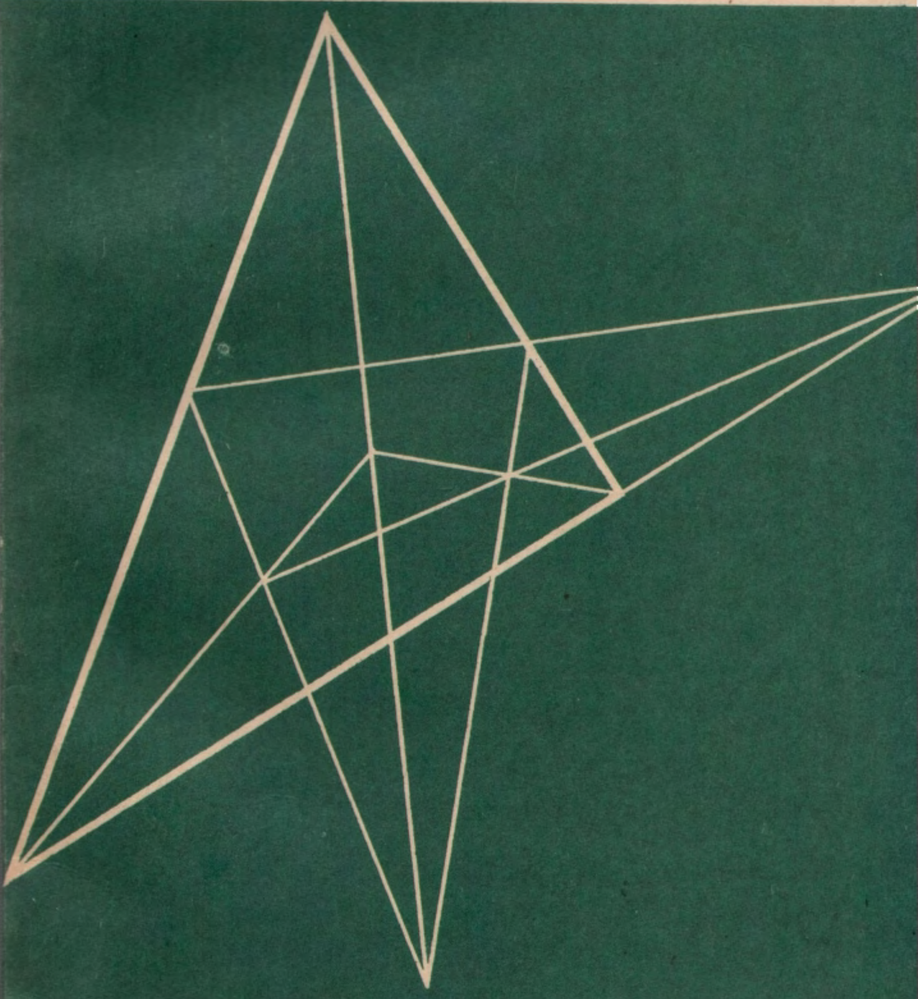
Ж. ЛЕЛОН-ФЕРРАН

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА
ВВОДНЫЕ КУРСЫ

ОСНОВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ



LES FONDEMENTS DE LA GÉOMÉTRIE

JACQUELINE
LELONG-FERRAND

Presses Universitaires
de France

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА

ВВОДНЫЕ КУРСЫ

Ж. ЛЕЛОН-ФЕРРАН

ОСНОВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ

Перевод с французского
В. В. РЫЖКОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

МОСКВА «МИР» 1989

ББК 22.151.1
Л43
УДК 514

Лелон-Ферран Ж.

Л43 Основания геометрии: Пер. с франц.— М.: Мир, 1989. — 312 с.

ISBN 5-03-001008-4

Монография учебного характера, написанная французским математиком на основе университетского курса лекций. Книга примыкает по тематике к известному двухтомнику М. Берже «Геометрия» (М.: Мир, 1984), но отличается от него простотой и доступностью. Изложение начинается с основных понятий и доводится до весьма общих и глубоких теорем геометрии. Приведено более 100 упражнений для самостоятельного решения.

Для математиков разной квалификации, преподавателей, аспирантов и студентов университетов и пединститутов, учителей и школьников старших классов.

Л $\frac{1602050000-283}{041(01)-89}$ 9—89 **ББК 22.151.1**

Редакция литературы по математическим наукам

ISBN 5-03-001008-4 (русск.)
ISBN 2-13-038851-5 (франц.)

ОТ ПЕРЕВОДЧИКА

Предлагаемая вниманию советского читателя книга известного французского математика Жаклин Лелон-Ферран представляет собой руководство, рассчитанное, в «пересчете» на нашу систему образования, на студентов не ранее чем с третьего — четвертого семестра обучения. Она также может быть полезна аспирантам и преподавателям математики в средней школе и педагогическом институте.

Структурно материал книги можно подразделить на три части. Первая из них (гл. I) представляет собой детальное изложение теории действительных чисел, основанное на их представлении бесконечными десятичными дробями. Вторая (гл. II—V) содержит систематическое изложение теории векторных, аффинных и проективных пространств над произвольным телом, а также элементов геометрической алгебры (аксиоматическая «реконструкция» аффинной и проективной геометрии в гл. V). Наконец, третья часть (гл. VI) посвящена основаниям геометрии в традиционном смысле: построению абсолютной геометрии исходя из понятия метрической плоскости; геометрия Лобачевского развита в модели Пуанкаре. Каждая из названных частей в достаточной мере независима от других. От читателя требуется знание основ линейной алгебры и аналитической геометрии (в коммутативном случае), а также начальных сведений о группах.

Естественное стремление переводчика сохранить привлекательные черты стиля оригинала наталкивалось на трудности, вызванные в основном различиями в русской и французской математической терминологии. В ряде случаев по этому поводу даны пояснения в примечаниях.

Значительную помощь в работе над переводом книги оказали уточнения и исправления, присланные автором для русского издания книги; переводчик считает своим приятным долгом выразить г-же Лелон-Ферран свою искреннюю благодарность.

В. В. Рыжков

ПРЕДИСЛОВИЕ

Находящаяся в течение ряда лет в опале, Геометрия снова входит в честь, обогащенная точностью лежащих в ее основе алгебраических структур. Этому обновлению способствовали многие сочинения и среди них замечательная «Геометрия» Марселя Берже; в ряде университетов введено преподавание геометрической алгебры для будущих учителей. В то же время аксиоматические основания геометрии, не считая евклидовой, во Франции все еще находятся в пренебрежении, тогда как в англоязычных и немецкоязычных странах они являются предметом многочисленных исследований и публикаций; немногие изданные у нас переводы не кажутся легким чтением. Как нам думается, здесь образовался пробел, который и должна заполнить эта книга, возникшая на основе курса, читанного в Университете Пьера и Марии Кюри с 1978 по 1981 г. При подготовке ее к изданию нашей целью было предложить изучающим геометрию, как студентам, так и преподавателям, книгу, легкую для чтения, в которой они могли бы найти:

— углубленные сведения об основных структурах, раскрывающие наименее известные их аспекты (теория размерности, дуальность);
— прочную основу для различных геометрий, опирающуюся на аксиомы, наглядно отраженные на чертежах;
— полные и прозрачные доказательства великих теорем геометрии;
— связи между различными аспектами геометрии;
— ответы на вопросы, которые ставит похвальная забота об общности, например: что произойдет в случае произвольного тела или бесконечной размерно-

сти? Какая геометрия получится, если отбросить пятый постулат Евклида?

В целях большей ясности книга начинается с построения и характеризации поля действительных чисел, используемого в дальнейшем для обоснования обычной геометрии и неотделимого от вопроса об «измерении величин». Эта глава при первом чтении может быть опущена, и читатель может начать сразу с глав II и III, посвященных углублению знаний о векторных и аффинных структурах. Здесь мы обращаемся к случаю произвольного основного тела, необязательно коммутативного, что необходимо для понимания роли теорем Дезарга и Паппа и может возбудить у читателя новый интерес к теориям, уже ставшим классическими.

После гл. IV, посвященной проективной геометрии, мы показываем в гл. V, как можно воссоздать аффинную или проективную геометрию, отправляясь от аксиом инцидентности и (в случае плоскости) аксиомы Дезарга или Паппа. Действительная аффинная плоскость является предметом отдельного изучения с использованием результатов гл. I.

В гл. VI возобновляется традиционное построение элементарной геометрии, облегченное предварительным знанием поля $\mathbb{R}$ и независимое от постулата Евклида: достаточно продвинутое изучение позволяет нам установить ряд предложений, эквивалентных этой аксиоме (например, существование прямоугольника), и увидеть, что произойдет, если от нее отказаться. Мы заканчиваем обзором гиперболической неевклидовой геометрии.

Изложение дополнено многочисленными упражнениями, позволяющими читателю проверить на деле приобретенные знания и получить много интересных результатов, для которых не нашлось места в книге.

Чтение этого сочинения потребует лишь знакомства с алгебраическими понятиями в объеме программы первого курса университета. Мы надеемся, что нам удалось дать достаточно подробные и простые доказательства, которые не потребуют от читателя чрезмерных усилий (но и не скроют никаких трудностей). Мы надеемся также сделать понятными многие красивые теоремы, лежащие в основе геометрии, и принести пользу в деле подготовки преподавателей. Наша цель будет полностью достигнута, если эта книга вызовет у читателя желание продолжить занятия и обратиться к более специальным работам; для этого мы приводим достаточно обширную библиографию, отражающую интерес к этим вопросам во многих странах.

Я хочу выразить здесь свою признательность профессору Полю Деювелю и издательству «Presses Universitaires de France», взявшим на себя публикацию этого труда в серии «Математика»; я благодарю также Алину Робер и Мирей Морель за плодотворное сотрудничество в деле преподавания оснований геометрии и дружескую поддержку в деле издания этого курса. Наконец, большую услугу нам оказал наш коллега Жан Лефевр, прочитав и исправив корректуры.

Новые издания книги выиграли благодаря замечаниям наших читателей, и в особенности Ги Хирша и Леонса Лезье; я им весьма признательна.

Глава I

ПОЛЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

ВВЕДЕНИЕ

Этимологически, геометрия есть наука об измерениях на поверхности земли; проистекая из размышлений землемеров, она неотделима от понятия числа. Означает ли это, как мы часто слышим, что метрическую геометрию можно надлежащим образом изучать, лишь овладев в совершенстве понятием действительного числа? Иными словами: должно ли изучению геометрии предшествовать строгое построение поля действительных чисел? На это можно ответить просто: да, если речь идет об учителе; нет, если речь идет об учащемся. Для того чтобы приступить к изучению евклидовой геометрии, достаточно не слишком определенного представления о числе: свойства чисел, которые придется применять (*отношение порядка*, структура поля, существование квадратных корней), естественно вводятся по ходу изложения. Далекое от предположения о наличии полных знаний этих свойств, преподавание геометрии дает, напротив, серьезные мотивации для расширения представлений о числе: это предусматривают новые программы для студентов. Однако для того, чтобы вести учеников по этому пути, преподаватель должен знать, куда приводит такое эмпирическое изложение. Вот почему мы начинаем наш труд с элементарного построения поля действительных чисел и изучения его характерных свойств, находящих приложения в геометрии.

Чтобы не отягощать изложение, мы не будем говорить здесь о топологии $\mathbb{R}$: она естественно вытекает из упорядоченности; именно это, интуитивно гораздо более ясное понятие, мы изучим подробно. Изложение топологических свойств $\mathbb{R}$ можно найти в любом курсе анализа, например в [BO2], гл. IV, где содержится исторический очерк, и в [LF—AR], т. 2.

1. БЕСКОНЕЧНЫЕ ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ

Перелистывая разные книги по анализу, мы замечаем, что существует много способов «построить» $\mathbb{R}$. Несомненно, наиболее приемлемый из них тот, который основан на бесконечных десятичных дробях: неограниченно продолжаемое действие деления и, более общо, задача *измерения величин* в десятичной системе счисления приводят к записи таких символов. Поэтому естественно, что понятие о таком подходе дается в начале обучения. Другое преимущество этой конструкции состоит в том, что она дает аксиоматическую характеризацию[1]) поля действительных чисел (см. § 6—8), что позволяет доказать эквивалентность различных конструкций $\mathbb{R}$ (см. [LF2]).

Аксиомы, возникающие из задачи измерения величин, мы проанализируем далее (§ 5). А пока мы только покажем, что эта задача приводит к записи бесконечных десятичных дробей.

При выбранной единице измерения *u мерой с точностью до единицы по недостатку* величины g называется наибольшее число «содержащихся» в g единиц, т. е. наибольшее целое число p, удовлетворяющее условию $pu \leqslant g$. Это целое p_0 характеризуется двойным неравенством

$$p_0u \leqslant g < (1 + p_0)\,u. \tag{1}$$

Ошибка, допускаемая при замене g на p_0u, таким образом, меньше единицы u; для получения лучших приближенных значений для меры g берут все меньшие и меньшие «единицы».

Применяя десятичную систему счисления, единицу каждый раз делят на 10; при этом $u_n = 10^{-n}u$ называется *десятичной единицей n-го порядка.* При этой новой единице измерения приближенной мерой g (по недостатку) служит единственное целое число p_n, удовлетворяющее неравенствам

$$p_nu_n \leqslant g < (1 + p_n)\,u_n,$$

---

1) Напомним, что свойство некоторого объекта называется характеристическим, если он является единственным объектом с этим свойством.

или, что то же самое,

$$10^{-n}p_n u \leqslant g < 10^{-n}(1+p_n)\,u.$$

Десятичная дробь $D_n = 10^{-n}p_n$ называется *приближенной десятичной мерой g порядка n.*

Можно отметить (доказательство дается дальше), что переход от дроби D_n к дроби D_{n+1} сводится к добавлению к D_n одного нового десятичного знака. Все десятичные дроби D_n имеют, таким образом, одну и ту же целую часть $D_0 = p_0$, и существует бесконечная последовательность $(d_n)_{n \geqslant 1}$ целых чисел, принимающих значения от 0 до 9, таких, что для любого $n \geqslant 1$

$$D_n = D_0 + \overline{0,\ d_1 d_2 \ldots d_n} = D_0 + \sum_{k=1}^{n} 10^{-k} d_k.$$

Для удобства мы примем следующее соглашение (используемое в таблицах логарифмов):

Обозначения. Для любой системы[1] $(d_0, d_1, \ldots, d_n)$ целых чисел, такой, что $d_0 \in \mathbb{Z}$ и $0 \leqslant d_k \leqslant 9$ при всех $k \geqslant 1$, символ $d_0,\ d_1 d_2 \ldots d_n$ представляет *десятичную* дробь

$$d_0 + \overline{0,\ d_1 d_2 \ldots d_n} = d_0 + \sum_{k=1}^{n} 10^{-k} d_k.$$

Очевидно, что каждая десятичная дробь может быть записана в таком виде и притом единственным образом, если наложить условие ($d_n \neq 0$ либо $n = 0$). Однако *следует быть начеку при записи противоположного числа*: например, противоположным к 2,34 будет (—3), 66.

Теперь мы готовы дать

▶ [2]) Определение 1.1. *Бесконечной десятичной дробью* (сокращенно БДД) называется последовательность $(x_n)_{n \in \mathrm{N}}$ относительных целых чисел, удовлетворяющих условиям $0 \leqslant x_n \leqslant 9$ при $n \geqslant 1$; такая последовательность записывается в виде $x = x_0,\ x_1 \ldots x_n \ldots$.

---

[1]) Слово «система» употреблена в смысле «конечная последовательность».

[2]) Этим символом помечены наиболее важные формулировки. — *Прим. перев.*

Целое x_n называется *десятичным знаком x n-го порядка* и обозначается $d_n(x)$; десятичная дробь x_0, $x_1 \ldots x_n$ обозначается $D_n(x)$; относительное целое число x_0 называется *целой частью x*.

Например, (-2), $0 \ldots 0 \ldots$ и (-2), $9 \ldots 9 \ldots$ суть БДД с целой частью -2.

Множество всех БДД будем обозначать $\mathscr{D}$; мы положим его в основу построения поля действительных чисел. Понятно, что аналогичное построение можно было бы осуществить в системе счисления с любым основанием.

2. ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКИЙ ПОРЯДОК НА $\mathscr{D}$

Для равенства двух БДД x и y, по самому определению, необходимо и достаточно, чтобы $d_n(x) = d_n(y)$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Если $y \neq x$, то множество целых $n \in \mathbb{N}$, таких, что $d_n(x) \neq d_n(y)$, следовательно, не пусто; значит, в нем найдется наименьший элемент[1]), для которого имеет место одно из двух неравенств: $d_n(x) > d_n(y)$, $d_n(y) > d_n(x)$.

► Предложение 2.1. Полагая $y \geqslant x$, если $y = x$ или если для наименьшего целого n, такого, что $d_n(x) \neq d_n(y)$, выполняется $d_n(y) > d_n(x)$, мы устанавливаем на *$\mathscr{D}$ отношение линейного порядка.*

Доказательство. Очевидно, что введенное отношение рефлексивно и антисимметрично. Для доказательства его *транзитивности* достаточно рассмотреть три БДД x, y, z, для которых $y > x$ и $z > y$. Обозначая через m (соотв. n) наименьшее целое, такое, что $d_m(y) \neq d_m(x)$ (соотв. $d_n(z) \neq d_n(y)$), положим $p = \inf(m, n)$. По предположению, для всех $k < p$ имеем $d_k(x) = d_k(y) = d_k(z)$; смотря по тому, будет ли $p = m$ или $p = n$, окажется верным одно из неравенств $d_p(y) > d_p(x)$ или $d_p(z) > d_p(y)$. В обоих случаях $d_p(z) > d_p(x)$ и, значит, $z > x$.

Наконец, замечание, сделанное перед предложе-

[1]) Мы пользуемся тем фактом, что любая непустая часть $\mathbb{N}$ содержит наименьший элемент, т. е. $\mathbb{N}$ — «вполне упорядоченное» множество. Далее используется и то, что любая мажорируемая часть $\mathbb{N}$ или $\mathbb{Z}$ содержит наибольший элемент.

нием 2.1, показывает, что любые две БДД x, y *сравнимы*, и, следовательно, заданный порядок является линейным. □

Определенное таким образом отношение порядка на $\mathscr{D}$ сходно с тем, которое применяется при расположении слов в словарях: слова рассматриваются как конечные последовательности букв в алфавите, упорядоченном от A до Z. По этой причине порядок, установленный на $\mathscr{D}$, называется *лексикографическим*. Заметим, что понятие лексикографического порядка распространяется на любое множество последовательностей, элементы которых принадлежат линейно упорядоченному множеству.

Из этого определения немедленно вытекает

▶ Предложение 2.2. Если x — БДД, для которой

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 \leqslant x \leqslant 10^{-n},$$

то x есть нулевая БДД (образованная последовательностью нулей).

Доказательство. В силу определения упорядоченности все десятичные знаки x равны нулю. □

▶ Заметим, что неравенство $y \geqslant x$ равносильно неравенству

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad D_n(y) \geqslant D_n(x).$$

Каноническое вложение j множества $\mathbb{D}$ в $\mathscr{D}$

Обозначим через $\mathbb{D}$ множество относительных десятичных дробей и используем условие, согласно которому всякой десятичной дроби $d = d_0, d_1 \ldots d_n$ можно поставить в соответствие БДД $d_0, d_1 \ldots d_n 0 \ldots \ldots 0 \ldots$, получаемую из данной добавлением бесконечной последовательности нулей вслед за десятичными знаками d. Если $\mathscr{D}$ снабдить лексикографическим порядком, а на $\mathbb{D}$ рассмотреть естественный порядок, то, как легко видеть, задаваемое этим соответствием отображение j: $\mathbb{D} \to \mathscr{D}$ есть строго возрастающее вложение.

Это вложение j называется *каноническим*; оно позволяет отождествить $\mathbb{D}$ с подмножеством в $\mathscr{D}$ и сравнивать БДД с десятичными дробями. В частности, каждая БДД $x = x_0, x_1 \ldots x_n \ldots$ удовлетворяет неравенствам $x_0 \leqslant x < x_0 + 1$ и $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ x \geqslant x_0, x_1 \ldots x_n$.

Более того, если существует целое $n \geqslant 1$, такое, что $x_n \neq 9$, то также $x < x_0, x_1 \ldots (x_n + 1)$.

Теорема о верхней грани

Определение 2.1. Говорят, что подмножество A линейно упорядоченного множества X имеет *верхнюю грань*[1]) $b \in X$, если

1) b есть мажоранта A, т. е.

$$(\forall x \in A) \quad x \leqslant b;$$

2) b есть *наименьшая из мажорант* A, т. е. для любого $a \in X$, такого, что $a < b$, в A существует элемент x со свойством $x > a$.

Если такой элемент b существует, то он *единствен* и обозначается $\sup A$.

▶ Теорема 2.3. Всякое *непустое* и *мажорируемое* подмножество A множества $\mathscr{D}$ имеет *верхнюю грань.*

Доказательство. Пусть $a = a_0, a_1 \ldots a_n \ldots$ есть некоторая мажоранта для A. Если $x = x_0, x_1 \ldots x_n \ldots$ — произвольный элемент A, то $x \leqslant a$ и $x_0 \leqslant a_0$. Множество $A_0 = \{d_0(x) \mid x \in A\}$ целых частей элементов из A есть часть $\mathbb{Z}$, мажорируемая числом a_0; отсюда вытекает, что A_0 имеет наибольший элемент b_0 (см. примечание в начале § 2).

Обозначим через B_0 непустое множество, образованное теми элементами A, целая часть которых равна b_0, т. е. $B_0 = \{x \in A \mid d_0(x) = b_0\}$; поскольку десятичные знаки порядка $\geqslant 1$ суть целые, лежащие между 0 и 9, то можно положить

$$b_1 = \sup \{d_1(x) \mid x \in B_0\}, \qquad B_1 = \{x \in B_0 \mid d_1(x) = b_1\}$$

(B_1 образовано теми элементами из B_0, первый десятичный знак которых — наибольший возможный). Ин-

[1]) Наряду с термином «верхняя грань» употребляются также термины «точная верхняя грань» и «супремум». — *Прим. перев.*

дуктивно мы определяем последовательность (B_n) непустых подмножеств в A и последовательность (b_n) целых чисел $0 \leqslant b_n \leqslant 9$ при $n \geqslant 1$, такие, что $(\forall n \in \mathbb{N})$

$$b_{n+1} = \sup \{d_{n+1}(x) \mid x \in B_n\},$$
$$B_{n+1} = \{x \in B_n \mid d_{n+1}(x) = b_{n+1}\}.$$

По индукции проверяется, что B_n есть множество элементов x из A, таких, что $D_n(x) = b_0,\ b_1 \ldots b_n$ (см. обозначения в конце § 1). Любая мажоранта A не может быть меньше $b = b_0,\ b_1 \ldots b_n \ldots$; с другой стороны, по построению, b есть мажоранта для A. Итак, $b = \sup A$. □

Аналогично доказывается, что *любое непустое и минорируемое подмножество $\mathscr{D}$ имеет нижнюю грань.*

Пример. БДД, образованную из последовательности нулей, обозначим $j(4)$; множество $\mathscr{D}^- = \{x \in \mathscr{D} \mid x < j(0)\}$ состоит из БДД с целой частью $x_0 < 0$. Его верхняя грань есть БДД $(-1),\ 9 \ldots 9 \ldots$, все десятичные знаки которой порядков $\geqslant 1$ равны 9. Множество $\mathscr{D}^+ = \{x \in \mathscr{D} \mid x > j(0)\}$ имеет своей нижней гранью $j(0)$.

3. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА. ДЕСЯТИЧНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ

Мы определим действительные числа с помощью их представления посредством БДД. Но сначала следует исключить БДД, называемые «несобственными».

Обозначения. Для каждого целого k, $0 \leqslant k \leqslant 9$, через $\mathscr{D}_k$ обозначим совокупность БДД $x = x_0,\ x_1 \ldots \ldots x_n \ldots$, таких, что $x_n = k$ для всех n, начиная с некоторого (периодические БДД с периодом (k)). При $k = 9$ эти БДД будем называть *несобственными.*

В § 2 мы определили каноническое вложение j множества $\mathbb{D}$ в $\mathscr{D}$, образ которого $j(\mathbb{D})$ очевидно есть $\mathscr{D}_0$. Менее очевидно

Предложение 3.1. Отображение i множества $\mathbb{D}$ на $\mathcal{D}_9$, определяемое условиями

$$i(d) = (d-1),\ 9 \ldots 9 \ldots, \text{ если } d \in \mathbb{Z},$$
$$i(d) = d_0,\ d_1 \ldots d_{n-1}(d_n - 1)\, 9 \ldots 9 \ldots, \text{ если }$$
$$d = d_0,\ d_1 \ldots d_n, \text{ где } d_n \neq 0,$$

есть строго возрастающая биекция.

Для каждого $d \in \mathbb{D}$ его образ $i(d)$ будет называться *несобственным десятичным разложением* d, в то время как БДД $j(d)$ — *собственным*.

Заметим, что всегда $i(d) < j(d)$ и не существует БДД x, для которой $i(d) < x < j(d)$.

Каноническое вложение j позволило нам отождествить $\mathbb{D}$ с частью $\mathcal{D}$; обобщим теперь понятие числа, приняв

▶ Определение 3.1. *Действительными числами* называются элементы множества $\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_9$, т. е. бесконечные десятичные разложения, в которых бесконечное число десятичных знаков отлично от 9.

▶ *Множество действительных чисел обозначается* $\mathbb{R}$, *и каждая десятичная дробь* d *отождествляется с действительным числом* $j(d)$.

Распространение на $\mathbb{R}$ теоремы о верхней грани

▶ Теорема 3.2. Каждое *непустое и мажорируемое* подмножество $A \subset \mathbb{R}$ имеет в $\mathbb{R}$ *верхнюю грань.*

Доказательство. Пусть b — верхняя грань A в $\mathcal{D}$. Если $b \notin \mathcal{D}_9$, то b есть верхняя грань A в $\mathbb{R}$. В противном случае b есть несобственное разложение десятичной дроби $b' > b$; поскольку не существует БДД, лежащей между b и b', то b' — наименьшая мажоранта A в $\mathbb{R}$, т. е. верхняя грань A. □

Заметим, что с учетом отождествления $\mathbb{D}$ с $\mathcal{D}_0$ для любого действительного числа $x = x_0,\ x_1 \ldots x_n \ldots$ имеем

$$x = \sup_{n \in \mathrm{N}} D_n(x), \quad \text{где} \quad D_n(x) = x_0,\ x_1 \ldots x_n. \tag{1}$$

Десятичные приближения действительного числа

▶ Определение 3.2. Если $x = x_0, x_1 \ldots x_n \ldots$ — действительное число, то десятичная дробь $D_n(x) = x_0, x_1 \ldots x_n$ называется *десятичным приближением порядка n числа x.*

Предложение 3.3. $D_n(x)$ есть единственная десятичная дробь вида $10^{-n}p$, где $p \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющая неравенствам

$$D_n(x) \leqslant x < D_n(x) + 10^{-n}. \tag{2}$$

Доказательство. Левое неравенство очевидно; правое вытекает из того, что $D_n(x) + 10^{-n}$ равно $x_0 + 1$, если $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 9$, и $x_0, x_1 \ldots (x_p + 1)$ в остальных случаях, где p — наибольшее целое $\leqslant n$, такое, что $x_p \neq 9$.

Можно также воспользоваться тем фактом, что несобственное разложение десятичной дроби $D_n(x) + 10^{-n}$ есть $x_0, x_1 \ldots x_n 9 \ldots 9 \ldots$.

С другой стороны, если бы для двух целых p, p' выполнялись условия

$$10^{-n}p \leqslant x < 10^{-n}p + 10^{-n} \quad \text{и}$$
$$10^{-n}p' \leqslant x < 10^{-n}p' + 10^{-n},$$

то из них вытекало бы, что

$$p < 1 + p' \quad \text{и} \quad p' < 1 + p, \quad \text{откуда} \quad p' = p. \ \square$$

▶ Определение 3.3. Пусть d и ε — две десятичные дроби. Говорят, что d является *десятичным приближением действительного числа x* с точностью до ε, если $d - \varepsilon \leqslant x \leqslant d + \varepsilon$ [1]).

Из вышеизложенного видно, что $D_n(x)$ есть приближенное значение x с точностью до 10^{-n}; очевидно, что это приближение не единственное.

Следующее предложение позволяет устанавливать *равенство действительных чисел* без знания соответствующих БДД.

▶ Предложение 3.4. Для того чтобы два действительных числа x, y были равны, необходимо и доста-

---

[1]) У автора точнее: «с точностью не менее чем до ε». — *Прим. перев.*

точно, чтобы при каждом $n \in \mathbb{N}$ они допускали *одинаковое десятичное приближение с точностью до* 10^{-n}.

Доказательство. Необходимость условия следует из того, что равенство $y = x$ равносильно $(\forall n \in \mathbb{N})\ D_n(x) = D_n(y)$.

Для доказательства достаточности рассмотрим действительные числа x, y, которым можно сопоставить последовательность (d_n) десятичных дробей, удовлетворяющих условиям

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ d_n - 10^{-n} \leqslant x \leqslant d_n + 10^{-n},$$
$$d_n - 10^{-n} \leqslant y \leqslant d_n + 10^{-n}.$$

Тогда для любой пары целых чисел $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ имеем

$$d_p - 10^{-p} \leqslant x < D_q(x) + 10^{-q} \quad \text{и} \quad y \leqslant d_p + 10^{-p},$$

откуда

$$(\forall p \in \mathbb{N}) \quad D_q(y) \leqslant D_q(x) + 10^{-q} + 2 \cdot 10^{-p},$$

что влечет за собой

$$D_q(y) - D_q(x) - 10^{-q} \leqslant \inf_{p \in \mathbb{N}} 2 \cdot 10^{-p} = 0.$$

Положим $x = x_0, x_1 \ldots x_n \ldots$; поскольку $x \notin \mathscr{D}_9$, для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется целое $q > n$, такое, что $x_q \neq 9$, и поэтому

$$D_n(y) \leqslant D_q(y) \leqslant D_q(x) + 10^{-9} = x_0, x_1 \ldots x_n \ldots (x_q + 1).$$

Следовательно, при всех $n \in \mathbb{N}$

$$D_n(y) \leqslant x_0, x_1 \ldots x_n = D_n(x)$$

и $y \leqslant x$. Меняя ролями x и y, найдем также, что $x \leqslant y$, и, значит, $y = x$. □

В завершение этого параграфа установим

▶ Предложение 3.5. *Множество* $\mathbb{R}$ *несчетно.*

Рассуждая от противного, предположим, что все действительные числа можно расположить в виде последовательности $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}}$; пусть $x_{\alpha, n}$ при каждом $n \in$

$\in \mathbb{N}$ обозначает n-й десятичный знак x_α. Для каждого n можно выбрать y_n отличным от $x_{n,n}$ и лежащим между 0 и 8 при $n \geqslant 1$. Тогда БДД $y = y_0, y_1 \ldots y_n \ldots$ есть действительное число, не принадлежащее последовательности (x_α), что противоречит допущению. □

4. СЛОЖЕНИЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ. ГРУППОВАЯ СТРУКТУРА

Пусть $x = x_0, x_1 \ldots x_n \ldots$ и $y = y_0, y_1 \ldots y_n \ldots$ — два произвольных действительных числа. При каждом $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$D_n(x) \leqslant x < x_0 + 1, \quad D_n(y) \leqslant y < y_0 + 1.$$

Множество десятичных дробей вида $D_n(x) + D_n(y)$ мажорируется, таким образом, числом $x_0 + y_0 + 2$ и имеет в $\mathbb{R}$ верхнюю грань; это позволяет нам дать следующее

▶ Определение 4.1. *Суммой* двух действительных чисел x, y называется действительное число, обозначаемое $x + y$ и определяемое как[1])

$$x + y = \sup_{n \in \mathbb{N}} (D_n(x) + D_n(y)). \tag{1}$$

Это определение оправдано тем, что в случае, когда x и y — десятичные дроби, данное определение дает их обычную сумму; действительно, в этом случае возрастающие последовательности $D_n(x)$ и $D_n(y)$ стационарны[2]), и при достаточно больших n имеем $D_n(x) = x$, $D_n(y) = y$.

Свойства сложения

▶ Предложение 4.1. Сложение действительных чисел коммутативно и для любых x, y, z, таких, что $x \leqslant y$, имеем

$$x + z \leqslant y + z. \tag{2}$$

[1]) Если бы мы определили топологию на $\mathbb{R}$, то могли бы также ввести сумму равенством $x + y = \lim_{n \to +\infty} (D_n(x) + D_n(y))$.

[2]) Напомним, что последовательность называется стационарной, если найдется целое p, такое, что $x_n = x_p$ при любом $n \geqslant p$.

Доказательство. Коммутативность сложения действительных чисел следует непосредственно из определения 4.1 и коммутативности сложения десятичных дробей.

С другой стороны, неравенство $x \leqslant y$ влечет за собой $D_n(x) \leqslant D_n(y)$ для всех $n \in \mathbb{N}$, поэтому для каждого действительного z

$$D_n(x) + D_n(z) \leqslant D_n(y) + D_n(z) \leqslant y + z.$$

Отсюда получаем (2), взяв верхнюю грань левой части последних неравенств. □

Предложение 4.2. *Для любых действительных* x, y *при каждом* $n \in \mathbb{N}$ *выполняются неравенства*

$$D_n(x) + D_n(y) \leqslant D_n(x+y) \leqslant x + y \leqslant \\ \leqslant D_n(x) + D_n(y) + 2 \cdot 10^{-n}.$$

Доказательство. По определению, $D_n(x) + D_n(y)$ принадлежит множеству десятичных дробей вида $10^{-n}p$, где $p \in \mathbb{Z}$, таких, что $10^{-n}p \leqslant x + y$; при этом предложение 3.3 показывает, что $D_n(x+y)$ есть наибольший элемент этого множества. Таким образом, $D_n(x) + D_n(y) \leqslant D_n(x+y) \leqslant x + y$. Далее, двукратное применение предложений 3.3 и 4.1 показывает, что $x + y \leqslant D_n(x) + D_n(y) + 2 \cdot 10^{-n}$. □

Из этого предложения видно, что $D_n(x) + D_n(y)$ есть *приближенное значение* $x + y$ с точностью до $2 \cdot 10^{-n}$; определение 4.1 сводится, таким образом, к введению суммы двух действительных чисел с помощью последовательности десятичных приближений, как это и реализуется на практике с применением все более мощной вычислительной техники. Но нужно иметь в виду, что десятичное приближение порядка n числа $x + y$ необязательно равно $D_n(x) + D_n(y)$: это затруднение связано с оставляемым «в уме» при выполнении сложения.

Предложение 4.3. *Сложение действительных чисел ассоциативно.*

Доказательство. Для любых действительных чисел x, y, z находим с помощью повторного применения предложений 3.3 и 4.2:

$$D_n(x)+D_n(y)+D_n(z)\leqslant(x+y)+z\leqslant$$
$$\leqslant D_n(x)+D_n(y)+D_n(z)+3\cdot 10^{-n},$$
$$D_n(x)+D_n(y)+D_n(z)\leqslant x+(y+z)\leqslant$$
$$\leqslant D_n(x)+D_n(y)+D_n(z)+3\cdot 10^{-n}.$$

Это доказывает, что $(x+y)+z$ и $x+(y+z)$ допускают одинаковые десятичные приближения с точностью до 10^{1-n} (так как $3\cdot 10^{-n}<10^{1-n}$). В силу произвольности n равенство $(x+y)+z=x+(y+z)$ вытекает из предложения 3.4. □

Предложение 4.4. Для сложения действительных чисел нулевая БДД 0, 00 ... 0 ... является *нейтральным элементом*, и для любого действительного числа существует *противоположное*.

