pi}{2} e^{-2\mu},$$

и

$$g_1(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{\infty}^{\mu} e^{-\mu} \cos \mu y \, d\mu \right| \overline{\varphi(y)} dy,$$

$$g_2(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{\infty}^{\mu} e^{-\mu} \sin \mu y \, d\mu \right| \overline{\varphi(y)} dy.$$

Полнота системы решений (168) может быть проверена при помощи формулы (128) из [**176**]. Если мы применим формулу (123) к вещественной функции $\varphi(x)$ из L_2 и функции $\psi(x)$, равной единице на промежутке $[0, x]$ и нулю вне него, то получим после элементарных преобразований

$$\int_0^x \varphi(x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left| \frac{\sin \mu x}{\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \cos \mu y \, dy + \left(\frac{1}{\mu} - \frac{\cos \mu x}{\mu} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \sin \mu y \, dy \right| d\mu,$$

что при некоторых дополнительных предположениях приводит к обычной формуле Фурье. Отметим, что решения (168) должны получаться применением оператора $\mathfrak{S}_\lambda'$ к функциям $\pi_k(x, 2)$, т. е. к $1:(1+x^2)$ и $x:(1+x^2)$, что легко проверить. Если бы мы при интегрировании не добавляли бы множителя $e^{-\mu}$ и стали интегрировать от $\mu = 0$, то получили бы простые дифференциальные решения $\sin \mu x : x$ и $(1 - \cos \mu x):x$, которые теряют смысл при $\lambda = 0$, причем их нормы беспредельно возрастают при $\lambda \to 0$.

Рассмотрим общий случай преобразования (162), считая, что $g(y)$ — вещественная четная функция, удовлетворяющая условию (163). При этом оператор (162) определен во всем L_2 и является ограниченным самосопряженным. Мы можем составить

$$G_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)\, e^{itu}\, du; \quad F_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{itu}\, du, \qquad (169)$$

причем

$$|G_1(t)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |g(u)|\, du,$$

т. е. $G_1(t)$ есть ограниченная функция и $F_1(t) \in L_2$, так что $G_1(t) F_1(t) \in L_2$. Можно доказать, что и в данном случае имеет место формула (122), которую

можем написать в виде

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t)f(t)\,dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} G_1(t)F_1(t)e^{-ixt}\,dt=$$

$$=T[G_1(t)F_1(t)],$$

откуда следует $G_1(t)F_1(t)=T^*[\varphi(x)]$, и, принимая во внимание вторую из формул (169), мы видим, что оператор (162) унитарно эквивалентен оператору умножения на ограниченную функцию $G_1(t)$.

Укажем один тип ядер, приводящихся к ядру, зависящему от разности. Пусть $K(x, y)$ — вещественное симметричное ядро на промежутке $(0, \infty)$, являющееся однородной функцией (-1)-го измерения. Если мы в интегральном операторе с таким ядром

$$\varphi(x)=\int_0^\infty K(x,y)f(y)\,dy \tag{170}$$

введем вместо x и y новые независимые переменные $x=e^s$ и $y=e^t$, а вместо $\varphi(x)$ и $f(y)$ — новые функции $\varphi_1(s)=e^{\frac{s}{2}}\varphi(e^s)$ и $f_1(t)=e^{\frac{t}{2}}f(e^t)$, то получим интегральный оператор

$$\varphi_1(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} K_1(s,t)f_1(t)\,dt$$

с ядром, зависящим от $|s-t|$. Действительно, в силу однородности $K(x, y)=$ $=x^{-1}K\left(1, \frac{y}{x}\right)$, и, полагая $K(1, z)=\omega(z)$, можем написать

$$K_1(s,\ t)=e^{\frac{s+t}{2}}\ e^{-s}\omega(e^{t-s})=e^{\frac{t-s}{2}}\ \omega(e^{t-s}),$$

причем, в силу симметрии $K(x, y)$, последнее выражение есть четная функция $(t-s)$. Принимая во внимание, что $ds=dx:x$, мы видим, что при указанной замене переменных пространство L_2 функций на промежутке $(0, \infty)$ переходит в пространство L_2 функций на промежутке $(-\infty, +\infty)$. Можно непосредственно определить норму оператора (170) при помощи следующей простой теоремы.

Теорема. *Если $K(x, y)$ — неотрицательна, однородна степени (-1) и*

$$\int_0^\infty K(x,1)x^{-\frac{1}{2}}\,dx=\int_0^\infty K(1,y)y^{-\frac{1}{2}}\,dy=k, \tag{171}$$

то

$$|I|=\left|\int_0^\infty\int_0^\infty K(x,y)\,f(x)\,g(y)\,dx\,dy\right|\leqslant k\|f\|\cdot\|g\|. \tag{172}$$

Отметим, что интегралы формулы (171) равны в силу однородности ядра. Переписав подинтегральную функцию в виде $f(x)\sqrt{K}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{4}}g(y)\sqrt{K}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{4}}$

и применяя неравенство Буняковского, получим $|I| \leqslant \sqrt{A}\sqrt{B}$, где

$$A = \int_0^\infty |f(x)|^2 \left| \int_0^\infty K(x, y) \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{2}} dy \right| dx = k \|f\|^2$$

и совершенно аналогично $B = k\|g\|^2$, откуда и следует (172). Из (172) следует, что норма оператора с ядром $K(x, y)$ не превышает k. В частности, если положить $K(x, y) = 1:(x+y)$, то, в силу

$$\int_0^\infty \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{1+x}\, dx = \pi,$$

получим

$$\left| \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f(x)\,\overline{g(y)}}{x+y}\, dx\, dy \right| \leqslant \pi \|f\| \cdot \|g\|.$$

Совершая указанную выше замену переменных, можно показать, что оператор с ядром $1:(x+y)$ имеет непрерывный спектр на промежутке $[0, \pi]$.

182. Слабая сходимость. Мы исследовали раньше слабую сходимость в L_p. Напомним основные результаты для случая $p = 2$. Если рассматривать $L_2(\mathfrak{E})$, где $\mathfrak{E}$ — любое фиксированное измеримое множество, то слабая сходимость $\varphi_n(x) \xrightarrow{\text{сл.}} \varphi(x)$ определяется равенством

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathfrak{E}} \psi(x)\,\varphi_n(x)\, dx = \int_{\mathfrak{E}} \psi(x)\,\varphi(x)\, dx, \tag{173}$$

для любой функции $\psi(x) \in L_2(\mathfrak{E})$. Необходимое и достаточное условие слабой сходимости состоит в следующем: 1) нормы $\|\varphi_n\|$ в $L_2(\mathfrak{E})$ ограничены; 2) условие (173) выполнено на множестве элементов $\psi(x) \in L_2(\mathfrak{E})$, линейная оболочка которого плотна в $L_2(\mathfrak{E})$. В одномерном случае, если $\mathfrak{E}$ есть конечный или бесконечный промежуток, второе условие можно заменить следующим:

$$\lim_{n\to\infty} \int_c^\xi \varphi_n(x)\, dx = \int_c^\xi \varphi(x)\, dx,$$

где c — любое фиксированное число из указанного промежутка и ξ — произвольное число из этого промежутка.

Можно доказать следующее утверждение: если последовательность функций $\varphi_n(x)$ из $L_2(\mathfrak{E})$ слабо сходится к некоторой функции $\varphi(x)$ и почти везде на $\mathfrak{E}$ сходится к некоторой функции $\omega(x) \in L(\mathfrak{E})$, то $\varphi(x)$ и $\omega(x)$ — эквивалентны.

183. Другие осуществления пространства H. Можно указать, кроме l_2 и L_2, и ряд других осуществлений пространства Гильберта, которые находят свое применение. Пусть $\mathfrak{E}$ — некоторое измеримое множество n-мерного пространства и L_2 — пространство функций измеримых и с суммируемым квадратом на $\mathfrak{E}$, причем за основу измерения взята лебегова мера или какая-либо другая нормальная функция множеств. В последнем случае мы будем иметь интеграл Лебега — Стилтьеса. Определим пространство $L_{2,m}$ следующим образом. Элементом $L_{2,m}$ является последовательность m-функций из L_2: $(f_1, f_2, \ldots f_m)$, где $f_k \in L_2 (k = 1, 2, \ldots, m)$. Элемент является нулевым, если каждая из функций f_k эквивалентна нулю. Умножение элемента на число и сложение элементов определяются естественно формулами

$$a(f_1, f_2, \ldots, f_m) = (af_1, af_2, \ldots, af_m),$$
$$(f_1, f_2, \ldots, f_m) + (g_1, g_2, \ldots, g_m) = (f_1 + g_1, f_2 + g_2, \ldots, f_m + g_m)$$

и скалярное произведение формулой

$$(x, y) = \int_{\mathfrak{E}} (f_1\overline{g_1} + f_2\overline{g_2} + \ldots + f_m\overline{g_m})\, d\omega,$$

где $d\omega$ — элемент R_n в случае интеграла Лебега или дифференциал нормальной функции множеств в случае интеграла Лебега — Стилтьеса. Легко проверить, что $L_{2,m}$ есть осуществление сепарабельного пространства Гильберта. Линейный оператор $y = Ax$ в $L_{2,m}$ состоит из m^2 линейных операторов $A_{ik} (i, k = 1, 2, \ldots, m)$ в L_2, при помощи которых составляющие y выражаются через составляющие x:

$$g_i = \sum_{k=1}^{m} A_{ik} f_k.$$

Указанное осуществление пространства Гильберта является осуществлением абстрактного построения пространства Гильберта H по заданным пространствам Гильберта $H_1, H_2, \ldots, H_m$. Элементом x пространства H мы называем последовательность элементов $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, где $x_k \in H_k$. Элемент x является нулевым, если все x_k суть нулевые элементы в $H_k (k = 1, 2, \ldots, m)$. Умножение на число и сложение элементов определяются формулами

$$a(x_1, x_2, \ldots, x_m) = (ax_1, ax_2, \ldots, ax_m),$$
$$(x_1, x_2, \ldots, x_m) + (y_1, y_2, \ldots, y_m) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_m + y_m)$$

и скалярное произведение формулой

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{m} (x_k, y_k).$$

Всякое пространство $W_2^{(l)}(D)$ [112] функций $\varphi(x)$, принадлежащих $L_2(D)$, где D — некоторая область n-мерного пространства, и имеющих обобщенные производные до порядка l, также принадлежащие $L_2(D)$, есть полное гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(\varphi, \psi) = \int_D \left[\varphi(x)\overline{\psi(x)} + \sum_{1 \leqslant \alpha \leqslant l} D^\alpha \varphi(x),\ D^\alpha \overline{\psi}(x) \right] dx, \qquad (174)$$

где суммирование распространяется на все производные до порядка l включительно. При этом предполагается, что область звездна относительно какой-либо своей точки, так что имеет место указанное в [111] свойство обобщенных производных.

Рассмотрим пространство $W_2^{(1)}(D)$. Функции $\varphi(x)$, ему принадлежащие, имеют предельные значения на поверхности S области D (S считается достаточно гладкой). Нетрудно проверить, что множество $\varphi(x) \in W_2^{(1)}(D)$, удовлетворяющих предельному условию

$$\varphi(x)\Big|_S = 0,$$

будет полным гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(\varphi, \psi) = \int_D \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_k} \cdot \overline{\frac{\partial \psi(x)}{\partial x_k}}\, dx. \qquad (175)$$

Полным гильбертовым пространством будет также множество функций из $W_2^{(1)}(D)$ со скалярным произведением (174) и без всякого предельного условия, если отождествить функции, разность которых эквивалентна постоянной, т. е. считать такие функции одним и тем же элементом пространства.

§ 2. Неограниченные операторы

184. Замкнутые операторы. Мы переходим к рассмотрению дистрибутивных операторов, которые могут быть заданы не во всем H и относительно которых не предполагаем ограниченности (конечности нормы). Введем обозначения, которыми будем пользоваться. Пусть A — дистрибутивный оператор, $D(A)$ — область его определения, которую мы всегда будем считать линеалом, и $R(A)$ — область значений A. В силу дистрибутивности A она также — линеал. Если A устанавливает биоднозначное соответствие между элементами $D(A)$ и $R(A)$, то на $R(A)$ определен обратный оператор A^{-1}.

Необходимое и достаточное условие существования A^{-1} состоит в том, что уравнение $Ax = 0$ имеет (на $D(A)$) только нулевое решение [127].

Говорят, что операторы A и B совпадают (равны), и пишут $A = B$,

если совпадают их области определения и на всех элементах этой области $Ax = Bx$. Говорят, что оператор B является расширением оператора A, и пишут $A \subseteq B$, если $D(A)$ входит в $D(B)$ и $Ax = Bx$ для $x \in D(A)$. Символ $A \subseteq B$ содержит и возможность равенства $A = B$. Если при $Ax = Bx$ для $x \in D(A)$ линеал $D(B)$ строго больше $D(A)$, то пишут $A \subset B$. Отметим еще, что $(A + B)x = Ax + Bx$ имеет смысл, если $x \in D(A)$ и $x \in D(B)$, а $(AB)x = A(Bx)$, если $x \in D(B)$ и $Bx \in D(A)$. Поскольку мы не предполагаем оператор везде заданным и ограниченным по норме, то не можем утверждать его непрерывность. Однако, анализируя основные свойства, доказанные нами для ограниченных операторов, можем убедиться в том, что многие из них являются следствием не непрерывности этих операторов, а более слабого их свойства — так называемой замкнутости. К определению и анализу этого весьма важного свойства линейных операторов мы и перейдем.

Определение. *Оператор A называется замкнутым при соблюдении следующего условия: если $x_n \in D(A)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и последовательности x_n и Ax_n имеют пределы: $x_n \Rightarrow x_0$, $Ax_n \Rightarrow y_0$, то $x_0 \in D(A)$ и $Ax_0 = y_0$.*

Если оператор не замкнут, то возникает вопрос о том, имеет ли он замкнутые расширения. Если имеются две последовательности элементов x_n и x'_n из $D(A)$, имеющие одинаковый предел и такие, что Ax_n и Ax'_n имеют различные пределы, то оператор A не допускает, очевидно, замкнутых расширений. Если же при одинаковых пределах для x_n и x'_n мы не имеем ни в каких случаях различных пределов для Ax_n и Ax'_n, то оператор A допускает замкнутые расширения и среди них есть минимальное замкнутое расширение, которое обозначают обычно через $\overline{A}$. Опишем построение $\overline{A}$. Если $x_n \in D(A)$, $x_n \Rightarrow x_0$, и $Ax_n \Rightarrow y_0$ то включаем x_0 в область определения оператора $\overline{A}$ и полагаем $\overline{A}x_0 = y_0$. В силу указанного выше условия, $\overline{A}$ определяется единственным образом. Легко доказать, пользуясь неравенством треугольника, что $\overline{A}$ — замкнутый оператор. Указанная операция расширения A называется замыканием A. Если B любое замкнутое расширение A, то нетрудно видеть, что $\overline{A} \subseteq B$.

Теорема 1. *Если A — замкнутый оператор, то $A + B$, где B — ограниченный на $D(A)$ оператор, также замкнутый оператор; A^{-1}, если он существует, — замкнутый оператор, и множество решений уравнения $Ax = 0$ есть подпространство.*

Доказательство всех утверждений непосредственно следует из определения замкнутости оператора.

Теорема 2. *Если A допускает замыкание и имеет на $R(A)$ ограниченный обратный A^{-1}, то $\overline{A}$ имеет обратный $\overline{A}^{-1}$, он определен на подпространстве $\overline{R(A)}$ и является ограниченным.*

Если $R(A)$ — подпространство, то A^{-1} — замкнутый оператор. В противном случае можно распространить ограниченный оператор A^{-1} с линеала $R(A)$ на подпространство $\overline{R(A)}$. Обозначим полученный таким образом ограниченный оператор через B: $(R(B) = \overline{R(A)})$. Нетрудно видеть, что уравнение $Bx = 0$ на $\overline{R(B)}$ имеет только нулевое решение. В противном случае существовала бы такая последовательность $x_n \in D(A)$, что $x_n \Rightarrow 0$, а $Ax_n \Rightarrow y \neq 0$. Но это противоречит тому, что A допускает замыкание, ибо если принять $x'_n = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то $Ax'_n = 0$. Оператор $A_1 = B^{-1}$ и является, очевидно, замыканием A. Теорема доказана.

Замечание. Мы видим, что в рассматриваемом случае замыкание A однозначно связано с распространением по непрерывности ограниченного оператора A^{-1}.

Следствие. *Если A — замкнутый оператор и на $R(A)$ существует ограниченный обратный оператор A^{-1}, то $R(A)$ — подпространство.*

185. Сопряженный оператор. Начнем с одного простого замечания, а именно отметим, что если элемент z ортогонален линеалу l, плотному в H, то z — нулевой элемент.

Действительно, пусть $(x, z) = 0$, если $x \in l$, и пусть y любой элемент H. В силу того, что l плотен в H, существует последовательность элементов x_n из l такая, что $x_n \Rightarrow y$. По свойству z имеем $(x_n, z) = 0$ и в пределе $(y, z) = 0$, т. е. z ортогонален любому элементу из H, в частности, самому себе, т. е. $(z, z) = \|z\|^2 = 0$, откуда $z = 0$. Если l не плотен, то существует, очевидно, элемент z, ортогональный l.

В дальнейшем мы операторы всегда будем считать дистрибутивными.

Положим, что оператор A определен на линеале $D(A)$, плотном в H. Составим (Ax, y), где $x \in D(A)$ и y — любой элемент H. Существуют такие элементы y, что (Ax, y) при любом x из $D(A)$ может быть представлен в виде

$$(Ax, y) = (x, y^*) \qquad (x \in D(A)), \tag{1}$$

где y^* — некоторый элемент из H. Так, например, если $y = 0$, то $(Ax, 0) = (x, 0)$ для любого x из $D(A)$. Если для некоторого y представление (1) возможно, то в этом представлении y^* единственно. Действительно, если при некотором y мы имели бы $(Ax, y) = (x, y_1^*)$ и $(Ax, y) = (x, y_2^*)$ для $x \in D(A)$, то, вычитая, мы получили бы $(x, y_1^* - y_2^*) = 0$, т. е. $y_1^* - y_2^*$ ортогонален линеалу $D(A)$, откуда следует, что $y_1^* = y_2^*$. Множество элементов y, для которых возможно представление (Ax, y) в виде (1), есть, очевидно, некоторый линеал l^*, и на этом линеале определен дистрибутивный оператор, переводящий y в y^*. Этот оператор называется сопряженным с A

и обозначается символом A^*; так что $y^* = A^*y$ и l^* есть $D(A^*)$, а формула (1) переписывается в виде

$$(Ax, y) = (x, A^*y) \quad (x \in D(A); \quad y \in D(A^*). \tag{2}$$

Из предыдущего рассуждения следует, что для существования A^* необходимо и достаточно, чтобы линеал $D(A)$ был плотен в H. Как мы указали выше, A^* есть дистрибутивный оператор. Для ограниченного оператора A мы имеем прежнее определение A^*. Выясним теперь ряд свойств сопряженного оператора.

Теорема 1. *Оператор A^* — замкнутый.*

Пусть $x_n \in D(A^*)$ и $x_n \Rightarrow x_0$, $A^*x_n \Rightarrow y_0$. По определению Ax^* имеем $(Ax, x_n) = (x, A^*x_n)$, где $x \in D(A)$, и, переходя к пределу, получим $(Ax, x_0) = (x, y_0)$, откуда, в силу определения A^*, следует, что $x_0 \in D(A^*)$ и $A^*x_0 = y_0$. Что и требовалось доказать.

Теорема 2. *Если $D(A)$ и $D(B)$ плотны в H и $A \subset B$, то $B^* \subseteq A^*$.*

Линеал $D(B^*)$ образован такими элементами y, для которых при любых $x \in D(B)$ выполняется равенство $(Bx, y) = (x, y^*)$, причем $y^* = B^*y$. Но, в силу $A \subset B$, из $(Bx, y) = (x, y^*)$ при $x \in D(B)$ следует $(Ax, y) = (x, y^*)$ при $x \in D(A)$, т. е. если $y \in D(B^*)$, то $y \in D(A^*)$ и $B^*y = A^*y = y^*$, а это и значит, что $B^* \subseteq A^*$.

Теорема 3. *Если $D(A)$ плотно в H и A допускает замыкание, то $(\bar{A})^* = A^*$.*

Мы имеем $A \subseteq \bar{A}$ и, следовательно, $(\bar{A})^* \subseteq A^*$, и остается показать, что всякий элемент y из $D(A^*)$ принадлежит и $D(\bar{A}^*)$. По условию $(Ax, y) = (x, A^*y)$ при $x \in D(A)$, и нам достаточно показать, что $(\bar{A}x, y) = (x, A^*y)$ при $x \in D(\bar{A})$. Если $x \in D(\bar{A})$, то существует такая последовательность x_n из $D(A)$, что $x_n \Rightarrow x$ и $Ax_n \Rightarrow \bar{A}x$. По условию $(Ax_n, y) = (x_n, A^*y)$ и в пределе $(\bar{A}x, y) = (x, A^*y)$. Что и требовалось доказать.

Теорема 4. *Если существуют A^* и $(A^*)^* = A^{**}$, то $A \subseteq A^{**}$.*

Линеал $D(A^{**})$ элементов z определяется равенством $(A^*y, z) = (y, z^{**})$ при $y \in D(A^*)$, причем $z^{**} = A^{**}z$. Но из определения A^* мы имеем $(A^*y, z) = (y, Az)$, где $y \in D(A^*)$ и $z \in D(A)$, откуда и следует, что $A \subseteq A^{**}$.

Поскольку, в силу теоремы 1, A^{**} есть замкнутый оператор, то из $A \subseteq A^{**}$ следует, что A допускает замкнутые расширения, т. е. существование A^{**} является достаточным условием того, чтобы A допускал замкнутые расширения. Дальше мы увидим, что это условие и необходимо. Напомним, что существование A^{**} равносильно тому, что $D(A^*)$ плотно в H.

Теорема 5. *Если $D(A)$ и $R(A)$ плотны в H и существует обратный оператор A^{-1}, то существуют операторы A^*, $(A^{-1})^*$, $(A^*)^{-1}$ и*

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*, \tag{3}$$

Существование A^* и $(A^{-1})^*$ непосредственно следует из того, что $D(A)$ и $R(A)$ плотны в H. Пусть $x \in D(A^*)$ и $y \in D(A^{-1}) = R(A)$. Мы имеем

$$(x, y) = (x, AA^{-1}y) = (A^*x, A^{-1}y),$$

откуда следует, что $A^*x \in D((A^{-1})^*)$ и

$$(A^{-1})^*A^*x = x \qquad (x \in D(A^*)). \tag{4}$$

Это показывает, что уравнение $A^*x = 0$ имеет только нулевое решение (в $D(A^*)$), т. е. существует оператор $(A^*)^{-1}$, и, кроме того, из (4) следует

$$(A^*)^{-1} \subseteq (A^{-1})^*. \tag{5}$$

Пусть теперь $x \in D(A)$ и $y \in D((A^{-1})^*)$. Мы имеем

$$(x, y) = (A^{-1}Ax, y) = (Ax, (A^{-1})^*y),$$

откуда $(A^{-1})^*y \in D(A^*)$ и

$$A^*(A^{-1})^*y = y \qquad (y \in D((A^{-1})^*)).$$

Но из этого равенства вытекает, что

$$(A^{-1})^* \subseteq (A^*)^{-1},$$

что совместно с (5) и дает (3). Теорема доказана.

С понятием сопряженного оператора связан вопрос о разрешимости уравнения

$$Ax = y. \tag{6}$$

Замкнутый оператор A с областью $D(A)$, плотной в H, называется нормально разрешимым, если для разрешимости уравнения (6) (не обязательно однозначной) необходимо и достаточно, чтобы y было ортогонально к подпространству решений уравнения

$$A^*z = 0. \tag{7}$$

Теорема 6. *Для нормальной разрешимости замкнутого оператора A с областью $D(A)$, плотной в H, необходимо и достаточно, чтобы $R(A)$ было подпространством.*

Оператор A^* замкнут, и множество решений уравнения (7) есть некоторое подпространство l. Нетрудно видеть, что все элементы l ортогональны $R(A)$. Действительно, если $y \in R(A)$, то $y = Ax$ и $(y, z) = (Ax, z) = (x, A^*z) = (x, 0) = 0$. Тем самым, в силу непрерывности скалярного произведения, l ортогонально подпространству $\overline{R(A)}$. Покажем теперь, что если некоторый элемент w ортогонален $R(A)$, то он принадлежит l. Действительно, из $(Ax, w) = 0$ следует: $(Ax, w) = (x, 0) = (x, A^*w)$, т. е. $A^*w = 0$ и $w \in l$. Из сказанного следует, что все H есть прямая сумма двух ортогональных подпространств

$$H = \overline{R(A)} \oplus l,$$

и для нормальной разрешимости A необходимо и достаточно, чтобы $R(A)$ совпадало с $\overline{R(A)}$, т. е. чтобы $R(A)$ было подпространством,

186. График оператора. Наряду с пространством H рассмотрим пространство $\vec{H}$, элементы которого суть пары $\{x, y\}$ элементов x и y из H, причем умножение на число и сложение определяются в $\vec{H}$ равенствами

$$\alpha\{x, y\} = \{\alpha x, \alpha y\}; \quad \{x_1, y_1\} + \{x_2, y_2\} = \{x_1 + x_2, y_1 + y_2\}, \quad (8)$$

скалярное произведение равенством

$$(\{x_1, y_1\}, \quad \{x_2, y_2\}) = (x_1, x_2) + (y_1, y_2). \quad (9)$$

Нетрудно проверить справедливость всех аксиом. Если A — оператор в H, то множество $F(A)$ элементов $\{x, Ax\}$ пространства $\vec{H}$ при $x \in D(A)$ называют графиком оператора A. Все элементы этого множества однозначно определяются своими абсциссами (первым элементом пары). Обратно, если все элементы некоторого множества F элементов $\vec{H}$ однозначно определяются своими абсциссами, то в H существует оператор (не обязательно дистрибутивный), графиком которого и является множество F. Замкнутость оператора A равносильна, как нетрудно видеть, тому, что множество $F(A)$ замкнуто в $\vec{H}$. Если A — дистрибутивный оператор, определенный на линеале, то $F(A)$ — линеал в $\vec{H}$. В дальнейшем, как и выше, мы будем говорить только о дистрибутивных операторах, определенных на линеалах.

Определим во всем $\vec{H}$ оператор U равенством

$$U\{x, y\} = \{iy, -ix\}. \quad (10)$$

Нетрудно видеть, что U — унитарный оператор и что $U^{-1} = U$. Пусть A — некоторый оператор в H. Составим скалярное произведение некоторого элемента множества $UF(A)$ на какой-либо элемент $\{x, y\}$:

$$(\{iAz, -iz\}, \quad \{x, y\}) = i[(Az, x) - (z, y)] \quad (z \in D(A)). \quad (11)$$

Пусть A — замкнутый в H оператор и $D(A)$ — плотно в H. Докажем формулу разложения $\vec{H}$ на два ортогональных подпространства:

$$\vec{H} = UF(A) \oplus F(A^*). \quad (12)$$

Если элемент $\{x, y\}$ ортогонален $UF(A)$, то из (11) следует, что $(Az, x) = (z, y)$ при $z \in D(A)$, т. е. $x \in D(A^*)$ и $y = A^*x$, или, иначе говоря, $\{x, y\} \in F(A^*)$. Обратно из (11) следует также, что если $\{x, y\} \in F(A^*)$, то элемент $\{x, y\}$ ортогонален $UF(A)$. Для доказательства (12) остается только отметить, что из замкнутости A и A^* следует, что $UF(A)$ и $F(A^*)$ — подпространства пространства $\vec{H}$.

Если оператор A не замкнут, но $D(A)$, как и выше, плотно в H, то вместо (12) имеем

$$\vec{H} = \overline{UF(A)} \oplus F(A^*). \tag{13}$$

Далее разность $\vec{H} \ominus \overline{UF(A)}$ есть множество $\mathfrak{M}$ элементов $\{x, y\}$, ортогональных $\overline{UF(A)}$, или, что то же, $UF(A)$, т. е. в силу (11), множество $\mathfrak{M}$ состоит из пар $\{x, y\}$, удовлетворяющих условию $(Az, x) = (z, y)$ при $z \in D(A)$, и потому существование оператора A^* равносильно тому, что элементы этого множества $\mathfrak{M}$ однозначно определяются абсциссой x.

В силу сказанного справедлива следующая лемма.

Лемма. *Для существования оператора A^* необходимо и достаточно, чтобы элементы множества*

$$\vec{H} \ominus \overline{UF(A)}$$

однозначно определялись своими абсциссами.

Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 1. *Если оператор A определен на плотном множестве и допускает замыкание, то существуют A^*, A^{**} и*

$$A^{**} = \bar{A}. \tag{14}$$

Предположим сначала, что A — замкнутый оператор. Из формулы (12) и $U^{-1} = U$ следует

$$\vec{H} = F(A) \oplus \underrightarrow{UF}(A^*),$$

т. е. элементы множества $F(A) = H \ominus UF(A^*)$ однозначно определяются своими абсциссами, и, в силу леммы, это множество определяет график оператора, сопряженного с A^*, т. е. оператора A^{**}. Но это множество есть $F(A)$, откуда $A^{**} = A$.

Пусть A — не замкнутый оператор, но допускает замыкание. По доказанному выше $(\bar{A})^{**} = \bar{A}$. Но, с другой стороны, [**185**]: $(\bar{A})^{**} = ((\bar{A})^*)^* = (A^*)^* = A^{**}$, откуда и следует (14).

Следствие. *Если существуют A^* и A^{**}, то A допускает замыкание* [**185**] *и из* (14) *следует*

$$(A^{**})^* = A^{***} = A^*. \tag{15}$$

Теорема 2. *Если A — замкнутый оператор и $D(A) = H$, то A — ограниченный оператор.*

Из условий настоящей теоремы и теоремы 1 следует, что $D(A^*)$ плотно в H и $A = A^{**}$. Докажем сначала, что существует такое положительное число N, что $\|A^*x\| \leqslant N\|x\|$ $(x \in D(A^*))$.

Для этого рассмотрим скалярное произведение:

$$(Ay, x) = (y, A^*x) \quad (x \in D(A^*), y \in H).$$

Оно определяет в H некоторый линейный (ограниченный) функционал $l_x(y)$ при фиксированном x из $D(A^*)$. Если $x_n \in D(A^*)$ и $x_n \Rightarrow 0$, то последовательность функционалов $l_{x_n}(y)$ на любом элементе y из H стремится к нулю, и, следовательно, существует такое положительное число N_1, что [**100**]

$$l_{x_n}(y) = |(y, A^*x_n)| \leqslant N_1 \|y\|. \tag{16}$$

Если бы оператор A^* не имел ограниченной нормы, то существовала бы такая последовательность $x_n \in D(A^*)$, для которой $x_n \Rightarrow 0$, а $\|A^*x_n\| \to \infty$. Но это противоречит (16), ибо, полагая в (16), $y = A^*x_n$, получим $\|A^*x_n\|^2 \leqslant N_1 \|A^*x_n\|$, т. е. $\|A^*x_n\| \leqslant N_1$. Итак, $\|A^*\| \leqslant N$ на $D(A^*)$. Но тогда A^* может быть распространен на все H, и, так как A^* есть замкнутый оператор, то $D(A^*) = H$. Оператор $A^{**} = A$ — сопряженный с ограниченным оператором A^* — сам ограничен, и теорема доказана.

Отметим еще, что если λ — число и существует A^*, то существует и $(A - \lambda E)^* = A^* - \bar{\lambda}E$. Если B есть ограниченный линейный оператор, заданный на всем H, а A имеет A^*, то $(A + B)^*$ существует и равен $A^* + B^*$.

187. Симметричные и самосопряженные операторы. В дальнейшем мы будем заниматься главным образом так называемыми симметричными и самосопряженными операторами.

Определение. *Оператор A называется симметричным, если* $D(A)$ плотна в H и

$$(Ax, y) = (x, Ay) \tag{17}$$

для любых x и y из $D(A)$.

Из (17) следует, что любое y из $D(A)$ принадлежит и $D(A^*)$, и $A^*y = Ay$ для таких y, т. е.

$$A \subseteq A^*. \tag{18}$$

Симметричный оператор называется полуограниченным снизу, если существует конечное

$$m_A = \inf (Ax, x) \text{ при } x \in D(A) \text{ и } \|x\| = 1,$$

откуда следует

$$(Ax, x) \geqslant m_A (x, x) \quad (x \in D(A)), \tag{19}$$

и число m_A нельзя заменить большим.

Если $m_A > 0$, то оператор A называется положительно определенным, а если $m_A \geqslant 0$, то A называется положительным [ср. **126**].

Отметим еще, что если линеал $D(A)$ плотен в H и (Ax, x) — вещественно при всех $x \in D(A)$, то A — симметричный оператор, т. е.

$(Ax, y) = (x, Ay)$ при x и $y \in D(A)$. Это доказывается совершенно так же, как теорема 2 из [**124**].

Определение. *Симметричный оператор A называется самосопряженным, если $A^* = A$.*

Из сказанного выше следует, что для доказательства самосопряженности симметричного оператора A достаточно показать следующее: если некоторый элемент $x \in D(A^*)$, то $x \in D(A)$. В силу (18) *симметричный оператор A допускает замыкание и для него имеют место соотношения:*

$$\bar{A} = A^{**} \subseteq A^*; \quad A^{***} = \bar{A}^* = A^*. \tag{20}$$

Самосопряженный оператор, очевидно, замкнут.

Отметим еще, что если λ — вещественное число, то оператор $A - \lambda E$ будет симметричным, если A — симметричен, и самосопряженным, если A — самосопряженный.

Теорема 1. *Если самосопряженный оператор A имеет обратный A^{-1}, то область значений $R(A)$ оператора A плотна в H и A^{-1} есть самосопряженный оператор на $R(A)$.*

Если линеал $R(A)$ не был бы плотен в H, то существовал бы элемент z, отличный от нулевого, ортогональный к $R(A)$, т. е.

$$(Ax, z) = 0 \qquad (x \in D(A)),$$

или, что то же, $(Ax, z) = (x, 0)$. Но это означает, что $z \in D(A^*)$ и $A^*z = Az = 0$ для элемента, отличного от нулевого, что противоречит существованию обратного оператора A^{-1}. Итак, мы доказали, что линеал $R(A)$ плотен в H.

Из теоремы 5 [**185**] следует, что $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$, или, в силу самосопряженности A: $(A^{-1})^* = A^{-1}$, т. е. действительно A^{-1} — самосопряженный оператор.

Теорема 2. *Если для симметричного оператора A существует такое число λ, что как элементы вида $(A - \lambda E)x$, так и элементы вида $(A - \bar{\lambda}E)x$ $(x \in D(A))$ заполняют все H, то A есть самосопряженный на $D(A)$ оператор.*

Нам надо доказать, что если $y \in D(A^*)$, то $y \in D(A)$. Мы имеем $(Ax, y) = (x, y^*)$ при $x \in D(A)$, откуда

$$((A - \bar{\lambda}E)x, y) = (x, y^* - \lambda y).$$

По условию существует по крайней мере один элемент $z \in D(A)$ такой, что $y^* - \lambda y = (A - \lambda E)z$, и мы можем написать, в силу симметричности A,

$$((A - \bar{\lambda}E)x, y) = (x, (A - \lambda E)z) = ((A - \bar{\lambda}E)x, z).$$

Но элементы вида $(A - \bar{\lambda}E)x$ исчерпывают все H, и из последнего равенства следует $y = z \in D(A)$. Что и требовалось доказать.

Следствие. *Если $R(A) = H$ для симметричного оператора A, то A — самосопряженный оператор.*

Для доказательства достаточно применить теорему 2 при $\lambda = 0$.

Мы покажем в [**189**], что имеет место утверждение, в определенном смысле обратное утверждению теоремы 2.

Именно, *если A — самосопряженный оператор и λ — невещественное число, то оператор $A - \lambda E$ имеет ограниченный обратный, определенный на всем H.*

Теорема 3. *Если у симметричного оператора A существует обратный A^{-1}, ограниченный на $R(A)$, то $R(A^*) = H$.*

В силу того, что замыкание симметричного оператора приводит к симметричному оператору, и в силу равенства $A^* = \bar{A}^*$, можно считать при доказательстве, что A — замкнутый оператор. Пользуясь теоремой 2 из [**184**], можем утверждать, что $R(A)$ — подпространство. Нам надо доказать, что для любого фиксированного $y^* \in H$ и при любом $x \in D(A)$ скалярное произведение (x, y^*) можно представить в виде (Ax, y). Обозначив $Ax = z$, получим $(x, y^*) = (A^{-1}z, y^*)$, и, поскольку оператор A^{-1} ограничен на $R(A)$, выражение $(A^{-1}z, y^*)$ можно рассматривать как линейный (ограниченный) функционал $l_{y^*}(z)$ на подпространстве $R(A)$. Его можно представить в виде (z, y) [**123**], где $y \in R(A)$, так что мы получаем $(x, y^*) = (z, y) = (Ax, y)$.

Это равенство и означает, что любое y^* из H представимо в виде A^*y. Что и требовалось доказать.

Следствие. *Если A — самосопряженный, положительно определенный оператор, то A^{-1} существует, ограничен и определен на всем H.*

В силу положительной определенности A, т. е. в силу

$$(Ax, x) \geqslant \alpha(x, x) \quad (\alpha > 0),$$

имеем $\alpha \|x\| \leqslant \|Ax\|$, откуда и следует, что на $R(A)$ существует A^{-1} и его норма $\|A^{-1}\|$ не превосходит α^{-1}. На основании предыдущей теоремы мы можем утверждать, что $R(A^*) = H$, но $R(A^*) = R(A)$, так что A^{-1} определен на всем H.

Заметим, наконец, что имеют место такие факты: для всякого симметрического расширения $\tilde{A}$ симметричного оператора A справедливо соотношение $\tilde{A} \subseteq A^*$; самосопряженный оператор не допускает симметричных расширений.

Оба утверждения непосредственно следуют из определений симметричного и самосопряженного оператора.

Теорема 4. *Если A — замкнутый линейный оператор с плотной в H областью определения, то произведение A^*A есть самосопряженный положительный оператор.*

Положительность A^*A следует из равенства

$$(A^*Ax, x) = (Ax, Ax) \geqslant 0 \qquad (x \in D(A^*A)).$$

Симметричность A^*A на $D(A^*A)$ видна из равенства

$$(A^*Ax, y) = (Ax, Ay) = (x, A^*Ay).$$

Покажем, что уравнение

$$(A^*A + E)\,x = y \tag{21}$$

(однозначно) разрешимо при любом y из H. Рассмотрим пространство $\overrightarrow{H}$, введенное в [**186**], и его разбиение

$$\overrightarrow{H} = F(A) \oplus UF(A^*).$$

Из него следует, что элемент $\{y, 0\}$ однозначно представим в виде

$$\{y, 0\} = \{x, Ax\} + i\{A^*z, -z\}.$$

Следовательно, $y = x + iA^*z$, $\quad z = -iAx$, и поэтому

$$y = x + A^*Ax \quad (x \in D(A^*A)),$$

т. е. уравнение (21) имеет решение при любом $y \in$ H. Докажем, теперь, что $D(A^*A)$ плотно в H. Если предположить обратное, то должен существовать элемент z, отличный от нулевого, ортогональный $D(A^*A)$. В силу сказанного выше, его можно представить в виде $z = (A^*A + E)\,x_0$, где $x_0 \in D(A^*A)$, и при любом $x \in D(A^*A)$:

$$0 = (z, x) = ((A^*A + E)\,x_0, x) = (x_0, (A^*A + E)\,x),$$

и, полагая $x = x_0$, получим

$$\|x_0\|^2 + (x_0, A^*Ax_0) = \|x_0\|^2 + \|Ax_0\|^2 = 0,$$

т. е. $x_0 = 0$, что противоречит предыдущему. Таким образом, $D(A^*A)$ плотно в H и, следовательно, A^*A и $E + A^*A$ — симметричные операторы. В силу того, что $R(A^*A + E) = H$, оператор $A^*A + E$ — самосопряженный (теорема 2). Значит и A^*A также самосопряженный оператор.

