Е.Л. Тюрин

НОВАЯ ПАРАДИГМА РЕЛЯТИВИСТСКОЙ И КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

- релятивистская классическая механика
- вывод уравнения Шредингера
- релятивистские зависимости при решении уравнения Шредингера
- классическое описание движения электрона с учетом спина

Е. Л. Тюрин

НОВАЯ ПАРАДИГМА РЕЛЯТИВИСТСКОЙ И КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

КАФЕДРА
РУССКАЯ ПАНОРАМА
МОСКВА • 2012

УДК 530.1
ББК 22.31
Т98

Серия: «Профессионалы: просто о сложном»

Е.Л. Тюрин

Т98 Новая парадигма релятивистской и квантовой механики. — М.: «Кафедра»; «Русская панорама», 2012. — 218 с. — (Серия: «Профессионалы: просто о сложном»)

ISBN 978-5-93165-270-2

В книге излагается новая концепция релятивистской механики, исключающая использование преобразований Лоренца или принципа инвариантности интервала Минковского. Показано, что уравнение Шредингера выводится строго формально при последовательном использовании представления о спине. При этом описание тонкой структуры водородоподобного атома как проявление релятивистских эффектов может быть получено с помощью уравнения Шредингера в его нерелятивистской форме.

Предложена новая классическая модель с учетом спина для решения квантовых задач.

Для широкого круга читателей, интересующихся концептуальными проблемами физики.

УДК 530.1
ББК 22.31

ISBN 978-5-93165-270-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

От автора

Читатель, ознакомившись с содержанием книги, которую ему предстоит прочесть, уже может сделать первые выводы относительно того, в чем именно автор собирается его переубедить в отношении общеизвестных фундаментальных физических истин или хотя бы удивить новизной теоретического ракурса при их внимательном рассмотрении. Увы, необходимость переубеждения и связанный с этим определенный эпатаж — неизбежные следствия всякого подобного предприятия, когда отдельный и к тому же не слишком известный научной общественности исследователь осмеливается сказать нечто новое в отношении «прописных» научных истин фундаментального характера. Первоначальное инстинктивное неприятие читателем самой цели рассматриваемого труда автору, можно сказать, обеспечено: «хочет казаться умнее других!», «на чей авторитет покушается!» и т. п. Единственное, на что может рассчитывать автор, — так это естественное любопытство вдумчивого читателя, которое способно подкрепить его желание ознакомиться с логикой авторского анализа концепции той общей механики, которая заложена в основу научного мировоззрения каждого из нас, включая и его философский уровень.

Следуя только чисто научной мотивации труда, автор задался целью исследовать вопрос о необходимости и даже правомерности использования известной системы постулатов в механике, включая ее классический, релятивистский и квантовый варианты, причем задействовать в указанном исследовании только логико-математический подход, не опосредованный какими-либо ссылками на опыт в любой из его форм в качестве необходимой составляющей целенаправленной научной деятельности, поскольку подобные ссылки фактически означают введение в теорию соответствующих постулатов внелогического характера либо придание теории характера ad hoc (специально для данного случая). Желаемой целью предпринятого автором концептуального анализа является исследование принципиальной возможности построения механики в качестве логически замкнутой теоретической системы, свободной от фиксирующих логические «барьеры» принципов типа «принципа дополнительности» Н. Бора; механики, логически независимой от опыта и вместе с тем полностью ему соответствующей, если, конечно, теория и экспериментальные данные корректны в отношении описания рассматриваемого явления природы. Автор, разумеется, далек от мысли, что упомянутая «желаемая цель» может быть достигнута посредством представленного в его небольшой книге исследования, однако надеется на то, что некоторые полученные им результаты могут быть в дальнейшем использованы для формирования будущей логически непротиворечивой развернутой концепции механики инертных тел.

ВВЕДЕНИЕ

История развития физики в ее концептуальном отношении характеризуется достаточно отчетливо выявляемым «колебательным» процессом взаимозамены полярных парадигм единства и мозаичности физической картины мира. До эпохи протестантизма внутреннее единство строения всего сущего было a priori обеспечено созидательной деятельностью Бога, и вопрос заключался лишь в том, насколько человек способен понять и описать замысел Создателя. Атеизм, хотя бы на стихийном уровне, отсутствовал как общественное явление, поэтому вопрос о правомерности безальтернативной веры в исходящее от Бога смысловое единство мироздания для науки не был актуален. Однако, начиная с Давида Юма и Иммануила Канта, общественное обсуждение проблем разумности и единства объективного мира, равно как и возможности человеческого разума в отношении его адекватного понимания и описания, стало важнейшей составной частью естественнонаучной деятельности. Божественный статус классической механики из априорного перешел в разряд дискутируемой гипотезы.

В начале XX столетия в физике сложилась ситуация, когда в еще пока небольшом корпоративном сообществе исследователей высокого уровня, не считавших для себя возможным дистанцироваться от вопросов концептуального уровня, обсуждались два альтернативных пути дальнейшего развития теории. По времени возникновения первый основывался на возврате к идее возможности единого, непротиворечивого и строго причинного описания мира, но уже не на основе корпускулярно-механической методологии, а на полевой. Инициатором и вдохновителем данной программы был Альберт Эйнштейн, создатель общей теории относительности (GTR) — (список используемых в книге аббревиатур см. в конце книги), или теории тяготения. Другой путь виделся группе физиков во главе с Нильсом Бором в отказе от сохранения единства описания, что нашло свое выражение в «принципе дополнительности», согласно которому физическая картина явлений допускает использование взаимоисключающих наборов понятий и параметров. Соперничество упомянутых теоретических школ ведется уже 80 лет без достижения решающего преимущества какой-либо из сторон и, увы, без выдвижения каких-либо новых идей, сравнимых по значимости с достижениями великих физиков первой трети прошлого столетия, составившими концептуальный фундамент современной физики.

Любое длительное идеологическое противостояние способствует стихийному формированию определенной группы устоявшихся принципов и постулатов, относящихся к разным школам, принятие которых «по соглашению» позволяет достичь некоего компромисса, необходимого для развития самой физики на всех ее уровнях, в том числе и весьма далеких от концептуального. Психология общественного сознания, имея в виду его научно-образовательную компоненту, такова, что компромиссность системы постулатов со временем теряет остроту противоречивости, а сама система обретает статус незыблемого фундамента науки, при этом концептуальная новизна идей ищется уже только вне указанной системы. Очевидно, однако, что никакое общественное согласие в науке относительно ее законов нельзя принять в качестве фундаментального закона, отступление от которого в давние времена именовалось ересью и было строго наказуемо варварскими способами.

Все сказанное автором выше не имело бы никакого содержательного смысла, кроме псевдофилософского, без прямого указания на то, какие именно устоявшиеся (иногда по умолчанию) воззрения физики концептуального уровня подлежат критическому обсуждению. Ниже приводится их перечень, и именно они будут содержательно проанализированы в последующих четырех главах книги с использованием необходимого для этого логико-математического аппарата.

1. Эйнштейновская специальная теория относительности (STR) основывается на утверждении, что средствами механики инертных тел невозможно осуществить необходимую операцию синхронизации часов в движущейся относительно лабораторной инерциальной системе координат; соответственно, невозможно измерить длину движущегося предмета в направлении его движения. Для однозначной реализации обеих измерительных процедур необходимо использовать немеханическое явление — электромагнитное излучение, или световые лучи. В трактовке Минковского сказанное эквивалентно условию инвариантности интервала для событий, связанных с механическим движением, аналогично свойству инвариантности интервала для распространения светового сигнала. Таким образом, принимается постулат о невозможности построения релятивистской механики без использования в ее логической структуре свойств электромагнитного излучения. Иными словами, утверждается, что механика в качестве замкнутой системы понятий не обладает логической самодостаточностью в форме общей концепции движения инертных тел.

2. Математический формализм STR логически однозначно выводится из соответствующих постулатов для пространства одного измерения, т. е. в координатах x, t, что, кстати, справедливо и для классической теории Ньютона (CM). Переход к пространственной многомерности в STR осуществляется в качестве естественного обобщения одномерной теории; при

этом количество рассматриваемых пространственных измерений, в том числе и превышающее 3, ничем формально не ограничено.

3. Классическая механика по форме является приближением релятивистской механики при скоростях движения, малых по сравнению со скоростью света. Однако концептуально классическая и релятивистская формы механики, если последняя совпадает с STR, различаются принципиально, поскольку ньютонова механика логически самодостаточна при снятии ограничения на скорость движения инертных тел.

4. Формализм квантовой механики (QM) основывается на постулировании уравнения Шредингера как в одномерном, так и многомерном вариантах. В его структуре нет никаких ограничений на мерность пространства, по крайней мере, в нерелятивистской форме представления.

5. Утверждение о том, что вывести уравнение Шредингера нельзя чисто логическими средствами, принимается в качестве постулата, обоснованного фактическим развитием традиционной квантовомеханической концепции и отсутствием успешных альтернативных трактовок проблемы происхождения уравнения.

6. Корпускулярно-волновой дуализм считается одним из фундаментальных принципов, определяющим формализм любой методологии, имеющей отношение к сфере его приложения. В частности, полагается невозможным классическое описание сугубо квантовых объектов как не соответствующее физической сущности их состояния и движения (к примеру, описание атома водорода), а любые отдельные совпадения результатов расчетов в рамках классической и квантовой моделей являются случайными.

7. Традиционный путь построения формализма релятивистской квантовой механики (RQM) включает в себя требование его совместимости с формализмом STR. В этой связи любая модификация последней неизбежно влечет за собой соответствующее изменение формализма QM, учитывающего релятивистские эффекты.

Конечно, в небольшой по объему книге невозможно дать последовательный и исчерпывающий хотя бы в концептуальном отношении анализ перечисленных выше вопросов. Цель предпринятого автором системного исследования состоит в том, чтобы показать необходимость и содержательность развернутого критического анализа традиционного концептуального фундамента физики хотя бы на примере одной только механики вне ее связи с другими столь же общими теориями. Поэтому в книге анализируется только хорошо известный, апробированный теоретический материал, давно уже ставший классической основой вузовского образования. В этой связи автор не приводит ссылки на какие-либо литературные источники, полагая, что достаточно образованному читателю история становления физики в общих чертах известна. Часть вопросов, рассмотренных в книге, выходит за рамки перечисленных выше. На это есть свои причины, которые поясняются непосредственно в тексте соответствующих глав.

Необходимо далее заметить, что «концептуальность» рассматриваемых в книге вопросов непосредственно затрагивает философскую проблематику физики вообще, а не только механики. Увы, включение в книгу сколь-нибудь подробного обсуждения философской стороны рассматриваемых в каждой из глав вопросов могло бы привести к значительному увеличению ее объема; к тому же, вполне возможно, это усложнило бы восприятие читателями авторской точки зрения по существу каждой из рассматриваемых им проблем — а именно так, очевидно, и следует именовать большинство конкретных тем книги. Поэтому автор сознательно ограничился только кратким обсуждением принципов использования в анализе механики общей логики, предельно ограничив обсуждение специфических вопросов существа как самой логики, так и ее статуса в составе философии.

Для удобства чтения текста автор использовал специальные аббревиатуры для обозначения наименований отдельных разделов механики, составляя их по начальным буквам слов английского перевода традиционных русскоязычных терминов. Список аббревиатур приведен в конце книги.

Глава 1

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

«Что же есть время? Если никто не спрашивает меня о том — знаю; если же попросят объяснить — не знаю»

Августин

«Люди не понимают того, что наука, единственное наслаждение которой состоит в следовании точному образу вещей, может питаться иллюзиями»

Х. Ортега-и-Гассет

Традиционно концепция макромеханики представляется в виде двух взаимосвязанных частей: классической механики (CM) и специальной теории относительности (STR), которая позволяет описывать так называемые релятивистские эффекты. Ниже будет показано, что имеются основания для замены STR на отличную от нее релятивистскую механику (RM), которая также описывает те же *наблюдаемые* на опыте релятивистские эффекты, что и STR, но принципиально отличается от нее по своей логике построения. Поскольку RM и CM концептуально более совместимы, чем CM и STR, то имеются основания для объединения классической и релятивистской механик, в том числе и в концептуальном отношении, в единую релятивистскую классическую механику, под которой в дальнейшем, собственно, и будет подразумеваться RM.

1.1. Предварительные замечания

Содержание данной главы представляет собой конкретный, хотя и достаточно общий пример реализации нового методологического подхода к проблеме построения непротиворечивой концептульной структуры теоретической физики. А именно, используя общепринятую в мировой научной практике логику построения умозаключений, ставится задача формирования механики инертных тел с учетом релятивистских эффектов, т. е. в диапазоне скоростей $0 \leq v \leq c$, где c — скорость света, v — модуль вектора скорости тела; при этом аксиоматический метод, использованный, в частности, при создании специальной теории относительности, заменен логической схемой с несколькими постулатами, реально необходимая иерархия значимости которых и, соответственно, очередности использования являются также искомыми функциями рассматриваемой проблемы. Развитие подобной схемы теоретического анализа подразумевает, что она опирается на два нижеследующих фундаментальных методологических основания.

1. Научная логика исследователя с ее уже давно установленными и выверенными законами и приемами конкретного исследования рассматривается в качестве некоего фундаментального постулата, который не только подразумевается, но и прямо используется во всех выводах в качестве основного элемента теоретической концепции. В отличие от традиционных методологий построения теорий общего характера явное использование логического постулата означает, что не ставится под сомнение фундаментальность как самого логического аппарата, так и основных задействованных им категорий, не имеющих смысла без их логической, т. е. функциональной, связи. Наиболее ярким примером подобной внутренне взаимосвязанной фундаментальности является метематика с ее опорой на натуральные числа как совокупность одинаковых независимых элементов (единиц) и способы их группировки (математические действия). Фундаментальность логики в самом общем смысле означает признание ее непротиворечивой связи с природой реального мироздания, законы которого и подлежат исследованию. Основным логическим законом следует признать принцип причинности, абсолютно справедливый в рамках той сущностной системы, которая рассматривается в данной книге. Сказанное означает признание в качестве априорного факта принципа отсутствия чудес, т. е. природных явлений, не обладающих свойством обратной связи и не подчиняющихся ему. Иными словами, любая «потусторонность» и «божественность» исключаются из действительно научного анализа. Вероятность как конкретная логическая составляющая также всецело подчинена закону причинности, и вопросом является лишь конкретизация их взаимосвязи в рамках рассматриваемых задач.

Разумеется, подобное повышение статуса научной логики в теоретическом исследовании — далеко не формальное утверждение. Из него необходимо вытекает второе фундаментальное основание методологического характера.

2. Опыт в смысле научного эксперимента по отношению к логике теоретического исследования имеет преимущественно апостериорный характер. Правильная, — а значит, действительно последовательная, — логическая структура не может в своих выводах противоречить любой экспериментальной верификации, проводимой в рамках одной проблемы. Противоречие, если оно обнаруживается, может быть объяснено либо ло-

гическими ошибками, либо искажениями в реальной картине иерархии функциональных постулатов, определяемой теорией.

В связи со сказанным необходимо уточнить понятие феноменологических связей в теории. Любая подобная связь есть лишь математическое выражение конкретной логической структуры, реализованной в наиболее сжатой форме (в отличие от вербальной, характерной для сугубо философских исследований). Поэтому феноменологические коэффициенты также представляют собой исключительно логические элемены, но никак не опытные константы, величины и т. п. В действительно последовательной феноменологии константы могут быть только подтверждены экспериментом — в качестве констант, если теория не идет глубже исследуемого уровня описания, и в качестве констант с определенными числовыми значениями, если используемая в теории феноменология имеет многоуровневый логический характер.

Таким образом, в действительно последовательной теории любые функциональные соотношения не могут содержать никаких иных параметров, кроме тех, происхождение которых носит чисто логический причинный характер. В дальнейшем ссылки на уже имеющийся опыт будут использоваться только в качестве «подсказки» для построения логической схемы исследования, и все данные опыта впоследствии должны найти в ней строгое обоснование.

Возможно, что с точки зрения философско-вербального подхода данную общетеоретическую установку можно назвать логическим материализмом, поскольку ее очевидный логический идеализм используется исключительно для исследования сугубо материальных явлений в рамках макромеханики. Но в настоящей работе не ставится цель определения места развиваемой ниже общетеоретической концепции в ее философском аспекте в ряду имеющихся философских систем общего характера. Можно лишь предварительно отметить, что если и будет впоследствии дана ей развернутая характеристика, то она вряд ли окажется совместимой с любой отдельно взятой существующей научно-мировоззренческой концепцией.

1.2. Координатные характеристики

Представление материального тела в виде движущейся точки является вполне понятной и допустимой идеализацией классической механики (СМ), равно как и представление о лабораторной системе координат *K*, свободной от внешних воздействий, в которой осуществляются измерения всех механических параметров, прежде всего пространственных координат тела и времени. Для последовательной реализации заявленной выше логической схемы анализа основ механики как важнейшего раздела теоретической физики необходимо определиться прежде всего относительно понятия измерение. Очевидно, что измеряемость и материальность имеют вполне понятную логическую связь: то, что может быть инструментально измерено, имеет прямое отношение к материальному миру. С точки зрения механики все измеряемые характеристики материального тела обладают физической реальностью a priori и имеют либо имманентный характер (к примеру, масса материальной точки), либо опосредованный, если они непосредственно зависят от способа измерения (временные координаты, измеряемые по конкретным часам). При этом следует учитывать, что чистая имманентность также является определенной идеализацией реальности: так, лишь в CM масса считается инвариантом относительно выбора системы *K* и, следовательно, инвариантом в *K*, тогда как в релятивистской механике (RM) инвариантность сохраняется только в отношении массы покоя. Таким образом, измеримость является важнейшей характеристикой в механике, и уже в отношении указанного понятия имеется возможность классификации логических структур механики как теории на те, в которых все параметры измеримы (сюда целиком можно отнести CM), и те, которые включают в себя неизмеряемые параметры (к примеру, квантовая механика — QM). В нижеследующем логическом анализе механики мы пока ограничимся областью принципиально измеримых параметров, т. е. будем следовать логике построения CM. Однако, в отличие от CM, в рамках которой неявно постулируется возможность *точного* измерения всех без исключения параметров, мы обратим внимание на возможность существования принципиально неоднозначно измеряемых параметров, что, вообще говоря, должно ограничивать рамки их использования в любой исследуемой теоретической концепции.

1.2.1. Время

Традиционно в работах, не ограничивающихся чисто математической интерпретацией кинематических параметров, обсуждение сущности пространственно-временных координат начинается именно с пространственных по двум причинам: во-первых, четырехмерная трактовка специальной теории относительности (STR), в соответствии с которой временная координата рассматривается аналогично и наравне с пространственными, полагается абсолютно безупречной в концептуальном плане; во-вторых, использование понятия времени в науке выходит далеко за рамки чистой механики, что обычно требует привлечения некоторых дополнительных рассуждений общефилософского характера. Предлагаемый вниманию читателей в настоящей книге логический анализ механики концептуально имеет мало общего с STR; кроме того, никакой существенной аналогии между отсчетом времени и пространственными координатами в механике, по крайней мере в измерительном отношении, не существует, поэтому имеет смысл начать обсуждение именно с понятия времени, а не наоборот.

В неподвижной лабораторной системе K время измеряется по неподвижным в этой системе часам, т. е. с помощью устройства, в котором строго периодический механический процесс совмещен с механизмом счета числа периодов. Выбор конкретного периода в качестве физической основы создания системы дискретизации времени и использование счетчика числа периодов позволяют в принципе обеспечить достаточную для данного типа измерений точность отсчета последовательных промежутков времени. Созданный с помощью подобных часов эталон единицы времени и последовательный отсчет этих единиц путем арифметического сложения никак не связаны с механическим движением измеряемого тела относительно лабораторной системы отсчета вместе с покоящимися в ней часами, не влияют на это движение и сами не подвержены его влиянию. Причинная связь осуществляется только через способ фиксации событий, т. е. моментов нахождения тела в определенных точках пространства и, следовательно, может быть в принципе сделана энергетически исчезающе малой (разумеется, опять-таки в рамках привычных понятий СМ). Сказанное означает, что в механике вполне допустима абсолютно независимая от объекта регистрация идеального времени в качестве единого времени t в системе K. Любой измеряемый в K объект связан с ней через выбор для него момента начала отсчета времени t_0 — и не более того. В указанном смысле время t не имманентно материальному телу, как, скажем, его масса, не связано с его динамикой и внутренними свойствами по принципу обратной связи и является, следовательно, чисто внешней по отношению к телу характеристикой.

Возможна, однако, и принципиально иная организация измерения времени теми же механическими часами, что и неподвижные в K. А именно, полагая размеры и массу этих часов пренебрежимо малыми по сравнению с соответствующими характеристиками измеряемого тела, их (т. е. часы) можно поместить на тело (совместить с ним) и, следовательно, считать в любой момент времени t неподвижными относительно него. В этом случае, очевидно, любые изменения механического состояния тела при его движении в K некоторым образом отразятся и на механике отсчета времени по его собственным часам. Следовательно, состояния часов в K и часов, помещенных на тело, движущееся в K, в общем случае окажутся различными, поэтому имеет смысл говорить о наличии собственного времени t_s для данного тела, измеряемого по часам, неподвижным в собственной системе отсчета K_s, связанной с движущимся в K телом.

В классической ньютоновой механике не проводится различие между ходом часов в K и K_s, что выражается постулатом существования единого и в этом смысле абсолютного мирового времени t. Специфика измерения течения времени для отдельных тел заключается только лишь в выборе для них начальных моментов отсчета t_0, что никак не влияет на измерение промежутков времени. Соответственно, в рамках СМ не возникает принципиальной необходимости в выделении класса собственных систем отсчета K_s; если они и рассматриваются, то исключительно в целях удобства выполнения математических расчетов или по соображениям наглядности. Однако заметим, что постулат абсолютного времени не следует из каких-либо логических (т. е. включенных в объективную причинно-следственную связь) соображений; поэтому не удивительно, что он противоречит современному опыту. Следовательно, данный постулат должен быть отброшен как некое совершенно произвольное логическое утверждение. Сказанное отнюдь не означает, что он заведомо неверен. Утверждается только то, что данный постулат должен быть исключен из логической схемы построения механики в качестве ее исходного элемента. Более того, способы измерения времени t по часам, неподвижным в K, и времени t_s по часам в собственной системе K_s друг от друга независимы и объективны, поэтому, делая методологический выбор в пользу измерения t в K, мы нисколько не нарушаем непротиворечивость и последовательность логики построения теории движения инертных тел; тем более, что и часы являются сугубо механическими системами, подчиняющимися общим законам механики инертных тел.

Но почему именно механические (т. е. подчиняющиеся законам движения инертных тел) часы мы должны избрать в качестве средства измерения хода времени? Ответ содержится в самом смысле использования понятия «время» в механике. Поскольку речь идет о количественном (метематическом) описании механического движения, то в качестве физических составляющих такого описания должны быть выбраны велины, непосредственно выражающие операцию сравнения, аналогичную сравнению чисел по принципу «больше, меньше, равно». Указанные характеристики, очевидно, аналогичны соответствующим числовым. Смысл сравнения также очевиден: сравнение последовательностей наступления событий, порождаемых двумя механическими процессами, позволяет судить об их относительной скорости протекания. Если же один из процессов — отсчет времени по часам — принять за эталонный, то можно сравнивать между собой любые иные два и более механических процесса и тем самым сформировать представление об их относительных скоростях протекания. Особенно важное значение в механике имеет сравнение скоростей одинаковых механических процессов в физически разных условиях; например, когда измеряемые объекты движутся относительно друг друга. Указанная операция сравнения физически содержательна и оправдана только в том случае, когда эталонная механическая система — часы — подчиняется тем же законам, что и измеряемая — т. е. механическим законам движения. В противном случае возникает проблема адекватной с точки зрения механики интерпретации результатов измерений. Иначе говоря, организация отсчета времени в системе инертных тел не должна содержать внемеханические элементы, существенно определяющие физический процесс отсчета времени. К примеру, нельзя использовать «световые часы», поскольку электромагнитные волны относятся к немеханическим явлениям. Нельзя в том смысле, что интерпретация измерений будет искажать характер исследуемого механического явления. Сказанное относится и к операциям сравнения хода различных механических часов, к примеру, к операции их синхронизации, если она является определяющим элементом всего процесса измерения времени.

Отметим здесь же, что использование механических часов автоматически устанавливает как скалярность отсчета времени, так и его однонаправленность в том случае, если в основу принципа действия часов заложена периодичность механического процесса, исключающая возможность «стирания» отсчета путем любого способа фиксации количества периодов. Данное условие мы будем в дальнейшем рассматривать в качестве подразумеваемого в понятии «механические часы».

Возможность или, точнее сказать, «необходимость» использования электромагнитных волн при измерении времени в механике, на которой логически базируется теория относительности, гносеологически связана с неявно подразумеваемым, считающимся очевидным принципом, утверждающим существование единого пространственно-временного описания таких классических разделов физики, как механика и электромагнетизм. Согласно данному утверждению, единая в своих основах физическая картина мира «экономна» именно с точки зрения ее описания и потому «красива» как эстетический объект восприятия. Поэтому, если уравнения Максвелла инвариантны относительно преобразований Лоренца, то «необходимо» распространить эту инвариантность на всю механику вообще, включая квантовую, для достижения желаемого единства описания мира. Но все подобные «эстетические» принципы никак не следуют из последовательной логики научного мышления и потому не могут быть использованы в качестве даже косвенной, дополнительной аргументации в логике теоретического исследования концептуальной степени общности.

Логически последовательная механика, как представляется автору, может и должна быть развита в виде самосогласованной и потому самодостаточной идеальной логической схемы, имеющей при этом открытые «валентные связи» со всеми иными содержательными теориями. Но указанные валентности возникают как следствия из теории, не включаясь даже «по умолчанию» в нее на стадии ее логического построения. Подобной самосогласованной наукой является математика, логическая независимость и последовательность которой и послужили причиной ее феноменального торжества в современной науке. По аналогичной «логической схеме» должна выстраиваться и всякая иная действительно последовательная физическая теория, механика в частности.

1.2.2. Пространственные координаты

Для однозначного измерения пространственных координат в K необходимо иметь эталон длины, в качестве которого можно выбрать подходящий механический объект, удовлетворяющий всем необходимым для однозначности измерений требованиям жесткости и т. п. Его градуировка может быть проведена любыми, в том числе и немеханическими, способами, к примеру оптическими, что сути процесса измерения не меняет. Допустим, в некоторый момент времени t зафиксировано положение тела, и требуется определить это положение путем измерения соответствующих координат x, y, z в системе K, т. е. расстояний Δx, Δy, Δz от начала координат системы K. Измерение может проводиться и в отсутствие тела путем наложения эталона, поскольку соответствующий радиус-вектор $\Delta\vec{r}$ пространственных координат есть принципиально вневременная в отношении ее измерительной процедуры характеристика движения тела. Измерение может быть осуществлено и немеханическим способом, например оптическим, в силу все той же вневременности процесса измерения. Таким образом, процесс измерения координат, как и времени, в системе K не является процедурой, имманентной по своим результатам измеряемому объекту, т. е. является процедурой, внешней по отношению к его внутренним свойствам.

Если тело точечное, то процесс его движения никак не сказывается на специфике измерительного процесса, что есть прямое следствие описанных выше процедур. Именно поэтому в механике модель точечного тела наиболее соответствует координатному способу определения положения тела в пространстве. Совмещение материальной точки с любой пространственной точкой означает также, что пространственная координата становится физической характеристикой физического тела, если оно находится в соответствующей точке пространства (ее радиус-вектор характеризуется данной координатой). С математической точки зрения $\vec{r}$ как независимая от тела характеристика пространства самого по себе в выбранной системе отсчета становится важной характеристикой состояния тела $\vec{r}\,(t)$, где аргумент t как раз и фиксирует переход от пространства самого по себе к совокупности пространственных положений материальной точки. Однако при этом следует учесть, что функция $\vec{r}\,(t)$ тела, вообще говоря, неоднозначна в силу вполне возможной зависимости хода времени t от состояния системы отсчета (ее движения, воздействия поля гравитации и т. п.), поскольку подобная зависимость есть физическое свойство механических систем, даже если его существование только предполагается в качестве логико-математической модели, подлежащей дальнейшему анализу сугубо научными средствами.

Ситуация в корне меняется, если измеряемый объект не является точечным, а имеет, скажем, некую длину l, измеренную вдоль оси x в K при условии неподвижности данного тела. С точки зрения простейшей измерительной процедуры с использованием механического эталона длины мы можем измерить координаты концов тела x_1 и x_2 и тем самым определить его длину в состоянии покоя $l = x_2 - x_1$. Пусть теперь измеряемое тело движется вдоль оси x системы K, и мы вновь хотим измерить длину движущегося тела l', не предполагая a priori выполнение равенства $l = l'$. Очевидно, что способ измерения путем наложения эталона длины теперь неосуществим, поскольку не выполняется условие неподвижности эталона в K и, как следствие, вневременности процесса измерения. Если же эталон длины совместить с K_s, то процедура измерения позволит определить длину тела уже не в K, а в K_s, и если мы даже получим результат $l' = l_s = l$, то это отнюдь не означает, что мы действительно измерили в неподвижной системе K длину движущегося тела. Но ведь тело можно представить координатами его концов x_1 и x_2, измерение которых при движении тела, казалось бы, осуществляется вполне однозначно, хотя и раздельно. Неопределенность процесса измерения величины $l = x_2 - x_1$ возникает именно в силу указанной раздельности измерения координат концов отрезка (тела). Очевидно, что неодновременность измерения x_1 и x_2 недопустима, если тело движется, в том смысле, что результат $x_2 - x_1$ будет тогда зависеть от величины неодновременности измерения (фиксации во времени t) координат x_1 и x_2, т. е. зависеть от процедуры измерения произвольным образом. Только процедура наложения механического эталона снимает вопрос об одновременности измерения x_1 и x_2 автоматически, но такая процедура в принципе неосуществима при наличии движения измеряемого объекта. Вообще выполнить условие одновременности измерения координат двух движущихся точек x_1 и x_2 никакими чисто механическими, т. е. с использованием только инертных тел, способами невозможно — любые процедуры подобных измерений окажутся взаимозависимы с результатом измерения по принципу «порочного круга».

Традиционная механика дает нам два примера решения проблемы измерения длины движущегося тела. Согласно СМ просто постулируется инвариантность длины абсолютно твердого тела при любом его движении относительно неподвижной лабораторной системы K, что вполне, т. е. с приемлемой точностью, согласуется с системой СМ как теорией, надежно проверенной на практике. Согласно же STR чисто механический процесс измерения координат движущихся тел заменяется оптическим, т. е. используются при измерении инструменты, не подчиняющиеся законам движения инертных тел, что свойственно электромагнитным волнам. Использование подобного инструментария позволяет однозначно решать проблему достижения одновременности измерения координат концов движущихся отрезков и, как следствие, однозначности измерения их длин. При этом по умолчанию считается, что именно внемеханический способ измерения позволяет устанавливать «истинные» размеры движущихся тел.

В настоящем исследовании полагается, что вопрос об определении длин движущихся тел должен разрешаться в рамках самой логической схемы построения механики инертных тел без каких-либо ссылок на постулаты СМ или STR. В частности, разумно рассмотреть вопрос о необходимости для построения механики самого определения «длина движущегося тела»: *если указанное понятие не будет задействовано в логике построения механики, то его вообще можно будет исключить из совокупности содержательных понятий механики инертных тел без какого-либо ущерба для содержательности последней.*

В механике Ньютона предполагается, что пространство существует как нематериальный объект независимо от находящихся в нем тел — по крайней мере механических, инертных тел, для описания которых, собственно, и создавалась механика как фундаментальная концепция физики природы. В рамках реализуемой нами чисто логической концепции мы вправе пока что совершенно произвольно, вне всякого опыта, принять концепцию Ньютона независимости геометрических свойств пространства — его метрики — от находящихся в нем механических объектов, игнорируя наличие любых иных материальных объектов. При этом в полном соответствии с принятой методологией (если угодно, ее можно именовать и философской концепцией) процедура сопоставления теории и эксперимента — это апостериорная по своей сути процедура, результаты и выводы которой не включаются в теоретическую схему в качестве феноменологических и иных трактовок, поправок и коэффициентов по широко распространенному алогическому принципу ad hoc.

Среди бесконечного множества логически непротиворечивых геометрий наиболее простой является геометрия пространства с евклидовой метрикой, которая представляет собой пограничную структуру, разделяющую бесконечные метрические множества положительной и отрицательной кривизны. Именно евклидова метрика и была положена в основу СМ в силу исторических условий развития физических и математических наук. Отметим здесь, предваряя напрашивающийся вопрос, что, вообще говоря, не видно каких-либо принципиальных (кроме сугубо исторических) оснований утверждать, что логическое обобщение геометрии в духе Лобачевского, Бойяи, Гаусса и Римана не могло быть реализовано в эпоху становления механики Ньютона. Повлияло бы это на логическую структуру механики середины XVIII в.? Вряд ли возможен иной ответ, чем отрицательный. Логическая простота и замкнутость представления механики в евклидовом пространстве в любом случае предопределили бы выбор Ньютоном и его последователями именно той концепции механики, которая и была исторически реализована.

Аксиоматика пространства с нулевой кривизной до некоторой степени произвольна, но с точки зрения построения механики как физической теории удобно основывать ее на теореме Пифагора. При этом из множества возможных систем координат особое место занимает прямоугольная декартова система. Она — единственная из всех иных прямолинейных косоугольных систем — инвариантна относительно поворотов вокруг любой из своих осей на прямой угол, полностью соответствуя очевидным модельным требованиям однородности и изотропности пространства, которые, в свою очередь, без всяких оговорок логически совместимы с принципом независимости пространственной метрики от механических тел, «вложенных» в «пустое», априорно существующее пространство. Фундаментальная симметрия прямоугольной системы координат определяет и еще одно важнейшее свойство евклидова пространства — его метрическую замкнутость при наличии трех измерений (равно как и двух), определяемую как пространственную инвариантность такой системы относительно поворотов на прямой угол относительно любой из осей. При этом только в пространстве трех измерений можно определить однозначную процедуру векторного произведения, т. е. рассматривать пространственное вращение тела как однозначно определяемый математический объект теории, описывающей любые вращения. Обсуждение проблемы мерности евклидова пространства мы отложим на будущее, а пока в отношении пространства примем «промежуточный» логико-математический постулат, согласно которому радиус-вектор $\vec{r}$, имеющий координаты x, y, z в декартовой системе, связан с ними соотношением $|\vec{r}|^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

1.3. Скорость движения точечного тела

Уже из определения скорости следует, что данная кинематическая величина (параметр) по своей структуре значительно сложнее рассмотренных выше понятий (параметров описания) пространства и времени, поскольку зависит от их взаимоотношения. В этом легко убедиться, рассмотрев детально логическую структуру процесса измерения скорости в простейших умозрительных вариантах в одномерном приближении.

Если точечное материальное тело движется вдоль оси x в системе K, то для измерения его скорости v необходимо установить измерительную базу (x_1, x_2), такую, что начало отсчета времени t_1 регистрируется в момент прихода тела в точку x_1, а конец отсчета t_2 — прихода тела в точку x_2. Тогда $v_{12} = (x_2 - x_1)/(t_2 - t_1)$ — это средняя скорость движения тела в пределах базы

(x_1, x_2). На первый взгляд, однозначность результата измерения очевидна: приборы для измерения координат и времени — это, вообще говоря, различные приборы, не связанные между собой некоторым необходимым или неустранимым соотношением; более того, база может быть точно промерена до начала измерения, поэтому измерительный процесс, казалось бы, сводится к регистрации моментов t_1 и t_2 прихода тела в точки x_1 и x_2, что можно осуществить и посредством использования немеханических способов, например оптических. При этом K предполагается заполненной неподвижным в ней континуумом синхронизированных часов, так что функция $x(t)$ в этом смысле определена однозначно — в каждой точке пространства x идут помещенные в ней часы, отсчитывающие единое для K время. Однако более углубленный логический анализ позволяет обнаружить в описанной выше измерительной схеме некоторые принципиальные моменты, требующие дополнительного обсуждения.

Определение некоторой характеристики движения, в том числе и скорости, подразумевает и определение соответствующей процедуры измерения, причем такой, чтобы логика этой процедуры не противоречила логической структуре определения скорости. В данном отношении просматриваются три различных варианта.

1. Для однозначного определения скорости необходимо знать и иметь возможность измерять две пары параметров: (x_1, t_1) и (x_2, t_2). Заметим, что параметры каждой пары обладают существенной внутренней связью: время (момент времени) t определяется не вообще безотносительно к пространству, а именно в определенной точке x. В случае заданной базы (x_1, x_2) измерения моментов времени t_1 и t_2 производятся именно в точках x_1 и x_2, а не в каких-то произвольных точках x из (x_1, x_2) или даже вне указанной базы. Если база не задана до опыта, то любому моменту t мы должны сопоставить координату x траектории движения тела, так что в результате произвольные измерения ничем по сути не отличаются от базовых. В идеале точечной модели тела (естественно, точечной в пространстве) должна соответствовать модель движения, предусматривающая возможность абсолютно точного определения положения тела и, соответственно, его точного измерения: $\Delta x_i = 0$; $i = 1, 2, 3,\ldots$ Поскольку $\Delta x = v\Delta t$, то Δt также равно нулю в такой модели при $|v| < \infty$, т. е. в актуальной области механического движения. Следовательно, в рамках данной «логико-измерительной» модели обеспечена дифференцируемость функции $x(t)$, которая составляется набором бесконечного числа пар (x, t), поскольку допустимо $x_{i+1} - x_i = \Delta x_i \to 0$ и $t_{i+1} - t_i = \Delta t_i \to 0$, причем кроме актуальной средней скорости $v_i = \Delta x_i / \Delta t_i$ в каждой точке x может быть определена мгновенная скорость $v = \Delta x / \Delta t$ при $\Delta t \to 0$ (соответственно и $\Delta x \to 0$ при $|v| < \infty$). Данная идеализация механического движения, не содержащая никаких логических противоречий, создает возможность для конструирования математических

моделей механического движения, в которых искомой функцией состояния является измеряемая и в этом смысле вполне действительная величина v. Именно описанная выше модель и лежит в основе классической механики.

Если именовать пары (x, t) событиями, то сразу можно отметить, что, вообще говоря, пары (x_i, t_i) формально не связаны между собой ни в логической схеме, ни в измерительной, т. е. при наличии произвольного набора событий $(x, t)_i$ нельзя судить о наличии какой-либо логико-измерительной связи между ними. Иными словами, кусочно-гладкая кривая $x(t)$ может принадлежать одному телу, нескольким телам или ни одному из них, а чему-то совсем иному; следовательно, наличие некоторой кривой $x(t)$ еще не свидетельствует о каких-либо причинно-следственных связях, ей соответствующих. В идеальной механической модели, однако, имеется возможность определения в каждой точке x_i мгновенной скорости v_i и, значит, определения x_{i+1} при $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i \to 0$. Указанная возможность может служить моделью причинно-следственной связи, или механического детерминизма, имеющего тот смысл, что вероятность того, что событие (x_{i+1}, t_{i+1}) является следствием наступления события (x_i, t_i), стремится к 1 при $\Delta x_i \to 0$ (либо $\Delta t_i \to 0$). Таким образом, строгий детерминизм есть логическое следствие принятия идеальной механической модели, которую часто именуют механистической концепцией.

В связи с рассматриваемым вопросом еще раз уточним смысл используемых здесь вербальных понятий, активно обсуждаемых в философии физики, предметом которой как раз и является анализ тех понятий и категорий, которые выводят их обсуждение на концептуальный уровень. Существование причинно-следственной связи в структуре мироздания полагается исходным всеобщим принципом и самого объективно существующего мира материальных явлений, и научной логики мышления как его производной. Под детерминизмом в дальнейшем понимается такая причинно-следственная связь, когда следствие является однозначно определяемым результатом действия причины. Идеальная механическая модель и является наиболее ярким примером механистического детерминизма. Отметим при этом, что в отличие от неопределенности вербальных понятий в философии научный детерминизм выражается языком конкретных математических понятий и потому в физике воспринимается учеными вполне однозначно. Распространение концепции детерминизма на всю картину явлений материального мира — это уже сугубо философский, спекулятивный характер построения умозаключений, когда частные концепции возводятся в ранг логических (а, следовательно, и якобы объективных) аксиом, не нуждающихся в доказательствах в силу их самоочевидности (как, к примеру, пятый постулат в геометрии Евклида).

Полярным по отношению к детерминизму следует считать словесно выраженное понятие «индетерминизм», смысл которого в философии однозначно не установлен, а в физике его обычно понимают как следствие квантовомеханической неопределенности; при этом и в физике, и тем более в философии сплошь и рядом под индетерминизмом понимается отрицание причинно-следственной связи в области применимости данной концепции. Таким образом, формирование логических понятий по принципу их полярности, ставшее общепринятым после распространения идей классической немецкой философии, не способствует выработке однозначно понимаемого научного языка в точных науках, к которым, безусловно, относится теоретическая физика. Вследствие принятого выше принципа причинности мы в дальнейшем не будем использовать понятие «индетерминизм», полагая, тем не менее, что могут иметь место различные формы реализации причинно-следственных связей. Вот некоторые из них: строго однозначная (детерминизм); множественная — когда одной причине может соответствовать более одного следствия с однозначно определяемой вероятностью; абсолютно вероятностная — когда одной причине может соответствовать бесконечное множество следствий, и задачей теории тогда является определение вероятности их наступления (концепция Борна относительно физического смысла пси-функции). Справедливость той или иной модели — также объект логико-математического анализа на предмет ее логической непротиворечивочти и необходимости в качестве допустимого исходного понятия или вывода. Иначе говоря, саму вероятностную концепцию в рамках причинно-следственной связи следует рассматривать как часть теории, которая требует непротиворечивого логико-математического обоснования, исключающего логику типа ad hoc. Наконец, исключается понятие «чуда», когда следствие может вызываться «потусторонней» причиной, под которой может пониматься существование явлений из «нерегистрируемых» дополнительных пространственных измерений, волей Бога и т. п. Поэтому признается алогичным признание возможности сосуществования строго научного и строго религиозного подходов к восприятию объективного мира материальных явлений.

2. Положим теперь, что измерительная база l_0 (измеренная в неподвижной системе K) движется вдоль оси x со скоростью V, и ставится задача измерения скорости v' в системе K', где база неподвижна. Введение новых по сравнению с использованными выше параметров серьезно усложняет задачу, как и всякая многофакторность, факториально «размножающая» число взаимосвязей в системе. Во-первых, примем во внимание, что длину l движущейся в K измерительной базы нельзя измерить путем «прикладывания» к ней эталона длины, которое вполне совместимо с требованием отсутствия влияния процесса измерения на объект, т. е. отсутствия между объектом и измерительной процедурой актуальной взаимосвязи. Никакие

измерительные ухищрения не позволяют измерить длину движущегося объекта эталоном длины, неподвижным в K, и в этом смысле операция измерения кинематических характеристик в K' через K не определена принципиально. Следовательно, данный способ логико-измерительного определения v в K' через K нереализуем. При этом, очевидно, всегда можно в соответствии со сказанным в п. 1 осуществить соответствующую процедуру относительно «суммарной» скорости $V + v' = v$ движения тела в K. Следовательно, имеется прямая возможность определить v' путем опосредованной измерениями v и V процедуры в K и тем самым установить математическое правило «сложения» скоростей V и v', понимая под знаком «+» некий оператор, отличный, в общем случае, от оператора арифметического. Вид указанного оператора должен устанавливаться однозначно в рамках теоретической концепции механики независимо от опыта, если указанная концепция логически последовательна и потому верна.

Имеется, конечно, вариант непосредственного определения длины движущейся базы l через использование сигналов, если их скорости могут быть определены независимо от определения l и, следовательно, определение длины переформулируется на определение временных интервалов. Нижеследующую умозрительную схему измерения легко представить и без всякого рисунка. Пусть система K неподвижна относительно некой среды (эфира), скорость распространения сигнала в которой равна c. Допустим, что этой средой является воздух, а сигнал представляет собой звуковые волны — чисто механическое явление; правда, инертные свойства его проявляются опосредованно. Если база длиной l_0 в K движется со скоростью V вправо от начала координат $x = 0$, то длину l движущейся в K базы можно определить в K следующим образом: звуковой сигнал отправляется от левого конца базы вправо; на правом конце он испытывает отражение от устройства (или просто от конца базы), прикрепленного к базе, и возвращается назад к левому концу, где регистрируется приемным устройством через промежуток времени Δt. Нетрудно установить связь между Δt и l:

$$l = \frac{1}{2}c\Delta t\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right).$$

При идеальных условиях, т. е. при отсутствии ветра, увлечения воздуха движущейся измеряемой базой и многих других случайных факторов эксперимент подтвердит, что в пределах разумной точности $\Delta t \sim l_0$ при $V = \text{const}$, т. е. возможны относительные измерения переменной длины неподвижной базы l_0 и в условиях ее движения относительно неподвижной системы K, где и покоятся часы, по которым отсчитывается Δt. Для большей чистоты эксперимента часы можно разместить непосредственно на левом конце базы, чтобы устранить возможную неоднозначность измерения времени разными часами в K либо одними, но получаемыми управляющие сигналы на запуск и остановку их хода из разноудаленных точек пространства. Результат эксперимента при этом не изменится, что явится косвенным подтверждением справедливости модели единого времени в СМ.

Вычисляемая по формуле величина l – это «звуковая» длина базы (если в качестве сигнала используется звук), поскольку она содержит скорость звука c как параметр. Хотя звуковые сигналы можно отнести к механическим явлениям (но принципиально группового характера), неоднозначность «сигнальной длины» проявляется совершенно отчетливо; более того, определение длины движущегося тела в неподвижной системе отсчета прямо зависит от способа измерения и условий распространения сигнала. Кроме того, при $V \to c$ точность измерений снижается, а при $V \geq c$ измерительная схема становится неработоспособной, хотя измеряемый материальный объект со всей очевидностью сохраняет механический параметр «длина». Поэтому реальным содержанием обладает только соотношение $l = 0{,}5c\Delta t$, причем без ущерба для логики механической теории можно принять $l(V) \equiv l_0(0)$, что и подразумевается в механике Ньютона, инвариантной относительно преобразований Галилея, отвечающих указанному тождеству.

Основной недостаток звуковой схемы — возможная сопоставимость по величине макроскоростей V со скоростью звука в воздухе. Переход к световым сигналам позволяет избавить рассмотренную измерительную схему от ряда недостатков: во-первых, в практически реализуемом диапазоне скоростей механических тел выполняется условие $V^2/c^2 << 1$; во-вторых, скорость света в воздухе практически не отличается от ее максимального значения $c \approx 3 \cdot 10^5$ км/сек в пустоте; в-третьих, для регистрации световых сигналов можно использовать точнейшие оптические методы (что и было продемонстрировано в знаменитом опыте Майкельсона). Измерительная схема не претерпит существенных изменений, разве что в качестве отражателя на правом конце базы будет помещено зеркало. Использование механических часов, разумеется, не совместимо с требуемой точностью измерений в реальном эксперименте, поэтому мы будем рассматривать результаты «умозрительного» эксперимента в качестве приемлемой в теории иллюстрации заложенной в нее логики ее построения.

Очевидно, что пустота (или эфир) в смысле неподвижности относительно K аналогичны воздуху в качестве «среды», в которой распространяется сигнал. Поэтому формула для $l(V)$ не претерпит изменений. Для учета предполагаемых особенностей, связанных с возможностью изменения темпа хода движущихся часов по сравнению с неподвижными, воспользуемся минимум тремя одинаковыми механическими часами: одни разместим на левом конце базы l_0 — т. е. в движущейся системе отсчета K'; двое других, синхронизированных предварительно любым способом, — в неподвижной системе отсчета K, причем левые расположим в месте запуска светового сигнала, а правые — в месте возврата отраженного луча к сместившемуся левому концу базы, причем это место можно определить заранее путем предварительного замера без часов.

Результат подобного умозрительного опыта известен: часы, связанные с движущейся базой, дадут меньшее значение $\Delta t'$ интервала времени между пуском и возвратом сигнала, чем значение Δt неподвижных часов, причем $\Delta t' = \sqrt{1 - V^2 / c^2}\,\Delta t$. Поскольку l — это длина движущейся базы, измеренная в K, то мы приходим к соотношению $l' = l_0 \sqrt{1 - V^2 / c^2}$, где как раз $l_0 = 0{,}5c\Delta t'$ — «собственная длина» базы, измеряемая с помощью сигнала по неподвижным относительно базы часам. Отметим, что неравенство $\Delta t' < \Delta t$ — это реально фиксируемый результат измерений, тогда как неравенство $l' < l_0$, как и в случае со звуком — следствие процедуры измерения с помощью сигнала, к тому же иной, электромагнитной природы. Специфика последней проявляется в том, что световой сигнал во всех системах отсчета распространяется с одинаковой скоростью c — именно такой эффект и следует из анализа результата измерений, равно как и из опыта Майкельсона. Разумеется, все сказанное есть необходимые следствия кинематических соотношений STR Эйнштейна, в которой инвариантность c является одним из постулатов. При этом снова приходится констатировать, что $l = l'$ движущегося объекта есть результат специальной измерительной процедуры, позволяющей сопоставлять однозначным образом измерения временных интервалов по различным часам, находящимся в физически разных условиях, поэтому $l = l'$ следует именовать «световой» длиной движущегося тела. Однако вследствие возникновения нового и совершенно реального эффекта замедления времени в движущейся системе координат при измерении его хода в неподвижной системе возникает вопрос принципиального характера: если имеется объяснение формулы $\Delta t' = \sqrt{1 - V^2 / c^2}\,\Delta t$ с помощью чисто механической теории движения инертных тел без привлечения эффектов, связанных с немеханическими явлениями, к которым относится процесс распространения электромагнитного излучения в пустоте, то необходимо сопоставление такой теории с STR на предмет оценки логической последовательности и оправданности каждой из них. Если же такого чисто механического объяснения реальных «релятивистских» эффектов обнаружено не будет, то STR вследствие ее принципиальной безальтернативности следует признать действительно фундаментальной физической концепцией современной науки (что, собственно, в настоящее время и принимается абсолютным большинством ученых), а комбинированный характер STR — следствием реально существующего единства механических и электромагнитных явлений, отражаемого принципом инвариантности интервала Минковского.

3. Идеальная механическая модель, которая позволяет оперировать с понятием мгновенной скорости — это не единственная «предельная» идеализация в механике. Другая, противоположная ей — это модель пространственная. В первой — классической точечной модели — область пространственного определения материальной точки стягивается в точку пространства, обладающую нулевым объемом, чему не противоречит представление о точечности массы. Причинно-следственная связь, которую мы в дальнейшем будем именовать каузальностью, в этом случае имеет точечный характер, поэтому есть смысл именовать ее точечной каузальностью. В чисто пространственной модели, напротив, положение материальной точки и ее состояние определяются в пространственной области, в пределе неограниченной. Движение точки в этом случае описывается движением соответствующей ей пространственной области определения, характеристики которой могут меняться, поскольку, к примеру, потенциалы внешних силовых полей определены в неподвижной системе отсчета K. Разумеется, каузальность имеет место и в этом случае как основание для любой логики реального мира, но теперь ее следует именовать пространственной каузальностью, и характер ее проявления и описания будет иметь отличные от случая точечной каузальности формы. Отметим здесь, что обе описанные выше идеализированные модели механического движения — это чисто механические модели, ограниченные миром инертных тел. Вопросы, поставленные в п. 1.2 относительно необходимости использования немеханических явлений для однозначного конструирования механической теории в целом, должны найти конструктивное решение при построении динамических теорий, соответствующих моделям, обозначенным в пп. 1 и 3 данного п. 1.3.

Пространственная каузальность несовместима с понятием мгновенной скорости, и это важное обстоятельство должно найти свое отражение при анализе соответствующей измерительной ситуации. Если такая модель действительно согласуется с картиной мироздания в какой-то существенной ее части, то любая попытка увеличения точности Δx определения координаты x точечного тела путем любого инструментария должна сопровождаться увеличением неточности определения скорости v тела; в противном случае реализуется модель п. 1. Математически сказанное можно записать в виде $\Delta x \sim 1/\Delta v$, причем данная запись — это просто перевод вербальных символов в математические, и, следовательно, к ней не применимы понятия прямой пропорциональности и т. п.; это все лишь отображение общей логической связи, которая выступает на уровне оценок тенденций и ограничений. Далее, поскольку $|v| < \infty$, то данному соотношению соответствует $\Delta t \sim 1/\Delta v^2$, что следует из $\Delta x \approx v\Delta t$. Отметим, что приведенные элементарные соотношения следуют из самой модели рассмотрения механического движения, и опыт может лишь подтвердить их и уточнить, если схема пространственной каузальности будет логически установлена на основе более общих посылок, относительно справедливости которых не возникает сомнений.

Движение в модели пространственной каузальности будет рассмотрено в последующих главах, а в данной мы ограничимся дальнейшим логико-математическим анализом механики в рамках модели точечной каузальности, которой полностью соответствует хорошо известная классическая механика Ньютона.

1.4. Динамические характеристики

При описании кинематических характеристик движения материального точечного тела можно было, вообще говоря, отвлечься от его имманентных свойств, которые, собственно, и отличают одну материальную точку от другой. Вопрос об отличии далеко не так прост, как может показаться на первый взгляд. В рамках классической модели точечной каузальности (в дальнейшем мы будем для краткости именовать ее «модель 1») совершенно одинаковые по имманентным свойствам тела различаются по пространственным координатам, т. е. при сколь угодно малом различии между $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ всегда можно сказать, что тела 1 и 2 занимают свои собственные положения в пространстве и уже этим различаются друг от друга даже в том случае, когда они физически тождественны (к примеру, два электрона). Иными словами, в модели 1 $\vec{r}$ — существенная характеристика состояния тела, вполне и однозначно решающая вопрос о различении двух тождественных точечных тел, находящихся сколь угодно близко друг к другу. Напротив, в модели пространственной каузальности (далее «модель 3») положение точечного тела характеризуется некой пространственной областью ненулевого объема, поэтому при «перекрытии» этих областей у нескольких физически тождественных тел возникает вполне законный вопрос об их отличии друг от друга в области пространственного перекрытия, поскольку координата $\vec{r}$ уже не является характеристикой состояния тела. В этом случае в целях однозначности использования модели 3 необходимо вводить дополнительный принцип невозможности «сосуществования» двух материальных тел в совершенно одинаковых состояниях в силу их абсолютной неразличимости. Впервые данный принцип сформулировал В. Паули применительно к квантовомеханической проблематике, что позволило объяснить оболочечную структуру распределения электронов в атоме с $Z > 1$.

В связи со сказанным необходимо сделать существенное для понимания логики дальнейшего исследования механики пояснение методологического характера. Поскольку любая логическая схема носит постулативний характер, т. е. отталкивается от ограниченного числа априорных утверждений, часто принимаемых «по умолчанию» в силу их фундаментальной общности и потому очевидности, то в исследовании сугубо логического характера, каким и представляется данная работа (отсутствие традиционного логического формализма не меняет ее методологической сути), неправомерно использовать какие-либо «хорошо известные» утверждения физического характера в качестве логических аргументов, о чем уже говорилось выше. «Тривиальность» многих рассуждений и выводов вообще характерна для последовательного логического анализа, поскольку он как раз и предпринимается для того, чтобы разобраться в вопросах правомерности и необходимости использования в физике тех самых «очевидных истин» фундаментального характера, истинность которых имеет сугубо исторический, конвенциональный характер. Автор может считать свою задачу выполненной, если убедит читателя настоящей книги в том, что рассматриваемый в ней фундаментальный базис даже столь хорошо разработанной области физики, какой является механика в ее классическом и квантовом вариантах, существенно отличается в содержательном отношении от традиционного, и что некритическое использование последнего, возможно, и является источником многих известных трудностей развития современной теоретической физики.

Динамические характеристики проявляются при взаимодействии тел. В механике имманентной телу динамической характеристикой является его масса m, характеризующая количество вещества, заключенного в теле, консолидированного в нем. При построении идеальной механической модели типа 1 точечному телу может быть сопоставлена единственная его «внутренняя» характеристика, в силу точечности инвариантная в отношении ориентации в пространстве. Если допустить, что точечное тело обладает несколькими подобными характеристиками, то возникают вопросы относительно их взаимоотношения или взаимозависимости, возможности пренебрежения одними с сохранением других и т. д. Все это будет означать фактическую потерю однозначности описания. Очевидно, что масса как мера количества вещества, аддитивная по своему смыслу и являющаяся несомненной внутренней характеристикой тела (но не единственной!), и есть искомая единственная имманентная *точечная* характеристика точечного тела в механике модели 1. Следовательно, в рамках данной механической модели состояние материальной точки исчерпывающим образом описывается ее кинематическими характеристиками и массой. Такая идеализированная модель точечной каузальности должна описывать все без исключения явления как классической механики, так и «релятивистской», если, конечно, релятивистские эффекты действительно реальны, как и все эффекты СМ, а не являются «кажущимися».

Полагая выше массу единственной имманентной динамической характеристикой точечного тела в механике, выстраиваемой в рамках чисто классической модели 1, мы не принимаем во внимание существование еще одной механической характеристики — спина, или собственного момента количества движения точечного объекта, учет которого существен при анализе движения квантовых объектов (атомы, элементарные частицы и т. д.). Не вдаваясь здесь в детали характеристики понятия «спин», укажем лишь, что если массу можно трактовать как точечную характеристику точечного тела, что непротиворечиво согласуется с представлением о ее скалярности, то векторность спина несовместима с представлением о его точечности. Механика модели 1 без спина — это строгая логическая система классического типа, опирающаяся на очень общие и очевидные постулаты относительно первооснов строения природы. Разумеется, можно поставить вопрос о построении классической механики с учетом спина, которую имеет смысл отнести к «промежуточной» модели 2 и которая будет определенным образом сочетать в себе элементы предельных моделей 1 и 3. В данной книге автор не ставил перед собой задачу строгого обоснования модели 2, однако очевидно, что указанный подход, связанный с возможностью включения в классическую механику понятия «спин» непротиворечивым образом, имеет важнейшее значение в концептуальном смысле — а ведь исследованию прежде всего именно такой содержательной стороны механики и посвящен труд автора. По этой причине частный пример построения механики, отвечающей модели 2, будет специально рассмотрен в четвертой главе.

1.4.1. Масса

Смысл данного параметра состояния точечного тела тесно связан с понятием «состояние покоя». Предполагается, что всегда можно найти такую систему отсчета *K*, в которой изолированное от воздействия иных тел и силовых полей «свободное» тело может находиться в покое относительно *K* сколь угодно долго. Данное утверждение является постулатом классической механики, без которого рациональное построение теории вряд ли возможно. Действительно. если в любой системе *K* нельзя выделить ни одного направления, относительно которого был бы справедлив постулат покоя, то не существовало бы и понятий изолированной системы тел, системы отсчета, свободного тела и т. п., т. е. понятий, для которых актуальна имманентность, хотя бы частичная. Кроме того, в отсутствие актуального покоя возникает принципиальный вопрос о возможности измерения длин чисто механическими способами, иными словами, путем сравнения с механическим эталоном длины. Идея покоя может быть сформулирована до всякого опыта, и было бы очень странно. если в процессе исторической эволюции Вселенной в ней не сформировались бы условия, при которых данная идея не была бы актуализована хотя бы в относительно ограниченных областях. (Заметим, что в начальной стадии развития Вселенной постулат покоя не нашел бы подтверждения.)

Если какое-либо тело может находиться в покое относительно системы K, никак с ним не связанной, то если эта система K начнет двигаться произвольным образом относительно данного тела, то это будет означать, что в K будет двигаться это тело, оставаясь свободным от воздействия на него системы K. Данная ситуация трактуется однозначно: произвольное движение тела относительно некоторой системы отсчета еще не означает наличие между ними какой-либо связи, т. е. относительность движения и физическая взаимосвязь — это совершенно разные явления. При этом относительность движения не связана с наличием у тела определенной массы: любые свободные в K и покоившиеся механические тела приобретают одни и те же движения при произвольном изменении характера движения самой системы K.

Пусть теперь в K тело, свободное в ней, движется равномерно и прямолинейно. Для восстановления состояния покоя тела в K, не оказывая при этом никакого влияния на тело, систему необходимо ускорить так, чтобы в некоторый момент времени вектор скорости системы K совпал с вектором скорости тела в K до начала изменения движения системы. Разумеется, изменение скорости K осуществляется относительно ее начального состояния K_0. Если в момент равенства скоростей изменение движения K прекратить, то достигнутое мгновенное состояние покоя тела в K будет оставаться таковым произвольно долго. Данное утверждение имеет силу чисто математического вывода, основанного только на постулате существования состояния покоя. Таким образом, состояния покоя и равномерного прямолинейного движения в определенном отношении эквивалентны друг другу как две формы одного и того же физического состояния тела в K — состояния физического покоя.

Далее, пусть тело, находившееся в K в состоянии покоя (в кинематическом смысле, занимая неизменное положение $\vec{r}$ независимо от t), начинает двигаться относительно K произвольным образом за счет каких-либо воздействий, имея переменную скорость $\vec{v}\,(t)$, т. е. такую, что $d\vec{v}\,/\,dt \neq 0$; $d^2\vec{v}\,/\,d^2t \neq 0$; …, что вполне вписывается в кинематику модели 1. Если в какой-либо момент времени t_1 мы, ускоряя систему K, совместим ее скорость $\vec{v}_K$ с $\vec{v}\,(t_1)$, то в силу произвольности $\vec{v}(t)$ за бесконечно малый промежуток времени она изменится так, что $\vec{v}\,(t_1+dt) \neq \vec{v}_K\,(t_1)$. Более того, если $\vec{v}\,(t)$ бесконечно дифференцируема в любой момент t, то в принципе невозможно осуществить «бесконечно» точный подбор функции $\vec{v}_K$ к $\vec{v}\,(t)$ ни в какой момент времени, т. е. невозможно «прогнозирование» движения $\vec{v}\,(t)$. Следовательно, в случае произвольной зависимости $\vec{v}\,(t)$ речь может идти только лишь о состояниях «мгновенного покоя», да и то с принципиально ограниченной точностью. Таким образом, мы убеждаемся в том, что физическое состояние покоя соответствует только случаю $\vec{v} = const$. Системы отсчета, в которых такое состояние реализуется, называются инерциальными. Отметим, что возможность существования подобных систем отсчета определяется только справедливостью постулата покоя. Никаких иных предположений относительно физических явлений в инерциальных системах координат полученный вывод не требует, в частности, справедливости постулата о неразличимости протекания физических процессов в инерциальных системах координат, который является одним из постулатов STR. При этом следует подчеркнуть, что «очевидность» постулата покоя как основополагающего утверждения позволяет отнести его к разряду чисто логических утверждений, без принятия которого формулировка механики как теоретической концепции не представляется возможной. Описанная ситуация в некотором роде аналогична той, что имеет место с представлением о кривизне пространства. Если принять в качестве реального факта, что физическое пространство имеет в любой своей точке ненулевую кривизну (положительную или отрицательную, возможную хотя бы в качестве идеального «полярного» понятия — существа рассматриваемого нами вопроса это не затрагивает), то евклидова геометрия может быть тем не менее введена в качестве предельного математического варианта пространства с нулевой кривизной, которому соответствует классическая механика инертных тел (макромеханика). Подобная логическая процедура построения механики (исторически, конечно, наука развивалась иными путями) не может в принципе противоречить опытным законам движения тел, и вопрос может заключаться только в установлении пределов ее применимости при переходе от точечной формулировки к существенно пространственной.

Поскольку с понятием масса сопоставляется количество вещества, то ее точечность приводит нас к представлению о ее скалярности. В отличие от скалярной характеристики поля, такой как его потенциал, масса не имеет никакой физической привязки ни к пространству, ни к времени как внешним характеристикам. Действительно, потенциал $U(\vec{r})$, являясь скалярной характеристикой внешнего поля как физического объекта, по смыслу своего введения неразрывно связан с пространством, имея очевидную «внутреннюю» структуру, описываемую, например, производными $\partial U/\partial x_i$, что приводит к возможности формирования векторных характеристик скалярного поля ($\mathrm{grad}U$ и т. п.). Точечная масса подобной связи с пространством (и тем более с отсчетом времени) не имеет и в этом смысле является «абсолютным» скаляром, из которого нельзя формально построить какие-либо векторные характеристики в рамках модели 1. Сказанное означает, что масса в механике инвариантна относительно перемещений и поворотов в пространстве и перемещений во времени в смысле перемещений и поворотов координатных систем, не затрагивающих физического состояния тела в них, допустим, состояние кинематического покоя (вопрос о возможной зависимости массы от изменения силового поля в точке нахождения тела при сохранении состояния кинематического покоя будет рассмотрен ниже).