Доказательство. Обозначая через 0 нулевую БДД, получим

$$(\forall x\in\mathbb{R})\qquad x+0=\sup_{n\in\mathbb{N}}(D_n(x)+0)=\sup_{n\in\mathbb{N}}D_n(x)=x.$$

Тем самым 0 — нейтральный элемент. С другой стороны, для действительного $x=x_0, x_1 \ldots x_n \ldots$ введем БДД $y=y_0, y_1 \ldots y_n \ldots$, определенную условиями

$$y_0=-1-x_0 \quad \text{и} \quad y_n=9-x_n \quad \text{при} \quad n\geqslant 1.$$

Если x не является десятичной дробью, то

$$x+y=\sup_{n\in\mathbb{N}}(D_n(x)+D_n(y))=\sup_{n\in\mathbb{N}}(-1,\underbrace{9\ldots 9}_{n\text{ раз}})=0.$$

Если x есть десятичная дробь $x=x_0, x_1 \ldots x_n 0 \ldots$ $\ldots 0 \ldots$, то y является несобственной БДД для десятичной дроби y', такой, что $y'+x=0$.

В обоих случаях у действительного x имеется противоположное. □

Теперь для действительного x можно определить его *абсолютную величину*:

$$|x| = \sup(x, -x),$$

и без труда доказать *неравенство треугольника*

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) \quad |x+y| \leqslant |x| + |y|,$$

откуда следует также, что $|y-x| \geqslant \big||y|-|x|\big|$.

Чтобы иметь возможность резюмировать основные полученные результаты, напомним классическое определение.

▶ Определение 4.2. *Упорядоченной абелевой группой* называется абелева группа $(G, +)$[1]), снабженная отношением линейного порядка, таким, что неравенство $x \leqslant y$ влечет за собой

$$(\forall z \in G) \quad x+z \leqslant y+z$$

(при этом из строгого неравенства $x < y$ следует также строгое неравенство $x+z < y+z$).

Теперь мы можем подвести итог:

▶ Теорема 4.5. $(\mathbb{R}, +)$ есть упорядоченная абелева группа.

5. АРХИМЕДОВЫ ГРУППЫ

Для того чтобы получить возможность охарактеризовать подгруппы группы $\mathbb{R}$ и построить теорию измерения величин, удобно ввести понятие *архимедовой группы.*

▶ **Определение 5.1.** Архимедовой группой называется упорядоченная абелева группа $(G, +)$, такая, что для любой пары (a, b) элементов G, где $a > 0_G$, существует $n \in \mathbb{N}$, при котором $na > b$.

---

[1]) Если не оговорено противное, абелевы группы будут рассматриваться в аддитивной записи, нейтральный элемент в G обозначаться через 0_G или просто 0, когда это не ведет к путанице.

Изучение архимедовых групп основано на следующем утверждении, отражающем возможность «градуировать» G.

▶ Предложение 5.1. Пусть G — архимедова группа и $a > 0$ — ее элемент. Для любого $x \in G$ существует единственное целое p, для которого

$$pa \leqslant x < (p+1)a. \qquad (1)$$

Доказательство. По аксиоме Архимеда множество $\{n \in \mathbb{N} \mid na > x\}$ есть непустая часть $\mathbb{N}$ [1]. Если через q обозначить ее наименьший элемент, то целое число $p = q - 1$ будет единственным, для которого верно (1). □

Основная теорема о гомоморфизме

▶ Теорема 5.2. Пусть G — архимедова группа. Для каждого $a > 0_G$ из G существует *единственный неубывающий гомоморфизм* h_a из G в $(\mathbb{R}, +)$, такой, что $h_a(a) = 1$, и h_a — *строго возрастающий* и потому *инъективный.*

Доказательство проводится в несколько шагов.

а) *Предварительные замечания, единственность.* Пусть задан элемент $x \in G$. Так как группа G архимедова, то по предложению 5.1 существует единственная последовательность (p_n) относительных целых чисел, такая, что

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad p_n a \leqslant 10^n x < (1 + p_n) a. \qquad (2)$$

Если гомоморфизм h_a существует, то должно быть

$$h_a(p_n a) \leqslant h_a(10^n x) \leqslant h_a((1 + p_n) a),$$

где $h_a(p_n a) = p_n h_a(a) = p_n$, $h_a(10^n x) = 10^n h_a(x)$ и $h_a((1 + p_n) a) = 1 + p_n$, поэтому

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 10^{-n} p_n \leqslant h_a(x) \leqslant 10^{-n}(1 + p_n), \qquad (3)$$

откуда, как мы сейчас увидим, следует, что

$$h_a(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} (10^{-n} p_n). \qquad (4)$$

[1] Здесь неявно предполагается, что $x > 0$; случай $x < 0$ также легко рассматривается. — *Прим. перев.*

В самом деле, неравенство (3) показывает, что $h_a(x)$ является мажорантой множества $P = \{10^{-n}p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$; оно также показывает, что всякая мажоранта m множества P удовлетворяет условию $m \geqslant h_a(x) - 10^{-n}$; действительное число $b = \sup(P)$ удовлетворяет, следовательно, неравенствам

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad h_a(x) - 10^{-n} \leqslant b \leqslant h_a(x),$$

откуда, применяя предложение 2.2 к действительному числу $h_a(x) - b$, получаем требуемое равенство $b = h_a(x)$.

Соотношение (4) доказывает *единственность* h_a.

b) *Построение* h_a. Для заданного элемента $x \in G$ пусть (p_n) — последовательность целых чисел, определяемая неравенствами (2). Докажем, что существует действительное y, такое, что при любом $n \in \mathbb{N}$ выполнено $D_n(y) = 10^{-n}p_n$.

Заменяя в (2) n на $n+1$ и сравнивая полученное неравенство с (2), находим, что $10p_na < (1+p_{n+1})a$ и $p_{n+1}a < 10(1+p_n)a$, откуда $10p_n < 1 + p_{n+1}$ и $p_{n+1} < 10(1+p_n)$, что равносильно неравенствам

$$10p_n \leqslant p_{n+1} \leqslant 10p_n + 9. \tag{5}$$

Отсюда вытекает, что для любого $n \in \mathbb{N}$ целое p_n есть «число десятков» p_{n+1}. Полагая $y_0 = p_0$ и для каждого $n \in \mathbb{N}$ $y_{n+1} = p_{n+1} - 10p_n$, получаем $0 \leqslant y_{n+1} \leqslant 9$ и по индукции

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 10^{-n}p_n = y_0,\ y_1 \ldots y_n.$$

Осталось доказать, что БДД $y_0, y_1 \ldots y_n \ldots$ не принадлежит $\mathcal{D}_9$. Но в противном случае существовало бы такое целое m, что при каждом $n > m$ было бы $y_n = 9$. Тогда мы имели бы

$$10^{-n}p_n - 10^{-m}p_m = 0,\ \underbrace{0 \ldots 0}_{m \text{ раз}}\ \underbrace{9 \ldots 9}_{(n-m) \text{ раз}} = 10^{-m} - 10^{-n},$$

откуда

$$(\forall n \geqslant m) \quad 10^{-n}(1+p_n) = 10^{-m}(1+p_m).$$

Положим $b=(1+p_m)a-10^m x$; применяя (2) к значению m, получим $b>0_G$, а также при $n\geqslant m$

$$10^{n-m}b=(1+p_n)a-10^n x\leqslant a.$$

В силу произвольности целого $n-m$ двойное неравенство

$$(\forall n>m)\quad 0_G<10^{n-m}b\leqslant a$$

противоречит аксиоме Архимеда, которая справедлива для G.

Таким образом, $y=y_0,\ y_1\ \dots\ y_n\ \dots$ есть действительное число, для которого $(\forall n\in\mathbb{N})\ D_n(y)=10^{-n}p_n$; тем самым $y=\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}10^{-n}p_n$, и мы определим отображение h_a из G в $\mathbb{R}$, полагая

$$h_a(x)=\sup_{n\in\mathbb{N}}10^{-n}p_n. \tag{6}$$

Неравенство (5) показывает, что последовательность $10^{-n}p_n$ возрастает[1]).

c) *Свойства* h_a. Пусть x, y — два элемента G, (p_n) — последовательность целых чисел, определяемая неравенствами (2). Неравенства

$$q_n a\leqslant 10^n y<(1+q_n)a,\qquad r_n a\leqslant 10^n(x+y)<(1+r_n)a$$

определят последовательности целых (q_n), (g_n). Имеем

$$r_n a<(1+p_n)a+(1+q_n)a,\qquad (1+r_n)a>p_n a+q_n a,$$

откуда

$$r_n<2+p_n+q_n,\qquad 1+r_n>p_n+q_n,$$

что равносильно

$$p_n+q_n\leqslant r_n\leqslant 1+p_n+q_n. \tag{7}$$

По определению h_a, применяя предложение 4.2, получаем

$$10^{-n}r_n\leqslant h_a(x+y)<10^{-n}(r_n+1),$$

$$10^{-n}(p_n+q_n)\leqslant h_a(x)+h_a(y)\leqslant 10^{-n}(r_n+2),$$

[1]) Автор различает возрастание (неубывание) и строгое возрастание. — *Прим. перев.*

откуда, сравнивая с (7), найдем, что

$$10^{-n}(r_n-1)\leqslant h_a(x)+h_a(y)\leqslant 10^{-n}(r_n+2).$$

Это показывает, что для любого $n\in\mathbb{N}$ действительные числа $h_a(x+y)$ и $h_a(x)+h_a(y)$ допускают одинаковые десятичные приближения с точностью до $2\cdot 10^{-n}$.

Таким образом, выполнено равенство

$$(\forall (x,\ y)\in G^2)\quad h_a(x+y)=h_a(x)+h_a(y),$$

показывающее, что h_a есть групповой гомоморфизм; для доказательства того, что h_a строго возрастает, достаточно показать, что из $x>0_G$ вытекает $h_a(x)>>0$.

Действительно, пусть $x>0_G$ и (p_n) по-прежнему обозначает последовательность целых, удовлетворяющих неравенствам (2). Тогда существует хотя бы одно целое $n>0$, такое, что $p_n\geqslant 1$: в противном случае было бы $10^nx<a$ для всех $n\in\mathbb{N}$, что противоречило бы аксиоме Архимеда. Но при $p_n\geqslant 1$ имеем $h_a(x)\geqslant 10^{-n}$ и, значит, $h_a(x)>0$.

Теорема 5.2 полностью доказана. □

▶ Следствие. Пусть G — архимедова группа. Для каждого ненулевого элемента $a\in G$ существует *единственный монотонный гомоморфизм* h_a группы G в $\mathbb{R}$, такой, что $h_a(a)=1$. Этот гомоморфизм является строго возрастающим при $a>0_G$ и строго убывающим при $a<0_G$. Следовательно, h_a инъективен.

Случай $a>0_G$ рассмотрен выше, случай $a>0_G$ получается из него путем замены порядка на G на противоположный. □

Теперь пришло время доказать

▶ Предложение 5.3. Группа $\mathbb{R}$ и ее подгруппы архимедовы.

В самом деле, пусть a, b — действительные числа, причем $a>0$. Положим $a=a_0,\ a_1\ \ldots\ a_n\ \ldots$ и $b==b_0,\ b_1\ \ldots\ b_n\ \ldots$; найдется хотя бы одно n, такое, что $a_n\geqslant 1$. Тогда $10^na\geqslant 1$, откуда $|1+b_0|\,10^na>b$.

Следовательно, $\mathbb{R}$ архимедова, равно как и ее подгруппы; действительно, если a принадлежит подгруппе G группы $\mathbb{R}$, то ей принадлежит и na при каждом $n \in \mathbb{N}$. □

Теперь мы можем сформулировать

Предложение 5.4. Архимедовы группы суть упорядоченные абелевы группы, изоморфные подгруппам $(\mathbb{R}, +)$.

Случай группы, состоящей из одного нейтрального элемента (нуля), не вызывает затруднений. Примеры подгрупп $\mathbb{R}$ имеются в упражнениях.

Приложение к теории измерения величин.

Вернемся к вопросу об измерении величин, поднятому в § 1, и попытаемся сначала аксиоматизировать понятие «измеримой величины».

Каждая измеримая физическая величина (масса, длина, объем, давление и т. д.) представляется как *линейно упорядоченное множество* G, снабженное *законом сложения*, таким, что

(i) сложение коммутативно и ассоциативно,
(ii) в G существует наименьший элемент 0_G, являющийся нейтральным элементом для сложения,
(iii) для любого элемента z неравенства $x \leqslant y$ и $x + z \leqslant y + z$ равносильны.

Множество G, снабженное такой структурой, называется *упорядоченной абелевой полугруппой*; с помощью процесса «симметризации» (см. [LF2] или [BO1]), который сводится к «ориентации» рассматриваемой величины и присоединения элементов, называемых «отрицательными», можно получить упорядоченную абелеву группу.

Обычно предполагается (хотя зачастую неявно), что полученная таким путем группа $\bar{G}$ архимедова: при выборе единицы измерения $u > 0_G$ определенный в теореме 5.2 гомоморфизм h_u решает задачу измерения величин. Отметим, что вся его роль заключается в том, чтобы придать строгую форму построению начала § 1. *Действительное число* $h_u(x)$ *есть, таким образом, мера величины* x *при выбранной единице измерения* u.

Мы увидим далее, что $h_u(x)$ можно истолковать как *отношение* величины x к величине u.

6. АКСИОМАТИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ $\mathbb{R}$ КАК ГРУППЫ [1])

Выделенных до сих пор свойств еще недостаточно для характеризации $\mathbb{R}$ (с точностью до изоморфизма): так, $\mathbb{Z}$ есть собственная подгруппа в $\mathbb{R}$ и, значит, архимедова группа, обладающая, кроме того, свойством верхней грани. Для того чтобы охарактеризовать $\mathbb{R}$ только с помощью указанных выше структур, введем

Определение 6.1. Говорят, что линейно упорядоченное множество X *не имеет дыр*, если для любых $a < b$ из $\mathbb{R}$ существует элемент c, лежащий между ними: $a < c < b$.

▶ Определение 6.2. Говорят, что линейно упорядоченное множество X обладает *свойством верхней грани*, если оно удовлетворяет следующей аксиоме:

(ВГ) *Любое непустое и мажорируемое подмножество* X *имеет (в* X*) верхнюю грань.*

Наконец, говорят, что X *непрерывно*, если оно не имеет дыр и удовлетворяет аксиоме (ВГ).

Из этих аксиом вытекают такие следствия:

Предложение 6.1. Пусть G — упорядоченная абелева группа без дыр; для любого элемента $a > 0_G$ из G существует последовательность (a_n) элементов G, удовлетворяющих неравенствам

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 < 2^n a_n \leqslant a. \tag{1}$$

Доказательство. Полагая $a_0 = a$, строим такую последовательность индуктивно: считая a_n известным,

[1]) Изложение в этом параграфе навеяно заметками, которые составил Ж. М. Эксбрейа для соискателей конкурса на место преподавателя.

находим такое c, что $0 < c < a_n$, и полагаем $a_{n+1} = \inf(c, a_n - c)$; тогда $2a_{n+1} \leqslant a_n$ и (1) устанавливается индукцией по n.

Предложение 6.2. Любая абелева упорядоченная группа G, удовлетворяющая аксиоме (ВГ), *архимедова.*

Доказательство. Проводим рассуждение от противного. Допустим, что существует пара $(a, b) \in G^2$ с $a > 0$, такая, что

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad na \leqslant b.$$

Тогда множество $A = \{na \mid n \in \mathbb{N}\}$ будет непустой частью G с мажорантой b; у него существует верхняя грань α. Элемент $\alpha - a$ не является мажорантой A, и потому найдется целое p, такое, что $pa > \alpha - a$, откуда $(p+1)a > \alpha$, что противоречит определению α. □

Замечание. Мы получили таким путем новое доказательство того, что группа $(\mathbb{R}, +)$ архимедова.

Основная теорема об изоморфизме

Теперь мы в состоянии дополнить теорему 5.2 следующим образом:

Теорема 6.3. Пусть G — архимедова группа и a — ее ненулевой элемент. Для того чтобы ассоциированный гомоморфизм h_a (см. следствие из теоремы 5.2) был *сюръективным*, необходимо и достаточно, чтобы группа G была *непрерывной.*

Доказательство. Поскольку $h_{-a} = -h_a$, можно предполагать, что $a > 0_G$.

a) Условие необходимо: если гомоморфизм h_a сюръективен, то при $a > 0_G$ он является строго возрастающей биекцией G на $\mathbb{R}$ и устанавливает соответствие между верхними гранями подмножеств G и $\mathbb{R}$; из непрерывности $\mathbb{R}$ следует непрерывность G.

b) Чтобы доказать достаточность условия, зададимся произвольным действительным y и попытаемся построить такое $x \in G$, что $h_a(x) = y$. Поскольку в G нет дыр, предложение 6.1 позволяет нам построить последовательность (a_n) элементов G, такую, что $0 < 2^n a_n \leqslant a$ при каждом $n \in \mathbb{N}$. Тогда последовательность $u_n = a_{4n}$ удовлетворяет условиям $0 < < 10^n u_n < 2^{4n} a_{4n} \leqslant a$, откуда $0 < h_a(u_n) \leqslant 10^{-n}$.

Положим $\varepsilon_n = h_a(u_n)$; существует последовательность целых чисел (p_n), для которой

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad p_n \varepsilon_n \leqslant y < (1 + p_n) \varepsilon_n, \tag{2}$$

откуда в силу возрастания h_a

$$(\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2) \quad p_n u_n < (1 + p_m) u_m.$$

Последовательность $(p_n u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, *таким образом*, мажорируема; поскольку G удовлетворяет аксиоме (ВГ), эта последовательность имеет верхнюю грань x, для которой

$$(\forall_n \in \mathbb{N}) \quad p_n u_n \leqslant x \leqslant (1 + p_n) u_n,$$

откуда

$$p_n \varepsilon_n \leqslant h_a(x) \leqslant (1 + p_n) \varepsilon_n.$$

Из сравнения с (2) видно, что $h_a(x)$ *и* y при любом $n \in \mathbb{N}$ допускают одно и то же приближенное значение с точностью до ε_n, где $\varepsilon_n \leqslant 10^{-n}$.

Равенство $h_a(x) = y$ *вытекает теперь из* предложения 3.4. □

▶ Следствие. Любая *непрерывная* упорядоченная абелева группа изоморфна $(\mathbb{R}, +)$.

Мы получили аксиоматрическую характеризацию $(\mathbb{R}, +)$ с точностью до изоморфизма. Возвращаясь к теореме 5.2, можно также сказать, что $(\mathbb{R}, +)$ *с точностью до изоморфизма есть наибольшая архимедова группа.*

Архимедова группа $(\mathbb{R}, +)$ является, таким образом, *наибольшим элементом* среди расширений $\mathbb{Z}$: ее нельзя дальше расширить без потери каких-либо свойств.

Это свойство, называемое «полнотой» $\mathbb{R}$, было принято в качестве аксиомы Гильбертом [HI — RO].

В упр. I.7 проводится исследование подгрупп группы $(\mathbb{R}, +)$.

7. АВТОМОРФИЗМЫ ГРУППЫ ($\mathbb{R}, +$). СТРУКТУРА ПОЛЯ. ГОМОМОРФИЗМЫ ($\mathbb{R}, +$) В СЕБЯ

Теорема 6.3 применима, в частности, к самому $\mathbb{R}$, поэтому можно сформулировать

▶ Предложение 7.1. Для каждого действительного $a \neq 0$ существует единственное *монотонное отображение* h_a: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющее условиям $h_a(a) = 1$ и

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) \quad h_a(x + y) = h_a(x) + h_a(y)$$

и являющееся биекцией. В частности, $h_1 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

Изучение обратного отображения для $a \in \mathbb{R}$ приводит к следующему важному результату:

▶ Теорема 7.2. Для любого $a \in \mathbb{R}$ существует единственное *монотонное* отображение φ_a: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющее условиям $\varphi_a(1) = a$ и

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) \quad \varphi_a(x + y) = \varphi_a(x) + \varphi_a(y). \qquad (1)$$

Это отображение есть нулевая константа, если $a = 0$, и является биекцией при $a \neq 0$. В частности, φ_1 есть тождественное отображение.

Доказательство. Разберем сначала случай $a = 0$. Если φ_0 — монотонное отображение $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, удовлетворяющее условию (1), и $\varphi_0(1) = 0$, то прежде всего по индукции находим, что $\varphi_0(p) = 0$ для любого $p \in \mathbb{N}$; кроме того, $\varphi_0(p) = 0$ при всех $p \in \mathbb{Z}$ и $\varphi_0(x) = 0$ для всякого x, удовлетворяющего неравенствам $p \leqslant x < p + 1$, где $p \in \mathbb{Z}$; окончательно, в силу монотонности $\varphi_0(x)$, имеем $\varphi_0(x) = 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

Если $a \neq 0$, то отображение, обратное к h_a, удовлетворяет выдвинутым требованиям. Чтобы показать, что не существует другого отображения с теми же свойствами, достаточно заметить, что если φ_a удовлетворяет условию (1), то отображение $\theta = h_a \circ \varphi_a$ монотонно и $\theta(1) = 1$, а также $\theta(x + y) = \theta(x) + \theta(y)$ для любых действительных x, y. Поэтому $\theta = h_1 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ в силу единственности h_1; отсюда с необходимостью $\varphi_a = h_a^{-1}$. □

Существование гомоморфизмов φ_a позволит нам определить *произведение* двух действительных чисел a, b равенством $ab = \varphi_a(b)$. Предварительно мы установим, однако, некоторые свойства этих отображений.

Свойства гомоморфизмов φ_a

Предложение 7.3. Если a, b — десятичные дроби, то

$$\varphi_a(b) = \varphi_b(a) = ab. \tag{2}$$

Доказательство. Из соотношения (1) легко выводим, что

$$(\forall x \in \mathbb{R},\ \forall p \in \mathbb{Z}) \quad \varphi_a(px) = p\varphi_a(x),$$

откуда при $x = 10^{-n}$

$$(\forall p \in \mathbb{Z}) \quad 10^n\varphi_a(10^{-n}p) = \varphi_a(p) = p\varphi_a(1) = pa,$$

и если a — десятичная дробь, то

$$\varphi_a(10^{-n}p) = 10^{-n}pa,$$

откуда получаем (2), полагая $b = 10^{-n}p$. □

Предложение 7.4. Семейство (φ_a) удовлетворяет условию

$$(\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2) \quad \varphi_{a+b} = \varphi_a + \varphi_b. \tag{3}$$

Доказательство. Предположим сначала, что $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$; тогда φ_a и φ_b — возрастающие отображения; то же имеет место и для функции $\varphi = \varphi_a + \varphi_b$, для которой $\varphi(1) = a + b$, и путем сложения получается (1). Таким образом, $\varphi = \varphi_{a+b}$.

Аналогично рассматривается случай $a < 0$, $b < 0$.

Чтобы разобрать случай $ab < 0$, заметим, что единственность φ_a влечет $\varphi_{-a} = -\varphi_a$, так как $-\varphi_{-a}$ удовлетворяет требованиям, наложенным на φ_a. Переставляя в случае необходимости a и b и заменяя их противоположными, можно свести дело к случаю $a < 0$, $b > 0$, $a + b > 0$. Полагая $c = a + b$, получим тогда, в силу уже рассмотренного, $\varphi_{-a} + \varphi_c = \varphi_{c+(-a)} = \varphi_b$, т. е. (3). □

Предложение 7.5. Для любых действительных a, b имеет место равенство

$$\varphi_a(b) = \varphi_b(a). \tag{4}$$

Доказательство. Из предложения 7.4 немедленно получается, что для любого $b \in \mathbb{R}$ отображение φ_b: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \varphi_x(b)$ монотонно (возрастает при $b \geqslant 0$, убывает при $b \leqslant 0$) и удовлетворяет условиям, наложенным на φ_b, так как $\psi_b(1) = \varphi_1(b) = b$. Таким образом, $\psi_b = \varphi_b$ и (4) верно при любом $a \in \mathbb{R}$.

Произведение действительных чисел

Теперь мы можем дать такое

Определение 7.1. Произведением ab двух действительных чисел a, b называется действительное число $\varphi_a(b) = \varphi_b(a)$.

Это определение оправдано тем, что в случае десятичных дробей оно приводит к их обычному произведению (см. предложение 7.3). Более того, предложения 7.4 и 7.5 показывают, что произведение действительных чисел *дистрибутивно по отношению к сложению и коммутативно.*

Для полноты установим следующее

Предложение 7.6. Произведение действительных чисел *ассоциативно.*

Доказательство. Если a, b — фиксированные действительные числа, то функция $\psi = \varphi_a \circ \varphi_b$ удовлетворяет всем требованиям, налагаемым на φ_{ab} (поскольку $\psi(1) = \varphi_a(b) = ab$). Таким образом, для любых действительных a, b, c имеем

$$\varphi_{ab}(c) = \varphi_a \circ \varphi_b(c) \quad \text{и} \quad (ab)c = a(bc).$$

Существование частного

Предложение 7.7. Для любых действительных a, b при $b \neq 0$ существует действительное q, такое, что $a = bq$. □

Доказательство. По определению отображение φ_b: $x \mapsto bx$ является обратным к h_b. Действительное

$q = h_b(a)$ удовлетворяет, следовательно, равенству $a = bq$. □

Для того чтобы резюмировать полученные результаты, введем

Определение 7.2. Поле K называется *упорядоченным*, если оно снабжено отношением линейного порядка, таким, что $(K, +)$ — упорядоченная група и для любого элемента $a > 0$ из K неравенство $y \geqslant x$ влечет $ay \geqslant ax$.

Теперь итоговая теорема может быть сформулирована так:

▶ Теорема 7.8. С введенными структурами порядка, сложения и умножения $\mathbb{R}$ является *упорядоченным полем*; каждое *монотонное* отображение $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющее условию

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) \quad \varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y),$$

имеет вид $\varphi(x) = kx$, $k = \text{const}$.

(Последнее утверждение следует из определения умножения.)

Замечания. 1) Если x, y — положительные действительные числа, то

$$D_n(x) D_n(y) \leqslant xy < \left(10^{-n} + D_n(x)\right)\left(10^{-n} + D_n(y)\right) <$$
$$< D_n(x) D_n(y) + 10^{-n}\left(D_0(x) + D_0(y) + 3\right).$$

Отсюда легко выводим, что

$$xy = \sup_{n \in \mathbb{N}} D_n(x) D_n(y); \tag{5}$$

при $x < 0$ или $y < 0$ это соотношение теряет силу.

По аналогии с определением суммы двух действительных чисел мы могли бы определить произведение положительных действительных чисел равенством (5). Тогда произведение чисел любого знака определялось бы по «правилу знаков». Но этот способ ведет к более длительным вычислениям, чем данный здесь (см. [LF2]).

2) Можно заметить, что при нашем построении поля действительных чисел *частное* $a/b = h_b(a)$ двух

чисел введено фактически *раньше их произведения* $ab = \varphi_a(b)$. Это связано с тем, что частное g/u двух измеримых величин (равное по определению мере величины g при выбранной единице измерения u) имеет физический смысл, которого нет у их «произведения».

Существование квадратичного корня

▶ Теорема 7.9. Каждое положительное действительное число имеет единственный положительный квадратный корень (и, следовательно, единственный отрицательный квадратный корень).

Доказательство. Заметим прежде всего, что если a, b — два положительных действительных числа, то неравенство $a^2 > b^2$ равносильно неравенству $a > b$; *единственность* положительного квадратного корня этим устанавливается. Остается доказать его *существование.*

При данном действительном $x > 0$ положим для каждого $n \in \mathbb{N}$

$$P_n = \{p \in \mathbb{N} \mid (10^{-n}p)^2 \leqslant x\}.$$

Легко видеть, что P_n имеет мажоранту $10^n(1 + x_0)$, где $x_0 = D_0(x)$ — целая часть x. Обозначим через p_n наибольший элемент в P_n. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ будем иметь

$$(10^{-n}p_n)^2 \leqslant x < (10^{-n}(1 + p_n))^2, \tag{6}$$

откуда, поскольку целые p_n положительны,

$$(\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2) \quad 10^{-n}p_n < 10^{-m}(1 + p_m).$$

Итак, множество $\{10^{-n}p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ мажорируемо и его верхняя грань y удовлетворяет неравенствам

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 10^{-n}p_n \leqslant y \leqslant 10^{-n}(1 + p_n). \tag{7}$$

Из сравнения с (6) мы видим, что действительные числа x и y^2 оба допускают $(10^{-n}p_n)^2$ как приближенное значение с точностью до $\varepsilon_n = 10^{-2n}(1 + 2p_n)$; если обозначить через b целое число, мажорирующее последовательность $(10^{-n}p_n)$, то будем иметь

$$\varepsilon_n \leqslant 10^{-n}(1 + 2b).$$

В силу произвольности n, предложение 3.4 влечет равенство $y^2 = x$.

С учетом (6) мы видим тогда, что первое неравенство (7) можно заменить строгим неравенством; отсюда вытекает, что $10^{-n}p_n$ есть *десятичное приближение порядка n для $y = \sqrt{x}$*.

Этим объясняется, почему практически в процессе «извлечения квадратного корня с точностью до 10^{-n}» получается *собственное* десятичное разложение квадратного корня (аналогичное замечание можно сделать по поводу операции деления, см. упр. I. 2).

8. УПОРЯДОЧЕННЫЕ ПОЛЯ. ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ $\mathbb{R}$ КАК ПОЛЯ

Понятие упорядоченного поля[1]), введенное в предыдущем параграфе, позволяет уточнить некоторые свойства $\mathbb{R}$, а также охарактеризовать $\mathbb{R}$ как архимедово поле. Напомним сначала, что *характеристика поля K*, обозначаемая $\operatorname{car} K$, равна 0 или наименьшему $p \in \mathbb{N}^*$, такому, что $pa = 0_K$ для всех $a \in K$, и заметим, что существование ненулевого элемента a в K, такого, что $pa = 0_K$, влечет $px = 0$ для всех $x \in K$ (так как $px = (pa)(a^{-1}x)$). Имеет место следующее

Предложение 8.1. *Любое упорядоченное поле K, в частности $\mathbb{R}$, имеет характеристику нуль.*

Доказательство. Если K упорядочено, то соотношения $n \geqslant 1$ ($n \in \mathbb{N}$) и $a > 0_K$ влекут $na > 0_K$; поэтому $na \neq 0_K$ и K — поле характеристики нуль.

Но в поле характеристики нуль любой элемент вида $p \cdot 1_K$, где p — ненулевое целое, имеет обратный, обозначаемый просто p^{-1} или $1/p$; отсюда для любого $x \in K$ следует существование элемента $y = p^{-1}x$, для которого $py = x$. Полагая $p = 2$, получим

Следствие. *Каждое упорядоченное поле не имеет дыр.*

---

[1]) В оригинале употреблено слово corps, т. е. тело; но в § 7 было дано только определение упорядоченного поля, и дальше, по существу, речь идет о полях (см. упр. I. 10). — *Прим. перев.*

В самом деле, если $x < y$, то действительное $z = {}^1/_2(x + y)$ удовлетворяет условию $x < z < y$.

Теорема о гомоморфизме

Напомним сначала, что если K и K' — два тела (необязательно коммутативные), то *гомоморфизмом* h тела K в K' называется отображение K в K', удовлетворяющее условиям

$$(\forall (x, y) \in K^2) \quad h(x + y) = h(x) + h(y), \qquad h(xy) = h(x)\, h(y). \tag{1}$$

Из этих условий следует, что[1] $h(0_K) = 0_{K'}$. Если h не является нулевым гомоморфизмом (который определяется соотношением $h(x) = 0_{K'}$ для всех $x \in K$), то имеем также $h(1_K) = 1_{K'}$ и

$$(\forall x \in K^*) \quad h(x^{-1}) = [h(x)]^{-1}.$$

Это имеет место, в частности, если h — биекция, и тогда говорят, что h — *изоморфизм тел*.

Далее, упорядоченное поле K называется *архимедовым*, если его аддитивная группа $(K, +)$ архимедова; для этого необходимо и достаточно, чтобы каждый элемент из K имел мажоранту вида $n \cdot 1_K$, где $n \in \mathbb{N}$.

▶ Теорема 8.2. Если K — упорядоченное архимедово поле, то существует единственный монотонный гомоморфизм h из K в поле $\mathbb{R}$, отличный от нулевого. При этом h строго возрастает и $h(K)$ содержит подполе $\mathbb{Q}$ из $\mathbb{R}$, образованное действительными числами вида p/q $(p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^*)$, которые называются *рациональными*.

Доказательство. Прежде всего условие $h(1_K) = 1$ вместе с первым из соотношений (1) показывает, что h (если он существует) равен гомоморфизму групп h_a с $a = 1_K$, определенному теоремой 5.2. Отсюда вытекает единственность h.

Покажем теперь, что гомоморфизм групп $h = h_{1_K}$

---

[1] Нуль и единица тела K обозначаются 0_K, 1_K или просто 0, 1, если это не ведет к недоразумениям; K^* обозначает $K \setminus \{0\}$.

удовлетворяет и второму из соотношений (1). Для этого предположим, что $x > 0$, и рассмотрим отображение f_x: $K \to \mathbb{R}$, $y \mapsto [h(x)]^{-1} h(xy)$ с фиксированным действительным x.

Сразу видно, что f_x — строго возрастающий гомоморфизм $(K, +)$ в $(\mathbb{R}, +)$, при котором $f_x(1_K) = 1$; следовательно, $f_x = h_{1_K}$ и

$$(\forall y \in K) \quad [h(x)]^{-1} h(xy) = h(y),$$

т. е. $h(xy) = h(x)h(y)$.

Это соотношение распространяется на случай $x < 0$ заменой x на $-x$, и ясно, что оно выполняется также и при $x = 0$. Следовательно, h является *гомоморфизмом тел.*

Наконец, $h(p \cdot 1_K) = p$, откуда $h(p/q) = p/q$, каковы бы ни были $p \in \mathbb{Z}$ и $q \in \mathbb{N}^*$. □

Из сравнения с теоремой 6.3 и следствием из предложения 8.1 с учетом предложения 6.2 выводится

▶ Теорема 8.3. *Любое упорядоченное поле K, обладающее свойством* (ВГ) *верхней грани, изоморфно* $\mathbb{R}$.

Вопреки тому что имеет место для архимедовых групп, указанный здесь изоморфизм *единствен.* Эта единственность обеспечивается вторым из соотношений (1).

Согласно этим результатам, $\mathbb{R}$ является наибольшим архимедовым полем (с точностью до изоморфизма).

Гомоморфизмы поля $\mathbb{R}$ в себя

Из предыдущего видно, что *монотонных* гомоморфизмов поля $\mathbb{R}$ в себя, отличных от нулевого и тождественного, не существует. Но возникает вопрос, нет ли гомоморфизмов, не являющихся монотонными. Отрицательный ответ на него дает

▶ Теорема 8.4. *Не существует гомоморфизмов поля $\mathbb{R}$ в себя, отличных от нулевого и тождественного.*

Доказательство. Допустим, что такой гомоморфизм h существует. Для любого действительного $x > 0$ найдется действительное $y > 0$, такое, что $y^2 = x$, откуда $h(x) = (h(y))^2 \geqslant 0$.