188. Примеры неограниченных операторов. Рассмотрим в этом номере различные дифференциальные операторы с точки зрения общей теории операторов. Все они будут неограниченными операторами. Рассмотрение будем вести в комплексном гильбертовом пространстве L_2 комплекснозначных функций вещественного аргумента. Формула интегрирования по частям в нем, играющая в дальнейшем фундаментальную роль, имеет тот же вид, что и в вещественном пространстве, именно, для любых двух функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ из $W_2^{(1)}(D)$ в случае кусочно-гладкой границы S области D имеем [**113**]:

$$\int_D \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i}\,\overline{\psi(x)}\,dx = -\int_D \varphi(x)\,\overline{\frac{\partial \psi(x)}{\partial x_i}}\,dx + \int_S \varphi(x)\,\overline{\psi(x)}\cos(n, x_i)\,dS, \tag{22}$$

где n — внешняя нормаль к S.

Начнем с простейшего дифференциального оператора $D = i\frac{d}{dx}$.

1) Оператор $D = i\frac{d}{dx}$ в пространстве $H = L_2[0,1]$.

Как мы видели выше, в абстрактной теории оператор A задается областью определения $D(A)$ и правилом вычисления A на элементах из $D(A)$.

Взятый нами оператор D можно естественным образом определить на всех функциях из $L_2[0,1]$, имеющих обобщенную производную из $L_2[0,1]$. Однако D, определенный на таком широком классе функций, не будет обладать рядом свойств, которыми обладает D, рассмотренный, например, на финитных гладких функциях. Поэтому мы в этом и в последующих примерах начинаем с того, что рассматриваем сначала дифференциальный оператор на множестве гладких функций, подчиненных каким-либо граничным условиям, изучаем его свойства, как-то: симметричность, положительную определенность, обратимость и др., а затем ставим вопрос о возможности его расширений с сохранением тех или иных свойств первоначального оператора.

Выбор области определения первоначального дифференциального оператора неоднозначен. Чтобы подчеркнуть это, мы в нижеприводимых примерах делаем это по-разному.

Обозначим через A оператор D, рассмотренный на множестве $\dot{C}^{(1)}[0,1]$ всех финитных непрерывно дифференцируемых на $[0,1]$ функциях (см. обозначения в [113]). Значение A на φ из $D(A)$ вычисляется по формуле

$$A\varphi = i\frac{d\varphi(x)}{dx}, \tag{23}$$

и $D(A)$ плотно в $L_2[0,1]$.

Оператор A симметричен, ибо из (23) следует, что для $\varphi(x)$ и $\psi(x) \in D(A)$

$$(A\varphi, \psi) = \int_0^1 i\frac{d\varphi(x)}{dx}\overline{\psi(x)}\,dx = -\int_0^1 i\varphi(x)\frac{\overline{d\psi(x)}}{dx}\,dx = (\varphi, A\psi).$$

Из симметричности A следует, что A допускает замыкание, имеет сопряженный и $A \subseteq \overline{A} \subseteq A^*$. Выясним, из каких функций состоят $D(\overline{A})$ и $D(A^*)$. Пусть $\varphi_m(x) \in D(A)$ и $\varphi_m(x) \Rightarrow \varphi(x)$, $A\varphi_m = \psi_m(x) \Rightarrow \psi(x)$, тогда $\varphi(x) \in D(\overline{A})$ и $\psi(x) = A\varphi(x)$.

Из теории обобщенных производных следует, что это замыкание A расширяет $D(A)$ до $D(\overline{A}) = \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}[0,1]$ [113].

Каждая $\varphi(x)$ из $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}[0,1]$ есть абсолютно непрерывная функция, равная нулю на концах и имеющая обобщенную первую производную из $L_2[0,1]$. Можно было бы показать, что любая такая функция входит в $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}[0,1]$. Оператор $\overline{A}$ на $\varphi(x)$ из $D(\overline{A})$ вычисляется по формуле (23) с той лишь разницей, что на этот раз $\frac{d}{dx}$ означает не классическое, а обобщенное дифференцирование. Исследуем теперь, из каких функций состоит $D(A^*)$. Функция $\varphi(x) \in D(A^*)$, если есть такая функция $\psi(x) \in L_2[0,1]$, что $(A\omega, \varphi) = (\omega, \psi)$, т. е.

$$\int_0^1 i\frac{d\omega(x)}{dx}\overline{\varphi(x)}\,dx = \int_0^1 \omega(x)\overline{\psi(x)}\,dx \tag{24}$$

для всех $\omega(x)$ из $D(A)$. Но это означает [109], что $\varphi(x)$ имеет обобщен-

ную производную $\frac{d\varphi(x)}{dx}$, равную $-i\psi(x)$, т. е. что $\varphi(x) \in W_2^{(1)}[0,1]$ и $i\frac{d\varphi(x)}{dx} = \psi(x)$, причем любая $\varphi(x)$ из $W_2^{(1)}[0,1]$ удовлетворяет (24) с $\psi(x) = i\frac{d\varphi(x)}{dx}$. Тем самым мы показали, что $D(A^*) = W_2^{(1)}[0,1]$ и $A^*\varphi = i\frac{d\varphi(x)}{dx}$. Ясно, что $W_2^{(1)}[0,1]$ шире, чем $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}[0,1]$. Легко убедиться, что A^* не симметричен на $D(A^*)$.

Покажем, что на $R(A)$ существует ограниченный обратный (откуда будет следовать, что $R(A)$ есть подпространство). Пусть $\varphi(x) \in D(A)$. Тогда

$\varphi(x) = \frac{1}{i}\int_0^x A\varphi(x)\,dx$, и, в силу неравенства Буняковского, имеем

$$\|\varphi\|^2 = \int_0^1 \left|\int_0^x A\varphi(x)\,dx\right|^2 dx \leqslant \|A\varphi\|^2.$$

Отсюда следует, что A^{-1} на $R(A)$ существует и $\|A^{-1}\| \leqslant 1$.

Выясним возможность различных самосопряженных расширений оператора A. Мы знаем, что для любого симметричного расширения $\tilde{A}$ имеет место соотношение $A \subset \tilde{A} \subseteq A^*$, т. е. при таком расширении мы должны добавлять к $D(A)$ элементы из $D(A^*)$, и на этих добавляемых элементах z считать $\tilde{A}z = A^*z$. При этом надо заботиться о том, чтобы не потерять при расширении симметрии оператора.

Представим H в виде:

$$H = R(\bar{A}) \oplus U.$$

В силу теоремы из [185], U состоит из нулей $u(x)$ сопряженного оператора. Но $A^*u = i\frac{du(x)}{dx}$, так что $u(x) = \text{const}$. Попробуем расширить A так, чтобы $R(A)$ расширилась до H и чтобы оператор остался при этом симметричным. Для этого надо взять все решения уравнений $A^*\varphi = \text{const}$ и среди них выбрать те, на которых оператор D симметричен.

Очевидно $\varphi(x)$ имеет вид $\varphi(x) = C_1(x + C)$. Подберем постоянные C и C_1 так, чтобы D на $\varphi(x)$ был симметричен, т. е. чтобы

$$0 = (D\varphi,\varphi) - (\varphi,D\varphi) = i\varphi(x)\,\overline{\varphi(x)}\Big|_{x=0}^{x=1} = i|C_1|^2[(1+C)(1+\bar{C}) - C\,\bar{C}] =$$
$$= i|C_1|^2[1 + C + \bar{C}].$$

Отсюда имеем C_1 — произвольное, а $C = -\frac{1}{2} + \beta i$, где β — произвольное вещественное число. Присоединим к $D(\bar{A})$ элементы $\varphi(x) = C_1(x - \frac{1}{2} + \beta i)$, где β — фиксированное вещественное число, а C_1 — произвольное комплексное. Полученное множество обозначим через $D(\tilde{A})$, а оператор D на нем — через $\tilde{A}$. Легко проверить, что $\tilde{A}$ есть симметричное расширение A.

С другой стороны, в силу самого построения $\tilde{A}$ его область значений есть все H, поэтому $\tilde{A}$ является самосопряженным расширением A [187]. Добавляемые

элементы такого расширения удовлетворяют, как легко видеть, граничному условию

$$\varphi(1) = \frac{\frac{1}{2}+3i}{-\frac{1}{2}+3i}\varphi(0), \text{ т. е. } \varphi(1) = e^{i\theta}\varphi(0) \quad (0<\theta<2\pi). \quad (25)$$

Этому же условию удовлетворяют, очевидно, и элементы $D(\bar{A})$. С другой стороны, для любого элемента $\varphi(x)$ из $D(A^*)$, удовлетворяющего условию (25), имеет место тождество

$$\int_0^1 i\frac{d\varphi(x)}{dx}\overline{\omega(x)}\,dx = \int_0^1 \varphi(x)\overline{i\frac{d\omega(x)}{dx}}\,dx$$

при произвольной $\omega(x)$ из $D(\tilde{A})$. Поэтому такое $\varphi(x) \in D(\tilde{A}^*)$ и $\tilde{A}^*\varphi = i\frac{d\varphi(x)}{dx}$. Но $\tilde{A}$ есть самосопряженное расширение A, т. е. $\tilde{A}^* = \tilde{A}$ и, следовательно, $D(\tilde{A})$ состоит из всех элементов из $D(A^*)$, удовлетворяющих условию (25). Из сказанного следует, что $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}[0,1] = D(\bar{A})$ состоит из всех абсолютно непрерывных функций $\varphi(x)$, равных нулю на концах и имеющих $\frac{d\varphi(x)}{dx}$ из $L_2[0,1]$.

Мы построили всевозможные самосопряженные расширения A, для которых $R(\tilde{A}) = H$. Каждое из этих расширений определяется произвольным вещественным параметром β, или что то же, вещественным числом θ, изменяющимся в пределах $0<\theta<2\pi$.

Выясним еще возможность таких самосопряженных расширений A' оператора A, при которых $R(A') = R(\bar{A})$.

Если такое расширение существует, то для него $D(\bar{A})$ дополнится лишь нулями оператора A^*, т. е. элементами $\varphi(x) = \text{const}$. Оператор D на множестве $D(A) + \text{const}$ есть симметрический оператор A', являющийся расширением $\bar{A}$. Множество $D(A')$ можно охарактеризовать тем, что оно состоит из всех тех элементов $\varphi(x) \in D(A^*)$, для которых $\varphi(0) = \varphi(1)$.

Проверим, что $D(A'^*) = D(A')$. Пусть $\varphi(x) \in D(A'^*)$, т. е. пусть при любой $\omega(x) \in D(A')$ имеем

$$0 = (A'\omega,\varphi) - (\omega,\psi). \quad (26)$$

Но $D(A'^*) \subseteq D(A^*)$ и потому

$$(A'\omega,\varphi) = \int_0^1 i\frac{d\omega(x)}{dx}\overline{\varphi(x)}\,dx = \int_0^1 \omega(x)\,i\overline{\frac{d\varphi(x)}{dx}}\,dx + i\omega(x)\overline{\varphi(x)}\Big|_{x=0}^{x=1},$$

откуда, в силу $\omega(x) \in D(A')$ и (26), имеем $\psi(x) = i\frac{d\varphi(x)}{dx}$ и $\varphi(0) = \varphi(1)$, т. е. $\varphi(x) \in D(A')$. Тем самым мы доказали, что A' есть самосопряженное расширение A. Если сравним граничное условие $\varphi(0) = \varphi(1)$, которому подчиняются функции из $D(A')$, с условием (25) для полученных ранее расширений, то увидим, что оно соответствует значению $\theta = 0$ (или, что то же, значению $\beta = \infty$).

Таким образом, мы перечислили все возможные самосопряженные расширения оператора A. На ряду с ними A имеет и различные несамосопряженные расширения, но мы ими заниматься не будем.

Самосопряженные расширения $\tilde{A}$, соответствующие $0 \neq 0$, имеют ограниченные обратные $\tilde{A}^{-1}$. Действительно, если $\tilde{A}\varphi = i\dfrac{d\varphi(x)}{dx} = 0$, то $\varphi(x) = C$ и, в силу (4), должно быть $C = e^{i\theta}C$, т. е. $C = 0$. Отсюда следует, что $\tilde{A}^{-1}$ существует, а так как он определен на всем H и есть самосопряженный оператор, то он и ограничен [186].

Оператор же A' не имеет обратного на $R(A') = R(\bar{A})$.

2) Оператор $\mathrm{D} = i\dfrac{d}{dx}$ в пространстве $H = L_2(-\infty, +\infty)$.

Обозначим через A дифференциальный оператор D, определенный на непрерывно дифференцируемых финитных функциях $\varphi(x)$. Легко проверяется, что он симметричен и что $D(A)$ плотно в H.

Исследуем сопряженный оператор A^*. Функция $\psi(x) \in D(A^*)$, если для всякой $\varphi(x) \in D(A)$ выполняется соотношение

$$\int_{-\infty}^{+\infty} i\frac{d\varphi(x)}{dx}\overline{\psi(x)}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\overline{\psi^*(x)}\,dx, \tag{27}$$

причем $\psi^*(x) \in L_2(-\infty, +\infty)$ и $\psi^*(x) = A^*\psi(x)$. Но из первого определения обобщенной производной непосредственно следует, что $D(A^*)$ есть множество $W_2^{(1)}(-\infty, +\infty)$, т. е. множество функций из $L_2(-\infty, +\infty)$, абсолютно непрерывных на каждом конечном промежутке, имеющих производную из $L_2(-\infty, +\infty)$, и $\psi^*(x) = D\psi(x)$. Покажем, что если $\varphi(x) \in W_2^{(1)}(-\infty, +\infty)$, то $\varphi(x) \to 0$ при $x \to \pm\infty$. Из очевидной формулы

$$|\varphi(x)|^2 = |\varphi(a)|^2 + \int_a^x \frac{d\varphi(x)}{dx}\overline{\varphi(x)}\,dx + \int_a^x \varphi(x)\overline{\frac{d\varphi(x)}{dx}}\,dx$$

и того факта, что $\varphi(x)$ и $\dfrac{d\varphi(x)}{dx} \in L_2(-\infty, +\infty)$, следует, что $|\varphi(x)|$ имеет конечный предел при $x \to \pm\infty$ и что этот предел должен быть равен нулю.

Исследуем теперь A^{**}. Функция $\psi(x) \in D(A^{**})$, если для всякой $\varphi(x) \in D(A^*)$ выполняется соотношение (27), причем $\psi^*(x) \in L_2(-\infty, +\infty)$ и $\psi^*(x) = A^{**}\psi(x)$.

Принимая во внимание, что $A \subset A^*$ и $A^{**} \subseteq A^*$, мы можем утверждать, что всякая функция $\psi(x)$ из $D(A^{**})$ должна принадлежать $D(A^*)$, т. е. $W_2^{(1)}(-\infty, +\infty)$, и $A^{**}\psi(x) = \mathrm{D}\psi(x)$. С другой стороны, легко проверить соотношение (27), считая, что $\varphi(x) \in D(A^*)$, $\psi(x) \in W_2^{(1)}(-\infty, +\infty)$ и $\psi^*(x) = i\dfrac{d\psi(x)}{dx}$. Действительно, интегрирование по частям на любом конечном промежутке дает:

$$\int_a^b i\frac{d\varphi(x)}{dx}\overline{\psi(x)}\,dx = \int_a^b \varphi(x)\overline{i\frac{d\psi(x)}{dx}}\,dx + i\varphi(x)\overline{\psi(x)}\Big|_{x=a}^{x=b}.$$

Принимая во внимание, что $\varphi(x)$ и $\psi(x) \to 0$ при $x \to \pm\infty$, в пределе при $a \to +\infty$ и $b \to -\infty$, придем к соотношению (27). Из сказанного следует, что $A^{**} = A^*$, т. е. A^* есть самосопряженный оператор. Но мы знаем, что $A^{**} = A$, и, следовательно, замыкание оператора A приводит к самосопряженному оператору A^*.

3) Оператор $D = i\frac{d}{dx}$ в пространстве $H = L_2(0, +\infty)$.

Пусть A — оператор D на всех непрерывно дифференцируемых функциях, финитных на бесконечности и в окрестности $x = 0$. При помощи рассуждений, совершенно аналогичных вышеприведенным, можно показать, что A^* есть оператор D, $D(A^*)$ есть множество функций $\varphi(x)$ из H, абсолютно непрерывных на любом конечном промежутке $[0, a]$ с производной из $L_2(0, +\infty)$ и $D(\bar{A}) = D(A^{**})$ есть множество $\varphi(x)$ функции из $D(A^*)$, удовлетворяющих условию $\varphi(0) = 0$, причем $\tilde{A}\varphi(x) = i\frac{d\varphi(x)}{dx}$. Тем самым $D(A^*)$ шире $D(\bar{A})$, и $\bar{A}$ не есть самосопряженный оператор, ибо $(\bar{A})^* = A^*$. Покажем, что $\bar{A}$ не имеет самосопряженных расширений. Пусть $\tilde{A}$ такое расширение. Имеем: $\tilde{A}\varphi = i\frac{d\varphi(x)}{dx}$, ибо $\tilde{A} \subseteq A^*$, и $D(\tilde{A})$ должно быть шире $D(\bar{A})$. Но мы сейчас докажем, что если $\varphi(x) \in D(\tilde{A})$, то $\varphi(x) \in \overline{D(A)}$, и это противоречие и докажет, что A не имеет самосопряженных расширений.

Пусть $\varphi(x) \in D(\tilde{A})$ и тем самым $\varphi(x) \in D(A^*)$. Формула $(\tilde{A}\varphi, \varphi) = (\varphi, \tilde{A}\varphi)$ приводит нас к равенству

$$\int_0^{+\infty} i\frac{d\varphi}{dx}\overline{\varphi(x)}\,dx = \int_0^{+\infty} \varphi(x)\,\overline{i\frac{d\varphi(x)}{dx}}\,dx,$$

из которого, в силу $\varphi(x) \to 0$ при $x \to +\infty$, следует, что $\varphi(0) = 0$, т. е. $\varphi(x) \in D(\bar{A})$.

4) Оператор $-\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + q(x)\varphi(x)$ в пространстве $L_2(0,1)$.

Пусть $q(x)$ — вещественная непрерывная на промежутке $[0,1]$ функция, и A — оператор $\left[-\frac{d^2}{dx^2} + q(x)\right]$ на множестве $D(A)$ всех функций $\varphi(x)$, со следующими свойствами: $\varphi(x)$ и $\frac{d\varphi(x)}{dx}$ абсолютно непрерывны при $x \in [0,1]$, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ и $\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} \in L_2(0,1)$. Нетрудно проверить, что A — симметричный оператор и $D(A)$ — плотно в H.

Мы будем предполагать, что $q(x)$ таково, что уравнение $-y'' + q(x)y = 0$ не имеет решения, равного нулю при $x = 0$ и $x = 1$, кроме тривиального $y \equiv 0$. Докажем, что при этом $R(A) = H$, откуда следует, что A — самосопряженный оператор.

Пусть $f(x) \in L_2(0,1)$. Надо доказать, что существует функция $\varphi(x)$ из $D(A)$, для которой $A\varphi(x) = f(x)$.

Введем функцию

$$\psi(x) = -\int_0^x \left[\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right] dt + x\int_0^1 \left[\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right] dt,$$

которая, очевидно, принадлежит $D(A)$, причем $-\psi''(x) = f(x)$, и пусть $\omega(x)$ решение уравнения

$$-\omega''(x) + q(x)\omega(x) = -q(x)\psi(x),$$

удовлетворяющее условию $\omega(0) = \omega(1) = 0$. Такое решение (с непрерывными производными до второго порядка) существует [IV; 173]. Нетрудно непосредственно проверить, что функция $\varphi(x) = \psi(x) + \omega(x)$ принадлежит $D(A)$ и

$A\varphi(x) = f(x)$. Что и требовалось доказать. Таким образом, A — самосопряженный оператор. Оператор A имеет ограниченный обратный [IV; 173]

$$A^{-1} f(x) = -\int_0^1 G(x, t) f(t)\, dt,$$

где $G(x, t)$ — функция Грина оператора A при предельном условии $\omega(0) = \omega(1) = 0$. Указанное выше условие относительно решений уравнения $-y'' + q(x) y = 0$, равных нулю, при $x = 0$ и $x = 1$, выполнено, если, например, $q(x) \geqslant 0$.

5) Оператор $\mathrm{D}^k = (i)^k \dfrac{\partial^k}{\partial x_{l_1}, \ldots, dx_{l_k}}$ в пространстве $H = L_2(D)$, где D — ограниченная область в R_n.

Пусть A есть оператор D^k на всех k-раз непрерывно дифференцируемых финитных в D функциях $\varphi(x)$. Известно, что $D(A)$ плотно в H, и легко проверить с помощью (123) из [109], что A симметричен. Область определения сопряженного оператора A^* будет состоять из всех функций $\varphi(x) \in L_2(D)$, имеющих внутри D обобщенную производную вида D^k, принадлежащую $L_2(D)$ (это следует из определения обобщенной производной). Ясно, что $D(A^*)$ шире $D(A)$. На $R(A)$ существует ограниченный, обратный. Действительно, пусть $\varphi(x) \in D(A)$. Продолжим ее нулем вне D и заключим D в куб: $-a \leqslant x_i \leqslant a$. Тогда $\varphi(x)$ можно представить в виде

$$\varphi(x) = \int_{-a}^{x_{l_1}} \ldots \int_{-a}^{x_{l_k}} (-i)^k A\varphi(x_1, \ldots, x_n)\, dx_{l_1} \ldots dx_{l_k},$$

откуда, используя неравенство Буняковского, легко получить

$$\|\varphi\|_{L_2(D)} \leqslant C \|A\varphi\|_{L_2(D)},$$

так что A^{-1} существует на $R(A)$, $\|A^{-1}\| \leqslant C$ и $R(\overline{A})$ есть подпространство H. Как будет доказано дальше в теории расширений операторов, для таких симметрических операторов существует по крайней мере одно самосопряженное расширение.

6) Оператор $-\Delta = -\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ в пространстве $H = L_2(D)$, где D — ограниченная область в R_n.

Пусть A есть оператор $-\Delta$, определенный на всех дважды непрерывно дифференцируемых финитных в D функциях, т. е. пусть $D(A) = \dot{C}^{(2)}(D)$. Множество $\dot{C}^{(2)}(D)$ плотно в H. Если $\varphi(x) \in D(A)$, то

$$\int_D -\Delta\varphi(x)\, \overline{\varphi(x)}\, dx = \int_D \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_k} \right|^2 dx, \tag{28}$$

т. е. A — положительный, а, следовательно, и симметричный оператор. Кроме того, известно [114], что для всех $\varphi(x) \in D(A)$

$$\|\varphi\|_{L_2(D)} \leqslant C \left[\int_D \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_k} \right|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \tag{29}$$

с одной и той же постоянной C, зависящей лишь от размеров D. Из (28) и (29) следует

$$\| \varphi \|_{L_2(D)} \leqslant C^2 \| A\varphi \|_{L_2(D)}, \tag{30}$$

т. е. A положительно определен, и на $R(A)$ существует ограниченный обратный A^{-1} с $\| A^{-1} \| \leqslant C^2$ и $R(\overline{A}) = \overline{R(A)}$.

Как будет показано впоследствии, такие операторы A допускают самосопряженные расширения, причем каждому расширению соответствует некоторая краевая задача для оператора Лапласа. Здесь же мы выясним структуру $D(\overline{A})$ и $D(A^*)$. Возьмем $\varphi(x) \in D(A)$. Интегрированием по частям легко проверить справедливость равенства

$$\int_D | \Delta\varphi(x) |^2 \, dx = \int_D \sum_{i;\, k=1}^{n} \left| \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x_i \, \partial x_k} \right|^2 dx, \tag{31}$$

из которого, если учесть (28) и (29), следует

$$\| \varphi \|_{W_2^2(D)} \leqslant C_1 \| \Delta\varphi(x) \|_{L_2(D)}, \tag{32}$$

где C_1 — некоторая постоянная, зависящая лишь от области. Пусть теперь $\varphi_m(x) \in D(A)$, $\varphi_m(x) \Rightarrow \varphi(x)$ и $A\varphi_m(x) \Rightarrow \overline{A}\varphi(x)$. Из (32) следует, что тогда $\varphi_m(x)$ сходятся к $\varphi(x)$ в норме $W_2^{(2)}(D)$, так что $\varphi(x)$ будет принадлежать $W_2^{(2)}(D)$ и $A\varphi = -\Delta\varphi(x)$. Такое пополнение $D(A)$ мы обозначали через $\overset{\circ}{W}{}_2^{(2)}(D)$ [113], так что $D(\overline{A}) = \overset{\circ}{W}{}_2^{(2)}(D)$.

Пусть теперь $\varphi(x) \in D(A^*)$. Это значит, что существует функция $\psi(x) \in H$ такая, что тождество

$$\int_D -\Delta\omega(x) \, \overline{\varphi(x)} \, dx = \int_D \omega(x) \, \overline{\psi(x)} \, dx \tag{33}$$

справедливо при всех $\omega(x) \in D(A)$. Построим ньютонов потенциал

$$u(x) = \frac{1}{k_n} \int_D \frac{\psi(y)}{| x - y |^{n-2}} \, dy, \tag{34}$$

где k_n — площадь единичной сферы в R_n.

Известно [II; 201], что если $\psi(y)$ — непрерывно дифференцируемая функция, то $u(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в D и

$$-\Delta u(x) = \psi(x). \tag{35}$$

Мы покажем сейчас, что если $\psi(y) \in L_2(D)$, то $u(x) = W_2^{(2)}(D)$. Для этого продолжим $\psi(y)$ нулем вне D, построим усреднения $\psi_\rho(y)$ и рассмотрим функции

$$u_\rho(x) = \frac{1}{k_n} \int_{R_n} \frac{\psi_\rho(y)}{| x - y |^{n-2}} \, dy.$$

Они дважды непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют уравнению

$$-\Delta u_\rho(x) = \psi_\rho(x) \tag{36}$$

При $\rho \to 0$ $u_\rho(x)$ и $\dfrac{\partial u_\rho(x)}{\partial x_k}$ будут сходиться к $u(x)$ и $\dfrac{\partial u(x)}{\partial x_k}$ в норме $L_2(D_1)$ [115], где D_1 — любая ограниченная область. Будем считать, что D лежит строго внутри D_1. В силу (36) можно утверждать, что для $v(x) = u_\rho(x) - u_{\rho'}(x)$ верно равенство

$$\int\limits_{R_n} |\Delta v(x)|^2 \zeta(x)\, dx = \int\limits_{R_n} |\psi_\rho(x) - \psi_{\rho'}(x)|^2 \zeta(x)\, dx, \tag{37}$$

где $\zeta(x)$ есть фиксированная неотрицательная, дважды непрерывно дифференцируемая функция, равная единице в D, нулю вне D_1 и удовлетворяющая всюду условию (легко показать, что такие функции существуют):

$$\zeta^2_{x_k}(x) \leqslant C_2(x). \tag{38}$$

Используя формулу интегрирования по частям, преобразуем (37) к виду

$$\int\limits_{D_1} |\psi_\rho(x) - \psi_{\rho'}(x)|^2 \zeta(x)\, dx = \int\limits_{D_1} \sum_{i,k=1}^{n} \left|\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x_i\, \partial x_k}\right|^2 \zeta(x)\, dx +$$

$$+ \int\limits_{D_1} \left[\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \overline{\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x_i\, \partial x_k}} \frac{\partial \zeta(x)}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \overline{\Delta v(x)} \frac{\partial \zeta(x)}{\partial x_i} \right] dx.$$

Отсюда, используя неравенство $|2ab| \leqslant \varepsilon |a|^2 + \dfrac{1}{\varepsilon} |b|^2$, справедливое при любом $\varepsilon > 0$, и неравенство (38), найдем

$$\int\limits_{D_1} \sum_{i,k=1}^{n} \left|\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x_i\, \partial x_k}\right|^2 \zeta(x)\, dx \leqslant \int\limits_{D_1} |\psi_\rho(x) - \psi_{\rho'}(x)|^2 \zeta(x)\, dx +$$

$$+ C_3 \int\limits_{D_1} \left[\varepsilon \sum_{i,k=1}^{n} \left|\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x_i\, \partial x_k}\right|^2 \zeta(x) + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{\partial v(x)}{\partial x_k}\right|^2 \right] dx.$$

Возьмем $\varepsilon = 1 : 2C_3$. Тогда из последнего неравенства будет следовать

$$\frac{1}{2} \int\limits_{D_1} \sum_{i,k=1}^{n} \left|\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x_i\, \partial x_k}\right|^2 \zeta(x)\, dx \leqslant \int\limits_{D_1} |\psi_\rho(x) - \psi_{\rho'}(x)|^2 \zeta(x)\, dx +$$

$$+ 2C_3^2 \int\limits_{D_1} \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{\partial v(x)}{\partial x_k}\right|^2 dx,$$

откуда мы можем заключить, что при ρ и $\rho' \to 0$ функция $v(x) = u_\rho(x) - u_{\rho'}(x)$ вместе со своими производными первого и второго порядков будет стремиться к нулю в норме $L_2(D)$.

Следовательно, предельная для $u_\rho(x)$ функция $u(x)$, определяемая интегралом (34), будет принадлежать $W_2^2(D)$ и будет удовлетворять уравнению (35). Поэтому для нее верно тождество

$$\int\limits_D -\Delta \omega(x) \overline{u(x)}\, dx = \int\limits_D \omega(x) \overline{\psi(x)}\, dx$$

при любой $\omega(x) \in D(A)$. Вычитая его из (33), получим для $\varphi(x)$ тождество

$$\int_D -\Delta\omega(x)\,\overline{[\varphi(x)-u(x)]}\,dx=0.$$

В [119] нами доказано, что из этого тождества следует гармоничность функции $\varphi(x)-u(x)$, причем для любой гармонической в D функции, соответствующее тождество верно.

Таким образом, для $\varphi(x) \in D(A^*)$ мы получили следующее представление:

$$\varphi(x)=\frac{1}{k_n}\int_D \frac{\psi(y)}{|x-y|^{n-2}}\,dy+v(x),$$

где $\psi(x) \in L_2(D)$, а $v(x)$ гармоническая в D функция, и так как $\varphi(x)$ и интеграл принадлежат $L_2(D)$, то и $v(x) \in L_2(D)$. Легко проверить, что любая функция $\varphi(x)$ такого вида входит в $D(A^*)$ и

$$A^*\varphi=-\Delta\varphi(x)=\psi(x).$$

7) Оператор $-\Delta=-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ в пространстве $H=L_2(R_n)$. Мы рассмотрим сначала не сам оператор $-\Delta$, а один из операторов $-\Delta+\lambda E$ с каким-либо вещественным λ. Возьмем λ положительным, например, равным единице. Это гарантирует нам, как мы увидим ниже, наличие ограниченного обратного у $-\Delta+E$ и облегчит тем самым, решение задачи о самосопряженных расширениях оператора.

Итак, пусть A есть оператор $-\Delta+E$, определенный на дважды непрерывно дифференцируемых финитных функциях $\varphi(x)$. Известно, что $D(A)$ плотно в H, и легко видеть, что $-\Delta+E$ симметричен. Из рассмотрений предыдущего примера следует, что элементы из $D(\bar{A})$ и $D(A^*)$ имеют обобщенные производные до второго порядка включительно, квадратично суммируемые по любой конечной области D из R_n. Оператор A^* вычисляется на $D(A^*)$ как дифференциальный оператор $-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x_k^2}+\varphi(x)$.

Покажем, что $D(\bar{A})=W_2^{(2)}(R_n)$. Во-первых, $D(\bar{A}) \subset W_2^{(2)}(R_n)$, ибо если $\varphi_m(x) \in D(A)$ и $\varphi_m(x) \Rightarrow \varphi(x)$, $A\varphi_m(x) \Rightarrow \bar{A}\varphi(x)$, то из (28) и (31) следует, что

$$\int_{R_n}\left[\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial(\varphi_l(x)-\varphi_m(x))}{\partial x_k}\right|^2+\sum_{i,k=1}^{n}\left|\frac{\partial^2(\varphi_l(x)-\varphi_m(x))}{\partial x_i\,\partial x_k}\right|^2\right]dx=$$

$$=\int_{R_n}\left[-\Delta(\varphi_l(x)-\varphi_m(x))\,\overline{(\varphi_l(x)-\varphi_m(x))}+|\Delta(\varphi_l(x)-\varphi_m(x))|^2\right]dx \leqslant$$

$$\leqslant\|A(\varphi_l-\varphi_m)\|_{L_2(R_n)}\cdot\|\varphi_l-\varphi_m\|_{L_2(R_n)}+\|A(\varphi_l-\varphi_m)\|^2_{L_2(R_n)}\to 0$$

при l и $m\to\infty$.

Докажем обратное включение, т. е. что $W_2^{(2)}(R_n) \subseteq D(\bar{A})$. Пусть $\varphi(x) \in W_2^{(2)}(R_n)$. Строим последовательность функций $\psi_m(x)=\varphi_{\frac{1}{m}}(x)\,\zeta_m(x)$,

где $\varphi_{\frac{1}{m}}(x)$ есть усреднение $\varphi(x)$ с радиусом $\frac{1}{m}$, а функции $\zeta_m(r)$ — дважды непрерывно дифференцируемые финитные функции, определенные при $r \geqslant 0$ следующими свойствами:

$$\zeta_m(r) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leqslant r \leqslant m, \\ 0 & \text{при } r \geqslant m+1, \\ \zeta_{m-1}(r-1) & \text{при } m \leqslant r \leqslant m+1, \end{cases}$$

а $\zeta_m(r) \leqslant 1$ есть гладкая неотрицательная функция, равная нулю при $r \geqslant 1$. Каждая $\psi_m(x) \in D(A)$. Докажем, что $\psi_m(x) \to \varphi(x)$ при $m \to \infty$ в норме $W_2^{(2)}(R_n)$. Разбивая в выражении нормы $W_2^2(R_n)$ интегрирование по R_n на два: по части, где $|x| \leqslant l$, и части, где $|x| \geqslant l$, получаем

$$\|\varphi - \psi_m\|_{W_2^2(R_n)} = \|\varphi - \psi_m\|_{W_2^2(|x| \leqslant l)} + \|\varphi - \psi_m\|_{W_2^2(|x| \geqslant l)}.$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Второе слагаемое может быть сделано $\leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ для всех m, если взять l достаточно большим. Это следует из $\|\varphi\|_{W_2^2(R_n)} < +\infty$ из построения функций $\zeta_m(x)$ и свойств усреднений функции $\varphi(x)$ и ее обобщенных производных. Зафиксируем l указанным образом. При $m > l$ имеем $\psi_m(x) = \varphi_{\frac{1}{m}}(x)$ при $|x| \leqslant l$ и $\varphi_{\frac{1}{m}}(x) \to \varphi(x)$ в норме $W_2^2(|x| \leqslant l)$.

Отсюда следует, что при всех достаточно больших m имеет место неравенство

$$\|\varphi - \psi_m\|_{W_2^2(|x| \leqslant l)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \text{ и } \|\varphi - \psi_m\|_{W_2^2(R_n)} \leqslant \varepsilon.$$

Из сказанного вытекает включение $W_2^2(R_n) \subseteq D(\overline{A})$, и тем самым можно считать доказанным, что $D(\overline{A}) = W_2^2(R_n)$. Покажем, что $\overline{A} = A^*$, т.е., что $\overline{A}$ — самосопряженный оператор. Для этого достаточно прозерить, что область значений оператора $\overline{A}$ есть все $L_2(R_n)$. Будем для простоты считать $n = 3$. Возьмем любую финитную непрерывно дифференцируемую функцию $\varphi(x) \in L_2(R_n)$. Функция

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{R_n} \frac{e^{-|x-y|}\varphi(y)}{|x-y|}\, dy,$$

как известно [IV; 231], дважды непрерывно дифференцируема, удовлетворяет уравнению $-\Delta u + u = \varphi$ и экспоненциально убывает при $|x| \to \infty$ вместе со своими производными, так что заведомо $u(x) \in W_2^2(R_n)$. Следовательно, $(u(x) \in D(\overline{A}))$, $Au = \varphi$ и область значений $R(\overline{A})$ оператора $\overline{A}$ плотна в H.

Покажем, что на $R(A)$ существует ограниченный обратный A^{-1}. Из этого уже будет следовать, что $R(\overline{A})$ есть подпространство и потому $R(\overline{A}) = H$.

Итак, пусть $v(x) \in D(A)$ и $-\Delta v(x) + v(x) = \psi(x)$. Умножим это равенство на $\overline{v(x)}$ и проинтегрируем по R_n, после чего преобразуем его с помощью интегрирования по частям:

$$\int_{R_n} \psi(x)\,\overline{v(x)}\, dx = \int_{R_n} \left[\sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial v(x)}{\partial x_k} \right|^2 + |v(x)|^2 \right] dx.$$

Отсюда, в силу неравенства Коши, имеем

$$\|v\|_{L_2(R_n)} \leqslant \|\psi\|_{L_2(R_n)} = \|Av\|_{L_2(R_n)},$$

т. е. действительно A^{-1} существует на $R(A)$ и $\|A^{-1}\| \leqslant 1$.

Этим заканчивается доказательство того, что $A = A^*$, или, что то же, того, что замыкание оператора A приводит к его (единственному) самосопряженному расширению, причем $D(\overline{A}) = W_2^2(R_n)$. Это же имеет место и для $-\Delta = A - E$, т. е. оператор $-\Delta$ самосопряжен на $W_2^2(R_n)$. Однако, в отличие от $-\Delta + E$, оператор $-\Delta$ не имеет ограниченного обратного (нетрудно показать, что обратный для $-\Delta$ существует, но не ограничен).

189. Спектр самосопряженного оператора. Как и в [128], доказывается, что собственные значения самосопряженного оператора вещественны, а собственные элементы, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны, и самосопряженный оператор порождает ортонормированную систему собственных элементов. Отметим, что, в силу замкнутости самосопряженного оператора, собственные элементы, соответствующие фиксированному собственному значению (включая нулевой элемент), образуют подпространство.

Определения регулярной точки оператора и точки спектра те же, что и в [129]. Докажем теперь для самосопряженного оператора теоремы, аналогичные теоремам из [129].

Теорема 1. *Если λ — не собственное значение самосопряженного оператора A, то линеал $R(A - \lambda E)$ плотен в H.*

Если λ — вещественное число, то $A - \lambda E$ — самосопряженный оператор, и утверждение теоремы есть следствие теоремы I из [187]. Пусть λ — невещественное число. Если бы мы имели $\overline{R(A - \lambda E)} \neq H$, то существовал бы ненулевой элемент z, ортогональный к $R(A - \lambda E)$, т. е.

$$((A - \lambda E)x, z) = 0 \text{ или } ((A - \lambda E)x, z) = (x, 0).$$

Отсюда следует, что $z \in D(A)$ и $(A - \lambda E)^* z = (A - \bar{\lambda} E) z = 0$, т. е. $Az = \bar{\lambda} z$, что нелепо, ибо A может иметь только вещественные собственные значения.

Теорема 2. *Для того чтобы λ была регулярной точкой спектра самосопряженного оператора A необходимо и достаточно существование такого положительного числа p, что*

$$\|(A - \lambda E)x\| \geqslant p\|x\| \quad (x \in D(A)). \tag{39}$$

Невещественные значения λ суть регулярные точки самосопряженного оператора.