Цель, ради которой с таким трудом выстраивается цепочка исходных понятий — это логически непротиворечивое и самодостаточное (более точным является термин «самосогласованное») построение чистой механики, позволяющей определять изменение механического состояния точечного тела (в смысле модели 1) при определенном воздействии на него. Это воздействие мы будем именовать силой, не подразумевая под данным термином ничего более, чем было сказано. Тело откликается на воздействие путем изменения своей скорости, поскольку никакой иной реакции точечного тела на силу в рамках модели 1 не предусмотрено. Действительно, сила выводит тело, покоившееся в K, из состояния покоя, что фиксируется путем появления у тела скорости — и никак и ничем более; аналогично сила изменяет состояние физического покоя путем изменения скорости равномерного и прямолинейного движения. Роль массы при этом совершенно очевидна до всякого опыта: чем больше вещества консолидировано в точке, тем при равных воздействиях меньше изменение скорости. В физике сказанное подается в качестве определения массы как меры инертности, которое, естественно, никаким более глубоким содержанием не обладает. Отметим здесь же, что в СМ применительно к законам движения понятия «количество вещества» и «мера инертности» отождествляются, равно как «тяжелая» и «инертная» масса при использовании закона тяготения Ньютона.

Возникает нетривиальный вопрос: если масса полагается инвариантной относительно «статических» деформаций системы отсчета K, то справедливо ли данное утверждение относительно воздействия, т. е. силы $\vec{F}$? Иными словами, имеет ли физический смысл как явление предполагаемая зависимость $m(\vec{F})$? Вопрос следует уточнить в том отношении, что речь идет не о возможной зависимости m как меры инертности тела от результата воздействия, который выражается в изменении скорости $\vec{v}$, а о прямой, не опосредованной временем и т. п. мгновенной зависимости $m(\vec{F})$. Отрицательный ответ на поставленный вопрос определяется по крайней мере двумя нижеследующими соображениями общего характера.

1. Модель точечной каузальности предполагает существование причинно-следственной связи в форме связи во времени для любых сколь угодно малых промежутков времени между причиной и следствием. Предполагаемая «вневременная» связь $m(\vec{F})$ — это зависимость в определенном смысле «немеханического типа», поскольку причинно-следственная связь здесь устанавливается вне временного процесса изменений механического характера и, следовательно, в рамках точечной каузальности «причина» $\vec{F}$ и «следствие» m неразличимы. Но тогда не может быть построена механика как логико-математическая теория, и потому дальнейший анализ проблемы теряет содержательный смысл.

2. Если предположить существование нетривиальной функциональной связи $m(\vec{F})$, к примеру, в виде $m = m_{||}$ в направлении действия силы и $m = m_{\perp}$ в направлении, перпендикулярном ей, причем $m_{||} \neq m_{\perp}$, или еще каким-либо способом, то возникает серьезное затруднение при попытке непротиворечивого соединения данного эффекта со всеми иными концепциями физической картины мира. Действительно, ничему формально не противоречит представление о возможности очень быстрого (мгновенного) изменения силы, допустим, при ее приложении к телу или снятии. Но тогда мы должны согласиться и с возможностью скачкообразного изменения массы, не связанного с результатом воздействия. Это, в свою очередь, исключает соотнесение массы с энергией, с явлением взаимопревращения частиц и т. п. Вообще масса тогда теряет достаточно прозрачный смысл не только меры инертности, но и меры количества вещества. Все это несовместимо с требованиями построения механики в рамках модели 1.

Вернемся теперь к вопросу о возможной зависимости массы тела от результата воздействия на него силы, который выражается единственно через изменение во времени вектора скорости тела $\vec{v}$. Иначе говоря, исследуется вопрос о существовании зависимости $m(\vec{v})$ в той или иной форме (имманентность массы механическому телу не означает, конечно же, ее неизменности). Уже из самых общих соображений следует, что учитывать возможность реального существования подобной зависимости необходимо при построении теоретической механики. Действительно, нет никаких логических оснований, подобных тем, что были использованы при обсуждении гипотезы о существовании зависимости вида $m(\vec{F})$, чтобы гипотезу о существовании зависимости $m(\vec{v})$ в каком-либо виде вообще снять с рассмотрения по существу. Зато имеются прямо противоположные доводы. В соответствии с СМ, постулирующей абсолютную инвариантность m, т. е. совпадение по смыслу понятий мера инертности и мера количества вещества, кинетическая энергия тела есть $W = \frac{1}{2} mv^2$. В отсутствие потенциального поля воздействие на тело силой $\vec{F}$ приводит к изменению его энергии, причем набор или потеря энергии имеют сугубо «кинематический» характер, не сказываясь никак на самой мере инертности. При этом не отрицается тот факт, что энергией W обладает само движущееся тело как материальный объект, что подчеркивается возможностью перехода кинетической энергии в другие виды энергии, соответствующие явлениям, не описываемым механикой инертных тел (в противном случае нарушается взаимосвязь явлений, которую следует предполагать до всякого опыта). Налицо явное логическое противоречие: с одной стороны, кинетическая энергия аккумулируется веществом тела; с другой — мера этого вещества, как и мера его инертности, не изменяются при изменении важнейшей характеристики состояния тела. Логика подсказывает иное утверждение: если масса способна накапливать и передавать энергию, то она не может при этом оставаться неизменной; в противном случае следует встать на точку зрения, что сама скорость как пространственно-временной конструкт и есть носитель энергии тела, что противоречит самому существу понятия скорость, что выше достаточно подробно обсуждалось. Причем логика рассуждений не позволяет только ограничиться принятием гипотезы $m = m(\vec{v})$. Если носителем энергии является вещество = масса, то энергией должно обладать и тело, находящееся в покое относительно K, причем его массу при этом следует именовать массой покоя. Действительно, чтобы избежать логических противоречий, связанных с признанием «энергоемкости» и массы, и скорости, необходимо занять единственно последовательную позицию, заключающуюся в признании массы тела в качестве единственного аккумулятора энергии механического движения. Если же учесть существование явления взаимопревращения энергии различных видов, то и массу покоя нет оснований считать «пустым» энергетическим резервуаром.

Последний вопрос, который на данной стадии логического исследования механики следует однозначно решить, заключается в конкретизации зависимости $m(\vec{v})$ в смысле учета векторного характера скорости: можно ли вести речь о компонентности меры инерции в виде $m_x(v_x)$, $m_y(v_y)$, $m_z(v_z)$? Конкретизируем проблему анализом простейшего примера, имеющего тем не менее необходимую нам общность: если покоящееся тело с массой покоя $m_0 = m(0)$ после воздействия на него вдоль оси x приобрело скорость v_x, и его масса стала равной $m(v_x)$, то какой следует считать его массу при последующем воздействии на него по оси y? Неизотропность массы относительно воздействий на тело по различным направлениям в пространстве приводит к признанию справедливости такого ответа: $m_x = m_x(v_x)$; $m_y = m_y(v_y)$, т. е. инертность тела в направлении изменения скорости определяется скоростью только в данном направлении. Но тогда следует признать, что точечное тело в механике наделяется свойством различения направлений в пространстве, соединенным с «генетической» памятью о том, что с ним происходило по другим направлениям. Подобное свойство точечного тела следует признать несуществующим. Разумное решение проблемы единственно: масса зависит только от величины вектора скорости $|\vec{v}|$, но не от его направления; движения по всем направлениям учитываются в форме теоремы Пифагора $|\vec{v}| = (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)^{1/2}$. Логически очевидно, что любая трансляция начала координат системы K, как и произвольный поворот ее осей, не должны влиять на характер зависимости $m(\vec{v})$ — а это возможно только в том случае, когда $m = m(|\vec{v}|)$, поскольку модуль вектора является инвариантом относительно «статических» преобразований координат.

1.4.2. Импульс тела (количество движения)

Выше путем логического анализа были получены два важнейших результата: во-первых, в рамках модели 1 состояние точечного тела полностью и однозначно описывается его положением в пространстве $\vec{r}$, скоростью $\vec{v}$ и массой $m(|\vec{v}|)$; во-вторых, по состоянию физического покоя выделяется класс инерциальных систем отсчета K, в которых данное состояние реализуется; следовательно, лабораторная система K относится к инерциальным системам.

Чтобы перейти к составлению уравнения движения точечного тела в механике, соответствующей модели 1, необходимо выбрать ту функцию состояния, относительно которой должно записываться искомое уравнение. Некоторые условия, которым должна удовлетворять эта функция, нам уже известны. Она может включать в себя только $\vec{r}$, $\vec{v}$ и $m(|\vec{v}|)$, и поскольку все указанные параметры измеримы в K в любой момент времени t, то, следовательно, функция состояния является измеримой и потому физически реальной. Далее, эта функция должна обладать свойством аддитивности, т. е. два тела с массами m_1 и m_2, имеющие одни и те же параметры $\vec{r}$ и $\vec{v}$, можно рассматривать в качестве одного с $m = m_1 + m_2$. Поскольку масса аддитивна, то искомая функция должна быть прямо пропорциональна m. Обозначая искомую функцию состояния через $p = p(\vec{r}, \vec{v}, m)$, мы, следовательно, можем записать, что $p = mf(\vec{r}, \vec{v})$. Перенос начала координат системы K в пространстве не влияет на состояние покоя, поэтому сразу можно исключить зависимость от $\vec{r}$, т. е. положить $p = mf(\vec{v})$. Более тонким является требование учета векторности механического движения.

Примем сейчас без обсуждения, что пространство трехмерно и евклидово. Тогда $\vec{r} = \vec{r}(x, y, z)$; $|\vec{r}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$. Поскольку $\vec{v} = d\vec{r}/dt$, то, соответственно, $\vec{v} = \vec{v}(v_x, v_y, v_z)$; $|\vec{v}| = (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)^{1/2}$. Если и p считать вектором в том же пространстве, то должны выполняться условия:

$$\vec{p} = \vec{p}(p_x, p_y, p_z);\ |\vec{p}| = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)^{1/2} = m(|\vec{v}|)\,(f_x^2 + f_y^2 + f_z^2)^{1/2}.$$

Сравнение записей теоремы Пифагора для $|\vec{v}|$ и $|\vec{p}|$ приводит к единственно возможному варианту $f(\vec{v}) \equiv \vec{v}$. Таким образом, искомая функция состояния есть величина $\vec{p} = m\vec{v}$, именуемая в механике количеством движения, или импульсом, тела. Оба термина как вербальные понятийные знаки равноправны в силу своей условности, поэтому в дальнейшем мы чаще будем использовать термин «импульс тела» исключительно в силу его краткости.

В инерциальных системах отсчета, для которых актуально состояние физического покоя, оно записывается в форме так наз. закона сохранения импульса: $\vec{p} = \mathrm{const}$ для любых t и, соответственно, $\vec{p}$. Этот закон является прямым следствием того отмеченного выше логического факта, что состояние не включает в себя определение точки пространства — для него важно только лишь отсутствие движения при кинематическом покое (абсолютном) и постоянство $\vec{p}$ при физическом покое. Но поскольку покой может определяться и по отношению к отдельным направлениям в пространстве, то з. с. и. может принимать и частную форму $p_i = mv_i = const$, причем по-прежнему $m = m(|\vec{v}|)$. Существование з. с. и. a posteriori подтверждает правильность выбора импульса в качестве функции состояния точечного тела в модели 1.

1.5. Уравнение движения

После установления вида функции состояния очередной задачей является определение вида уравнения, из которого эта функция может быть определена при задании исходных условий, накладываемых на искомую функцию. Уравнение позволяет придать физической логике конкретную математическую форму, сводя исследование физики к формальным математическим операциям, действенность и универсальность которых не вызывает никаких сомнений; иными словами, математическая логика рассматривается в качестве очень общего исходного постулата для всякой науки, в которой необходимо использовать аналитический подход.

Имеется по крайней мере два необходимых условия, которым должна удовлетворять форма записи искомого динамического уравнения.

1. Оно должно позволять сравнивать скорость изменения функции состояния с некоторой стандартной в K скоростью, которая определяется механическими часами, покоящимися в K. Из сказанного вытекает, что левая часть уравнения есть производная импульса $\vec{p}$ по времени, отсчитываемому по неподвижным в K часам. Поскольку $\vec{p} = md\vec{r} / dt = \vec{p}\,(t)$ в модели 1, то $\partial\vec{p} / \partial t \equiv d\vec{p} / dt$ — полная производная. Подчеркнем, что t определяется по часам, принцип действия которых основывается на чисто механических явлениях, т. е. исследуемый объект и часы строго подчиняются одним и тем же механическим законам, задействованным в рамках модели 1.

2. Второе условие связано с тем, что з. с. и. справедлив применительно к любому направлению в пространстве, вдоль которого отсутствует воздействие на исследуемый объект со стороны иных тел или полей (ограничения на физические типы воздействия нами нигде ранее не оговаривались). Если быть логически последовательными, то следует признать, что из существования з. с. и. относительно направления, задаваемого вектором $\vec{v}$, который мы фактически вывели из самых общих соображений, не пользуясь неизвестным пока уравнением движения (как это делается при доказательстве теоремы Нетер), вовсе не следует необходимо и покомпонентная форма этого закона. Разница между этими формами з. с. и. имеет фундаментальное происхождение, восходящее к разнице между одномерным и многомерным пространствами. Действительно, в одномерном пространстве однонаправленность изменения импульса тела и воздействия на него обеспечивается автоматически самой постановкой задачи. В n-мер-

ном пространстве с $n = 2; 3; \ldots$ ситуация усложняется. Кроме «одномерного» утверждения, что, допустим, Δp_x определяется воздействием вдоль x, покомпонентный з. с. и. содержит дополнительное утверждение, а именно, что воздействие вдоль x не изменяет величины p_y и p_z и вообще p_i для многомерного пространства. То есть воздействия по осям координат физически независимы в смысле результатов этих воздействий. Забегая вперед, скажем, что сама многомерность пространства как физическое явление и независимость воздействий по координатным осям имеют самую непосредственную и глубокую связь. Сказанное в переводе на математический язык означает, что вектор скорости изменения $\vec{p}$ и вектор воздействия совпадают по направлению, что и обеспечивает справедливость з. с. и. в общей и покомпонентной формах.

Нетривиальность сделанных утверждений легко пояснить путем следующих рассуждений. При $m = \text{const}$ (в рамках СМ) нет никакой существенной разницы между поведением $\vec{p}$ и $\vec{v}$ тела. А именно, з. с. и. можно переформулировать в з. с. с. (скорости), т. е. воздействие на тело вдоль оси x, к примеру, не меняет величины v_y и v_z. При $m = m(v)$ ситуация меняется кардинально. Если оставить в силе з. с. с., то, очевидно, окажется неверен з. с. и. Напротив, если справедлив з. с. и. и в случае $m = m(v)$, то при наличии воздействия вдоль x изменяются величины v_y и v_z именно в силу з. с. и. и зависимости $m = m(|\vec{v}|)$, а не $m(v_i)$. Движение вдоль v_y и v_z дает представление о «собственном времени» в системе отсчета, связанной с движением тела вдоль x. В классике вследствие независимости движений по взаимоперпендикулярным направлениям вполне законно представление о едином времени t. При учете $m = m(v)$ (в рамках RM — релятивистской механики) движения по осям x, y, z взаимозависимы, вследствие чего «собственное время» отличается от лабораторного: если m растет, к примеру, с ростом v (чего мы пока не знаем в качестве строгого логического вывода!), то при увеличении v_x уменьшаются v_y и v_z и замедляется ход часов в собственной системе координат.

Таким образом, суммируя все сказанное выше, мы приходим к логически оправданной и единственной форме записи искомого уравнения движения:

$$d\vec{p} / dt = \vec{F}\,, \tag{1.1}$$

где $\vec{F}$ — вектор внешнего воздействия, которое и является причиной изменения $\vec{p}$. В механике выражение, стоящее в правой части (1.1), называется силой и не имеет никакого иного смысла, кроме как функции $\vec{F}(\vec{r}, t)$, считающейся известной. Вообще говоря, может иметь место и зависимость $\vec{F}(\vec{p})$ (например, в случае движения с трением), что, очевидно, не изменяет принцип точечной каузальности вследствие самой формы записи

(1.1). Разумеется, из (1.1) можно «вывести» покомпонентный з. с. и. в силу равенства компонент векторов левой и правой частей, без чего не выполняется условие равенства самих векторов.

Относительно содержания математического уравнения (1.1) можно сделать три важных замечания.

1. Сила $\vec{F}$, согласно (1.1), определяется через измерение результата ее воздействия на тело.

2. Для силы $\vec{F}$ могут быть установлены произвольные масштабы и эталоны.

3. По известной силе $\vec{F}$ можно путем математических операций определить результат ее воздействия на тело.

Относительно возможных универсальных масштабов входящих в (1.1) величин можно сделать ряд однозначных заключений:

- импульс $\vec{p}$ не имеет универсального масштаба величины в виде мировой константы, поскольку в самом его определении случай $|\vec{p}| = 0$ является актуальной характеристикой покоя, тогда как произвольность m не предполагает каких-либо ограничений сверху;
- время t не имеет универсального масштаба величины уже потому, что вводится безотносительно к объекту измерения как внешний по отношению к нему параметр сравнения, который можно произвольно «дробить» до бесконечно малых величин;
- при этом, согласно (1.1), отсутствует и физический универсальный масштаб силы.

Точечная каузальность классической механической модели 1 и представление о существовании состояния покоя, следовательно, не допускают существования каких-либо универсальных масштабов механических величин, по крайней мере в качестве их нижних пределов малости, иначе описание вывода из состояния покоя было бы несовместимо с (1.1) принципиально. Данное утверждение справедливо для любого обобщения механики, требующего принять существование каких-либо верхних границ для физических величин. Иными словами, классическая механика является актуальным «нижним пределом» для любой более общей механики, построенной в рамках модели 1, и в этом смысле является ее абсолютным пределом с точки зрения логической истинности всех без исключения ее результатов. Если, допустим, мы производим логическое расширение механики на случай $m(v)$ и приходим к построению более общей механики (RM), в которой существует предел $|v| < c$, где c — мировая константа, то CM как механика в пределе $|v| \to 0$ является абсолютной предельной формой для RM в области $|v|/c << 1$ вне зависимости от величины c. Следовательно, логика CM есть предельный вариант логики RM безотносительно к какому-либо эксперименту. Можно сделать и такое утверждение логического характера: CM является абсолютной моделью механики с бесконечной скоростью распространения взаимодействий по отношению к механике, в которой актуален некий определенный предел «*c*» этой скорости, и никакого логического противоречия между указанными моделями не существует.

Рассмотрим, наконец, вопрос о том, следует ли CM трактовать как модель идеального дальнодействия, что якобы логически следует из представления о бесконечности скорости распространения взаимодействий. Если внешние по отношению к данному тела создают в пространстве независимое (в некотором смысле) поле сил, то его удобно представить в форме потенциального поля $U(\vec{r}, t)$, такого, что $\vec{F} = -\mathrm{grad}U$; при этом (1.1) можно переписать в двух эквивалентных формах:

$$d\vec{p} / dt + \mathrm{grad}U = 0; \qquad (1.2)$$

$$dp_i / dt + \partial U/\partial x_i = 0;\ x_1 = x;\ x_2 = y;\ x_3 = z. \qquad (1.3)$$

Из (1.3) автоматически следует при $\partial U/\partial x_k = 0$ $p_k = \mathrm{const}$, т. е. з. с. и. в покомпонентной форме для $i = k$. Но ведь в (1.2) и (1.3) необходимо считать $\vec{r} = \vec{r}(t)$, поскольку на тело, согласно (1.2), действует силовое поле той точки, в которой в момент времени t находится тело, и никакое иное. Следовательно, (1.1)–(1.3) вполне отвечают модели близкодействия, если полагать, что любое проявление силы имеет материальный характер, который нам может быть и не известен. При этом указанные уравнения есть логико-математическая форма механики модели 1, в которой CM есть частный случай. Таким образом, модели близкодействия и дальнодействия задействованы на равных в (1.1)–(1.3), и никакого противоречия в указанном смысле здесь нет, поскольку эти модели есть полярные логические формы вербального представления исходной логико-математической структуры механики точечной каузальности. Данный вывод, разумеется, подтверждает высказанное выше утверждение о том, что CM является точным пределом для RM в рамках модели 1 (о взаимоотношении CM и QM речь пойдет в последующих главах).

1.6. Универсальность зависимости $m(|\vec{v}|)$

Центральный вопрос для всего последующего логико-математического анализа — это вопрос об универсальности установленной выше зависимости $m(|\vec{v}|)$. Что, однако, следует подразумевать под отсутствием универсальности? Поскольку m и $\vec{v}$ — совершенно различные физические параметры тела, то, обратясь к известному понятию размерности физической величины, можно то же самое утверждение выразить иначе, а именно, сказать, что размерности массы и скорости несводимы друг к другу и совершенно независимы. Следовательно, для того чтобы математическим языком описать зависимость $m(v)$ (для простоты опустим знаки векторности и модуля), следует ввести некий масштаб скорости «c», что позволит искомую зависимость представить в виде $m(v/c)$, с точки зрения размерности вполне законную.

Здесь потребуется некий смысловой комментарий. Далее в книге широко используется логика так наз. «теории размерностей» в ее простейшем и потому логически однозначном варианте. Надо сказать, что «размерностная» логика занимает промежуточное положение между логикой вербального характера и математической (количественной). Строгость ее построения и выводов ничем не уступает другим видам логических структур, поскольку ведет свое начало от фундаментальных логических связей. Ее удобство, однако, позволяет отчетливее и легче выстроить последовательность логических заключений. В физике ее эффективность можно сравнить разве что с переходом в математике от словесных понятий и символов к знаковым в виде букв и операторных знаков. Поэтому в дальнейшем строгость и общность «размерностных соображений» приравнивается к аналогичным операциям чисто математических соотношений и выводов.

Теперь можно проще и определеннее пояснить смысл неуниверсальности зависимости $m(v)$. Если масштаб c можно выразить через конкретные физические параметры и условия какой-либо задачи, то это и будет означать отсутствие универсальности $m(v)$. Допустим, мы имеем в конкретной механической задаче масштабы $[p]$, $[E]$ и $[m]$ — импульса, энергии и массы; все или хотя бы пару их них. Поскольку $[v] = [p]/[m]$ либо $[v] = \sqrt{[E]/[m]}$, то c может быть сопоставлено с $[v]$. Если окажется, что с помощью такого масштаба скорости можно верно выразить реальную зависимость $m(v)$, т. е. непротиворечиво прежде всего с точки зр. логики, то придется сделать необходимый вывод об отсутствии обсуждаемой универсальности вообще: универсальность несовместима с ее частными нарушениями. Конечно, интуитивная логика нам подсказывает, что универсальность должна иметь место, поскольку затрагивает фундаментальные свойства и взаимосвязи природы, в «компании» которых нет места частностям и тем более исключениям. Просматривается такая логическая трудность: масштабов $[v]$ может быть несколько — c_1; c_2; ... Каким образом должен быть выбран единственно верный? А если реализуется «микст», то каково соотношение вкладов c_i в зависимость $m(v/c_i)$, $i = 1,2,3,\ldots$? Увы, данный пример не обладает какой-либо логической строгостью и законченностью и также должен быть отнесен к интуитивным соображениям.

Рассмотрим теперь простой и вместе с тем очевидно общий пример $\vec{F} = \text{const}$. В соответствии с (1.1) при движении от состояния покоя имеем $\vec{p} = \vec{F}t = m\vec{v}$. Вдоль направления, заданного вектором силы, мы имеем:

$m(v/c)\,v = Ft$ при $t \geq 0$. (1.4)

При $v/c \ll 1$ справедлив квазиклассический вариант, когда $m(v/c)$ можно представить в виде:

$$m = m_0 \sum a_k (v/c)^k;\ a_0 = 1. \quad (1.5)$$

Заметим, что в данной задаче имеются только две константы — m_0 и F, из которых нельзя построить величину с размерностью $[c] = [v]$. Следовательно, c вообще не может зависеть от параметров данной общей задачи. С точки зрения логики неуниверсальность как всеобщий принцип опровергается на конкретном примере логико-математического характера. В силу общности данного примера и очевидной несовместимости принципов универсальности и неуниверсальности мы приходим к выводу о существовании только одного лишь принципа универсальности зависимости $m(v)$.

В СМ нет никаких физических масштабов $[x]$, $[t]$, $[p]$, $[F]$, $[E]$ на уровне универсальных констант, которые обычно именуют мировыми. Поэтому величина c не может быть выражена через известные мировые константы в механике за их отсутствием. Отсюда следует, что гипотеза о существовании универсальной зависимости $m(v)$ приводит к логической необходимости постулирования существования c как мировой константы сугубо механического происхождения. При этом универсальная зависимость массы от скорости может быть записана в такой форме:

$$m = m_0\gamma\ ;\ \gamma = \gamma(|\vec{v}\,|/c);\ m_0 = m(0). \quad (1.6)$$

По очевидным соображениям не имеет смысла здесь обсуждать логическую возможность существования однотипных мировых констант c_1; c_2; … В дальнейшем этот вариант будет отсеян из числа возможных по более определенным основаниям.

Функция (1.6) является четной, т. е. не меняет своего вида при замене $\vec{v}$ на $-\vec{v}$, или при инверсии времени $t \to -t$. Четными являются два представления функции γ:

$$\gamma_1 = \gamma_1(v^2/c^2);\ \gamma_2 = \gamma_2\,[(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)^{1/2}/c\,];$$

и нам необходимо сделать выбор в пользу одного из них, тем более, что при $|\vec{v}\,|/c \ll 1$ мы имеем несводимые друг к другу разложения γ по малому параметру. Рассмотрим для простоты случай одномерного движения: $v = v_x$; $v_y \equiv v_z \equiv 0$. При этом $\gamma_2 = \gamma_2(|v|/c)$. Система (1.3) в одномерном случае сводится к одному уравнению:

$$dp/dt + dU/dx = 0 \quad (1.7)$$

для консервативного поля $U(x)$, причем $x = x(t)$. Интегрируя (1.7) по x, получим:

$$\int v dp + U = m_0 \int v d(\gamma v) + U = E = \ const. \tag{1.8}$$

Выполняя в (1.8) интегрирование по частям, приходим к выражению закона сохранения механической энергии в форме:

$$m_0 c^2 \,[\gamma \cdot v^2/c^2 - \tfrac{1}{2} \int \gamma d(v^2/c^2)\,] + U = E. \tag{1.9}$$

Видно, что квадратичная форма относительно v реализуется только для γ_1, поскольку при разложении в ряд γ_2 должны появиться нечетные степени $|v|$, начиная с первой, что не совместимо с предельным переходом $|v|/c \to 0$, т. е. с классикой. Таким образом, остается только один вариант представления зависимости $m(|\vec{v}|)$ в виде:

$$m = m_0 \gamma \,(v^2/c^2) \tag{1.10}$$

Любые иные варианты логически неправомерны.

1.7. Вывод формулы зависимости массы от скорости

Относительно характера поведения функции $\gamma(v^2/c^2)$ можно сделать ряд важных утверждений, которые необходимы для обеспечения корректности представленной ниже процедуры строгого математического вывода формулы для γ. Предположим, во-первых, что $\gamma(v)$ не имеет никаких «особенностей» поведения в неограниченном диапазоне величин v, нарушающих ее гладкость, или дифференцируемость — бесконечную, принимая во внимание все сказанное выше. Поскольку сама величина c имеет необходимо фундаментальное происхождение, то отсутствие связанных с ней особенностей поведения $\gamma(v)$ означает отсутствие особенностей фундаментального характера, что было бы понятно только в том случае, когда $[v] = c$ не имеет смысла мировой константы, и, следовательно, зависимость $\gamma(v)$ не универсальна, что противоречит выводу п. 1.6. Более того, при $c < \infty$ и актуальности области $|v| >> c$ механическая система, образно выражаясь, должна «забыть» о существовании «мелких масштабов» скоростей, и все сведется к распространению безмасштабной классической механики на весь диапазон скоростей. Это просто будет означать, что константа c, введенная нами, не имеет фундаментального характера либо вообще не имеет никакого отношения к механике.

Не все особенности, однако, могут быть совместимы с изложенными выше требованиями относительно поведения $\gamma(v)$. Так, например, скачок величины γ несовместим с представлениями о поведении кинетической энергии тела (см. выражение (1.9)), а скачок ее первой производной ведет к необходимости рассмотрения скачкообразного изменения силы в области особенности, что опять-таки неприемлемо из-за необходимости инвертирования каузальной связи причина–следствие. Аналогичные соображения можно высказать и относительно скачков производных высших порядков. Совместимой с бесконечной дифференцируемостью может быть только особенность в виде $\lim \gamma(v^2/c^2) = \infty$ при $|v| \to c$. Фундаментальность подобной особенности очевидна: ни при какой ограниченной силе тело не может достигнуть предела $[v] = c$ в силу бесконечного роста его инерционности; следовательно, существование мировой константы c обеспечивает, с одной стороны, универсальность вида зависимости $\gamma(v)$, а с другой — ограничивает диапазон физически реализуемых скоростей тел интервалом $0 \le |v| < c$, в пределах которого только и реализуется причинно-следственная связь, предусматриваемая динамическим уравнением (1.1). Отметим, что введение константы c носит феноменологический характер, но не опытного происхождения — и в этом смысле независимого от логики, а сугубо логического и потому является необходимым звеном в цепи последовательных логических суждений. Причем константа c вводится исключительно в рамках чистой механики и потому не связана для своего обоснования с какой-либо «сторонней» физикой типа явления распространения в пространстве электромагнитных волн.

Для обоснования логически последовательной постановки задачи вывода зависимости $\gamma(v)$ необходимо сделать еще ряд важных замечаний, поскольку более широкое использование математического аппарата как логического средства, также напрямую не связанного с «эмпирикой», предполагает усложнение общей логической процедуры в ее последовательном развитии от некоторых «простейших» фундаментальных понятий.

Классическая механика может быть логически развита и быть содержательной в одномерном пространственном приближении, т. е. в координатах (x, t); при этом ее многомерное обобщение основывается на непосредственной взаимосвязи между самим понятием многомерности пространства и векторностью закона сохранения импульса. Аналогичную логическую структуру имеет и специальная теория относительности, что в отличие от СМ приводит к ее внутренней логической противоречивости наиболее общего — концептульного — характера. Данное утверждение непосредственно следует из трех общих положений.

1. В STR используется представление об одномерном сигнале, с которым необходимо связана вся ее причинно-следственная структура. Под сигналом понимается явление распространения э.м. волн, которое имеет принципиально многомерный характер и в чисто геометрическом отношении, и в сугубо физическом уже вследствие ортогональности векторов электрического и магнитного полей. «Луч света» поэтому не имеет отношения к физике взаимодействия инертных тел уже потому, что не является

физическим объектом в пространстве одного измерения и, следовательно, не может быть средством передачи импульса энергии и, таким образом, информации.

2. Уравнения Максвелла в силу своей векторности принципиально многомерны, поэтому их инвариантность относительно преобразований Лоренца не является логическим основанием для постулирования справедливости этих преобразований применительно к одномерной механике инертных тел. Чисто геометрический характер понятия «луч света» влечет за собой и «нефизичность» одномерных преобразований Лоренца и, как логическое следствие, вообще нефизичность вывода «одномерных» соотношений STR. Сказанное означает, что абсолютная или относительная справедливость STR является предметом независимого от нее теоретического исследования.

3. Сведение светового сигнала к модели фотонного взаимодействия в соответствии с корпускулярной моделью э.м. излучения не избавляет STR от противоречивости. Прежде всего следует отметить, что фотон как физический объект не является точечным механическим телом, поскольку не подчиняется законам механического движения инертных тел, и к нему не применимо понятие ускорения. Кроме того, модель движения фотона по прямой линии, соединяющей два механических точечных тела, противоречит существованию постоянной Планка $\hbar$, ограничивающей снизу диапазон физически реализуемых моментов количества движения. Иными словами, угол «прицеливания» при испускании фотона не может быть сделан сколь угодно малым, и, следовательно, как реальный физический объект фотон не может быть рассмотрен в рамках одномерной (прямолинейной) пространственной модели.

Таким образом, в рамках STR не имеется никаких реальных оснований для утверждения о справедливости преобразований Лоренца при анализе чисто механического движения. Более того, из сказанного логически следует, что новая теория механического движения, выходящая за пределы применимости CM как идеальной модели, должна иметь принципиально многомерный характер. Выражаясь более конкретно, математическая структура задачи вывода общих механических соотношений должна быть многомерной, т. е. минимально допустимое количество пространственных измерений в ней равно двум. При этом, разумеется, обретает физический и математический смысл и понятие евклидовости пространства в своем простейшем — плоском — варианте. Действительно, существование третьей точки помимо любых двух, находящихся на прямой линии, позволяет построить «жесткую» в отношении ее характерных длин фигуру — треугольник. Однако математические отношения между длинами определяются выбором одной из трех возможных геометрических моделей. Согласно первой через «третью точку» нельзя провести ни одной линии, параллельной прямой, проходящей через две другие точки (геометрия Римана). Согласно второй — так наз. геометрии Лобачевского–Бойяи — через третью точку возможно провести бесконечное число параллельных. Наконец, в геометрии Евклида через третью точку можно провести всего лишь одну параллельную прямую, и только в этой геометрии справедлива теорема Пифагора, по форме которой и будет определяться в дальнейшем «длина вектора». Таким образом, многомерность и евклидовость пространства, как и соответствующий им закон сохранения импульса, являются взаимосвязанными постулатами нижеследующего вывода зависимости $m(v)$.

Простейшая и вместе с тем общая задача по нахождению вида функции $\gamma(v^2/c^2)$ может быть сформулирована следующим образом. Пусть в некотором направлении на тело с массой покоя m_0 действует сила $\vec{F}$. Совместим с этим направлением ось x и обозначим переменную во времени компоненту вектора скорости тела через v_x, причем положим $v_x(t=0)=0$. Поскольку в плоскости, перпендикулярной оси x, силы не действуют, то задача обладает очевидной симметрией решения относительно осей y и z, поскольку она инвариантна относительно вращения пространственных осей вокруг оси x, причем поворот на прямой угол позволяет совместить ось y с z, и наоборот. С математической стороны это означает, что заданные в начальный момент компоненты импульсов p_y и p_z и, соответственно, скоростей v_y и v_z входят в любые формулы совершенно симметрично, и одновременная замена обозначений $y \to z$, $z \to y$ оставляет все математические выражения неизменными. Рассматривая компоненты пространственного вектора $\vec{v}$ в качестве векторов $\vec{v}_y$ и $\vec{v}_z$, направления которых заданы направлением осей y и z, мы вместо параллельного анализа движения тела вдоль осей y и z можем ограничиться движением в плоскости, заданной направлением векторов $\vec{v}_x$ и $\vec{v}_\perp = \vec{v}_y + \vec{v}_z$, причем $\vec{v}_\perp = \sqrt{v_y^2 + v_z^2}$; иначе говоря, трехмерное движение свести к двумерному, ничем принципиально не отличающемуся. При этом и ось y мы можем совместить с данной плоскостью. Таким образом, решение в трехмерном варианте получается из двухмерного простой заменой индекса «y» на «⊥», причем любые формулы для компонет по осям y и z отдельно имеют симметричный вид.

Согласно з. с. и. можно для произвольного момента времени $t > 0$ записать соотношение

$$\gamma v_y = \gamma_0 v_0, \tag{1.11}$$

где $v_0 = v_y(t=0)$; $\gamma_0 = \gamma(v_0)$; $\gamma = \gamma(v)$; $v^2 = v_x{}^2 + v_y{}^2$; $\gamma(v) \equiv \gamma(v^2/c^2)$.

Для упрощения математических выражений удобно перейти к нормированным на c величинам $v' = v/c$; при этом без уменьшения общности можно положить $c = 1$ и опустить при этом штрих, что в дальнейшем не вызовет никакой путаницы. Переход от v' к v очевидно тривиален, равно как и вообще переход в любых формулах от $c = 1$ к c.

Попробуем уточнить вид $\gamma(v)$ хотя бы гипотетически, чтобы затем продолжить анализ (1.11). Сказанное в начале данного параграфа дает нам основание провести в $\gamma(v)$ замену аргумента:

$$u=\left(1-v^2\right)^{\frac{1}{2}};\ v=\left(1-u^2\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (1.12)$$

причем $u = 1$ при $v = 0$ и $u \to 0$ при $v \to 1$, а областью определения γ является область $u \in (0;1]$ (квадратная скобка означает, что граница $u = 1$ включена в область определения. Ограничимся пока областью рациональных функций от u и представим $\gamma(u)$ в виде полинома:

$$\gamma(u)=\sum_i\left(a_i u^i+b_i u^{-i}\right), \qquad (1.13)$$

где a_i и b_i есть некие числовые коэффициенты. Если будет найдено единственное решение задачи, удовлетворяющее всем условиям, то тем самым будет оправдано и ограничение анализа функциями вида (1.13).

В силу условия справедливости предельного перехода к СМ при $|v| \to 0$ имеем:

$$\sum_i\left(a_i+b_i\right)=1, \qquad (1.14)$$

причем в силу ограниченности числа членов в (1.13) $|a_i|<\infty$ и $|b_i|<\infty$. Тогда асимптотический вид $\gamma_*(u)$ при $u \to 0$ (т. е. $v \to 1$) дается старшим по отрицательным степеням u членом, т. е. $\gamma_* \to b_{i_{\max}} u^{-i_{\max}}$.

Учтем теперь, что $i_{\max}$ должно быть нечетным, чтобы исключить из области определения интервал $u^2 \in (0,-\infty)$. Полагая $i_{\max} = 2n-1$; m=1; 2; 3; ..., и возвращаясь к аргументу v, получим гипотетический асимптотический вид γ_*:

$$\gamma_*=\frac{B}{\left(1-v^2\right)^{n-\frac{1}{2}}};\ v \to 1;\ B=const. \qquad (1.15)$$

Подставив (1.15) в (1.11), получим соотношение

$$v^2=1-\left(1-v_0^{\,2}\right)\left(\frac{v_y}{v_0}\right)^{\frac{2}{2n-1}}. \qquad (1.16)$$

Квадратичная форма реализуется только при $n = 1$. В этом случае

$$v^2=v_x^{\,2}+v_0^{\,2}-v_0^{\,2}v_x^{\,2};\ \ v_y=v_0\left(1-v_x^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (1.17)$$

Данное решение обладает симметрией, т. е. инвариантно относительно замены индексов «x» и «0» друг на друга (инверсии) в формуле для v. Указанная симметрия присуща рассматриваемой задаче в силу того. что с т. зр. з. с. и. направления вдоль оси x и вдоль плоскости (y,z) взаимонезависимы и физически равноправны. Решение не изменится — т. е. модуль $|\vec{v}|$ является инвариантом, — если сначала рассмотреть ускорение тела вдоль оси x от $v_x = 0$ до v_x при нулевых v_y и v_z $(v_0 = 0)$, а затем сообщить ему скорость $\vec{v}_0 = \vec{v}_{0y} + \vec{v}_{0z}$ при v_x = const, что и отражено математически в виде соотношений (1.17).

Выясним, при каких еще значениях n имеет место симметрия решения. Перепишем (1.16) в форме зависимости $v_y(v)$:

$$v_y^2 = v_0^2 \left(\frac{1 - v^2}{1 - v_0^2} \right)^{2n-1}. \tag{1.18}$$

Тогда, учитывая $v^2 = v_x^2 + v_y^2$, уравнение (1.18) можно записать в форме зависимости $v(v_x)$:

$$v^2 = v_0^2 \left(\frac{1 - v^2}{1 - v_0^2} \right)^{2n-1} + v_x^2. \tag{1.19}$$

Из (1.19) видно, что требуемая симметрия решения при произвольных v_0, v_x отсутствует для всех n, кроме $n = 1$, при котором имеет место, согласно (1.17), симметричная запись зависимости $v(v_x; v_0)$. Единственно приемлемое асимптотическое решение, таким образом, есть

$$\gamma_* = \frac{B}{\left(1 - v^2\right)^{\frac{1}{2}}}. \tag{1.20}$$

Представим теперь общее решение в области определения $v^2 \in [0;1)$ в виде:

$$\gamma = \frac{g\left(v^2\right)}{\left(1 - v^2\right)^{\frac{1}{2}}}, \tag{1.21}$$

где $g\left(v^2\right)$ — некоторая функция, удовлетворяющая, как мы теперь установили, трем необходимым условиям:

1) $g(0) = 1$;

2) $g \to \text{const}$ при $v \to 1$;

3) g есть функция, симметричная относительно v_o и v_x.

Подставляя (1.21) в (1.11), получим следующее уравнение:

$$v^2 = 1 - \frac{g^2}{g_0{}^2} \cdot \frac{v_y{}^2}{v_0{}^2} \left(1 - v_0{}^2\right), \tag{1.22}$$

где $g_0 = g\left(v_0{}^2\right)$. Заменяя $v_y{}^2$ на $v^2 - v_x{}^2$, (1.22) можно переписать в виде:

$$v^2 = \frac{1 + \dfrac{g^2}{g_0{}^2} \cdot \dfrac{\left(1 - v_0{}^2\right)}{v_0{}^2} v_x{}^2}{1 + \dfrac{g^2}{g_0{}^2} \cdot \dfrac{\left(1 - v_0{}^2\right)}{v_0{}^2}}. \tag{1.23}$$

Выясним, при какой форме зависимости $g\left(v^2\right)$ выражение (1.23) симметрично относительно v_x и v_0. Существование симметрии означает, что при замене $v_x \to v_0$; $v_0 \to v_x$ величина v^2 не изменяется; иначе говоря, имеет место равенство:

$$\frac{1+\dfrac{g^2}{g_0^{\,2}}\cdot\dfrac{\left(1-v_0^{\,2}\right)}{v_0^{\,2}}v_x^{\,2}}{1+\dfrac{g^2}{g_0^{\,2}}\cdot\dfrac{\left(1-v_0^{\,2}\right)}{v_0^{\,2}}}=\frac{1+\dfrac{g_0^{\,2}}{g^2}\cdot\dfrac{\left(1-v_x^{\,2}\right)}{v_x^{\,2}}v_0^{\,2}}{1+\dfrac{g_0^{\,2}}{g^2}\cdot\dfrac{\left(1-v_x^{\,2}\right)}{v_x^{\,2}}}. \tag{1.24}$$

Из (1.24) после преобразований получаем следующее равенство:

$$\left(g_0^{\,2}-g^2\right)\left(\frac{1}{v_x^{\,2}g^2}+\frac{1}{v_0^{\,2}g_0^{\,2}}\right)=0. \tag{1.25}$$

Поскольку выражение во второй скобке в нуль не обращается, то $g_0 = g = 1$ (в силу условия 1)) для любых v^2, т. е. $g(v^2) \equiv 1$. Следовательно, единственная форма зависимости $\gamma(v^2)$, удовлетворяющая всем общим условиям задачи, есть

$$\gamma\left(v^2\right)=\frac{1}{\left(1-v^2\right)^{\frac{1}{2}}}, \tag{1.26}$$

или, переходя к обычным обозначениям,

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{1.27}$$

Таким образом, мы вывели основополагающее соотношение релятивистской физики, основываясь исключительно на общих свойствах физического пространства (взаимонезависимость воздействий по ортогональным направлениям и евклидовость), не используя при этом известные постулаты Эйнштейна. Тем самым доказана возможность построения «релятивистской» механики без привлечения к рассмотрению немеханических физических явлений, таких как физика распространения электромагнитных волн. Кроме того, все проведенное выше логическое исследование механики, которое позволило получить нам фундаментальный для современной физики результат в виде зависимости (1.27), не опирается ни на какие дополнительные опытные данные, появившиеся уже после работ И. Ньютона, из чего следует, что, вообще говоря, релятивистская механика вполне могла быть создана исторически одновременно с классической механикой XVII–XVIII вв. в качестве ее логического развития и обобщения.

В заключение данного параграфа отметим важную особенность, присущую рассмотренной задаче, а именно существование соотношения вида

$$\gamma(v)=\gamma(v_0)\gamma(v_x), \tag{1.28}$$

что является прямым следствием соотношения (1.17). Это означает, что справедлива запись $m(v) = m_*\gamma_x$; $m_* = m_0\gamma_0$. Интерпретация (1.28) очевидна: при изменении скорости тела v_x от нуля в K в качестве массы покоя выступает величина m_*. При этом все величины в (1.28) определены в K однозначно, поскольку определено состояние покоя по всем трем координатам (x, y, z) и, следовательно, определена процедура измерения соответствующих расстояний и скоростей. При $v_{0x} \neq 0$ подобные простые соотношения отсутствуют. Сказанное, разумеется, не означает, что нельзя установить однозначное соотношение между скоростями и массами в системах K и K', движущихся относительно друг друга, не выходя за пределы тех простейших свойств пространства, которые были задействованы при выводе зависимости (1.27). Но для этого придется уточнить сущность того, что следует понимать под физическими величинами, определяемыми в K'.

1.8. Масса и скорость в несобственной системе координат

Лабораторной мы называем ту систему отсчета K, в которой исследователь неподвижен вместе с необходимым измерительным инструментарием — линейками, часами и проч. Система K считается инерциальной в общепринятом смысле; в ней однозначно определены понятия координат (длин) и времени, а также эталоны длины, времени и массы тела. Все эталоны мер имеют механическое происхождение; использование же параметров светового излучения не приводит ни к каким физическим особенностям, поскольку излучатель покоится относительно K.

Собственной мы называем систему координат, связанную с исследуемым механическим телом, движущимся произвольно относительно K; эту систему мы обозначаем K_s. Для формирования любой системы нужна группа тел, неподвижных друг относительно друга, поэтому с физической т. зр. под K_s понимается некая группа тел, имеющих единую (групповую) скорость $\vec{v}$, совпадающую со скоростью исследуемого тела. Вообще говоря, достаточно, чтобы скорости $\vec{v}_i$ этой группы тел на момент измерения в K мало отличались от $\vec{v}$ по абсолютной величине, т. е. выполнялось условие $|\vec{v}_i - \vec{v}| << |\vec{v}|$ за время измерения. Именно такая система отсчета и «примысливается», когда речь идет о параметрах механического движения в K_s.

Ранее мы коротко обсуждали измерительные эффекты, которые возникают при сравнении результатов измерительных процедур в K и K_s: 1) в K не может быть механически измерена «собственная» длина отрезка, неподвижного в K_s; 2) время, измеренное в K_s, «течет медленнее», чем измеряемое в K; 3) имеет место эффект «перемасштабирования» масс, что фактически предполагается соотношением (1.28). В данном параграфе для нас представляет интерес именно последнее утверждение. Действительно, поскольку в K_s все тела относительно K «приобретают» массовый множитель $\gamma(v)$, то спектр масс внутри K_s остается неизменным; следовательно, при измерении массы исследуемого тела в K_s в единицах эталонной массы мы получим то же значение m_0, что и в K. Более того, поскольку $\gamma(v)$ имеет универсальный вид и явным образом не зависит от $\vec{r}$ и t, то указанный эффект перемасштабирования масс имеет «мгновенный характер» и полностью переносится на случай $\vec{v}\,(t)$, т. е. на неинерциальные K_s. Последнее позволяет заключить, что в механике собственные системы отсчета K_s представляют не меньший интерес с точки зрения физики, нежели лабораторная система K как основа для сопоставления результатов измерений.

По аналогии с K_s мы можем рассматривать группу тел, имеющих некую групповую скорость $\vec{V}$, никак не связанную ни с системой K, ни с телом, имеющим скорость $\vec{v}$ в K и $\vec{v}'$ в «несобственной» системе K', имеющей скорость $\vec{V}$ относительно K. Поскольку в K не определено понятие длины отрезка в K', покоящегося или движущегося относительно K' и потому движущегося относительно K, то не определено в K и понятие $\vec{v}'$ скорости тела относительно K', равно как и соответствующей такому движению массы m'. Следовательно, отсутствует и эффект перемасштабирования, характерный только для собственных систем K_s. Из сказанного следует, что K' есть некий формализованный механический объект, относительно которого основные параметры тела не определены измерительными процедурами в K. Это, однако, не означает, что нельзя установить математическую процедуру расчета $\vec{v}'$ и m' при известных $\vec{v}$ и m, если $\vec{V}$ также известна; иными словами, установить процедуру вычисления $\vec{v}'$ и m' на основе измеряемых величин $\vec{v}$, m и $\vec{V}$. Указанная процедура расчета интересна прежде всего тем, что позволяет прямо сопоставить логико-математические структуры RM и STR и выявить их концептуальное различие.

Рассмотрим в одномерном приближении движение тела с массой покоя в K, равной m_0, относительно оси x системы K со скоростью v, а также движение системы K' относительно K со скоростью V, полагая направления осей x и x' совпадающими. Скорость v' тела — это ее величина, измеряемая в системе K' с помощью инструментария и процедур, аналогичных используемым в K. Ставится задача определения v' через параметры v и V тела, однозначно определяемые в K для того же тела, в качестве «косвенного» результата измерений в K.

Как уже говорилось выше, при $v' = 0$ система K' превращается в K_s, для которой справедлив эффект перемасштабирования. Следовательно, мы имеем возможность ввести понятие массы m' в несобственной системе K' такое, что $m' = m_0\gamma(v')$, включающее в себя и зависимость (1.27), и эффект перемасштабирование масс, касающийся спектра масс покоя в K'. Именно перемасштабирование ответственно за физическую неразличимость систем K и K' относительно измеряемых в них масс тел, что отражается и в самой форме записи формулы (1.27), куда входит именно v как скорость тела в данной системе отсчета. Таким образом, мы полагаем в некоторый момент времени t по часам в K:

$$m(v)=\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2}};\quad m'(v')=\frac{m_0}{\sqrt{1-v'^2}};\quad c\equiv 1. \tag{1.29}$$

Отметим, что поставленная задача не требует инерциальности K', поскольку в ее рамках точечная, или дифференциальная, инерциальность ничем не отличается от пространственно-временной при V=*const.*

Предположим, что v' однозначно определяется через v и V. Тогда имеется такой однозначно определяемый коэффициент $\varphi=\varphi(v',V)$, что

$$m=\varphi m', \tag{1.30}$$

поэтому решение поставленной выше задачи фактически сводится к установлению вида функции $\varphi(v',V)$. В этой связи отметим, что в отличие от CM и STR сугубо кинематические соотношения определяются через посредство динамической характеристики, каковой в механике является мера инертности m. В этом нет ничего удивительного, если учесть, что кинематика в системе K' относительно K, вообще говоря, не определена в качестве физической (а не мыслимой) измерительной процедуры, использующей масштаб длины.

При $v=V$ имеем $v'=0$, поскольку K' становится K_s, поэтому φ можно представить в виде:

$$\varphi=\varphi_1(v',V)\varphi_0;\quad \varphi_0=\varphi(0,V)=\frac{1}{\sqrt{1-V^2}}. \tag{1.31}$$

На функцию φ_1 накладываются очевидные граничные условия:

$$\varphi_1(0,V)=\varphi_1(v',0)=1. \tag{1.32}$$

Подставляя (1.31) в (1.30), получим соотношение:

$$v=\frac{1}{\varphi_1}\left(v'^2+V^2-v'^2V^2+\varphi_1^2-1\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.33}$$

Проанализируем кинематическую схему задачи, считая для простоты V = const (это тем более оправдано, если иметь в виду дальнейшее сопоставление результатов решения с аналогичными зависимостями STR, которая рассматривает только инерциальные системы). Пусть в некоторый начальный момент времени тело покоилось относительно K. Под воздействием силы оно затем ускорилось, изменив свою скорость в K от $v=0$ до $v>0$, для определенности, в положительном направлении оси x, причем будем считать $v>V>0$. Процесс ускорения можно разбить на два последовательных этапа: 1) ускорение тела в K от $v=0$ до $v=V$; 2) ускорение в K от $v = V$ до v. В системе K' этап 2) рассматривается как ускорение того же тела относительно K' от $v' = 0$ до $v' > 0$, которому в K как раз и соответствует v, поскольку рассматривается одно и то же тело. Разумеется, у нас нет никаких оснований полагать, что $v' = v - V$, во-первых, потому, что v' и v определены в разных системах координат, а, во-вторых, ниоткуда логически не следует аддитивность скоростей как неотъемлемое свойство движущихся тел.

Зададимся следующим вопросом. Если положить скорость K' относительно K равной v', то будет ли соответствовать v скорость V, измеренная в K'? Если да, то в силу произвольности V и v задача симметрична относительно величин v' и V, т. е. замена в (1.33) $v' \to V$ и $V \to v'$ не изменяет результата — v; если нет, то указанная симметрия отсутствует.

Для ответа на поставленный вопрос рассмотрим третью систему отсчета — K'', скорость которой относительно K равна v, т. е. K'' является собственной для тела, движущегося в K со скоростью v, точно так же как K является собственной системой для первоначально покоившегося в ней тела. Ускорим теперь тело в K'' в сторону $(-x)$. сообщив ему скорость $(-v)$. Данный ускорительный процесс вполне определен моментом достижения телом состояния покоя относительно оси x системы K, что является простейшей измерительной операцией. Если учесть, что в пространстве положительное и отрицательное направления физически ничем не отличаются в силу изотропности пространства, то нет, следовательно, никаких физических различий и между системами K и K'', естественно, в рамках рассматриваемой процедуры ускорения тела: $0 + v + v'' = 0$, т. е. $v'' = -v$. Можно, однако, процесс обратного ускорения тела в K'', как и ранее в K, разбить на два этапа: сначала тело, ускоряясь до $-v'$, совмещается с системой K' до состояния покоя в ней, что является вполне определенной измерительной процедурой во всех трех системах K, K' и K'', не требующей измерения длин; затем оно в K' ускоряется до момента совмещения с K. Иначе говоря, в K'' в качестве V выступает v', а в качестве v' — V, причем все этапы и величины однозначно определены простейшими измерительными процедурами. В силу эквивалентности K и K'' мы приходим к выводу, что, действительно, в задаче имеется инвариантность величины v относительно взаимной замены $V \to v'$; $v' \to V$.

В силу указанной симметрии из (1.33) следует, что $\varphi_1(v', V)$ также симметрична относительно v', V, причем условие (1.32) позволяет уточнить вид искомой зависимости:

$$\varphi_1(v', V) = \varphi_1(v'V), \tag{1.34}$$

где $\varphi_1(0) = 1$.

Представим φ_1 в виде ряда по степеням $(v'V)$, учитывая, что φ_1 не имеет никаких особенностей в области определения $0 \le |v'V| < 1$, что прямо следует из (1.31–1.33):

$$\varphi_1 = 1 + \sum_i a_i (v'V)^i; \quad i = 1, 2, 3, \ldots \tag{1.35}$$

Подставляя (1.35) в (1.33), получим следующее выражение:

$$v = \frac{\left\{ v'^2 + V^2 - v'^2 V^2 + \left[1 + \sum_i a_i (v'V)^i \right]^2 - 1 \right\}^{\frac{1}{2}}}{1 + \sum_i a_i (v'V)^i}. \tag{1.36}$$

В рамках рассматриваемой задачи должно выполняться еще одно условие: $v = 0$ при $v' = -V$, что ничем не отличается от аналогичного условия для системы K'', рассмотренной выше при анализе симметрии. Тогда из (1.36) мы имеем следующее уравнение:

$$\left(\sum_i (-1)^i a_i V^{2i} + 1 \right)^2 + 2V^2 - V^4 - 1 = 0. \tag{1.37}$$

В силу произвольности V должны обращаться в нуль все коэффициенты при степенях V^{2i} в (1.37). Имеем последовательно:

$2(1 - a_1) = 0$, откуда $a_1 = 1$; $a_2 = 0$; $a_3 = 0$; ...

Таким образом;

$$\varphi_1 = 1 + v'V, \tag{1.38}$$

и для $v\,(v')$ и $m(v')$ получаем окончательно, возвращаясь к обычным масштабам для v:

$$v = \frac{v' + V}{1 + \dfrac{v'V}{c^2}}. \tag{1.39}$$

$$m = \frac{\left(1 + \dfrac{v'V}{c^2}\right) m_0}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{V^2}{c^2}\right)\left(1 - \dfrac{v'^2}{c^2}\right)}} = \frac{\left(1 + \dfrac{v'V}{c^2}\right) m'}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}. \tag{1.40}$$

Первое из полученных выражений представляет собой известную формулу «сложения скоростей» STR, которую можно получить с помощью преобразований Лоренца. В рассмотренном выше выводе преобразования (1.39), в отличие от STR, не использовались ни постулаты Эйнштейна, ни преобразования Лоренца, ни условие инвариантности «интервала» (по терминологии STR), ни какие-либо предположения относительно способов реального измерения длин движущихся объектов. Поскольку фундаментальные результаты STR нами получены на основе более общих принципов, нежели те, что были использованы при построении STR, уместно рассмотреть вопрос о концептуальной совместимости обоих подходов к формированию «релятивистской» механики более подробно, чем это было сделано выше. Преобразование (1.39), справедливое, в том числе, и для инерциальных систем при $V = \text{const}$, позволяет сделать вполне однозначные выводы (см. след. п. 1.9).

Трехмерный вариант формулы (1.39) нетрудно записать, используя полученные выше результаты. Действительно, из (1.17) имеем с учетом эффекта перемасштабирования, справедливого локально и в K', $v'_y = v_0\sqrt{1 - v'^2_x}$, откуда

$$v_y = v'_y\sqrt{\left(1 - v_x^2\right) / \left(1 - v'^2_x\right)}.$$

С другой стороны, равенство (1.28) показывает, что все влияние движения тела в плоскости (y, z) на движение по оси x заключается только лишь в перемасштабировании масс, т. е. замене m_0 на $m_0\gamma\left(v_0\right)$ и обратно, поэтому формула (1.39) сохраняется неизменной и в общем случае. Подставляя ее в записанное выражение для v_y, немедленно получаем (в нормированном на c виде):

$$v_y = \frac{v'_y\sqrt{1 - V^2}}{1 + v'_x V}, \tag{1.39'}$$

т. е. выражение, справедливое и в STR.

1.9. «Электромагнитная» концепция релятивистской механики Эйнштейна

Установим взаимосвязь между преобразованием (1.39), содержащим только величины скоростей, с соответствующим ему пространственно-временным преобразованием. Полагая $v = dx / dt$ и $v' = dx' / dt'$, где x' и t' есть координата тела и время в системе K', из (1.39) получаем дифференциальное соотношение:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx' + Vdt'}{\frac{V}{c^2}dx' + dt'}. \tag{1.41}$$

В правой части равенства в числителе и знаменателе стоят дифференциалы выражений:

$$x = A\left(x' + Vt' + B\right); \quad t = A\left(\frac{V}{c^2}x' + t' + C\right), \tag{1.42}$$

где A, B и C — произвольные константы. Если принять, что в момент $t = t' = 0$ системы K и K' совмещены, т. е. $x = x' = 0$ — тело находится в начале координат обеих систем, то следует положить $B = C = 0$. При этом A остается совершенно произвольным параметром преобразований (1.42), который можно определить только путем введения какого-либо дополнительного условия, конкретизирующего процедуру измерения длины движущегося отрезка прямой в неподвижной системе координат. Но, как уже неоднократно обсуждалось выше, именно эта операция в механике и не определена, если, конечно, саму процедуру измерения длин движущихся отрезков предполагается осуществлять чисто механическими способами, в которых так или иначе задействовано совмещение измеряемого объекта с неподвижным эталоном длины. В классической механике предполагается, что движение не влияет на длину отрезка и, следовательно, $A = 1$. При этом, в соответствии со вторым соотношением в (1.42), темп отсчета времени в K и K' также одинаков, а проблем с пространственной синхронизацией часов не возникает вследствие очевидной малости слагаемого Vx'/c^2, по крайней мере, в земных условиях измерений. Условия применимости СМ, выражаемые двумя равенствами $l = \Delta x = \Delta x'$ и $t = t'$, исключают, таким образом, любые «релятивистские» эффекты.

Потребуем теперь, в соответствии с логической структурой построения STR, чтобы квадрат «интервала» вида $ds^2 = c^2dt^2 - dx^2$ был величиной, инвариантной для всех инерциальных систем отсчета и, следовательно, для любой пары систем K и K'; иначе говоря, потребуем, чтобы $ds^2 = ds'^2$. Происхождение принципа инвариантности интервала ds восходит к произвольному с т. зр. механики инертных тел требованию совмещения основного закона распространения света — инвариантности его скорости во всех K' — с механическими законами движения. Действительно, для света $ds = ds' = 0$, и для требуемого совмещения инвариантность интервала является необходимым условием. С геометрической т. зр. интервал есть «длина» отрезка в плоском пространстве, где парой обычной пространственной координате x является мнимая координата ict. Такое пространство именуют псевдоевклидовым, и именно в таком псевдопространстве необходимо, в соответствии с традиционной концепцией построения STR, рассматривать законы механического движения. При этом инвариантность интервала означает инвариантность «длины» отрезка в псевдоевклидовом пространстве, что совершенно аналогично (но не значит совместимо или необходимо!) ситуации в обычном пространстве при использовании чисто механической концепции СМ. Требование инвариантности длины отрезка в псевдопространстве ведет и к использованию немеханической процедуры измерения длин в механике, основанной на регистрации световых сигналов. Суммируя сказанное, можно утверждать, что STR основана на «электромагнитной» концепции моделирования движения в механике, что из самой механики инертных тел и тем более фундаментальных свойств пространства никак не следует. Если вспомнить историю возникновения и общественного триумфа концепции Минковского, то нельзя не отметить здесь яркое проявление воздействия на науку психологического фактора в сфере не только индивидуального, но и общественного сознания. Математического изящества, с которым переход от традиционного трехмерного пространства к четырехмерному позволил описать все наблюдаемые релятивистские эффекты, оказалось достаточно, чтобы был подавлен всякий здоровый скептицизм в отношении столь вольного, «романтического» моделирования механического движения.

Используя (1.42), требование инвариантности интервала представляется в виде уравнения:

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 = c^2A^2\left(\frac{V}{c^2}dx' + dt'\right)^2 - A^2\left(dx' + Vdt'\right)^2 = c^2dt'^2 - dx'^2,$$

откуда немедленно следует $A = \left(1 - V^2 / c^2\right)^{-\frac{1}{2}}$, а x' и t' связаны с x и t преобразованиями вида:

$$x' = \frac{(x - Vt)}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}; \qquad t' = \frac{\left(t - \frac{V}{c^2}x\right)}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}, \tag{1.43}$$

именуемыми преобразованиями Лоренца в одномерном варианте.

Как известно, уравнения Максвелла форминвариантны относительно преобразований Лоренца, что логически необходимо, поскольку эти преобразования являются необходимым следствием постулата инвариантности интервала; в свою очередь, последний отражает физику электромагнетизма, а не механику инертных тел. В отношении последней соотношения (1.43) являются доплнительным инородным элементом теории, как и вся четырехмерная модификация реально трехмерной механики. Механика, которую мы именуем релятивистской — RM (сохраняя устоявшийся термин «релятивистская»), является в отличие от STR строгой, логически замкнутой теорией, включающей в себя все реальные «релятивистские» эффекты и преобразования, в том числе преобразования скоростей в различных инерциальных системах. В ней отсутствует связь пространственно-временных координат, соответствующая преобразованиям Лоренца, что вполне согласуется с самой сутью понятий пространства и времени. Напротив, STR концептуально не может выступать в качестве теории механического движения вследствие неправомерного использования в механике принципа инвариантности интервала в гипотетическом четырехмерном пространстве Минковского. В теоретическом и практическом плане любые выводы, сделанные на основе STR, оказываются справедливыми только в отношении тех соотношений механических величин, которые в действительности не зависят от преобразований Лоренца (или требования инвариантности интервала), хотя бы и выводились с их учетом. В частности, должны быть подвергнуты критическому анализу все выводы STR, сделанные на основе замены обычного трехмерного евклидового пространства на четырехмерное псевдоевклидово.

1.10. Время в движущейся системе координат

Прежде всего необходимо определиться с моделью «механических часов», которая должна быть достаточно простой и вместе с тем настолько общей, чтобы закономерности отсчета времени по ним выражали общие закономерности отсчета времени по любым другим механическим часам, т. е. выявленные закономерности имели бы фундаментальный характер. Требования, которым должны удовлетворять подобные «идеальные» часы, очевидны: a) они должны быть универсальны; b) процедура измерения времени по ним должна быть практически реализуема с помощью механического инструментария; c) результат измерения времени в заданных условиях должен быть однозначен.

