А. П. Володченко

Генетическое построение геометрии Евклида

(На правах рукописи)

Россия, Тульская область, г. Ефремов.

2011-2012 г.

О Г Л А В Л Е Н И Е

Использованная литература.

Примечание: *Здесь приведена та литература, на которую автор ссылается по причине доступа к ней. Но весь обсуждаемый материал можно встретить и в других учебных и популярных изданиях, в том числе, более современных.*

1) Афанасьева О. В. Логика: Учебное пособие. – М., Проспект, 2011.

2) Виленкин Н. Я. В поисках бесконечности. – М., Наука, 1983.

3) Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике. – М., АСТ, Астрель, 2010.

4) Горский Д. П., Ивин А. А., Никифоров А. А. Краткий словарь по логике. – М., Просвещение, 1991.

5) Дорофеев Г. В., Потапов М. К., Розов Н. Х. Пособие по математике для поступающих в вузы. – М., Наука, 1976.

6) Дубровский В. Н., Смородинский Я. А., Сурков Е. Л. Релятивистский мир. – М., Наука, 1984.

7) Ефимов Н. В. Высшая геометрия. – М., Наука, 1971.

8) Зельдович Я. Б., Хлопов М. Ю. Драма идей в познании природы. – М., Наука, 1988.

9) Киселёв А. П. Геометрия. Учебник для 9 - 10 классов средней школы. Часть вторая. Стереометрия. – М., Просвещение, 1972.

10) Клайн М. Математика. Утрата определённости: Пер. с англ./ Под ред., с предисл. и примеч. И. М. Яглома. – М., Мир, 1984.

11) Погорелов А. В. Геометрия: Учебное пособие для вузов. – М., Наука, 1984.

12) Силин А. В., Шмакова Н. А. Открываем неевклидову геометрию. – М., Просвещение, 1988.

13) Словарь иностранных слов./ Под ред. И. В. Лёхина, Ф. Н. Петрова, – М., Гос. изд-во иностр. и нац. словарей, 1949.

Прочтите, и станет возможным обсуждение.

ВСТУПЛЕНИЕ

Геометрия в изложении Евклида служила науке и практике слишком долго, чтобы сомневаться в её основах и результатах. Но современное понимание слова “геометрия” отличается от древнегреческого.

Начертательная геометрия взяла из геометрии Евклида прямоугольную систему координат и параллельное проектирование. Аналитическая геометрия при тех же заимствованиях развила численные исследования. Сферическая геометрия поместила наблюдателя в центр семейства концентрических сфер и разработала методы отражения неба на плоскости с учётом свойств углов. Это примеры того, как общая база геометрии Евклида служит разным прикладным задачам без изменения объёма и свойств исходных понятий.

Проективная геометрия объявила одинаковыми две плоские фигуры, если они могут быть получены одна из другой центральным проектированием – это позволило научно изучать перспективу, в частности, при её передаче в картинах; для логической полноты потребовались и неевклидовские бесконечно удалённые объекты. Геометрии Лобачевского и Римана существенно не по-евклидовски истолковали свойства прямых линий и углов на специальных поверхностях. Это могло бы быть очередными прикладными областями геометрии. Однако интерпретации этих геометрий подняли вопрос о том, что именно они, а не геометрия Евклида правильно отражают свойства пространства в масштабах Вселенной [2,10]. Для экспериментальной проверки этого тезиса Гаусс использовал горные вершины, а Лобачевский – звёзды. Вопрос “повис в воздухе” из-за недостаточной точности измерений, но неевклидовы геометрии считают, что геометрия Евклида является их частным случаем при бесконечно большом радиусе кривизны их поверхностей (сферы, псевдосферы) [7,11]. Неспециалистов это вводит в заблуждение, но даже специалисты серьёзно обсуждают, какая из геометрий справедлива для микромира, макромира, Вселенной, “пространства скоростей” [2,6,7,8,10,12].

Цитата [10,стр.221]: “Осознание того, что любая дедуктивная система должна содержать неопределяемые понятия, которые можно интерпретировать как угодно, лишь бы вводимые объекты удовлетворяли аксиомам, подняло математику на новый уровень абстракции …что геометрия не сводится исключительно к изучению реального, физического пространства. Геометрия – конструкция чисто математическая. Она применима для описания реального пространства, но отнюдь не исчерпывается этой своей интерпретацией.”

Наша цель – сохраняя образность геометрии Евклида, вернуть её объектам интуитивно понятный смысл, устранить сомнение в правильности отражения ею свойств пространства и тем самым вернуть нашему рассудку опору на опыт. Прикладные удобства других математических моделей нас не волнуют.

Считается, что Евклид изложил свою геометрию дедуктивно, но это не так. Дедуктивными в его изложении являются только отдельные звенья в цепи рассуждений. Начальными понятиями приняты три типа объектов, их свойства косвенно описываются аксиомами, из которых выводятся теоремы, а потом накопленные знания переносятся в пространство, понимаемое как формальное множество трёх типов объектов. То есть, совершается переход от частного к общему, а это есть индукция с её неднозначными следствиями. Начатое Лобачевским изменение системы аксиом и последовавший за этим произвол в выборе исходных аксиом только подчёркивают индуктивный характер аксиоматического построения геометрии, если оно начинается с точки, как наименьшего объекта. По нашему мнению, в дедуктивной теории исходным понятием должно быть нечто всеобъемлющее по отношению к другим объектам этой теории. Для геометрии это – пространство.

Цитата [1,стр.103]: “По направленности логического следования, т. е. характеру связи между знаниями различной степени общности, содержащимися в посылках и заключении, все умозаключения делятся на следующие виды: **дедуктивные, индуктивные и умозаключения по аналогии**.”

Приводим аналогию к структуре всех геометрий, как мы её понимаем – из кирпичей строятся стены разных форм, назначений и размеров; всё это размещено в пространстве, но не занимает всё пространство, не составляет его полностью; на примере кирпичей невозможно понять свойства пространства.

Для достижения вышеобъявленной цели мы отказались от аксиоматического метода построения геометрии. В нашем изложении точка, линия, прямая линия, сфера, поверхность, тело, угол, треугольник, плоскость, окружность явно и конструктивно определяются именно в такой последовательности (см. Оглавление). Пространство принято исходным понятием. Всё рассмотренное в данной работе до понятия суммы углов не может быть оспорено ни одной из существующих геометрий и составляет в некотором роде абсолютную геометрию. В этот абсолют входит и теорема (не аксиома!) о существовании и единственности параллельных прямых заданного направления. Показано, что только суммирование углов и переход к изучению многоугольников потребовали использовать собственные свойства плоскости, а все признаки равенства треугольников вытекают из свойств пространства и прямых линий в нём до определения плоскости. В традиционном построении геометрии этот факт не проявлялся.

По результатам данной работы представляется следующая картина: свойства точек, евклидовых прямых и плоских углов в пространстве применяются в анализе свойств объектов геометрий Евклида, Лобачевского и Римана, впротивовес этим разрозненным геометриям с собственным “пространством” в каждой из них. Именно такое понимание Пространства вокруг нас и в нас можно считать достигнутой целью автора. Из работ [7,10] следует, что такое же понимание пространства используется исследователями при недостаточности средств двумерной геометрии, однако результаты исследования намеренно возвращаются в рамки планиметрии.

Для чего нам нужны геометрические знания? Землемерие, техника, астрономия – это во-первых. Логика – во-вторых. В-третьих, перспектива космической навигации и анализ микромира. Но если в логике можно быть формальным, то при взаимодействии с реальным миром формализм недопустим! Не можем мы Пространству навязывать выдуманные свойства. Поэтому надо изучать единое пространство с единых позиций без субъективных ограничений.

Генетический метод построения теории [4] отличается от аксиоматического тем, что при нём аксиомы не используются в качестве исходных предложений теории, а всем изучаемым объектам даётся определение, содержащее способ их образования или опознания. Применяя этот метод к геометрии, автор данной работы примыкает к сторонникам конструктивной логики [4], особенно при обсуждении бесконечности. Сторонники классической логики и традиционной геометрии на этом основании могут проявить антагонизм, например, при обсуждении авторского понимания взаимодействия дискретного и непрерывного. Само это понимание выявляется в работе постепенно и шлифуется почти до её конца. Поэтому рекомендуется читать работу без пропусков даже давно известных вопросов – при генетическом построении теории каждый следующий шаг и вывод опираются на совокупность предыдущих, а в формулировках отражаются важные нюансы. Этой же цели служит сквозная нумерация всего, на что приходится ссылаться в рассуждениях.

Система определений, аксиом, постулатов Евклида цитируется по [9] и служит фоном для генетического метода построения геометрии (текст аксиом в этом учебнике не содержит буквенных обозначений подобно [7]). Важно отметить, что вся исходная база Евклида задействована в данной работе без изменения смысла. Этот эффект комментируется в разделе 18.1.

Определения Евклида:

E_1 – Точка есть то, что не имеет частей.

E_2 – Линия есть длина без ширины.

E_3 – Границы линии суть точки.

E_4 – Прямая линия есть та, которая одинаково расположена относительно всех своих точек.

E_5 – Поверхность есть то, что имеет длину и ширину.

E_6 – Границы поверхности суть линии.

E_7 – Плоскость есть поверхность, которая одинаково расположена относительно всех своих прямых.

E_8 – Телом называется то, что имеет длину, ширину и глубину.

E_9 – Границы тела суть поверхности.

Аксиомы Евклида:

E_{10} – Равные одному и тому же равны между собой.

E_{11} – Если к равным прибавить поровну, то суммы будут равны.

E_{12} – Если от равных отнять поровну, то остатки будут равны.

E_{13} – Совмещающиеся друг с другом равны.

E_{14} – Целое больше своей части.

Постулаты Евклида:

E_{15} – От каждой точки до каждой другой точки можно провести одну прямую линию.

E_{16} – Ограниченную прямую можно непрерывно продолжать по прямой.

E_{17} – Из любого центра можно описать окружность любым радиусом.

E_{18} – Все прямые углы равны между собой.

E_{19} – Две прямые, которые при пересечении с третьей образуют с ней по одну сторону внутренние углы, в сумме меньше двух прямых, при продолжении в ту же сторону пересекаются.

Далее вводится сквозная нумерация определений (O_i), аксиом (A_i) и теорем (T_i). Некоторые из них оригинальны, но есть и заимствованные из традиционного курса геометрии без ссылок на источники.

При изложении материала не учитывались педагогические аспекты преподавания геометрии, поэтому данная работа не является учебником. Однако и игрой в слова она не может считаться, так как её понятия отражают проблемы отношения нашего разума к реальному миру.

Часть 1: **СТЕРЕОМЕТРИЯ – измерения в пространстве.**

Предметом изучения геометрии являются форма и размеры мысленно выделенных участков пространства, их взаимное расположение в особых случаях. Наша задача – определить интересные для практики и науки эти особые случаи, разработать методы их анализа. Руководствуясь генетическим методом построения теории, постараемся пользоваться только явно определёнными понятиями и интуитивно понятным лексиконом. В частности, считаем известными и интуитивно понятными основные термины теории множеств [2,4].

Принимаем без доказательства:

O_1. Существует ***пространство*** – место, в котором развивается физическая картина жизни. Время, материальное содержание, энергетическое и гравитационное состояние пространства не являются геометрическими понятиями, они в рамках геометрии используются только для формирования мысленных образов.

Прокомментируем вначале слово “существует”.

Для сравнения цитата из [7, стр.42]: Аксиома “I,1. Каковы бы ни были две точки A, B, существует прямая ***a***, проходящая через каждую из точек A, B.” Класс из 20 учеников по этой аксиоме одновременно представит 20 пар точек и 20 прямых – количество образов не соответсвует количеству, объявленному словом “существует” в аксиоме. Когда закончится урок, ученики перестанут представлять точки и соответствующие им прямые – слово “существует” потеряет истинность даже для воображения. Из-за указанных логических несоответствий правильнее было бы сказать, например, так: “Представим произвольные пары точек A, B; каждой из них соответствует по одной прямой ***a***.”

В этом примере мы обращаем внимание читателя на количество и качество, отображаемые словом “существует”. В аксиоме существующее исчезало после урока, а на уроке существовало только в воображении и во множественном числе. В нашем определении O_1 пространство реально существует вокруг нас и в нас как часть материального мира, оно одно на всех и не пропадает, когда мы о нём не думаем.

Во времена Аристотеля, Галилея, Ньютона пространство и время считали независимыми понятиями. Затем физики придумали особый неподвижный, невидимый эфир. Он якобы заполнял всю Вселенную, пронизывал все материальные тела, являлся носителем световых волн. Измерения скорости света развеяли этот миф. Теория относительности Эйнштейна объединила безэфирное пространство и время в единое четырёхмерное понятие, потому что соответствующая математическая модель позволила многое обобщить и объяснить в наблюдаемых физических явлениях. Однако для геометрии мы настаиваем на независимом от времени понятии Пространства как философской категории.

Обратим внимание на существование синонимов “Пространство” и “Вселенная”. Слово “Лен” (от немецкого Lehen [13]) в эпоху феодализма означало землю и определённые доходы с неё. Может быть, окружающее пространство, даже вне Земли, ассоциировалось с материальной базой жизни, и это отразилось в слове Вселенная. Геометрии подобные ассоциации не нужны, поэтому будем использовать слово Пространство. Соответсвующий ему мысленный образ (O_1) считаем исходным понятием геометрии.

Постулат специальной теории относительности утверждает: “Скорость света в пустоте во всех инерциальных системах отсчёта одинакова, причём по всем направлениям, и не зависит ни от скорости источника, ни от скорости наблюдателя”.

Что означает выражение “скорость света в пустоте”? Для получения пустоты в эйнштейновском смысле этого слова недостаточно избавиться в части пространства от атомов, молекул и элементарных частиц, надо избавиться и от гравитационного поля. Но это невозможно. Поэтому “пустоту”, то есть пространство без материи, можно только мысленно представлять.

O_2. Представителем нашего сознания в пространстве (O_1) будем считать ***наблюдателя*** (геометра), способного различать ***направления*** относительно себя влево – вправо, вверх – вниз, вперёд – назад, по часовой стрелке или против, а также способного неограниченно перемещаться в выбранном направлении. ***Перемещение*** в данном случае подразумевает перемену места самого наблюдателя или его мысленных построений без нарушения свойств пространства (см. ниже A_3). В общем случае наблюдатель мысленно или на материальных моделях перемещает объекты анализа, также без нарушения свойств пространства. Для перемещения обычно требуются указания ***куда*** и ***как***. Куда – ответит решаемая задача. Как – в общем случае неважно. Иногда перемещение объектов имеет характерные признаки и получает специальное название, например, ***сферическое вращение прямой вокруг точки*** (см. раздел 6.1).

* Комментарий. Евклид при изложении геометрии пользовался перемещением фигур, но в его определениях (см. E_1 – E_{19}) оно не отразилось. В системе аксиом Гильберта движение тоже отсутствует, но им пользуются по мере исследований [7,9,11]. Зачем же исключать движение из аксиоматической базы? Сам этот вопрос вскрывает определённый произвол в выборе аксиом. *

В реальном мире перемещается материя. Именно она “меняет место” или характеристики. Само пространство будем считать неподвижным фоном для мысленных построений. Теория относительности спросила бы, “неподвижным” относительно какой системы отсчёта? Но пусть ответ на этот вопрос ищет физика. Для геометрии время не существует (O_1).

A_3. Пространство (O_1) ***безгранично***, ***однородно*** и ***не является частью чего-либо***.

Для геометра пространство – это целое. Оно везде и навсегда. Его участки (части) могут иметь границы, размеры, форму, а само пространство безгранично. Это предположение позволяет даже мысленно не выделять границы пространства, как некоторые особые объекты, за которыми наблюдатель (O_2) не может появиться или обязан прервать свои мысленные построения.

Для бесконечных множеств известен ряд парадоксов, несвойственных конечным множествам [2]. Один из них “опровергает” постулат E_{14} о том, что часть меньше целого. Временно забудем об этом, обсудим этот парадокс, когда наши построения сделают его актуальным.

Объявляемая в A_3 однородность пространства предполагает отсутствие каких-либо особых свойств у любого его участка. Это даёт геометру возможность не стремиться без особой необходимости к бесконечно далёким участкам пространства, а работать в доступном месте, перенося результаты исследований туда, где они потребуются. Даже теория относительности требует считать пространство-время однородным: любое геометрическое соотношение, установленное в одном месте плоскости, сферы, “пространства скоростей” должно выполняться и во всяком другом месте.

2. Евклид: Точка есть то, что не имеет частей (E_1).

В определении E_1 лаконично указана самая суть понятия “точка”. Все последующие геометры имели ввиду то же самое, но почему-то не признавали его логическую законченность.

2.1. Т О Ч К А

O_4. ***Точка*** – это такая предельно малая часть пространства (O_1), для которой из-за её малых размеров нет смысла говорить о форме и делении на более мелкие части.

Древнегреческий философ Зенон Элейский исследовал модель мира, в которой допускал неограниченное деление пополам отрезков линии и промежутков времени, и довёл рассуждения до парадоксов “летящая стрела неподвижна” и “быстроногий Ахиллес никогда не догонит медлительную черепаху”[2]. (Более подробно об этом см раздел 2.3). Позднее ряд свойственных бесконечным множествам парадоксов пополнился исследованиями многих математиков и философов. Для нас важно то, что парадоксальные выводы при формальном анализе бесконечных множеств вскрыли противоречивость понятий дискретного и непрерывного, необходимость диалектического перехода при определённых условиях от одного к другому. Именно поэтому Аристотель и Гегель назвали Зенона основателем диалектики [2].

В определении (O_4) диалектическим условием выделения точки в пространстве можно считать “*смысл говорить о форме и делении на более мелкие части*”. Это значит, что решаемая задача сама определяет, что считать точкой – песчинку на морском берегу, звезду в небе, атом химического элемента, мысленный образ или нечто другое.

Аксиомы о свойствах точек:

A_5. Всё пространство (O_1) состоит из точек (O_4), нет ни одной точки вне пространства и нет места в пространстве без точек (***полнота пространства***).

O_6. ***Соседство*** – отношение для двух произвольно взятых точек: каждая из точек пары либо является соседней для другой, либо точки этой пары не являются соседними. Количество соседних точек у любой из них не обсуждается, чтобы не провоцировать попытки представить их форму. Но это количество предполагается достаточным для перемещения (O_2) по соседним точкам в любом направлении.

A_7. Границами конкретной точки (O_4) являются участки её контакта с соседними точками (O_6); “соседи” касаются данной точки и отделяют её от несоседних точек (***непрерывность*** пространства, “сложенного” из дискретных точек). Если при решении задачи хочется уточнить, что находится между соседними точками, то надо начать решение заново с выделением в пространстве (O_1) более мелких точек (O_4). Но и в этом случае между соседними точками предполагается только их контакт друг с другом (O_6, A_7).

A_8. Все точки пространства (O_4) имеют соседние точки (O_6, A_7) (***бесконечность, безграничность*** пространства).

A_9. Индивидуальным свойством точки (O_4) является только её расположение относительно соседних точек (A_7) (***упорядоченность*** пространства).

Наши обозначения в задачах – это условные атрибуты точек, зависящие от наших привычек, алфавита, количества точек в задаче и порядка их перебора. Но всё это – не свойства пространства и его участков. Для мысленного выделения какой-либо точки наблюдатель (O_2) замечает её положение в пространстве взглядом, а мы в своём конспекте отмечаем точку малым кружком на рисунке и буквой одного из алфавитов. Это условные средства работы с абстрактными объектами. Они призваны помогать мышлению, но не должны подменять его. Именно поэтому каждое утверждение геометрии требует определения или доказательства.

* Комментарий. Во вступлении (стр. 7) кратко сказано об отличии генетического метода построения теории от аксиоматического. Но аксиомы $А_3$, $А_5$, $А_7$, $А_9$ в данной работе присутствуют вопреки заявлению автора. Противоречие? Нет. В нашем случае $О_1$, $О_2$, $О_4$ явно определяют основные свойства объектов, а аксиомы $А_3$ – $А_9$ указывают дополнительные их свойства. Можно было бы формально ввести эти свойства в исходные определения и обойтись без таких аксиом. Но тогда, во-первых, сами определения были бы громоздкими и расплывчатыми, во-вторых, при ссылке на такие определения только из контекста было бы ясно, какое именно свойство потребовало ссылку. Выделение подобных аксиом из общего явного определения повышает конкретность рассуждений. При аксиоматическом методе отсутствуют явные определения объектов анализа и аксиомы не конкретизируют свойства объекта, а неявно определяют сам объект. *

В связи с отношением соседства точек ($О_6$) рассмотрим отношение “**близость точек**”.

Близкими точками будем считать такие две точки, которые имеют общую соседнюю точку, но сами соседями не являются.

*) Пример для трёх точек А,В,С: Пусть А,В и В,С – пары соседних точек, но А и С – не соседние. В этом случае А и С – близкие точки.

**) Пример для конгломерата точек: Пусть точка О является общей соседней точкой для точек ДО, РЕ, МИ, ФА, СОЛЬ, ЛЯ, СИ, ДО. В нотной октаве цепочка указанных обозначений разомкнута – ДО слева и справа представляют разные звуки. В нашем примере эти точки образуют замкнутую цепь вокруг общей соседней точки О, поэтому ДО слева и справа списка совпадают в пространстве, а список характеризует последовательность перехода от одной пары соседних точек к другой: О-РЕ, О-МИ, и так далее. В данном примере близкими точками по определению будем считать точки ДО-МИ (у них общие соседние точки РЕ и О), РЕ-ФА (у них общие соседние точки МИ и О), и так далее: МИ-СОЛЬ, ФА-ЛЯ, СОЛЬ-СИ, ЛЯ-ДО, СИ-РЕ.

Обратим внимание, что в примере *) пары близких точек разделялись одной общей соседней точкой, а в примере **) пары близких точек разделяются двумя общими соседними точками. В виду неопределённости количества соседних точек у каждой из них (O_6) и неопределённости формы точек (O_4) принимаем за правило, что количество общих соседних точек у пары близких точек не анализируется; достаточно, чтобы общие соседние точки были, а сами точки, называемые близкими, соседями друг другу не были.

Впротивовес близким и соседним точкам все остальные точки по отношению друг к другу будем называть **неблизкими**. Среди неблизких точек могут быть и бесконечно удалённые друг от друга, и почти близкие – этот аспект в терминологии уточнять не будем.

Вышеприведённое качественное указание “расстояний” между точками потребуется при анализе близко расположенных в пространстве объектов. Пример: Если у двух геометрических объектов (см. ниже O_{10}) имеется только одна общая точка (O_4, A_{12}), назовём это **касанием объектов**. Для таких объектов их точки, соседние с общей, считаются близкими.

*Комментарий. Дискретное понимание пространства, изложенное в разделах 1 и 2.1, отличается от традиционного, и автор чувствует необходимость как-то обосновать его. Во-первых, обоснованием может быть успех данной работы. Во-вторых, приведём рассуждения общелогического значения.

Рассеянный дневной свет – непрерывная зрительная среда – является результатом множества локальных процессов на атомно-молекулярном уровне. Непрерывная на слух звуковая среда тоже сложена из отдельных гармоник –

подзвуков разной частоты. Это примеры того, как нашими чувствами воспринимается непрерывная среда с дискретной базой.

Цитата [1, стр.6]: “Мышление человека логично по своей природе… потому, что “логична”, закономерна сама действительность. Логика мышления есть своеобразное отражение логики вещей.”

Если Природа на примере света и звука показывает нам, что между непрерывным и дискретным нет противоречия при достаточно большом количестве малых дискретных, то мы обязаны принять эту данность.

А теперь спросим себя: составляют ли непрерывность и дискретность в геометрии альтернативу, то есть только одно из допустимых представлений о сущности Пространства?

Выбирать одно из двух нас заставляет логический закон исключённого третьего [1, 4]. Но… В примере с рассеянным светом альтернатива не учитывает равновероятность лучей разных направлений. В примере со звуком альтернатива не учитывает одновременность подхода к ушам звуков разной частоты и способность нервной системы воспринимать звук в целом и в то же время выделять в нём подзвуки. На основании этих примеров можно утверждать, что мы недостаточно знаем пространство, чтобы альтернативно и субъективно ограничивать методы его исследования. Пусть решаемые задачи сами определяют, на какую модель пространства им опираться. Разбейте камень – вместе с его кусками образуется песчинка. Разломайте хлеб – упадёт крошка. Понаблюдайте за делением крупной глобулы эмульсии – помимо двух средних глобул образуется глобула наименьшего диаметра. Вроде бы альтернатива налицо: целое в этих примерах делится на две части и каждый “атом” должен оказаться в одной из них. Однако факты раз за разом свидетельствуют о существовании малого нейтрального третьего. Его можно считать символом неучтённых факторов при абстрагировании и формулировке альтернативы, символом неполноты наших знаний. В такой ситуации допустимы и нестрогие решения. Например, нет логических оснований считать все точки пространства одинаковыми по форме и размерам, даже если эти характеристики приняты неопределяемыми. Песок просеивают и получают разные его фракции, но у каждой из них сохраняются потребительские свойства песка. Поэтому автор данной работы рассматривает предложения O_1 – A_9 в качестве допустимой образной и методической базы геометрии. Встретятся ли серьёзные противоречия с непрерывной моделью пространства – покажет развитие. *

2.2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ОБЪЕКТ.

O_{10} ***Геометрический объект*** – это любое множество точек (O_4), если для него однозначно решается вопрос, принадлежит некоторая точка этому множеству или нет. Геометрические объекты являются участками пространства (O_1) и характеризуются формой и наличием границ.

O_{11}. Границы геометрического объекта – это множество не подающихся наблюдению участков контакта в парах соседних точек (O_6, A_7), одна из которых принадлежит объекту, а другая нет.

A_{12}. В пределах границ объекта (O_{11}) сохраняются все свойства пространства и его точек (O_1 – A_9). В частности, любая группа точек может рассматриваться в составе нескольких объектов как их общая часть. Геометрические объекты следует считать ***упорядоченными множествами*** (A_9) в том смысле, что для входящих в них точек сохраняется порядок взаимного расположения в пространстве. Именно этот порядок определяет свойства геометрических объектов – форму и размеры.

A_{13}. Из-за непрерывности расположения точек в пространстве (A_7) границы геометрических объектов следует считать непрерывными, что означает возможность перехода взгляда наблюдателя (O_2) шаг за шагом от одной пограничной пары соседних точек (O_6, O_{11}) к другой. Если части некоторого “объекта” не имеют общих соседних точек, то следует считать, что “объект” мыслится построенным из частей, удовлетворяющих определению O_{10}, а он сам ему не удовлетворяет. Пример – пунктирная линия; для геометрии она есть набор коротких линий, объединяемых в единый образ не по правилам геометрии.

Выделение в пространстве геометрических объектов связано с решением определённых задач или наблюдением за доступными нашим чувствам явлениями. Использование подручных средств (карандаша, мела, угля) помогает нашей памяти фиксировать наблюдаемое и решаемое. В результате накапливается множество исследованных объектов, производится их классификация по форме, размерам и другим признакам; для каждого класса объектов уточняются их свойства, и это составляет наше Знание. Понятие геометрического объекта и знание его свойств позволяет нам образно мыслить и мысленно исследовать. В том числе, решать логические задачи. Например, является ли Пространство геометрическим объектом по аналогии с понятием “Множество всех множеств”? Отвечаем: нет, так как по определению (O_{10}) геометрический объект является частью пространства (O_1), у которого по (A_3) нет границ, а главное потому, что мы не хотим вносить в геометрию чуждую ей дискуссию из области теории бесконечных множеств [2,4]. Из этого принципа следует, что каждый геометрический объект (O_{10}) должен иметь границу (O_{11} – A_{13}) в каком-либо направлении (O_2, O_6), чтобы не отождествляться с пространством.

2.3. СКОЛЬКО ТОЧЕК В ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ОБЪЕКТЕ?

Воспользуемся естественным языком для следующего рассуждения. В геометрии прямая линия считается бесконечно длинной, плоскость считается бесконечной в направлении всех своих прямых, пространство бесконечно во всех направлениях. Логика ввела в геометрию бесконечность в качестве своеобразной граничной области, призванной своим существованием устранять логические тупики. Например [2, стр. 7], Анаксагор пояснял идею безграничности следующим образом: “Где бы ни стал воин, он сможет протянуть своё копьё ещё дальше”. Количество точек в любом геометрическом объекте считается бесконечным, в частности, из-за того, что обосновывается бесконечное деление расстояний между точками [7]. Геометрия Лобачевского и сферическая геометрия считаются переходящими в геометрию Евклида при бесконечно большом радиусе кривизны их поверхностей [7,11].

Из-за указанного многообразия в геометрии бесконечно больших величин важно иметь представление о методах работы с ними.

С историей развития теории бесконечных множеств и некоторыми тайнами этих множеств в популярном изложении можно ознакомиться по работе [2]. Для нас представляет интерес следующее:

Чего больше, натуральных чисел или рациональных? На первый взгляд кажется, что ответить на этот вопрос просто. Множество натуральных чисел является частью множества рациональных чисел, а потому натуральных чисел меньше. Но… Оба множества бесконечны, а ниоткуда не следует, что при переходе к бесконечным множествам сохраняются законы, выведенные для конечных множеств, например, аксиома “Целое больше своей части” (E_{14}). Исследования в этом направлении приводят либо к выводу “*бесконечное + нечто = бесконечное*”, либо к парадоксам [2]. Пример на бытовом уровне: Если из ведра воды отобрать стакан воды, то остаток любой из нас назовёт ведром воды. Получается **m - n = m**. Подобные парадоксы из-за нечётко определённых мер геометрии не нужны. А “бесконечно большое” является именно нечётко определённой величиной. Объяснить своеобразную арифметику с такими величинами можно только тем, что мощность бесконечных множеств является не конкретным числом, а символом любого из тех чисел, которые можно получить, прибавляя единицу к предыдущему числу после установления для него статуса бесконечности. В численном анализе это объяснение однозначно. А в геометрии возникает двоякая ситуация.

Пусть некоторые прямые рассматриваются в качестве числовых осей декартовой системы координат. Пока точки пространства отражаются конечными координатами, можно считать, что плоскость описывается линейным уравнением с тремя переменными, прямой соответствует система двух линейных уравнений с тремя переменными, а точке – система трёх линейных уравнений [3]. Но как только одна из координат получит статус бесконечности, названные уравнения теряют смысл из-за упомянутой специфики арифметики бесконечно больших чисел. Тогда плоскость, прямая и точка становятся неким облаком, в котором аналитические методы не дают однозначного результата.

С другой стороны, собственно геометрическим исследованиям бесконечная удалённость не мешает. Наблюдатель (O_2) условно перемещается поближе к месту мысленных построений и продолжает работу. Например, по предшествующему участку прямой “провешивает” её продолжение, а с нею и другие объекты анализа. Логически такая возможность не отвергается. Особую двусмысленность этой ситуации придаёт то, что аналитическими методами исследовано много геометрических объектов [7,11]. Например, доказывается непротиворечивость системы аксиом Гильберта и прогнозируется перенос свойств сферы на плоскость.

Понимая, что количество точек в геометрическом объекте нельзя ограничивать, принимаем следующее решение:

A_{14}. В самой точке (O_4), как геометрическом объекте (O_{10}), имеет место одна точка (единичное множество). В общем случае количество точек в геометрических объектах не анализируется, если оно не указано специально для решения каких-либо задач. Интуитивно всякий геометрический объект, даже бесконечный в каком-либо направлении, в сравнении с пространством (O_1) считается ***ограниченным множеством неопределённой мощности***. Тем самым аксиомы E_{10} – E_{14} в применении к геометрическим объектам считаются справедливыми.

Объясним это решение и смысл нововведённого словосочетания.

Из-за дискретной структуры участка пространства в границах объекта (O_6 – A_{12}) ограниченность объекта (A_{14}) истолкуем так, что не отвергается потенциальная возможность пересчитать его точки. Но пересчёт точек требует разработки какого-нибудь алгоритма их перебора, а на этом пути вряд ли можно добиться однозначных результатов. В случае создания такого алгоритма его применение трудоёмко хотя бы из-за больших чисел. Поэтому исследования в этом направлении неперспективны. Ниже в разделе 5.3 показано, что геометрия может развиваться без них.

Из E_{14} следует, что часть объекта содержит меньше точек, чем сам объект. Предположим, имеется возможность выразить числами количество точек объекта, количество его частей и количество точек в каждой части. Мысленно разделим объект на части, примерно равные по количеству точек в них. В каждой части объекта точек будет меньше, чем в объекте, но сумма количеств точек всех частей будет равна количеству точек объекта, потому что каждая точка входит только в одну из частей (O_{11}). Этот пример показывает, что нашей логике соответствует обычная арифметика, а не парадоксальная логика операций с условно бесконечными множествами.

Увеличим количество частей объекта: количество точек в каждой части, кроме единичного множества (A_{14}), будет уменьшаться, но общее количество точек не изменится. Многократное, например, удвоение количества частей объекта может дать последовательность пар чисел “количество частей – среднее количество точек в частях”. Ясно, что первое из этих чисел будет расти, а второе – уменьшаться. До какого предела?

Для количества точек в каждой части таким пределом является единица. Сколько частей объекта соответствует этому пределу? Предельное количество частей равно количеству точек в объекте – по одной точке в каждой части. Но каким числом это выражается – неясно, если мы хотим избежать прямого счёта точек. Воспользоваться каким-либо промежуточным результатом деления объекта на части не получается, так как любая часть может считаться самостоятельным объектом, и попытка сосчитать в ней точки возвращает рассуждения к началу. Прямой пересчёт точек связан с выбором алгоритма деления объекта на части и порядка обхода точек, но это не геометрические задачи, они отвлекают исследователя от анализа формы и размеров – собственно геометрических свойств объекта.