Доказательство то же, что и в [129], с той лишь разницей, что вместо непрерывности A надо воспользоваться его замкнутостью.

Как и в [129], получаем из доказанного следующее следствие: *точки спектра образуют замкнутое множество.*

Дальше мы увидим, что всякий самосопряженный оператор имеет по крайней мере одну точку спектра.

Невещественные значения λ суть регулярные точки самосопряженного оператора A, поэтому дальше будем говорить лишь о вещественных λ. В этом случае оператор $(A - \lambda E)$ — самосопряженный,

Пусть λ — не есть собственное значение. Если $R(A-\lambda E)=H$, то замкнутый оператор $(A-\lambda E)^{-1}$, определенный на всем H, ограничен, т. е. λ — регулярная точка.

Наоборот, если $R(A-\lambda E)$ не есть H, то из теоремы 3 [**187**] следует, что $(A-\lambda E)^{-1}$ есть неограниченный на $R(A-\lambda E)$ оператор. Мы приходим к следующей теореме:

Теорема 3. *Пусть вещественное λ — не есть собственное значение. Если $R(A-\lambda E)=H$, то λ — регулярная точка, и если линеал $R(A-\lambda E)$ не все H (этот линеал плотен в H), то λ — точка спектра.*

Рассмотрим теперь тот случай, когда λ есть собственное значение, и обозначим P_λ — подпространство соответствующих собственных элементов (включая нулевой элемент). Имеется единственный оператор, для которого $P_\lambda=H$, это — оператор умножения на число λ: $Ax=\lambda x$ при всех $x\in H$. В остальных случаях подпространство P_λ — правильная часть H.

Покажем теперь, что P_λ есть множество элементов x, ортогональных линеалу $(A-\lambda E)z$ $(z\in D(A))$.

Действительно, из $((A-\lambda E)z,x)=0$ следует, в силу самосопряженности $(A-\lambda E)$, что $x\in D(A)$ и $(A-\lambda E)x=0$, и, наоборот, если $x\in D(A)$ и $(A-\lambda E)x=0$, то $((A-\lambda E)z,x)=0$. Отсюда следует, что подпространство Q_λ, дополнительное к P_λ,

$$H=P_\lambda\oplus Q_\lambda$$

есть замыкание линеала элементов y, определяемых формулой:

$$y=(A-\lambda E)z \qquad (z\in D(A)),$$

т. е. $Q_\lambda=\overline{R(A-\lambda E)}$. Представим элемент z из $D(A)$ в виде $z=z_1+z_2$, где $z_1\in P_\lambda$ и $z_2\in Q_\lambda$. Из определения P_λ следует, что $z_1\in D(A)$ и $Az_1=\lambda z_1$, а потому и $z_2=z-z_1\in D(A)$, т. е. проекция линеала $D(A)$ на Q_λ есть линеал из $D(A)$. Обозначим его через $D_\lambda(A)$. Это есть, очевидно, линеал тех элементов Q_λ, которые принадлежат $D(A)$. На этом линеале определен оператор A, и нетрудно видеть, что если $y\in D_\lambda(A)$, то $Ay\in Q_\lambda$. Действительно, по условию $(y,x)=0$, если $x\in D(A)$ и удовлетворяет уравнению $Ax=\lambda x$ и потому $(Ay,x)=(y,Ax)=(y,\lambda x)=0$. В силу сказанного выше мы можем рассматривать оператор A как оператор в подпространстве Q_λ, которое мы можем считать новым пространством H. Обозначим этот оператор через A_λ, так что A_λ определен на $D_\lambda(A)$ и $A_\lambda y=Ay$, если $y\in D_\lambda(A)$. Вместо $D_\lambda(A)$ мы можем писать $D(A_\lambda)$, следуя обычному обозначению.

Из одной общей теоремы, которую мы докажем в [**191**], следует, что $D(A_\lambda)$ плотно в Q_λ и что A_λ есть самосопряженный в Q_λ оператор. Значение λ, по самому построению Q_λ, не может быть собственным значением A_λ, но может быть как регулярной точкой A_λ так и точкой спектра этого оператора. В первом случае $(A_\lambda-\lambda E)z$

($z \in D(A_\lambda)$) преобразует $D(A_\lambda)$ в полное пространство Q_λ, а во втором — в линеал плотный в Q_λ. Вместо $(A_\lambda - \lambda E)z$ мы можем писать $(A - \lambda E)z$. Для всех z из P_λ мы имеем $(A - \lambda E)z = 0$.

Сказанное выше приводит к следующей классификации значений λ.

I. Регулярные значения λ, для которых характерным является тот факт, что $R(A - \lambda E) = H$, и существует ограниченный обратный оператор $(A - \lambda E)^{-1}$.

II. Значения λ, для которых $R(A - \lambda E)$ есть линеал, отличный от H, и $\overline{R(A - \lambda E)} = H$. На $R(A - \lambda E)$ существует обратный неограниченный оператор $(A - \lambda E)^{-1}$. Обычно говорят, что такие значения λ принадлежат непрерывному спектру.

III. Значения λ, которые являются собственными значениями A, и для которых A_λ имеет λ точкой регулярности. Для таких значений $R(A - \lambda E)$ есть подпространство, не совпадающее с H. Про такие значения λ обычно говорят, что они принадлежат только точечному спектру.

IV. Значения λ, которые являются собственными значениями A и для которых A_λ имеет λ точкой спектра. Для таких значений $R(A - \lambda E)$ не есть подпространство, а есть линеал, замыкание которого $\overline{R(A - \lambda E)}$ есть подпространство, не совпадающее с H. Про такие значения λ говорят, что они одновременно принадлежат точечному и непрерывному спектру.

В спектре самосопряженного оператора A могут и отсутствовать некоторые типы значений λ. Но для ограниченных самосопряженных операторов мы доказали, что спектр будет содержать по крайней мере одну точку. Нетрудно видеть, что то же имеет место и для неограниченного самосопряженного оператора A. Действительно, положим, что при всяком вещественном λ оператор $(A - \lambda E)$ имеет ограниченный обратный. Мы имеем очевидное равенство

$$\frac{1}{\lambda}(A - \lambda E)A^{-1} = \frac{1}{\lambda} - A^{-1} \qquad (\lambda \neq 0),$$

причем обе части представляют собой самосопряженный ограниченный оператор. Из указанного предположения и написанного равенства следует, что $R(\mu - A^{-1})$ при любом вещественном μ есть все H, а это противоречит тому, что ограниченный оператор A^{-1} имеет точки спектра.

Дальше будет показано, что у неограниченного самосопряженного оператора имеется бесчисленное множество точек спектра, расположенных вне любого фиксированного промежутка оси λ.

Если λ не собственное значение A, то оператор

$$R_\lambda = (A - \lambda E)^{-1}, \tag{40}$$

как мы знаем, называется резольвентой оператора A. Он определен на $R(A - \lambda E)$ и преобразует этот линеал биоднозначно в $D(A)$.

Из определения обратного оператора следует, что **если** $x \in D(A)$ и $R_\lambda x = 0$, то $x = 0$ (ср. [**144**]). Как и для ограниченных операторов имеет место формула

$$R_\lambda^* = R_{\bar\lambda}. \tag{41}$$

Если λ — вещественное число, то она следует из самосопряженности R_λ. При комплексном λ она вытекает из формул $(A - \lambda E)^* = A - \bar\lambda E$ и $[(A - \lambda E)^{-1}]^* = [(A - \lambda E)^*]^{-1}$. Если λ и μ — регулярные значения, то совершенно так же, как и для ограниченных операторов, доказывается формула [**144**]:

$$R_\mu - R_\lambda = (\mu - \lambda) R_\mu R_\lambda. \tag{42}$$

190. Случай точечного спектра. Говорят, что самосопряженный оператор A имеет *точечный спектр*, если ортонормированная система его собственных элементов полна в H. Пусть x_k $(k = 1, 2, \ldots)$ — эта система, каким-либо образом пронумерованная, и λ_k — соответствующие собственные значения: $Ax_k = \lambda_k x_k$. По условию любой элемент $x \in H$ представим своим рядом Фурье

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k, \tag{43}$$

Теорема 1. *Для того чтобы x принадлежал $D(A)$, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |a_k|^2, \tag{44}$$

и если это условие выполнено, то

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k x_k. \tag{45}$$

Если $x \in D(A)$, то коэффициент Фурье элемента Ax есть $(Ax, x_k) = (x, Ax_k) = (x, \lambda_k x_k) = \lambda_k a_k$, откуда вытекает сходимость ряда (44). Положим, наоборот, что ряд (44) сходится, и докажем, что $x \in D(A)$. Из сходимости ряда (44) следует, что мы можем построить элемент

$$x' = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k x_k, \tag{46}$$

и, обозначая через y_n отрезок ряда (43), имеем $y_n \in D(A)$, $y_n \Rightarrow x$ и $Ay_n \Rightarrow x'$, откуда, в силу замкнутости оператора A, следует, что $x \in D(A)$ и $Ax = x'$. Теорема доказана.

Мы видели раньше, что вполне непрерывный самосопряженный оператор имеет чисто точечный спектр, причем при любой нумерации собственных значений $\lambda_k \to 0$ при $k \to \infty$. Укажем, еще на один важный случай самосопряженного оператора, имеющего точечный спектр.

Пусть A — самосопряженный оператор, имеющий вполне непрерывный обратный A^{-1}. Из определения обратного оператора следует, что уравнение $A^{-1}x=0$ не имеет решений, кроме тривиального $x=0$. Вполне непрерывный самосопряженный оператор A^{-1} имеет точечный спектр, и его собственные значения μ_k $(k=1, 2, \ldots)$ можно пронумеровать в порядке не возрастающего абсолютного значения: $|\mu_1|\geqslant|\mu_2|\geqslant\ldots$, причем, в силу сказанного выше, $\mu_k\neq 0$ при всех значениях k. Обозначая через x_k соответствующие собственные элементы, образующие ортонормированную систему (полную в H), можем написать $A^{-1}x_k=\mu_k x_k$, откуда непосредственно следует, что $Ax_k=\lambda_k x_k$, где $\lambda_k=\frac{1}{\mu_k}$. Принимая во внимание сказанное в [**136**], мы приходим к следующей теореме.

Теорема 2. *Если самосопряженный оператор A имеет вполне непрерывный обратный A^{-1}, то A имеет точечный спектр, все его собственные значения имеют конечный ранг и во всяком конечном промежутке имеется лишь конечное число собственных значений A.*

Из сказанного следует, что собственные значения λ_k такого оператора A можно пронумеровать в порядке неубывающего абсолютного значения $|\lambda_1|\leqslant|\lambda_2|\leqslant\ldots$, причем $|\lambda_k|\to+\infty$ при $k\to\infty$.

У оператора с точечным спектром спектру могут принадлежать не только собственные значения. Например, если λ есть точка сгущения λ_k, то она обязательно принадлежит спектру, ибо регулярные точки образуют открытое множество. Докажем, что остальные значения λ не принадлежат спектру.

Теорема 3. *Если самосопряженный оператор A имеет точечный спектр, то всякое вещественное значение λ, отличное от собственных значений и не являющееся точкой сгущения этих значений, есть регулярная точка A.*

По условию существует такое положительное число m, что $|\lambda_k-\lambda|\geqslant m$ при всех k. Пусть $x\in D(A)$. Из (43) и (45) следует

$$\|(A-\lambda E)x\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k-\lambda|^2|a_k|^2\geqslant m^2\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2=m^2\|x\|^2,$$

откуда и следует регулярность точки λ. Иногда говорят, что в рассматриваемом случае A имеет чисто точечный спектр.

Если самосопряженный оператор A не имеет собственных значений, то говорят, что он имеет чисто непрерывный спектр. В этом случае мы имеем представление любого элемента x из H уже не в виде ряда Фурье (43), но в виде суммы интегралов [ср. **149**]. В дальнейшем покажем, что для всякого самосопряженного оператора можно отделить точечный спектр от чисто непрерывного спектра, аналогично тому, как мы в [**189**] отделили одно собственное значение от остальной части спектра. Для этого нам надо ввести некоторые новые понятия. Они представляют и самостоятельный интерес в теории операторов.

191. Инвариантные подпространства и приводимость оператора. Прежде чем вводить понятие инвариантного подпространства, выясним понятие коммутирования ограниченного заданного на всем H оператора B с оператором A, заданным не во всем H.

Определение. *Говорят, что ограниченный везде заданный оператор B коммутирует с оператором A при соблюдении следующих условий: 1) если $x \in D(A)$, то и $Bx \in D(A)$; 2) если $x \in D(A)$, то $BAx = ABx$.*

Если A — везде заданный ограниченный оператор, то первое условие отпадает, и мы имеем прежнее определение коммутирующих операторов.

Теорема 1. *Для того чтобы B коммутировал с самосопряженным оператором A, необходимо, чтобы он коммутировал с резольвентой R_λ при всяком регулярном значении λ и достаточно чтобы он коммутировал с R_λ хотя бы при одном регулярном λ.*

Коммутирование B и R_λ (при регулярном λ) есть обычное коммутирование, которое мы определили раньше ($BR_\lambda x = R_\lambda Bx$ при $x \in H$). Пусть B коммутирует с A, λ — любое регулярное значение и y — любой элемент H. При этом $R_\lambda y$ и $BR_\lambda y \in D(A)$ и, кроме того, имеем

$$ABR_\lambda y = BAR_\lambda y. \tag{47}$$

Но $(A - \lambda E) R_\lambda y = y$, откуда $AR_\lambda y = (\lambda R_\lambda + E)y$, и (47) переписывается в виде

$$ABR_\lambda y = \lambda BR_\lambda y + By; \text{ т. е. } (A - \lambda E) BR_\lambda y = By. \tag{48}$$

Применяя к обеим частям последнего равенства R_λ, получаем $BR_\lambda y = R_\lambda By$, и необходимость доказана.

Положим теперь, что существует такое регулярное значение λ, что $BR_\lambda y = R_\lambda By$. Из вида правой части следует, что обе части из $D(A)$ при любом $y \in H$. Если y пробегает все H, то $x = R_\lambda y$ пробегает все $D(A)$, и из указанного равенства, следует, что если $x \in D(A)$, то и $Bx \in D(A)$. Применяя к обеим частям упомянутого равенства оператор $(A - \lambda E)$, получим (48) и (47), а (47) можно переписать в виде $ABx = BAx$ при $x \in D(A)$, и достаточность также доказана.

Следствие. *Если B коммутирует с R_λ при каком-либо одном регулярном значении λ, то он коммутирует с R_λ и при всех регулярных значениях λ.*

Переходим теперь к определению инвариантного подпространства.

Определение. *Подпространство L называется инвариантным подпространством для оператора A при соблюдении следующего условия: если $x \in D(A)$ и $x \in L$, то и $Ax \in L$.*

Если L инвариантное для A подпространство и $D_L(A)$ есть линеал элементов x, принадлежащих одновременно $D(A)$ и L, то A индуцирует в L оператор A_1, который определен на $D_L(A)$ и равен A. Подпространство L можно рассматривать как пространство Гильберта

(оно может быть и конечномерным). Как мы в дальнейшем увидим, существенно, чтобы не только L, но и дополнительное подпространство $H \ominus L$ было инвариантным для A, и чтобы проекция любого элемента $x \in D(A)$ на L также принадлежала $D(A)$. Это приводит нас к следующему определению.

Определение. *Говорят, что подпространство L приводит оператор A при соблюдении следующих условий: 1) L и $M = H \ominus L$ суть инвариантные для A подпространства; 2) если $x \in D(A)$, то и проекция x в L принадлежит $D(A)$.*

В дальнейшем через P_K будем обозначать проектор в подпространство K. Мы имеем

$$x = P_L x + P_M x. \tag{49}$$

Если $x \in D(A)$, то из определения следует, что $P_L x \in D(A)$, и тем самым $P_M x \in D(A)$, т. е. если L приводит A, то и M приводит A. Пусть A_1 и A_2 — те операторы, которые оператор A индуцирует в L и M. При этом для любого $x \in D(A)$ имеем

$$Ax = A_1(P_L x) + A_2(P_M x), \tag{50}$$

и мы расчленили, таким образом, оператор A на операторы A_1 и A_2, действующие в L и M.

Теорема 2. *Для того чтобы подпространство L приводило оператор A, необходимо и достаточно, чтобы P_L и A коммутировали.*

Начнем с доказательства необходимости. Пусть L приводит A. При этом из определения приводимости следует, что если $x \in D(A)$, то и $P_L x \in D(A)$. Остается доказать, что $P_L A x = A P_L x$ при $x \in D(A)$. Мы имеем формулу (50), причем $A_1(P_L x) \in L$ и $A_2(P_M x) \in M$. Применяя к обеим частям (50) оператор P_L, получим

$$P_L A x = A_1(P_L x) = A P_L x,$$

что и требовалось доказать.

Переходим к доказательству достаточности. Из условия коммутирования P_L и A следует, что если $x \in D(A)$, то и $P_L x \in D(A)$. Остается доказать, что если $x \in D(A)$ и $x \in L$, то $Ax \in L$ и аналогично для M. Первое непосредственно следует из формулы $P_L A x = A P_L x$, левая часть которой очевидно принадлежит L, а правую можно представить в виде $A P_L x = Ax$, ибо $x \in L$. То же верно и для M, ибо если A коммутирует с P_L, то A коммутирует и с P_M.

Перейдем теперь к тому случаю, когда A — самосопряженный оператор.

Теорема 3. *Для того чтобы инвариантное для самосопряженного оператора A подпространство L приводило этот оператор, достаточно потребовать, что из $x \in D(A)$ следует $P_L x \in D(A)$.*

Нам надо показать, что из условий теоремы следует, что если $y \in D(A)$ и $y \in M$, то и $Ay \in M$.

Для такого элемента y и любого $x \in D(A)$ имеем $(P_L Ay, x) = (y, AP_L x)$. Но по условию $AP_L x \in L$, откуда $(y, AP_L x) = 0$ и тем самым $(P_L Ay, x) = 0$ при всяком $x \in D(A)$. Но линеал $D(A)$ плотен в H, откуда $P_L Ay = 0$, т. е. $Ay \in M$; что и требовалось доказать.

Обозначим, как и выше, через $D_L(A)$ проекцию $D(A)$ в L, т. е. линеал тех элементов L, на которых определен оператор A, и через A_L — оператор, который индуцируется оператором A в L.

Теорема 4. *Если подпространство L приводит самосопряженный оператор A, то $D_L(A)$ плотно в L и A_L есть самосопряженный в L оператор.*

Пусть y — заданный элемент L и $\varepsilon > 0$ — заданное число. Надо показать, что существует такой элемент $x \in D_L(A)$, что $\|y - x\| \leqslant \varepsilon$. Линеал $D(A)$ плотен в H, и потому существует такой элемент $z \in D(A)$, что $\|y - z\| \leqslant \varepsilon$. Тем более $\|P_L y - P_L z\| \leqslant \varepsilon$. Но $P_L y = y$ и $P_L z \in D_L(A)$, и первое утверждение теоремы доказано. Остается показать, что если для любого $x \in D_L(A)$ имеется равенство

$$(A_L x, y) = (x, y^*), \tag{51}$$

где y и $y^* \in L$, то $y \in D_L(A)$ и $y^* = A_L y$. Мы можем положить $x = P_L z$, где z — любой элемент $D(A)$, и получим $(AP_L z, y) = (P_L z, y^*)$ или, в силу теоремы 2 $(P_L Az, y) = (P_L z, y^*)$, откуда $(Az, P_L y) = (z, P_L y^*)$ и $(Az, y) = (z, y^*)$, ибо y и $y^* \in L$. Из последнего равенства, в виду самосопряженности A, следует, что $y \in D_L(A)$ и $y^* = Ay = A_L y$, и теорема доказана. Этой теоремой мы пользовались в [189].

Пусть L_k $(k = 1, 2, \ldots)$ попарно ортогональные подпространства и L их ортогональная сумма [139]:

$$L = L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots$$

Теорема 5. *Если попарно ортогональные подпространства L_k приводят замкнутый оператор A, то и их ортогональная сумма приводит A.*

Будем доказывать для случая бесконечного числа слагаемых. Нам надо доказать, что операторы P_L и A коммутируют. Пусть Q_n — проектор, равный сумме первых n из P_{L_k}. Если $x \in D(A)$, то, поскольку L_k приводят A, имеем $Q_n x \in D(A)$ и $AQ_n x = Q_n Ax$. Но $Q_n x \Rightarrow P_L x$ и $AQ_n x = Q_n Ax \Rightarrow P_L Ax$, откуда, в силу замкнутости A, и следует, что $P_L x \in D(A)$ и $AP_L x = P_L Ax$, что и требовалось доказать. Пусть A — самосопряженный оператор, λ_k — его различные собственные значения и L_k — соответствующие подпространства собственных элементов (включая и нулевой элемент). Число этих подпространств может быть и конечным. Каждое L_k очевидно приводит A. Составим их ортогональную сумму L. Если L есть все

H, то A имеет точечный спектр. Если это не так, то мы имеем ортогональное разложение H:

$$H = L \oplus M \quad \text{и} \quad x = P_L x + P_M x \qquad (x \in H), \tag{52}$$

причем L и M приводят A, и этот оператор индуцирует в L и M операторы A_1 и A_2 так, что $Ax = A_1(P_L x) + A_2(P_M x)$, причем $A_1(P_L x) = A(P_L x)$ и $A_2(P_M x) = A(P_M x)$ при $x \in D(A)$. Оператор A_1 имеет в L_1 точечный спектр, а оператор A_2 — чисто непрерывный спектр в M.

192. Разложение единицы. Интеграл Стилтьеса. Переходим теперь к изложению теории спектральной функции (разложение единицы) для самосопряженных операторов. Оно будет во многом аналогично случаю ограниченного самосопряженного оператора. Мы будем подчеркивать те места, в которых нужно учитывать неограниченность оператора.

Назовем разложением единицы семейство проекторов $\mathcal{E}_\lambda$, зависящее от вещественного параметра λ на промежутке $(-\infty, +\infty)$ и удовлетворяющее следующим условиям: 1) если $\mu > \lambda$, то $\mathcal{E}_\mu \geqslant \mathcal{E}_\lambda$; 2) $\mathcal{E}_\lambda$ стремится к оператору аннулирования при $\lambda \to -\infty$ и $\mathcal{E}_\lambda \to E$ при $\lambda \to +\infty$; 3) $\mathcal{E}_\lambda$ непрерывен справа, т. е. $\mathcal{E}_\lambda \to \mathcal{E}_{\lambda'}$ при $\lambda \to \lambda' + 0$. При этом $\mathcal{E}_\lambda \mathcal{E}_\mu = \mathcal{E}_\mu \mathcal{E}_\lambda = \mathcal{E}_\lambda$ при $\lambda < \mu$, и если Δ есть некоторый промежуток $[\alpha, \beta]$, то, обозначая $\Delta \mathcal{E}_\lambda = \mathcal{E}_\beta - \mathcal{E}_\alpha$, мы имеем, как и раньше,

$$\Delta' \mathcal{E}_\lambda x \perp \Delta'' \mathcal{E}_\lambda x, \tag{53}$$

(Δ' и Δ'' без общих внутренних точек)

$$\Delta' \mathcal{E}_\lambda \cdot \Delta'' \mathcal{E}_\lambda = \Delta_0 \mathcal{E}_\lambda \tag{54}$$

(Δ_0 — общая часть Δ' и Δ'').

Пусть δ — некоторое разбиение промежутка $(-\infty, +\infty)$:

$$\ldots < \lambda_{-2} < \lambda_{-1} < \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots,$$

причем верхняя граница ω_δ разностей $\lambda_k - \lambda_{k-1}$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ конечна. Составим бесконечную сумму

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k' \Delta_k \mathcal{E}_\lambda x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k' (\mathcal{E}_{\lambda_k} - \mathcal{E}_{\lambda_{k-1}}) x, \tag{55}$$

где $\lambda_{k-1} \leqslant \lambda_k' \leqslant \lambda_k$ и x — некоторый элемент H. В силу (53), эта сумма состоит из попарно ортогональных элементов и для ее сходимости необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд [121]

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k'^2 \| \Delta_k \mathcal{E}_\lambda x \|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k'^2 \Delta_k \| \mathcal{E}_\lambda x \|^2. \tag{56}$$

Этот ряд представляет собой сумму σ_δ [3] для интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 d\,(\mathcal{E}_\lambda x, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 d\,\|\mathcal{E}_\lambda x\|^2, \tag{57}$$

и известно [5], что если ряд (56) сходится при некотором разбиении σ и некотором выборе λ_k', то он сходится при всяком разбиении и всяком выборе λ_k'. При этом предел сумм (55) при $\omega_\delta \to 0$ равен интегралу (57) и существование этого интеграла как несобственного интеграла равносильно сходимости сумм (56). Таким образом, мы имеем право рассматривать суммы (55) для таких элементов x, для которых сходятся ряды (56), или, что то же, для которых интеграл (57) имеет конечное значение. Обозначим множество таких x через l. Принимая во внимание, что

$$\|\Delta_k \mathcal{E}_\lambda (x+y)\|^2 \leqslant (\|\Delta_k \mathcal{E}_\lambda x\| + \|\Delta_k \mathcal{E}_\lambda y\|)^2 \leqslant 2\,\|\Delta_k \mathcal{E}_\lambda x\|^2 + 2\,\|\Delta_k \mathcal{E}_\lambda y\|^2,$$

можем утверждать, что если $x \in l$ и $y \in l$, то и $x+y \in l$. Кроме того, очевидно, что если $x \in l$ и a — комплексное число, то $ax \in l$, т. е. l есть линеал. Если x принадлежит тому подпространству, куда проектирует оператор $\mathcal{E}_\beta - \mathcal{E}_\alpha$, то слагаемые суммы (56), для которых $\lambda_{k-1} > \beta$ или $\lambda_k < \alpha$, равны нулю, т. е. такие x принадлежат l. Принимая во внимание, что $\mathcal{E}_\beta - \mathcal{E}_\alpha \to E$ при $\alpha \to -\infty$ и $\beta \to +\infty$, можем утверждать, что линеал l повсюду плотен в H. Далее, если $x \in l$, то совершенно так же, как и в [141], мы можем показать, что суммы (55) имеют определенный предел в смысле сходимости в H при $\omega_\delta \to 0$. Этот предел естественно обозначить в виде интеграла Стилтьеса, и он определяет на линеале l некоторый дистрибутивный оператор Ax:

$$Ax = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d\mathcal{E}_\lambda x. \tag{58}$$

Линеал l мы обозначим, как всегда, через $D(A)$. Напомним, что он состоит из тех элементов x, для которых интеграл (57) имеет конечное значение. Перемножая скалярно сумму (55) на себя, принимая во внимание (54) и переходя к пределу, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 d\,\|\mathcal{E}_\lambda x\|^2 = \|Ax\|^2 \quad (x \in D(Ax)), \tag{59}$$

причем этот интеграл есть предел сумм (56) при $\omega_\delta \to 0$, или его можно понимать как несобственный интеграл с бесконечными пределами. Умножая (56) скалярно на любой элемент y и переходя

к пределу, будем иметь выражение билинейного функционала:

$$(Ax,\ y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d\,(\mathcal{E}_\lambda x, y) \tag{60}$$

$$(x \in D(A);\ y \in H),$$

и написанный интеграл есть предел соответствующих сумм σ_δ при $\omega_\delta \to 0$. Если заменить y на $(\mathcal{E}_\beta - \mathcal{E}_\alpha)\,y$, то, в силу (54), получим

$$(Ax, (\mathcal{E}_\beta - \mathcal{E}_\alpha)\,y) = \int_\alpha^\beta \lambda d\,(\mathcal{E}_\lambda x, y),$$

и, переходя к пределу при $\alpha \to -\infty$ и $\beta \to +\infty$, будем иметь

$$(Ax, y) = \lim_{\substack{\alpha \to -\infty \\ \beta \to +\infty}} \int_\alpha^\beta \lambda d\,(\mathcal{E}_\lambda x, y), \tag{61}$$

т. е. интеграл (60) можно понять как обычный несобственный интеграл Стилтьеса, причем $(\mathcal{E}_\lambda x, y)$ есть функция ограниченной вариации.

Отметим, что бесконечный промежуток $(-\infty, +\infty)$ имеет конечную меру относительно неубывающей функции $\|\mathcal{E}_\lambda x\|^2$, и интеграл (57) мы можем толковать и как интеграл Лебега — Стилтьеса от неограниченной неотрицательной функции λ^2 по множеству конечной меры [**50**].

Пусть x — любой элемент H. При этом $(\mathcal{E}_\beta - \mathcal{E}_\alpha)\,x$ принадлежат тому подпространству, куда проектирует $(\mathcal{E}_\beta - \mathcal{E}_\alpha)$ и, как мы видели выше, отсюда следует, что $(\mathcal{E}_\beta - \mathcal{E}_\alpha)\,x \in D(A)$ при любом выборе элемента x. Этого нельзя уже утверждать относительно элемента $\mathcal{E}_\mu x$. Но если $x \in D(A)$, т. е. ряд (56) сходится, то, в силу $\|\Delta_k \mathcal{E}_\lambda (\mathcal{E}_\mu x)\| = \|\mathcal{E}_\mu \Delta_k \mathcal{E}_\lambda x\| \leqslant \|\Delta_k \mathcal{E}_\lambda x\|$, ряд (56) сходится при замене x на $\mathcal{E}_\mu x$, т. е. если $x \in D(A)$, то и $\mathcal{E}_\mu x \in D(A)$ для любого μ. Считая x принадлежащим $D(A)$, заменим в сумме (55) x на $\mathcal{E}_\mu x$, принимая μ за одну из точек деления ($\mu = \lambda_p$). При этом все слагаемые при $k > p$ обратятся в нулевой элемент, а слагаемые при $k \leqslant p$ останутся неизменными, и в пределе мы получим

$$A\mathcal{E}_\mu x = \int_{-\infty}^{\mu} \lambda d\mathcal{E}_\lambda x. \tag{62}$$

Написанный интеграл является пределом сумм вида (55) при разбиении промежутка $(-\infty, \mu)$ на части. С другой стороны, если мы применим к сумме (55) оператор $\mathcal{E}_\mu$, который ограничен а потому

непрерывен, то сказанное выше о слагаемых остается в силе, и в пределе при $\omega_\delta \to 0$, учитывая непрерывность $\mathcal{E}_\mu$, получим

$$\mathcal{E}_\mu Ax = \int_{-\infty}^{\mu} \lambda d\mathcal{E}_\lambda x \qquad (62_1)$$

$$(x \in D(A));$$

сравнивая с (62), можем написать

$$\mathcal{E}_\mu Ax = A\mathcal{E}_\mu x \qquad (63)$$

$$(x \in D(A)).$$

Совершенно так же, при любом x будем иметь

$$A(\mathcal{E}_\beta - \mathcal{E}_\alpha)\, x = \int_{\alpha}^{\beta} \lambda d\mathcal{E}_\lambda x \qquad (64)$$

$$(x \in H).$$

Если $x \in D(A)$, то из (62) следует, кроме того,

$$(\mathcal{E}_\beta - \mathcal{E}_\alpha)\, Ax = \int_{\alpha}^{\beta} \lambda d\mathcal{E}_\lambda x \qquad (64_1)$$

$$(x \in D(A)),$$

и, устремляя α к $(-\infty)$ и β к $(+\infty)$, получим

$$\int_{\alpha}^{\beta} \lambda d\mathcal{E}_\lambda x \Rightarrow Ax, \qquad (65)$$

т. е. интеграл (58), как и (57) можно толковать как несобственный интеграл. Из предыдущих формул непосредственно следует

$$(A\mathcal{E}_\mu x,\ y) = (\mathcal{E}_\mu Ax,\ y) = \int_{-\infty}^{\mu} \lambda d(\mathcal{E}_\lambda x,\ y) \qquad (66_1)$$

$$(x \in D(A);\ y \in H);$$

$$(A(\mathcal{E}_\beta - \mathcal{E}_\alpha)\, x,\ y) = \int_{\alpha}^{\beta} \lambda d(\mathcal{E}_\lambda x,\ y) \qquad (66_2)$$

$$(x \in H;\ y \in H).$$

Если не только x, но и y принадлежит $D(A)$, то, подставляя в (56), y вместо x и умножая слева скалярно на x, получим

$$(x,\ Ay)=\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda d\,(x,\ \mathcal{E}_\lambda y).$$

Сравнивая с (60) и принимая во внимание, что $(x,\ \mathcal{E}_\lambda y)=(\mathcal{E}_\lambda x,\ y)$, мы получим $(Ax,\ y)=(x,\ Ay)$, т. е. A есть симметричный оператор. Покажем теперь, что A — самосопряженный оператор. Для этого достаточно показать, что если $z\in D(A^*)$, то $z\in D(A)$. Пусть δ — некоторое разбиение промежутка $(-\infty,\ +\infty)$ и P_j — подпространство, определяемое проектором $\mathcal{E}_{\lambda_j}-\mathcal{E}_{\lambda_{-j}}$. Если $x\in P_j$, то в суммах (55) и (56) все слагаемые при $k\geqslant j+1$ и $k\leqslant -j$ равны нулю, элемент $x\in D(A)$ и при $j+1>k>-j$ подпространства, определяемые проекторами $\Delta_k\mathcal{E}_\lambda$, входят в P_j, так что сумма (55) и ее предел Ax принадлежат P_j. Отсюда следует, что $Ax\in D(A)$ и что $A^2x\in P_j$. Положим, что $z\in D(A^*)$, и докажем, что $z\in D(A)$. Пусть z_j — проекция z в P_j, так что $z_j\in D(A)$, а потому $z_j\in D(A^*)$. При этом элемент $(z-z_j)$ также принадлежит $D(A^*)$ и ортогонален P_j. По определению A^* мы имеем $(A^2z_j,\ z-z_j)=(Az_j,\ A^*(z-z_j))$. Но $A^2z_j\in P_j$ и $z-z_j$ ортогонален P_j, и потому

$$(Az_j,\ A^*(z-z_j))=0.$$

Принимая во внимание очевидное равенство

$$(A^*z,\ A^*z)=(A^*(z-z_j),\ \ A^*(z-z_j))+(A^*z_j,\ \ A^*z_j)+$$
$$+(A^*(z-z_j),\ A^*z_j)+(A^*z_j,\ A^*(z-z_j)),$$

предыдущую формулу и $A^*z_i=Az_j$, мы получим

$$\|A^*z\|^2=\|A^*(z-z_j)\|^2+\|Az_i\|^2, \tag{67}$$

откуда

$$\|Az_j\|^2\leqslant\|A^*z\|^2.$$

Рассмотрим сумму (56) при $x=z_j$. У нее все слагаемые при $k\geqslant j+1$ и $k\leqslant -j$ равны нулю, а у остальных слагаемых, в силу (54),

$$\Delta_k\mathcal{E}_\lambda z_j=(\mathcal{E}_{\lambda_k}-\mathcal{E}_{\lambda_{k-1}})(\mathcal{E}_{\lambda_j}-\mathcal{E}_{\lambda_{-j}})z=(\mathcal{E}_{\lambda_k}-\mathcal{E}_{\lambda_{k-1}})z=\Delta_k\mathcal{E}_\lambda z.$$

Таким образом, в пределе сумма (56) в силу (59) дает

$$\|Az_j\|^2=\int_{\lambda_{-1}}^{\lambda_j}\lambda^2 d\,\|\mathcal{E}_\lambda z\|^2,$$

и, в силу (67),

$$\int_{\lambda_{-1}}^{\lambda_j}\lambda^2 d\,\|\mathcal{E}_\lambda z\|^2\leqslant\|A^*z\|^2.$$

Беспредельно увеличивая j, мы видим, что интеграл (57) имеет конечное значение при $x=z$, т. е. $z\in D(A)$, а потому A есть самосопряженный оператор.

Предыдущие рассуждения приводят нас к следующей теореме:

Теорема 1. *Всякому разложению единицы $\mathcal{E}_\lambda$ соответствует самосопряженный оператор A, определенный для тех элементов x, для которых интеграл* (57) *имеет конечные значения. Сам оператор A определяется как предел сумм* (55), *или, что то же, как интеграл* (58). *Соответствующий ему билинейный функционал определяется формулой* (60).

Можно доказать и обратную теорему.

Теорема 2. *Для любого заданного самосопряженного оператора существует разложение единицы $\mathcal{E}_\lambda$ такое, что A выражается формулой* (58).

Доказательство этой теоремы будет приведено потом. Ниже будет доказана формула, определяющая $\mathcal{E}_\lambda$ по A [ср. **144**], и различным $\mathcal{E}_\lambda$ соответствуют различные A. Оператор называется спектральной функцией самосопряженного оператора A. Совершенно так же, как и в [**144**], доказывается, что регулярные точки спектра $\lambda=\mu$ характеризуются тем, что существует некоторый промежуток постоянства $\mathcal{E}_\lambda$, содержащий μ внутри себя. При этом надо иметь в виду, что $(\mathcal{E}_\beta-\mathcal{E}_\alpha)x\in D(A)$ при любом $x\in H$ и любых конечных α и β. Собственные значения $\lambda=\nu$ характеризуются тем, что $\mathcal{E}_\lambda$ имеет скачок при $\lambda=\nu$, причем разность $\mathcal{E}_\nu-\mathcal{E}_{\nu-0}$ есть проектор в подпространство соответствующих собственных элементов (включая нулевой элемент) [**145**].

Положим, что самосопряженный оператор A полуограничен, и пусть m_A — его точная нижняя граница:

$$m_A=\inf(Ax,x) \quad \text{при} \quad x\in D(A) \quad \text{и} \quad \|x\|=1.$$

При любом вещественном λ имеем

$$((A-\lambda E)x,\ x)\geqslant(m_A-\lambda)(x,\ x) \qquad (x\in D(A)),$$

откуда

$$\|(A-\lambda E)x\|\cdot\|x\|\geqslant(m_A-\lambda)\|x\|^2$$

и

$$\|(A-\lambda E)x\|\geqslant(m_A-\lambda)\|x\|.$$

Отсюда следует, что *все значения λ, удовлетворяющие условию $\lambda<m_A$ суть регулярные точки A*. Покажем, что $\lambda=m_A$ *есть точка спектра A*. Если бы это было не так, то существовало бы такое $m_1>m_A$, что все значения $\lambda\leqslant m_1$ суть регулярные точки A, и $\mathcal{E}_\lambda$ есть оператор аннулирования при $\lambda\leqslant m_1$, так что

$$(Ax,\ x)=\int_{m_1}^{+\infty}\lambda\,d(\mathcal{E}_\lambda x,\ x) \qquad (x\in D(A)),$$

откуда следует, что $(Ax, x) \geqslant m_1 (x, x)$ при $x \in D(A)$, а это противоречит определению m_A. Значение $\lambda = m_A$ называется также *нижней границей спектра A*.

Оператор $\mathfrak{E}_\lambda$ называется спектральной функцией самосопряженного оператора A. Мы переходим теперь к краткому повторению свойств общих самосопряженных операторов, которые будут совершенно аналогичны свойствам ограниченных самосопряженных операторов.