Для любой пары действительных u, v, таких, что $u > v$, получим тогда $h(v) - h(u) = h(v-u) \geqslant 0$, что доказывает монотонность h, и остается применить теорему 8.2.

Заметим, что, напротив, немонотонные *гомоморфизмы* группы $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ существуют (см. § II. 10).

Подполя поля $\mathbb{R}$. Мы видели, что множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел есть подполе поля $\mathbb{R}$, но существует и много других подполей, например:

- поле (называемое *полем Галуа*), порожденное корнями заданного многочлена с целочисленными коэффициентами, имеющего только действительные корни;
- поле *алгебраических чисел*, образованное действительными числами, являющимися корнями многочленов с целочисленными коэффициентами.
- в евклидовой геометрии мы естественно встречаемся с *полем квадратных корней* — наименьшим подполем K в $\mathbb{R}$, которое вместе с каждым положительным элементом содержит квадратный корень из него; это поле образовано теми действительными числами, которые можно получить из рациональных чисел с помощью конечного числа действий сложения, умножения, деления и извлечения квадратных корней (см. [CA]).

Существование упорядоченных неархимедовых полей

Известны примеры полей ненулевой характеристики (и потому не допускающих упорядочения), например поля $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, где p простое; с другой стороны, $\mathbb{Q}$ дает пример упорядоченного поля, не удовлетворяющего аксиоме (ВГ) о верхней грани. Для доказательства независимости аксиом, характеризующих $\mathbb{R}$, мы приведем пример упорядоченного неархимедова поля.

Предложение 8.5. Пусть $\mathbb{R}(X)$ — поле рациональных дробей (частных многочленов) с действительными коэффициентами, рассматриваемых как функции с числовыми значениями.

а) Отношение линейного порядка на $\mathbb{R}(X)$ можно получить, полагая $f \geqslant g$, если существует действительное x_0, такое, что $f(x) \geqslant g(x)$ для всех $x \geqslant x_0$.

б) Снабженное этим отношением порядка $\mathbb{R}(x)$ будет *упорядоченным неархимедовым* полем.

Доказательство. а) Отношение, определенное на $\mathbb{R}(X)$, очевидным образом антисимметрично, рефлексивно и транзитивно, и $f \geqslant g$ равносильно $f - g \geqslant 0$.

Но если $h = Q/P$ — рациональная дробь, не равная тождественно нулю, то множество корней P и Q конечно; следовательно, существует действительное x_0, такое, что $P(x)$ и $Q(x)$ при $x \geqslant x_0$ сохраняют постоянные знаки; таким образом, верно одно из двух соотношений $h > 0$ или $h < 0$. Этим доказано, что порядок, определенный на $\mathbb{R}(X)$, линейный.

b) Без труда проверяются аксиомы упорядоченного поля. Для доказательства неархимедовости $\mathbb{R}(X)$ достаточно заметить, что положительные элементы f, g, заданные как $f(x) = x$ и $g(x) = x^2$, удовлетворяют при любом $n \in \mathbb{N}$ неравенству $nf < g$.

Замечания. 1) Данное в этой главе построение $\mathbb{R}$ использует только теорию десятичных дробей (но не вообще теорию дробей): $\mathbb{Q}$ возникает просто как «множество отношений целых чисел», откуда уже выводятся все правила действий с дробями. Таким путем мы узакониваем прагматический подход современных программ обучения, где принято не слишком четкое (но достаточное!) понятие действительного числа и где рациональные числа рассматриваются как отношения целых чисел.

2) Введение на $\mathbb{R}$ порядковой топологии и понятия «сходящейся последовательности» позволяет дать другие аксиоматические характеризации $\mathbb{R}$ (см., например, [BO2], гл. IV, или [LF — AR], т. 2).

3) Судить о пользе теоремы 6.3 можно по применению ее к доказательству существования функции «логарифм по основанию a» (см. упр. I. 9).

Глава II

СТРУКТУРА ВЕКТОРНОГО ПРОСТРАНСТВА НАД ТЕЛОМ

Современное конструктивное изложение геометрии основывается на понятии векторного пространства; при этом в случае евклидовой геометрии ограничиваются конечномерными векторными пространствами над полем $\mathbb{R}$.

Но, желая иметь более широкую картину и подготовиться к аксиоматическому изложению аффинной геометрии, следует изучить произвольные векторные пространства над телами, *необязательно коммутативными*. По этой причине мы начнем с напоминания некоторых сведений из алгебры.

1. ОБЩЕЕ ПОНЯТИЕ ТЕЛА

Напомним, что тело K называется *коммутативным* или *некоммутативным* [1]) в зависимости от того, коммутативна ли в нем операция умножения.

Если $(K, +, \times)$ — некоммутативное тело, то на том же множестве K можно определить другую структуру тела $(K, +, *)$, сохранив операцию сложения и введя новую операцию умножения $x * y$ по правилу $x * y = y \times x$. Это новое тело мы обозначаем через $\bar{K}$ и называем телом, *противоположным* телу K.

Определение 1.1. *Центром* тела K называется множество Z_K его элементов, коммутирующих со всеми элементами из K, т. е. $Z_K = \{x \in K \mid (\forall a \in K)\ ax = xa\}$.

---

[1]) Автор в примечании дает соответствующие английские термины field и division ring. В литературе на русском языке приняты термины «поле» и «тело», которых мы и будем придерживаться. — *Прим. перев.*

Легко видеть, что центр K есть коммутативное подтело K (поле), содержащее все элементы вида $n\cdot 1_K$, где $n \in \mathbb{Z}$. Если K имеет характеристику нуль, то эти элементы при $n \neq 0$ обратимы; элементы вида $p(n\cdot 1_K)^{-1}$, обозначаемые как $\frac{p}{n} 1_K$, где $(p, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, образуют коммутативное подтело тела K, содержащееся в его центре и изоморфное полю $\mathbb{Q}$ рациональных чисел.

Пример некоммутативного тела: тело кватернионов

Считая известной структуру векторного пространства $\mathbb{R}^4$, обозначим через $e_0 = (1, 0, 0, 0)$, $e_1 = (0, 1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 0, 1)$ векторы его канонического базиса. Легко видеть, что можно ввести в $\mathbb{R}^4$ операцию умножения, ассоциативную и дистрибутивную относительно сложения векторов и такую, что

$$\begin{gathered} e_0^2 = 1, \quad e_0 e_i = e_i e_0 = e_i, \quad e_i^2 = -e_0 \quad (i = 1, 2, 3), \\ e_1 e_2 = -e_2 e_1 = e_3, \quad e_2 e_3 = -e_3 e_2 = e_1, \\ e_3 e_1 = -e_1 e_3 = e_2. \end{gathered} \tag{1}$$

Тогда e_0 будет нейтральным элементом для этой операции умножения, и можно проверить, что любой ненулевой элемент

$$q = \sum_{i=0}^{3} q_i e_i = q_0 e_0 + \sum_{i=1}^{3} q_i e_i$$

допускает в качестве обратного элемент

$$q^{-1} = \left(\sum_{i=0}^{3} q_i^2\right)^{-1} \left(q_0 e_0 - \sum_{i=1}^{3} q_i e_i\right).$$

Таким образом, множество $\mathbb{R}^4$, снабженное этой структурой, является телом, которое называется *телом кватернионов* и обозначается $\mathbb{H}$ (по начальной букве фамилии английского математика Гамильтона, открывшего кватернионы). Таблица умножения (1) показывает, что это тело некоммутативно и что его центр состоит из элементов вида $(x, 0, 0, 0)$, где $x \in \mathbb{R}$; эти элементы образуют подтело $\mathbb{H}$, изоморфное $\mathbb{R}$ (см.

ниже). Заметим, наконец, что тело $\mathbb{H}$ имеет характеристику нуль.

Заменяя $\mathbb{R}$ полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, получим таким же путем алгебру комплексных кватернионов, не являющуюся телом.

Изоморфизмы, автоморфизмы и антиавтоморфизмы

Напомним (см. § I. 8), что *изоморфизмом* тела K на тело K' называется биекция $h\colon K \to K'$, удовлетворяющая условиям

$$(\forall (x, y) \in K^2) \quad h(x+y) = h(x) + h(y),$$
$$h(xy) = h(x)\,h(y),$$

из которых можно также получить, что

$$h(0_K) = 0_{K'}, \quad h(1_K) = 1_{K'} \quad \text{и} \quad (\forall x \in K^*)$$
$$h(x^{-1}) = [h(x)]^{-1}.$$

Примеры. 1) Если K — тело характеристики нуль, то отображение $j\colon \mathbb{Q} \to K$, $r \longmapsto r \cdot 1_K$ есть инъективный гомоморфизм и, значит, изоморфизм $\mathbb{Q}$ на его образ.

2) Отображение $\mathbb{R} \to \mathbb{H}$, $x \longmapsto (x, 0, 0, 0)$ есть инъективный гомоморфизм $\mathbb{R}$ на центр тела $\mathbb{H}$ [1]).

В случае некоммутативных тел вводится новое понятие.

Определение 1.2. *Антиизоморфизмом* тела K на тело K' называется биекция $h\colon K \to K'$, для которой

$$(\forall (x, y) \in K^2) \quad h(x+y) = h(x) + h(y) \quad \text{и}$$
$$h(xy) = h(y)\,h(x),$$

откуда снова вытекает, что

$$h(0_K) = 0_{K'}, \quad h(1_K) = 1_{K'} \quad \text{и} \quad (\forall x \in K^*)$$
$$h(x^{-1}) = [h(x)]^{-1}.$$

Автоморфизмом (антиавтоморфизмом) тела K называется его изоморфизм (антиизоморфизм) на себя.

---

[1]) Точнее говорить об инъективном гомоморфизме $\mathbb{R}$ в $\mathbb{H}$ и тем самым изоморфизме $\mathbb{R}$ на $Z_{\mathbb{H}}$. — *Прим. перев.*

Примеры. 1) Если $\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел, то отображение сопряжения $x + iy \mapsto x - iy$ является автоморфизмом $\mathbb{C}$ (автоморфизм сопряжения).

2) Если $\mathbb{H}$ — тело кватернионов, то отображение

$$h: q_0e_0 + \sum_{i=1}^{3} q_ie_i \mapsto q_0e_0 - \sum_{i=1}^{3} q_ie_i$$

есть антиавтоморфизм тела $\mathbb{H}$.

3) Если K — некоммутативное тело, то *внутренние автоморфизмы* h_a: $x \mapsto axa^{-1}$, где $a \in K^*$, являются автоморфизмами K; если $\bar{K}$ — тело, противоположное K, то тождественное отображение Id_K является антиизоморфизмом $\bar{K}$ на K.

4) Поле $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (обозначаемое также $\mathbb{Z}_p$), где p — простое число, не допускает других автоморфизмов, кроме тождественного; действительно, любой элемент K имеет вид $n \cdot 1_K$, где $n \in \mathbb{N}$, и, значит, сохраняется при любом автоморфизме поля K.

Задача перечисления автоморфизмов тела

Как мы увидим далее (§ III. 8 и IV. 12), изучение аффинной или проективной геометрии приводит к задаче определения всех автоморфизмов основного тела. Приведенный выше пример 4 и теорема I. 8.4 решают эту задачу для полей $\mathbb{Z}_p$ и $\mathbb{R}$: эти поля не допускают автоморфизмов, отличных от тождественного.

Более глубокое изучение алгебраических свойств тела кватернионов позволяет доказать, что единственными автоморфизмами этого тела являются внутренние автоморфизмы h_q: $\mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $x \mapsto qxq^{-1}$ ($q \in \mathbb{H}^*$) (см. [BE], т. 2, § 8.9).

Наконец, можно доказать, что поле $\mathbb{C}$ допускает бесконечное множество автоморфизмов, отличных от тождественного и от автоморфизма сопряжения (см. [BOI], упр. 1 в § V. 6 и упр. 2 в § VI. 9); однако среди них нет ни одного, сохраняющего подполе $\mathbb{R}$ или непрерывного в обычной топологии $\mathbb{C}$.

Эти примеры показывают разнообразие возможных ситуаций.

Задача описания всех конечных полей

Прежде всего в [AR], гл. I, и в [LF — AR], т. 1, упр. IV. 20, можно найти доказательства следующей знаменитой теоремы:

▶ Теорема Веддерберна. Всякое конечное тело коммутативно.

С другой стороны, можно доказать, что характеристика p конечного поля отлична от нуля и что порядок такого поля (т. е. число его элементов) имеет вид p^d, где $d \in \mathbb{N}^*$ (см. упр. I. 14).

Существование конечного поля характеристики p и порядка p^d следует из теории Галуа (см. [ML — BI], т. 2, гл. XVII; примеры есть в упр. I. 15—I. 18). Отметим еще, что два конечных поля одной и той же характеристики и одинакового порядка изоморфны [1].

Упорядоченные тела

Общая проблема упорядоченных тел рассматривается в книге [AR], гл. I [2]. Там можно найти принадлежащий Гильберту пример некоммутативного упорядоченного тела.

Напротив, некоммутативного упорядоченного тела, удовлетворяющего аксиоме Архимеда, не существует (см. упр. I. 10).

2. ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА НАД ПРОИЗВОЛЬНЫМ ТЕЛОМ

▶ Определение 2.1. Пусть K — какое-либо тело, не обязательно коммутативное. *Левым векторным пространством* над K называется абелева группа $(E, +)$, снабженная внешним законом композиции $K \times E \to E$, $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$, таким, что [3]

[1] *Очевидно, что равенство характеристик вытекает из равенства порядков.* — *Прим. перев.*

[2] Там же (гл. I, § 9 русского издания) дано и определение упорядоченного тела в общем случае. — *Прим. перев.*

[3] Во избежание недоразумений элементы K (называемые скалярами) по большей части обозначаются греческими буквами, а элементы E (называемые векторами) — латинскими. В виде исключения нуль тела K и нуль векторного пространства E будут обозначаться одинаково как 0.

i) $(\forall x \in E)$ $\quad 1 \cdot x = x,$
ii) $(\forall (\lambda, x, y) \in K \times E \times E)$ $\quad \lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y,$
iii) $(\forall (\lambda, \mu, x) \in K \times K \times E)$ $\quad (\lambda + \mu) x = \lambda x + \mu y,$
iv) $(\forall (\lambda, \mu, x) \in K \times K \times E)$ $\quad \lambda(\mu x) = (\lambda\mu) x.$

Эти условия влекут $\lambda \cdot 0 = 0$ для всех $\lambda \in K$ и $0 \cdot x = 0$ для всех $x \in E$.

▶ Точно так же *правое векторное пространство над* K есть абелева группа $(E, +)$, снабженная внешним законом композиции $E \times K \to E$, $(x, \lambda) \mapsto x\lambda$, таким, что

i) $(\forall x \in E)$ $\quad x \cdot 1 = x,$
ii) $(\forall (\lambda, x, y) \in K \times E \times E)$ $\quad (x+y)\lambda = x\lambda + y\lambda,$
iii) $(\forall (\lambda, \mu, x) \in K \times K \times E)$ $\quad x(\lambda + \mu) = x\lambda + x\mu,$
iv) $(\forall (\lambda, \mu, x) \in K \times K \times E)$ $\quad (x\lambda)\mu = x(\lambda\mu).$

Во избежание путаницы элементы из K часто будут называться *«скалярами»*, в то время как элементы из E — *«векторами»*.

Заметим, что K имеет двойную каноническую структуру векторного пространства, левого и правого, над самим собой.

Замечания. 1) Понятно, что не возбраняется писать $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ (где $\lambda \in K$ и $x \in E$) и для внешнего закона композиции правого векторного пространства, но тогда iii) принимает вид $\mu(\lambda x) = (\lambda\mu) x$; это показывает, что *правое* векторное пространство *над* K может рассматриваться как *левое над телом* K, *противоположным* K.

Поэтому мы можем, не нарушая общности, ограничиться рассмотрением левых векторных пространств.

2) Если K коммутативно, понятия левого и правого векторных пространств совпадают. В этом и только в этом случае произведение вектора x на скаляр λ можно записывать и как λx, и как $x\lambda$.

Обобщение привычных понятий на случай некоммутативного тела

Пусть E — левое векторное пространство над K.

a) *Векторным подпространством* (сокращенно ВПП) пространства E называется непустое подмножество $X \subset E$, устойчивое по отношению к обоим законам композиции, т. е. такое, что $0 \in X$ и

$$(\forall (\lambda, \mu) \in K^2, \forall (x, y) \in X^2) \quad \lambda x + \mu y \in X.$$

Каждое ВПП пространства E допускает очевидную структуру левого векторного пространства над K.

b) Пусть $\mathscr{F} = (x_i)_{i \in I}$ — *произвольное семейство* (необязательно конечное) элементов E.

Линейные комбинации элементов $\mathscr{F}$ — это элементы E вида $\sum_{j \in J} \lambda_j x_j$, где J — некоторое *конечное*[1]) непустое подмножество I, а λ_j $(j \in J)$ — произвольные скаляры.

Эти линейные комбинации образуют векторное подпространство в E; говорят, что оно *порождено* семейством $\mathscr{F}$, и обозначают его $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$. Семейство $\mathscr{F}$ называется *семейством образующих*, если $\mathrm{Vect}(\mathscr{F}) = E$, т. е. если любой элемент E является линейной комбинацией элементов $\mathscr{F}$.

c) Семейство $(x_i)_{i \in I}$ элементов E называется *зависимым*, если существуют конечное подмножество $J \subset I$ и скаляры $(\lambda_j)_{j \in J}$, не все равные нулю, такие, что

$$\sum_{j \in J} \lambda_j x_j = 0.$$

В противном случае семейство $(x_i)_{i \in I}$ называется *свободным*.

d) *Базисом* (индексированным) пространства E называется свободное семейство $\mathscr{F}$ образующих; это означает, что каждый элемент из E может быть *единственным образом* представлен как линейная комбинация элементов $\mathscr{F}$.

e) Понятие *свободного подмножества* (соотв. подмножества *образующих*) в E сводится к понятию свободного семейства (соотв. семейства образующих) в E; в самом деле, подмножество X можно отождествить с семейством $(x_a)_{a \in X}$, индексированным элементами из X, так что $x_a = a$ для всех $a \in X$.

---

[1]) Важно иметь в виду, что в алгебраической теории векторных пространств рассматриваются только *конечные* линейные комбинации.

В частности, векторное пространство, порожденное этим семейством, будет обозначаться $\mathrm{Vect}(X)$.

Если множество X состоит из одного элемента a, то векторное пространство $\mathrm{Vect}(X)$ обозначается Ka или aK, смотря по тому, является ли E левым или правым векторным пространством над K, и называется *векторной прямой*, порожденной вектором a[1]).

▶ Наконец, понятия *суммы, прямой суммы* ВПП и *дополнительного* ВПП немедленно распространяются на случай пространств над телами (см. упр. II. 3 и II. 6).

Теорема о замене

В § 3 мы покажем, что теория размерности тоже без затруднений распространяется на левые (или правые) векторные пространства над телами. Вначале мы установим во всей общности следующий основной результат:

▶ Теорема 2.1. Пусть E — левое (или правое) векторное пространство над телом K, G — *подмножество образующих* и $A = \{a_1, \ldots, a_p\}$ — *свободное конечное подмножество* в E.

Тогда в G найдется p попарно различных элементов $b_1, b_2, \ldots, b_p$, таких, что $A \cup (G \setminus \{b_1, b_2, \ldots, b_p\})$ будет подмножеством образующих для E[2]).

Другими словами: можно заменить в G элементы $b_1, \ldots, b_p$ элементами $a_1, \ldots, a_p$, так что G сохранит свойство быть подмножеством образующих в E — отсюда и название «теорема о замене».

Доказательство. Не нарушая общности, предположим, что E — левое векторное пространство.

Положив $A_k = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ для каждого $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$, заметим, что A_k есть свободное подмножество в E (так как A_k содержится в A), и проведем индукцию по k; именно, установим, что для любого $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$ в G существует подмножество $B_k = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$ мощности k, такое,

---

[1]) Разумеется, при $a \neq 0$. — *Прим. перев.*

[2]) Напомним здесь, что $G \setminus B$ обозначает множество, состоящее из элементов G, не входящих в B.

что $G_k = A_k \cup \{G \setminus B_k\}$ является подмножеством образующих для E.

a) *При* $k=1$ *утверждение верно*; в самом деле, $a_1 \neq 0$, так как A свободное. Так как G — множество образующих, можно записать $a_1 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i$, где $g_1, \ldots, g_m$ — различные элементы G. Так как не все λ_i равны нулю, положим $\lambda_j \neq 0$ и введем обозначения $\lambda = \lambda_j$, $b_1 = g_j$. Тогда

$$b_1 = \lambda^{-1} a_1 - \sum_{i \neq j} \lambda^{-1} \lambda_i g_i.$$

Это показывает, что b_1 принадлежит векторному пространству, порожденному $G_1 = \{a_1\} \cup (G \setminus \{b_1\})$; итак, всякая линейная комбинация элементов G есть линейная комбинация элементов из $G \setminus \{b_1\}$ и a_1. Иными словами, G_1 есть множество образующих для E.

b) *Предположим, что утверждение верно до некоторого* $k < p$. Поскольку $G_k = A_k \cup (G \setminus B_k)$ — множество образующих, можно положить

$$a_{k+1} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i + \sum_{r=1}^{k} \mu_r a_r,$$

где $g_1, \ldots, g_m$ — различные элементы из $G \setminus B_k$; так как A — свободное подмножество, то найдется хотя бы один индекс $j \in \{1, \ldots, m\}$, такой, что $\lambda_j \neq 0$. Полагая $\lambda = \lambda_j$, $b_{k+1} = g_j$ и $B_{k+1} = B_k \cup \{b_{k+1}\} = \{b_1, \ldots, b_k, b_{k+1}\}$, найдем, что вектор

$$b_{k+1} = \lambda^{-1} a_{k+1} - \sum_{i \neq j} \lambda^{-1} \lambda_i g_i - \sum_{r=1}^{k} \lambda^{-1} \mu_r a_r$$

принадлежит векторному пространству, порожденному множеством

$$G_{k+1} = \{a_{k+1}\} \cup (G_k \setminus \{b_{k+1}\}) = A_{k+1} \cup (G \setminus B_{k+1}),$$

и так как по предположению индукции G_k есть множество образующих, то и G_{k+1} — множество образующих E. Итак, утверждение верно при любом целом $k \leqslant p$. □

▶ Следствие. Если E допускает свободное p-элементное подмножество A, то всякое множество образующих E содержит не менее p элементов.

Пример. Векторное пространство многочленов над K. Пусть $K[X]$ — множество формальных многочленов над произвольным телом K. На $K[X]$ определяется структура левого векторного пространства над K, если положить для любых двух многочленов $P = \sum a_k X^k$ и $Q = \sum b_k X^k$ и любого $\lambda \in K$

$$P + Q = \sum (a_k + b_k) X^k, \quad \lambda P = \sum \lambda a_k X^k.$$

Семейство $(X^n)_{n \in \mathbf{N}}$ является тогда базисом пространства $K[X]$.

3. КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

▶ Теорема 3.1 (*о размерности*). Пусть E — левое (или правое) векторное пространство над телом K, допускающее конечный базис B мощности n. Тогда

Всякое свободное подмножество в E имеет не более n элементов.

Всякое подмножество образующих E содержит не менее n элементов.

Следовательно, *всякий базис E состоит из n элементов.*

Доказательство. a) Если L — свободное подмножество E, то, как показывает следствие из теоремы 2.1, всякая конечная часть L состоит не более чем из n элементов (поскольку базис B является подмножеством образующих мощности n); следовательно, L — конечное множество мощности $\leqslant n$.

b) Если G — множество образующих E, мы можем применить то же самое следствие при $A = B$ и убедиться, что $\operatorname{card}(G) \geqslant n$. Отсюда вытекает и последнее утверждение.

Тем самым мы обосновали корректность следующего определения:

▶ Определение 3.1. Векторное пространство называется *конечномерным* (соотв. размерности n), если оно допускает конечный базис (соотв. базис мощности n).

Последующие предложения являются приложениями теоремы о замене 2.1.

Предложения 3.2. Для того чтобы векторное пространство E было конечномерным, необходимо и достаточно, чтобы оно допускало *конечное подмножество образующих* G; это подмножество образующих содержит базис.

Доказательство. Необходимость условия очевидна. Обратно, если условие выполнено, то мощности подмножеств образующих, содержащихся в G, составляют непустое подмножество $P \subset \mathbb{N}$; обозначим через p наименьший элемент P. Тогда существует хотя бы одно подмножество G_0 образующих E, содержащееся в G и имеющее мощность p. Если бы G_0 не было свободным, то какой-нибудь элемент a из G_0 был бы линейной комбинацией остальных, а $G_0 \setminus \{a\}$ было бы множеством образующих E мощности $p-1$, что противоречит определению p. Значит, G_0 является конечным базисом E, содержащимся в G. □

▶ Следствие. Если E — векторное пространство размерности n, то любое подмножество образующих, содержащее n элементов, является базисом.

Предложение 3.3. Для того чтобы векторное пространство E имело конечную размерность $\leqslant n$, необходимо и достаточно, чтобы в нем не было свободного подмножества мощности $> n$.

Доказательство. Необходимость этого условия вытекает из теоремы 3.1. Обратно, если оно выполнено, мощности свободных конечных подмножеств E образуют непустое подмножество P в $\mathbb{N}$, имеющее мажоранту n. Обозначим через p наибольший элемент в P; существует свободное подмножество $L \subset E$ мощности p. Если бы L не было множеством образующих, в E существовал бы элемент a, не принадлежащий $\mathrm{Vect}(L)$, и $L \cup \{a\}$ было бы свободным подмножеством E мощности $p+1$, что противоречит определению p. Таким образом, L есть базис E и $\dim(E) = p$. □

▶ Следствие. Если E — векторное пространство конечной размерности n, то все его векторные подпространства имеют конечную размерность $\leqslant n$.

В самом деле, каждое свободное подмножество L ВПП $X \subset E$ есть также и свободное подмножество в E. Поэтому $\operatorname{card}(L) \leqslant n$ и $\dim(X) \leqslant n$.

Теорема о дополнении до базиса

▶ Теорема 3.4. Если E — конечномерное векторное пространство и L — свободное подмножество в E, то существует базис E, содержащий L.

Доказательство. Применим теорему о замене (теорему 2.1) с $A = L$ и некоторым базисом E в качестве G. Если $L = \{a_1, \ldots, a_p\}$, то можно упорядочить G в конечную последовательность $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ с $n \geqslant p$ так, чтобы $B = \{a_1, \ldots, a_p, b_{p+1}, \ldots, b_n\}$ было множеством образующих E. Так как $\operatorname{card}(B) = n = \dim(E)$, то B является базисом E (следствие из предложения 3.2). □

▶ Следствие 1. Если E — векторное пространство конечной размерности n, то каждое его свободное подмножество, состоящее из n элементов, является базисом.

▶ Следствие 2. Если E — векторное пространство конечной размерности и X — его ВПП той же размерности, то $X = E$.

Действительно, каждый базис B подпространства X является свободным подмножеством, число элементов которого равно размерности E, и потому $E = \operatorname{Vect}(B) = X$.

▶ Теорема 3.5. Если E — конечномерное векторное пространство, то *каждое его ВПП X допускает по меньшей мере одно дополнительное подпространство*[1]).

---

[1]) Дополнительными подпространствами в E называются такие подпространства X, Y, что любой элемент $z \in E$ единственным образом представляется в виде $z = x + y$, где $x \in X$, $y \in Y$. — *Прим. перев.*

Доказательство. Результат тривиален в случаях $X=\{0\}$ и $X=E$, которые мы исключим из рассмотрения. Пусть A — базис X и B — базис E, содержащий A. Тогда каждый элемент из E единственным образом представляется как сумма линейной комбинации элементов A и линейной комбинации элементов $B\setminus A$; иными словами, $X=\mathrm{Vect}(A)$ и $Y=\mathrm{Vect}(B\setminus A)$ суть два дополнительных друг к другу ВПП (см. упр. II. 3). □

Заметим, что если X, Y — два дополнительных ВПП в E, то $\dim(E)=\dim(X)+\dim(Y)$ (подробнее см. упр. II. 5 и II. 6).

Типовой пример: стандартные пространства K^n

Если K — произвольное тело, то декартово произведение K^n допускает две канонические структуры векторного пространства над K: левого и правого, определенных соответственно законами умножения $\lambda(x_1, \ldots, x_n)=(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$ и $(x_1, \ldots, x_n)\lambda = (x_1\lambda, \ldots, x_n\lambda)$.

В случае коммутативного K эти две структуры совпадают; их размерности обе равны n.

Можно заметить, что если K — конечное тело (и, следовательно, поле) порядка k, то мощность множества K^n равна k^n (так как каждая из координат x_1, $x_2, \ldots, x_n$ пробегает k различных значений).

Далее мы увидим, что всякое левое (соотв. правое) векторное пространство размерности n над K изоморфно K^n, рассматриваемому как левое (соотв. правое) векторное пространство.

Замечание. Векторные пространства, не имеющие конечной размерности, называются бесконечномерными; например, $K[X]$ бесконечномерно; этому выражению мы не придаем более точного смысла (см. § 9).

4. ЛИНЕЙНЫЕ И ПОЛУЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Понятие *линейного* отображения немедленно распространяется на случай векторных пространств над произвольным телом; в частности, сохраняется без изменений теория векторных *проектирований* и *сим-*

метрий (см. упр. II. 3). Но здесь нам потребуется более общее понятие.

► Определение 4.1. Пусть E_1 и E_2 — левые векторные пространства над телами соответственно K_1 и K_2. Отображение f: $E_1 \to E_2$ называется *полулинейным*, если оно удовлетворяет условию

$$(\forall (x, y) \in E_1 \times E_1) \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

и существует такой *изоморфизм* θ тела K_1 на тело K_2, что

$$(\forall (\lambda, x) \in K_1 \times E_1) \quad f(\lambda x) = \theta(\lambda) f(x).$$

Термин *линейное отображение* приберегается для случая, когда $K_1 = K_2$ и θ — тождественное отображение. В частности, *изоморфизм* есть биективное линейное отображение; *эндоморфизм* (соотв. *автоморфизм*) векторного пространства E есть линейное отображение E в себя (соотв. изоморфизм E на себя).

Автоморфизмы векторного пространства E образуют группу, называемую *линейной группой* E и обозначаемую $\mathrm{GL}(E)$.

Более общо, *полулинейные биекции* векторного пространства E на себя образуют группу, обозначаемую $\mathrm{GSL}(E)$, для которой $\mathrm{GL}(E)$ является инвариантной подгруппой.

Примеры. 1) Если E — векторное пространство над полем характеристики $\neq 2$, то можно показать (см. упр. II. 3), что единственные инволютивные автоморфизмы E суть *векторные симметрии*[1]). Но могут существовать инволютивные полулинейные отображения E на E, не являющиеся линейными. Например, если $E = \mathbb{C}^n$, то полулинейное отображение f: $\mathbb{C}^n - \mathbb{C}^n$, $(z_1 \ldots, z_n) \mapsto (\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n)$, ассоциированное с автоморфизмом $z \mapsto \bar{z}$ поля $\mathbb{C}$, инволютивно.

2) Если E — левое векторное пространство над K, то *векторная гомотетия* h_k: $E \to E$, $x \mapsto kx$ $(k \in K^*)$ есть полулинейное отображение, ассоциированное с

[1]) По поводу случая характеристики 2 см. упр. II. 4.

внутренним автоморфизмом

$$\theta_k\colon K \to K, \quad \lambda \mapsto k\lambda k^{-1}.$$

▶ Таким образом, h_k линейно, только если k принадлежит *центру* K; тогда гомотетия h_k становится автоморфизмом E.

Легко показать, что векторные гомотетии образуют инвариантную подгруппу группы $\mathrm{GSL}(E)$.

С другой стороны, *центр группы* $\mathrm{GL}(E)$ *образован векторными гомотетиями* h_k, *коэффициент* k *которых принадлежит центру* K (см. упр. II. 15 и II. 16).

Свойства. Среди классических свойств линейных отображений есть такие, которые легко распространяются на линейные или даже всего лишь полулинейные отображения над произвольным телом, но есть и такие, которые теряют силу в случае некоммутативного тела.

Мы начнем с изучения общих свойств, не зависящих от размерности; случай конечномерных пространств рассматривается в § 5.

▶ Предложение 4.1. Пусть $f\colon E \to F$ — полулинейное отображение, X — ВПП E и Y — ВПП F. Тогда $f(X)$ является ВПП F и $f^{-1}(Y)$ — ВПП E.

В частности, $\mathrm{Im}\, f = f(E)$ есть ВПП F, называемое *образом* f, а $\mathrm{Ker}\, f = f^{-1}(0)$ — ВПП E, называемое *ядром* f; ядро сводится к $\{0\}$ тогда и только тогда, когда f инъективно.

Доказательство очевидно.

Заметим, что, напротив, задача о собственных значениях и собственных векторах в случае некоммутативного тела выглядит совершенно по-другому.

▶ Предложение 4.2. Пусть E, F — два векторных пространства над одним и тем же телом K, а E_1, E_2 — два ВПП пространства E, такие, что $E = E_1 \oplus E_2$ [1]). Если $f_1\colon E_1 \to F$ и $f_2\colon E_2 \to F$ — два линейных отображения, то существует единственное линейное отобра-

[1]) Напомним, что $\oplus$ есть знак прямой суммы. — *Прим. перев.*

жение f: $E \to F$, ограничение которого на каждое из подпространств E_i $(i = 1, 2)$ равно f_i.

Доказательство. Пусть j — биекция

$$E_1 \times E_2 \to E, \quad (x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2.$$

Тогда единственное отображение f, удовлетворяющее выдвинутым требованиям, определяется условием

$$f \circ j(x_1, x_2) = f_1(x_1) + f_2(x_2).$$

Таким образом, линейное отображение E в F однозначно определено своими ограничениями на два дополнительных ВПП E_1, E_2 пространства E.

Факторпространство. Каноническое разложение полулинейного отображения

▶ Теорема 4.3. Пусть E — левое векторное пространство над K, X — его векторное подпространство и E/X — факторгруппа группы $(E, +)$ по подгруппе X. Тогда E/X допускает *единственную структуру левого векторного пространства над K*, такую, что *каноническая проекция p: $E \to E/X$* есть *линейное отображение.*

Более того, если Y *дополнительно* к X, то ограничение p на Y есть *изоморфизм* Y на E/X.

Доказательство. a) По определению, для любого $a \in E$ класс $p(a)$ есть множество векторов вида $a + x$, где x пробегает X, и, как легко проверить, для $\lambda \in K$ класс $p(\lambda a)$ зависит только от λ и $p(a)$. Таким образом, E/X наделяется структурой левого векторного пространства, совместимой с классической групповой структурой, если положить $p(a) + p(b) = p(a + b)$ и $\lambda p(a) = p(\lambda a)$. Это единственная структура, относительно которой проекция p линейна.

b) Если $E = X \oplus Y$, то каждый класс $p(a)$ имеет с Y единственный общий элемент (компоненту a в Y); поэтому ограничение p на Y биективно. □

▶ Теорема 4.4. Каждое полулинейное отображение f: $E \to F$ имеет разложение $f = g \circ p$, где p: $E \to E/\operatorname{Ker} f$ — каноническая проекция, а g: $E/\operatorname{Ker} f \to$

$\to F$ — полулинейное инъективное отображение, ассоциированное с тем же изоморфизмом θ тела, что и f.