Этот замкнутый круг можно разорвать только диалектически, что мы и делаем, принимая решение A_{14}. Геометрия от такого решения не становится неопределённой. Для отдельных классов объектов она устанавливает меры, не связанные с количеством точек. И ничего странного в этом нет: муку мы взвешиваем килограммами, топливо учитываем литрами или тоннами, объём резервуаров – кубометрами. Важно только разработать метод измерения и правила использования результатов измерений.

Обычно для измерения выбирается эталон того геометрического объекта, характеристика которого используется для выражения результатов измерения в численном виде. Для расстояний – прямолинейный отрезок, для углов – угол или дуга, для площади – квадрат, для объёма—куб. В каждом случае разрабатывается алгоритм измерения, включая необходимые формулы. Ни одно из действий в этих алгоритмах не связано с подсчётом количества точек в измеряемых объектах. Поэтому “…**неопределённой мощности**…” в A_{14} оправдано. Неопределённой не потому, что неизвестна, а потому, что мы её не определяем.

Одним из геометрических объектов со сложным пониманием его природы является линия [2]. Традиционно все геометрии считают её непрерывной в том смысле, что между любыми двумя её точками существует по крайней мере одна промежуточная точка [7]. Правда, работа [7] в системе аксиом Гильберта опускает слово *линия,* обходится словом *прямая*, но это не меняет смысла – указанная непрерывность является следствием принятой системы аксиом.

Это одностороннее понимание свойств пространства и линии как её участка. Оно отвергает существование соседних точек и вообще дискретные модели геометрических объектов, но не может изложить свои мысли без дискретного понимания точки. В этом противоречии проявляется диалектическая необходимость показать, что дискретное строение не противоречит непрерывным свойствам объектов.

Рассмотрим упомянутый в разделе 2.1 парадокс Зенона [2, стр.11]: “Стрела, прежде чем попасть в цель, должна пролететь половину пути, а до этого – одну четверть пути, ещё ранее – одну восьмую пути…А так как пространство безгранично делимо, то процесс деления пополам никогда не окончится. Поэтому стрела никогда не начнёт движения и всегда будет неподвижна”. Обратим внимание, что Зенон в полёте стрелы (физического тела) рассматривает только геометрический аспект (выделение участков предстоящего пути) и не считается с реалиями. Когда в реальном мире созданы все условия для полёта стрелы, она летит. Попадёт ли она в цель – это другой вопрос. Важно то, что полёт является фактом суммирования пройденных долей общего пути, а не ожиданием их вычисления. Полёту соответствуют путь и время, отрезкам пути соответствуют отрезки времени, отношение этих отрезков (физическое понятие – скорость) может быть конечно при делении бесконечно малых величин друг на друга [3, стр.218]. Это значит, что из бесконечной делимости пространства в парадоксе Зенона не следует неподвижность стрелы, её нулевая скорость. С другой стороны, определение долей пути – это анализ, полёт стрелы – синтез всех предпосылок. Совместно анализ и синтез не приводят к логическому парадоксу. В псевдопарадоксе Зенона предполагаемое проектируется в будущее как препятствие для осуществления физического процесса, а в совокупности условий для начала движения такого препятствия нет.

Конспект по [2, стр.10-13, 84-86]: Древнегреческих философов волновало устройство мира в малом. Есть ли вообще предел делимости материальных предметов на части? Анаксагор говорил, что “…в малом не существует наименьшее , но всегда есть ещё меньшее. Ибо то, что существует, не может перестать существовать от деления, как бы далеко ни было продолжено последнее.” Тем самым утверждалось, что непрерывное не может состоять из дискретных элементов. В школе Пифагора полагали, что существуют наименьшие частицы вещества – атомы, которые далее не делятся в силу своей твёрдости. На этом представлении атомисты ввели понятие о неделимых частях пространства (точках), не имеющих ни частей (см. E_1), ни размеров. Например, Демокрит до Евклида предпринимал попытку построить геометрию на основе учения об атомах (до нашего времени его труды не дошли). Символом дискретности было натуральное число, и Пифагор хотел свести к натуральным числам науку об измерении геометрических величин. Для миропонимания пифагорейцев оказалось катастрофой сделанное одним из них открытие несоизмеримости (в рациональных числах) стороны и диагонали квадрата. Это настолько препятствовало поставленной пифагорейцами цели, что они долго скрывали своё открытие от непосвящённых. Свободное от геометрии определение чисел с расширением множества рациональных чисел до множества действительных чисел было выполнено только в 19 веке нашей эры в работах Кантора, Вейерштрасса, Дедекинда, Мэре. Но преодоление пропасти между дискретным и непрерывным миропониманием, или между арифметикой и геометрией при обосновании математики до сих пор проблематично. Зенон своими парадоксами (апориями) показал, к каким неожиданным следствиям ведёт неосторожное обращение с предположением о безграничной делимости пространства и времени. Конечно, выводы Зенона опровергались повседневным опытом, но это в области свойств реального мира. А Зенон исследовал, говоря современным языком, одну из математических моделей мира. (Конец конспекта).

Вышеприведённая довольно длинная цитата-конспект оправдана тем, что она свидетельствует о философском, а не потребительском интересе к устройству мира в малом. В этом отношении показательны метаморфозы понятия *линия* в геометрии, численном анализе, топологии [2]. Последнее по времени определение линии по Урысону явно использует дискретную природу точек.

Авторское понимание взаимодействия дискретности и непрерывности O_4, A_5, O_6, A_7 не согласуется с принципом бесконечной делимости отрезков линии и других геометрических объектов, который закреплён в аксиомах и следствиях из них при традиционном обосновании геометрии [7]. В порядке обсуждения рассмотрим два примера:

*П1. Если каплю акварельной краски разбавить достаточно большим количеством воды, то краска станет недоступна зрению, а вода будет выглядеть неокрашенной. При такой концентрации ничто не подскажет цвет краски в первоначальном насыщенном состоянии – бесконечное растворение привело к потере информации.

*П2. Рассмотрим две периодические дроби:

1/3 = 0,(3) = 0,33333333… ;   16/75 = 0,21(3) = 0,213333333…

В обоих случаях многоточие показывает, что сколько бы ни продолжалось деление числителя на знаменатель дроби, цифр кроме троек мы не получим. Этот факт не требует проверки бесконечным делением, а само бесконечное деление из-за этого теряет смысл. Приближённая информация отражается не бесконечным рядом десятичных знаков, а первыми признаками индуктивной закономерности. Точная информация передаётся прямым указанием периода в скобках или пониманием обыкновенной дроби не как процесса деления, а как своеобразной формы числа – обыкновенной дроби.

Примеры П1 и П2 показывают, что бесконечное деление само по себе не является универсальным способом поиска информации. Это мысленный приём, позволяющий представить непрерывное через дискретные промежуточные результаты в некотором алгоритме. Но если бесконечное деление не несёт новой информации (П2) или приводит к потере информации (П1), то зачем оно математике или логике? В численном анализе при соответствующих алгоритмах исследования сходимости рядов оно помогло разработать дифференциальное исчисление. А что оно дало геометрии, если даже отвергает понятное и вездесущее понятие соседства? Думается, что Анаксагору можно возразить: “то, что существует”, не перестаёт существовать при мысленном делении, но можно говорить о наименьшем промежуточном результате деления, достаточном для умозаключений. А атомистам ответила история: атом не является неделимым, возможен внутриатомный масштаб исследования пространства. Таким образом, абстрактное понимание пространства и точки, как места в нём, не должно ограничиваться одной из альтернативных точек зрения в древней, как мир, дискуссии.

При определениях O_1, O_4 диалектическое “единство и борьба противоположностей” представляется следующим образом: Если требуется узнать, что находится между точками, то следует разделить пространство на более мелкие точки и повторить анализ в новых условиях; при этом аксиомы о свойствах точек остаются прежними (A_7). Подобный подход исключает необходимость менять масштаб разбиения пространства на точки в логических задачах геометрии и не препятствует выбору требуемого масштаба в задачах исследования реального мира. Именно поэтому исходным понятием геометрии данная работа считает не формальное “пространство, как множество всех точек, прямых и плоскостей” [7, стр.41], а идеализированное пространство, как место, в котором развивается физическая картина материальной жизни (O_1).

По A_3 – A_9 пространство однородно, непрерывно и бесконечно во всех направлениях.Это абстракция, но она допускает логический анализ всего, что размещается и перемещается в нём. И допускает следующее правило численного анализа: Если по мере уменьшения каждого слагаемого до бесконечно малой величины количество слагаемых неограниченно растёт, то сумма может быть не бесконечно малой величиной. Так, n слагаемых, каждое из которых равно 1/n, в сумме дают 1 независимо от n [3, стр.218]. В применении к геометрии это означает, что дробление пространства на относительно крупные или мелкие точки не является причиной изменения размеров исследуемых объектов, и что количество точек не определяет эти размеры.

3. Евклид: Совмещающиеся друг с другом равны (E_{13}).
Равные одному и тому же равны между собой (E_{10}).

3.1. Оригинал и копия геометрического объекта.

Числа сравниваются на “больше, меньше, равно”. Для геометрии эти слова говорят о размерах, но не затрагивают форму объектов. Да и совмещение по E_{13} требует мысленно или реально перемещать совмещаемые объекты в пространстве, а пространство у нас неподвижно (O_1). Для разрешения этого мысленного противоречия вводим понятия “***оригинал***” и “***копия***”.

O_{15}. ***Оригинал*** – это тот объект (O_{10}) или его участок, который наблюдатель (O_2) мысленно выделяет в пространстве (O_1). Соответствующее ему множество точек (O_4) считаем неподвижным участком пространства. ***Копия*** – это условно перемещаемое множество точек со свойствами оригинала объекта. Копию можно совместить с оригиналом объекта подобно голограмме так, что между точками копии и оригинала устанавливается взаимно однозначное соответствие вплоть до порядка расположения соседних точек (A_{12}). Количество копий в геометрических построениях не ограничивается. Не ограничивается и их мысленное перемещение.

3.2. К О Н Г Р У Э Н Т Н О С Т Ь .

Сравнение геометрических объектов (O_{10}) на “равно” производится совмещением копии одного объекта с оригиналом или копией другого объекта. Практически сравнение иногда можно проводить на моделях из подручных материалов, но если процесс сравнения физически невозможен, то совмещаемость доказывается на основании свойств объектов и системы истинных утверждений геометрии – определений, аксиом и теорем. При этом действует принцип:

A_{16}. Доказанная на основании аксиом, определений и теорем совмещаемость геометрических объектов (O_{10}) принимается эквивалентной возможности их физического совмещения.

O_{17}. Равенство (одинаковость) геометрических объектов, установленная доказательством возможности совмещения копии с оригиналом или копий разных оригиналов друг с другом , называется ***конгруэнтность***. В просторечии термины “равенство” и “конгруэнтность” признаются равносильными.

На основании определений O_{15}, O_{17} принимаем без доказательства следующие аксиомы:

A_{18}. Копия конгруэнтна своему оригиналу. Все копии общего оригинала конгруэнтны между собой.

A_{19}. Если геометрические объекты (O_{10}) конгруэнтны (O_{17}), то существует перемещение (O_2), при котором их копии совместятся, то есть займут в пространстве одно и то же место. Перемещение копий объектов предполагается возможным на любое расстояние в любом направлении, включая вращение в пространстве. Если возможны несколько вариантов совмещения, то любого из них достаточно, чтобы считать объекты конгруэнтными.

A_{20}. Перемещение геометрических объектов (A_{19}) является инструментом исследования; свойства объектов (O_{10}) при перемещении не меняются. Если возможны несколько вариантов совмещения конгруэнтных объектов, это следует считать информацией о конгруэнтности некоторых частей объектов и определённой закономерности расположения этих частей в границах объектов.

*Комментарий. Как и многие другие понятия точных наук, конгруэнтность может пониматься неоднозначно. В связи с этим считаем необходимым отметить три аспекта:

1) В словаре [13] дано:

--Конгруэнция (лат.) – соответствие, совмещаемость, совпадение; *геом*. совокупность (семейство) линий… (далее даётся определение, не зарегистрированное в геометриях [7, 9, 11, 12]).

--Конгруэнтный (лат.) – совпадающий; *геом*. совмещающийся при наложении; конгруэнтные фигуры – геометрические фигуры (например, треугольники), равновеликие и подобные, а потому совмещающиеся при наложении.

Очевидно, логической основой конгруэнтности считалась пространственная совмещаемость, которая с учётом доминирующей роли плоскости и плоских фигур в традиционной геометрии констатировалась наложением сравниваемых фигур.

2) В работе [7, стр. 54, 57] при изложении аксиом Гильберта третьей группы (конгруэнтности) сказано:

--Каждый отрезок может быть однозначно отложен на любой прямой по любую данную сторону от любой её данной точки.

--Каждый угол может быть однозначно отложен в данной плоскости по данную сторону при данном луче.

Из этих утверждений видно, что понятие “конгруэнтность” для отрезков увязывается с ориентацией на некоторой прямой, а для углов – с ориентацией на плоскости по отношению к некоторому лучу. Тем самым свойство совмещаемости принимается несвободным, зависимым от возможности определённых перемещений. Дело в том, что система аксиом Гильберта не содержит понятия движения и усложнением других понятий делает его доступным для формальных логических рассуждений.

Определения и аксиомы данной работы O_{15} – A_{20} распространяют совмещаемость на произвольные геометрические объекты в пространстве и освобождают его от несвойственной связи с перемещениями.

3) Логически равенство обладает свойствами симметричности, транзитивности и рефлексивности. Конгруэнтность является геометрическим равенством, механизм доказательства равенства не влияет на логическую сущность этого отношения, поэтому указанные свойства присущи и конгруэнтности. Это следует из определения O_{17} и аксиомы A_{18}. В работе [7] из-за усложнения понятия “конгруэнтность” указанные свойства для отрезков и углов анализируются и доказываются. *

4. Евклид: Линия есть длина без ширины (E_2).
Границы линии суть точки (E_3).

4.1. Л И Н И Я .

O_{21}. ***Линией*** называется такое множество точек, в котором каждая неузловая точка имеет не более двух и не менее одной соседних точек (O_6, A_7), удовлетворяющих правилу включения в это множество.

O_{22}. При пересечении или касании двух и более участков линии общая точка этих участков может иметь более двух соседних точек из-за соседних от каждого участка. Такую точку будем называть ***узел***.

С учётом понятия близости точек (см. раздел 2.1) вокруг узловой точки возможно образование конгломерата близких к ней точек, но для большинства задач геометрии это не представляет интереса.

O_{23}. Если все точки линии без узлов имеют по две соседние точки, то считаем линию ***замкнутой***. Если некоторая точка линии имеет одну соседнюю, то эту точку считаем ***концом линии***, а саму линию – ***разомкнутой*** (***незамкнутой***). Любую точку линии без узлов с двумя соседними точками считаем ***промежуточной***.

Примеры линий без узлов:

– Замкнутые линии: овал, квадрат.

– Незамкнутые линии с одним концом: луч, спираль Архимеда.

– Незамкнутые линии с двумя концами: хорда, полуокружность.

– Незамкнутые бесконечные линии: прямая, синусоида, парабола.

Приведённые примеры показывают, что у линии без узлов не может быть больше двух концов. Формальное сомнение в этом факте противоречит логике и определениям O_{21} – O_{23}. Более того, приведённая классификация линий по числу у них концов является полной и может служить базой для полных индуктивных умозаключений [1].

Примеры линий с узлами: роза ветров, лист Декарта, фигуры Лиссажу.

Отсутствие концов у незамкнутых линий в приведённых примерах означает возможность продолжения линий сколь угодно далеко – потенциальная бесконечность. Мысленно справляться с этим позволяет способность наблюдателя (O_2) к неограниченному перемещению в неограниченном пространстве (O_1) и независимость линий от связи с другими объектами (O_{10}).

Пример несвободной линии:

В системе аксиом Гильберта [7, стр. 42] аксиома I.6 требует: “Если две точки A,B прямой ***a*** лежат на плоскости **α**, то каждая точка прямой ***a*** лежит на плоскости **α**.” При этом аксиоматический метод допускает варьировать содержание понятий “прямая” и “плоскость” (см. Вступление, стр. 6). По мере исследования под плоскостью понимают сферу или псевдосферу, по указанной аксиоме вынуждают “прямую” выгибаться в соответствии с формой этих поверхностей, придают ей свойство кратчайшего расстояния между точками поверхности для обеспечения единственности по первым аксиомам связи [7], которые не содержат этого требования, и в результате прямую линию далее заменяют геодезической. Между тем, прямая линия по Евклиду (E_4, E_{15}, E_{16}) не связана с понятием расстояния. Наше исследование показало, что прямая не требует связи с какой-либо поверхностью для формулировки её свойств и конструирования; достаточно задать две точки или одну точку и направление в пространстве (см. разделы 5, 6, 7). При этом все свойства прямой однозначно определены любым её участком с количеством точек более трёх. У геодезических линий набор исходных данных для их опознания или конструирования сложнее, а из-за связи с заданной поверхностью они не пронизывают всё пространство. И самое главное: в пространстве для геодезических линий не выполняется основной признак прямой – однозначность для каждой пары точек. Для сферы и псевдосферы он выполняется в вышеуказанном смысле, а в пространстве через пару точек можно провести множество геодезических; они могут принадлежать разным, например, сферам, но факт от этого не меняется – через две общие для сфер точки проходят несколько геодезических, по одной на каждой сфере. Евклидовская прямая, проходя через эти же точки, пронизывает эти сферы насквозь. Это противоречит теореме 1 из [7, стр.43]: "…две плоскости либо не имеют совсем общих точек, либо имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих двух плоскостей;…". Напомним, что под "плоскостью" сферическая геометрия имеет ввиду сферу, а геометрия Лобачевского – псевдосферу. Указанное несоответствие становится заметным именно при переходе от аксиоматического метода построения геометрии к генетическому (см. Вступление). Следует также отметить, что в пространстве не выполняется аксиома Гильберта I.5 [7, стр. 42]: "*Каковы бы ни были три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, существует не более одной плоскости, которая проходит через каждую из трёх точек A, B, C*", если её применять к неевклидовым геометриям. Средствами геометрии Евклида для каждой тройки точек не на одной прямой можно построить множество сфер ("плоскость"

Римана), центры которых лежат на перпендикуляре, проведённом к плоскости соответствующего треугольника через центр описанной окружности этого треугольника. Между тем, в работе [7, стр. 90] перед определением параллельных прямых по Лобачевскому без анализа говорится: “В основу её мы положим аксиомы абсолютной геометрии I–IV…“ Это можно считать примером того, как формальное индуктивное расширение свойств аксиоматически определённой “плоскости” не согласуется со свойствами реального пространства.

4.2. ДВИЖЕНИЕ ВДОЛЬ ЛИНИИ.

O_{24}. Если рассматривать одну за другой соседние точки линии без узлов и при этом не возвращаться к уже рассмотренным точкам, то можно сказать, что имеет место ***движение вдоль линии в конкретном направлении***. Основное свойство линии – ***непрерывность*** (A_7). Это значит, что для каждой промежуточной точки (O_{23}) движение вдоль линии всегда встретит очередную соседнюю точку, и такая точка в направлении движения будет единственной.

Следует различать перемещение копий геометрических объектов и движение вдоль линии. В первом случае мысленно движется всё множество точек объекта (O_{10}), как единое целое, а во втором – вдоль линии движется только взгляд наблюдателя (O_2).

O_{25}. Любые две точки линии без узлов (O_{21}, O_{22}) в связи с поставленной задачей можно считать концами ***участка линии*** (O_{23}) при движении от одной из них к другой по промежуточным точкам линии. Участок линии является подмножеством линии с фиксированным местом на ней и обладает её свойствами на своём месте.

4.3. ТОЧКИ НА ЛИНИИ БЕЗ УЗЛОВ.

Линия не может состоять из одной точки – нужны соседние (O_{21}). Пара соседних точек является линией – у каждой из них не более двух и не менее одной соседних точек. Очевидно, это есть линия с наименьшим возможным количеством точек, и каждая точка служит её концом (O_{23}). На такой линии можно задать направление движения (O_{24}), но других интересных результатов с нею не получишь.

Рассмотрим линию из трёх точек, нумеруя их 1, 2, 3 по мере движения от одного произвольно выбранного конца (1) к другому (3). Здесь для точки 1 соседней является точка 2. Для точки 2 соседними являются точки 1 и 3. Для точки 3 соседней является точка 2. Только одна из трёх точек имеет две соседние, и это даёт право присвоить ей название “промежуточная” (O_{23}). Далее часто будет использоваться понятие “между”. Его геометрический смысл иллюстрируется вышеприведённым примером: точка 2 находится между точками 1 и 3 независимо от направления движения по линии; при этом точка 2 соседствует с точками 1 и 3, но точки 1 и 3 друг для друга не соседи (O_6, A_7). Такие точки мы ранее назвали близкими (см. раздел 2.1).

Важное свойство точек линии – увеличение их количества возможно только за счёт количества промежуточных точек, так как более двух концов линия без узлов иметь не может (см. примеры к O_{21} – O_{23}). Дополнительные точки не могут вклиниться между точками 1 и 2 или 2 и 3 в нашем примере, так как это пары соседних точек. По определению соседства (O_6, A_7), они касаются друг друга, не оставляя свободного места в пространстве. Если же кто-то хочет участок пространства с точками 1, 2, 3 разбить на более мелкие точки, то он получит другую модель пространства, другие точки (O_4), но и в новой модели в участок линии (O_{25}) из трёх точек нельзя будет втиснуть промежуточные точки (A_7).

На основании сказанного можно сформулировать два вывода:

T_{26}. Увеличение количества точек у линии может происходить только за счёт превращения одного из её концов в промежуточную точку с добавлением новой, соседней с нею точки из пространства вне линии, которая становится новым концом линии.

T_{27}. К замкнутой линии нельзя добавить точки – постоянство количества имеющихся точек в таком множестве гарантировано отсутствием концевых точек у линии.

4.4. ОТРЕЗОК ЛИНИИ.

Возможность добавлять к участку линии новые точки только с его концов позволяет уточнить широко используемое понятие “***отрезок линии***”.

Если вся линия представлена перед глазами, легко выделить на ней любой участок (O_{25}). Если же линия бесконечна или имеет чрезмерно удалённую часть, то мы невольно пользуемся участками линии, доступными обзору. В любом случае рассматриваемый в задаче участок линии ограничен с двух сторон, и именно его мы называем отрезком линии. Невключённые в отрезок точки линии при необходимости могут быть добавлены с внешней стороны от его концов с соблюдением свойств линии. При этом прежние концы станут промежуточными точками, а из добавленных точек образуются новые концы увеличенного отрезка.

В геометрии принято концевые точки отрезка линии обозначать прописными буквами или цифрами, например, А и В; тогда сам отрезок получает обозначение АВ. Выше по тексту мы избегали пользоваться этим приёмом, но он удобен для идентификации точек и отрезков в решаемых задачах. При необходимости уточняется направление движения по отрезку, например, порядком обозначения его концов. Напомним, что любые обозначения не являются собственными свойствами геометрических объектов.

Понятие “отрезок линии” важно для разработки процесса измерения, через который геометрия осваивает всю мощь численных исследований.

Для линии и её участков, как геометрических объектов (O_{10}), количество точек не может численно характеризовать результат их сравнения на “больше, меньше, равно” (A_{14}). Сравнение совмещением возможно, но даёт только качественный результат: конгруэнтно или нет. Вышеприведённые примеры линий из двух-трёх точек только прояснили свойства концевых и промежуточных точек; для процесса измерения в них ничего нет. Тут-то и приходит на помощь отрезок линии.

A_{28}. Любой достаточно короткий отрезок линии может служить ***мерой длины линии***, если его копию неоднократно совмещать с участками линии, охватывая при каждом совмещении все точки участков линии, не пропуская между совмещениями ни одной точки линии и не допуская повторных совмещений промежуточных точек.

Неизвестно, сколько точек в отрезке линии, принимаемом за меру длины, но гарантировано постоянство их количества (T_{26}) и взаимного расположения (A_9, A_{12}). Аналогично в молекулярно-кинетической теории газа определённое количество атомов или молекул газа (число Авогадро) названо “моль” и далее для всех веществ введены измеряемые величины “молярная масса” и “количество молей”. Не в Земных условиях или при других давлении и температуре получили бы не число Авогадро – это подчёркивает произвольность, которую по аналогии мы переносим в геометрию.

Практическая реализация аксиомы A_{28} для произвольных линий осложняется тем, что в общем случае их отрезки можно совместить не со всяким участком измеряемой линии без изменения формы совмещаемых объектов – меры длины или копии участка линии. Только одна линия из всего их многообразия обладает необходимым для измерения свойством – прямая линия. Причём, она не связана с какими-либо поверхностями и может быть воспроизведена в любых пространственных условиях. Именно поэтому она является особо важным в геометрии объектом изучения.

5. Евклид: Прямая линия есть та, которая одинаково расположена относительно всех своих точек (E_4).

Напоминаем о существующей в “геометриях” омонимии: в каждой из них имеет место своё понимание слова “прямая” и сопутствующих ему свойств. В геометрии Римана даже завуалировано раздвоение точек прямой [7]. Ниже приводится явное определение прямой, основанное на евклидовском понимании свойств этой линии.

5.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЯМОЙ ЛИНИИ.

O_{29}. Незамкнутая потенциально бесконечная в обе стороны линия называется прямой, если для копии любого её участка с количеством точек более трёх при любом совмещении в пространстве с любым участком оригинала этой же линии без изменения их формы всегда выполняется правило: Если две точки копии совпали с двумя точками участка оригинала, то и все точки копии совпадают с точками этого участка оригинала.

Примечание: Об абстракции потенциальной осуществимости, использованной в O_{29}, см. [4, ст. “Конструктивная логика”].

Для объяснения несколько сложного определения O_{29} приведём примеры.

*) Копию участка полуволны синусоиды можно перенести и совместить с некоторыми другими участками этой синусоиды или другой синусоиды с теми же значениями периода и амплитуды, но существуют участки этих линий, где совмещение невозможно из-за различия формы участков. При изменении периода или амплитуды форма синусоиды изменяется так, что копию прежней синусоиды не совместишь ни с одним участком изменённой. У прямой линии по O_{29} нет подобных вариаций формы.

**) Дугу окружности (копию участка линии) можно передвинуть по окружности (совместить с другим участком оригинала линии), сохраняя одинаково ориентированными вогнутости дуги и окружности. При этом все точки дуги совпадут с точками окружности. Но если наложить ту же дугу на окружность, сменив в пространстве ориентацию вогнутости дуги, то две точки дуги и окружности можно совместить без совмещения остальных точек. (Этот пример удобно демонстрировать на проволочных моделях окружности и её дуги).

Из приведённых примеров видно, что частные случаи полного совмещения участков копии и оригинала не являются достаточным признаком прямой линии. Надо, чтобы любой вариант совмещения двух точек участка копии и оригинала приводил к совмещению всех остальных точек совмещаемых участков этих объектов. И подобная совмещаемость не должна зависеть от каких-либо параметров аналитической природы. (Для окружности таким параметром является её радиус: дуги окружностей разных радиусов не совмещаемы). На практике это определяющее свойство прямой удобно называть ***“единственность для любой пары точек пространства”*** или применять в форме E_{15}: ***От каждой точки (пространства) до каждой другой точки (пространства) можно провести одну (единственную) прямую линию.***

В определении O_{29} не упоминаются плоскость и какие-либо поверхности. Пространство участвует в нём через определения точки, линии, участка линии и его копии (O_4, O_{21}, O_{25}, O_{15}). Плоскость и какие-либо поверхности к определению прямой действительно не имеют отношения. Другое дело, что их взаимодействие в пространстве, например, взаимное расположение и наличие общих точек, может обладать дополнительными свойствами. Всё это в системе аксиом Евклида и Гильберта вводилось в аксиомах, а у нас будет исследоваться на уровне теорем.

Непосредственным следствием определения O_{29} можно считать конгруэнтность (O_{17}) всех прямых линий между собой. Если на любой из них выделить две произвольные точки, то совмещение с ними копии любой другой прямой приведёт к совмещению всех остальных точек копии и исходной прямой, включая бесконечно удалённые участки, а это и есть признак конгруэнтности.

Объясним в определении O_{29} условие “*…её участка с количеством точек более трёх…*”

Евклидова прямая в отрезках, доступных нашим действиям, – это реальность, например, ввиде натянутой нити. Даже предполагаемая бесконечность прямой линии нужна на практике, например, в астрономии – она снимает ограничения в мысленных построениях, в попытках заглянуть как можно дальше в просторы Вселенной. Ориентируясь на практически выполнимые задачи и применение аналитических методов в геометрии, обратим внимание на свойство прямой линии, которое называется “направление”.

Две точки в пространстве однозначно определяют отрезок прямой (E_{15}, O_{29}, O_{25}). Без дополнительных исходных данных на нём можно выбрать направление движения (см. раздел 4.2) от одного конца к другому. Но при достижении конца отрезка не обязательно прекращать движение. Его целью может быть посещение и анализ промежуточных точек, а может быть “поиск” точек после достижения конца отрезка, но в том же “направлении”. Например, по закону инерции в физике: “Если на тело не действуют никакие силы или действующие силы взаимно уравновешены, то тело движется равномерно прямолинейно.” Этот вариант цели движения и определяет смысл свойства “направление”.

Две точки в пространстве однозначно определяют не только прямолинейный отрезок, но и прямую линию, участком которой он является, и определяет направление этой прямой в пространстве. В физике, в векторной алгебре, во многих прикладных задачах геометрии рассматривают направленные отрезки (векторы), для которых сам отрезок своим видом в форме стрелки или аналитического эквивалента указывает направление. В этом случае векторы задаются начальной точкой, направлением и длиной; (вариант: вектор освобождается от связи с начальной точкой, что равносильно использованию копий оригинала). Этой информации хватает для решения такого множества задач, что направление вектора считается чуть ли не исходным свойством прямой линии. Но вернёмся к определению O_{29}.

Каждая пара соседних точек (O_6) задаёт в пространстве какое-либо направление. Например, это соседние точки 1 и 2, и взгляд наблюдателя движется от точки 1 к точке 2. Добавим к этой минимальной линии точку 3 со стороны точки 2, получим линию 1-2-3. В общем случае направление участка 1-2 может не совпадать с направлением участка 2-3 из-за некоторого множества соседних точек у каждой из них (O_6). Для того, чтобы линия 1-2-3 была прямой по определению O_{29}, надо из всех возможных направлений участка 2-3 выбрать одинаковое с направлением участка 1-2. Предположим, выбрали. Как применить определение O_{29} для проверки? Копию минимального участка **1-2** совмещаем с участком 2-3: концевые точки 2,**1** и 3,**2** (или 2,**2** и 1,**3**) совпали, а промежуточные точки для проверки прямолинейности отсутствуют. Добавим точку 4 со стороны точки 3, получим линию 1-2-3-4. Теперь можно копию участка **1-2-3** наложить на участок оригинала 2-3-4. При совпадении концевых точек **1**,2 и **3**,4 промежуточными точками будут **2** и 3. Если они совпали, линия 1-2-3-4 прямая, иначе её удлинение выполнено не прямолинейно, не в соответствии с требованиями O_{29}.

Описанный алгоритм проверки прямолинейности фактически является правилом, по которому из близких и соседних к линии точек выбираются те, которые удовлетворяют её форме и направлению начального участка. Наличие подобного правила для каждой линии предполагает определение O_{21}. При увеличении количества точек в составе линии возможности проверки её прямолинейности возрастают. Поэтому в определении O_{29} присутствует вышеуказанное условие “*…её участка с количеством точек более трёх…*”.

На практике количество точек у отрезков не анализируется (A_{14}), а для проверки прямолинейности готовых линий и для конструирования прямолинейных отрезков по заданным точкам используют шаблон – линейку (см. ниже O_{31}). Поэтому вышеописанные рассуждения о минимальном количестве точек в копии прямолинейного отрезка имеют только теоретический интерес в качестве доказательства отсутствия в данной работе неясных или противоречивых ситуаций.

В жизни понятие ***направление*** используется, когда через известную точку надо провести или наметить прямую линию к точке, недоступной для линейки или заменяющих её приборов. Иногда в речи оно применяется в более широком смысле, но геометрическая основа от этого не меняется. Из O_{29} следует, что через одну точку можно провести более одной прямой, фактически бесчисленное множество. Эти прямые отличаются именно “направлением”, выбором второй точки или любого ориентира для движения к ней. На море таким ориентиром служит магнитная стрелка компаса. В степи часто ориентиром служат далёкие горы или что-то ещё, видное издалека. Для геометрии понятие направления не связано со строгим определением, оно выполняет служебную роль при рассуждениях и построениях.

5.2. Л И Н Е Й К А, Ц И Р К У Л Ь.

O_{30}. *Циркуль* – это прибор с двумя раздвижными ножками с остриями на их концах. Конструктивно форма ножек циркуля и механизм раздвижения могут быть разными: циркуль измерительный, циркуль чертёжный, штангенциркуль, кронциркуль, нутромер. В любом случае острия ножек (символ двух точек, через которые можно провести единственную прямую) совмещаются с концами измеряемого отрезка, положение ножек фиксируется – расстояние (смысл этого термина будет рассмотрен далее) между остриями символизирует длину отрезка. Затем эту длину используют в другом месте для сравнения, измерения или построения в соответствии с решаемой задачей.