Пусть система отсчета K' движется относительно K вдоль оси x со скоростью $v_x(t)$. Рассмотрим часы в виде абсолютно твердого и гладкого пенала длиной l_0, ориентированного перпендикулярно оси x (к примеру, вдоль оси y), с помещенным внутри него шариком. В отсутствие полей тяготения в K и каких-либо иных сторонних воздействий подобное простейшее устройство может рассматриваться в качестве идеальных механических часов. Действительно, если шарику сообщить скорость $v_0 = v_{0y}$, то за счет последовательных отражений от обоих торцев пенала он будет совершать незатухающие колебания с периодом $T_0 = 2l_0 / v_0$ вне зависимости от массы покоя шарика m_0, причем модуль импульса шарика

$$p_{0y} = p_0 = \frac{m_0 v_0}{\sqrt{1 - v_0^2 / c^2}} = m_0 \gamma_0 v_0 = const.$$

Если эти же часы поместить в K', сохраняя их ориентацию относительно оси x, то в силу независимости воздействий вдоль взаимоперпендикулярных осей импульс шарика в K' останется неизменным, т. е.

$$p_y = m_0 \gamma(v) v_y = m_0 \gamma_0 \gamma(v_x) v_y = p_{0y}$$

в силу (1.28), откуда немедленно получаем соотношение $v_y = v_0 / \gamma(v_x)$, или $v_y = v_0\sqrt{1 - v_x^2 / c^2}$. Следовательно, неподвижные в K' часы будут иметь больший период хода, $T(t) = T_0 / \sqrt{1 - v_x^2 / c^2}$ и, соответственно, меньшую частоту отсчета полных колебаний $\omega(t) = \omega_0\sqrt{1 - v_x^2 / c^2}$. Поскольку параметры T_0 и ω_0 произвольны и могут быть сколь угодно большими (малыми), то связь между ходом часов в K и K' дается универсальным соотношением

$$dt' = \sqrt{1 - v_x^{\,2} / c^2}\,dt, \tag{1.44}$$

где t' — «собственное» время, $t' = t_s$, в системе K'. Во избежание дальнейших недоразумений вследствие некоторой неопределенности вербальных определений заметим, что собственное время t_s тела, движущегося в K со скоростью $v_x(t)$ вдоль x, будет определяться формулой (1.44); при этом оно не будет совпадать с собственным временем системы K', движущейся относительно K со скоростью $V_x = \mathrm{const}$, отличной от v_x, причем появится в K' собственное время t_s', соответствующее v_x', определяемой через (1.39).

Несколько усложним модель механических часов, заменив прямоугольный пенал кольцевым, который одновременно может служить циферблатом, проградуированным с любой точностью, что позволяет непосредственно отсчитывать доли периода вращения шарика. В силу з. с. и. имеем соотношение $m_0\gamma_0 v_{0\perp} = m_0\gamma_0\gamma(v_x)v_\perp$, т. е. опять приходим к (1.44). Таким образом, (1.44) есть фундаментальная связь между собственными временами t и t', когда система K' движется относительно K прямолинейно, но необязательно равномерно. При этом часы ориентированы «перпендикулярно» скорости относительного движения систем ($\vec{v}_x$), что обеспечивает относительную независимость их работоспособности от наличия движения K' относительно K. Более того, при такой ориентации часов не обязательно полагать инерциальной и систему K, поскольку соотношение (1.44) остается справедливым и в случае неравномерного движения K вдоль x относительно любой инерциальной системы.

Выше было показано, что «поперечность» расположения часов обеспечивает их работоспособность, а вывод конкретного соотношения (1.44) предполагает инвариантность поперечных размеров при ненулевых v_x, что представляется очевидным выводом, не требующим детального логического анализа. Действительно, $v_y = v_0\sqrt{1 - v_x^{\,2} / c^2}$. Но $v_y = dy / dt$, где y — поперечная координата, измеряемая в K относительно K'; $v_0 = dy_0 / dt_s$, где y_0 – поперечная координата в самой K, т. е. собственная координата. Тогда имеем $dy / dt = dy_0 / dt_s\sqrt{1 - v_x^{\,2} / c^2} = dy_0 / dt$, откуда $y \equiv y_0$. При этом логически оправданной представляется постановка вопроса о существовании «продольного времени». Если сориентировать прямоугольный пенал вдоль оси x, т. е. параллельно v_x, то легко понять, что наличие произвольной зависимости $v_x(t)$ принципиально меняет условия работы подобных часов. В самом деле, если, допустим, в некоторый промежуток времени шарик, отразившись от левого торца, движется вправо вдоль x, то, изменив достаточно быстро v_x, можно добиться совмещения в K скоростей движения шарика и пенала, что означает «остановку» часов в K' и, следовательно, потерю работоспособности «продольных» часов при сохранении работоспособности аналогичных «поперечных. Таким образом, при $v_x(t)$ продольные механические часы не могут быть использованы в качестве универсальных часов. Иначе говоря, если продольные часы в течение определенного времени ускоряясь, совмещаются с какой-либо инерциальной системой K', движущейся относительно K, то отставание часов в K' не может быть определено однозначно в соответствии с (1.44) при известной $v_x(t)$ перемещения поперечных часов в K' из K. Другое соображение связано с тем обстоятельством, что длины в K' не определены с точки зрения K принципиально, т. е. в примере, допустим, с пеналом не определена величина l' в K, поскольку измерительная база l' движется относительно K. Данный «логический дефект» неустраним, поскольку любой анализ работы продольных часов задействует понятие конечной измерительной базы (отрезка прямой) в движении. К данному вопросу мы еще вернемся, но в общем случае следует признать необходимость требования поперечной ориентации механических часов при анализе механических процессов в K' путем сопоставления их с аналогичными процессами в K.

Отметим в заключение проведенного выше анализа важнейшее отличие характера проявления реальной зависимости $m(v)$ и $\Delta t(v)$, которое имеет прямое отношение к известному принципу относительности Галилея–Эйнштейна, согласно которому, в частности, в инерциальных системах координат механические зависимости физически неотличимы, поскольку не зависят от скорости V относительного движения систем отсчета. Различие лишь в том, что в рамках СМ справедливость высказанного утверждения есть следствие форминвариантности законов механики относительно преобразования Галилея координат $(\vec{r},\ t)$, а в рамках STR — Лоренца. С точки зрения логической структуры высказанных утверждений необходимо признать, что принцип физической неразличимости механических процессов, рассматриваемых в разных инерциальных системах отсчета, является исходным для всех остальных выводов. Действительно, если постулировать динамическое уравнение в форме закона Ньютона, то из принципа инвариантности его записи относительно V и отсутствия фундаментального масштаба $[v]$, т. е. максимальной скорости c распространения воздействий, следует форминвариантность законов механики относительно преобразования Галилея. При обобщении закона Ньютона на случай $m(v)$ из указанного выше принципа следует инвариантность динамики относительно преобразований Лоренца. С одним, правда, «но»:обобщение закона Ньютона проводится таким образом, чтобы его форминвариантность действительно следовала из принципа независимости физики от V. Иными словами, динамика STR логически конструируется таким образом, что принцип относительности и форминвариантность уравнений динамики составляют теперь единый нерасчлененный принцип. Это позволяет представить его в универсальной математической форме требования инвариантности интервала, т. е. длины в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве. В рамках современной логики построения STR происхождение самой псевдоевклидовости пространства-времени не обсуждается, равно как в механике Ньютона не обсуждался принцип относительности Галилея. Это выглядит по крайней мере странно, если учесть саму логическую нетривиальность принципа относительности.

Проиллюстрируем принципиальную разницу между поведением функций от v, даваемых $m(v)$ и $\Delta t(v)$, на конкретном, но общем примере. Пусть мы имеем двое идентичных механических часов, синхронизированных в инерциальной системе координат K и покоящихся в ней до момента $t = 0$. Затем одни часы остаются в K, а другие вместе с телом массой покоя m_0 начинают движение по прямой со скоростью $v(t)$. При этом движущиеся часы будут показывать собственное время t_s, которое в соответствии с (1.44) есть

$$t_s = \int_0^t \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}}dt, \tag{1.45}$$

и в силу $|v(t)| > 0$ всегда $0 < t_s < t$. Если в момент возврата t_r по неподвижным часам тело вернется в исходное положение в K и остановится, то, хотя $m(t_r) = m(v_r) = m_0$ и, следовательно, информация о всех изменениях массы в процессе движения исчезнет (образно выражаясь, будет «стерта» при остановке), однако t_{sr} окажется меньше t_r, сохранив тем самым некую интегральную память о предыдущем движении. Иными словами, процесс отсчета времени принципиально необратим и сохраняет «историческую» память о движении часов относительно неподвижных, тогда как величина массы $m(t)$ и темп отсчета времени $\frac{dt_s}{dt}(t)$ такой памятью не обладают и, следовательно, являются величинами обратимыми (разумеется, в указанном смысле). Данная пара часов является «близнецами» из знаменитого «парадокса близнецов» в STR, и мы, следовательно, должны констатировать, что никакого «парадокса близнецов» реально не существует, как не существует и «принципа относительности» в его трактовке в STR. В собственной системе отсчета, т. е. в K' с $V = V(t) = v_x$, сохранится спектр масс, какой имел место для идентичных объектов в K, равно как и относительный темп хода механических часов разных систем (но, разумеется, поперечно ориентированных в отношении $\vec{V}$), поэтому в отношении массы и отсчета времени принцип независимости от $\vec{V}$ имеет силу общего закона, причем в более широком диапазоне, чем это следует из трактовки STR. Однако изменение отсчета собственного времени, т. е. отставание движущихся часов в сравнении с неподвижными — эффект не только реальный, но и абсолютный в смысле его необратимости. Поскольку сравнение показаний поперечных часов можно производить и при наличии движения, не влияющего на процедуру измерения поперечных координат, в том числе и немеханическими способами, то отставание движущихся часов от тех, что неподвижны в K, снимает вопрос об «абсолютной относительности» и «равноправии» даже инерциальных в любой момент сравнения показаний часов систем. Разумеется, для данного вывода не требуется обращение к представлению ускоренных движений как движений в гравитационных полях. Однако, чтобы окончательно установить реальный характер и пределы применения принципа относительности в механике, необходимо обратиться к анализу динамических уравнений, что и будет сделано в следующем п. 1.11.

Рассмотрим, наконец, эффект «неодновременности» отсчета времени. Если, к примеру, система K' движется относительно опорной инерциальной системы K со скоростью $V_x = V = const$, а исследуемое тело движется вдоль x со скоростью v, то в K' ей соответствует v', причем зависимость $v(v')$ определяется соотношением (1.39). Пусть в момент $t = 0$ начала координат систем K и K', а также положение тела были совмещены в одной точке пространства. Тогда имеет физический смысл рассматривать континуум часов в неподвижной системе K, синхронизированных в ней любым способом и показывающих единое время $t_0 \geq 0$. В системе K' можно расположить континуум аналогичных часов, синхронизированных в K' и показывающих время t_V, определяемое в системе K и однозначно соответствующее t_0 через соотношение $t_V = \sqrt{1 - V^2 / c^2}\, t_0$. Еще одни независимые, но идентичные по механике часы мы расположим непосредственно на теле, движущемся со скоростью v (эти часы и следует считать телом, поскольку точечность тела в данном случае не является принципиальным условием для справедливости полученных далее выводов). Отметим, что показания движущихся часов t_V и t_v регистрируются в K в один и тот же момент времени t_0, что является принципиально реализуемым любым способом измерительным процессом (не обязательно через процедуру регистрации электромагнитного излучения).

Имеем соотношение:

$$t_v = \sqrt{\frac{1 - v^2 / c^2}{1 - V^2 / c^2}}\, t_V,$$

откуда, учитывая (1.39), получаем

$$\sqrt{1 - v^2 / c^2} = \frac{1}{\left(1 + \dfrac{v'V}{c^2}\right)} \sqrt{\left(1 - V^2 / c^2\right)\left(1 - v'^2 / c^2\right)},$$

что приводит к выведенному ранее соотношению (1.40).

Если, однако, ввести в K' время $t'_{v'} = \sqrt{1 - v'^2 / c^2}\, t_0$, которое «соответствует» времени t_v в K, то легко получить следующее соотношение:

$$\frac{t_v}{t_V} = \frac{t'_{v'}}{t_0} \frac{1}{\left(1 + \dfrac{v'V}{c^2}\right)},$$

т. е. относительное замедление часов, измеренное в K и K' для одного и того же движущегося тела, не инвариантно, поскольку явно зависит от V. Объяснение указанной неинвариантности очевидно: показание часов t_V берется в момент $t'_V = t_0$ в системе K', и в ней же $t'_{v'}$ — в другой момент, равный $t_0\sqrt{1 - v'^2 / c^2} < t_0$. Иначе говоря, если показания всех часов в K сравниваются в один и тот же момент времени, то в K' это сравнение уже неодновременно, причем показание движущихся часов снимается раньше, чем неподвижных. Данный эффект неодновременности носит принципиальный, неустранимый характер и, следовательно, должен учитываться при анализе уравнений динамики. При этом еще раз отметим, что указанная неодновременность зависит только от скоростей тела и систем отсчета, но не от пространственных координат, как это следует при использовании модели STR, привязанной к процедуре измерения длин движущихся отрезков с помощью световых сигналов, распространение которых в пространстве подчиняется иным, нежели механические, законам. Именно использование немеханической процедуры измерения длин движущихся тел и ответственно за появление в теории относительности искуственной взаимосвязи пространственных и временных координат в форме инвариантности интервала или преобразований Лоренца.

1.11. Динамические уравнения релятивистской механики

Уравнения механики (1.1–1.3) занимают наивысшую ступень в логической иерархии ее структуры в силу содержащейся в них взаимосвязи ряда «первичных» понятий, которые сами по себе имеют нетривиальный смысл при учете зависимости $m(v)$. По этой причине представляется совершенно неправомерным подчинять, как это делается, к примеру, при формировании структуры STR, динамические законы произвольным дополнительным условиям, каким является требование их форминвариантности относительно преобразований Лоренца. Исследование смысла уравнений (1.1–1.3) мы будем проводить в строгой логической последовательности умозаключений, идя от «простого» к более сложному, не вводя никаких дополнительных постулатов, имеющих априорный характер по отношению к имеющемуся логико-математическому содержанию механики, представленному выше.

1. Физический смысл взаимосвязи выражений (1.39–1.40) имеет сугубо динамический, а не кинематический, как в STR, характер. Действительно, импульс (в одномерном случае, $p = p_x$) с помощью (1.39–1.40) записывается в виде:

$$mv = \frac{m'}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}} (v' + V). \tag{1.46}$$

Интерпретация (1.46) однозначна: импульс сохраняет свойство аддитивности по отношению к последовательным воздействиям; а именно, по отношению к двум последовательным воздействиям вдоль x, в результате которых тело с массой покоя m_0 в системе K приобретает сначала скорость V, а затем v; импульс mv представим в виде произведения перемасштабированной (от K' к K) массы m' на алгебраическую сумму скоростей v' и V. Иначе говоря, галилеево правило сложения скоростей $v = v' + V$ имеет динамический характер в смысле (1.46) и несправедливо в кинематической форме (1.39). При этом, очевидно, (1.46) нельзя интерпретировать как сумму «реальных» импульсов в K и K', поскольку $V(t)$, $v'(t)$ и $v(t)$ берутся в один и тот же момент времени в K. Указанная аддитивность импульса имеет мгновенный, т. е. «структурный» характер, что выражается равенством мгновенных значений «коэффициентов инерции» при v' и V в полном соответствии с правилом Галилея.

2. При конкретном анализе общего уравнения динамики (1.1) следует учитывать логические особенности, которые возникают при его рассмотрении в разных системах отсчета. В системе K сила $\vec{F}$, рассматриваемая в качестве причины изменения импульса $\vec{p}$ (в той же системе K), задается произвольным образом и однозначно именно в K, в частности, через потенциал $U(\vec{r})$ консервативного поля сил. Столь же однозначно, согласно (1.1), определяется в K и функция $\vec{p}[\vec{r}(t)]$, предполагающая однозначно определяемую связь $\vec{r}(t)$ на траектории движения материальной точки. При переходе к другой системе отсчета K', движущейся относительно K, имеет смысл задача нахождения преобразования dp/dt в K к dp'/dt' в K' чисто формальным путем (к примеру, через соотношения (1.39–1.40)) и независимо от $\vec{F}$. Но, с другой стороны, определение силового поля в K', вообще говоря, теряет однозначность. Даже в классической механике $U(\vec{r})$ в системе K переходит в $U'(\vec{r}')$, причем $\vec{r}' = f(\vec{r}, t)$, т. е силовое поле теряет свойство стационарности. Учет зависимости механических величин от $V(t)$ вносит дополнительную сложность в том смысле, что в этом случае длина любого отрезка $\Delta\vec{r}'$ в K' не определяется через его величину $\Delta\vec{r}$ в K. По этой причине становится очевидно нетривиальной задача установления соответствия между левой и правой частями (1.1) при переходе от K к K'. В STR форма преобразования $(\vec{r}, t)$ к $(\vec{r}', t')$ определяется через дополнительный принцип (инвариантность длины в псевдоевклидовом про-

странстве или постулаты Эйнштейна). В сочетании с принципом форминвариантности законов механики во всех инерциальных системах координат порядок преобразования левой и правой частей уравнения (1.1) при переходе от K к K' ($\vec{V} = const$) устанавливается однозначно. Но указанная однозначность достигается ценой фактического постулирования общих законов механики, в т. ч. и правил преобразования механических величин. Оправданием указанному логическому релятивизму типа ad hoc является ставшее аксиомой убеждение, что никакого другого логически замкнутого способа построения механики инертных тел не существует, и потому безальтернативность концепции Эйнштейна–Минковского означает ее истинность. Однако выше уже было показано, что указанное убеждение является заблуждением, и традиционная релятивистская концепция механики в принципе ошибочна и должна быть заменена иной, логически более последовательной.

3. Вернемся к анализу модели поперечных часов, конкретно к варианту вращения точечного тела массой m_0 на нерастяжимой нити длиной R. Если центр вращения движется вдоль оси x со скоростью $V(t)$, измеряемой в K, а вращение каким-либо способом организуется в плоскости (y, z) так, что $\vec{R} \perp x$, то для силы натяжения нити $\vec{F}_\perp$ — центростремительной силы по отношению к телу — имеем выражение:

$$F_\perp = \frac{1}{R} m v^2 = \frac{1}{R} m_0 {v_0}^2 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} = F_{0\perp} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \tag{1.47}$$

Напомним, что действие силы F_x не создает само по себе дополнительных силовых воздействий в плоскости (y, z) (если силу F_x мгновенно «снять», то в плоскости (y, z) в этот момент ничего не изменится). Следовательно, нет и никаких физических причин для изменения любых поперечных размеров любых материальных объектов. Сказанное означает, что условие нерастяжимости нити не является необходимым для справедливости выражения (1.47). Действительно, «встроим» в нерастяжимую нить эластичный элемент (к примеру, небольшую пружинку), для которого справедлив закон Гука $|F| = k\Delta x$, где k — коэффициент жесткости. В системе K при $V = 0$ имеем для начальных данных m_0, v_0, R силу $|F| = F_{0\perp}$, которой соответствует значение $\Delta x_0 = F_{0\perp} / k(0)$. В силу сказанного выше при $V > 0$ $\Delta x \equiv \Delta x_0$; следовательно, $k(V) = k(0)\sqrt{1 - V^2 / c^2}$. Любое физическое объяснение происхождения сил упругости должно удовлетворять полученной зависимости $k(V)$. Заметим, что если на той же пружинке организовать малые поперечные колебания произвольной точечной массы, то в силу зависимости частоты колебаний $\omega = \sqrt{k / m}$ имеем при $k = k(0)\sqrt{1 - V^2 / c^2}$ и $m = m(0) / \sqrt{1 - V^2 / c^2}$ $\omega = \omega(0)\sqrt{1 - V^2 / c^2}$, т. е. изменение темпа любых поперечных оси x периодических движений совпадает с законом (1.44) $dt' / dt = \sqrt{1 - V^2 / c^2}$.

Суммируя результаты проведенного в данном п. 3 элементарного логико-математического анализа очень общей идеальной физической модели механического движения, следует сделать вывод о том, что в любых поперечных направлению $\vec{V}(t)$ движениях мгновенные значения $m' \sim 1 / \sqrt{1 - V^2 / c^2}$; $dt' / dt \sim F' / F \sim \sqrt{1 - V^2 / c^2}$. Следовательно, в системе отсчета K', движущейся со скоростью $V(t) = v_x$ относительно неподвижной (инерциальной) системы K, за счет эффекта одновременного перемасштабирования указанных физических величин, реально измеримых в K, их зависимость от $V(t)$ с точки зрения измерений в K' с помощью того же инструментария, что и в K, не может быть обнаружена. То есть в процессе измерений в K' мы получим $m = m(0)$; $t = t(0)$; $F = F(0)$; $k = k(0)$ и т. д. А это и означает справедливость для всех поперечных движений принципа относительности в механике, впервые в явном виде сформулированного А. Пуанкаре. Однако теперь становится ясно, что данный принцип в его важнейшем частном варианте не является априорным; более того, он представляется прямым однозначным следствием тех основ механического анализа, из которых получены вся кинематика и динамика релятивистской механики (но не STR!). В силу исключительной важности полученных выводов необходимо провести аналогичный логико-математический анализ и для случая продольных движений в рамках сугубо одномерного подхода, который, однако, имеет смысл только при наличии принципиальной многомерности пространства.

4. Обсудим важнейшую особенность поведения тела, совершающего поперечные движения в движущейся системе координат — т. наз. поперечных часов. С одной стороны, они неподвижны относительно K' (в смысле отсутствия движения вдоль x') вместе с $\vec{F}_\perp$, являющейся реакцией опоры, иначе говоря, силой внутреннего взаимодействия. Если рассматривать K' в качестве инерциальной системы ($\vec{V} = const$) наряду с K, то в силу специфики возникновения $\vec{F}_\perp$ имеется по крайней мере два логически непротиворечивых способа описания механики процессов. Первый уже был использован нами выше при выводе всех основных законов движения и состоит в том, что физическая эквивалентность инструментария в K и K', равно как и определенность при сравнении соответствующих измерений в K и K', достигается полным совмещением этих систем отсчета в «начальный» момент времени ($V_0 = 0$; $d^n V_0 / dt^n = 0$ для любых n) и последующим разгоном K' вдоль x до заданной величины V. При этом нами установлена справедливость принципа относительности (в смысле ненаблюдаемости V в отношении поперечных движений и взаимодействий) как необходимого следствия перемасштабирования всех физических вели-

чин. Другой логически правомерный подход опирается на «привязку» $F_{\perp}$ к K' и отсутствие явной зависимости $F_{\perp}(F_x)$ (принцип взаимонезависимости воздействий). А именно, мы имеем право считать в качестве K' именно K, а другую систему мысленно переместить в иное состояние, сообщив ей скорость $-\vec{V}$. Очевидно, что мысленный переход в любую иную систему в самой K ничего не изменит, т. е. в K, которую мы теперь рассматриваем в качестве K', никакой реальной зависимости от движения ее относительно «виртуальной» системы отсчета отмечено быть не может. Разумеется, при попытке физической актуализации указанной виртуальности мы немедленно приходим к первому варианту как единственно физически возможному, т. е. ни о какой логической независимости обоих вариантов описания принципа относительности речь не идет (если, конечно, саму механику рассматривать в качестве реальной, а не виртуальной, физической теории, непротиворечиво связанной с наличием возможности выполнения всех измерительных процедур для всех задействованных в ней физических параметров).

Другая сторона отмеченной выше особенности описания поперечных движений состоит в том, что в примере с часами мы имеем дело с тремя проявлениями поперечной силы $\vec{F}_{\perp}$ (далее значок «$\perp$» опускаем): a) $\vec{F}_0$ — сила в K при отсутствии движения часов, $V = 0$; b) $\vec{F}$ — сила, измеренная в K по часам (часы необходимы, поскольку сила определяется по кинематическому результату ее воздействия на тело), неподвижным относительно K, в случае $V \neq 0$; c) $\vec{F}'$ — сила, измеряемая в K' по часам, неподвижным относительно K'. Выше было показано, что $\vec{F}' = \vec{F}_0$ в силу эффекта перемасштабирования (принципа относительности в его реально проявляющемся физическом аспекте и, соответственно, понимании) и $\vec{F} = \sqrt{1 - V^2/c^2}\,\vec{F}_0$. Сказанное в математической форме выражается следующими соотношениями:

$$\frac{dp'}{dt'} = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\frac{dp}{dt};\quad \frac{dp'}{dt} = \frac{dp}{dt} = \sqrt{1 - V^2/c^2}\,\frac{dp_0}{dt}, \tag{1.48}$$

т. е. справедливо соотношение

$$\frac{dp'}{dt} = \sqrt{1 - V^2/c^2}\,\frac{dp'}{dt'} = \sqrt{1 - V^2/c^2}\,F_0. \tag{1.49}$$

Смысл данного общего соотношения в рассматриваемом аспекте заключается в том, что сравнение поперечных сил в двух системах координат имеет смысл сравнения скоростей изменения соответствующих импульсов по одним и тем же часам. Данное утверждение, казалось бы, тривиально по содержанию, но именно оно и позволяет непротиворечивым образом рассмотреть проявление эффекта перемасштабирования при анализе движений относительно оси x, т. е. вдоль относительного движения систем отсчета K и K'.

5. Движение тела вдоль оси x под действием силы F_x описывается уравнением (1.3):

$$\frac{dp_x}{dt} = F(x,t) = -\frac{\partial U(x,t)}{\partial x}. \tag{1.50}$$

По форме записи оно одномерно, однако следует учесть. что отсчет времени t ведется по часам «поперечного» типа, ориентированным в плоскости, перпендикулярной оси x. Поскольку в K континууму координат $\{x\}$ сопоставлен континуум неподвижных часов, то никаких проблем принципиального характера в отношении интерпретации (1.50) не возникает; при этом имеет место одномерное соотношение:

$$\frac{dp_x}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} = \left(1 - v^2 / c^2\right)^{-3/2} m_0 \frac{dv}{dt}. \tag{1.51}$$

Очевидно, что (1.51) теряет однозначность интерпретации при переходе к собственной системе отсчета K_s, в которой $v \equiv V(t)$; $v' \equiv 0$: во-первых, не определена величина dv / dt'; во-вторых, не определена и зависимость $F(x',t')$. Но аналогичные проблемы возникают и при переходе от K к K' при $V = const$ (см. выше, п. 2). С другой стороны, было бы странно, если бы принцип относительности и эффект перемасштабирования не распространялись на продольные движения (т. е. вдоль $\vec{V}$). Необходим, следовательно, детальный логико-математический анализ проблемы, который следует начать с уточнения смысла правой части уравнения (1.50).

Если, пренебрегая для простоты зависимостью от t, положить в K заданным вид силового (потенциального) поля $U(x)$, то в любой другой системе K', движущейся относительно K, это поле представляется нестационарным (нестатическим), причем сразу возникает проблема определения его градиента вдоль x, поскольку в рамках механики не определена связь между дифференциалами dx и dx'. Причинно-следственная связь в (1.50) понимается как существование заданной функции $\partial U(x) / \partial x$, которая и определяет величину левой части. Если теперь мы хотим составить уравнение динамики для данной $F(x)$ в системе K', то необходимо учитывать, что, согласно (1.39–1.40). можно записать при $V = const$:

$$\frac{dp}{dt} = F(x) = \left(1 + \frac{v'V}{c^2}\right)\frac{dp'}{dt'} = \sqrt{1 - V^2 / c^2}\,\frac{m}{m'}\frac{dp'}{dt'}. \tag{1.52}$$

Отсюда отчетливо видны все те затруднения, которые возникают при попытке записи в K' соответствующего уравнения динамики $dp'/dt' = F'(x',t')$.

Имеется, однако, вариант задания правой части в (1.50) таким образом. чтобы принцип относительности все же мог быть реализован. Применительно к поперечным движениям он был рассмотрен в п. 4. Разумеется, эту модель можно без ограничений перенести и на случай продольных движений, а именно, считать силу F (и соответствующее поле U) связанной с телом, а не с системой координат; иными словами, полагать тело и силовое поле, в котором тело движется, отдельной консервативной системой, собственной в указанном смысле. Тогда переход от K к K' заключается в переносе в K' силового поля, которое, во-первых, «неподвижно» относительно K'; во-вторых, идентично полю в K, т. е. считается выполненным условие $U(x)=U(x')$ при $x'=x$. При этом, повторяя рассуждения п. 4, мы приходим к выводу, что в данном варианте справедлив принцип относительности; следовательно, имеет место и эффект перемасштабирования. Относительно перемасштабирования массы вопросов не возникает. Аналогичное утверждение справедливо и в отношении отсчета времени в силу его поперечности; а в данном варианте при $V=const$ теряется различие и между поперечными и продольными часами именно в силу условия $F(x)=F'(x')$ при $x=x'$. Вопрос, следовательно, остается только применительно к понятию продольной силы в K'. Необходимо сразу отметить, что сравниваются силы в K и K', неподвижные относительно своих систем вследствие встроенности в них силовых полей $U(x)$ и $U'(x')$. Следовательно, в (1.52) следует положить $v'=0$. Далее, сила F', измеренная в K в момент t, равно как и F, есть $F_V=dp'/dt$. При этих условиях из (1.52) имеем

$$\frac{dp'}{dp}=\frac{F_V}{F}=\sqrt{1-V^2/c^2}, \tag{1.53}$$

что и доказывает применимость эффекта перемасштабирования и к продольным движениям. Тем самым мы окончательно установили справедливость принципа относительности как следствия (а не независимого постулата!) универсального эффекта перемасштабирования, который относительно всех декартовых координат может быть выражен так:

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\to m_0;\ \sqrt{1-V^2/c^2}\,dt\to dt';\ \sqrt{1-V^2/c^2}\,F(x)\to F(x'). \tag{1.54}$$

Правило (1.54) читается следующим образом: при переходе от K и K' масштабы данных физических величин, определенные в K, изменяются в соответствии с (1.54), что обеспечивает форминвариантность законов механики в любых инерциальных системах координат и, таким образом, составляет реальный смысл принципа относительности. Поскольку перемасштабирование является следствием конкретной формы зависимости массы от скорости движения, а сама эта зависимость, в свою очередь, определяется наиболее общими свойствами пространства — многомерностью и евклидовостью, то принцип относительности является вторичным по отношению к свойствам пространства законом, выводимым из них однозначным образом. Равным образом и вся релятивистская механика, включая ньютонову, логически выводится из свойств пространства. При этом из традиционной механики инертных тел необходимо исключить как нереальные все эффекты, свойства и зависимости, полученные исключительно как необходимые следствия использования концепции псевдоевклидова пространства, или требований инвариантности относительно преобразований Лоренца.

1.12. Релятивистская энергия

В одномерном приближении для консервативного поля $U=U(x)$ динамическое уравнение для материальной точки имеет вид:

$$\frac{dp}{dt}+\frac{dU}{dx}=0. \tag{1.55}$$

Замена $\frac{\partial U}{\partial x}$ на $\frac{dU}{dx}$ оправдана тем, что, во-первых, $U(x)$ полагается явной функцией только от x; во-вторых, координаты x, согласно (1.55), берутся в качестве координат траектории $x=x(t)$, т. е. в любой момент времени рассматривается только та координата, которая характеризует положение данного тела в данный момент времени. Сказанное отражает тот факт, что дифференциальная форма записи уравнений движения в виде (1.1–1.3) вполне соответствует модели близкодействия, а источники силового поля удалены на бесконечность, чем и оправдана сама запись $U=U(x)$. Реально, разумеется, потенциальное поле описывает взаимодействие тел на расстоянии, т. е. мы имеем задачу многих тел, что накладывает требования на выбор системы координат, если мы хотим по-прежнему оперировать с функцией вида $U(\vec{r})$. Если при этом желательно отвлечься от рассмотрения физики передачи взаимодействия, которое может иметь принципиально немеханический характер, то при необходимой формализации выражения для U приходится использовать модель взаимодействия, в соответствии с которой изменения силового поля вследствие изменения положения взаимодействующих тел в пространстве осуществляются мгновенно. Последнее замечание относительно формы записи уравнения (1.55) касается учета того обстоятельства, что поле $U(x)$, описывающее в реальности взаимодействие, зависит от самого тела, движение которого описывается этим уравнением, т. е. потенциальная функция U

для одного тела или системы тел — это различные в общем случае физические параметры (наглядный пример сказанному — потенциальная энергия системы тел в поле тяготения).

Если пространство в физическом отношении однородно в направлении оси x, т. е. $U(x) = const$, то в соответствии с (1.55)

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dp}{dx}v = 0, \tag{1.56}$$

откуда имеем $p = const$. Разумеется, данное рассуждение нельзя считать выводом з. с. и., поскольку полученный результат использовался логически при определении формы записи уравнений (1.1–1.3).

Используя преобразования вида (1.56), уравнение (1.55) можно представить в виде:

$$\frac{d}{dx}\left[\int vdp(v) + U(x)\right] = 0,$$

откуда следует, что в случае консервативного поля $U(x)$ имеет место инвариант движения вида:

$$\int vdp(v) + U(x) = const. \tag{1.57}$$

Интеграл $J(v) = \int vdp(v)$ определен с точностью до произвольной константы, поэтому в качестве $J(v)$ примем $J(v) = \int_0^v vdp.$ Для $p = m(v)v$ вид $J(v)$ определяется после элементарных преобразований:

$$J(v) = c^2(m - m_0),$$

и, следовательно, окончательный вид инварианта движения есть

$$\left[m(v) - m_0\right]c^2 + U(x) = const; \quad m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{1.58}$$

В классическом приближении, $v^2/c^2 \ll 1$, из (1.58) имеем выражение закона сохранения механической энергии:

$$\frac{1}{2}m_0v^2 + U(x) = E = const, \tag{1.59}$$

где первый член равенства именуется кинетической энергией, второй — потенциальной, третий – полной механической энергией. Сравнивая (1.58) и (1.59), убеждаемся в том, что в релятивистской механике кинетическая энергия тела $W = (m - m_0)c^2$, причем для какой-либо конкретизации физического смысла величин mc^2 и m_0c^2 никаких логических оснований, кроме размерностных, не имеется. При этом, очевидно, константа в (1.58) также имеет смысл полной механической энергии.

Для однозначной физической интерпретации величин mc^2 и m_0c^2 необходимо перейти к анализу механического движения системы тел. Рассмотрим для простоты систему из одинаковых по массе тел. В рамках СМ ее можно описать как целое, обладающее суммарной массой $M_0 = \sum_n m_0 = nm_0$, где n – число тел, а также скоростью центра инерции $\frac{1}{n}\sum_n v_n = V$ (в многомерном случае $\vec{V} = \frac{1}{n}\sum_n \vec{v}_n$). В системе центра инерции имеем, очевидно, $\sum_n v'_n = 0$. Если система тел в пространстве движется достаточно компактно, то в определенном приближении для нее справедливо уравнение (1.55), где $U(x)$ – суммарная потенциальная энергия, приведенная к центру инерции (центру масс). При этом существование «внутренних» движений (v'_n) частей системы никак не сказывается на ее поведении как системы в целом в качестве единого механического тела.

Рассмотрим энергию системы в соответствии с классическим вариантом (1.59). Кинетическая энергия W в этом случае есть величина

$$\frac{1}{2}m_0\sum_n (v'_n + V)^2 = \frac{1}{2}m_0\left(\sum_n v_n'^2 + 2V\sum_n v'_n + nV^2\right) = \sum_n \frac{1}{2}m_0 v_n'^2 + \frac{1}{2}M_0V^2,$$

поскольку $\sum_n v'_n = 0$. Данное выражение интерпретируется однозначно: W' – внутренняя кинетическая энергия системы как модель энергии теплового движения; W_V – кинетическая энергия движения системы как целого. Следовательно, (1.59) применительно к системе приобретает вид:

$$W' + W_V + U(x) = E_U = const, \tag{1.60}$$

где $E_U - U$ уже не имеет смысла считать механической энергией W «направленного» движения. Но поскольку «хаотическое» движение на динамику движения системы влияния не оказывает ($p' = 0$), то в (1.60) член W' исключается из «полной» кинетической энергии W, а следовательно, и из полной механической энергии E_U.

А теперь рассмотрим ту же систему в рамках RM. В собственной системе, связанной с центром масс,

$$W'_{rel} = c^2\sum_n\left[m_n(v_n^2) - m_0\right] = c^2\sum_n m_n - M_0c^2 .$$

Положим для простоты, что $|v_n| = \left(\langle v_n^2\rangle\right)^{\frac{1}{2}} = \overline{v}$. Тогда

$$W'_{rel} = (M - M_0)c^2;\; M = \frac{M_0}{\sqrt{1 - \overline{v}^2 / c^2}};\; M_0 = nm_0 . \tag{1.61}$$

Из (1.61) видно, что формально нет никакой разницы между определением энергии хаотического движения частиц через увеличение ее массы покоя M_0 на величину W / c^2 и энергией направленного движения со средней скоростью хаотического движения. Соответственно, уравнение (1.58) для системы является аналогом классического уравнения (1.60). Следовательно, выражение $E_U - U = E_{rel} = mc^2$ включает в себя «внутреннюю» энергию ΔW_{in} не обязательно механического вида, которая суммируется с «минимально» возможной структурной энергией $m_0 c^2$:

$$E_{rel} = mc^2 = \left(\frac{\Delta W_{in}}{c^2} + m_0 \right) c^2. \tag{1.62}$$

Из (1.62) следует очевидный вывод методического характера. Если при исследовании динамики движения тело массой покоя m_0 не обладает какой-либо структурой, проявляющейся при взаимодействиях и для которой, следовательно, только и имеет смысл существование понятия внутренней энергии, то в качестве механической энергии движения следует принимать величину $W = (m - m_0)c^2$. В противоположном случае (к примеру, при учете превращений частиц) в качестве теперь уже полной энергии следует рассматривать $E = mc^2$. Указанное обстоятельство будет использовано в следующей главе при анализе квантовой модели механического движения.

В заключение отметим, что как (1.58), так и все иные соотношения и выводы п. 1.12 получены без привлечения дополнительных утверждений типа требования псевдоевклидовости пространства-времени. Следовательно, формальное совпадение соответствующих выражений, содержащих mc^2 и $m_0 c^2$, никоим образом не свидетельствует о возможности концептуального объединения RM и STR. Эклектичность последней проявляется именно в частичной справедливости ее выводов в сочетании с ошибочными положениями и выводами прежде всего концептуальной степени общности.

1.13. Фундаментальные свойства пространства

Заключительный раздел главы, посвященной принципам механики инертных тел, содержит логический анализ на вербальном уровне (строго математический здесь не применим, поскольку анализируемые свойства пространства являются постулатами в любой математической схеме) фундаментальных утверждений относительно реального физического пространства, свойства которого даны нам в непосредственном опыте: евклидовость пространства в отсутствие полей тяготения и его трехмерность. В классической механике, в квантовой, а также в специальной теории относительности указанные свойства пространства полагаются очевидными постулатами, не подлежащими какому-либо специальному обсуждению. Естественно, что и развитая выше теория логически и математически опирается на те же постулаты, с одним, правда, существенным «но»: для ее логико-математического построения требуется менее строгое условие многомерности пространства, т. е. выполнение условия $n \geq 2$, где n — число измерений. Последнее, на первый взгляд, не столь существенно, поскольку плоский мир является очень удобной и вполне адекватной иллюстрацией трехмерного; при необходимости же воображение человека без труда представляет плоскую картину в качестве объемной. Более того, в важнейшем случае центральных сил тела в их поле движутся по плоским траекториям, и в силу однородности пространства всегда в этом случае можно перейти к анализу движения только в двух координатах. Однако «нечувствительность» теории к выделенности реального трехмерного пространства можно рассматривать и в качестве ее серьезного недостатка концептуального порядка. Непротиворечивой и в этом смысле идеальной механической моделью движения может быть признана только такая модель, которая включает в себя трехмерность пространства в качестве имманентного свойства; при этом возможность использования одно- и двухмерного приближений должна быть обоснована трехмерностью описания движения, а не наоборот — трехмерность описания рассматривается в качестве «естественного обобщения» одномерного.

Цель последующего изложения — попытаться чисто логическим путем выявить ту группу явлений физического мира, которая целиком ответственна за трехмерность и евклидовость пространства. При этом очевидно, что автор исходит из представления, что любые свойства пространства определяются всей совокупностью отношений физического материального мира; точнее говоря, являются удобной их логико-математической идеализацией, в которой объективное и субъективное начала нераздельны (не вдаваясь, разумеется, в философское обоснование категорий объективного и субъективного применительно к физике).

1.13.1. Евклидовость пространства

Под евклидовостью геометрии пространства мы будем понимать важнейшее для построения теоретической механики свойство метрики пространства, выражаемое теоремой Пифагора при ее обобщении на многомерное пространство, $l^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, где l — длина вектора (радиус-вектора), определяющего положение точки $x(x_1, x_2, ..., x_n)$ в n-мерном пространстве; x_i — проекция вектора $\vec{l}$ на i-ю ось координат, т. е. его i-я координата.

Данной теореме, принятой в качестве постулата, определяющего модель «прямого» пространства, соответствует утверждение, что сумма углов любого треугольника равна 180°. «Кривые», неевклидовы пространства характеризуются тем, что сумма углов треугольника либо менее 180° (геометрия Лобачевского–Бойяи), либо более 180° (геометрия Римана). Заметим при этом, что все неевклидовы геометрии включают в себя евклидову в качестве предельной: в любой малой окрестности точки, т. е. области неевклидова пространства, справедлива теорема (постулат) Пифагора как инвариантное точечное свойство любого пространства, тогда как неевклидовость — это специфическое свойство протяженного пространства. Из сказанного логически вытекает, что реальность существования прямого пространства не может быть объяснена из анализа свойств кривых пространств. А поскольку релятивистская механика, как и классическая, описывается в рамках точечной модели (учтем, что из нее исключены пространственно-временные преобразования Лоренца), причем неоднородность и неизотропность пространства описываются отдельной потенциальной функцией $U(\vec{r}, t)$, то RM и евклидовость представляют собой в совокупности логически непротиворечивую теоретическую конструкцию, причем единственно возможную в силу фундаментальности ее аксиоматического основания.

Рассмотрим теперь в качестве только лишь гипотезы, а не постулата, утверждение, что евклидовость пространства есть следствие существования в физическом мире фундаментального свойства взаимонезависимости воздействий в его идеальном толковании, которое дает возможность сконструировать соответствующую абстрактную модель взамонезависимости действия сил в механике при определенной их ориентации относительно друг друга. Поскольку вся механика инертных тел построена на использовании указанного свойства — независимости изменения импульса материальной точки в каком-либо направлении при одновременном воздействии на нее в других, ортогональных данному, направлениях, то следует рассмотреть вопрос о наличии некой фундаментальной причины (или причин) для взаимосвязи факта независимости действия сил и метрики пространства. Отметим, что независимость результатов действия сил по ортогональным направлениям можно выдвинуть и в качестве независимого постулата логического характера уже хотя бы потому, что без него построение содержательной механической теории не представляется возможным. Само же свойство независимости воздействий следует, видимо, считать неизбежным результатом эволюции Вселенной. Действительно, на ранней стадии ее существования расстояния между относительно обособленными объектами (праэлементами и т. п.) были столь малы, что ни о независимости воздействий, ни о самих направлениях в «пространстве» в нашем обычном понимании говорить, видимо, не имеет смысла, равно как и пытаться применять на этой стадии эволюции материи какие-либо механические конструкты. Со временем при расширении Вселенной соотношения сила/расстояние для ее объектов уменьшились настолько, что создались условия для применимости механики к подавляющему большинству макро- и микроявлений. Даже в пределах атома соотношение между силами электромагнитного взаимодействия, размерами носителей заряда и всего атома в целом таковы, что и упрощенные механические модели дают достаточно приемлемое описание многих процессов атомарных масштабов. Исключение, возможно, составляют внутриядерные взаимодействия в силу уменьшения на несколько порядков размеров пространственной области и соответствующего увеличения сил взаимодействия.

Здесь, однако, необходимо по поводу утверждений, высказанных в предыдущем абзаце, заметить, что вопрос о том, как именно «возникла» Вселенная — «из точки» или ей имманентна вневременная пространственная неограниченность — вопрос не логического уровня установления истинности. На логическом уровне можно только однозначно установить, что современному состоянию «видимой» нами Вселенной отвечает единственно возможная механическая теория в рамках модели 1, развитая выше, и никакая иная, в том числе и теория относительности. Разумеется, аналогичное проведенному по постановке задачи исследование квантовой модели 3 также должно дать нам возможность определиться в отношении истинности и происхождения традиционного логико-математического аппарата механики атомных и субатомных масштабов. Этот вопрос будет обсуждаться в последующих главах книги.

Ортогональность взаимодействий проявляется в независимости изменений импульса $m\vec{v} = \vec{p}$ тела по взаимоперпендикулярным направлениям. Следует уточнить данное утверждение: если вдоль любого направления в пространстве справедлив закон сохранения импульса, то он имеет место и еще в двух направлениях, ортогональных выбранному. Поскольку $\vec{v} = d\vec{r} \,/\, dt$, а координата времени никак не связана с пространственными соотношениями, то из сказанного следует необходимый логический вывод, что ортогональности воздействий адекватно соответствует декартова система координат в прямом пространстве. Действительно, геометрически ортогональность заключается в том, что перпендикуляр как отрезок прямой, проходящей через точку вне другой прямой и пересекающий ее, изображается на этой прямой единственной точкой, т. е. его изображение теряет свойство протяженности, которой соответствует количество изображаемой физической величины (в рассматриваемом примере это импульс по какому-либо направлению). Противоположным понятию ортогональности является параллельность безотносительно к поведению параллельной прямой на бесконечности: параллельность — это совместимость направлений, которая обеспечивает физическую возможность сравнения отрезков прямых по величине, без чего невозможна никакая геометрия и, как следствие, теоретическая механика. Понятия же параллельности достаточно для утверждения о реальности евклидовости пространства в его ограниченной области (такой, чтобы имели смысл представления об отрезках прямых и точках, лежащих вне их — т. е. можно построить треугольник).

Свойство независимости ортогональных воздействий содержит имманентное ему свойство относительно самого пространства: поскольку оно справедливо для любой прямой, ориентированной в пространстве совершенно произвольно, то само пространство «без силовых полей» обладает свойством однородности и изотропности, т. е. своей инвариантностью в отношении ортогональности воздействий относительно любых смещений вдоль произвольной прямой и вращений вокруг нее как оси. Это означает, что система координат, претендующая на полную адекватность свойству независимости воздействий, должна удовлетворять в полной мере требованиям инвариантности относительно параллельных трансляций и поворотов. В данном отношении прямоугольная система координат любой размерности наиболее полно соответствует данным требованиям в силу своей внутренней симметрии. Любая система координат, в том числе и косоугольная, инвариантна относительно трансляции начала координат при условии, что направления ее осей относительно друг друга жестко фиксированы, что всегда подразумевается. А вот относительно вращений декартова система произвольной размерности более единицы занимает особое положение относительно иных систем отсчета. Именно она обладает наивысшей степенью внутренней симметрии: поворот на 90° вокруг любой из координатных осей приводит к ее полному совмещению с исходным состоянием (с точностью до переобозначения бесконечных прямых $x-0-x'$; $y-0-y'$ и т. д., выбранных в качестве осей. В косоугольных системах указанная конгруэнтность достигается только поворотом на 360°, что является достаточным условием совмещения при повороте любого геометрического объекта вокруг произвольной оси.

1.13.2. Объективная выделенность трехмерного пространства

Логика вышеприведенного анализа свойств пространства основывается на первичности представлений о взаимодействии материальных (механических) объектов по отношению к геометрии пространства. Объектно-пространственная связь на данном фундаментальном уровне является настолько тесной, что для многих направлений теоретического анализа инверсия указанной первичности не влияет на корректность получаемых результатов. Однако следует помнить, что возведение геометризации физических явлений в некий универсальный принцип фактически закрывает путь к более глубокому и четкому пониманию фундаментальных взаимосвязей физических явлений, хотя именно геометризация представляется достаточно эффективной логико-математической процедурой количественного анализа.

Мерность пространства и количество измерений определяются наличием взаимонезависимых направлений и их числом. Если бы таковых не существовало, то аналогично пространственной точке невозможно было бы рассматривать пространство как нематериальный геометрический объект именно в силу его 0-мерности. Реальное пространство, доступное эмпирическим исследованиям, дает нам основание полагать, что для практически всей совокупности исследованных физических явлений следует полагать $n = 3$. Разумеется, данный объективный научный факт никак не связан с тем обстоятельством, что сама человеческая психика, весь чувственно-интеллектуальный аппарат развились как имманентные трехмерному пространству объекты. Поэтому вопрос о возможности описания физических, и прежде всего механических, явлений в n-мерном, $n > 3$, пространстве распадается на два вполне корректных с научной точки зрения вопроса: a) почему пространство трехмерно? b) допустимо ли рассматривать пространства с $n > 3$ применительно к физическим явлениям?

Ответ на последний вопрос достаточно очевиден: поскольку мерность пространства определяется наличием взаимонезависимости силовых воздействий в определенном выше смысле, то любые изменения метрики пространства должны быть оправданы через моделирование силового взаимодействия в качестве логико-математической гипотезы или необходимого обобщения результатов экспериментов. При этом одновременно должен быть рассмотрен вопрос о физическом равноправии измерений; в противном случае геометризация пространственных отношений становится проблематичной в смысле ее корректности.

Первый вопрос (a) представляет собой наиболее лаконичную формулировку той научной загадки, которую до сих пор не удавалось разрешить чисто логическим путем, соблюдая корректность вывода — т. е. не допуская в процессе доказательства аргументации, явно или неявно включающей в себя доказываемое утверждение. Наиболее часто встречающийся пример подобной некорректности — выдвижение в качестве обоснования трехмерности условия доминантности одного или нескольких конкретных физических явлений, реализуемых только в трехмерном пространстве и без которых невозможно существование физического мира в виде, данном нам на опыте. Ниже предлагается, по мнению автора, вполне корректный путь чисто логического ответа на поставленный вопрос. Как и выше, решение ищется на пути анализа силовых взаимодействий при учете достаточно продуктивной идеи, заключающейся в том, что трехмерность как физический феномен, по существу, инвариантна по отношению к разнообразным видам физического взаимодействия, включая корпускулярные и волновые, классические и квантовые. Отсюда следует обоснованное умозаключение, что указанная инвариантность есть следствие существования универсальной схемы взаимодействия объектов в пространстве, справедливой для всех явлений, к которым трехмерность применима безусловно. Если направление логического поиска выбрано верно и такая схема действительно существует, то должно обнаружиться, что эта схема силового взаимодействия совместима только с трехмерностью пространства.

Прежде чем анализировать логическую взаимосвязь схема взаимодействия–метрика пространства, представляется целесообразным провести краткий анализ важной в механике функции состояния, именуемой моментом количества движения, или моментом импульса, которую мы в дальнейшем будем обозначать как M, чтобы отличить ее от массы m. Примечательно, что при изложении основ RM нам не понадобилось обращение к величине M как функции состояния материальной точки ни отдельно, ни в совокупности с импульсом. Еще более это примечательно тем, что при одновременном представлении $\vec{p}$ и $\vec{M}$ в качестве векторов возникает логическое противоречие, разрешимое только при определенном условии, на что редко обращается внимание при изложении начал механики.

Векторное произведение $\vec{C}$ двух векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$ определяется как вектор, ортогональный плоскости, образованной векторами $\vec{A}$ и $\vec{B}$, численно равный площади параллелограмма, образованного на этих векторах. Из определения следует, что векторное произведение определено только в трехмерном пространстве, причем $\vec{C}$ является истинным вектором, подчиняясь всем правилам сложения векторов и их поворота. Обозначается векторное произведение как $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$. Момент импульса в механике определяется как векторное произведение вида $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{p}$; для него характерны все операции над векторами, а физическая величина $\vec{M}$ подчиняется покомпонентному закону сохранения момента импульса. Заметим, что физический смысл M сохраняется и в двухмерном пространстве с той лишь разницей, что M теперь вырождается в псевдоскаляр, обладающий определенным знаком в зависимости от направления вращения, причем этот знак, как и в случае трехмерного псевдовектора $\vec{M}$, также зависит от того, какое направление вращения — правое или левое — принято за положительное.

Рассмотрим теперь некую совокупность точечных тел в пространстве n измерений, однородном и изотропном в отсутствие внешних полей (которые, собственно, и ответственны за неоднородность и неизотропность). Тела в таком пространстве характеризуются импульсами $\vec{p}_k$, определяющимися каждый n проекциями p_{ki} ($i = 1, 2, 3, ..., n$) на оси координат x_i. Из условия однородности пространства следует сохранение величины $\vec{p} = \sum_k \vec{p}_k$, причем учет столкновений не изменяет $\vec{p}$ системы, поскольку процесс столкновения описывается действием внутренних сил. В трехмерном пространстве каждому телу можно сопоставить величину

$\vec{M}_k = \vec{r}_k \times \vec{p}_k$, и поскольку она аддитивна как всякий вектор, то однозначно определяется и $\vec{M} = \sum_k \vec{M}_k$. Но в отсутствие столкновений в силу з. с. и. применительно к каждому телу $\vec{p}_k = const$ и, соответственно, $\vec{M}_k = const$ (поскольку величина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую $\vec{v} = const$, неизменна для каждого тела в отдельности). Очевидно, что соударения не изменяют как $\vec{p}$, так и $\vec{M}$. Тем самым мы приходим к выводу, что для обоснования з. с. м. и. достаточно условия однородности пространства по всем направлениям, причем изотропия пространства как инвариантность свойств системы относительно ее поворотов в пространстве как целого относительно системы отсчета есть прямое следствие указанной однородности. Данный вывод сохраняется и при наложении на систему тел внешних силовых полей. К примеру, в поле центральных сил типа гравитационного или кулоновского однородность пространства имеет место вдоль любой сферической поверхности с единым центром в точке нахождения источника поля, что обеспечивает сохранение соответствующего момента импульса. Замена термина «однородность» понятием «симметрия поля» в отношении свойств пространства ничего по сути не меняет; при этом сохраняется выявленная выше иерархия функций $\vec{p}$ и $\vec{M}$, описывающих состояние системы и каждого тела в отдельности.

Если, как это принято, к примеру, в СМ, однородность и изотропность пространства полагать независимыми характеристиками пространства, то относительно $\vec{p}$ размерность евклидова пространства не ограничена, тогда как относительно $\vec{M}$ возможно единственное значение $n = 3$. Налицо логическое противоречие, поскольку в отношении формирования $\vec{p}$ и $\vec{M}$ используются одни и те же простейшие механические движения. Данное противоречие может быть снято только через признание $n = 3$ в качестве фундаментального постулата, основанного на опыте (за отсутствием пока исчерпывающего логического обоснования). Если же учесть, что параметр $\vec{M}$ вторичен по отношению к $\vec{p}$, то вопрос о причинах ограничения мерности величиной $n = 3$ остается открытым и требует логического анализа, исключающего использование свойств величины $\vec{M}$. Указанное требование к логике анализа вопроса не меняется, если в качестве аргумента для $n = 3$ использовать представление о такой характеристике точечного объекта как спин $\vec{S}$. Понятие о спине как об имманентной характеристике точечного тела наряду с массой, зарядом и т. п. формулируется без труда в качестве предельной модели $\vec{M}$ при $|\vec{r}| \to 0$. В результате получается «точечный», но только векторный, аналог массы покоя m_0 в качестве имманентной характеристики материальной точки. Очевидно, что при любых движениях и силовых механических воздействиях $\vec{S}$, как и m_0, сохраняется, поэтому, в отличие от m_0, величина $\vec{S}$ вообще не учитывается в уравнениях и СМ, и RM. По этой причине трехмерный по смыслу важнейший физический параметр, каким является спин в явлениях микромира, не может выступать логическим обоснованием наличия трехмерности физического параметра, т. е. взаимосвязь $\vec{S} \to n = 3$ не является односторонней.

1.13.3. Универсальная схема силового взаимодействия

Таким образом, посредством проведенного выше простейшего логического анализа мы убеждаемся в необходимости использовать в логике исследования данного вопроса некую общую схему силового взаимодействия, характерную и для макро-, и для микромира. В макромире определяющую роль играют электромагнетизм и гравитация, в атомно-молекулярных масштабах — только электромагнитные взаимодействия. Следует также учесть, что по форме закон Кулона и закон тяготения Ньютона имеют ряд сходных черт; принципиальная же разница в том, что механизм передачи силового взаимодействия между электрическими зарядами изучен достаточно хорошо и установлен его носитель — виртуальный фотон, тогда как соответствующий носитель гравитационного взаимодействия — гравитон — в большей мере объект гипотетический, чем реальный. По этим причинам требуемую идеальную схему силового взаимодействия следует основывать именно на механизме электромагнитного, а точнее, электрического взаимодействия. При этом из нижеследующего анализа станет ясно, что использование схемы электрического взаимодействия нисколько не влияет на самодостаточность механики инертных тел; напротив, указанный элементарный анализ должен быть, по мнению автора, положен в основу возможного логико-математического вывода уравнений Максвелла аналогично тому, как это было реализовано в отношении релятивистской механики (указанный вывод не имеет прямого отношения к механике и поэтому в данной книге не рассматривается).

Для дальнейшего, собственно, важна не детализация конкретной физической схемы взаимодействия, а ее связь со свойствами пространства, которое полагается однородным во всех направлениях и, следовательно, изотропным. Представим, что в подобном пространстве помещены два уединенных элементарных электрических заряда, к примеру, разных знаков, а все другие тела удалены на бесконечность, поэтому систему координат можно ориентировать в пространстве только по этим двум точечным зарядам как материальным объектам (естественно, считая саму систему отсчета идеальным геометрическим объектом, лишенным материальных свойств, как и само пространство). Поскольку в пространстве задана только одна прямая, соединяющая заряды, то любые пространственные манипуляции можно соотносить только с заданной прямой как реальным объектом, и ни с чем более. Если одну из осей системы координат, к примеру ось x, совместить с этой прямой, то ориентация остальных $(n-1)$ осей остается совершенно свободной.

Уточним схему взаимодействия. Поскольку пространство нематериально, то материальное физическое воздействие от одного заряда к другому может быть передано через посредство материального объекта (иные умозрительные спекуляции философского характера не рассматриваются). Естественно считать им виртуальный квант электромагнитного поля. Испущенный одним зарядом, он перемещается по прямой к другому заряду и поглощается им. Взаимодействие в виде притягивания разноименных зарядов объясняется тем, что квант обладает определенным импульсом, но характер его передачи отличается от классического макроскопического. Виртуальность такого фотона — это термин, подчеркивающий невозможность его регистрации при перемещении между зарядами (что эквивалентно утверждению, что силовые линии электростатического поля начинаются и оканчиваются на зарядах, и только на них в отличие от силовых линий магнитного поля). Подобная схема концептуально непротиворечива и, что наиболее важно для нашего анализа, не предполагает a priori наличия каких-либо конкретных свойств у окружающего заряды пространства, кроме его однородности. Однородность же пространства требует, чтобы носитель взаимодействия перемещался от заряда к заряду вдоль прямой, их соединяющей, независимо от расстояния между зарядами. Таким образом, прямая в пространстве, проходящая через две реальные в физическом смысле точки, является не только геометрическим образом, но и имеет реальное физическое содержание, чем она и отличается от любых иных геометрических объектов, которые могут быть сформированы в данном пространстве.

Рассматриваемая схема взаимодействия является наиболее простой и, очевидно, фундаментальной идеализацией «бытия» материи в пространстве. Электрический заряд, фотон, гравитон и иные виды конкретизации структуры материального мира не имеют определяющего влияния на принятие схемы взаимодействия в качестве логического фундамента механики: ее простота и общность делают ее самодостаточной логической моделью наподобие идеализации счета в качестве способов группировки независимых абстрактных объектов, именуемых единицами. Разумеется, адекватность макромеханики в форме RM данной схеме не указывает на ее единственность; справедливо только утверждение, что механика модели 1 единственна в виде развитой выше RM. Схема взаимодействия может быть положена и в основу механики моделей 2, 3 и любой иной, если таковая будет предложена и логически обоснована в будущем.

Учитывая сказанное выше, изотропность пространства как следствие его однородности в данном случае необходимо рассматривать только относительно заданной физической оси, являющейся единственной реально выделенной при посредстве материальных объектов (точек) осью вращения в пространстве. Поскольку ось в пространстве может быть задана минимум двумя физически реальными точками, то мы приходим к очевидному *фундаментальному постулату*, который должен быть положен в основание как рассматриваемой универсальной модели взаимодействия, так и вообще всего реального мира: ***в физическом мире, описываемом посредством механики, справедливо идеальное представление о двух изолированных материальных точках (объектах), между которыми может осуществляться силовое взаимодействие посредством хотя бы еще одной материальной точки в качестве переносчика взаимодействия.***

Из данного наиболее общего постулата (формулировка которого, конечно, не претендует на безальтернативность или достаточность в отношении словесной формы) необходимо следуют все ранее принятые постулаты и утверждения, в частности такие:

1. Изолированность двух материальных точек определяет существование нематериального пространства, в котором может быть помещена третья точка, не совпадающая с данными двумя, посредством которой может осуществляться физическое взаимодействие между ними.

2. Бесконечное множество возможных положений переносчика реализованного взаимодействия определяет прямую в качестве геометрического объекта. «Кривизна» траектории взаимодействия может быть обусловлена только наличием иных, кроме данных двух, взаимодействующих с ними материальных точек (тел).

3. Иные точечные тела могут находиться как на указанной прямой, так и вне ее, позволяя сформировать представление о многомерном пространстве.

4. Из утверждения 1 необходимо следует утверждение об универсальности модели независимости воздействий в многомерном пространстве.

Очевидно, последнее требует логического комментария. Из фундаментаьного постулата следует, что силовое взаимодействие между двумя изолированными точечными телами (величины сил, «приложенных» к данным телам вдоль прямой, проведенной через них) определяется только ими самими и ничем иным. Наличие третьих тел позволяет построить «многомерное пространство», но из постулата следует, что эти третьи тела можно «убрать», оставив, естественно, «пустую» геометрию соответствующего пространства. Если теперь вопреки п. 4 следствий из постулата полагать, что силовое взаимодействие между двумя изолированными точками опосредовано появлением ненулевой дополнительной силы, не лежащей на оси взаимодействия, то такое предположение будет несовместимо с п. 1, исключающим тензорность воздействий в пустом пространстве. Существование подобной тензорности будет означать, что модель изолированности материальных точек не реализуется, а пространство следует считать в определенном смысле также материальным объектом (по аналогии с тензорностью силовых полей в механике сплошных сред). Из сказанного и следует представление о существовании явления ортогональности сил в пространстве, необходимого и для реализации модели ортогональных пространственных измерений, модели прямого многомерного пространства, правила сложения векторов и т. д.

Теперь становится ясно, что глава 1 логически берет свое начало именно с единственного физического фундаментального постулата, сформулированного выше, и вся механика может быть непротиворечиво и однозначно построена в качестве независимой от всякого опыта умозрительной логико-математической конструкции, которая не может противоречить опыту, если фундаментальный постулат справедлив в качестве утверждения, являющегося основополагающим логическим обобщением опыта. Последнее не обязательно для возможности независимой, чисто спекулятивной формулировки механики, но факт ее реальной достоверности объясняется объективной справедливостью фундаментального постулата на наблюдаемом нами этапе эволюции Вселенной. Конечно, вся выше описанная механика могла быть (и должна!) развита именно в указанном порядке, когда данный п. 1.13 помещается в начале гл. 1, но автор не счел возможным принять подобный логически последовательный порядок изложения по иным, как он надеется, понятным читателю, соображениям.

1.13.4. Трехмерность пространства — необходимое следствие схемы взаимодействия

Описанная выше схема взаимодействия необходимо включает в себя свойства однородности и изотропности пространства как имманентные ей и, следовательно, самому многомерному пространству, характеристики силового взаимодействия, относительно которого они, собственно, и получают статус объективных характеристик. В случае $n = 3$ вращение осей y, z вокруг оси x, выделенной в пространстве, формирует плоскость вращения с центром 0, лежащим на оси x. Ось вращения является единственным перпендикуляром к плоскости вращения, что и обеспечивает однозначность определения вектора вращения, равно как и связанного с ним вектора $\vec{M}$.

Допустим, что $n = 4$, что не запрещается условием однородности пространства. Обозначим четвертую ось через ξ. Тогда имеется три плоскости (y,z); (y,ξ); (z,ξ), которые теперь могут вращаться вокруг оси x при вращении вокруг нее 4-мерного пространства. Однако имеется и другой вполне допустимый вариант вращения. В данном случае в точке 0 плоскости (y,z) к ней восстановлены два перпендикуляра: ось x и ось ξ, поэтому вращение плоскости (y,z) вокруг оси x может сопровождаться одновременным вращением ее вокруг оси ξ, что является не чем иным как вращением всего пространства относительно плоскости (x,ξ). Несмотря на очевидную парадоксальность подобного движения, оно вполне соответствует естественному ряду вращений многомерных пространств: плоскость вокруг точки; 3-мерное пространство вокруг оси; 4-мерное — «вокруг» плоскости и т. д. Но ведь вращения высших порядков при $n \geq 4$ противоречат принятой схеме взаимодействия, согласно которой определено физически только вращение вокруг оси всего пространства любой максимальной мерности, и ничего более. Следовательно, геометрия пространств с $n \geq 4$ противоречит универсальной схеме взаимодействия, и согласованным с ней является только пространство $n = 3$ как пространство реальное. Все другие мыслимые пространства в отношении физической схемы взаимодействия точечных объектов в механике являются математическими абстракциями, логически с механикой не связанными.