193. Непрерывные функции самосопряженного оператора. Пусть $f(\lambda)$ — ограниченная и равномерно непрерывная на промежутке $(-\infty, +\infty)$ функция (например, $f(\lambda)$ непрерывна в замкнутом промежутке $[-\infty, +\infty]$). Составим сумму, аналогичную (55),

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(\lambda'_k)\, \Delta_k \mathfrak{E}_\lambda x, \tag{68}$$

где x — любой элемент H. Нетрудно видеть, что этот ряд, состоящий из попарно ортогональных элементов, сходится при любом x. Действительно, по условию $|f(\lambda)| \leqslant k$, где k — определенное число и

$$\left\| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(\lambda'_k)\, \Delta_k \mathfrak{E}_\lambda x \right\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |f(\lambda'_k)|^2 |\Delta_k \mathfrak{E}_\lambda x|^2 \leqslant k^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\Delta_k \mathfrak{E}_\lambda x|^2 = k^2 |x|^2, \tag{69}$$

и, таким образом, ряд, аналогичный ряду (56), сходится. Совершенно так же, как в [**141**], можно показать, что сумма (68), при всяком x из H, имеет определенный предел при $\omega_j \to 0$. Этот предел дает дистрибутивный оператор $f(A)$, определенный на всем H. Из (69) непосредственно следует $|f(A)\, x| \leqslant k |x|$, т. е. оператор $f(A)$ есть ограниченный оператор. Естественно записать предел суммы (68) в виде интеграла Стилтьеса

$$f(A)\, x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\, d\, \mathfrak{E}_\lambda x \tag{70}$$

$$(x \in H)$$

$$(f(A)\, x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\, d\, (\mathfrak{E}_\lambda x, y) \tag{71}$$

$$(x \in H;\ y \in H).$$

Последний интеграл можно толковать как обычный интеграл Стилтьеса, определенный нами в [**4**].

Совершенно аналогично формулам (62) и (66) имеем

$$\mathfrak{E}_\mu f(A)\,x = f(A)\,\mathfrak{E}_\mu x = \int_{-\infty}^{\mu} f(\lambda)\,d\,\mathfrak{E}_\lambda x \tag{72}$$

и

$$(\mathfrak{E}_\mu f(A)\,x,\ y) = (f(A)\,\mathfrak{E}_\mu x,\ y) = \int_{-\infty}^{\mu} f(\lambda)\,d\,(\mathfrak{E}_\lambda x,\ y) \tag{73}$$

$$(x \in H;\ y \in H).$$

Мы могли бы применить данное выше определение $f(A)$ и к случаю любой ограниченной и непрерывной на промежутке $(-\infty, +\infty)$ функции, не требуя ее равномерной непрерывности. В дальнейшем мы укажем возможность распространения понятия функции самосопряженного оператора на широкий класс функций $f(\lambda)$.

Для оператора $(A - lE)$, где l — какое-либо число, мы имеем очевидные формулы

$$(A - lE)\,x = \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda - l)\,d\,\mathfrak{E}_\lambda x;\ ((A - lE)\ x,\ y) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda - l)\,d\,(\mathfrak{E}_\lambda x,\ y) \tag{74}$$

$$(x \in D(A);\ y \in H).$$

194. Резольвента. Приведем выражение резольвенты через спектральную функцию.

Если l невещественно, то $1:(\lambda - l)$ есть функция λ, непрерывная в замкнутом промежутке $[-\infty, +\infty]$, и мы можем образовать ограниченный оператор

$$R_l x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lambda - l}\,d\mathfrak{E}_\lambda x. \tag{75}$$

Докажем, что он обладает всеми свойствами резольвенты при $\lambda = l$, чем и будет оправдано его обозначение через R_l. При любом x элемент $(\mathfrak{E}_\beta - \mathfrak{E}_\alpha)\,R_l x \in D(A)$, и, в силу (66_2), мы имеем

$$((A - lE)\,(\mathfrak{E}_\beta - \mathfrak{E}_\alpha)\,R_l x, y) = \int_{\alpha}^{\beta} (\lambda - l)\,d\,(\mathfrak{E}_\lambda R_l x,\ y).$$

С другой стороны, в силу (73) и (75)

$$(\mathfrak{E}_\lambda R_l x,\ y) = \int_{-\infty}^{\lambda} \frac{1}{\mu - l}\,d\,(\mathfrak{E}_\mu x,\ y).$$

Подставляя в предыдущую формулу и пользуясь свойством интеграла Стилтьеса [9], получим

$$((A - lE)(\mathcal{E}_\beta - \mathcal{E}_\alpha) R_l x, y) = \int_\alpha^\beta d(\mathcal{E}_\lambda x, y) = ((\mathcal{E}_\beta - \mathcal{E}_\alpha) x, y),$$

откуда, ввиду произвольности y,

$$(A - lE)(\mathcal{E}_\beta - \mathcal{E}_\alpha) R_l x = (\mathcal{E}_\beta - \mathcal{E}_\alpha) x. \tag{76}$$

Построим две последовательности чисел α_n и β_n, причем $\alpha_n \to -\infty$ и $\beta_n \to +\infty$ и последовательность элементов $y_n = (\mathcal{E}_{\beta_n} - \mathcal{E}_{\alpha_n}) R_l x$. Мы имеем $y_n \in D(A)$, $y_n \Rightarrow R_l x$, и, в силу (76), $(A - lE) y_n \Rightarrow x$. Отсюда, в силу замкнутости A, следует, что $R_l x \in D(A)$ при любом x и $(A - lE) R_l x = x$.

Остается доказать, что $R_l (A - lE) x = x$ при $x \in D(A)$. Это непосредственно следует из формул

$$(R_l (A - l E) x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lambda - l} d(\mathcal{E}_\lambda (A - l E) x, y)$$

и

$$(\mathcal{E}_\lambda (A - l E) x, y) = \int_{-\infty}^{\lambda} (\mu - \lambda) d(\mathcal{E}_\mu x, y),$$

которые являются следствием формул (71) и (66_1).

Остается в силе и формула, определяющая спектральную функцию через резольвенту

$$\frac{1}{2} [(\mathcal{E}_{\lambda-0} x, y) + (\mathcal{E}_\lambda x, y)] = \lim_{\tau \to 0} \int_{-\infty}^{\lambda} ((R_{\sigma+\tau i} - R_{\sigma-\tau i}) x, y) d\sigma. \tag{77}$$

Самосопряженному оператору соответствует определенная спектральная функция $\mathcal{E}_\lambda$, и оператор ограничен тогда и только тогда, когда $\mathcal{E}_\lambda$ переменна только на конечном промежутке.

Мы доказали [191], что для того, чтобы везде заданный ограниченный оператор B коммутировал с самосопряженным оператором A, необходимо и достаточно выполнение условия

$$BR_l = R_l B \tag{78}$$

при любом l, при котором существует резольвента. Докажем теперь следующую теорему:

Теорема. *Для того чтобы B коммутировало с A, необходимо и достаточно, чтобы при всяком вещественном λ выполнялось условие*

$$B\mathcal{E}_\lambda = \mathcal{E}_\lambda B. \tag{79}$$

Достаточно доказать, что условия (78) и (79) равносильны. В силу (75) имеем для любых элементов x и y:

$$(BR_l x, y) = (R_l x, B^* y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lambda - l}\, d\,(\mathfrak{E}_\lambda x, B^* y),$$

т. е.

$$\left.\begin{aligned} (BR_l x, y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lambda - l}\, d\,(B\mathfrak{E}_\lambda x, y), \\ (R_l Bx, y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lambda - l}\, d\,(\mathfrak{E}_\lambda Bx, y). \end{aligned}\right\} \tag{80}$$

Если выполнено условие (79), то правые, а потому и левые части равенств (80) одинаковы, и, в силу произвольности x и y, выполнено условие (78). Наоборот, если выполнено условие (78), то, в силу единственности обращения интеграла Коши-Стилтьеса [**29**], $(B\mathfrak{E}_\lambda x, y)$ и $(\mathfrak{E}_\lambda Bx, y)$ могут отличаться лишь постоянным слагаемым, а также в точках разрыва. Но обе указанные функции стремятся к нулю при $\lambda \to -\infty$ и непрерывны справа в точках разрыва, а потому для любых x и y мы имеем $(B\mathfrak{E}_\lambda x, y) = (\mathfrak{E}_\lambda Bx, y)$, т. е. выполнено условие (79), и теорема доказана.

Отметим, что, в силу результатов [**156**], $\mathfrak{E}_\mu$ коммутирует с A при всяком μ. Это следует и из доказанной теоремы. Из этой же теоремы и (70) следует, что $f(A)$ коммутирует с A.

195. Собственные значения. Как мы уже упоминали, $\lambda = \lambda'$ есть собственное значение A, тогда и только тогда, когда $\mathfrak{E}_\lambda$ имеет λ' точкой разрыва непрерывности, и при этом $\mathfrak{E}_{\lambda'} - \mathfrak{E}_{\lambda'-0}$ есть проектор в подпространство соответствующих собственных элементов (включая нулевой элемент). Считая, как всегда, H сепарабельным, мы можем утверждать, что число собственных значений, если они есть, конечно или счетно. Ранг собственных значений определяется, как и раньше, и можно считать, что совокупность всех собственных элементов образует ортонормированную систему $x_1, x_2, \ldots$. Пусть λ_k — точки разрыва $\mathfrak{E}_\lambda$, L_k — подпространства соответствующих собственных элементов и $P_{L_k} = \mathfrak{E}_{\lambda_k} - \mathfrak{E}_{\lambda_k - 0}$ — проекторы в эти подпространства.

Составим ортогональную сумму

$$H' = L_1 \oplus L_2 \oplus L_3 \oplus \ldots \tag{81}$$

Подпространство H' приводит A, и оператор A', индуцированный A в H', есть самосопряженный оператор с чисто точечным спектром.

Если уже в H оператор имеет чисто точечный спектр, то

$$\mathcal{E}_\lambda = \sum_{\lambda_k \leqq \lambda} (\mathcal{E}_{\lambda_k} - \mathcal{E}_{\lambda_k - 0}). \tag{82}$$

Пусть $x_1, x_2, \ldots$ — какая угодно полная ортонормированная в H система и $\mu_1, \mu_2 \ldots$ — некоторая последовательность вещественных чисел, среди которых могут быть и одинаковые, причем μ_k и x_k будем называть соответствующими. Пусть далее $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ — различные из чисел μ_s, L_k — подпространство, образованное теми x_s, которым соответствуют μ_s, равные λ_k, и P_{L_k} — проектор в L_k.

Определим проектор

$$\mathcal{E}_\lambda = \sum_{\lambda_k \leqq \lambda} P_{L_k}.$$

Это есть разложение единицы, которому соответствует самосопряженный оператор C с чисто точечным спектром. Его собственные значения суть λ_k и $x_1, x_2, \ldots$ — полный набор собственных функций. Если все λ_k принадлежат конечному промежутку, то C — ограниченный оператор.

196. Случай смешанного спектра. Сделаем сначала некоторые добавления к тому, что мы говорили в [**191**] о разбиении самосопряженного оператора A на операторы с чисто точечным и чисто непрерывным спектром. Пусть некоторое подпространство H' приводит A. При этом оно приводит $\mathcal{E}_\lambda$; и, обозначая через A' и $\mathcal{E}'_\lambda$ операторы, индуцированные A и $\mathcal{E}_\lambda$ в H', мы можем утверждать, что $\mathcal{E}'_\lambda$ есть разложение единицы в H' и

$$A'x = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d\mathcal{E}'_\lambda x \tag{83}$$

$$(x \in D(A')),$$

т. е. $\mathcal{E}'_\lambda$ есть спектральная функция A'. Пусть A'' и $\mathcal{E}''_\lambda$ — операторы, индуцированные A и $\mathcal{E}_\lambda$ в подпространстве $H'' = H \ominus H'$. Если $x = x' + x''$ и $y = y' + y''$ — разложение x и y в H' и H'', причем $x \in D(A)$, то [**191**]:

$$Ax = A'x' + A''x''; \quad \mathcal{E}_\lambda y = \mathcal{E}'_\lambda y' + \mathcal{E}''_\lambda y''$$
$$(Ax, y) = (Ax', y') + (Ax'', y''). \tag{84}$$

Аналогичные формулы имеют место и в случае конечного или бесконечного числа попарно ортогональных подпространств, приводящих A. Вернемся теперь к обозначениям из [**191**] и положим, что H' не есть все H. В H' оператор A' имеет чисто точечный спектр, а в H'' оператор A'' имеет чисто непрерывный спектр. При этом

$$\mathcal{E}'_\lambda = \sum_{\lambda_k \leqq \lambda} (\mathcal{E}_{\lambda_k} - \mathcal{E}_{\lambda_k\ 0}),$$

а спектральная функция $\mathcal{E}''_\lambda$ оператора A'', выражаемая формулой $\mathcal{E}''_\lambda = \mathcal{E}_\lambda - \mathcal{E}'_\lambda$, не имеет разрывов непрерывности. Если A — неограниченный оператор, то один из операторов A' или A'' может быть и ограниченным. Так, например, если все точки разрыва непрерывности $\mathcal{E}_\lambda$ находятся на конечном промежутке, то A' — ограниченный оператор. Положим, что A имеет чисто непрерывный спектр, и обозначим, как и в [**147**], через C_x замкнутую линейную оболочку элементов $\mathcal{E}_\lambda x$. Говорят, что A имеет простой непрерывный спектр, если существует такой элемент x, что C_x совпадает с H. При этом будут иметь место формулы (254) и (256) из [**147**] с интегралами Хеллингера по бесконечному промежутку. Эти интегралы являются пределами соответствующих сумм при разбиении бесконечного промежутка на конечное число частичных промежутков. Если $y \in D(A)$, то будут иметь место и (259) и (261) из [**147**]. Соответствующие интегралы мы можем рассматривать как несобственные с бесконечным промежутком интегрирования. Пользуясь неравенством [**147**]

$$|\Delta\varphi_y(\lambda)|^2 \leqslant \Delta\rho(\lambda)\cdot\Delta\|\mathcal{E}_\lambda y\|^2,$$

мы можем показать, как и в [**192**], по отношению к суммам (55), что бесконечные суммы попарно ортогональных элементов, соответствующие интегралу (261) из [**147**], дают сходящийся ряд в силу того, что $y \in D(A)$. В общем случае непрерывного спектра из доказательства теоремы 2 из [**147**] следует, что C_x приводит $\mathcal{E}_\lambda$ при любом λ, а потому оно приводит и A. Оператор, индуцированный в C_x оператором A, имеет простой непрерывный спектр, и мы можем так же, как и в [**147**], разбить оператор с чисто непрерывным спектром на операторы с простым непрерывным спектром во взаимно ортогональных подпространствах, ортогональная сумма которых дает все H. Во всех формулах вместо одного интеграла Хеллингера мы будем иметь сумму таких интегралов. Совершенно так же, как и в [**152**], устанавливается связь между C_x и $L_2^{(x)}$.

Пусть A — самосопряженный оператор и U — унитарный. Оператор $A' = UAU^{-1}$ определен на линеале $D(A')$, который получается применением U к линеалу $D(A)$. Покажем, что A' — самосопряженный оператор. Действительно, пусть

$$(UAU^{-1}x,\ y) = (x,\ y^*)$$

для всех x из $D(A')$. Надо показать, что $y \in D(A')$ и что $y^* = UAU^{-1}y$. Предыдущее равенство можно переписать в виде $(Ax',\ U^{-1}y) = (Ux',\ y^*)$, где $x' = U^{-1}x$ есть любой элемент из $D(A)$, или в виде $(Ax',\ U^{-1}y) = (x',\ U^{-1}y^*)$, откуда, ввиду самосопряженности A, следует, что $U^{-1}y \in D(A)$ и $U^{-1}y^* = AU^{-1}y$, т. е. $y \in D(A')$ и $y^* = UAU^{-1}y$, что и требовалось доказать.

Пусть $\mathcal{E}_\lambda$ — спектральная функция оператора A. При этом $\mathcal{E}'_\lambda = U\mathcal{E}_\lambda U^{-1}$ обладает всеми свойствами разложения единицы, и $\|\mathcal{E}'_\lambda x\| =$

$= \|\mathcal{E}_\lambda U^{-1}x\|$. Если $x \in D(A')$, то $U^{-1}x \in D(A)$, и, следовательно, сходится ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k'^2 \Delta_k \|\mathcal{E}_\lambda' x\|^2,$$

и сумма

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k' \Delta_k \mathcal{E}_\lambda' x$$

имеет, как и в [**192**], предел $A'x = UAU^{-1}x$, откуда видно, что $\mathcal{E}_\lambda' = U\mathcal{E}_\lambda U^{-1}$ есть спектральная функция A'. Остается в силе и признак унитарной эквивалентности операторов, указанный [**153**].

Сохраняется без изменения понятие дифференциального решения и полной системы дифференциальных решений. Всякое непрерывное (в смысле пространства H) дифференциальное решение $x(\lambda)$ имеет вид $\mathcal{E}_\lambda x$, где $x \in D(A)$; при этом считается, что $x(\lambda) \Rightarrow 0$ при $\lambda \to -\infty$.

197. Функции самосопряженного оператора. Если $\mathcal{E}_\lambda$ — спектральная функция самосопряженного оператора A и $f(\lambda)$ — ограниченная функция в промежутке $-\infty < \lambda < +\infty$, измеримая по отношению ко всем неубывающим функциям $\|\mathcal{E}_\lambda z\|^2$, то совершенно так же, как и в [**155**], формула

$$(f(A)x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\, d(\mathcal{E}_\lambda x, y) \tag{85}$$

$$(x \in H; \quad y \in H)$$

определяет ограниченный, заданный во всем H оператор $f(A)$, обладающей всеми указанными в [**155**] свойствами. Отметим, что значения $f(\lambda)$ на множестве меры нуль по отношению ко всем $\|\mathcal{E}_\lambda z\|^2$ не влияют на интеграл (85) и тем самым на $f(A)$. Обобщим теперь понятие функции оператора $f(A)$ на вещественные функции $f(\lambda)$ с конечными значениями и измеримые по-прежнему по отношению ко всем $\|\mathcal{E}_\lambda z\|^2$, но неограниченные. Обозначим через $f_N(\lambda)$ урезанную функцию, т. е. функцию, определенную равенствами $f_N(\lambda) = f(\lambda)$, если $|f(\lambda)| \leqslant N$, $f_N(\lambda) = N$, если $f_N(\lambda) > N$, и $f_N(\lambda) = -N$, если $f(\lambda) < -N$. Для ограниченной функции $f_N(\lambda)$ мы можем образовать ограниченный оператор $f_N(A)$. При этом, в силу формулы (302) из [**155**], при $y = x$ и $f_1(A) = f_2(A)$, мы имеем

$$\|f_N(A)x - f_M(A)x\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f_N(\lambda) - f_M(\lambda)|^2\, d\|\mathcal{E}_\lambda x\|^2. \tag{86}$$

Если $f(\lambda)$ принадлежит L_2 по отношению $\|\mathcal{E}_\lambda x\|^2$, то, в силу $|f_N(\lambda)| \leqslant |f(\lambda)|$ и $f_N(\lambda) \to f(\lambda)$ почти везде по отношению $\|\mathcal{E}_\lambda x\|^2$,

правая часть стремится к нулю при N и $M \to +\infty$, т. е. последовательность $f_N(A)x$ сходится в себе, и имеется предельный элемент, который мы обозначим через $f(A)x$, т. е. $f_N(A)x \Rightarrow f(A)x$ при $N \to +\infty$, если

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\lambda)\, d\|\mathcal{E}_\lambda x\|^2 < +\infty. \tag{87}$$

Множество элементов x, удовлетворяющих этому условию, естественно обозначить через $D[f(A)]$. Укажем относящиеся сюда результаты, не приводя их доказательств.

Линеал $D[f(A)]$ повсюду плотен в H, $f(A)$ есть самосопряженный оператор, и имеет место формула

$$(f(A)x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\, d(\mathcal{E}_\lambda x, y) \tag{88}$$

$$(x \in D[f(A)],\ y \in H).$$

Для комплексных функций $f(\lambda) = f_1(\lambda) + f_2(\lambda)\, i$ мы принимаем $f(A) = f_1(A) + f_2(A)\, i$, и линеал $D[f(A)]$ по-прежнему определяется условием (87) с заменой $f^2(\lambda)$ на $|f(\lambda)|^2$. Так же, как и в [**156**], имеет место следующее утверждение: для того чтобы оператор был функцией самосопряженного оператора A, необходимо и достаточно, чтобы он был замкнут и коммутировал с любым ограниченным оператором, коммутирующим с A.

Перейдем к вопросу о коммутировании общих самосопряженных операторов. Вспоминая теорему из [**156**], мы естественно приходим к следующему определению: *говорят, что два самосопряженных оператора A и B коммутируют, если их спектральные функции $\mathcal{E}_\lambda$ и F_μ (ограниченные операторы) коммутируют при любых λ и μ*. В силу упомянутой теоремы это определение равносильно обычному, если A и B — ограниченные операторы. Если A — неограниченный и B — ограниченный операторы, то мы имели определение коммутирования в [**191**]. Нетрудно видеть, что и оно совпадает с только что данным, если A и B — самосопряженные операторы. Действительно, в силу теоремы из [**191**], коммутирование в прежнем смысле равносильно тому, что B коммутирует с $\mathcal{E}_\lambda$ при любом λ, а этот факт равносилен тому [**143**], что f_μ при любом μ коммутирует со всеми $\mathcal{E}_\lambda$, т. е. мы приходим к новому определению коммутирования.

Исходя из нового определения коммутирования самосопряженных операторов, можно показать, что вещественные функции одного и того же самосопряженного оператора A коммутируют и что если самосопряженные операторы $A_1, A_2, \ldots$ попарно коммутируют, то все они являются функциями одного и того же оператора A (ср. [**156**]).

Рассмотрим понятие суммы и произведения для неограниченных операторов. Оператор $(A+B)x=Ax+Bx$ определен для элементов x, одновременно принадлежащих $D(A)$ и $D(B)$. Оператор $(AB)x=A(Bx)$ определен для таких x, что $x\in D(B)$ и $Bx\in D(A)$. Если a — любое комплексное число, то оператор $(aA)x=a(Ax)$ определен на $D(A)$. Пусть A и B — самосопряженные коммутирующие операторы, причем B — ограниченный, определенный на всем H оператор. При этом оператор ABx определен на линеале l' таких x, что $Bx\in D(A)$. Согласно определению коммутирования, если $x\in D(A)$, то и $Bx\in D(A)$, т. е. $D(A)$ входит в l', но линеал l' может быть и шире $D(A)$. Покажем, что AB — самосопряженный на l' оператор. Пусть $(ABx,y)=(x,y^*)$ при $x\in l'$ и тем более при $x\in D(A)$. Нам надо показать, что $y\in l'$ и что $y^*=ABy$. Считая, что $x\in D(A)$, можем заменить указанное равенство таким: $(BAx,y)=(x,y^*)$ при $x\in D(A)$, или, в силу того, что B — ограниченный самосопряженный оператор: $(Ax,By)=(x,y^*)$ при $x\in D(A)$; отсюда, в силу самосопряженности A, следует, что $By\in D(A)$ и $y^*=ABy$, что и требовалось доказать. Отметим, что если A и B — неограниченные коммутирующие самосопряженные операторы, то оператор AB может оказаться несамосопряженным, но сопряженный с ним оператор $(AB)^*$ всегда самосопряженный.

Применим определение суммы и произведения к степеням оператора A. Линеал $D(A^2)$ состоит из таких x, что $x\in D(A)$ и $Ax\in D(A)$, т. е. $D(A^2)$ входит в $D(A)$ и может быть уже $D(A)$. Точно так же $D(A^3)$ состоит из таких x, что $x\in D(A^2)$ и $A^2x\in D(A)$ и, следовательно, $D(A^3)$ входит в $D(A^2)$. Полином вида $a_1A+a_2A^2+\ldots+a_nA^n$ определен, очевидно, на линеале $D(A^n)$. Можно показать, что этот полином совпадает с определенной выше функцией оператора A, если принять $f(\lambda)=a_0+a_1\lambda+\ldots+a_n\lambda^n$, и что множество элементов, на которых определены все полиномы, есть линеал, плотный в H.

Если самосопряженный оператор A — положителен, т. е. нижняя граница спектра $m_A\geqslant 0$, то можно, как и в [**143**], образовать положительный самосопряженный оператор $A^{\frac{1}{2}}$, квадрат которого равен A

$$A^{\frac{1}{2}}=\int_{m_A}^{+\infty}\sqrt{\lambda}\,d\mathcal{E}_\lambda\,.$$

Нетрудно видеть, что существует только один положительный самосопряженный оператор B, квадрат которого равен A. Действительно, пусть $\mathcal{E}'_\mu$ — разложение единицы для B. Мы должны иметь

$$B=\int_0^{+\infty}\mu\,d\mathcal{E}'_\mu \qquad \text{и} \quad A=B^2=\int_0^{+\infty}\mu^2\,d\mathcal{E}'_\mu$$

или

$$A = B^2 = \int_0^{+\infty} \lambda d\mathcal{E}'_{\sqrt{\lambda}}.$$

Семейство операторов $\mathcal{E}'_{\sqrt{\lambda}}$, зависящее от параметра λ, представляет собой разложение единицы, и, в силу единственности спектральной функции $\mathcal{E}'_{\sqrt{\lambda}} = \mathcal{E}_\lambda$, откуда и следует, что оператор B должен совпадать с $A^{\frac{1}{2}}$.

198. Малые возмущения спектра. Исследуем изменение спектра самосопряженного оператора при добавлении к нему другого самосопряженного оператора. Отметим прежде всего, что для неограниченных самосопряженных операторов справедлива теорема 1 из [157]. Докажем еще две теоремы.

Пусть L — некоторое подпространство. Его размерностью r называется число элементов полной в L ортонормированной системы элементов. Это число r может быть как конечным, так и бесконечным. Легко показать, что оно не зависит от выбора полной ортонормированной в L системы.

Лемма 1. *Пусть L_1 и L_2 — два подпространства размерности r_1 и r_2. Если $r_1 < r_2$, то в L_2 существует элемент, отличный от нулевого, ортогональный ко всем элементам L_1.*

Отметим, что, в силу сепарабельности H, число r_1 — конечно, а r_2 может быть как конечным, так и бесконечным. Доказываем лемму от обратного. Предположим, что в L_2 нет элемента, отличного от нулевого, ортогонального к L_1. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_{r_1}$ — полная ортонормированная в L_1 система (базис в L_1) и P — проектор в подпространство L_2. Для любого элемента $v \in L_2$ имеем

$$(v,\ Px_k) = (Pv,\ x_k) = (v,\ x_k).$$

Элементы Px_k из L_2 определяют некоторое подпространство L_3 размерности $r_3 \leqslant r_1$ (знак $<$, если Px_k линейно зависимы). Покажем, что L_3 должно совпадать с L_2. Действительно, если бы это было не так, то существовал бы элемент $y \in L_2$, отличный от нулевого, ортогональный L_3, и мы имели бы $(y,\ Px_1) = 0$ и тем самым, в силу последней формулы, $(y,\ x_k) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, r_1)$, т. е. y ортогонально L_1. Но, по предположению, такого элемента y нет. Мы доказали, что L_3 совпадает с L_2, т. е. $r_2 = r_3$. Но, как мы видели, $r_3 \leqslant r_1$, а потому $r_2 \leqslant r_1$, что противоречит условию леммы.

Лемма 2. *Пусть A — самосопряженный оператор (неограниченный или ограниченный), B — ограниченный самосопряженный оператор, $\mathcal{E}_\lambda$ — спектральная функция A и $\mathcal{E}'_\lambda$ — спектральная функция суммы $A' = A + B$. Пусть далее Δ — некоторый конечный промежуток $[a, b]$ и $\Delta_{B,\varepsilon}$ — промежуток $[a - \|B\| - \varepsilon,\ b + \|B\| + \varepsilon]$, где ε — какое-нибудь положительное число. При этом размерность подпространства $L_1 = (\Delta_{B,\varepsilon}\mathcal{E}'_\lambda)\,x$ $(x \in H)$ не меньше размерности подпространства $L_2 = (\Delta\mathcal{E}_\lambda)x$ $(x \in H)$.*

Отметим прежде всего, что мы пользуемся обозначением из [141] (например, $\Delta\mathcal{E}_\lambda = \mathcal{E}_b - \mathcal{E}_a$). Доказываем лемму от обратного. Предположим, что размерность L_1 меньше размерности L_2. В силу леммы 1 существует элемент $y \in L_2$, отличный от нулевого и ортогональный L_1. Мы можем считать, что $\|y\| = 1$. Принимая во внимание, что $y \in L_2$ и полагая для краткости письма $\alpha = \dfrac{a+b}{2}$, получим

$$\|Ay - \alpha y\|^2 = \int_a^b (\lambda - \alpha)^2 d(\mathcal{E}_\lambda y,\ y) \leqslant \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

и

$$\|A'y - \alpha y\| \leqslant \|Ay - \alpha y\| + \|By\| \leqslant \frac{b-a}{2} + \|B\|. \tag{89}$$

С другой стороны, принимая во внимание, что $y \perp L_1$, имеем

$$\|A'y - \alpha y\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda - \alpha)^2 \, d(\mathcal{E}'_\lambda y, y) = \int_{-\infty}^{a - \|B\| - \varepsilon} + \int_{b + \|B\| + \varepsilon}^{+\infty},$$

откуда, учитывая опять ортогональность y к L_1, получим

$$\|A'y - \alpha y\| \geqslant \left(\frac{b-a}{2} + \|B\| + \varepsilon \right) \int_{-\infty}^{+\infty} d(\mathcal{E}'_\lambda y, y),$$

т. е.

$$\|A'y - \alpha y\| \geqslant \frac{b-a}{2} + \|B\| + \varepsilon. \tag{90}$$

Противоречивость неравенств (89) и (90) доказывает лемму.

Теорема 1. *Пусть внутри промежутка Δ спектр оператора A состоит из конечного числа собственных значений, сумма кратностей которых равна k, где k — конечное число, и пусть расстояние остальной части спектра A до Δ больше $2\|B\|$.*

При этом спектр A' в промежутке $\Delta_{B,0} = [a - \|B\|, \; b + \|B\|]$ состоит из собственных значений, сумма кратностей которых равна k.

Согласно лемме 2, при любом $\varepsilon > 0$ размерность $L_1 \geqslant k$. Если имеет место знак $>$, то, пользуясь опять леммой 2 и равенством $A = A' - B$, мы можем утверждать, что подпространство $\Delta_{2B,\, 2\varepsilon}\, \mathcal{E}_\lambda x \; (x \in H)$ имеет размерность $> k$. Но в силу условий теоремы, это не может иметь место при всех ε, достаточно близких к нулю, т. е. при таких ε размерность L_1 равна k, откуда и следует теорема.

Замечание. Применяя теорему при $k = 1$, мы получаем возможность при малых возмущениях следить за изменением изолированного простого собственного значения.

Теорема 2. *Если внутри Δ имеется хотя бы одна точка сгущения спектра оператора A, то в промежутке $\Delta_{B,0}$ имеется хотя бы одна точка сгущения спектра оператора A'.*

В этом случае $k = \infty$, и теорема следует из леммы 2.

Замечание. Если λ_0 — точка сгущения спектра A, то в промежутке $[\lambda_0 - \|B\|, \; \lambda_0 + \|B\|]$ имеется по крайней мере одна точка сгущения спектра A'.

199. Оператор умножения. Рассмотрим пространство L_2 на промежутке $(-\infty, +\infty)$ и оператор умножения на независимую переменную

$$Af(x) = xf(x). \tag{91}$$

Линеал $D(A)$ состоит из функций $f(x)$ из L_2 таких, что и $xf(x) \in L_2$, и, в частности, к $D(A)$ принадлежат все функции, отличные от нуля только на конечных промежутках, откуда следует, что линеал $D(A)$ повсюду плотен в H. Покажем, что оператор A

самосопряженный. Нам надо показать, что если дано $(Ax, y) = (x, y^*$ при $x \in D(A)$, то $y \in D(A)$ и $y^* = Ay$. В настоящем случае дано

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\overline{\varphi(x)}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\overline{\varphi^*(x)}\,dx \tag{92}$$

для всех $f(x)$ из $D(A)$ и некоторых $\varphi(x)$ и $\varphi^*(x)$ из L_2, и надо доказать, что $\varphi(x) \in D(A)$ и $\varphi^*(x) = x\varphi(x)$. Применим (92) к $f(x)$ из L_2, отличной от нуля лишь на некотором конечном промежутке $(-a, +a)$, причем заметим, что такая функция принадлежит $D(A)$:

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,\overline{[\varphi^*(x) - x\varphi(x)]}\,dx = 0.$$

Ввиду произвольности $f(x)$, отсюда непосредственно следует [**52**], что $\varphi^*(x) - x\varphi(x)$ эквивалента нулю на промежутке $(-a, +a)$, а ввиду произвольности a и на всем промежутке $(-\infty, +\infty)$, т. е. можно считать $\varphi^*(x) - x\varphi(x) = 0$. Но $\varphi^*(x) \in L_2$, а потому и $x\varphi(x) \in L_2$ и $\varphi^*(x) = x\varphi(x)$, что и требовалось доказать. Спектральная функция оператора (192) определяется, как и в [**152**], и выражается формулой

$$\mathcal{E}_\lambda f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } x \leqslant \lambda, \\ 0 & \text{при } x > \lambda, \end{cases} \tag{93}$$

и оператор имеет чисто непрерывный спектр, расположенный на промежутке $-\infty < \lambda < +\infty$.

Оператор (91) есть, очевидно, неограниченный оператор. Отметим еще, что всякая функция $f(x)$ из $D(A)$ суммируема на промежутке $(-\infty, +\infty)$. Действительно, полагая $xf(x) = \omega(x)$, где $\omega(x) \in L_2$, можем написать $f(x) = \frac{1}{x}\omega(x)$; так как $\frac{1}{x}$ и $\omega(x)$ принадлежат L_2 на любом промежутке $(-\infty, -a)$ и (a, ∞), где $a > 0$, то отсюда и следует суммируемость $f(x)$ на промежутке $(-\infty, +\infty)$.

Совершенно так же, как и в [**152**], можно рассматривать оператор умножения на функцию, которую мы будем считать вещественной и измеримой:

$$A'f(x) = \omega(x)f(x), \tag{94}$$

причем в случае неограниченности $\omega(x)$ мы получим неограниченный оператор. Положим для определенности, что $\omega(x)$ ограничена на всем промежутке $(-\infty, +\infty)$, при исключении сколь угодно малых окрестностей конечного числа точек. При этом, беря любой замкнутый промежуток, не содержащий упомянутых точек, и рассуждая, как и выше, мы убедимся в том, что (94) есть самосопря-

женный оператор для таких $f(x) \in L_2$, что и $\omega(x) f(x) \in L_2$. Его спектральная функция, как и в [152], выражается формулой

$$\mathcal{E}'_\lambda f(x) = \begin{cases} f(x) \text{ при } \omega(x) \leqslant \lambda, \\ 0 \text{ при } \omega(x) < \lambda. \end{cases} \tag{95}$$

Если, например, $\omega(x) \in L_2$, то линеал $D(A)$ содержит все ограниченные функции из L_2 и A' есть также самосопряженный оператор. Отметим, что оператор A' можно рассматривать как функцию $\omega(A)$ оператора A умножения на независимую переменную для класса функций $\omega(x)$, указанных в [197].

Обозначим через B самосопряженный оператор:

$$B\Phi(x) = i \frac{d\Phi(x)}{dx} = i\varphi(x), \tag{96}$$

определенный в $H = L_2(-\infty, +\infty)$ на множестве $D(B)$ функций $\Phi(x)$, абсолютно непрерывных на любом конечном промежутке и имеющих производную из $L_2(-\infty, +\infty)$ [188]. Пользуясь преобразованием Фурье, сопоставим линеалы $D(A)$ и $D(B)$.

Обозначая

$$\Psi_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{+N} \Phi(t) e^{ixt} dt \quad \text{и} \quad \psi_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{+N} i\varphi(t) e^{ixt} dt, \tag{97}$$

где $\Phi(t)$ — любая функция из $D(B)$, и, интегрируя по частям, получим

$$x\Psi_N(x) - \psi_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} [\Phi(N) e^{ixN} - \Phi(-N) e^{-ixN}], \tag{98}$$

причем правая часть при $N \to \infty$ стремится к нулю равномерно по x во всем бесконечном промежутке [188]. Функции $\psi_N(x)$ и $\Psi_N(x)$ стремятся в среднем в бесконечном промежутке к некоторым функциям $\psi(x)$ и $\Psi(x)$ из L_2 [178]. Тем более это будет иметь место во всяком конечном промежутке $[-a, +a]$ и, кроме того, в таком промежутке $x\Psi_N(x)$ будет стремиться в среднем к $x\Psi(x)$. Из формулы (98) следует, что при любом заданном положительном ε и достаточно больших N выполняется неравенство

$$\int_{-a}^{+a} |x\Psi_N(x) - \psi_N(x)|^2 dx \leqslant \varepsilon,$$

или, принимая во внимание возможность перехода к пределу под знаком нормы,

$$\int_{-a}^{+a} |x\Psi(x) - \psi(x)|^2 dx \leqslant \varepsilon,$$

откуда, ввиду произвольности ε и a, следует

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x\Psi(x) - \psi(x)|^2 dx = 0,$$

т. е. $x\Psi(x) = \psi(x)$, или

$$x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t) e^{ixt} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} i\varphi(t) e^{ixt} dt, \tag{99}$$

что может быть записано в виде

$$T^*(\Phi) = \frac{1}{x} T^*(i\varphi) = f, \tag{100}$$

и, поскольку $T^*(i\varphi) \in L_2$, мы видим, что не только $f(x) \in L_2$, но и $xf(x) \in L_2$, т. е. $f(x) \in D(A)$.

Покажем теперь, что если $f(x)$ есть любая функция из $D(A)$, то $T(f) \in D(B)$. Поскольку $f(x)$ и $xf(x)$ принадлежат L_2, мы можем составить $T(f)$ и $T(xf)$. Принимая во внимание (100) введем обозначения

$$\left.\begin{aligned} \Phi(x) = \mathrm{T}(f) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ixt} dt, \\ i\varphi(x) = \mathrm{T}(xf) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) e^{-ixt} dt. \end{aligned}\right\} \tag{101}$$

Мы имеем [178]

$$i \int_0^N \varphi(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) \frac{1}{it} (1 - e^{-iNt}) dt.$$

Принимая во внимание первую из формул (101), из которой, в силу суммируемости $f(t)$ на промежутке $(-\infty, +\infty)$, следует

$$\Phi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt,$$

можем переписать предыдущую формулу в виде

$$i \int_0^N \varphi(t) dt = \frac{1}{i} \Phi(0) - \frac{1}{i} \Phi(N),$$

откуда следует, что $\Phi(x) \in D(B)$ и $i\varphi(x) = B\Phi(x)$. Выше мы видели, что T^* преобразует любой элемент Φ из $D(B)$ в элемент f из $D(A)$, и только что показали, что T преобразует любое f из $D(A)$ в Φ

из $D(B)$. Таким образом, между $D(A)$ и $D(B)$ установлено биоднозначное соответствие, причем T преобразует $D(A)$ в $D(B)$ и переходу от $f(x)$ к $xf(x)$ до преобразования соответствует переход от $\Phi(x)$ к $B\Phi(x)=i\varphi(x)$ после преобразования, т. е.

$$B=TAT^*, \tag{102}$$

что приводит к следующей теореме:

Теорема. *Самосопряженные операторы A и B унитарно эквивалентны и имеет место формула* (102), *где T — преобразование Фурье.*

Для спектральной функции $\mathcal{E}'_\lambda$ оператора B мы имеем формулу $\mathcal{E}'_\lambda=T\mathcal{E}_\lambda T^*$, где $\mathcal{E}_\lambda$ определяется формулой (93), т. е.

$$\mathcal{E}'_\lambda f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\lambda}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{iyt}\,dt\right]e^{-ixy}\,dy, \tag{103}$$

или

$$\mathcal{E}_\lambda' f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\lambda} T^*(f)\,e^{-ixy}dy. \tag{104}$$

Мы можем записать $\Phi(x)$ в виде

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)\,dt=-\int_{x}^{\infty}\varphi(t)\,dt, \tag{105}$$

причем нельзя утверждать абсолютной интегрируемости $\varphi(t)$ на бесконечном промежутке, и написанные интегралы надо понимать как пределы интегралов по конечному промежутку при его расширении. Самосопряженный оператор B^{-1}, определяемый, очевидно, формулой $B^{-1}\varphi=-i\Phi$, задан не во всем L_2, но лишь для таких $\varphi(x)$, что $\Phi(x)$, определяемая формулой (105), также принадлежит L_2. Это происходит в результате того, что $\lambda'=0$ принадлежит непрерывному спектру B.