O_{31}. *Линейка* – это образ прямолинейного отрезка, реализованный в каком-либо жёстком материале для использования в геометрических построениях в качестве шаблона.

Зрительным образом участка прямой линии можно считать натянутую нить, линию перегиба бумаги, тонкий луч света. Для практических геометрических построений линейка изготавливается из дерева, металла или пластмассы. Рабочий край линейки должен соответствовать определению прямой линии O_{29}. Обычно рабочий край линейки снабжается шкалой для измерения длины прямолинейных отрезков (расстояний), но основным назначением линейки в геометрии является её служба в роли шаблона.

Для проверки качества линейки используют определение прямой линии: через две точки, близкие к концам линейки, на бумаге с плоской опорой вдоль рабочего края прочерчивается карандашом линия; затем линейка переворачивается вокруг этого края, и через те же две точки повторно прочерчивается линия; если два следа карандаша совпали, то линейкой можно пользоваться; если же на бумаге видны два несовпавших следа (например, ввиде плавно изогнутых дуг), то линейка искривлена и будет вносить ошибку в геометрические построения.

Определение прямой линии O_{29} служит и для черчения отрезков более длинных, чем сама линейка (E_{16}: Ограниченную прямую можно непрерывно продолжать по прямой). Прочерчивают отрезок прямой во всю длину линейки, продвигают линейку в нужном направлении примерно на половину её длины, совмещают половину рабочего края линейки с начерченной линией и продолжают чертить вдоль продвинутой части линейки; если нужно, повторяют эту процедуру неоднократно. На местности прямые линии размечают “провешиванием”, при котором используется промежуточный ориентир и оптическая прямолинейность нашего взгляда.

Две описанные процедуры с линейкой доказывают существование прямолинейных отрезков и потенциальную возможность построения неограниченной прямой. Оптические приборы частично реализуют эту возможность в космических масштабах. А металлообрабатывающие станки практически используют свойство участков прямой линии (фартук токарного станка, ползун строгального станка, рабочий стол строгального и фрезерного станков) совмещаться с любым участком прямолинейных направляющих этих станков – любое отклонение названных конструкций от прямолинейной формы препятствует движению.

5.3. СРАВНЕНИЕ, СЛОЖЕНИЕ, ВЫЧИТАНИЕ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ОТРЕЗКОВ.

Длина отрезка прямой – это его единственная индивидуальная характеристика, если отвлечься от положения отрезка в пространстве и способа его выделения в решаемой задаче. Все остальные свойства отрезка определяются общими свойствами прямой линии. Буквенные обозначения концов и любых промежуточных точек отрезка свойствами не являются. Поэтому сравнение отрезков прямых линий можно проводить только по длине.

T_{32}. Для ***геометрического сравнения*** прямолинейных отрезков (например, AB и CD) достаточно совместить по одному концу копий каждого из них и попытаться совместить другие. При этом возможен один из трёх случаев:
1) AB = CD; 2) AB < CD; 3) AB > CD.

Рассмотрим сравнение более внимательно, учитывая, что копии отражают свойства оригиналов. Совместим отрезки так, чтобы совпали концевые точки A,C и ближайшие к ним соседние точки (O_{21}) для задания направления. Этого достаточно, чтобы совмещались последующие пары соседних точек отрезков до достижения конца одного из них (O_{29}). Тогда для концов B и D возможны три варианта:

1) Точки B и D совпадают. Это значит, что отрезки AB и CD конгруэнтны. При их совмещении между всеми точками отрезков устанавливается взаимно однозначное соответствие. Отражаем этот случай записью: AB = CD.

2) Концевая точка B оказалась промежуточной на отрезке CD. Значит CD имеет больше точек, чем AB; отражаем это неравенствами AB < CD или CD > AB. Отрезки AB и CD по аксиоме A_{14} являются ограниченными множествами неопределённой мощности, но факт меньшего количества точек у отрезка AB доказывается тем, что его концевая точка при сравнении становится промежу-

точной. Количество совмещённых точек этого факта не отвергает и на результат сравнения не влияет.

3) Концевая точка D оказалась промежуточной на отрезке AB. По аналогии с предыдущим отражаем это неравенствами: AB > CD или CD < AB.

Одно из трёх указанных соотношений является результатом геометрического сравнения прямолинейных отрезков. Независимость этого результата от числовой меры длины имеет фундаментальное для геометрии значение.

При геометрическом сложении и вычитании прямолинейных отрезков надо иметь в виду, что результат тоже должен быть отрезком прямой, то есть входить в один класс объектов со своими компонентами, а процесс сложения должен обладать свойствами коммутативности и ассоциативности. Поэтому сложение и вычитание отрезков производится на вспомогательной прямой, иногда совмещённой с одним из исходных отрезков.

Обозначим складываемые отрезки AB и CD. Циркулем перенесём отрезок AB (его копию) на вспомогательную прямую (рис. 1). Фиксируем циркулем длину CD и откладываем её на продолжении той же прямой, поставив одну ножку циркуля в точку B, тем самым совмещая точки B и C.

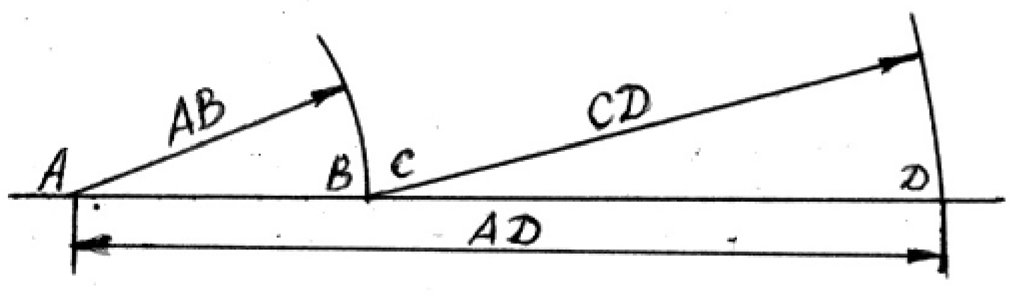


Рис. 1. Сложение отрезков прямой линии.

Отрезок AD является суммой исходных отрезков, так как:

– а) по построению обладает всеми свойствами прямой линии;

– б) содержит в себе все точки отрезков AB, CD и только их;

– в) сохраняет присущий исходным отрезкам порядок расположения промежуточных точек относительно концов слагаемых отрезков.

В описанном процессе сложения отрезков привлекает внимание совмещение точек B и C, то есть конца первого и начала второго отрезков. Не теряется ли при этом одна точка?

Предположим, имеются множество M с количеством элементов m и множество N с количеством элементов n. Множества не упорядочены, поэтому свойства элементов не учитываются. Объединение таких множеств имеет (m + n) элементов, так как совмещение каких-либо элементов не предполагается. Отметим, что здесь суммируются количества элементов, а объединение множеств суммой не называется.

В случае с отрезками надо учесть, что количество содержащихся в них точек не анализируется (A_{14}), а геометрическими свойствами точек и отрезков (A_{12}) мы не пренебрегаем. Покажем это на примере.

Пусть отрезок AB представляет собой цепь соседних точек { A, a, b, B }, а отрезок CD – { C, c, d, D }. По описанному процессу сложения цепь точек отрезка AD принимает вид { A, a, b, (B/C), c, d, D }. Вместо 8 точек из отрезков AB и CD их геометрическая сумма AD имеет 7 точек. Но мы же не складываем количества точек! Что мы имеем с учётом свойств этих точек? Из исходных 8 точек конечных 4 и промежуточных 4, а 7 результирующих точек имеют 2 конечные и 5 промежуточных.

Почему только 2 конечных точки? Потому что результат сложения является отрезком линии и не может иметь более двух конечных точек (O_{25} и раздел 4.3). Точки B и C в составе своих отрезков имеют по одной соседней точке, так как являются конечными. Совмещённая при сложении отрезков точка (B/C) получила эти соседние точки с разных сторон от себя и стала промежуточной – это произошло, когда начало второго слагаемого совместилось с концом первого слагаемого. Такова специфика геометрии!

Почему мы принимаем такой способ сложения отрезков? Потому что результату сложения надо обеспечить все свойства прямой линии.

С другой стороны, длина отрезка ассоциируется в нашем сознании не только с количеством точек в нём, но и с количеством шагов при движении вдоль линии по её соседним точкам от одного конца к другому (O_{24}). В приведённом примере отрезок АВ можно пройти за 3 шага [Aa, ab, bB], отрезок CD – тоже за 3 шага [Cc, cd, dD], отрезок AD – за 6 шагов [Aa, ab, b(B/C), (B/C)c, cd, dD]. Как видим, количество шагов подчиняется правилу сложения чисел.

На основании рассмотренного можно сформулировать следующее утверждение:

T_{33}. При ***геометрическом сложении прямолинейных отрезков*** результат является отрезком прямой линии, процесс сложения обладает свойствами коммутативности и ассоциативности, количество точек в слагаемых и в сумме не анализируется, сумма отрезков имеет только две конечные точки, как и любой отрезок линии.

При геометрическом вычитании прямолинейных отрезков следует учитывать, что отрицательных отрезков не существует, мы их не определяли. Поэтому вычитать надо меньший отрезок из более длинного, то есть перед вычитанием надо провести сравнение отрезков. По рис. 1 можно проследить, как из отрезка AD вычитается отрезок AB:

– а) Совмещаются концевые точки отрезков AD и AB (на рис. 1 точка A принадлежит обоим отрезкам).

– б) Меньший отрезок направляется вдоль более длинного; при этом его концевая точка B становится промежуточной на более длинном отрезке.

– в) Переставшая быть концевой для вычитаемого отрезка, точка B принимается за начальную точку результата вычитания (отрезка BD).

– г) Оставшаяся часть более длинного отрезка является искомой разностью отрезков (AD – AB = BD): все её точки принадлежат более длинному отрезку и, исключая начальную, не принадлежат меньшему отрезку; одна из промежуточных точек более длинного отрезка (B) стала для результата вычитания концевой (начальной), так как в его составе “теряет” соседнюю точку со стороны вычитаемого.

– д) Сложение результата вычитания (разности) с вычитаемым отрезком приводит к восстановлению длины уменьшаемого орезка: AD = AB + BD; тем самым подтверждается, что вычитание – это действие, обратное сложению.

Сформулируем правило вычитания прямолинейных отрезков.

T_{34}. Для ***геометрического вычитания*** отрезков меньший из них накладывается на больший так, чтобы с одной стороны совпали их концы, а с другой стороны конец меньшего отрезка стал промежуточной точкой более длинного отрезка; эта же точка считается началом результата вычитания, в который входит вся оставшаяся несовмещённой часть более длинного отрезка.

В разделе 2.3 говорилось о необходимости разрабатывать методы измерения для геометрических объектов без учёта количества точек в них. Содержание данного раздела решает эту задачу для прямолинейных отрезков.

5.4. ЧИСЛОВАЯ ОСЬ. ДЛИНА ОТРЕЗКА ПРЯМОЙ.

Вышеописанный процесс сложения отрезков прямых линий и аксиома A_{28} позволяют построить важный геометрический объект – ***числовую ось*** (рис. 2):

1) Берём отрезок прямой, который в результате описываемых действий станет числовой осью.

2) Отмечаем на нём точку, которую будем считать началом числового ряда, обозначаем её цифрой 0.

3) На одном из концов отрезка стрелкой обозначаем направление роста чисел и пишем букву, по которой строящаяся числовая ось будет называться.

4) Выбираем произвольный отрезок AB небольшой длины – он будет служить единицей измерения (мерой длины).

5) Циркулем фиксируем длину AB.

6) Шаг за шагом циркуля, начиная от 0, откладываем эту длину на строящейся оси в направлении стрелки и нумеруем получаемые концевые точки каждого шага 1, 2, 3, … Нумерация имеет следующий смысл: Если циркулем

проделано n шагов, каждый длиной AB = 1, то конец последнего шага циркуля B_n отделяет от начала движения из точки 0 отрезок длиной $0B_n = n*AB = n$. Это значит, что между целыми положительными числами и точками строящейся числовой оси устанавливается взаимно однозначное соответствие, а длина отрезков получает численное отображение.

7) Повторяем движение циркуля по строящейся оси шаг за шагом от точки 0 в противоположном направлении, нумеруя получаемые точки отрицательными числами -1, -2, -3, … В результате этих действий устанавливается взаимно однозначное соответствие точек числовой оси и отрицательных чисел.

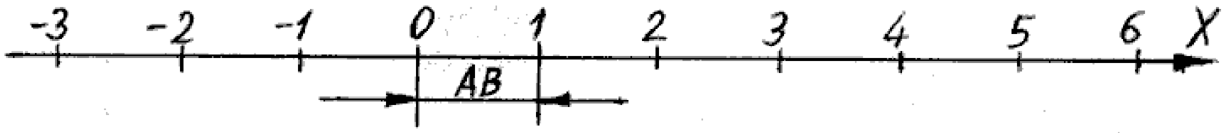


Рис. 2. Числовая ось.

Общий результат описанных построений можно сформулировать в следующем определении:

O_{35}. ***Числовая ось*** – это прямая, на которой выбраны положительное направление роста чисел и точка начала счёта, от этой точки выполнено многократное сложение меры длины в положительном и противоположном направлении, что устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками числовой оси и целыми числами; предполагается возможность продолжить реальный отрезок числовой оси до бесконечности в обе стороны, отложить между любыми “целыми” точками часть меры длины, устанавливая с требуемой точностью взаимно однозначное соответствие всех точек числовой оси с полным множеством действительных чисел.

Одним из практических применений числовой оси является линейная шкала для измерения длин отрезков. Великобритания, США и страны их влияния в настоящее время используют в качестве меры фут, дюйм. Страны европейской академической ориентации используют метр и его десятикратные производные – сантиметр, миллиметр, километр. Учитывая определённую ошибку воспроизведения геометрических объектов в зримых предметах, изготавливаются измерительные приборы разного класса точности: рулетка, линейка со шкалой, штангенциркуль, микрометр, микроскоп.

Числовая ось позволяет решать геометрические задачи методами алгебры. Например, пусть на такой оси заданы числовые отметки (координаты) точек А(3,5), В(-2), С(8,2). Можно, не прибегая к чертежу, сделать следующие выводы: точка А лежит между точками В и С; длина АВ = [3,5 - (-2)] = 5,5; длина АС = [8,2 - 3,5] = 4,7; длина ВС = [8,2 - (-2)] = 10,2; в то же время ВС = АС + АВ = 4,7 + 5,5 = 10,2.

Одна из типичных ошибок при работе с числовой осью – точку (например, с координатой А(3,5)) отождествляют с некоторым отрезком длиной 3,5. По вышеприведённому контексту можно проследить, что сопоставление координаты 3,5 для точки А с длиной отрезка 0А с началом в точке 0 является именно сопоставлением по правилу вычитания координат: 0А = | 3,5 - 0 | = 3,5. Отрезки такой же длины (дадим их концам условно-обобщённое обозначение К,М) можно получить многими вариантами координат: КМ = | (М) – (К) |. Поэтому точка на числовой оси остаётся точкой в геометрическом смысле, а координата для неё – это одно из возможных обозначений точки. В соответствии с A_9, обозначения не являются собственным свойством точек.

Необходимость приведённого разъяснения актуальна при ответе на вопрос: “Существует ли отрезок нулевой длины?” С одной стороны, если по координатам вычислить длины двух отрезков, а затем определить их разность, то возможен нулевой результат (вычитание отрезков равной длины), и его следует считать отрезком нулевой длины, чтобы он принадлежал классу отрезков. С другой стороны, длина отрезка определяется количеством шагов вдоль отрезка (см. раздел 5.3) или откладыванием меры длины; совпадение координат начала и конца “отрезка”, которое соответствует “точке” в классе отрезков, означает отсутствие движения, которое могло бы породить “длину”. Поэтому, если для формальных алгоритмов аналитической геометрии допустимо признавать существование отрезков нулевой длины, то можно согласиться считать точку вырожденным отрезком, а нулевую длину – признаком вырождения отрезка в точку. Такое понимание взаимодействия отрезков и точек ценно только для формальной логики, оно вторично по отношению к генетическому определению точки O_4 и не должно заменять его в неаналитических исследованиях.

Свойства числовой оси оказались полезными для решения многих задач математики, но вернёмся к геометрии.

Геометрические исследования привели, в частности, к выводу о существовании пар несоизмеримых отрезков (см. Вступление). Это значит, что если один из них принять за единицу измерения, то длина другого не может быть выражена долей единицы в виде обыкновенной дроби. В то же время, геометрическое сравнение отрезков (T_{32}) всегда выполнимо. То есть, “несоизмеримыми” отрезки могут быть только по отношению к отображению их длины рациональными числами. Из этого сделан вывод, что для практических целей длина произвольного отрезка может быть выражена приближённым десятичным числом с заданной точностью. “Ошибка измерения” признана объективно существующей случайной величиной и является предметом исследования в теории вероятностей и математической статистике. В теоретически точных геометрических построениях следует использовать только линейку без шкалы, циркуль и доказательство правильности построений.

6. Сфера. Поверхность. Тело.

Далее слова “расстояние” и “удалённость” будем считать равнозначными длине прямолинейного отрезка между его концевыми точками.

6. 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СФЕРЫ. Центральная симметрия.

Понятие длины прямолинейного отрезка позволяет сформулировать следующее определение геометрического объекта:

O_{36}. ***Сферой*** называется множество точек (O_4) пространства (O_1), равноудалённых от одной точки; сама эта точка называется ***центром сферы***, а расстояние точек сферы до центра называется ***радиусом сферы***.

Зрительным образом сферы можно считать оболочку мяча или мыльного пузыря. Космонавты утверждают, что Земля из космоса тоже кажется сферой. Известные нам неровности рельефа – горы, долины, реки и прочее – из космоса не видны из-за своей малости и не скрывают плавной искривлённости линий горизонта. Причём, облёт Земли на космических аппаратах по всем направлениям не изменяет видимой кривизны горизонта.

Два радиуса сферы, если они лежат на одной прямой по разные стороны от её центра, объединяются в понятие ***диаметр сферы***. В сфере можно провести бесчисленное множество диаметров, так как одна точка – центр – не ограничивает выбор направления (см. раздел 5.1) для прямой.

На примере диаметров сферы удобно объяснить понятие ***центральная симметрия***. Две точки пространства считаются центрально симметричными относительно некоторого центра, если: 1) соединяющий их отрезок прямой проходит через этот центр, 2) расстояния от точек до этого центра одинаковы. Для любого диаметра сферы оба эти условия выполняются. Поэтому форму сферы характеризуют словосочетанием "***центрально симметричная***" – с любой стороны она видна одинаково, как мяч или Земля из космоса.

O_{37}. Представим, что прямолинейный отрезок (O_{31}) перемещается следующим образом: один из концов отрезка не меняет своё место; другой конец отрезка попеременно совмещается с различными точками пространства, переходя от одной из них к другой непрерывно по соседним точкам; при указанном перемещении форма отрезка не отклоняется от прямолинейной и не меняется его длина. Описанные свойства перемещения выделяют его из множества всех перемещений (O_2), и это выделение закрепляется названием ***сферическое вращение прямой вокруг точки***.

Сравнением определений O_{36} и O_{37} однозначно устанавливается, что подвижный конец вращаемого отрезка, как точка пространства, принадлежит сфере с центром в неподвижном конце отрезка, а сам отрезок является её радиусом. Пройдёт ли отрезок по всем точкам сферы, это зависит от решаемой задачи. Но нет оснований отвергать потенциальную возможность охватить все точки сферы. Именно такое вращение имеют ввиду, когда говорят: “Опишем сферу радиусом … с центром в точке …”. Для упрощения речи возможны и другие варианты ссылок на сферическое вращение отрезка прямой.

6. 2. Евклид: Поверхность есть то, что имеет длину и ширину (E_5). Определение поверхности.

Если обозначить радиус некоторой сферы R, а расстояние произвольной точки пространства до центра сферы L, то по T_{32} возможны следующие соотношения:

1) $L = R$ – точка принадлежит сфере, все такие точки в совокупности образуют эту сферу.

2) $0 \leq L < R$ – точка находится между сферой и её центром или в самом центре. Величина L может принимать бесконечно большие значения только при бесконечно большом радиусе сферы. Во всех остальных случаях расстояние L ограничено сверху радиусом R. Поэтому множество точек с расстоянием каждой из них до центра сферы меньше радиуса будем называть ***внутренним пространством сферы***.

3) $L > R$ – точка не принадлежит сфере и её внутреннему пространству. Множество таких точек будем называть ***внешним пространством сферы*** или ***пространством вне сферы***.

Обратим внимание, что пространство (O_1), как множество точек, разделилось вышеуказанными соотношениями на три непересекающихся подмножества: каждая точка принадлежит только одному подмножеству, и все точки пространства охвачены этим разделом. Сам этот факт является свойством сферы и даёт право ввести на её примере понятие “***поверхность***”.

O_{38}. Подмножество точек пространства (O_1, O_4, A_5) называется ***поверх-***

ностью, если существует правило, по которому однозначно определяется принадлежность точек либо этой поверхности, либо одному из двух других непересекающихся подмножеств, причём правило охватывает все точки пространства.

В случае со сферой указанным правилом является сравнение радиуса сферы с расстоянием произвольных точек пространства до центра сферы.

Из определения (O_{36}) следует, что центр сферы определяет место сферы в пространстве, а её радиус определяет то, что мы называем словом “размер” (от слова “мера”; в применении к отрезкам прямых – длина). Ясно, что все сферы равного радиуса конгруэнтны – для совмещения таких сфер достаточно совместить их центры. Ясно также, что сфера меньшего радиуса может уместиться внутри сферы большего радиуса. Если при этом центры сфер совпадают, то их называют ***концентрическими***. Пока на этом и ограничимся сравнением сфер.

Каждая точка пространства имеет несколько соседних точек с разных сторон от себя (O_6 – A_9). Нет оснований считать, что рядом с каждой точкой сферы не найдутся соседние точки, удовлетворяющие её определению O_{36}. Поэтому сферу можно считать непрерывной поверхностью в том смысле, что любые две её точки либо являются соседними, либо соединены множеством попарно соседних точек этой сферы.

В справочнике [3, §90 – §104] рассматривается ряд поверхностей, соответствующих подобно сфере какому-либо аналитическому правилу. Специфические свойства этих поверхностей широко используются в исследованиях и в технических устройствах.

6.3. О П Р Е Д Е Л Е Н И Е   Т Е Л А .

Евклид: Телом называется то, что имеет длину, ширину и глубину (E_8). Границы тела суть поверхности (E_9).

Внутреннее пространство сферы имеет ограничение на линейные размеры, а внешнее – нет. Поверхности, обладающие подобным свойством, называются ***замкнутыми***. Их существование позволяет ввести понятие ***тело***, а точнее,

геометрическое тело. Отметим для общности, что замкнутую поверхность можно образовать из участков разных геометрических объектов – для определения O_{39}, к которому мы ведём рассуждение, механизм образования поверхности не имеет значения.

O_{39}. ***Телом*** называется геометрический объект, представляющий собой объединение замкнутой поверхности с её внутренним пространством. Например, сфере соответствует тело, называемое ***шар***.

Замкнутая поверхность в составе тела может называться границей тела (E_9). Применяя этот термин, естественно иметь ввиду,.что эта “граница” отделяет внешнее пространство от внутреннего пространства тела, а сама она принадлежит телу.

Замкнутые поверхности и тела имеют качественную характеристику, выражаемую словом ***форма***. Одинаковость формы позволяет выделять группы ***подобных геометрических объектов***, устанавливать их общие свойства и взаимозависимость размеров. Так, все сферы подобны друг другу – они “шарообразны”. В технике соединение прямолинейного или жёсткого стержня любой формы с неподвижной точкой, оставляющее другим точкам стержня возможность сферически вращаться (O_{37}), называется “***шарнирным соединением***” или просто “***шарнир***”.

У твёрдого шара центр недоступен для анализа, но его поверхность всё равно считается сферой. Почему? Потому что равны все мысленно представляемые пронизывающие шар отрезки, концы которых лежат на поверхности и наиболее удалены друг от друга – их отождествляют с диаметрами. Измерения в этом случае производят обхватом наружной поверхности шара, например, стального шарика от подшипника, прямолинейными губками штангенциркуля или ему подобными приборами. Если же размеры шара не позволяют обхватить его, например, в случае Земного шара, то физики применяют какой-либо индивидуальный способ измерения. Кстати сказать, у Земного шара есть отклонение от шарообразной формы – он слегка приплюснут с полюсов, но зрительно это незаметно даже космонавтам.

6. 4. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПОВЕРХНОСТИ И ЛИНИИ.

Евклид: Границы поверхности суть линии (E_6).

На примере сферы видно, что поверхность, выделенная в пространстве линейными неравенствами в разделе 6.2, имеет “толщину” в одну точку в том смысле, что в направлении измерения расстояний вдоль радиуса соседние со сферой точки не принадлежат поверхности (рис. 3). Линия, как геометрический объект, имеет соседние точки только в направлении движения по ней (см. раздел 4), то есть тоже имеет “толщину” в одну точку. Следовательно, в подмножестве “поверхность” можно выделить подмножество “линия”. Зрительно это можно представить надписью на оболочке мяча. При этом общие точки поверхности и линии не образуют рельефа подобно горам на планете Земля, а являются действительно общими. Про это геометр говорит : “Линия на поверхности” или “Линия принадлежит поверхности”.

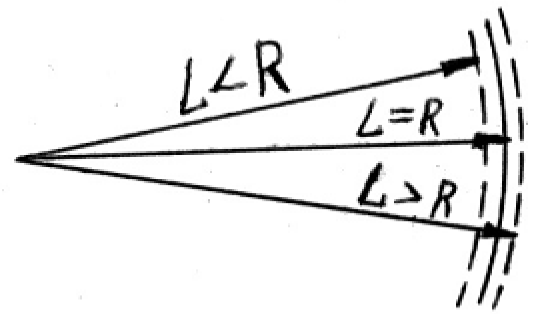


Рис. 3. Иллюстрация к анализу “толщины” поверхности.

Примем без доказательства следующие утверждения:

A_{40}. Выделение в пространстве линий и поверхностей может не быть взаимосвязанным, а их взаимное пересечение не обязательно. Существуют линии, для которых не все их точки принадлежат поверхности. Например, винтовая линия свободна от какой-либо поверхности, имеет свою ось и характерные размеры, но на практике её всегда связывают с каким-либо цилиндром (винт, болт, гайка).

A_{41}. Общие точки линии и поверхности обладают всеми свойствами линии и поверхности.

A_{42}. Если есть необходимость выделить участок (часть) поверхности, то его границами будут линии (E_6).

Рассмотрим взаимное положение в пространстве прямой линии и сферы, если у них имеются общие точки.

Две соседние точки сферы можно считать минимальной линией (см. раздел 4.3) – они касаются друг друга по определению соседства (O_6, A_7, O_{11}, A_{13},), но это не мешает им находиться на равном расстоянии от центра сферы (O_{36}). Для такой линии минимальной длины копию некуда перемещать по сфере для проверки прямолинейности по определению O_{29}.

Для трёх точек сферы 1, 2, 3 ситуация иная. Если соседними являются пары 1-2, 2-3 и 1-3, то это замкнутая линия (O_{23}), и она не может быть прямой по определению O_{29}. Если имеет место цепочка соседних точек 1-2-3, то точка 2 должна удовлетворять двум условиям: 1) быть на одинаковом с точками 1 и 3 расстоянии от центра сферы, 2) принадлежать отрезку прямой 1-3, то есть отрезки 1-2 и 2-3 должны совпадать с отрезком 1-3 по направлению (см. раздел 5.1). Эти условия не связаны между собой причинно-следственной связью, не являются необходимыми и достаточными одно для другого. Для более длинных линий на сфере указанные условия являются взаимоисключающими, но это утверждение доказывается после изучения свойств углов, треугольников и плоскости. Поэтому уже сейчас можно считать истинным утверждение:

T_{43}. На сфере ни одна линия с количеством точек более двух не может быть прямой. Практический вывод из этого утверждения следующий: Если у прямой линии и сферы общая точка одна, то прямая “касается” сферы в этой узловой точке; если общих точек две, то прямая “пересекает” сферу в этих точках. Более двух общих точек у сферы и прямой линии быть не может.

7. Кратчайшее расстояние между точками.

7.1. ПУТЬ И ЕГО ОТЛИЧИЕ ОТ РАССТОЯНИЯ.

Рассмотрим пересечение некоторого прямолинейного отрезка AB двумя сферами с центрами на концах этого отрезка и радиусами R_1, R_2, каждый из которых меньше AB (рис.4). Необходимые построения выполняются циркулем и линейкой без шкалы (см. раздел 5.4), след сферы на бумаге при этом выглядит дугой, но подразумевается участок сферы. Обычно для подобных построений используется окружность, но мы её ещё не изучали. Значит, мысленные построения производятся в пространстве (O_1), а рис.4 помогает нашему разуму ориентироваться в рассуждениях.

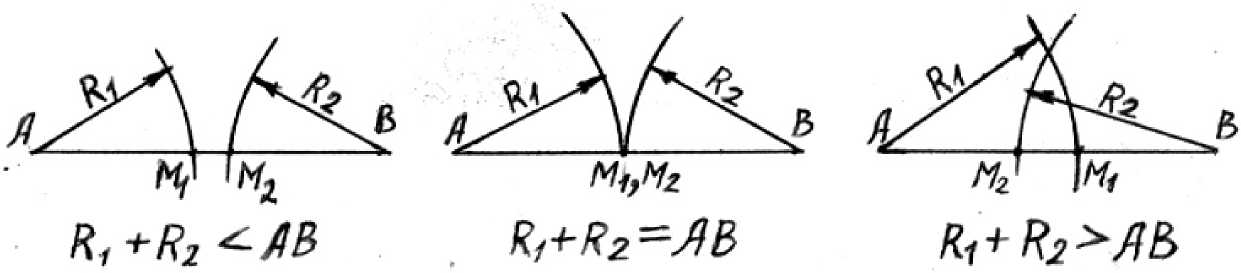


Рис. 4. Сравнение суммы радиусов с длиной отрезка.

На рис. 4 показаны три возможных случая пересечения отрезка сферами.

1) ($R_1 + R_2$) < AB. Сферы пересекают отрезок прямой в точках M_1 и M_2; сферы не имеют общих точек; сумма радиусов и длина AB не соответствуют правилу сложения прямолинейных отрезков (см. раздел 5.3).

2) ($R_1 + R_2$) = AB. Точки пересечения сфер с отрезком совмещаются в точку M, общую для отрезка и двух сфер. Для сфер это точка касания. Для отрезка AB она может считаться концом отрезка AM, совмещённым с началом отрезка MB по правилу сложения прямолинейных отрезков.

3) ($R_1 + R_2$) > AB. Точки пересечения сфер с отрезком M_1 и M_2 заходят друг за друга так, что отрезок M_1M_2 оказывается общим для двух радиусов. Сам этот факт свидетельствует о том, что сумма длин радиусов больше длины отрезка. Зрительным признаком этого можно считать пересечение сфер между собой.

Для произвольной точки С вне прямолинейного отрезка АВ можно провести две аналогичные сферы, и при этом сумма радиусов превысит длину отрезка АВ (рис. 5).

Если проходить (шагать, ехать, лететь) от точки А вначале по отрезку АС, потом по отрезку СВ, то мы окажемся в пункте назначения В. Но фактически это означает сложение длин проходимых участков. На основании сопоставления рис. 4 и рис. 5 можно записать (АС + СВ) > АВ, то есть справедлива следующая теорема:

Т$_{44}$. Кратчайшим расстоянием между двумя точками пространства является длина соединяющего их прямолинейного отрезка.

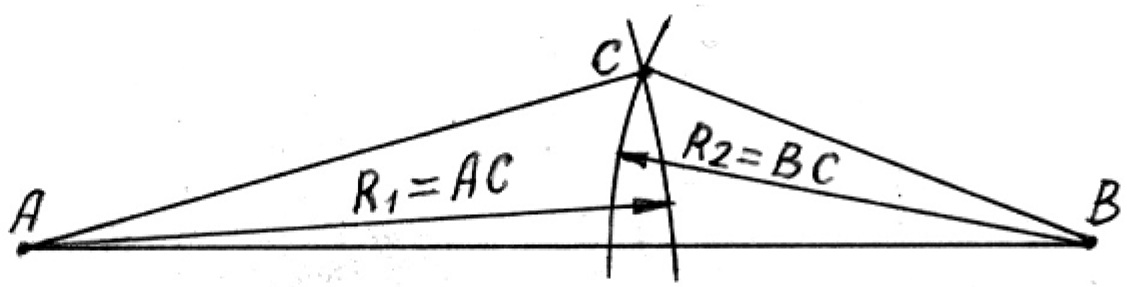


Рис. 5. Иллюстрация к теореме о кратчайшем расстоянии между точками.

Отметим, что линия, которая состоит из нескольких прямолинейных участков, называется ***ломаной линией***. Любую другую непрямую линию будем называть ***кривой***. Рассмотрим ломаную линию на рис. 6, где буквами А, В, С, D, Е обозначены концевые точки линии и точки стыковки её прямолинейных участков. Ввиду равнозначности словосочетаний “расстояние между точками А, Е” и “длина отрезка прямой АЕ” сам отрезок АЕ является зрительным образом этих словосочетаний.