Сказанное выше дает основание считать направление причинно-следственной связи строго односторонним для спина: $n = 3 \to \vec{S}$, причем возможность существования в микромире элементарной массы покоя m_0 необходимо предполагает и возможность существования $|\vec{S}|$. При этом модель «классика + спин» уже не может быть прямо сведена к бесспиновой модели в силу специфики проявления векторности спина. Напротив, бесспиновая классика логически непротиворечива во всем диапазоне $0 < m_0 < \infty$ при описании всех механических движений, где наличие спина несущественно. В главе 4 будет дан развернутый логико-математический анализ модели «классика + спин» на примере фундаментальных для квантовой физики задач о нахождении энергетического спектра гармонического осциллятора и атома водорода.

Полученный вывод не означает, что пространства с $n \geq 4$ не могут найти применения в физике. Если возникнет необходимость моделировать процесс взаимодействия не в линейном приближении, а в каком-либо k-мерном, то для его описания потребуется использовать метрику $(k+2)$-мерного пространства, сохраняя при этом единый метрический смысл всех осей координат. Разумеется, может оказаться актуальным и вариант сосуществования пространств с различной мерностью, для чего не просматривается очевидных логических противоречий в силу подчиненности свойств пространства свойствам материальных объектов и их взаимодействий.

Глава 2

ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

«Путь, уводящий от числа, непрестанно приводит к нему. Следует охватить обе тенденции, дабы узреть идеальную структуру современной математики»

Э. Кассирер

В предыдущей главе был дан последовательный вывод математической формы законов механического движения, заключающих в себе концептуальную сущность релятивистской механики; при этом использовались наиболее общие представления о структуре материального мира, фундаментальность которых глубже тех общеизвестных принципов, на которых базируются классическая механика Ньютона и специальная теория относительности Эйнштейна. С точки зр. логико-математического анализа результаты, полученные в гл. 1, строго соответствуют модели 1 механического движения, которую мы именовали моделью точечной каузальности. Там же была кратко охарактеризована в определенном смысле альтернативная модель пространственной каузальности, последовательный логический анализ которой должен привести к выявлению математической формы законов, составляющих концептуальную основу того типа механического движения, которое именуется квантовомеханическим, а соответствующий раздел физики — квантовой механикой (QM). Основная задача настоящей главы — получить строгий логико-математический вывод нерелятивистского уравнения Шредингера без использования каких-либо произвольных и потому «дополнительных» принципов и гипотез концептуального уровня, а также ссылок на данные экспериментов. Последнее означает, о чем уже говорилось выше, что результаты формально безошибочного логического анализа не могут прийти в противоречие с результатами теоретического обобщения экспериментальных данных, если, конечно, указанный анализ базируется на столь фундаментальных и потому «простейших» принципах, что их справедливость самоочевидна.

2.1. Модель пространственной каузальности

В отличие от точечной модели пространственная (модель п. к., или модель 3, в обозначениях предыдущей главы) предполагает отказ от локализации точечного тела в бесконечно малой области пространства — т. е. в точке, поскольку такая локализация как информативный физический (измеряемый) параметр состояния тела может при определенных условиях приводить к потере информации о скорости движения тела. Действительно, если, согласно модели 1, физическая область локализации Δx относительно точки x может быть сделана сколь угодно малой при обеспечении условия $|\Delta v| < \infty$ (полагая для простоты $c = \infty$) в произвольный момент времени t, то это обеспечивает и возможность определения мгновенной скорости v в соответствии с реальной измерительной процедурой вида

$$\frac{x_2(t_2) - x_1(t_1)}{t_2 - t_1} \text{ при } \frac{t_2 - t_1}{t_1} \to 0,$$

откуда следует, что и $|\Delta v| / v \to 0$ при $\Delta t / t_1 \to 0$, что гарантирует физическую (и, следовательно, логическую) реализуемость модели 1 точечной каузальности или, что то же самое, реализуемость точечной кинематики. Последнее же справедливо, во-первых, только при условии точечности любых механических имманентных характеристик точечного тела; во-вторых, при физической реализуемости условия измерения $\Delta t / t \to 0$ для механических часов, которые по сути являются макрочасами. В пределах макромеханики допустимость модели 1 как предельной логико-математической идеализации описания движения сомнений не вызывает, поскольку единственной имманентной характеристикой тела полагается скалярная величина — его масса, пространственная инвариантность которой вполне совместима с точечностью самой модели. Однако при распространении представлений данной модели на масштабы микромира возникает проблема регистрации малых (в пределе бесконечно малых) промежутков времени. Сказанное можно образно пояснить на следующем простом умозрительном примере. Если, допустим, существует некое физическое ограничение на минимальный размер между штрихами на циферблатных часах Δl, связанное, что легко понять и без всякого опыта, с проявлением структурности материи, то относительная точность отсчета времени $\Delta l / l$, где l – линейный размер циферблата, становится неприемлемой при достаточно малых l. Следовательно, теряет измерительный смысл и такая величина, как мгновенная скорость точечного тела, а с ней и вся классическая модель точечной каузальности. Отметим при этом, что данный пример согласуется и с требованиями RM, согласно которой для реализации представления о собственном времени должна иметься возможность размещения механических часов непосредственно на движущемся объекте, которая, очевидно, отсутствует при рассмотрении движения микрообъекта (разумеется, при отказе от использования э.м. сигналов, что допускается STR). Кроме того, при актуальной структурности микромира может оказаться недостаточным ограничение возможного спектра имманентных характеристик точечного тела одной лишь массой, что также выводит нас за пределы применимости и CM, и RM.

Положим теперь, что имеются какие-либо фундаментальные физические причины для того, чтобы Δx относительно x нельзя было сделать сколь угодно малой без потери информации относительно функции состояния $p(t)$. Иначе говоря, утверждается, что при заданном поле $U(x)$ положение тела нельзя определить точнее, чем $|\Delta x(x)| > 0$. Сказанное равносильно следующему формальному утверждению: вероятность обнаружения тела в области $\Delta x(x)$ равна 1; в подобласти $|\overline{\Delta x}| < \Delta x$, принадлежащей Δx — меньше 1 (в классике вероятность нахождения точечного тела в окружающей его бесконечно малой области (подобласти) равна 1, вне области равна 0). Таким образом, функция $\Delta x(x)$ как измеряемая в принципе физическая величина наравне с $U(x)$ становится определяющей характеристикой механического движения; естественно, как и U, размерной. Разница — и очень существенная — заключается, однако, в том, что для характеристики физической сущности Δx в рамках механики, описывающей движение материальной точки в «пустом» пространстве, нет видимых оснований, особенно для случая $U(x) = 0$ — случая свободного движения. Далее, существование Δx, вообще говоря, вносит в механику, отвечающую модели 3, некий метрический масштаб $[\Delta x]$, очевидно произвольный подобно обычным линейным масштабам, характеризующим конкретные условия постановки эксперимента; при этом, конечно, не может быть речи о достижении требуемой для общего закона универсальности математической формы представления теории.

Рассмотрим логическую структуру данной модели представления механического движения более подробно. При $|x_2 - x_1| >> |\Delta x|$ моделирование движения сводится к точечной каузальности для любых конечных масштабов Δx; напротив, при $|x_2 - x_1| \le |\Delta x|$ имеет место принципиально неустранимая неопределенность как в определении положения тела, так и скорости его движения вследствие наложения зон неопределенности, что исключает возможность использования описания в форме CM. Не менее серьезным представляется и другое противоречие, связанное с тем, что $U(x)$ описывается непрерывной в пространстве функцией, что вполне соответствует модели 1. Но при этом возникает логическая трудность, связанная с интерпретацией $U(x)$ в пределах Δx, тем более, что функция $U(x)$ определяется независимо от способа описания движения тела, т. е. задается a priori как внешняя по отношению к свойствам тела пространственная характеристика. Очевидно, что для конечных $|\Delta x|$ противоречивость подобной частично пространственной модели механического движения представляется принципиально неустранимой.

Указанное противоречие отсутствует в случае, когда область определения $U(x)$ совпадает с Δx (например, при $U = kx^2$ $\Delta x = \pm\infty$). Только в этом случае мы имеем дело с «чистой» пространственной каузальностью (п. к.), область применения которой совпадает с «внешними условиями» по пространству, заданными функцией $U(x)$, по смыслу точечно каузальной. Отсюда опять-таки следует, что в модели п. к. во всей области применения отсутствуют в отношении точечного тела такие его механические параметры, как $x(t)$ и $v(t)$, описывающие физическое состояние тела в любой момент времени t. Следовательно, в качестве производных величин от $v(t)$ теряют смысл и $p(t)$, и $W(t)$, и вообще какое-либо динамическое уравнение относительно измеряемой — т. е. реальной — функции состояния типа импульса p или гамильтониана H. Из сказанного выше также следует, что новая функция состояния, входящая в неизвестное пока уравнение для ее определения, адекватное модели п. к., несет в себе свойства функции вероятности нахождения тела в заданной точке пространства.

При переходе к масштабам микромира, как мы убедились выше, возникает проблема совмещения процедур измерения пространственных координат тела и времени как кинематических характеристик, по которым в качестве переменных области определения, представляющей пространственно-временной континуум, и определяется состояние тела. Указанная проблема применительно к понятию «точность» может быть сформулирована следующим образом: при переходе к масштабам микромира в принципе невозможно осуществить *точное совмещение процедур измерения координат точечного тела и момента времени их измерения*. При этом, как уже обсуждалось в гл. 1, следует до всякого опыта предположить, что чем точнее мы будем определять пространственное положение микрообъекта как материальной точки, тем менее точно будет определяться соответствующий момент времени, что влечет за собой неопределенность в измерении скорости объекта. И наоборот, чем точнее будет определяться момент времени, тем неопределеннее окажется результат измерения положения объекта в пространстве. При этом необходимо заметить, что указанные качественные соображения никак не связаны с известными из традиционного формализма квантовой механики правилами коммутации и неравенствами Гейзенберга: во-первых, рассматриваемые здесь величины Δx, Δt, Δv и др. имеют несколько иной смысл, чем в матричной механике, и привязаны к классической процедуре измерений кинематических параметров точечного тела в рамках модели 1, где только и определяются такие величины, как p и W, используемые и в QM; во-вторых, количественные соотношения между величинами «неопределенностей» любых величин могут быть установлены только при явном использовании фундаментальной физической константы $\hbar$ – постоянной Планка.

Все сказанное выше подводит нас к выводу, что в механике может потребоваться описание состояний через не связанные между собой параметры $\vec{r}$ и t, что и является предельным выражением объективно существующей разделенности процессов измерения $\vec{r}$ и t точечного тела. То есть имеет право на существование механическая модель движения, в которой точечный материальный объект локализуется в пространстве только через посредство функциональных операторов вероятностного характера.

Обратим внимание еще на одну важную особенность, связанную с переходом от модели 1 к модели 3. В модели 1 сила в консервативном поле $U(\vec{r})$ определяется как $-\mathrm{grad}\,U[\vec{r}(t)]$, т. е. через задание поля U в бесконечно малой окрестности вокруг точки нахождения тела $\vec{r}$. Это означает, что в каждый данный момент времени t тело «не чувствует» наличие силового поля в *произвольной* окрестности вокруг $\vec{r}(t)$, в чем, собственно, и заключается суть принципа близкодействия, который в указанном смысле не связан с существованием ограничения $|v| < c$.

Напротив, с точки зрения модели 3 тело «чувствует» силовое поле окрестности, в пределе бесконечной окрестности. В такой модели состояние тела принципиально является в произвольный момент времени функцией неограниченной области $|\vec{r}| < \infty$, в которой задано поле $U(\vec{r})$. Точечная модель механики заменяется моделью пространственной, но относительно точечного тела с точечной массой m. Здесь легко усмотреть логическое противоречие, которое будет конструктивно, т. е. через построение соответствующей механической модели как теории движения, рассмотрено в гл. 4. Пока же в рамках модели 3 чисто формально можно утверждать, что поскольку $U = U(\vec{r})$, то функция состояния Ψ данной модели, аналогичная по своему функциональному предназначению импульсу $p[\vec{r}(t)]$, должна каким-либо образом отражать все детали распределения $U(\vec{r})$ по пространству, откуда следует, что эта функция должна зависеть от пространственных координат. Ее зависимость от времени также очевидна; при этом еще раз отметим, что $\vec{r}$ и t никак не связаны между собой и являются независимыми механическими координатами области определения рассматриваемой функции. Следовательно, мы можем заключить, что $\Psi = \Psi(\vec{r}, t)$.

Таким образом, суть модели 3 с математической стороны выражается допущением описания движения с помощью функции $\Psi(\vec{r}, t)$, а все, что было сказано выше, следует рассматривать в качестве физического и логического обоснования корректности подобного способа описания, иначе говоря, применением в развернутом виде закона достаточного основания формальной логики. Разумеется, можно было бы поступить иначе и прямо постулировать существование рассмотренного описания механического движения, поскольку оно в определенных отношениях независимо от описания в рамках классической модели. Тогда и основная задача данной главы состоит в том, чтобы чисто формальными средствами показать, что постулирования существования механического описания состояний через пси-функцию указанного вида достаточно для вывода уравнения, ее определяющего, т. е. нет необходимости в постулировании самого уравнения

Шредингера. Поскольку, однако, любая формализация объективной науки, в том числе и теоретической физики, рассматриваемой в данной книге с позиций «чистой» механики, приводит к сужению возможностей качественного анализа, выражающемуся в потере ряда существенных черт физической реальности, то последующее изложение выведено нами за рамки чисто формальных аспектов логико-математической проблемы.

В связи с тем, что с точки зр. физики $U(x) \in (-\infty, +\infty)$ по x (ограничение по $x = a$ можно формально ввести требованием $U(a) = \infty$, но всякая бесконечность плохо совмещается с реальной картиной мира, состоящей из принципиально конечных элементов), в модели механического движения, отвечающей пространственной каузальности в ее абсолютной идеализации, проблема сочетания моделей близкодействия и дальнодействия становится актуальной именно в связи с необходимостью строгого логического обоснования всех производимых нами в дальнейшем операций в рамках общепринятого логико-математического аппарата. В предыдущей главе указанная проблема уже кратко обсуждалась, однако для обоснования механики, отвечающей модели точечной каузальности, она не имела принципиального значения именно в силу отсутствия прямой взаимосвязи между точечностью задания функции состояния $p[x(t)]$ и «консервативностью» $U(x)$. Теперь же в рассматриваемой модели 3 функция состояния обладает имманентной «пространственностью», причем не имеет принципиального значения «физичность» (измеримость) или «служебность» этой функции, поскольку она должна быть задействована в объективном законе природы, выраженном в форме математического уравнения.

Наиболее адекватными логике классической и релятивистской механик являются силы гравитации. Причины очевидны: 1) их земные и тем более звездные источники достаточно удалены, и поэтому их изменением во времени в масштабах, характерных для экспериментальных условий, можно в большинстве случаев пренебречь и считать силы гравитации чисто консервативными; 2) дискретность полевой структуры тяготения не обнаружена, и «гравитон» обладает только лишь «гипотетическими правами» с очень призрачными надеждами прояснения своего статуса в текущем столетии; следовательно, модели актуальной непрерывности пространства пока что ничто не угрожает; 3) силы гравитации представляются настолько универсальными и инвариантными в отношении структурности материального мира, что появилась возможность представить их в форме пространственной кривизны, сохранив за евклидовостью только дифференциальный статус; 4) природа тяготения, видимо, никак не связана с чисто механическим движением в любых его моделях, находясь на пока не известном современной физике иерархическом уровне. Все вместе взятое позволяет рассматривать тяготение в отношении СМ в качестве идеальной модели консервативного поля $U(x)$.

Ситуация изменяется при переходе к моделированию электромагнитного взаимодействия, которое является основным именно в тех масштабах микромира, для которых, собственно, и возникает необходимость задействовать модель пространственной каузальности. Отметим, прежде всего, что источники э.м. поля всегда располагаются в «пределах видимости» в любом эксперименте, равно как и при его теоретическом описании. Наиболее яркий пример — модель атома, для описания движения в котором и создавалась нерелятивистская квантовая механика в ее классических волновой и матричной формах. Далее, э.м. взаимодействие имеет характерный — максимальный — масштаб скорости распространения «c», задействованный и в RM, что принципиально не совместимо с моделью дальнодействия, тем более, что величина c — это имманентная природе носителей взаимодействия физическая характеристика.

Чтобы простая и эффективная с математической стороны модель дальнодействия могла бы все же быть используема в качестве некоего приближения, необходимо выполнение очевидного неравенства:

$$\left|\frac{1}{U}\frac{\partial U}{\partial t}\right| \ll \frac{c}{r}, \qquad (2.1)$$

где r — расстояние между взаимодействующими движущимися зарядами. Сразу видно, что с данным неравенством модель пространственной каузальности не совместима, поскольку $U(\vec{r})$, вообще говоря, определяется в неограниченном пространстве. Абсолютная совместимость обеспечивается только при $c = \infty$, если имеется движение — а именно такие задачи во многих важных случаях и представляют интерес (к ним относятся, например, задачи атомно-молекулярного масштаба). Эквивалентное данному пределу условие — $U \equiv U(\vec{r})$. Таким образом, мы приходим к важнейшему утверждению: идеальная модель пространственной каузальности не включает в свою математическую формулировку мировую константу c, как и CM. И только так обеспечивается непротиворечивое соединение в одной теории принципов близкодействия и дальнодействия. Следовательно, искомое уравнение состояний квантовой механики — принципиально «нерелятивистское» по своей форме. В этом смысле проглядывается очевидная аналогия с механикой модели 1: уравнение движения для CM и RM едино в лабораторной системе отсчета по своей форме, если не раскрывать специфику представления зависимости массы тела от скорости его движения. Указанная аналогия далеко не случайна, и к обсуждению этого принципиального вопроса мы в последующем будем неоднократно возвращаться.

2.2. Феноменологический подход

Уточним содержательную сторону той логической задачи, которую нам предстоит решать. Выше мы убедились в том, что новая функция, которая (или через посредство которой) будет определять состояние точечного тела во всем пространстве с заданным распределением силового потенциала $U(\vec{r})$, имеет вероятностный характер. В модели 1 — классической — ее связь с вероятностью была тривиальной: $P=1$ при $\vec{r}=\vec{r}(t)$; $P=0$ при $\vec{r}\neq\vec{r}(t)$, где $\vec{r}(t)$ — координата точечного тела. Если область определения положения точечного тела $\Delta\vec{r}$ соответствут области определения функции $U(x)$, то вопрос о распределении объемной плотности вероятности P_V обретает содержательность, но неуниверсальность подобной задачи очевидна: она «вторична» по отношению к уравнению (1.1); следовательно, теряет смысл и составление «вероятностного» уравнения состояний, не имеющего силу фундаментального закона природы в силу его неуниверсальности. В идеальной модели 3 пространственной каузальности распределение $P_V(\vec{r}, t)$ во всей области определения $U(\vec{r})$ обретает отчетливый смысл, причем в силу отсутствия понятий $\vec{r}$ и $\vec{v}$ в качестве характеристик точечного тела это смысловое содержание является единственным, полностью характеризующим функцию состояния, которую мы в дальнейшем по традиции будем обозначать как $\Psi(\vec{r}, t)$. Сразу отметим, что ниоткуда не следует, что Ψ и есть P_V; мы можем только утверждать, что связь между ними имеется, причем связь однозначная.

Теперь постановка задачи становится более определенной. В модели 1 искомая функция состояний исчерпывающим образом описывалась двумя переменными во времени параметрами $\vec{r}(t)$ и $\vec{v}(t)$ материального точечного объекта, обладающего единственной имманентной скалярной характеристикой — массой m (в RM под m следует понимать массу покоя m_0). В модели 3 единственным переменным во времени «параметром» состояния точечного объекта является некая функция $\Psi(\vec{r}, t)$, характеризующая эволюцию во времени пространственного распределения вероятности (в смысле плотности вероятности) нахождения тела в любой точке пространства. В рамках модели 1 вид уравнения для нахождения $P_V(t)$ определяется очень просто, исходя из смысла самой функции P_V как измеряемой, реальной физической величины. Нахождение уравнения для Ψ — логически значительно более сложная задача. Однако, поскольку модели 1 и 3 в определенном смысле полярны как идеальные модели механического движения, то логическая самодостаточность CM и RM оправдана и в случае искомой QM как феноменологической теории, в которой на долю эксперимента остается определение численных значений размерных универсальных мировых констант, что, разумеется, нисколько не влияет на внутреннюю логику построения теории. Вообще сама возможность существования универсального феноменологического уравнения относительно $\Psi(\vec{r}, t)$ — это также вопрос логико-математического анализа. Если исходные постулаты признаются очевидными и «верными», а логика анализа не содержит формальных ошибок, то найденное подобным логическим методом уравнение имеет силу универсального закона природы, и никакой конкретный эксперимент не может его опровергнуть.

Представляется вполне законным вопрос, а почему вообще мы полагаем, что должно или, по крайней мере, может существовать универсальное уравнение относительно $\Psi(\vec{r}, t)$, сопоставимое по общности и фундаментальности с динамическим уравнением в модели точечной каузальности? Одного соображения типа того, что если его можно вывести строго логически из очень общих постулатов и предположений, то оно автоматически обретает силу фундаментального закона, видимо, недостаточно, хотя оно и является необходимым логическим элементом понятия фундаментальность. Чтобы опять-таки удовлетворить наши рассуждения пятому закону формальной логики — закону Лейбница достаточного основания, мы должны обратить внимание на смысловую противоречивость точечной модели на малых расстояниях между объектами взаимодействия. В пределе $\Delta\vec{r} \to 0$ при прочих равных условиях градиенты конфигурационного потенциального поля возрастают настолько, что под вопросом оказывается применимость образа отрезка прямой в качестве основы метрических свойств пространства. Также «теряют» ясный в макромеханике смысл и представления о плоскости и перпендикуляре к ней и, как следствие, вывод об актуальной трехмерности пространства. Но поскольку точечная каузальность представляется именно в пространственных отношениях, то под вопрос ставится вообще справедливость модели 1 при переходе от $\Delta\vec{r} \to \infty$ к $\Delta\vec{r} \to 0$. Здесь, однако, следует использовать такое «околонаучное» соображение, что причинно-следственная связь во Вселенной всеобща в отношении материальных процессов и именно она ответственна за абсолютную закономерность всех без исключения явлений материального мира, из чего следует предположение о том, что пределы применимости полярных моделей 1 и 3 не перекрываются: а именно, при $\Delta\vec{r} \to \infty$ абсолютно адекватна природе механическая точечная модель 1, а при $\Delta\vec{r} \to 0$ — механическая пространственная модель 3. На это указывает и еще одно соображение, касающееся мерности пространства. Действительно, в рамках модели 1 предполагается, что «отрезок прямой», соединяющий два взаимодействующих объекта, реализуется в качестве реальной траектории движения метериального объекта, в том числе того, через посредство которого взаимодействие и реализуется. В этом, собственно, и состоит смысл принятой в гл. 1 универсальной схемы взаимодействия — универсальной, в частности, и потому, что переносчиком такого взаимодействия может быть чисто механический точечный объект. Тем самым принятие данной схемы позволяет вообще абстрагироваться от вопроса физической природы взаимодействия и его носителях. Для макромеханических масштабов подобная абстракция безусловно справедлива. Но ведь имеется и иное пространственное представление, дающее понятие о прямой и ее отрезке — это фронт пространственной волны, перпендикуляр к которому (единственный) и есть «направление вдоль прямой». Кардинальное отличие данного представления от предыдущего заключается в том, что фронт волны не есть совокупность реальных местоположений в пространстве точечного объекта, а всего лишь геометрический образ представления движения (с использованием элементов вероятностного описания) точечного объекта в пределе малых расстояний, для которого вывод о трехмерности пространства также справедлив абсолютно (в противном случае теряет смысл представление о единственности перпендикуляра к дифференциальной площади на фронте волны и, как следствие, определенности описания волны в целом и, следовательно, связанного с ней описания взаимодействия). Отметим также, что в рамках модели 3 фактически снимается и вопрос о справедливости представлений о дальнодействии в соответствии с используемым в RM положением о конечности скорости распространения воздействий. Таким образом, универсальное уравнение для пси-функции должно существовать в качестве необходимого инструмента описания реально имеющего место механического движения в пространственно малых объемах, где классическое описание в той форме, которая представлена в гл. 1, нельзя считать абсолютно адекватным физике явлений микромира.

Нельзя не обратить здесь внимание и на следующий объективно существующий логический аспект проблемы, который впервые актуализировал Н. Бор. А именно, чисто механические модели 1 и 3 должны непротиворечиво стыковаться между собой в тех ситуациях, когда в рамках одной реальной конфигурации материальных объектов имеет место относительное совмещение условий применимости обеих моделей, в частности, при рассмотрении атома водорода. А это возможно только при единстве лежащих в их основе моделей пространства — т. е. представлений о его евклидовости и трехмерности. Если же имеются основания полагать, что указанное единство может нарушаться, к примеру, при переходе к масштабам порядка 10^{-13} см и менее, то автоматически возникает вопрос и о справедливости самой модели 3 в той форме, в которой она представлена ниже. Во всяком случае, пространственная модель 3 в пределе малых расстояний представляется логически непротиворечивой теоретической конструкцией, и тогда уравнение для Ψ как бы замыкает теорию механического движения точечного инертного тела в произвольных пространственных масштабах, по крайней мере, в ее нерелятивистском приближении.

2.3. Предварительные замечания относительно искомого уравнения для Ψ-функции

При составлении уравнения относительно функции состояния $\Psi(\vec{r}, t)$ следует учесть несколько принципиальных положений общего характера.

1. В механике инертных тел в рамках модели 1 единственным имманентным ему точечным параметром точечного материального тела является масса m, или масса покоя m_0 при учете релятивистских эффектов. Измеряемых физических величин в трехмерном пространстве всего семь: по три компоненты импульса $\vec{p}$ и момента количества движения $\vec{M}$ и кинетическая энергия W. Для всех указанных величин имеются законы сохранения, связанные с однородностью, изотропностью и евклидовостью пространства и однородностью времени, причем W рассматривается в совокупности с U. Иных непосредственно связанных с величиной m физических величин в CM и RM нет. По этой причине переход от точечной к пространственной механической модели не дает нам никаких оснований для введения новых физических величин, независимых от уже известных. В одномерном приближении из 7 величин остаются всего 2, однако следует учитывать, что вследствие реальной 3-мерности пространства логика одномерного анализа справедлива только в том случае, если ее использование при рассмотрении конкретной логико-математической проблемы не приводит к потере каких-либо серьезных качественных характеристик по сравнению с трехмерным анализом.

2. С помощью уравнения относительно «нереальной», неизмеряемой функции Ψ мы хотим описывать реальные явления, которые могут быть зарегистрированы на опыте. Но ведь соответствующие физические установки используют макроинструментарий (соответствующий масштабам человеческой деятельности), вполне совместимый именно с набором измеряемых в точечной, т. е. классической, модели физических параметров, поименованных выше, которые сами как раз и составляют содержательный базис или язык эксперимента. Поэтому несмотря на отсутствие в пространственной модели понятия скорости объекта как точечной характеристики, измеряемой и потому реальной, все 7 макрофизических параметров остаются и в этой модели теми величинами, в терминах которых только и возможно описание состояния квантовомеханических объектов в пространственно-временном континууме координат. Только при подобном построении QM можно избежать языковой несовместимости самих теоретических описаний, соответствующих моделям 1 и 3, а также теории и эксперимента. Последнее утверждение означает, что в таком варианте какая-то совместимость может быть осуществлена, однако его принятие еще не означает, что иные подходы хотя бы на логико-математическом уровне полностью исключаются (здесь не имеется в виду теорема о полноте квантовомеханического описания).

В силу принципиальной важности утверждений, высказанных в п. 2, к ним можно добавить следующее. Описание квантовых моделей в классических терминах не следует считать необходимым следствием того, что физический инструментарий задействован человеком и потому по необходимости отвечает его макросущности как макрообъекта. Иначе говоря, традиционный путь формирования QM — вовсе не требование опыта как единственной причины именно такой логики формирования теории микромира. Если формально игнорировать любые артефакты во Вселенной (т. е. само существование человечества) и встать на позицию стороннего разумного наблюдателя (что как раз и допускается религией), то этот сторонний наблюдатель необходимо пришел бы к единственно возможному логичекому выводу, что формирование во Вселенной разумных объектов в любом виде возможно только на макроуровне, обладающем наибольшим структурным разнообразием и устойчивостью макроассоциаций микрообъектов. Отсюда также чисто логически необходимо следует вывод, что картина микромира может быть адекватно описана только на макроуровне, естественно, в макротерминах соответствующих наук, создаваемых этими гипотетическими разумными объектами. Таким образом, даже на стадии постановки задачи построения QM как содержательной теории никаких ссылок на опыт, кроме самых общих, использованных при формировании механики модели 1, не требуется. Открытым является только вопрос конкретизации логико-математических форм представления теории микромира; вопрос, который, как будет показано в главе 4 настоящей книги, далеко не исчерпывается традиционными волновой формой Шредингера или матричной Гейзенберга, полагая при этом модель Бора–Зоммерфельда претендующим на наглядность представлением, содержащим искуственно и потому противоречиво соединенные классические и квантовые элементы описания.

3. Уравнение для Ψ должно быть логически (и физически) совместимо с СМ в тех предельных случаях, где это совмещение очевидно в силу самого существования подобных предельных механических состояний вне зависимости от избранной модели механического описания. Конкретно речь идет прежде всего об описании состояния свободной материальной точки.

Подчеркнем еще раз, что изложенные выше положения (их можно именовать и общими требованиями) необходимы для обеспечения непротиворечивости теории в широком смысле, выходящем за рамки законов формальной логики.

Данные положения существенно ограничивают неопределенность искомой формы универсального уравнения относительно $\Psi(\vec{r}, t)$. Поскольку в механике инертных тел имеется всего три независимых размерных величины: длина x, время t и масса m, то все входящие в искомое уравнение $H(\Psi)=0$ (здесь H имеет смысл оператора, устанавливающего форму дифференциального уравнения относительно Ψ) переменные и постоянные величины, включая представленные в нем неявно, имеют размерности, определяемые через базовые размерности $[x]=$ м; $[t]=$ сек; $[m]=$ кг (выбор системы базовых единиц измерений может быть, разумеется, и иным): $[p] = \text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{сек}^{-1}$; $[W] = \text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{сек}^{-2} = [U] = [E]$; $[M] = \text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{сек}^{-1}$. Это, естественно, справедливо и в отношении т. н. «мировых констант», которые могут входить в структуру $H(\Psi)$, не затрагивая его универсальности в феноменологическом смысле. В структуре RM такой константой является c. Однако в п. 2.1. из соображений логической непротиворечивости мы установили, что в уравнение $H(\Psi)$ величина c не может входить явным образом в качестве формообразующего структурного коэффициента. С другой стороны, без размерных констант, содержащих, в частности, размерность массы, построение искомого уравнения невозможно. Сразу отметим, что подобные константы феноменологического характера, конкретизирующие тип взаимодействия, как, например, постоянная тяготения или элементарный электрический заряд, могут входить в структуру $H(\Psi)$ только через $U(\vec{r})$ как заданное a priori физическое условие, конкретизация которого не влияет на саму форму универсального уравнения. Иначе говоря, константы взаимодействия не могут входить в $H(\Psi)$ в качестве постоянных коэффициентов отдельно от U.

Относительно требуемых для построения теории гипотетических феноменологических констант в $H(\Psi)$ можно высказать ряд общих утверждений, имеющих статус логически (и физически) необходимых. Во-первых, мы можем принять ни к чему не обязывающее нас условие (в том смысле, что оно может оказаться и неверным, что должно проявиться в форме возникновения в теории внутренних логических противоречий), что такая константа — единственная, и это вполне соответствует эмоционально-интуитивным соображениям типа «экономности природы», гармонии и т. п. Следуя традиции, обозначим ее «$\hbar_*$» (разумеется, никак пока не отождествляя ее с постоянной Планка, что и подчеркивается добавлением индекса $(_*)$ к символу $\hbar$). Далее, размерность $[\hbar_*]$ должна содержать $[m]$. Кроме того, универсальность, фундаментальность $\hbar_*$ должна быть как-то связана со свойствами симметрии пространства и времени, которые, как мы установили в гл. 1, есть неизбежные (имманентные) следствия самой логической процедуры введения в физику понятий пространства и времени, принципиально независимых друг от друга. Иначе говоря, фундаментальность $\hbar_*$ должна быть прямо связана с фундаментальностью свойств трехмерного пространства и времени, одним из следствий которых является наличие законов сохранения только у трех механических величин: $\vec{p}$, E и $\vec{M}$, содержащих размерность $[m]$. Нетрудно понять, что $\hbar_*$ должна быть прямо соотнесена с одной из трех указанных величин; более того, должна являться нижним физическим пределом одной из них в силу отсутствия верхних пределов. Но поскольку $[\hbar_*]$ не может быть равна ни $[p]$, ни $[E]$ (иначе в силу образования физического предела для m путем деления $\hbar_*$ соответственно на c и c^2 мы входим в противоречие с феноменологической сущностью m как произвольного параметра, заданного a priori совместно с U), то остается единственно возможный вариант $[\hbar_*]=[M]$.

Таким образом, до всякого опыта возникает логическая необходимость в рамках модели п. к. ввести в рассмотрение фундаментальное ограничение снизу величины механического момента количества движения, определяемого в классике как вектор $\vec{r}\times\vec{p}$. Просматривается определенная аналогия QM, которую еще предстоит сформулировать, с RM. Величина $\vec{c}$ — это вектор, как и всякая иная скорость в механике; но более важно именно то, что $|\vec{c}|=c=const$ — верхний предел для $|\vec{v}|$. И не случайно универсальной константе c отвечает столь важный и фундаментальный материальный объект, как э.м. волна и ее структурная составляющая — квант излучения, или фотон, как частица э.м. поля с нулевой массой покоя. Так же, очевидно, следует трактовать и механическую сущность $\hbar_*$ — в качестве абсолютной величины элементарного момента $\vec{M}_{\min}$, для которого в мире элементарных частиц существует реальная измеряемая физическая величина, именуемая спином $\vec{S}$. В духе той содержательной по смыслу, но феноменологической по форме логики решения задачи вывода уравнения $H(\Psi)$ ссылка на опыт, касающийся фундаментальных свойств элементарных частиц и их взаимных превращений, вполне законна, поскольку упомянутый «элементарный» уровень строения материи содержит данные и понятия более «фундаментальные», чем те, которые использует механика, равно CM и RM, в качестве феноменологического моделирования материальных явлений. Собственно, опытное происхождение имеет и такое основополагающее понятие в структуре механики, как масса тела и тем более масса «элементарной частицы». Без введения понятий «масса» и «спин» построение умозрительной феноменологической теории, какой следует считать, в частности, механику, невозможно, однако логическая замкнутость механики как гипотетической конструкции внеопытного характера является необходимым условием ее истинности, но еще не достаточным. Впрочем, к вопросу логического обоснования необходимости для природы «иметь» физическую величину $\vec{S}$ мы еще неоднократно будем возвращаться в данной и последующих главах книги.

Электрон, протон и нейтрон обладают спинами одинаковой величины, минимально возможной среди «ненулевых» моментов, при этом суммирование спинов осуществляется сложением их модулей s, но с учетом знака. Одно это свойство позволяет рассматривать именно спин электрона в качестве своеобразной количественной единицы в QM. Очевидно, что сказанному не противоречит и факт существования элементарных частиц с нулевым спином, поскольку подобласти $|M|=(0,\pm s)$ ничем не заполнены. По смыслу спин — это еще одна, помимо массы, имманентная механическая характеристика точечного материального объекта. Существование спина прямо не накладывает ограничений на величины p и W (или E) объекта; в то же время, очевидно, спин не меняется при механических воздействиях, способных влиять на величину $\vec{M}$. Поэтому спин в классической механике никак себя не проявляет и ею не описывается (к примеру, спин нельзя представлять через посредство модели механического волчка). В этой связи интересно то, что уже из СМ следует, что в механике, включающей в свою логическую структуру понятие спина, особое значение приобретает такой кинематический параметр, как круговая частота вращения ω. Действительно, рассмотрим движение точки массой m вокруг центра вращения по круговой орбите радиуса r с линейной скоростью v. При условии $mvr = \hbar$ (полагая справедливым очевидное по физическому смыслу соотношение $\Delta M = 2s = \hbar$, подробнее обсуждаемое ниже) имеем при $m = const$ $v \sim r^{-1}$, т. е. кинетическая энергия $W \sim r^{-2}$ и, следовательно, $W \to \infty$ при $r \to 0$, что является отражением факта невозможности описания спина чисто классическими механическими средствами. Но при этом имеется линейное соответствие между W и $\omega = v / r$ в виде соотношения $W = s\omega$, которому QM должна придать вполне определенное смысловое наполнение.

Введение понятия «спин» точечного тела никак не сказывается на структуре СМ и RM; не противоречит оно и QM как теории, основывающейся на чисто пространственной модели (п. к.) и использующей, в частности, понятие $\vec{M}$, для которого имеет место закон сохранения. Однако проявление «спиновости» материи в QM далеко не очевидно и требует соответствующего логического обоснования уже на стадии, предшествующей обсуждению самой формы $H(\Psi)$, из соображений обеспечения корректности постановки задачи отыскания $H(\Psi)$. Принимая в качестве физической основы для внесения в структуру $H(\Psi)$ необходимой размерной константы $\hbar_*$ существование ограничения снизу на величину $|\vec{M}|$ в виде $|\vec{S}| = s$ электрона (понимая под данным обозначением модуль проекции спина на рассматриваемую пространственную ось), мы тем самым утверждаем, что ненулевая величина $|\vec{M}|$ в модели 3 может изменяться не менее чем на s. Иными словами, идя «сверху вниз» по величинам $|\vec{M}|$, мы обнаружим дискретность изменения M, причем минимальной ненулевой величиной является s.

Рассмотрим простейший умозрительный пример. Пусть в трехмерном пространстве ставится эксперимент по определению положения некоторой точки *O*. Для этого из произвольной точки *O*$'$, находящейся от *O* на расстоянии x, в направлении *O* посылается точечное тело массой m со скоростью $|\vec{v}|$. Поскольку пространственное положение прямой OO' не известно, то направление $\vec{v}$ будет составлять с OO' некоторый угол α. При этом тело m будет иметь относительно точки *O* момент $|\vec{M}| = px\sin\alpha$. Учет дискретности M приводит к тому, что имеет место неравенство $px\sin\alpha \geq s$. Минимальное расстояние $x_{\min}$, на которое можно приблизиться к *O*, определяется из соотношения $px_{\min} = s$ при $\alpha = \pi / 2$. В данном примере, следовательно, имеется фундаментальное ограничение на линейную точность определения пространственного положения, $x_{\min} = \Delta x_{\min}$. Поскольку p и x входят в неравенство равноправно, то p следует трактовать в качестве неопределенности Δp. Учтем, наконец, что для электрона $s = \hbar / 2$, где $\hbar$ — постоянная Планка. В результате мы приходим к точной формулировке известного неравенства Гейзенберга:

$$\Delta p \Delta x \geq s = \frac{1}{2}\hbar. \tag{2.2}$$

В механике p и x являются сопряженными величинами в отношении соответствующего закона сохранения для M. Поскольку другой парой сопряженных величин являются W и t, то аналогично предыдущему имеет место неравенство:

$$\Delta W \Delta t \geq s = \frac{1}{2}\hbar. \tag{2.3}$$

Обратим внимание на важнейшую особенность полученных неравенств, общность которых определяется очевидной общностью рассмотренного примера. Спин является трехмерным физическим параметром, как и всякий момент $\vec{M}$. Однако в полученных одномерных неравенствах фигурирует только модуль величины спина электрона, который теперь и выполняет роль мировой константы, входя в уравнение $H(\Psi)$, в том числе и записанное в одномерном приближении, в котором не определено понятие момента. Невозможность одновременного точного определения сопряженных параметров вполне соответствует условиям применимости пространственной модели, в которой степень точности определяется через вероятностную функцию Ψ.

Отметим, наконец, еще одно важное свойство теории, основывающейся на представлении о существовании минимального ненулевого момента — спина s как имманентной характеристики точечного механического объекта. На любое выделенное в трехмерном пространстве направление спин $\vec{S}$ дает только две (минимальные по величине) проекции: $+s$ и $-s$; иное логически противоречило бы как условию его минимальности в механике в качестве M, так и имманентности наряду с массой покоя. Именно в силу указанного очевидного свойства спина модуль его величины может быть выбран в качестве основы для установления единой мировой константы для описания $H(\Psi)$ в одно-, двух- и трехмерных пространственных конфигурациях.

2.4. Одномерное уравнение состояний модели 3

Относительно математических свойств Ψ-функции, уравнение для которой мы хотим записать в одномерном приближении, можно высказать ряд утверждений априорного характера; при этом те из них, очевидность которых не столь явно выражена, ниже будут сопровождены необходимым комментарием.

1. Ψ-функция принципиально безразмерна, т. е. не может быть выражена через какую-либо размерную — и, следовательно, измеряемую — механическую величину, приводимую к безразмерному виду через некий масштаб, определяемый мировыми константами. Соответственно, отсутствует и числовой масштаб для Ψ, поскольку мировые константы в механике взаимонезависимы в силу принципиально феноменологического характера механики как теоретической концепции.

2. Ψ-функция имеет исключительно служебный характер как некая функция, через посредство которой можно определять все характеристики состояния рассматриваемого механического объекта. В частности, Ψ может быть мнимой функцией.

3. Уравнение $H(\Psi)$ инвариантно относительно умножения Ψ на любую константу. Данное утверждение фактически является следствием предыдущих утверждений, т. е. содержательный смысл имеет именно форма зависимости $\Psi(x, t)$, но не ее числовой масштаб. Это свойство принципиально отличает Ψ как функцию области от любой точечной характеристики состояния механического объекта.

4. Уравнение $H(\Psi)$ должно быть форминвариантно в смысле RM, т. е. относительно перехода от лабораторной системы отсчета K к собственной K_s (см. гл. 1), поскольку релятивистская форминвариантность имманентна любому механическому описанию движения и определяется наиболее общими свойствами пространства и времени.

Обоснование п. 1 было дано в ходе предварительного анализа проблемы, рассматриваемой в настоящей главе, однако в силу его важности для реализации всей последующей логики вывода $H(\Psi)$ проведем дополнительное пояснение его содержания. Прежде всего требуется, видимо, комментарий к употребленному автором термину «принципиально безразмерная величина». Измеряемые величины всегда могут быть приведены к безразмерному виду путем отнесения их к произвольно выбранному масштабу. Но тогда в уравнении либо в начальном или граничных условиях будет фигурировать этот масштаб в качестве произвольного размерного параметра, что лишает уравнение необходимой универсальности закона природы. Если же масштабом является мировая константа, имеющая отношение к проблеме, то она должна входить и в само уравнение и, следовательно, влиять на его форму и содержание — а это несовместимо с понятием принципиально безразмерной величины. Более того, у Ψ-функции нет и определенного числового масштаба, отличного от 1 как универсального масштаба в математике. По этой причине любая «нормировка» Ψ-функции, вводимая из дополнительных соображений, не изменяет ее свойства принципиальной безразмерности. Далее, следует учесть, что $\Psi(x, t)$ — это не распределение реально измеряемой физической величины наподобие температуры, поскольку она соответствует точечному механическому объекту, а, значит, Ψ — функция в пустом пространстве, в котором тело как материальный объект занимает одну лишь точку нулевого объема. Следовательно, Ψ — не физическая величина и потому она принципиально безразмерна. Переход от точечной модели механики к пространственной — это переход от размерной функции состояния $\vec{p}$ к безразмерной Ψ-функции. А это означает, что точечное тело в пространственной модели описания движения взаимодействует с пространством как целым. И если имеет смысл волновое представление Ψ-функции, то образно говоря, Ψ-функция интерферирует сама с собой. Формально, поскольку Ψ-функция — единственный представитель тела, можно выразиться и так, что интерферирует сам с собой точечный материальный объект.

В отношении п. 2 следует заметить, что возможную мнимость Ψ-функции нельзя полагать в качестве дополнительного условия, налагаемого на нее из чисто физических соображений относительно реальности тех или иных измерительных процедур. Использование символа $i = \sqrt{-1}$ может быть оправдано только в качестве необходимого математического элемента описания уравнения $H(\Psi)$ и его решений в процессе строгого логического вывода самого уравнения. Иначе говоря, если бы в математике до вывода уравнения Шредингера не использовались бы ни символ $\sqrt{-1}$, ни операции с ним, то их пришлось бы ввести в качестве элементов необходимого для описания модели 3 формализма.

Условиям, содержащимся в пп. 1–3, удовлетворяет линейное по Ψ уравнение общего вида:

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum_k a_k \frac{\partial^k \Psi}{\partial x^k} + \sum_n b_n \frac{\partial^n \Psi}{\partial x^n} + \sum_q g_q \frac{\partial^q U}{\partial x^q}\Psi = 0 . \tag{2.4}$$

В силу отсутствия в данном уравнении членов, содержащих частные производные U по времени, оно формально описывает только состояния частицы в консервативном поле $U(x)$, что позволяет учесть при анализе логико-математической структуры уравнения закон сохранения механической энергии в тех вариантах, когда его конструктивное понимание в рамках модели 3 очевидно и может быть использовано для уточнения описания движения через посредство функции Ψ. Имеется, однако, единственная, математически «пограничная» форма уравнения (2.4), инвариантная в отношении перехода от $U(x)$ к $U(x, t)$, когда в нем отсутствуют все члены в последней сумме с отличными от нуля q. Если последнее будет доказано — а именно этот вариант и соответствует уравнению Шредингера как постулату опытного происхождения, то у нас появится формальное основание для обсуждения справедливости обощения уравнения для Ψ на случай зависимости $U = U(x, t)$.

То обстоятельство, что $\Psi(x, t)$ есть единственная функция, полностью описывающая поведение системы точечное тело + силовое поле $U(x)$, создаваемое сторонними по отношению к данному телами (это поле фактически определяет и условия на границах пространства), требует наличия в (2.4) только одной первой производной по времени, поскольку задание одного начального условия $\Psi(x, 0)$ полностью определяет решение уравнения (2.4).

Указанное требование принципиально отличает описываемый процесс волнового характера (если в общем случае под волновым понимать процесс изменения во времени пространственного распределения некой величины) от сходных волновых процессов в механике упругих тел и электромагнетизме. Действительно, в механике смещение элемента среды от положения равновесия определяется через вторую производную по времени. Поэтому уравнения волн в упругих средах — уравнения второго порядка по времени. В электромагнетизме качественно равноправные физические величины $\vec{E}$ и $\vec{H}$ описываются через первые производные по времени, поэтому изначально двухпараметрическое описание состояния э.м. поля приводит к описанию распространения волны по $\vec{E}$ и по $\vec{H}$ через вторые производные, хотя это с уравнением Ньютона никак не связано. Единственность $\Psi(x, t)$ — принципиально новое логическое утверждение в механике, адекватное только модели пространственной каузальности в ее предельном варианте. Поэтому любые аналогии между волнами Ψ и волнами в материальных средах не могут идти далее формальных математических соответствий.

Условие п. 4 применительно к (2.4) означает справедливость преобразований (1.54) в соответствии с результатами исследования принципа относительности, полученными в п. 1.11. Тогда инвариантность уравнения (2.4) относительно преобразований (1.54) означает, что должно выполняться условие:

$$b_n = \frac{B_n}{m}, \tag{2.5}$$

где B_n — чисто кинематический коэффициент, не содержащий массы m.

Конечно, перенос любых выводов и соотношений, полученных в рамках точечной модели, на соотношения модели пространственной должен рассматриваться в качестве дополнительного условия, логическую обоснованность которого следует оценивать в каждом конкретном случае. В данном случае не видно никаких причин для того, чтобы на модель 3 не распространялись правила перехода от системы отсчета K к K_s, поскольку сам этот переход не затрагивает внутренних физических взаимосвязей в механической системе тело + $U(\vec{r})$. В отличие от традиционного подхода к проблеме взаимосвязи принципов квантовой механики и теории относительности в нашем исследовании некоторые общие принципы, полученные в RM, используются на данном предварительном этапе в качестве необходимых логических элементов при построении нерелятивистской QM, что возможно только при отказе от постулата инвариантности законов природы относительно преобразований Лоренца.

Рассмотрим свободное состояние тела (в CM ему соответствует свободное движение) с точечной массой m, когда $U(x) = U = const$ во всем пространстве, включая и случай $U = 0$. При этом (2.4) с учетом (2.5) запишется в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum_k a_k \frac{\partial^k \Psi}{\partial x^k} + \frac{1}{m}\sum_n B_n \frac{\partial^n \Psi}{\partial x^n} + g_0 U \Psi = 0. \tag{2.6}$$

Выше было показано, что в (2.6) не могут входить ни c, ни какие-либо иные мировые кинематические константы. При этом в (2.6) должна входить хотя бы одна мировая константа, содержащая $[m]$, в противном случае структура уравнения теряет смысл. По аналогии с RM, где в качестве требуемой кинематической константы c была принята a posteriori величина $|\vec{c}| = c$ — модуль вектора скорости света в вакууме как реальной физической величины, примем здесь в качестве требуемой мировой константы величину s — минимальное ненулевое значение спина точечного тела, которое по смыслу является минимальным и потому универсальным шагом дискретизации $|\vec{M}|$. Сказанное не следует рассматривать в качестве постулата, «навязываемого» структуре уравнения (2.6) произвольным образом, поскольку сам этот «постулат» — необходимое следствие требования логической непротиворечивости и содержательности искомого уравнения. Более того, нам для продолжения логического исследования квантовой модели фактически не потребуется какая-либо априорная информация о взаимосвязи величины s с постоянной Планка $\hbar$ как мировой константой.

Из размерностных соображений прежде всего следует, что $B_n = Bs$ для любых n, где B — число. Сравнивая размерности первых двух членов в (2.6), находим, что $[a_k] = м^{2+k-n}$. Но $[a_k] = 1$,, поскольку в a_k не могут входить ни $\hbar$, содержащая размерность массы, ни c; поэтому $n = k + 2$. По смыслу записи уравнения (2.6) $k \geq 0$; следовательно, $n \geq 2$. С другой стороны, приравнивая размерности 1-го и 3-го членов в (2.6), имеем:

$$\frac{[a_k]}{м^k сек} = [g_0][U] = \frac{[s][g_0]}{сек}, \tag{2.7}$$

откуда следует, что

$$g_0 = \frac{1}{s}G; \ \ [G] = 1; \ \ k = 0; \ \ n = 2. \tag{2.8}$$

Таким образом. состояние тела с $U = const$ описывается уравнением вида:

$$s\frac{\partial \Psi}{\partial t} + B\frac{s^2}{m}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + GU\Psi = 0, \tag{2.9}$$

если положить $a_0 = 1$, чтобы не менять обозначения B и G.

Очевидно, что (2.9) дает искомую форму уравнения QM и при $U = U(x)$, поскольку члены исходного уравнения (2.4) с ненулевыми g_q, $q \geq 1$, должны были бы иметь в $[g_q]$ нескомпенсированные размерности длины, что несовместимо с принятыми выше условиями. Тем не менее точный формальный вывод (2.9) для произвольной функции $U(x)$ мы дадим позднее, а пока продолжим анализ уравнения (2.9) для случая $U = const$, когда его форма является, в соответствии с логикой данного вывода, единственно возможной.

Линейное уравнение (2.9) с постоянными коэффициентами допускает решение для $\Psi(x, t)$ в виде волны

$$\Psi = \exp\left[\alpha i(\omega t - kx)\right]; \quad i = \sqrt{-1}; \quad \alpha = \pm 1, \tag{2.10}$$

представимой только лишь в комплексной форме, что вполне согласуется со служебным характером $\Psi(x, t)$ как функции неизмеряемой, через посредство которой, однако, полностью описывается физическое состояние точечного тела. Заметим, что в СМ при $U = const$ величина U определяется только как уровень отсчета кинетической энергии тела $W = p^2 / 2m$, $p = const$, т. е. теряет свое физическое свойство пространственной силовой характеристики; при этом у нас нет никаких оснований для того, чтобы придавать иное физическое содержание величине U и в рассматриваемой модели 3. С другой стороны, постоянство p в классической точечной модели должно каким-то образом проявиться и в отношении $\Psi(x, t)$. Если прямо положить $\Psi = 1$, то это справедливо только при $U \equiv 0$ в (2.9); при $U \neq 0$, напротив, $\Psi \equiv 0$ при любых сколь угодно малых U. В пределе $U \to 0$ мы получаем неоднозначность решения в форме действительной функции Ψ, что вообще исключает возможность нахождения действительных решений для Ψ при произвольных U.

Подставляя (2.10) в (2.9), получим соотношение между тремя имеющимися параметрами волны α, ω и k:

$$i\omega s = \frac{\alpha B}{m}(sk)^2 - \frac{1}{\alpha}GU;$$

или, после умножения всего равенства на α;

$$\alpha i\omega s = \frac{B}{m}(sk)^2 - GU. \tag{2.11}$$

В силу действительности величин ω, s, k из (2.11) необходимо следует, что коэффициенты B и G являются мнимыми величинами, т. е. можно ввести следующие действительные коэффициенты B_o и G_o:

$$B = -iB_o;\ \ G = iG_o. \tag{2.12}$$

Преобразуем теперь соотношение (2.11) таким образом, чтобы последний член в нем был равен U:

$$\left(-\frac{\alpha s}{G_o}\right)\omega = +\frac{B_o}{mG_o}(sk)^2 + U. \tag{2.13}$$

Для определенности положим в дальнейшем $\alpha = -1$, т. е. выберем тот вариант представления пси-функции, для которого традиционно и записывается уравнение Шредингера. Тогда полученное соотношение принимает вид:

$$\frac{s}{G_o}\omega = \frac{B_o}{mG_o}(sk)^2 + U. \tag{2.14}$$

Сопоставляя данное выражение с записью закона сохранения механической энергии в классике (модель 1) вида $E = W + U$, приходим к следующим соотношениям, единственно возможным в силу разделенности независимых, заданных a priori параметров m и U:

$$E = \frac{s}{G_o}\omega;\ \ W = \frac{B_o}{mG_o}(sk)^2 = \frac{1}{2m}p^2. \tag{2.15}$$

Содержательное описание взаимосвязи между параметрами комплексной волны с описанием свободного движения в классике должно также включать в себя выбор формы взаимосвязи скорости классического движения материальной точки v со скоростью движения волны. Последняя не может быть представима фазовой скоростью $v_ф = \omega / k$ уже по той причине, что в соответствии с (2.14) она при ненулевых U зависит от уровня отсчета кинетической энергии тела, что несовместимо с классическими представлениями о дижении тела. Следовательно, у нас остается безальтернативный вариант описания движения волны как целого через посредство так наз. «групповой» скорости $v_{гр} = d\omega / dk$, которую мы и приравняем скорости $v = const$ тела в точечной модели описания, $v_{гр} = v$. Тогда, дифференцируя (2.14) по параметру k, получаем «волновую» формулу для импульса:

$$p = 2B_o sk. \tag{2.16}$$

При $U = 0$ имеем $v_ф = 0{,}5v$, т. е. при переходе в систему координат, связанную с точечным телом, которое в такой собственной системе будет находиться в состоянии кинематического покоя, профиль волны будет двигаться в противоположную от v сторону со скоростью $v_ф$. Следовательно, описания состояния покоя в рамках моделей 1 и 3 различаются принципиально. Более того, можно утверждать, что представление о кинематическом покое вообще несовместимо с физической сущностью спина, что должно проявиться в качестве возникновения особенностей при квантово-механическом описании энергетических состояний механических систем при сравнении его с соответствующим классическим описанием.

Подставляя выражение (2.16) в формулу для W в (2.15), находим необходимое нам дополнительное соотношение между произвольными константами B_o и G_o:

$$G_o = \frac{1}{2B_o}. \tag{2.17}$$

В формуле (2.16) числовая безразмерная константа B_o является свободным параметром, поэтому, обозначая новую константу как $\hbar = 2B_o s$ (разумеется, никак пока не ассоциируя ее с постоянной Планка), можно переписать (2.14) — (2.15) в следующем виде:

$$\hbar\omega = \frac{1}{2m}\left(\hbar k\right)^2 + U, \tag{2.18}$$

причем равенства

$$E = \hbar\omega; \quad p = \hbar k = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} \tag{2.19}$$

представляют собой соотношения де Бройля, если константу $\hbar$ считать постоянной Планка, полученные в качестве логико-математического вывода, а не физического постулата, по сути, опытного происхождения.

Отметим, однако, принципиальную разницу между произвольной константой $\hbar$, фигурирующей в полученных выше соотношениях, и постоянной Планка, традиционно рассматриваемой в качестве мировой константы как абсолютного скаляра. В силу $\hbar \sim s$ она несет в себе свойства спина, в том числе знакопеременность в силу возможности для спина иметь две противоположно направленные проекции, и уже по этой причине не может рассматриваться в качестве мировой константы, если она входит в любые соотношения линейно, а не в квадрате. В уравнение (2.9) константа $\hbar$, как легко убедиться, преобразуя его с помощью полученных выше соотношений, входит и линейно, и квадратично:

$$-\alpha i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + U\Psi, \tag{2.20}$$

где, учитывая дальнейший смысловой анализ данного уравнения, сохранена величина α, введенная выше через выражение (2.10). Следовательно, формально величину $\hbar$ в уравнении (2.20) нельзя считать скаляром аналогично m или c.

Полученное нами в качестве логико-математического вывода одномерное уравнение для Ψ совпадает по форме с записью одномерного уравнения Шредингера для функции Ψ при $\alpha = -1$ и для комплексно сопряженной функции Ψ^* при $\alpha = 1$ с той лишь разницей, что вместо абсолютного скаляра $\hbar$, представляющего собой мировую константу, в нем фигурирует постоянная, пропорциональная спину s фундаментальных стабильных элементарных частиц — электронов, протонов, нейтронов и гипотетических кварков — как одномерной «проекции» реального трехмерного физического параметра, имманентного точечному материальному объекту наряду с массой. По этой причине указанная разница не носит формальный характер и не сводится к переобозначению мировых констант. Однако ничего больше в рамках принципиально феноменологической теории, которой является механика — будь то ее релятивистский или квантовый варианты — сказать относительно физической сути параметра $\hbar$ мы не в состоянии, не выходя в логике исследования за пределы модели механического движения. Расширение указанной логики можно осуществить путем уточнения представления о взаимодействии тел как причины изменения их состояний, для чего требуется наряду с сугубо механическими свойствами тел рассматривать и свойства иной, немеханической природы, в частности электромагнитной.

Рассмотрим движение электрона в некотором внешнем силовом поле U. С точки зрения описания его движения в рамках классической модели 1 наличие у него спина не проявляется в явном виде при реализации математического формализма определения механических состояний ускоренно движущегося электрона. При этом имеет место излучение в пространство энергии электромагнитных волн как неизбежное следствие ускоренного движения электрически заряженной частицы, что полностью соответствует независимой от RM и CM теории электромагнетизма Максвелла и данным экспериментов, в которых реализуются условия нестационарного движения электрона. Если к подобной физической ситуации применить универсальную схему взаимодействия, то силовое взаимодействие между любыми заряженными частицами должно описываться на языке испускания и поглощения материальных частиц; применительно к электромагнитному взаимодействию — испускания и поглощения квантов э.м. поля, или фотонов. Поскольку каждый подобный акт взаимодействия электрона и фотона единичен и точечен в смысле модели 1, то к нему применим закон сохранения момента количества движения. Учтем, что спин электрона может поменять только свое направление на противоположное, сохраняя абсолютное значение как неизменную имманентную характеристику электрона, как и масса покоя. Тогда мы приходим к необходимому выводу, что излучаемый или поглощаемый фотон получает или теряет момент количества движения по очевидной разностной схеме $\left|M_{ф}-0\right|=\left|s-(-s)\right|=2|s|=\hbar$, т. е. с учетом возникновения или уничтожения самого фотона в акте взаимодействия он должен обладать спином, равным удвоенной величине спина электрона в качестве своей имманентной характеристики, причем единственной, поскольку у него отсутствует масса покоя. Спин фотона известен и равен постоянной Планка, а волновые параметры фотона описываются формулами (2.19) при условии $\omega / k = c$, причем в них отсутствует в явном виде механический параметр m, что позволяет объединить волновые описания механического тела с ненулевой массой покоя и фотона, у которого масса покоя имеет «определенное» значение, равное нулю. Использованные нами дополнительные физические соображения позволяют определить константу B_o согласно полученной выше взаимосвязи величин $\hbar$ и s как $B_o=1$, а константу $|\hbar|$ отождествить с постоянной Планка. Таким образом, мы получили вывод величины спина электрона при использовании физического описания фотона в качестве дополнительного условия, что позволяет определить величину $\hbar$, входящую в уравнение (2.20) и соотношения (2.18)–(2.19), как $\hbar=2s$.

Уравнение динамики Ньютона инвариантно относительно замены t на $-t$. Подобная обратимость во времени, иначе говоря, временная симметрия вообще характерна для механики точечных тел. Необратимость механических процессов связана с множественностью тел и, как следствие, множественностью состояний системы, что принципиально отличает ее поведение от поведения единичного точечного тела. Уравнение (2.20) инвариантно только относительно одновременной замены t на $-t$ и i на $-i$, или, что то же самое, замены знака параметра α с «–» на «+» Однако физическая интерпретация подобной «комплексной» инвариантности затруднительна именно в силу сугубо служебного характера самой Ψ-функции и ее комплексно сопряженного представления.

Нетрудно, однако, заметить, что (2.20) инвариантно также и относительно одновременной замены t на $-t$ и s на $-s$ (в силу $\hbar \sim s$) при сохранении знака α, причем физический смысл подобной замены, эквивалентной рассмотренной выше, достаточно прозрачен. В самом деле, одномерное уравнение вида (2.20) есть в определенном смысле «проекция» на выделенное направление в реальном трехмерном пространстве трехмерного же уравнения движения в QM-модели. Тогда следует полагать — и это логически непротиворечиво согласуется со всем проведенным выше исследованием свойств модели точечной каузальности, что константа s также сохраняет «векторность» своего происхождения, что выражается в том, что на выделенное в пространстве направление движения — ось x — спин может иметь только две проекции: $+s$ и $-s$. Если, к примеру, в правовинтовой схеме представления $\vec{M}$ и $\vec{s}$ при движении в сторону $+x$ «закрутка» тела $+s$ осуществлялась по часовой стрелке, если смотреть вдоль направления оси x, то обратимость такого движения во времени означает, что тело, двигаясь назад, меняет закрутку на противоположную, т. е. $+s$ на $-s$, сохраняя свое «правовинтовое» свойство как имманентное наряду с массой. При этом необходимо уточнить смысл термина «закрутка», учитывая, что спин, являясь механическим параметром, не выражается через другие классические механические параметры, как любой механический момент $\vec{M}$.

Термин «закрутка» предполагает с точки зрения классической механики наличие вращения материального объекта, характеризуемого угловой скоростью $\vec{\omega}_S$. Если полагать, что данный параметр представляется необходимым связующим звеном между трактовками в рамках моделей 1 и 3 одного и того же механического параметра, каким является спин, то в таком случае имеется неформальное основание придать определенный физический смысл формальному пока волновому параметру ω, положив $\vec{\omega}_S = \vec{\omega}$. При этом инвариантность энергии $E = \left(\vec{S}\cdot\vec{\omega}\right)$ относительно знака времени объясняется совпадением (точнее, инвариантностью связи) направлений векторов $\vec{S}$ и $\vec{\omega}$, или их закруток. Кроме того, обретает и отчетливый смысл понятие длины волны λ в качестве шага спинового «винта». Последнее же, в свою очередь, приводит к необходимости полагать спин в качестве пространственной и в этом смысле неточечной имманентной характеристики точечного тела, что, собственно, и является реальной физической причиной для построения модели 3 в трехмерном пространстве для объектов микромира, применительно к описанию движения которых необходимо учитывать наличие спина. «Классичность» параметра ω может быть также использована для создания новой механической модели, непротиворечиво соединяющей в себе элементы рассмотренных выше предельных моделей 1 и 3.

Уравнение (2.20) вместе с соотношениями (2.19) позволяет простым формальным способом выделить неклассичность волнового представления и его параметров, что и предполагается логической независимостью моделей 1 и 3, если ввести в рассмотрение мнимые параметры $\tilde{s} = is$; $\tilde{\omega} = i\omega$; и, соответственно, $\tilde{\hbar} = i\hbar$. При этом (2.19)–(2.20) примут вид:

$$E = -\tilde{\hbar}\tilde{\omega}\,; \quad p = -i\tilde{\hbar}k; \tag{2.19'}$$

$$-\alpha\tilde{\hbar}\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \frac{\tilde{\hbar}^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + U\Psi. \tag{2.20'}$$

В любой принятой системе (право- или левовинтовой) определения векторов $\vec{S}$ и $\vec{\omega}$ их направления противоположны, но их скалярное произведение инвариантно относительно операции инверсии времени, что соответствует инвариантности энергии. Закрутки спина и угловой скорости следует считать противоположными, как и направления векторов спина и линейной скорости.