Если мы рассмотрим оператор (94), то оператор $TA'T^*$ будет представлять собой функцию $\omega(B)$ оператора B, так что

$$\omega(B)f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\omega(y)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{iyt}\,dt\right]e^{-ixy}dy. \tag{106}$$

Если $\omega(x)$ — неограниченная функция, то линеал, на котором определен этот оператор, получается из $D(A')$ при помощи оператора T. Напомним, что написанные интегралы с бесконечными пределами надо понимать в смысле сходимости в среднем. Оператор B, как и A, имеет простой непрерывный спектр. Функция $\omega(x)$, входящая в формулу (106) должна, конечно, удовлетворять тем условиям, которые мы формулировали для $f(\lambda)$ в **[197]**.

200. Интегральные операторы. Рассмотрим на промежутке $[a, b]$ интегральный оператор с ядром $K(x, y)$, удовлетворяющим условию

$$K(y, x) = \overline{K(x, y)} \tag{107}$$

и таким, что

$$K^2(x) = \int_a^b |K(x, y)|^2 dy < +\infty \quad (K(x) \geqslant 0) \tag{108}$$

для почти всех x из $[a, b]$. Соответствующий оператор

$$\varphi(x) = Kf(x) = \int_a^b K(x, y) f(y) dy \tag{109}$$

определен на линеале $D(K)$ таких $f(x)$ из L_2 на $[a, b]$, что $\varphi(x)$, определяемая формулой (109) также принадлежит L_2. Рассмотрим еще, как и в **[173]**, линеал l таких функций $f(x)$ из L_2, что

$$\int_a^b K(x) |f(x)| dx < +\infty. \tag{110}$$

Мы видели, что линеал l повсюду плотен в L_2 **[173]**. Покажем, что если $f(x) \in l$, то она и подавно принадлежит $D(K)$.

Отсюда будет следовать, между прочим, что $D(K)$ повсюду плотен в L_2. Пусть $f(x) \in l$. Мы можем написать

$$|\varphi(x)|^2 = \int_a^b K(x, y) f(y) dy \cdot \int_a^b \overline{K(x, t)}\ \overline{f(t)}\, dt,$$

а потому

$$\int_a^b |\varphi(x)|^2 dx \leqslant \int_a^b \int_a^b \int_a^b |K(x, y)|\,|K(x, t)|\,|f(y)|\,|f(t)|\, dy\, dt\, dx, \tag{111}$$

и достаточно проверить, что интеграл, стоящий справа, имеет конечное значение при каком-нибудь порядке интегрирования. По неравенству Буняковского

$$\int_a^b |K(x, y)|\,|K(x, t)|\, dx \leqslant \left[\int_a^b |K(x, y)|^2 dx \cdot \int_a^b |K(x, t)|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= K(y) K(t),$$

и правая часть (111) не превосходит произведения

$$\int_a^b K(y) |f(y)| dy \cdot \int_a^b K(t) |f(t)| dt,$$

которое имеет конечное значение, ибо $f(x) \in l$. Обозначим через $Af(x)$ оператор, определенный формулой (109) на линеале l. Нетрудно показать, что это — симметрический оператор, т. е.

$$\int_a^b \left[\int_a^b K(x, y) f(y)\, dy\right] \overline{\omega(x)}\, dx = \int_a^b \left[\int_a^b K(x, y) \overline{\omega(x)}\, dx\right] f(y)\, dy, \quad (112)$$

если $f(x)$ и $\omega(x)$ принадлежит l, причем, в силу (107),

$$\int_a^b K(x, y) \overline{\omega(x)}\, dx = \overline{\int_a^b K(y, x) \omega(x)\, dx}$$

принадлежит, очевидно, L_2 как функция от y. Для доказательства (112) достаточно убедиться в конечности интеграла

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, y)|\,|f(y)|\,|\omega(x)|\, dy\, dx \quad (113)$$

при каком-либо порядке интегрирования. Интегрируя сначала по x и применяя неравенство Буняковского, убедимся в том, что написанное выражение не превышает

$$\|\omega\| \cdot \int_a^b K(y) |f(y)|\, dy,$$

а эта величина конечна, ибо $f(y) \in l$.

Симметричный оператор A, определенный формулой (109) на линеале l, далеко не всегда является самосопряженным оператором; но он имеет сопряженный A^*. Докажем, что A^* совпадает с оператором K, который определяется той же формулой (109) на линеале $D(K)$ таких $f(x)$ из L_2, что и $\varphi(x) \in L_2$. Пусть для всех $f(x)$ из l имеется формула

$$\int_a^b \left[\int_a^b K(x, y) f(y)\, dy\right] \overline{\omega(x)}\, dx = \int_a^b f(x) \overline{\omega^*(x)}\, dx, \quad (114)$$

где $\omega(x)$ и $\omega^*(x) \in L_2$. Нам надо доказать, что

$$\omega^*(x) = \int_a^b K(x, y) \omega(y)\, dy, \quad (115)$$

откуда будет следовать также, что $\omega(x) \in D(K)$. При доказательстве конечности интеграла (113) мы использовали принадлежность к l только функции $f(x)$. Поэтому в интеграле, стоящем в левой

части (114), можно поменять порядок, и эту формулу можно переписать в виде

$$\int_a^b f(x)\left[\overline{\omega^*(x) - \int_a^b K(x, y)\,\omega(y)\,dy}\right]dx = 0. \qquad (116)$$

Доказательство теоремы из **[173]** непосредственно приводит нас к тому, что разность, стоящая в квадратных скобках, должна равняться нулю, и мы получаем (115). Наоборот, если $\omega(x) \in D(K)$ и $\omega^*(x)$ выражается формулой (115), то из предыдущих вычислений следует непосредственно, что имеет место формула (114). Эти рассуждения приводят нас к следующей теореме:

Теорема. *Пусть* $K(y, x) = \overline{K(x, y)}$ *и выполнено условие* (108). *Пусть* l *— линеал функций* $f(x)$ *из* L_2 *на промежутке* $[a, b]$, *удовлетворяющих условию* (110) *и* $D(K)$ *— линеал функций* $f(x)$ *из* L_2 *таких, что* $\varphi(x)$, *определяемая формулой* (109) *принадлежит* L_2. *При этом линеал* l *повсюду плотен в* L_2 *и входит в линеал* $D(K)$, *Если далее* A *— оператор, определенный формулой* (109) *на линеале* l, *и* K *— оператор, определенный той же формулой на* $D(K)$, *то* A *есть симметричный оператор и* $A^* = K$.

Необходимым условием самосопряженности K является его симметричность, что, в силу (107), приводим к равенству:

$$\int_a^b \left[\int_a^b K(y, x) f(x)\,dx\right]\overline{\omega(y)}\,dy = \int_a^b \left[\int_a^b K(y, x)\,\overline{\omega(y)}\,dy\right] f(x)\,dx, \qquad (117)$$

которое должно быть выполнено для всех $f(x)$ и $\omega(x)$ из $D(K)$. Покажем, что это условие и достаточно для самосопряженности K. Действительно, пусть для всех $f(x)$ из $D(K)$ мы имеем

$$\int_a^b \left[\int_a^b K(x, y) f(y)\,dy\right]\overline{\omega(x)}\,dx = \int_a^b f(x)\,\overline{\omega^*(x)}\,dx,$$

где $\omega(x)$ и $\omega^*(x)$ принадлежат L_2. Нам надо доказать, что $\omega(x) \in D(K)$ и имеет место формула (115), причем, в силу определения $D(K)$, достаточно доказать (115). Вычитая почленно равенство (117), из последнего равенства и принимая во внимание (107), мы получим (116), откуда, в силу произвольности выбора $f(x)$ из $D(K)$, которое содержит l, и будет следовать (115). Таким образом, для того, чтобы оператор K был самосопряженным, необходимо и достаточно, чтобы для любых $f(x)$ и $\omega(x)$ из $D(K)$ выполнялось равенство (117).

Укажем простые примеры самосопряженных операторов в случае ядра, зависящего от разности на бесконечном промежутке $(-\infty, +\infty)$. Пусть $g(t)$ — вещественная четная функция из L_2 на указанном промежутке и $f(x)$ — любая функция из L_2. Обозначим $G(t) = T^*(g)$ и $F(t) = T^*(f)$. Функция $G(t)$ вещественна, так как $g(t)$ — вещественная четная функция. Мы можем написать [149]:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-y) f(y)\, dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} G(t) F(t) e^{-ixt}\, dt, \qquad (118)$$

причем, в силу $G(t) \in L_2$ и $F(t) \in L_2$, произведение $G(t) F(t)$ суммируемо на промежутке $(-\infty, +\infty)$. Пусть l' — линеал таких функций $F(t)$ из L_2, что $G(t) F(t) \in L_2$. На линеале l' правая часть (118) представляет собой $T(GF)$, а потому $\varphi(x)$ должна принадлежать L_2. Обращая внимание на среднюю часть формулы (118), мы можем, таким образом, утверждать, что на линеале l_1', который получается из l' при помощи преобразования T, интегральный оператор K с ядром $g(x-y)$ унитарно эквивалентен операции умножения на функцию $G(t)$ из L_2 и тем самым есть самосопряженный оператор. Напомним, что через $D(K)$ мы обозначаем линеал таких функций $f(x)$ из L_2, что $\varphi(x)$, определяемая формулой (118), также принадлежит L_2. Из предыдущих рассуждений следует только, что l_1' входит в $D(K)$. Можно доказать, что l_1' совпадает с $l(K)$. Это утверждение равносильно, очевидно, следующему: если в формуле (118) $\varphi(x) \in L_2$, то $G(t) F(t) \in L_2$. Совпадение с $D(K)$ непосредственно вытекает из невозможности такого расширения самосопряженного оператора, при котором опять получается самосопряженный оператор. Невозможность такого расширения доказана [187]. Таким образом, если $g(t)$ — вещественная четная функция из L_2, то интегральный оператор с ядром $g(x-y)$ есть самосопряженный оператор в $D(K)$.

201. Расширение замкнутого симметричного оператора. В дальнейшем будем считать A замкнутым симметричным оператором. Докажем две основные для дальнейшего теоремы.

Теорема 1. *Согласно формулам*

$$y = (A + iE) x, \qquad (119)$$

$$z = (A - iE) x, \qquad (120)$$

линеал $D(A)$ элементов x преобразуется биоднозначно в некоторые подпространства $L_i(A)$ и $L_{-i}(A)$, причем, если y и z — элементы этих подпространств, соответствующие одному и тому же x из $D(A)$, то дистрибутивный оператор U, преобразующий y в z:

$$z = U y, \qquad (121)$$

преобразует $L_i(A)$ биоднозначно в $L_{-i}(A)$ с сохранением нормы и скалярного произведения:

$$\|Uy\| = \|y\|; \quad (Uy_1, Uy_2) = (y_1, y_2). \qquad (122)$$

Мы имеем

$$\|(A + iE) x\|^2 = ((A + iE) x, (A + iE) x) =$$
$$= (Ax, Ax) + i(x, Ax) - i(Ax, x) + (x, x),$$

откуда, в силу симметричности A, следует

$$\|(A+iE)x\|^2=\|Ax\|^2+\|x\|^2 \qquad (123)$$
$$(x\in D(A)).$$

Покажем, что формула (119) при различных x дает различные y. Если бы различные x_1 и x_2 из $D(A)$ давали бы одно и то же y, то их разность $x=x_1-x_2$ давала бы $y=0$, и нам надо показать, что из $(A+iE)x=0$ следует $x=0$. Но это непосредственно вытекает из (123). Таким образом, формула (119) переводит $D(A)$ биоднозначно в некоторый линеал $L_i(A)$. Докажем, что он замкнут, т. е. что это есть некоторое подпространство. Принимая во внимание (123), получаем $\|(A+iE)x\|\geqslant\|x\|$, откуда следует, что $(A+iE)^{-1}$ — ограничен. Но в [**184**] мы показали, что если некоторый оператор B замкнут и на $R(B)$ существует ограниченный обратный B^{-1}, то $R(B)$— подпространство. Таким образом доказано, что $L_i(A)$ — подпространство. Совершенно так же из формулы

$$\|(A-iE)x\|^2=\|Ax\|^2+\|x\|^2, \qquad (123_1)$$

аналогичной (123), следует, что формула (120) переводит биоднозначно $D(A)$ в некоторое подпространство $L_{-i}(A)$. Взяв y и z, соответствующие одному и тому же x, мы имеем вполне определенное дистрибутивное преобразование (122), переводящее $L_i(A)$ биоднозначно в $L_{-i}(A)$, причем формулы (123) и (123_1) могут быть записаны в виде $\|y\|^2=\|Ax\|^2+\|x\|^2$ и $\|z\|^2=\|Ax\|^2+\|x\|^2$, т. е. $\|z\|=\|y\|$ или $\|Uy\|=\|y\|$. Отсюда вторая из формул (122) доказывается совершенно так же, как и для унитарных операторов [**137**], и теорема таким образом доказана.

Отметим, что если A есть самосопряженный оператор, то, в силу того, что $\pm i$ суть регулярные точки A, $L_i(A)$ и $L_{-i}(A)$ совпадают с H [**189**] и U есть унитарное преобразование. Если оба указанных подпространства, или по крайней мере одно из двух, не совпадают с H, то U называется обычно изометрическим оператором, т. е. дистрибутивный оператор U, определенный на некотором подпространстве L' и переводящий его биоднозначно в другое подпространство L'' с сохранением нормы элементов (и тем самым скалярного произведения), называется изометрическим оператором. Обратный оператор U^{-1}, переводящий L'' в L', есть, очевидно, также изометрический оператор. Если L' и L'' совпадают с H, то U — унитарный оператор, определенный во всем H. Формулы $y=Ax+ix$ и $Uy=Ax-ix$ переводят $D(A)$ биоднозначно в $L_i(A)$ и $L_{-i}(A)$ и из них следуют формулы

$$x=\frac{1}{2i}(y-Uy);$$

$$Ax = \frac{1}{2}(y + Uy),$$

первая из которых переводит биоднозначно $L_i(A)$ в $D(A)$. Если мы заменим y на $2iy$, что приводит к тому же линеалу $L_i(A)$ элементов y, то получим более простые формулы

$$x = y - Uy; \tag{124}$$

$$Ax = i(y + Uy), \tag{125}$$

первая из которых попрежнему переводит биоднозначно $L_i(A)$ в $D(A)$, а вторая дает соответствующий элемент Ax. Отметим, что линеал $D(A)$, определенный формулой (124), плотен в H. Изометрический оператор U называется преобразованием Кэли замкнутого симметричного оператора A. Докажем теперь теорему, в известном смысле обратную предыдущей.

Теорема 2. *Если U — изометрический оператор, переводящий подпространство L' в подпространство L'', и формула* (124) *для y, принадлежащих L', определяет линеал l, плотный в H, то формула* (125) *определяет на l замкнутый симметричный оператор A, причем U есть преобразование Кэли для A, а L' и L'' совпадают с $L_i(A)$ и $L_{-i}(A)$.*

Прежде всего нам надо показать, что формула (124) при различных y из L' дает различные x, т. е., как и выше, нам надо показать, что из $y_0 - Uy_0 = 0$ следует, что $y_0 = 0$. Составим скалярное произведение (y_0, x). Если мы докажем, что оно равно нулю для любого x из l, то, поскольку этот линеал плотен в H, мы можем утверждать, что $y_0 = 0$. Итак:

$$(y_0, x) = (y_0, y - Uy) = (y_0, y) - (y_0, Uy),$$

или, в силу изометричности U:

$$(y_0, x) = (Uy_0, Uy) - (y_0, Uy) = (Uy_0 - y_0, Uy) = (0, Uy) = 0,$$

что и требовалось доказать. Имея какое-либо x из l, мы, согласно формуле (124), имеем определенное y из L' и по формуле (125) получаем определенное Ax. Таким образом, построен дистрибутивный оператор A. Пусть x' и x'' — два элемента l, а y' и y'' — соответствующие элементы L'. Пользуясь изометричностью U, получаем:

$$\begin{aligned}(Ax', x'') &= (i(y' + Uy'), y'' - Uy'') = \\ &= i(y', y'') + i(Uy', y'') - i(y', Uy'') - i(Uy', Uy'') = \\ &= i(Uy', y'') - i(y', Uy'').\end{aligned}$$

Тот же самый результат мы получим, раскрывая $(x', Ax'') = (y' - Uy', i(y'' + Uy''))$, т. е. $(Ax', x'') = (x', Ax'')$, а потому A

есть симметричный оператор. Докажем замкнутость A. Пусть x_n из l таковы, что

$$x_n \Rightarrow x \text{ и } Ax_n \Rightarrow w. \tag{126}$$

Нам надо показать, что $x \in l$ и $w = Ax$. Обозначим через y_n элементы L', соответствующие x_n, т. е.

$$x_n = y_n - Uy_n; \quad Ax_n = i(y_n + Uy_n); \tag{127}$$

из этих равенств следует, что $y_n = \frac{1}{2i}(Ax_n + ix_n) \Rightarrow \frac{1}{2i}(w + ix)$. Обозначая для краткости письма этот предел через y, можем утверждать, что $y \in L'$, ибо L' есть подпространство, и что $Uy_n \Rightarrow Uy$, ибо U есть изометрический оператор и, следовательно, $\| U(y - y_n) \| = \| y - y_n \|$. Переходя в формулах (127) к пределу, получаем $x = y - Uy$ и $w = i(y + Uy)$, где $y \in L'$, т. е. $x \in l$ и $w = Ax$, что и требовалось доказать. Наконец, из формул (124) и (125) при замене x на $2ix$ следует

$$y = (A + iE)x \text{ и } Uy = (A - iE)x$$
$$(x \in l),$$

откуда и вытекает непосредственно, что U есть преобразование Кэли для A, и что L' и L'' суть $L_i(A)$ и $L_{-i}(A)$; теорема доказана.

Доказанные теоремы приводят непосредственно к выяснению возможности расширения замкнутого симметричного оператора A. Пусть B — замкнутое симметричное расширение A (не совпадает с A). При этом правые части формул

$$y = (B + iE)x; \; z = (B - iE)x$$

определены на линеале $D(B)$, более широком, чем $D(A)$, а для элементов x, принадлежащих $D(A)$, они дают тот же результат, что и правые части формул (119) и (120). Таким образом, подпространства $L_i(B)$ и $L_{-i}(B)$ строго шире подпространств $L_i(A)$ и $L_{-i}(A)$, и если обозначить через V преобразование Кэли оператора B, то можно утверждать что V переводит $L_i(B)$ в $L_{-i}(B)$ и на $L_i(A)$ совпадает с U, т. е. изометрический оператор V есть расширение изометрического оператора U. Пользуясь теоремой 2, мы можем утверждать что и, наоборот, всякое расширение изометрического оператора U, приводящее к изометрическому же оператору V, дает, согласно формулам

$$x = y - Vy; \; Bx = i(y + Vy) \tag{128}$$
$$(y \in D(V)),$$

замкнутый симметричный оператор B, являющийся расширением A. Согласно сказанному выше, только таким

путем и можно получать расширения A, являющиеся замкнутыми симметричными операторами.

Если A — самосопряженный оператор, то $L_i(A)$ и $L_{-i}(A)$ суть все H, и расширение невозможно.

202. Индексы дефекта. Обозначим через $M_i(A)$ и $M_{-i}(A)$ подпространства, дополнительные для $L_i(A)$ и $L_{-i}(A)$, и через p и q размерность $M_i(A)$ и $M_{-i}(A)$. Если, например, $L_i(A)$ есть все H, то $M_i(A)$ отсутствует, и мы считаем $p=0$.

Если $M_i(A)$ конечномерно, то p — число его измерений, и если $M_i(A)$ бесконечномерно, то $p=\infty$. Пара чисел (p, q) определяет так называемые индексы дефекта оператора A. Докажем ряд простых теорем, относящихся к индексам дефекта.

Теорема 1. *Для самосопряженности симметричного замкнутого оператора A необходимо и достаточно, чтобы оба его индекса дефекта были равны нулю.*

Если A — самосопряженный оператор, то, как мы знаем из [**201**], формулы (119) и (120) преобразуют $D(A)$ в H, и, следовательно, $p=q=0$. Положим наоборот, что $p=q=0$. При этом $L_i(A)$ и $L_{-i}(A)$ совпадают с H, и U есть унитарный оператор (определен, как и U^{-1}, во всем H). Пусть $(Ax, v)=(x, v^*)$ для всех x из $D(A)$. Нам надо доказать, что $v\in D(A)$ и $v^*=Av$. В силу (124) и (125), предыдущее равенство переписывается в виде

$$i(y, v)+i(Uy, v)=(y, v^*)-(Uy, v^*),$$

откуда, в силу унитарности U,

$$(y, v^*-U^{-1}v^*+iv+iU^{-1}v)=0,$$

и, ввиду произвольности y, имеем: $v^*+iv=U^{-1}(v^*-iv)$. Обозначая $v^*+iv=2iy'$, имеем $v^*-iv=2iUy'$, откуда $v=y'-Uy'$ и $v^*=i(y'+Uy')$, т. е. $v\in D(A)$ и $v^*=Av$; теорема доказана. Достаточность является также следствием теоремы 2 из [**187**].

Перед доказательством следующих теорем выясним структуру изометрических операторов. Совершенно так же, как и для унитарных операторов [**137**], можно показать, что изометрические преобразования U подпространства L' в подпространство L'' сводятся к преобразованию полной ортогональной нормированной системы $x_1, x_2, \ldots$ в L' в такую же систему $y_1, y_2, \ldots$ в L'', так что $Ux_k=y_k$ (H считается сепарабельным) и

$$U\sum_k a_k x_k=\sum_k a_k y_k.$$

При этом, очевидно, или оба подпространства должны быть бесконечной размерности, или оба должны иметь одно и то же конечное число измерений. Если это условие выполнено, то, ввиду произвольности выбора ортов, мы можем построить бесконечное множество изометрических преобразований L' в L''. Имея изометрический опе-

ратор U, переводящий $L_i(A)$ в $L_{-i}(A)$, мы можем его расширить только путем добавления одинакового числа новых ортов из $M_i(A)$ и $M_{-i}(A)$ и установления между ними попарного соответствия. Из этих соображений непосредственно вытекает следующая общая теорема:

Теорема 2. *Для возможности расширения замкнутого симметричного оператора A с сохранением им симметричности необходимо и достаточно, чтобы оба индекса дефекта оператора A были отличными от нуля. Если это условие выполнено, то имеется бесчисленное множество расширений. Для возможности расширения A до самосопряженного оператора необходимо и достаточно, чтобы индексы дефекта A были одинаковыми (отличными от нуля), и если это так, то указанных расширений существует бесчисленное множество.*

Опишем общую схему расширения оператора A. Выделяя из $M_i(A)$ и $M_{-i}(A)$ какие либо подпространства N_i и N_{-i} с одним и тем же числом измерений, построим какой-либо изометрический оператор V, переводящий N_i в N_{-i}. Определяем для расширенного оператора B подпространство $L_i(B)$ как ортогональную сумму $L_i(A) \bigoplus \bigoplus N_i = L_i(B)$, так что всякий элемент y из $L_i(B)$ единственным образом представим в виде $y = y' + y''$, где $y' \in L_i(A)$ и $y'' \in N_i$. Расширенный изометрический оператор V определяется формулой $Vy = Uy' + Vy''$, правая часть которой представляет собой разложение Vy, принадлежащего $L_{-i}(A) \bigoplus N_{-i}$, в ортогональные подпространства $L_{-i}(A)$ и N_{-i}. Согласно (124), линеал $D(B)$ определяется формулой $x = y' + y'' - Uy' - Vy'' = (y' - Uy') + (y'' - Vy'')$, где $(y' - Uy')$ — любой элемент $D(A)$ и y'' — любой элемент N_i. Запишем этот факт в виде

$$x_B = x_A + x_{N_i} - Vx_{N_i}. \tag{129}$$

Совершенно аналогично формула (125) дает $Bx = i(y' + Uy') + iy'' + iVy'$, т. е.

$$Bx_B = Ax_A + ix_{N_i} + iVx_{N_i}. \tag{130}$$

Если N_i и N_{-i} совпадает с $M_i(A)$ и $M_{-i}(A)$, то последние формулы определяют самосопряженное расширение A. Нетрудно показать, что представление x_B суммой (129) единственно. Иначе говоря, нам надо показать, что если сумма (129) равна нулевому элементу, то и все слагаемые равны нулевому элементу. Действительно, если $x_B = 0$, то и $Bx_B = 0$, и формулы (129) и (130) дают $x_A + x_{N_i} - Vx_{N_i} = 0$ и $Ax_A + ix_{N_i} + iVx_{N_i} = 0$. Умножая первое уравнение на i и складывая со вторым, получим $(A + iE)x_A + 2ix_{N_i} = 0$; в написанной сумме первое слагаемое принадлежит $L_i(A)$, а второе ортогонально $L_i(A)$, откуда следует, что оба они равны нулю, т. е. $x_{N_i} = 0$, а потому $Vx_{N_i} = 0$ и $x_A = 0$, что и требовалось доказать.

Если один из индексов дефекта равен нулю, а другой отличен от нуля, то A не имеет замкнутых симметричных расширений, и такой

оператор называется максимальным. В связи с этим термином самосопряженный оператор, т. е. оператор, у которого оба индекса дефекта равны нулю, называется иначе гипермаксимальным. Положим, что A имеет индексы дефекта (1, 1), т. е. что подпространства $M_i(A)$ и $M_{-i}(A)$ одномерны, и пусть v_0 и w_0 — какие-либо их элементы, при чем $\| v_0 \| = \| w_0 \| \neq 0$, так что все их элементы представимы в виде $v = av_0$, $w = aw_0$, где a — любое комплексное число. Формула $V(av_0) = e^{-i\theta} aw_0$, где θ — любое заданное вещественное число из промежутка $0 \leqslant \theta < 2\pi$, дает изометрическое преобразование $M_i(A)$ в $M_{-i}(A)$, и, добавляя это преобразование к тому преобразованию U, которое переводило $L_i(A)$ в $L_{-i}(A)$, получим унитарный оператор V; формула (128) определяет нам самосопряженный оператор B, который зависит от выбора указанного выше числа θ. Если индексы дефекта A суть (2, 2), то, выбирая какие-либо взаимно ортогональные нормированные элементы v_1, v_2 из $M_i(A)$ и w_1, w_2 из $M_{-i}(A)$, мы положим

$$Vv_k = w_k \qquad (k = 1,2).$$

Фиксируя v_k и выбирая всевозможными способами w_k, получим все различные V. Дополняя изометрическое преобразование U до унитарного V, мы получаем опять по формулам (128) самосопряженный оператор A.

Докажем еще теорему, которая дает новую характеристику подпространств $M_i(A)$ и $M_{-i}(A)$.

Теорема 3. *$M_i(A)$ есть подпространство собственных элементов оператора A^*, соответствующих собственному значению $\lambda = i$, т. е. подпространство решений уравнения $A^*x = ix$, а $M_{-i}(A)$ есть подпространство решений уравнения $A^*x = -ix$.*

Отметим, что, поскольку A^* есть замкнутый оператор, линеал его собственных элементов, соответствующих какому-либо собственному значению, всегда замкнут, т. е. есть подпространство. Элементы v подпространства $M_i(A)$ характеризуются тем, что они ортогональны $(A + iE)x$ при любом x из $D(A)$, т. е. характеризуются равенством $((A + iE)x, v) = 0$, которое может быть переписано в виде $(Ax, v) = (x, iv)$, где x — любой элемент из $D(A)$. Последнее равенство, в силу определения A^*, равносильно тому, что $v \in D(A^*)$ и $A^*v = iv$, и утверждение теоремы относительно $M_i(A)$ доказано. Таким же образом доказывается и утверждение относительно $M_{-i}(A)$. Из доказанной теоремы следует, что наличие индексов дефекта отличных от нуля, связано с тем, что оператор A^* уже не является симметричным на $D(A^*)$ и имеет собственное значение i или $(-i)$, или оба эти числа.

Вместо чисел $\pm i$ мы могли бы взять любое невещественное число λ из верхней полуплоскости и сопряженное с ним число $\bar{\lambda}$. При этом формулы

$$y = (A + \lambda E)x; \quad z = (A + \bar{\lambda}E)x \quad (x \in D(A))$$

совершают биоднозначное преобразование $D(A)$ в некоторые подпространства $L_\lambda(A)$ и $L_{\bar\lambda}(A)$, и мы имеем изометрическое преобразование $z = Uy$ первого из них во второе.

Дополнительные подпространства $M_\lambda(A)$ и $M_{\bar\lambda}(A)$ суть подпространства решений уравнений $A^*x = -\bar\lambda x$ и $A^*x = -\lambda x$. Размерности этих подпространств будем обозначать через (p_λ, q_λ). Это — индексы дефекта A. В дальнейшем будет доказано, что они не зависят от выбора λ из верхней полуплоскости. Формулы (129) и (130) будут иметь вид

$$x_B = x_A + x_{N_\lambda} - Vx_{N_\lambda}, \quad Bx_B = Ax_A - \bar\lambda x_{N_\lambda} + \lambda Vx_{N_\lambda}.$$

Первая из них дает $D(B)$ и ее, очевидно, можно записать в следующем виде:

$$D(B) = D(A) + (E - V)N_\lambda, \tag{129$_1$}$$

где N_λ — некоторое подпространство из $M_\lambda(A)$ и V — изометрический оператор, переводящий N_λ в подпространство $N_{\bar\lambda}$, находящееся в $M_{\bar\lambda}(A)$.

Пусть L_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — линеалы. Назовем прямой суммой L_k множество L элементов, представимых в виде: $x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, где $x_k \in L_k$, если указанное представление x единственно (L — линеал). Формула (129$_1$) дает пример прямой суммы. Прямую сумму записывают часто в виде $L = L_1 \dot+ L_2$ (точка над знаком +).

203. Сопряженный оператор. В теореме 3 мы установили связь между введенными нами подпространствами и сопряженным оператором. Выясним до конца состав линеала $D(A^*)$ и связь между A^* и A. Обозначая через x_A, x_i и x_{-i} любые элементы из $D(A)$, $M_i(A)$ и $M_{-i}(A)$, мы имеем следующую теорему:

Теорема. *Формула*

$$v = x_A + x_i + x_{-i} \tag{131}$$

дает весь линеал $D(A^*)$ *и*

$$A^*v = Ax_A + ix_i - ix_{-i}. \tag{132}$$

Всякий элемент из $D(A^*)$ *представим формулой* (131) *единственным образом.*

Из того факта, что A^* является расширением A, и теоремы 3 из [**202**] следует непосредственно, что элементы v, определяемые формулой (131), принадлежат $D(A^*)$ и что имеет место формула (132). Покажем, что v представимо формулой (131) единственным образом, т. е. что из

$$x_A + x_i + x_{-i} = 0 \tag{133}$$

следует, что все три слагаемые суть нулевые элементы.

Применяя к (133) оператор A^*, получим $Ax_A + ix_i - ix_{-i} = 0$ и, умножая (133) на i и складывая с последним равенством, будем иметь $(A + iE)\,x_A + 2\,ix_i = 0$. Слагаемые левой части этого равенства взаимно ортогональны и потому оба они должны равняться 0, т. е. $x_i = 0$. Точно так же, умножая (133) на $(-i)$, получим $x_{-i} = 0$ и, в силу (133), $x_A = 0$, Остается показать, что всякий элемент v из $D(A^*)$ представим формулой (131). Такой элемент характеризуется тем, что для всех x из $D(A)$ имеет место равенство $(Ax,\ v) = (x,\ v^*)$ или, в силу (124) и (125) $(i(y + Uy), v) = (y - Uy, v^*)$, откуда следует

$$(Uy,\ v^* - iv) = (y,\ v^* + iv) \qquad (134)$$
$$(y \in L_i(A)).$$

Проектируя во взаимно ортогональные подпространства, можем написать:

$$v^* - iv = x_{L_{-i}} + x_{-i};\quad v^* + iv = x_{L_i} + x_i, \qquad (135)$$

где $x_{L_i} \in L_i(A)$ и $x_{L_{-i}} \in L_{-i}(A)$. Подставляя в (134) и пользуясь тем, что $x_{-i} \perp Uy$ и $x_i \perp y$, получим $(Uy,\ x_{L_{-i}}) = (y,\ x_{L_i})$ или, полагая $x_{L_i} = y'$ и $x_{L_{-i}} = Uy''$, где y' и y'' принадлежит $L_i(A)$, можем написать $(Uy,\ Uy'') = (y,\ y')$: далее, в силу изометричности U, $(y,\ y'' - y') = 0$ для любого y из $L_i(A)$ и, в частности, при $y = y'' - y'$, что приводит к равенству $y'' = y'$, т. е. $x_{L_i} = y'$ и $x_{L_{-i}} = Uy'$. Подставляя в (135) и вычитая почленно эти равенства, получим $v = \frac{1}{2i}(y' - Uy') + \frac{1}{2i}x_i - \frac{1}{2i}x_{-i}$, откуда и следует представимость v формулой вида (131), ибо $\frac{1}{2i}x_i \in M_i(A)$ и $-\frac{1}{2i}x_{-i} \in M_{-i}(A)$.

Укажем на одно следствие теоремы. Из нее непосредственно вытекает, что формула

$$w = (A^* - iE)\,v \qquad (136)$$

переводит линеал $D(A^*)$ элементов v в H. Действительно, в силу (131) и (132), получаем $w = (A - iE)\,x_A - 2ix_{-i}$, причем первое слагаемое есть любой элемент из $L_{-i}(A)$, а второе — любой элемент из дополнительного подпространства $M_{-i}(A)$. Таким образом, если толковать (136) как уравнение относительно v, то оно имеет решения при любом w из H. При этом однородное уравнение $(A^* - iE)\,v = 0$ имеет в качестве решения подпространство $M_i(A)$. Если оно не пусто, т. е. первый индекс дефекта $p \neq 0$, то уравнение (136) при любом w имеет бесконечное множество решений $v = v_0 + x_i$, где v_0 — какое-либо частное решение (136), а x_i — произвольный элемент $M_i(A)$. Частное решение v_0 имеет вид (131), и, ввиду возможности добавления к решению любого элемента из $M_i(A)$, мы можем считать, что v_0 не содержит x_i, т. е. решение уравнения (136) может быть записано в виде: $v = (x_A + x_{-i}) + x_i$, где x_A и x_{-i} — опреде-

ленные элементы и x_i — произвольный элемент. Если $p=0$, то x_i отсутствует, и получается определенное решение. Совершенно аналогично уравнение

$$(A^* + iE)\, v' = w'$$

при произвольном w' из H имеет общее решение $v' = (x'_A + x'_i) + x'_{-i}$, где x'_A и x'_i — определенные элементы, а x'_{-i} — произвольно. Если второй индекс дефекта $q=0$, то x'_{-i} отсутствует.

Отметим, что имеют место формулы $v = x_A + x_\lambda + x_{\bar\lambda}$; $A^*v = Ax_A - \bar\lambda x_\lambda - \lambda x_{\bar\lambda}$ ($Im\lambda > 0$), аналогичные формулам (131), (132).

204. Максимальные операторы. Укажем простой прием построения максимальных операторов. Выберем какую-либо полную ортонормированную в H систему

$$x_1,\ x_2 \ldots \tag{137}$$

и определим изометрическое преобразование U формулой $Ux_k = x_{k+1}$ ($k=1,\ 2,\ \ldots$), т. е. для любого элемента y из H

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \quad \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 < +\infty\right)$$

мы имеем

$$Uy = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_{k+1}.$$

Следуя обозначениям из [**201**], можем сказать, что L' есть H, а L'' образовано всеми ортами (137), кроме x_1, и формулы (124) и (125), в которых y — любой элемент H, приведут нас к замкнутому симметричному оператору A с индексами дефекта (0,1). Надо только проверить, что линеал $D(A)$, образованный элементами $y - Uy$, плотен в H. Для этого достаточно, очевидно, показать, что существуют элементы x из $D(A)$ такие, что для любого заданного орта x_k норма $\|x_k - x\|$ сколь угодно мала. Образуем элемент

$$y = \sum_{s=0}^{m-1} \frac{m-s}{m} x_{k+s},$$

где m — некоторое целое положительное число. Мы имеем

$$x = y - Uy = \sum_{s=0}^{m-1} \frac{m-s}{m} x_{k+s} - \sum_{s=0}^{m-1} \frac{m-s}{m} x_{k+s+1} =$$

$$= x_k - \frac{1}{m} \sum_{s=1}^{m} x_{k+s},$$

откуда, в силу теоремы Пифагора и нормированности x_{k+s}, следует

$$\| x_k - x \|^2 = \frac{1}{m^2} \sum_{s=1}^{m} \| x_{k+s} \|^2 = \frac{1}{m},$$

и, беспредельно увеличивая m, будем иметь сколь угодно малые значения для $\| x_k - x \|$, что и требовалось доказать. Максимальный оператор указанного типа называется элементарным симметричным оператором. Если положить $B = -A$, то $D(B)$ совпадет с $D(A)$, а вместо формул (119) и (120) получим: $y = (-B + iE)x$, $z = (-B - iE)x$, откуда при замене x на $(-x)$ видно, что $(B + iE)x$ преобразует линеал $D(B)$ в подпространство $L_{-i}(A)$ и $(B - iE)x$ преобразует $D(B)$ в $L_i(A)$, т. е. при замене A на $(-A)$ L_i и L_{-i} меняются местами, и, следовательно, если A есть указанный выше оператор с индексами дефекта (0,1), то $(-A)$ имеет индексы дефекта (1,0).

Пусть U_0 — унитарный оператор, переводящий орты (137) в орты x_k'. Применение предыдущего приема к ортам x_k' дает нам изометрический оператор $U'x_k' = x_{k+1}'$ и элементарный симметричный оператор A', причем, очевидно, $U' = U_0 U U_0^{-1}$, $A' = U_0 A U_0^{-1}$, и $D(A')$ получается из $D(A)$ при помощи оператора U_0. Можно доказать, что если A — любой замкнутый симметричный оператор с индексами дефекта $(0, q)$, где $q > 0$ и конечно, то H можно представить в виде ортогональной суммы подпространств: $H = L_0 \dot{+} L_1 \dot{+} L_2 \dot{+} \ldots \dot{+} L_q$, приводящих оператор A и таких, что каждое L_k при $k \geqslant 1$ бесконечномерно, а оператор A_k, индуцированный A в L_k, есть элементарный симметричный оператор; подпространство L_0, которое может и отсутствовать, может быть как бесконечномерным, так и конечномерным, и индуцированный в нем оператор A_0 есть самосопряженный оператор. Аналогичный результат имеет место и при $q = \infty$.

В случае индексов дефекта $(p, 0)$ при $p > 0$ операторы A_k обратны по знаку элементарным симметричным операторам.

205. Расширение симметричных полуограниченных операторов. Пусть A — симметричный полуограниченный оператор с нижней границей m_A:

$$(Ax, x) \geqslant m_A (x, x). \tag{138}$$

Будем пока считать, что $m_A > 0$, т. е. что A — определенно положительный оператор. Мы постараемся расширить его так, чтобы он оставался симметричным и чтобы его область значений совпала со всем H. Такое расширение приведет, как известно [**187**], к самосопряженному оператору.