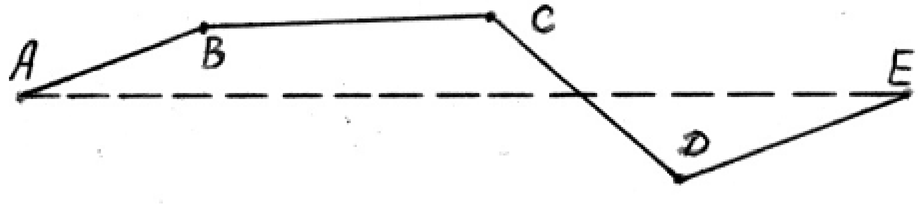


Рис. 6. К анализу понятий “путь” и “расстояние”.

Если циркулем перенести копию отрезка АЕ на линейку со шкалой, получим числовое значение длины отрезка или расстояние между точками А, Е по прямой. Но если проходить ломаную от точки А по соседним точкам линии до точки В, затем по соседним точкам отрезков ВС, СD, DЕ, то фактически это означает сложение длин пройденных участков. В таком случае для пройденного по смыслу более подходит слово “***путь***”. Определяя его числовое значение, надо сложить длины участков – сумма превысит длину АЕ. Для получения геометрического эквивалента пути надо перенести на вспомогательную прямую копию участка АВ, затем последовательно копии остальных участков ломаной, откладывая их по правилу сложения прямолинейных отрезков (рис. 7).

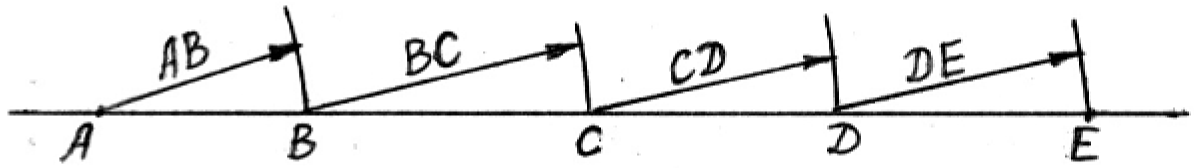


Рис. 7. Сложение длин участков ломаной линии.

Очевидно, сумма длин участков ломаной на рис.7 содержит больше точек, чем отрезок прямой АЕ на рис.6: промежуточные точки пути А … Е (В, С, D) и шаги от них к соседним точкам не принадлежат отрезку прямой АЕ. Следовательно, можно записать АЕ < (АВ + ВС + СD + DЕ), что согласуется с теоремой T_{44}. На основании рассмотренного построения принимаем правило:

T_{45}. ***Длина ломаной линии*** равна сумме её прямолинейных участков на вспомогательной прямой. ***Длину любой кривой линии*** можно измерить гибкой линейкой (рулеткой), условно считая кривую линию сложенной из малых прямолинейных участков.

7.1.1. К вопросу о неевклидовых геометриях.

Вначале практический вопрос: как определить кривизну или ломанность заданной линии, то есть её отклонение от прямолинейности?

Ответ. Если все участки линии доступны, то натяните нитку между началом и концом линии – это образ прямой; если есть участки заданной линии, не совпавшие с натянутой нитью, то заданная линия не прямая.

Если есть недоступные для нити участки заданной линии, то надо воспользоваться свойствами нашего зрения – луч зрения в однородной физической среде прямолинеен. Если бы это было не так, то не было бы смысла пользоваться телескопом, записывать координаты небесных тел. Сам факт, что астрономы наблюдают звёзды по координатам многовековой давности, указывает на прямолинейность лучей света в масштабе Вселенной. Это не отрицает гравитационное искривление лучей света по пути к Земле, как не отрицает рассеяние света в пространстве, изменение его спектра и других физических явлений. Однако без прямолинейности луча зрения даже эти явления невозможно было бы установить.

Теорема T_{43} утверждает, что на сфере нет ни одной прямой линии. Проверить истинность этого утверждения на поверхности Земли ниткой или лучом света мешает земная толща – не из-за гравитации, а из-за непроницаемости. Но над поверхностью Земли, в воздухе, убеждённость в прямолинейности луча зрения позволяет установить шарообразность планеты по косвенным признакам. Например, по удалению горизонта морской глади при подъёме наблюдателя над уровнем моря.

Неевклидовы геометрии (Римана и Лобачевского - Больяи) родились при вариации системы аксиом и формальном анализе выводов из них. После их рождения им подыскали адекватные модели – сферической поверхности и поверхности постоянной отрицательной кривизны (псевдосферы). Сам этот факт свидетельствует о том, что неевклидовы геометрии связаны не со всем пространством (O_1), а с его участками в виде определённых геометрических объектов. Причём, в определении этих объектов используется готовое понятие числовой оси (O_{35}) и свобода выбора её направления. Поэтому неевклидовы геометрии не могут отрицать геометрию Евклида, которую мы до сих пор рассмотрели и продолжаем рассматривать.

Показательно сложившееся отношение к прямой линии. В геометрии Евклида определяющими свойствами прямой являются её единственность для произвольных двух точек пространства, незамкнутость, бесконечность (O_{29}). Проверять первое свойство из этого списка надо наложением копии любого её участка на другие участки – несовмещение хотя бы одной точки принимается за свидетельство непрямолинейности проверяемой линии (см. раздел 5.2). Доказано (T_{44}), что следствием этого свойства является наименьшая длина прямолинейного отрезка в сравнении с любыми другими линиями с теми же концевыми точками пространства.

В сферической геометрии вводится понятие геодезической линии со следующими свойствами:

1) все её точки принадлежат сфере;

2) она соединяет любые две точки сферы кратчайшим образом;

3) она бесконечна, но не имеет концов, то есть замкнута.

О совместимости копии участка геодезической линии с другими её участками при всевозможных пространственных вариантах совмещения не говорится ни слова. Поэтому геодезическая линия и прямая по O_{29} – разные геометрические объекты, но при аксиоматическом построении геометрии это не очевидно.

На поверхности Земли геодезическими линиями принято считать меридианы и экватор. В общем случае любая точка сферы может быть полюсом для семейства геодезических линий, просто у Земли есть естественные полюсы из-за её вращения и магнетизма. Географические координаты предусматривают параллели, направленные поперёк меридианов, но они геодезическими линиями не являются, так как соединяют точки с одинаковой географической широтой не кратчайшим образом.

Соль этого рассказа в том, что из-за “кратчайшего” расстояния геодезические линии стали называть сферическими прямыми, а дилетанты слово сферические для краткости не используют. И вышла путаница. Некоторые “геометры” стали сомневаться, что евклидовы прямые бесконечно разомкнуты и пронизывают всё пространство во всех направлениях. Физики ищут свидетельства изогнутости прямых линий (лучей света) во Вселенной, не сообщая дилетантам о том, что всякую обнаруженную непрямолинейность свяжут с действием на луч света каких-либо физических явлений. Практики используют геометрию Евклида, не вдаваясь в дискуссии о том, насколько она справедлива в астрономических масштабах или в микромире. Тем самым вопрос о взаимодействии разных геометрий понятен только специалистам, что позволяет некоторым составителям публикаций возрождать псевдоконфликт между “геометриями”. После введения понятий “сферический угол”, “сферический треугольник”, “сумма углов сферического треугольника” дилетанты опять для краткости опускают слово сферический, вырывают цитаты из контекста, раздувая псевдоконфликт. Именно поэтому данная работа конструктивно определила точку, прямую и ставит целью так же конструктивно определить плоскость. Тогда сферу при бесконечном увеличении её радиуса не будут считать приближающейся к плоскости и этим поддерживать псевдоконфликт: “Реальные плоские предметы малы, поэтому мы не можем уловить кривизну их поверхности“. Н. И. Лобачевский не сумел уловить отклонение от геометрии Евклида измерениями в космосе! Принципиально важно следующее: сфера имеет внутреннее пространство, а плоскость нет, что будет показано после её определения в разделе 11. Поэтому дело не в точности измерений, а в том, чтобы геометрия правильно отражала свойства реального пространства и не мешала физикам анализировать другие аспекты наблюдаемых явлений.

7. 2. СЕРЕДИНА ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ОТРЕЗКА.

T_{46}. Любой прямолинейный отрезок имеет ***середину***.

Утверждение T_{46} не очевидно, если учесть, что для кривых линий понятие середины отсутствует или возникает лишь в отдельных случаях. Докажем истинность T_{46}:

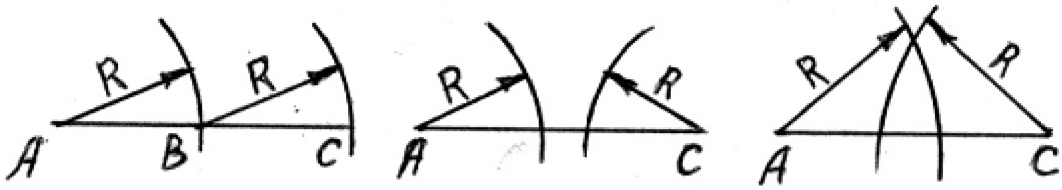


Рис. 8. Иллюстрация к поиску середины прямолинейного отрезка.

Если на вспомогательной прямой циркулем дважды отложить один и тот же отрезок по правилу сложения прямолинейных отрезков, то получим три точки. Обозначим концевые точки A, C, промежуточную – B (рис. 8).

По построению AB = BC. Это равенство означает, что точка B делит отрезок AC на две равные части. Другими словами, точка B является серединой отрезка AC. Таким образом, составляя отрезок из заданных половинок, мы однозначно определяем его середину.

Рассмотрим ситуацию, когда отрезок AC задан, а его половинки нет. В существовании середины можно не сомневаться, так как любая ошибка в определении её положения ввиду непрерывности линии (O_{24}) приведёт к неравенству AB > BC, либо AB < BC. Для нахождения середины раздвинем ножки циркуля на расстояние R < AC и проведём этим радиусом две сферы с центрами в концевых точках A, C. Получим один из трёх возможных случаев:

1) Сферы коснулись друг друга на пересечении с отрезком AC. Значит точка касания есть искомая середина: AC = 2R.

2) 2R < AC – сферы не имеют общих точек. Продолжая поиск середины, надо увеличить R и повторить попытку.

3) 2R > AC – сферы пересекаются, имеют более одной общей точки. Для продолжения поиска середины надо уменьшить R и повторить попытку.

В случаях 2 и 3 имеется точный критерий, в какую сторону следует менять развод ножек циркуля, чтобы окрестность искомой середины сокращалась.

Значит последовательными приближениями середину отрезка можно найти с любой наперёд заданной точностью. Это и доказывает теорему T_{46}.

8. Угол.

8. 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УГЛА .

Лучом в геометрии называется часть прямой линии с одной концевой точкой. Это название зрительно связано с узким лучом света фонаря или прожектора, который имеет начало и не видно, где кончается при отсутствии препятствия. Ввиду бесконечности геометрических лучей в их удалённой части и их прямолинейности все лучи можно считать конгруэнтными между собой. Это значит, что их копии совпадают при совмещении начальных точек и выборе одинакового направления (см. раздел 5.1).

Введём новый для данного текста, но хорошо известный по жизни, геометрический объект:

O_{47}. ***Угол*** – это множество точек пространства в виде двух лучей, исходящих из общей точки, показывающее степень несовпадения направления этих лучей.

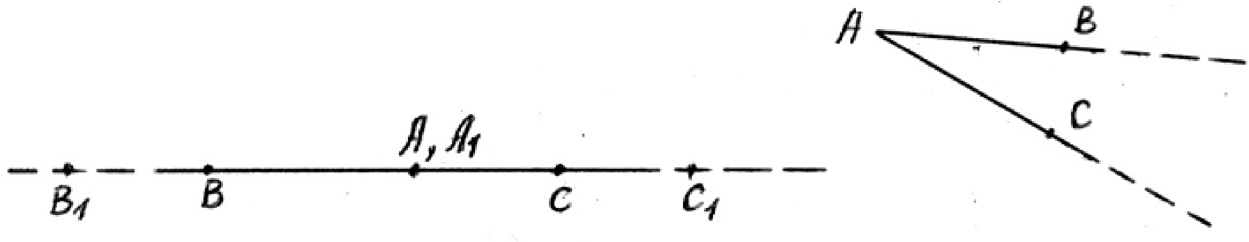


Рис. 9. Иллюстрация к определению угла.

Общая точка лучей называется ***вершиной угла*** и, как точка, обозначается буквой, например, А. Лучи называются ***сторонами угла***. Для их обозначения на каждом из них выбирается произвольная точка, например, В и С, тогда лучи получают название по аналогии с отрезками прямых АВ и АС. Название угла складывается из трёх букв, причём вершина всегда указывается в середине; перед ними ставится условный знак угла: ∠ ВАС, ∠ САВ. Порядок именования лучей пока не регламентируется (рис. 9).

Как геометрические объекты (O_{10}), углы могут сравниваться на конгруэнтность (см. раздел 3). Для сравнения вначале совмещаются копии вершин и по одному лучу от каждого угла. Проверить совмещение второй пары лучей сравниваемых углов можно вращением одного из них вокруг прямой, на которой лежат совмещённые лучи. Это вращение происходит в пространстве и образует как бы множество копий вращаемого угла с общей вершиной и одной стороной. Согласно аксиомам A_{19}, A_{20}, если сравниваемые углы конгруэнтны (равны), то одна из копий вращаемого угла совместится с неподвижным углом. Иначе никакое другое перемещение не совместит эти углы, и это означает их неравенство. Отметим, что сферическое вращение (O_{37}) подвижного луча вокруг неподвижной совмещённой вершины при сравнении углов на конгруэнтность неприменимо, так как не сохраняет степень несовпадения направления лучей сравниваемых углов.

Описание перемещений при сравнении углов показывает, что важным свойством угла является именно степень несовпадения направления его лучей, так как изменение этих направлений не меняет другие элементы угла: количество и порядок точек в его сторонах и вершине. Но что такое "**степень несовпадения направления лучей**"? Ответ на этот вопрос связан с умением сравнивать углы на "больше, меньше", измерять, складывать и вычитать углы. Для разработки этих процедур у нас пока не хватает геометрических знаний. Временно удовлетворимся тем, что нам доступно сравнение углов на конгруэнтность.

Отметим ещё одну особенность углов: изменение позиции наблюдателя (O_2) приводит к изменению зрительного образа угла. Поэтому следует отличать неодинаковость направления лучей угла в пространстве, которая является предметом интереса геометра, от видимого расхождения его лучей "под разными углами зрения" – этот аспект изучает проективная геометрия.

Материальный образ угла или копию заданного угла можно согнуть из жёсткой проволоки или вырезать из бумаги, считая прямолинейные края бумажного клина сторонами угла. Но для всего многообразия углов реальных копий не напасёшься (в отличие от линейки, которая может считаться копией участка любой прямой линии). Поэтому первая грубая классификация пользуется несколькими характерными моделями углов: ***острый угол*** – у него лучи зрительно ближе к одностороннему направлению, чем к противоположному; ***тупой угол*** – у него лучи ближе к противоположному направлению, чем к одностороннему.

8. 2. РАЗВЁРНУТЫЙ УГОЛ, ВЕРТИКАЛЬНЫЕ И СМЕЖНЫЕ УГЛЫ.

O_{48}. Угол, у которого два луча лежат на общей прямой с разных сторон от вершины, называют ***развёрнутым*** и обозначают греческой буквой π.

Свойства развёрнутых углов: их лучи направлены строго в противоположные стороны и все такие углы конгруэнтны между собой. Конгруэнтность следует из того, что если у развёрнутых углов $\angle$ BAC и $\angle$ $B_1A_1C_1$ (рис. 9) совместить вершины A, A_1 и лучи AB, A_1B_1, то лучи AC и A_1C_1 совместятся по свойству прямой линии (O_{29}).

Взаимное положение двух прямых в пространстве можно представить тремя случаями: 1) прямые не имеют общих точек (не пересекаются); 2) прямые совпадают (все их точки являются общими); 3) прямые пересекаются, и точка пересечения является их единственной общей точкой. Других вариантов нет, так как через любые две точки можно провести единственную прямую.

Пусть рис. 10 отражает последний из этих случаев – прямые BC и DE пересекаются в точке A.

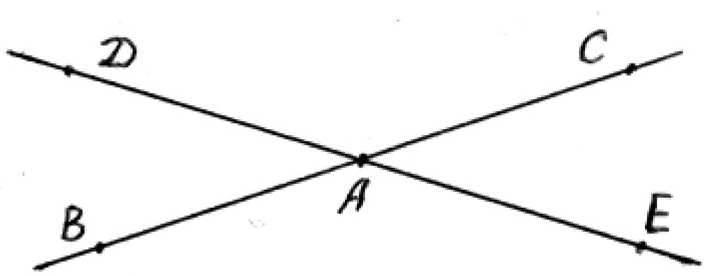


Рис. 10. К определению вертикальных и смежных углов.

Части пересекающихся прямых AB, AD, AC, AE можно считать лучами с общим началом в точке A. Следовательно, пересечению прямых всегда сопутствуют четыре угла (O_{47}): ∠ BAD, ∠ DAC, ∠ CAE, ∠ EAB. Выделим пары: ∠ BAD и ∠ CAE, ∠ DAC и ∠ BAE. У них стороны лежат на общих прямых, являются как бы продолжением друг друга при движении по лучам к вершине, а затем от неё. Такие пары углов называются ***вертикальными***.

Выделим другие пары углов: ∠ BAD и ∠ DAC, ∠ DAC и ∠ CAE, ∠ CAE и ∠ EAB, ∠ EAB и ∠ BAD. В каждой из этих пар одна сторона является общей, а две другие лежат на одной прямой и представляют собой развёрнутый угол (O_{48}). Пары углов с подобными признаками называются ***смежными***.

Ввиду того, что рис. 10 часто повторяется в геометрических построениях, зафиксируем следующее определение:

O_{49}. Пересечению двух прямых в пространстве всегда сопутствуют две пары ***вертикальных*** углов и четыре пары ***смежных*** углов.

Если прямые линии в пространстве не пересекаются и имеют разные направления, то они называются ***скрещивающимися***, а при одинаковом направлении – ***параллельгыми***. Пока такие прямые нас не интересуют, поэтому не будем уточнять для них связь с направлением в пространстве. Важно отметить, что определения угла, развёрнутого угла и пар вертикальных и смежных углов (O_{47} – O_{49}) не нуждаются в какой-либо связи с какой-либо поверхностью, в частности, с пока неопределённой плоскостью. Для них достаточно свойств прямой линии в пространстве. При аксиоматическом построении геометрии этот факт незаметен.

9. Треугольник.

9.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКА И ЕГО ЭЛЕМЕНТОВ.

Рассмотрим произвольный неразвёрнутый угол ∠ KLM (Рис. 11). Если соединить его точки K, M прямолинейным отрезком KM, то получим замкнутую ломаную линию KLM (или LKM, MLK в зависимости от начала и направления обхода точек). Но при этом образуются и два новых угла: □ LKM и □ LMK. То есть,

O$_{50}$. Замыкая стороны неразвёрнутого угла прямолинейным отрезком, мы всегда получаем замкнутую ломаную линию из трёх прямолинейных участков с сопутствующими тремя углами между ними. Такой геометрический объект называется ***треугольник***.

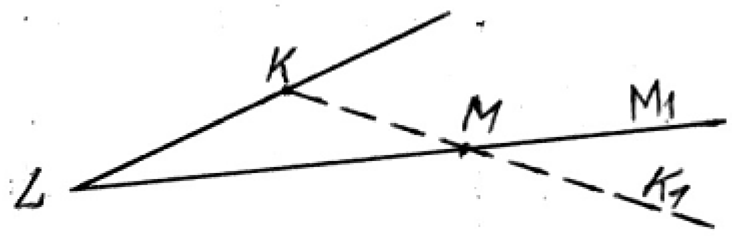


Рис. 11. К определению треугольника.

Точки перегиба ломаной линии, образующей треугольник, называют ***вершинами треугольника*** (не ликвидируя их названия как вершин углов), а участки такой ломаной – ***сторонами треугольника***. В названии треугольника используют специальный символ □ и обозначения его вершин в произвольном порядке: □ KLM.

Свойства сторон треугольника:

T$_{51}$. Вершины треугольника являются единственными общими точками пар его сторон, так как наличие любой другой общей точки у двух прямых привело бы к их совпадению.

T$_{52}$. Сумма любых двух сторон треугольника больше его третьей стороны.

На рис. 11: LK + KM > LM; KM + LM > LK; LM + LK > KM. Это следует из того, что любая сторона может считаться кратчайшим расстоянием между вершинами треугольника, а сумма двух других его сторон – путём от одной из этих вершин к другой через третью вершину, как точку вне соединяющего их отрезка прямой (T_{44}, T_{43}).

T$_{53}$. Разность любых двух сторон треугольника меньше его третьей стороны.

Это следует из предыдущих неравенств (T_{52}), если к ним применить аксиому E_{12}: Если от равных отнять поровну, то остатки будут равны.

Ввиду замкнутой формы треугольника его углы называются ***внутренними***, а смежные с ними при продолжении сторон треугольника – ***внешними***. На рис. 11 внутренними углами являются □ KLM, □ LKM, □ KML. Для простоты внутренние углы треугольника можно называть одной буквой при вершине: □ L, □ K, □ M. На рис. 11 внешним углом, в частности, является □ KMM_1 – здесь одной буквой в названии обойтись нельзя, так как продолжив сторону КМ за точку М, получим другой внешний угол □ LMK_1 при той же вершине. Отметим, что внешние углы при общей вершине треугольника являются вертикальными.

9. 2. СООТВЕТСТВИЕ ЭЛЕМЕНТОВ РАВНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ.

Рассмотрим □ ABC, у которого нет равных сторон и равных углов, что в нижеописанных перемещениях создаёт условия для однозначности совмещений. При попытке совмещения этого треугольника с его копией □ $A_1B_1C_1$ формально возможны 6 вариантов попарного сочетания вершин:

1) $A – A_1$, $B – B_1$, $C – C_1$; 2) $A – A_1$, $B – C_1$, $C – B_1$;

3) $A – B_1$, $B – C_1$, $C – A_1$; 4) $A – B_1$, $B – A_1$, $C – C_1$;

5) $A – C_1$, $B – B_1$, $C – A_1$; 6) $A – C_1$, $B – A_1$, $C – B_1$.

T_{54} Если треугольники равны и не имеют у себя равных элементов (сторон или углов), то их совмещение возможно только при одном из шести вариантов попарного сочетания их вершин. Тогда совпавшие вершины, углы и стороны называют ***соответственными*** или ***сходственными***. Для неравных треугольников понятие соответственных элементов не устанавливается.

Данное специальное название попарно равных элементов в равных треугольниках определяет перемещение (O_2, A_{19}) треугольников, при котором гарантировано их совмещение. Доказательство T_{54} можно провести экспериментально на бумажных моделях треугольников. Для наглядности на рис. 12

показана попытка совместить треугольники по варианту 4 при AB = A_1B_1, AC = A_1C_1, BC = B_1C_1.

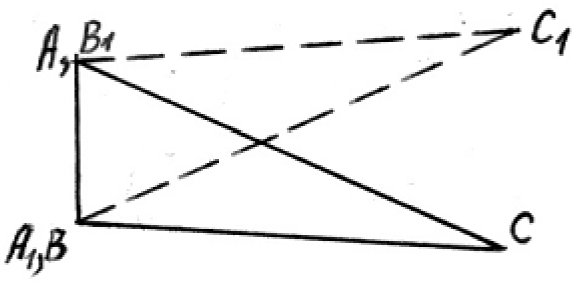


Рис. 12. Иллюстрация к вариантам совмещения равных треугольников.

Доказательство равенства треугольников по тем или иным признакам часто используется в геометрии для доказательства равенства углов. Основанием для этого служит следующее следствие теоремы T_{54}:

T_{55}. В равных треугольниках против соответственно равных сторон лежат равные углы и против соответственно равных углов лежат равные стороны.

Эта теорема может считаться перефразировкой определения соответствия равных элементов треугольников по T_{54} и конгруэнтности по O_{17}, поэтому в особом доказательстве не нуждается. В некотором роде T_{55} – это даже не теорема, а принцип, подобный A_{16} – с его помощью осуществляется логический переход от равенства одних объектов к равенству других.

Докажем следующую теорему:

T_{56}. Если три стороны одного треугольника соответственно равны трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство. Пусть в $\triangle$ ABC и $\triangle$ $A_1B_1C_1$ имеет место равенство одноимённых сторон: AB = A_1B_1, AC = A_1C_1, BC = B_1C_1. На основании равенства сторон и T_{54} считаем соответственными вершины A – A_1, B – B_1, C – C_1. (Возможно, например, A – B1, B – B1, C – C1 или другое соответствие концов равных отрезков, нам важно зафиксировать одно из них). Стороны $\triangle$ $A_1B_1C_1$ условно или на реальной модели освободим от взаимной связи в вершинах для возможности их перемещения в пространстве независимо друг от друга.

Совместим вершины A, A_1 и направим сторону AB по стороне A_1B_1. Из-за равенства этих сторон их концы B, B_1 совместятся (T_{32}). Аналогично, при совмещённых вершинах A, A_1 направим сторону AC по стороне A_1C_1 – получим совмещение вершин C, C_1. Через совмещённые точки B/B_1 и C/C_1 можно провести единственную прямую (O_{29}) и отрезок с этими концами обладает всеми свойствами прямой на этом её участке (O_{25}). В частности, совпадение концов свидетельствует о равенстве $BC = B_1C_1$.

Две равные стороны мы направили друг по другу, третья сторона совпала принудительно из-за свойств прямолинейных отрезков. Повторение приведённых рассуждений, начиная с совмещения других вершин, приводит к тому же выводу. Следовательно, независимо от выбора первой совмещённой вершины и последовательности совмещения сторон, равенство соответственных сторон и соблюдение соответствия при их совмещении гарантируют совмещение треугольников, а это доказывает истинность теоремы T_{56}. Отметим, что доказанная теорема называется ***третий признак равенства треугольников*** – уж так сложилось исторически.

9. 3. О РАВНЫХ УГЛАХ РАВНОБЕДРЕННОГО И РАВНОСТОРОННЕГО ТРЕУГОЛЬНИКОВ.

Если у треугольника две стороны равны между собой, он называется ***равнобедренным***; равные стороны называются ***боковыми***, а третья сторона в этом случае называется ***основанием*** равнобедренного треугольника. У равностороннего треугольника равны между собой все три стороны.

Справедлива теорема:

T_{57}. В равнобедренном треугольнике ***внутренние углы при основании*** равны. Равенство двух внутренних углов треугольника является признаком равенства противолежащих им сторон, то есть равнобедренности этого треугольника.

Доказательство. Рассмотрим равнобедренный треугольник □ ABC, у кото-рого AB = AC. Возьмём его копию □ $A_1B_1C_1$, где $A_1B_1 = A_1C_1$. По A_{18} она кон-груэнтна своему оригиналу, то есть $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$. На основании T_{54} выде-лим пары соответственных элементов по сходным буквенным обозначениям:

Вершины: A - A_1, B -B_1, C - C_1 ;

Стороны: $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$;

Углы: $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$.

Напомним, что обозначения точек не являются их свойством (A_9), но именно упорядоченность точек в объекте определяет свойства объекта (A_{11}). Для заданного равнобедренного треугольника действительно характерным свойством является равенство боковых сторон, а не их обозначения. Поэтому возможен другой вариант соответсвия:

Вершины: A - A_1, B - C_1, C - B_1;

Стороны: $AB = A_1C_1$, $AC = A_1B_1$, $BC = C_1B_1$;

Углы: $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle C_1$, $\angle C = \angle B_1$.

В обоих случаях копия и оригинал треугольника $\triangle ABC$ совмещаются. В том числе совмещаются угол $\angle B$ и копия угла $\angle C$, копия угла $\angle B$ и угол $\angle C$. По $A_8 – A_{10}$ это свидетельствует о конгруэнтности углов $\angle B$ и $\angle C$, что и требовалось доказать. По принципу A_{16}, доказанная конгруэнтность эквивалентна возможности физического совмещения, что подтверждается моделированием для любых равнобедренных треугольников. Тот факт, что равенство двух углов треугольника может считаться признаком равенства противолежащих им сторон, следует из сопоставления тех же двух вариантов соответсвия.

T_{58}. В равностороннем треугольнике внутренние углы равны между собой. Равенство всех внутренних углов треугольника является признаком равенства всех его сторон.

Доказательство. Напомним, что буквенные обозначения точек, отрезков, углов, треугольников не являются их собственными геометрическими свойствами. Поэтому в случае равенства трёх сторон треугольника количество формальных вариантов попарного сочетания вершин треугольника и его копии сокращается в сравнении с треугольником без равных элементов с 6 до 1 (T_{54}). Это значит, что любой вариант совмещения вершин треугольника с вершинами его копии приводит к совмещению этих объектов. Это и есть доказательство теоремы T_{58} – равенство всех углов равностороннего треугольника.

9. 4. “ПЕРВЫЙ” ПРИЗНАК РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ.

Справедлива следующая теорема (Исторически первый признак равенства треугольников):

T_{59}. Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство. Допустим, в □ ABC и □ $A_1B_1C_1$ имеет место равенство следующих элементов: AB = A_1B_1, AC = A_1C_1, □ A = □ A_1 – исходное условие теоремы T_{59}. Это условие можно считать основой соответствия равных элементов рассматриваемых предположительно равных треугольников. Поэтому совмещаем вершины A и A_1, а сторону AB направляем вдоль A_1B_1 – точки B и B_1 совпадут из-за равенства совмещённых отрезков. Вторые стороны углов □ A и □ A_1 при совмещении лучей AB и A_1B_1 могут в пространстве не совместиться между собой. Тогда вращаем один из них вокруг совпавших лучей AB/A_1B_1 (см. раздел 8.1), и вследствие равенства □ A = □ A_1 добиваемся совмещения другой пары сторон AC и A_1C_1. Проведём через совмещённые точки B/B_1 и C/C_1 отрезок прямой линии – он будет единственным по определению прямой O_{29}. Для □ ABC это будет сторона BC, а для □ $A_1B_1C_1$ – сторона B_1C_1, причём BC = B_1C_1, так как у них общие концевые точки. Тогда для каждого из углов □ ABC и □ ACB (□ $A_1B_1C_1$ и □ $A_1C_1B_1$) окажутся совмещёнными вершины и обе пары сторон. Следовательно, □ B = □ B_1 и □ C = □ C_1, то есть все 6 характерных элементов □ ABC равны соответствующим элементам □ $A_1B_1C_1$, что означает конгруэнтность сравниваемых треугольников. Это и требовалось доказать.

9. 5. Медиана, высота, биссектриса в равнобедренном треугольнике . Прямой угол.

У любого треугольника на основании T_{46} можно определить середины каждой стороны, а затем соединить их с противоположными вершинами треугольника прямолинейными отрезками (E_{15}). На рис. 13 для примера показан $\triangle$ ABC, на сторонах которого отмечены середины M_A, M_B, M_C и эти середины соединены с противолежащими вершинами отрезками AM_A, BM_B, CM_C.

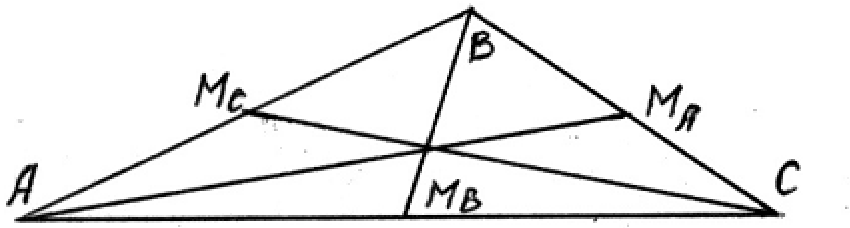


Рис. 13. Медианы треугольника.

O_{60}. Отрезок прямой, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны, называется ***медианой***.

Медианы в треугольниках любой формы лежат внутри треугольников (по построению), пересекаются в одной точке и обладают рядом других свойств, которые пока нам не нужны.

Рассмотрим равнобедренный треугольник $\triangle$ ABC (рис. 14), в котором имеет место равенство сторон AB = AC (по определению данного треугольника), равенство углов $\angle$ B = $\angle$ C (по теореме T_{57}), найдена середина основания – точка M_A (по теореме T_{46}) и проведена медиана AM_A (по определению O_{60}).

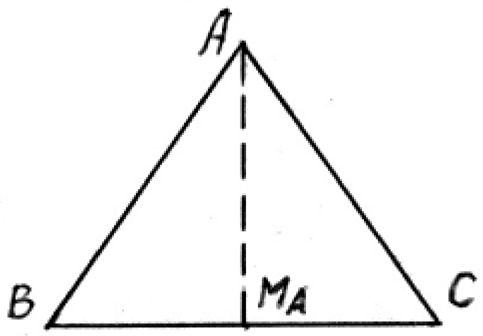


Рис. 14. К определению медианы, высоты и биссектрисы равнобедренного треугольника.

По теореме T_{59}, медиана делит □ ABC на два равных треугольника: в □ ABM_A и □ ACM_A имеют место равенства: AB = AC, $BM_A = CM_A$, □ B = □ C. К тому же выводу приводит и теорема T_{56}, так как для указанных треугольников медиана AM_A является общей стороной, то есть имеет место равенство трёх соответственных сторон.

Из равенства □ ABM_A = □ ACM_A следует, что медиана разделила угол □ A на две равные части, и на две равные части разделён развёрнутый угол □ BM_AC. Оба эти вывода интересны тем, что у нас нет алгоритма сложения, вычитания, деления произвольных углов, и тем не менее факт геометрического деления углов равнобедренного треугольника пополам в данном случае доказан. С одной стороны, этот факт будет использован при разработке указанного алгоритма. С другой стороны, существование половинок угла позволяет ввести определение:

O_{61}. Луч, делящий угол пополам, называется ***биссектрисой угла***.