Таким образом, одномерное уравнение (2.20), как и уравнение Ньютона, инвариантно относительно инверсии времени, однако теперь оно описывает движение точечного тела, обладающего двумя имманентными характеристиками: m и $\hbar$. Если в представлении видов взаимодействия данного тела с другими телами или внешними полями не предполагается участие спиновых состояний, т. е. $U = U(x)$, то величина $\hbar$, входящая в (2.20), может рассматриваться как абсолютная мировая константа $\hbar = |\hbar|$. В тех же случаях, когда по условиям задачи предполагается изменение спинового состояния точечного объекта, следует полагать $\Psi = \Psi(x, s)$, причем «координата» s имеет только два «разрешенных природой» положения: $+s$ и $-s$. Вопрос о том, как именно следует определять $\Psi(x, s)$, выходит за рамки содержания настоящей главы вследствие необходимости введения понятия взаимопревращения тел (частиц), включая кванты полей и т. п., что влечет за собой возможное изменение их имманентных характеристик.

2.5. Вывод уравнения Шредингера

В предыдущем параграфе было показано, что уравнение (2.9) по своей форме является единственно возможным, отвечающим всем общим условиям, вытекающим из принятия пространственно-каузальной модели механики в ее предельном варианте, а также совместимым с релятивистским принципом относительности и классической механикой как предельным случаем релятивистской. Однако логический анализ, проведенный выше, нельзя рассматривать в качестве последовательного вывода уравнения Шредингера, и отнюдь не потому только, что случай $U(x)$ не рассматривался. Построение системы RM, как мы убедились, основывалось на очень общих представлениях о свойствах пространства и времени, по существу, их и определяющих в качестве форм описания взаимосвязи материальных объектов по схеме причинно-следственных отношений. При этом RM в точности соответствует в определенном смысле предельной и потому идеальной модели точечной каузальности. Модель п. к. является полярным в отношении точечной модели предельным приближением, независимым в силу предельности от своего антипода. И если сказанное логически верно, то, вообще говоря, должен существовать логически точный вывод уравнения (2.9) при $U = U(x)$, не использующий в своей структуре релятивистский принцип относительности в виде преобразований (1.54). Более того, должна быть прямо доказана невозможность вхождения мировой константы c (скорость света в вакууме) в явном виде в структуру искомого уравнения механики, отвечающей модели 3. Тем самым будет снята жесткая привязка логики вывода к условию $c = \infty$, отвечающему требованиям построения СМ. Связь с СМ логически должна быть опосредована только через реально необходимое соответствие между описанием внутренней логики модели 3 и реально существующей макроскопичности измерительных процедур и, следовательно, самого реального языка механики. Сказанное означает, что целью данного параграфа является независимое от предыдущего доказательство единственности уравнения (2.9) — именно его формы — для произвольной формы функции $U(x)$ и на этой основе рассмотрение возможности обобщения уравнений (2.9) и (2.20) на случай $U(x, t)$. При этом a priori утверждается лишь то, что в качестве логической основы моделирования пространственно-временных процессов принимается принцип отсутствия универсальных масштабов для $[x]$ и $[t]$ в качестве мировых констант наподобие скорости света c. Иными словами, мы не должны выходить за рамки собственно механических представлений о пространстве и времени, логически (а не опытно) исключающих возможность существования подобных масштабов. В указанном смысле можно сказать, что принимается принцип неограниченности пространственно-временного механического моделирования движения в физических явлениях. Разумеется, принятие указанного принципа не означает, что любое движение сводится к чисто механическому; к примеру, спин не описывается исчерпывающим образом с помощью одних только механических параметров, и потому его использование в данной главе не меняет феноменологической сущности квантовомеханического описания движения точечных тел в соответствии с моделью 3. Частичное снятие используемых здесь феноменологических упрощений будет осуществлено в следующей главе. Отметим также, что обоснование справедливости перехода от уравнения (2.9) к (2.20) при $U = U(x)$ — это отдельная задача, которая должна решаться при анализе стационарных состояний.

Задействованная далее автором формальная логика вывода уравнения Шредингера в основном опирается на размерностные соотношения. Следует подчеркнуть, что эти соотношения — не какой-то специфический математический прием, а математическое оформление логики установления формы искомого универсального уравнения, которая в качестве посылок использует посылки физического характера, очевидность которых имеет силу арифметических соотношений. Действительно, арифметика формируется совокупностью правил группировки произвольного множества идентичных элементов, которые обозначаются через единицу (1). Тождественность элементов группировки (счета) означает их неизменность, что и понимается под единичностью. В механике рассматриваются отношения трех различных множеств элементов: множества пространственных координат, координат времени и масс тел, в каждом из которых их элементы тождественны и именуются единицами измерения. Правила, устанавливающие допустимые отношения между указанными тремя множествами, составляют сущность законов механики. Эти правила имеют различную степень сложности — иначе говоря, логической очевидности. К примеру, запрещается суммирование элементов, принадлежащих к физически различным группам, т. е. запрещается как не имеющее физического смысла суммирование величин, имеющих разные размерности. Данный запрет накладывается и на суммирование из комбинаций разнородных элементов, т. е. суммировать можно только объекты, имеющие одинаковые группировки из размерностей длины, времени и массы. Последнее правило лежит в основе математической формулировки законов группировки систем размерных подгрупп, которые, если они обладают свойством универсальности, именуют законами механики, выраженными в форме математических уравнений.

Исходной общей формой искомого уравнения при $U = U(x)$ принимается уравнение (2.4). Оно предполагает, что специфика взаимодействия точечного тела массой m с окружающими телами полностью описывается функцией координат $U(x)$, заданной в лабораторной (неподвижной) системе координат K. Из данного утверждения необходимо следует другое, а именно, что форма уравнения (2.4) достаточно содержательна для того, чтобы сделать все необходимые логические выводы без использования представления о собственной системе отсчета K_s и, следовательно, учета требований, отвечающих принципу относительности. Запись уравнения в форме (2.4) вполне согласуется с принципом близкодействия, что выражается в использовании операций дифференцирования Ψ по x и t и U по x. При этом, очевидно, хотя бы формально допустимо существование явной зависимости коэффициентов a_k, b_n и g_q от c. Принцип дальнодействия отражен в (2.4) через те условия, которым должно отвечать описание функции состояния Ψ и которые обсуждались выше. Можно, вообще говоря, утверждать, что форма (2.4) — это все, что при учете близкодействия и дальнодействия допустимо a priori высказать в качестве необходимых логических следствий.

Дальнейший логико-математический анализ уравнения (2.4) мы будем вести в определенной логической последовательности, которая оказывается достаточной по своей структуре для однозначного преобразования (2.4) к той его простейшей форме, которая и является основным законом механики, отвечающим описанию механического движения в рамках модели пространственной каузальности.

2.5.1. Постоянство коэффициентов a_k, b_n, g_q

Следует предполагать, что хотя бы часть этих коэффициентов зависит от массы тела m как его имманентной характеристики. В RM имманентность массы тела переносится на массу покоя m_0, поскольку масса как мера инертности зависит от скорости движения тела. Но в модели 3 скорость не определена в качестве переменной по схеме близкодействия, поэтому учет зависимости массы тела от его движения в рамках уравнения (2.4) — это отдельная проблема, которая достаточно подробно рассматривается в гл. 3. Формально единственный логически безусловно приемлемый вариант — это ограничение анализа условием $m = const$, что равносильно отождествлению m с m_0; при этом обеспечивается бесспорная законность сопоставления описаний свободного движения в классической и квантовой моделях. При этом еще раз отметим, что условие постоянства массы, иначе говоря, ее независимость от условий движения точечного тела, не является достаточным основанием для того, чтобы формально исключить возможность вхождения мировой кинематической константы c в коэффициенты рассматриваемого уравнения.

Единственной физически заданной функцией координат является $U(x)$, поэтому зависимость a_k, b_n и g_q от x может появиться в неявном виде только в случае их зависимости от U. Учтем, однако, что $U = const$ — физически актуальный вариант; его смысл и форма влияния на описание свободного движения достаточно очевидны, а его роль в рассматриваемой нами проблеме подробно рассмотрена в предыдущем параграфе. При этом возможность существования какой-либо зависимости $g_q(U)$ следует исключить хотя бы на том основании, что при ее наличии в (2.4) возникает нелинейность относительно U, что физикой введения понятия U в механике, вообще говоря, не предполагается. Относительно гипотетической зависимости $b_n(U)$ можно сказать следующее. Если не рассматривать экзотические формы зависимости, то вариант $b_n \sim U^{-p_n}$, $p_n > 0$ должен быть исключен в силу актуальности случая $U = 0$. Вариант $b_n \sim U^{+p_n}$ при $p_n \neq 1$ также следует исключить вследствие внесения в уравнение (2.4) элементов нелинейности через U. Остается рассмотреть вариант $b_n \sim U$, инвариантный относительно величины n. Заметим, что при $n = 0$ член $b_0\Psi$ ничем не отличается от $g_0 U\Psi$ с точностью до переобозначения констант $b_0 = g_0 U$. Если и все другие $b_n \sim U$, то при $U = 0$ свободное движение должно описываться только первой группой членов в (2.4), что не представляется возможным. Следовательно, хотя бы часть b_n не зависит от U, полагая при этом $b_0 = 0$, что, очевидно, не влияет на общность анализа. Относительно возможной зависимости $a_k(U)$ можно сделать аналогичные заключения. Сказанное выше позволяет построить последовательность анализа таким образом: сначала считать все коэффициенты константами в силу $m = const$, а затем рассмотреть возможность учета их гипотетической зависимости от U.

2.5.2. Мировые константы

Несколько повторяясь в силу важности дальнейшего анализа, условимся размерность физической величины N обозначать через $[N]$. Для удобства записи примем, что $[m]=$ кг; $[x]=$ м; $[t]=$ сек (выбор обозначений, разумеется, произволен, но использование м вместо см предпочтительнее, поскольку мы будем далее широко использовать $[c] = \text{м/сек}$ — размерность скорости света c в системе СИ, и сочетание см может способствовать возникновению некоторой путаницы при чтении размерностных соотношений. Наконец, безразмерная величина будет обозначаться через $[N] = 1$ по аналогии с $N^0 = 1$.

Кроме c в уравнение (2.4) могут входить мировые константы s_1, s_2, ..., в размерности которых содержится кг. Данное предположение имеет чисто размерностный характер и никак с опытом не связано.

Пусть, к примеру, мы имеем две константы s_1 и s_2, не содержащие в явном виде c (иначе константами следовало бы считать те части s_1 и s_2, которые не зависят от c). Положим, что $[s_1] = \text{кг}^{p_1}\text{м}^{k_1}\text{сек}^{n_1}$; $[s_2] = \text{кг}^{p_2}\text{м}^{k_2}\text{сек}^{n_2}$, где p_i, k_i, n_i – произвольные числа. Составим следующую комбинацию, не содержащую размерности массы:

$$\eta = \frac{s_1}{s_2^{\frac{p_1}{p_2}}}; \quad [\eta] = \text{м}^{k_1 - \frac{p_1}{p_2}k_2}\,\text{сек}^{n_1 - \frac{p_1}{p_2}n_2}. \tag{2.21}$$

Если выполняется равенство

$$k_1 + n_1 = \frac{p_2}{p_1}(k_2 + n_2), \tag{2.22}$$

то из (2.21) имеем

$$\eta = c_*^{\,l}; \quad [c_*] = \text{м/сек}, \tag{2.23}$$

т. е. c_* – новый масштаб скорости и, следовательно, «конкурирующая» с величиной c мировая константа, появление которой в модели 3 никак физически не оправдано и вступает в противоречие с RM и CM как ее предельным случаем.

Если же указанного равенства нет, то с помощью η и c можно составить комбинацию с размерностью м или сек, что противоречит условию отсутствия в механике любого вида масштабов длины и времени в качестве их минимальных значений. Таким образом, помимо c в (2.4) может входить только лишь одна мировая константа s. При этом в силу ее единственности всегда можно перейти к новой константе $s' = s^{1/p}$, такой, что $[s'] = \text{кг м}^{k'}\text{сек}^{n'}$, которую в дальнейшем мы и будем обозначать через s.

2.5.3. Аддитивность массы

Поскольку $g_0 \neq 0$ в силу актуальности случая $U = const$, для дальнейшего анализа удобно записать (2.4) в ином виде, поделив его на g_0 и оставив для коэффициентов прежние обозначения:

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum_k a_k \frac{\partial^k \Psi}{\partial x^k} + \sum_n b_n \frac{\partial^n \Psi}{\partial x^n} + \sum_{q\neq 0} g_q \frac{\partial^q U}{\partial x^q}\Psi + U\Psi = 0\,. \qquad (2.24)$$

Относительно зависимости a_k, b_n, g_q от m можно высказать следующие утверждения. В механике инертных тел точечная масса с математической стороны имеет смысл коэффициента пропорциональности, связывающего кинематические и динамические переменные. Если учесть единственность m и ее принципиальную скалярность, то справедливо утверждение, что (2.24) всегда можно привести к такому виду, когда m входит в него только линейным образом. Отсутствие иных степеней m^p, $p \neq 1$ в уравнении приведенного вида эквивалентно очевидному утверждению, что точечное тело не взаимодействует само с собой через «параметр взаимодействия» m. Иное означало бы, что функция $U(x)$ воздействия на данное тело со стороны других тел должна содержать m и в качестве параметра самовоздействия, что противоречило бы логике причинно-следственной связи, выстраиваемой от причины $U(x)$ к ее следствию в форме изменения состояния тела m, не входящего в систему тел, создающих внешнее силовое поле. Разумеется, сказанное нисколько не противоречит существованию сил гравитации, пропорциональных m, поскольку указанная линейность также исключает существование нелинейного эффекта самовоздействия, и тогда специфика силового воздействия на рассматриваемое тело со стороны иных тел выражается задаваемой в качестве исходного условия функцией $U(x)$, от «внутренних» параметров которой форма универсального по смыслу уравнения зависеть не может.

В данной связи справедливо также и несколько иное, в определенном смысле формальное утверждение, основывающееся на феноменологическом понимании сущности массы в механике. А именно, если мерой инертности принимается величина m, обладающая свойством имманентности телу, то величина m^p, $p \neq 1$, вообще говоря, должна рассматриваться уже в качестве иной, отличной от m, имманентной характеристики того же тела, а с феноменологической стороны m^p – это иной коэффициент пропорциональности, отвечающий какой-то иной механике, сосуществующей с «обычной», рассматриваемой нами.

Сделанные выше утверждения очень общего характера выявляют необходимую логическую структуру механики, содержащуюся в ней в латентной форме и связанную прежде всего с представлением об аддитивности массы. Но требования этой структуры вполне определенны, а именно: во-первых, m может входить в a_k, b_n и g_q только в виде m^p, $p = \pm 1$; во-вторых, в случае существования в уравнении членов, содержащих m^{-1}, умножение (2.24) на m не должно давать в нем члены с m^2, в первую очередь среди тех, которые ответственны за описание свободного движения при $U \equiv 0$.

2.5.4. Обратимость времени

В консервативных механических системах выбор направления времени произволен. Иное равносильно признанию существования выделенного направления времени при том условии, что сам произвольный счетчик времени, никак не связанный с изменением состояния тела, обладает свойством обратимости счета времени, иначе он не мог бы выполнять функцию часов. Требование обратимости времени накладывает жесткие условия на вид коэффициентов a_k. Действительно, если s как мировая константа является истинным скаляром наподобие m (или $\hbar$), то (2.24) не инвариантно относительно выбора направления времени t В таких условиях только второй, четвертый и т. д. порядок производной по времени обеспечивает обратимость, но это противоречит условию единственности Ψ как функции состояния. Следовательно, для достижения инвариантности (2.24) относительно изменения направления времени требуется выполнение условия

$$\frac{a_k}{t} = \left|\frac{a_k}{t}\right|, \text{ или } a_k t = |a_k t|, \tag{2.25}$$

из которого следует, что в a_k должна входить мировая константа, обладающая свойством псевдоскаляра в отношении направления времени:

$$s = |s| \text{ при } t > 0; \quad s = -|s| \text{ при } t < 0, \tag{2.26}$$

т. е. $st = |st|$ (вариант st^3 и т. п. по причинам, изложенным выше, мы не рассматриваем).

Поскольку $[a_k]\text{м}^{-k}\text{сек}^{-1} = [U]$, то возможно только $a_k \sim s$ и, следовательно;

$$a_k = A_k s c^l; \ [A_k] = 1. \tag{2.27}$$

Для дальнейшего введем обозначение:

$$[s] = \text{кг}\,\text{м}^\alpha\text{сек}^\beta. \tag{2.28}$$

Тогда, согласно (2.27), имеем соотношение:

$$\alpha + \beta = k + 1. \tag{2.29}$$

Теперь у нас имеется вся необходимая информация для однозначного вывода уравнения для Ψ при $U = U(x)$.

2.5.5. Уравнение для Ψ в случае $U = U(x)$

Поскольку, как следует из (2.27), коэффициенты a_k не зависят ни от U, ни от m, то, учитывая актуальность варианта $U = 0$, мы должны предположить, что хотя бы некоторые b_n содержат m, т. е.

$$b_n = B_n s^{n_1} m^{n_2} c^p; \quad [B_n] = 1. \tag{2.30}$$

Из размерностного равенства $[b_n]\text{м}^{-n} = [U]$, используя (2.30), получим следующие соотношения:

$$n_1 + n_2 = 1; \quad n_1(\alpha + \beta) = n,$$

или, учитывая (2.29), окончательно:

$$n_1(k+1) = n; \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.31}$$

В силу аддитивности m допустимы только два варианта: $n_2 = 1$ $(n_1 = 0)$ и $n_2 = -1$ $(n_1 = 2)$, что, разумеется, согласуется с требованием четности n_1. Но вариант $n_1 = 0$ не проходит вследствие $n = 0$, поэтому

$$n = 2(k+1); \quad n_1 = 2; \quad n_2 = -1. \tag{2.32}$$

Поскольку n_1 и n_2 в b_n не варьируются, а $[b_n]$ и $[b_{n+1}]$ отличаются на м, то существует только одно значение n и, согласно (2.32), одно значение k.

Учтем теперь, что s не содержит c. В случае $U = 0$ это возможно только при $p = l$. При этом условии, комбинируя (2.27), (2.28), (2.30) в качестве размерностных соотношений, имеем

$$l = \beta + 1 = p = n_1\beta + 2;$$

откуда $\beta = -1$; $l = p = 0$ и, следовательно;

$$\alpha = k + 2; \quad n = 2(k+1). \tag{2.33}$$

Если предположить, что $k > 0$, то из (2.24) при $U = 0$ имеем:

$$a_k \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^k \Psi}{\partial x^k} + b_n \frac{\partial^n \Psi}{\partial x^n} = 0, \tag{2.34}$$

где $a_k = A_k s$; $b_n = \dfrac{Bs^2}{m}$, т. е.

$$A_k \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^k \Psi}{\partial x^k} + B_n \frac{s^2}{m}\frac{\partial^n \Psi}{\partial x^n} = 0. \tag{2.35}$$

Это уравнение имеет решение в виде $\Psi = \Psi_0 = const$, в том числе и для действительных Ψ_0, причем Ψ не зависит от m, что невозможно. Следовательно, реализуется только один вариант:

$$k = 0; \quad n = 2; \quad \alpha = 2; \quad \beta = -1, \tag{2.36}$$

и (2.24) приобретает более простой вид:

$$As\frac{\partial \Psi}{\partial t} + B\frac{s^2}{m}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \sum_q g_q \frac{\partial^q U}{\partial x^q}\Psi + U\Psi = 0. \tag{2.37}$$

Поскольку $\left[g_q\right]$ не содержит размерности кг, то масса может входить в них только в виде (s/m), т. е. должно иметь место представление g_q в форме:

$$g_q = G_q\left(\frac{s}{m}\right)^{\gamma} c^r; \quad \left[G_q\right]=1; \quad \left[g_q\right]=\text{м}^q. \tag{2.38}$$

Но все нечетные γ противоречат условию обратимости времени, а четные — аддитивности m, поэтому остается единственно возможный вариант $\gamma = 0$, что совместимо только с $q = r = 0$. Но $q \geq 1$, поэтому $g_q = 0$, и (2.37) принимает окончательный вид в форме (2.9) с точностью до переобозначения числовых констант A; B и G, но при этом $U = U(x)$, что и требовалось доказать.

Нам остается рассмотреть возможность зависимостей вида $a_k \sim U$ и $b_n \sim U$. Но это означает, что зависимости $a_k(s)$ и $b_n(s)$ меняют степень s на единицу и, следовательно, инвариантность уравнения относительно знака времени не будет иметь место. Следовательно, предполагаемые зависимости не реализуются, что означает единственность записи уравнения QM для Ψ в виде (2.9) и, соответственно, (2.20).

Справедливость уравнения (2.20) при произвольной зависимости $U(x)$, т. е. нерелятивистского уравнения Шредингера, если полагать в (2.20) $\hbar = |\hbar|$, может быть обоснована при использовании сопоставления описаний свободного движения, даваемых моделями 1 и 3, только тем, что случай $U = const$ является одним из физически реализуемых вариантов общей зависимости $U = U(x)$; следовательно, существование уравнения (2.20) при $U = U(x)$ является необходимым условием непротиворечивой стыковки различных модельных описаний механики как реальной теории механического движения. Для обоснования его достаточности следует уточнить смысловое наполнение понятия «полной энергии» E в случае $U = U(x)$, т. е. в случае «несвободного» движения материальной точки, но при этом не конкретизируя физический механизм формирования силового поля. Этот вопрос мы рассмотрим в следующем параграфе.

Выше мы показали, что общее уравнение для функции состояния $\Psi(x, t)$ содержит только саму функцию U, но не ее производные по x, т. е. реализуется именно тот «пограничный» вариант, когда вполне законен вопрос о возможности обобщения уравнений (2.9) и (2.20) на случай $U = U(x, t)$, поскольку указанное обобщение не меняет форму уравнения (2.9) и сохраняет справедливость его физической нормировки на случай $U = U(t)$. Обобщение можно признать оправданным при условии, что в (2.9) не могут присутствовать члены, содержащие частные производные от U по времени каких-либо степеней. Линейность (2.9) по U требует линейности по $\partial U / \partial t$, $\partial^2 U / \partial t^2$ и т. д. соответствующих дополнительных членов в уравнении. Из соображений размерности необходимо, чтобы эти члены содержали соответствующие степени некоего масштаба времени τ, компенсирующего появление в их знаменателях дополнительной размерности времени $[t]$, $[t]^2$, ... Единственно возможный вариант создания требуемого масштаба — это $\tau \sim \hbar / mc^2$. Но выше было доказано, что скорость света c не может входить в структуру уравнения в явном виде, а представление τ в качестве мировой константы противоречит феноменологическому смыслу самой механики и физическому смыслу параметра время как счетной координаты сравнения скоростей протекания механических процессов. Таким образом, в уравнении (2.20) мы имеем полное право рассматривать параметр «потенциальная энергия» в качестве заданной функции не только пространственной координаты x, но и времени t, т. е. полагать $U = U(x, t)$.

Переход к трехмерной форме осуществляется путем замены $\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}$ на лапласиан $\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}$, что является необходимым следствием процедуры вывода (2.20). Действительно, только лапласиан отвечает принципу равноправия в пространстве осей x, y, z, отвечая также условию линейности уравнения по Ψ. Поэтому полученный выше вывод одномерного уравнения Шредингера может рассматриваться в качестве вывода его и для трехмерного пространства.

2.6. Стационарные состояния

Представление о стационарных состояниях в квантовой механике во многих существенных чертах сходно с классическим описанием движения точечного тела массой m в «потенциальной яме» $U(x)$. В силу исторических условий в период становления квантовой, или волновой, механики акцент делался прежде всего на различиях описаний, даваемых QM и CM. Указанная традиция в соединении с пониманием $\hbar$ в качестве неизменной, абсолютной мировой константы сугубо феноменологического характера привела к господству современной трактовки QM, основывающейся на постулировании математической формы QM, включая само уравнение Шредингера. Как мы убедились выше, замена чисто феноменологического понимания сути постоянной Планка $\hbar$ ее более сложным и содержательным образом, связанным со спином квантового объекта, влечет за собой появление фактически нового описания QM, в котором масса и спин точечного объекта являются равноправными и необходимыми элементами описания, нисколько не связанными с релятивистскими зависимостями. Исследование всей совокупности сходства и различия «бесспинового» и «спинового» описаний, конечно, выходит за рамки настоящей работы, методологически посвященной обоснованию возможности перехода от постулативно-феноменологического способа построения концепции механики к последовательно логическому, фундаментальность оснований которого фактически выходит за рамки их возможного структурного обсуждения. В данном параграфе мы ограничимся анализом достаточно общих следствий описания, основанного на уравнении (2.20), и их взаимосвязи с соответствующим классическим описанием.

То, что именно уравнение (2.20) следует взять за основу при описании стационарных состояний, следует из того, что, во-первых, оно представляет собой конкретизацию той общей формы уравнения (2.9), которая необходимо удовлетворяет условиям применимости пространственной модели 3 при $U = U(x)$, и, во-вторых, (2.20) удовлетворяет требованию непротиворечивой стыковки классического и квантового описаний свободного движения.

Рассмотрим класс функций $\Psi(x,\, t) = \theta(t)\varphi(x)$ с разделяющимися переменными, к которым относится и функция (2.10), описывающая свободное движение. Для этих функций из (2.20) получаем соотношение:

$$-i\alpha\hbar\frac{d\ln\theta}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m}\varphi^{-1}\frac{d^2\varphi}{dx^2} + U = K. \qquad (2.39)$$

Здесь K — произвольная числовая константа с размерностью энергии, т. е. не содержащая переменные x, t величина и в этом своем качестве инвариантная относительно свойств знакопеременности координат и спина. Для $\theta(t)$ из (2.39) имеем решение в форме:

$$\theta = \exp\left(\frac{iK}{\alpha\hbar}t\right). \qquad (2.40)$$

Вещественность K определяется вещественностью U ; при этом знак α, равно как и $\hbar$, не меняет смысл θ в качестве гармонической функции времени, обеспечивающей стационарность решения в варианте с разделяющимися переменными.

Для определения $\varphi(x)$ имеем, соответственно, уравнение

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(K - U)\varphi = 0\,, \qquad (2.41)$$

инвариантное относительно знака $\hbar$, что, учитывая физическую инвариантность временной составляющей относительно α и $\hbar$, дает нам основание положить в (2.20) $\alpha = -1$; $\hbar = |\hbar|$, т. е. рассматривать его в традиционной форме уравнения Шредингера.

«Нормировка» стационарного решения с помощью варианта $U = const$ немедленно приводит нас к соотношению $K = \frac{1}{2m}k^2\hbar^2 + U$, т. е. в указанном варианте константа K имеет смысл «полной» механической энергии E (кинетической W со смещенным вверх уровнем ее отсчета). Остается, следовательно, рассмотреть вопрос о том, сохранится ли указанный смысл константы K в случае $U = U(x)$ такой формы, что в классическом варианте мы имеем заведомо стационарное движение, или периодическое с периодом T, не изменяющимся с течением времени? Очевидно, не требует дополнительных пояснений утверждение, что стационарное в смысле периодичности движение в модели 1 соответствует стационарному же описанию движения в рамках модели 3, поскольку оба описания механического движения относятся к одной и той же реальной физической ситуации. Рассмотрим, в частности, случай «потенциальной ямы» конечной глубины, который физически является настолько общим, что выводы, полученные при его анализе, можно считать достаточными условиями для подтверждения общности уравнения (2.20) при произвольной зависимости $U = U(x)$.

Если яма «достаточно глубока», то условиям «локализации» в ней точечного тела соответствует условие $\varphi \to 0$ при $|x| \to \infty$, причем можно считать при этом выполненным и условие $\left|\frac{d\varphi}{dx}\right| \to 0$. Интегрируя уравнение (2.41) по x во всей области определения, получим соотношение

$$\left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{-\infty}^{+\infty} = -\frac{2m}{\hbar^2}\int_{-\infty}^{+\infty}(K-U)\varphi\,dx = 0, \tag{2.42}$$

откуда для константы K находим:

$$K = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} U(x)\varphi(x)\,dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx}. \tag{2.43}$$

Полученное чисто формальным путем соотношение (2.43) имеет с математической точки зрения смысл определения операции усреднения по пространству произвольной заданной функции $F(x)$:

$$\langle F\rangle_x = \int_{-\infty}^{+\infty} F\varphi\,dx \Big/ \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\,dx, \tag{2.44}$$

причем интеграл в знаменателе представляет собой нормирующий множитель данного способа усреднения. Но при такой операции усреднения мы получаем для константы K в уравнении (2.41) определяющее ее физический смысл равенство $K = \langle U(x)\rangle_x$. Очевидно, что константа K в данном случае не является полной энергией E в ее классическом понимании.

Действительно, в рамках модели 1 усреднение по времени за период стационарных колебаний кинетической и потенциальной энергий удовлетворяет закону сохранения механической энергии для средних по времени $E = \langle W \rangle_t + \langle U \rangle_t$, что является прямым следствием закона сохранения для мгновенных значений $E = W(t) + U[x(t)]$. Сказанное означает, что рассматриваемый способ пространственного усреднения в квантовой модели 3 не эквивалентен по смыслу усреднению по времени в рамках модели 1, что не позволяет провести прямое однозначное соответствие между двумя описаниями одной и той же механической задачи (что, разумеется, не означает, что никакого соответствия нет вообще). Отметим при этом, что самый смысл уравнения (2.41) для φ и его решений зависит от выбранного способа усреднения параметров по пространству определения. Следовательно, нам необходимо найти такой способ усреднения применительно к уравнению (2.41), чтобы имелась возможность однозначно трактуемого соответствия квантового и классического рассмотрений механического движения в заданном силовом поле $U(x)$.

Умножим теперь (2.41) на φ и вновь проинтегрируем его почленно по всей области определения, учтя при этом тождество

$$\varphi\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\varphi\frac{d\varphi}{dx}\right) - \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 .$$

В результате получим соотношение:

$$K = \frac{\dfrac{\hbar^2}{2m}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 dx}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi^2 dx} + \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}U(x)\varphi^2 dx}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi^2 dx}. \tag{2.45}$$

Данное также формально справедливое соотношение определяет иную, чем (2.44), процедуру усреднения переменных параметров:

$$\langle F \rangle_x = \int_{-\infty}^{+\infty} F\varphi^2\, dx \Big/ \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi^2\, dx. \tag{2.46}$$

Сопоставляя (2.45) с классической формой записи закона сохранения энергии, мы приходим к выводу, что форма усреднения вида (2.46) приводит к следующим «соотношениям соответствия» между классической и квантовой моделями описания механического движения:

$$K = E;\ \langle U \rangle_x = \langle U \rangle_t;\ \frac{\hbar^2}{2m}\left\langle (d\varphi / dx)^2 \right\rangle_x = \langle W \rangle_t . \tag{2.47}$$

причем автоматически удовлетворяются и соотношения (2.18), (2.19) для случая свободного движения как предельного случая потенциальной ямы «нулевой» глубины.

Таким образом, стационарное уравнение механики как независимый от опыта результат логико-математического вывода в окончательном виде, совпадающим с известным нерелятивистским стационарным уравнением Шредингера как математическим представлением постулата опытного происхождения, записывается следующим образом:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\varphi=0, \qquad (2.48)$$

где константа E имеет смысл полной энергии механического движения как задаваемого параметра задачи, причем указанная «заданность» E должна быть совместима с квантовыми условиями существования состояния стационарности, которые оказываются существенно более жесткими по сравнению с классическими вследствие дополнительных ограничений, вносимых в описание стационарных квантовых состояний наличием спина как имманентного квантовому объекту параметра описания его состояний. При этом уравнение (2.48) представляет собой неразрывный логический комплекс с процедурой усреднения (2.46), которая заложена в известную «статистическую интерпретацию» смысла пси-функции в качестве функции вероятности с тем, однако, принципиальным отличием, что она является не интерпретацией в смысловом значении данного термина относительно произвольного характера, а логико-математическим выводом, основанным на требовании совместимости различных модельных описаний одной и той же реальной механической ситуации, или задачи. Заметим при этом, что усреднение вида (2.46) не влияет на свойство принципиальной безразмерности Ψ-функции, причем нормировочный множитель $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi^2\,dx$ не имеет определенного значения в качестве теперь уже размерной величины и никак поэтому не связан с вероятностной нормировкой событий на 1, вводимой «копенгагенской интерпретацией» в качестве необходимого дополнения к уравнению Шредингера. Сказанное позволяет утверждать, что формально выведенное выше однозначное математическое оформление модели 3 пространственной каузальности фактически исходит из тех же физических посылок самого общего характера, что были использованы при выводе математического описания модели 1 точечной каузальности, развитого в предыдущей главе, с которыми полностью согласуется и представление о спине. Тем самым нами соблюден необходимый принцип внутреннего логического единства механики в различных формах ее модельного представления.

Обратим внимание на явную аналогию описания стационарных состояний частицы, находящейся в потенциальной яме $U(x)$, с т. зр. обеих предельных механических моделей 1 и 3 — точечной и пространственной;

аналогию, происхождение которой определяется тем, что оба описания — механические, подчиняющиеся единой логике анализа процесса движения тел. В модели 1 стационарность проявляется в строгой периодичности изменения состояний точечного тела, причем направление его движения вследствие взаимодействия с внешними телами периодически меняется на противоположное. Но если в модели 3 принять во внимание условие $s\omega = inv$, то картина квантовомеханического движения в определенном смысле становится аналогичной классике: а именно, в стационарном состоянии спин периодически меняет направление при «отражении» от «стенок» потенциальной ямы. Сложение прямой и обратной «волн-закруток» (терминология через словесные образы, конечно, произвольна) формирует «стоячую» волну, в которой спин, как и скорость направленного движения, теряют свои кинематические свойства, сохраняя только характеризующие их абсолютные величины ($|s|$ для s и $|\omega|$ для v) в качестве констант стационарности.

Рассмотрим теперь с целью упрощения наглядных представлений симметричную потенциальную яму $U(x)$; для определенности положим $U = \frac{1}{2}kx^2$, $k = const$, т. е. рассмотрим модель гармонического осциллятора, которая отличается тем, что классическая частота колебаний $\omega = \sqrt{k/m}$ не зависит от амплитуды колебаний; в квантовом аналоге данная особенность проявляется в эквидистантности расположения разрешенных уровней энергии $\Delta E = \hbar\omega$ (собственных значений). Для дальнейшего анализа указанные особенности движения в параболической яме не будут иметь определяющего значения, поэтому выводы, полученные ниже, имеют достаточно общий характер.

При классическом описании гармонического осциллятора мы имеем уравнение $\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$, решение которого имеет вид $x = x_0 \sin(\omega t + \alpha)$, где x_0 — амплитуда, α — начальная фаза. Если теперь рассматривать движение двух идентичных точечных тел, имеющих одинаковую полную энергию E (т. е. равные x_0), но различные α, то легко убедиться в том, что в течение одного периода тела могут встретиться только два раза, имея при этом в каждый момент времени встречи равные координаты и равные, но противоположно направленные скорости. Иначе говоря, все численные значения параметров механического состояния могут совпасть, и разница будет только в знаках скоростей $\pm v$. А это значит, что два невзаимодействующих тела как осцилляторы в одном и том же поле вообще не могут иметь совпадающих по всем параметрам состояний. Если ввести в рассмотрение третье тело, то можно видеть, что ни при каких различных α_1, α_2 и α_3 встреча трех тел в одной точке невозможна, т. е. положение о невозможности совпадения состояний двух и более тел в едином силовом поле имеет силу закона СМ применительно к идентичным точечным телам. Можно убедиться также и в том, что если учесть «обменное взаимодействие» в виде абсолютно упругого столкновения тел, то указанный закон сохраняет свою силу и в этом случае.

Происхождение рассмотренного закона механического движения обязано дополнительному условию, связанному с тождественностью тел. Имеется, однако, одно существенное замечание, значение которого при рассмотрении классического движения тел иногда ускользает из внимания. При $\alpha_1 = \alpha_2$ два идентичных тела в поле $U(x)$ движутся как единое целое, что, казалось бы, опровергает описанный выше закон. Но при этом необходимо полагать, что, объединяя два тела в одно с массой $2m$, мы должны удвоить силу $F = -dU / dx$, т. е. полагать $U(2m) = 2U$. А это, свою очередь, означает, что неявно вводится условие силового воздействия на структурные составляющие массы точечного тела хотя бы в его простейшей форме $U \sim m$. Последнее противоречит подразумеваемому условию, в соответствии с которым на точечное тело действует одна сила, не связанная, вообще говоря, с имманентными характеристиками тела, и, следовательно, в заданном поле $U(x)$ тела с массами m и $2m$ должны двигаться по-разному; в частности, иметь различные частоты колебаний $\omega_1 = \sqrt{k / m}$ и $\omega_2 = \sqrt{k / 2m}$. Отмеченные противоречия устраняются, если ввести очевидное условие невозможности «сосуществования» двух точечных идентичных тел в одной точке пространства; иначе говоря, дополнить условие идентичности точечных тел условием инвариантности их имманентных характеристик m и $|s|$, что как раз характерно для мира элементарных частиц, движение которых и описывается QM.

Из вышеприведенного элементарного и логически очевидного анализа рассмотрения совместного движения тождественных точечных тел с неизменными имманентными характеристиками следует справедливость очень общего принципа механики, согласно которому тождественные частицы в едином потенциальном поле не могут находиться в одинаковых, т. е. описываемых одинаковыми параметрами, состояниях. Было бы очень странно, если подобный общий принцип, или закон, механики тождественных частиц не распространялся и на QM, т. е. механику модели 3. С точки зрения указанного закона отличие QM от СМ сказывается только на снятии в QM условия совпадения координат, что вполне оправдано тем, что координата x, как и t, вообще не является параметром состояния. С т. зр. QM стационарное состояние для частицы с массой m и спином $|s|$ описывается только двумя параметрами: полной энергией E и знаком s. Вышеописанный закон, именуемый принципом Паули, гласит, что в одном и том же состоянии, т. е. с одинаковыми E и s, не могут находиться две или более частицы. Под указанный принцип подпадают фермионы — частицы с $|s| = \hbar / 2$, для которых данное значение модуля проекции спина —

их единая и неизменная имманентная характеристика, как и m_0 для каждого вида фермионов. Применительно к рассмотренной выше модели осциллятора можно утверждать, что на любом его стационарном уровне E может находиться не более двух фермионов, различных по направлению проекции спина $\vec{s}$ на ось x: $+s$ или $-s$. Таким образом, принцип Паули есть проявление общего принципа поведения системы тождественных частиц в механике в условиях модели пространственной каузальности. Заметим при этом, что модель системы тождественных частиц с имманентными характеристиками конструируется легко и естественно в рамках общей логики построения механики без каких-либо ссылок на опытные данные. Более того, представления о неограниченной структурированности элементов микромира и, как следствие, неограниченность вариантов их качественного разнообразия (состояний) влекут за собой «дурную бесконечность» состояний любой замкнутой системы тел, в том числе и в начальный период зарождения Вселенной.

2.7. Функция области в математическом анализе

Математическая идеология, логически непосредственно совместимая с моделью пространственной каузальности, может быть сформирована на пути отказа от аналитичности Ψ или φ. Например, $\varphi(x)$ можно представить в виде функции области определения, ограниченно детализированной внутри этой области, причем в ее описании допустимо использовать скачки как самой $\varphi(x)$, так и ее производной $d\varphi/dx$. На первый взгляд кажется, что у подобной методологической идеи нет никаких шансов на успех в ее реализации, поскольку дифференцируемость $\varphi(x)$ требуется не только самой формой записи уравнения Шредингера, но и, вообще говоря, неограниченной дифференцируемостью потенциальной функции $U(x)$, никак не связанной ни с квантовой механикой, ни с методикой ее математического анализа. Можно, однако, показать, что даже такой предельный вариант неаналитической аппроксимации точного решения, как дифференциальная «теорема о среднем», обладает всеми правами физически оправданного, самодостаточного решения, единственного при заданных начальных и граничных условиях, которым оно удовлетворяет. При этом «теорема о среднем» как раз и представляет собой предельный и вместе с тем простейший вариант решения в виде функции области. Проиллюстрировать смысл функции области в качестве решения дифференциального уравнения в частных производных наиболее просто на примере анализа классической задачи по нестационарной теплопроводности.

Пусть в области $x \geq 0$ с момента времени $t = 0$ распространяется тепловая волна $T(x, t)$, вызванная действием на границе $x = 0$ теплового источника $q(t)$. Задача характеризуется следующими параметрами: $T(x, 0) = 0$ — начальная температура; $\rho = const$ — плотность среды; $C = const$ — удельная теплоемкость; $\mu_0 = const$ — коэффициент теплопроводности; теплоисточники внутри среды отсутствуют. При этих условиях краевая задача описывается следующим образом:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}; \quad \mu = \frac{\mu_0}{\rho C}; \tag{2.49}$$

$$T(x, 0) = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = -\frac{1}{\mu_0} q(t). \tag{2.50}$$

Искомая функция $T(x, t)$ как решение системы (2.49)–(2.50) является аналитической в области $0 \le x \le \infty$, т. е. имеет в ней производные всех порядков.

Представим теперь некое решение системы (2.49)–(2.50) в виде неаналитической функции прямоугольной формы:

$$T = \theta(t) \text{ при } x < \xi(t); \quad T = 0 \text{ при } x \ge \xi(t). \tag{2.51}$$

Иначе говоря, мы попытаемся найти решение для модели «теплового поршня» напрямую из (2.49)–(2.50), минуя этап отыскания точного решения $T(x, t)$.

Отметим принципиальную методологическую особенность рассматриваемого подхода к решению поставленной задачи. При наличии известного точного решения $T(x, t)$ в аналитическом (что крайне редко) или численном виде параметр «теплового поршня» $\theta(t)$ находится как результат математического усреднения решения $T(x, t)$ на задаваемой произвольно в любой момент t базе усреднения $\xi(t)$:

$$\theta(t) = \frac{1}{\xi(t)} \int_0^\infty T(x, t)\, dx. \tag{2.52}$$

Выбор базы $\xi(t)$ является дополнительным к системе (2.49)–(2.50) условием, что делает процедуру усреднения неоднозначной и в этом смысле нефизичной. Ясно, что если решение относительно $\theta(t)$ и $\xi(t)$ может быть найдено непосредственно из исходной системы и окажется единственным, удовлетворяющим всем граничным условиям, то оно будет обладать статусом «физической оправданности» наравне с точным решением. Общая методика отыскания таких решений и составляет суть «теоремы о среднем».

Проинтегрируем (2.49) дважды по x по области $0 \le x \le \xi$. С учетом (2.51) имеем:

$$\frac{1}{2} x^2 \frac{d\theta}{dt} = \mu (T - \theta) + \frac{\mu}{\mu_0} q x.$$

Полагая $x = \xi$, получим:

$$\frac{1}{2}\xi^2 \frac{d\theta}{dt} = -\mu\theta + \frac{\mu}{\mu_0} q\xi . \tag{2.53}$$

Еще одно уравнение следует непосредственно из (2.49):

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty T\,dx = -\mu\frac{\partial T}{\partial x}(0,\,t) = \frac{\mu}{\mu_0} q ;$$

что выражает закон сохранения энергии. Отсюда имеем:

$$\frac{d(\theta\xi)}{dt} = \frac{\mu}{\mu_0} q . \tag{2.54}$$

Если обозначить $E(t) = \int_0^t q(t')dt'$, то решение системы уравнений (2.53)–(2.54) примет следующий вид:

$$\theta(t) = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\mu}}{\mu_0} E^2 \left[\int_0^t E^2 dt\right]^{-\frac{1}{2}} ; \quad \xi(t) = \frac{2\sqrt{\mu}}{E}\left[\int_0^t E^2 dt\right]^{\frac{1}{2}} . \tag{2.55}$$

При $q = const$ система (2.49)–(2.50) допускает аналитическое решение; при этом температура на границе есть:

$$T(0,\,t) = \frac{2q}{\sqrt{\pi}\,\mu_0}\sqrt{\mu t} . \tag{2.56}$$

Сравнивая (2.55) и (2.56) при $q = const$, имеем:

$$\frac{\theta(t)}{T(0,\,t)} = \frac{\sqrt{3\pi}}{4} \approx 0{,}77; \quad \xi(t) = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\mu t} . \tag{2.57}$$

Таким образом, исходная задача (2.49)–(2.50) имеет однозначное решение для функции области (2.51); тем самым для данного случая «теорема о среднем» доказана. Из всех возможных вариантов «усреднения» точного решения $T(x,\,t)$ физически оправданным, т. е. удовлетворяющим уравнению (2.49) и условиям (2.50), является единственный вариант (2.55), для нахождения которого существует формальная математическая процедура интегрирования неаналитических функций, являющихся некими функциями области заданной формы. Фактически мы совершили переход от модели точечной каузальности к пространственной, которые можно считать в определенном смысле равноправными в силу однозначности их математического описания при одних и тех же граничных условиях.

Применим теперь предложенный выше метод решения уравнений для анализа простейших квантовомеханических стационарных задач. Поскольку в их основу заложена модель пространственной каузальности, которая вполне совместима с методологией функции области, то следует ожидать, что даже в простейших ее вариантах можно получить приемлемые с т. зр. физики результаты.

Свободное движение

Положим для простоты $U = 0$, $-\infty \le x \le \infty$. Решением уравнения (2.48) для пространственной части пси-функции $\varphi(x)$

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -k^2\varphi; \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \tag{2.58}$$

является $\varphi(x) = \varphi_0 \exp(ikx)$. Длина волны λ определяется из условия периодичности $k\lambda = 2\pi$, т. е. $\lambda = 2\pi / k$.

Рассмотрим для определенности представление $\varphi(x)$ в форме $\varphi = \varphi_0 \cos kx$ и попытаемся аппроксимировать косинусоиду ступенчатой функцией с периодом λ_0 по пространству в виде:

$$\begin{aligned} &\varphi(x) = +\varphi_0; \quad -\frac{\lambda_0}{4} \le x \le \frac{\lambda_0}{4}; \\ &\varphi(x) = -\varphi_0; \quad \frac{\lambda_0}{4} \le x \le \frac{3\lambda_0}{4}. \end{aligned} \tag{2.59}$$

Интегрируя (2.58) в пределах $0 \le x < \frac{\lambda_0}{4}$, получим:

$\frac{d\varphi}{dx} = -k^2\varphi_0 x$ (с учетом $\frac{d\varphi}{dx}(x=0) = 0$).

Вторичное интегрирование дает при $x = \lambda_0 / 4$ искомое решение для λ_0:

$$\lambda_0 = \frac{4\sqrt{2}}{k}; \quad \frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1{,}11. \tag{2.60}$$

Таким образом, методом, аналогичным рассмотренному выше применительно к задаче о «тепловом поршне», мы нашли однозначно определяемый неаналитический аналог точного решения для свободной частицы, причем $\left|\varphi^2\right| = const$ для всех x, т. е. мы автоматически получаем основное квантовомеханическое следствие в форме равновероятности нахождения частицы в пространстве; иначе говоря, ее абсолютной пространственной неопределенности.

Гармонический осциллятор

Рассмотрим теперь квантовый точечный объект массой m, находящийся в потенциальной яме вида:

$$U(x) = \frac{1}{2}k_0 x^2. \tag{2.61}$$

В классической механике тело при любой заданной энергии E совершает колебания с одинаковой частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_0}{m}}. \tag{2.62}$$

С точки зрения квантовой механики состояния тела описываются уравнением

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - \frac{1}{2}k_0 x^2\right)\varphi = 0, \tag{2.63}$$

из которого следует, что стационарные состояния реализуются только при $E = E_n$, где

$$E_n = \hbar\sqrt{\frac{k_0}{m}}\left(n + \frac{1}{2}\right); \quad n = 0; 1; 2; ...; \tag{2.64}$$

при этом $\varphi(x)$ отлична от нуля во всей области определения за исключением конечного числа точек при $n \geq 1$.

Уравнение (2.63) приводится к безразмерному виду в его наиболее удобной для расчетов форме:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \varepsilon\varphi = z^2\varphi, \tag{2.65}$$

если ввести следующие масштабы величин:

$$\begin{aligned} &x = \bar{x}\,z; \quad \bar{x} = \hbar^{\frac{1}{2}}(k_0 m)^{-\frac{1}{4}}; \\ &E = \bar{E}\,\varepsilon; \quad \bar{E} = \frac{1}{2}\hbar\left(\frac{k_0}{m}\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{2.66}$$

Сравнивая (2.66) и (2.64), видим, что $\bar{E} = E_0$ и, следовательно, $\varepsilon = 2n + 1$; $n = 0; 1; 2; ...$

Будем искать решение (2.65) в виде неаналитических функций области. Рассмотрим сначала простейший случай:

$$\varphi = \varphi_0, \ -z_0 < z < z_0; \quad \varphi = 0, \ -z_0 \geq z \geq z_0. \tag{2.67}$$

В силу симметрии $\varphi(z)$ проинтегрируем (2.65) по z от $z = 0$ до $z < z_0$:

$$\frac{d\varphi}{dz} - \frac{d\varphi}{dz}(0) + \varepsilon\varphi_0 z = \frac{1}{3}z^3\varphi_0.$$

$\varphi(z)$ — четная функция по z, поэтому $\frac{d\varphi}{dz}(0) = 0$, и

$$\frac{d\varphi}{dz} + \varepsilon\varphi_0 z = \frac{1}{3}z^3\varphi_0. \tag{2.68}$$

Интегрируя (2.68) повторно в тех же пределах, получим:

$$\varphi - \varphi_0 + \frac{1}{2}\varepsilon\varphi_0 z^2 = \frac{1}{12}\varphi_0 z^4 .$$

При $z = z_0$ имеем $\varphi(z_0) = 0$, поэтому из последнего уравнения окончательно получаем уравнение, связывающее z_0 и ε:

$$-1 + \frac{1}{2}\varepsilon {z_0}^2 = \frac{1}{12}{z_0}^4 . \tag{2.69}$$

В (2.68) учтем, что $\frac{d\varphi}{dz}(z_0 + 0) \equiv 0$, поэтому из него получим дополнительное соотношение:

$$\varepsilon = \frac{1}{3}{z_0}^2 . \tag{2.70}$$

Решение системы (2.69) — (2.70) есть

$$\varepsilon = \varepsilon_0 = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1{,}15; \quad z_0 = (12)^{\frac{1}{4}} \approx 1{,}86 . \tag{2.71}$$

Таким образом, простейший вид использованной нами функции области позволяет получить удовлетворительную оценку «нулевого уровня» энергии E_0 осциллятора и эффективной ширины области определения $2x_0$. Величинами ε_0 и z_0 перечень физических параметров в данном решении и ограничивается, что вполне соответствует модели п. к.; при этом заметим, что размер эффективной области из точного решения для $\varphi(x)$ не определяется без дополнительных предположений, вообще говоря, произвольного характера.

При $U(x_1) = E$, т. е. при ${z_1}^2 = \varepsilon$, согласно (2.65) имеем $d^2\varphi / dz^2 = 0$. Тогда, разбив $\varphi(x)$ на две подобласти:

$$\varphi = \varphi_0, \ |z| \le z_1; \quad \varphi = \varphi_1, \ z_1 < |z| \le z_0 ;$$

и повторив выше описанную процедуру двукратного интегрирования, можно получить решение:

$$\varepsilon \approx 1{,}09; \ z_0 \approx 2{,}09; \ \frac{\varphi}{\varphi_0} \approx 0{,}5; \ \frac{z_1}{z_0} \approx 0{,}5 .$$

То есть следующая ступень аппроксимации $\varphi(x)$ с помощью ступенчатой функции дает лучшее приближение. Продолжая процесс разбиения до бесконечности, мы, очевидно, получим точное решение $\varepsilon = 1$. Отметим, что указанный алгоритм принципиально отличается от алгоритмов численного счета, требующих аппроксимации производных на сетке разбиения области $-L \le x \le L$: он не содержит произвольных предположений относительно точечных характеристик $\varphi(x)$ внутри области определения, равно как фактически не требует использования самого понятия производной, хотя и имеет в качестве исходного уравнение в частных производных.

Следующему энергетическому уровню ($n=1$) отвечает антисимметричная функция $\varphi(x)$, которая может быть аппроксимирована следующей ступенчатой функцией:

$$\varphi=\varphi_0,\ \ 0<z<z_0;\quad \varphi=-\varphi_0,\ \ -z_0<z<0;\quad \varphi=0,\ \ z=0 \text{ и } |z|\ge z_0 .$$

Очевидно, достаточно ограничиться интегрированием по области ($0,\ z_0$). При этом появляется константа интегрирования $\frac{d\varphi}{dz}(0)$ как еще одно неизвестное задачи, поэтому потребуется осуществить трехкратное интегрирование (2.65).

1) $\dfrac{d\varphi}{dz}-\dfrac{d\varphi}{dz}(0)+\varepsilon\varphi_0 z=\dfrac{1}{3}z^3\varphi_0 .$

При $z=z_0$ имеем отсюда первое из уравнений требуемой алгебраической системы:

$$\frac{d\varphi}{dz}(0)=\varepsilon\varphi_0 z_0-\frac{1}{3}\varphi_0 {z_0}^3 . \qquad (2.72)$$

2) $\varphi-\dfrac{d\varphi}{dz}(0)z+\dfrac{1}{2}\varepsilon\varphi_0 z^2=\dfrac{1}{12}\varphi_0 z^4$

с учетом $\varphi(0)=0$. При $z=z_0$ после подстановки (2.72) получим:

$$\varepsilon=\frac{1}{2}{z_0}^2 . \qquad (2.73)$$

3) $\varphi_0 z-\dfrac{1}{2}\dfrac{d\varphi}{dz}(0)z^2+\dfrac{1}{6}\varepsilon\varphi_0 z^3=\dfrac{1}{60}\varphi_0 z^5 .$

При $z=z_0$:

$$1-\frac{1}{3}\varepsilon {z_0}^2+\frac{3}{20}{z_0}^4=0 . \qquad (2.74)$$

Решение системы (2.73)–(2.74) дает:

$$\varepsilon_1=\sqrt{15}\approx 3{,}87;\ \ \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}=\frac{3\sqrt{5}}{2}\approx 3{,}35 \text{ (точное =3)};\ \ z_0=(60)^{\frac{1}{4}}\approx 2{,}78 . \qquad (2.75)$$

Таким образом, решение стационарного уравнения Шредингера с помощью предложенного метода функций области позволяет в случае гармонического осциллятора получать элементарным путем качественные оценки решений для E_n, при этом оценки эффективной ширины области «движения» квантового объекта нельзя столь же однозначно получить. используя точное решение для $\varphi(x)$.

Ангармонический осциллятор

Рассмотрим теперь вместо (2.61) потенциальную функцию вида

$$U(x)=\frac{1}{2n}k_{n-1}x^{2n};\quad n=1;\ 2;\ 3;\ \ldots \tag{2.76}$$

Как и в случае гармонического осциллятора, уравнение (2.48) приводим к простейшему безразмерному виду:

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2}+\varepsilon\varphi=z^{2n}\varphi \tag{2.77}$$

путем введения масштабов:

$$\bar{x}=\left(\frac{n\hbar^2}{k_{n-1}m}\right)^{\frac{1}{2(n+1)}};\quad \bar{E}=\frac{1}{2}\left(\frac{\hbar^2}{m}\right)^{\frac{n}{n+1}}\left(\frac{k_{n-1}}{n}\right)^{\frac{1}{n+1}}. \tag{2.78}$$

Для примера найдем методом функций области оценку для ε_0 — нулевого уровня энергии. Повторяя те же операции, что и в случае гармонического осциллятора, получим окончательное решение в виде:

$$z_0=\left[\frac{2(n+1)(2n+1)}{n}\right]^{\frac{1}{2(n+1)}};\quad \varepsilon_0=\left[\frac{2(n+1)}{n}\right]^{\frac{n}{n+1}}(2n+1)^{-\frac{1}{n+1}}. \tag{2.79}$$

Заметим, что, как известно, данная задача точно решается только численно, тогда как (2.79) — это простое аналитическое решение, что представляет несомненные удобства при качественном анализе.

Для сравнения приведем значения ε_0 и ε_{0*} (точное численное решение) для нескольких величин показателя n:

n	1	2	3	6	10	∞
ε_0	1,15	1,22	1,28	1,43	1,56	2
ε_{0*}	1,00	1,06	1,14	1,36	1,55	2,47

Случаю $n=\infty$ соответствует модель бесконечно глубокой потенциальной ямы с вертикальными «стенками», для которой также имеется аналитическое решение. При этом $\dfrac{E_0}{E_{0*}}=\dfrac{8}{\pi^2}=0,81$.

Глава 3

УЧЕТ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЗАВИСИМОСТЕЙ ПРИ РЕШЕНИИ СТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

> «Потребность чистого разума при его спекулятивном употреблении ведет только к гипотезам, а потребность чистого практического разума — к постулатам ...Так, я вижу порядок и целесообразность в природе и мне необходимо переходить к спекуляции не для того, чтобы убедиться в их действительности, а только для того, чтобы объяснить их, предполагая Божество как их причину»
>
> *И. Кант*

Релятивистские эффекты, как было показано в гл. 1, определяются исключительно объективно существующей в качестве необходимого логического вывода при моделировании механического движения и безусловного опытного факта в мире инертных тел зависимостью массы тела от скорости его движения, $m = m(v^2)$; при этом имманентной точечной характеристикой тела является только его масса покоя m_0 (наряду с модулем спина s). В этой связи естественно задаться следующим вопросом: нельзя ли «обобщить» нестационарное нерелятивистское уравнение Шредингера общего вида

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + U(x, t)\Psi \tag{3.1}$$

таким образом, чтобы оно позволяло учитывать релятивистские зависимости $m(v)$, $E(p)$? Концептуальный уровень и соответствующие трудности подобной задачи очевидны, поскольку мы сталкиваемся при ее детальном анализе с двумя противоречиями принципиального характера:

1) в рамках релятивистской механики (RM) импульс p, равно как и кинетическая энергия W в качестве точечных характеристик определяются через массу m, которая, в свою очередь, есть функция $|v|$ как точечной кинематической характеристики, не задействованной в модели 3 пространственной каузальности с ее основным уравнением (3.1);

2) схема вывода уравнения вида (3.1), реализованная в главе 2, справедлива только при $m = const$, т. е. она не совместима с основной релятивистской зависимостью.

Традиционный путь обобщения (3.1) заключается в его «модификации» (которую, разумеется, нельзя считать строгим логико-математическим выводом) таким образом, чтобы оно удовлетворяло преобразованиям Лоренца, для чего необходимо, чтобы переменные x и t входили в «релятивистское» уравнение равноправно, т. е. производная $\partial\Psi / \partial t$ должна быть через посредство какой-либо совместимой с принципами STR (но не RM) процедуры заменена на $\partial^2\Psi / \partial t^2$. Не входя в детали известных методик установления (которые ни в коей мере нельзя рассматривать в качестве логически корректных процедур вывода) требуемой формы релятивистского квантового уравнения (например, Клейна–Гордона или Дирака), на основании результатов исследования, проведенного в главе 1, можно a priori утверждать, что в связи с тем, что преобразования Лоренца к механике инертных тел не имеют прямого отношения, то и традиционная методология построения релятивистской квантовой механики также не имеет под собой никаких логических оснований фундаментального уровня и, следовательно, с концептуальной точки зрения должна рассматриваться в качестве теоретической гипотезы типа ad hoc. В указанном качестве она не может рассматриваться как концептуально последовательная теоретическая система в структуре моделирования механического движения и потому не представляет для нас интереса. Однако само по себе достаточно точное математическое описание реальных опытных зависимостей может рассматриваться в качестве феноменологического описания данных опыта, и в таком качестве его ценность несомненна. Классической иллюстрацией сказанного является конструктивный теоретический статус закона всемирного тяготения Ньютона в ситуации, когда до сих пор неизвестна физика гравитационного взаимодействия тел, обладающих инертной массой; в частности, не установлен переносчик этого взаимодействия.

Проблема возможности построения логически строго обоснованного релятивистского обобщения QM представляется автору открытой, требующей непротиворечивого решения прежде всего именно на концептуальном уровне, в связи с чем необходимо дать убедительный ответ на вопрос: а возможно ли в принципе логически корректное построение релятивистской квантовой механики в ее общей нестационарной форме аналогично нерелятивистскому варианту вида (3.1)? Что же касается методологии учета релятивистских эффектов в заведомо стационарных условиях, для чего необходимо полагать $U = U(x)$, то она должна быть логически и математически сформирована только на основе уравнения (2.20) или его стационарного аналога (2.48), которые единственно соответствуют требованиям описания движения в рамках модели 3. Только при таком подходе к решению проблемы учета релятивистских эффектов в квантовой механике могут быть соблюдены концептуальная чистота и непротиворечивость любой конкретной расчетной методологии — а их может быть и несколько. При этом отнюдь не снимается вопрос о физической «точности» методологии, который и в стационарных задачах требует специального анализа. Указанные проблемы в настоящей книге логически последовательно, с соблюдением необходимой степени общности анализа, не рассматриваются, но, как это обычно практикуется при первом конструктивном рассмотрении, принципы построения подобных методологий проиллюстрированы ниже на примерах решения отдельных квантовомеханических задач общего вида, на которых обычно и проверяется эффективность любого нового теоретического подхода.

3.1. Свободное движение

В предыдущей главе был дан исчерпывающий анализ описания свободного движения точечного тела ($U = const$) в рамках пространственной модели 3 с использованием имманентных параметров тела — массы $m = const$ и спина s. Для последующего анализа можно не проводить различия между $|s|$ и s, поэтому при записи формы уравнения (2.9) мы заменим s на $\hbar$, сохранив при этом обозначения соответствующих безразмерных коэффициентов B и G:

$$\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} + B\frac{\hbar^2}{m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + GU\Psi = 0. \tag{3.2}$$

Для волны вида $\Psi \sim \exp\left[-i\left(\omega t - kx\right)\right]$ из (3.2) находим основное соотношение между вещественными константами задачи ω, k, $B_o = iB$ в виде:

$$\hbar\omega = U + \frac{B_o}{m}\left(k\hbar\right)^2; \tag{3.3}$$

при этом величина U является произвольным уровнем отсчета для кинетической энергии W, т. е. $E = \hbar\omega = W + U$.

Соотношение (3.3) необходимо дополнить условием равенства групповой скорости волнового представления и классической скорости движения тела:

$$\frac{d\omega}{dk} = v; \tag{3.4}$$

при этом учитывается и возможная зависимость m от k, т. е. от параметров движения, что допустимо, поскольку в рассматриваемой задаче соблюдается условие $m = const$.

При U=0 в (3.3) произвольными остаются две константы — B_o и k, для определения которых имеются два уравнения (3.3) и (3.4). Нерелятивистская нормировка QM на соотношение $W = p^2 / 2m$ дает $B_o = \frac{1}{2}$; $p = k\hbar$. Однако релятивистская взаимосвязь $W(p)$ имеет иной вид, поэтому решение системы (3.3)–(3.4) применительно к релятивистской нормировке будет отлично от обычного классического варианта.

В предыдущей главе было показано, что при m=*const* и U=*const* уравнение (3.2) является логико-математическим выводом, справедливым при самых общих предположениях относительно смысла Ψ-функции; следовательно, оно справедливо и при учете зависимости m=m (W). Напротив, для использования, к примеру, уравнения Клейна–Гордона вида

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -\hbar^2 c^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + m_0{}^2 c^4 \Psi \tag{3.5}$$

нет никаких иных логических оснований, кроме требования удовлетворения его принципу релятивистской инвариантности в смысле STR, чуждому механике инертных тел, т. е. собственно механике в ее изначальном смысле. Как уже отмечалось выше, в случае использования уравнения (3.5) мы имеем дело с типичной теоретической конструкцией ad hoc, смысл которой сводится к математической подгонке нового уравнения квантовой механики под форму релятивистского соотношения $E^2 = c^2 p^2 + m_0{}^2 c^4$, откуда и следует удовлетворяющая уравнению (3.5) взаимосвязь параметров вида $(\hbar\omega)^2 = c^2 (\hbar k)^2 + m_0{}^2 c^4$.

Реальная, т. е. непротиворечивая с т.зр. механики логико-математическая задача заключается в отыскании решения системы (3.3)–(3.4), отвечающей исходному уравнению (3.2), при условии существования релятивистских зависимостей вида

$$W = c\sqrt{p^2 + m_0{}^2 c^2} - m_0 c^2; \tag{3.6}$$

$$m = m_0 \left(1 + \frac{W}{m_0 c^2}\right). \tag{3.7}$$

Видно, что трактовки параметров волны для вариантов $W = \hbar\omega, U = 0$ и $E = \hbar\omega, U = m_0 c^2$ эквивалентны, однако первая удобнее при последующей интерпретации соответствующих зависимостей.