Сопоставим оператору A квадратичный функционал с вещественными значениями

$$J_y(x) = (Ax, x) - (y, x) - (x, y), \tag{139}$$
$$x \in D(A),$$

где y — любой фиксированный элемент H, и рассмотрим задачу о его минимуме.

Теорема 1. *Если уравнение*

$$Ax = y \tag{140}$$

имеет решение $x \in D(A)$, то $J_y(x) \leqslant J_y(z)$, где z — любой элемент из $D(A)$ и знак $=$ имеет место только при $z = x$. Обратно, если для некоторого $x \in D(A)$ имеет место неравенство $J_y(x) \leqslant J_y(z)$, где z — любой элемент из $D(A)$, то x удовлетворяет уравнению (140).

Пусть $x \in D(A)$ и удовлетворяет уравнению (140). При любом $z \in D(A)$, в силу симметричности A, имеем

$$J_y(z) = (Az,\ z) - (y,\ z) - (z,\ y) = (Az,\ z) - (Ax,\ z) - (z,\ Ax) =$$
$$= (A(x - z),\ x - z) - (Ax,\ x) = (A(x - z),\ x - z) + J_y(x)$$

и из неравенств

$$(A(x - z),\ x - z) \geqslant m_A \| x - z \|^2$$

и $m_A > 0$ следует первая часть теоремы.

Обратно, если $x \in D(A)$ и $J_y(x) \leqslant J_y(z)$ для всех $z \in D(A)$, то квадратичная функция $J_y(x + tz)$ вещественного параметра t имеет при $t = 0$ минимум для любого фиксированного $z \in D(A)$. Отсюда следует

$$(Az,\ x) + (Ax,\ z) - (y,\ z) - (z,\ y) = 0,$$

или

$$(Ax,\ z) + (z,\ Ax) - (y,\ z) - (z,\ y) = 0,$$

т. е. $\operatorname{Re}(Ax - y,\ z) = 0$, где Re — знак вещественной части. Заменяя z на iz, получим $\operatorname{Im}(Ax - y,\ z) = 0$, т. е. $(Ax - y,\ z) = 0$, и, поскольку $D(A)$ плотно в H, получаем $Ax - y = 0$, что доказывает вторую часть теоремы.

Из доказанной теоремы не следует, что при любом $y \in H$ функционал $J_y(x)$ достигает при каком-то $x \in D(A)$ наименьшего значения. В связи с этим мы в дальнейшем расширим область определения нашего функционала. Согласно (139) он определен на $D(A)$.

Введем в $D(A)$ новое скалярное произведение, полагая

$$[x,\ y]_A = (Ax,\ y) \text{ или просто } [x,\ y] = (Ax,\ y), \tag{141}$$

и тем самым новую норму

$$\| x \|_A^2 = [x,\ x] = (Ax,\ x). \tag{142}$$

В силу (138) мы имеем неравенство

$$\| x \| \leqslant \frac{1}{\sqrt{m_A}} \| x \|_A. \tag{143}$$

Нетрудно проверить, что элементы линеала $D(A)$ при прежнем определении умножения на число и сложения и при скалярном произведении (141) удовлетворяют всем аксиомам пространства Гильберта, кроме, может быть, аксиомы полноты. Если эта аксиома не выполнена, то мы можем пополнить $D(A)$ новыми идеальными элементами так, чтобы получилось полное гильбертово пространство, которое мы обозначим через H_A. Исследуем это пополнение [85]. Пусть имеется фундаментальная последовательность из $D(A)$ при скалярном произведении (141). В силу (143) она будет фундаментальной последовательностью и в H, и будет иметь в H некоторый предел x' в силу полноты H. Фундаментальные последовательности из $D(A)$ при скалярном произведении (141), принадлежащие одному и тому же классу, приводят к одному и тому же элементу x' из H, т. е. если x_n и $y_n \in D(A)$ $(n=1, 2, \ldots)$ и $\|y_n - x_n\|_A \to 0$ при $n \to \infty$, то и $\|y_n - x_n\| \to 0$. Это следует из (143). Проверим еще тот факт, что фундаментальным последовательностям x_n и y_n из $D(A)$ при скалярном произведении (141), принадлежащим разным классам, соответствуют различные элементы x' и y' из H.

Для любого $z \in D(A)$ мы имеем

$$(Az,\ x_n - y_n) = [z,\ x_n - y_n].$$

Переходя к пределу, получим

$$(Az,\ x' - y') = [z,\ v],$$

где справа v есть элемент H_A, отличный от нулевого, поскольку последовательности x_n и y_n принадлежат разным классам в H_A. Если бы оказалось, что $x' = y'$, то мы имели бы $[z, v] = 0$, а это невозможно, ибо $D(A)$ плотно в H_A, и элемент $v \in H_A$ отличен от нулевого.

Расширим определение функционала $J_y(x)$ на все H_A, полагая

$$\tilde{J}_y(x) = [x,\ x] - (y,\ x) - (x,\ y), \tag{144}$$

и будем исследовать для него прежнюю задачу на минимум. Величина (x, y) при любом фиксированном $y \in H$ является линейным ограниченным функционалом над x в H_A, ибо

$$|(x, y)| \leqslant \|y\| \cdot \|x\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{m_A}} \|y\| \quad \|x\|_A,$$

и по известной теореме **[123]** существует единственный элемент $x_0 \in H_A$ такой, что

$$(x, y) = [x, x_0], \quad (x \in H_A; \quad y \in H) \tag{145}$$

и тем самым $(y, x) = [x_0, x]$. Выражение (144) можно записать в виде

$$\tilde{J}_y(x) = [x,\ x] - [x_0,\ x] - [x,\ x_0] = [x - x_0,\ x - x_0] - [x_0,\ x_0],$$

откуда следует, что $\tilde{J}_y(x_0) \leqslant \tilde{J}_y(x)$ для всех $x \in H_A$, причем знак $=$ имеет место лишь при $x = x_0$. Кроме того, из (145) и того, что H_A плотно в H, следует, что различным $y \in H$ отвечают различные x_0.

Из этой же формулы (145) непосредственно следует, что множество всех решений x_0 вариационных задач, отвечающих всевозможным y из H, есть линеал l. Сказанное выше дает нам возможность определить на l дистрибутивный оператор $\tilde{A}$ формулой

$$\tilde{A}x_0 = y, \tag{146}$$

причем этот оператор имеет обратный, определенный на всем H. В силу теоремы 1 $\tilde{A}$ является расширением A. Вместо l естественно писать $D(\tilde{A})$. Отметим, что $D(\tilde{A}) \subseteq H_A$. Докажем, что $\tilde{A}$ есть симметричный в H оператор. Действительно, из (145) следует

$$(\tilde{A}x_0, x) = [x_0, x] \quad (x_0 \in D(\tilde{A});\ x \in H_A), \tag{147}$$

и, полагая $x = x_0$, будем иметь

$$(\tilde{A}x_0, x_0) \geqslant 0,$$

т. е. $(\tilde{A}x_0, x_0)$ — вещественно при $x_0 \in D(\tilde{A})$, откуда и следует симметричность оператора $\tilde{A}$ [**187**]. Обратный $\tilde{A}^{-1}$ определен во всем H и также симметричен и тем самым есть ограниченный самосопряженный оператор, а потому и $\tilde{A}$ — самосопряженный в H оператор. Мы доказали таким образом следующее:

Теорема 2. *Симметричный оператор A, удовлетворяющий условию* (138) *при* $m_A > 0$, *допускает самосопряженное расширение $\tilde{A}$ такое, что $\tilde{A}^{-1}$ определен во всем H и ограничен.*

Приведенная выше конструкция расширения полуограниченного симметричного оператора принадлежит Фридрихсу (Math. Ann., **109**, 4/5, 1934). Доказательство взято из книги С. Г. Михлина „Проблема минимума квадратичного функционала“ (1952).

Положим теперь, что симметричный оператор A удовлетворяет условию (138) при $m_A \leqslant 0$. При этом симметричный оператор $B = A + (\varepsilon - m_A)E$ $(\varepsilon > 0)$, у которого $D(B) = D(A)$, удовлетворяет условию $(Bx, x) \geqslant \varepsilon(x, x)$ при $x \in D(B)$, и доказанная выше теорема приведет нас к следующему:

Теорема 3. *Всякий симметричный полуограниченный оператор A допускает самосопряженное расширение $\tilde{A}$, такое что при любом $\varepsilon > 0$ оператор $[\tilde{A} + (\varepsilon - m_A)E]^{-1}$ определен на всем H и ограничен.*

Оператор A, если он не самосопряженный, допускает бесчисленное множество самосопряженных расширений. Полученное расширение $\tilde{A}$ называется обычно расширением по Фридрихсу.

Если $x \in D(A)$, то мы имели при $m_A > 0$ неравенство (143). Положим, что $x \in H_A$, но не принадлежит $D(A)$. При этом, по определению H_A, имеется последовательность $x_n \in D(A)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ такая, что $x_n \Rightarrow x$ в норме H_A и тем более в норме H.

Написав неравенство для x_n и пользуясь непрерывностью норм, мы можем утверждать, что при $m_A > 0$ *неравенство* (143) *верно для всего* H_A.

Если $x \in D(\tilde{A})$ и тем самым $x \in H_A$, то из (145) следует, что $(\tilde{A}x, x) = [x, x] = \| x \|_A^2$, и неравенство (143) дает

$$(\tilde{A}x, x) \geqslant m_A (x, x). \tag{148}$$

При доказательстве мы предполагали $m_A > 0$. Если $m_A \leqslant 0$, то строим оператор $B = A + (\varepsilon - m_A) E$, где $\varepsilon > 0$. В силу сказанного выше имеем $(\tilde{B}x, x) \geqslant \varepsilon (x, x)$, где $\tilde{B} = \tilde{A} + (\varepsilon - m_A) E$, откуда следует (148). Таким образом, мы имеем следующий результат.

Теорема 4. *Для* $\tilde{A}$ *имеет место неравенство* (148).

Рассмотрим теперь случай $m_A > 0$ и докажем следующее:

Теорема 5. *Для положительно определенного симметричного оператора* A *имеем* $H_A = D\left(\tilde{A}^{\frac{1}{2}}\right)$ и

$$[x, x] = \| \tilde{A}^{\frac{1}{2}} x \|^2. \tag{149}$$

Докажем сначала, что $H_A \subset D(\tilde{A}^{\frac{1}{2}})$. Пусть $x \in H_A$. Имеется последовательность $x_n \in D(\tilde{A})$ $(n = 1, 2, \ldots)$ такая, что $\| x - x_n \|_A \to 0$, и для x_n имеет место равенство

$$[x_n, x_n] = (\tilde{A}x_n, x_n) = \| \tilde{A}^{\frac{1}{2}} x_n \|^2 = \int_{m_A - 0}^{+\infty} \lambda \, d(\mathcal{E}_\lambda x_n, x_n), \tag{150}$$

где $\mathcal{E}_\lambda$ — спектральная функция $\tilde{A}$.

Принимая во внимание, что

$$\| x - x_n \| \to 0, \qquad \| x_n - x_m \|_A^2 = \| \tilde{A}^{\frac{1}{2}} (x_n - x_m) \|^2 \to 0$$

и замкнутость $\tilde{A}^{\frac{1}{2}}$, можем утверждать, что $x \in D\left(\tilde{A}^{\frac{1}{2}}\right)$,

$$\tilde{A}^{\frac{1}{2}} x_n \Rightarrow \tilde{A}^{\frac{1}{2}} x \quad \text{и} \quad \| \tilde{A}^{\frac{1}{2}} x \| = \| x \|_A$$

(непрерывность норм), т. е. для x верно равенство (149). Для полного доказательства теоремы остается показать, что $D\left(\tilde{A}^{\frac{1}{2}}\right) \subset H_A$. Пусть $x \in D\left(\tilde{A}^{\frac{1}{2}}\right)$, и докажем, что $x \in H_A$.

Рассмотрим последовательность элементов $x_n = \mathcal{E}_n x$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Ясно, что $x_n \in D(\tilde{A})$ и $\| x - x_n \| \to 0$ при $n \to \infty$.

В силу сходимости интеграла

$$\int_{m_A - 0}^{+\infty} \lambda \, d\,(\mathcal{E}_\lambda x,\ x)$$

элементы

$$\tilde{A}^{\frac{1}{2}} x_n = \int_{m_A - 0}^{n} \sqrt{\lambda}\, d\mathcal{E}_\lambda x$$

сходятся к $\tilde{A}^{\frac{1}{2}} x$ в H при $n \to \infty$ и потому

$$\| \tilde{A}^{\frac{1}{2}} (x_n - x_m) \|^2 = (\tilde{A}\,(x_n - x_m),\ x_n - x_m) = \| x_n - x_m \|_A^2 \to 0$$

при m и $n \to \infty$. Это означает, что x_n образует фундаментальную в H_A последовательность. Пусть $\tilde{x}$ — соответствующий ей элемент H_A. Тем самым $x_n \Rightarrow \tilde{x}$ в H_A. Но, как мы видели выше, $x_n \Rightarrow x$ в H, а потому $x = \tilde{x} \in H_A$, что и требовалось доказать.

При $m_A > 0$ оператор $\tilde{A}^{-1}$ определен на всем H и ограничен. Исследуем теперь те случаи, когда он вполне непрерывен. Введем оператор W, который сопоставляет каждому элементу $x \in H_A$ тот же элемент x, как элемент H.

Теорема 6. *Для того, чтобы $\tilde{A}^{-1}$ был вполне непрерывным оператором, необходимо и достаточно, чтобы оператор W вложения H_A в H был вполне непрерывен.*

Доказываем необходимость. Пусть $\tilde{A}^{-1}$ вполне непрерывный оператор. Его спектр чисто точечный, и он находится на промежутке $\left[0, \frac{1}{m_A}\right]$, причем собственные значения, кроме, может быть, нуля, имеют конечный ранг, и только точка $\lambda = 0$ является точкой сгущения спектра [**136**]. У самосопряженного положительного оператора $\tilde{A}^{-\frac{1}{2}}$ спектр имеет тот же характер: каждое собственное значение λ заменяется на $\sqrt{\lambda}$ и собственные элементы остаются прежними.

Таким образом, $\tilde{A}^{-\frac{1}{2}}$ — также вполне непрерывный положительный оператор. Возьмем какое-нибудь ограниченное в H_A множество U так, что если $x \in U$, то $\| x \|_A \leqslant C$, где C — определенная постоянная. Мы можем применить к x оператор $\tilde{A}^{\frac{1}{2}}$. Пусть $y = \tilde{A}^{\frac{1}{2}} x$ так, что $x = \tilde{A}^{-\frac{1}{2}} y$. Мы имеем $\| y \|^2 = (\tilde{A}^{\frac{1}{2}} x,\ \tilde{A}^{\frac{1}{2}} x) = \| x \|_A^2 \leqslant C^2$, т. е. множество элементов $\tilde{A}^{\frac{1}{2}} x$ ограничено в H, и вполне непрерывный

оператор $\tilde{A}^{-\frac{1}{2}}$ преобразует их в компактное множество в H, т. е. действительно ограниченное в норме H_A множество из H_A компактно в H, т. е. оператор W вполне непрерывен.

Доказываем достаточность. Пусть W — вполне непрерывный оператор и U — ограниченное в H множество элементов: если $x \in U$, то $\|x\| \leqslant C$. Надо доказать, что $y = \tilde{A}^{-1} x$ — компактное в H множество. Элементы y принадлежат, очевидно, $D(\tilde{A})$, и мы имеем

$$\|y\|_A^2 = (\tilde{A} y,\ y) = (x, y) \leqslant C\|y\| \leqslant \frac{C}{\sqrt{m_A}}\|y\|_A, \quad \text{откуда} \quad \|y\|_A \leqslant \frac{C}{\sqrt{m_A}},$$

т. е. множество ограничено в норме H_A и тем самым, в силу того, что W — вполне непрерывный оператор, компактно в H. Теорема доказана.

206. Сравнение полуограниченных операторов. Пусть A и B — полуограниченные самосопряженные операторы. Говорят, что A не меньше B, и пишут $A \geqslant B$, если $D(A) \subseteq D(B)$ и

$$(Ax,\ x) \geqslant (Bx,\ x) \text{ при } x \in D(A). \tag{151}$$

Если A и B имеют чисто точечный спектр и собственные значения A и B можно пронумеровать в порядке их неубывания, учитывая их кратность, то, перенося минимо-максимальный принцип [136] на случай неограниченных операторов, можно показать, что $\lambda_n(A) \geqslant \lambda_n(B)$, где $\lambda_n(A)$ и $\lambda_n(B)$ n-ое собственное значение A и B. Мы докажем несколько более общую теорему.

Теорема. *Пусть $A \geqslant B$ и спектр B, расположенный на полупрямой $\lambda < \beta$ при некотором β, состоит из собственных значений конечной кратности, которые не имеют точек сгущения, меньших β. При этом спектр A обладает тем же свойством и $\lambda_n(A) \geqslant \lambda_n(B)$ на упомянутой полупрямой.*

Достаточно показать, что при любом $\delta < \beta$, причем δ отлично от собственных значений A и B, размерность подпространства, соответствующего проектору $\mathcal{E}_\delta$, не больше размерности подпространства, соответствующего проектору F_δ, где $\mathcal{E}_\lambda$ и F_λ — спектральные функции A и B:

$$\dim \mathcal{E}_\delta H \leqslant \dim F_\delta H. \tag{152}$$

Предположим, что имеет место обратное неравенство. При этом в $\mathcal{E}_\delta H$ должен существовать нормированный элемент x_0, ортогональный ко всему $F_\delta H$. Отметим, что $x_0 \in D(A)$ и тем самым $x_0 \in D(B)$, ибо x_0 из $\mathcal{E}_\delta H = (\mathcal{E}_\delta - \mathcal{E}_{m_A - 0}) H$. Мы имеем

$$(Ax_0,\ x_0) = \int_{m_A - 0}^{+\infty} \lambda d(\mathcal{E}_\lambda x_0,\ x_0) = \int_{m_A - 0}^{\delta} \lambda d(\mathcal{E}_\lambda x_0,\ x_0) \leqslant \delta \|x_0\| = \delta. \tag{153}$$

С другой стороны, в силу $x_0 \perp F_\delta H$ имеем

$$(Bx_0,\ x_0) = \int_{m_B - 0}^{+\infty} \lambda d\,(F_\lambda\ x_0,\ x_0) = \int_{\delta}^{+\infty} \lambda d\,(F_\lambda\ x_0,\ x_0).$$

Но, поскольку F_λ постоянно в некоторой окрестности точки $\lambda = \delta$, существует такое $\varepsilon > 0$, что

$$(Bx_0, x_0) = \int_{\delta + \varepsilon}^{\infty} \lambda d\,(F_\lambda\ x_0,\ x_0) \geqslant \delta + \varepsilon.$$

Это неравенство противоречит (151) и (153), и тем самым неравенство (152) доказано.

Замечание. Вернемся к симметричным полуограниченным операторам. Пусть A — такой оператор (не обязательно определенно положительный). Определим для него пространство H_A. Пусть α — любое число, удовлетворяющее неравенству $\alpha > -m_A$, так что оператор $A + \alpha E$ — положительно определенный. Будем считать, что H_A состоит из всех элементов $H_{A+\alpha E}$ и введем в H_A билинейный функционал $[x, y]_A$, который является расширением (Ax, y) на все H_A:

$$[x,\ y]_A = [x,\ y]_{A+\alpha E} - \alpha\,(x,\ y). \tag{154}$$

Функционал $[x, y]_A$ непрерывен на H_A. Нетрудно показать, что

$$[x,\ y]_A = \int_{m_A - 0}^{+\infty} \lambda d\,(\mathcal{E}_\lambda\ x,\ y), \tag{155}$$

где $\mathcal{E}_\lambda$ — спектральная функция самосопряженного оператора $\tilde{A}$. Отметим еще, что $H_{A+\alpha E}$ состоит при всех $\alpha > -m_A$ из одних и тех же элементов. Это следует из того, что $D(A + \alpha E)$ не зависит от α, и при всех $\alpha > -m_A$ нормы $H_{A+\alpha E}$ эквивалентны. Отметим, что оператор A может быть и самосопряженным.

Нетрудно показать, что условие (151) равносильно условию

$$[x,\ x]_A \geqslant [x,\ x]_B,$$

а также тот факт, что спектр самосопряженного оператора $\tilde{A}$ на полупрямой $\lambda < \beta$, где роль β указана в теореме, можно найти как последовательные нижние грани (Ax, x) при $x \in D(A)$ и $\|x\| = 1$, при условии ортогональности x к уже найденным собственным элементам [ср. **136**]. Можно заменить эту задачу на задачу последовательных минимумов $[x, x]_A$ при $x \in H_A$ и $\|x\| = 1$.

207. Примеры на теорию расширений. 1. Мы доказали раньше, что оператор $D = i\dfrac{d}{dx}$ в пространстве $H = L_2(0, +\infty)$ не имеет самосопряженных расширений [**188**]. Мы будем придерживаться здесь обозначений из [**188**] и

докажем упомянутый результат, пользуясь индексами дефекта. Напомним, что замкнутый симметричный оператор $\bar{A}$ есть оператор D, определенный на множестве функций $\varphi(x)$, абсолютно непрерывных на любом конечном промежутке $[0, a]$ с производной из $L_2(0, +\infty)$ и удовлетворяющих условию $\varphi(0) = 0$. Оператор $\bar{A}^*$ есть оператор D на множестве функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих указанным выше условиям, кроме условия $\varphi(0) = 0$.

Построим пространства $M_i(\bar{A})$ и $M_{-i}(\bar{A})$ собственных элементов оператора $\bar{A}^*$, соответствующих собственным значениям $\pm i$, т. е. подпространства решений уравнений $\bar{A}^* \psi(x) = \pm i\psi(x)$ или $i\psi'(x) = \pm i\psi(x)$. Мы получаем $\psi(x) = Ce^x$ и $\psi(x) = Ce^{-x}$. Но e^x не принадлежит $L_2(0, +\infty)$, и мы видим, что индексы дефекта оператора $\bar{A}$ суть (0,1). Оператор $\bar{A}$ является максимальным оператором, $L_i(\bar{A})$ есть все $L_2(0, +\infty)$ и $L_{-i}(\bar{A})$ состоит из функций, принадлежащих $L_2(0, +\infty)$ и ортогональных e^{-x} на промежутке $(0, +\infty)$.

Если ввести ортонормированную систему функций Лагерра: $\varphi_k(x) = e^{-x} p_k(x)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, где $p_k(x)$ — полином степени k, то нетрудно показать, что $U\varphi_k(x) = \varphi_{k+1}(x)$, где U — изометрический оператор, переводящий $L_i(\bar{A})$ в $L_{-i}(\bar{A})$, т. е. $\bar{A}$ есть элементарный симметричный оператор.

2. Рассмотрим оператор $L(y) = -y''$ в пространстве $H = L_2(-\infty, +\infty)$. Через A обозначим этот оператор на линеале $D(A)$ финитных функций, имеющих непрерывные производные до второго порядка. Это — симметричный оператор. Сопряженный A^* есть, как нетрудно показать, тот же оператор $L(y)$ на линеале функций $y(x)$ со следующими свойствами: $y(x)$ и $y'(x)$ — абсолютно непрерывные на любом конечном промежутке, а $y(x)$ и $y''(x) \in L_2(-\infty, +\infty)$. Можно показать, что при этом и $y'(x) \in L_2(-\infty, +\infty)$. Оператор $A^{**} = \bar{A}$ совпадает с A^*, т. е. $\bar{A}$ есть самосопряженный оператор [ср. **188**]. Уравнения $-y'' = \pm iy$ не имеют решений из $L_2(-\infty, +\infty)$. Рассмотрим теперь тот же оператор $L(y)$ на промежутке $[0, +\infty]$. Пусть l' — линеал функций $y(x)$ со следующими свойствами: $y(x)$ и $y'(x)$ абсолютно непрерывны на любом конечном промежутке $[0, a]$, а $y(x)$ и $y''(x) \in L_2(0, +\infty)$. Определим еще линеал l тех элементов $y(x)$ из l', которые удовлетворяют условиям $y(0) = y'(0) = 0$ и

$$\lim_{x \to +\infty} (-y'\bar{z} + y\bar{z}') = 0,$$

при всяком $z(x) \in l'$.

Если A есть оператор $L(y)$ на l, то A^* есть тот же оператор на l', причем A — замкнутый симметричный оператор. Уравнения $-y'' = \pm iy$ имеют по одному (с точностью до постоянного множителя) решению из $L_2(0, +\infty)$

$$y = e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1 \mp i)x},$$

так что индексы дефекта A суть (1,1). Для получения самосопряженного расширения надо поставить одно предельное условие на конце $x = 0$. В случае условия $y(0) = 0$ оператор не имеет точечного спектра, и непрерывный спектр заполняет промежуток $\lambda \geqslant 0$. Имеется единственное дифференциальное решение

$$y(x) = \frac{1}{x}\left(\sqrt{\lambda}\cos\lambda x - \frac{1}{x}\sin\sqrt{\lambda}\, x\right).$$

Строя резольвенту, т. е. решение уравнения $-y'' + (\sigma + \tau i)y = f(x)$ при условии $y(0) = 0$ и $\tau > 0$, и переходя к пределу, получим спектральную функцию

$$\mathcal{E}_\lambda f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{2\lambda}(x-t)}{x-t} f(t)\,dt - \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{\lambda}(x+t)}{x+t} f(t)\,dt.$$

Все эти результаты получаются при помощи простых вычислений. Нетрудно показать, что если $y(x) \in D(A^*)$, то $y'(x) \in L_2(0, +\infty)$. Теория линейных дифференциальных операторов второго порядка будет изложена в шестом томе.

3. В [188] мы рассмотрели оператор Лапласа в пространстве $L_2(D)$. Для указанного там оператора A выполнены все условия теоремы 3 из [187], и мы рассмотрим самосопряженное расширение A по Фридрихсу. Пространство H_A получается пополнением $D(A)$ в метрике:

$$\|u\|_A = \sqrt{(Au, u)} = \sqrt{\int_D -\Delta u \cdot \bar{u} dx} = \sqrt{\int_D \sum_i |u_{x_i}|^2 dx}.$$

Но эта норма эквивалентна норме $W_2^{(1)}(D)$ [114], и, следовательно, H_A есть $\overset{0}{W}{}_2^{(1)}(D)$. Напомним, что $\overset{0}{W}{}_2^{(1)}(D)$ получается пополнением в норме $M_0^{(1)}(D)$ множества всех один раз непрерывно дифференцируемых финитных функций. Но нетрудно видеть (процесс усреднения), что в качестве исходного множества можно было бы брать бесконечное число раз непрерывно дифференцируемые финитные функции. Функционал $J_f(u)$ на $u \in D(A)$ имеет вид

$$J_f(u) = \int_D [-\Delta u \cdot \bar{u} - 2\mathrm{Re}(u\bar{f})]\, dx, \tag{156}$$

где $f(x) \in L_2(D)$, или

$$J_f(u) = \int_D \left[\sum_i |u_{x_i}|^2 - 2\mathrm{Re}(u\bar{f})\right] dx. \tag{157}$$

В этом виде он имеет смысл для любой функции $u \in \overset{0}{W}{}_2^{(1)}(D)$, и вариационная задача из [205] состоит в нахождении той функции $u \in \overset{0}{W}{}_2^{(1)}(D)$, которая дает наименьшее значение функционалу (157). Мы видели, что эта задача имеет единственное решение при любом $f(x) \in L_2(D)$. Присоединяя все эти решения, полученные при различном выборе $f(x) \in L_2(D)$ к $D(A)$, мы придем к самосопряженному расширению $\tilde{A}$ оператора A, причем

$$\tilde{A}u = f. \tag{158}$$

Поскольку $\tilde{A}$ — самосопряженное расширение A, мы имеем $D(\tilde{A}) \subseteq D(A^*)$. Но функции из $D(A^*)$ имеют внутри D обобщенные производные до второго порядка включительно, квадратично суммируемые по любой области D', лежащей строго внутри D, и оператор A^* на них вычисляется как оператор Лапласа [188]. Поэтому и $\tilde{A}$ есть оператор Лапласа, т. е. уравнение (158) имеет вид

$$-\sum_i u_{x_i x_i} = f(x). \tag{159}$$

Итак, мы показали, что решение указанной выше вариационной задачи принадлежит не только $\overset{0}{W}{}_2^{(1)}(D)$, но и $W_2^{(2)}(D')$, где D' — любая область, лежащая строго внутри D, и что оно удовлетворяет уравнению Пуассона.

С другой стороны, уравнение (159) имеет бесчисленное множество решений из $L_2(D)$. Достаточно к упомянутому выше решению добавить гармоническую функцию из $L_2(D)$. Условие принадлежности решения $\overset{0}{W}{}_2^{(1)}(D)$ выделяет из этого класса решений одно, которое мы и получили из вариационной задачи. Это решение должно обращаться в определенном смысле в нуль на границе

S области D [113]. Отсюда ясна связь построенного расширения A с задачей Дирихле для уравнения Пуассона:

$$-\Delta u = f(x);\ u|_S = 0. \tag{160}$$

Все, что доказано выше для оператора Лапласа, справедливо и для общих линейных эллиптических самосопряженных операторов второго порядка [IV; 147]. Из теории расширения по Фридрихсу следует для них разрешимость задачи Дирихле в обобщенном смысле — в смысле принадлежности решения к $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(D)$. Оказывается, что в действительности это обобщенное решение задачи Дирихле, соответствующее расширению эллиптического оператора по Фридрихсу, принадлежит $W_2^{(2)}(D')$ или даже $W_2^{(2)}(D)$, если только S — достаточно гладкая поверхность. Это установлено в работе О. А. Ладыженской „О замыкании эллиптического оператора“ (Докл. АН СССР, т. 79, № 5, 1951). Этому же вопросу посвящена работа О. А. Ладыженской „Простое доказательство разрешимости краевых задач и задачи о собственных значениях для линейных эллиптических операторов“ („Вестник Ленинградского университета“, № 11, 1955).

208. Спектр симметричного оператора. Мы ввели выше понятие спектра самосопряженного оператора и установили классификацию его точек. В ближайших параграфах мы сделаем это для замкнутого симметричного оператора и исследуем изменение спектра при симметричных расширениях оператора.

Пусть A — замкнутый симметричный оператор. Число λ называется точкой регулярного типа оператора A, если существует такое $k > 0$, что для всех $x \in D(A)$:

$$\|(A - \lambda E)x\| \geqslant k\|x\| \ (x \in D(A). \tag{161}$$

Из замкнутости A и (161) следует, что $R(A - \lambda E)$ есть подпространство и $(A - \lambda E)^{-1}$ есть линейный ограниченный на $R(A - \lambda E)$ оператор. Обратно, если $(A - \lambda E)^{-1}$ существует на $R(A - \lambda E)$ и есть ограниченный оператор, то отсюда следует (161), т. е. λ есть точка регулярного типа. Как и в [129], легко доказывается, что множество точек регулярного типа — открытое множество. Число λ называется регулярной точкой A, если выполнено (161) и $R(A - \lambda E)$ есть все H. Если $R(A - \lambda E) = H$, то λ не собственное значение A, ибо $R(A - \lambda E)$ должно быть ортогонально к собственным элементам, и $(A - \lambda E)^{-1}$ — ограниченный в H оператор [186], т. е. выполнено (161).

Если λ — вещественная регулярная точка A, то $(A - \lambda E)^{-1}$ есть ограниченный самосопряженный оператор, и, следовательно, A — самосопряженный оператор. Покажем, что множество регулярных точек — открытое множество. Достаточно показать, что если λ_0 — регулярная, то уравнение

$$(A - \lambda E)x = y \tag{162}$$

однозначно разрешимо при любом $y \in H$, если λ достаточно близко к λ_0. Положим, что

$$|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|(A - \lambda_0 E)^{-1}\|}.$$

Уравнение (161) перепишем в виде

$$(A-\lambda_0 E)\,x+(\lambda_0-\lambda)\,x=y,$$

и оно эквивалентно уравнению

$$x=(\lambda-\lambda_0)\,(A-\lambda_0 E)^{-1}\,x+(A-\lambda_0 E)^{-1}y,$$

а это последнее однозначно разрешимо при любом $y\in H$ [88], ибо

$$\|(\lambda-\lambda_0)\,(A-\lambda_0 E)^{-1}\|<1.$$

Как и в [129], доказывается, что если $\lambda=\sigma+\tau i$ и $\tau\neq 0$, то

$$\|(A-\lambda E)\,x\|\geqslant|\tau|\,\|x\|\ (x\in D(A)), \tag{163}$$

т. е. все невещественные значения λ суть точки регулярного типа.

Положим, что точка $\lambda_0=\sigma+\tau i$, где $\tau\neq 0$, есть регулярная точка. При этом, в силу (163) и сказанного выше о разрешимости уравнения (162), все значения λ, удовлетворяющие условию $|\lambda-\lambda_0|<|\tau|$ будут также регулярными точками. Отправляясь от регулярного значения λ_0 и применяя должное число раз проведенное только что рассуждение, мы убедимся в том, что всякое невещественное число $\lambda=\sigma'+\tau' i$, у которого знак τ' совпадает со знаком τ, есть регулярная точка. Это утверждение можно сформулировать в следующем виде:

Лемма. *Если один из индексов дефекта p_λ или q_λ оператора A равен нулю при $\lambda=\lambda_0$ $(Jm\lambda_0>0)$, то он равен нулю для всех λ из полуплоскости $Jm\lambda>0$.*

Для самосопряженного оператора все невещественные значения λ суть регулярные точки. Дадим пример замкнутого симметричного оператора A, у которого нет регулярных точек. Пусть H есть $L_2(0,1)$ и A есть оператор $i\frac{d}{dx}$, рассматриваемый на множестве функций $\varphi(x)$ таких, что $\varphi(x)$ абсолютно непрерывна, на промежутке $[0,1]$, $\varphi(0)=\varphi(1)=0$ и $\varphi'(x)$ принадлежит $L_2(0,1)$. Это замкнутый симметричный оператор [188]. При любом выборе числа λ функция $e^{-i\bar{\lambda}x}$ принадлежит $L_2(0,1)$ и ортогональна ко всем функциям $\psi(x)$, представимым в виде

$$\psi(x)=i\frac{d\varphi(x)}{dx}-\lambda\varphi(x),$$

где $\varphi(x)\in D(A)$, т. е. $e^{-i\bar{\lambda}x}$ ортогональна к $R(A-\lambda E)$, откуда и следует, что λ не есть регулярная точка.

Назовем спектром оператора A множество точек плоскости λ, дополнительное к множеству регулярных точек. Это есть множество тех точек λ, в которых $(A-\lambda E)$ не имеет ограниченного обратного, определенного на всем H. Назовем ядром спектра оператора A множество точек, дополнительное к множеству точек регулярного

типа. Спектр и ядро спектра — замкнутые множества, и первое множество (спектр) содержит второе (ядро спектра). Ядро спектра должно лежать на вещественной оси. Спектр может заполнять всю плоскость, как это видно из приведенного выше примера.

Если A — самосопряженный оператор, то ядро спектра совпадает со спектром [189].

Нетрудно видеть, что ядро спектра A принадлежит ядру спектра любого замкнутого симметричного расширения оператора A. Это следует из того, что принадлежность λ ядру спектра A равносильна тому, что существует такая последовательность x_n нормированных элементов из $D(A)$, что $(A-\lambda E)x_n \Rightarrow 0$ при $n \to \infty$. Это свойство, очевидно, сохраняется при указанных выше расширениях A.

Проведем теперь классификацию точек ядра спектра оператора A. Предварительно рассмотрим тот случай, когда λ есть собственное значение A (λ — вещественное число). Пусть P_λ — подпространство соответствующих собственных элементов (включая нулевой элемент). Мы можем представить линеал $D(A)$ в виде ортогональной суммы

$$D(A) = P_\lambda \oplus D_\lambda(A), \tag{164}$$

где $D_\lambda(A)$ есть линеал, состоящий из элементов, содержащихся одновременно в $H \ominus P_\lambda$ и $D(A)$. Обозначим через A_λ оператор A, определенный на $D_\lambda(A)$ и совпадающий на этом линеале с A. Если λ не собственное значение, то P_λ отсутствует и $D_\lambda(A)$ совпадает с $D(A)$. В этом случае будем считать, что A_λ есть A. Мы можем утверждать, что $(A_\lambda - \lambda E)$, рассматриваемый как оператор в $H \ominus P_\lambda$, имеет при всяком λ обратный $(A_\lambda - \lambda E)^{-1}$, определенный на $R(A-\lambda E)$. Значения λ, при которых $(A_\lambda - \lambda E)^{-1}$ есть неограниченный оператор, принадлежат ядру спектра. Эту часть ядра спектра назовем непрерывной частью ядра спектра. Собственные значения также принадлежат ядру спектра, и эту часть будем называть точечной частью ядра спектра. Всякая точка ядра спектра принадлежит одной из указанных частей, но может принадлежать и им обеим. Будем говорить, что собственное значение принадлежит чисто точечной части ядра спектра, если $(A_\lambda - \lambda E)^{-1}$ — есть ограниченный на $R(A-\lambda E)$ оператор. Всякая точка ядра спектра принадлежит или непрерывной или чисто точечной части ядра спектра и притом только одной из них. При замкнутом симметричном расширении A непрерывная и точечная части ядра спектра могут только расширяться. Нетрудно видеть, что, в силу замкнутости A и A_λ, непрерывная часть ядра спектра A характеризуется тем, что $R(A-\lambda E)$ есть незамкнутый линеал.

209. Некоторые теоремы о расширениях и их спектрах. Начнем с доказательства следующей теоремы:

Теорема I. *Если λ — вещественная точка регулярного типа замкнутого симметричного оператора A, то существует такое*

самосопряженное расширение $\tilde{A}$ оператора A, для которого λ — регулярная точка.

Не ограничивая общности, можно считать $\lambda = 0$. Из условий теоремы следует, что $R(A)$ — подпространство, и на нем определен ограниченный обратный оператор A^{-1} [208]. Надо доказать, что существует такое самосопряженное расширение $\tilde{A}$ оператора A, для которого $R(\tilde{A}) = H$ [189]. При указанных условиях мы имеем:

$$H = R(A) \oplus U,$$

где U — подпространство всех решений уравнения: $A^*u = 0$ [185]. Известно, что в рассматриваемом случае $R(A^*) = H$ [187], и, следовательно, для любого $u \in U$ существует по крайней мере одно решение уравнения

$$A^*v = u. \tag{165}$$

Обозначим через V линеал всех решений уравнения (165), когда u пробегает все U. Очевидно, что $U \subseteq V \subseteq D(A^*)$. Обозначим через $\tilde{U}$ линеал элементов V, ортогональных U, и построим линеал l элементов x, представимых в виде

$$x = y + \tilde{u}, \tag{166}$$

где $y \in D(A)$ и $\tilde{u} \in \tilde{U}$. Покажем, что представление x в виде (166) единственно. Если бы это было не так, то существовал бы элемент z, отличный от нулевого, принадлежащий одновременно $D(A)$ и $\tilde{U}$. Но тогда $Az \in R(A)$ и $Az = A^*z \in U$, ибо $z \in \tilde{U}$, и тем самым $z \in V$. Но $R(A) \perp U$ и потому $Az = 0$, т. е. $z \in U$, что совместно с $z \in \tilde{U}$ дает $z = 0$. Этим доказана единственность представления (166), т. е. l — прямая сумма: $D(A) \dotplus \tilde{U}$. Определим теперь на линеале l оператор $\tilde{A}$, полагая $\tilde{A}x = Ay + A^*\tilde{u}$, и линеал l обозначим через $D(\tilde{A})$. Очевидно $A \subseteq \tilde{A} \subseteq A^*$. Покажем, что $\tilde{A}$ удовлетворяет всем требованиям теоремы. На линеале $D(A)$ оператор $\tilde{A}$ совпадает с A и на $\tilde{U}$ оператор A^* дает все U, что следует из определения $\tilde{U}$ и того факта, что $A^*u = 0$ при $u \in U$. Таким образом, $R(\tilde{A}) = H$. Остается показать симметричность $\tilde{A}$ на $D(\tilde{A})$ [187]. Отметим сначала, что

$$(A^*\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) = (\tilde{u}_1, A^*\tilde{u}_2) = 0 \quad (\tilde{u}_1 \text{ и } \tilde{u}_2 \in \tilde{U}).$$

Пусть x_1 и $x_2 \in D(\tilde{A})$. Тогда, согласно (166), $x_1 = y_1 + \tilde{u}_1$, $x_2 = y_2 + \tilde{u}_2$, и мы имеем

$$(\tilde{A}x_1, x_2) = (Ay_1 + A^*\tilde{u}_1, x_2) = (y_1, A^*x_2) + (A^*\tilde{u}_1, y_2) =$$
$$= (y_1, A^*x_2) + (\tilde{u}_1, Ay_2) = (y_1, A^*x_2) + (\tilde{u}_1, Ay_2) + (\tilde{u}_1, A^*\tilde{u}_2) =$$
$$= (y_1, A^*x_2) + (\tilde{u}_1, \tilde{A}x_2) = (x_1, \tilde{A}x_2).$$

Теорема доказана.