На рис. 14 роль биссектрисы выполнила медиана AM_A.

Полученные на рис. 14 половинки □ BM_AA и □ CM_AA развёрнутого угла □ BM_AC ведут к более глубоким обобщениям. Все развёрнутые углы конгруэнтны между собой (O_{48}), из-за чего получили общее обозначение – □. Их половинки тоже надо считать конгруэнтными не только в описанном частном случае, но и в любых других геометрических построениях. Поэтому можно записать: $\angle BM_AA = \angle CM_AA = \pi/2 = d$, где d – исторически принятое обозначение половинок развёрнутого угла. Также исторически принято углы d называть ***прямыми углами***. Примером такого названия может служить постулат Евклида E_{18}: Все прямые углы равны между собой.

O_{62}. ***Прямым углом*** называется угол, равный половине развёрнутого угла. Стороны прямого угла называются взаимно перпендикулярными, а каждая сторона по отношению к другой называется ***перпендикуляром***. В треугольниках принято отрезок перпендикуляра от вершины до противоположной стороны или её продолжения называть ***высотой треугольника***.

Перпендикулярность отрезков прямых указывают специальным знаком $\perp$ между их обозначениями. Например, по рис. 14 запишем: $AM_A \perp BC$.

С учётом определений O_{60}, O_{61}, O_{62} доказанные по рис. 14 свойства равнобедренного треугольника можно сформулировать в виде теоремы:

T_{63}. ***Медиана*** равнобедренного треугольника, проведённая к его основанию, перпендикулярна этому основанию (то есть является ***высотой*** треугольника) и делит пополам угол, из вершины которого выходит (то есть является ***биссектрисой*** этого угла).

Справедлива также следующая теорема:

T_{64}. Совмещение медианы и высоты треугольника является достаточным признаком равнобедренности треугольника, то есть равенства двух его сторон.

Доказательство. Рассмотрим $\triangle ABM_A$ и $\triangle ACM_A$ на рис. 14. Сторона AM_A общая; как медиана, она влечёт $BM_A = CM_A$; как высота, она влечёт $\angle AM_AB = \angle AM_AC = d$. Налицо условия теоремы T_{59} (первый признак равенства тре-угольников). Значит $\triangle ABM_A = \triangle ACM_A$, откуда по T_{55} получаем $AB = AC$.

Если AM_A – медиана, но не высота, то для теоремы T_{59} нет равных углов между “равными” сторонами. Если AM_A – высота, но не медиана, то для теоремы T_{59} нет равной пары сторон при наличии двух половинок развёрнутого угла.

Только совпадение ролей медианы и высоты позволяет применить к частям треугольника теорему T_{59} и сделать вывод, что исходный треугольник является равнобедренным. Теорема доказана.

На основании T_{64} определяется широко используемый в геометрических построениях объект – ***серединный перпендикуляр к отрезку***:

T_{65}. Все точки перпендикуляра, проведённого к отрезку прямой линии через его середину, равноудалены от концов этого отрезка.

Для доказательства T_{65} достаточно каждую точку серединного перпендикуляра представить вершиной треугольника, основанием которого является заданный прямолинейный отрезок, и применить к треугольнику теорему T_{64}.

10. РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПРЯМОЙ.

У прямой линии и её отрезков неопределённо большое количество точек (A_{14}). Каждую из них можно (не реально, а мысленно) соединить прямолинейным отрезком с некоторой одной и той же точкой вне этой прямой и получить “куст расстояний” этой точки до точек прямой (T_{44}).

Вопрос: По какому признаку выделить из этих “расстояний” такое, чтобы оно однозначно характеризовало положение точки относительно прямой?

Для ответа на этот вопрос рассмотрим рис.10 (пересекающиеся прямые). Пусть заданными считаются прямая BC и точка D вне её. Отрезок DA можно считать одним из тех, что образуют вышеуказанный “куст”. По рис.10 видно, что отрезок DA на пересечении с прямой BC образует два смежных угла (см. раздел 8.1, O_{49}): острый угол $\angle$ DAB и тупой угол $\angle$ DAC. Легко представить движение точки A по прямой BC (O_{24}) с заменой “куста расстояний” подвижным и переменным по длине отрезком DA.

По рис.10: движение точки A в сторону точки C оставляет угол $\angle$ DAB острым, угол $\angle$ DAC – тупым, а движение в сторону точки B после некоторого предела сделает угол $\angle$ DAB тупым, а угол $\angle$ DAC – острым. Очевидно, пределом качественного изменения картины является положение DA, перпендикулярное ВС. В этом положении ∠ DAB = ∠ DAC = d (O_{62}), любое изменение положения точки А меняет картину, возвращает её ко множествам острых и тупых углов. Следовательно, положение DA ⊥ BC является однозначным ответом на поставленный вопрос. Закрепляем его определением:

O_{66}. ***Расстояние*** от точки вне прямой до этой прямой равно длине перпендикуляра, проведённого из этой точки к прямой до пересечения с нею.

Возможность строить указанный в O_{66} перпендикуляр обосновывается следующей теоремой:

T_{67}. Из любой точки пространства вне данной прямой можно провести единственную прямую, пересекающую данную прямую под прямым углом.

Доказательство проведём в три этапа.

1) “Из любой точки пространства вне данной прямой …”

Прямая линия не является поверхностью (O_{38}), значит нет особых условий в положении любой точки пространства (O_1, O_4) относительно данной прямой (O_{29}), кроме точек самой этой прямой. Расстояние точки до прямой логическим обстоятельством не является и на рассуждения в данном случае не влияет. Пространство однородно (A_3), а потому доказываемая теорема может рассматриваться “здесь”, а применяться “везде”, то есть для любого сочетания точка – прямая.

2) “… можно провести … прямую, пересекающую данную прямую под прямым углом.”

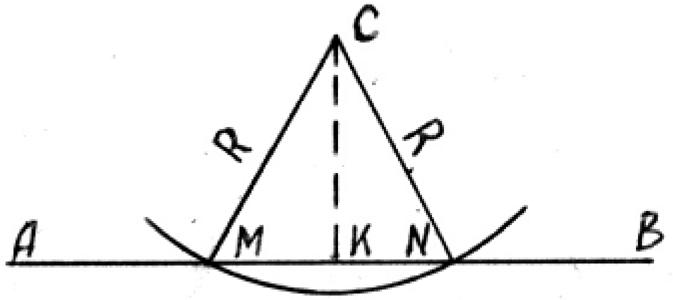


Рис. 15. Построение перпендикуляра из точки к прямой.

Представим данную прямую отрезком AB и обозначим буквой C данную точку вне прямой (рис. 15).

Выберем развод ножек циркуля R так, чтобы сфера этого радиуса с центром в точке C пересекала отрезок AB или его продолжение по прямой (E_{16}, O_{37}, T_{43}). Полученные точки пересечения M, N образуют на заданной прямой AB отрезок MN (O_{25}), который можно считать основанием равнобедренного треугольника $\triangle$ CMN (по построению его боковые стороны равны R). Найдём середину K отрезка MN (T_{46}): MK = KN. Соединив точки C и K прямолинейным отрезком (E_{15}), получим медиану CK треугольника $\triangle$ CMN, которая по T_{63} является искомым перпендикуляром к основанию MN и прямой AB, участком которой этот отрезок является: CK $\perp$ AB.

3) “… можно провести единственную прямую, …”

Для доказательства единственности перпендикуляра CK отложим от точек M и N равные отрезки за пределы участка MN (рис. 16): $MM_1 = NN_1$.

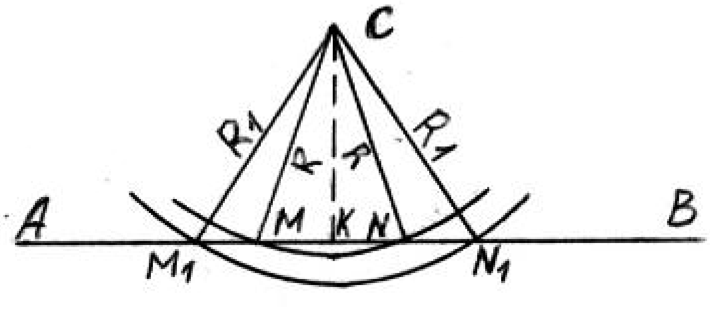


Рис. 16. К доказательству единственности перпендикуляра из точки к прямой.

Аксиома Евклида E_{11}: Если к равным прибавить поровну, то суммы будут равны. В данном случае $KM_1 = KM + MM_1$, $KN_1 = KN + NN_1$, $KM = KN$, $MM_1 = NN_1$, следовательно: $KM_1 = KN_1$. Это значит, что точка K является серединой отрезка M_1N_1. В то же время CK $\perp$ M_1N_1 (см. предыдущий этап данного доказательства). Отрезок CK является медианой и высотой треугольника $\triangle$ CM_1N_1, а это достаточный признак равнобедренности треугольника (T_{64}). Следовательно, $CM_1 = CN_1 = R_1$, и радиусом R1 из центра в точке C можно провести сферу, концентрическую с первоначальной (см. раздел 6.2).

Единственность вторичной сферы при произвольном, но равном в обе стороны изменении первичного отрезка MN гарантируется тем, что все сферы равного радиуса конгруэнтны между собой, для их совмещения достаточно совместить их центры, а центром в данном случае является заданная точка С. Таким образом, использование однажды построенной точки К в качестве основания искомого перпендикуляра приводит к построению семейства концентрических сфер, подтверждающих правильность построения этого перпендикуляра, и не приводит к логическим противоречиям. Значит, нет оснований сомневаться в единственности построенного перпендикуляра СК. Теорема доказана.

Часть 3: СТЕРЕОМЕТРИЯ – плоскость в пространстве.

11. П Л О С К О С Т Ь .

Евклид: Плоскость есть поверхность, которая одинаково расположена относительно всех своих прямых (E_7).

Гаусс ввёл метод измерения кривизны поверхности [2, 3, 7], и оказалось, что сфера – это поверхность постоянной положительной кривизны, а плоскость – поверхность нулевой кривизны. Эти геометрические объекты кривизной и связанными с нею свойствами как бы противопоставляются друг другу (см. раздел 7.1.1). Существует понятие **линейчатой поверхности** [3, §103]: Поверхность называется линейчатой, если её можно образовать движением прямой линии (**образующей**). Линейчатыми являются, например, цилиндр, конус, однополостной гиперболоид, гиперболический параболоид. Их отличие от плоскости в том, что если две точки разных образующих этих поверхностей соединены прямой линией, то прямая пронизывает поверхность в этих точках, а все другие точки прямой не принадлежат этим поверхностям, выходят из них в пространство; в то же время, линейчатые поверхности имеют на себе некоторые множества прямых линий.

Плоские предметы (тела) окружают нас: пол, стены, столешница, оконные стёкла. Всё это мы изготавливаем сами и во время изготовления используем прямолинейные меры и инструменты, включая луч зрения. Определение E_7 отмечает связь плоскости с прямыми линиями, но для отличия плоскости от линейчатых поверхностей в нём не хватает, например, указания произвольности направления прямых. Оно образно, но неконструктивно; его недостаточно для проверки плоских свойств произвольной поверхности.

В данной работе точка и прямая уже определены (O_4, O_{29}), их свойства изучены. Теперь определим плоскость. Для этого воспользуемся работой [5], где авторы привели определение-теорему (стр. 326):

“*Геометрическое место точек пространства, равноудалённых от двух данных точек, есть плоскость, перпендикулярная к отрезку, соединяющему данные точки, и проходящая через его середину*.”

Авторы [5] не собирались вносить изменение в систему аксиом Евклида, в том числе в изложении Д. Гильберта [7, 9]. Указанной теоремой они отметили интересное свойство плоскости и использовали его при решении учебных задач. В генетическом построении геометрии именно это свойство принимается нами определяющим.

11.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОСКОСТИ.

O_{68}. Множество точек пространства, равноудалённых от двух точек вне этого множества, называется ***плоскость***.

Для правильного сопоставления последующего текста с рисунками при участии плоскости надо иметь ввиду:

1) углы на рисунках из-за вариации точки зрения наблюдателя искажаются в сравнении с их формой в пространстве; из-за этого размеры прямолинейных отрезков на рисунках также искажаются вплоть до того, что равные в пространстве отрезки могут казаться неравными;

2) границы участков плоскости на рисунках либо подразумеваются, либо ограничиваются условным контуром; пространство и наблюдатель в связи с рисунками подразумеваются, но даже не предпринимаются попытки как-то отразить их – позиция наблюдателя соответствует взгляду читателя на рисунки;

3) все рисунки только иллюстрируют текст; если они кажутся непонятными или противоречащими тексту, читателю следует пользоваться собственным воображением и своей интерпретацией текста.

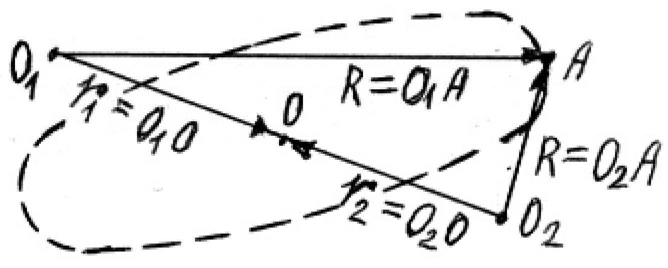


Рис. 17. Иллюстрация к определению плоскости.

Указанные в O_{68} две точки назовём ***определяющими для плоскости***. Обозначим их O_1, O_2 и соединим прямолинейным отрезком O_1O_2 (рис.17). Методом последовательных приближений (T_{46}) найдём на нём такую точку O, для которой $O_1O = O_2O$. Очевидно, точка O (середина определяющего отрезка) принадлежит плоскости, так как она равноудалена от заданных определяющих точек (по построению). Можно также считать, что из всех других точек плоскости (пока подразумеваемых) точка O находится на кратчайшем расстоянии от определяющих точек O_1, O_2 (T_{44}).

Для доказательства этого утверждения обозначим буквой A некоторую точку плоскости: $O_1A = O_2A$ (рис.17). Пунктирный овал на рисунке условно показывает множество подразумеваемых точек плоскости, удалённых от определяющих точек на одинаковое с точкой A расстояние. Так как отрезок O_1O_2 = ($O_1O + O_2O$) прямолинейный, а сумма ($O_1A + O_2A$) – это путь через точку вне O_1O_2, то по T_{44} можно записать неравенство ($O_1A + A\ O_2$) > ($O_1O + OO_2$). Отсюда следует: $O_1A = O_2A > O_1O = O_2O$. Приведённые соотношения свидетельствуют о том, что сферы радиусом $r = O_1O = O_2O$ с центрами в определяющих точках O_1, O_2 касаются друг друга в точке O, а сферы с центрами в тех же точках и радиусами $R > r$ пересекаются, множество точек их пересечения принадлежит плоскости (для $R = O_1A = O_2A$ это множество условно изображено на рис.17 пунктирным овалом). Таким образом, данному выше определению плоскости соответствует непустое множество точек пространства, что доказывает существование плоскости как геометрического объекта (O_{10}).

11.2. ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ПЛОСКОСТИ.

11.2.1. Евклид: Плоскость есть поверхность, . . (E_7).

Евклид определил плоскость, как поверхность с некоторыми частными свойствами. По определению O_{38} это должно означать разделение всего пространства на три непересекающихся множества точек, одним из которых является определяемая плоскость. Покажем, что плоскость по определению O_{68} действительно является поверхностью в этом смысле.

Допустим, точка А на рис.17 получает свободу перемещения, может покидать плоскость, и её расстояния до определяющих точек обозначаются R_1, R_2. Тогда при сравнении радиусов сфер $R_1=O_1A$, $R_2=O_2A$ с центрами в определяющих точках возможны три случая: $R_1 > R_2$; $R_1 = R_2$; $R_1 < R_2$.

Второй из этих случаев соответствует определению плоскости, как анализируемой поверхности. Величина радиусов сфер ничем не ограничена сверху, а значит плоскость не имеет границ – она потенциально бесконечна во всех направлениях от середины определяющего отрезка O_1O_2.

Случай $R_1 > R_2$ по рис.17 соответствует сдвигу точки А из плоскости в сторону точки O_2, а случай $R_1 < R_2$ – сдвигу точки А из плоскости в сторону точки O_1. Несомненно, подобные сдвиги точек в разные стороны от бесконечной плоскости означают разделение точек пространства на два непересекающихся множества. Следовательно, плоскость является поверхностью.

Примечание: В бытовом смысле бесконечность плоскости не учитывается за ненадобностью; про любой её участок поверхности говорят “плоскость”, если он в своих границах обладает остальными свойствами этого геометрического объекта.

11.2.2. Взаимодействие плоскости и линий.

Плоскость, как поверхность, обладает всеми свойствами поверхности. В частности, непрерывностью в расположении составляющих её точек, возможностью движения в плоскости по цепочке соседних точек (см. раздел 6.4).

По аналогии с “толщиной” сферы можно считать, что “толщине” плоскости соответствует одна точка, а любая соседняя с ней в ту или иную сторону из плоскости принадлежит одному из двух множеств точек пространства вне плоскости. Следовательно, плоскости свойственно такое же взаимодействие с линиями, как и сфере (A_{40}–A_{42}): линии могут принадлежать плоскости (в этом случае все их точки являются общими), могут пересекать плоскость (общими будут точки пересечения и точки совмещения участков линии), могут не пересекать плоскость, но в этом случае линии должны всеми своими точками располагаться по одну сторону от плоскости.

В отличие от сферы (см. раздел 6.2) плоскость не является замкнутой поверхностью – нет ограничений на удалённость её точек от определяющих точек (O_{68}). Поэтому подпространства с каждой стороны от плоскости открыты в бесконечность, и ни одно из них не может называться внутренним или внешним пространством плоскости.

Докажем следующую теорему:

T_{69}. Если две точки прямой линии принадлежат плоскости, то и все остальные точки этой прямой принадлежат этой плоскости.

Для доказательства перенесём рис.17 на рис.18 и соединим точки О, А прямолинейным отрезком ОА. Концы этого отрезка принадлежат исследуемой плоскости по построению. Но принадлежат ли ей остальные точки этого отрезка и его продолжения по прямой в обе стороны?

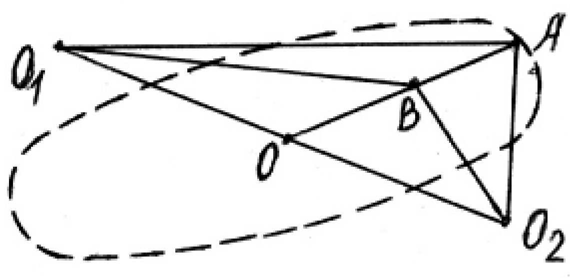


Рис. 18. К анализу свойств плоскости.

Для ответа на этот вопрос отметим на отрезке OA произвольную точку B между его концами и соединим её с определяющими точками O_1, O_2. В образованных при этом треугольниках □ O_1OB и □ O_2OB: $O_1O = O_2O$ по построению, OB – общая сторона, □ O_1OB = □ O_2OB = d (по свойству T_{63} медианы равнобедренного треугольника □ AO_1O_2). Значит, □ O_1OB = □ O_2OB (T_{59}) и $O_1B = O_2B$ (T_{55}). Последнее равенство свидетельствует о том, что точка B равноудалена от определяющих точек и поэтому принадлежит плоскости. Но это произвольная точка отрезка OA, значит весь отрезок лежит в исследуемой плоскости. Если продолжить отрезок OA в любую сторону по прямой, для любой точки продолжения можно повторить приведённые рассуждения и прийти к тому же выводу.

Таким образом, теорема T_{69} доказана для частного случая, который соответствует понятию серединного перпендикуляра T_{65}. Докажем её для отрезков прямых, не проходящих через середину определяющего отрезка.

Пусть в соответствии с O_{68} плоскость определена точками O_1, O_2 и точки A, B – произвольные точки этой плоскости (рис.19). Это означает равенство отрезков: $O_1A = O_2A$ и $O_1B = O_2B$.

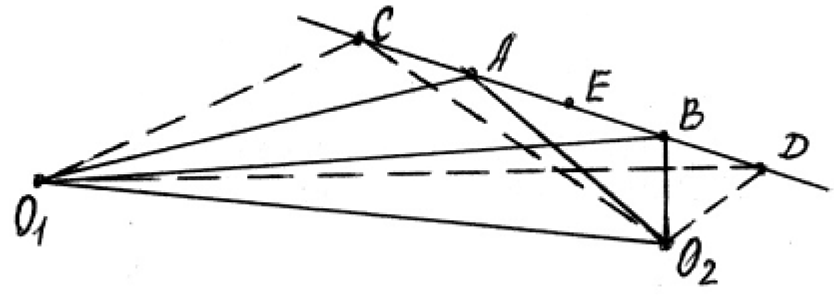


Рис. 19. К доказательству принадлежности прямой линии плоскости при наличии двух общих точек.

Проведём через точки A, B прямую и рассмотрим □ O_1AB и □ O_2AB. У них попарно равны три соответственные стороны: $O_1A = O_2A$, $O_1B = O_2B$, AB – общая сторона. По теореме T_{56} эти треугольники равны, а по теореме T_{55} имеет место равенство углов: □ O_1AB = □ O_2AB, □ O_1BA = □ O_2BA.

Возьмём некоторую точку C на продолжении отрезка AB за точку A, соединим её с определяющими точками O_1, O_2. В треугольниках □ O_1BC и □ O_2BC имеем: $O_1B = O_2B$, BC – общая сторона, □ O_1BC = □ O_1BA – их стороны и вершины совпадают, □ O_2BC = □ O_2BA по той же причине, □ O_1BC = □ O_2BC из-за □ O_1BA = □ O_2BA (см. выше). Таким образом, есть все условия для применения теоремы T_{59}: □ O_1BC = □ O_2BC, откуда следует $O_1C = O_2C$ – точка C прямой AB принадлежит исследуемой плоскости (O_{68}).

Возьмём произвольную точку D на продолжении отрезка AB за точку B, соединим её с точками O_1, O_2. В треугольниках □ O_1AD и □ O_2AD имеем: AD – общая сторона, $O_1A = O_2A$ по условию доказываемой теоремы, □ O_1AD = □ O_2AD = □ O_1AB = □ O_2AB (см. выше). По T_{59} эти треугольники равны, и значит, $O_1D = O_2D$ (аналогия с точкой C).

Если взять некоторую точку E на отрезке AB между его концами, то так же по теореме T_{59} получим: □ O_1AE = □ O_2AE, □ O_1BE = □ O_2BE, $O_1E = O_2E$.

Таким образом, где бы ни взять произвольную точку на прямой AB, принадлежность точек A и B плоскости влечёт принадлежность всех точек этой прямой той же плоскости. Теорема T_{69} доказана.

Обобщением анализа свойств плоскости можно считать следующее утверждение:

T_{70}. Плоскость O_{68} является незамкнутой потенциально бесконечной поверхностью, делит пространство на два непересекающихся подпространства по сторонам от себя, обладает всеми свойствами поверхности во взаимодействии с линиями и следующим свойством по отношению к прямым линиям: если две точки прямой принадлежат плоскости, то вся прямая лежит в этой плоскости.

11.2.3. Перпендикуляр к плоскости.

На рис.17,18 овальным пунктиром отмечено множество точек, через каждую из которых и точку O можно провести отрезки разных направлений, подобных ОА по построению, и каждый из них будет перпендикулярен определяющему отрезку O_1O_2. Указанное множество отрезков принадлежит плоскости, а определяющий отрезок пересекает определяемую им плоскость в точке О. Обратим внимание на то, что O_1O_2 перпендикулярен сразу всем отрезкам, подобным ОА по построению. Не каждая прямая линия, пересекающая плоскость в точке О, обладает этим свойством. Поэтому вводим следующее определение:

O_{71}. Прямая называется перпендикулярной к плоскости, если она, пересекаясь с этой плоскостью, образует прямой угол с каждой прямой, проведённой на плоскости через точку пересечения определяемого перпендикуляра и плоскости.

Несколько сопутствующих определений:

Прямая, пересекающая плоскость, но не перпедикулярная к ней, называется ***наклонной*** к этой плоскости; точки пересечения с плоскостью перпендикуляра и наклонной (то есть, любой прямой) называются их ***основаниями;*** если наклонная и перпендикуляр к плоскости проведены из общей точки пространства, то отрезок прямой, соединяющий их основания, называется ***проекцией наклонной*** на эту плоскость.

По аналогии с расстоянием от точки до прямой (см. раздел 10) принимаем следующее определение:

O_{72}. Расстояние от точки пространства вне плоскости до этой плоскости равно длине перпендикуляра, проведённого из этой точки к плоскости до пересечения с нею.

Вводимая вышеуказанными определениями терминология не меняет уже рассмотренные свойства геометрических объектов, но делает определённые обобщения и позволяет более кратко формулировать плоды исследования. Согласно новым определениям, на рис.17,18 отрезок O_1O_2 получает название перпендикуляра к плоскости, отрезки O_1A и O_2A получают название наклонных к плоскости, точка О – основание перпендикуляра, точка А – основание наклонных, отрезок ОА – проекция двух наклонных на плоскость.

Покажем, что пересекающимся в пространстве прямым соответствует плоскость. Перенесём на рис.20 пересекающиеся прямые с рис.10 и пересечём их в точке А третьей прямой КМ. Возьмём некоторую копию прямого угла d и, прикладывая её к лучам этих прямых, исходящих из точки А, сферически (O_{37}) сместим прямую КМ так, чтобы она делила пополам одновременно два развёрнутых угла ∠ ВАС и ∠ DAE.

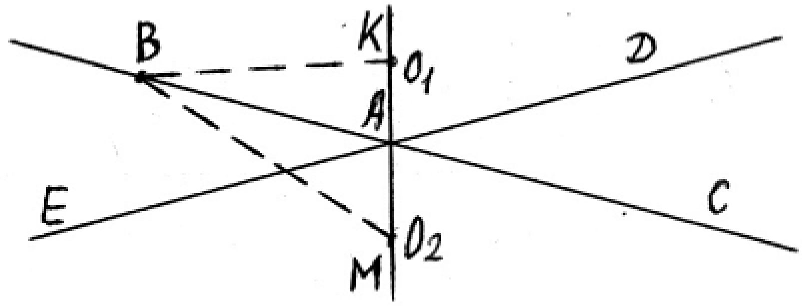


Рис. 20. К определению плоскости двух пересекающихся прямых.

Полученное при этом положение прямой КМ в пространстве можно обозначить символически: КМ ⊥ ВС и КМ ⊥ DE, то есть прямая КМ перпендикулярна одновременно двум пересекающимся прямым ВС и DE.

Отложим на прямой КМ по разные стороны от точки А произвольные равные отрезки $O_1A = O_2A$. Если соединить точку В с точками O_1,O_2 прямолинейными отрезками, то получим $O_1B = O_2B$, так как в △ O_1BO_2 отрезок ВА является высотой и медианой по построению, а это есть признак равнобедренного треугольника (T_{64}). Аналогично можно доказать, что $O_1D = O_2D$, $O_1C = O_2C$, $O_1E = O_2E$. Это значит, что точки A, B, C ,D,E лежат в одной плоскости, определённой точками O_1, O_2 вне её (O_{68}), а также что прямые ВС и DE принадлежат этой плоскости всеми своими точками (T_{69}).

Если на уже определённой плоскости выделить любую точку N, то ей по определению O_{68} будет сопутствовать равенство $O_1N = O_2N$, откуда следует AN □ KM.

На основании приведённого анализа сформулируем две теоремы:

T_{73}. Две пересекающиеся в пространстве прямые определяют единственную плоскость, их содержащую.

T_{74}. Если прямая пересекает плоскость в точке пересечения двух прямых этой плоскости и образует прямой угол с каждой из них, то она перпендикулярна плоскости.

11.3. Плоские фигуры. Способы определения плоскости.

Плоскими фигурами принято называть геометрические объекты (O_{10}), все точки которых лежат в какой-либо плоскости.

Прямая линия, как геометрический объект, является плоской фигурой, так как если две её точки принадлежат плоскости, то и вся прямая лежит в этой плоскости (T_{69}). Если плоскость задана, то некоторая прямая может не лежать в ней, а пересекать её. Но всегда можно указать другую плоскость, содержащую эту прямую и вместе с ней пересекающую заданную плоскость.

Угол (O_{47}) и треугольник (O_{50}) до сих пор рассматривались как пространственные линейчатые геометрические объекты. Но они образованы пересекающимися прямыми, которые по T_{73} определяют собой участок плоскости. Значит, угол и треугольник – плоские фигуры. Это свойство пересекающихся прямых явно или неявно используется при конструировании удалённых участков плоскости:

E_{15}: От каждой точки до другой точки можно провести одну прямую линию (Определение O_{29} делает это свойство прямых линий универсальным средством анализа и конструирования плоских свойств поверхностей).

E_7: Плоскость есть поверхность, которая одинаково расположена относительно всех своих прямых. (Любые пересекающиеся прямые можно использовать для изображения плоскости или контроля плоских свойств некоторой поверхности).

E_{16}: Ограниченную прямую можно непрерывно продолжать по прямой. (Это есть способ расширять границы участка плоскости, контролируя это расширение пересекающимися прямыми по аналогии с использованием сторон угла для построения треугольников в разделе 9.1).

Сказанное устанавливает универсальный метод проверки: Если в пространстве через множесво пар точек разных сторон линейчатого треугольника провести прямые линии (лазерным лучом или натянутыми нитками), то множество точек этих прямых проявит для зрения плоскость треугольника – невозможно построить неплоский треугольник с прямолинейными сторонами! Когда в традиционном курсе планиметрии со времён Евклида точка, прямая и плоскость считались исходными, неопределяемыми понятиями [7, 9, 11], угол и треугольник по определению были плоскими. Их логическая независимость от плоскости не признавалась.

Закрепим данное рассуждение следующей теоремой:

T_{75}. Плоскость можно считать заданной или построенной, если известны принадлежащие ей три точки не на одной прямой, либо принадлежащий ей угол, либо принадлежащий ей треугольник, либо принадлежащие ей прямая и точка вне этой прямой, либо любая принадлежащая ей плоская фигура.

Любой из указанных случаев можно построением определённых прямолинейных отрезков свести к пересекающимся прямым и тем самым создать условия для применения теоремы T_{73}.

11.4. Окружность, круг.

Окружность по определению является плоской фигурой, и пора рассмотреть, почему Евклид посвятил ей отдельный постулат E_{17}. Есть мнение, что древние греки считали окружность независимым самостоятельным объектом наряду с прямой и плоскостью.

Исследуем форму и свойства части плоскости на рис.17,18, ограниченной “траекторией” точки А, если последовательно по соседним точкам плоскости менять её положение, сохраняя неизменным радиус сфер $O_1A = O_2A$.

Каждой точке этой траектории соответствует свой отрезок ОА, и каждый из них всеми своими точками, как показано выше, лежит в исследуемой плоскости. Поэтому можно говорить о двух подмножествах точек плоскости:

O_{76}. ***Окружностью*** называется замкнутая линия, все точки которой принадлежат некоторой плоскости и находятся на одинаковом расстоянии от одной точки этой плоскости – центра окружности; расстояние точек окружности до её центра называется радиусом окружности.

O_{77}. Объединение точек плоскости внутри окружности с самой окружностью называется ***кругом***.

Введём сопутствующие определения: прямолинейный отрезок с концами на окружности называется ***хордой***; хорда, сложенная из двух радиусов, называется ***диаметр***; если прямая имеет всего одну общую точку с окружностью, то эта прямая называется ***касательной*** к окружности; любой отрезок окружности называется ***дугой*** этой ***окружности***; каждой хорде соответствуют две дуги окружности при совпадении их концов.

Отметим, что наличие центра и радиуса объединяет определения сферы (O_{36}) и окружности (O_{76}), но сфера является поверхностью, а окружность – линией на плоскости (плоской линией). Соответственно, шар (O_{39}) является телом, а круг (O_{77}) телом не является – он только часть плоскости, а плоскость – незамкнутая поверхность, своего внутреннего пространства не имеет.

Следствие теоремы T_{69} и определений O_{76}, O_{77}:

T_{78}. Все радиусы окружности принадлежат кругу, ограниченному этой окружностью.

Это следствие надо выделить, как свойство радиусов окружности, потому что на рис.17 окружность (траектория точки А) построена пересечением двух сфер равного радиуса, без явного указания содержащей эту окружность плоскости. Насколько такое построение является частным случаем, будет показано далее.

Для продолжения анализа удобно зафиксировать следствие теорем T_{63}, T_{64}, T_{65}, T_{78}, при доказательстве которого используются свойства равнобедренного треугольника со сторонами-радиусами окружности:

T_{79}. Радиус окружности, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам. Обратно: Если радиус окружности проходит через середину хорды, то хорда и радиус взаимно перпендикулярны.

Из определения окружности следует простой способ её построения на модели плоскости из бумаги, картона и других плоских материалов. Надо на модели наметить центр, циркулем зафиксировать нужный радиус, поставить одну ножку циркуля в центр – это условно неподвижная точка, другой ножкой циркуля коснуться плоской поверхности и, оставляя след, двигать эту ножку до замыкания образующейся кривой линии. Постоянство развода ножек циркуля и неподвижность острия одной из них гарантируют постоянство расстояний от центра до любой точки полученной кривой линии – определяющий признак окружности.