Доказательство. Если $(a, b) \in E^2$, то $f(a) = f(b)$ равносильно $b - a \in \operatorname{Ker} f$, и потому $p(a) = p(b)$. Следовательно, существует инъективное отображение $g\colon E/\operatorname{Ker} f \to F$, такое, что $f = g \circ p$. Далее, поскольку p линейно и f полулинейно, для любых a, $b \in E$ имеем

$$g(p(a) + p(b)) = g(p(a+b)) = f(a+b) = f(a) + f(b) = \\ = g(p(a)) + g(p(b)),$$

и для каждого элемента λ основного тела пространства E

$$g(\lambda p(a)) = g(p(\lambda a)) = f(\lambda a) = \theta(\lambda) f(a) = \theta(\lambda) g(p(a)).$$

Итак, g полулинейно и ассоциировано с θ. □

Применение базисов

▶ Теорема 4.5. Пусть E, F — два левых векторных пространства над телами K, K' и $B = (e_i)_{i \in I}$ — *индексированный базис* E. Тогда

a) Для любого семейства $(a_i)_{i \in I}$ элементов F, индексированного тем же множеством I, существует единственное *полулинейное* отображение $f\colon E \to F$, ассоциированное с заданным изоморфизмом $\theta\colon K \to K'$ и удовлетворяющее условиям $f(e_i) = a_i$ при всех $i \in I$.

b) Для того чтобы f было *инъективным* (соотв. *сюръективным*), необходимо и достаточно, чтобы семейство $(a_i)_{i \in I}$ было *свободным* (соотв. *семейством образующих*).

Следовательно, для того чтобы f было *биективным*, необходимо и достаточно, чтобы образ при отображении f какого-либо базиса E был базисом F, и тогда то же самое имеет место для всякого базиса.

Доказательство. a) Отображение f, определяемое равенством $f\left(\sum_{i \in I} x_i e_i\right) = \sum_{i \in I} \theta(x_i) a_i$ для любого конечного $J \subset I$, является единственным отображением, удовлетворяющим поставленным требованиям.

Отсюда легко получается утверждение b).

Пространство линейных или полулинейных отображений

Легко видеть, что *композиция* линейных (соотв. полулинейных) отображений линейна (соотв. полулинейна).

Сумма двух линейных отображений f_i: $E \to F$ $(i = 1, 2)$, очевидно, линейна. Напротив, сумма двух полулинейных отображений полулинейна только в том случае, когда оба этих отображения ассоциированы с одним и тем же изоморфизмом тел.

Наконец, пусть E, F — два левых векторных пространства над телами K, K' и f: $E \to F$ — полулинейное отображение, ассоциированное с изоморфизмом θ: $K \to K'$. Для любого $k \in K'^*$ отображение

$$g = kf\colon E \to F, \quad x \mapsto kf(x)$$

полулинейно и ассоциировано с изоморфизмом

$$\varphi\colon K \to K', \quad \lambda \mapsto k\theta(\lambda)\,k^{-1}.$$

Действительно, имеем

$$g(\lambda x) = kf(\lambda x) = k\theta(\lambda) f(x) = f\theta(\lambda)\,k^{-1}g(x).$$

В частности, мы можем сформулировать

▶ Предложение 4.6. Если E, F — два левых векторных пространства над телом K и f — *линейное* отображение E в F, то отображение kf (где $k \in K^*$) *полулинейно и ассоциировано с внутренним автоморфизмом* $\lambda \mapsto k\lambda k^{-1}$.

Итак, kf *линейно только в случае, когда* k *принадлежит центру тела* K. Если $f = \mathrm{Id}_E$, то мы возвращаемся к случаю векторных гомотетий.

Отсюда вытекает, что *если K не коммутативно, то множество линейных отображений E в F не является векторным пространством по отношению к обычным операциям*; поэтому представляет интерес следующий частный случай:

▶ Предложение 4.7. Пусть E — *левое векторное пространство* над телом K. Тогда линейные отображения E в K (называемые *линейными формами*) образуют *правое векторное пространство* над K со следующими законами сложения и умножения на скаляры:

$$(\forall x \in E) \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$(fk)(x) = f(x)\,k \quad (k \in K).$$

Проверка осуществляется непосредственно. Векторное пространство линейных форм на E называется *сопряженным* с E и обозначается E^*.

Понятно, что предложение 4.7 остается верным при перестановке слов «левый» и «правый».

Сопряженность линейных пространств будет изучена в § 6.

5. ЛИНЕЙНЫЕ И ПОЛУЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ В КОНЕЧНОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Теорема 5.1. Пусть E — левое *конечномерное* пространство над телом K. Для того чтобы левое векторное K-пространство F было *изоморфно* E, необходимо и достаточно условие $\dim(F) = \dim(E)$.

В самом деле, пусть $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — базис E; если $f\colon E \to F$ — изоморфизм, то $(f(e_i))$ составляют базис F, откуда следует, что $\dim(F) = \dim(E)$. Обратно, если последнее равенство выполнено, то предложение 4.5 позволяет построить нужный изоморфизм.

Можно доказать также следующую теорему:

▶ Теорема 5.2. Пусть E, F — два векторных пространства *одинаковой конечной размерности* n над телами K, K', а f — полулинейное отображение E в F. Тогда следующие три утверждения *эквивалентны*:

i) f инъективно,

ii) f сюръективно,

iii) f биективно.

Доказательство. Если f инъективно (соотв. сюръективно), то образ при отображении f базиса E является свободным семейством (соотв. семейством образующих) мощности n, что и влечет биективность f.

Наконец, из теоремы 4.4 о каноническом разложении выводится

▶ Предложение 5.3. *Если E, F — два конечномерных векторных пространства и f: $E \to F$ — полулинейное отображение, то*

$$\dim(\operatorname{Im} f) + \dim(\operatorname{Ker} f) = \dim(E). \tag{1}$$

Доказательство. Можно положить $f = g \circ p$, где g: $E/\operatorname{Ker} f \to F$ — полулинейное инъективное отображение. Каноническая проекция p: $E \to E/\operatorname{Ker} f$ сюръективна, и потому $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} g$. Рассматривая g как полулинейную биекцию $E/\operatorname{Ker} f$ на $\operatorname{Im} f$, найдем, что $\dim(\operatorname{Im} f) = \dim(E/\operatorname{Ker} f)$.

Наконец, поскольку $E/\operatorname{Ker} f$ изоморфно любому подпространству, дополнительному к $\operatorname{Ker} f$ (теорема 4.3), то

$$\dim(E) = \dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(E/\operatorname{Ker} f),$$

откуда и вытекает результат. □

Напомним здесь, что размерность образа f называется *рангом* f и обозначается $\operatorname{rg}(f)$.

Матрица линейного отображения

Пусть E, F — два левых векторных пространства конечных размерностей n, p над одним и тем же телом K, $B = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис E и $B' = (e'_1, \ldots, e'_p)$ — базис F. В силу теоремы 4.5, задание линейного отображения f: $E \to F$ равнозначно заданию прямоугольной таблицы скаляров (a_{ki}) $(1 \leqslant k \leqslant p,\ 1 \leqslant i \leqslant n)$, таких, что

$$f(e_i) = \sum_{k=1}^{p} a_{ki} e'_k \quad (1 \leqslant i \leqslant n). \tag{2}$$

Эта таблица называется *матрицей отображения* f в базисах B, B'.

Образом вектора $x=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ из E является вектор $y=f(x)=\sum_{k=1}^{p} y_k e'_k$ из F с координатами

$$y_k=\sum_{i=1}^{n} x_i a_{ki} \quad (1 \leqslant k \leqslant p). \tag{3}$$

В случае правых векторных пространств E, F формулы (2) и (3) заменяются следующими:

$$f(e_i)=\sum_{k=1}^{p} e'_k a_{ki} \quad (1 \leqslant i \leqslant n), \tag{2'}$$

$$y_k=\sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i \quad (1 \leqslant k \leqslant p), \tag{3'}$$

и отображение f определяется тогда условиями

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} e_i x_i\right)=\sum_{i=1}^{n} f(e_i)\, x_i=\sum_{k=1}^{p} e'_k y_k.$$

В частности, всякая линейная форма f на левом (соотв. правом) векторном пространстве E записывается в виде

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right)=\sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)$$

$$\left(\text{соотв. } f\left(\sum_{i=1}^{n} e_i x_i\right)=\sum_{i=1}^{n} f(e_i)\, x_i\right),$$

где $f(e_i)$ — элементы тела K.

Если K — поле, то мы возвращаемся к привычным формулам.

Мы не станем развивать здесь матричное исчисление над некоммутативным телом.

6. ЛИНЕЙНЫЕ ФОРМЫ, ГИПЕРПЛОСКОСТИ, ДУАЛЬНОСТЬ

Линейные формы были определены в § 4. Теперь мы изучим их связь с геометрическим понятием гиперплоскости.

Определение 6.1. Пусть E — векторное пространство над телом K. *Векторной гиперплоскостью* в E называется такое его векторное подпространство H, что размерность E/H равна 1.

▶ Предложение 6.1. Для того чтобы векторное подпространство H пространства E было гиперплоскостью, достаточно, чтобы в E существовал такой элемент a, что $E = H \oplus Ka$.

Обратно, если H — гиперплоскость в E, то $E = H \oplus Ka$ для любого $a \in E \setminus H$.

Доказательство. a) Если $E = H \oplus Ka$, то H допускает в качестве дополнительного подпространства прямую Ka. По теореме 4.3 размерность E/H равна 1 и H — гиперплоскость.

b) Если H — гиперплоскость, обозначим через p: $E \to E/H$ каноническую проекцию. Поскольку E/H одномерно, $E \setminus H$ не пусто, и для каждого $a \in E \setminus H$ векторное пространство E/H порождается элементом $p(a)$. Дя каждого $x \in E$ существует $\lambda \in K$, такое, что $p(x) = \lambda p(a)$, что равносильно $x - \lambda a \in H$. Следовательно, $E = H + Ka$ и, поскольку $H \cap (Ka) = \{0\}$, имеем $E = H \oplus Ka$.

Следствие. Для того чтобы векторное подпространство H пространства E было гиперплоскостью, необходимо и достаточно, чтобы у H имелось *дополнительное подпространство размерности* 1.

Заметим, что гиперплоскости можно было определить этим свойством, не прибегая к понятию фактор-пространства.

Пример. Пусть H — векторное подпространство в $E = K[X]$, образованное многочленами без свободного члена. Тогда H допускает в качестве дополнительного подпространства векторную прямую, порожденную скалярами; значит, H есть векторная гиперплоскость пространства $K[X]$.

▶ Теорема 6.2. a) *Ядро* не равной тождественно нулю *линейной формы* является *векторной гиперплоскостью.*

b) Обратно, если H — векторная гиперплоскость в E, то на E существует линейная форма f, такая, что $H = \operatorname{Ker} f$, и если g — линейная форма, равная нулю на H, то существует такой скаляр k, что $g = fk$. Следовательно, если $H = \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$, то существует $k \in K^*$, такой, что $g = fk$.

Доказательство. a) Пусть $f \in E^*$, $f \neq 0$ и $H = \operatorname{Ker} f$. По предположению, существует такой вектор $a \in E$, что $f(a) \neq 0$; положив $b = [f(a)]^{-1} a$, найдем, что $f(b) = 1$. Для каждого $x \in E$ вектор $y = x - f(x) b$ удовлетворяет равенству $f(y) = 0$, т. е. $y \in H$. Таким образом, $x \in H + Kb$, откуда следует, что $E = H + Kb$, и, поскольку $b \notin H$, H — гиперплоскость.

b) Пусть H — гиперплоскость и $a \in E \setminus H$. Для каждого $x \in E$ существует единственный скаляр $f(x)$, такой, что $x - f(x) a \in H$. Определенное таким путем отображение $f\colon E \to K$ очевидным образом линейно и $x \in H$ равносильно $f(x) = 0$. Итак, $H = \operatorname{Ker} f$.

Наконец, если g — линейная форма, равная нулю на $H = \operatorname{Ker} f$, то можно выбрать $a \in E$ так, что $f(a) = 1$. Тогда форма $h\colon x \mapsto g(x) - f(x) g(a)$ обращается в нуль и на H и в a и, следовательно, на $H + Ka = E$; иными словами, h есть нулевая форма и $g = fk$, где $k = g(a)$ (напомним, что форма $fk\colon x \mapsto f(x) k$ линейна). □

Следствие. Если H, H' — две гиперплоскости в E и $H \subset H'$, то $H = H'$.

Доказательство. Положим $H = \operatorname{Ker} f$, $H' = \operatorname{Ker} g$; форма g обращается в нуль на H, и потому $g = fk$ с $k \neq 0$ и, значит, $H = H'$.

Замечание. Более общо: ядро *полулинейной* формы, не всюду равной нулю на E, является гиперплоскостью. Действительно, полулинейные формы приводятся к линейным с помощью композиции с автоморфизмом тела K (см. упр. II. 13).

Дуальность

Мы рассмотрим отношение, называемое дуальностью, между пространством E и сопряженным E^*.

Для этого введем отображение

$$b\colon E \times E^* \to K, \quad (x, f) \longmapsto f(x).$$

Это отображение *билинейно* [1]), так как

$$(\forall (\lambda, \mu) \in K^2, \forall (x, f) \in E \times E^*) \quad b(\lambda x, f\mu) = \lambda f(x)\mu. \tag{1}$$

Форма b позволяет ввести между элементами пространства E и сопряженного пространства E^* отношение *ортогональности*: элемент $f \in E^*$ назовем ортогональным к $x \in E$, если $f(x) = 0$. Множество всех элементов из E^*, ортогональных к $x \in 0$, называется *аннулятором* x. В более общей форме введем

▶ Определение 6.2. *Аннулятором* [2]) подмножества $A \subset E$ называется подмножество $A^0 \subset E^*$, определяемое условием

$$A^0 = \{f \in E^* \mid (\forall x \in A)\, f(x) = 0\}.$$

Иными словами, это множество линейных форм на E, ядро которых содержит A. Аннулятор A можно также называть (*полным*) *ортогональным к* A *пространством*, так как верно

Предложение 6.3. Аннулятор A^0 подмножества $A \subset E$ есть *векторное подпространство в* E^* и $(\operatorname{Vect} A)^0 = A^0$.

С другой стороны, если A, B — два подмножества в E, то

$$(A \cup B)^0 = A^0 \cap B^0, \quad (A \cap B)^0 \supset A^0 + B^0 \tag{2}$$

и включение $A \subset B$ влечет $A^0 \supset B^0$.

Проверка не составляет труда.

---

[1]) Более общо, если E — левое и E^* — правое векторные пространства над K, отображение $b\colon E \times E^* \to K$ со свойством (1) называется *спариванием*; по поводу этого понятия см. [AR], гл. I.

[2]) Термином «аннулятор» мы заменили трудно переводимый термин «l'orthogonal»; для компенсации добавлено прямое определение ортогональности элементов E и E^*. Вообще, два подмножества $A \subset E$ и $A' \subset E^*$ можно называть *вполне ортогональными*, если попарно ортогональны любые их элементы. — *Прим. перев.*

Пример. Пусть H — гиперплоскость в E; ее аннулятор есть векторная прямая в E^*, образованная линейными формами, обращающимися в нуль на H (см. теорему 6.2).

Второе сопряженное пространство. По-прежнему исходим из левого векторного пространства E над телом K. Сопряженное с ним пространство E^* есть правое векторное пространство над K; пространство E^{**}, сопряженное с E^*, называется *вторым сопряженным* с E и является левым векторным пространством над K. Отображение j: $E \to E^{**}$, $x \mapsto \hat{x}$, определяемое условием $\hat{x}(f) = f(x)$, очевидным образом, линейно; в самом деле, $\widehat{(\lambda x)}(f) = f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda \hat{x}(f)$.

Далее (§ 10) мы установим, применяя, правда, лемму Цорна, что это отображение j *инъективно*; действительно, утверждать, что j инъективно, означает утверждать, что нулевой вектор E — это единственный вектор, удовлетворяющий условию $f(x) = 0$ для всех $f \in E^*$, что для бесконечномерного E неочевидно.

Случай конечной размерности рассматривается в § 7.

Линейное отображение j называется *каноническим вложением* E во второе сопряженное пространство E^{**}.

Транспонированное линейное отображение

Определение 6.3. Пусть E, F — два левых векторных пространства над одним и тем же телом K и φ: $E \to F$ — линейное отображение. *Транспонированным* к φ называется отображение ${}^t\varphi$: $F^* \to E^*$, определенное условием

$$(\forall f \in F,\ \forall x \in E) \quad {}^t\varphi(f) = f \circ \varphi.$$

Предложение 6.4. Если φ — линейное отображение, то транспонированное отображение ${}^t\varphi$ также линейно и

$$\operatorname{Ker}({}^t\varphi) = (\operatorname{Im}\varphi)^0. \tag{3}$$

Доказательство. Для любой формы $f \in F^*$ и каждого $k \in K$ имеем

$$^t\varphi(fk)(x) = f(\varphi(x))\,k \quad \text{или} \quad ^t\varphi(fk) = (^t\varphi(f))\,k$$

и, с другой стороны,

$$(\forall (f, g) \in E^* \times E^*)$$
$$^t\varphi(f+g) = f \circ \varphi + g \circ \varphi = {^t\varphi}(f) + {^t\varphi}(g),$$

что и доказывает линейность $^t\varphi$.

Наконец, $\operatorname{Ker}(^t\varphi)$ есть множество таких $f \in F^*$, что $f \circ \varphi(x) = 0$ для всех $x \in E$; иными словами, $\operatorname{Ker}(^t\varphi)$ есть множество таких $f \in F^*$, которые равны нулю на $\varphi(E) = \operatorname{Im}\varphi$, откуда (3) следует по определению аннулятора. □

Разумеется, все результаты этого параграфа сохраняют силу при перестановке слов «левый» и «правый».

7. ДУАЛЬНОСТЬ В КОНЕЧНОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Если E конечномерно, то результаты предыдущего параграфа могут быть усилены.

Теорема 7.1. Пусть E — векторное пространство конечной размерности n; тогда и сопряженное пространство E^* имеет ту же размерность n; если $B = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — базис E, то n координатных форм $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ составляют *базис* E^*, называемый *дуальным базисом* к B.

Доказательство. Если E — левое векторное пространство, то всякая линейная форма на нем единственным образом записывается в виде

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i, \quad \text{где} \quad f_i = f(e_i).$$

Таким образом, n координатных форм $x \mapsto x_i$ составляют базис в E^*; координатами f в этом базисе являются скаляры $f_i = f(e_i)$. □

Следствие. Если E — конечномерное векторное пространство, то отображение $j\colon E \to E^{**}$, $x \mapsto \hat{x}$, определяемое условием

$$(\forall f \in E^*) \quad \hat{x}(f) = f(x),$$

является *изоморфизмом*, что позволяет отождествить E и его второе сопряженное пространство E^{**}.

Доказательство. E^{**} имеет ту же размерность n, что E^* и E. Поскольку j линейно, достаточно доказать его инъективность, что делается элементарно: если x — элемент E, такой, что $\hat{x} = 0$, то $\hat{x}(f) = 0$ для всех $f \in E^*$ и, в частности, для каждой координатной формы x_i в некотором базисе B пространства E. Имея нулевые координаты, вектор x равен нулю: $x = 0$. □

Важное замечание. Если E — левое (соотв. правое) векторное пространство, то E^* является правым (соотв. левым) векторным пространством. Поэтому не существует изоморфизма E на E^*, кроме случая, когда K — *поле.* Но даже в этом случае не существует *канонического* изоморфизма E на E^* (т. е. изоморфизма, однозначно определенного самой векторной структурой, независимо, например, от выбора базиса в E). Мы увидим ниже (§ 8), что в случае, когда K — поле, задание изоморфизма E на E^* равносильно заданию на E невырожденной билинейной формы.

Соответствие между векторными подпространствами в E и E^*

Каждому ВПП X в E отвечает ВПП X^0 в E^*, ортогональное к X. Уточним характер этого соответствия.

▶ Теорема 7.2. Пусть E — векторное пространство размерности n. Если X — его ВПП размерности p $(0 \leqslant p \leqslant n)$, то ортогональное к нему ВПП X^0 в E^* имеет размерность $n - p$. Если отождествить E с его вторым сопряженным пространством с помощью канонического изоморфизма j, то $(X^0)^0 = X$.

Доказательство. Пусть $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — базис E, полученный пополнением базиса $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ подпространства X. Тогда $f \in X^0$ в том и только том случае, если

$$f(e_1) = f(e_2) = \ldots = f(e_p) = 0;$$

таким образом, X^0 есть множество линейных отображений E в K вида

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \longmapsto \sum_{j=p+1}^{n} x_j f_j,$$

где $f_{p+1}, \ldots, f_n$ — элементы K.

Иначе говоря, $n-p$ координатных форм $x_{p+1}, \ldots \ldots, x_n$ образуют базис X^0 (аннулятора X).

Такие же рассуждения показывают, что $(e_1, \ldots, e_p)$ образуют базис в $(X^0)^0$, т. е. $(X^0)^0 = X$.

Следствие. 1) Отображение $X \longmapsto X^0$ есть биекция множества ВПП в E на множество ВПП в E^*.

2) Если A — любое подмножество в E и E отождествлено со своим вторым сопряженным, то $(A^0)^0 = \mathrm{Vect}(A)$.

Приложения

► Предложение 7.3. Если X есть ВПП размерности p пространства E и $p < n = \dim(E)$, то существует система из $n-p$ линейных форм $f_1, \ldots, f_{n-p}$, таких, что

$$x \in X \Leftrightarrow f_1(x) = f_2(x) = \ldots = f_{n-p}(x) = 0, \qquad (1)$$

и каждая линейная форма $f \in E^*$, обращающаяся в нуль на X, является линейной комбинацией форм $f_1, \ldots, f_{n-p}$.

Доказательство. Соотношение (1) показывает, что X — множество векторов, ортогональных к подмножеству $A = \{f_1, \ldots, f_{n-p}\}$ элементов E^*, или $X = A^0$, это равносильно $X = (\mathrm{Vect}\, A)^0$ или $X^0 = \mathrm{Vect}(A)$. Условие (1) выполняется, таким образом, тогда и только тогда, когда A — множество образующих для X^0, т. е. базис X^0 (так как $\dim(X^0) = n-p$). Отсюда и следует наше утверждение. □

► Напомним, что линейные формы на E называются *независимыми*, если они образуют свободное подмножество в E^*. Предложение 7.3 показывает, что если

$\dim E = n$, то каждое ВПП в E размерности p может быть задано системой $n-p$ *независимых линейных уравнений в декартовых координатах.*

Если рассматривать необязательно независимые линейные формы, то справедливо

▶ Предложение 7.4. Если $f, f_1, \ldots, f_q$ — линейные формы на E, причем из q соотношений $f_1(x)=0, \ldots, f_q(x)=0$ вытекает $f(x)=0$, то f является линейной комбинацией форм $f_1, \ldots, f_q$.

Доказательство. Положим $Y = \operatorname{Vect}(f_1, \ldots, f_q)$ и обозначим через f^0 подпространство, ортогональное к $\{f\}$. Высказанное предположение может быть выражено в виде $Y^0 \subset f^0$, откуда $(f^0)^0 \subset (Y^0)^0$ или $\operatorname{Vect}(f) \subset Y$ и $f \in Y$, что и дает требуемый результат. □

▶ Следствие. Пусть $H_1, \ldots, H_q$ — векторные гиперплоскости с уравнениями соответственно $f_1 = 0, \ldots, f_q = 0$. Тогда векторные гиперплоскости, содержащие $H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_q$, — это те, которые могут быть заданы уравнениями вида $\sum_{i=1}^{q} \lambda_i f_i = 0$.

(Это геометрическая формулировка предыдущего результата.)

Предложения 7.3 и 7.4 лежат в основе *теории неопределенных множителей*, которая встречается в механике и вариационном исчислении.

Ранг транспонированного отображения

▶ Теорема 7.5. Пусть E, F — два левых векторных пространства над одним и тем же телом K и $\varphi: E \to F$ — линейное отображение. *Тогда ранг транспонированного отображения* ${}^t\varphi$: $F^* \to E^*$ *равен рангу* φ.

Доказательство. Применив предложения 5.3 и 6.4, получим: $\operatorname{rg}({}^t\varphi) + \dim \operatorname{Ker}({}^t\varphi) = \dim(F^*)$ и $\operatorname{Ker}({}^t\varphi) = (\operatorname{Im}\varphi)^0$; с другой стороны, $\dim(\operatorname{Im}\varphi)^0 = \dim(F) - \dim(\operatorname{Im}\varphi)$, и в силу $\dim(F) = \dim(F^*)$ имеем

$$\operatorname{rg}({}^t\varphi) = \dim(F) - \dim(\operatorname{Im}\varphi)^0 = \dim(\operatorname{Im}\varphi) = \operatorname{rg}\varphi. \quad \square$$

Матричная интерпретация. Пусть отображение φ определено своей матрицей $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant p,\ 1 \leqslant j \leqslant n}$

в базисах $B = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ пространства E и $B' = (e'_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ пространства F. Тогда (см. § 5)

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{k=1}^{p} y_k e'_k, \quad \text{где} \quad y_k = \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ki}.$$

Образ k-й координатной формы y_k на F при отображении ${}^t\varphi$ есть, таким образом, форма f_k: $x \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ki}$ $(1 \leqslant k \leqslant p)$. Образ при отображении ${}^t\varphi$ базиса, дуального к B', есть $(f_1, \ldots, f_p)$, и матрица ${}^t\varphi$ в дуальных базисах к B' и B образована коэффициентами форм f_k. Это есть, таким образом, *транспонированная матрица* к A, т. е. полученная из A перестановкой строк и столбцов.

С учетом теоремы 7.5 мы получили следующий важный результат:

▶ Предложение 7.6. Ранг матрицы не изменяется при ее транспонировании.

8. ИЗОМОРФИЗМЫ ВЕКТОРНОГО ПРОСТРАНСТВА НА ЕГО СОПРЯЖЕННОЕ (КОММУТАТИВНЫЙ СЛУЧАЙ, КОНЕЧНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ)

На протяжении всего этого параграфа E обозначает конечномерное векторное пространство над некоторым полем. Мы докажем, что существует биективное соответствие между *изоморфизмами* E на E^* *и невырожденными билинейными формами* на E.

Пусть I — изоморфизм E на E^*. Для любого $y \in E$ его образ $I(y)$ есть линейная форма на E. Обозначим через $B(x, y) = I(y)(x)$ значение функции $I(y)$ на элементе $x \in E$; мы получим билинейную форму B: $E \times E \to K$, $(x, y) \mapsto B(x, y)$ (отображение $E \times E$ в K, линейное по каждому из аргументов x, y).

Если отождествить E с его вторым сопряженным, то транспонированное отображение ${}^tI$ отождествится с отображением J: $E \to E^*$, таким, что $(\forall y \in E)$ $J(y) = \hat{y} \circ I$, где $(\forall f \in E^*)$ $\hat{y}(f) = f(y)$. Таким образом, для каждого $x \in E$ получаем (полагая $f = I(x)$):

$$J(y)(x) = \hat{y}(I(x)) = I(x)(y) = B(y, x).$$

Так как по теореме 7.5 J и I одинакового ранга, то J также является изоморфизмом E на E^*; равенство $J(y)(x) = B(y, x)$ показывает, что билинейная форма, ассоциированная с J, есть форма ${}^tB$, определяемая равенством ${}^tB(x, y) = B(y, x)$ и называемая *транспонированной* по отношению к B.

Обратно, пусть B: $E \times E \to K$ — билинейная форма на E. Для каждого $y \in E$ обозначим $B(\cdot, y)$ линейную форму $E \to K$, $x \mapsto B(x, y)$; пусть аналогично $B(y, \cdot)$ есть линейная форма $E \to K$, $x \mapsto B(y, x)$. Тогда отображения

$$I\colon E \to E^*, \quad y \mapsto B(\cdot, y) \quad \text{и} \quad J\colon E \to E^*, \quad y \mapsto B(y, \cdot)$$

линейны и взаимно транспонированы, а следовательно, имеют одинаковый ранг. Поэтому мы можем ввести

Определение 8.1. Билинейная форма B на E называется *невырожденной*, если линейные отображения

$$I\colon y \mapsto B(\cdot, y) \quad \text{и} \quad J\colon y \mapsto B(y, \cdot)$$

имеют ранг $n = \dim E$.

Итак, имеет место

▶ Предложение 8.1. Если E — конечномерное векторное пространство над полем, то изоморфизмы E на его сопряженное имеют вид I: $y \mapsto B(\cdot, y)$, где B — невырожденная билинейная форма на E.

Использование базисов. Обозначим через $e = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ базис E; тогда каждая билинейная форма B на E запишется в виде

$$B\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{i, j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j, \quad \text{где} \quad a_{ij} = B(e_i, e_j).$$

Для каждого i образ $I(e_i)$ вектора e_i при отображении I: $y \mapsto B(\cdot, y)$ есть линейная форма $\sum_{k=1}^{n} a_{ki} x_k$. Матрица отображения I в дуальных базисах $e = (e_i)$ и $e^* = (x_i)$ равна, таким образом, матрице (a_{ki}) билинейной формы B в базисе (e_i). *Для того чтобы I было изоморфизмом, необходимо и достаточно, что-*

бы детерминант этой матрицы был отличен от нуля.

Отсюда видно также, что матрица отображения J: $E \to E^*$, $y \mapsto B(y, \cdot)$ в базисах (e_i) и (x_i) получается транспонированием матрицы (a_{ki}); она равна матрице билинейной формы ${}^tB$: $(x, y) \mapsto B(y, x)$ и имеет тот же ранг, что и матрица формы B.

Ортогональность в E. Задание изоморфизма E на E^* позволяет определить *отношение ортогональности* на самом E: элемент y в E называется *ортогональным* к $x \in E$, если $I(y)(x) = 0$, т. е. если $B(x, y) = 0$.

Но это отношение ортогональности получает интересное развитие только в случае, когда оно *симметрично*, т. е. когда $B(x, y) = 0$ равносильно $B(y, x) = 0$. Последнее имеет место в двух следующих случаях (см. упр. II. 18):

i) форма B *симметрична*, т. е. для любых $(x, y) \in E^2$ выполнено $B(x, y) = B(y, x)$;

ii) форма B *кососимметрична*, т. е. для любого $x \in E$ имеем $B(x, x) = 0$ [1]).

Первый случай представляет предмет изучения в *ортогональной геометрии*, ассоциированной с квадратичной формой $x \mapsto B(x, x)$; евклидова геометрия есть частный случай, когда $K = \mathbb{R}$ и форма B положительно определенная [2]).

Изучение второго случая составляет предмет *симплектической геометрии.*

По поводу этих геометрий см. более специальные сочинения ([AR], гл. III, [DE]).

9. О БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

На протяжении предыдущих параграфов мы изложили некоторые свойства конечномерных пространств. Чтобы удовлетворить законное стремление к наибольшей общности, мы укажем здесь на некоторые трудности, возникающие при переходе от конечной размерности к бесконечной.

---

[1]) Если $\operatorname{car} K = 2$, то условие i) равносильно условию ii). Случай $\operatorname{car} K = 2$ обычно исключается. — *Прим. перев.*

[2]) Если $K = \mathbb{R}$, но форма B знаконеопределенная, то говорят о *псевдоевклидовой* геометрии. — *Прим. перев.*

▶ Прежде всего выражение «бесконечная размерность» не должно вводить нас в заблуждение: оно означает лишь, что рассматриваемое пространство не допускает конечного базиса. *Два бесконечномерных векторных пространства над одним и тем же полем необязательно изоморфны.*

Контрпример 1. По построению, векторное пространство $\mathbb{R}[X]$ многочленов над $\mathbb{R}$ допускает счетный базис $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ (см. § 2); можно заметить, что $\mathbb{R}[X]$ отождествимо с множеством *конечных последовательностей* действительных чисел.

Напротив, векторное пространство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, образованное *бесконечными последовательностями* действительных чисел, не допускает счетного базиса и потому не изоморфно $\mathbb{R}[X]$, хотя оба пространства «бесконечномерны».

В самом деле, последовательности s_α: $n \longmapsto n^\alpha$, где α пробегает $\mathbb{R}_+$, образуют свободное несчетное семейство элементов $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (см. упр. 19). Если бы $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ допускало счетный базис $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$, то каждое из множеств

$$A_n = \{\alpha \in \mathbb{R}_+ \mid s_\alpha \in \mathrm{Vect}(a_0, a_1, \ldots, a_n)\}$$

было бы конечным мощности, не превосходящей $n+1$ (так как размерность $\mathrm{Vect}(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ равна $n+1$), и их объединение, равное $\mathbb{R}_+$, было бы счетным, что приводит к противоречию.

Контрпример 2. $\mathbb{R}$ есть векторное пространство над $\mathbb{Q}$, не имеющее счетного базиса и потому неизоморфное $\mathbb{Q}[X]$.

В самом деле, предположим, что $\mathbb{R}$, рассматриваемое как векторное пространство над $\mathbb{Q}$, допускает счетный базис $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ подпространство $A_n = \mathrm{Vect}(a_0, a_1, \ldots, a_{n+1})$ изоморфно $\mathbb{Q}^{n+1}$ и потому счетно. Счетным оказалось бы и $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, что противоречит несчетности $\mathbb{R}$.

(О существовании базисов $\mathbb{R}$ над $\mathbb{Q}$ говорится в § 10.)

О распространении свойств на случай бесконечной размерности

Среди классических свойств конечномерных векторных пространств, формулировка которых сохраняет смысл и в бесконечномерном случае, мы будем различать три категории свойств.

1° *Некоторые свойства становятся неверными, если хотя бы одно из рассматриваемых векторных пространств бесконечномерно.*

Примеры. a) Утверждение «каждый инъективный или сюръективный эндоморфизм E является автоморфизмом» неверно, если E бесконечномерно.

Контрпример 3. Пусть $E = K[X]$; эндоморфизм $P \longmapsto XP$ инъективен, но не сюръективен (образ не содержит констант). Аналогично, эндоморфизм

$$K[X] \to K[X], \quad \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \longmapsto \sum_{k=1}^{n} a_k X^{k-1}$$

сюръективен, но не инъективен.

b) Утверждение «любое ВПП в E, изоморфное E, совпадает с E», верное в конечномерном случае (см. § 3 и 5), не имеет места в бесконечномерном случае.

Контрпример 4. Пусть $E = K[X]$; подпространство E_0, образованное многочленами без свободного члена вида $P = \sum_{k=1}^{n} a_k X^k$, является образом E при инъективном эндоморфизме $P \longmapsto XP$ и, следовательно, изоморфно E, но отлично от E.

c) Утверждение «дополнительные подпространства для двух изоморфных ВПП $E_1, E_2 \subset E$ изоморфны», очевидное в конечномерном случае (уже ввиду одинаковой размерности дополнительных подпространств), в бесконечномерном случае ошибочно.

Контрпример 5. Пусть $E = K[X]$, а E_0 то же, что в предыдущем примере. Тогда E допускает в качестве дополнительного подпространства $\{0\}$, а E_0 — векторную прямую, составленную из скаляров.

d) Утверждение «пространство, сопряженное с E, изоморфно E» верно для конечномерного пространства E над полем, но не имеет места в бесконечномерном случае.