Для вычисления $d\omega / dk$ воспользуемся равенством

$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{d\omega}{dW}\frac{dW}{dk}, \text{ где } \frac{d\omega}{dW} = \frac{1}{\hbar}.$$

Переписав (3.3) в виде

$$k^2 = \frac{m_0}{\hbar^2 B_o} W \left(1 + \frac{W}{m_0 c^2}\right),$$

вместо (3.4) после преобразований получим:

$$v = 2\left[\frac{B_o W}{m_0}\left(1 + \frac{W}{m_0 c^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{2W}{m_0 c^2}\right)^{-1}. \tag{3.8}$$

Воспользовавшись равенством

$$\frac{m}{m_0} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{W}{m_0 c^2};$$

с помощью (3.8) получим искомую связь $B_o(W)$:

$$B_o = \frac{1}{2}(1+2\beta)^2(1+\beta)^{-3}\left(1 + \frac{1}{2}\beta\right);\ \beta = \frac{W}{m_0 c^2}. \tag{3.9}$$

При $\beta = 0$ имеем классический вариант $B_o = 1/2$. В «ультрарелятивистском» пределе $\beta \to \infty$ имеем $B_o = 1$.

Используя (3.9), для $(k\hbar)$ можно получить формулу:

$$k\hbar = m_0 c(2\beta)^{\frac{1}{2}}(1+\beta)^{-1}\left(1 + \frac{1}{2}\beta\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{3.10}$$

Рассмотрим два представляющих демонстрационный интерес предельных случая квантовомеханического описания свободного релятивистского движения точечного тела.

Слабый релятивизм, $\beta \ll 1$

Для B_o из (3.9) имеем с точностью до членов с β^2 (что определяется структурой зависимости (3.10), поскольку $(k\hbar)^2$ содержит член с β^2):

$$B_o \approx \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{2}\beta - \frac{3}{2}\beta^2\right). \tag{3.11}$$

Таким образом, в физически интересном случае $W \ll m_0 c^2$, который «обеспечивается» малостью постоянной тонкой структуры $\alpha \approx 1/137$ при анализе движения в атомных системах, в уравнении (3.2) следует вместо $B_o = 1/2$ взять его величину, определяемую из соотношения (3.11) (напомним, что переход от уравнения (3.2) к его традиционной форме уравнения Шредингера при вещественных параметрах осуществляется путем замены $B = -iB_o$; $G = i$). При этом для $k\hbar$ имеем:

$$k\hbar \approx p\left(1 - \frac{1}{2}\beta\right). \tag{3.12}$$

Ультрарелятивизм, $\beta \gg 1$

В данном предельном случае $B_o = 1$, поэтому непосредственно из (3.3) имеем

$$(k\hbar)^2 = mW = W^2 / c^2 .$$

Но, согласно (3.6), $W = pc$, поэтому

$$k\hbar = p, \tag{3.13}$$

причем $v_ф = v = c$. В этом случае, реализующемся, к примеру, при $m_o \to 0$, мы имеем дело с описанием «безмассовой» частицы — фотона, или кванта излучения, в качестве предельного случая механики инертных тел, причем при его описании точечная и пространственная модели имеют одинаковый «смысловой» с точки зрения физики вес.

3.2. Релятивистская частица в одномерной потенциальной яме

В достаточно глубокой потенциальной яме, создаваемой консервативным силовым полем $U(x)$, возможно существование стационарных квантовых состояний, реализуемых при определенных значениях полной механической энергии E. В классической модели движения стационарность, т. е. строгая периодичность изменения механических параметров, зависящих от времени, в рассматриваемом случае имеет место при любых (в смысле непрерывности спектра значений) E, причем последняя совпадает с максимумами $U(x)$ в точках поворота частицы, где ее кинетическая энергия W обращается в нуль. Напротив, в квантовой модели 3 существует дискретный спектр значений E, при которых стационарное уравнение Шредингера имеет решение в виде собственных функций φ (x), отвечающих собственным значениям E как искомого физического параметра задачи, существование которого в виде спектра значений определяется формой зависимости $U(x)$ и массой частицы m.

Все сказанное о сущности стационарных состояний в рамках описаний движения, определяемых моделями 1 и 3, справедливо и при учете релятивистской зависимости $m(W)$, что, как уже отмечалось выше, создает определенную концептуальную трудность применительно к модели 3 в тех ситуациях, когда актуален учет изменения во времени энергетических параметров U и W в модели 1 как существенной характеристики колебательного процесса, иначе, но не менее определенно описываемого в нерелятивистском варианте модели 3. Действительно, в пространственной модели 3 параметр кинетическая энергия, равно как и импульс, не определен в качестве точечной пространственной характеристики точечного тела в явном виде, тогда как масса как точечный параметр тела входит в уравнение Шредингера в явном виде как его размерный параметр. Следовательно, при попытке перенести релятивистские зависимости в методологию квантового описания возникает проблема логически корректной интерпретации средствами пространственной модели зависимости $m(W)$. Причем речь идет именно о логической корректности в смысле строгой последовательности выводов в полном соответствии с принципом причинности. Данный, если угодно, логический максимализм в философском смысле кардинально отличается от традиционного позитивистского подхода к построению фундаментальной физической теории реального материального мира, основывающегося на методологическом принципе постулативного конструирования теории в целях ее наилучшей подгонки под результаты экспериментов, которые и принимаются в качестве критерия истинности. Указанная концептуальная трудность, связанная с необходимостью в явном виде оперировать с неопределенной величиной m, усугубляется и тем объективным обстоятельством, что в QM спектр «разрешенных» энергий E в потенциальной яме имеет некую ненулевую нижнюю границу $E_{\min}$, возникающую вследствие неуничтожимости движения, как и спина, как таковых; следовательно, произвольное уменьшение W в области «дна ямы» также невозможно. Последнее же означает, что всегда выполняется неравенство $m > m_0$, и, таким образом, условие $m = m_0$ нерелятивистской теории не реализуется ни при каких условиях, по крайней мере, при анализе движения в потенциальной яме. Сказанное означает, что QM не только принципиально неточна: она не является предельным вариантом релятивистской квантовой механики (RQM) при $W \to 0$, поскольку невозможен сам этот предельный переход. В концептуальном смысле данная ситуация принципиально отличается от характера логической взаимосвязи RM и CM, которая осуществляется через физически реализуемый предельный переход $p \to 0$; $W \to p^2 / 2m_0$; $m \to m_0$ в рамках модели 1. В пространственной же модели 3, к которой относятся и QM, и RQM, подобный предельный переход не реализуется при любой наперед заданной зависимости $U(x)$, описывающей потенциальную яму. Отметим в этой связи, что необходимость формулировки непротиворечивой методологии RQM актуальна даже в случае $W / m_0c^2 \ll 1$ хотя бы с точки зрения оценки степени неточности методологии QM.

Для соблюдения «концептуальной чистоты» (но отнюдь не реальной точности!) процедуры учета зависимости массы от внутреннего движения в системе частица + поле в рамках модели 3 необходимо, по крайней мере, чтобы в качестве m в стационарном уравнении Шредингера (2.48) фигурировала некая функция области определения $\langle m \rangle = const$, рассчитываемая через посредство $\varphi(x)$ как единственной функции, определяющей «пространственное состояние» частицы как материальной точки. Только при таком условии безусловно справедлив вывод самого уравнения (2.48). В п. 2.6 было показано, что в качестве подобной константы как функции области может фигурировать средняя величина рассматриваемого параметра, определяемая через интегральную операцию (2.46). Более того, можно утверждать, что в рамках модели 3 замена m на $\langle m\rangle$, определяемой по формуле усреднения (2.46), является единственно возможной математической операцией определения требуемой функции области уже по той причине, что эта операция согласуется с законом сохранения механической энергии для системы частица + поле, а усредняемый параметр m является прямой функцией W. При этом, разумеется, в соотношениях (2.45) и (2.47) вместо m также должно фигурировать ее среднее значение $\langle m\rangle$.

Таким образом, в своем наиболее простом и потому логически вполне обоснованном варианте задача о релятивистском движении точечного тела с массой покоя m_0 в одномерной потенциальной яме $U(x)$ в рамках пространственной модели 3 в математическом отношении сводится к совместному решению следующей системы уравнений:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{2\langle m\rangle}{\hbar^2}\left[E-U(x)\right]\varphi=0\,; \tag{3.14}$$

$$\langle m\rangle=m_0+\frac{1}{c^2}\left(E-\langle U\rangle\right); \tag{3.15}$$

$$\langle U\rangle=\frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}U(x)\varphi^2(x)dx}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi^2(x)dx}\,. \tag{3.16}$$

Математический формализм решения релятивистского уравнения (3.14) ничем не отличается от формализма решения нерелятивистского уравнения; релятивистские поправки возникают в процессе согласования решений (3.14) с двумя другими уравнениями (3.15)–(3.16). В простейших представлениях функции $U(x)$ релятивистская специфика решений, которая может быть выявлена в рамках данной методологии, определяется из решения нелинейных алгебраических уравнений относительно констант рассматриваемой конкретной задачи. Ниже мы рассмотрим примеры решения двух классических задач квантовой механики, используя, в том числе, и представленный выше вариант построения формализма RQM.

3.3. Релятивистский гармонический осциллятор

Рассмотрим решение релятивистской квантовой задачи для параболической потенциальной ямы вида $U(x)=\frac{1}{2}k_0x^2$, $k_0=const$, по методике, представленной выше. Поскольку последовательность решения определяется уравнениями (3.14)–(3.16), форма зависимости от x собственных функций φ будет совпадать с той, что дается известным решением нерелятивистской задачи при $\langle m\rangle = m$, однако зависимость собственных значений E_n от квантового числа n в силу учета зависимости (3.15) окажется иной.

Введем в (3.14) масштабы для x и E:

$$x_0 = \hbar^{\frac{1}{2}}\left(k_0\langle m\rangle\right)^{-\frac{1}{4}};\quad E_0 = \frac{1}{2}\hbar\left(k_0/\langle m\rangle\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.17}$$

и соответствующие безразмерные переменные

$$\xi = x/x_0;\quad \varepsilon = E/E_0. \tag{3.18}$$

В переменных (3.18) исходное уравнение приобретает простейший вид:

$$\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} + \left(\varepsilon - \xi^2\right)\varphi = 0;\quad \varphi = \varphi(\xi). \tag{3.19}$$

Решение данного уравнения общеизвестно, однако ниже мы получим его по несколько иной, упрощенной математической схеме, которая затем будет использована и при анализе более сложной задачи о кулоновском осцилляторе.

Найдем для начала простейшее частное решение уравнения (3.19), удовлетворяющее граничному условию $\varphi(\infty) = 0$. Таковым является $\varphi_0 = \exp\left(-a\xi^2\right)$, причем при $\xi \to 0$ имеем $\varepsilon = 2a$ в качестве следствия уравнения $\varphi'' + \varepsilon\varphi = 0$ (в дальнейшем используем обозначения $dF/dx = F'$; $d^2F/dx^2 = F''$). Далее, функция φ_0 является и частным точным решением (3.19) во всей области определения при $\varepsilon = 1$; $a = 1/2$. Отсюда следуют два логически необходимых вывода. Во-первых, мы имеем дело с задачей на собственные значения с дискретным спектром ε_n, одно из значений которого есть $\varepsilon = 1$. Во-вторых, форму общего решения уравнения (3.19) мы можем представить в виде:

$$\varphi(\xi) = G(\xi)\exp\left(-a\xi^2\right), \tag{3.20}$$

причем в силу четности потенциала $U\left(\xi^2\right)$ справедливо как вариант решения разложение $G(\xi)$ по четным степеням ξ в окрестности $\xi = 0$, т. е.

$$G(\xi) = \sum_k g_{2k}\xi^{2k};\quad k = 0,1,2,...;\quad g_0 = 1. \tag{3.21}$$

Найденное выше решение $\varepsilon = 1$ соответствует $G(\xi) \equiv 1$, а форма представления общего решения (3.20) согласуется с ним при $a = 1/2$.

Подставляя (3.20) в (3.19), получим следующее уравнение:

$$G'' - 4a\xi G' + (\varepsilon - 2a)G + \left(4a^2 - 1\right)\xi^2 G = 0. \tag{3.22}$$

Многочлен (3.21) относительно переменной ξ^2 произвольной степени дает разложение конечной функции $G\left(\xi^2\right)$ в малой окрестности $|\xi| \ll 1$. Если ограничить его степень произвольным показателем $\max(k) = n$, задающим точность разложения, то последний член в (3.22), пропорциональный $\xi^{2(n+1)}$ и при этом единственный, зависящий от потенциальной энергии ξ^2, должен быть отброшен, иначе говоря приравнен нулю, для чего следует положить $a = 1/2$ независимо от величины n.

Потребуем теперь, чтобы для конечного n функция (3.20) являлась точным решением уравнения (3.19), что возможно, если зануляются все коэффициенты при ξ^{2k}, $k \le n$. Данное условие при подстановке (3.21) в (3.22) приводит к рекуррентным соотношениям для коэффициентов g_{2k} следующего вида:

$$g_{2(k+1)} = \frac{(4k+1-\varepsilon)}{2(k+1)(2k+1)}\, g_{2k}\,. \tag{3.23}$$

Из (3.23), в частности, следует, что не только $g_{2(n+1)}$, но и все «виртуальные» g_{2k}, $k > n+1$, равны нулю, т. е. автоматически выполняется условие, при котором именно многочлен, а не бесконечный степенной ряд, представляет функцию $\varphi\left(\xi^2\right)$ в искомом точном решении. Соотношения (3.23), очевидно, справедливы для любых ξ в силу условия их вывода, в том числе и в пределе $|\xi| \to \infty$, поскольку $\xi^{2n}\exp\left(-\frac{1}{2}\xi^2\right) \to 0$ при $|\xi| \to \infty$ при любом конечном n.

При подстановке (3.23) в (3.22) для любого n мы получаем алгебраическое уравнение относительно ε степени $(n+1)$, которое имеет $(n+1)$ корень в качестве собственных значений ε, при которых существует решение исходного уравнения в виде (3.20). Согласно (3.23) собственные значения ε образуют спектр значений вида $\varepsilon = 4m+1$; $m = 0, 1, 2, \ldots, n$, т. е. $\varepsilon = 1, 5, 9, \ldots, 4n+1$. Обозначая $N = 2n$, искомое решение уравнения (3.19) для случая симметричных функций можно определить следующими алгебраическими соотношениями:

$$g_{2(k+1)} = -\frac{(N-2k)}{(k+1)(2k+1)}\, g_{2k}; \quad \varepsilon = 2N+1; \quad N = 0, 2, 4, 6, \ldots; \quad k \le N/2. \tag{3.24}$$

При $U \sim \xi^2$ с точки зрения отыскания решений уравнения (3.19) в виде четных функций $\varphi\left(\xi^2\right)$ подобласти определения $\xi \ge 0$ и $\xi \le 0$ совершенно эквивалентны. Аналогичное утверждение справедливо и для нечетных (антисимметричных) функций вида $\varphi = G\left(\xi^{2k+1}\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\xi^2\right)$; при этом следует учесть, что условие $a = 1/2$ является необходимым и для $\varphi \sim \exp\left(-a\xi^2\right)$, и для $\varphi \sim \xi\exp\left(-a\xi^2\right)$. Повторяя описанную выше математическую процедуру нахождения решений, получим окончательно:

$$g_{2(k+1)+1} = -\frac{(N-1-2k)}{(k+1)(2k+3)} g_{2k+1}; \;\; \varepsilon = 2N+1; \;\; N = 1, 3, 5, \dots; \;\; k \le \frac{N-1}{2}. \quad (3.25)$$

Отметим, наконец, что, как было показано выше (см. формулы (3.14)–(3.16)), «нормировка» собственных функций не имеет какого-либо содержательного смысла, поэтому можно просто положить $g_0 = g_1 = 1$.

С помощью (3.24)–(3.25) можно непосредственно убедиться в том, что $\langle U \rangle = \frac{1}{2} E$, и следовательно;

$$\langle m \rangle = m_0 + \frac{E_0 \varepsilon}{2c^2} = m_0 \left(1 + \frac{\hbar}{4 m_0 c^2} \sqrt{\frac{k_0}{\langle m \rangle}}\, \varepsilon \right). \quad (3.26)$$

Рассмотрим два представляющих интерес предельных случая.

Слабый релятивизм, $E / 2m_0c^2 \ll 1$

Обозначая $E_* = \frac{1}{2} \hbar \sqrt{k_0 / m} = s\omega_0$, из (3.17) получим:

$$E_0 \approx E_* \left(1 - \frac{1}{4} \frac{E_0 \varepsilon}{m_0 c^2} \right);$$

откуда, учитывая зависимость $\varepsilon(N)$, имеем окончательно:

$$E \approx (2N+1) E_* \left[1 - \frac{1}{4} (2N+1) \frac{E_*}{m_0 c^2} \right]; \;\; N = 0, 1, 2, \dots \quad (3.27)$$

$$\Delta E = E_{N+1} - E_N \approx 2E_* \left[1 - (N+1) \frac{E_*}{m_0 c^2} \right]. \quad (3.28)$$

Следовательно, с точностью до членов, пропорциональных $E_* / m_0 c^2$, решение нерелятивистского уравнения Шредингера конкретно в отношении энергетического спектра E_N должно быть заменено на (3.27) — (3.28), содержащее релятивистские поправки, пропорциональные отношению энергии нулевых колебаний $E_* = \frac{1}{2} \hbar \omega_0$ в нерелятивистском приближении к энергии покоя частицы $m_0 c^2$. Эти поправки и характеризуют реальную точность нерелятивистского решения задачи о гармоническом осцилляторе. Релятивистские поправки могут быть оценены и по методике, изложенной в п. 2.7, в том числе и в случае учета ангармонизма.

В следующей главе мы вернемся к задаче о нахождении зависимости $E(N)$ в данном приближении, используя иную методику, которая будет первоначально опробована при расчете релятивистских поправок к энергетическому спектру водородоподобного атома.

«Ультрарелятивизм», $E / 2m_0c^2 >> 1$

В этом случае $\langle m \rangle \approx E / 2c^2$, и после преобразований, выражая k_0 через E_*, получим:

$$E \approx 2E_* \left(\frac{m_0c^2}{E_*} \right)^{\frac{1}{3}} \left(N + \frac{1}{2} \right)^{\frac{2}{3}}. \tag{3.29}$$

При $N >> 1$ имеем:

$$\Delta E \approx \frac{4}{3} E_* \left(\frac{m_0c^2}{E_*} \right)^{\frac{1}{3}} N^{-\frac{1}{3}}. \tag{3.30}$$

3.4. Релятивистский электрон в кулоновском поле притяжения

Рассмотрим теперь значительно более сложную и концептуально более содержательную задачу о расчете энергетического спектра релятивистского электрона с электрическим зарядом $-q$ в поле $U_q = -Zq^2 / r$, где Z — заряд массивного ядра (центра притяжения) в единицах $+q$, т. е. задачу о водородоподобном атоме. Поле полагается сферически симметричным.

В трехмерной пространственной конфигурации (чем, собственно, данная задача принципиально отличается от рассмотренных выше двух других) при анализе движения электрона необходимо рассматривать такую его сугубо механическую характеристику, как «орбитальный» момент количества движения $\vec{L}$ относительно притягивающего центра. С точки зрения расчета энергетического спектра атома учет наличия величины $\vec{L}$, с которой связана в классике кинетическая энергия орбитального движения электрона, становится очевидно необходимым. Стационарные состояния описываются соответствующими функциями, отражающими метрику пространственной конфигурации, и прежде всего число независимых пространственных измерений. А именно, заведомо следует предполагать, что число квантовых чисел, определяющих собственные значения задачи, совпадает с числом измерений, т. е. для сферически симметричной конфигурации число подобных переменных чисел, имея в виду их наборы, равно трем. Кроме того, поскольку спин $\vec{S}$ как аналогичная $\vec{L}$ по механическому смыслу физическая характеристика электрона может складываться с $\vec{L}$ векторным образом, то следует предполагать существование влияния подобного взаимодействия векторов на энергетический спектр атома. Последнее означает, что в силу физической независимости $\vec{S}$ от $\vec{L}$ к трем вышеназванным квантовым числам добавится четвертое, связанное исключительно со свойствами спина.

3.4.1. Орбитальный момент количества движения

Существование минимального собственного момента количества движения квантовой точечной частицы, равного по абсолютной величине $\hbar/2$, определяет принципиальную дискретность механического момента количества движения $\vec{L}$, пропорциональную $\hbar$, т. е. $|\Delta L| \sim \hbar$. Поскольку спин $s = \pm\hbar/2$ неуничтожим, как и масса покоя m_0, в рассматриваемых нами моделях механического движения, не учитывающих взаимопревращение частиц, то, очевидно, $\min(\Delta L) = \Delta s = \hbar$. Это означает, что при любом произвольном выборе направления пространственной оси, к примеру z, относительно которой определяется (или регистрируется) суммарный момент электрона $\vec{J}$ с его независимым от ориентации оси z направлением, дискретизация проекции J_z определяется значениями ряда $\pm\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}; \ldots\right)\hbar$. Данного утверждения, вообще говоря, вполне достаточно для установления формы записи уравнения Шредингера применительно к поставленной задаче, минуя довольно сложную математическую процедуру анализа угловой части функции состояния φ (так наз. шаровых функций в полярной системе координат). Этот вопрос, соблюдая корректность логики структурного построения материала книги, более подробно будет исследован далее в соответствующих разделах книги. Здесь же мы рассмотрим стационарное уравнение Шредингера в его трехмерном варианте, в котором изначальная «спиновость» пространственной (квантовой) механической модели 3 проявляется исключительно в виде наличия в уравнении абсолютной величины удвоенного спина, т. е. постоянной Планка $\hbar$ как мировой константы. Поэтому, хотя понятие спин и было задействовано при выводе уравнения Шредингера, логически более последовательно не использовать в анализе векторных свойств спина электрона в явном виде, ограничившись утверждением, что «несобственный», т. е. не связанный со спином $\vec{S}$, момент количества движения $\vec{L}$ может иметь как вектор измеряемую в качестве реальной физической величины проекцию на произвольную пространственную ось z, соответствующую числовому ряду $L_z = \pm(0, 1, 2, \ldots)\hbar$. Иное принципиально несовместимо с понятием спин и, следовательно, со свойствами математической структуры уравнения Шредингера. Именно такой простейший вариант релятивистской квантовой механики, прямо сводящийся к ее нерелятивистскому варианту в соответствии с представленной выше логической процедурой, рассматривается ниже.

Классический момент $\vec{L}$ является вектором, и поэтому в декартовых координатах имеет место равенство:

$$\left|\vec{L}\right|^2 = L^2 = L_x^{\,2} + L_y^{\,2} + L_z^{\,2}, \tag{3.31}$$

причем на величину $L^2 - L_z^2$, вообще говоря, не накладывается никаких ограничений, кроме очевидного $|L_z| \le |L|$. Присущая модели 3 дискретизация $\vec{L}$ в корне меняет классическую взаимосвязь между L и L_i. Поскольку $|L_z|$ равно целому числу $\hbar$, включая 0, то величине модуля L вектора $\vec{L}$ соответствует максимально возможное значение его проекции $l\hbar$ (далее для простоты положим $\hbar = 1$), так что $L_z = \pm(0, 1, 2, \ldots, l-1, l)$ — всего $2l+1$ возможных значений проекции $\vec{L}$ на ось z.

Пусть $L_z = l$. Отсутствие максимального значения проекции $L_z = l$ означает отсутствие самого модуля L, поэтому необходимо выполняется $L \sim l$. Следовательно, мы можем записать, что $L^2 = l(l+f)$, и тогда имеет место равенство $L^2 - l^2 = lf = L_x^2 + L_y^2$. О величине f можно высказать следующие утверждения.

Во-первых, $f \ne 0$; в противном случае мы вынуждены допустить возможность абсолютно точного совмещения направлений двух физически реальных (измеряемых) векторов, исходящих из одной точки, что несовместимо с наличием спина и, как следствие, неравенства Гейзенберга (см. гл. 2). Данное утверждение означает, помимо прочего, что физически невозможно посредством точечного тела, посылая его из одной точки многомерного пространства в другую, «прочертить» прямую линию между ними даже в отсутствие сторонних силовых полей. Уже по одной только этой причине классическая евклидовость пространства не может быть установлена средствами механики в «квантовых» пространственных масштабах, к примеру, в масштабах, сравнимых с боровским радиусом атома водорода, т. е. именно в тех, которые и характерны для рассматриваемой здесь задачи. Следовательно, в многомерных квантовых задачах соотношения вида (3.31), справедливые для точечной модели 1, могут быть распространены на условия применимости пространственной модели 3 только в качестве постулата, который и предполагается неявно при замене в уравнении Шредингера производной $\partial^2\Psi / \partial x^2$ на лапласиан $\Delta\Psi$.

Во-вторых, f может быть только целым числом, а дробь может появиться только при явном учете величины спина $s = \hbar / 2$ и его свойств во всех количественных соотношениях, чего мы не делаем. Действительно, в силу произвольности выбора оси проектирования вектора $\vec{L}$ таковой можно считать любую из трех, ортогональных между собой. Поэтому условие целочисленности проекции L_z справедливо и для L_x и L_y при неизвестном соотношении между ними. Иными словами, соотношение (3.31) справедливо только в трехмерном пространстве и только в целых числах при множественности решений.

В-третьих, условие $\max L_z = l$ означает справедливость неравенства $l^2 < L^2 < (l+1)^2$, из которого следует неравенство $lf < 2l+1$, выполняемое только при двух, исключая 0, значениях f: 1 или 2. При $f = 1$ имеем $L^2 = l(l+1)$, поэтому на сумму квадратов остальных двух проекций L_x и L_y

имеем l. Полагая $l=1$, получим $\max L_z^2=1$ и $L_x^2+L_y^2=1$, т. е. не нарушается неравенство $\max L_z \geq L_x, L_y$ для любых $l \geq 1$; в противном случае $L_z=l$ нельзя было бы рассматривать в качестве максимального значения проекции $\vec{L}$ на произвольную ось. (В двумерном пространстве при $l=1$ мы бы получили $L_z=L_x=1$, что невозможно по указанным выше причинам. Данное обстоятельство является еще одним следствием того факта, что, как и спин, описываемый только в пространстве трех измерений, уравнение Шредингера также трехмерно, т. е. квантовая механика, отвечающая модели 3, может быть логически последовательно, включая логическое постулирование самого евклидового пространства, построена только в трехмерном варианте, как, собственно, и релятивистская механика модели 1.) Напротив, при $f=2$ имеем $L_x^2+L_y^2=2l$. Полагая вновь $l=1$, получим $\max L_z^2=1$ и $L_x^2+L_y^2=2$; следовательно, возможны варианты $L_x>L_z$ или $L_y>L_z$, что противоречит условию максимальности L_z. Таким образом, единственно возможным оказывается значение $f=1$ и, следовательно, для величины модуля «орбитального» момента количества движения имеем формулу:

$$L=\hbar\sqrt{l(l+1)};\quad L_z=\hbar m;\quad -l\leq m\leq l. \tag{3.32}$$

Фактически вывод данной формулы, имеющей важнейшее значение в нерелятивистской квантовой теории атома, мы получили в форме решения логической задачи, основываясь на понятии спин как имманентной точечному телу механической характеристике, что эквивалентно введению неравенства Гейзенберга. При этом нам не потребовалось обращаться к уравнению Шредингера по вполне понятным причинам, поскольку и формула (3.32), и уравнение Шредингера, и неравенства Гейзенберга имеют своими источниками одни и те же фундаментальные основания.

С величиной L в классике связана энергия, которую обычно именуют центробежной. Если рассмотреть движение частицы массой m вокруг притягивающего центра по круговой орбите радиуса r, то из уравнения

$$\frac{mv^2}{r}=-\frac{\partial U_{цб}}{\partial x}=\frac{L^2}{mr^3}$$

можно получить формулу для центробежной энергии $U_{цб}$ вида

$$U_{цб}=\frac{L^2}{2mr^2}.$$

Подставляя сюда выражение для квантовой величины L (3.32), мы приходим к выводу, что учет орбитального движения производится простой добавкой к U_q классического вида классического же члена, в котором классическая величина L^2 заменена ее квантовомеханическим аналогом:

$$U(r)=-\frac{Zq^2}{r}+\frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2}. \tag{3.33}$$

Профиль $U(r)$, согласно (3.33), имеет вид потенциальной ямы в области $U < 0$, в которой решение уравнения Шредингера теперь уже только для одной радиальной части функции φ позволяет найти дискретный спектр энергий E.

При выводе формулы (3.33), которая должна представлять в уравнении Шредингера «эффективную» потенциальную энергию $U(r)$, мы ограничились только круговыми стационарными орбитами, тогда как классика допускает и стационарные эллиптические орбиты. Последние, однако, вносят в модель 3 не соответствующую ей пространственную детализацию, нарушая сферическую симметрию и полную равноправность всех ориентаций декартовой системы отсчета и, что более важно, ее осей x, y, z, что подразумевает запись формулы (3.31); следовательно, эллиптические орбиты должны быть исключены из дальнейшего анализа. Таким образом, формула (3.33) основывается на определенных постулатах, имеющих классическое происхождение, что противоречит принципу независимости описаний, даваемых предельными моделями 1 и 3. Сказанное означает, что решение поставленной задачи исключительно в рамках модели 3 должно прямо подтвердить справедливость полученных выше результатов посредством использования независимой и однозначной математической процедуры решения уравнения Шредингера.

Относительно вывода формул (3.32) — (3.33) необходимо сделать два замечания принципиального характера. Вывод формулы (3.32) основан на анализе возможных соотношений в области «малых» величин параметра l, включая $l = 0$ и $l = 1$. Разумеется, исключение из ряда допустимых значений L_z спинового числа 1/2, сопоставимого по величине с 1 и структурно с ней совместимого $(2 \times 1/2 = 1)$, является проявлением некоторой логической непоследовательности. Оправданием ее допустимости может служить тот факт, что в стационарной форме уравнения Шредингера понятие спин как бы «вырождается», хотя и является необходимым основанием для его вывода; иными словами, спин латентно учитывается во всех логико-математических действиях, равно как и прямое его следствие — неравенство Гейзенберга. Принимая во внимание данные рассуждения, следует ожидать, что с точки зрения сущности формулы (3.32) должно быть справедливо утверждение, что при $l \to \infty$ «неточность» совмещения вектора $\vec{L}$ с его проекцией L_z стремится к величине $s = \hbar/2$ независимо от того, учитывается 1/2 в ряду числового ряда значений L_z или нет. При $l \to \infty$ из (3.32) имеем:

$$L = \hbar l\sqrt{1 + 1/l} \approx \hbar l\left(1 + \frac{1}{2l}\right) = l\hbar + \frac{1}{2}\hbar . \tag{3.34}$$

Следовательно, $\min(\Delta L) = L - L_z(m = l) = \frac{1}{2}\hbar$ при $l \gg 1$. Данный результат, очевидно, является существенным логическим аргументом в пользу справедливости формулы (3.33), точнее говоря, ее общепринятой трактовки как классического аналога. Собственно говоря, мы имели полное право при определении величины f использовать условие $\Delta L_{l\to\infty} = \hbar/2$, из которого сразу следует $f=1$. Таким образом, данное равенство удовлетворяет условию стыковки квантовой и классической моделей описания механических состояний в пределе больших квантовых чисел, что эквивалентно большим размерам эффективной области определения функции состояния.

Другое замечание касается «неклассичности» формулы (3.33), заключающееся в существовании варианта $l=0$, т. е. $L=0$. Действительно, с точки зрения классики $L = mvr$, и равенство нулю L означает отсутствие движения вообще вокруг силового центра по орбите ненулевого радиуса. Данное обстоятельство обычно трактуется в качестве принципиальной несовместимости классической и квантовой механических моделей. При этом, однако, не рассматривается вариант совмещения разноразмерных моделей. Действительно, $L=0$ в классическом понимании означает одномерное движение, в случае стационарности сводящееся к колебаниям материальной точки вдоль оси x (или r) в силовом поле вида (3.33). Заметим, что в пределе $L \to 0$ мы приходим к классической одномерной задаче об упругом отражении электрона от притягивающего центра в процессе колебаний, т. е. в решении учитывается движение в малой окрестности вблизи центра. Ту же ситуацию мы имеем и при решении уравнения Шредингера, поскольку областью определения функции состояния φ является $0 \le r \le \infty$.

Не видно явных логических противоречий и в обратном утверждении: одномерным квантовым движениям можно сопоставить многомерные классические и, следовательно, квантовые движения. Данный вопрос в силу его важности требует специального логического анализа хотя бы в самых общих чертах.

3.4.2. Взаимосвязь одномерной и трехмерной конфигураций в квантовомеханических задачах

Проведенный выше предварительный анализ задачи о движении электрона в кулоновском поле неподвижного притягивающего центра, характеризующейся сферической симметрией, дает основание для вывода о том, что при расчете энергетического спектра системы в качестве единственного точно определяемого (и потому измеряемого) физического параметра трехмерность задачи, вообще говоря, несущественна. Действительно, форма задания орбитального момента, определяемая одномерной формулой (3.33), позволяет ввести в рассмотрение некий аналог потенциальной энергии, также одномерный, а вся его трехмерная специфика выражается совокупностью натуральных чисел l и m, напрямую не связанной с достаточно строго определяемым в классике геометрическим понятием размерности. Эта специфика есть следствие специфики параметра спин, трехмерного по своему физическому происхождению, но в «классической» трехмерной геометрии не описываемого. Уже поэтому у нас нет достаточных оснований для придания многомерным математическим процедурам решения уравнения Шредингера какого-либо точно определенного смысла, начиная с вопроса о корректности использования декартовых или полярных систем координат в ситуации, когда постулат о возможности точного совмещения векторов физически не реализуется, вследствие чего теряет точный смысл и представление о параллельности прямых, на котором основана геометрия Евклида. И если мы выше использовали, к примеру, правило сложения ортогональных векторов (3.31), то его справедливость в рассматриваемой ситуации обязана именно тому, что этому правилу в квантовой механике подчиняется и спин как латентный фундаментальный векторный параметр.

Трехмерные геометрии механических точечной и пространственной моделей (или классической и квантовой) различаются принципиально, и сущность этого различия не сводится только лишь к «оцифровке» классики. В рассматриваемой задаче классическое движение электрона описывается эллипсом — принципиально двухмерной фигурой, форма которой в квантовой модели отражается числом l (при его интерпретации на основе модели Бора–Зоммерфельда), и вопрос заключается лишь в том, зависит ли спектр энергий от l? Совершенно очевидно при этом, что наклон проскости орбиты электрона к произвольно выбранной пространственной оси с полной механической энергией электрона никак не связан, поэтому магнитное число m, характеризующее указанный наклон, в определение спектра энергий не входит. Поскольку из уже известного решения уравнения Шредингера следует, что спектр энергий не зависит и от l для кулоновского взаимодействия, то мы приходим к выводу, что трехмерной (или двухмерной) классической задаче соответствует в смысле определения энергетического спектра одномерная квантовая задача, в которой фигурирует сумма электрической и центробежной потенциальных энергий, сугубо классических по форме зависимости от радиуса сферы как единственного переменного геометрического параметра. При этом открытым является вопрос о необходимости использовать в одномерной задаче полученные выше независимо от любой процедуры решения уравнения Шредингера соотношения (3.32) и (3.33).

В качестве дополнительной аргументации высказанных выше утверждений вернемся к рассмотренной нами в п. 3.3 одномерной задаче о гармоническом осцилляторе и сопоставим с ней ее трехмерный классический аналог. Пусть между центром сферической симметрии и вращающимся вокруг него (в рамках классической модели 1) точечным телом имеется силовая связь вида $F = -\partial U / \partial r = -k_0 r$. Момент количества движения

$L = mvr = const$ (орбитальный момент) полагается заданным параметром задачи, для которого справедлив закон сохранения в поле центральных сил как следствие однородности пространства в симметричных конфигурациях. Параметры $r = R$ и $v = v_R$ стационарных круговых орбит определяются путем совместного решения уравнений

$$\frac{mv_R^{\ 2}}{R} = k_0 R; \quad L = mv_R R, \tag{3.35}$$

откуда имеем:

$$R = \left(\frac{L^2}{mk_0}\right)^{\frac{1}{4}}; \quad \frac{v_R}{R} = \omega_0 = \sqrt{\frac{k_0}{m}}; \tag{3.36}$$

при этом

$$W_R = U_R = \frac{1}{2} L\omega_0; \quad E_R = W_R + U_R = L\omega_0, \tag{3.37}$$

где E_R — полная механическая энергия стационарного (в классическом смысле) состояния. Сопоставление данной модели с квантовой осуществляется однозначно, если в классику ввести дополнительный имманентный телу параметр — минимальный момент $L_{\min} = \hbar / 2$, численно равный модулю спина основных элементарных частиц. Подставляя $L_{\min}$ в (3.37), мы получаем значение минимально возможной полной энергии стационарного состояния $E_0 = W_{R\min} = \frac{1}{2}\hbar\omega_0$, а учитывая условие $\Delta L = 2s = \hbar$, также связанное с физикой спина, и весь спектр энергий гармонического осциллятора. Таким образом между классической сферически симметричной задачей и ее одномерным квантовым аналогом имеется однозначное соответствие, вполне понятное с точки зрения его физической интерпретации. В этой связи уместно отметить, что сама возможность указанного прямого соответствия классического и квантового описаний отрицается в традиционном изложении курса нерелятивистской квантовой механики, что является следствием формального отрицания жесткой взаимосвязи структуры уравнения Шредингера и физического параметра спин или, что то же самое, игнорирования объективно существующей указанной связи; даже терминологически это подчеркивается утверждениями об изначально «бесспиновой» форме уравнений Шредингера и Клейна–Гордона.

Точное соответствие между CM и QM при их рассмотрении в разных пространственных конфигурациях идет, однако, значительно дальше. Действительно, представим себе, что в рассматриваемом классическом примере произошло возмущение стационарного состояния без изменения L, причем это возмущение мало, т. е. $|\delta E_R / E_R| \ll 1$, и, следовательно, $|\delta r / R| \ll 1$. При этом возникает возвращающая к уровню $r = R$ сила

$\delta F = \left| mv^2 / r - k_0 r \right|$, что приводит к возникновению колебаний тела в радиальном направлении. С точностью до членов порядка $\delta r / R$ мы получаем уравнение гармонических колебаний

$$\frac{d^2 \delta r}{dt^2} + 4\omega_0{}^2 \delta r = 0 \tag{3.38}$$

с частотой $\omega = 2\omega_0$. Минимальный уровень энергии $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega_0$; квант энергии возмущения, не изменяющий стационарности состояния системы — это $\Delta E = \pm\hbar\omega_0$, что справедливо, разумеется при достаточно больших L. Реально мы имеем

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{R_{l+1} - R_l}{R_{l+1}} = 1 - \left(\frac{l}{l+2}\right)^{\frac{1}{4}}, \tag{3.39}$$

и уже при $l = 1$ отношение $\Delta R / R \approx 1/4$, поэтому $\Delta E = \pm\hbar\omega_0$ даже при анализе модели 1 справедливо во всем диапазоне $l \geq 1$, если учесть, что колебания на уровне E_0 невозможны в силу запрета, налагаемого неравенством Гейзенберга.

Мы предполагали при выводе формулы $\omega = 2\omega_0$, что возмущение орбиты не изменяет величины L. Если рассмотреть задачу, связанную с возмущением орбиты путем мгновенного изменения орбитальной скорости, т. е. с изменением величины $L = L_R + \delta L$; $\delta L = mR\delta v_R$, то можно непосредственно убедиться в том, что и в этом случае возникают колебания орбиты с частотой $\omega = 2\omega_0$ относительно нового положения равновесия $r = R + \delta R$. Поэтому различные типы энергетических возмущений не влияют на результат, заключающийся в определенной выше дискретности уровней энергии. При этом имеет место неопределенность положения соседних уровней δR, что вполне соответствует неравенству Гейзенберга.

Таким образом, точное решение одномерной квантовомеханической задачи имеет физически приемлемое соответствие в двух-трехмерной конфигурации чисто классического характера. Этого и следовало ожидать, если учесть, что использование представления о спине $\left|\vec{S}\right| = \hbar / 2$ вместо феноменологической константы $\hbar$ определяет принципиальную трехмерность QM даже в ее одномерном варианте. Данное утверждение позволяет сделать и еще один вывод: решения относительно энергетического спектра в одномерной и трехмерной конфигурациях могут совпадать при наличии определенных условий. Сказанное мы проверим в процессе решения рассматриваемой в данном параграфе задаче о водородоподобном атоме путем непосредственного анализа уравнения Шредингера.

3.4.3. Нерелятивистское приближение

Трехмерное стационарное уравнение Шредингера для случая сферически симметричного потенциала $U(\vec{r}) = U(r)$ есть

$$\Delta\varphi + \frac{2m}{\hbar^2}\left[E - U(r)\right]\varphi = 0. \tag{3.40}$$

Лапласиан $\Delta\varphi$ в сферических координатах записывается в виде:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\Delta_\theta\varphi, \tag{3.41}$$

где $\Delta_\theta\varphi$ — угловая часть $\Delta\varphi$, не содержащая r явно (помимо φ), а Δ_θ — условное обозначение соответствующего дифференциального оператора, вид которого мы не будем конкретизировать, полагая на основании приведенных выше аргументов, что при решении поставленной задачи он нам вообще не понадобится.

Представим, как обычно, функцию φ в виде произведения ее радиальной $\phi(r)$ и угловой φ_θ частей:

$$\varphi = \phi(r)\varphi_\theta \tag{3.42}$$

и подставим (3.42) в (3.40) с лапласианом вида (3.41). В силу независимости радиальной и угловой частей можно записать:

$$\frac{1}{\phi}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\phi}{dr}\right) + \frac{2m}{\hbar^2}r^2\left[E - U(r)\right] = -\frac{1}{\varphi_\theta}\Delta_\theta\varphi_\theta = \lambda, \tag{3.43}$$

где λ — безразмерная величина, которая вместе с E также подлежит определению. Таким образом, нам необходимо решать следующее уравнение для ϕ:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\phi}{dr}\right) + \frac{2m}{\hbar^2}\left[E - \left(U + \frac{\lambda\hbar^2}{2mr^2}\right)\right]\phi = 0. \tag{3.44}$$

Введем новую функцию $F(r) = r\phi$. Уравнение (3.44) для F приобретает вид:

$$F'' + \frac{2m}{\hbar^2}\left[E - \left(U + \frac{\lambda\hbar^2}{2mr^2}\right)\right]F = 0, \tag{3.45}$$

где, как и прежде, $F'' = d^2F/dr^2$.

Мы получили уравнение для функции $F(r)$, по форме представляющее собой одномерное уравнение Шредингера, в котором $r \equiv x$ рассматривается уже в качестве декартовой координаты (при равнораспределении всех параметров задачи по двум другим координатам y и z), а потенциальная энергия U заменена на сумму $U + U_{цб} = U_{эфф}$, где $U_{цб}$ — это центробежная энергия, введенная в п. 3.4.1. Очевидно, что функции F и ϕ с точки зрения определения любых «средних» в качестве функций вероятности эквивалентны, поскольку соответствующие пространственные трехмерный и одномерный интегралы пропорциональны между собой:

$$4\pi\int\phi^2 r^2 dr \sim \int F^2 dr\,.$$

Таким образом, одномерное уравнение (3.45) для определении спектра энергий эквивалентно исходному уравнению (3.43).

При $U = -Zq^2 / r$ (3.45) приобретает окончательный вид:

$$F'' + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E + \frac{Zq^2}{r} - \frac{\lambda\hbar^2}{2mr^2}\right)F = 0\,, \tag{3.46}$$

где $U_{эфф} = -\dfrac{Zq^2}{r} + \dfrac{\lambda\hbar^2}{2mr^2}$.

И по форме, и по смыслу $U_{эфф}$ совпадает с выражением (3.33), где в качестве числового параметра λ фигурирует $l(l+1)$. Однако, как уже отмечалось выше, формулы (3.32) и (3.33) получены с использованием дополнительных утверждений логического характера, поэтому желательно получить выражение для λ через квантовое число l непосредственно в процессе решения уравнения (3.46). Тем самым будет доказана и правомерность сопоставления одномерных и трехмерных геометрий как в рамках одной, так и разных механических моделей описания.

Введем масштабы для новых безразмерных переменных:

$$r_0 = \frac{\hbar^2}{Zmq^2};\; E_0 = \frac{Z^2mq^4}{2\hbar^2};\; \xi = r / r_0;\; \varepsilon = -E / E_0\,. \tag{3.47}$$

Преобразуя (3.46) с использованием (3.47), получим простейший вид безразмерного уравнения для искомой функции $F(\xi)$:

$$F'' + \left(-\varepsilon + \frac{2}{\xi} - \frac{\lambda}{\xi^2}\right)F = 0\,. \tag{3.48}$$

Для решения уравнения (3.48) применим методику, использованную при решении задачи о нахождении спектра энергий гармонического осциллятора. Учтем при этом, что в случае зависимости $U \sim \xi^2$ мы начинали формировать вид искомой функции по условию $\xi \to 0$, при котором $U \to 0$. Однако в данной задаче $U_{эфф} \to 0$ уже при $\xi \to \infty$, поэтому определение требуемой формы зависимости $F(\xi)$ следует начать именно с граничного условия $F \to 0$ при $\xi \to \infty$, справедливого для дискретного спектра энергий в потенциальной яме, описываемой функцией $U_{эфф}$ при $E < 0$ (или $\varepsilon > 0$).

В области $\xi >> 1$ можно пренебречь членом $U_{эфф}(\xi)$ в уравнении (3.48) и записать последнее в виде:

$$F'' - \varepsilon F = 0\,. \tag{3.49}$$

Частным решением уравнения (3.49), удовлетворяющим граничному условию при $\xi \to \infty$, является функция $\exp(-a\xi)$ при $a = \sqrt{\varepsilon}$, которая, следовательно, является асимптотическим решением уравнения (3.48):

$$F_\infty = \exp\left(-\sqrt{\varepsilon}\,\xi\right). \qquad (3.50)$$

Поскольку при $\xi \to 0$ $F_\infty \to 1$, то общее решение уравнения (3.48) в области $\xi << 1$ можно представить в следующем виде:

$$F = G(\xi)\exp\left(-\sqrt{\varepsilon}\,\xi\right), \qquad (3.51)$$

где

$$G(\xi) = \sum_k b_k \xi^k; \;\; k = 0,1,2,...$$

Сразу отметим, что $b_0 \neq 0$ не удовлетворяет уравнению (3.48) при $\xi \to 0$ для любых λ, поэтому в (3.51) запишем ряд $G(\xi)$ в иной форме, сохранив обозначение для G:

$$G(\xi) = \xi \sum_k b_k \xi^k; \;\; k = 0,1,2,... \qquad (3.52)$$

Умножим исходное уравнение (3.48) на ξ^2, чтобы избавиться от отрицательных степеней аргумента:

$$\xi^2 F'' + \left(-\varepsilon\xi^2 + 2\xi - \lambda\right)F = 0\,. \qquad (3.53)$$

Подставляя (3.51) в (3.53), приходим к уравнению

$$\xi^2 G'' - 2\sqrt{\varepsilon}\,\xi^2 G' + (2\xi - \lambda)G = 0\,, \qquad (3.54)$$

которое можно записать в виде уравнения произвольной степени относительно ξ:

$$\sum_k c_k \xi^k = 0\,, \qquad (3.55)$$

где

$$c_k = \left[k(k+1) - \lambda\right]b_k + 2\left(1 - k\sqrt{\varepsilon}\right)b_{k-1}; \;\; b_{-1} = 0\,. \qquad (3.56)$$

В области малых ξ (т. е. при выполнении условия max $\xi = \xi_m << 1$) функцию F (ξ), определяемую через (3.51), можно представить в виде многочлена по ξ^k, степень которого ограничена некоторой величиной *max* $k = k_m$; при этом сумма всех отбрасываемых членов с ξ^k; $k > k_m$, определяет точность δ_m представления многочленом функции G (ξ), входящей в (3.51), и самой функции F:

$$\delta_m = \sum_{k_m+1}^{\infty} b_k \xi^k \Big/ \sum_{k=0}^{\infty} b_k \xi^k\,. \qquad (3.57)$$

При $\xi \to 0$ $\delta_m \to 0$ при любом k_m. Следовательно, если заданы ξ_m и k_m, то для произвольных $\xi \le \xi_m$ должно выполняться условие $c_k = 0$ при $k \le k_m$. При этом из (3.56) мы получаем рекуррентную связь между коэффициентами b_k, обеспечивающую выполнение данного условия:

$$b_k = -\frac{2\left(1 - k\sqrt{\varepsilon}\right)}{k(k+1) - \lambda} b_{k-1}; \quad b_{-1} = 0. \tag{3.58}$$

Потребуем теперь, чтобы $\delta_m = 0$, для чего, согласно (3.57), необходимо, чтобы все $b_k = 0$ при $k > k_m$. Указанное требование выполняется при условии $\varepsilon = 1/(k_m + 1)^2$, которое обеспечивает абсолютную точность искомого решения для функции в виде (3.51). Обозначая $k_m + 1 = n$, окончательно получаем для спектра допустимых значений ε_n формулу:

$$\varepsilon_n = 1/n^2; \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.59}$$

Условие (3.59), очевидно, является необходимым и для всего диапазона области определения $0 \le \xi \le \infty$ для $F(\xi)$ в форме (3.51), поскольку условия ограничения степени полинома $G(\xi^k)$ любой конечной величиной k_m достаточно для выполнения граничного условия $F(\xi \to \infty) \to 0$.

Соотношение (3.59) является необходимым, но не достаточным условием для существования стационарных состояний, описываемых соответствующими решениями уравнения (3.48). Достаточность обеспечивается очевидным дополнительным условием наличия хотя бы одного ненулевого коэффициента b_k при $k < n$ (или $k \le k_m$); в противном случае мы имеем $F(\xi) \equiv 0$, что равнозначно отсутствию объекта движения. Указанное условие достаточности можно удовлетворить только наложением определенных ограничений на величину λ.

Поскольку в (3.58) $b_{-1} = 0$, то появление первого ненулевого коэффициента b_k, согласно (3.58), возможно только при выполнении условия $k_\lambda(k_\lambda + 1) = \lambda$, причем одновременно должно выполняться условие $1 - k_\lambda\sqrt{\varepsilon} \ne 0$. При этом имеем $b_{k_\lambda} \sim 0/0$, т. е. произвольное число, которое в силу рассмотренных выше условий нормировки всегда можно положить равным 1. Таким образом, допустимые значения λ определяются через $\lambda = l(l+1)$, где $l = 0, 1, 2, \ldots$ При этом необходимо, чтобы выполнялось неравенство $l \le n - 1$.

Суммируя полученные выше результаты решения задачи, опишем характер зависимости функции состояния $F_{n,l}(\xi)$ от квантовых чисел n, l, определяемый рекуррентными соотношениями (3.58).

1. $\varepsilon = 1/n^2$; $n = k_m + 1 = 1, 2, 3, \ldots$

2. При $k \ge n$ $b_n = b_{n+1} = \ldots = 0$, т. е. степень полинома $G(\xi)$ на единицу ниже n.

3. При данном n $\lambda_{n,l} = l(l+1)$; $l \le n-1$, т. е. $\lambda_{n,l}$ может принимать значения только из ряда чисем $0, 2, 6, ..., (n-1)n$.

4. При данном $\lambda_{n,l}$ $b_l \ne 0$; $b_{l+1} \ne 0$; ...; $b_{n-1} \ne 0$; но $b_k = 0$ при $k < l$.

5. При данных n и l имеет место рекуррентное соотношение для определения коэффициентов b_k:

$$b_k^{n,l} = -\frac{2}{n}\frac{(n-k)}{\left[k(k+1) - l(l+1)\right]} b_{k-1}^{n,l}; \quad l \le n-1. \tag{3.60}$$

Таким образом, в стационарных условиях разрешенные значения ε_n не зависят от тех значений l, которые совместимы с решением для данного ε_n. Зависимость от l имеет место только для $F_{n,l}$.

В качестве наглядного примера использования соотношений (3.60) для определения вида $F_{n,l}$ проведем их расчет для случая $n = 3$.

$$b_k^{3,l} = -\frac{2}{3}\frac{(3-k)}{\left[k(k+1) - l(l+1)\right]} b_{k-1}^{3,l}; \quad \sqrt{\varepsilon_3} = \frac{1}{3}.$$

$$l = 0: \; b_0^{3,0} = 1; \; b_1^{3,0} = -\frac{2}{3}; \; b_2^{3,0} = \frac{2}{27}.$$

$$l = 1: \; b_0^{3,1} = 0; \; b_1^{3,1} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{0}\cdot 0 \to 1; \; b_2^{3,1} = -\frac{1}{6}.$$

$$l = 2: \; b_0^{3,2} = 0; \; b_1^{3,2} = 0; \; b_2^{3,2} = \frac{0}{0} \to 1.$$

$$F_{3,0} = \xi\left(1 - \frac{2}{3}\xi + \frac{2}{27}\xi^2\right)e^{-\xi/3}; \; F_{3,1} = \xi^2\left(1 - \frac{1}{6}\xi\right)e^{-\xi/3}; \; F_{3,2} = \xi^3 e^{-\xi/3}.$$

В заключение отметим, что полученное выше решение одномерной задачи с кулоновским потенциалом полностью эквивалентно решению трехмерной задачи с использованием сферических координат, стандартная процедура которого предусматривает раздельный анализ уравнений для угловой и радиальной частей. Отсутствие зависимости $F_{n,l}$ и ε_n от третьего квантового числа, соответствующего трехмерности сферической геометрии, объясняется очевидной произвольностью пространственной ориентации оси, соответствующей моменту $\left|\vec{L}\right| = \hbar\sqrt{l(l+1)}$; при этом радиальные движения и их соответствующие квантовые числа n и l от указанной ориентации, физически ничем не выделенной, не зависят. Более того, доказанная на примере конкретной физически важной задачи эквивалентность разноразмерных геометрий с точки зрения модели 3 пространственной каузальности позволяет абстрагироваться от каких-либо аналогий с соответствующими характеристиками точечной (классической) модели 1, как то круговые и эллиптические орбиты, наклон их плоскостей по отношению к заданной пространственной оси и т. п. При этом решение квантовой задачи по простоте и наглядности не уступает классическому, если пользоваться предложенной выше логико-математической процедурой, а не традиционной, использующей достаточно сложные математические методы анализа трехмерных квантовых задач.

3.4.4. Оценка релятивистского смещения уровней энергии

Решение системы уравнений (3.14) — (3.16) применительно к рассматриваемой задаче можно выполнить аналогично случаю гармонического осциллятора, опираясь на решение нерелятивистской задачи, когда $m = m_0$. При этом возможны две процедуры отыскания решений. В уравнении (3.40), равно как и в формулах для масштабов (3.47), можно положить $m = \langle m \rangle$. При этом, очевидно, сохраняется форма нерелятивистского решения (3.59)–(3.60), также как и вырождение по орбитальному числу l, чем данный подход принципиально отличается от соответствующего решения уравнения Клейна–Гордона и, следовательно, с его помощью можно получить только лишь оценку релятивистского смещения уровней энергии.

Поскольку остается в силе равенство

$$\frac{\langle U \rangle}{E_o} = \int_0^\infty \left(-\frac{2}{\xi}\right) F^2 d\xi = -2\varepsilon = \frac{2E}{E_o};$$

то

$$\langle m \rangle = m_0 + \frac{1}{c^2} E_0 \varepsilon; \quad E = -\varepsilon E_0(\varepsilon), \tag{3.61}$$

то есть $E \neq E_n(1)/n^2$. Подставляя $\langle m \rangle$ из (3.61) в выражение для масштаба

$$E_0 = \frac{Z^2 q^4}{2\hbar^2} \langle m \rangle;$$

получим:

$$E_0 = \frac{E_*}{1 - \frac{E_*}{m_0 c^2} \varepsilon}; \quad E_* = \frac{Z^2 m_0 q^4}{2\hbar^2} = E_0(c \to \infty). \tag{3.62}$$

С точностью до первого порядка малого параметра $E_* / m_0 c^2$ из (3.62) имеем окончательно, учитывая $\varepsilon = 1/n^2$:

$$E_n \approx -\frac{E_*}{n^2}\left(1 + \frac{Z^2}{2n^2}\alpha^2\right); \quad \alpha = \frac{q^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}. \tag{3.63}$$

Решение уравнения Клейна–Гордона, как известно, в рассматриваемом приближении дает для E_{rel} следующую зависимость:

$$E_{n,l} \approx -\frac{E_*}{n^2}\left[1+\frac{Z^2\alpha^2}{n^2}\left(\frac{n}{l+1/2}-\frac{3}{4}\right)\right]. \tag{3.64}$$

Для «круговых орбит» при $l = n-1$ из (3.64) получаем:

$$E_{n,n-1} = -\frac{E_*}{n^2}\left[1+\frac{Z^2\alpha^2}{2n^2}\delta\right];\ \delta = \frac{(2n+3)}{2(2n-1)}. \tag{3.65}$$

Коэффициент $\delta(n)$ имеет следующие значения:

$\delta(1) = 5/2;\ \delta(2) = 7/6;\ \delta(3) = 9/10;\ \delta(4) = 11/14;\ldots;\ \delta(\infty) = 1/2$.

То есть решения (3.63) и (3.65) достаточно близки при $n = 2$ и 3 в отношении величины смещения уровней. Однако различие решений (3.63) и (3.64) в части зависимости $E(l)$ является принципиальным моментом, если учесть, что в обоих решениях пренебрегается спин-орбитальным взаимодействием, причем решение (3.64) дает расходящиеся с опытными данными результаты расщепления уровней, определяемого существованием зависимости E_{rel} от орбитального числа l.

Ценностная суть данной проблемы (именно проблемы в силу ее принципиальности), однако, заключается вовсе не в отсутствии согласования теории с экспериментом, на которое обычно прежде всего обращается внимание не только физиками, но и философами стихийно позитивистского толка в полном согласии с философами марксистской школы, воспитанными на признании опыта (практики) в качестве критерия истинности при изучении природы вещей. Решения (3.63) и (3.64) получены в одном и том же приближении первого порядка малости по параметру α^2, но отвечают разным механическим моделям. Система уравнений (3.14)–(3.16) полностью соответствует условиям модели 3, т. к. операция усреднения в законе сохранения механической энергии $E = \langle W\rangle + \langle U\rangle$ определяется как чисто квантовая процедура, соответствующая уравнению Шредингера. Напротив, уравнение Клейна–Гордона конструируется так, чтобы оно удовлетворяло принципу Лоренц-инвариантности, который, как было показано в главе 1, может быть логически последовательно введен в качестве дополнительного произвольного постулата в систему релятивистской механики только в рамках модели 1 точечной каузальности, полярной в отношении модели 3 пространственной каузальности. Следовательно, уравнение Клейна–Гордона является симбиозом двух полярных по своим логическим основам построения механических моделей, т. е. эклектической по смыслу конструкцией, поскольку в ней не используется понятие о спине, позволяющее дать логическое основание для подобного объединения противоположных моделей. Сказанное, разумеется, не означает, что формула (3.64) не обладает содержательным смыслом в силу присущей ее выводу алогичности моделирования. Ниже будет показано, что она может быть выведена без использования принципа Лоренц-инвариантности. Тем самым удается уменьшить степень «эклектичности» RQM, обеспечив при этом необходимую для практики расчетов атомных систем точность конечных результатов.

Рассмотрим иной путь решения системы (3.14) — (3.16), при котором зависимость $\langle m \rangle$ от $\langle W \rangle$ учитывается непосредственно в уравнении Шредингера при $m \equiv \langle m \rangle$, тогда как масштабы переменных r_0 и E_0 сохраняются теми же, что и в нерелятивистской теории, где $m \equiv m_0$. Формально он, конечно, тождествен рассмотренному выше, однако его математическая структура в дальнейшем окажется полезна при обосновании более точной процедуры учета релятивистских поправок.

Проведя разделение радиальной и угловых переменных и положив в (3.43) $m = m_0 + \left(E - \langle U \rangle\right) / c^2$, для функции $F = r\phi(r)$ получим следующее уравнение:

$$F'' + \left[-(1+\beta)\varepsilon + \frac{2(1+\beta)}{\xi} - \frac{\lambda}{\xi^2}\right]F = 0\,, \tag{3.66}$$

где безразмерные переменные определяются через (3.47) при $m = m_0$, а $\beta = \langle W \rangle / m_0 c^2$ является, как и λ, искомым числовым параметром решения уравнения (3.66).

То, что релятивистский параметр β не входит в качестве слагаемого с λ в член в уравнении (3.66), пропорциональный $1/\xi^2$, определяет сохранение вырождения по l и в данном варианте решения. Это легко проверить, используя процедуру решения уравнения (3.66), аналогичную той, что была применена выше для нерелятивистского случая.

В пределе $\xi \to \infty$ (3.66) сводится к уравнению $F'' = (1+\beta)\varepsilon F$, решением которого является $F_\infty = \exp\left(-\sqrt{(1+\beta)\varepsilon}\,\xi\right)$. Полагая $F(\xi) = G(\xi)F_\infty$, где G задается формой (3.52), с помощью (3.66) получаем следующие рекуррентные соотношения:

$$b_k = -\frac{2(1+\beta)\left(1 - k\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{1+\beta}}\right)}{k(k+1) - \lambda}\, b_{k-1}\,. \tag{3.67}$$

Из (3.67) автоматически следует, что

$$\varepsilon_n = \frac{1+\beta}{n^2};\ \ \lambda = l(l+1);\ \ l \le n-1\,. \tag{3.68}$$

Можно непосредственно убедиться в справедливости вириальной теоремы, согласно которой $\langle 2/\xi \rangle = 2\varepsilon$; следовательно,

$$\left\langle \frac{W}{E_o} \right\rangle = \varepsilon; \;\; \beta = \frac{1}{2} Z^2 \alpha^2 \varepsilon , \tag{3.69}$$

откуда, подставляя (3.69) в (3.68), немедленно получаем окончательное решение, совпадающее с полученным выше в форме (3.62)–(3.63).

Таким образом, мы убедились в том, что развитая выше методика учета релятивистских поправок, сохраняющая характерную для нерелятивистского уравнения Шредингера линейность относительно $U(r)$, не приводит к снятию вырождения по орбитальному числу l. Напротив, требование обеспечения Лоренц-инвариантности нестационарного (т. е. содержащего производные Ψ по времени) уравнения приводит к появлению в стационарном уравнении члена, пропорционального $\left(E + m_0 c^2 - U\right)^2$, т. е. делает его нелинейным по U, что противоречит логике вывода уравнения Шредингера, реализованной в гл. 2. Именно указанная нелинейность уравнения Клейна–Гордона по U и ответственна за появление зависимости уровней энергии $E_{n,l}$ не только от n, но и от l. В этой связи еще раз отметим, что вследствие принципиальной невозможности осуществления строгого логико-математического вывода «релятивистского» уравнения RQM вследствие независимости механических моделей 1 и 3, принципы построения которых полярно противоположны, концепция RQM не является столь же формально безупречной и самодостаточной, каковой представляется концепция QM. Разумеется, любое сопоставление результатов, полученных с помощью RQM, построенной на тех или иных принципах, с экспериментом не дает, к сожалению, оснований для полного избавления теории RQM от элементов методологии ad hoc. Возможно, указанный логический дефект любой концепции релятивистской квантовой механики вообще неустраним в рамках феноменологического подхода к построению механики инертных тел. Отметим в этой связи, что данная ситуация в методологическом отношении не сопоставима с теми проблемами, которые решались в рамках чисто логических подходов к анализу полярных моделей 1 и 3. К примеру, принципиальная невозможность определения длины движущегося отрезка исключительно механическими средствами не является, как мы видели, препятствием для логически корректного построения релятивистской механики, чем, собственно, и отличается логическая система RM от STR, опирающейся на эклектическое по смыслу объединение механических и электромагнитных явлений с единственной целью сохранить в системе механических понятий определение длины движущегося тела при ее измерении в неподвижной системе отсчета. Аналогичным образом отказ от поточечного пространственного описания движения точечного материального тела не приводит к каким-либо принципиальным затруднениям при логико-математическом построении механики модели 3, если с самого начала ввести в рассмотрение понятие спин, адекватное по смыслу и необходимое в логической структуре пространственно-каузального подхода. Но в случае релятивистской квантовой механики зависимость $m(W)$, имеющую место в системе понятий модели 1, невозможно, как представляется автору данной книги, логически безупречно совместить с системой понятий модели 3. По этой причине должен быть в какой-то мере обязательно задействован переход к «усредненным» величинам, что влечет за собой необходимость параллельного анализа вопроса о точности расчета в каждой конкретной задаче. В философском плане, если возможно подобное сопоставление, мы сталкиваемся с логическим противоречием между абсолютной точностью истинного решения в силу имманентной ему однозначности и некоторой реальной неопределенностью спектра решений, зависящей от применяемой при анализе конкретной задачи теоретической методологии. К счастью, в задаче о расчете энергетического спектра водородоподобного атома любые поправки к основным («нерелятивистским») уровням имеют порядок малости $\alpha^2 \sim 10^{-4}$, что отчасти снижает концептуальную остроту указанного противоречия.