С окружностью связан особый вид перемещения (O_2), характерные признаки которого, подобно O_{37}, полезно закрепить определением:

O_{80}. ***Плоским вращением вокруг точки*** называется такое перемещение, при котором прямолинейный отрезок постоянной длины (модель радиуса) одним концом зафиксирован в некоторой точке плоскости подвижно относительно соседних точек, но без смещения в пространстве, другим концом двигается по плоскости, не покидая её; мысленный или реальный след (траектория) подвижного конца отрезка в этом случае является окружностью.

От сферического вращения (O_{37}) данное перемещение отличается тем, что в каждом положении вращающийся радиус не покидает плоскость. Поэтому возникает понятие ***плоскость вращения***. Её образ легко реализовать, если заставить вращаться груз на натянутой нити: материальной модели плоскости нет, но глаз замечает промежуточные положения груза – окружность, и нити – плоскость вращения. Образ плоскости вращения создаётся и лопастями работающего вентилятора. На рис.17,18 исследуемая плоскость может считаться плоскостью вращения отрезка ОА, но мы не будем менять терминологию уже написанного рассуждения.

O_{81}. Представим геометрический объект и некоторую прямую. По T_{67} от каждой точки объекта к данной прямой можно провести перпендикуляр. Если полученные перпендикуляры представить множеством радиусов плоского вращения (O_{80}) их начала в объекте вокруг их оснований на данной прямой, и если при таком вращении всех точек объекта, как единого целого, форма и размеры объекта не меняются, то описанное перемещение называется ***вращением объекта вокруг прямой***, которая в этом случае называется ***осью вращения***.

Особенности перемещения O_{81}:

1) основания перпендикуляров-радиусов лежат на оси вращения и в пространстве не перемещаются;

2) перпендикуляры-радиусы не покидают плоскости своего вращения, а точки объекта движутся в этих плоскостях по окружностям.

Вращение объектов вокруг прямой приводит к образованию так называемых ***поверхностей*** или ***тел вращения***: сферы при вращении окружности вокруг её диаметра, конуса при вращении прямой линии вокруг какой-либо пересекающей её другой прямой, цилиндра, параболоида, гиперболоида и др. Изображения названных поверхностей и тел вращения можно увидеть например, в [3], или смоделировать.

Докажем теорему, отложенную при определении плоскости по рис.17,18:

T_{82}. Пересечение двух сфер является окружностью.

Доказательство. Сразу отметим, что “пересечение” здесь понимается как множество общих точек пересекающихся сфер, исключая случай касания сфер, при котором общая точка всего одна. Рассмотрим пересечение сфер на рис. 21.

Здесь O_1, O_2 – центры сфер, R_1, R_2, – их радиусы, точки A, B – две некоторые точки пересечения сфер. Соединим центры сфер прямолинейным отрезком O_1O_2, точки O_1, O_2 – с точками A, B и рассмотрим образовавшиеся треугольники $\triangle$ O_1AO_2 и $\triangle$ O_1BO_2.

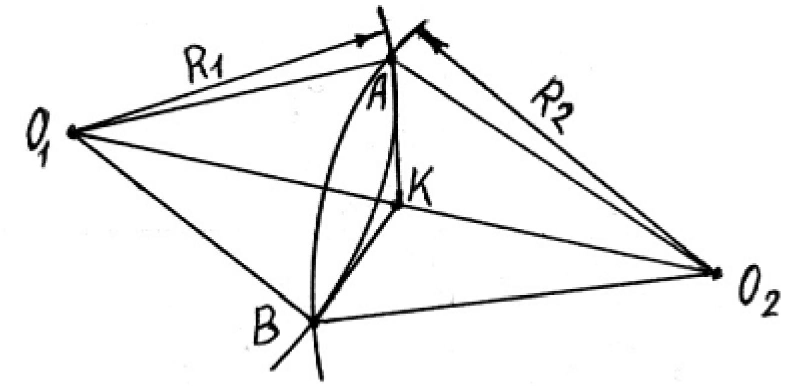


Рис. 21. Иллюстрация к анализу формы пересечения двух сфер.

Они равны по T_{56} ($O_1A = O_1B = R_1$, $O_2A = O_2B = R_2$, O_1O_2 – общая сторона). По T_{67} имеется возможность опустить из точек A и B на прямую O_1O_2 перпендикуляры (высоты указанных треугольников). По описанию вращения объекта вокруг прямой O_{81} эти высоты могут быть радиусами вращения любого из рассматриваемых треугольников вокруг прямой O_1O_2. Ввиду равенства треугольников и совпадения одной их стороны с осью вращения при реализации такого вращения копия одного из треугольников совместится с неподвижным другим треугольником, при этом совместятся все соответственные элементы: углы, стороны и подвижные вершины A, B. Совпадут и высоты-радиусы, так как из совмещённой точки A/B на прямую O_1O_2 можно опустить только один перпендикуляр (T_{67}). Это значит, что на прямой O_1O_2 основания высот совпадают – обозначим их общую точку K.

Но A и B – это две произвольные точки пересечения сфер, значит подобное построение можно повторить для любой другой точки, и всегда будем получать AK $\perp$ O_1O_2. Поэтому можно говорить о вращении перпендикуляра AK вокруг точки K с образованием круга (O_{80}) и окружности, как его границы на пересечении сфер. Теорема доказана.

Окружность, образованная пересечением двух сфер, – это пример окружности без заданных центра и радиуса: кривая замкнутая линия в пространстве, про которую благодаря T_{82} мы знаем, что она – окружность. Воспользуемся накопленными геометрическими знаниями (T_{79}) для определения существующих, но неизвестных центра и радиуса окружности.

1) Проведём в окружности две пересекающиеся хорды.

2) Найдём середины этих хорд (см. раздел 7.2).

3) По шаблону прямого угла d через середины хорд проведём перпендикуляры к этим хордам. Согласно теореме T_{79}, перпендикуляры пересекутся в искомом центре окружности.

4) Любой прямолинейный отрезок от найденного центра до окружности представит собой радиус окружности.

Таким образом, у нас достаточно знаний, чтобы выявить незаданные элементы окружности. Вывод теоремы T_{82} охватывает все случаи пересечения сфер независимо от радиусов сфер и межцентрового расстояния. Её можно дополнить фразой о том, что пересечению сфер сопутствует плоскость пересечения, так как окружность определяет собою эту плоскость (T_{75}).

11.5. Параллельные плоскости.

Теорема T_{82} позволяет построить семейство плоскостей, не пересекающихся между собой; такие плоскости называются ***параллельными***. Пусть на отрезке прямой O_1O_2 (рис. 22) точки O_1 и O_2 служат центрами двух семейств концентрических сфер с радиусами R_i, R_j. Сферы каждого семейства между собой не пересекаются (см. раздел 6.2). Пары разных семейств пересекаются, если сумма их радиусов превышает межцентровое расстояние: $R_i + R_j > O_1O_2$.

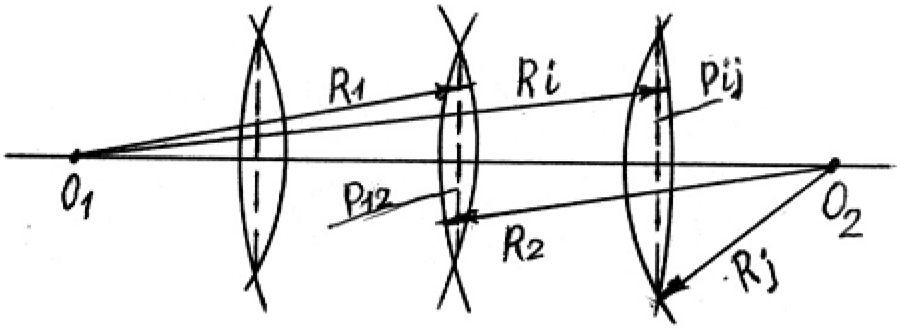


Рис. 22. Иллюстрация к построению непересекающихся плоскостей.

Согласно T_{82} пересечения сфер являются окружностями и определяют плоскости, в которых лежат эти окружности. На рис.22 следы таких плоскостей условно показаны пунктиром и обозначены P_{ij}. Например, паре радиусов $R_1 + R_2 > O_1O_2$ соответствует плоскость P_{12}. Общим свойством таких плоскостей по построению является их перпендикулярность к прямой O_1O_2: (см. доказательство T_{82}). Но каждая из них является поверхностью (T_{70}), делит пространство по обе стороны от себя на непересекающиеся подмножества точек, и сама с ними не пересекается. Этого свойства поверхностей достаточно, чтобы констатировать отсутствие общих точек у поверхностей P_{ij}. А так как построения, аналогичные рис.22, потенциально не ограничены размерами и могут быть выполнены для любой прямой в пространстве, можно считать справедливым следующее утверждение:

T_{83}. Плоскости, перпендикулярные к одной и той же прямой, между собой не пересекаются, то есть являются взаимно параллельными.

Следствие: Плоские фигуры параллельных плоскостей не имеют общих точек.

11.6. Пересечение плоскостей.

Для характеристики взаимного положения плоскостей в пространстве важное значение имеет следующая теорема:

T_{84}. Если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по общей прямой линии, проходящей через эту точку.

Доказательство. Пусть плоскость m задана окружностью, а плоскость n задана треугольником $\triangle$ ABC, причём вершина треугольника A совпадает с центром окружности в плоскости m (рис. 23).

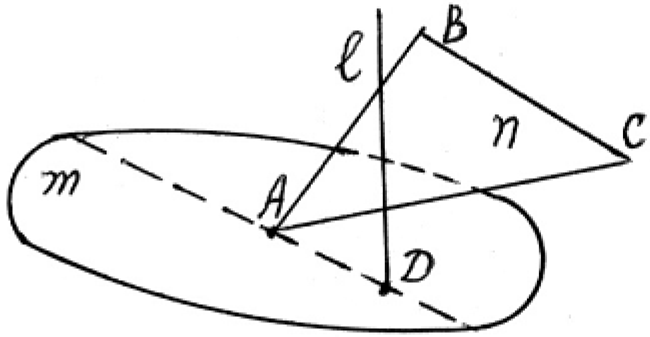


Рис. 23. К доказательству пересечения плоскостей по прямой линии.

Любой другой вариант задания непараллельных (T_{83}) плоскостей (T_{75}) можно свести к этому варианту, что обеспечивает необходимую общность рассуждений. Наличие по условию доказываемой теоремы одной общей точки у плоскостей m, n свидетельствует о непараллельности этих плоскостей.

Возьмём на сторонах AB и AC по одной произвольной промежуточной точке, проведём через них отрезок прямой линии q до пересечения с плоскостью m, например, в точке D. Эта прямая проходит через две точки плоскости n, значит принадлежит ей (T_{69}). Если прямая q недостаточно крута и выходит за пределы окружности, то либо увеличим радиус окружности, либо возьмём другую прямую q. Из-за произвольности прямой q всегда можно получить точку D. А эта точка принадлежит плоскостям m и n по построению, то есть она их общая точка. Через точки A и D можно провести прямую линию и притом только одну (E_{15}) – эта прямая принадлежит обеим заданным плоскостям, так как проходит через их общие точки (T_{69}). Другими словами, заданные плоскости при указании одной общей для них точки сами определяют прямую, по которой они пересекаются. Теорема доказана.

Из теорем T_{75}, T_{83}, T_{84} следует, что две плоскости в пространстве могут:

1) совпадать (все точки общие; признак: не менее трёх общих точек не на

одной прямой);

2) не пересекаться (нет общих точек; признак: пересекаются одним и тем же перпендикуляром);

3) пересекаться по прямой линии (общие точки лежат на одной прямой; признак: наличие одной общей точки).

Других вариантов взаимного расположения плоскостей в пространстве нет. Обобщим случаи пересечения плоскостей следующей теоремой:

T_{85}. Через каждую прямую в пространстве можно провести бесчисленное множество плоскостей.

Доказательство. Пусть некоторая прямая f определена в пространстве пересечением плоскостей g и h (Рис. 24).

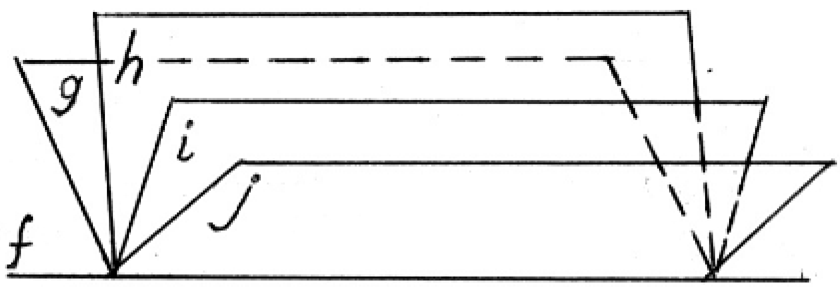


Рис. 24. Пересечение плоскостей по общей прямой.

Возьмём какую-либо точку I, не принадлежащую этим плоскостям. Через точку I и прямую f по T_{75} можно провести плоскость, назовём её i. Точка I не принадлежит плоскостям g,h, а прямая f им принадлежит. Значит, варианты 1 и 2 взаимного расположения плоскостей (см. выше) невозможны, возможен только вариант 3, то есть плоскости g,h,i пересекаются по общей прямой f. Можно аналогично взять в пространстве точку J вне плоскостей g,h,i, построить плоскость j, содержащую точку J и прямую f, и эта плоскость тоже будет пересекаться с предыдущими плоскостями g,h,i по прямой f. Очевидно, точек вне построенных плоскостей бесконечно много, и через каждую из них и прямую f можно провести очередную плоскость, не совпадающую с предыдущими, что и требовалось доказать.

Примечание: Множество плоскостей, пересекающихся по общей прямой, иногда удобно рассматривать как промежуточные положения одной плоскости, вращающейся вокруг прямой (O_{81}).

11.7. Параллельные прямые.

O_{86}. Прямые называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются, в частном случае совпадают.

Параллельные прямые по определению лежат в одной плоскости. Следовательно, если параллельные прямые заданы, можно считать заданной и плоскость, в которой они лежат. Это их свойство является дополнением к способам задания или построения плоскостей, перечисленным в T_{75}.

Теоремы T_{73}, T_{75}, T_{78} рассматривают прямые на плоскости, и все эти прямые пересекаются между собой. Существуют ли прямые на плоскости, которые между собой не пересекаются? Определение O_{86} называет свойства, по которым можно признать прямые параллельными, но об их существовании ничего не говорит. Для ответа на заданный вопрос рассмотрим параллельные (T_{83}) плоскости m, n, пересекаемые перпендикуляром h в точках M,N (рис. 25).

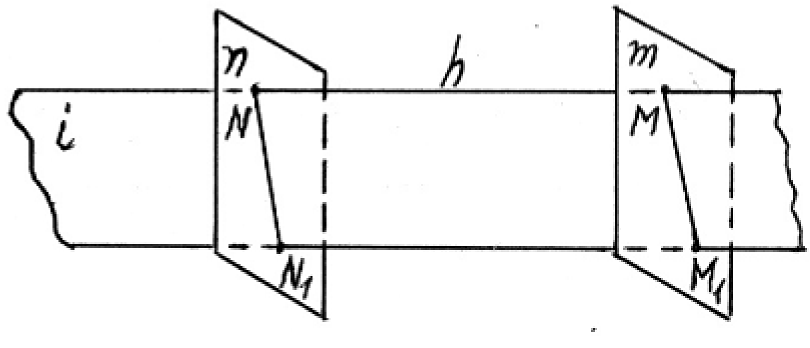


Рис. 25. Иллюстрация к доказательству существования параллельных прямых.

Проведём через прямую h какую-либо плоскость i из множества возможных (T_{85}). У пары плоскостей m,i точка M общая, значит существует прямая MM_1, по которой они пересекаются (T_{84}). Аналогично, у пары плоскостей n,i точка N общая, значит существует прямая NN_1, по которой пересекаются эти плоскости.

Прямые MM_1 и NN_1 лежат в общей плоскости i и не пересекаются, так как в то же время лежат в параллельных плоскостях m,n. Это и есть положительный ответ на заданный вопрос: параллельные прямые существуют! Напомним, что в пространстве прямые без общих точек могут быть скрещивающимися, но не параллельными. В этом случае они не лежат в одной плоскости.

Здесь уместно вернуться к вопросу о V постулате Евклида (в нашей нумерации E_{19}). Исходный текст постулата использует понятие “углы, в сумме меньше двух прямых”. Мы пока не определили правила сложения углов по аналогии с этим действием для прямолинейных отрезков (раздел 5.3). Поэтому воспользуемся эквивалентной аксиомой параллельности [7, стр.87]:

T_{87}. *Пусть **a** – произвольная прямая и A – точка, лежащая вне этой прямой **a**, тогда в плоскости, определённой точкой A и прямой **a**, можно провести не более одной прямой, проходящей через A и не пересекающей **a**.*

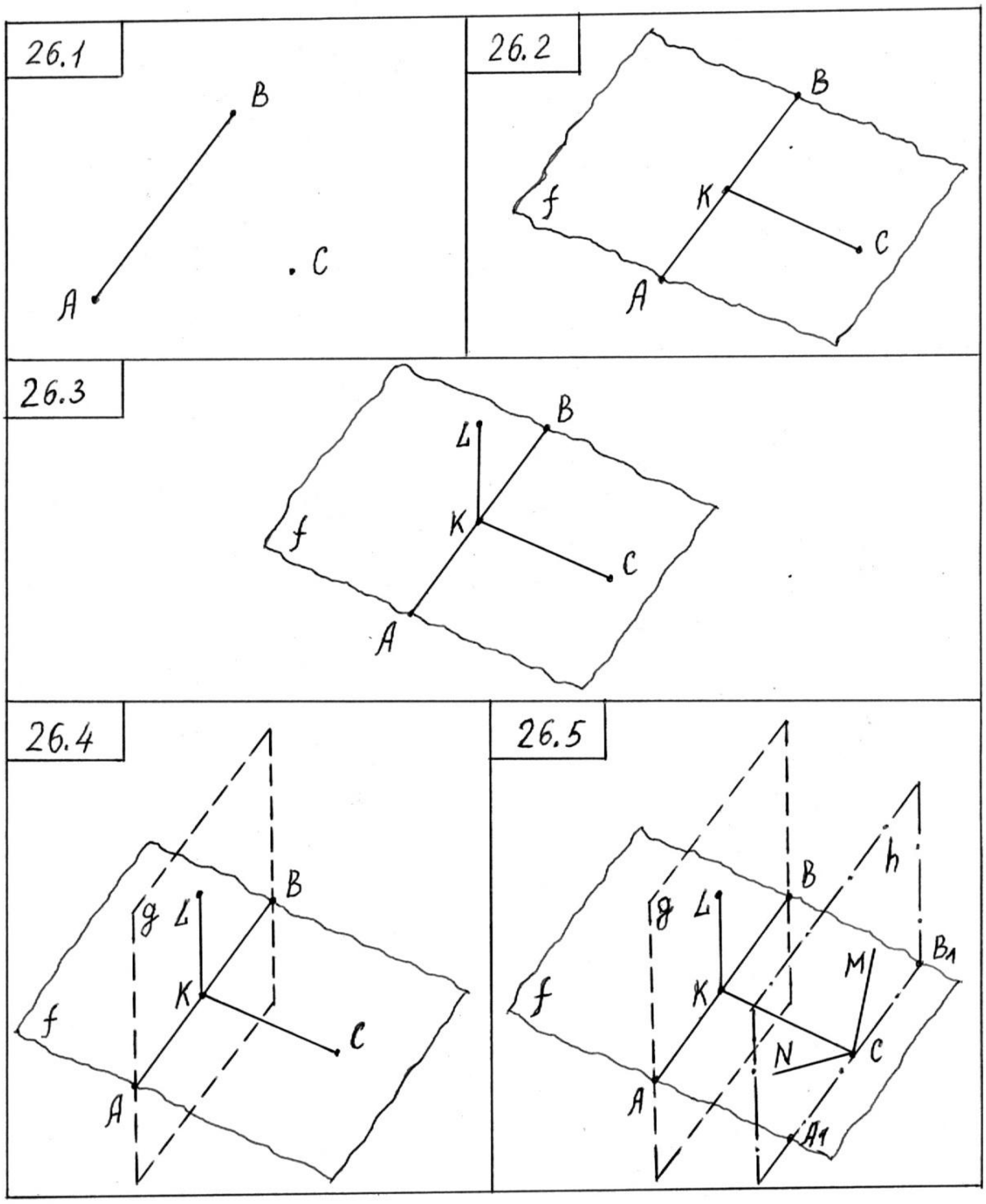
Докажем эту аксиому как теорему, то есть как следствие уже рассмотренных утверждений. Для доказательства выполним построения, показанные на рис.26.

1) Считаем заданными в пространстве (O_1) прямую AB (O_{29}) и точку C (O_4) вне её (рис. 26.1).

2) Проведём из точки C перпендикуляр к прямой AB – это можно сделать при любом взаимном положении заданных объектов (T_{67}), и такой перпендикуляр будет единственным. Обозначим его основание K. Пересекающиеся прямые AB и CK лежат в заданной плоскости f (T_{63}, T_{73}), условно оконтуренной волнистой линией (рис. 26.2).

3) Используя шаблон прямого угла d, восстановим в точке K перпендикуляр KL к плоскости f (рис. 26.3); при этом положение KL в пространстве определяется совместно двумя условиями: KL $\perp$ AB и KL $\perp$ KC (T_{74}). Применение шаблона d в данном случае не принципиально, оно только упрощает рассуждение; строгое построение можно проводить циркулем (O_{30}) и линейкой (O_{31}) с опорой на свойства равнобедренного треугольника (T_{63}, T_{64}, T_{65}).

Рис. 26. К доказательству единственности прямой, проходящей через данную точку параллельно данной прямой.



4) Пересекающиеся прямые AB и KL определяют собой единственную плоскость g (T_{75}) – отметим её пунктирным контуром (рис. 26.4).

5) В заданной точке C по шаблону d строим перпендикуляры $MC \perp KC$ и $NC \perp KC$ (рис. 26.5). Взаимное направление лучей MC и NC произвольно, лишь бы они не лежали на одной прямой. Это условие позволяет считать, что тем самым через точку C мы провели плоскость (T_{75}) – обозначим её h и оконтурим штрих-пунктирной линией (рис. 26.5).

6) Плоскости f и h имеют общую точку C. По T_{84} это значит, что они пересекаются по некоторой прямой A_1B_1, проходящей через точку C. Из T_{74} следует: $A_1B_1 \perp KC$.

7) Пункты 4, 5, 6 показывают, что KC перпендикулярна одновременно плоскости g и плоскости h. В разделе 11.6 показано, что это является признаком параллельности плоскостей g и h, то есть признаком отсутствия у них общих точек. Эта ситуация соответствует рис. 25 и определению O_{86}: прямые AB и A_1B_1 параллельны – лежат в общей плоскости f и не пересекаются, так как лежат в параллельных плоскостях g и h.

Мы построили для условий теоремы T_{87} прямую, параллельную данной. Её единственность следует из того, что на каждом шаге построения гарантирована единственность результата. Тем самым доказано, что постулат Евклида при генетическом построении геометрии является теоремой.

Для практических применений накопленных знаний о параллельных прямых требуется конструктивный признак их параллельности. Обратим внимание, что по определению O_{71} перпендикуляр к плоскости (по рис. 25 речь идёт о прямой h) образует прямой угол с каждой прямой на плоскости, проходящей через его основание. На рис. 25: $h \perp MM_1$ в плоскости m и $h \perp NN_1$ в плоскости n. Но, как показано выше, MM1 и NN1 – параллельные прямые в плоскости i. Поэтому один из признаков параллельности можно сформулировать так:

T$_{88}$. Две прямые, принадлежащие одной плоскости и перпендикулярные к одной и той же прямой в этой плоскости, между собой не пересекаются, то есть являются параллельными.

Остальные свойства параллельных прямых должны рассматриваться с учётом свойств углов в общей плоскости и алгоритма их сложения, а потому временно покинем Стереометрию.

В заключение разговора о плоскости интересно отметить зрительное восприятие плоскости человеком. Чувство вертикали нам дано природой. Его причина – притяжение Земли. Глядя на удалённый столб, мы видим, стоит ли он вертикально, с нами в одной плоскости. Нам это удаётся потому, что два наших глаза служат определяющими точками для вертикальной плоскости, удаляющейся от нас на недоступное нашему зрению расстояние. Глаз – очень чувствительный прибор. Это давно заметили и используют физики.

Часть 4: **ПЛАНИМЕТРИЯ – измерения на плоскости.**

Многое из того, что написано в предыдущих частях данной работы, традиционно рассматривается в Планиметрии, то есть на плоскости, а затем переносится в пространство. Принятая нами последовательность изложения соответствует авторской цели “построить” прямую и плоскость из точек. Все доказанные в Стереометрии свойства прямой линии, угла, треугольника, окружности без ограничений справедливы в Планиметрии, а само разделение на части необходимо потому, что дальнейший анализ традиционного материала невозможен без учёта свойств плоскости. В первую очередь это относится к методике сравнения и сложения углов.

12. Второе понимание углов.

Сравнение, сложение, вычитание плоских углов.

Определение O_{47} считает угол линейчатой конструкцией из двух лучей. В таком понимании угол участвовал в нашем исследовании только в сравнении на конгруэнтность (см. разделы 8, 9). Частные случаи развёрнутого угла □ и его половины (прямого угла d) легко анализировались именно как линейчатые конструкции. Установленная теоремами T_{73}, T_{75} связь угла с плоскостью позволяет разработать и ввести в практику геометрических исследований сложение, вычитание углов, выбрать для них метод измерения и освоить аналитические методы решения геометрических задач.

Обратим внимание на то, как построен первый треугольник в нашем исследовании (см. раздел 9, рис.11): у произвольного неразвёрнутого угла соединены прямолинейным отрезком произвольные точки лучей – сторон угла. Это действие выполнимо только с одной стороны от вершины угла, если не покидать плоскость угла (для пространства вне плоскости понятие “сторона” не определено). Соответствующая часть плоскости между лучами входит в треугольник и называется его внутренним углом. Часть плоскости за пределами треугольника и между сторонами угла с указанной прямой в состав угла не включена – это и порождает второе понимание плоского угла:

O$_{89}$. Угол – это часть плоскости, ограниченная двумя лучами в этой плоскости, исходящими из общей точки, и содержащая отрезки прямых, если их проводить от луча к лучу через произвольные точки лучей.

Развёрнутый угол □ в такое понимание не укладывается – его лучи никаким прямолинейным отрезком не соединишь. И остальная часть плоскости таким пониманием угла не охватывается. Тем не менее, второе понимание угла имеет право на существование, так как именно с ним образуются треугольники и выпуклые многоугольники – объекты геометрического анализа. Отметим, что в работе [7] введено именно такое понимание плоского угла.

Сравнивать и складывать/вычитать плоские углы в указанном понимании надо на плоскости, чтобы результат обладал свойствами плоского угла и арифметических операций.

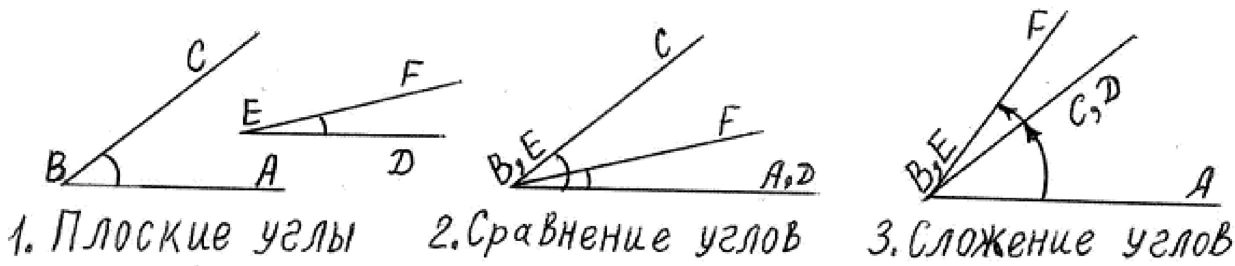


Рис. 27. Действия с углами.

Возьмём для примера два угла □ ABC и □ DEF (рис. 27.1), имея ввиду их линейчатую конструкцию. Плоскости, определяемые этими углами, считаем совмещёнными с плоскостью рисунка на бумаге. Это значит, что лучи AB, CB, DE, FE считаем принадлежащими этой плоскости. Далее все процедуры перемещения выполняем с копиями (O$_{15}$) углов и их элементов, не упоминая об этом без особой необходимости.

Совмещаем вершины углов B и E, совмещаем лучи AB и DE, направляем лучи CB и FE по одну сторону от совмещённых лучей (рис. 27.2). Лучи CB и FE не совпали – значит сравниваемые углы не равны. Подобный алгоритм сравнения углов рассматривался при введении этих объектов в анализ (раздел 8.1). Было показано, что в пространстве (O$_{1}$) линейчатая конструкция углов по определению O_{47} позволяет установить только факт конгруэнтности (совмещение равных углов). Учёт плоских свойств углов по определению O_{89} ограничивает вывод их лучей из анализируемой плоскости, и именно это создаёт возможность поставить между ними один из знаков неравенства, то есть однозначно зафиксировать результат сравнения.

На рис. 27.2 следует считать $\angle$ ABC > $\angle$ DEF, так как угол $\angle$ DEF накрыл не всю часть плоскости между сторонами угла $\angle$ ABC. Именно наличие ненакрытой части плоскости $\angle$ ABC позволяет считать, что он больше $\angle$ DEF.

В этом выводе кроется намёк на то, что мерой угла может быть часть плоскости между его лучами. Тут же отметим, что если углы считать только линейчатыми конструкциями в пространстве (O_{47}), то указанный критерий неравенства углов теряется: все линейчатые углы имеют одни и те же элементы по качеству и количеству, все лучи конгруэнтны между собой, развод лучей показывает степень несовпадения их направлений в пространстве, но какой мерой отобразить эту степень? Следовательно, понимание углов, как плоских фигур, и связывание их величины с частью плоскости между лучами является продуктивным шагом. Это есть основной вывод обсуждения методики сравнения углов. Он позволяет углы меньше прямого называть острыми, а углы больше прямого, но меньше развёрнутого – тупыми, перенося эти признаки и на линейчатые конструкции по определению O_{47} (см. раздел 8.1).

Рассмотрим методику сложения углов. Поскольку мерой величины углов отныне принята часть плоскости, то под “сложением” углов следует понимать сложение этих частей плоскости. Реально такое сложение выполнимо моделированием или геометрическими построениями циркулем и линейкой на плоскости. Мысленно достаточно манипулировать копиями углов. На рис.27.3 это выполняется так:

– Совмещаем вершины углов B и E;

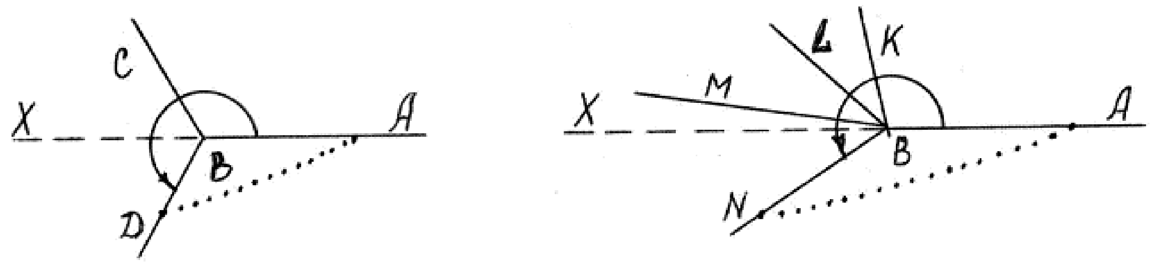
– Совмещаем лучи CB и DE;

– Направляем луч FE не в ту сторону от совмещённых лучей, где лежит луч AB; при этом получаем увеличенный угол $\angle ABF = \angle ABC + \angle DEF$.

Мы имеем право писать здесь знак равенства, так как участок плоскости между лучами AB и BC примкнул к участку плоскости между лучами DE и FE, не оставив “просвета” между этими участками и не совмещая их точки. Совмещаются только лучи CB и DE, но при этом они из сторон углов превращаются в промежуточную линию на плоскости суммарного угла. Аналогичный эффект имел место при сложении прямолинейных отрезков по отношению к концам отрезков (см. раздел 5.3), когда они с учётом определения линии O_{21} и свойств соседних точек и границ геометрических объектов (A_5 – A_{13}) превращались в промежуточные точки. Только при сложении углов эффект ликвидации внутренней границы имеет место по всей длине совмещаемых лучей. С учётом этого объяснения описанный алгоритм сложения углов можно считать корректным, годным для применения, пока сумма углов меньше развёрнутого, то есть пока результат сложения соответствует определению O_{89}.

Для вычитания углов их надо совмещать, как для сравнения. По рис. 27.2 можно записать: $\angle CBF = \angle ABC - \angle DEF$, а по рис. 27.3: $\angle CBF = \angle ABF - \angle ABD$. В любом случае разностью углов считается та часть плоскости большего угла, которая не накрыта меньшим углом. Здесь, как и с отрезками прямых, считается правилом отнимать от большего угла меньший, чтобы не возникало недоразумений при построении треугольников и его элементов. Аналогичное ограничение существует при работе с прямолинейными отрезками, как геометрическими объектами (см. раздел 5.3), но оно снимается введением числовой оси (раздел 5.4) с целью освоения алгебраических методов решения геометрических задач. В случае с углами мы тоже придём к расширению понимания их сущности, но прежде рассмотрим весомый аргумент на этом пути.