Контрпример 6. Пусть $E = \mathbb{R}[X]$; так как последовательность (X^n) образует базис в E, то задание линейной формы f на E равнозначно заданию последовательности действительных чисел $(f_n = f(X^n))_{n \in \mathbb{N}}$. Таким образом, E^* изоморфно уже изученному нами пространству $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ бесконечных последовательностей действительных чисел, не изоморфному $E = \mathbb{R}[X]$ (контрпример 2).

2° *Некоторые свойства переносятся на случай бесконечной размерности путем видоизменений в доказательствах.*

Примеры. a) *Если X — ВПП в E, а Y, Z — два дополнительных к X подпространства, то Y и Z изоморфны.*

Если E имеет конечную размерность n, то достаточно заметить, что $\dim Y = n - \dim X = \dim Z$.

В общем случае обозначим через p, q проектирования E на Y, Z параллельно X.

Тогда ограничение q на Y будет линейной биекцией Y на Z, обращение которой будет ограничением p на Z, и, следовательно, изоморфизмом (полученное соответствие между Y и Z определяется условием $y - z \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$).

b) Если в E имеется ВПП X, такое, что фактор-пространство E/X имеет конечную размерность k, то у X существует дополнительное подпространство размерности k. Это предложение, вытекающее в конечномерном случае из теорем 3.5 и 4.3, остается в силе и для произвольного E.

Действительно, пусть (e_i) —базис E/X и для любого $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ элемент $a_i \in E$ таков, что $p(a_i) = e_i$ (где p — каноническая проекция $E \to E/X$). Для каждого $x \in E$ координаты (x_i) вектора $p(x)$ в базисе (e_i) — это единственные скаляры, для которых

$x - \sum_{i=1}^{k} x_i a_i \in X$ $\Big($так как это соотношение равносильно $p(x) = \sum_{i=1}^{k} x_i e_i\Big)$. Таким образом, $Y = \mathrm{Vect}(a_1, \ldots, a_k)$ — дополнительное подпространство к X; более того, семейство $(a_1, \ldots, a_k)$ свободное и, значит, $\dim Y = k$.

c) Пусть, наконец, E — действительное векторное пространство, снабженное скалярным произведением (симметричной положительно определенной билинейной формой). Тогда отображения E в E, сохраняющие скалярное произведение любых элементов, *линейны*; это свойство, которое в школьных учебниках часто доказывается с применением базисов, т. е. в предположении конечномерности E, справедливо и в бесконечномерном случае и доказывается очень просто следующим способом.

Пусть $p\colon E \times E \to \mathbb{R}$ — рассматриваемое скалярное произведение; по предположению о положительной определенности, $p(x, x) = 0$ влечет $x = 0$. С другой стороны, пусть $f\colon E \to E$ — отображение, удовлетворяющее условию

$$(\forall (x, y) \in E \times E) \quad p(f(x), f(y)) = p(x, y). \tag{1}$$

Обозначим через (x, y, λ, μ) произвольный элемент из $E \times E \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ и положим

$$w = f(\lambda x + \mu y) - \lambda f(x) - \mu f(y).$$

Применяя (1), найдем, что для любого $z \in E$

$$\begin{aligned} p(w, f(z)) = p(f(\lambda x + \mu y), f(z)) - \lambda p(f(x), f(z)) - \\ - \mu p(f(y), f(z)) = \\ = p(\lambda x + \mu y, z) - \lambda p(x, z) - \mu p(y, z) = 0. \end{aligned}$$

В частности, $p(w, f(x)) = p(w, f(y)) = 0$ и $p(w, f(\lambda x + \mu y)) = 0$, откуда в силу линейности p по второму аргументу получаем $p(w, w) = 0$ и, значит, $w = 0$.

Отсюда вытекает линейность f. □

3° *Наконец, имеются такие предложения, которые можно распространить на бесконечномерный случай,* *только прибегая к использованию добавочной аксиомы* (аксиомы Цорна или какой-нибудь ей эквивалентной). Соответствующие примеры мы приведем в § 10.

10. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ АКСИОМЫ ЦОРНА

Начнем с формулировки этой аксиомы.

▶ *Аксиома Цорна.* Пусть X — *индуктивное упорядоченное* множество, т. е. такое, что любое его линейно упорядоченное подмножество (цепь) имеет верхнюю границу.

Тогда в X найдется хотя бы один *максимальный элемент*, т. е. такой элемент x, что не существует элемента $y \in X$, для которого $y > x$.

Напомним, что эта аксиома эквивалентна каждой из следующих:

Аксиома Цермело. Каждое множество может быть *вполне упорядочено*, т. е. снабжено таким отношением порядка, что любое непустое подмножество имеет наименьший элемент.

Аксиома выбора. Пусть $(X_i)_{i \in I}$ есть семейство непустых множеств. Тогда существует отображение $f\colon I \to \bigcup\limits_{i \in I} X_i$, такое, что для каждого $i \in I$ имеем $f(i) \in X_i$.

Покажем теперь, как аксиома Цорна позволяет доказывать теоремы существования для бесконечномерных пространств.

Существование базисов

▶ Теорема 10.1. Любое векторное пространство E имеет базис. Каждое свободное подмножество L в E может быть дополнено до базиса.

Доказательство. Первое утверждение вытекает из второго, если принять за L пустое множество.

Обозначим через L свободное подмножество в E (может быть, и пустое); пусть $\mathscr{L}$ — множество всех свободных подмножеств E, содержащих L, упорядоченное по включению. Тогда $\mathscr{L}$ непусто (так как $L \in$

$\in \mathcal{L}$) и индуктивно, так как любая цепь в $\mathcal{L}$ имеет своей верхней гранью объединение входящих в нее подмножеств. Поэтому в $\mathcal{L}$ существует максимальный элемент B, и так как $B \in \mathcal{L}$, то B — свободное подмножество в E. С другой стороны, если бы B не было множеством образующих для E, то существовал бы элемент $a \in E \setminus B$, такой, что множество $B \cup \{a\}$ было бы свободным и принадлежало $\mathcal{L}$, что противоречит максимальности B и $\mathcal{L}$. Итак, B — базис E, содержащий L. □

Существование дополнительных подпространств

▶ Теорема 10.2. Если E — векторное пространство, то каждое его ВПП X допускает дополнительное подпространство.

Доказательство. По предыдущей теореме X имеет базис A; поскольку A — свободное подмножество в E, его можно дополнить до базиса B пространства E. Тогда векторное пространство $Y = \mathrm{Vect}(B \setminus A)$ будет дополнительным для X. □

▶ Следствие. В каждом векторном пространстве размерности $\geqslant 1$ существуют *гиперплоскости* (дополнения к векторным прямым).

Продолжение линейных отображений

▶ Теорема 10.3. Пусть E, F — два левых векторных пространства над одним и тем же телом K, X — ВПП в E и f: $X \to F$ — линейное отображение. Тогда f можно продолжить до линейного отображения f: $E \to F$.

Доказательство. Выбрав дополнительное к X подпространство $Y \subset E$, положим $f(x + y) = f(x)$ для любых $(x, y) \in X \times Y$.

Следствие. Если элемент a векторного пространства E обращает в нуль любую линейную форму f на E: $f(a) = 0$, то $a = 0$.

Доказательство. Допустим, что $a \neq 0$; тогда существует линейное отображение φ векторной прямой Ka в K, такое, что $\varphi(a) = 1$ (φ определяется условием

$\varphi(\lambda a) = \lambda$ для любого $\lambda \in K$). Следовательно, φ продолжается до линейной формы f на E, такой, что $f(a) = 1$. □

Приложение. Мы можем теперь сформулировать с полной общностью (см. § 7)

▶ Предложение 10.4. Каноническое вложение j векторного пространства E в его второе сопряженное всегда является инъективным отображением.

Существование норм

Теорема 10.5. Каждое векторное пространство E над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ допускает *норму*; в каждом векторном пространстве над $\mathbb{R}$ можно ввести *скалярное произведение.*

Доказательство. Если $(e_i)_{i \in I}$ — базис в E, то каждый элемент $x \in E$ однозначно представим в виде $x = \sum_{i \in J} x_i e_i$, где J — некоторое конечное подмножество в I и $(x_i)_{i \in J}$ — семейство скаляров. Легко видеть, что можно ввести три нормы N_0, N_1, N_2 на E, положив

$$N_0(x) = \sup_{i \in J} |x_i|, \quad N_1(x) = \sum_{i \in J} |x_i|,$$
$$N_2(x) = \Big(\sum_{i \in J} |x_i|^2\Big)^{1/2}.$$

В случае поля $\mathbb{R}$ норма N_2 ассоциирована со скалярным произведением p, определенным на $E \times E$ равенством

$$p\Big(\sum_{i \in J} x_i e_i, \sum_{i \in J} y_i e_i\Big) = \sum_{i \in J} x_i y_i \text{ [1]}.$$

Построение нелинейных автоморфизмов группы $(\mathbb{R}, +)$

Мы знаем, что всякий *монотонный* автоморфизм группы $(\mathbb{R}, +)$ *линеен*, т. е. имеет вид $x \mapsto ax$, где $a \in \mathbb{R}^*$. Так же обстоит дело и с *непрерывными* авто-

[1]) Здесь под J можно понимать $J_1 \cup J_2$, где J_1, J_2 — множества индексов для x, y, такие, что $x = \sum_{i \in J_1} x_i e_i$, $y = \sum_{i \in J_2} y_i e_i$. — *Прим. перев.*

морфизмами этой группы (см. [LF — AR], т. 2, упр. II.16). Применяя аксиому Цорна, мы можем построить нелинейный (а, значит, не монотонный и не непрерывный) автоморфизм $(\mathbb{R}, +)$.

С этой целью рассмотрим $\mathbb{R}$ как векторное пространство над $\mathbb{Q}$; тогда $\mathbb{Q}$ окажется векторным подпространством в $\mathbb{R}$ и для него найдется дополнительное подпространство Y.

Следовательно, существует $\mathbb{Q}$-линейное отображение $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такое, что $f(x) = x$ для всех $x \in \mathbb{Q}$ и $f(y) = 2y$ для всех $y \in Y$ (см. предложение 4.2). Оно определяется равенством $f(x+y) = x + 2y$ для любых $(x, y) \in \mathbb{Q} \times Y$. Это отображение f очевидным образом не линейно, но биективно и удовлетворяет условию

$$(\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2) \quad f(u+v) = f(u) + f(v),$$

т. е. является автоморфизмом группы $(\mathbb{R}, +)$. □

▶ Заметим, однако, что невозможно построить такое отображение элементарными средствами (так же, как нельзя указать в явном виде базис $\mathbb{R}$ над $\mathbb{Q}$); практически мы никогда не встречаемся с нелинейными автоморфизмами $(\mathbb{R}, +)$.

В заключение заметим, что результаты, полученные в этом параграфе с помощью аксиомы Цорна, имеют чисто теоретический интерес, ибо невозможно предъявить объекты, существование которых в них утверждается. С другой стороны, использование этих результатов для получения «заодно» свойств конечномерных пространств (таких, как существование базисов или дополнительных подпространств), как это делается в некоторых курсах, было бы злоупотреблением: ведь это значило бы поставить в зависимость от аксиомы Цорна свойства, которые от нее не зависят.

Глава III

СТРУКТУРА АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА НАД ТЕЛОМ

1. ВВЕДЕНИЕ

Чтобы лучше понимать аффинную структуру и не теряться от ее кажущейся сложности, можно обратиться к более общему понятию *однородного пространства*[1]. Это даст также повод вспомнить, что понятие группы возникло путем абстракции из понятия *группы преобразований*, и, более того, оно полностью проявляет себя, когда мы рассматриваем *действие* группы на некотором множестве.

Считая хорошо известным понятие абстрактной группы, введем

▶ Определение 1.1. Пусть G — некоторая группа (с мультипликативным обозначением операции) и e — ее нейтральный элемент.

Говорят, что G *действует слева* на множестве X, если определено отображение φ: $G \times X \to X$, $(g, x) \mapsto \varphi(g, x)$, такое, что набор отображений φ_g: $X \to X$, $x \mapsto \varphi(g, x)$ удовлетворяет условиям

$$\varphi_e = \mathrm{Id}_X \quad \text{и} \quad (\forall (g, h) \in G^2) \quad \varphi_g \circ \varphi_h = \varphi_{gh}. \qquad (1)$$

Аналогично говорят, что G *действует* на X *справа*, если определено отображение ψ: $X \times G \to X$, $(x, g) \mapsto \psi(x, g)$, такое, что набор отображений ψ_g: $X \to X$, $x \mapsto \psi(x, g)$ удовлетворяет условиям

$$\psi_e = \mathrm{Id}_X \quad \text{и} \quad (\forall (g, h) \in G^2) \quad \psi_g \circ \psi_h = \psi_{hg}. \qquad (1')$$

Соотношения (1) (соотв. (1′)) показывают, что φ_g (соотв. ψ_g) — это *биекции* X на X и что $\varphi_g^{-1} = \varphi_{g^{-1}}$ (соотв. $\psi_g^{-1} = \psi_{g^{-1}}$).

[1] Чтение этого параграфа необязательно для понимания дальнейшего.

Например, любая группа G действует сама на себе слева *левыми сдвигами*: $\varphi_g(x) = gx$ и справа *правыми сдвигами*: $\psi_g(x) = xg$.

Группа G действует на себе слева также *внутренними автоморфизмами*: $\varphi_g(x) = gxg^{-1}$.

Условимся считать, если иное не оговорено, что действие группы на множестве понимается как *действие слева*.

Понятно, что для коммутативной группы G оба действия совпадают; следует, однако, отметить, что одна и та же группа может действовать на множестве, в том числе и на себе, разными способами.

Определение 1.2. Пусть группа G действует слева на множестве X с законом действия φ. Говорят, что G *действует* на X *транзитивно*, если для любой пары (x, y) элементов X существует *хотя бы один* элемент $g \in G$, такой, что $y = \varphi(g, x) = \varphi_g(x)$; далее, говорят, что действие G *просто транзитивно*, если этот элемент g всегда *единственный*.

Пример. Линейная группа $GL(n, \mathbb{R})$ автоморфизмов $\mathbb{R}^n$ действует транзитивно на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, но это действие не является просто транзитивным, кроме случая $n = 1$.

Определение 1.3. Пусть группа G действует слева на множестве X. *Стабилизатором* подмножества A множества X называется множество $G_A = \{g \in G \mid \varphi_g(A) = A\}$.

Непосредственно ясно, что G_A — подгруппа группы G. Если множество A состоит из одного элемента a, то эта подгруппа[1]) называется *группой изотропии* элемента a.

Замечание. Стабилизатор G_A является пересечением двух множеств $G_A^+ = \{g \in G \mid \varphi_g(A) \subset A\}$ и $G_A^- = \{g \in G \mid \varphi_g(A) \supset A\} = \{g \in G \mid \varphi_g^{-1}(A) \subset A\}$, которые не обязаны быть подгруппами G. Например, если

[1]) В этом случае подгруппа G обозначается просто G_a и называется также стационарной подгруппой элемента a. — *Прим. перев.*

$G=(\mathbb{R}, +)$ действует на себе трансляциями и $A=\mathbb{R}_+$ — положительная полуось, то $G_A^+=\mathbb{R}_+$ не является подгруппой, а $G_A^-=\{0\}$. По поводу G_A^+ см. упр. III.1.

Определение 1.4. Пусть G — группа, действующая слева на X; *орбитой* элемента $a \in X$ называется образ G при отображении φ^a: $g \mapsto \varphi(g, a)$.

Если G действует на X транзитивно, то орбиты всех элементов совпадают с X.

Замечание. На X можно определить *отношение эквивалентности*, полагая $y \equiv x$, если существует элемент $g \in G$, такой, что $y = \varphi_g(x)$; классы эквивалентности являются орбитами элементов X; фактормножество по этому отношению назовем *пространством орбит*.

Однородные пространства

Определение 1.5. *Однородным пространством*, ассоциированным с группой G, называется множество X, на котором определено *транзитивное* действие группы G.

Пример (типовой). Пространство смежных классов группы по ее подгруппе[1].

Пусть G — группа, H — ее подгруппа, G/H — фактормножество[2], образованное *левыми смежными классами* относительно H: элементы x, y из G объявляются эквивалентными, если существует элемент $h \in H$, такой, что $y = xh$; класс эквивалентности элемента x есть множество xH элементов вида xh, где $h \in H$.

Действие слева группы G на G/H определяется с помощью $\varphi_g(xH) = gxH$; это действие, очевидно, транзитивно. Фактормножество G/H является *однородным пространством* относительно этого действия.

[1] Это построение использовалось при определении фактор-пространства векторного пространства по его подпространству.

[2] Напомним, что G/H допускает естественную структуру группы, если H — инвариантная подгруппа G.

Мы увидим, что всякое однородное пространство приводится (при помощи биекции) к пространству такого вида.

Теорема 1.1. Пусть X — однородное пространство, ассоциированное с группой G, и для любого $a \in X$ пусть G_a — группа изотропии a. Тогда существует единственная биекция f_a факторпространства G/G_a на X, такая, что для всех $g \in G$ выполнено $f_a \circ p(g) = \varphi(g, a)$, где p: $G \to G/G_a$ — каноническая проекция и φ — действие G на X.

Доказательство. Соотношение $\varphi(g', a) = \varphi(g, a)$ равносильно $\varphi(g^{-1}g', a) = a$ и, значит, $g^{-1}g' \in G_a$ или $p(g') = p(g)$; следовательно, отображение φ^a: $G \to X$, $g \mapsto \varphi(g, a)$ переносится на фактормножество и представляется в виде $\varphi^a = f_a \circ p$, где f_a: $G/G_a \to X$ — биекция. □

Специальный случай

Если группа G действует на X *просто транзитивно*, то группы изотропии G_a тривиальны; для каждой точки $a \in X$ отображение φ^a: $G \to X$, $g \mapsto \varphi(g, a)$ является биекцией, удовлетворяющей условию $\varphi^a(e) = a$.

▶ *Эта биекция φ^a позволяет перенести на X структуру группы G*, которая, однако, будет зависеть от выбора точки a, т. е. образа нейтрального элемента. Говоря нестрого, *X допускает структуру группы, изоморфной G, при произвольном выборе нейтрального элемента.*

Так и будет обстоять дело в случае «аффинной структуры».

2. АФФИННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

▶ Определение 2.1. Пусть E — векторное пространство над произвольным телом K. *Аффинным пространством, ассоциированным с E*, называется множество $\mathscr{E}$, на котором определено *просто транзитивное* действие абелевой группы $(E, +)$. Это действие записывается обычно в виде

$$E \times \mathscr{E} \to \mathscr{E}, \quad (u, x) \mapsto x + u.$$

Для любого $u \in E$ биекция τ_u: $\mathscr{E} \to \mathscr{E}$, $x \mapsto x + u$ называется *трансляцией* на вектор u; далее, для каждой пары a, b элементов $\mathscr{E}$ единственный вектор u, такой, что $b = \tau_u(a)$, обозначается $\overrightarrow{ab}$.

В дальнейшем, по соображениям типографского характера, мы будем избегать употребления стрелок для обозначения векторов. Чтобы отличать элементы $\mathscr{E}$ (называемые *точками*) от элементов E (называемых *векторами*), мы будем преимущественно обозначать «точки» прописными буквами латинского алфавита, такими, как A, B, M, ..., а «векторы» — строчными, например a, u, v, ...; греческие буквы предназначаются для «скаляров».

Можно привести два равносильных данному определению 2.1 обычных определения, не опирающихся на понятие действия группы.

Определение 2.2. *Аффинным пространством, ассоциированным с* E, называется множество $\mathscr{E}$, снабженное семейством биекций $(\tau_u)_{u \in E}$, таких, что

a) $\tau_{0_E} = \mathrm{Id}_{\mathscr{E}}$ и $(\forall (u, v) \in E \times E)$ $\tau_u \circ \tau_v = \tau_{u+v}$;

b) для любой пары $(A, B) \in \mathscr{E} \times \mathscr{E}$ существует единственный вектор $u \in E$, такой, что $B = \tau_u(A)$.

Определение 2.3. *Аффинным пространством, ассоциированным с* E, называется множество $\mathscr{E}$, снабженное отображением $\mathscr{E} \times \mathscr{E} \to E$, обозначаемым $(A, B) \mapsto \overrightarrow{AB}$, таким, что

a) для каждого $A \in \mathscr{E}$ отображение $\mathscr{E} \to E$, $M \mapsto \overrightarrow{AM}$ *биективно*;

b) для любых точек A, B, C из $\mathscr{E}$ выполнено *соотношение Шаля*

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.$$

Заметим, что из этих условий следует, что для любой точки $A \in \mathscr{E}$ мы имеем $\overrightarrow{AA} = 0_E$.

От определения 2.3 к определению 2.2 можно перейти, обозначив через $\tau_u(A)$ единственную точку B, такую, что $\overrightarrow{AB} = u$, и заметив, что соотношение Шаля равносильно $\tau_v \circ \tau_u = \tau_{u+v}$. Переход от определения 2.2 к определению 2.1 непосредственно ясен.

Из какого бы определения мы ни исходили, существенным остается тот факт, что для любой точки $A \in \mathscr{E}$ отображение f_A: $E \to \mathscr{E}$, $u \longmapsto A + u = \tau_u(A)$ есть *биекция*; *эта биекция позволяет перенести на* $\mathscr{E}$ *векторную структуру* E.

▶ *Обозначения.* Полученная таким путем векторная структура на $\mathscr{E}$ будет называться *векторной структурой с началом* A; множество $\mathscr{E}$ с этой структурой будет обозначаться $\mathscr{E}_A$.

Говоря нестрого, аффинное пространство выглядит как векторное пространство, начальный (нейтральный) элемент которого еще не выбран. Аффинные свойства $\mathscr{E}$ — это те свойства векторного пространства $\mathscr{E}_A$, которые не зависят от выбора точки A.

Таким образом, можно было бы, пренебрегая аффинной структурой, свести все задачи аффинной геометрии к задачам векторного характера путем выбора начальной точки; так и делается в математическом обиходе. Но больше в духе «внутреннего» исследования была бы работа без выбора начальной точки, позволяющая яснее представить именно аффинные свойства $\mathscr{E}$. Так мы и поступим, не забывая при этом, что введение векторной структуры с надлежащим выбором начальной точки часто проясняет дело.

Размерность аффинного пространства

Пусть $\mathscr{E}$ — аффинное пространство, ассоциированное с векторным пространством E. По определению, *размерность* $\mathscr{E}$ *равна размерности* E.

В частности, любое одноточечное множество допускает единственную аффинную структуру размерности 0, ассоциированную с нулевым векторным пространством.

3. АФФИННЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА (ЛИНЕЙНЫЕ АФФИННЫЕ МНОГООБРАЗИЯ)

Пусть $\mathscr{E}$ — аффинное пространство, ассоциированное с векторным пространством E. Каждое векторное подпространство V пространства E образует подгруппу группы $(E, +)$, действующую на $\mathscr{E}$ трансляциями. По определению, *орбиты действия* V *на* $\mathscr{E}$ называются *линейными аффинными многообразиями* (сокращенно ЛАМ) *с направлением* V. Группа $(V, +)$, действующая просто транзитивно на каждой из этих орбит, определяет тем самым на каждой из них аффинную структуру, ассоциированную с V; поэтому мы называем эти орбиты (ЛАМ) также *аффинными подпространствами в* $\mathscr{E}$.

Если $\mathscr{V}$ есть ЛАМ с направляющим подпространством V и A — точка $\mathscr{V}$, то $\mathscr{V}$ допускает структуру векторного пространства с началом A и $\mathscr{V}_A$ есть векторное подпространство в $\mathscr{E}_A$ (см. § 2). Обратно, любое ВПП пространства $\mathscr{E}_A$ есть ЛАМ, проходящее через A; сформулируем

▶ Предложение 3.1. Аффинные подпространства в $\mathscr{E}$, проходящие через точку A, суть *векторные подпространства* векторного пространства $\mathscr{E}_A$.

Это краткое рассмотрение показывает, что направление ЛАМ $\mathscr{V}$ пространства $\mathscr{E}$ полностью определяется заданием множества точек $\mathscr{V}$.

Другие определения

Предложение 3.1 показывает, что данное выше определение эквивалентно следующему элементарному определению:

Определение 3.1. Непустое подмножество $\mathscr{V}$ аффинного пространства $\mathscr{E}$ называется *линейным аффинным многообразием*, если в $\mathscr{V}$ существует точка A, такая, что $V_A = \{\overrightarrow{AM} \mid M \in \mathscr{V}\}$ *является векторным подпространством в* E.

Приняв определение 3.1, можно непосредственно установить следующее

Предложение 3.2. Пусть $\mathscr{V}$ — непустое подмножество в $\mathscr{E}$ и A — точка $\mathscr{V}$, такая, что $V_A = \{\overrightarrow{AM} \mid M \in \mathscr{V}\}$ есть *векторное подпространство в* E. Тогда для любой точки B из $\mathscr{V}$ множество $V_B = \{\overrightarrow{BM} \mid M \in \mathscr{V}\}$ совпадает с V_A.

Доказательство. V_B есть множество векторов $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}$, где $\overrightarrow{AM} \in V_A$; таким образом, V_B есть образ V_A при биекции τ: $E \to E$, $u \mapsto u - \overrightarrow{AB}$, и поскольку $\overrightarrow{AB} \in V_A$, то $\tau(V_A) = V_A$.

Установив это, легко убедиться, что $\mathscr{V}$ наделено структурой аффинного пространства, ассоциированного с векторным пространством $V = V_A$, которое не зависит от точки A.

Вместо того чтобы исходить из векторной структуры V_A, можно использовать отношение эквивалентности, связанное с действием V на $\mathscr{V}$ (см. § 1): ЛАМ суть классы эквивалентности для этого отношения, и мы приходим к следующему равносильному определению:

Определение 3.2. Пусть V — векторное подпространство в E и $\mathscr{R}_V$ — отношение эквивалентности, определенное на $\mathscr{E}$ с помощью

$$A \mathscr{R}_V B \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \in V;$$

аффинными многообразиями с направлением V называются *классы эквивалентности* по отношению $\mathscr{R}_V$.

Существуют и другие способы определить ЛАМ пространства $\mathscr{E}$ (см. упр. III. 4), но нам кажется, что данные выше определения ведут к наиболее простому способу изложения дальнейшего.

Случай векторного пространства

Каждое векторное пространство E канонически снабжено аффинной структурой, так как $(E, +)$ действует на себе трансляциями; в этом случае нулевой вектор 0 называется также «началом» E и

$$(\forall (p, q) \in E^2) \quad \overrightarrow{pq} = q - p.$$

ЛАМ пространства E, проходящие через 0, суть векторные подпространства в E; ЛАМ, проходящие через точку $a \in E$, суть образы векторных подпространств E при параллельном переносе τ_a.

Ради краткости ЛАМ, не проходящие через начало, будут называться собственно аффинными (поскольку они не являются ВПП в E).

Размерность линейного аффинного многообразия

Вернемся к случаю произвольного аффинного пространства $\mathscr{E}$; предшествующие рассмотрения позволяют определить *размерность ЛАМ* как размерность его направляющего ВПП. Отсюда появляются понятия: *аффинной прямой* (ЛАМ размерности 1) и *аффинной плоскости* (ЛАМ размерности 2). ЛАМ размерности 0 суть точки $\mathscr{E}$.

Аффинной гиперплоскостью называется ЛАМ, направляющее подпространство которого есть векторная гиперплоскость.

Пересечение линейных аффинных многообразий

▶ Предложение 3.3. Пусть $(\mathscr{V}_i)_{i \in I}$ — семейство аффинных подпространств в $\mathscr{E}$ и V_i для каждого $i \in I$ — направляющее подпространство для $\mathscr{V}_i$.

Если пересечение $\mathscr{V} = \bigcap\limits_{i \in I} \mathscr{V}_i$ непусто, то оно является *аффинным подпространством в* E с направляющим $V = \bigcap\limits_{i \in I} V_i$.

Доказательство сразу получается из определения 3.1. При тех же обозначениях имеет место

Предложение 3.4. Для того чтобы пересечение $\mathscr{V}_1 \cap \mathscr{V}_2$ двух ЛАМ в $\mathscr{E}$ было *непустым*, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие точки $A_1 \in \mathscr{V}_1$ и $A_2 \in \mathscr{V}_2$, что $\overrightarrow{A_1A_2} \in V_1 + V_2$, и тогда

$$(\forall M_1 \in \mathscr{V}_1)(\forall M_2 \in \mathscr{V}_2) \quad \overrightarrow{M_1M_2} \in V_1 + V_2.$$

Доказательство. Если $A \in \mathscr{V}_1 \cap \mathscr{V}_2$, то для любых $M_1 \in \mathscr{V}_1$, $M_2 \in \mathscr{V}_2$ имеем $\overrightarrow{AM_1} \in V_1$ и $\overrightarrow{AM_2} \in V_2$. Таким образом, $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{AM_2} - \overrightarrow{AM_1} \in V_1 + V_2$.

Обратно, если существуют $A_1 \in \mathscr{V}_1$ и $A_2 \in \mathscr{V}_2$, такие, что $\overrightarrow{A_1A_2} \in V_1 + V_2$, то можно представить $\overrightarrow{A_1A_2}$

в виде $\overrightarrow{A_1A_2}=u_1+u_2$, где $u_1\in V_1$, $u_2\in V_2$. Тогда точка A, определяемая условием $\overrightarrow{A_1A}=u_1$, принадлежит $\mathscr{V}_1$ и, как легко видеть, $\overrightarrow{A_2A}=-u_2$. Это доказывает, что A принадлежит также $\mathscr{V}_2$, а тем самым $\mathscr{V}_1\cap\mathscr{V}_2$ не пусто. □

Из предложения 3.4 можно получить примеры ЛАМ с пустым пересечением, а также

Предложение 3.5. Если $\mathscr{V}_1$, $\mathscr{V}_2$ — аффинные подпространства в $\mathscr{E}$, направляющие которых взаимно *дополняют* друг друга в E, то $\mathscr{V}_1$ и $\mathscr{V}_2$ имеют *единственную общую точку.*

Параллелизм

Определение 3.3. Говорят, что два линейных аффинных многообразия $\mathscr{V}_1$, $\mathscr{V}_2$ *вполне параллельны* [1]), если они имеют одно и то же направляющее подпространство: $V_1=V_2$.

Более общо, говорят, что $\mathscr{V}_1$ параллельно [2]) $\mathscr{V}_2$, если направляющие пространства V_1, V_2 многообразий $\mathscr{V}_1$, $\mathscr{V}_2$ удовлетворяют включению $V_1\subset V_2$.

Можно проверить, что отношение «$\mathscr{V}_1$ вполне параллельно (соотв. параллельно) $\mathscr{V}_2$» равносильно существованию трансляции τ пространства $\mathscr{E}$, такой, что $\tau(\mathscr{V}_1)=\mathscr{V}_2$ (соотв. $\tau(\mathscr{V}_1)\subset\mathscr{V}_2$).

Аффинное подпространство, порожденное подмножеством X пространства $\mathscr{E}$

► Предложение 3.6. Если X — непустое подмножество в $\mathscr{E}$, то существует единственное аффинное подпространство в $\mathscr{E}$, обозначаемое $\mathrm{Aff}(X)$, содержащее X и обладающее следующим свойством:

Любое аффинное подпространство $\mathscr{E}$, содержащее X, содержит и $\mathrm{Aff}(X)$.

---

[1]) В оригинале «fortement parallèles» («сильно параллельны»). — *Прим. перев.*

[2]) В оригинале «faiblement parallèle» («слабо параллельно»). — *Прим. перев.*

Говорят, что $\operatorname{Aff}(X)$ *порождено* X.

Коротким способом доказательства предложения 3.6 является применение предложения 3.3: $\operatorname{Aff}(X)$ есть пересечение всех ЛАМ, содержащих X. Недостаток этого рассуждения в том, что приходится привлекать семейство «всех ЛАМ, содержащих X», о котором мало что известно и которое обычно даже несчетно!

Более элементарный и конструктивный способ состоит в выборе в X начальной точки A, что сводит задачу к отысканию наименьшего векторного подпространства в $\mathscr{E}_A$, содержащего X (поскольку ЛАМ, содержащие X, являются ВПП в $\mathscr{E}$). Таким образом, $\operatorname{Aff}(X)$ есть ВПП в $\mathscr{E}_A$, *порожденное* X; при этом сам характер задачи показывает, что это ВПП *не зависит от выбора точки* A в X. Если мы заметим, что направляющее подпространство для $\operatorname{Aff}(X)$ есть ВПП в E, порожденное векторами $(\overrightarrow{AM})_{M \in X}$, то получим также

Предложение 3.7. Пусть X — непустое подмножество в $\mathscr{E}$; для каждой точки $A \in X$ положим $V_A = \operatorname{Vect}(\overrightarrow{AM})_{M \in X}$. Тогда векторное пространство V_A не зависит от выбора A и $\operatorname{Aff}(X)$ есть ЛАМ, проходящее через A с направлением V_A.

Можно дать прямое доказательство этого утверждения, аналогичное доказательству предложения 3.2.

В частности, если $X = \{A_0, A_1, \ldots, A_n\}$ — конечное множество, то векторное пространство $V_i = \operatorname{Vect}(\overrightarrow{A_iA_j})_{j \neq i}$ не зависит от i и, следовательно, совпадает с

$$V_0 = \operatorname{Vect}(\overrightarrow{A_0A_j})_{1 \leqslant j \leqslant n} \quad \text{и} \quad \operatorname{Vect}(\overrightarrow{A_iA_j})_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n \\ 0 \leqslant j \leqslant n}}.$$

Отсюда вытекает

Предложение 3.8. **Размерность аффинного подпространства, порожденного $n+1$ точками $A_0, A_1, \ldots, A_n$ пространства $\mathscr{E}$, не превосходит n; его размерность** равна n тогда и только тогда, когда n векторов $\overrightarrow{A_0A_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ образуют *свободное* семейство.

Другие свойства ЛАМ изучаются в связи с понятием *барицентра*.

4. БАРИЦЕНТРЫ; ПРИЛОЖЕНИЯ К ИЗУЧЕНИЮ АФФИННЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ

В последующем $\mathscr{E}$ всегда обозначает аффинное пространство, ассоциированное с левым векторным пространством E над, вообще говоря, некоммутативным телом K. «Взвешенной точкой» называется элемент $(A, \lambda) \in \mathscr{E} \times K$.

▶ Теорема 4.1. Для каждого конечного семейства (системы) $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ взвешенных точек, такого, что $\sum\limits_{i \in I} \lambda_i \neq 0$, существует единственная точка G, удовлетворяющая любому (а тогда и двум остальным) из следущих трех условий a), b), c):

a) $\sum\limits_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = 0$,

b) $(\exists A \in \mathscr{E})\ \left(\sum\limits_{i \in I} \lambda_i\right) \overrightarrow{AG} = \sum\limits_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{AA_i}$,

c) $(\forall A \in \mathscr{E})\ \left(\sum\limits_{i \in I} \lambda_i\right) \overrightarrow{AG} = \sum\limits_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{AA_i}$.

Эта точка называется *барицентром* (центром тяжести) системы $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$. Мы обозначаем ее $\mathscr{B}(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$.

Эквивалентность трех условий легко устанавливается с помощью соотношения Шаля.