Можно показать, что если A^{-1} вполне непрерывен, то и $\tilde{A}^{-1}$ вполне непрерывен. Подробному изучению таких расширений операторов, как абстрактных, так и дифференциальных, посвящены работы М. И. Вишика (Труды Московского математического общества, т. I, 1952 г.) и L. Hörmander'a (Acta Mathematica, 94, 3—4, 1955).

Следствие 1. *Если вещественное число λ принадлежит чисто точечной части ядра спектра, то существует самосопряженное расширение $\tilde{A}$ оператора A, для которого λ также принадлежит чисто точечному спектру с тем же подпространством P_λ собственных элементов, что и у A.*

Оператор A, рассматриваемый в подпространстве $H_1 = H \ominus P_\lambda$ является, как нетрудно видеть, замкнутым симметричным оператором и удовлетворяет условиям теоремы 1. Тем самым он допускает в H_1 самосопряженное расширение $\tilde{A}_1$, для которого λ есть регулярная точка. Оператор $\tilde{A}$ с областью определения $D(\tilde{A}) = D(\tilde{A}_1) \oplus P_\lambda$, совпадающий с A_1 на $D(\tilde{A}_1)$ и с A на P_λ, и будет, очевидно, указанным в следствии расширением.

Следствие 2. *Если A — максимальный, но несамосопряженный оператор, то непрерывная часть ядра спектра A заполняет всю вещественную ось.*

Действительно, в противном случае оператор A имел бы самосопряженные расширения.

Следствие 3. *Если имеется вещественное λ, не принадлежащее непрерывной части ядра спектра A, то при любом $\lambda(\mathrm{Im}\lambda > 0)$ индексы дефекта p_λ и q_λ одинаковы.*

Это следует из того, что A при указанном условии имеет самосопряженные расширения.

Теорема 2. *Пусть вещественное λ — точка регулярного типа замкнутого симметричного оператора A и $U = H \ominus R(A - \lambda E)$. При этом существует самосопряженное расширение $\tilde{A}$ оператора A, для которого λ принадлежит чисто точечному спектру и U является собственным подпространством, отвечающим λ.*

Без ограничения общности будем считать $\lambda = 0$. Отметим, что $R(A)$ и U суть подпространства, причем U есть множество решений уравнения $A^*z = 0$. Обозначим через $D(A) + U$ множество элементов вида $x = y + z$, где $y \in D(A)$ и $z \in U$.

Представление в указанном виде единственно. Действительно, в противном случае мы имели бы такой элемент x_0, отличный от нулевого, что $x_0 \in D(A)$ и $x_0 \in U$. Отсюда следует, что $(x_0, Ax) = 0$ $(x \in D(A))$ и $(Ax_0, x) = 0$. Но, поскольку $D(A)$ плотно в H, получаем $Ax_0 = 0$, а это противоречит тому, что $\lambda = 0$ точка регулярного типа.

Таким образом, мы можем определить на прямой сумме: $D(\tilde{A}) = D(A) \dot{+} U$ оператор $\tilde{A}$, полагая $\tilde{A}x = Ay$, если $x = y + z$, где $y \in D(A)$ и $z \in U$.

Симметричность $\tilde{A}$ непосредственно проверяется, ибо $(\tilde{A}z, y) = 0$ и

$$(z, \tilde{A}y) = (z, Ay) = (A^*z, y) = 0.$$

Докажем самосопряженность $\tilde{A}$. Пусть

$$(\tilde{A}x, u) = (x, u^*) \quad (x \in D(\tilde{A})). \tag{167}$$

Поскольку $\tilde{A}^* \subseteq A^*$, можно утверждать, что $u \in D(A^*)$ и $u^* = A^*u$. Представляя, как и выше, x в виде $x = y + z$, получим

$$(\tilde{A}x, u) = (Ay, u) = (y, u^*) + (z, u^*) = (y, A^*u) + (z, u^*),$$

или

$$(Ay, u) = (Ay, u) + (z, u^*),$$

т. е.

$$(z, u^*) = (z, A^*u) = 0.$$

Это равенство имеет место для всех $z \in U$, а потому $u^* = A^*u \in R(A)$, и, следовательно, существует такой элемент $y_0 \in D(A)$ что $Ay_0 = u^*$, откуда $A^*u - Ay_0 = A^*(u - y_0) = 0$, т. е. $u - y_0 = z_0 \in U$ и $u = y_0 + z_0 \in D(\tilde{A})$. В силу (167), самосопряженность $\tilde{A}$ доказана. Остальные утверждения теоремы относительно свойств оператора $\tilde{A}$ непосредственно следуют из его конструкции.

Следствие. *Если вещественное λ принадлежит чисто точечному спектру A, то можно построить самосопряженное расширение $\tilde{A}$, для которого λ также будет принадлежать только точечной части ядра спектра $\tilde{A}$, причем подпространство собственных элементов $\tilde{A}$, отвечающее λ совпадает с подпространством собственных элементов A^*, отвечающих λ.*

Доказательство этого следствия аналогично доказательству следствия 1 теоремы 1.

210. Независимость индексов дефекта от λ. Выше мы отмечали, что индексы дефекта p_λ и q_λ не зависят от выбора комплексного числа λ из верхней полуплоскости. В этом параграфе мы докажем это утверждение. Прежде всего отметим, что если какой-либо линейный оператор B (не обязательно ограниченный) преобразует биоднозначно некоторое подпространство V в подпространство W, то размерности V и W совпадают: $\dim V = \dim W$. Это следует из того, что линейно независимые элементы $\{x_1, x_2, \ldots\}$ подпространства V оператором B переводятся в линейно независимые элементы $\{Bx_1, Bx_2 \ldots\}$ подпространства W и наоборот. Введем еще одно определение. Число m называется размерностью линеала l по модулю линеала l', если в l имеется m и не более m линейно независимых элементов, никакая линейная комбинация которых, кроме случая всех коэффициентов, равных нулю, не принадлежит l'. Обычно обозначают $m = \dim l \pmod{l'}$. Число m может быть равно и бесконечности.

Пусть A — замкнутый симметричный оператор и p_λ, q_λ — его индексы дефекта, соответствующие λ, взятому из верхней полупло-

скости. Тогда, как мы видели [**202**], имеют место формулы

$$\left.\begin{aligned} H &= L_\lambda(A) \oplus M_\lambda(A), \\ H &= L_{\bar\lambda}(A) \oplus M_{\bar\lambda}(A), \end{aligned}\right\} \tag{168}$$

где $M_\lambda(A)$ есть совокупность всех нулей оператора $A^* - \bar\lambda E$, $L_\lambda(A)$ — совокупность всех элементов вида $y = (A - \lambda E)x$ при $x \in D(A)$, и аналогично для $M_{\bar\lambda}(A)$ и $L_{\bar\lambda}(A)$.

Далее [**203**]:

$$D(A^*) = D(A) + M_\lambda(A) + M_{\bar\lambda}(A), \tag{169}$$

и любое симметричное расширение A строится с помощью изометричного оператора, устанавливающего взаимно однозначное соответствие между подпространствами $N_\lambda(A)$ и $N_{\bar\lambda}(A)$ (одинаковой размерности) пространств $M_\lambda(A)$ и $M_{\bar\lambda}(A)$ [**202**].

Из формулы (169) следует, что

$$p_\lambda + q_\lambda = \dim D(A^*) \,(\mathrm{mod}\, D(A)), \tag{170}$$

и, следовательно, сумма $p_\lambda + q_\lambda$ не зависит от λ. Предположим сначала, что она имеет конечное значение. Построим какое-либо максимальное расширение A_0 оператора A и рассмотрим какое-либо $\lambda = \lambda'$ из верхней полуплоскости. Не ограничивая общности, можем считать $p_{\lambda'} \leqslant q_{\lambda'}$. Отсюда следует, что индексы дефекта A_0 при $\lambda = \lambda'$ суть $(0, r_{\lambda'})$, где $r_{\lambda'} = q_{\lambda'} - p_{\lambda'}$. По лемме из [**208**] индексы дефекта A_0 для всех λ из верхней полуплоскости суть $(0, r_\lambda)$, где $r_\lambda = q_\lambda - p_\lambda$ [**202**]. Далее из (169) следует

$$D(A_0^*) = D(A_0) + M_{\bar\lambda}(A_0),$$

и мы имеем

$$r_\lambda = \dim M_{\bar\lambda}(A_0) = \dim D(A_0^*) \quad (\mathrm{mod}\, D(A_0)),$$

откуда видно, что $r_\lambda = q_\lambda - p_\lambda$ не зависит от λ. Тем самым p_λ и q_λ не зависит от λ. Предположим теперь, что $p_\lambda + q_\lambda$ равно бесконечности. Если при каком-либо $\lambda = \lambda'$ мы имеем $p_{\lambda'} = \infty$ и $q_{\lambda'} = \infty$, то возможны самосопряженные расширения A, и тем самым $p_\lambda = \infty$; $q_\lambda = \infty$ при любом λ.

Остается рассмотреть тот случай, когда при каком-либо $\lambda = \lambda'$ один индекс дефекта конечен, а другой бесконечен.

Пусть $p_{\lambda'}$ конечно и $q_{\lambda'} = \infty$. Из предыдущего непосредственно следует, что и при всяком λ будет p_λ конечно и $q_\lambda = \infty$. Надо лишь показать, что p_λ не зависит от λ. Это легко получить из формулы [**202**]:

$$D(A_0) = D(A) \dotplus (E - V_0) M_\lambda(A), \tag{171}$$

где A_0 — фиксированное максимальное расширение, V_0 — изометрический оператор, зависящий от выбора A_0 и λ. В силу существования $(E - V_0)^{-1}$, из (171) следует

$$p_\lambda = \dim D(A_0) \pmod{D(A)}, \tag{172}$$

что и доказывает независимость p_λ от λ.

Из теоремы 1 [209] следует, что если существует вещественное $\lambda = \lambda_0$, являющееся точкой регулярного типа замкнутого симметричного оператора A, то он допускает самосопряженные расширения, и, следовательно, при наличии вещественной точки регулярного типа, индексы дефекта (p,q) (не зависящие от λ) одинаковы. Они равны размерности подпространства U собственных элементов A^*, отвечающих собственному значению $\lambda = \lambda_0$.

Действительно, считая $\lambda_0 = 0$ и обозначая через $\tilde{A}$ самосопряженное расширение A, для которого $\lambda = 0$ — регулярная точка [209], имеем в рассматриваемом случае: $H = R(A) \oplus U$; $D(\tilde{A}) = D(A) \dotplus \tilde{A}^{-1}U$, причем в этих формулах представление элемента левой части в виде указанной суммы однозначно, и, следовательно,

$$p = \dim D(\tilde{A}) \pmod{D(A)} = \dim \tilde{A}^{-1}U = \dim U.$$

211. Об инвариантности непрерывной части ядра спектра при симметричных расширениях. В этом параграфе мы будем предполагать, что замкнутый симметричный оператор A имеет конечные индексы дефекта (p, q), и будем рассматривать его замкнутые симметричные расширения.

Начнем с доказательства простой леммы.

Лемма. *Если U и W — два подпространства, из которых второе конечномерно, то*

$$V = U + W, \tag{173}$$

т. е. множество элементов $x = y + z$, где $y \in U$ и $z \in W$, есть также подпространство.

Мы можем, очевидно, считать, что W не имеет общих с U элементов (кроме нулевого). Пусть $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ — базис W. Представим каждый из его элементов w_k в виде: $w_k = w_k' + w_k''$, где $w_k' \in U$ и $w_k'' \perp U$. Линейную оболочку w_k'' $(k = 1, 2, \ldots, n)$ обозначим через W''. Множество V можно представить в виде ортогональной суммы двух подпространств:

$$V = U \oplus W'',$$

и лемма доказана.

Теорема. *Непрерывная часть ядра спектра любого замкнутого симметричного расширения $\tilde{A}$ оператора A та же, что и у A.*

Мы видели, что при расширении A непрерывная часть ядра спектра не может уменьшиться [**208**]. Предположим, что она расширилась, т. е. что есть такое вещественное число λ_0, которое не входит в непрерывную часть ядра спектра A, но содержится в непрерывной части ядра для $\tilde{A}$. Для него $R(A-\lambda_0 E)$ — подпространство, а $R(\tilde{A}-\lambda_0 E)$ — незамкнутый линеал.

Принимая во внимание формулу для $D(\tilde{A})$ [**203**] и конечность индексов дефекта для A, можем написать

$$R(\tilde{A}-\lambda_0 E)=R(A-\lambda_0 E)+W,$$

где W — конечномерное подпространство. Но последняя формула и незамкнутость $R(\tilde{A}-\lambda_0 E)$ противоречат доказанной выше лемме.

212. О спектрах самосопряженных расширений. Мы видели выше, что если λ — вещественная точка регулярного типа для A, то существуют самосопряженные расширения $\tilde{A}$ двух типов: для одного λ — регулярная точка $\tilde{A}$, а для другого — собственное значение с кратностью, равной индексу дефекта A (индексы дефекта A одинаковы).

Дополним эти результаты.

Теорема 1. *Если индексы дефекта (p, p) замкнутого симметричного оператора A конечны, то при любом самосопряженном расширении $\tilde{A}$ оператора A кратность любого собственного значения может повыситься не более, чем на p, и вещественное λ, которое не было собственным значением A, не может быть собственным значением $\tilde{A}$ кратности выше p.*

Пусть λ не есть собственное значение A, но есть собственное значение $\tilde{A}$ кратности $k>p$. Из формулы (172)

$$p=\dim D(\tilde{A}) \pmod{D(A)}$$

и $k>p$ следует, что имеется собственный элемент $\tilde{A}$, принадлежащий $D(A)$, т. е. λ есть собственное значение A, что противоречит предположению. Таким образом, доказано, что $k\leqslant p$. Случай, когда λ — собственное значение A, рассматривается аналогично с использованием оператора A_λ [**208**].

Теорема 2. *Если A — полуограниченный замкнутый симметричный оператор и его индексы дефекта (p, p) конечны, то для любого самосопряженного расширения A спектр, находящийся левее нижней границы A, может состоять лишь из конечного числа собственных значений, сумма кратностей которых не превосходит p.*

Без ограничения общности можем считать A положительным оператором. Пусть $\mathcal{E}_\lambda$ — спектральная функция самосопряженного расширения $\tilde{A}$. Докажем, что при любых $0 > \beta > \alpha$ имеет место неравенство

$$\dim \Delta\mathcal{E}_\lambda H = (\mathcal{E}_\beta - \mathcal{E}_\alpha) H \leqslant p. \tag{174}$$

Пусть имеет место обратное неравенство

$$\dim \Delta \mathcal{E}_\lambda H > p. \tag{175}$$

Мы знаем, что $\Delta\mathcal{E}_\lambda x \in D(\tilde{A})$ при $x \in H$ и $p = \dim D(\tilde{A}) (\mathrm{mod}\, D(A))$. Отсюда следует, в силу (175), что в подпространстве $\Delta\mathcal{E}_\lambda H$ найдется нормированный элемент $x \in D(A)$. Но тогда

$$(Ax,x) = (\tilde{A}x,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d(\mathcal{E}_\lambda x,x) = \int_{\alpha}^{\beta} \lambda d(\mathcal{E}_\lambda x,x) \leqslant \beta < 0,$$

что противоречит положительности A. Тем самым неравенство (174), а вместе с ним и теорема доказаны.

213. Примеры. 1. В [188] мы рассмотрели в пространстве $H = L_2(D)$ оператор A, который определен на всех гладких финитных в D функциях и является на этих функциях оператором дифференцирования

$$D^k = (i)^k \frac{\partial^k \varphi(x)}{\partial x_{l_1} \ldots \partial x_{l_k}}. \tag{176}$$

Мы показали, что $\bar{A}$ — симметричный оператор, имеющий ограниченный обратный на $R(\bar{A})$. Отсюда следует [209], что $\bar{A}$ допускает такое самосопряженное расширение $\tilde{A}$, что уравнение

$$\tilde{A}\varphi = \psi \qquad (\varphi \in D(\tilde{A})) \tag{177}$$

однозначно разрешимо при любом $\psi(x) \in L_2(D)$. Область определения $\bar{A}$ дополняется при этом расширении функциями $v(x)$ из $L_2(D)$, для которых $A^*A^*v = 0$. Функции эти имеют обобщенные производные D^k и $\mathrm{D}^k\mathrm{D}^k$ и определяются из уравнения

$$\mathrm{D}^k\mathrm{D}^k v = \frac{\partial^{2k} v(x)}{\partial x_{l_1}^2 \ldots \partial x_{l_k}^2} = 0.$$

Из них мы берем для $D(\tilde{A})$ те, которые ортогональны решениям уравнения $D^k u = 0$. Оператор $\tilde{A}$ на $D(\tilde{A})$ имеет вид D^k, где D^k есть обобщенная производная (176).

2. Рассмотрим оператор

$$A = -\frac{d^2}{dx^2}$$

в пространстве $H = L_2(0, +\infty)$, определенный на всех гладких финитных вблизи $x = 0$ и $x = +\infty$ функциях. $D(A^*)$ есть множество всех функций $\varphi(x)$ со следующими свойствами: $\varphi(x)$ и $\varphi'(x)$ абсолютно непрерывны на любом конечном промежутке $[0, a]$, $\varphi(x)$ и $\varphi''(x) \in L_2(0, +\infty)$. Как мы указали, при

этом и $\varphi'(x) \in L_2(0, +\infty)$. Для $\varphi(x) \in D(A^*)$ имеем $A^*\varphi(x) = -\varphi''(x)$ [188]. $D(\bar{A})$ состоит из всех тех элементов $D(A^*)$, которые удовлетворяют условиям $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$.

Нетрудно проверить, что имеют место следующие утверждения: a) $\bar{A}$ — положительный оператор; b) индексы дефекта $\bar{A}$ равны (1,1); c) непрерывная часть ядра спектра совпадает с полуосью $0 \leqslant \lambda < +\infty$, и это же справедливо для любого самосопряженного расширения $\bar{A}$; d) любое симметричное расширение $\bar{A}$ есть самосопряженное расширение. Оно определяется на тех элементах $D(A^*)$, которые удовлетворяют одному из двух условий $\varphi'(0) - h\varphi(0) = 0$, где h — фиксированное вещественное число, или $\varphi(0) = 0$. Последнему условию соответствует расширение по Фридрихсу, и при этом оператор остается положительным и имеет чисто непрерывный спектр, состоящий из полуоси $0 \leqslant \lambda < +\infty$. Если $h \leqslant 0$, то самосопряженный оператор, отвечающий условию $\varphi'(0) - h\varphi(0) = 0$, имеет чисто непрерывный спектр. При $h > 0$ он имеет одно простое собственное значение $\lambda = -h^2$.

214. Бесконечные матрицы. В [**200**] мы рассмотрели интегральные операторы, ядра которых удовлетворяют условиям (107) и (108). Совершенно аналогично можно рассмотреть операторы в l_2:

$$y_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k \qquad (178)$$

$$(i = 1, 2, \ldots),$$

осуществляемые такими матрицами, что $a_{ki} = \overline{a_{ik}}$ и выполняются условия

$$d_k^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |a_{ik}|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |a_{ki}|^2 < \infty \qquad (179)$$

$$(k = 1, 2, \ldots;\ d_k \geqslant 0).$$

При этом ряды (178) абсолютно сходятся для любого элемента x из l_2, но ряд, составленный из $|y_i|^2$, не обязательно сходится, т. е. $(y_1, y_2, \ldots)$ может не быть элементом из l_2. Обозначим через $D(A_0)$ линеал таких x из l_2, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k |x_k| < \infty,$$

и через $D(B)$ линеал таких x, что $(y_1, y_2, \ldots) \in l_2$. Можно показать, как и в [**200**], что $D(A_0)$ повсюду плотен в l_2 и что $D(A_0) \subseteq D(B)$. Обозначая далее через A_0 оператор, определённый в $D(A_0)$ формулами (178), и через B оператор, определённый в $D(B)$ теми же формулами, можем утверждать, что A_0 — симметричный оператор и что $B = A_0^*$ [ср. **200**]. Отметим, что, в силу (179), все орты принадлежат $D(B)$ и даже $D(A_0)$. Для того чтобы B был самосопряжённым,

необходимо и достаточно, чтобы для любых x и y из $D(B)$ выполнялось равенство [ср. **200**]

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}x_k\right)\bar{y}_i=\sum_{k=1}^{\infty}x_k\left(\sum_{i=1}^{\infty}a_{ik}\bar{y}_i\right), \tag{180}$$

причём, в силу $a_{ik}=\overline{a_{ki}}$, мы имеем:

$$\sum_{i=1}^{\infty}a_{ik}\bar{y}_i=\overline{\sum_{i=1}^{\infty}a_{ki}y_i}.$$

Симметричный оператор A_0 может оказаться и незамкнутым, и мы введём ещё новый оператор A, который является, как мы покажем, замыканием A_0. Пусть $D(A)$ — линеал таких x из $D(B)$, что

$$(Bx,\ y)=(x,\ By)\quad(y\in D(B)) \tag{181}$$

для любых y из $D(B)$, и A — оператор, выражаемый формулами (178) на $D(A)$. С другой стороны, A_0^{**} определено на линеале $D(A_0^{**})$ таких элементов x, что $(By,\ x)=(y,\ x^*)$ для любых y из $D(B)$, и, в силу $A_0^{**}\subset A_0^*$, x^* выражается через x по формулам (178), т. е. $x^*=Bx$. Сравнивая это с определением A, мы видим, что A_0^{**} совпадает с A. Но A_0^{**} есть замыкание A_0, т. е. A есть замыкание A_0, и $A^*=A_0^*=B$. Выясним одно свойство линеала $D(A)$ и оператора A. Назовём «конечным элементом» всякий элемент $(x_1,\ x_2,\ \ldots)$ из l_2, который имеет конечное число составляющих x_k, отличных от нуля. Пусть $D(A')$ — линеал «конечных элементов» и A' — оператор (178), определённый на этом линеале. В силу $a_{ki}=\overline{a_{ik}}$ этот оператор симметричен, и любой элемент $D(A')$ входит, очевидно, в $D(A_0)$, т. е. $A'\subseteq A_0$; следовательно, обозначая через $\overline{A'}$ замыкание A', будем иметь $\overline{A'}\subseteq A$, а потому $A^*\subseteq(\overline{A'})^*$. Пусть e_k — орт с номером k. Любой элемент y из $(\overline{A'})^*$ должен удовлетворять равенству $(Be_k,\ y)=(e_k,\ y^*)$, причём $y^*=(\overline{A'})^*y$. Обозначая через y_i и y_i^* составляющие y и y^*, можем написать упомянутое равенство в виде:

$$\sum_{i=1}^{\infty}a_{ik}\bar{y}_i=\overline{y_k^*},\ \text{т. е.}\ y_k^*=\sum_{i=1}^{\infty}a_{ki}y_i,$$

откуда видно, что $y\in D(A^*)$ и $y^*=A^*y$. Сравнивая этот результат с $A^*\subseteq(\overline{A'})^*$, мы видим, что $(\overline{A'})^*=A^*$, а потому $A^{**}=\overline{A'}$. Но мы имеем $A^{**}=A$ и, следовательно, $\overline{A'}=A$. Этот результат может быть формулирован следующим образом:

Теорема. *Если $x\in D(A)$, то существует последовательность ξ_n «конечных элементов» такая, что $\xi_n\Rightarrow x$, $A\xi_n\Rightarrow Ax$ и $A=\overline{A'}$.*

Самосопряженность A сводится к тому, что $A^* = A$. Если это не так, то индексы дефекта оператора A определятся размерностью подпространств, образованных решениями уравнений $Ax = ix$ и $Ax = -ix$, и мы можем применять изложенную выше теорию расширения оператора. Покажем ещё, что если матрица a_{ik} вещественна и комплексный элемент $x' + x''i$ принадлежит $D(A)$, то x' и x'' также принадлежат $D(A)$, а потому и $x' - x''i \in D(A)$. Действительно, в силу доказанной теоремы, существует такая последовательность $\xi_n = \xi_n' + \xi_n''i$ «конечных элементов», что $\|x - \xi_n\|^2 = \|x' - \xi_n'\|^2 + \|x'' - \xi_n''\|^2 \to 0$, и $\|Ax - A\xi_n\|^2 = \|Ax' - A\xi_n'\|^2 + \|Ax'' - A\xi_n''\|^2 \to 0$, откуда следует $\|x' - \xi_n'\| \to 0$, $\|Ax' - A\xi_n'\| \to 0$, $\|x'' - \xi_n''\| \to 0$, $\|Ax'' - A\xi_n''\| \to 0$. Принимая во внимание, что $A = \overline{A'}$, получим наше утверждение.

215. Матрицы Якоби. Применим предыдущие результаты к случаю матриц Якоби:

$$\begin{Vmatrix} a_0 & b_0 & 0 & 0 & 0 \dots \\ b_0 & a_1 & b_1 & 0 & 0 \dots \\ 0 & b_1 & a_2 & b_2 & 0 \dots \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 & b_2 \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{Vmatrix}, \tag{182}$$

причём a_i вещественны и $b_i > 0$. Условие (179), очевидно, выполняется. Нумерация ортов начинается с $k = 0$.

Строим вещественные полиномы $P_k(\lambda)$ по формулам [ср. **167**]

$$\lambda P_k(\lambda) = b_k P_{k+1}(\lambda) + a_k P_k(\lambda) + b_{k-1} P_{k-1}(\lambda), \tag{183}$$
$$P_{-1}(\lambda) = 0; \quad P_0(\lambda) = 1,$$

из которых следует:

$$e_k = P_k(A)\, e_0, \tag{184}$$

где через e_k мы обозначили орты.

Теорема 1. *Если сходится ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |P_k(i)|^2 \tag{185}$$
$$(i = \sqrt{-1}),$$

то оператор A — несамосопряжённый.

В силу сходимости (185) можно образовать элемент x из l_2 с составляющими $x_k = P_k(i)$, так что $(x, e_k) = P_k(i)$. Принимая во внимание, что $Ae_k = b_{k-1}e_{k-1} + a_k e_k + b_k e_{k+1}$, и формулу (183), получим:

$$(Ae_k, x) = b_{k-1}\overline{P_{k-1}(i)} + a_k\overline{P_k(i)} + b_k\overline{P_{k+1}(i)} = \overline{iP_k(i)},$$

откуда, в силу $(e_k, x) = \overline{P_k(i)}$, можем написать: $(Ae_k, x) = (e_k, ix)$. В силу дистрибутивности A и скалярного произведения, имеем

$(Ay,\ x)=(y,\ ix)$ для любого «конечного элемента» y и, в силу теоремы из [214], это равенство справедливо для любого y из $D(A)$, а потому $x\in D(A^*)$ и $A^*x=ix$, откуда и вытекает, что A — несамосопряжённый оператор.

Теорема 2. *Если ряд* (185) *расходится, то оператор* A — *самосопряжённый.*

Достаточно доказать, что A^* не имеет собственных значений $\pm i$. Предполагаем обратное. Пусть $A^*x=ix$, где элемент $x(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ отличен от нулевого. В силу определения A^* и того факта, что $e_k\in D(A)$, имеем $(Ae_k,\ x)=(e_k,\ ix)$ или $(x,\ Ae_k)=i(x,\ e_k)=ix_k$, т. е. $(x,\ b_{k-1}e_{k-1}+a_ke_k+b_ke_{k+1})=ix_k$. Раскрывая скалярное произведение, получим: $b_{k-1}x_{k-1}+a_kx_k+b_kx_{k+1}=ix_k$. Пользуясь (183) и методом полной индукции, получаем отсюда: $x_k=P_k(i)\,x_0$ и $x_0\neq 0$. Но это противоречит расходимости (185). Если заменить в (185) i на $(-i)$, то, в силу $P_k(-i)=\overline{P_k(i)}$, получится, очевидно, также расходящийся ряд, и, как и выше, A^* не имеет собственного значения $(-i)$; теорема доказана. Таким образом расходимость ряда (185) является необходимым и достаточным условием самосопряженности A. Повторяя дословно доказательство двух последних теорем, можно показать, что если ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}|P_k(\alpha)|^2 \tag{186}$$

сходится при каком-либо невещественном α, то α и $\bar{\alpha}$ суть собственные значения A^*, и если ряд (186) расходится при некотором невещественном α, то α и $\bar{\alpha}$ не являются собственными значениями A^*, откуда следует, что A — самосопряжённый оператор, т. е. и ряд (185) расходится. Наоборот, если (186) сходится при некотором невещественном α, то A^* имеет невещественные собственные значения и A — несамосопряжённый оператор; ряд (185) также сходится. Эти рассуждения приводят к следующей теореме:

Теорема 3. *Возможны лишь следующие два случая: ряд* (186) *расходится при любом невещественном* α *или сходится при любом невещественном* α. *В первом случае* A — *самосопряжённый оператор, а во втором* — *несамосопряжённый.*

Далее из доказательства теоремы 2 непосредственно следует, что если (185) сходится, то составляющие собственного элемента A^*, соответствующего собственному значению i, удовлетворяют равенствам $x_k=P_k(i)\,x_0$ $(k=1,\ 2,\ \ldots)$, где x_0 произвольно и отлично от нуля, т. е. подпространство $M_i(A)$ одномерно. Совершенно так же и $M_{-i}(A)$ — одномерно. Оно получается, очевидно, из $M_i(A)$ заменой элементов x_k на сопряжённые. Таким образом во втором случае индексы дефекта A суть (1,1). Элементы x_i и x_{-i} подпространств $M_i(A)$ и $M_{-i}(A)$ мы можем определить с точностью до произволь-

ного комплексного множителя формулами

$$x_i = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(i)\, e_k; \quad x_{-i} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(-i)\, e_k,$$

и элементы подпространства $D(A_\theta)$ самосопряжённого расширения A_θ оператора A определяются единственным образом формулой $v = x_A + \alpha x_\theta$, где $x_A \in D(A)$, α — любое комплексное число, $x_\theta = i(e^{-\frac{\theta}{2}} x_{-i} + e^{\frac{\theta}{2}} x_i)$ и $0 \leqslant \theta < 2\pi$. Пусть $\mathcal{E}_\lambda$ — спектральная функция A в первом случае или какого-либо A_θ во втором случае и $\rho(\lambda) = (\mathcal{E}_\lambda e_0, e_0)$. Совершенно так же, как и в [**167**], мы имеем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_k(\lambda) P_l(\lambda)\, d\rho(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq l, \\ 1 & \text{при } k = l, \end{cases}$$

$$(Ae_k, e_l) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda P_k(\lambda) P_l(\lambda)\, d\rho(\lambda), \quad e_k = \int_{-\infty}^{+\infty} P_k(\lambda)\, d\mathcal{E}_\lambda e_0,$$

причём во втором случае A надо заменить на A_θ. Элементы матрицы (182) выражаются, очевидно, формулами

$$a_{ik} = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda P_k(\lambda) P_l(\lambda)\, d\rho(\lambda).$$

Теорема 4. *Полиномы $P_k(\lambda)$ образуют замкнутую систему относительно $\rho(\lambda)$.*

Пусть $\varphi_\mu(\lambda)$ — функция, равная единице при $-\infty < \lambda \leqslant \mu$ и нулю при $\lambda > \mu$. Любая функция $\pi(\lambda)$, принимающая конечное число значений $a_1, a_2 \ldots, a_m$, причём всякое значение a_k она принимает на конечном промежутке, может быть представлена, очевидно, в виде конечной линейной комбинации функций $\varphi_\mu(\lambda)$ при различных μ. Если мы при любом μ докажем уравнение замкнутости для $\varphi_\mu(\lambda)$, то оно, в силу обобщённого уравнения замкнутости, будем иметь место для любой линейной комбинации функций $\varphi_\mu(\lambda)$ и, тем самым, для всех функций $\pi(\lambda)$ указанного типа. Но линеал таких функций повсюду плотен в L_2 относительно $\rho(\lambda)$ [**60**], а потому $P_k(\lambda)$ образуют замкнутую систему [**60**]. Итак, достаточно доказать уравнение замкнутости для $\varphi_\mu(\lambda)$. Вычислим интеграл от $\varphi_\mu^2(\lambda)$ и коэффициенты Фурье этой функции:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_\mu^2(\lambda)\, d\rho(\lambda) = \int_{(-\infty,\, \mu]} d\rho(\lambda) = \rho(\mu); \qquad a_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_\mu(\lambda) P_k(\lambda)\, d\rho(\lambda) =$$

$$= \int_{(-\infty,\, \mu]} P_k(\lambda)\, d\rho(\lambda).$$

Надо проверить при любом μ равенство:

$$\rho(\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{(-\infty, \mu]} P_k(\lambda)\, d\rho(\lambda) \cdot \int_{(-\infty, \mu]} P_k(\lambda)\, d\rho(\lambda).$$

Мы имеем, в силу уравнения замкнутости,

$$\rho(\mu) = \| \mathcal{E}_\mu e_0 \|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (\mathcal{E}_\mu e_0,\ e_k)(e_k,\ \mathcal{E}_\mu e_0),$$

и достаточно проверить равенство

$$(\mathcal{E}_\mu e_0,\ e_k) = (e_k,\ \mathcal{E}_\mu e_0) = \int_{(-\infty,\ \mu]} P_k(\lambda)\, d\rho(\lambda),$$

правая часть которого — вещественна. Но это последнее равенство непосредственно вытекает из указанного выше интегрального представления e_k [ср. **192**], и теорема доказана.

Укажем ещё один простой достаточный критерий самосопряжённости матрицы (182). Из (183) непосредственно следует формула

$$b_k \frac{P_{k+1}(\alpha)\,\overline{P_k(\alpha)} - \overline{P_{k+1}(\alpha)}\,P_k(\alpha)}{\alpha - \bar{\alpha}} =$$

$$= |P_k(\alpha)|^2 + b_{k-1} \frac{P_k(\alpha)\,\overline{P_{k-1}(\alpha)} - \overline{P_k(\alpha)}\,P_{k-1}(\alpha)}{\alpha - \bar{\alpha}},$$

и, суммируя по k от $k = 0$ до $k = n - 1$, получим тождество:

$$\sum_{k=0}^{n-1} |P_k(\alpha)|^2 = b_{n-1} \frac{P_n(\alpha)\,\overline{P_{n-1}(\alpha)} - \overline{P_n(\alpha)}\,P_{n-1}(\alpha)}{\alpha - \bar{\alpha}},$$

и, в частности, при $\alpha = i$

$$\sum_{k=0}^{n-1} |P_k(i)|^2 = b_{n-1} \frac{P_n(i)\,\overline{P_{n-1}(i)} - \overline{P_n(i)}\,P_{n-1}(i)}{2i} =$$

$$= b_{n-1} \operatorname{Im}[P_n(i)\,\overline{P_{n-1}(i)}].$$

В силу $P_0(\lambda) \equiv 1$ левая часть $\geqslant 1$, откуда следует:

$$\frac{1}{b_{n-1}} \leqslant \operatorname{Im}[P_n(i)\,\overline{P_{n-1}(i)}] \leqslant |P_n(i)| \cdot |P_{n-1}(i)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}[|P_n(i)|^2 + |P_{n-1}(i)|^2],$$

и, суммируя от $n = 1$ до $n = m + 1$, получим:

$$\sum_{n=0}^{m} \frac{1}{b_n} \leqslant \sum_{n=0}^{m+1} |P_n(i)|^2,$$

откуда непосредственно следует, в силу теоремы 2:

Теорема 5. *Если ряд, составленный из* $1:b_n$, *расходится, то* A *— самосопряжённый оператор.*

Укажем ещё без доказательства на два факта, непосредственно связанные с предыдущим изложением. Можно показать, что если A имеет индексы дефекта (1,1), то ряд (186) сходится при любом значении α. Если же A — самосопряжённый оператор, то (186) расходится и при вещественном α, кроме тех, которые соответствуют точечному спектру A, если таковой имеется. Кроме того, при индексах дефекта (1,1), всякое самосопряжённое расширение A имеет чисто точечный спектр (см. Н. И. Ахиезер. Бесконечные матрицы Якоби и проблема моментов, Успехи матем. наук, т. IX, 1941).