Предположим, надо сложить не два острых угла, как на рис. 27, а два тупых угла (рис. 28.а) или много углов (рис. 28.б), в результате чего суммарный угол (на рис. 28 он условно отмечен круглой стрелкой) превышает развёрнутый угол □ ABX = □. (В работе [7] определение суммы углов дано таким образом, что результат сложения в указанных случаях углом не считается).



а) $\angle ABD = \angle ABC + \angle CBD$ *б)* $\angle ABN = \angle ABK + \angle KBL + \angle LBM + \angle MBN$

Рис. 28. Сложение больших углов.

При сложении углов на рис. 28 выполнялась вышеописанная последовательность действий, каждое слагаемое удовлетворяло второму пониманию плоского угла O_{89}, а сумма углов этому пониманию не соответствует: если начальный луч AB и конечный луч суммы углов DB или NB соединить прямолинейным отрезком (на рис. 28 он изображён линией из точек), то этот отрезок образует треугольник не на плоскости суммарного угла, а за его пределами. Это противоречие показывает, что второе понимание углов является узкоспециальным, приспособленным для исследования свойств только плоских фигур вроде треугольников. Если не ограничивать тип задач с участием углов, то можно представить ситуацию, когда слагаемых во втором понимании угла будет так много, что конечный луч суммарного угла сделает полный оборот вокруг совмещаемой вершины слагаемых (см раздел 11.4, “плоское вращение вокруг точки”) и сольётся с начальным лучом – тогда результат сложения углов выродится в один луч и потеряет связь с породившими его слагаемыми. Можно даже представить, что конечный луч суммарного угла после полного оборота налезет на плоскость первого и последующих слагаемых – в этом случае сумма углов будет представлена углом, но этот угол неверно отразит сложение участков плоскости.

Перечисленные страхи приводят к третьему пониманию угла, в котором сохраняются свойства первых двух пониманий этого геометрического объекта и появляются новые свойства, важные для общематематических целей.

13. Третье понимание плоского угла.

O_{90}. Угол – это плоская фигура, фиксирующая положение двух лучей с общей начальной точкой, один из которых считается условно неподвижным, второй может вращаться вокруг начальной точки, оставаясь в одной и той же плоскости. Положительным принимается вращение луча против часовой стрелки, в этом же направлении выполняется сложение углов. Движение подвижного луча по часовой стрелке принимается отрицательным и соответствущим вычитанию углов. Мерой угла является пройденная часть плоскости между лучами в момент остановки подвижного луча плюс количество его полных оборотов.

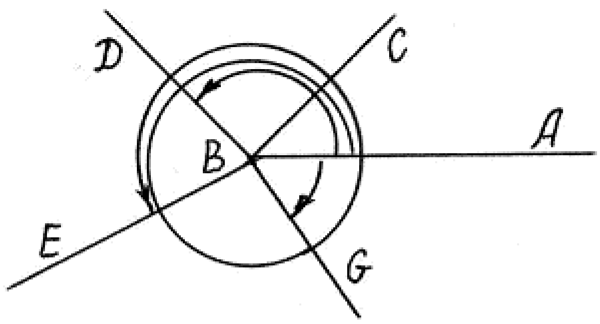


Рис. 29. Иллюстрация к третьему пониманию угла.

Рисунок 29 иллюстрирует определение O_{90}. Здесь точка B – начальная точка лучей угла, их вершина; AB – условно неподвижный луч; $\angle$ ABC – острый угол; $\angle$ ABD = $\angle$ ABC + $\angle$ CBD – тупой угол, полученный суммированием двух углов; $\angle$ ABG – отрицательный угол, так как направление движения его подвижного луча обозначено по часовой стрелке; $\angle$ ABE условно отмечен спиральной стрелкой, что означает наличие в его составе полных оборотов;

если условиться не чертить спиральные стрелки, то его величину лучше выразить так: ($\angle ABE + 2\pi n$), где 2π – один полный оборот подвижного луча, равный сумме двух развёрнутых углов, n – количество полных оборотов.

Определение O_{90} совершает следующее:

1) Снимает ограничение на величину угла и устанавливает для неё взаимно однозначное соответствие со множеством действительных чисел, так как любое число t можно представить в виде $t = 2\pi n + z$, где z – угол неполного оборота подвижного луча по или против часовой стрелке.

2) Позволяет вводить для угла числовую ось при соответствующем выборе единицы измерения углов и масштаба её изображения на прямой. Тем самым делаются доступными графоаналитические методы исследования функций угла в других разделах математики.

3) Снимает ограничение на величину и количество слагаемых в операциях геометрического и аналитического сложения и вычитания углов.

4) В пределах развёрнутого угла сохраняет свойства углов по определениям O_{47}, O_{89} как геометрических объектов, что позволяет использовать их в задачах анализа так называемых статических пространственных свойств объектов, то есть без учёта подвижности отдельных лучей..

Рассмотрим вопрос о собственных свойствах угла. Собственным свойством точки является её место в пространстве (A_9), собственным свойством прямолинейного отрезка является его длина (см. раздел 5.3).

По определению O_{47} угол отражает степень несовпадения направлений пересекающихся лучей. Очевидно, эту “степень” можно считать первым собственным свойством угла, и третье понимание угла сохраняет это свойство. Перемещение копий угла (O_{15}) не искажает эту “степень”, а изменение направления взгляда наблюдателя (O_2) меняет видимый образ угла, но не сам угол (этот аспект нашего восприятия мира изучает проективная геометрия).

По определению O_{89} угол своими пересекающимися лучами определяет плоскость в пространстве и ограничивает ту её часть, на которой лучи могут быть сторонами треугольника. Разные линейчатые по O_{47} углы выделяют в пространстве разные плоскости. Значит, сопутствующая углу плоскость может считаться вторым собственным свойством угла.

Одну и ту же плоскость в пространстве могут выделять разные углы, или разные углы могут быть выделены в одной и той же плоскости. В любом из этих случаев третьим собственным свойством угла является присущий ему участок плоскости. Это не отвергает и не подменяет первые два свойства угла, а наполняет угол множеством точек, то есть делает его геометрическим объектом определённой формы (O_{10}).

Определение O_{90} в качестве четвёртого собственного свойства угла устанавливает его величину, которая зависит от выбора положения неподвижного луча на плоскости и процедур, совершаемых над его подвижным лучом. При этом не отвергается первое свойство угла – указывать направление; и не отвергается плоскость – второе свойство: при вращении подвижный луч эту плоскость не покидает; учитываются и границы участка плоскости после остановки подвижного луча – третье свойство угла, как видимая часть его величины.

Если в рассматриваемой задаче место угла на плоскости (например, в составе треугольника) и место плоскости в пространстве (например, в составе других объектов) принимаются постоянными, то само это место можно считать условным свойством угла – оно изменится при смене задачи. Именно такие условные свойства угла следует отличать от его собственных свойств. Так, если заданный угол считать оригиналом (см. раздел 3.1), то его копии при перемещении будут обладать только первым, вторым и третьим свойствами; у четвёртого свойства “история” вращения, то есть количество полных оборотов подвижного луча, не сохранится (копировать можно только наличные точки оригинала). Поэтому в геометрических построениях на плоскости используется только зримая часть величины угла в третьем его понимании. Но историю вращения подвижного луча хорошо отражает вышеприведённая формула, поэтому третье понимание угла широко применяется в аналитических исследованиях.

14. Свойства смежных и вертикальных углов. Полный угол.

Определение смежных и вертикальных углов дано в разделе 8.2. Они всегда сопутствуют пересечению прямых (см. рис.10) и принадлежат плоскости, определяемой этими прямыми (T_{73}). Непосредственно из определения смежных углов и описанной в разделе 12 процедуры сложения углов следует теорема:

T_{91}. Сумма смежных углов равна развёрнутому углу.

Не имеет значения, в каком из трёх пониманий угла в T_{91} упоминаются смежные углы. В любом случае они лежат в одной плоскости (для O_{47}), каждый из них и их сумма не превышают развёрнутого угла (для O_{89}), а развёрнутый угол, как предел второго понимания плоских углов, теоремой T_{91} вовлекается в геометрический анализ свойств плоских фигур, часто имеющих смежные углы.

Докажем следующую теорему:

T_{92}. Вертикальные углы при пересекающихся прямых попарно равны между собой.

Для доказательства по рис.10 на основании T_{91} имеем:

□ BAD + □ DAC = □; □ DAC + □ CAE = □;

□ CAE + □ BAE = □; □ BAE + □ BAD = □.

Вычитая из первого равенства второе, на основании E_{12} получим:

□ BAD – □ CAE = 0 или □ BAD = □ CAE. Аналогичные выводы можно получить и для второй пары вертикальных углов. Теорема доказана.

Для формальных ссылок далее будет полезно следующее утверждение:

T_{93}. Если в системе углов с общей вершиной, лежащих в общей плоскости, каждый луч является стороной двух углов, то сумма всех углов этой системы равна одному обороту, то есть 2π, называемому также ***полный угол***.

Для доказательства T_{93} достаточно представить, что такая система углов во втором или третьем понимании этой фигуры (O_{89},O_{90}) образуется их последовательным сложением, и конечный луч последнего слагаемого совпадает с начальным лучом первого слагаемого. Углы при пересекающихся прямых (рис.10) образуют именно такую систему.

Если сумма углов меньше полного, но мы насильно притянем последний луч к первому на бумажной модели, то “неполная” плоскость прогнётся и образует конус. Если же сумма углов у бумажной модели превышает полный угол за счёт клиновой вставки, и мы совмещаем первый луч с последним, то такая модель выгибается с образованием седловидной поверхности. В этом ряду преобразований изгибаемой поверхности плоскость занимает однозначное место, но это представляет интерес для неевклидовых геометрий и топологии.

Далее нам потребуется следующий признак равенства треугольников:

T_{94}. Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство. Пусть в треугольниках $\triangle ABC$ и $\triangle DEF$ имеют место равенства: AB = DE, $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ (рис. 30).

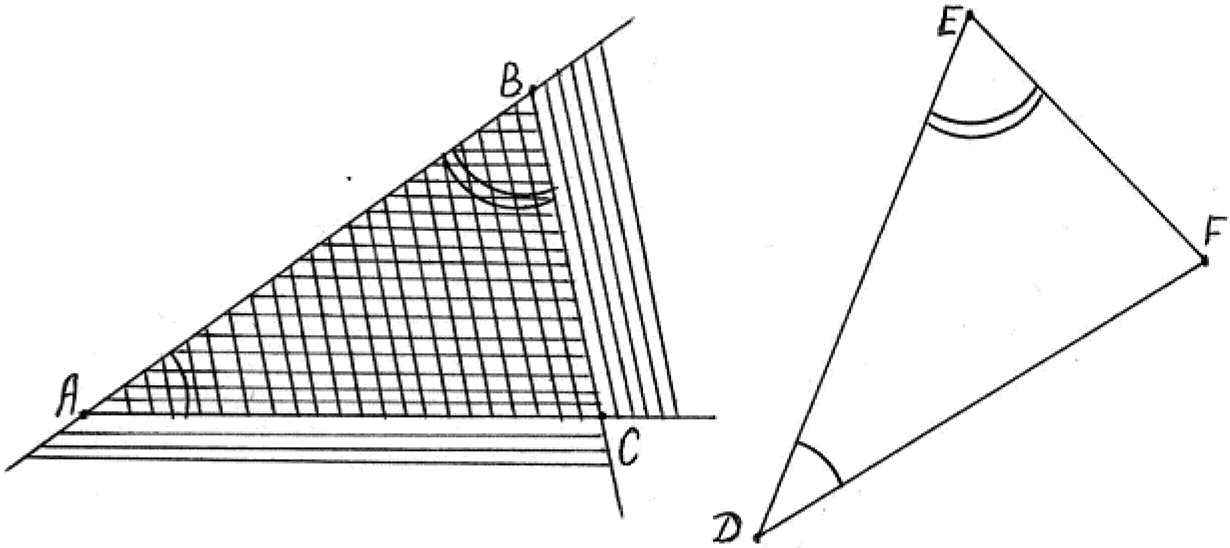


Рис. 30. Иллюстрация к доказательству II признака равенства треугольников.

Штриховка общих внутренних участков плоскости углов ∠ A и ∠ B во втором их понимании (O_{89}) показывает, что пересечение этих участков образует внутреннюю часть плоскости треугольника △ ABC и фиксирует на плоскости место пересечения лучей AC и BC – точку C – по отношению к стороне AB. Её нельзя сдвинуть с места при заданных направлениях двух сторон треугольника по отношению к третьей стороне заданной длины. Образуем копию △ DEF и наложим её на △ ABC так, чтобы совпали точки A,D и B,E. Это возможно, так как копии сторон равны своим оригиналам (A_{18}). Совместим плоскости треугольников. При этом, вследствие заданного равенства соответствующих углов, луч DF пойдёт по лучу AC, а луч EF – по лучу BC. При формулировке T_{94} мы ожидали равенства сторон AB = DF, BC = EF, и оно действительно проявится при совмещении точек C и F. Любое расхождение этих точек означало бы нарушение равенства какой-либо пары соответственных углов: по определению O_{29}, в том числе в форме E_{15}, несовпадающие прямые линии не могут иметь более одной общей точки; если лучи DF, EF в окрестностях совмещённых вершин углов начали идти по лучам AC, BC, то совпадение последующих точек гарантировано свойствами прямых линий

(см. раздел 8.2). Обязательное совпадение точек C и F доказывает справедливость теоремы T_{94}.

Примечание: В традиционном курсе геометрии T_{94} считается вторым признаком равенства треугольников, но там всё начинается в Планиметрии. В нашем изложении она следует только сейчас, так как до исследования свойств плоскости доказательство T_{94} нам казалось недостаточно аргументированным.

15. Центральная симметрия.

Слово “симметрия” в переводе с греческого означает гармонию, закономерность в расположении, когда каждой точке чего-то соответствует как бы зеркально отражённая точка копии этого чего-то. Различают симметрию в пространстве (см. раздел 6.1) и на плоскости, симметрию осевую (относительно прямой линии – оси симметрии) и центральную (относительно точки – центра симметрии).

Для концов любого прямолинейного отрезка в пространстве центром симметрии является его середина. Другими словами: концы прямолинейного отрезка симметричны относительно его середины. Эта фраза отражает конструктивную сущность центральной симметрии как в пространстве, так и на плоскости. Из симметричных точек на плоскости складываются симметричные фигуры. Например, окружность – фигура центрально симметричная: каждой её точке соответствует симметричная относительно центра точка на другом конце диаметра, соединяющего эти точки. Поэтому центр окружности является и центром её симметрии. Аналогичное рассуждение справедливо для сферы, но в этом случае имеет место пространственная центральная симметрия.

Рассмотрим плоскую центральную симметрию треугольников □ ABC и □ $A_1B_1C_1$ на рис.31. Здесь центр симметрии (точка O) является серединой отрезков A_1A, B_1B, C_1C. Этого достаточно, чтобы выполнялось равенство указанных центрально симметричных треугольников и их соответственных элементов (про соответственные элементы см. раздел 9.2, T_{54}, T_{55}).

Доказательство этого утверждения:

Для теоремы T_{59} (первый признак равенства треугольников) в применении к □ OBC, □ OAB, □ OAC и им симметричным имеют место равенство половинок указанных отрезков (по условию симметрии) и равенство вертикальных углов (T_{92}) с вершиной в центре симметрии:

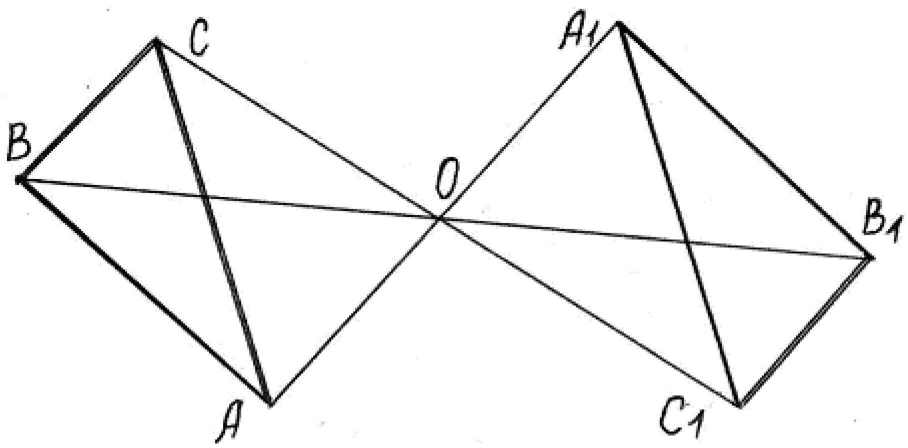


Рис. 31. Центрально симметричные треугольники.

□ OBC = □ OB_1C_1 → $BC = B_1C_1$; □ OAB = □ OA_1B_1 → $AB = A_1B_1$;

□ OAC = □ OA1C1 → $AC = A_1C_1$.

Указанные следствия и T_{56} приводят к выводу: □ ABC = □ $A_1B_1C_1$, или по T_{55}: $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$, □ A = □ A_1, □ B =□ B_1, □ C = □ C_1.

Совокупность этих равенств является доказательством свойств центральной симметрии: равенство расстояний между соответственными точками симметричных фигур, конгруэнтность симметрично расположенных углов и симметрично расположенных треугольников. Без доказательства данное свойство можно распространить на любые центрально симметричные плоские фигуры.

Центральной симметрии сопоставляется плоское вращение (см. раздел 11.4) вокруг центра симметрии на величину развёрнутого угла. При таком вращении (повороте) центрально симметричные точки описывают полуокружность и совпадают – ведь их расстояния до центра симметрии/поворота одинаковы и при повороте становятся радиусами вращения (направление вращения не имеет значения ввиду симметричности полуокружности по отношению к другой половине окружности). Тем самым для частного случая реализуется аксиома A_{19} о существовании перемещения, совмещающего конгруэнтные геометрические объекты. Иначе говоря, центральная симметрия используется не только в качестве признака закономерности в расположении фигур, но и как метод копирования фигур с сохранением их геометрических свойств (A_{20}). Выбором разных центров поворота можно создать множество копий оригинальной фигуры, и все они будут между собой конгруэнтны (A_{18}). Отметим также, что каждая копия поворотом на величину развёрнутого угла вокруг того же центра возвращается в исходное положение (совмещается с симметричной фигурой), так как точки пространства считаются неподвижными (O_2, O_{15}).

Определённый интерес представляет центральная симметрия прямой линии относительно любой своей точки. Если лучи левый и правый (или верхний и нижний) относительно выбранной точки повернуть на угол □, то левый луч станет правым, правый – левым (или сменятся местами верхний и нижний лучи). С учётом неподвижности пространства (O_2, O_{15}) речь, конечно, идёт о перемещении копий лучей. Если точки на лучах никак не обозначены и их траектории – полуокружности – не зафиксированы, то рассмотренное геометрическое построение останется без результата – лучи совпадут с оригиналом прямой линии, как будто и были на ней до поворота. Только обозначение какой-либо точки помимо центра поворота даёт возможность заметить факт перемещения и образования точки, симметричной ранее отмеченной.

Ввиду декларируемой бесконечности прямой линии (O_{29}) и её лучей центром подобной симметрии может считаться любая точка прямой. Это один из парадоксов потенциальной бесконечности прямой линии, но у нас есть методы его решения в доступных областях пространства (см. раздел 5.2).

Центр поворота и помеченная точка на перемещаемом луче задают ориентир для учёта направления движения по лучу. Непосредственным построением циркулем и линейкой или анализом расстояний наблюдатель (O_2) увидит смену направления перемещённого луча на противоположное относительно исходного. Это свойство центральной симметрии проявляется во взаимном положении всех центрально симметричных фигур. Если по условию задачи надо сохранить ориентацию копии относительно оригинала, то следует пользоваться другими перемещениями, например, осевой симметрией или поступательным переносом.

Закрепим описанные свойства центральной симметрии:

T_{95}. Для концов любого прямолинейного отрезка в пространстве и на плоскости центром симметрии является его середина. Плоская центральная симметрия и соответствующий ей поворот вокруг центра симметрии на величину развёрнутого угла обладают следующими свойствами:

1) Сохраняют неизменными расстояния между соответственными точками симметричных фигур.

2) Обеспечивают конгруэнтность симметрично расположенных углов и других плоских фигур.

3) Прямая линия центрально симметрична самой себе относительно любой своей точки, но порядок точек на ней при таком отображении меняет направление на противоположное относительно не участвующих в повороте точек плоскости.

4) Для построения центрально симметричной фигуры в качестве центра симметрии/поворота может быть использована любая точка плоскости.

5) Повторный поворот фигуры вокруг центра симметрии на величину развёрнутого угла возвращает фигуру в исходное положение.

Рассмотрим ситуацию с прямой линией m и точкой O вне её, которая принимается за центр поворота этой прямой на угол □. В соответствии с T_{95} ожидается, что результирующее положение прямой должно быть центрально симметричной копией исходной прямой.

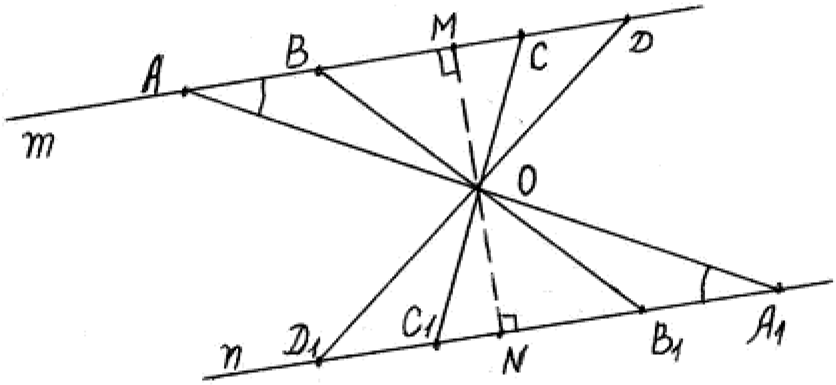


Рис. 32. Анализ центральной симметрии прямой относительно точки вне её.

Построения отражены на рис.32. Отметим на прямой m последовательно расположенные точки A, B, C, D при движении в направлении алфавита. Проведём через точки A,O луч с началом в точке A и отложим за точкой O отрезок $A_1O = AO$ – точка A_1 симметрична точке A по этому построению. Аналогично строим точки B_1, C_1, D_1, симметричные одноимённым точкам прямой m. Имеется возможность увеличить количество точек по указанному алгоритму, но ограничимся уже построенными.

Соединим полученные точки с индексом линией n, соблюдая все свойства линий (O_{21}). Правилом включения в эту линию промежуточных, в том числе не указанных удалённых точек является центральная симметрия.

Вопрос: Является ли прямой линия n, состоящая из точек, каждая из которых симметрична одной из точек прямой m?

Ответ не очевиден, так как при построении линии n не применялся конструктивный признак прямой по O_{29}. Тем не менее, ответ положительный.

Доказательство. Первым признаком прямолинейности линии n можно считать алфавитное расположение построенных точек, но в обратном порядке в сравнении с прямой m. По T_{95}, это свойственно центрально симметричному повороту прямой линии, а линия, как геометрический объект, должна обладать порядком в расположении своих точек (A_{11}).

Аналогичный порядок наблюдался бы и у любой замкнутой линии без узлов, но из-за замкнутости продолжение выбора точек натолкнулось бы на уже выбранные точки. С прямой линией m подобного произойти не может, так как она незамкнута (O_{29}). Видимым признаком справедливости такого аргумента можно считать закономерное изменение углов, под которыми симметрирующие отрезки A_1A, B_1B, … отходят от прямой m. Будем считать, что исходная прямая распространяет свои свойства на симметричную ей копию, в частности, на удалённые точки.

Предположим, что отрезок A_1B_1 прямолинейный. Тогда □ AOB = □ A_1OB_1 по T_{59}: AO = A_1O и BO = B_1O по построению, углы □ AOB и □ A_1OB_1 равны как вертикальные (T_{92}). Из равенства треугольников следует A_1B_1 = AB.

Аналогично можно получить B_1C_1 = BC, C_1D_1 = CD. По той же схеме анализа получим: AC = A_1C_1, AD = A_1D_1, BD = B_1D_1. Последние равенства с учётом предыдущих можно разложить на слагаемые:

$AC = AB + BC = A_1C_1 = A_1B_1 + B_1C_1$;

$AD = AB + BC + CD = A_1D_1 = A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1$;

$BD = BC + CD = B_1D_1 = B_1C_1 + C_1D_1$.

Из этих равенств следует, что предполагаемые прямолинейные отрезки строго подчиняются правилу геометрического сложения прямолинейных отрезков (см. раздел 5.3, T_{33}) и результат такого сложения в точности равен сумме прообразов симметричных отрезков, про которые по условию известно, что они лежат на одной прямой. Это весомый аргумент к тому, чтобы предположение о прямолинейности участков линии n считать верным. В указанных равенствах прослеживается конструктивный признак прямой линии: участки отрезков линии n в виде слагаемых разной длины совмещаются с линией n – это восстанавливает связь наших построений с определением прямой линии O_{29}.

Для окончательного решения повернём линию n и связанные с нею симметрирующие треугольники вокруг точки O на угол □. Согласно T_{95}, при этом перемещаемые точки совпадут со своими оригиналами и окажется, что A_1, B_1, C_1, D_1 лежат на прямой m. Следовательно, они и в своём положении до поворота принадлежат одной прямой, что и требовалось доказать.

Для построения симметричных точек линии n использовались произвольные точки исходной прямой m. Дополним анализ замечанием, что исходная прямая и центр симметрии вне её определяют собой единственную плоскость (T_{75}), в которой неявно производились представленные на рис.32 построения. Поэтому результат данного исследования можно распространить на всю прямую и сформулировать следующим образом:

T_{96}. Множество точек, центрально симметричных точкам прямой линии относительно произвольной точки вне её, является прямой линией в плоскости, определяемой центром симметрии и исходной прямой. Направление этой прямой противоположно направлению исходной прямой, если учитывается её ориентация относительно точек плоскости, не участвующих в рассматриваемом центрально симметричном отображении.

Вернёмся к рис.32 и проведём из центра симметрии O перпендикуляры к прямым m, n: $OM \perp AD$, $ON \perp A_1D_1$ (O_{62}). В соответствии с T_{67} это возможно сделать даже без учёта свойств плоскости. Но T_{96} показывает, что прямые m, n и точка O лежат в общей плоскости. Следовательно (T_{69}), отрезки OM и ON тоже всеми своими точками принадлежат ей.

Вопрос: Является ли линия MON ломаной (см. раздел 7.1) или точка O лежит на прямолинейном отрезке MN?

Для поиска ответа рассмотрим треугольники $\triangle AOM$ и $\triangle A_1ON$ на рис.32 с учётом предыдущих построений. Здесь имеют место равенства:

$AO = A_1O$ – по условию симметрии;

$\angle MAO = \angle NA_1O$ по ранее доказанному равенству $\angle AOB = \angle A_1OB_1$;

$\angle AMO = \angle A_1NO = d$ – по построению.

Эти равенства соответствуют условиям теоремы T_{94}, и значит □ AOM = □ A_1ON. Отсюда: OM = ON – по T_{55}.

Установленное равенство перпендикуляров можно считать намёком на симметричность точек M,N, но пока не доказано, что прямолинейный отрезок MN проходит через центр симметрии. Поэтому продолжим анализ.

OM по построению является расстоянием от точки O до прямой m (T_{66}) и имеет наименьшую длину в сравнении с любым отрезком, концами которого являются точка O и какая-либо точка на прямой m. Аналогично ON – расстояние от точки O до прямой n с тем же свойством. Если сложить отрезки OM и ON по правилу сложения прямолинейных отрезков (см. раздел 5.3, T_{33}), то отрезок MN, как сумма, будет прямолинейным отрезком наименьшей длины между точками M, N, а точка O будет его промежуточной точкой. Этим свойством обладает именно прямая линия (T_{44}). Поэтому с учётом равенства OM = ON можно считать точки M, N симметричными, отрезок MN перпендикулярным одновременно двум центрально симметричным прямым.

Меняя расстояние центра симметрии от исходной прямой вдоль отрезка MN без выхода из плоскости, однажды образованной этими объектами, можно получить семейство центрально симметричных прямых в общей плоскости, порождённых одним оригиналом. Перпендикуляр MN или его продолжение пересечёт все эти прямые. При этом изменятся размеры построений, но логическая сущность рассмотренной ситуации останется: прямая MN будет перпендикулярна каждой прямой семейства. Поэтому справедливо следующее утверждение:

T_{97}. Если несколько центрально симметричных прямых пересекаются некоторой прямой, что определяет их общую плоскость, и к одной прямой семейства эта секущая перпендикулярна, то она перпендикулярна и к другим прямым этого семейства.

Следствие теорем T_{97}, T_{96}, T_{88} :

T_{98}. Если две прямые в одной плоскости центрально симметричны относительно некоторого центра, то они параллельны.

Доказательство. Паре центрально симметричных прямых с их центром симметрии соответствует определённая плоскость (T_{96} со ссылкой на T_{75}). Теорема T_{97} исключает возможность пересечения одной из центрально симметричных прямых на плоскости некоторой секущей прямой под прямым углом, а другой – этой же секущей не под прямым углом. Тем самым эти теоремы устанавливают, что центрально симметричным прямым сопутствуют два свойства: принадлежность общей плоскости и перпендикулярность к общей секущей, если угол пересечения прямой. По T_{88} этими свойствами обладают параллельные прямые. Это доказывает теорему T_{98}.

Приведённое доказательство можно усилить. Ориентируясь на определение параллельных прямых (O_{86}) в том, что они не имеют общих точек, предположим наличие точки пересечения центрально симметричных прямых. Тогда по свойству центральной симметрии (T_{95}) на другой стороне от центра симметрии должна существовать симметричная точка пересечения этих прямых. Но по определению прямой линии (O_{29}) через две точки пространства нельзя провести две разные прямые. Следовательно, предположение о пересечении центрально симметричных прямых неверно, центральная симметричность прямых может считаться признаком их параллельности.

16. Углы и параллельные прямые.

Обратимся к рис. 32 ещё раз, чтобы не тратить время и место на повторную иллюстрацию. На этот раз считаем центральную симметричность и сопутствующую параллельность прямых m, n исходным условием, удалённые участки прямых нас не интересуют, все симметрирующие отрезки A_1A, B_1B,… считаем уже построенными, равенство симметричных треугольников уже доказанным.

Обратим внимание на пары равных углов: $\angle BAO = \angle B_1A_1O$, $\angle ABO = \angle A_1B_1O$, $\angle CBO = \angle C_1B_1O$, $\angle BCO = \angle B_1C_1O$, $\angle DCO = \angle D_1C_1O$, $\angle CDO = \angle C_1D_1O$.

Все эти пары углов обладают общим признаком в своём положении относительно друг друга, прямых m, n и секущей для каждой пары – они внутренние накрест лежащие при пересечении двух прямых третьей. Указанные равенства можно углов считать следствием равенства симметричных треугольников или следствием симметричности их лучей и вершин – факт равенства от этого не изменится. Однако ясно, что нарушение симметричности/параллельности прямых m, n при неизменном положении секущих приведёт к нарушению этих равенств. Поэтому можно утверждать:

T_{99}. Если две прямые пересекаются третьей и внутренние накрест лежащие углы с вершинами в точках пересечения равны между собой, то пересекаемые прямые параллельны. Обратно: Если прямая пересекает параллельные прямые, то внутренние накрест лежащие углы с вершинами в точках пересечения равны между собой.

Если вывести симметрирующие отрезки (секущие) на рис. 32 за прямые m, n во внешние области плоскости, то вокруг каждой точки пересечения выделятся вертикальные и смежные углы по отношению к уже рассмотренным (O_{49}). Три теоремы T_{91}, T_{92}, T_{99} дают возможность записать немало других равенств углов, но они соответствуют уровню упражнений в геометричеком анализе. Поэтому ограничимся формулировкой T_{99}.

С точки зрения T_{99} перпендикуляр MN на рис. 32 является одной из секущих для прямых m, n. Однако перпендикулярность в данном случае стирает разницу между смежными и вертикальными углами. Поэтому применение T_{99} будет оправдано только для неперпендикулярных секущих, хотя формально перпендикуляр не является исключением.

Непосредственным следствием T_{99} является следующая теорема:

T_{100}. Сумма внутренних углов треугольника равна развёрнутому углу.

Доказательство. Иллюстрируется рисунком 33.

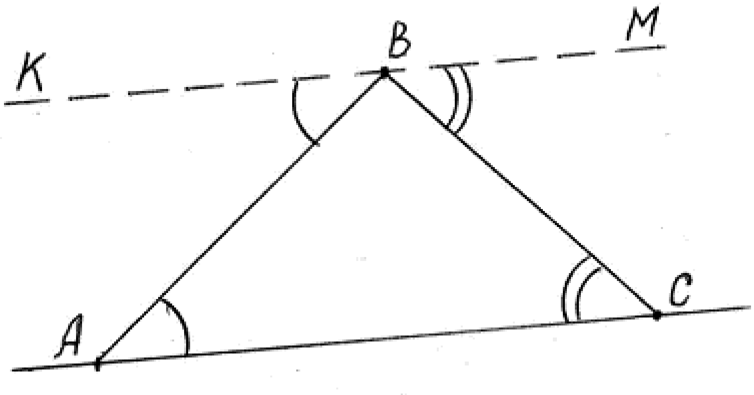


Рис. 33. Иллюстрация к теореме о сумме внутренних углов треугольника.

Здесь □ ABC – произвольный треугольник. Проведём через вершину B прямую KM, параллельную стороне AC. Получаем две пары внутренних накрест лежащих углов:

□ ABK = □ BAC – при секущей AB;

□ CBM = □ BCA – при секущей BC.