Свойства. a) *Однородность* (слева).

Предложение 4.2. Для любого $\lambda \in K^*$ имеем

$$\mathscr{B}(A_i, \lambda\lambda_i)_{i \in I} = \mathscr{B}(A_i, \lambda_i)_{i \in I}.$$

b) *Ассоциативность.*

Предложение 4.3. Пусть $(I_1, \ldots, I_p)$ — *разбиение* I, т. е. совокупность непустых попарно непересекающихся подмножеств I, таких, что $\bigcup\limits_{1 \leqslant \alpha \leqslant p} I_\alpha = I$.

Если для любого $\alpha \in \{1, \ldots, p\}$ скаляр $\mu_\alpha = \sum\limits_{i \in I_\alpha} \lambda_i$ отличен от нуля и мы положим $G_\alpha = \mathscr{B}(A_i, \lambda_i)_{i \in I_\alpha}$, то

$$\mathscr{B}(A_i, \lambda_i)_{i \in I} = \mathscr{B}(G_\alpha, \mu_\alpha)_{1 \leqslant \alpha \leqslant p}.$$

Доказательства получаются непосредственно. □

▶ *Замечания.* По предложению 4.2 можно всегда привести дело к случаю, когда «полная масса» системы $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$, т. е. $\sum\limits_{i \in I} \lambda_i$, равна 1. *В этом и только в этом случае можно положить*

$$\boxed{\mathscr{B}(A_i, \lambda_i)_{i \in I} = \sum_{i \in I} \lambda_i A_i.}$$

Для успешного использования этого обозначения следует заметить, что соотношение $G = \sum\limits_{i \in I} \lambda_i A_i$ равносильно каждому из следующих утверждений:

$$\sum_{i \in I} \lambda_i = 1 \text{ и } (\exists A \in \mathscr{E}) \quad \overrightarrow{AG} = \sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{AA_i}, \tag{1}$$

$$(\forall A \in \mathscr{E}) \quad \overrightarrow{AG} = \sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{AA_i}, \tag{2}$$

так как (2) влечет за собой (1).

Эквибарицентром конечного подмножества $(A_i)_{i \in I}$ пространства $\mathscr{E}$ называется точка $\mathscr{B}(A_i, 1)_{i \in I}$. Она существует только тогда, когда характеристика K не является делителем числа $n = \operatorname{Card}(I)$.

Следующее утверждение показывает, что отыскание барицентра сводится, за некоторыми исключениями, к последовательному построению барицентров пар точек.

Предложение 4.4. Пусть $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ — конечное семейство взвешенных точек, таких, что $\lambda_i \neq 0$ для всех $i \in I$, $\sum_{i \in I} \lambda_i \neq 0$ и $\operatorname{Card}(I) \geqslant 3$.

Если характеристика K отлична от 2, то существует разбиение (J_1, J_2) множества I, такое, что

$$\sum_{i \in J_1} \lambda_i \neq 0 \quad \text{и} \quad \sum_{i \in J_2} \lambda_i \neq 0.$$

Доказательство. Если одна из сумм $\mu_j = \sum_{i \in I \setminus \{j\}} \lambda_i$ отлична от нуля, то достаточно положить $J_1 = \{j\}$ и $J_2 = I \setminus \{j\}$.

Если все суммы μ_j равны нулю, то все λ_i равны одному и тому же элементу $\lambda \in K^*$, такому, что $(n-1)\lambda = 0$, где $n = \operatorname{Card}(I)$.

Если характеристика K отлична от 2, то $2\lambda \neq 0$, и, поскольку $(n-2)\lambda = -\lambda$ не равно нулю, получим искомое разбиение, выбирая J_1 как двухэлементное подмножество, а J_2 как подмножество из $(n-2)$ элементов. □

Следствие. Если характеристика K не равна 2, то построение барицентра n точек приводится к последовательному построению $n-1$ барицентров пар.

Приложение к линейным аффинным многообразиям

Теорема 4.5. Если X — непустое подмножество в $\mathscr{E}$, то $\operatorname{Aff}(X)$ есть *множество барицентров* конечных семейств взвешенных точек с носителями в X.

Доказательство. Уточним сначала, что под носителем семейства $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ понимается множество $\{A_i\}_{i \in I}$.

Условившись об этом, выберем некоторую точку A в X. Барицентры семейства с носителями в X суть точки G, удовлетворяющие соотношению вида

$$\overrightarrow{AG} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{AA_i}, \tag{3}$$

где $\sum_{1}^{n} \lambda_i = 1$ и $(\forall i)\ A_i \in X$. При этом соотношение (3) влечет за собой $\overrightarrow{AG} \in \operatorname{Vect}(\overrightarrow{AM})_{M \in X}$ и потому $G \in \operatorname{Aff}(X)$ (см. предложение 3.7). Обратно, если G — точка из $\operatorname{Aff}(X)$, то найдутся точки $A_1, \ldots, A_n$, принадлежащие X, и скаляры $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (с суммой, необязательно равной 1), такие, что $\overrightarrow{AG} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{AA_i}$; это соотношение также записывается в виде

$$\overrightarrow{AG} = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \overrightarrow{AA_i} \quad \text{с} \quad \lambda_0 = 1 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \quad \text{и} \quad A_0 = A;$$

таким образом, G есть барицентр системы с носителем в X. □

▶ Определение 4.1. Подмножество $X \subset \mathscr{E}$ называется *аффинно порождающим* $\mathscr{E}$, если $\operatorname{Aff}(X) = \mathscr{E}$; оно называется *аффинно свободным*, если любая точка M из $\operatorname{Aff}(X)$ *единственным образом* представляется в виде $M = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i$, где $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ и $A_i \in X$ при любом i.

Множество, одновременно аффинно свободное и аффинно порождающее, называется *аффинным репером*[1]).

Выбирая начало A в X и полагая $X_A = \{\overrightarrow{AM} \mid M \in X\}$, легко видеть, что X аффинно свободное (соотв. аффинно порождающее) тогда и только тогда, когда X_A свободное (соотв. множество образующих). (Напомним, что $\operatorname{Vect}(X_A)$ не зависит от выбора A.) Отсюда вытекает

Предложение 4.6. **Для того чтобы подмножество X пространства $\mathscr{E}$ было аффинно порождающим, необходимо и достаточно, чтобы X не содержалось ни в какой афинной гиперплоскости в $\mathscr{E}$.**

Наконец, применяя предложение 3.7, получим

[1]) Чаще в понятие репера включают требование упорядоченности системы образующих его точек. — *Прим. перев.*

Предложение 4.7. Если $\mathscr{E}$ — аффинное пространство конечной размерности n, то любой его аффинный репер образован $n+1$ точками.

Обратно, для того чтобы $n+1$ точек в $\mathscr{E}$ образовали *аффинный репер*, необходимо и достаточно, чтобы n векторов $\overrightarrow{A_0A_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ образовали базис E, или (эквивалентное условие) чтобы точки $A_0, A_1, \ldots, A_n$ не принадлежали одной аффинной гиперплоскости.

Заметим, что если $\mathscr{V}$ есть ЛАМ конечной размерности в $\mathscr{E}$ и $(A_0, A_1, \ldots, A_p)$ — аффинный репер в $\mathscr{V}$, то $\mathscr{V}$ есть множество точек $\sum\limits_{i=0}^{p} \lambda_i A_i$ с $\sum\limits_{i=0}^{p} \lambda_i = 1$. Этот способ параметризации часто полезен. В частности, *аффинная прямая*, соединяющая две точки A, B в $\mathscr{E}$, есть множество точек $\lambda A + (1-\lambda) B$ $(\lambda \in K)$.

Характеризация аффинных подпространств

Следующая теорема оправдывает элементарное определение плоскости в школьном курсе геометрии как такого множества P точек, что каждая прямая, имеющая с ним две общие точки, вся принадлежит P.

▶ Теорема 4.8. *Для того чтобы непустая часть $\mathscr{V}$ пространства E была линейным аффинным многообразием, необходимо и достаточно, чтобы*

a) если $K \neq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ — любая прямая, соединяющая две точки $\mathscr{V}$, содержалась в $\mathscr{V}$;

b) если $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ — эквибарицентр любых трех точек $\mathscr{V}$ лежал в $\mathscr{V}$.

Доказательство. Нам уже известна необходимость этого условия. Для доказательства достаточности выберем в $\mathscr{V}$ точку A и покажем, что $V = \{\overrightarrow{AM} \mid M \in \mathscr{V}\}$ есть ВПП пространства E.

a) Предположив, что $K \neq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, установим прежде всего, что условия $(u \in V$ и $\lambda \in K)$ влекут $\lambda u \in V$. Действительно, по предположению существует точка $B \in \mathscr{V}$, такая, что $\overrightarrow{AB} = u$. Точка C, определенная условием $\overrightarrow{AC}=\lambda u$, принадлежит прямой (AB) и, значит, $\mathscr{V}$, откуда следует, что $\lambda u \in V$.

Рассмотрим далее два любых вектора $u=\overrightarrow{AB}$ и $v=\overrightarrow{AC}$ в V и выберем $k \in K \setminus \{0, 1\}$ (что возможно, так как K не сводится к $\{0, 1\}$). Точки $B'=A+k^{-1}u$ и $C'=A+(1-k)^{-1}v$ (см. рис. 1) принадлежат соответственно прямым (AB) и (AC), а потому и $\mathscr{V}$. Следовательно, точка $D=kB'+(1-k)C'=A+u+v$ принадлежит $\mathscr{V}$, откуда $u+v \in V$. Итак, V есть ВПП в E.

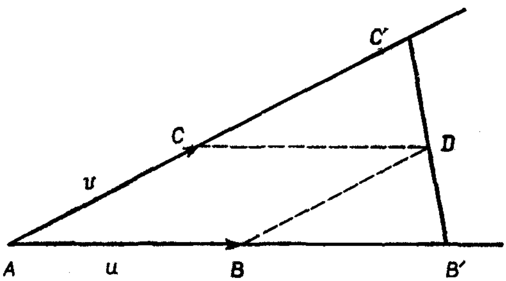


Рис. 1

b) Если $K=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, то тривиальным образом $(\lambda, u) \in K \times V$ влечет $\lambda u \in V$ (так как λ может принимать только два значения 0, 1). Если $u=\overrightarrow{AB}$, $v=\overrightarrow{AC}$ — два вектора из V, то точка D, определяемая условием $\overrightarrow{AD}=u+v$, есть эквибарицентр A, B, C, откуда и вытекает наше утверждение. □

5. АФФИННЫЕ И ПОЛУАФФИННЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

▶ Определение 5.1. Пусть $\mathscr{E}$, $\mathscr{F}$ — два аффинных пространства, ассоциированных соответственно с векторными пространствами E, F. Отображение $f\colon \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ называется *полуаффинным* (соотв. *аффинным*), если в $\mathscr{E}$ существует такая точка A, что отображение $\varphi_A\colon E \to F$, $u \mapsto \overrightarrow{f(A)f(A+u)}$ *полулинейно* (соотв. *линейно*).

Предложение 5.1. Если в $\mathscr{E}$ существует точка A, удовлетворяющая вышеуказанным требованиям, то им удовлетворяет любая точка $\mathscr{E}$ и отображение φ_A не зависит от A.

Доказательство. Для любой пары $(u, B) \in E \times \mathscr{E}$ имеем в силу линейности φ_A

$$f(B+u) = f(A + \overrightarrow{AB} + u) = f(A) + \varphi_A(\overrightarrow{AB} + u) =$$
$$= f(A) + \varphi_A(\overrightarrow{AB}) + \varphi_A(u) = f(B) + \varphi_A(u),$$

что и доказывает требуемое. □

▶ *Обозначения.* Отображение φ_A обозначается $L(f)$ и называется *полулинейной* (соотв. *линейной*) частью f.

Истолкование. Фиксируем в $\mathscr{E}$ некоторую точку A и снабдим $\mathscr{E}$, $\mathscr{F}$ векторными структурами, принимая за начало в $\mathscr{E}$ точку A, а в $\mathscr{F}$ — точку $f(A)$. Тогда f будет *полуаффинным* (соотв. *аффинным*) в том и только том случае, если $L(f)$ — *полулинейное* (соотв. *линейное*) отображение $\mathscr{E}_A$ в $\mathscr{F}_{f(A)}$.

В частности, изучение *полуаффинных* (соотв. аффинных) отображений пространства $\mathscr{E}$ в себя, допускающих неподвижную точку A, сводится к изучению *полулинейных* (соотв. линейных) отображений $\mathscr{E}_A$ в себя.

Так обстоит дело в случае гомотетий, проектирований и симметрий (см. ниже).

▶ Важно заметить, что *полуаффинное* (соотв. аффинное) *отображение полностью определяется своей полулинейной* (соотв. линейной) *частью и образом одной точки.*

Если E, F — два векторных пространства, то полуаффинное (соотв. аффинное) отображение E и F есть отображение вида f: $x \mapsto \varphi(x) + k$, где φ полулинейно (соотв. линейно), а $k = f(0)$ — *постоянный элемент.*

Непосредственные следствия. Если f: $\mathscr{E} \to \mathscr{F}$ полуаффинно, то

1) Образ ЛАМ в $\mathscr{E}$ есть ЛАМ в $\mathscr{F}$.

2) Прообраз ЛАМ в $\mathscr{F}$ есть ЛАМ в $\mathscr{E}$ или пустое множество.

3) Для любой системы $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ взвешенных точек $\mathcal{E}$ образ барицентра $\mathcal{B}(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ есть барицентр $\mathcal{B}(f(A_i), \theta(\lambda_i))_{i \in I}$, где θ обозначает изоморфизм тел, ассоциированный с f.

Применение аффинных реперов

▶ Теорема 5.2. Пусть $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ — аффинные пространства над телами K, K', θ — изоморфизм K на K', $(A_i)_{i \in I}$ — аффинный репер в $\mathcal{E}$ и $(B_i)_{i \in I}$ — семейство точек $\mathcal{F}$, индексированное тем же множеством индексов I.

Тогда существует *единственное полуаффинное отображение* f пространства $\mathcal{E}$ в $\mathcal{F}$, ассоциированное с изоморфизмом θ, такое, что $f(A_i) = B_i$ для всех $i \in I$.

Более того, f *биективно* (соотв. инъективно, сюръективно) тогда и только тогда, когда семейство $(B_i)_{i \in I}$ есть *аффинный репер* (соотв. свободное семейство, семейство образующих) для $\mathcal{F}$.

Доказательство. Вернемся к теореме II. 4.5, взяв одну из точек A_i в качестве начала в $\mathcal{E}$, а соответствующую точку B_i — в $\mathcal{F}$; отображение f определяется равенством

$$f\Big(\sum_{i \in J} x_i A_i\Big) = \sum_{i \in J} \theta(x_i) B_i$$

для любого конечного подмножества $J \subset I$ и любой системы скаляров $(x_i)_{i \in J}$, таких, что, $\sum_{i \in J} x_i = 1$. □

▶ В частности, *аффинное отображение $\mathcal{E}$ в $\mathcal{F}$ определяется заданием образа аффинного репера из $\mathcal{E}$.*

Приложение: уравнения аффинной гиперплоскости или ЛАМ

Опираясь на исследование, проведенное в § II. 6, легко получаем

Предложение 5.3. Пусть $\mathcal{E}$ — аффинное пространство над телом K. Тогда

а) Если $f: \mathcal{E} \to K$ — непостоянное аффинное отображение, то $f^{-1}(0)$ — *аффинная гиперплоскость в* $\mathcal{E}$ с направлением $\operatorname{Ker} L(f)$.

b) Обратно, если $\mathscr{H}$ — аффинная гиперплоскость в $\mathscr{E}$, то существует аффинное отображение $f\colon \mathscr{E} \to K$, такое, что $\mathscr{H} = f^{-1}(0)$, и все аффинные отображения $\mathscr{E}$ в K с этим свойством суть отображения $fk\colon x \mapsto f(x)k$, где $k \in K^*$.

Если $\mathscr{E}$ — аффинное пространство конечной размерности n, то каждое ЛАМ размерности p в $\mathscr{E}$ определяется *системой уравнений* вида $f_i(x) = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n - p)$, где f_i — аффинные отображения $\mathscr{E}$ в K, линейные части которых независимы.

Характеризация аффинных отображений

▶ Теорема 5.4. Пусть $\mathscr{E}$, $\mathscr{F}$ — два аффинных пространства над одним и тем же телом K. Для того чтобы отображение $f\colon \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ было *аффинным*, необходимо и достаточно, чтобы

a) при $K \neq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$$(\forall (A, B, \lambda) \in \mathscr{E} \times \mathscr{E} \times K)$$
$$f((1-\lambda)A + \lambda B) = (1-\lambda) f(A) + \lambda f(B);$$

b) при $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ образ эквибарицентра любых трех точек $\mathscr{E}$ был эквибарицентром их образов.

Доказательство (аналогичное случаю теоремы 4.8).

a) При фиксированной точке $A \in \mathscr{E}$ соотношение a) показывает, что для любого вектора $u = \overrightarrow{AB}$ направляющего пространства E имеем

$$f(A + \lambda u) = f((1-\lambda)A + \lambda B) = f(A) + \lambda \overrightarrow{f(A) f(A+u)}.$$

Отображение $\varphi\colon u \mapsto \overrightarrow{f(A) f(A+u)}$ удовлетворяет, следовательно, условию $\varphi(\lambda u) = \lambda\varphi(u)$.

Чтобы доказать, что выполняется и условие $\varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v)$ для любых $(u, v) \in E \times E$, выберем такие B, C, что $\overrightarrow{AB} = u$, $\overrightarrow{AC} = v$ и $\lambda \in K \setminus \{0, 1\}$, определим точки B', C' условиями $\overrightarrow{AB'} = \lambda^{-1}u$, $\overrightarrow{AC'} = (1-\lambda)^{-1}v$. Применяя условие a), получим тогда $f(A+u+v) = f(\lambda B' + (1-\lambda)C') = \lambda f(B') + (1-\lambda) f(C')$, откуда

$$\varphi(u+v)=\lambda\varphi(\overrightarrow{AB'})+(1-\lambda)\varphi(\overrightarrow{AC'})=$$
$$=\lambda\varphi(\lambda^{-1}u)+(1-\lambda)\varphi\big((1-\lambda)^{-1}v\big)=\varphi(u)+\varphi(v).$$

Рассмотрение случая b) предоставляется читателю (упр. III.7). □

Можно также сформулировать теорему 5.4 так: *отображение $\mathscr{E}$ в $\mathscr{F}$ является аффинным тогда и только тогда, когда его ограничение на любую аффинную прямую в $\mathscr{E}$ аффинно.*

В дальнейшем мы дадим чисто геометрическую характеризацию полуаффинных отображений (§ 9).

Неподвижные точки аффинных и полуаффинных отображений

▶ Теорема 5.5. Если $f\colon \mathscr{E}\to\mathscr{E}$ — полуаффинное отображение и множество $I(f)=\{M\in\mathscr{E}\mid f(M)=M\}$ его неподвижных точек не пусто, то оно является ЛАМ с направляющим множеством $I(L(f))=\operatorname{Ker}(L(f)-\mathrm{Id}_E)$, состоящим из неподвижных элементов отображения $L(f)$.

С другой стороны, *если $\mathscr{E}$ конечномерно* и $L(f)$ не имеет других неподвижных элементов, кроме 0, то f имеет единственную неподвижную точку.

Доказательство. Если фиксировать точку $A\in\mathscr{E}$, условие $f(M)=M$ равносильно $\overrightarrow{f(A)f(M)}=\overrightarrow{f(A)M}$ и, значит, условию $\varphi(\overrightarrow{AM})-\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{f(A)A}$, где $\varphi=L(f)$.
● Если A — неподвижная точка f, то $M\in I(f)$ равносильно $\overrightarrow{AM}\in\operatorname{Ker}(\varphi-\mathrm{Id}_E)$, откуда вытекает первое утверждение.
● Если $\operatorname{Ker}(\varphi-\mathrm{Id}_E)=\{0\}$, то отображение $\varphi-\mathrm{Id}_E$ инъективно и потому в случае конечной размерности E биективно; в $\mathscr{E}$ существует единственная точка M, такая, что $\varphi(\overrightarrow{AM})-\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{f(A)A}$, откуда следует второе утверждение. □

▶ *Важное замечание.* Если $f\colon \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ — произвольное отображение и $g\colon \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ — биекция, то $\mathrm{I}(g \circ f \circ g^{-1}) = g(I(f))$.

Это общее замечание особенно полезно в случае аффинных отображений.

Аффинные и полуаффинные группы

Если $f\colon \mathscr{E}_1 \to \mathscr{E}_2$ и $g\colon \mathscr{E}_2 \to \mathscr{E}_3$ — два аффинных (соотв. полуаффинных) отображения, то $g \circ f$ также есть аффинное (соотв. полуаффинное) отображение и $L(g \circ f) = L(g) \circ L(f)$. Отсюда выводится

Теорема 5.6. Пусть $\mathscr{E}$ — аффинное пространство, ассоциированное с векторным пространством E. *Аффинные* (соотв. полуаффинные) *биекции* $\mathscr{E}$ на $\mathscr{E}$ образуют группу, которую мы обозначаем $GA(\mathscr{E})$ (соотв. $\mathrm{GSA}(\mathscr{E})$). Отображение L (линейная или полулинейная часть) есть гомоморфизм $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$ на $\mathrm{GL}(E)$ и $\mathrm{GSA}(\mathscr{E})$ на группу $\mathrm{GSL}(E)$ *полулинейных биекций* E на E.

Наконец, для любой точки P в $\mathscr{E}$ ограничение L на группу изотропии точки P в $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$ (соотв. $\mathrm{GSA}(\mathscr{E})$) является изоморфизмом этой группы на $\mathrm{GL}(E)$ (соотв. $\mathrm{GSL}(E)$).

Последнее утверждение получим, выбирая P в качестве начала в $\mathscr{E}$.

Следствие. Если H — подгруппа в $\mathrm{GL}(E)$ (соотв. в $\mathrm{GSL}(E)$), то $L^{-1}(H)$ есть подгруппа в $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$ (соотв. в $\mathrm{GSA}(\mathscr{E})$); при этом если H — инвариантная подгруппа, то такова же и $L^{-1}(H)$.

▶ В частности, если $H = \mathrm{Id}_E$, то $L^{-1}(H)$ есть инвариантная подгруппа в $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$, образованная *трансляциями.*

Если $H = \{\pm \mathrm{Id}_E\}$, то $L^{-1}(H)$ есть инвариантная подгруппа в $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$, образованная *трансляциями* и *центральными симметриями.*

Если H — инвариантная подгруппа группы $\mathrm{GSL}(E)$, образованная *векторными гомотетиями* (см. § II. 4), то $L^{-1}(H)$ есть инвариантная подгруппа в $\mathrm{GSA}(\mathscr{E})$, называемая *группой дилатаций.*

Пусть f — дилатация, не сводящаяся к трансляции; тогда $L(f)$ — векторная гомотетия вида $u \mapsto ku$, где $k \neq 1$. В этом случае f имеет единственную неподвижную точку I, определяемую из условия $(k-1)\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{f(A)A}$, где A — произвольная точка $\mathscr{E}$. Таким образом, f выражается как $M \mapsto I + k\overrightarrow{IM}$. Такое отображение называется *гомотетией с центром* I *и коэффициентом* k.

Сформулируем

▶ Предложение 5.7. Трансляции и гомотетии $\mathscr{E}$ составляют инвариантную подгруппу группы $\mathrm{GSA}(\mathscr{E})$, называемую *группой дилатаций* $\mathscr{E}$. Мы обозначаем ее $\mathrm{Dil}(\mathscr{E})$.

По поводу чисто геометрической характеризации этой группы см. упр. III. 8.

Если основное тело K коммутативно, то группа $\mathrm{Dil}(\mathscr{E})$ является инвариантной подгруппой группы $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$.

Проектирования

Назовем *проектированием* $\mathscr{E}$ любое аффинное отображение p пространства $\mathscr{E}$ в себя, удовлетворяющее условию $p \circ p = p$.

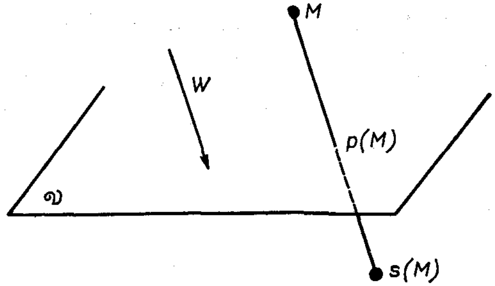


Рис. 2

Для такого отображения любая точка $A \in p(\mathscr{E})$ является неподвижной; принимая такую точку за начало, мы приходим к случаю проектирования для векторного пространства $\mathscr{E}_A$. Отсюда вытекает существование таких отображений, а также следующая их геометрическая характеризация:

Предложение 5.8. Отображение $p\colon \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ является *проектированием*, если существует ВПП W пространства E и ЛАМ $\mathscr{V}$ в $\mathscr{E}$ с направляющим подпространством V, дополнительным к W, такие, что для любой точки $M \in \mathscr{E}$ ее образ $p(M)$ есть точка пересечения $\mathscr{V}$ с ЛАМ, проходящим через M с направлением W (рис. 2).

Аффинные симметрии

▶ Теорема 5.9. Пусть $\mathscr{E}$ — аффинное пространство, ассоциированное с векторным пространством E над телом K характеристики $\neq 2$ [1]).

▶ Для того чтобы аффинное отображение $f\colon \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ было *инволютивным*, необходимо и достаточно, чтобы оно имело по меньшей мере одну неподвижную точку и чтобы его линейная часть была векторной симметрией E.

Такое отображение называется *аффинной симметрией*.

Доказательство. Если $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathscr{E}}$ и $A \in \mathscr{E}$, то образом середины отрезка $[A, f(A)]$ будет середина отрезка $[f(A), f \circ f(A)] = [f(A), A]$; таким образом, эта точка инвариантна при отображении f и, выбрав ее за начало, мы сведем дело к векторному случаю. □

Предложение 5.10. Отображение $s\colon \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ является *аффинной симметрией*, если существуют ВПП W пространства $\mathscr{E}$ и ЛАМ $\mathscr{V} \subset \mathscr{E}$ с направлением, дополнительным к W, такие, что для любой точки $M \in \mathscr{E}$ (см. рис. 2)

i) $\overrightarrow{Ms(M)} \in W$;

ii) середина $[M, s(M)]$ принадлежит $\mathscr{V}$.

Если $\mathscr{V}$ сводится к одной точке A, то $W = E$ и s есть *центральная симметрия* с центром A.

Теорема Фалеса

Пусть по-прежнему W есть ВПП в E и $\mathscr{V}_1$, $\mathscr{V}_2$ — два аффинных пространства в $\mathscr{E}$, направляющие кото-

---

[1]) Это утверждение теряет силу, если K — тело характеристики 2 (см. упр. III.5).

рых соответственно V_1, V_2 дополнительны к W. Обозначим через p_1 (соотв. p_2) ограничение проектирования $\mathscr{E}$ на $\mathscr{V}_2$ (соотв. $\mathscr{V}_1$) параллельно W. Тогда, как легко видеть, p_2 является аффинной биекцией $\mathscr{V}_1$ на $\mathscr{V}_2$, обратная к которой есть p_1. Образ $M_2 = p_2(M_1)$ точки $M_1 \in \mathscr{V}_1$ определяется условиями $M_2 \in \mathscr{V}_2$ и $\overrightarrow{M_1M_2} \in W$ (см. рис. 3).

▶ *В более общей форме теорема Фалеса есть не что иное, как констатация того факта, что установленное*

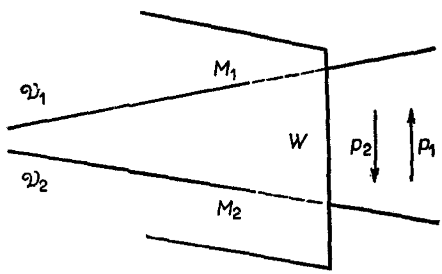


Рис. 3

указанным способом соответствие между $\mathscr{V}_1$ и $\mathscr{V}_2$ является аффинным.

В частности, если W — векторная гиперплоскость, то справедлива

▶ Теорема 5.11. Аффинные гиперплоскости, параллельные некоторой фиксированной гиперплоскости, высекают на произвольной паре не параллельных им прямых *пропорциональные отрезки* [1]).

6. КАНОНИЧЕСКОЕ ПОГРУЖЕНИЕ АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА В ВЕКТОРНОЕ. ПРИЛОЖЕНИЯ

Пусть снова $\mathscr{E}$ — аффинное пространство, ассоциированное с векторным пространством E. Как мы уже видели, выбор начала в $\mathscr{E}$ позволяет отождествить $\mathscr{E}$ с E; теперь мы докажем, что $\mathscr{E}$ *канонически* отожде-

[1]) У автора: «divisions semblables» («подобные разбиения»). — *Прим. перев.*

ставляется с аффинной гиперплоскостью некоторого векторного пространства F, изоморфного $E \times K$.

Метод будет состоять в сопоставлении каждой точке $A \in \mathscr{E}$ отображения f_A: $\mathscr{E} \to E$, $M \mapsto \overrightarrow{MA}$.

Предварительно сформулируем такое утверждение:

Лемма. Пусть E — *левое векторное пространство* над телом K, а X — произвольное множество. Тогда множество X^E отображений X в E есть *левое векторное пространство* над K по отношению к обычным операциям сложения функций и умножению их слева на скаляры:

$$f + g\colon x \mapsto f(x) + g(x) \quad \text{и} \quad \lambda f\colon x \mapsto \lambda f(x).$$

(Проверяется непосредственно.)

В силу доказанного искомое векторное пространство F будет ВПП в $\mathscr{E}^E$, порожденным отображениями f_A. Поэтому мы начнем с изучения этого пространства F.

▶ Предложение 6.1. Пусть F—векторное подпространство в $\mathscr{E}^E$, порожденное функциями f_A: $\mathscr{E} \to E$, $M \mapsto \overrightarrow{MA}$; пусть, далее, f: $\mathscr{E} \to E$, $M \mapsto \sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{MA_i}$ — элемент из F[1]. Тогда

a) Сумма $\sum_{i \in I} \lambda_i$ зависит только от функции f и притом *линейно*, т. е. является линейным отображением F в K, которое мы обозначим μ.

b) Если $\mu(f) \neq 0$, то существует единственная точка $G \in \mathscr{E}$, такая, что $f = \mu(f) f_G$.

c) Если $\mu(f) = 0$, то f постоянна.

Доказательство. Заметим сначала, что утверждение a) не очевидно, так как могут существовать различные системы взвешенных точек $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$, такие, что $f = \sum_{i \in I} \lambda_i f_{A_i}$; но оно легко вытекает из того факта,

[1]) Заметим, что элементы F называются «функциями Лейбница» и часто применяются в теории барицентров; однако если K не коммутативно, то эти функции лишь полуаффинны.

что для любой пары $(M, P) \in \mathscr{E}^2$ выполнено соотношение

$$f(P) - f(M) = \Big(\sum_{i \in I} \lambda_i\Big) \overrightarrow{PM}, \tag{1}$$

которое доказывает существование и линейность функции $f \longmapsto \mu(f)$.

b) Если $\sum_{i \in I} \lambda_i \neq 0$, выберем в $\mathscr{E}$ произвольную точку P. Соотношение (1) показывает, что в $\mathscr{E}$ существует единственная точка G, такая, что $f(G) = 0$; она определяется условием $\Big(\sum_{i \in I} \lambda_i\Big) \overrightarrow{PG} = f(P)$. Из (1) также видно, что эта точка — единственная, для которой $(\forall M \in \mathscr{E})\ f(M) = \Big(\sum_{i \in I} \lambda_i\Big) \overrightarrow{MG}$. Таким образом, барицентр семейства $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ зависит только от функции f.

c) Наконец, последнее утверждение также вытекает из (1). □

Следствие. F является теоретико-множественным объединением векторного пространства постоянных функций и множества функций вида λf_A $((\lambda, A) \in K^* \times \mathscr{E})$.

Предложение 6.2. Пусть j — отображение $\mathscr{E} \to F$, $A \longmapsto f_A$, и пусть j_0 — отображение E в F, которое любому вектору $u \in E$ ставит в соответствие постоянную функцию, равную u на $\mathscr{E}$.

Тогда j аффинно с линейной частью j_0 и потому инъективно; при этом $j(\mathscr{E})$ есть аффинная гиперплоскость F_1 в F с уравнением $\mu(f) = 1$.

Доказательство. Для любой пары $(A, B) \in \mathscr{E}^2$ разность $j(B) - j(A)$ есть постоянная функция $f_B - f_A$: $M \longmapsto \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB}$; положим $j(B) - j(A) = j_0(\overrightarrow{AB})$. Таким образом, j аффинно, $L(j) = j_0$ и j инъективно, как и j_0.

С другой стороны, как показывает предыдущее предложение, функции f_A суть элементы $f \in F$, удовлетворяющие условию $\mu(f) = 1$. □

▶ Теорема 6.3. К каждому аффинному пространству $\mathscr{E}$, ассоциированному с векторным K-пространством E, можно канонически присоединить:

- векторное пространство F, изоморфное $E \times K$,
- ненулевую линейную форму μ на F,
- аффинную инъекцию j: $\mathscr{E} \to F$, такую, что $j(\mathscr{E})$ — аффинная гиперплоскость в $F_1 \subset F$ с уравнением $\mu(x) = 1$.

Доказательство. Остается только установить изоморфизм между F и $E \times K$. Для этого достаточно заметить, что, какова бы ни была точка $A \in \mathscr{E}$, отображение $E \times K \to F$, $(u, \lambda) \mapsto j_0(u) + \lambda f_A$ линейно и биективно. Установленный таким путем изоморфизм очевидным образом зависит от выбора точки A. □

Заметим, что аффинная гиперплоскость F_1 имеет в качестве направляющей векторную гиперплоскость $F_0 = \operatorname{Ker}(\mu) = j_0(E)$ постоянных функций, которая отождествляется с E.

Замечания. 1) Векторную структуру на множестве $E \cup (K^* \times \mathscr{E})$ можно определить непосредственно, не прибегая к векторному пространству $\mathscr{E}^E$, но это связано с утомительными выкладками.

2) Особый интерес теоремы 6.3 в том, что она обеспечивает *каноническое погружение* j, единственным образом определяемое заданием $\mathscr{E}$.

▶ *Обозначения.* Векторное пространство F, построенное таким образом, называется *векторным продолжением* $\mathscr{E}$ и обозначается $\widehat{\mathscr{E}}$.

Если $\mathscr{E}$ имеет размерность n, то размерность $\widehat{\mathscr{E}}$ равна $n+1$. Мы увидим, что введение этого пространства позволяет прояснить многие вопросы.

7. ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРЕМЫ О ПОГРУЖЕНИИ

Векторная интерпретация барицентров

Вернемся к обозначениям § 6. Инъекция j позволяет нам отождествить $\mathscr{E}$ с аффинной гиперплоскостью $F_1 = \mu^{-1}(1)$ в F, в то время как ее линейная часть j_0

позволяет отождествить E с векторной гиперплоскостью $F_0 = \operatorname{Ker}(\mu)$.

Предложение 7.1. Пусть $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ — конечное семейство взвешенных точек $\mathscr{E}$, где точки A_i отождествлены с элементами F_1. Для того чтобы элемент $\sum_{i \in I} \lambda_i A_i$ из F принадлежал F_1 (соотв. F_0), необходимо и достаточно, чтобы $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$ $\left(\text{соотв. } \sum_{i \in I} \lambda_i = 0\right)$.