3.4.5. Вывод уравнения Клейна–Гордона

Воспользуемся тем обстоятельством, что в рассматриваемой задаче релятивистские поправки к уровням энергии пропорциональны $\alpha^2 \sim 10^{-4}$, поэтому принципиально нерелятивистский характер формы уравнения Шредингера не должен являться неодолимым препятствием для реализации достаточно точной расчетной процедуры, ведущей к снятию вырождения по l для спектра E_n. Последнее возможно только в том случае, если искомая процедура будет учитывать классическую эллиптичность электронных орбит, что по сравнению с круговыми орбитами требует учета зависимости релятивистской добавки к массе покоя электрона от радиуса r. Поэтому в новой релятивистской методологии расчета поправок к уровням энергии водородоподобного атома мы будем рассматривать массу m в качестве известной функции с точки зрения формы зависимости от r:

$$m(r) = m_0\left[1 + f\frac{(E-U)}{m_0c^2}\right], \tag{3.70}$$

где $U = U_q(r)$; f — числовой коэффициент, подлежащий дополнительному определению.

Представление m в виде (3.70) означает, что при расчете поправок на релятивистскую зависимость массы от скорости используется классическая форма закона сохранения механической энергии электрона $E = W(r) + U(r)$, имеющая смысл только в рамках точечной модели 1. Сказанное не означает, что представление (3.70) не имеет реального смысла в модели 3; однако оно должно быть «узаконено» путем применения какой-либо независимой от данной вычислительной процедуры, логическая обоснованность которой не вызывает сомнений — что и будет окончательно сделано в п. 3.4.6.

С учетом (3.70) уравнение (3.45) примет вид:

$$F'' + \frac{2m_0}{\hbar^2}(E-U)F + \frac{2f}{\hbar^2 c^2}(E-U)^2 F - \frac{\lambda}{r^2}F = 0\,. \tag{3.71}$$

В безразмерных переменных (3.47) данное уравнение можно записать в следующей удобной для последующего анализа форме:

$$F'' + \left[-\varepsilon\left(1-\frac{1}{2}\tau\varepsilon\right) + \frac{2}{\xi}(1-\tau\varepsilon) - \frac{1}{\xi^2}(\lambda - 2\tau)\right]F = 0\,, \tag{3.72}$$

где $\tau = f Z^2 \alpha^2 << 1$.

Если сравнить (3.72) с (3.66), то их принципиальное различие заключается прежде всего в том. что в члене уравнения (3.72), пропорциональном ξ^{-2}, появляется слагаемое, содержащее α^2, что и предопределяет наличие зависимости ε_n от l.

Поскольку общая структура уравнения (3.72) не отличается от структуры (3.66), то для решения уравнения (3.72) может быть использована та же процедура, что и для уравнений (3.48) и (3.66). В пределе $\xi \to \infty$ имеем

$$F_\infty = \exp\left[-\sqrt{\varepsilon\left(1-\frac{1}{2}\tau\varepsilon\right)}\,\xi\right].$$

Полагая $F(\xi) = G(\xi)F_\infty$, где $G(\xi)$ задается формой (3.52), получаем рекуррентные соотношения:

$$b_k = -\frac{2\left[(1-\tau\varepsilon) - k\sqrt{\varepsilon\left(1-\frac{1}{2}\tau\varepsilon\right)}\right]}{k(k+1) - \lambda + 2\tau}b_{k-1}\,. \tag{3.73}$$

Исследуем решение, определяемое соотношениями (3.73). Если переменный параметр k принадлежит к ряду целых чисел 0, 1, 2, ..., то зануление всех b_k при $k \ge n$ как необходимое требование для выполнения граничного условия $F \to 0$ при $\xi \to \infty$ приводит к решению для ε в виде (с учетом $\tau << 1$)

$$\varepsilon_n = \frac{1}{n^2}\left(1 - \frac{3}{2}f\frac{Z^2\alpha^2}{n^2}\right). \tag{3.74}$$

Заметим, что (3.74) при $f = 1/2$ совпадает с решением уравнения Клейна–Гордона (3.64), если в последнем не учитывать член, содержащий орбитальное число l. Однако целочисленность переменной k применительно к соотношениям (3.73) противоречит условию целочисленности

L^2 и λ (см. п. 3.4.1), в основе которого лежит существование минимальной структурной единицы для любого момента количества движения, определяемая спиновым числом $s = 1/2$. Действительно, при $b_{-1} = 0$ наличие ненулевых b_k при $k < n$ определяется занулением знаменателя в (3.73) при некотором $k = l$, что возможно только при дробном λ. Следовательно, при анализе (3.73) необходимо, как и ранее, полагать $\lambda = l(l+1)$ при целых положительных l, но при этом величина $k(\tau) = k_\tau$ отличается от целого k на некоторую малую величину $\Delta k = k_\tau - k$, сравнимую, очевидно, по порядку величины с τ. С точки зрения формы представления $G(\xi)$ в виде многочлена (3.52) переход от k к k_τ вполне допустим, поэтому из равенства

$$k_\tau(k_\tau + 1) - l(l+1) + 2\tau = 0, \tag{3.75}$$

сохраняя только первый порядок малости, находим при $k = l$:

$$\Delta k = -\frac{\tau}{l + 1/2}$$

и, следовательно;

$$k_\tau = k - \frac{\tau}{l + l/2}; \quad n_\tau = n - \frac{\tau}{l + 1/2}; \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{3.76}$$

Приравнивая нулю выражение в квадратных скобках в числителе (3.73) при $k_\tau = n_\tau$, после несложных преобразований получим окончательно:

$$\varepsilon_{n,l} = \frac{1}{n^2}\left[1 + \frac{2f Z^2 \alpha^2}{n^2}\left(\frac{n}{l + 1/2} - \frac{3}{4}\right)\right], \tag{3.77}$$

что совпадает с (3.64) при $f = 1/2$.

В рамках данной методологии конкретизация коэффициента f величиной ½ (как, впрочем, и его постоянство) логически ничем не оправдана и должна быть обоснована иными соображениями (разумеется, фундаментального характера), нежели простое совпадение решений несколько модифицированного «нерелятивистского» уравнения Шредингера и «строго релятивистского» уравнения Клейна–Гордона, удовлетворяющего принципу Лоренц-инвариантности, который, как было показано в гл. 1, к механике инертных тел никакого отношения не имеет.

Возникает вопрос концептуального характера о причинах возможного (при надлежащем выборе коэффициента f) совпадения решений относительно релятивистских поправок к энергетическому спектру водородоподобного атома, получаемых с помощью принципиально различных методологий. Простой и естественный ответ, полностью согласующийся с логикой моделирования механики, использованной в главах 1 и 2, мы получим, если уравнение Клейна–Гордона может быть прямо выведено из уравнения Шредингера (3.40) с массой, определяемой через (3.70) при $f = 1/2$.

Нетрудно убедиться в том, что имеет место тождество

$$\frac{2m_0}{\hbar^2}(E-U)\left[1+\frac{(E-U)}{2m_0c^2}\right] \equiv \frac{1}{c^2\hbar^2}\left[\left(E+m_0c^2-U\right)^2 - m_0{}^2c^4\right]. \tag{3.78}$$

Поскольку

$$\Psi(r,t) = \varphi(r)\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\left(E+m_0c^2\right)t\right],$$

то с помощью (3.78) находим уравнение для функции Ψ, записав его в удобной операторной форме ($\Delta \equiv \nabla^2$):

$$\left[\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}-U\right)^2 - c^2\left(\frac{\hbar}{i}\nabla\right)^2 - m_0c^4\right]\Psi = 0, \tag{3.79}$$

которое и представляет собой уравнение Клейна–Гордона в отсутствие магнитного поля.

Обратим внимание на то, что запись (3.70) справедлива не только в первом приближении, в котором и проводился вывод формулы (3.77), но представляет собой общую форму релятивистской зависимости $m(W)$ при $f = 1$. Следовательно, вопрос о справедливости формальной записи квантового уравнения в виде (3.79) сводится к решению вопроса о самой возможности применения формулы (3.70) и одновременно величине феноменологического коэффициента f, к чему мы теперь и переходим.

3.4.6. Расчет поправок в первом приближении к уровням энергии по методу возмущений

Без учета релятивистских эффектов уравнение Шредингера решается для представления потенциальной энергии $U(r)$ в виде (3.33), в результате чего мы получаем «невозмущенный» энергетический спектр E_n, который будем именовать в дальнейшем «нулевым приближением» и обозначать E_0, опуская индекс «n» (поскольку в дальнейшем нам не потребуется в общем выводе формулы для расчета поправок конкретизация номера уровня). Учет любых релятивистских эффектов производится путем включения в основное уравнение Шредингера дополнительных членов, являющихся известными функциями от r. Малость этих членов обеспечивается, как мы видели, их пропорциональностью α^2 в первом приближении. Формально совокупность всех дополнительных членов можно представить в качестве добавочной потенциальной энергии $U'(r)$, которую по традиции именуют «возмущением».

В рассматриваемой методологии, основанной на анализе «нерелятивистского» по форме уравнения Шредингера, релятивистские эффекты учитываются через зависимость $m(W)$, поэтому член уравнения, содержащий $U_{цб}$ и не включающий в себя массу m в явном виде, вклада в релятивистские поправки не дает. По этой причине U' следует рассматривать в качестве возмущения только кулоновского потенциала U_q. Данное обстоятельство в явном виде не учитывается в формализме метода возмущений, однако, как мы увидим ниже, является определяющим в отношении конкретизации величины коэффициента f.

В отличие от традиционного подхода к изложению теории возмущений принятое нами ограничение первым порядком малости позволяет существенно упростить вывод расчетной формулы. Кроме того, нам необходимо согласовать формализм вывода с введенной в гл. 2 процедурой усреднения в форме (2.46), которая отличается от традиционной, осуществляемой по аналогии с теорией вероятностей.

Итак, будем считать, что в исходном одномерном уравнении вида (2.48) потенциальную энергию можно представить в виде нулевого приближения U_0 и ее малого возмущения U', т. е. полагать $U = U_0 + U'$. Если считать известными собственные функции φ_0 и соответствующие им собственные значения E_0 при $U' = 0$, т. е. нулевые приближения задачи, то при ненулевых возмущениях к нулевым значениям указанных величин добавятся некоторые малые поправки φ_1 и E_1. В соответствии с принятой выше процедурой усреднения умножаем уравнение (2.48) на φ и интегрируем по всей области определения. Учитывая соотношение $\varphi\varphi'' = (\varphi\varphi')' - \varphi'^2$, а также условия на границах области, характерные для достаточно глубокой потенциальной ямы, получаем выражение

$$\int U\varphi^2 dx - E\int \varphi^2 dx + \frac{\hbar^2}{2m}\int \varphi'^2 dx, \tag{3.80}$$

где $E = E_0 + E_1$, $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$, а интегралы здесь и далее берутся в бесконечных пределах. Расписывая (3.80) в явном виде через нулевые величины и их возмущения, оставляя только лишь члены нулевого и первого порядков малости, и принимая затем во внимание, что все члены в выражении (3.80), не содержащие величин с индексом «1», сокращаются, получим следующее соотношение для поправок:

$$\int (E_1 - U')\varphi_0{}^2 dx = 2\int\left[(U_0 - E_0)\varphi_0\varphi_1 + \frac{\hbar^2}{2m}\varphi_0{}'\varphi_1{}'\right]dx. \tag{3.81}$$

Рассмотрим правую часть соотношения (3.81). Разность $(U_0 - E_0)$ можно переписать через $\varphi_0{}''$, используя исходное уравнение (2.48). В результате член в квадратных скобках будет пропорционален сумме $\varphi_1\varphi_0{}'' + \varphi_0{}'\varphi_1{}'$. Интеграл от первого члена данной суммы можно взять по частям:

$$\int \varphi_1 \varphi_0'' dx = \int \varphi_1 d\varphi_0' = -\int \varphi_0' \varphi_1' dx \, ;$$

если учесть условия на границах. Таким образом, интеграл в правой части (3.81) тождественно равен нулю и, следовательно;

$$E_1 = \frac{\int U' \varphi_0^2 dx}{\int \varphi_0^2 dx} = \langle U' \rangle \, . \tag{3.82}$$

Формальным математическим выводом формулы (3.82) мы получили известный из теории возмущений результат, заключающийся в том, что поправки к уровням энергии в первом приближении определяются как средние значения возмущения потенциальной энергии, причем, как и ожидалось, нормировка функции состояния φ никакой роли не играет в силу самой специфики понятия о средней величине, прямо вытекающего из вывода уравнения Шредингера.

Формула (3.82) является следствием формализма уравнения Шредингера, т. е. отвечает исключительно условиям применимости пространственной модели 3. Поскольку, однако, формула (3.70) является феноменологическим конструктом с использованием точечной модели 1, то возникает *проблема непротиворечивого* согласования обеих моделей при определении поправок E_1. Требуемое согласование может быть основано на законе сохранения энергии, который для средних величин выполняется как в рамках модели 1, так и модели 3. Таким образом, в принятых выше обозначениях имеет место следующее равенство:

$$E_0 + E_1 = \langle W_0 \rangle + \langle W_1 \rangle + \langle U_0 \rangle + \langle U' \rangle \, . \tag{3.83}$$

Учтем теперь то обстоятельство, что релятивистская поправка к величине массы покоя в формуле (3.70) является малой первого порядка, которым мы и ограничились. Следовательно, в (3.70) $E - U = mv^2 / 2$ — классическая формула для кинетической энергии, и, таким образом, W является квадратичной функцией скорости и при учете релятивистских поправок в первом приближении. Но это означает, что равенство (3.83) удовлетворяет теореме вириала $2\langle W \rangle = -\langle U \rangle$ в целом. А поскольку указанная теорема справедлива отдельно для нулевого приближения, то $\langle W_1 \rangle = -\langle U' \rangle / 2$ и, следовательно;

$$E_1 = \frac{1}{2} \langle U' \rangle \, . \tag{3.84}$$

Данная формула и решает проблему непротиворечивого объединения в единой расчетной методологии двух полярных механических моделей, справедливого только в первом приближении, которое как раз и требуется для определения поправок к энергетическим уровням водородоподобного атома. Взаимосвязь между формулами (3.82) и (3.84) очевидна: если U' определяется в физических условиях, отвечающих квантовой модели 3, то справедлива формула (3.82); если же U' отвечает физике модели 1 (релятивистской классике), то следует использовать формулу (3.84). В рассматриваемом нами случае классическая по физической сути формула (3.70) определяет и «классичность» U', поэтому для расчета E_1 должна быть использована именно формула (3.84).

В первом приближении для U' справедливо следующее равенство:

$$U' = -\frac{(E-U)^2}{m_0c^2} = -\frac{(E_0-U)^2}{m_0c^2};$$

следовательно;

$$\langle U'\rangle = -\frac{1}{m_0c^2}\left(E_0^{\ 2} - 2E_0\langle U\rangle + \langle U^2\rangle\right), \tag{3.85}$$

где $\langle U\rangle = -Zq^2\left\langle\frac{1}{r}\right\rangle$; $\langle U^2\rangle = Z^2q^4\left\langle\frac{1}{r^2}\right\rangle$.

Выражения для $\langle r^{-1}\rangle$ и $\langle r^{-2}\rangle$ в нулевом приближении известны:

$$\left\langle\frac{1}{r}\right\rangle = \frac{Zm_0q^2}{\hbar^2}\frac{1}{n^2}; \quad \left\langle\frac{1}{r^2}\right\rangle = \frac{Z^2m_0^{\ 2}q^4}{\hbar^4}\frac{1}{n^3(l+1/2)}. \tag{3.86}$$

Подставляя (3.86) в (3.85), с помощью (3.84) получаем формулу (3.64).

Поскольку формулы (3.64) и (3.77) получены при решении одного и того же уравнения, только разными, независимыми друг от друга методами, в одном и том же приближении, то коэффициент f в (3.70) и (3.77) следует принять равным ½.

Полученный результат позволяет сделать и еще один логически необходимый вывод: уравнение Клейна–Гордона в действительности справедливо только лишь при расчете релятивистских поправок в первом приближении, что приводит к совпадению форм записи стационарного уравнения и, следовательно, формул для расчета релятивистских поправок. Сказанное также означает, что требование Лоренц-инвариантности квантовых уравнений не обладает содержательным смыслом в рамках квантовой модели 3, равно как и в модели 1, что было доказано в гл. 1.

3.4.7. Размерностные ограничения на вид представления энергетических зависимостей

Используя простейшие размерностные соображения, можно с точностью до числовых множителей, определяемых квантовыми числами, выявить, минуя сложную процедуру нахождения точных решений, весь спектр энергетических зависимостей и представлений, формально совместимых с решением поставленной задачи; более того, имеется возможность определять и сами числовые множители для основных соотношений. В частности, анализ размерностных соотношений позволяет получить точную формулу для описания энергии спин-орбитального взаимодействия, ответственного за существование эффекта расщепления энергетических термов в водородоподобном атоме.

Размерность любой физической величины выражается в рамках механики через комбинацию трех независимых единиц измерения: массы, длины и времени. В частности, размерность энергии $[E] = \text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{сек}^{-2}$ (конкретизация единиц измерения роли не играет). Если отвлечься от математической «экзотики», то любые возможные комбинации параметров квантовой задачи с размерностью $[E]$ можно записать в следующем виде:

$$E = k\, m_0^{n_1} c^{n_2} \hbar^{n_3} q^{n_4} r^{-n_5}, \tag{3.87}$$

где k — произвольный числовой множитель, в подобных размерностных формулах имеющий значения обычно порядка единицы; r — переменный радиус сферы; n_5 — целое положительное число, что соответствует очевидному условию $E \to 0$ при $r \to \infty$; остальные обозначения уже использовались выше. Если учесть, что $q^2 = \alpha\hbar c$, где α — постоянная тонкой структуры, равная примерно $1/137$, то, приравнивая степени единиц измерения левой и правой частей формулы (3.87), получим следующие три уравнения для показателей n_i:

$$n_1 = 1 - n_5; \;\; n_2 = 2 - n_4 - n_5; \;\; n_3 = -n_4 + n_5. \tag{3.88}$$

Подставляя соотношения (3.88) в (3.87), получим для E следующее размерностное выражение:

$$E = k\, m_0 c^2 \alpha^{n_4 - n_5} \left(\frac{q^2}{m_0 c^2 r} \right)^{n_5}. \tag{3.89}$$

Как уже отмечалось выше, векторная величина $\vec{S}$ (т. е. величина, проекция которой на произвольную ось в пространстве знакопеременна), входит в стационарное уравнение Шредингера в виде скаляра $\hbar^2$, что отражается и во всех зависимостях вида (3.89). Сказанное означает, что в (3.89) необходимо положить $n_4 - n_5 = 2N$, где N — целое число, положительное или отрицательное. Следовательно, формулу (3.89) окончательно можно записать в следующем виде:

$$E = k\, m_0 c^2 \alpha^{2N} \left(\frac{q^2}{m_0 c^2 r} \right)^{n_5}. \tag{3.90}$$

В (3.90) не учтена величина заряда ядра Z, что в любой конкретной формуле производится путем замены $q^2 \to Zq^2$; $\alpha \to Z\alpha$.

Таким образом, искомый набор всевозможных зависимостей $E(r)$, включая $E_n, U(r)$ и т. п., исчерпывается формулой (3.90), в которой имеются два свободных числовых параметра $n_5 = 0, 1, 2,...$ и $N = 0, \pm 1, \pm 2,...$ Рассмотрим далее некоторые варианты энергетических представлений, варьируя в (3.90) оба свободных параметра.

1. $n_5 = 0$

В отсутствие пространственной переменной r мы получаем форму представления «собственных» значений энергии электрона (понимая стандартный квантовомеханический термин несколько расширительно за неимением устоявшихся словесных эквивалентов):

$$E^{(N)} = k\,m_0c^2\alpha^{2N}; \quad N \geq 0. \tag{3.91}$$

a) $N = 0$: $E^{(0)} = k\,m_0c^2$ — энергия покоя электрона при $k = 1$.

b) $N = 1$: $E^{(1)} = k\,m_0c^2\alpha^2 = \dfrac{m_0q^4}{2\hbar^2}$ — энергия основного уровня атома водорода при $k = 1/2$ (в размерностных соотношениях не может быть учтена зависимость коэффициента пропорциональности k от квантовых чисел n, l и т. д.).

c) $N = 2$: $E^{(2)} = k\,m_0c^2\alpha^4 = \alpha^2\dfrac{m_0q^4}{2\hbar^2}$ при $k = 1/2$ — релятивистская поправка к основному уровню (см. формулу (3.63)). Если принять, что учет каждой степени α^2 должен идти с коэффициентом $1/(2n^2)$, то мы получим точную формулу для релятивистского смещения, определяемого по методологии п. 3.4.4.

2. $n_5 = 1$

В данном варианте представлены потенциальная энергия кулоновского взаимодействия и «релятивистские» поправки к нему (если они формально могут быть учтены в какой-либо конкретной модели):

$$E = k\frac{q^2}{r}\alpha^{2N}; \quad N \geq 0. \tag{3.92}$$

Отметим здесь, что в формуле (3.92), как и в других вариантах конкретизации исходной формулы (3.90) с $E = E(r)$, возможно и $N < 0$. При этом необходима подстановка в данную формулу вместо r его масштаба r_0 задачи (см. формулу (3.47)), что при $N = -1$ приводит к $E = m_0c^2$.

a) $N = 0$: $E^{(0)} = \dfrac{q^2}{r}$ при $k = 1$.

b) $N = 1$: $E^{(1)} = \dfrac{q^2}{r}\left(\dfrac{m_0q^4}{2\hbar^2} : m_0c^2\right)$ при $k = 1/2$, что является следствием полезного для дальнейшего соотношения:

$$\frac{1}{2}\alpha^2 = \left(\frac{m_o q^4}{2\hbar^2}\right) : m_0 c^2. \tag{3.93}$$

3. $n_5 = 2$

В данном варианте основная формула находится из (3.90) при $N = -1$, т. е.

$$E = \frac{k}{m_0 c^2}\left(\frac{q^2}{r}\right)^2 \alpha^{2N};\ N \geq -1. \tag{3.94}$$

a) $N = -1$: $E = \dfrac{\hbar^2}{2m_0 r^2}$ при $k = 1/2$ — это основа формулы для центобежной энергии, поскольку $L^2 \sim \hbar^2$. Если учесть реальную зависимость $k(l)$ и положить $k = l(l+1)/2$, то мы получим точную формулу для $U_{цб}$, фигурирующей в уравнении Шредингера (см. (3.33)).

b) $N = 0$: $E = \dfrac{q^2}{r}\left(\dfrac{q^2}{r m_0 c^2}\right)$ при $k = 1$.

4. $n_5 = 3$

Наиболее интересный для нас вариант, приводящий к формуле для энергии спин-орбитального взаимодействия:

$$E = k\, m_0 c^2 \left(\frac{q^2}{r m_0 c^2}\right)^3 \alpha^{2N};\ N \geq -1. \tag{3.95}$$

a) $N = -1$:

$$E = \frac{q^2 \hbar^2}{2 m_0^2 c^2 r^3} \text{ при } k = 1/2 \tag{3.96}$$

Эта формула представляет так наз. энергию спин-орбитального взаимодействия без учета зависимости коэффициента k от квантовых чисел l и s.

b) $N = 0$: $E = \dfrac{q^2}{r}\left(\dfrac{q^2}{r m_0 c^2}\right)^2$.

Разумеется, можно учесть и вариант $N = -2$, который сводится при $r = r_0$ к энергии основного уровня при $k = 1/2$, а также $N = -3$, сводящийся к $E = m_0 c^2$.

Важнейшим для нас «выводом по индукции» является тот факт, что если формула для E сводится к комбинации q^2/r и $m_0 c^2$, то $k = 1$; если же в формуле фигурирует в явном виде $\hbar^2$, то $k = 1/2$. Смысл подобной системы в конкретизации коэффициента k очевиден: в случае, когда в формуле фигурируют исключительно параметры, характерные для модели 1, а постоянная Планка $\hbar$ отсутствует, $k = 1$; когда же формула имеет квантовый смысл и содержит $\hbar$ (т. е. имеет прямое отношение к модели 3), то $k = 1/2$. Таким образом, мы имеем серьезное логическое основание для того, чтобы считать формулу (3.96) для энергии спин-орбитального взаимодействия «основой» для последующего ее анализа на предмет учета квантовых чисел.

Заметим, что указанные соображения непротиворечиво дополняют логику взаимосвязи формул (3.82) и (3.84). Действительно, «классические» по происхождению формулы для «возмущений» имеют коэффициент $k = 1$, но в расчетной формуле для поправок к уровням они учитываются с коэффициентом 0,5. Напротив, сугубо квантовые возмущения имеют $k = 0{,}5$, но в расчетной формуле учитываются без деления на 2. Это и обеспечивает согласованность вычислительных процедур, использующих разные модельные схемы — классическую или квантовую.

Если в (3.90) подставить вместо r его масштаб $\hbar^2 / m_0 q^2$, то

$$E^{(N)}(r_0) = k\, m_0 c^2 \alpha^{2(N+1)}; \quad N = -1, 0, 1, 2, \ldots \tag{3.97}$$

Формула (3.97) описывает физически объективную иерархию уровней энергии: $m_0 c^2$; $\frac{1}{2} m_0 c^2 \alpha^2 = E(n=1)$; $\frac{1}{2} m_0 c^2 \alpha^4 = E_{LS}$; ... Таким образом, спин-орбитальное взаимодействие является эффектом второго порядка малости по α^2 по сравнению с энергией покоя электрона. При этом у нас нет никаких оснований считать, что его учет является исключительно следствием релятивистской переформулировки уравнения Шредингера (теория Дирака). Этот вопрос мы подробнее рассмотрим ниже в силу его принципиальной в концептуальном смысле важности.

3.4.8. Формула для энергии спин-орбитального взаимодействия

Согласно (3.96), размерностная основа искомой формулы есть

$$E_{LS} = \frac{1}{2} \gamma \frac{q^2 \hbar^2}{m_0^{\,2} c^2} \frac{1}{r^3}, \tag{3.98}$$

где γ — неизвестный пока безразмерный коэффициент, являющийся функцией квантовых чисел. Очевидно, что из четырех имеющихся чисел n, l, m, s величина γ не может зависеть от магнитного числа m в силу произвольности выделения в пространстве «оси проектирования» z, равно как можно не рассматривать и зависимость γ от n, которая характерна для полной энергии уровня.

Еще раз подчеркнем, что формула (3.98) является прямым следствием формального анализа сугубо размерностных соотношений, в которых фактический релятивизм проявляется в необходимости учета константы « c », но не релятивистской зависимости $m(W)$. При этом использование вместо m величины m_0 необходимо для удовлетворения требования $m = const$ при наличии явной зависимости $E(r)$. То, что согласно (3.97) величина m_0c^2 представляет собой первую (и высшую) ступень в иерархии $E^{(N)}$, является, таким образом, также формальным логико-математическим выводом, никак прямо не связанным с существованием зависимости $m(W)$. Релятивистская механика позволяет только лишь конкретизировать данную зависимость в терминах модели 1, что и выражается в переходе от $m(W)$ к $m(v^2)$.

Здесь уместно сделать небольшое отступление философского характера, связанное с использованием логики размерностных соотношений, содержательная эффективность которой была уже наглядно продемонстрирована при изложении главы 2. Нет ничего удивительного в том, что простейшие размерностные манипуляции позволяют получать вполне корректные физические результаты в виде математических формул, в которых даже минимально не задействованы ни конкретное моделирование рассматриваемых явлений, ни тем более их эмпирические основы. Математику можно рассматривать как теорию группировки тождественных элементов, именуемых единицами. Простейшая ее форма — арифметика, более высокая ступень — алгебра. К примеру, знаменитая теорема Ферма о возможности представления в целых числах формы группировки вида $x^n + y^n = z^n$ — это прямая задача математики в ее «рафинированном» смысловом отношении. Уже геометрию нельзя целиком относить к определяемой подобным образом математике, поскольку в ее структуре задействовано физическое по смыслу понятие пространства, и математика включена в геометрию постольку, поскольку речь в ней идет о допустимых способах группировки пространственных элементов — точек, а понятие «точка» не сводится исключительно к понятию «единица». Физику в рассматриваемом теоретическом отношении можно рассматривать как науку о допустимых способах группировки качественно отличных друг от друга подгрупп элементов. Из подобного подхода к «определению» дисциплин следует, что математика как теория группировки единиц является необходимой встроенной в физику теоретической структурой; следовательно, «математическая логика» является необходимым звеном в более общей физической логике, являющейся, в свою очередь, производной от «логики» исторического развития Вселенной.

Разумеется, в данной книге автор не претендует на сколь-нибудь последовательное изложение проблем, традиционно относимых к философским. Цель подобных «философских» отступлений вполне конкретна: подчеркнуть наличие неявной содержательной взаимосвязи между кажущимися столь далекими друг от друга по методологическому содержанию подходами при решении конкретных физических задач. Именно подобная внутренняя взаимосвязь логического характера позволяет минимизировать постулативный характер феноменологической теории.

По физическому смыслу структуры формулы (3.98) сферическая симметрия задачи учетом взаимодействия $L-S$ не нарушается, поэтому $E_{LS}(r)$ можно рассматривать, как и $U_{цб}(r)$, в качестве еще одной компоненты потенциальной энергии $U = U_q + U_{цб} + U_{LS}$.

Если переписать формулу (3.98) в форме

$$E_{LS} = \frac{1}{2}\gamma\left(\frac{q^2}{rm_0c^2}\right)\left(\frac{\hbar^2}{m_0r^2}\right),$$

то отчетливо видно, что наличие $\hbar^2$ в ней объясняется перемножением моментов количества движения, т. е. имеет место либо L^2, либо S^2, либо LS. Первый вариант отпадает уже по той причине, что, как было показано в п. 3.4.4, учет только лишь одного орбитального момента L при расчете релятивистских поправок в рамках модели 3 — а именно к данной модели и относится рассматриваемая формула — не снимает вырождение по квантовому числу l. Вариант S^2 также не реализуется, поскольку с существованием у электрона собственного момента S в квантовой модели 3 не связывается наличие какой-либо дополнительной к U_q и $U_{цб}$ «собственной энергии» (в феноменологической теории механики у нас нет никаких причин усматривать взаимосвязь между S и m_0c^2). Следовательно, остается вариант LS, прямо указывающий на физику данного взаимодействия: сложение пространственных векторов $\vec{L}$ и $\vec{S}$ по правилу параллелограмма: $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S};\ J^2 = L^2 + S^2 + 2(\vec{L}\vec{S})$. При этом, очевидно,

$$\gamma = \frac{(\vec{L}\vec{S})}{\hbar^2} = \frac{1}{2\hbar^2}\left(J^2 - L^2 - S^2\right). \qquad (3.99)$$

При занулении любого субъекта взаимодействия ($l = 0$ или $s = 0$) последнее исчезает (точнее говоря, $\gamma = 0$, что и является формальным основанием для однозначного понимания высказанного утверждения), поэтому следует считать представление γ в форме (3.99) единственно возможным, отвечающим физике задачи.

У нас нет оснований полагать, что для орбитального момента учет взаимодействия со спином изменяет соотношение между длиной вектора $\vec{L}$ (в единицах $\hbar$), равной $\sqrt{l(l+1)}$, и длиной его максимально возможной проекции l на произвольную ось z. Поскольку $\vec{S}$ является аналогичной $\vec{L}$ механической характеристикой, то следует также полагать, что и для вектора $\vec{S}$ справедливы те же соотношения между модулем вектора и его проекциями, что и для $\vec{L}$, т. е. справедлива запись $|\vec{S}| = \sqrt{s(s+1)}$, где квантовое число s есть величина проекции спина электрона на произвольную ось, выражаемая в данной формуле единственным положительным числом ½. Нетрудно показать, что предлагаемое определение модуля вектора спина имеет силу логически необходимого утверждения. Действительно, величину $\vec{S}$ можно формально считать достаточно большой, т. е. рассматривать случай $s \gg 1$, поскольку ее физическая имманентность с числовой величиной, вообще говоря, никак a priori не связаны. При этом остается в силе утверждение, что направления вектора спина и оси z не могут быть совмещены абсолютно точно, и при любой длине $|\vec{S}|$ имеет место неравенство $|\vec{S}| > s$. При $s \to \infty$ разность длин должна стремиться к $\hbar/2$, т. е. к величине, задающей минимальную дискретность механического момента. Именно это условие и выражается в виде соотношений (3.34). Следовательно, и для $\vec{S}$ должна иметь место формула $|\vec{S}| = \sqrt{s(s+1)}$. Но поскольку электрон характеризуется только лишь одним числом $s = 1/2$, то в (3.99) $S^2 = 3/4$.

В отношении суммарного вектора момента $\vec{J}$ можно сделать следующие утверждения. Во-первых, поскольку $L^2 = l(l+1)$ и $S^2 = s(s+1)$, то и $J^2 = j(j+1)$ (в единицах $\hbar$) как соотношение, удовлетворяющее условию (3.34), общему для любого момента количества движения в рамках модели 3. Во-вторых, если на ось z вектор $\vec{L}$ может иметь максимальную проекцию $+l$, то $\vec{S}$ в силу его независимости от $\vec{L}$ может иметь две проекции на ту же ось: либо $+s$, либо $-s$. Следовательно, число j может выражаться двумя равенствами: $j = l + 1/2$ и $j = l - 1/2$. В третьих, поскольку в уравнении Шредингера фигурирует именно l, то следует считать, что и в отношении j справедливо аналогичное утверждение, а именно, что $L - S$ связь определяют квантовые числа j, l, s, а магнитное число на энергетическом спектре не сказывается, в связи с чем мы его учитывать в дальнейшем анализе не будем, как и ранее.

Принимая во внимание все сказанное выше, можно для величины γ окончательно записать следующие формулы:

$$\gamma_+ = l/2 \ \text{при} \ j = l + 1/2;$$

$$\gamma_- = -(l+1)/2 \ \text{при} \ j = l - 1/2; \ \gamma_- = 0 \ \text{при} \ l = 0. \qquad (3.100)$$

Очевидно, что наличие двух возможных ориентаций спина $\pm s$ относительно направления l определяет эффект расщепления энергетических уровней, который нам теперь и предстоит рассчитать.

3.4.9. Расчет поправок к энергетическим уровням при учете спин-орбитального взаимодействия

Зная общую формулу (3.98) для энергии спин-орбитального взаимодействия, а также конкретный вид для коэффициента γ, определяемый формулой (3.100), можно без каких-либо дополнительных расчетов установить точный вид требуемого обобщения релятивистской формулы (3.77) (принимая $f = 0,5$) при учете вклада E_{LS}.

Поскольку, как было установлено выше (п. 3.4.7), $E_{LS} \sim \alpha^2$, т. е. является эффектом того же порядка малости, что и «чисто релятивистский» эффект, описываемый формулой (3.77), то учет $L - S$ связи приводит к появлению в (3.77) дополнительного члена $\varepsilon_{LS} = \dfrac{Z^2\alpha^2}{n^4}\bar{\varepsilon}_{LS}$:

$$\varepsilon_{LS} = \frac{1}{n^2}\left[1 + \frac{Z^2\alpha^2}{n^2}\left(\frac{n}{l+1/2} - \frac{3}{4} + \bar{\varepsilon}_{LS}\right)\right]. \tag{3.101}$$

Так как ε_{LS} зависит от спинового числа s и исчезает, если формально положить $s = 0$, то необходимо существование прямой пропорциональности между ε_{LS} и s, т. е. $\varepsilon_{LS} \sim s$, для того чтобы формула (3.101) переходила в (3.77) при $s \to 0$. Однако требуемая пропорциональность исключается согласно (3.98) и (3.100). Теперь обратим внимание на то, что с чисто механических позиций, исключающих явное использование специфики электомагнетизма, физика спин-орбитальной связи определяется сложением векторов $\vec{L}$ и $\vec{S}$, что выражается в переходе от l к $j = l \pm s$, причем $j \to l$ при формальном занулении s. Все указанные особенности математически учитываются единственно возможной операцией замены в (3.77) l на j, т. е. имеет место общая формула для расчета энергии уровней водородоподобного атома при учете поправок первого порядка малости по параметру α^2:

$$\varepsilon_{n,j} = \frac{1}{n^2}\left[1 + \frac{Z^2\alpha^2}{n^2}\left(\frac{n}{j+1/2} - \frac{3}{4}\right)\right], \tag{3.102}$$

которая совпадает с основным выводом теории Дирака, но является результатом использования принципиально иной методологии, исключающей из своего формализма преобразования Лоренца.

Структура формулы (3.102) такова, что в поправке первого порядка по α^2 нельзя прямо выделить часть, ответственную за спин-орбитальное взаимодействие, поскольку реально нельзя полагать $s = 0$. Иными словами, «релятивистская» поправка составляет некое целое, разделение которого носит условный характер. Образно говоря, нельзя отделить голову от плеч, не разрушив живой организм. Тем не менее операция выделения слагаемого ε_{LS} оказывается полезной, как показала история развития физики атома, в качестве содержательного примера феноменологического моделирования взаимосвязи механических и электромагнитных характеристик электрона.

Согласно (3.101) и (3.102) величина $\bar{\varepsilon}_{LS}$ есть

$$\bar{\varepsilon}_{LS} = n\left(\frac{1}{j+1/2} - \frac{1}{l+1/2}\right). \tag{3.103}$$

Для $j = l + 1/2$ из (3.103) имеем:

$$\overline{\varepsilon}_{LS}^{+} = -\frac{n}{2(l+1/2)(l+1)}; \tag{3.104}$$

для $j = l - 1/2$ соответственно

$$\overline{\varepsilon}_{LS}^{-} = \frac{n}{2l(l+1/2)}. \tag{3.105}$$

Используя (3.100), формулу тонкой структуры энергетического спектра водородоподобного атома можно, следовательно, представить в виде:

$$\varepsilon_n = \frac{1}{n^2}\left\{1 + \frac{Z^2\alpha^2}{n^2}\left[\frac{n}{l+1/2} - \frac{3}{4} - \frac{\gamma n}{l(l+1/2)(l+1)}\right]\right\}. \tag{3.106}$$

Иногда по основаниям, обсуждаемым ниже, формулу (3.106) записывают в несколько ином виде:

$$\varepsilon_n = \frac{1}{n^2}\left\{1 + \frac{Z^2\alpha^2}{n^2}\left[\frac{n}{l+1/2} - \frac{3}{4} - \frac{\gamma n(1-\delta_l)}{l(l+1/2)(l+1)} - n\delta_l\right]\right\}, \tag{3.107}$$

где $\delta_l = 0$ *при* $l > 0$; $\delta_0 = 1$ *при* $l = 0$.

Полученные формы записи для компоненты $\overline{\varepsilon}_{LS}$ в поправочных слагаемых в формулах (3.106) и (3.107) позволяют непосредственно связать ее с формулой (3.98) для энергии спин-орбитальной связи, если учесть, что усреднение по функциям нулевого приближения дает (при $l > 0$):

$$\left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle = \left(\frac{Zm_o q^2}{\hbar^2}\right)^3 \frac{1}{n^3 l(l+1/2)(l+1)}. \tag{3.108}$$

Используя формулу (3.82) метода возмущений, мы немедленно получаем то выражение для $\overline{\varepsilon}_{LS}$, которое и фигурирует в формуле (3.106), но при условии, что усреднение (3.108) справедливо и при $l \to 0$ (при этом $\gamma = \gamma^+$). Поэтому ряд авторов учебных изданий вполне обоснованно считает необходимым выделение в (3.106) так наз. «контактного» взаимодействия для s-состояний ($l = 0$), описываемого членом вида $\overline{\varepsilon}_{LS}^{конт} = -n\delta_0 = -n$, относя его тем не менее к спин-орбитальному взаимодействию. Тогда необходимо использовать формулу (3.107). Нетрудно видеть, что «проблема» введения контактного взаимодействия, для которого нет удовлетворительной классической интерпретации, возникает именно вследствие некорректного по физической сути разделения на отдельные компоненты релятивистской поправки первого приближения в формуле (3.102).

Последнее замечание касается интерпретации известного факта, заключающегося в том, что «классическое» выражение для E_{LS} в 2 раза больше квантового, поэтому для достижения согласия «полуклассической» теории, по времени предшествовавшей теории Дирака, классическое выражение для E_{LS} умножалось на коэффициент ½, получивший в литературе название «поправка Томаса–Френкеля». В развитой выше методологии расчета релятивистских поправок необходимость в произвольном введении в классическую формулу для E_{LS} коэффициента ½ отпадает, т. к. для классических выражений необходимо использовать формулу (3.84), а не (3.82), которая справедлива только применительно к квантовому выражению для E_{LS} в виде (3.98). Таким образом, в действительности никакого принципиального различия между классической и квантовой интерпретациями спин-орбитального взаимодействия не существует с точки зрения адекватности расчетных методологий.

Материалы представленного выше в главе 3 логико-математического анализа расчетных методологий релятивистской квантовой механики применительно прежде всего к определению энергетического спектра водородоподобного атома позволяют сделать общий вывод о том, что нерелятивистская форма уравнения Шредингера обеспечивает реально необходимую (в том числе и с точки зрения экспериментальных возможностей физики) точность расчетов. При этом используется достаточно простой математический аппарат, что обеспечивает физическую прозрачность и наглядность всех операций логико-математического характера. Поскольку развитая выше методология исключает использование лоренцевых преобразований, то тем самым мы в определенном отношении независимым от результатов главы 1 путем убеждаемся в том, что специальная теория относительности Эйнштейна в своей концептуальной основе не является единственно возможной методологией для достижения требуемого соответствия теории и эксперимента. Лоренц-инвариантность как принцип не только физического, но и философского уровня общности следует рассматривать в качестве гипотетического постулата типа ad hoc, который можно исключить из теории механики инертных тел без каких-либо последствий для ее расчетной эффективности. Разумсется, сделанный вывод не распространяется на электромагнитные и гравитационные явления, обусловленные полевыми формами материи.

Глава 4

КЛАССИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОНА С УЧЕТОМ СПИНА

«Сущность в своем бытии есть смысл.
Сущность в своем инобытии есть явление»
А.Ф. Лосев

Традиционное изложение релятивистской (в трактовке Эйнштейна) и квантовой концепций (Бор, Шредингер, Дирак) основывается на целом ряде произвольных (в смысле отсутствия их последовательного логического обоснования) принципов и постулатов, справедливость которых устанавливается путем сопоставления выводов теории и данных экспериментов. Подобный способ установления истинности теории по умолчанию принимается большинством физиков и философов, исследующих концептуальную природу физики как науки, поскольку никаких строго последовательных внеопытных, т. е. чисто логических, обоснований теоретического фундамента физики, как полагают и по сей день, не имеется или, по крайней мере, не найдено. Логика, разумеется, также опирается на объективный фундамент природного происхождения, однако ее постулаты по степени общности и фундаментальности не идут ни в какое сравнение с постулатами физики и могут быть сопоставимы только с основаниями математики. К примеру, уравнение Шредингера в силу его «невыводимости» следует отнести к фундаментальным постулатам физики, хотя по вполне понятным психологическим причинам постулатом прямо его не именуют в силу структурной сложности, в которой выявляется несколько положений постулативного характера. В главе 2 было показано, что вопреки традиционно сложившимся убеждениям это уравнение выводится из других постулатов, которые действительно можно считать фундаментальными, таких как, к примеру, реализуемая в природе возможность относительной пространственной изолированности двух материальных объектов, что имманентно структуре не только механики, но и математики. Выявлению подобных, действительно фундаментальных обоснований основных уравнений механики и были посвящены три предыдущие главы настоящей книги. В свою очередь, продемонстрированный выше успех в реализации программы логического моделирования механики на концептуальном уровне заставляет усомниться и в обоснованности традиционного представления о принципиальной невозможности логически последовательного и одновременно точного описания, к примеру, энергетического спектра атома водорода на основе классической (точечной) модели. За классикой в подобных сугубо квантовых задачах сохранен лишь сомнительный статус иллюстративного, или наглядного, описания, не претендующего на теоретическую достоверность.

В данной главе предпринята попытка построения логически последовательной схемы суждений, позволяющей выявить действительное содержательное соотношение между моделями 1 и 3, опираясь на примеры рассмотренных в главе 3 задач о расчете энергетических спектров стационарных состояний гармонического осциллятора и водородоподобного атома, не используя в этой схеме ни формализм уравнения Шредингера, ни полуклассическую методику Бора–Зоммерфельда. Фактически мы попытаемся выстроить логику в определенном смысле промежуточной механической модели 2, которую уже нельзя будет отнести ни к чисто точечной, ни к чисто пространственной моделям каузальной связи.

4.1. Необходимость ревизии традиционных взглядов на роль классических представлений в квантовых задачах

Уместно задаться вопросом концептуальной степени общности: а почему, собственно, возникает сомнение в справедливости утверждения о принципиальной несовместимости классической и квантовой моделей при описании явлений микромира, характеризующихся, например, масштабами орбиталей атома водорода, близких к основной? Н. Бор данное утверждение очень точно выразил в форме принципа дополнительности, неразрывно связанного с неравенством Гейзенберга. В принятой выше терминологии полярные, несводимые друг к другу точечная и пространственная механические модели в соответствии с принципом Бора являются необходимыми методологиями любого теоретического (и опытного) описания явлений материального мира, дополняя друг друга. Вклад в указанную дополнительность каждой из моделей зависит от конкретизации задачи. При нерелятивистском описании атома водорода, к примеру, пространственная модель 3 абсолютно точна, а из классики заимствуется только понятийный аппарат физики, чем, собственно, роль точечной модели 1 и исчерпывается. Однако уже при учете чисто релятивистской зависимости массы электрона от его энергии квантовую модель необходимо непосредственно сочетать с классической точечной в рамках единой расчетной методологии определения релятивистских поправок в энергетическом спектре атома. Еще более усложняется взаимозависимость модельных описаний 1 и 3 при расчете поправок за счет спин-орбитального взаимодействия.

Итак, необходимость конструктивного сочетания противоположных по физической сути механических моделей при решении важнейших задач теоретической физики — методологический факт, содержание которого не исчерпывается принципами дополнительности и соответствия Бора. В указанном смысловом поле проявляется логический парадокс: если точечная (1) и пространственная (3) модели описания механического движения сами по себе логически непротиворечивы и при этом основываются на одних и тех же представлениях о пространстве, времени и массе как мере инерции точечного тела, то принципиальная несовместимость (по факту результатов их применения) теоретических описаний таких реальных физических объектов, каким является атом водорода, представляется серьезным логическим (а если выразиться точнее — и концептуальным) противоречием, или парадоксом физической теории. Совершенно правомерно поэтому задаться вопросом установления истоков указанного противоречия. При этом имеется возможность несколько сузить рамки поставленного вопроса, если принять во внимание тот факт, что нерелятивистское описание атома водорода через уравнение Шредингера математически однозначно и точно; следовательно, искомое противоречие проистекает вследствие логической непоследовательности и неоднозначности классического моделирования задачи, конкретно неадекватности моделей Бора и Зоммерфельда физике атома водорода. Напрашивается вывод, что эти классические модели нуждаются в замене на какие-то иные (или иную). Вариант подобной новой модели будет рассмотрен нами ниже.

Другим основанием для ревизии устоявшихся представлений о взаимосвязи классических и квантовых моделей в сугубо квантовых задачах является проблема многомерности физического пространства и ее математического описания. В классике и одномерное, и двух- и трехмерное описания движения внутренне непротиворечивы и физически реальны в масштабах макромира вследствие скалярности массы как единственной имманентной телу его точечной характеристики. При этом, как было показано в главе 1, построение релятивистской теории в рамках точечной механической модели возможно только в трехмерном варианте (формально и в двухмерном), и тогда одномерная модель движения есть физически оправданная проекция трехмерной. Повторяясь, заметим в этой связи, что, вообще говоря, неправомерно законы трехмерного механического движения трактовать в качестве «естественного» обобщения законов одномерного движения. Многомерность же в пространственной модели при отсутствии физически выделенного направления (например, путем наложения внешнего поля) проявляется иначе, чем в точечной модели, а именно через совокупность квантовых чисел, количество которых определяется количеством степеней свободы (включая спиновую). Можно сказать, что в квантовой модели движение объекта в трехмерном пространстве в определенном смысле усредняется в стационарных условиях; к примеру, классическая эллиптичность движения электрона относительно ядра атома «вырождается» в существование квантового числа l, а угловые зависимости функции φ в условиях сферической симметрии потенциальной энергии U вообще можно не учитывать при определении энергетического спектра, рассчитываемого путем решения уравнения Шредингера для радиальной части $\phi(r)$ функции состояния. В главе 3 было показано, что фактически квантовые задачи в отсутствие внешних полей, нарушающих пространственную симметрию, являются одномерными. Следовательно, и классика, двумерная при наличии симметрии, должна быть сведена к одномерному варианту, если мы хотим достичь реального соответствия решений, получаемых в случае какого-либо сочетания различных модельных представлений, точным решениям, получаемым в рамках одной — квантовой — модели, адекватной физике атома.

В главе 1 было показано, что выделенность трехмерности в качестве физически реализуемой метрики пространства определяется естественной симметрией пространства относительно оси взаимодействия между двумя объектами, которую мы и именуем прямой. При этом становится очевидным утверждение, что именно с указанной симметрией может (и должна!) быть связана пространственная по смыслу векторная характеристика, имманентная точечному телу и являющаяся неизменяемым и неделимым моментом количества движения неделимого точечного тела. Такая характеристика действительно существует у основных стабильных элементарных частиц — электрона, протона и нейтрона, формирующих структуру любого атома, и именуется спином. Спин, как было показано в главе 2, играет определяющую роль при выводе законов квантовой механики. Уместно привести такое сопоставление: точечная (классическая) модель характеризуется инвариантностью состояния свободного точечного тела относительно трансляции собственной системы отсчета в пространстве и времени; пространственная (квантовая) модель — инвариантностью состояния относительно трансляции во времени и вращения. Поэтому в классической модели определяющими состояние параметрами (и определяемыми) являются энергия и импульс, в квантовой модели — энергия и момент импульса.

Таким образом. еще одним — и наиболее важным — основанием для ревизии традиционных взглядов на роль классики в квантовой механике является необходимость реального учета в рамках классической методологии расчета наличия у электрона, кроме массы покоя m_0 и заряда $-q$, также и спина $s = \hbar / 2$. Не претендуя на общность формулировки законов классического движения с учетом собственного момента количества движения, мы далее покажем, что прямой и непосредственный учет в рамках классической механики наличия у электрона не двух, а трех имманентных характеристик — m_0, q, s, позволяет, в частности, получить точное решение задачи по определению энергетического спектра водородоподобного атома без использования постулатов в форме правил квантования Бора–Зоммерфельда. Заметим здесь, что представление о спине, имеющее в квантовой механике сугубо феноменологический характер, при его последовательном и содержательном использовании в рамках модели 1 требует существенного расширения, диктуемого именно точечностью описания движения электрона.

4.2. Контуры механической модели 2

При анализе концептуального содержания квантовой механики в главе 2 было показано, что при логически последовательном построении структуры теории в рамках модели 3 понятие спина как неуничтожимого элементарного момента количества движения играет определяющую роль. Без спина нельзя логически обосновать представление о стационарности квантовых состояний, поскольку, в частности, примером такого состояния является механическое движение точечного тела в отсутствие воздействия на него со стороны иных тел, т. е. при $U(\vec{r}) \equiv 0$. При этом вопрос о временной структуре периодичности в QM не рассматривался по той причине, что с точки зрения нахождения решений уравнения Шредингера стационарными являются только решения с $\Psi \sim \exp(-i\omega t)$, $\omega = const$, т. е. гармонические по времени. Именно это позволяет однозначно осуществить понятийную стыковку моделей 1 и 3 через соотношение $W = s\omega$ (понимая под s и ω модули соответствующих векторных величин). Действительно;

$$W = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\hbar 2\pi\nu = \frac{1}{2}hv/\lambda,$$

откуда следует соотношение

$$p = mv = h/\lambda,$$

известное как соотношение де Бройля. Заметим здесь, что $|\vec{S}| = s = \hbar/2$, что принципиально отличает понимание спина при его включении в классическую модель от спина $|\vec{S}| = \sqrt{s(s+1)}$ в трактовке RQM (см. предыдущую главу): в классике мы имеем дело только с реальными физическими величинами, поэтому реальной в представлении о спине является его проекция $\pm s$ на реальную пространственную ось, каковой в классике следует считать направление вектора скорости $\vec{v}$.

В традиционной трактовке QM от спина остается только постоянная Планка $\hbar = 2s$, играющая роль универсальной мировой константы. При этом уравнение Шредингера для стационарных состояний является чисто феноменологическим, а сама QM вырождается в абстрактную математическую теорию, не допускающую в своем формализме наличие каких-либо «скрытых параметров». Налицо существование примечательной по своей парадоксальности ситуации: математический формализм уравнения Шредингера фактически исключает из своей структуры как раз то фундаментальное физическое понятие — спин, которое и является необходимым основанием для оправдания его самого! (Может быть, именно здесь и кроются истоки поразительно упорного неприятия Эйнштейном копенгагенской трактовки квантовой механики?).

При построении квантовой теории на основе точечной классической модели 2 простого представления спина в качестве элементарного момента $\vec{S}$ оказывается недостаточно. Со спином имманентно ему связано вращение (в литературе его именуют спиральностью), что определяет «винтообразность» движения носителя массы и спина, из чего, собственно, и вытекает соотношение де Бройля. При этом детализация представления о вращении, связанном с движением точечного объекта, обладающего спином, имеет очевидное ограничение: представления, связанные с вращением как следствием наличия спина, физически содержательны только за целое число периодов (полупериодов) вращения, и только при обеспечении указанной кратности в отношении времени реализуются условия стационарности состояний классического механического движения. Сказанное эквивалентно утверждению, что в стационарных условиях, во-первых, состояния характеризуются средними за период (полупериод) величинами, в частности средней величиной кинетической энергии $\langle W \rangle$; во-вторых, круговая частота спинового вращения ω_S должна быть кратна частоте колебаний ω точечного классического объекта в потенциальной яме. Заметим при этом, что усреднения за период и полупериод в потенциальной яме произвольного профиля эквивалентны в силу реальной трехмерности пространства, при которой только и имеет место однозначно определяемая инвариантность физической задачи относительно поворота плоскости изображения профиля потенциала на 180°.

Высказанное выше утверждение относительно условий реализации стационарных состояний (или периодических движений в классическом понимании) можно записать в виде:

$$\langle W \rangle = s\,\omega_S; \quad \omega_S = n\omega, \tag{4.1}$$

где $\langle W \rangle$ — средняя кинетическая энергия движения тела в поле U за период $T = 2\pi/\omega$; s — модуль спина $|\vec{S}|$, $s = \hbar/2$; ω_S — частота спинового вращения; $n = 1; 2; 3;...$

Таким образом, промежуточная механическая модель 2 есть классическая точечная модель 1, в которую включено дополнительное спиновое условие стационарности (4.1), через посредство которого и «квантуются» изначально классические соотношения. Для ее обозначения имеет смысл использовать в дальнейшем *две очевидные аббревиатуры:* CMS — классическая механика со спином и RMS — релятивистская механика со спином. Вводимые через соотношения (4.1) «правила квантования» классического движения заменяют аналогичные правила квантования Бора–Зоммерфельда. Заметим при этом, что соотношения (4.1) отражают физическую специфику спина, которая не учитывается в моделях 1 и 3, и поэтому данные соотношения не могут быть выведены из них. Более того, величину $\langle W \rangle$, вообще говоря, нельзя полагать тождественно равной аналогичной характеристике классической или квантовой моделей. Суммируя сказанное, мы можем утверждать о принципиальной независимости модели 2 от моделей 1 и 3, иначе говоря, об их несводимости друг к другу. Последнее утверждение также означает, что терминологически неверно именовать модель 2 «промежуточной», хотя мы и использовали это наименование ранее.

В качестве простейшего варианта расчета энергетического спектра с использованием соотношений (4.1) рассмотрим линейный гармонический *осциллятор,* $U(x) \sim x^2$, *частота колебаний* ω *которого* есть константа, определяемая только интенсивностью силового поля и массой колеблющегося около положения равновесия тела. При этом формально полагаем, что рассматриваемое тело обладает спином $s = \hbar / 2$, минимально возможным из известных в природе. Собственно, такое же условие было использовано и в предыдущих главах. Конечно, вполне правомерно поставить вопрос о рассмотрении теории движения тел со спином, отличным от $\hbar / 2$, в том числе и нулевым, однако в данной книге мы сознательно ограничиваемся системным анализом прежде всего наиболее общих проблем теории концептуального характера.

В соответствии с правилом квантования (4.1) классическое по форме движение определяется наличием характерного «квантового» минимума $W_0 = \min\langle W \rangle = \hbar\omega / 2$. Имманентности спина, следовательно, соответствует имманентная же энергия нулевого уровня существенно квантовой колебательной системы. С другой стороны, любое изменение $\Delta\langle W \rangle$ средней *кинетической энергии равно* $\Delta\langle U \rangle$, поэтому изменение полной энергии колебаний $\Delta E = 2\Delta\langle W \rangle$. Поскольку, в соответствии с (4.1), «шаг» изменения $\langle W \rangle$ равен $\hbar\omega / 2$, то $\Delta E = n\hbar\omega$; $n = 1, 2, 3, \ldots$ Совмещение ΔE с наличием W_0 возможно только при условии, что полная энергия колебаний определяется как $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$; $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Еще раз обратим внимание читателей на то, что в трактовке модели 2 средняя кинетическая энергия $\langle W \rangle$ не равна соответствующим значениям в рамках моделей 1 и 3, поскольку уже при $n = 0$ они дают для $\langle W \rangle$ величину $W_0 / 2$.

В совпадении решений, даваемых «обобщенной» на учет наличия спина классикой стационарных колебаний и уравнением Шредингера, нет ничего удивительного, поскольку обе механические модели 1 и 2 базируются на одних и тех же наиболее общих представлениях о пространстве, времени и их симметриях, которые подробно обсуждались в главах 1 и 2. Ниже будет показано, что в рамках модели 2, в частности, можно получить точное решение задачи об энергетическом спектре водородоподобного атома в нерелятивистском приближении без использования каких-либо специфических для стандартной волновой механики принципов и соотношений.

4.3. Расчет релятивистских поправок к энергетическому спектру линейного гармонического осциллятора

В главе 3 было показано, что логически строго определенный смысл релятивистские квантовые задачи имеют только в том случае, когда реализуется условие малости поправок к энергетическому спектру «за релятивизм». Сказанное означает, что если мы представим энергию уровня E_n в виде суммы нерелятивистского значения $E_n^{(0)}$ и релятивистской поправки E_n', то должны выполняться два условия: $E_n' / E_n^{(0)} \ll 1$ и $E_n^{(0)} / m_0c^2 \ll 1$. Первое условие обеспечивает применимость в принципе теории возмущений, второе позволяет ограничиться случаем слабого релятивизма, рассмотренного в определенном приближении в п. 3.3. Очевидно, что при этом можно пренебречь членами разложения порядка E_n' / m_0c^2 по сравнению с $E_n^{(0)} / m_0c^2$, и тогда с точностью до числового коэффициента, который, собственно, и требуется определить, мы имеем $E_n' \sim \left(E_n^{(0)}\right)^2 / m_0c^2$.

Для решения поставленной задачи в рамках модели 2 мы в соответствии с формулой (4.1) должны по классической модели 1 вычислить частоту колебаний ω при учете релятивистской зависимости массы колеблющейся точки от скорости. При этом для простоты, как обычно, полагаем, что спин материальной точки равен спину электрона, оставляя в стороне принципиальный вопрос о квантовании состояний квантового объекта, не обладающего спином, выходящий за рамки феноменологической механики.

В соответствии с законом сохранения механической энергии мы можем записать следующее уравнение для линейного осциллятора с возвращающей силой $F = -k_0x$:

$$mc^2 - m_0c^2 + \frac{1}{2}k_0x^2 = \frac{1}{2}k_0a^2 = E\,, \tag{4.2}$$

где $m = m_0\left(1 - \dot{x}^2 / c^2\right)^{-1/2}$; a — амплитуда колебаний; E — полная механическая энергия. Частота колебаний ω является искомой функцией от релятивистской поправки $E' = E - E^{(0)}$. В силу симметрии достаточно рассмотреть движение за одну четверть периода колебаний T — от $x = a$, $\dot{x} = 0$ до $x = 0$, $\dot{x} = \dot{x}_{\max}$; при этом $\omega = 2\pi / T$, $\omega_0 = \sqrt{k_0 / m_0}$ — классическая частота гармонических колебаний.

Выражая из (4.2) $\dot{x}$, можно записать решение этого уравнения в квадратурах:

$$J = \int_0^a \frac{\left(E + m_0c^2 - \frac{1}{2}k_0x^2\right)dx}{\left[\left(E + m_0c^2 - \frac{1}{2}k_0x^2\right)^2 - \left(m_0c^2\right)^2\right]^{1/2}} = \frac{\pi c}{2\omega}. \tag{4.3}$$

Согласно принятому выше приближению слабого релятивизма при вычислении интеграла J можно воспользоваться разложением вида

$$\left(1 + \frac{E - \frac{1}{2}k_0x^2}{2m_0c^2}\right)^{-1/2} \approx 1 - \frac{E - \frac{1}{2}k_0x^2}{4m_0c^2}.$$

При этом исходный интеграл J распадается на несколько табличных интегралов, в которых ненулевыми окозываются только члены, содержащие $\arcsin x / a$. Проведя необходимые вычисления, с точностью до членов первого порядка малости получим окончательно:

$$\omega = \omega_0\left(1 - \frac{3}{8}\frac{E}{m_0c^2}\right). \tag{4.4}$$

Величине $\langle W \rangle$ в (4.1) мы должны сопоставить классическую величину E таким образом. чтобы в пренебрежении релятивистскими поправками из (4.1) мы бы автоматически получали нерелятивистский спектр энергий $E_n^{(0)}$. Для этого составим следующее уравнительное соотношение:

$$\frac{1}{2}(n+1)\hbar\omega_0\left(1 - \frac{3}{8}\frac{E_n^{(0)}}{m_0c^2}\right) = g\left(E_n^{(0)} + E'_n\right), \tag{4.5}$$

где для удобства в (4.1) проведена замена $n \to n+1$; $n = 0; 1; 2; \ldots$ Поскольку $E_n^{(0)} = (n + 1/2)\hbar\omega_0$, то $g = (n+1)/(2n+1)$. Тогда для релятивистских поправок к уровням энергии гармонического осциллятора в рамках модели 2 получаем следующую формулу:

$$E'_n = -\frac{3}{8}(n + 1/2)^2 \frac{(\hbar\omega_0)^2}{m_0c^2}. \tag{4.6}$$

Сопоставляя формулу (4.6) с формулой (3.27) из гл. 3, полученной путем замены $m \to \langle m \rangle$ в уравнении Шредингера, мы видим, что формула (3.27) содержит коэффициент $1/4$, в полтора раза меньший $3/8$ в формуле (4.6). Ситуация в определенном смысле аналогична тому, что мы видели на примере задачи о кулоновском осцилляторе (водородоподобном атоме). Поэтому, как и в задаче об атомном спектре, мы применим независимый от сравниваемых вариантов метод расчета, основанный на решении нерелятивистского уравнения Шредингера с классическим по форме членом, описывающим релятивистское «возмущение» уровней энергии, который возникает при записи массы в виде (3.70) с произвольным коэффициентом f, подлежащим дополнительному определению. Соответствующее квантовое уравнение записывается в виде:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{2m_0}{\hbar^2}\left(E-U-U'\right)\varphi=0;\quad U'=-f\frac{\left(E-U\right)^2}{m_0c^2}, \tag{4.7}$$

где $U=\dfrac{1}{2}m_0\omega_0^2x^2$.

По теории возмущений в первом приближении

$$E_n'=\left\langle U'\right\rangle=-\frac{f}{m_0c^2}\left(E^2-2E\left\langle U\right\rangle+\left\langle U^2\right\rangle\right)=-\frac{f\left\langle U^2\right\rangle}{m_0c^2}, \tag{4.8}$$

поскольку при усреднении по функциям нулевого приближения $\varphi_n^{(0)}(x)$ имеет место равенство $E=2\left\langle U\right\rangle$. Величина $\left\langle x^4\right\rangle$ определяется известной формулой:

$$\left\langle x^4\right\rangle=\frac{3}{4}x_0^4\left(2n^2+2n+1\right);\quad x_0^2=\hbar/m_0\omega_0. \tag{4.9}$$

Подставляя (4.9) в (4.8), получим окончательно:

$$E_n'=-\frac{3f}{8}\frac{(\hbar\omega_0)^2}{m_0c^2}\left(n^2+n+\frac{1}{2}\right). \tag{4.10}$$

Сопоставим полученную по теории возмущений формулу с выражениями (4.6) и (3.27).

Приравнивая друг к другу величины E_n', определяемые формулами (4.6) и (4.10), находим уравнительное соотношение для $f=f_n$:

$$f_n=\frac{(2n+1)^2}{(2n+1)^2+1}. \tag{4.11}$$

Мы видим, что $f_0=1/2$; $f_1=9/10$; $f_2=25/26$ и т. д., т. е. с увеличением n величина f_n довольно быстро стремится к единице как своему «квазиклассическому» пределу. Фактически только лишь для первых двух уровней энергии сказывается различие в части величин релятивистских поправок, вызванное, как уже отмечалось выше, несоответствием квантовой величины $\left\langle W\right\rangle$, вычисляемой через усреднение по функциям нулевого приближения, тем ее значениям, которым соответствует условие (4.1) реализуемости стационарных спиновых состояний наподобие, к примеру, условиям возбуждения гармоник колебаний струны.