В качестве примера матрицы Якоби рассмотрим полиномы Эрмита. Мы определяли полиномы Эрмита равенством

$$H_k(\lambda) = (-1)^k e^{\lambda^2} \frac{d^k}{d\lambda^k}(e^{-\lambda^2}) \tag{187}$$

и имели соотношение

$$\lambda H_k(\lambda) = \frac{1}{2} H_{k+1}(\lambda) + kH_{k-1}(\lambda) \tag{188}$$

и интегральное равенство [$\mathbf{III_2}$; **157**]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2} H_k^2(\lambda)\, d\lambda = 2^k k!\, \sqrt{\pi}. \tag{189}$$

Для того чтобы получить в дальнейшем нормированные полиномы, вместо (187) введём полиномы

$$P_k(\lambda) = \frac{(-1)^k}{\sqrt{2^k k!}} e^{\lambda^2} \frac{d^k}{d\lambda^k}(e^{-\lambda^2}), \tag{190}$$

после чего соотношение (138) перепишется в виде

$$\lambda P_k(\lambda) = \sqrt{\frac{k+1}{2}}\, P_{k+1}(\lambda) + \sqrt{\frac{k}{2}}\, P_{k-1}(\lambda),$$

причём $P_0(\lambda) \equiv 1$. Таким образом, если мы возьмём матрицу Якоби, полагая

$$a_k = 0;\ b_k = \sqrt{\frac{k+1}{2}} \quad (k = 0,\ 1,\ 2, \ldots),$$

то мы и придём к полиномам (190), причём будут иметь место формулы [ср. **III**; **220**]

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2} P_k(\lambda)\, P_l(\lambda)\, d\lambda = \begin{cases} 0 \text{ при } k \neq l, \\ 1 \text{ при } k = l, \end{cases}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2} \lambda P_k(\lambda)\, P_l(\lambda)\, d\lambda = \begin{cases} 0 \text{ при } |k-l| \neq 1, \\ \sqrt{\frac{k}{2}} \text{ при } l = k+1. \end{cases}$$

Из теоремы 5 следует, что в рассматриваемом случае A есть самосопряжённый оператор. Принимая во внимание написанные выше интегральные формулы, можно показать, что для оператора A:

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\lambda} e^{-\mu^2}\, d\mu.$$

Оператор A имеет простой непрерывный спектр, расположенный на всём промежутке $(-\infty, +\infty)$,

216. Матрицы и операторы. Мы исследуем связь между матрицами и симметричными операторами в гильбертовом пространстве H. Положим сначала, что в этом пространстве задан ограниченный самосопряженный оператор A, и пусть $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ — какая-либо полная ортогональная нормированная система элементов из H. Определяя формулой

$$a_{nk} = (A\varphi_k, \varphi_n) = (\varphi_k, A\varphi_n) \qquad (191)$$
$$(a_{kn} = \overline{a_{nk}})$$

элементы некоторой матрицы α, мы имеем:

$$x_n' = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k, \qquad (192)$$

где x_k — составляющие некоторого элемента x, т. е. $x_k = (x, \varphi_k)$, и x_k' — составляющие преобразованного элемента, т. е. $x_k' = (Ax, \varphi_k)$. Таким образом при определённом выборе ортов оператор A выражается матрицей согласно формулам (192). Если мы выберем другую систему ортов $\psi_1, \psi_2, \ldots$, и U есть унитарное преобразование такое, что $U\varphi_k = \psi_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, причём $u_{pq} = (U\varphi_q, \varphi_p) = (\psi_q, \varphi_p)$, то оператору A будет соответствовать матрица с элементами

$$b_{nk} = (A\psi_k, \psi_n) = \sum_{s=1}^{\infty} (A\psi_k, \varphi_s)\,\overline{(\psi_n, \varphi_s)} = \sum_{s=1}^{\infty} (\psi_k, A\varphi_s)\,\overline{(\psi_n, \varphi_s)} =$$

$$= \sum_{s=1}^{\infty} \overline{(\psi_n, \varphi_s)} \sum_{t=1}^{\infty} (\psi_k, \varphi_t)\,\overline{(A\varphi_s, \varphi_t)}, \qquad (193)$$

причём мы использовали обобщённое уравнение замкнутости (18_1) из [121]. Принимая во внимание введённые выше обозначения, можем написать:

$$b_{nk} = \sum_{s=1}^{\infty} \overline{u_{sn}} \sum_{t=1}^{\infty} a_{st} u_{tk}. \qquad (194)$$

Если мы применим эту формулу к $b_{kn} = \overline{b_{nk}}$, перейдём к сопряжённым величинам и в правой части заменим букву s на t и t на s, то получим:

$$b_{nk} = \sum_{t=1}^{\infty} u_{tk} \sum_{s=1}^{\infty} \overline{u_{sn}} a_{st}. \qquad (195)$$

Совершенно аналогично будем иметь:

$$a_{nk} = \sum_{s=1}^{\infty} u_{ns} \sum_{t=1}^{\infty} b_{st} \overline{u_{kt}} = \sum_{t=1}^{\infty} \overline{u_{kt}} \sum_{S=1}^{\infty} u_{ns} b_{st}. \qquad (196)$$

Наоборот, если задана матрица $\alpha\{a_{nk}\}$ $(a_{kn} = \overline{a_{nk}})$, удовлетворяющая условию ограниченности [163], и фиксирована система ортов φ_k $(k = 1, 2, \ldots)$ в H, то формулы (192) определяют ограниченный самосопряженный в H оператор A. При этом k-й столбец матрицы $\{a_{nk}\}$ дает составляющие преобразованного

элемента, полученного из орта φ_k, так что мы можем написать:

$$A\varphi_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_{nk}\varphi_n.$$

Более сложной представляется связь между матрицами и неограниченными операторами. В дальнейшем матрицы, удовлетворяющие условию симметрии ($a_{kn} = \overline{a_{nk}}$) и условию (179), назовем C-матрицами. Пусть имеется замкнутый симметричный оператор F с линеалом $D(F)$, плотным в H. Выбираем полную ортогональную нормированную систему элементов φ_k так, чтобы все φ_k принадлежали $D(F)$, и определяем по формулам (191) с заменой A на F элементы матрицы $\{a_{nk}\}$. В силу симметричности оператора F и уравнения замкнутости можем утверждать, что $\{a_{nk}\}$ есть C-матрица. Применяя к скалярному произведению $(Fx, \varphi_n) = (x, F\varphi_n)$ обобщенное уравнение замкнутости, причем считается, что $x \in D(F)$, получим:

$$x'_n = (Fx, \varphi_n) = \sum_{k=1}^{\infty} (x, \varphi_k)\ \overline{(F\varphi_n, \varphi_k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k, \qquad (197)$$

т. е. оператор F выражается формулами (192) в ортах φ_k. Линеал $D(F)$ содержит, очевидно, все „конечные элементы“, т. е. все конечные линейные комбинации ортов, и, поскольку оператор A, определенный в [**214**] на основе матрицы $\{a_{nk}\}$, является замыканием оператора A', определенного формулами (192) на линеале „конечных элементов“, мы можем утверждать, что $A \subseteq F$; следовательно, $F^* \subseteq A^*$, т. е. F^* также определяется формулами (192) на соответствующем линеале $D(F^*)$. Если F есть расширение A, то, в силу теоремы 1 из [**186**], $D(F^*)$ есть лишь часть $D(B)$, определенного нами в [**214**]. В данном случае одна и та же матрица дает различные операторы.

Если вместо φ_k мы примем другую систему ортов ψ_k, также принадлежащую $D(F)$, то оператор F выразится матрицей $\{b_{nk}\}$, причем, как и выше, будут иметь место формулы (192) и (197) с заменой a_{nk} на b_{nk}. Положим теперь, что задан не оператор, а C-матрица $\{a_{nk}\}$. Выбираем произвольную систему ортов φ_k из H и определяем оператор A' формулами (192) или (197) на линеале $D(A')$ „конечных элементов“. Замыкание A' приводит нас к некоторому замкнутому симметричному оператору A. Будем говорить, что оператор A порожден матрицей $\{a_{nk}\}$ и системой ортов φ_k и будем писать: $A \sim a_{nk}\{\varphi_k\}$. Оказывается, что таким образом можно получить любой симметричный замкнутый в H оператор.

Теорема. *Любой симметричный замкнутый оператор A с $D(A)$, плотной в H, может быть порождён некоторой C-матрицей и системой ортов φ_k.*

Достаточно построить соответствующие орты φ_k из $D(A)$. Матрица определится формулой (191). Эти орты φ_k должны обладать следующим свойством: для всякого x из $D(A)$ существует такая последовательность ω_n «конечных элементов», что $\omega_n \Rightarrow x$ и $A\omega_n \Rightarrow Ax$. Для получения таких φ_k достаточно построить такую последовательность ω'_n из $D(A)$, что для любого x из $D(A)$ существует такая подпоследовательность $\omega'_{n_1}, \omega'_{n_2}, \ldots$, что $\omega'_{n_k} \Rightarrow x$ и $A\omega'_{n_k} \Rightarrow Ax$. Ортогонализация ω'_n и приведёт, очевидно, к φ_k, причём из $\omega'_{n_k} \Rightarrow x$ и того, что $D(A)$ плотно в H, следует, что последовательность ω'_n плотна в H, так что система ортов φ_k — полная. Переходим к построению ω'_n. Берём какую-нибудь последовательность элементов $\eta_1, \eta_2, \ldots$, плотных в H.

Пусть p, q, r — какая-либо тройка целых положительных чисел. Если существует хоть один такой элемент x из $D(A)$, что $\| \chi_p - x \| \leqslant \frac{1}{r}$ и $\| \chi_q - Ax \| \leqslant \frac{1}{r}$, то указанной тройке мы сопоставляем один из таких элементов x и обозначаем его $x_{p,q,r}$. Эти элементы можно, очевидно, пронумеровать [1], и мы покажем, что они обладают требуемыми от ω_n свойствами. Пусть $x \in D(A)$ и ε — заданное положительное число. Выбираем r, удовлетворяющее неравенству $\frac{1}{r} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, и элементы χ_p и χ_q так, чтобы $\| \chi_p - x \| \leqslant \frac{1}{r}$ и $\| \chi_q - Ax \| \leqslant \frac{1}{r}$, что возможно, ибо χ_n плотны в H. При этом существует элемент $x_{p,q,r}$ такой, что $\| \chi_p - x_{p,q,r} \| \leqslant \frac{1}{r}$ и $\| \chi_q - Ax_{p,q,r} \| \leqslant \frac{1}{r}$, откуда, принимая во внимание, что

$$\| x - x_{p,q,r} \| \leqslant \| \chi_p - x \| + \| \chi_p - x_{p,q,r} \|;$$
$$\| Ax - Ax_{p,q,r} \| \leqslant \| \chi_q - Ax \| + \| \chi_q - Ax_{p,q,r} \|$$

и что $\frac{1}{r} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, получаем: $\| x - x_{p,q,r} \| \leqslant \varepsilon$ и $\| Ax - Ax_{p,q,r} \| \leqslant \varepsilon$. Отсюда, ввиду произвольности ε, и следует, что $x_{p,q,r}$ обладают тем свойством, которым мы выше охарактеризовали последовательность ω_n; теорема доказана.

Один и тот же замкнутый симметричный оператор может быть порождён различными матрицами и ортами. Если $A \sim a_{nk}\{\varphi_k\}$ и $A \sim b_{nk}\{\psi_k\}$, то, вводя унитарный оператор U, указанный выше, и полагая $u_{pq} = (\psi_q, \varphi_p)$, получим формулы (194), (195) и (196). Отметим ещё, что если F — заданный симметричный замкнутый оператор, система ортов φ_k принадлежит $D(F)$, $\{a_{nk}\}$ — матрица, определяемая формулой (191) при замене A на F, и $A \sim a_{nk}\{\varphi_k\}$, то F или совпадает с A или является расширением A, как это мы видели выше.

217. Унитарная эквивалентность C-матриц. В предыдущем параграфе мы имели две системы $a_{nk}\{\varphi_k\}$ и $b_{nk}\{\psi_k\}$, порождающие один и тот же оператор A. При этом числа u_{pq} были элементами матрицы, соответствующей унитарному преобразованию $U\varphi_k = \psi_k$ в ортах φ_k. Внутренняя сумма формулы (194) представляет собой скалярное произведение $(A\psi_k, \varphi_s)$, и, в силу уравнения замкнутости, мы можем утверждать, что квадрат модуля этой суммы образует сходящийся ряд при суммировании по s. Внутренняя сумма в выражении (195) получается из внутренней суммы выражения (194) переходом к сопряжённой величине, перестановкой s и t и заменой k на n, а потому и для неё справедливо сказанное выше при суммировании по t, т. е.

$$\sum_{s=1}^{\infty} \left| \sum_{t=1}^{\infty} a_{st} u_{tk} \right|^2 < \infty; \qquad \sum_{t=1}^{\infty} \left| \sum_{s=1}^{\infty} \overline{u}_{sn} a_{st} \right|^2 < \infty. \tag{198}$$

Это приводит нас естественно к следующему определению:

Определение. 1. *Говорят, что унитарная матрица $\{u_{pq}\}$ применима к C-матрице $\{a_{nk}\}$, если выполнены условия* (198) *и если повторные суммы* (194) *и* (195) *приводят к одному и тому же результату. Полученная матрица $\{b_{nk}\}$ называется преобразованной матрицей.*

Из того факта, что $\{a_{nk}\}$ — C-матрица и $\{u_{pq}\}$ — унитарная матрица, следует, в силу неравенства Коши, абсолютная сходимость внутренних рядов

формул (194) и (195), а из условий (198) следует сходимость и внешних рядов. В силу сказанного выше о внутренних суммах, одно из условий (198) влечёт за собой второе условие. Из (194) и (195) непосредственно следует, что $\overline{b_{kn}} = b_{nk}$, и, из условий (198) и унитарности матрицы $\{u_{pq}\}$, следует, что сумма по k членов $|b_{nk}|^2$ конечна, т. е. $\{b_{nk}\}$ есть C-матрица. Докажем следующую теорему:

Теорема 1. *Если унитарная матрица U применима к $\{a_{nk}\}$, то обратная матрица U^{-1} применима к $\{b_{nk}\}$, и преобразованной матрицей будет $\{a_{nk}\}$.*

Докажем формулы

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_{pn} b_{nk} = \sum_{t=1}^{\infty} a_{pt} u_{tk}; \qquad \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} \overline{u_{qk}} = \sum_{s=1}^{\infty} \overline{u_{sn}} a_{sq} . \tag{199}$$

Достаточно доказать первую. Вторая доказывается аналогично. Мы имеем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_{pn} b_{nk} = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{s=1}^{\infty} \left(\sum_{t=1}^{\infty} a_{st} u_{tk} \right) \overline{u_{st}} \right| u_{pn} .$$

В силу (198), сумму, стоящую в круглых скобках, можно рассматривать как составляющую ξ_s некоторого элемента ξ из l_2. Обозначая через γ унитарный оператор в l_2, осуществляемый матрицей $\{u_{pq}\}$, можем записать правую часть последней формулы в виде:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\gamma^{-1}\xi)_n u_{pn} = [\gamma(\gamma^{-1}\xi)]_p = \xi_p = \sum_{t=1}^{n} a_{pt} u_{tk}, \tag{200}$$

откуда и следует непосредственно первая из формул (199). Из (199) непосредственно следует:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{n=1}^{\infty} u_{pn} b_{nk} \right|^2 < \infty; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} \overline{u_{qk}} \right|^2 < \infty. \tag{201}$$

Действительно, обозначая $\eta_t = \overline{a_{pt}}$, имеем элемент η из l_2 с составляющими η_t, и правая часть первой из формул (199) может быть записана в виде $\overline{(\gamma^{-1}\eta)_k}$, откуда и следует непосредственно первое из условий (201). Второе доказывается аналогично. Вводя ещё элемент η' из l_2 с составляющими $\eta'_n = b_{nk}$, можем записать первую из формул (199) в виде: $(\gamma\eta')_p = \overline{(\gamma^{-1}\eta)_k}$, откуда $(\gamma^{-1}\eta)_k = \overline{(\gamma\eta')_p}$. Умножая на u_{qk} и суммируя по k, получим:

$$\overline{a_{pq}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \overline{u_{pn}}\, \overline{b_{nk}} \right) u_{qk} ,$$

т. е. одну из формул (196). Вторая доказывается аналогично; теорема доказана.

Дадим теперь определение унитарной эквивалентности двух систем $a_{nk}\{\varphi_k\}$ и $b_{nk}\{\psi_k\}$, каждая из которых содержит некоторую полную систему ортов.

Определение 2. *Две системы $a_{nk}\{\varphi_k\}$ и $b_{nk}\{\psi_k\}$ называются унитарно эквивалентными, если унитарная матрица U с элементами $u_{pq} = (\psi_q, \varphi_p)$ применима к $\{a_{nk}\}$ и приводит к преобразованной матрице $\{b_{nk}\}$.*

Если выполнено сказанное в определении, то из доказанной теоремы следует, что унитарная матрица, обратная матрице U с элементами $\{u_{pq}\}$, т. е. матрица с элементами $u^*_{pq} = \overline{u_{qp}} = (\varphi_q, \psi_p)$, применима к $\{b_{nk}\}$ и приводит к преобразованной матрице $\{a_{nk}\}$, т. е. унитарная эквивалентность двух систем есть свойство взаимное. Отметим ещё, что $U\varphi_k = \psi_k$ и $U^{-1}\psi_k = \varphi_k$. Основной в отношении эквивалентности систем является следующая теорема:

Теорема 2. *Для того чтобы две системы $a_{nk}\{\varphi_k\}$ и $b_{nk}\{\psi_k\}$ были унитарно эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы порождаемые ими замкнутые симметричные операторы A и A_1 имели в качестве своих продолжений один и тот же симметричный оператор F.*

Сначала доказываем необходимость. Пусть системы унитарно эквивалентны. Мы имеем:

$$(A\varphi_p, \psi_q) = \sum_{s=1}^{\infty} (A\varphi_p, \varphi_s)(\varphi_s, \psi_q) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{sp}\overline{u_{sq}},$$

$$(\varphi_p, A_1\psi_q) = \sum_{s=1}^{\infty} (\psi_s, A_1\psi_q)(\varphi_p, \psi_s) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{qs}\overline{u_{ps}},$$

и вторая из формул (199) показывает, что $(A\varphi_p, \psi_q) = (\varphi_p, A_1\psi_q)$. Это же равенство имеет, очевидно, место для конечных линейных комбинаций φ_p и ψ_q. Принимая во внимание определение $D(A)$ и $D(A_1)$ и переходя к пределу в скалярном произведении, получим:

$$(Ax, y) = (x, A_1y), \quad \text{если} \quad x \in D(A) \text{ и } y \in D(A_1). \tag{202}$$

Если x одновременно принадлежит $D(A)$ и $D(A_1)$, то, кроме (202), $(A_1x, y) = (x, A_1y)$ и, в силу (202), $(Ax - A_1x, y) = 0$ для любых y из $D(A_1)$, и, поскольку $D(A_1)$ плотен в H, имеем $Ax = A_1x$.

Пусть $D(F)$ — линеал элементов x, представимых в виде $x = x' + y'$, где $x' \in D(A)$ и $y' \in D(A_1)$, и положим $Fx = Ax' + A_1y'$. Если имеем два представления: $x = x' + y' = x'' + y''$, где x' и $x'' \in D(A)$, а y' и $y'' \in D(A_1)$, то из $x' - x'' = y'' - y'$ следует, что $x' - x''$ и $y'' - y'$ одновременно принадлежат $D(A)$ и $D(A_1)$, и, в силу сказанного выше, $Ax' - Ax'' = A_1y'' - A_1y'$, т. е. $Ax' + A_1y' = Ax'' + A_1y''$, откуда следует, что определение Fx однозначно. В силу (202) и симметричности A и A_1, F есть симметричный оператор. Он является, очевидно, продолжением A и A_1, и необходимость доказана.

Положим теперь, что симметричный оператор F является продолжением A и A_1. Мы имеем:

$$\sum_{t=1}^{\infty} a_{pt}u_{tk} = \sum_{t=1}^{\infty} (A\varphi_t, \varphi_p)(\psi_k, \varphi_t) = \sum_{t=1}^{\infty} (\psi_k, \varphi_t)\overline{(A\varphi_p, \varphi_t)} =$$

$$= (\psi_k, A\varphi_p) = (\psi_k, F\varphi_p) = (F\psi_k, \varphi_p) = (A_1\psi_k, \varphi_p) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (A_1\psi_k, \psi_n)(\psi_n, \varphi_p) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{pn}b_{nk},$$

т. е. мы получили первую из формул (199). Совершенно аналогично может быть получена и вторая. Повторяя доказательство теоремы 1, мы увидим, что $\{u_{pq}\}$ применимо к $\{a_{nk}\}$, и имеют место формулы (194), (195) и (196); унитарная эквивалентность систем доказана.

Из теоремы следует, что унитарная эквивалентность систем вполне определяется порождёнными ими замкнутыми симметричными операторами, и естественно понятие унитарной эквивалентности перевести с систем на замкнутые симметричные операторы, порождённые этими системами. Отсюда непосредственно будет следовать, что ограниченный оператор унитарно эквивалентен только сам себе, а максимальный — только своей части. Унитарная эквивалентность есть свойство взаимное, но не транзитивное, т. е. если оператор C_1 унитарно эквивалентен C_2 и C_2 унитарно эквивалентен C_3, то отсюда ещё не следует, что C_1 унитарно эквивалентен C_3. Это будет, очевидно, так, если C_2 — максимальный оператор, ибо C_1 и C_3 в этом случае имеют общее продолжение C_2. Общая теория C-матриц существенно отличается от теории матриц, которым соответствуют ограниченные самосопряжённые операторы. Эта теория C-матриц изложена в работе J. Neumann'a, Zur Theorie der unbeschränkten Matrizen (Crelle, Journal, Bd. 161, 1929) и в книге Wintner'a, Spektraltheorie der unendlichen Matrizen (Leipzig, 1929).

218. Существование спектральной функции. Мы переходим теперь к доказательству основной теоремы из [192], согласно которой для всякого самосопряжённого оператора A существует разложение единицы $\mathfrak{E}_\lambda$, с помощью которого он выражается интегралом Стилтьеса (58) из [192]. Мы можем пользоваться при этом теми свойствами A, которые выводились без помощи формулы (58). В [189] мы без помощи этой формулы показали, что при любом невещественном λ существует ограниченный оператор $(A-\lambda E)^{-1}$, определённый во всем H, так что формула $x=(A-\lambda E)u$ преобразует $D(A)$ биоднозначно в H. Рассмотрим случай $\lambda=\pm i$ и положим:

$$x=(A-iE)u, \qquad y=(A+iE)v \ (u,\ v\in D(A));$$

и

$$u=(A-iE)^{-1}x, \qquad v=(A+iE)^{-1}y, \qquad (x,\ y\in H).$$

Мы имеем, в силу самосопряжённости A:

$$[(A-iE)^{-1}]^*=(A+iE)^{-1}.$$

Введя ограниченные самосопряжённые операторы

$$C=\frac{1}{2}[(A-iE)^{-1}+(A+iE)^{-1}]; \qquad B=\frac{1}{2i}[(A-iE)^{-1}-(A+iE)^{-1}], \tag{203}$$

мы получим:

$$(A-iE)^{-1}=C+iB, \qquad (A+iE)^{-1}=C-iB, \tag{204}$$

причём при любом выборе x из H элементы Cx и Bx принадлежат $D(A)$. Из (204) следует:

$$(A-iE)(C+iB)=(AC+B)+i(AB-C)=E,$$
$$(A+iE)(C-iB)=(AC+B)-i(AB-C)=E,$$

откуда

$$AC=E-B; \tag{205}$$

$$AB=C. \tag{206}$$

Если элемент x принадлежит $D(A)$, то мы можем написать также:

$$(C+iB)(A-iE)x=x \quad \text{и} \quad (C-iB)(A+iE)x=x,$$

откуда, раскрывая скобки и сравнивая с написанным выше, получим:

$$ACx=CAx, \qquad ABx=BAx, \quad (x\in D(A)), \tag{207}$$

т. е. ограниченные операторы B и C коммутируют с A в смысле определения из [191].

Из формул $BC = BAB = ABB = CB$ следует, что

$$CB = BC, \tag{208}$$

т. е. B и C коммутируют между собой. Пользуясь (205) и (206), получим $B = BE = B(B + AC) = B^2 + BAC = B^2 + ABC = B^2 + C^2$, т. е. B есть положительный оператор. Далее из формул

$$\| x \|^2 = \| (A - iE) u \|^2 = ((A - iE) u, \quad (A - iE) u) = \| Au \|^2 + \| u \|^2,$$
$$\| y \|^2 = \| Av \|^2 + \| v \|^2$$

следует, что $\| u \| \leqslant \| x \|$ и $\| v \| \leqslant \| y \|$, т. е. нормы операторов $(A - iE)^{-1}$ и $(A + iE)^{-1}$ не превышают единицы, а потому, в силу (203), то же можно утверждать о B и C. Покажем ещё, что из $Bx = 0$ следует $x = 0$. Действительно, если $Bx = 0$, то $(Bx, x) = (B^2 x, x) + (C^2 x, x) = 0$, т. е. $(Bx, Bx) + (Cx, Cx) = 0$ или $\| Bx \|^2 + \| Cx \|^2 = 0$, откуда следует, что $Cx = 0$. После этого формула (205) даёт: $x = Bx + ACx = 0$. Кроме указанных выше свойств операторов B и C, нам понадобится ещё одна лемма, доказательство которой мы приведём ниже.

Лемма. *Пусть M_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — попарно ортогональные подпространства, ортогональная сумма которых даёт всё H. Пусть далее в каждом M_n определён самосопряжённый ограниченный оператор A_n. При этом существует единственный самосопряжённый в H оператор A, совпадающий с A_n в M_n. Линеал $D(A)$ состоит из тех элементов x, для которых ряд, составляемый из $\| A_n x_n \|^2$, сходится, причём через x_n мы обозначили проекцию x в M_n, и для указанных x мы имеем:*

$$Ax = \sum_n A_n x_n. \tag{209}$$

Вернёмся к операторам B и C. Спектр B лежит на отрезке $[0, 1]$, и, поскольку из $Bx = 0$ следует $x = 0$, точка $\lambda = 0$ не принадлежит точечному спектру, так что, если мы через $\mathcal{E}'_\lambda$ обозначим спектральную функцию оператора B, то $\mathcal{E}'_0 = 0$. Обозначая через M_n то подпространство, в которое проектирует оператор $(\mathcal{E}'_{\frac{1}{n}} - \mathcal{E}'_{\frac{1}{n+1}})$, мы можем утверждать, что M_n попарно ортогональны и что их ортогональная сумма равна H. Если ограниченный самосопряжённый оператор F коммутирует с $\mathcal{E}'_\lambda$, то, в силу теоремы из [148], M_n приводит F. Это будет иметь место для C и любой вещественной непрерывной функции от B [193]. Мы положим $\varphi_n(\lambda) = 1 : \lambda$ при $\frac{1}{n+1} \leqslant \lambda \leqslant \frac{1}{n}$ и равной постоянной вне указанного промежутка, с сохранением непрерывности на концах, и введём самосопряжённый ограниченный оператор $\varphi_n(B)$. Если $z \in M_n$, то $\mathcal{E}'_\lambda z = z$ при $\lambda \geqslant \frac{1}{n}$ и $\mathcal{E}'_\lambda z = 0$ при $\lambda \leqslant \frac{1}{n+1}$. Это непосредственно следует из формулы

$$\mathcal{E}'_\lambda z = \mathcal{E}'_\lambda (\mathcal{E}'_{\frac{1}{n}} - \mathcal{E}'_{\frac{1}{n+1}}) z$$

и того, что $\mathcal{E}'_\mu \mathcal{E}'_\lambda = \mathcal{E}'_\lambda \mathcal{E}'_\mu = \mathcal{E}'_\mu$ при $\mu \leqslant \lambda$. Если мы выразим $\varphi_n(B) z$ и Bz интегралами Стилтьеса через $\mathcal{E}'_\lambda$ и воспользуемся определением $\varphi_n(\lambda)$ и только что сказанным относительно $\mathcal{E}'_\lambda z$, то получим, что $\varphi_n(B) B = B\varphi_n(B) = E$ в M_n, т. е. B и $\varphi_n(B)$ обратны в M_n. Если $z \in M_n$, то мы можем написать $z = B\varphi_n(B) z$, откуда видно, что из $z \in M_n$ следует $z \in D(A)$.

Пользуясь (206), можно написать: $Az = AB\varphi_n(B)\, z = C\varphi_n(B)\, z$, откуда видно, что A — ограниченный в M_n оператор. Принимая ещё во внимание, что C и $\varphi_n(B)$ коммутируют и что M_n приводит C и $\varphi_n(B)$, можем утверждать, что A есть ограниченный и самосопряжённый в M_n оператор. Обозначим через $\mathfrak{E}_\lambda^{(n)}$ разложение единицы, соответствующее этому оператору в M_n. На основании леммы мы можем составить самосопряжённый в H оператор $\mathfrak{E}_\lambda$.

$$\mathfrak{E}_\lambda x = \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{E}_\lambda^{(n)} x, \tag{210}$$

и нетрудно прозерить, что $\mathfrak{E}_\lambda$ будет разложением единицы в H. Если мы составим интеграл Стилтьеса, который определяет некоторый самосопряжённый оператор,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d\mathfrak{E}_\lambda x,$$

то, принимая во внимание, что $\mathfrak{E}_\lambda\, x = \mathfrak{E}_\lambda^{(n)} x$, если $x \in M_n$, видим, что он даёт A, если $x \in M_n$, и тем самым, в силу леммы, он определяет оператор A. Остаётся доказать формулированную выше лемму.

Пусть x принадлежит линеалу $D(A)$ тех элементов, для которых

$$\sum \| A_n x_n \|^2 < \infty;$$

определим оператор A формулой $Ax = A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots$ Покажем, что A — самосопряжённый оператор. Линеалу $D(A)$ принадлежат, очевидно, конечные суммы элементов x_n, и потому линеал $D(A)$ плотен в H. Симметричность A вытекает из самосопряжённости A_n и формулы

$$(Ax, y) = \left(\sum_n A_n x_n, \sum_n y_n\right) = \sum_n (A_n x_n, y_n) = \sum_n (x_n, A_n y_n) =$$
$$= \left(\sum_n x_n, \sum_n A_n y_n\right) = (x, Ay),$$

где x и $y \in D(A)$ и мы использовали непрерывность и дистрибутивность скалярного произведения, а также ортогональность подпространств M_n. Таким образом $A^* \supseteq A$, и нам надо доказать, что если $x \in D(A^*)$, то $x \in D(A)$. Принимая во внимание, что $A^2 x_n$ принадлежит M_n и что $x - x_n \perp M_n$, можем написать:

$$(A^*(x - x_n),\ Ax_n) = (x - x_n,\ A^2 x_n) = 0,$$

откуда при $n = 1$, в силу теоремы Пифагора,

$$\| A^* x \|^2 = \| A^*(x - x_1) \|^2 + \| Ax_1 \|^2.$$

Совершенно так же можем написать:

$$\| A^*(x - x_1) \|^2 = \| A^*(x - x_1 - x_2) \|^2 + \| Ax_2 \|^2,$$

т. е.

$$\| A^* x \|^2 = \| A^*(x - x_1 - x_2) \|^2 + \| Ax_1 \|^2 + \| Ax_2 \|^2,$$

и вообще

$$\| A^* x \|^2 = \| A^*(x - x_1 - x_2 - \ldots - x_n) \|^2 + \sum_{k=1}^{n} \| Ax_k \|^2,$$

откуда следует:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \| A_n x_n \|^2 \leqslant \| A^* x \|^2,$$

а потому $x \in D(A)$; самосопряжённость A доказана. Остаётся доказать, что существует единственный самосопряжённый оператор, совпадающий с A_n на M_n. Пусть, кроме построенного A, существует ещё оператор A'. Из самосопряжённости A' вытекает, что он замкнут. Для конечных сумм

$$A' \sum_{k=1}^{m} x_k = A \sum_{k=1}^{m} x_k = \sum_{k=1}^{m} A x_k,$$

ибо A и A' совпадают на M_n. Принимая во внимание замкнутость A', можем утверждать, что A' определён на $D(A)$ и совпадает на этом линеале с A, т. е. $A' \supseteq A$. С другой стороны, заменяя в приведённом выше доказательстве A^* на A', придём к заключению, что если $x \in D(A')$, то $x \in D(A)$, и, следовательно, A' совпадает с A: лемма доказана.

Внешняя мера 105
Возмущение спектра 491

График оператора 559

Дифференциальные решения уравнения 477, 521, 536, 595
Дифференцирование функционалов над $\mathring{C}^{(l)}$ 379
Дефекта индексы 611

Измеримость множеств 108
— —, ее критерии 118
— функций 126
Интеграл Коши — Стилтьеса 89
— — —, формула обращения 90
— Лебега 142
— Лебега — Стилтьеса 141, 148, 193, 201
— — —, предельный переход под знаком интеграла 162
— Стилтьеса 14, 76
— — несобственный 26
— — общий 62
— — от непрерывной функции 23
— —, существование 43, 68
— —, физическая интерпретация 33
— Фурье — Стилтьеса 82
— —, формула обращения 85
— —, теорема свертывания 87
— Хеллингера 263, 269
Интегральное представление Соболева функций из $W_p^{(l)}$ 368

Класс B — функций 139
Коммутирование операторов 398, 489, 496, 503, 580, 596
Компактность в метрическом пространстве 288
—, ее критерии 289
—, примеры 290—295
— слабая в гильбертовом пространстве 417
— — функционалов 315
Компактность слабая множества элементов в пространствах типа B 317

Линеал в L_2 183
— в пространствах типа B 301
Линейная независимость элементов в пространстве типа B 300
Линейная оболочка 302

Матрицы проектирования 511
— самосопряженные 511, 520
— унитарные 509, 510
— Якоби 518, 639
— C 645
Множества 93
— замкнутые 97
— измеримые 108
— открытые 97
— B 124

Неравенство Бесселя 175, 386
— Буняковского 387
— Гильберта 525
— Гельдера и Минковского 188
— Пуанкаре 372
— Фридрихса 374
Норма абсолютная оператора 439
— ограниченного оператора 304, 397
— функционала 307, 395, 401
Норма элементов нормированного пространства 300
—, эквивалентность 349

Обобщенные производные 339
Ортогонализация элементов пространства Гильберта 391
Ортогональность элементов пространства Гильберта 388
Операторы в гильбертовом пространстве 397
— в метрическом пространстве 282
— в нормированном пространстве 303
— вполне непрерывные 331, 335, 336, 337, 419, 430, 528, 532
— гипермаксимальные 613

Операторы дистрибутивные 303
— замкнутые 554
— изометричные 438, 604, 605,
— интегральные 529, 604
— — с полярным ядром 362
— линейные 306, 397
— неограниченные 554, 564
— максимальные 612
— непрерывные 303
— неприводимые 472
— нормально-разрешимые 558
— нормальные 493
— обратные 306, 404
— ограниченные 304, 505, 529
— положительные 403, 561
— положительно-определенные 561
— полуограниченные 561
— проектирования 397, 442
Операторы самосопряженные 400, 562
— симметричные 561
— сопряженные 331, 399, 504, 530, 556, 614
— умножения на независимую переменную 480, 546, 599
— унитарные 435, 537
— унитарно-эквивалентные 437

Подпространства взаимно-дополнительные 395
— инвариантные 470, 580
—, операции над ними 440
— линейного пространства 302
Подразделение 20
Подразделений произведение 20
Подразделения продолжение 20
Полнота пространства 275, 301, 388
— слабая регулярного пространства 319
Пополнение метрического пространства 275
Представление функционала в гильбертовом пространстве 396
Приводимость оператора 581
Принцип выбора 50
Проекция элемента гильбертова пространства 393
Принцип сжатых отображений 282
Произведение внутреннее 312
Пространства изометричные 276, 302
— линейные нормированные 299
— линейных операторов 328
— метрические 274
— регулярные 312
— сопряженные 311
— l_2 и l_p 180, 188, 198, 283, 503
— L_2 и L_p 183, 188, 198, 284, 529
— R_n, m, s, M, S, V 283, 284, 285
Пространства $\mathring{C}^{(l)}$, $C^{(l)}$, $U^{(l)}$ 376
— $C^{(l)}$ 358
— $\mathring{C}^{(l)}$ 376
— $W_p^{(l)}$ 347
— $\overline{W}_p^{(l)}$ 350
— $\mathring{W}_p^{(l)}$ 356
Пространство Гильберта 386
— C 52, 81, 284
— K 385

Разложение единицы 447, 583
— спектральное самосопряженных операторов 454, 584
— спектральное унитарных операторов 484
Расширение операторов по непрерывности 305
— полуограниченных операторов 617
— симметричных операторов 607
— функционалов 307
Регулярного типа точка симметричного оператора 627
Регулярная точка оператора 410, 575, 627
Резольвента 410, 415, 459, 590
— матрицы 513
Ряд степенной от оператора 416, 498, 499

Сепарабельность 298
Скалярное произведение 386
Собственные значения 408, 592
— — самосопряженного оператора 410, 461, 476
Спектр непрерывный 464, 473
— оператора 408
- предельный 476
- простой 517
— простой непрерывный 470
— самосопряженного оператора 411, 476, 575
— симметричного оператора 627
— смешанный 475, 593
— точенный 476, 578
— чисто непрерывный 464, 593
— чисто точечный 463, 593
Спектра малые возмущения 598
— точки сгущения 476, 491, 492
— ядро 628
Спектральная функция 455, 500, 589 589
— — интегрального оператора в L_2 534, 535
Сравнение полуограниченных операторов 623
Средние функции 217, 340

Суммы Дарбу — Стилтьеса 19
— Лебега 142
— Римана — Стилтьеса 15
Сходимость в метрическом пространстве 274
— в линейном нормированном пространстве 301
— в среднем 168
— операторов 329
— слабая в гильбертовом пространстве 417
— — в C 327,
— — в l_p и L_p 326, 327
— — операторов 330
— — функционалов 313
— — элементов 315
Теоремы вложения 376
Тело множеств B 120

Унитарная эквивалентность самосопряженных операторов 483
— — матриц 520
Уравнение замкнутости 175, 390
— — обобщенное 179, 391
Уравнения операторные 333, 425

Фубини теорема 203
Фундаментальная последовательность 276
Функции абсолютно непрерывные 233, 246
Функции множеств абсолютно непрерывные 231, 237, 259
— — аддитивные 225
— — сингулярные 229
— ограниченной вариации 34
— — — на плоскости 78
— — — многих переменных 81
— промежутков 60
— скачков 29
Функций ортогональные системы 174
— — —, замкнутые и полные 177
Функционалы билинейные и квадратичные 401
— линейные в гильбертовом пространстве 395
— — C 54, 319
— — L_p 320
— — l_p 326
— — $\overset{\circ}{C}{}^{(l)}$ 376
— — типа функции 376
— — в нормированном пространстве 282
— на компактных множествах 290
Фурье преобразование 540, 544
Эквивалентность функций 128

Эквивалентные нормировки пространств $W_p^{(l)}$ 360
Эрмита функции 544

Ядра, зависящие от разности 547

Смирнов Владимир Иванович

Курс высшей математики. Том V

Редактор *Г. П. Акилов*

Техн. редактор *Р. Г. Польская*

Корректор *Е. А. Максимова*

Подписано к печати с матриц 9/IV 1959 г. Бумага $60\times92^{1}/_{16}$. Физ. печ. л. 41. Усл. печ. л. 41. Уч. изд. л. 43,32. Тираж 25 000 экз. Цена 14 р. 50 к. Т-00957. Заказ № 470.

Государственное издательство физико-математической литературы. Москва, В-71. Ленинский проспект, 15.

Ленинградский Совет народного хозяйства. Управление полиграфической промышленности. Типография № 1 «Печатный Двор» имени А. М. Горького. Ленинград, Гатчинская, 26.

ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
54	9 св.	$N > n_\Phi$.	$N < n_\Phi$.
93	6 сн.	$A \subset C$	$A \subset B$
95	14 св.	$(A_1 + A_2) - (B_1 - B_2)$	$(A_1 - A_2) - (B_1 - B_2)$
227	1 сн.	$S = \sum_k \varphi(\mathscr{E}_k)$,	$S = \sum_k \varphi(\mathscr{E}_k)$,
238	2 св.	замкнутого множества F. Формула (16) дает меру любого открытого множества. Если при помощи формулы: $\mathscr{E}_1 = O - F$, где $F \subset O$.	замкнутого множества F.
253	10 сн.	$\mathscr{E}$ из L_G	$\mathscr{E}$ из $\mathscr{E}_0$
320	2 сн.	p и $q \to \infty$	q и $r \to \infty$
	3 сн.	$\sum_{k=p}^{q}$	$\sum_{k=q}^{r}$
359	2 св.	$x \in D$	$x \in \bar{D}$
374	20 сн.	$\int_D \left(\frac{\partial u(y)}{\partial x_k}\right)^2 dy$	$\int_{\bar{D}} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial u(y)}{\partial y_k}\right) dy$
439	5 сн.	множества A	множества M
445	11 и 12 св.	(93)	(166)
507	3 и 5 св.	$\geq$	$>$
520	5 св.	ограничены по абсолютной величине.	ограничены по абсолютной величине одним и тем же числом.
554	18 сн.	(174)	(175)
572	9 св.	$\frac{\partial^2}{\partial x_k}(x) \leqslant C_2(x)$.	$\frac{\partial^2}{\partial x_k} \leqslant C_2\zeta(x)$.
588	17 св.	оператор называется	оператор $\mathscr{E}_\lambda$ называется
617	22 сн.	$H = L_0 + L_1 + L_2 + \ldots + L_q$,	$H = L_0 + L_1 + L_2 + \ldots + L_q$,

Зак. 470. В. И. Смирнов.