Доказательство. Это вытекает из соотношения $\mu\left(\sum \lambda_i A_i\right) = \sum \lambda_i$. □

▶ *Правило.* Отождествление $\mathscr{E}$ с подмножеством в $F = \hat{\mathscr{E}}$ позволяет без предосторожностей записывать любые конечные линейные комбинации $\sum \lambda_i A_i$ элементов $\mathscr{E}$. Но такая комбинация представляет элемент из $\mathscr{E}$ только тогда, когда $\sum \lambda_i = 1$ (этот элемент будет барицентром системы (A_i, λ_i)); если же $\sum \lambda_i = 0$, то $\sum \lambda_i A_i$ представляет элемент из E, равный $\sum \lambda_i \overrightarrow{AA_i}$ для любой точки $A \in \mathscr{E}$.

Приложения. 1) Для того чтобы три точки A, B, C из $\mathscr{E}$ были *коллинеарны*, необходимо и достаточно, чтобы существовали не равные одновременно нулю скаляры λ, μ, ν, такие, что

$$\lambda + \mu + \nu = 0 \quad \text{и} \quad \lambda A + \mu B + \nu C = 0. \tag{1}$$

Соотношения (1) на самом деле равносильны одному соотношению $\lambda\overrightarrow{CA} + \mu\overrightarrow{CB} = 0$; они интересны своей симметричной формой относительно A, B, C и возможностью складывать подобные соотношения.

2) Если $\sum_{i \in I} \lambda_i \neq 0$, то барицентром системы $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ является точка пересечения с F_1 векторной прямой с направляющей $\sum \lambda_i A_i$ в F.

3) Для того чтобы семейство $(A_i)_{i \in I}$ точек из $\mathscr{E}$ было *аффинно свободным* (соотв. аффинно *порождающим*), необходимо и достаточно, чтобы семейство

$(A_i)_{i \in I}$ было свободным (соотв. семейством образующих) в векторном пространстве F.

▶ *В частности, аффинный репер $\mathcal{E}$ является базисом F, содержащимся в F_1.*

Векторная интерпретация аффинных отображений

Мы начнем с установления одного общего результата, независимого от теории векторных продолжений.

Предложение 7.2. Пусть F, F' — два векторных пространства над одним и тем же телом K и F_1 (соотв. F'_1) — *аффинная гиперплоскость* в F (соотв. F'), не проходящая через начало; обозначим F_0 (соотв. F'_0) *векторную* гиперплоскость, параллельную F_1 (соотв. F'_1).

a) Если φ: $F \to F'$ — *линейное* отображение, такое, что $\varphi(F_1) \subset F'_1$, то *ограничение* φ *на* F_1 есть *аффинное* отображение F_1 в F'_1, линейная часть которого есть ограничение φ на E_0.

b) Обратно, если f: $F_1 \to F'_1$ — аффинное отображение, то существует *единственное линейное отображение* φ: $F \to F'$, ограничение которого на F_1 совпадает с f.

Доказательство. a) Если φ: $F \to F'$ линейно и $\varphi(F_1) \subset F'_1$, то для любых точек A, B из F_1 имеем $\varphi(B) - \varphi(A) = \varphi(\overrightarrow{AB})$ и $\overrightarrow{AB} \in F_0$. Ограничение φ на F_1 *аффинно* с линейной частью φ_0: $F_0 \to F'_0$, $u \mapsto \varphi(u)$.

b) Обратно, пусть f: $F_1 \to F'_1$ — аффинное отображение. Фиксируем точку A в F_1 и обозначим через D (соотв. D') векторную прямую в F (соотв. F'), порожденную A (соотв. $f(A)$) (рис. 4). Тогда $F = F_0 \oplus D$, $F' = F'_0 \oplus D'$, и искомое линейное отображение должно удовлетворять следующим двум условиям:

i) $\varphi(A) = f(A)$,

ii) ограничение φ на F_0 равно линейной части f.

Но существует единственное линейное отображение φ из F в F', удовлетворяющее этим условиям (φ определено своими ограничениями на дополнительные

ВПП F_0 и D пространства F); тогда ограничение φ на F_1 есть аффинное отображение с той же линейной частью, что и f, и принимающее в точке A то же значение, что и f, а тем самым равное f, откуда вытекает доказываемый результат. □

▶ Существует, следовательно, *биективное соответствие между аффинными отображениями F_1 в F_1' и линейными отображениями F в F', удовлетворяющими условию* $\varphi(F_1) \subset F_1'$.

С другой стороны, если $F' = F$ и $F_1' = F_1$, это соответствие сохраняет композицию отображений (компо-

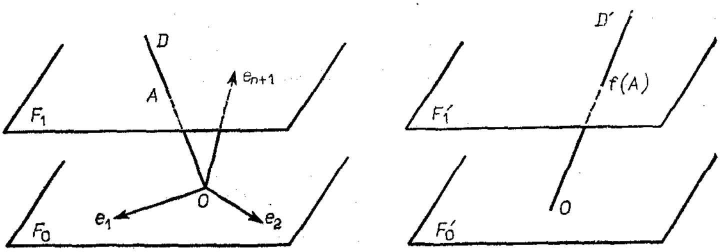


Рис. 4

зиция ограничений двух отображений совпадает с ограничением их композиции). Наконец, если φ — автоморфизм F и F_1 — аффинная гиперплоскость в F, то *включение* $\varphi(F_1) \subset F_1$ *влечет равенство* $\varphi(F_1) = F_1$. В самом деле, $\varphi(F_1)$ есть аффинная гиперплоскость в F, и достаточно применить следствие теоремы II. 6.2, вернувшись к векторному случаю путем замены начала в F.

Таким образом, мы можем сформулировать

Предложение 7.3. *Пусть F — векторное пространство, F_1 — аффинная гиперплоскость в F, не проходящая через начало. Существует изоморфизм группы аффинных биекций F_1 на стабилизатор F_1 в* $\mathrm{GL}(F)$ *(подгруппу в* $\mathrm{GL}(F)$*, состоящую из автоморфизмов φ, для которых $\varphi(F_1) = F_1$).*

▶ Эти результаты применимы, в частности, к случаю, когда F, F' — векторные продолжения аффинных пространств $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}'$, а F_1, F_1' — образы $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}'$ при канонических погружениях $j\colon \mathscr{E} \to F$, $j'\colon \mathscr{E}' \to F'$: *всякое аффинное отображение $\mathscr{E}$ в $\mathscr{E}'$ отождествляется с линейным отображением φ пространства F в F', удовлетворяющим требованию $\varphi(F_1) \subset F_1'$, и группа аффинных биекций $\mathscr{E}$ отождествляется с подгруппой в $\mathrm{GL}(F)$, сохраняющей аффинную гиперплоскость F_1.*

Случай конечной размерности

Если аффинное пространство $\mathscr{E}$ имеет конечную размерность n, то в $F = \hat{\mathscr{E}}$ можно выбрать базис $(e_1, \ldots, e_{n+1})$ так, что $e_i \in F_0$ при $1 \leqslant i \leqslant n$ и $e_{n+1} \in F_1$. Тогда $(e_{n+1};\ e_1, \ldots, e_n)$ есть декартов репер в $F_1 = \mathscr{E}$ с началом e_{n+1} (рис. 4).

В этом случае F_1 является множеством точек $x = \sum_1^{n+1} x_i e_i$ пространства F, таких, что $x - e_{n+1} \in F_0 = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$; следовательно, это аффинная гиперплоскость с уравнением $x_{n+1} = 1$ в базисе $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+1}$. Эндоморфизмы φ пространства F, удовлетворяющие условию $\varphi(F_1) \subset F_1$, — это те эндоморфизмы, матрица которых в базисе (e_i) имеет вид

$$\begin{bmatrix} & & & b_1 \\ & & & b_2 \\ & A & & \cdot \\ & & & \cdot \\ & & & \cdot \\ & & & b_n \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{2}$$

где $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица порядка n. Эндоморфизму φ с матрицей (2) соответствует аффинное отображение $f\colon F_1 \to F_1'$, координатное выражение которого в декартовом репере $(e_{n+1};\ e_1, \ldots, e_n)$ имеет форму

$$f_i(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k a_{ik} + b_i \quad (1 \leqslant i \leqslant n). \tag{3}$$

Матричные вычисления показали бы, что для этого соответствия соблюдаются правила композиции отображений. С другой стороны, эндоморфизм φ с матрицей (2) обратим тогда и только тогда, когда обратима матрица (2), и тогда выполняется и равенство $\varphi(F_1) = F_1$. Таким образом, получается

▶ Теорема 7.4. *Группа аффинных биекций* n-мерного аффинного пространства изоморфна подгруппе линейной группы $\mathrm{GL}(K^{n+1})$, образованной матрицами вида (2), где A принадлежит $\mathrm{GL}(K^n)$.

В частности, группа аффинных биекций $x \mapsto ax + b$ тела K изоморфна подгруппе в $\mathrm{GL}(K^2)$, состоящей из матриц вида $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

8. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ИНЪЕКТИВНЫХ ПОЛУАФФИННЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Ниже мы обозначаем через $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}'$ два аффинных пространства, ассоциированных соответственно с векторными пространствами E, E' над *произвольными* телами K, K'. Мы дадим чисто геометрическую характеризацию полуаффинных отображений $\mathscr{E}$ в $\mathscr{E}'$ [1]. Для ясности начнем со случая *инъективных* отображений.

▶ Теорема 8.1. Допустим, что $\dim(\mathscr{E}) \geqslant 2$. Для того чтобы *инъективное* отображение f: $\mathscr{E} \to \mathscr{E}'$ было *полуаффинным*, необходимо и достаточно, чтобы оно удовлетворяло следующим двум условиям:

i) образ любой аффинной прямой из $\mathscr{E}$ был аффинной прямой в $\mathscr{E}'$;

ii) образы двух параллельных прямых были параллельными прямыми.

Доказательство. Необходимость условий очевидна. Доказательство достаточности проведем в несколько этапов, все время предполагая, что f удовлетворяет условиям i) и ii).

---

[1] Доказательства в § 8 и 9 частично используют приведенные в [FR], но относятся к более общей ситуации (произвольное тело, необязательно конечная размерность). С другой стороны, применение теоремы 4.8 упрощает изложение (см. § 9).

a) *Образы при f двух различных прямых D_1, D_2 из $\mathscr{E}$ суть также две различные прямые.*

В самом деле, пусть D_1, D_2 — прямые в $\mathscr{E}$, имеющие один и тот же образ $f(D_1) = f(D_2)$, и пусть A, B — две различные точки их общего образа. Тогда прообразы $f^{-1}(A)$, $f^{-1}(B)$ точек A и B принадлежат D_1 и D_2 одновременно и различны (в силу инъективности f), откуда следует, что $D_1 = D_2$.

b) *Отображение* φ_A: $E \to E$, $u \mapsto \overrightarrow{f(A)f(A+u)}$ *не зависит от выбора A в $\mathscr{E}$.*

В самом деле, пусть B — другая точка $\mathscr{E}$ и C, D таковы, что $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} = u$. Если $(ABDC)$ — несплющенный параллелограмм, то из ii) и a) следует, что его образ $(f(A)f(B)f(D)f(C))$ — тоже настоящий параллелограмм, откуда

$$\overrightarrow{f(A)f(C)} = \overrightarrow{f(B)f(D)}, \quad \varphi_A(u) = \varphi_B(u).$$

Если точки A, B, C, D принадлежат одной прямой $\mathscr{D}$, то предположение $\dim(\mathscr{E}) \geqslant 2$ позволяет выбрать в $\mathscr{E} \setminus \mathscr{D}$ точки P, Q так, что $\overrightarrow{PQ} = u$. Применяя предыдущий случай, имеем

$$\overrightarrow{f(A)f(C)} = \overrightarrow{f(P)f(Q)} = \overrightarrow{f(B)f(D)},$$

откуда $\varphi_A(u) = \varphi_B(u)$.

Отображение φ_A обозначаем отныне просто φ.

c) *Отображение* φ: $E \to E$ *инъективно и удовлетворяет условию*

$$(\forall (u, v) \in E^2) \quad \varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v). \tag{1}$$

Инъективность φ сразу следует из инъективности f. С другой стороны, для любых данных u, v выберем в $\mathscr{E}$ такие точки A, B, C, что $\overrightarrow{AB} = u$ и $\overrightarrow{BC} = v$. Тогда

$$\varphi(u+v) = \overrightarrow{f(A)f(C)} = \overrightarrow{f(A)f(B)} + \overrightarrow{f(B)f(C)} = \varphi(u) + \varphi(v).$$

d) *Существует отображение* ρ: $K \to K'$, такое, что

$$(\forall (\lambda, u) \in K \times E) \quad \varphi(\lambda u) = \rho(\lambda)\varphi(u). \tag{2}$$

Доказательство. Достаточно найти ρ, удовлетворяющее условию (2) при $u \neq 0$. Для заданной пары (λ, u) выберем A, B, C в $\mathscr{E}$ так, что $\overrightarrow{AB} = u$, $\overrightarrow{AC} = \lambda u$. Так как точки $A' = f(A)$, $B' = f(B)$ и $C' = f(C)$ коллинеарны, то коллинеарны и векторы $\overrightarrow{A'C'} = \varphi(\lambda u)$ и $\overrightarrow{A'B'} = \varphi(u)$; отсюда вытекает существование некоторого скаляра, скажем $\theta(\lambda, u)$, такого, что $\varphi(\lambda u) = \theta(\lambda, u)\varphi(u)$. Остается доказать, что $\theta(\lambda, u)$ не зависит от вектора u (по предположению ненулевого).

1) *Если u, v — два неколлинеарных вектора*, то неколлинеарны и $\varphi(u)$, $\varphi(v)$; в противном случае образы двух прямых D_1, D_2, проходящих через одну и ту же точку A с направляющими u, v, совпадали бы, что невозможно в силу а).

Для любого $\lambda \in K$ имеем

$$\varphi(\lambda(u+v)) = \varphi(\lambda u) + \varphi(\lambda v) = \theta(\lambda, u)\varphi(u) + \theta(\lambda, v)\varphi(v) =$$
$$= \theta(\lambda, u+v)\varphi(u+v) = \theta(\lambda, u+v)(\varphi(u) + \varphi(v)),$$

откуда в силу неколлинеарности $\varphi(u)$, $\varphi(v)$

$$\theta(\lambda, u) = \theta(\lambda, u+v) = \theta(\lambda, v).$$

2) *Если u, v — коллинеарные ненулевые векторы*, то предположение $\dim(E) \geqslant 2$ позволяет выбрать $w \in E$ так, что пары (u, w) и (v, w) свободны. Отсюда находим, что

$$(\forall \lambda \in K) \quad \theta(\lambda, u) = \theta(\lambda, w) = \theta(\lambda, v).$$

Так для каждого $\lambda \in K$ отображение $E \setminus \{0\} \to K$, $u \longmapsto \theta(\lambda, u)$ есть константа, мы обозначим ее через $\rho(\lambda)$.

e) *Отображение* ρ: $K \to K'$ *является изоморфизмом тел.*

Выбрав $u \in E \setminus \{0\}$, мы увидим прежде всего, что соотношения $\varphi((\lambda + \mu)u) = \varphi(\lambda u) + \varphi(\mu u)$ и $\varphi(\lambda\mu u) = \rho(\lambda\mu)\varphi(u) = \rho(\lambda)\varphi(\mu u) = \rho(\lambda)\rho(\mu)\varphi(u)$ влекут (с учетом $\varphi(u) \neq 0$)

$$\rho(\lambda + \mu) = \rho(\lambda) + \rho(\mu) \quad \text{и} \quad \rho(\lambda\mu) = \rho(\lambda)\rho(\mu),$$

т. е. показывают, что ρ — *гомоморфизм тел.*

Наконец, для любой точки $A \in \mathscr{E}$ отображение $\lambda \longmapsto A + \lambda u$ есть биекция K на прямую D; ограничение f на D есть биекция D на прямую $f(D)$. Следовательно, композиция $K \to f(D)$, $\lambda \mapsto f(A+\lambda u) = f(A) + \rho(\lambda)\varphi(u)$ биективна. Отсюда вытекает, что отображение ρ: $K \to K'$ биективно.

Итак, ρ — изоморфизм тел, φ — полулинейное отображение, ассоциированное с ρ, и f — полуаффинное отображение. □

Случай плоскости

Если $\mathscr{E}$ и $\mathscr{E}'$ двумерны, то условие ii) в теореме 8.1 следует из условия i) и инъективности f. Мы можем, таким образом, сформулировать

▶ Следствие. Если $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}'$ — *аффинные плоскости и* f: $\mathscr{E} \to \mathscr{E}'$ — *инъективное* отображение, такое, что образ любой прямой в $\mathscr{E}$ есть прямая в $\mathscr{E}'$, то f — *полуаффинное* отображение.

Замечание. Условия теоремы 8.1 выполняются, в частности, если f — инъективное отображение $\mathscr{E}$ в себя, такое, что образ любой прямой D есть прямая, *параллельная* D; тогда можно непосредственно доказать, что f — *дилатация* (см. упр. III. 8).

9. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АФФИННОЙ ГЕОМЕТРИИ

Исходя из теоремы 8.1 и опираясь на характеризацию линейных аффинных многообразий, представленную теоремой 4.8, мы докажем здесь следующую теорему:

▶ Теорема 9.1. Пусть $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}'$ — аффинные пространства над телами K, K', отличными от поля $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; для того чтобы отображение f: $\mathscr{E} \to \mathscr{E}'$ было *полуаффинным*, достаточно, чтобы

i) Образ любой прямой в $\mathscr{E}$ был прямой в $\mathscr{E}'$, либо сводился к одной точке.

ii) Аффинное подпространство в $\mathscr{E}'$, порожденное $f(\mathscr{E})$, имело размерность $\geqslant 2$.

Мы подразделим доказательство этой теоремы на семь лемм; в каждой из них предполагается, что f удовлетворяет условиям i) и ii).

Лемма 1. Если $\mathscr{V}$ есть ЛАМ в $\mathscr{E}$, то $f(\mathscr{V})$ — ЛАМ в $\mathscr{E}'$.

Доказательство. Пусть $A' = f(A)$ и $B' = f(B)$ — две различные точки в $f(\mathscr{V})$. Тогда прямая $(A'B')$ есть по условию i) образ прямой (AB); так как прямая (AB) содержится в $\mathscr{V}$, прямая $(A'B')$ содержится в $f(\mathscr{V})$. Результат теперь вытекает из теоремы 4.8. □

Лемма 2. Если $\mathscr{V}'$ — ЛАМ в $\mathscr{E}'$ и множество $\mathscr{V} = f^{-1}(\mathscr{V}')$ непусто, то оно является ЛАМ в $\mathscr{E}$.

Доказательство. Результат очевиден, если $\mathscr{V}$ сводится к одной точке. В противном случае для любой пары различных точек $A, B \in \mathscr{V}$ прямая $(f(A)f(B))$ содержится в $\mathscr{V}'$ согласно i). Таким образом, прямая (AB) содержится в $\mathscr{V}$ и теорема 4.8 показывает, что $\mathscr{V}$ есть ЛАМ. □

Лемма 3. Для любой непустой части X пространства $\mathscr{E}$

$$\mathrm{Aff}\,(f\,(X)) = f\,(\mathrm{Aff}\,(X)). \qquad (1)$$

Доказательство. $\mathrm{Aff}(X)$ есть ЛАМ в $\mathscr{E}$, содержащее X; по лемме 1, $f(\mathrm{Aff}(X))$ есть ЛАМ в $\mathscr{E}'$, содержащее $f(X)$. Отсюда следует включение $\mathrm{Aff}(f(X)) \subset f(\mathrm{Aff}(X))$.

Аналогично, по лемме 2, $f^{-1}(\mathrm{Aff}\,(f\,(X))$ есть ЛАМ в $\mathscr{E}$, содержащее $f^{-1}(f\,(X))$, а потому и X; имеет место включение $\mathrm{Aff}\,(X) \subset f^{-1}(\mathrm{Aff}\,(f\,(X)))$; применение отображения f дает

$$f\,(\mathrm{Aff}\,(X)) \subset \mathrm{Aff}\,(f\,(X)).$$

Окончательно получаем равенство (1). □

Лемма 4. Пусть D_1, D_2 — пара параллельных прямых в $\mathscr{E}$. Если $f(D_1)$ сводится к точке, то же имеет место и для $f(D_2)$. Если $f(D_1)$ — прямая, то и $f(D_2)$ — прямая, параллельная $f(D_1)$.

Доказательство. Мы можем предположить, что $D_1 \neq D_2$. Тогда $\mathscr{V} = \mathrm{Aff}\,(D_1 \cup D_2)$ есть ЛАМ размерности 2 в $\mathscr{E}$, порожденное двумя точками A, B одной из прямых и точкой C другой прямой; по леммам 2 и 3, $f(\mathscr{V}) = \mathrm{Aff}(f(A), f(B), f(C))$ есть ЛАМ размерности $\leqslant 2$.

a) Покажем сначала, что $f(D_1) = f(D_2)$ либо $f(D_1) \cap f(D_2) = \varnothing$.

Допустим, что $f(D_1)$ и $f(D_2)$ действительно имеют общую точку. Тогда найдутся точки $A_1 \in D_1$ и $A_2 \in D_2$, такие, что $f(A_1) = f(A_2)$. Выбирая $B_1 \in D_1 \setminus \{A_1\}$ и $B_2 \in D_2 \setminus \{A_2\}$ и полагая по-прежнему $\mathscr{V} = \mathrm{Aff}(D_1 \cup D_2)$, получим с помощью леммы 3, что

$$f(\mathscr{V}) = \mathrm{Aff}(f(A_1), f(A_2), f(B_1)) = \mathrm{Aff}(f(A_1), f(B_1)) = f(D_1)$$

и аналогично

$$f(\mathscr{V}) = \mathrm{Aff}(f(A_1), f(A_2), f(B_2)) = \mathrm{Aff}(f(A_2), f(B_2)) = f(D_2),$$

откуда $f(D_1) = f(D_2)$.

Поскольку сформулированное утверждение при $f(D_1) = f(D_2)$ очевидно, будем далее полагать $f(D_1) \neq f(D_2)$, т. е. считать, что $f(D_1)$ и $f(D_2)$ не имеют общих точек.

b) Предположим, что $f(D_1)$ — прямая в $\mathscr{E}'$ и $f(D_1) \cap f(D_2) = \varnothing$; тогда $f(\mathscr{V})$ имеет размерность 2.

Если бы на прямой D_2 существовали две точки B, C, такие, что $f(B) = f(C)$, то для любой точки $A \in D_1$ мы имели бы $\mathscr{V} = \mathrm{Aff}(A, B, C)$ и $f(\mathscr{V}) = \mathrm{Aff}(f(A), f(B))$, и тогда $f(\mathscr{V})$ не было бы двумерным вопреки предположению. Отсюда следует, что $f(D_2)$ — прямая.

Значит, $f(D_1)$ и $f(D_2)$ — две прямые без общих точек, лежащие в одном ЛАМ размерности 2, т. е. параллельные.

c) Если $f(D_1)$ сводится к одной точке, то, меняя ролями D_1 и D_2 и применяя результат b), мы видим, что $f(D_2)$ также сводится к точке. □

Лемма 5. *Если (P, Q) — пара точек в $\mathscr{E}'$, таких, что множества $f^{-1}(P)$, $f^{-1}(Q)$ непусты, то $f^{-1}(P)$ и $f^{-1}(Q)$ — ЛАМ с общим направлением.*

Доказательство. По лемме 2, $f^{-1}(P)$ и $f^{-1}(Q)$ суть ЛАМ в $\mathscr{E}$. Предполагая, что $P \neq Q$, фиксируем точку A в $\mathscr{V} = f^{-1}(P)$ и точку B в $\mathscr{W} = f^{-1}(Q)$; параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{AB}$ обозначим через τ. Для любой точки $M \in \mathscr{V}$ прямая $(B\tau(M)) = (\tau(A)\tau(M))$ параллельна прямой (AM), и поскольку образ прямой (AM)) сводится к одной точке P, то образ прямой $(B\tau(M))$ сводится к точке $Q = f(B)$. Таким образом, $M \in \mathscr{V}$ влечет $\tau(M) \subset \mathscr{W}$ и имеет место включение $\tau(\mathscr{V}) \subset \mathscr{W}$.

Меняя ролями $\mathscr{V}$ и $\mathscr{W}$, получим включение $\tau^{-1}(\mathscr{W}) \subset \mathscr{V}$, откуда $\tau(\mathscr{V}) = \mathscr{W}$. Итак, $\mathscr{V}$, $\mathscr{W}$ имеют общее направление. □

Лемма 6. Обозначим через V общее направление непустых ЛАМ в $\mathscr{E}$ вида $f^{-1}(P)$, где $P \in \mathscr{E}'$, и пусть $\mathscr{E}/V$ — факторпространство $\mathscr{E}$ по отношению эквивалентности $\mathscr{R}$, определенному условием $A\mathscr{R}B \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \in V$.

Тогда $\mathscr{E}/V$ имеет единственную аффинную структуру, такую, что каноническая проекция p: $\mathscr{E} \to \mathscr{E}/V$ является аффинной.

Доказательство. Выбор начала A в $\mathscr{E}$ сводит дело к случаю факторпространства векторного пространства $\mathscr{E}_A$ по его векторному подпространству V, и оказывается, что достаточно применить теорему II. 4.3, приняв точку $p(A)$ за начало в $\mathscr{E}/V$. □

Отметим, что $\mathscr{E}/V$ является пространством орбит действия группы трансляций $(V, +)$ на $\mathscr{E}$; это есть множество ЛАМ с направлением V (см. § 2).

Лемма 7. В обозначениях леммы 6 отображение f представляется в виде $f = g \circ p$, где g: $\mathscr{E}/V \to \mathscr{E}'$ — инъективное полуаффинное отображение; отсюда вытекает, что f полуаффинно.

Доказательство. Существование и инъективность g вытекают из того, что соотношение $f(A) = f(B)$ равносильно $\overrightarrow{AB} \in V$ (см. лемму 5), и тем самым $p(A) = p(B)$. Для доказательства полуаффинности g покажем, что оно удовлетворяет условиям теоремы 8.1.

Пусть $\mathscr{D}$ — произвольная аффинная прямая в $\mathscr{E}/V$, порожденная двумя различными элементами α, β из $\mathscr{E}/V$. Без труда проверяется, что $p^{-1}(\mathscr{D})$ есть ЛАМ в $\mathscr{E}$, порожденное $p^{-1}(\alpha) \cup p^{-1}(\beta)$.

По лемме 3, $g(\mathscr{D}) = f(p^{-1}(\mathscr{D}))$ есть ЛАМ, порожденное $f(p^{-1}(\alpha)) \cup f(p^{-1}(\beta)) = \{g(\alpha), g(\beta)\}$; итак (в силу инъективности g), $g(\mathscr{D})$ является аффинной прямой $\mathscr{E}'$.

Наконец, $\mathscr{E}/V$ не может сводиться к одной точке или прямой, так как тогда к точке или прямой сводилось бы и $g(\mathscr{E}/V) = f(\mathscr{E})$, что противоречит условию ii). Поэтому $\dim(\mathscr{E}/V) \geqslant 2$.

Отсюда следует, что g удовлетворяет условиям i) и ii), наложенным на f, при условии замены $\mathscr{E}$ на $\mathscr{E}/V$. Лемма 4 показывает тогда, что образы при отображении g двух параллельных прямых $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ из $\mathscr{E}/V$ — две параллельные прямые. Наконец, g удовлетворяет всем условиям теоремы 8.1 (после замены $\mathscr{E}$ на $\mathscr{E}/V$). Следовательно, g полуаффинно и так же обстоит дело с f. $\square$

Теорема 9.1 тем самым полностью установлена. $\square$

Этот результат особенно интересен в случае, когда тела K и K' совпадают и не допускают других автоморфизмов, кроме тождественного (например, когда $K = \mathbb{R}$ или $K = \mathbb{Z}_p$ при $p \neq 2$): *в этом случае мы получаем чисто геометрическую характеризацию аффинных отображений ранга $\geqslant 2$ пространства $\mathscr{E}$ в $\mathscr{E}'$.*

Кроме того, очевидно, что теорема 9.1 потеряла бы силу при отсутствии условия ii): ведь любое отображение $\mathscr{E}$ на прямую тривиальным образом удовлетворяет условию i).

Так же и в случае $K = K' = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ условие i) выполнено для любого отображения $\mathscr{E}$ в $\mathscr{E}'$ (поскольку каждая прямая в $\mathscr{E}$ и $\mathscr{E}'$ состоит из двух точек). Теорема 9.1 теряет силу и в этом случае.

Наконец, нельзя заменить требование «образ прямой есть прямая или точка» более слабым условием «образы коллинеарных точек коллинеарны», даже при условии, что f биективно.

Например, $f\colon \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{C}^n$, $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \mapsto (x_1 + iy_1, \ldots, x_n + iy_n)$ есть биекция векторного пространства $\mathbb{R}^{2n}$ над $\mathbb{R}$ в векторное пространство $\mathbb{C}^n$ над $\mathbb{C}$, и образ каждой прямой из $\mathbb{R}^{2n}$ при отображении f *содержится* в некоторой прямой пространства $\mathbb{C}^n$, но f не является полулинейным (поскольку $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ не изоморфны).

Глава IV

ЭЛЕМЕНТЫ ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ

1. ВВЕДЕНИЕ

Избыток аффинной геометрии в последние годы привел к забвению задач, при всей их естественности, которые связаны с центральным проектированием и теорией перспективы. Настала пора к ним вернуться, ибо с практической точки зрения проектирование имеет ключевое значение для хорошего пространственного представления. В теоретическом же плане они представляют естественное введение в проективную геометрию, которая лучше, чем аффинная, приспособлена к изучению некоторых видов задач (о коллинеарности и пересечениях, об алгебраических кривых).

Для начала мы изучим вкратце следующую задачу:

Задача о центральных проекциях [1]

Пусть $\mathscr{E}$ — произвольное аффинное пространство, O — некоторая его точка и $\mathscr{H}$, $\mathscr{H}'$ — две гиперплоскости в $\mathscr{E}$, не проходящие через O. Мы намерены изучить соответствие между $\mathscr{H}$ и $\mathscr{H}'$, устанавливаемое условием: «точка M в $\mathscr{H}$ и точка M' в $\mathscr{H}'$ коллинеарны с O».

Если $\mathscr{H}$ и $\mathscr{H}'$ параллельны, то это соответствие определяет аффинную или полуаффинную биекцию $\mathscr{H}$ на $\mathscr{H}'$ (ограничение на $\mathscr{H}$ некоторой гомотетии с центром O).

Если же $\mathscr{H}$ и $\mathscr{H}'$ не параллельны, то это соответствие не определяет отображения $\mathscr{H}$ на $\mathscr{H}'$: точка $M \in \mathscr{H}$ не имеет образа в $\mathscr{H}'$ в случае, когда прямая (OM) параллельна $\mathscr{H}'$; точно так же и точка M' в $\mathscr{H}'$ имеет прообраз в $\mathscr{H}$ лишь в случае, когда прямая (OM') не параллельна $\mathscr{H}$.

---

[1]) В трехмерном случае эта задача возникает при рассмотрении плоского рисунка.

▶ Для того чтобы сделать это соответствие биективным, достаточно присоединить к $\mathscr{H}$ и $\mathscr{H}'$ множества $\mathscr{H}_\infty$, $\mathscr{H}'_\infty$, состоящие соответственно из *направлений принадлежащих им прямых*, и определить отображение f: $\mathscr{H} \cup \mathscr{H}_\infty \to \mathscr{H}' \cup \mathscr{H}'_\infty$ по следующим правилам:

a) если $M \in \mathscr{H}$ и прямая (OM) не параллельна $\mathscr{H}'$, то $f(M)$ есть точка пересечения прямой (OM) с $\mathscr{H}'$.

b) если $M \in \mathscr{H}$ и прямая (OM) параллельна $\mathscr{H}'$, то $f(M)$ есть направление прямой (OM) (элемент $\mathscr{H}'_\infty$).

c) если $\delta \in \mathscr{H}_\infty$ и $\delta \notin \mathscr{H}'_\infty$, то $f(\delta)$ есть точка пересечения $\mathscr{H}'$ с прямой, проходящей через O с направлением δ.

d) если $\delta \in \mathscr{H}_\infty \cap \mathscr{H}'_\infty$, то $f(\delta) = \delta$.

Эти условия проясняются, если рассмотреть соответствие, устанавливаемое проектированием с центром O между прямыми плоскостей $\mathscr{H}$ и $\mathscr{H}'$: если $\mathscr{D}$ — прямая в $\mathscr{H}$ с направлением δ и плоскость $(O, \mathscr{D})$ не параллельна $\mathscr{H}'$, то ей соответствует прямая $\mathscr{D}'$ — пересечение плоскостей $(O, \mathscr{D})$ и $\mathscr{H}'$; тогда $\mathscr{D}'$ имеет направление δ или проходит через точку $f(\delta)$ в зависимости от того, параллельна ли $\mathscr{D}$ плоскости $\mathscr{H}'$.

▶ *Универсальная процедура для превращения центральных проекций гиперплоскостей в биекции состоит, таким образом, в присоединении к каждой аффинной гиперплоскости $\mathscr{H}$ пространства $\mathscr{E}$ множества направлений ее прямых*[1]; для каждой пары $(\mathscr{H}, \mathscr{H}')$ аффинных гиперплоскостей в $\mathscr{E}$ и любой точки O в $\mathscr{E} \setminus (\mathscr{H} \cup \mathscr{H}')$ биекция f, определенная правилами a)—d), называется *проекцией* или *перспективой* с центром O расширенной гиперплоскости $\mathscr{H} \cup \mathscr{H}_\infty$ на $\mathscr{H}' \cup \mathscr{H}'_\infty$. Эти условия применимы и тогда, когда $\mathscr{H}$ и $\mathscr{H}'$ параллельны (при этом возможны лишь случаи a) и d)).

В действительности биекция строится с помощью множества прямых, проходящих через O. Для даль-

[1]) Удобно называть $\mathscr{H} \cup \mathscr{H}_\infty$ расширенной гиперплоскостью. — *Прим. перев.*

нейшего важно выяснить роль этого посредника. Сформулируем

Предложение 1.1. Для любой аффинной гиперплоскости $\mathscr{H}$ пространства $\mathscr{E}$ и любой точки $O \in \mathscr{E} \setminus \mathscr{H}$ существует естественная биекция $j_{\mathscr{H}}$ расширенной гиперплоскости $\mathscr{H} \cup \mathscr{H}_\infty$ на множество аффинных прямых, проходящих через O: каждой точке $M \in \mathscr{H}$ соответствует прямая (OM) и любому элементу $\delta \in \in \mathscr{H}_\infty$ соответствует прямая, проходящая через O, с направлением δ.

Если $\mathscr{H}$, $\mathscr{H}'$ — две аффинные гиперплоскости в $\mathscr{E}$, не проходящие через O, то проекция $\mathscr{H} \cup \mathscr{H}_\infty$ из центра O на $\mathscr{H}' \cup \mathscr{H}'_\infty$ есть биекция $f = j_{\mathscr{H}'}^{-1} \circ j_{\mathscr{H}}$.