Заменим, далее, формально в (4.8) $\langle x^4 \rangle$ на $\langle x^2 \rangle^2$. Тогда вместо (4.10) мы получим

$$E_n' = -\frac{f}{4}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \frac{(\hbar\omega_0)^2}{m_0 c^2}. \qquad (4.12)$$

При $f = 1$ оценка (4.12) совпадает с величиной E', получаемой из решения (3.27). Таким образом, метод расчета, определяемый системой уравнений (3.14)–(3.16), можно рассматривать только лишь в качестве оценочного, что, собственно, уже было показано в главе 3 применительно к решению задачи о водородоподобном атоме.

4.4. Квантование нерелятивистской задачи Кеплера с учетом спина электрона

В соответствии со сказанным в п. 4.1 нам необходимо создать линейную модель водородоподобного атома в классическом смысле, не используя каких-либо постулатов «квантового характера», следующих прямо или косвенно из уравнения Шредингера. Для начала следует рассмотреть простейшую классическую задачу о падении неподвижного электрона на центр кулоновского притяжения, образуемый массивным положительным зарядом, неподвижным в рассматриваемой лабораторной системе координат. Поскольку отношение масс протона и электрона составляет примерно 2×10^3, то с большой степенью точности центр тяжести системы ядро+электрон можно совместить с положением ядра.

4.4.1. Линейная модель, *L*=0

Совместим начало координат оси r одномерного движения электрона, обладающего массой m и зарядом $-q$, с положением неподвижного кулоновского центра в $r = 0$, несущего заряд $+Zq$. Уравнение движения электрона вдоль оси r имеет вид:

$$m\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{Z q^2}{r^2}. \qquad (4.13)$$

Положим формально, что в точке $r = 0$ происходит абсолютно упругое отражение электрона, так что следует ограничиться областью определения $r \geq 0$. Если, далее, принять, что в некоторой произвольной точке $r = a$ электрон неподвижен, т. е. ограничиться рассмотрением финитного движения с полной энергией $E < 0$, то для решения задачи удобно воспользоваться, как и в случае линейного гармонического осциллятора, законом сохранения механической энергии, который применительно к рассматриваемой конфигурации записывается в виде:

$$E=-\frac{Zq^2}{a}=-\frac{Zq^2}{r}+\frac{1}{2}m\dot{r}^2;\quad \dot{r}=\frac{dr}{dt}, \tag{4.14}$$

откуда

$$\dot{r}^2=\frac{2Zq^2}{m}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{a}\right). \tag{4.15}$$

Поскольку решение $r(t)$ уравнения (4.15) симметрично относительно знака при $\dot{r}$, то достаточно ограничиться областью значений $\dot{r}\le 0$. При этом

$$\dot{r}=-\sqrt{\frac{2Zq^2}{m}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{a}\right)}. \tag{4.16}$$

Полагая $r=a$ при $t=0$, решение уравнения (4.16) можно представить в виде:

$$\sqrt{\frac{r}{a}\left(1-\frac{r}{a}\right)}-\arcsin\sqrt{\frac{r}{a}}+\frac{\pi}{2}=\sqrt{\frac{2Zq^2}{ma^3}}\,t. \tag{4.17}$$

Вводя обозначения для периода движения T_0 и круговой частоты $\omega_0=2\pi/T_0$, а также учитывая, что $t=T_0/2$ при $r=0$, получим окончательно выражение

$$\omega_0=2^{3/2}q\sqrt{\frac{Z}{ma^3}}=\frac{(-2E)^{3/2}}{m^{1/2}Zq^2}, \tag{4.18}$$

которое потребуется нам в дальнейшем.

4.4.2. Энергетический спектр водородоподобного атома в отсутствие орбитального момента

Классическая модель Бора–Зоммерфельда основана на постулате квантования орбитальных моментов при движении электрона по эллиптическим траекториям вокруг ядра атома, поэтому она в принципе исключает случай падения электрона на ядро, ограничивая их максимальное сближение боровским радиусом. Напротив, волновая (квантовая) механика в качестве основных рассматривает как раз состояния с нулевым орбитальным моментом с ненулевой вероятностью нахождения электрона во всей бесконечной области $0<r<\infty$, в чем обычно и усматривается принципиальная несовместимость классического и волнового описаний стационарных состояний атома. Введенная выше в рассмотрение модель 2 (классика со спином) позволяет «проквантовать» стационарные состояния в одномерной линейной конфигурации, которые и соответствуют s-состояниям волновой механики (замена термина «квантовый» на «волновой» в контексте данной главы имеет вполне определенный содержательный смысл).

В рассматриваемой задаче, как известно, имеет место соотношение $E = \langle W \rangle + \langle U \rangle = -\langle W \rangle$ в силу равенства $\langle W \rangle = -\langle U \rangle / 2$. Поскольку $E = -Zq^2 / a$, то, используя формулы (4.1) и (4.18), можно записать равенство

$$ns\omega_0 = Zq^2 / a_n; \quad n = 1; 2; 3; \ldots, \tag{4.19}$$

откуда находим

$$a_n = \frac{2}{Z}\frac{n^2\hbar^2}{mq^2} \tag{4.20}$$

и

$$E_n = -\frac{Z^2mq^4}{2\hbar^2}\frac{1}{n^2}. \tag{4.21}$$

Таким образом, в рамках модели CMS мы получили решение нерелятивистской задачи для спектра энергий водородоподобного атома в s-состояниях, т. е. с нулевым орбитальным моментом, что точно соответствует решению, получаемому путем рассмотрения уравнения Шредингера, принимая во внимание вырождение по квантовому числу l. Если ввести обозначение $\omega_0(n) = \omega_n$, то (4.21) можно переписать в физически более наглядном виде:

$$E_n = -\frac{1}{2}n\hbar\omega_n; \quad \omega_n = \frac{Z^2mq^4}{\hbar^3}\frac{1}{n^3}. \tag{4.22}$$

4.4.3. Моделирование орбитального момента

Если ставится задача об учете момента количества движения электрона относительно ядра атома, оставаясь в рамках модели 1, то необходимо смоделировать момент таким образом, чтобы, с одной стороны, были сохранены все существенные особенности классического движения электрона, а с другой, учитывалось такое «геометрическое» обстоятельство, как возможность разделения радиальных и угловых координат, заложенная в структуре уравнения Шредингера при $U = U(r)$. Последнее означает, что в модели 3, которой и соответствует уравнение Шредингера в его трехмерном варианте, радиальная часть волновой функции обладает свойствами самостоятельного нетривиального решения, имеющего содержательный физический смысл: а именно, модель 3 пространственной каузальности при $U = U(r)$ совместима с геометрией одномерного движения в рамках модели 1 точечной каузальности и не совместима с его классической эллиптичностью.

Таким образом, классическая модель водородоподобного атома должна обладать сферической симметрией, т. е. круговой симметрией, если учесть классические законы движения; при этом она должна быть совместима с линейной моделью движения (s -состояния), рассмотренной выше, что исключает использование в указанных целях модели Бора (круговые орбиты). Эти требования позволяют сконструировать требуемую модель атома совершенно однозначно, не используя какие-либо выходящие за рамки классических представлений принципы и постулаты.

Искомую модель атома мы представим в форме равномерно распределенных массы и заряда электрона по периметру бесконечно тонкого кольца, центр которого совпадает с центром притяжения. В качестве модельного условия примем, что форма кольца остается неизменной, меняться может только его радиус. Плоскость кольца не изменяет своего пространственного положения, а само кольцо может вращаться вокруг центра.

На первый взгляд может показаться, что условие неизменности формы кольца физически нереализуемо без привлечения некоторых дополнительных требований относительно внутренних сил взаимодействия между элементами кольца, удерживающих его форму. В действительности это не так: любые возмущения круговой орбиты точечного электрона, неизбежно приводящие к его деформации (при сохранении финитности движения — к эллипсоидальности орбиты), не нарушают кольцеобразности «размазанного» электрона, если и само точечное возмущение равномерно распределяется по кольцу — это условие очевидно само по себе и неотъемлемо от первичного условия равнораспределения по кольцу массы и заряда. Поскольку в предлагаемой модели все элементы кольца ведут себя идентично, а тангенциальные кулоновские силы между ними отсутствуют в силу симметрии, то движение кольца в пространстве и времени — а возможны только изменение его радиуса и скорости вращения — адекватно моделирует движение электрона в произвольном радиальном направлении, обладающего кроме спина $\vec{S}$, ориентированного вдоль радиуса, орбитальным моментом количества движения $\vec{L}$, перпендикулярным плоскости кольца (орбиты) и, следовательно, вектору $\vec{S}$. При $L = 0$ данная модель вырождается в простейший случай линейного падения электрона на ядро (см. п. 4.4.1).

Использованный выше формальный прием моделирования в виде равномерного распределения некоторых точечных характеристик по линии или поверхности — в данном случае массы и заряда — физически приемлем для расчетных целей в отношении скалярных величин; однако в случае спина, вектор которого приложен к точке нахождения электрона, тот же прием приводит к его занулению. Следовательно, данная кольцевая модель носит чисто классический характер и в то же время полностью согласуется с тем, что сам по себе спин как «внутренняя» форма движения в чисто механическом отношении в классике себя не проявляет. Однако «классика со спином» — модель 2, включая в свой формализм постоянную Планка $\hbar$ и претендуя на валидность в квантовых условиях, должна рассматривать $\vec{S}$ в качестве реального вектора наряду с $\vec{L}$, т. е. считать известными его точку приложения — $r(t)$, направление — $\vec{S} \perp \vec{L}$ и величину $\left|\vec{S}\right| = s = \hbar/2$. Тогда необходимо ввести в рассмотрение суммарный момент электрона $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ и в соответствии с правилом сложения пространственных векторов записать:

$$\left|\vec{J}\right| = \sqrt{L^2 + S^2}\ . \tag{4.23}$$

В рассматриваемой здесь модели 2 именно $\vec{J}$ является реальным механическим моментом электрона, в котором $\vec{S}$ является постоянной составляющей в отличие от $\vec{L}$. Поскольку $\left|\vec{S}\right| = s$ является минимальной структурной единицей реальных векторов моментов, какими в отличие от модели Бора для круговых орбит следует считать $\vec{J}$ и $\vec{S}$, но не $\vec{L}$, то возможны только две структурные формы представления суммарного момента $\vec{J}$:

$$\left|\vec{J}\right| = \frac{1}{2}(l+1)\hbar;\quad l = 0,1,2,... \tag{4.24}$$

и

$$\left|\vec{J}\right| = (l + 1/2)\hbar;\quad l = 0,1,2,... \tag{4.25}$$

Согласно (4.24), при $l = 1$ «вклад» в величину $\left|\vec{J}\right| = \hbar$ орбитального движения, характеризуемый числом l, может составлять величину, равную $s = \hbar/2$, откуда следует, что в принципе возможно чисто классическое описание спина. Но последнее противоречит смыслу понятия спин, равно как и вообще «дробность» вклада любых движений, аналогичная s, в полный момент как физически реальную величину, определяемую однозначно по условиям задачи в рамках выбранной модели описания. Напротив, форма (4.25) отмеченного противоречия не содержит, поэтому именно она и является единственно возможной.

Подставляя (4.25) в (4.23), получим:

$$\left|\vec{L}\right| = \sqrt{l(l+1)}\,\hbar, \tag{4.26}$$

что совпадает с формулой для квантового параметра L в QM. Данное совпадение не носит случайный характер и является следствием установленного в главе 2 факта определяющей роли спина в формализме QM, хотя он и представлен в нем латентно через мировую константу $\hbar$. Однако говорить о какой-либо детальной совместимости описаний, даваемых моделями 2 и 3, не приходится уже по той причине, что в QM не имеет место соотношение (4.23). Разумеется, столь же несводимы друг к другу и модели 2 и Бора–Зоммерфельда, поскольку в последней момент $\left|\vec{L}\right|$ должен быть кратен $\hbar$.

Различие в представлениях орбитального момента в рамках нерелятивистской квантовой механики, отвечающей пространственной модели 3, и классической модели со спином 2 (в дальнейшем мы будем обозначать ее и через аббревиатуру CMS) особенно отчетливо проявляется при рассмотрении вопроса о квантовании орбитального момента посредством магнитного числа m (в стандартных обозначениях QM). При обосновании формулы (4.23) предполагалось, что имеется произвольно выделенная ось $\vec{r}$, вдоль которой и моделируется реальное двухмерное классическое движение; при этом $\vec{S} \parallel \vec{r}$, а $\vec{L} \perp \vec{r}$. Следовательно, чисто геометрически выделенной в сферически симметричной задаче с потенциальной энергией $U = U(r)$ является плоскость, в которой лежат все три вектора $\vec{S}, \vec{L}, \vec{J}$. Разумеется, мы можем с равным основанием рассматривать любую иную плоскость, включающую в себя $\vec{r}$ и составляющую с выделенной посредством $\vec{L}$ «базовой» плоскостью произвольный угол θ. При этом векторы $\vec{L}$ и $\vec{J}$ обладают проекциями L_θ и J_θ на эту плоскость, причем, очевидно, $0 \le |L_\theta| \le |\vec{L}|$; $s \le |J_\theta| \le |\vec{J}_\theta|$, поскольку проекция $\vec{S}$ на ось $\vec{r}$ не изменяет своего пространственного положения при изменении θ. Для $\theta = \pi/2$ имеем $L_\theta = 0$; $J_\theta = s$. Кроме того, $|J_\theta| = \sqrt{L_\theta^{\,2} + s^2}$, и учитывая структуру формулы (4.23), мы получаем $L_\theta^{\,2} = |m|(|m|+1)\hbar^2$; $-l \le m \le l$, принимая во внимание симметрию всех соотношений для полупространств $0 \le \theta \le \pi$ и $\pi \le \theta \le 2\pi$. Если физически угол θ ничем не выделен и определяется лишь произвольным ракурсом зрения, то никаких «последствий» от изменения угла зрения для энергетики атома не наступает, и формула (4.26) поэтому является единственным описанием $\vec{L}$; в противном случае угол θ определяет характер физического воздействия, и указанное «вырождение» по m снимается.

Аналогия с традиционной QM усматривается в неопределенности величины L_θ вследствие неопределенности выделения в пространстве самой базовой плоскости $\theta = 0$ при задании модуля вектора $\vec{L}$ (или $\vec{J}$). Спектр этой неопределенности определяется числом возможных значений L_θ, равным $2l+1$. Однако имеется и принципиальное отличие, связанное с учетом спина как необходимым элементом моделирования атома в рамках CMS в отличие от CM и QM. Математически оно выражается в существовании полученного выше соотношения

$$L_\theta = \pm\sqrt{|m|(|m|+1)}\,\hbar \tag{4.27}$$

для модели CMS в отличие от $L_z = m\hbar$ в QM и $|L_z| \le |\vec{L}|$ в CM, если в последнем случае не ограничиваться только целочисленными m. Можно сказать, что в некотором смысле аналогом L_z является в CMS величина J_θ, но не L_θ, хотя, конечно, детальное сопоставление бесспиновых и спиновой механических моделей довольно условно, принимая во внимание неуничтожимость спина.

4.4.4. Неквантованные стационарные состояния

Под стационарностью в механике мы будем понимать такое состояние некоторой механической системы, когда все движения внутри нее или рассматриваемой системы как единого целого относительно лабораторной системы координат имеют строго периодический характер, а интегральные характеристики сохраняются. Если система состоит из конечного числа механических тел, а движение последних характеризуется конечным числом типов движений, то такая система имеет присущий ей стационарный колебательный спектр, под которым понимается конечный набор периодических движений в системе. Все эти движения, вообще говоря, не описываются законами гармонических колебаний, а представление их в виде бесконечных спектров гармонических колебаний — всего лишь математический прием, цель которого заключается в установлении единообразной счетной процедуры анализа колебаний и представления его результатов. Механическая система в стационарном состоянии обычно характеризуется наибольшим периодом колебаний (наименьшей частотой), и именно этим периодом определяется основное состояние составной системы. Сам этот период может зависеть, к примеру, от энергии системы и, следовательно, энергетический спектр может иметь дискретный или сплошной вид. В наиболее простых механических системах (которые мы только и рассматриваем), состоящих, к примеру, из двух тел, одно из них является неподвижным силовым центром, и поэтому речь может идти о стационарных колебаниях одного тела в заданном силовом поле. При этом основными являются возможные колебания данного тела, в связи с чем в указанном смысле термин «основной» бессодержателен. По этой причине основными колебаниями (состояниями) в таких случаях называют некоторые *характеристические состояния*, ограничивающие спектр с одной стороны. К примеру, в гармоническом и кулоновском осцилляторах основными именуют состояния с минимально возможной энергией колебаний (в QM), а в теории упругих колебаний (к примеру, струн) — колебания с минимально возможной собственной частотой.

Таким образом, основная цель задачи на стационарные состояния — это исследование самой возможности существования таких состояний и определение их частотного и энергетического спектров. При этом колебания, вообще говоря, не являются гармоническими, а при учете релятивистской зависимости массы от скорости даже изначально гармонические колебания характеризуются определенной степенью ангармонизма. Разумеется, необходимо абстрагироваться от учета любых физических процессов немеханического вида, в том числе электромагнитных, во избежание привнесения в механику неких гипотетических закономерностей немеханического типа (именно так и была сформирована концепция Эйнштейна–

Минковского, которая вполне отвечала психологически понятному стремлению теоретиков создать единую теорию описания механических и электромагнитных явлений, но при этом была принесена в жертву совершенно необходимая для исследований концептуального уровня строгая последовательность логики причинно-следственной взаимосвязи).

Применительно к «проблеме Кеплера» в задачах о движении электрона в поле ядра атома водорода в рамках модели 3 (т. е. QM) вопрос заключается в отыскании состояний с периодическими во времени Ψ-функциями — стационарных функций $\varphi(\vec{r})$, связанных с Ψ соотношением $e^{-i\omega t}\varphi(\vec{r})$. Гармонический характер стационарности в QM — это специфика самой модели 3, требующей линейности уравнения Шредингера. Взаимосвязь существования стационарных состояний с вопросами поглощения и излучения энергии — это проблема взаимосвязи механических и электромагнитных явлений, выходящая за рамки постулирования существования статического поля $U = -q^2 / r$. Проблема Кеплера в нерелятивистской механике сводится к отысканию замкнутых орбит электрона как достаточному условию наличия стационарности (релятивистсткая «розетка» представляет собой незамкнутую траекторию, что, однако, также вполне совместимо с представлением о стационарности механического движения). Излучение движущегося с ускорением электрона — это уже немеханическое явление, эффект, исключаемый из чисто механического анализа стационарности. С этой логически последовательной точки зрения на проблему Кеплера в представлениях QM и CM содержательным является вопрос о необходимом совпадении всех сопоставимых результатов описания стационарности в моделях QM и CM, если последнюю расширить путем учета спина как еще одной, помимо m и q, имманентной «точечной» характеристики электрона (кавычки подчеркивают то установленное выше свойство $\vec{S}$, что его точечность связана с точечным объектом, но проявление носит принципиально пространственный характер). Действительно, если относиться к логике причинно-следственных связей как к продукту эволюции природы, то логически безупречные модели ее описания не могут давать различающиеся результаты в сопоставимых терминах и измерениях. Применительно к атому водорода сказанным до всякого конкретного метематического анализа обеих моделей утверждается, что описания всех параметров энергетического спектра через использование уравнения Шредингера (QM) или уравнения Ньютона с учетом спина (CMS) должны совпадать. Несовпадение (несовместимость) результатов, полученных в соответствии с разными моделями, свидетельствует либо о наличии в логике какой-либо модели противоречий, либо об ограничении пределов применимости модели, которое не было оговорено при ее логической разработке. Последнее, очевидно, может являться основанием для определенной ревизии концептуальных основ механики, что, к примеру, уже было сделано при переходе от СМ к CMS.

Традиционный путь объединения классических представлений с квантовыми реализуется в рамках модели Бора–Зоммерфельда, позволяющей сопоставить в единой логической схеме параметры классической кеплеровой формы траектории движения электрона с дискретностью изменений момента количества движения L через «правило квантования Бора–Зоммерфельда», логически произвольное с т. зр. причинно-следственной связи. Несколько повторяясь, еще раз отметим, что классическая (по Кеплеру) пространственная детализация формы траектории несовместима с сущностью чисто пространственной модели 3. Выражаясь более точно, классические законы справедливы только в среднем (теорема Эренфеста) применительно к квантовым явлениям, поскольку усреднение и является тем логическим переходом, который связывает точечную модель с пространственной. Если инвертировать логику сказанного, то можно утверждать, что предложенная выше для анализа кольцевая модель со спином есть логически необходимый продукт усреднения: эллиптическая форма траектории электрона усредняется до окружности, а зависимость $|\vec{r}|$ от времени описывается колебаниями радиуса кольца — стационарными, но не гармоническими. При этом сразу можно утверждать, что в данной модели угловая скорость вращения «кольца» ω_{op} при $L \neq 0$ при достаточно малых возмущениях «стационарных» (боровских) орбит совпадает с частотой радиальных колебаний ω — тривиальный геометрический факт специфики движения по эллипсу.

Обозначим через $v_{op} = \omega_{op} r$ линейную скорость вращения кольца радиуса r, тогда $|\vec{L}| = L = m v_{op} r$. Удобно ввести суммарную «центробежную» силу инерции $F_{цб} = m v_{op}^2 / r$, и тогда общая сила, действующая на кольцо вдоль r, есть $F = F_q + F_{цб}$. Уравнение движения «интегрированного» элемента кольца согласно закону Ньютона имеет вид:

$$m\ddot{r} = -\frac{q^2}{r^2} + \frac{L}{mr^3}, \tag{4.28}$$

т. е. мы снова, как и в случае $L = 0$, имеем чисто одномерную (линейную) модель движения электрона в поле ядра, причем потенциальная энергия U теперь слагается из ее кулоновской составляющей $U_q = -q^2 / r$ и «центробежной» $U_{цб} = L^2 / 2mr^2$. Заметим, что если, согласно (4.26), положить $L = \sqrt{l(l+1)}\,\hbar$, то мы получаем именно то выражение для $U(r)$, которое фигурирует в уравнении Шредингера для радиальной части Ψ-функции. Но теперь мы имеем дело с классической задачей нахождения зависимости $r(t)$, через которую и будут описываться стационарные состояния атома водорода. Сразу оговоримся, что речь не идет о нахождении неких «скрытых параметров» в QM, позволяющих «уточнить» пространственное вероятностное описание движения электрона, даваемое функцией $\Psi(\vec{r},t)$, хотя основания для подобной интерпретации взаимосвязи моделей 1 и 3 окажутся вполне очевидными, если условная классическая модель, введенная выше, позволит получить при использовании правила квантования (4.1) совпадающее с чисто квантовым описание энергетической структуры стационарных состояний. С формальной стороны нельзя в принципе говорить о возможном «уточнении» пространственной модели 3 посредством точечной 1 уже потому, что эти модели являются полярно противоположными. Совпадение результатов расчетов, если оно имеет место, может только служить веским аргументов для признания валидности модели 2, которая соединяет в своей структуре элементы описания моделей 1 и 3, но не зависит от них в своих конечных выводах.

При любом отличном от нуля L, согласно (4.28), имеется такое $r = R$, что $\ddot{r}(R) = 0$, т. е. при $r = R$ кривая $U(r)$ имеет минимум, который можно назвать положением равновесия, причем в положении $r = R$ кинетическая энергия радиального движения электрона (кольца) $W = m\dot{r}^2/2$ достигает максимума. Для дальнейшего анализа полезны следующие элементарные соотношения:

$$R = \frac{L^2}{mZq^2};\quad \omega_R = \omega_{op}(r = R) = \frac{mZ^2q^4}{L^3}. \tag{4.29}$$

Введем $\Delta = r - R$. Тогда (4.28) можно записать в виде:

$$\ddot{\Delta} + \frac{\omega_R{}^2}{(1 + \Delta/R)^3}\Delta = 0;\quad \Delta = \Delta(t). \tag{4.30}$$

Из (4.30) следует, при любых ненулевых L при $\Delta = 0$ происходит смена знака $\ddot{\Delta}$, т. е. при финитном движении уравнение (4.30) описывает стационарные нелинейные (негармонические) колебания электрона относительно положения равновесия $r = R$. Для малых колебаний при выполнении условия $|\Delta/R| \ll 1$ уравнение (4.30) описывает гармонические колебания с частотой $\omega = \omega_R$. Далее, при $L \to 0$ имеем $R \to 0$, т. е. задача п. 4.4.1 при условии упругого отражения электрона от ядра представляет собой предельный случай общей задачи с ненулевым орбитальным моментом. Следовательно, уже в этом центральном с т. зр. физики атома пункте рассматриваемая классическая модель вполне согласуется с квантовой независимо от уточнения смысла L.

Аналитическое решение уравнения (4.28) легко получить, используя закон сохранения энергии. Полагая для финитного движения равенство $r = a$ — максимальному радиусу колебаний при заданной полной энергии E, можно записать:

$$E = -\frac{Zq^2}{a} + \frac{L^2}{2ma^2} = -\frac{Zq^2}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}m\dot{r}^2. \tag{4.31}$$

Обозначая

$$\xi=\sqrt{1-r/a};\quad A=\frac{L^2}{2maZq^2};\quad B=1-2A;\quad \xi_0=\sqrt{\frac{2B}{1+B}}, \tag{4.32}$$

при условии $A\le 1/2$ (т. е. при наличии радиальных колебаний относительно $r=R$) решение уравнения (4.31) имеет вид:

$$\frac{2}{\sqrt{1+B}}\left[\frac{1}{(1+B)}\arcsin\frac{\xi}{\xi_0}+\frac{1}{2}\xi\sqrt{\xi_0^2-\xi^2}\right]=\frac{Z^{1/2}q}{m^{1/2}a^{3/2}}t. \tag{4.33}$$

Полупериод $T/2$ негармонических колебаний определяется из (4.33), если положить $\xi(T/2)=\xi_0$. Поскольку $\omega=2\pi/T$, то окончательно имеем:

$$\omega=2^{3/2}(1-A)^{3/2}\frac{Z^{1/2}q}{m^{1/2}a^{3/2}}=\frac{2^{3/2}(-E)^{3/2}}{m^{1/2}Zq^2}=\omega_0, \tag{4.34}$$

т. е. величина ω при $L>0$ совпадает с ω_0, определяемой формулой (4.18) при $L=0$. Полученный результат означает, что в используемой чисто классической нерелятивистской модели имеет место вырождение по L относительно определения основной характеристики колебаний — частоты ω. Соответствующие условию стационарности колебаний значения момента L заключены в диапазоне

$$0\le L\le L_{\max}=\sqrt{\frac{mZ^2q^4}{2|E|}}; \tag{4.35}$$

при этом значению $L=0$ соответствует амплитуда колебаний $a_{\max}=Zq^2/|E|$, а значению $L_{\max}$ — $a_{\min}=a_{\max}/2$, причем $\max R=a_{\min}$. Последнему из приведенных соотношений как раз и соответствует модель Бора круговых орбит. Если учесть наличие у электрона спина, то это приведет к тому, что состояние с $L=L_{\max}$ как состояние с нулевой радиальной кинетической энергией физически нереализуемо и, следовательно, допустимые значения $L<L_{\max}$.

4.4.5. Квантование классических стационарных состояний

Общее решение (4.33)–(4.34) классической задачи позволяет провести расчет энергетического спектра при $L>0$ с учетом спина чисто формально, без каких-либо ссылок на классические и тем более квантовые теоремы, касающиеся ряда характеристик и особенностей описания движения (состояний) электрона в силовом поле ядра водородоподобного атома.

Как следует из условия квантования (4.1), учет спина требует вычисления не только ω, но и $\langle W\rangle$. Поскольку $\omega=\omega_0$, то остается вопрос только лишь относительно определения взаимосвязи $\langle W\rangle$ и E, для чего необходимо выяснить, что следует понимать под средней кинетической энергией в соотношении (4.1) применительно к рассматриваемой механической модели атома? В качестве составляющей в нее, прежде всего, входит радиальная часть кинетической энергии $\langle W_{рад}\rangle = m\langle \dot{r}^2\rangle/2$. Но ведь по своему физическому смыслу и $U_{цб} = \langle W_{ор}\rangle$. Ранее при рассмотрении радиального силового взаимодействия величина $U_{цб}$ была отнесена к потенциальной энергии, вообще говоря, несколько формально, не в последнюю очередь благодаря традиционной трактовке смысла записи уравнения Шредингера в соответствующих задачах, в силу вырождения физического содержания понятия «спин» в универсальную феноменологическую константу $\hbar/2$. В рассматриваемом же здесь новом подходе — CMS — классическое по смыслу описание движения опирается на имманентную электрону триаду (m,q,s), что принципиально отличает его от традиционной дуальной классики (m,q) в CM. Стационарность, кинетическая энергия и спин тесно связаны между собой, что и утверждается «спиновым» эквивалентом волны де Бройля (см. п. 4.2). С этой точки зрения ясно, что статическое силовое поле не имеет прямого отношения к спину (точнее говоря, к винтообразности спиновой модели движения; вопрос же о взаимосвязи самих величин m,q и s выходит за рамки феноменологического анализа). Напротив, имеются вполне веские аргументы в пользу учета в $\langle W\rangle$ и ее орбитальной составляющей $\langle W_{ор}\rangle$. Согласно п. 4.4.3 величины $\vec{L}$ и $\vec{S}$, относящиеся к одному и тому же объекту, связаны между собой правилом (4.23) сложения ортогональных векторов, которое фактически определяет в модели CMS фундаментальное соотношение (4.26). Наконец, справедливость чисто арифметического сложения энергий $\langle W_{рад}\rangle + \langle W_{ор}\rangle = \langle W\rangle = E - \langle U_q\rangle$ следует из того, что $\vec{v}_{ор} \perp \vec{v}_{рад}$ именно в рассматриваемой нами модели атома. Если приведенные логические аргументы в пользу учета $\langle W_{ор}\rangle$ в составе $\langle W\rangle$ при использовании формулы (4.1) верны, то мы придем к верным результатам расчета.

Рассматриваемая расчетная нерелятивистская модель атома удовлетворяет условиям применимости теоремы вириала, согласно которой $\langle W\rangle = -E$. Данное утверждение можно проверить и непосредственным расчетом, опираясь на полученное выше общее решение классической задачи. Этот расчет полезен и в том отношении, что по аналогичной схеме можно проводить вычисление релятивистских поправок к энергетическому спектру, если задаться целью напрямую сравнить релятивистский аналог классики со спином, обозначаемый нами в дальнейшем соответствующей аббревиатурой RMS, с расчетной схемой главы 3, основанной на модификации нерелятивистского уравнения Шредингера.

При расчете средних по времени нет необходимости использовать явную зависимость $r(t)$ вида (4.33), поскольку $dt = \dot{r}^{-1}dr$, а $\dot{r}$ выражается через r с помощью (4.31). Поскольку мы полагаем среднюю кинетическую энергию в (4.1) равной $\langle W\rangle = E - \langle U_q\rangle$, то задача сводится к вычислению $\langle U_q\rangle$, для которой имеем:

$$\langle U_q\rangle = -\frac{\omega Zq^2}{\pi} I;\; I = \int_{r_0}^{a} \frac{dr}{\left(\frac{2E}{m}r^2 + \frac{2Zq^2}{m}r - \frac{L^2}{m^2}\right)^{1/2}};\; r_0 = r(T/2). \quad (4.36)$$

Выше было показано, что L^2 в (4.36) удовлетворяет неравенству (4.35), поэтому выполняется и неравенство

$$\frac{4Zq^2}{m^2} > -\frac{8EL^2}{m^3};$$

определяющее форму записи решения для I:

$$I = -\left(-\frac{m}{2E}\right)^{1/2}\left[\arcsin\frac{\left(2Ea + Zq^2\right)}{\left(Z^2q^4 + \frac{2EL^2}{m}\right)^{1/2}} - \arcsin\frac{\left(2Er_0 + Zq^2\right)}{\left(Z^2q^4 + \frac{2EL^2}{m}\right)^{1/2}}\right]. \quad (4.37)$$

При вычислении I учтем, что исходное уравнение (4.31) не меняет своей структуры при замене a на r_0, причем $a > R$, $r_0 < R$. Далее, легко убедиться в том, что

$$1 + \frac{2EL^2}{mq^4} = \left(1 + \frac{2Ea}{q^2}\right)^2 = \left(1 + \frac{2Er_0}{q^2}\right)^2,$$

причем

$$1 + \frac{2Ea}{q^2} = \frac{R}{a} - 1 < 0;\; 1 + \frac{2Er_0}{q^2} = \frac{R}{r_0} - 1 > 0.$$

В результате получим окончательно:

$$I = \pi\left(\frac{m}{-2E}\right)^{1/2};\; \langle U_q\rangle = 2E = -2\langle W\rangle, \quad (4.38)$$

т. е. соотношения теоремы вириала. Данный результат с учетом (4.34) позволяет утверждать, что в силу специфического для кулоновского поля вырождения по L одномерность предложенной модели в своем содержательном и расчетном смысле верна для любых допустимых значений L, причем при $L \neq 0$ формулы (4.21) и (4.22) остаются справедливыми. При этом формула (4.26) позволяет установить спектр допустимых значений L при заданном E_n. Действительно, из неравенства (4.35) имеем теперь $0 \le l(l+1) < n^2$, откуда следует условие для реализуемых в стационарной задаче значений орбитального числа l, до сих пор считавшееся исключительно следствием решения уравнения Шредингера:

$$l = 0, 1, 2, ..., n-1. \tag{4.39}$$

Отметим принципиальное различие моделей Бора–Зоммерфельда и CMS. Согласно первой при любом n имеется круговая орбита с орбитальным числом $l = n-1$, включая основное состояние ($n=1$). Однако в модели CMS круговые орбиты (в смысле обычной кеплеровской геометрии движения электрона) отсутствуют, поскольку не реализуется условие $L = L_{\max}$. Если бы это было возможно, то следовало бы признать осуществимой ситуацию, когда в направлении по природе ненулевого спина электрон не совершал бы никаких движений, что противоречило бы физическому смыслу соотношения (4.1). Указанное различие еще раз подчеркивает сделанное выше утверждение, что модель CMS не сводима ни к CM, ни к QM, и поэтому должна рассматриваться в качестве третьей независимой модели механического движения наряду с двумя полярными моделями. Достоинством модели CMS в сравнении ее с QM является наглядность всех получаемых с ее помощью результатов, сочетаемая с их точностью.

4.5. Релятивистская классика со спином для s-состояний атома водорода

Рассмотрим теперь задачу, по смыслу аналогичную той, что была проанализирована выше, в п. 4.3, для случая линейного гармонического осциллятора, используя предложенную выше методологию RMS — релятивистской механики со спином, основанную на правиле квантования (4.1). В дальнейшем мы ограничимся анализом s-состояний ($L=0$) атома водорода; учет заряда ядра $Z>1$ осуществляется путем замены $q^2 \to Zq^2$; $\alpha = q^2/\hbar c \to Z\alpha$.

В сответствии с законом сохранения энергии запишем следующее уравнение:

$$-\frac{q^2}{r} + \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\dot{r}^2/c^2}} - m_0c^2 = -\frac{q^2}{a} = E < 0. \tag{4.40}$$

Обозначим:

$$E^{(0)} = -\frac{m_0q^4}{2\hbar^2n^2};\quad \beta = \frac{q^2}{2m_0c^2a} << 1;\quad \eta = \frac{r}{a} \le 1, \tag{4.41}$$

причем ограничимся первым полупериодом колебаний, $0 \le t \le T/2 = \pi/\omega$, где $-c < \dot{r} \le 0$.

Решение уравнения (4.40) в квадратурах записывается в виде:

$$\frac{2\pi c}{a\omega}\sqrt{\beta}=\int_0^1\frac{\left[1+2\beta\left(\eta^{-1}-1\right)\right]d\eta}{\sqrt{\left(\eta^{-1}-1\right)\left[\beta\left(\eta^{-1}-1\right)+1\right]}}. \tag{4.42}$$

Интеграл справа в (4.42) разбивается на два табличных; в результате получим следующее решение:

$$\omega=\frac{2\pi c\left(1-\beta\right)^{3/2}\sqrt{\beta}}{a\left[\arcsin\sqrt{1-\beta}+\left(1-2\beta\right)\sqrt{\beta\left(1-\beta\right)}\right]}. \tag{4.43}$$

Запишем тригонометрическую функцию в (4.43) в виде $\arcsin\sqrt{1-\beta}=$ $=\frac{\pi}{2}-\gamma;\ \ \gamma\ll 1$. Тогда $\sqrt{1-\beta}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)\approx 1-\frac{1}{2}\gamma^2$, откуда получаем соотношение $\gamma\approx\sqrt{\beta}$, и окончательно

$$\arcsin\sqrt{1-\beta}\approx\frac{\pi}{2}-\sqrt{\beta}\,.$$

Подставляя последнее в (4.43), после преобразований с точностью до первого порядка по малому параметру β формулу для частоты колебаний можно записать в виде:

$$\omega=\omega_1\left(1-\frac{3}{2}\beta\right);\ \ \omega_1=\frac{2\sqrt{2}q}{\sqrt{m_0a^3}}, \tag{4.44}$$

где параметр $a=a_n$ является функцией $E=E_n$.

Теперь необходимо обратиться к решению уравнения (4.1) с целью нахождения малой поправки к полной энергии $E'=E-E^{(0)}$. При этом, очевидно, имеет место равенство

$$\langle W\rangle=E^{(0)}+E'-\langle U\rangle. \tag{4.45}$$

Используя соотношение $E=-q^2/a$, величину ω_l в (4.44) можно с точностью до первого порядка малости по E' записать в виде:

$$\omega=\omega_0\left|1+\frac{E'}{E^{(0)}}\right|^{3/2}\approx\omega_0\left(1+\frac{3}{2}\frac{E'}{E^{(0)}}\right), \tag{4.46}$$

где величина ω_0 определяется формулой (4.18). Если учесть также, что с той же точностью параметр β можно представить в виде

$$\beta\approx-\frac{E^{(0)}}{2m_0c^2}=\frac{\alpha^2}{4n^2};\ \ \alpha\approx 1/137, \tag{4.47}$$

то окончательно зависимость частоты ω от относительной релятивистской поправки $\varepsilon'=E'/E^{(0)}$ определяется следующей формулой:

$$\omega = \omega_0\left(1+\frac{3}{2}\varepsilon'+\frac{3}{4}\frac{E^{(0)}}{m_0c^2}\right). \qquad (4.48)$$

Для вычисления правой части уравнения (4.1), в соответствии с (4.45), необходимо усреднить кулоновскую потенциальную энергию $\langle U\rangle$, для чего требуется совершить операцию усреднения по времени величины $1/r$, вообще говоря, в пределах $0 \le r \le a$, учитывая релятивистскую зависимость $\dot{r}(t)$:

$$\langle U\rangle = -\frac{2}{T}\int_0^{T/2}\frac{q^2}{r}dt = \frac{\omega q^2}{\pi}\int_0^a\frac{1}{r}\frac{dr}{\dot{r}}. \qquad (4.49)$$

Поскольку при $r = 0$ $|U| = W = \infty$, но при этом $\dot{r} = c$, то интеграл справа в (4.49) логарифмически расходится, поэтому поставленная задача формально не имеет решения, если рассматривать падение релятивистского электрона на точечный кулоновский центр аналогично нерелятивистскому случаю, рассмотренному выше. В последнем случае величина средней кинетической энергии оказывается конечной величиной $\langle W\rangle = -E$ в силу $\dot{r} \to \infty$ при $r \to 0$, что, собственно, и обеспечивает точное соответствие решений, определяемых в рамках моделей 3 и 2. Релятивистская задача с точечным кулоновским центром была рассмотрена в предыдущей главе на основе анализа линейного относительно функции состояния φ уравнения Шредингера, включающего элементы классических представлений. В подобном квантовом варианте мы также не получали никаких расходимостей в силу того, что с т. зр. формализма метода возмущений применительно к линейному уравнению Шредингера усреднение величин r^{-1} и r^{-2} производится по невозмущенным (т. е. нерелятивистским) функциям $\varphi^{(0)}$, поскольку релятивистские поправки к квантовым параметрам априори полагаются малыми возмущениями. Последнее утверждение является, очевидно, неким дополнительным логическим постулатом, необходимым для обеспечения логико-математической корректности самой постановки задачи в рамках предложенного в главе 3 непротиворечивого объединения моделей 3 и 1. Для получения конечных решений задачи в рамках модели 2 нижний предел $r = 0$ в интеграле (4.49) необходимо заменить на некоторую величину $r = r_* < a$, т. е. перейти к решению задачи о падении точечного электрона на абсолютно упругую заряженную сферу радиуса r_* (или, что то же самое, точечный электрон заменить на абсолютно упругую сферу того же радиуса). Заметим здесь, что используемый термин «абсолютно упругая сфера», равно как и ее возможный эквивалент «абсолютно твердая сфера», являются некими достаточно неопределенными понятиями в рамках данной задачи, поэтому их физический смысл в дальнейшем необходимо будет уточнить.

Сказанное выше кардинально меняет направление дальнейшего анализа задачи и самый ее смысл. Поскольку применительно к задаче об атоме водорода мы достоверно знаем, что учет релятивизма вносит лишь достаточно малые поправки к энергетическому спектру, то выявленная «критичность» задачи относительно величины «обрезания» r_* кулоновского потенциала в области $r \to 0$ при учете релятивистской зависимости массы от скорости является принципиальным и поэтому основным вопросом всего последующего анализа. От его решения зависит не только и не столько сама «аналитическая дееспособность» модели 2, но, что более важно, принципиальная совместимость математического аппарата моделей 1 и 2, а, следовательно, и модели 3, с классическим описанием электростатического потенциала элементарных частиц в форме зависимости r^{-1}.

Вычисление интеграла по r в (4.49) при нижнем пределе $r_* > 0$ приводит к выражению следующего вида:

$$\langle U\rangle = -\frac{\omega q^2}{2\pi c}\left[2\ln\left(\frac{4\beta}{\eta_*} - 2\beta + 1\right) + \frac{2(1-2\beta)}{\sqrt{\beta(1-\beta)}}\left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{\beta}\right)\right]. \tag{4.50}$$

С учетом (4.45) — (4.48), а также упрощая последний член в квадратных скобках в (4.50) с учетом малости параметра β (т. е. отбрасывая слагаемые, пропорциональные $\beta^{3/2}$, β^2 и т. д.), можно получить простую формулу для определения релятивистской поправки ε':

$$\varepsilon' \approx \frac{7}{4}\frac{\alpha^2}{n^2} + \frac{4(\sigma-1)\alpha}{\pi n}, \tag{4.51}$$

где обозначено

$$\sigma = \ln\left(\frac{\alpha^2}{n^2\eta_*} + 1 - \frac{\alpha^2}{2n^2}\right). \tag{4.52}$$

Поскольку все методики расчета релятивистских поправок, рассмотренные в главе 3, приводят к зависимостям вида $\varepsilon' = \chi\alpha^2$ с коэффициентом пропорциональности χ, по порядку величины сравнимым с единицей, то принципиальная совместимость выражения (4.51) с любым аналогичным выражением для относительной поправки, в том числе и поправки Клейна–Гордона $\varepsilon'_{rel} = \alpha^2(2n - 3/4)/n^2$, возможна при выполнении условия $(\sigma - 1) \sim \alpha \sim 10^{-2}$, т. е. с большой точностью должно выполняться равенство $\alpha^2 / n^2\eta_* = e - 1$, откуда и следует искомое выражение для параметра обрезания кулоновского потенциала r_*:

$$\frac{r_*}{a_n} = \eta_* = \frac{\alpha^2}{(e-1)n^2}. \tag{4.53}$$

Удобно и вместе с тем физически наглядно сравнить величину r_* с так наз. электростатическим радиусом электрона

$$r_{el} = \frac{q^2}{m_0 c^2} = \frac{\alpha^2}{2n^2} a_n. \qquad (4.54)$$

Сопоставляя формулы (4.53) и (4.54), получаем простую формулу

$$r_* = \frac{2}{(e-1)} r_{el} \approx r_{el}, \qquad (4.55)$$

поскольку $e - 1 = 1{,}72$.

Полученная нами строго формально формула (4.55) позволяет, прежде всего, сделать вывод о том, что для совместимости всех трех описанных выше моделей механического движения 1, 2 и 3, равно как и совместимости модели 2 с реалиями движения электрона в атоме, необходимо ограничить область применимости классического описания электростатического взаимодействия между электроном и ядром атома величиной электростатического радиуса электрона. На расстояниях сближения порядка r_{el} кулоновское притяжение сменяется на отталкивание, которое, очевидно, имеет уже иную природу. Еще раз отметим, что полученный вывод качественного характера нисколько не связан с какими-либо дополнительными представлениями о физике передачи электрического взаимодействия, физике атомного ядра и т. п. Нами в физическом отношении учитывалось только лишь классическое моделирование пространственного распределения электростатического потенциала феноменологической формулой $U \sim r^{-1}$, и ничего более.

Оценим, насколько конкретизация величины σ, отличной, вообще говоря, от 1, если мы ставим целью сопоставить формулу (4.51) с любой из формул для ε', представленных в гл. 3, повлияет на применимость оценки (4.55). Для этого представим σ в виде $\sigma = 1 + \delta\alpha$; $\delta << 100$. Подставляя это условие в (4.52), приходим к выводу, что в (4.55) нужно произвести замену $(e-1)$ на $[e(1+\delta\alpha)-1]$, т. е. оценка для r_* практически не изменится. Это может служить указанием на то, что «обрезание» потенциала является достаточно резким. Данный вывод качественно вполне коррелирует с известным быстрым нарастанием ядерных сил отталкивания, хотя, конечно, указанная аналогия может носить с точки зрения физики рассматриваемых явлений случайный характер.

Сопоставим формулу (4.51) с ε'_{rel}, получаемую из решения уравнения Клейна–Гордона. Имеем последовательно:

$$\sigma - 1 = \frac{\pi}{4n}\left(2n - \frac{5}{2}\right)\alpha \approx \ln\left(1 + \frac{1 - e + \dfrac{\alpha^2}{n^2\eta_*}}{e}\right) \approx \frac{1}{e}\left(1 - e + \frac{\alpha^2}{n^2\eta_*}\right).$$

Записав η_* в виде

$$\eta_* = \frac{\alpha^2}{(e-1)n^2}(1+\eta'_*);$$

где η'_* представляет собой «уравнительную поправку», получим:

$$\eta'_* = -\frac{\pi e\left(2n-\frac{5}{2}\right)}{4(e-1)n}\alpha.$$

Поскольку $\alpha \sim \sqrt{\beta}$, то, во-первых, все предыдущие вычисления необходимо было бы делать с сохранением членов, пропорциональных $\beta^{3/2}$; во-вторых, и вычисление частоты ω также следовало бы осуществлять с сохранением требуемой точности разложения по β при упрощении формулы (4.43); кроме того, и интеграл в (4.42) также следует брать в пределах $(\eta_*, 1)$, а не $(0, 1)$. Указанные замечания, очевидно, не влияют на валидность формулы (4.55), однако требуют большей точности расчетов при адекватном сопоставлении решений относительно ε'. Следует также отметить, что заложенная в модели 2 ортогональность векторов $\vec{S}$ и $\vec{L}$ исключает возможность описания дублетного расщепления уровней за счет изменения ориентации спина относительно направления вектора $\vec{L}$. Не исключено, что описание данного эффекта возможно в рамках усложненной геометрии модели 2. Наконец, рассмотренная выше модель позволяет учесть аналитически и поправки к состояниям с ненулевыми L. Однако, принимая во внимание, что происхождение релятивистских поправок исчерпывающим образом исследовано в предыдущей главе, в данной книге мы ограничимся полученными выше результатами, имеющими самостоятельный по отношению к проблеме расчета поправок физический интерес.

4.6. Стационарность состояний в атомной системе

Доказанный выше факт достаточной в физическом отношении адекватности механической модели 2 (классика со спином) при ее использовании для количественного и качественного описания основных параметров стационарных состояний атома водорода позволяет перейти хотя бы в общих чертах и с большой долей гипотетичности к исследованию вопроса о том, а как вообще возможна указанная стационарность в системе электрон–протон, связанной силами электрического происхождения? Указанный вопрос концептуального порядка возник одновременно с разработкой моделей атома, в которых использовались в той или иной степени элементы классического описания движения электрона — периодиодического ускоренного движения отрицательно заряженной частицы относительно положительно заряженного атомного ядра. Согласно классической теории электромагнетизма Максвелла подобная дипольная система должна излучать в окружающее пространство электромагнитную энергию, мощность которой определяется по известной формуле:

$$P = \frac{2q^2}{3c^3}\ddot{r}^2 . \tag{4.56}$$

Следовательно, даже в основном, наинизшем по энергии состоянии «классический» электрон будет совершать финитное движение с убывающей со временем механической энергией E, что несовместимо с требованием стационарности состояния. Отсюда был сделан вполне очевидный вывод о принципиальной несовместимости квантовой физики стационарных состояний, реализующихся в природе, с элементами классических представлений о движении. Заметим, однако, что в распространенном традиционном понимании данного утверждения просматривается не менее распространенная логическая ошибка использования в исходных посылках доказываемого положения. Действительно, с точки зрения формализма уравнения Шредингера «безизлучательность» системы электрон–ядро просто постулируется путем исключения из рассмотрения зависимости U от времени, и тогда при $U = U(\vec{r})$ действительно имеются стационарные решения, характерные для замкнутой механической системы. Но ведь, как мы убедились выше, и классическая модель стационарных состояний атома логически вполне состоятельна при условии игнорирования явления излучения, как это и было сделано при описании атома через стационарное уравнение Шредингера. Стационарность и квантование состояний в атоме в моделях 2 и 3 есть следствия принятия постулата об отсутствии потерь на излучение, а конкретная специфика использования того или иного математического формализма сказывается только лишь на форме описания стационарных состояний, но не их сути. Природа механизма реализации условий стационарности остается за рамками и квантовомеханического описания через уравнение Шредингера (или эквивалентного ему матричного представления Гейзенберга), и классического с использованием динамики Ньютона со спиновым правилом квантования (4.1).

Уравнение Шредингера и уравнения Максвелла описывают две «разных» физики в немалой степени потому, что квантование состояний в последней изначально не заложено, а какие-либо аналогии между распределенными в пространстве квантовой функцией состояния и силовым полем электромагнитного взаимодействия не имеют реальной физической основы. Но между классической механикой и классической электродинамикой некая фундаментальная взаимосвязь, выходящая за рамки чисто феноменологического подхода, должна существовать уже хотя бы потому, что при описании атома с помощью модели 2 и релятивистская механика, и классическая электродинамика, образно говоря, «играют на одном поле», причем механика задействована и в ее классическом нерелятивистском варианте (см. уравнения (4.13) и (4.14)), и в релятивистском (см. (4.40) и (4.55), причем последнее соотношение подчеркивает далеко не «поправочный» характер проявления релятивизма). Доказанная выше существенность релятивизма в такой «слабо релятивистской» системе, какой является атом водорода, указывает на отнюдь не формальную взаимосвязь между механикой и электродинамикой, которую мы и попытаемся далее хотя бы нащупать, не привлекая при этом какие-либо гипотезы, выходящие за рамки хорошо известных классических соотношений и эффектов.

Если подставить в (4.56) $\ddot{r}$, выразив его из уравнения (4.13), и составить отношение $E_{изл} / E_1^{(0)}$, где $E_{изл} = P(a_1)T_1 / 2$; $E_1^{(0)} = m_0 q^4 / 2\hbar^2$, то можно получить оценку степени «нестационарности» основного состояния атома водорода вследствие излучательных потерь:

$$E_{изл} / E_1^{(0)} = \frac{\pi}{12}\alpha^3 \approx 10^{-7} . \tag{4.57}$$

В силу малости отношения (4.57) обычно делается вывод о пренебрежимо малом влиянии излучательных потерь на энергетику и физику движения электрона за времена порядка периода его колебаний (периода «вращения») в атоме. При этом остается в смысловой тени то очевидное соображение, что интерес представляет не столько сама относительная оценка, сколько форма представления величины (4.56) при подстановке в нее $\ddot{r}$ из (4.13). Действительно, в этом случае для мощности излучения колеблющегося электрона мы получаем функцию только от радиуса вида

$$P = \frac{2}{3}\frac{q^6}{m_0^2 c^3}\frac{1}{r^4}, \tag{4.58}$$

и, следовательно, с точки зрения пространственной зависимости $P \sim r^{-4} = r^{-2} \times r^{-2}$ мы имеем дело с проявлением хорошо известного «радарного» эффекта отражения электромагнитной волны от регистрируемого размерного объекта, если принять во внимание соотношение (4.55) в качестве реального геометрического условия.

Рассмотрим геометрическую по характеру модель описания силового взаимодействия между протоном и электроном в атоме водорода, осуществляемого неким электромагнитным полем, структура которого, «виртуальность» и иная существенная специфика не рассматриваются в качестве необходимой для последовательной теории содержательной детализации описания. Выделим из всего комплекса качественных составляющих указанной модели следующую последовательность «событий», связанных между собой по очевидной причинно-следственной схеме:

1. Излучение энергии силового поля ядром атома.

Его мощность P_0 можно чисто феноменологически определить, если ввести представление о радиусе излучательной сферы протона r_p как источника силового поля, энергия которого q^2 / r_p излучается за характерное время $\tau_p = r_p / c$:

$$P_0 = \frac{q^2}{r_p \tau_p} = \frac{q^2 c}{r_p^{\,2}}. \tag{4.59}$$

Смысл формулы (4.59) вполне согласуется с условием (4.55) релятивистской совместимости различных механических моделей описания атома, однако сама величина r_p остается произвольной. Отметим, что в этой связи мы не вправе вводить в формулу (4.59) какие-либо произвольные числовые коэффициенты.

2. Рассеяние части излученной энергии электроном.

По смыслу принятой схемы следует полагать, что поток энергии P_0 излучается именно в ту полусферу площадью $2\pi r^2$, в пределах которой находится электрон, поскольку в рамках модели 2 описания s-состояний другая полусфера вообще не рассматривается, что вполне отвечает принятой выше прямой причинно-следственной связи. Вероятность w_1 томсоновского рассеяния на свободном электроне характеризуется сечением

$$\sigma_{el} = \frac{8}{3}\pi r_{el}^2,$$

поэтому можно записать, что

$$w_1 = \frac{\sigma_{el}}{2\pi r^2} = \frac{4}{3}\frac{r_{el}^2}{r^2}. \tag{4.60}$$

3. Рассеянная электроном энергия взаимодействует с ядром.

Как и выше, полагаем, что вся рассеянная электроном энергия излучается в ту полусферу, где находится ядро; при этом только часть ее, равная w_2, провзаимодействует с ядром как с неподвижным массивным объектом, т. е. эта часть определяется чисто геометрически как

$$w_2 = \frac{\pi r_p^{\,2}}{2\pi r^2} = \frac{r_p^{\,2}}{2r^2}. \tag{4.61}$$

Таким образом, из всей излучаемой ядром мощности «силового» излучения к нему возвращается только ее малая часть P_1:

$$P_1 = P_0\, w_1\, w_2 = \frac{2}{3}\frac{q^6}{m_0^{\,2} c^3}\frac{1}{r^4} = P. \tag{4.62}$$

Точное совпадение выражений для P_1 и мощности излучательных потерь P в их классическом определении вряд ли носит случайный характер, тем более для качественных оценок по порядку величины. Примечательно, что в (4.62) не входит свободный параметр r_p. Одно из разумных объяснений совпадения оценочных формул для столь разных по физике эффектов состоит из двух гипотетических утверждений: во-первых, силовое поле электромагнитного излучения имеет смысл физической «виртуальности», что отличает его в энергетическом отношении от реального потока электромагнитного излучения в пространстве, распространяющегося независимо от своего первоисточника в полном соответствии с теорией Максвелла; во-вторых, величину P_1 следует трактовать в качестве «дефекта» силового виртуального излучения, в силу своей виртуальности также никак не сказывающегося на строгой консервативности виртуального поля $U(r)$ и, следовательно, стационарности состояний атома. Поскольку указанный дефект имеет порядок величины $\sim\alpha^3$ согласно (4.57), то он не отражается на оценках релятивистских поправок $\sim\alpha^2$, хотя сам этот дефект прямо связан с релятивизмом. Отметим в указанной связи, что виртуальность электростатического поля является общепризнанным в теории представлением, но которое необходимо и естественно следует и из рассматриваемой выше гипотезы, никак не связанной с квантовой электродинамикой; тогда как представление о дефекте силового поля является, видимо, неким новым элементом в рассматриваемой проблеме, требующим, возможно, более внимательного и последовательного теоретического анализа.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Со времен Ньютона механика инертных тел претерпела столь кардинальные изменения прежде всего в концептуальном отношении, что сейчас даже само наименование фундаментального раздела физики воспринимается с ощутимым привкусом архаичности. В самом деле, механика околосветовых скоростей именуется теорией относительности, согласно которой во главу угла ставятся законы распространения электромагнитного излучения; в квантовой механике от механики инертных тел сохранена в первозданной чистоте только система основных понятий — и то вынужденно, за неимением других; релятивистская квантовая механика в форме теории Дирака вообще именуется «теорией электрона». Психологически вполне понятное стремление физиков к объединению разнородных описаний качественно различных групп явлений из мира природы в некую единую научную картину, основанную на едином понимании и ее структуры, и ее теоретического формализма, привело к тому, что возможное внутреннее единство механики и электромагнетизма прямо постулировалось без достаточных на то оснований, хотя подчас и в неявной форме, в качестве логической основы для формирования математической структуры любой конкретной теории механического движения. Наиболее серьезный шаг в указанном направлении, имевший самые фундаментальные последствия для развития физики и механики в частности, сделал А. Эйнштейн, введя «световую», или электромагнитную, длину движущегося инертного тела, в результате чего не только в механику, но и вообще в физику было постулативно введено требование инвариантности относительно пространственно-временных преобразований Лоренца. Со времени общественного признания концепции Эйнштейна минуло уже столетие, и романтический объединительный релятивизм мироздания в его по сути эклектической форме обрел черты мировой научной религии, любое отклонение от которой осуждается не менее строго, чем христианская ересь в Средневековье.

С подобной религиозностью в науке автор не считает для себя возможным согласиться, однако любое несогласие должно быть подкреплено конструктивными предложениями по ревизии традиционных концепций в физике. Для этого необходимо было пересмотреть устоявшуюся систему принципов и постулатов теоретической физики прежде всего в отношении механики как фундамента любой современной науки. Автором была предложена иная схема построения теории, в которой, по существу, сколь-нибудь сложные по структуре принципы и постулаты вообще отсутствут, ли не считать таковым представление о причинно-следственной связи его сущего. В результате проведенного системного исследования логи-математической структуры механики было показано, что, во-первых, рия, включающая субсветовые скорости движения инертных тел, стро-ся строго формально без использования принципа инвариантности ин-вала Минковского; во-вторых, формализм нерелятивистской квантовой ханики выводится, а не постулируется в качестве существования урав-ния Шредингера, из тех же посылок, что и реальная релятивистская ме-ника; в-третьих, традиционное построение релятивистской квантовой ханики концептуально ошибочно, а ее математический формализм спра-длив только в условиях слабого релятивизма, для учета которого доста-чно использования уравнения Шредингера с релятивистским представ-нием зависимости массы от энергии движения. Кроме того, в книге по-зано, что имеет право на существование теория описания квантовых лений, основанная на концептуальном объединении понятий классичес-й механики с понятием «спин» в его расширенном содержательном на-лнении. Данная теория снимает принципиальное разграничение меха-ки на классическую (в том числе и релятивистскую) и квантовую.

СПИСОК АББРЕВИАТУР

CM — классическая механика
RM — релятивистская механика
CMS — классическая механика со спином
RMS — релятивистская механика со спином
STR — специальная теория относительности
GTR — общая теория относительности
QM — квантовая механика
RQM — релятивистская квантовая механика

SUMMARY

The monograph presents the results of research into the traditional conceptual fundamentals of relativist and quant mechanics. The main conclusion based on a strict logical-mathematical analysis is that it is necessary to replace the existing paradigm of mechanics of inert bodies with a new one free from sense contradictions that appear when merging description elements, borrowed from physical phenomena irreducible to one other, into theories.

A new conception of relativist mechanics, not using in its formalism postulates of the special theory of relativity in any of their traditional forms, is formulated. In the classical point model of the realization of cause-effect relationship, mechanics of inert bodies is described strictly within the bounds of corresponding conceptions, not including essential properties and regularities of non-mechanical phenomena, that is, relativist mechanics of inert bodies as a phenomenological theory is logically self-sufficient. The construction of the theory is based on the analysis of dynamic characteristics, first the formula of the dependence of mass on velocity being deduced, and only then the relativist law of velocity composition and other cinematic and dynamic relations. It is shown that Lorentz transformations bear no relation to mechanics and must be excluded from it. The new theory conforms completely with all experimentally registered relations, such, for example, as deceleration of the stroking speed of a moving clock comparing with an immovable one, but it excludes from consideration imaginary relativist "effects" of Einstein's theory, which the shrinkage of length of a body in the direction of its movement must be related to, not determined and not measured by purely mechanic means.

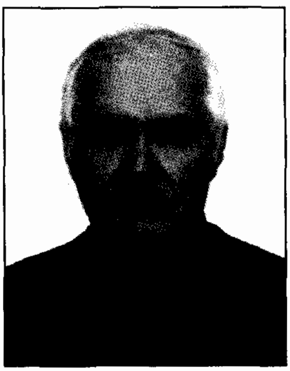
The Schrödinger equation of quant mechanics has been deduced directly by means of logical-mathematical analysis of a three-dimensional model of movement description, by implication polar with respect to the classical point model, which needed the same initial principles that were used for the construction of relativist mechanics. As well as the relativist theory relies on the conception of inert mass of a point body, without which mechanics itself is impossible in its dynamic sense, the construction of the quant theory uses the idea of a spin as a non-point characteristic of a point body. The requirement of the unity of mechanical movement description generates the necessity of non-contradictory

matching of the classical and the quant models. The specified matching is performed on the basis of common classical mechanical conceptions for both models, part of different sense subgroups of which is mass as one of the main independent dimensional elements. The abovementioned group content of the notion of mass has predetermined using the dimensional approach to the procedure of deducing the Schrödinger equation as the only possible mathematical method.

A principally new methodology of registering relativist effects while solving stationary problems of quant mechanics, based on considering the Schrödinger equation, non-relativist according to its form, has been suggested. Meanwhile, mass is considered as a variable parameter, depending on potential energy. The results of the calculations of fine structure of the energetic specter of a hydrogen-like atom, obtained using the specified approach, coincide with the respective results, obtained from the solution to the spinless Klein-Gordon equation and the Dirac equation, considering the spin-orbital interaction.

There has been considered a variant of construction of the quant theory using the classical model of mechanical movement, taking into account the spin of a microparticle both in the non-relativist and in the relativist variants. Quant stationarity and specter discreteness exist due to ratio multiplicity of classical oscillation frequency of a particle in the potential well to realizable frequencies of the spin rotation. Meanwhile, the existence of minimal energy of oscillations owing to indestructibility of spin movement obtains quite a transparent physical explanation.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ



ТЮРИН Евгений Леонидович, род. 12.11.44 в Москве, в семье военнослужащего. В 1970 г. окончил Московский инженерно-физический институт, в течение 3-х лет стажировался в ФИАН'е, в лаборатории КРФ акад. Н.Г. Басова, в дальнейшем специализировался в области взаимодействия лазерного излучения с веществом, канд. физ.-мат. наук.

Преподавал общую физику в МИСиС и МЭИ.

Автор около 50 научных трудов.

Другие профессиональные увлечения — история и поэтическая обработка мирового эпоса.

Научное издание

Тюрин Евгений Леонидович

НОВАЯ ПАРАДИГМА РЕЛЯТИВИСТСКОЙ И КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

Гл. редактор
А.И. Моисеев

Компьютерная верстка
К.А. Крылов

Книга выпущена
в авторской редакции

ООО «Издательство «Кафедра»
E-mail: info@cathedrabooks.ru
www.cathedrabooks.ru

НП ИД «Русская Панорама»
109028, Москва, Серебряническая наб., 27
Тел.: (495) 917 5983, 917 7094
E-mail: in@rus-pan.ru
www.rus-pan.ru

Подписано в печать 20.11.11.
Формат 60×90/16. Гарнитура Таймс. Бумага офсет №1.
Печать офсетная. Печ. л. 14,0.
Тираж 1000 экз. Заказ Р-1843.

ISBN 978-5-93165-270-2

9 785931 652702

Отпечатано в полном соответствии с качеством предоставленного
электронного оригинал-макета
в типографии филиала ОАО «ТАТМЕДИА» ПИК «Идел-Пресс».
420006, г. Казань, ул. Декабристов, 2