Знак равенства здесь ставится на основании T_{99}.

Построения на рис. 33 соответствуют правилу сложения трёх углов при вершине B и образуют в сумме развёрнутый угол □ KBM. Одно из слагаемых является собственным внутренним углом треугольника, а два других слагаемых соответственнио равны двум другим внутренним углам треугольника. Это доказывает теорему T_{100} : □ ABC + □ BAC + □ BCA = □.

Индивидуальные свойства треугольника на этот вывод не влияют.

Докажем следующую теорему:

T_{101}. Два угла со взаимно параллельными сторонами равны, если они оба острые или оба тупые, и составляют в сумме развёрнутый угол, если один из них острый, а другой тупой.

Доказательство. Иллюстрируется рисунком 34.

Если бы вершины рассматриваемых в T_{101} углов совпадали, то имело бы место пересечение лучей (частный случай совпадения параллельных прямых), стороны одного угла были бы продолжением сторон другого и всё это было бы похоже на рис.10 в разделе 8.2: развёрнутый угол, вертикальные и смежные углы. Для этой ситуации утверждение T_{101} не требует доказательства. Поэтому на рис. 34 указаны острый угол $\angle$ ABC и тупой угол $\angle$ DEF с несовпадающими вершинами.

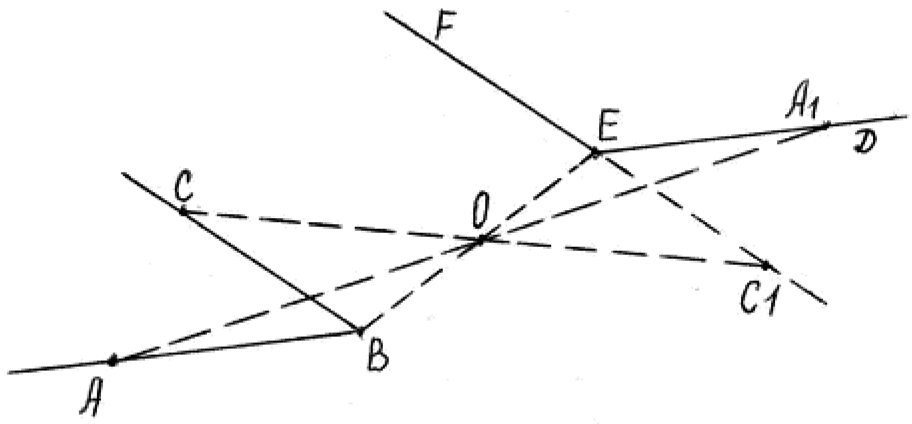


Рис. 34. Построение угла $\angle A_1EC_1$, симметричного данному углу $\angle ABC$ при параллельности сторон двух заданных углов.

Здесь по условию T_{101} параллельными являются пары сторон AB, DE и CB, FE. Соединим вершины углов прямолинейным отрезком BE и найдём его середину O. Для точек B, E это будет центр симметрии. Выделим на сторонах угла $\angle$ ABC явные точки A, C, чтобы можно было проводить симметричные построения.

Из-за параллельности сторон BC и FE точка O является для них центром симметрии – концы отрезка BE лежат на этих прямых. Поэтому проводим отрезок CO, продолжаем его за точку O – он пересечёт сторону FE (на рис. 34 – её продолжение) в симметричной точке C_1 (T_{95}). То же для второй стороны угла $\angle$ ABC : из-за параллельности AB и DE точка O и для них является центром симметрии, а отрезок AO пересечёт DE в точке A_1, симметричной точке A.

Получили угол $\angle C_1EA_1$, симметричный углу $\angle ABC$, так как симметричны их вершины и на каждой паре лучей имеются симметричные точки. По T_{95} симметричные углы равны: $\angle C_1EA_1 = \angle ABC$. В данном случае $\angle C_1EA_1$ смежный для $\angle DEF$ по построению. Следовательно, их сумма и сумма исходных углов равна развёрнутому углу (на рис. 34 это угол $\angle FEC_1$).

Другое взаимное расположение исходных углов и другое сочетание их величин не могут изменить приведённой схемы рассуждений. Построение симметричного угла для одного из заданных всегда приводит либо к совпадению углов, либо к их смежности или вертикальности. В качестве упражнения читающий эти строки может сам проверить это и даже точно начертить. Теорему T_{101} можно считать доказанной.

Докажем следующую теорему:

T_{102}. Два угла со взаимно перпендикулярными сторонами равны, если они оба острые или оба тупые, и составляют в сумме развёрнутый угол, если один из них острый, а другой тупой.

Доказательство. На рис. 35 приведены варианты расположения указанных в T_{102} углов при совпадении их вершин. Во всех случаях заданы углы $\angle ABC$ и $\angle DBE$, а обозначения углов соответствуют правилу: $AB \perp BD$, $CB \perp BE$.

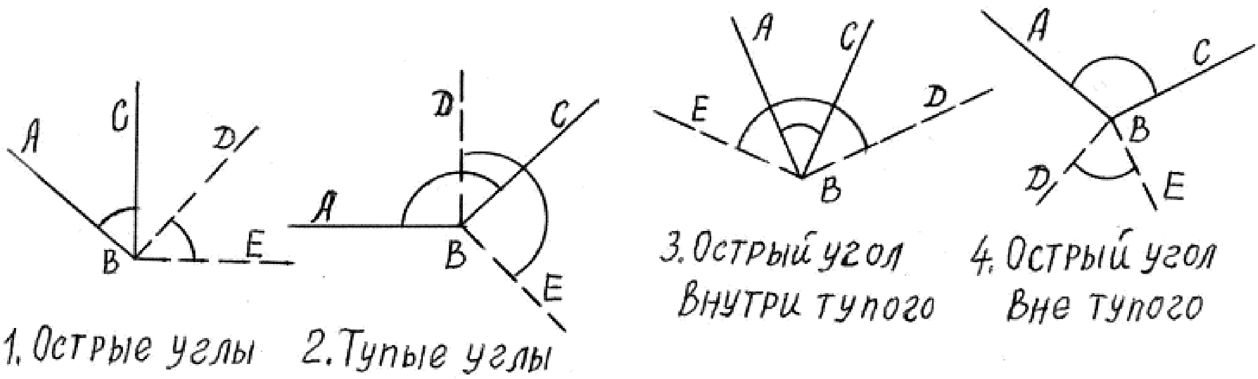


Рис. 35. Варианты расположения углов

со взаимно перпендикулярными сторонами.

В доказательстве теоремы T_{102} используется рассмотренное в разделе 12 правило сложения углов.

Для варианта 1 по рис. 35 можно составить равенства:

□ ABC = d – □ CBD; □ DBE = d – □ CBD. Из них следует: □ ABC = □ DBE.

Аналогично для варианта 2 по рис. 35 имеем:

□ ABC = d + □ DBC; □ DBE = d + □ DBC. Следствие: □ ABC = □ DBE.

Вариант 3: □ ABC + □ CBD = d; □ ABC + □ ABE = d. Складывая левые и правые части равенств, получим: □ ABC + (□ CBD + □ ABC + □ ABE) = 2d или □ ABC + □ DBE = 2d.

В варианте 4 имеет место полный угол (T_{93}), так как нет никаких совмещений участков плоскости углов. Поэтому справедливо равенство:

□ ABC + □ DBE + 2d = 4d, откуда: □ ABC + □ DBE = 2d.

Таким образом, для всех вариантов теорема доказана.

Рассмотрим ситуацию, когда вершины углов со взаимно перпендикулярными сторонами не совпадают. Для примера на рис. 36 острые углы □ ABC и □ DBE с рис. 35.1 раздвинуты на некоторое расстояние в произвольном направлении, так что новый угол □ DB`E несимметричен старому.

Соединим вершины B и B` прямолинейным отрезком BB` и найдём его середину O, так что OB = OB`. Воспользуемся свойствами центральной симметрии и точкой O, как её центром ( $T_{95}$ ). Поворот на угол □ элементов угла □ DB`E совместит вершины B и B`, а лучи DB` и EB` отобразит в лучи $D_1B$ и $E_1B$. При этом величина угла сохранится неизменной: □ DB`E = □ D_1BE_1.

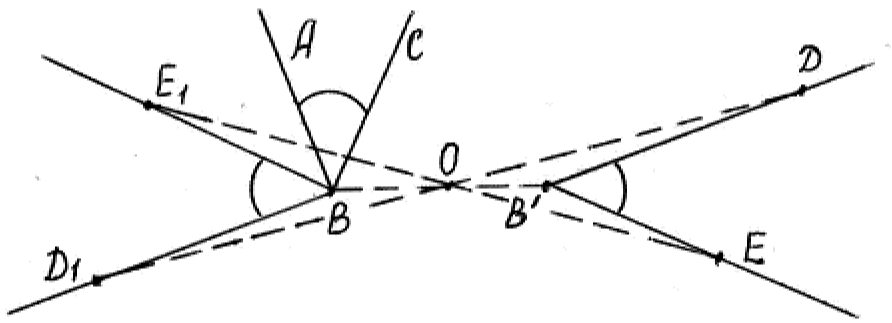


Рис. 36. Совмещение углов со взаимно перпендикулярными сторонами.

По теореме T_{98} стороны симметричных углов попарно параллельны: B\`D и $BD_1$, B\`E и BE_1. Поэтому в соответствии с теоремой T_{95} перпендикулярность сторон исходной пары углов переносится на пару углов с совмещёнными вершинами: $E_1B \perp CB$; $D_1B \perp AB$. Для подобной пары углов на рис. 35.1 теорема уже доказана.

К любому варианту расположения углов со взаимно перпендикулярными сторонами можно применить описанное центрально симметричное перемещение и свести его к уже рассмотренным на рис. 35. Поэтому теорему T_{102} можно считать доказанной полностью.

17. Сумма внешних и внутренних углов выпуклого многоугольника.

O_{103}. Выпуклым многоугольником называется часть плоскости с её границами, которые представляют собой замкнутую ломаную линию (контур) без самопересечений при продолжении любого её звена по прямой.

Определение ломаной линии приводится в разделе 7.1. Каждое звено замкнутой ломаной линии становится стороной многоугольника, поэтому неважно, считать ли количество углов, сторон или вершин. Исторически принято вводить в название фигуры количество углов: треугольник, четырёхугольник, шестиугольник,… Если у многоугольника есть особые свойства, то они иногда отражаются в названии: прямоугольник, квадрат, ромб.

Треугольник обладает наименьшим количеством углов из всего семейства многоугольников. Он сам определяет плоскость, в которой лежит всеми своими точками (T_{75}). Четыре и более точек в пространстве можно соединить замкнутой ломаной линией без самопересечений, но это не гарантирует оконтуривание части плоскости, как в случае с треугольником. Каждые три из этих точек будут определять какую-либо плоскость (T_{75}), но такие плоскости могут не совпадать друг с другом. С этим фактом приходится считаться. Если речь идёт не о контуре (линии), а именно о части плоскости, то надо само слово “многоугольник” считать прямым указанием, что все его вершины лежат в одной плоскости. Из этого следуют свойства всех остальных внутренних точек и прямолинейных отрезков многоугольника.

Слова “без самопересечений” в O_{103} означают, что звенья многоугольника не пересекают контур многоугольника и каждая вершина принадлежит только двум соседним звеньям. Слово “выпуклый” означает, что любой прямолинейный отрезок с концами на контуре многоугольника всеми своими точками принадлежит плоскости многоугольника. Например, пятиконечная звезда выпуклым многоугольником не является, а квадрат – выпуклый многоугольник.

На рис. 37 изображён один из произвольных многоугольников ABCDE (пятиугольник с вершинами A, B, C, D, E). Никаких особых свойств у него не предполагается. Внутренние углы многоугольника однозначно именуются по его вершинам: $\angle$ A, $\angle$ B,… Внешние углы образуются продолжением сторон многоугольника во внешнюю часть плоскости. Если продолжить обе соседние стороны, то образуются два внешних угла при одной вершине. Но они равны, как вертикальные (T_{89}), поэтому при анализе свойств представляет интерес один из них, причём любой.

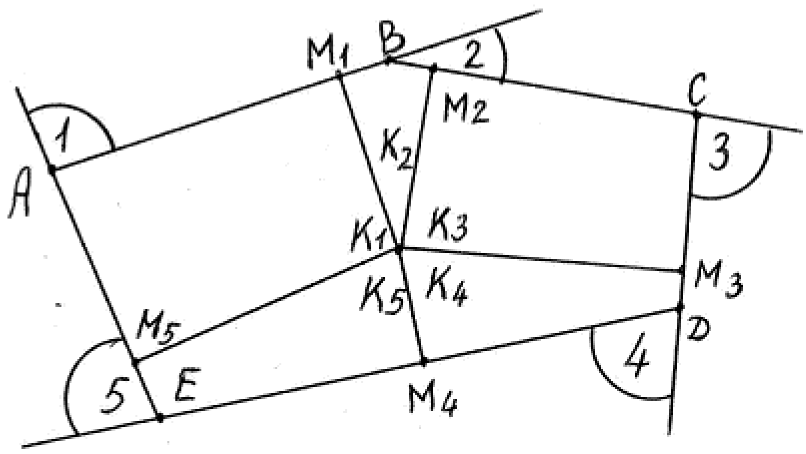


Рис. 37. Многоугольник и его углы.

На рис. 37 изображены по одному внешнему углу при каждой вершине, причём стороны всякий раз выходили во внешнюю область так, чтобы создать эффект обхода вершин по часовой стрелке. Для текстового отличия внешних углов от внутренних они обозначены цифрами.

Докажем следующую теорему:

T_{104}. Сумма внешних углов любого выпуклого многоугольника, взятых по одному при каждой вершине, равна полному углу.

Доказательство. Возьмём внутри многоугольника произвольную точку К и проведём из неё перпендикуляры к каждой стороне многоугольника: KM_1, KM_2,… Здесь индекс соответствует номеру внешнего угла, на луч которого опирается перпендикуляр. Согласно T_{67}, для каждой стороны такой перпендикуляр будет единственным. Обратим внимание, что вокруг точки К образовались углы, в сумме составляющие полный угол (T_{93}). Обозначим их K_1, K_2, …, K_5, используя те же индексы. Теперь обратим внимание, что у каждой пары углов с одинаковым индексом стороны взаимно перпендикулярны по построению, причём эти углы либо оба острые, либо оба тупые. По T_{102} такие углы равны. Следовательно, можно записать:

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = \angle K_1 + \angle K_2 + \angle K_3 + \angle K_4 + \angle K_5 = 2□.$$

Это доказывает теорему T_{104}. Анализ сопутствующих построений показывает, что схема доказательства не зависит от формы многоугольника и количества его сторон. Лишь бы многоугольник был выпуклым.

Следствие доказанной теоремы:

T_{105}. Сумма внутренних углов выпуклого многоугольника составляет (n – 2)□, где n – количество вершин многоугольника.

Доказательство. По рис. 37 видно, что при каждой вершине многоугольника внешний и внутренний углы являются смежными и в сумме составляют □. Если у многоугольника n вершин, то сумма всех смежных углов при вершинах составляет n□. Вычитая из неё сумму внешних углов по T_{104}, получим формулу, указанную в теореме.

Примечание: Для треугольника результаты T_{105} и T_{100} совпадают.

18. Итоги.

Цель данной работы достигнута. Точке, прямой и плоскости, а также углу, треугольнику и другим объектам даны конструктивные определения в пространстве и исследованы их свойства, не вошедшие в формулировку основных определений.

Исходным объектам анализа от пространства (O_1) до линии (O_{21}), а также средствам исследования от наблюдателя (O_2) до движения вдоль линии (O_{24}) определения разбиты на две части. В первой (O_i) называется объект и даётся его основной отличительный признак. Это делает формулировку объекта краткой, но достаточно точной для однозначного опознания. Свойства объектов O_i , требующиеся для анализа и не отражённые в O_i , вынесены в аксиомы A_i; ссылка на них без ссылки на O_i делает рассуждение более конкретным.

Свойства объектов от прямой линии и далее не даются в аксиомах, а исследуются и закрепляются в теоремах. Поэтому аксиомы в данной работе по существу отличаются от аксиом связи, порядка, конгруэнтности, непрерывности, составивших систему аксиом Гильберта и её вариаций.

Существенно новым в данной работе являются два принципа:

1. Отказ от системы аксиом, косвенно отражающих свойства и взаимодействие абстрактных “точки, прямой, плоскости”, которым разные геометрии сопоставляют разное содержание и получают разные модели “пространства”. Другими словами, отказ от аксиоматического обоснования геометрии.

2. Принятое со времён Евклида построение Планиметрии и на её основе Стереометрии заменено построением Стереометрии, затем плоскости, как одного из объектов пространства, а затем рассмотрением задач, которые вне плоскости не имеют однозначного решения.

Думается, что столь кардинальный отход от традиционной методики обоснования геометрии интересен не только своим результатом, но и сам по себе.

В порядке завершения работы обсудим несколько важных для геометрии вопросов.

18.1. Определения Евклида.

Конспект по [7, стр. 9 – 12] :

Евклид жил в период от 330 до 275 года до нашей эры. Составленные им “Начала” разделены на 13 книг, из которых 5, 7, 8, 9, 10 посвящены теории пропорций и арифметике в геометрической форме, остальные являются собственно геометрическими. Книга первая содержит условия равенства треугольников, соотношения между сторонами и углами треугольников, теорию параллельных линий и условия равновеликости треугольников и многоугольников. Во второй книге даётся превращение многоугольника в равновеликий квадрат. Книга третья посвящена окружности. В четвёртой книге рассматриваются вписанные и описанные многоугольники. Книга шестая трактует подобие многоугольников. В последних трёх книгах изложены основы стереометрии. Много из того, что было уже известно во времена Евклида (например, теория конических сечений), в “Началах” не изложено.

Каждую книгу Евклид начинает с определения тех понятий, которыми ему приходится в этой книге оперировать. ***Первой книге предпосланы 23***

определения. Приводим первые 8 из них. (Здесь и далее выделено нами). Вслед за определениями Евклид приводит постулаты и аксиомы. (Примечание: ***В разных изданиях “Начал” списки постулатов и аксиом не тождественны***). Вслед за ними Евклид излагает теоремы геометрии, располагая их в порядке логической зависимости так, чтобы каждое предложение можно было доказать на основании предыдущих предложений, постулатов и аксиом. … ***Ни одно из определений не используется в доказательствах каких-либо теорем. Они являются по существу бесполезными и могут быть опущены без всякого ущерба для последующих рассуждений.*** (Конец конспекта).

Столь длинная выдержка из чужой публикации представляется здесь оправданной, так как она конструктивно описывает содержание “Начал” (это важно, чтобы само слово “Начала” не уподоблялось абстрактному символу) и даёт представление о сущности дедукции. Кроме того, она показывает, что объём данной работы соответствует очень небольшой части “Начал” и действительно затрагивает только основы геометрии. Но позвольте не согласиться с выделенным утверждением относительно определений Евклида по двум причинам:

1. В русской летописи известно явление неточного переписывания текстов. Летописцы составляли своды, опуская несущественное на их взгляд, вносили свои комментарии; переписчики иногда занимались выборкой, а не копированием.

“Начала” переводились на многие языки, до книгопечатания неоднократно переписывались, при освоенном книгопечатании редакторы вносили свои изменения (Следы подобных изменений выделены нами в вышеприведённом конспекте). По аналогии с русскими летописями можно ожидать, что современники получили не оригинал, а искажённые копии. Не каждый читатель имеет доступ к оригиналу. Изучая геометрию по [7] и другим современным источникам, мы не получаем представления об авторском стиле Евклида.

Может быть, в синонимах, омонимах, в контексте образные определения участвовали в рассуждениях автора, но переписчики их растеряли.

2. Смысл слов со временем меняется, особенно при переводах на другие языки. Для примера – конспект по [4]:

Аксиома (греч.) – исходное, принимаемое без доказательства положение какой-либо теории, лежащее в основе доказательства других её положений. Аристотель считал, что аксиомы не требуют доказательства по причине своей ясности и простоты. Переосмысление проблемы обоснования аксиом изменило и содержание самого термина “Аксиома”. Аксиомы являются не исходным началом познания, а скорее его промежуточным результатом. Они обосновываются не сами по себе, а в качестве необходимых составных элементов теории: подтверждение теории есть одновременно и подтверждение её аксиом. (Конец конспекта).

С учётом указанных причин нельзя утверждать, что Евклид дал неточные определения или не использовал их в рассуждениях. И тем более нельзя поддерживать отзывы, подобные следующей цитате:“Ошибка Евклида состояла в том, что он пытался определить все используемые им понятия” [12, стр. 104].

Евклид на современный взгляд не строго, но всё-таки определил точку, линию, прямую линию, поверхность, плоскость, тело и их пограничную связь друг с другом [7,9]. Аксиоматика Д.Гильберта взяла из этого только точку, прямую и плоскость. Но это не изгнало из геометрии ломаные и кривые линии, в частности окружность. Без этих линий не понять, почему прямая является кратчайшей линией между двумя точками, почему мерой угла является дуга окружности. Не изгнало и поверхности: сферу, псевдосферу (поверхность Лобачевского), другие двумерные многообразия [7]. Всё это геометрические объекты анализа, их определения рассеяны по тексту рассуждений. Например, в работе [7, стр 45] при изложении аксиом порядка потребовалось дать определение отрезка, без которого трудно было изложить аксиому Паша, а затем доказать теорему 4.

Система аксиом – это неявное определение. Помимо него словарь по логике называет определение аналитическое, генетическое, классическое, номинальное, реальное, явное, неявное (в аксиоматически построенных теориях или контекстуальное), определение через абстракцию,…[4]. Эти примеры показывают, что как форма изложения мыслей, определения явно или неявно присутствуют в рассуждениях всегда. Скрытость в аксиоматике свойств объектов вынуждает тратить время на их выявление. В нашем построении геометрии ни одно из определений Евклида не отвергнуто. Они только даны в современной терминологии и уточнены в деталях. Существенные признаки всех объектов Евклида сохранены без изменения.

18.2. Аксиоматика или догматика.

Сверимся со словарём [13] :

Догма (греч.) – бездоказательное положение, принимаемое на веру, без критической проверки и без учёта конкретных условий его применимости.

Аксиома (греч.) – 1) исходное положение, которое в данной науке принимается без доказательства; 2) самоочевидная истина, не требующая доказательств.

Словарь по логике [4] слово "Догма" не приводит вообще, а слово "Аксиома" сопровождает статьёй (см. в предыдущем параграфе).

Сравнение показывает, что грань между догмой и аксиомой проходит по практике применения некоторого утверждения, статус которого то ли догма, то ли аксиома. "Принять на веру" – значит не искать доказательств и отвергать предлагаемые. "Не требовать доказательств" – это быть уверенным в их результате или знать о нём до обсуждения доказательств, а потому не желать совершать ради них усилия. Правда, современный смысл аксиомы по [4] предполагает некоторую условность во времени или в рамках теории. Из-за указанной разницы аксиомами занимаются учёные (как правило, материалисты, даже если их наука умозрительная), а догмами – богословы (хотя теология –тоже наука).

Конспект по [7, стр. 11, 37, 38] : Перечисление определений и аксиом, достаточных для строгого логического доказательства всех последующих теорем, называют аксиоматическим обоснованием геометрии…Аксиомы составляются с учётом накопленного геометрией эмпирического материала так, чтобы весь этот материал мог быть выведен из них логическими рассужениями. Удаляя из геометрии все ссылки на наглядную очевидность и оставляя лишь её логический каркас, мы получаем возможность и саму систему аксиом избирать с большой степенью произвола, приспособляя это выбор к той или иной конкретной области, которую желательно подвергнуть исследованию. (Конец конспекта).

Реплика: Зрение – одно из наших чувств, средств познания мира. Почему зрительные образы не должны использоваться в геометрических построениях? Но вернёмся к нашей теме.

Обоснование разных геометрий (общематематического значения и прикладных) за счёт смены аксиом, расширение области приложения выполненных исследований – это достойная цель. Плохо то, что из-за возникающей при этом омонимии и анархии “пользователи” геометрии Евклида вводятся в заблуждение, а молодое поколение теряет доступ к базовой модели пространства.

Так много разных геометрий используют слова “точка, прямая, плоскость, угол”, что трудно подыскать яркий пример омонимии. Но вот пример анархии [11, стр. 171] : Дедуктивное построение евклидовой геометрии, основанное на системе аксиом Евклида – Гильберта, довольно сложно. Трудности возникают уже в самом начале, при введении понятия меры для отрезков и углов. В связи с этим мы будем пользоваться другой системой аксиом, где эти трудности снимаются. Основными понятиями в нашем изложении будут точка, прямая и плоскость, отношение принадлежности…,отношение порядка…, “длина” для отрезков и “градусная мера” для углов. Эти понятия не определяются…(Конец цитаты).

Разве это не слишком большая “степень произвола”? И не с целью исследования, а в преподавании науки достаточно взрослым молодым людям. При таком обучении в умах обучающихся наука непременно окажется за догматической завесой. Генетическое построение геометрии не создаёт условий для подобного произвола.

Исторически сложилось так, что Н. И. Лобачевский первым взломал догматическое ограждение вокруг аксиом геометрии. Этому предшествовал труд разработки геометрии с отрицанием параллельности прямых по Евклиду. Непростой труд и виртуозная разработка. Можно сказать, что вера в независимость собственного мышления и правоту выводов исследования позволила Лобачевскому преодолеть налёт догматизма на понятии “Аксиома” и тем приблизить его к современному пониманию. Но хочется сосредоточить внимание на другом.

Сам автор не нашёл прикладной модели для своей геометрии, назвал её “воображаемой”. Тем самым намекалось, что в реальном мире нет места объектам со свойствами, аксиоматически определёнными автором. Время поправило Лобачевского. Освобождённые от догматического отношения к аксиомам, Клейн и Пуанкаре нашли способ интерпретировать неевклидову геометрию на евклидовой плоскости, а Бельтрами показал, что в евклидовом пространстве существует реальное тело (псевдосфера), на поверхности которого выполняется эта геометрия [6,7,12]. В работе [7] геометрические объекты Евклида (например, линейные элементы) порождают объекты с геометрией Лобачевского или используются при анализе свойств подобных объектов.

Перечисленные факты интересны тем, что они свидетельствуют о возможности, подобно сфере (O_{36}) и плоскости (O_{68}), конструктивного определения объектов неевклидовой геометрии. Значит возможно генетическое построение единой геометрии. А необходимость в этом есть, ведь пространство вокруг нас и в нас одно на всех.

Предполагается именно генетическое построение, а не аксиоматическое. Причины для этого следующие.

1. Аксиома параллельности разделила геометрию на евклидовскую и неевклидовскую, а требуется синтез чего-то общего. “Абсолютная” геометрия, то есть аксиоматика без аксиом параллельности, бедна приложениями и без параллельности ограничена в развитии. Проективная, сферическая геометрии узко специализированы. А генетическое построение может принять в себя один за другим все мыслимые объекты, может рассмотреть их взаимодействие, так как на совместное использование одного и того же места в пространстве не накладывает ограничений (A_{12}), и это создаёт условия для синтеза.

2. Многие теоремы при аксиоматическом методе доказываются от противного или ограничиваются доказательством существования [7]. Ценность таких доказательств опротестовывается сторонниками интуиционизма [2,4,10], а зачем делать геометрию ареной споров?

3. Конспект по [7, стр. 83, 84, 278] :

В основах математического анализа, то есть дифференциального и интегрального исчисления, известно предложение, выражающее принцип Дедекинда в множестве вещественных чисел:

Если все вещественные числа распределены на два класса так, что при этом : 1) каждое число относится к одному и только к одному классу, и каждый класс содержит числа; 2) каждое число первого класса меньше каждого числа второго класса, то либо в первом классе существует наибольшее число, либо во втором – наименьшее.

Смысл этого предложения заключается в отрицании двух возможностей: наличия замыкающих элементов в каждом классе и отсутствии замыкающих элементов в каждом классе. Из теоремы 39 (об упорядоченности множества всех точек на числовой оси) и принципа Дедекинда для чисел следует принцип Дедекинда для прямой:

Теорема 40. *Если все точки прямой распределены на два класса так, что при этом : 1) каждая точка относится к одному и только к одному классу, и каждый класс содержит точки; 2) каждая точка первого класса предшествует каждой точке второго, то либо в первом классе существует точка, которой предшествуют все остальные точки первого класса, либо во втором классе существует точка, которая предшествует всем остальным точкам второго класса.*

Говорят, что эта точка определяет дедекиндово сечение прямой. Эквивалентность теоремы 40 аксиомам непрерывности (Архимеда и Кантора) выражает следующая теорема 41:

Если к аксиомам связи, порядка, конгруэнтности присоединить принцип Дедекинда, то аксиомы Архимеда и Кантора могут быть доказаны.

В проективной геометрии [7, стр. 278] теорема 40 выражена в виде аксиомы: *В каждом дедекиндовом сечении упорядоченного множества точек разрезанной проективной прямой точно один из двух классов имеет замыкающий элемент.* (Конец конспекта).

Наш комментарий: Проведём дедекиндово сечение по вершине развёрнутого угла. Лучи этого угла могут считаться двумя классами, о которых говорит принцип Дедекинда, так как они лежат на одной прямой и в сумме составляют эту прямую. Тогда по теореме 40, а также аксиоме непрерывности проективной геометрии только один луч содержит вершину угла, другой начинается вне вершины. А это не согласуется с определением развёрнутого угла в любой геометрии. Да и небесконечный (непродолжаемый) участок прямой с “открытым” концом в описанном сечении Дедекинда в геометрии не определён – отрезком или лучом он не является, так как не соответствует определению этих объектов.

Как разрешить это противоречие? Думается, что если бы автор [7] или его предшественники обратили внимание на эту неувязку, то как-нибудь перефразировали бы формулировки. Но в связи с обсуждаемым вопросом важно другое.

Цитата по [4, стр. 10] : Аксиоматический метод является лишь одним из методов построения научного знания. Он имеет ограниченное применение, поскольку требует высокого уровня развития аксиоматизируемой содержательной теории. Как показал К. Гёдель, достаточно богатые научные теории не допускают полной аксиоматизации. Это свидетельствует об ограниченности аксиоматического метода и невозможности полной формализации научного знания. (Конец цитаты).

Эту цитату можно считать весомым аргументом против применения аксиоматического метода в его классическом виде при построении единой геометрии.

Для иллюстрации возможностей генетически построенной в данной работе геометрии обсудим описанное недоразумение.

У каждой промежуточной точки линии (O_{21}) две соседние точки, и только концы линии имеют по одной соседней точке (O_{23}). Любую точку линии в связи с поставленной задачей можно считать концом участка линии (O_{25}). В разделе 4.3 рассмотрена ситуация продолжения линии за её конец и показано, что бывший конец с одной соседней точкой становится промежуточной точкой, при этом соседняя ей точка вовлекается в линию из пространства со стороны движения по линии к новому намеченному концу. В разделе 5.3 рассмотрена ситуация сложения прямолинейных отрезков и показано, как совмещаемые концы слагаемых становятся промежуточной точкой суммы.

В данном случае линия разрезается на первый и второй участки (дедекиндово сечение). Точка разреза (вершина развёрнутого угла) сохраняет за собой соседнюю точку от первого луча в составе этого луча (недоразумений с определениями нет) и соседнюю точку от второго луча в его составе (и для этого луча недоразумений с определениями нет). По принципу A_{12} нет ограничения на учёт точек в составе то одного объекта, то другого, или одновременно в нескольких. Таким образом, дискретность точек (O_4), отношение соседства точек ($O_6 – A_9$), понимание линии, как цепочки попарно соседних точек (O_{21}) образуют систему определений, достаточную для объявления принципа Дедекинда в геометрии некорректным.

Для того, чтобы не создавалось впечатление от сказанного, как об удачной игре слов, отметим следующее.

У чисел есть свои свойства: значение, одна из цифровых форм или символ (□, e, sin(□/3)), место на числовой оси, окрестность с принятой точностью, правило вычисления, которое в сложных случаях может быть связано с разложением некоторой функции в бесконечный ряд. У геометрической точки индивидуальное свойство одно – место в пространстве относительно соседних точек (A_9).

В работе [7] теорема 39 сформулирована так: *Между упорядоченным множеством всех точек прямой и упорядоченным множеством всех вещественных чисел возможно установить такое взаимно однозначное соответствие, при котором соответствующие элементы находятся в одинаковых отношениях порядка.*

Мы не оспориваем эту теорему. Но она предусматривает **взаимно однозначное** соответствие, а при разрезании прямой (геометрического объекта) каждому лучу (геометрическому объекту) по определению требуется начало (концевая точка) – это его геометрическое свойство. В дедекиндовом сечении числового ряда нет необходимости раздваивать точку сечения, а в геометрии для сохранения свойств её объектов такая необходимость есть. Но происходит ли удвоение количества точек? Конечно, нет. Отношение соседства позволяет разорвать связь с той стороны, с которой она в момент анализа не рассматривается. Ведь если мы говорим “первый луч”, то в объём этого понятия не входят точки и их связи со стороны второго луча.

Приведённый анализ логики отрицания принципа Дедекинда в геометрии показывает, что не всегда результаты исследования числовых множеств могут быть формально перенесены в геометрию. И это есть ещё один аргумент в пользу генетического построения геометрии.

(Конец работы)

Козьма Прутков: Нельзя объять необъятное.

От автора: Вопросы, замечания, отклики принимаю по адресу:

Россия, 301841, Тульская область, город Ефремов, улица Дружбы, дом 51/4, квартира 29, Володченко Анатолию Павловичу.