Предложение 1.1 привлекает наше внимание к изучению множества аффинных прямых, проходящих через фиксированную точку $O \in \mathscr{E}$; *снабжая* $\mathscr{E}$ векторной структурой путем выбора точки O за начало, мы приходим к изучению *векторных прямых* векторного пространства E. Это изучение и составит предмет *проективной геометрии*, к которой мы теперь приступаем.

2. ПОНЯТИЕ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Обозначим через E левое[1]) векторное пространство над произвольным телом K, не сводящееся к $\{0\}$. После всего сказанного мы могли бы ввести соответствующее проективное пространство как *множество всех векторных прямых* E. Но легко заметить, что векторные прямые E с исключенным началом образуют разбиение множества $E_* = E \setminus \{0\}$ [2]) на классы эквивалентности по очевидному отношению эквивалентности на E_*: две точки $x, y \in E_*$ принадлежат одной и той же векторной прямой тогда и только тогда,

[1]) Аналогично определяется проективное пространство и в случае правого векторного пространства (см. § 5).

[2]) Всюду, где E обозначает векторное пространство, E_* обозначает множество $E \setminus \{0\}$ (обозначение E^* сохраняется для сопряженного пространства к E). Для тела мы сохраняем обозначение $K^* = K \setminus \{0\}$.

когда существует скаляр λ (непременно отличный от нуля!), такой, что $y = \lambda x$. Так мы приходим к следующему алгебраическому определению:

▶ Определение 2.1. Проективное пространство $\mathbb{P}(E)$ левого векторного пространства E над K есть фактор-пространство множества ненулевых векторов $E_* = E \setminus \{0\}$ по отношению эквивалентности $\mathscr{R}$, задаваемому условием

$$y \mathscr{R} x \Leftrightarrow (\exists \lambda \in K^*) \quad y = \lambda x. \tag{1}$$

Обозначим через p: $E_* \to \mathbb{P}(E)$ каноническую проекцию; класс $p(x)$ $(x \in E_*)$ можно обозначать $\langle x \rangle$.

Отметим также, что в случае $\dim E = 1$ пространство $\mathbb{P}(E)$ сводится к одной точке.

В случае произвольной *конечной размерности n пространству $\mathbb{P}(E)$ приписывается размерность $n - 1$*; это условие получает в дальнейшем оправдание (§ 4); в частности, если E имеет размерность 2 (соотв. 3), то мы называем $\mathbb{P}(E)$ *проективной прямой* (соотв. *проективной плоскостью*).

Проективные подпространства

▶ Определение 2.2. Подмножество $L \subset \mathbb{P}(E)$ называется *проективным подпространством в* $\mathbb{P}(E)$, если $p^{-1}(L) \cup \{0\}$ есть *векторное* подпространство в E.

В частности, всякая точка $M \in \mathbb{P}(E)$ является нульмерным проективным подпространством в $\mathbb{P}(E)$ (так как $p^{-1}(M) \cup \{0\}$ есть векторная прямая в E). Аналогично, *пустое подмножество* в $\mathbb{P}(E)$ можно рассматривать как его проективное подпространство размерности —1. Не считая этого случая, простейшими подпространствами являются проективные прямые (когда $p^{-1}(L) \cup \{0\}$ имеет размерность 2) и проективные гиперплоскости (когда $p^{-1}(L) \cup \{0\}$ есть векторная гиперплоскость в E).

Проективные прямые будут изучены в § 6. Теперь же заметим, что через две различные точки $\mathbb{P}(E)$ проходит единственная проективная прямая (потому что две различные векторные прямые E порождают векторную плоскость). Немедленно получаем

Предложение 2.1. Если V — векторное подпространство в E, то $p(V_*)$ является проективным подпространством в $\mathbb{P}(E)$; мы говорим, что оно *индуцировано* V.

В самом деле, V есть объединение векторных прямых, и потому $V_* = V \setminus \{0\}$ состоит из классов эквивалентности по отношению (1) и $p^{-1}(pV_*) = V_*$.

Следствие. Всякое проективное подпространство L в $\mathbb{P}(E)$ допускает каноническую *проективную структуру*, получаемую ограничением на $p^{-1}(L)$ отношения эквивалентности (1).

Проективное подпространство в $\mathbb{P}(E)$, *индуцированное векторным подпространством* V *пространства* E, *можно отождествить с проективным пространством* $\mathbb{P}(V)$ *и обозначать просто* $\mathbb{P}(V)$ *вместо* $p(V_*)$.

В частности, если V двумерно, то проективные прямые в $\mathbb{P}(E)$ имеют структуру проективного пространства размерности 1, что оправдывает нашу терминологию.

Предложение 2.2. *Пересечение* произвольного семейства $(L_i)_{i \in I}$ проективных подпространств в $\mathbb{P}(E)$ есть также проективное подпространство в $\mathbb{P}(E)$, быть может, пустое.

Доказательство. Полагая $L = \bigcap_{i \in I} L_i$, получаем $p^{-1}(L) = \bigcap_{i \in I} p^{-1}(L_i)$, и $p^{-1}(L) \cup \{0\}$ есть пересечение векторных подпространств $p^{-1}(L_i) \cup \{0\}$.

Пример. Заметив, что всякая векторная плоскость и векторная гиперплоскость в E имеют по меньшей мере общую векторную прямую, получим

▶ Предложение 2.3. Пусть L — *проективная гиперплоскость* в $\mathbb{P}(E)$ и Δ — *проективная прямая в* $\mathbb{P}(E)$, не лежащая в L. Тогда L и Δ имеют в точности одну общую точку.

Однородные координаты

Предположим, что E имеет конечную размерность $n+1$ (и тогда по определению размерность $\mathbb{P}(E)$

равна n), и пусть $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+1}$ — *базис* E. Для произвольной точки $x \in \mathbb{P}(E)$ существует по меньшей мере один $(n+1)$-набор $(X_1, X_2, \ldots, X_{n+1})$ элементов K, такой, что точка $X \in E$ с координатами (X_i) в базисе (e_i) принадлежит $p^{-1}(x)$; тогда говорят, что $(X_1, X_2, \ldots, X_{n+1})$ — *набор однородных координат точки x относительно базиса* (e_i). Другие наборы однородных координат точки x в этом базисе имеют вид $(\lambda X_1, \ldots \ldots, \lambda X_{n+1})$, где $\lambda \in K^*$.

Обратно, если $(X_1, \ldots, X_{n+1})$ — набор из $n+1$ скаляров, не все из которых равны нулю, то существует единственная точка $x \in \mathbb{P}(E)$, допускающая их в качестве однородных координат относительно базиса (e_i).

В частности, если $E = K^{n+1}$, то задание некоторой точки в $\mathbb{P}(K^{n+1})$ равносильно заданию набора $(X_1, \ldots \ldots, X_{n+1})$ из $n+1$ элементов K, не все из которых равны нулю, определенных с точностью до общего множителя слева.

Отметим, что стандартное проективное пространство $\mathbb{P}(K^{n+1})$ обозначается также $\mathbb{P}^n(K)$. Понятие *проективного репера* будет изучено в упр. IV. 4.

3. ПРОЕКТИВНЫЕ МОРФИЗМЫ. ГОМОГРАФИИ

Обозначим через E, F два левых векторных пространства, через p: $E_* \to \mathbb{P}(E)$ и q: $F_* \to \mathbb{P}(F)$ их канонические проекции на соответствующие проективные пространства и через f: $E \to F$ *полулинейное* отображение (см. § II. 4).

Если K — основное поле пространства E и θ — ассоциированный с f изоморфизм тел, то

$$(\forall (\lambda, x) \in K \times E) \quad f(\lambda, x) = \theta(\lambda) f(x),$$

и потому соотношение $p(x) = p(y)$ (где $(x, y) \in E \times \times E$), влечет $q \circ f(x) = q \circ f(y)$, когда $f(x) \neq 0$. Ограничение f на $E \setminus \operatorname{Ker} f$ проходит, следовательно, через факторпространство, и существует единственное отображение φ: $E \setminus \operatorname{Ker} f \to \mathbb{P}(E)$, для которого $\varphi \circ p =$

$= q \circ f$, что выражается *коммутативной диаграммой*

$$\begin{array}{ccc} E \setminus \operatorname{Ker} f & \xrightarrow{f} & F_* \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ p(E \setminus \operatorname{Ker} f) & \xrightarrow[\varphi]{} & \mathbb{P}(F) \end{array}$$

Определение 3.1. Если $f\colon E \to F$ — *линейное* (соотв. *полулинейное*) отображение, то отображение φ: $p(E \setminus \operatorname{Ker} f) \to \mathbb{P}(E)$, удовлетворяющее указанным условиям, называется *проективным* (соотв. *полупроективным*) морфизмом $\mathbb{P}(E)$ в $\mathbb{P}(F)$, *индуцированным* f.

▶ *Заметим, что φ определено на всем $\mathbb{P}(E)$ только тогда, когда f инъективно* (т. е. когда $\operatorname{Ker} f = \{0\}$).

Примеры. 1) Пусть f — эндоморфизм E, получаемый *проектированием* на векторную гиперплоскость H параллельно векторной прямой D (не содержащейся в H). Тогда $\operatorname{Ker} f = D$ и $p(D_*)$ есть точка S в $\mathbb{P}(E)$. Морфизм φ, индуцированный f, является отображением $\mathbb{P}(E) \setminus \{S\}$ на проективную гиперплоскость $p(H_*)$; соотношение

$$(\forall x \in E_*) \quad f(x) - x \in D$$

показывает, что точки $M = p(x)$, $\varphi(M) = p \circ f(x)$ и $S = p(D_*)$ принадлежат одной и той же проективной прямой в $\mathbb{P}(E)$. Это дает простую геометрическую интерпретацию φ: для каждой точки $M \in \mathbb{P}(E) \setminus \{S\}$ точка $\varphi(M)$ есть точка пересечения прямой (SM) с проективной гиперплоскостью $\mathbb{P}(H)$.

Полученный таким способом проективный морфизм будет называться *проектированием* $\mathbb{P}(E)$ *из центра* S на проективную гиперплоскость $\mathbb{P}(H)$.

По поводу обобщения этого примера см. упр. IV. 6.

2) *Проективные морфизмы в случае конечной размерности.* Предположим, что E, F конечномерны, и пусть $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — базис в E, а $(e'_j)_{1 \leqslant j \leqslant p}$ — базис в F. Линейное отображение $f\colon E \to F$ определяется заданием матрицы (a_{ij}), такой, что $f(e_i) = \sum_{j=1}^{p} a_{ji} e'_j$. Обоз-

начим через φ проективный морфизм, индуцированный f, и через (x_i) набор однородных координат точки $x \in \mathbb{P}(E)$ в базисе (e_i). Тогда точка $\varphi(x)$ допускает скаляры $y_j = \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij}$ в качестве однородных координат в базисе (e'_j), однако следует заметить, что матрица (a_{ij}) не полностью определяется заданием φ, как показывает следующий общий результат:

Предложение 3.1. Пусть E, F — два векторных пространства над телами K, K'. Для того чтобы два полулинейных отображения f, g из E в F индуцировали *один и тот же полупроективный морфизм* φ: $\mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(F)$, *достаточно*, чтобы существовал ненулевой элемент $k \in K'$, такой, что $g = kf$; это условие также и *необходимо*, если φ *не постоянно.*

Доказательство. Достаточность условия очевидна. Обратно, если f, g индуцируют один и тот же проективный морфизм φ, то векторы $f(x)$, $g(x)$ должны быть оба нулевыми или коллинеарными; отсюда вытекает существование функции ρ: $E \setminus \operatorname{Ker} f \to K'$, удовлетворяющей условию $g(x) = \rho(x) f(x)$.

Если x, y — элементы E, такие, что пара $(f(x), f(y))$ свободна, то соотношение

$$\rho(x+y)(f(x)+f(y)) = g(x+y) = g(x)+g(y) = \\ = \rho(x) f(x) + \rho(y) f(y)$$

влечет $\rho(x+y) = \rho(x) = \rho(y)$.

Однако если φ не постоянно, то $f(E)$ имеет размерность $\geqslant 2$; поэтому если x, y — такие элементы E, что $f(x)$, $f(y)$ ненулевые, но пропорциональные, то существует $z \in E$, такой, что пары $(f(x), f(z))$ и $(f(y), f(z))$ свободны. Тогда $\rho(x) = \rho(y) = \rho(z)$ и функция ρ постоянна на $E \setminus \operatorname{Ker} f$; обозначив эту постоянную через k, получим $g(x) = kf(x)$ для всех $x \in E$ (поскольку $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker} f$), откуда и вытекает наш результат. □

Замечание. Если f, g линейны, то соотношение $g = kf$ требует, чтобы k принадлежал центру K (предложение II. 4.6).

Следствие. Пусть E, F — два векторных пространства над одним и тем же телом K. Для того чтобы *полулинейное* отображение $f\colon E \to F$ ранга $\geqslant 2$ индуцировало *проективный* морфизм, необходимо и достаточно, чтобы f было ассоциировано с *внутренним* автоморфизмом тела K.

В самом деле, для линейности kf необходимо и достаточно, чтобы f было ассоциировано с внутренним автоморфизмом $\lambda \mapsto k^{-1}\lambda k$.

Свойства

Предложение 3.2. Пусть φ — проективный (соотв. *полупроективный*) морфизм $\mathbb{P}(E)$ в $\mathbb{P}(F)$ и D_φ — его область определения. Если L — проективное подпространство в $\mathbb{P}(E)$, то ограничение φ на $L \cap D_\varphi$ является проективным (соотв. полупроективным) морфизмом, образ которого — *некоторое проективное подпространство в* $\mathbb{P}(F)$.

В частности, образ φ есть проективное подпространство в $\mathbb{P}(F)$.

Действительно, при введенных обозначениях ограничение φ на $L \cap D_\varphi$ есть морфизм, индуцированный ограничением f на векторное пространство $V = p^{-1}(L) \cup \{0\}$, а его образ есть проективное подпространство в $\mathbb{P}(F)$, индуцированное $f(V)$.

Если φ определено на всем $\mathbb{P}(E)$, то, кроме того, *полный образ* проективного подпространства из $\mathbb{P}(F)$ будет проективным подпространством в $\mathbb{P}(E)$.

Случай инъективных морфизмов

Предложение 3.3. Полупроективный морфизм φ, индуцированный полулинейным *инъективным* отображением $f\colon E \to F$, сам является *инъективным*; для *биективности* φ необходимо и достаточна *биективность* f.

Доказательство. Пусть $y_1 = p(x_1)$ и $y_2 = p(x_2)$ — две точки в $\mathbb{P}(E)$, такие, что $\varphi(y_1) = \varphi(y_2)$. В обозначениях, введенных в начале параграфа, получим

$$g \circ f(x_1) = \varphi(y_1) = \varphi(y_2) = g \circ f(x_2),$$

откуда следует коллинеарность $f(x_1)$ и $f(x_2)$; если f *инъективно*, то сами x_1, x_2 коллинеарны и $p(x_1) = p(x_2)$. Таким образом, φ инъективно. Второе утверждение следует из того, что $\varphi(\mathbb{P}(E))$ есть проективное подпространство в $\mathbb{P}(F)$, индуцированное $\operatorname{Im} f$.

Гомографии

▶ Определение 3.2. Отображение $\varphi\colon \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(F)$ называется *гомографией* (английский термин projectivity), если существует *линейное биективное* отображение $f\colon E \to F$, такое, что $\varphi \circ p = q \circ f$, где $p\colon E_* \to \mathbb{P}(E)$ и $q\colon F_* \to \mathbb{P}(F)$ — канонические проекции.

3) *Гомологии.* Пусть H — гиперплоскость в E, a — элемент из $E \setminus H$ и k — ненулевой скаляр. Отображение $f\colon E \to E$, $f(x + \lambda a) = x + \lambda k a$ для любых $x \in H$ и $\lambda \in K$ линейно и биективно. Гомография φ пространства $\mathbb{P}(E)$, индуцированная f, имеет в качестве неподвижных точек точку $A = p(a)$ и все точки проективной гиперплоскости $\mathbb{P}(H)$. С другой стороны для каждого вектора $y \in E$ его образ $f(y)$ принадлежит векторной плоскости, порожденной a и y. Отсюда следует, что для произвольной точки $M \in \mathbb{P}(E)$ три точки A, M и $M' = \varphi(M)$ принадлежат одной проективной прямой.

По определению, такая гомография φ будет называться *гомологией с центром A и гиперплоскостью* $\mathbb{P}(H)$. Она *инволютивна* при $k = 1$ (в этом случае она сводится к тождественному преобразованию) и при $k = -1$ (в этом случае f есть *симметрия* относительно гиперплоскости H с направляющей векторной прямой Ka). В последнем случае φ называют *гармонической гомологией*; эта терминология оправдана предложением 6.7 ниже.

▶ Заметим, что задание множества неподвижных точек[1]) и образа P' одной из не принадлежащих ему точек P позволяет построить образ M' произвольной

[1]) Если гомология не тождественная, то, как уже отмечено выше, ее неподвижными точками будут центр и точки плоскости гомологии. — *Прим. перев.*

точки M по следующим правилам, вытекающим из свойств φ (см. рис. 1):

i) точки A, M, M' лежат на одной прямой;

ii) прямые (MP) и $(M'P')$ пересекают $\mathbb{P}(H)$ в одной и той же точке I.

4) *Элации.* Пусть h — ненулевая линейная форма на E и $a \in E_*$ — такой вектор, что $h(a) = 0$. Тогда отображение $f\colon E \to E$, $x \mapsto x + h(x)a$ есть автоморфизм E, называемый *трансвекцией* (см. упр. II. 14),

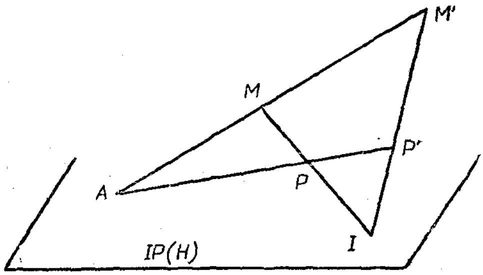


Рис. 1

обратным к которому является отображение $y \mapsto y - h(y)a$. Индуцированный таким f морфизм φ пространства $\mathbb{P}(E)$ имеет в качестве неподвижных точек все точки проективной гиперплоскости $\mathbb{P}(\operatorname{Ker} f)$; более того, для любой точки $M \in \mathbb{P}(E)$ точки $A = p(a)$, M и $M' = \varphi(M)$ лежат на одной прямой (так как $f(x)$ принадлежит векторной плоскости, порожденной a и x).

Полученная таким образом гомография φ называется *элацией.*

И здесь, полагая $H = \operatorname{Ker} h$, мы увидим, что задание A, $\mathbb{P}(H)$ и образа $\mathbb{P}'$ какой-либо не неподвижной точки P позволяет построить образ M' любой точки, по тем же правилам i), ii). Заметим, однако, что в этом случае $A \in \mathbb{P}(H)$.

Реализация гомологий и элаций как композиций перспектив

Гомологии и элации естественно появляются при изучении *перспектив* (см. § 1 и определение 4.2): обозначив через $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}'$ две различные гиперплоскости в

$\mathbb{P}(E)$, выберем в $\mathbb{P}(E)$ также две различные точки S, S', не принадлежащие ни $\mathscr{L}$, ни $\mathscr{L}'$, и обозначим через p (соотв. p') *перспективу с центром* S (соотв. S') *гиперплоскости* $\mathscr{L}$ *на* $\mathscr{L}'$. Тогда $\varphi = p'^{-1} \circ p$ будет биекцией $\mathscr{L}$ на себя, имеющей в качестве неподвижных точек все точки пересечения $\mathscr{L} \cap \mathscr{L}'$ (образующие гиперплоскость в $\mathscr{L}$), а также точку A пересечения прямой (SS') с $\mathscr{L}$. Более того, φ сохраняет все проективные прямые в $\mathscr{L}$, проходящие через A. Построение образа M' любой точки M выполняется

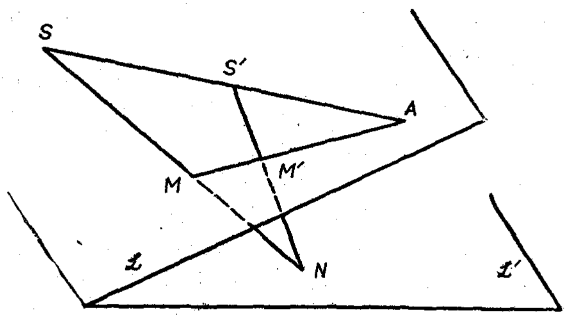


Рис. 2

по правилам i), ii), которые называются по этой причине *правилами перспективы*. Отсюда выводится, что $\varphi = p'^{-1} \circ p$ есть *элация или гомология гиперплоскости* $\mathscr{L}$, смотря то тому, принадлежит или нет точка A пересечению $\mathscr{L} \cap \mathscr{L}'$ (см. рис. 2). По поводу дальнейших подробностей см. упр. IV. 10.

Проективная группа

Гомографии $\mathbb{P}(E)$ на себя образуют группу, называемую *проективной группой* пространства E и обозначаемую $\mathrm{PGL}(E)$.

По предложению 3.1, при условии $\dim(E) \geqslant 2$ два элемента f, $g \in \mathrm{GL}(E)$ индуцируют одну и ту же гомографию тогда и только тогда, когда существует элемент $k \neq 0$ центра тела K, такой, что $g = kf$; это эквивалентно тому, что $gf^{-1} = k\,\mathrm{Id}_E$ принадлежит центру $\mathrm{GL}(E)$ (см. упр. II. 16). Сформулируем

Предложение 3.4. Проективная группа $\mathrm{PGL}(E)$ изоморфна факторгруппе группы $\mathrm{GL}(E)$ по ее центру.

4. ПРОЕКТИВНОЕ ПОПОЛНЕНИЕ АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА

Как мы видели в § III.6, всякое аффинное пространство $\mathscr{E}$ допускает каноническую аффинную биекцию на собственно аффинную гиперплоскость[1]) векторного пространства $\hat{\mathscr{E}}$, где $\hat{\mathscr{E}}$ называлось *векторным продолжением* $\mathscr{E}$. Теперь мы можем высказать

▶ Определение 4.1. *Проективное пополнение* аффинного пространства $\mathscr{E}$ есть проективное пространство $\mathbb{P}(\hat{\mathscr{E}})$ его векторного продолжения.

Забыв пока это абстрактное определение, предположим, что рассматриваемое аффинное пространство $\mathscr{E}$ есть собственно аффинная гиперплоскость векторного пространства F, и пусть E — векторная гиперплоскость F, направляющая $\mathscr{E}$.

Ограничение на $\mathscr{E}$ канонической проекции $p\colon F_* \to \mathbb{P}(F)$, обозначаемое $p_{\mathscr{E}}$, есть инъекция $\mathscr{E}$ в $\mathbb{P}(F)$, образ которой дополнителен к $\mathbb{P}(E)$ (каждой точке $M \in \mathscr{E}$ отвечает векторная прямая (OM); обратно, векторная прямая в F пересекает $\mathscr{E}$ тогда и только тогда, когда она не содержится в E). Эта инъекция $p_{\mathscr{E}}$ позволяет, таким образом, отождествить $\mathscr{E}$ с $\mathbb{P}(F)\setminus\mathbb{P}(E)$, и удобно называть $\mathbb{P}(F)$ «проективным пополнением» $\mathscr{E}$ и в том случае, когда F не обязательно «каноническое» векторное продолжение $\mathscr{E}$. Эта «наивная» точка зрения оправдывается следующим предложением, которое выводится из предложения III.7.2 и устанавливает изоморфизм между $\mathbb{P}(F)$ и $\mathbb{P}(\hat{\mathscr{E}})$.

▶ Предложение 4.1. Пусть F, F' — два векторных пространства над одним и тем же телом K и $\mathscr{H}$ (соотв. $\mathscr{H}'$) есть собственно аффинная гиперплоскость в F (соотв. F').

---

[1]) Для краткости аффинную гиперплоскость векторного пространства мы называем собственно аффинной, если она не проходит через начало.

Каждая аффинная биекция $\mathscr{H}$ на $\mathscr{H}'$ имеет продолжение до изоморфизма F на F', индуцирующего гомографию $\mathbb{P}(F)$ на $\mathbb{P}(F')$[1].

Мы можем, таким образом, полностью определить проективное пополнение аффинного пространства, не прибегая к конструкции § III.6: *достаточно построить аффинную биекцию $\mathscr{E}$ на собственно аффинную гиперплоскость векторного пространства F, и тогда $\mathbb{P}(F)$ будет искомым пополнением* (определенным с точностью до изоморфизма).

При любом $\mathscr{E}$ можно положить $F = E \times K$, где E — векторное пространство, ассоциированное с $\mathscr{E}$. Мы получим аффинную биекцию f пространства $\mathscr{E}$ на аффинную гиперплоскость $E \times \{1\}$ в F, если фиксируем некоторую точку $A \in \mathscr{E}$ и положим

$$(\forall M \in \mathscr{E}) \quad f(M) = (\overrightarrow{AM},\ 1).$$

Если $\mathscr{E}$ — аффинная гиперплоскость аффинного пространства $\mathscr{F}$, то достаточно выбрать некоторую точку O в $\mathscr{F} \setminus \mathscr{E}$ и снабдить $\mathscr{F}$ структурой векторного пространства с началом O. Тогда мы вернемся к случаю собственно аффинной гиперплоскости векторного пространства $\mathscr{F}_O$; проективное пополнение $\mathscr{E}$ изоморфно $\mathbb{P}(\mathscr{F}_O)$ и отождествляется с $\mathscr{E} \cup \mathbb{P}(E)$, где E — направляющее векторное пространство $\mathscr{E}$. Мы вновь получим при этом конструкцию конца § 1 с $\mathscr{E}_\infty = \mathbb{P}(E)$ (множеством направлений прямых в $\mathscr{E}$).

Для конкретизации понятия проективного пополнения используем следущие

▶ *Обозначения.* Если $\mathscr{E}$ — аффинное пространство, ассоциированное с векторным пространством E, то его проективное пополнение (определенное с точностью до изоморфизма) будет обозначаться $\mathscr{E} \cup \mathbb{P}(E)$ или просто $\tilde{\mathscr{E}}$; множество $\mathbb{P}(E)$ будет называться *бесконечно удаленной гиперплоскостью* в $\mathscr{E}$ и обозначаться $\mathscr{E}_\infty$. Элементы $\mathbb{P}(E)$ будут называться *бесконечно удаленными точками* $\mathscr{E}$.

[1]) Отметим, что всякая трансляция (соотв. гомотетия) $\mathscr{H}$ продолжается до элации (соотв. гомологии) $\mathbb{P}(F)$ (см. упр. IV.7).

Заметим, что если $\mathscr{E}$ имеет конечную размерность n, то размерность $\widehat{\mathscr{E}}$ равна $n+1$, так что *проективное пополнение пространства* $\mathscr{E}$ *имеет ту же размерность, что и* $\mathscr{E}$ (этим оправданы соглашения, принятые в § 1).

В частности, если $\mathscr{E}$ — аффинная прямая, размерность ее направляющего пространства E равна 1, а $\mathbb{P}(E)$ сводится к одной точке, называемой *бесконечно удаленной точкой* прямой $\mathscr{E}$ и обозначаемой просто ∞. *Проективное пополнение аффинной прямой* $\mathscr{E}$ *обозначается просто* $\mathscr{E} \cup \{\infty\}$.

Как следствие предложения 4.1 получаем

Предложение 4.2. Если $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}'$ — два аффинных пространства над одним и тем же телом K, то всякая *аффинная биекция* f: $\mathscr{E} \to \mathscr{E}'$ *продолжается до гомографии* $\widetilde{\mathscr{E}} = \mathscr{E} \cup \mathbb{P}(E)$ на $\widetilde{\mathscr{E}}' = \mathscr{E}' \cup \mathbb{P}(E')$, причем продолжение f на $\mathbb{P}(E)$ есть гомография $\mathbb{P}(E)$ на $\mathbb{P}(E')$, индуцированная линейной частью f.

Теорема о проектированиях

Теперь мы в состоянии точнее установить характер центрального проектирования, определенного в § 1.

Определение 4.2. Пусть Π — проективное пространство, S — его точка, $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}'$ — две проективные гиперплоскости в Π, не проходящие через S. Биекция $\mathscr{L}$ на $\mathscr{L}'$, которая каждой точке $M \in \mathscr{L}$ ставит в соответствие точку пересечения прямой (SM) с $\mathscr{L}'$, называется *перспективой* (или перспективным отображением) $\mathscr{L}$ на $\mathscr{L}'$ из центра S.

Эта биекция есть не что иное, как ограничение на $\mathscr{L}$ проектирования из центра S пространства Π на $\mathscr{L}'$ (см. § 3, пример 1). Так как это проектирование φ является проективным морфизмом, его ограничение на $\mathscr{L}$ также есть проективный морфизм (см. предложение 3.2) и, в силу биективности, гомография $\mathscr{L}$ на $\mathscr{L}'$. Имеет место следующая

Теорема 4.3. *Если* $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}'$ — *две проективные гиперплоскости проективного пространства* Π, *то любая перспектива* $\mathscr{L}$ *на* $\mathscr{L}'$ *есть гомография.*

Замечание. Если Π конечномерно, то можно доказать, что каждая гомография φ гиперплоскости $\mathscr{L}$ на гиперплоскость $\mathscr{L}'$ пространства Π есть произведение конечного числа перспектив $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$:

$$\varphi: \mathscr{L} \xrightarrow{\varphi_1} \mathscr{L}_1 \xrightarrow{\varphi_2} \mathscr{L}_2 \rightarrow \ldots \xrightarrow{\varphi_n} \mathscr{L}'$$

(см. [AR], § 10 гл. II и упр. IV. 16).

Вернемся теперь к построению § 1: если $\mathscr{H}$, $\mathscr{H}'$ — две аффинные гиперплоскости аффинного пространства $\mathscr{E}$, то множества $\mathscr{L} = \mathscr{H} \cup \mathscr{H}_\infty$, $\mathscr{L}' = \mathscr{H}' \cup \mathscr{H}'_\infty$, введенные в § 1, отождествляются с проективными гиперплоскостями пополнения $\tilde{\mathscr{E}} = \mathscr{E} \cup \mathscr{E}_\infty$ пространства $\mathscr{E}$, а биекция $\mathscr{L}$ на $\mathscr{L}'$, продолжающая проектирование с центром O, есть не что иное, как *перспективное отображение* $\mathscr{L}$ на $\mathscr{L}'$ с центром O: *естественное продолжение центрального проектирования одной гиперплоскости на другую есть, стало быть, гомография.*

От проективного назад к аффинному

Будем исходить теперь из проективного пространства $\mathbb{P}(E)$, и пусть H — векторная гиперплоскость в E. Если $\mathscr{H}$ — собственно аффинная гиперплоскость в E, параллельная H, то каноническая проекция позволяет отождествить $\mathscr{H}$ с $\mathbb{P}(E) \setminus \mathbb{P}(H)$. Таким образом, $\mathbb{P}(E) \setminus \mathbb{P}(H)$ допускает аффинную структуру, проективным пополнением которой является $\mathbb{P}(E)$, а множеством бесконечно удаленных точек $\mathbb{P}(H)$.

Эта аффинная структура априори зависит от выбора аффинной гиперплоскости $\mathscr{H}$, параллельной H. Но если мы заменим $\mathscr{H}$ параллельной гиперплоскостью $\mathscr{H}'$ и обозначим через j, j' ограничения на $\mathscr{H}$, $\mathscr{H}'$ канонической проекции p: $E_* \rightarrow \mathbb{P}(E)$, то найдется такой элемент $k \in K^*$, что $j(x) = j'(kx)$ или $j = j' \circ h_k$, где h_k — ограничение на $\mathscr{H}$ векторной гомотетии с коэффициентом k (см. рис. 3).

Если K коммутативно, то h_k аффинно, так что аффинные структуры, определяемые на $\mathbb{P}(E) \setminus \mathbb{P}(H)$ отождествлением с $\mathscr{H}$ или $\mathscr{H}'$, совпадают.

Если K *не коммутативно*, то h_k — полуаффинное отображение, ассоциированное с внутренним автоморфизмом $\lambda \mapsto k\lambda k^{-1}$ (см. § II. 4); таким образом, если мы обозначим через $\mathscr{E}$ (соотв. $\mathscr{E}'$) аффинное пространство, полученное отождествлением $\mathrm{P}(E)\setminus\mathrm{P}(H)$ с $\mathscr{H}$ (соотв $\mathscr{H}'$), то тождественное отображение $\mathscr{E}$ на $\mathscr{E}'$ будет лишь *полуаффинным*. Другими словами, различные аффинные структуры, получаемые изменением $\mathscr{H}$, будут лишь «полуизоморфными». Но это не является практической помехой; мы просто сформулируем следующее утверждение:

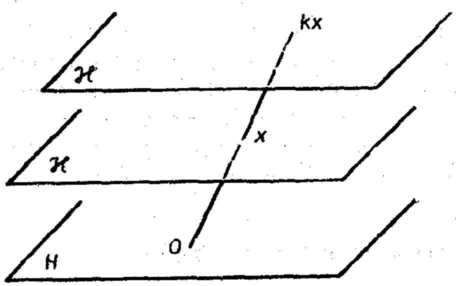


Рис. 3

▶ Теорема 4.4. **Если $\mathrm{P}(E)$ — проективное пространство и $\mathrm{P}(H)$ — проективная гиперплоскость в нем, то множество $\mathrm{P}(E)\setminus\mathrm{P}(H)$ допускает *по меньшей мере одну структуру аффинного пространства*, ассоциированного с векторным пространством H, проективное пополнение которого есть $\mathrm{P}(E)$.**

▶ Будем говорить, что такая аффинная структура получена *исключением* проективной гиперплоскости $\mathrm{P}(H)$, или, более образно, *отправкой* $\mathrm{P}(H)$ *в бесконечность* ([BE], ч. 1).

Этот результат имеет большое практическое значение, так как позволяет упрощать некоторые задачи проективной или аффинной геометрии (см. § 7, 10, 11, 12).

Отметим, что если Δ — проективная прямая в $\mathrm{P}(E)$, то ее пересечение с $\mathrm{P}(E)\setminus\mathrm{P}(H)$ есть аффинная прямая, которую мы назовем *ограничением* (или *сужением*) Δ. *Для того чтобы ограничения двух про-*

ективных прямых Δ_1, Δ_2 были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы Δ_1, Δ_2 пересекались в точке на $\mathbb{P}(H)$.

Продолжение барицентрических координат

Пусть $\mathscr{E}$ — аффинное пространство, отождествленное с собственно аффинной гиперплоскостью своего векторного продолжения $F=\hat{\mathscr{E}}$. Мы видели (§ III. 7), что *аффинные реперы* $\mathscr{E}$ отождествляются с *базисами* F, принадлежащими $\mathscr{E}$. Предположим, что $\mathscr{E}$ имеет некоторую конечную размерность n и что $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ — один из таких базисов, а p — каноническое проектирование F_* на $\mathbb{P}(F)$.

Для любого элемента $x\in\mathscr{E}$ однородные барицентрические координаты x в аффинном репере (e_i) отождествляются с однородными координатами $p(x)$ в базисе (e_i) и удовлетворяют условию $\sum\limits_0^n x_i \neq 0$.

С другой стороны, векторное подпространство E пространства F, направляющее для $\mathscr{E}$, допускает в базисе (e_i) уравнение $\sum\limits_0^n x_i = 0$ (см. предложение III. 7.1). Таким образом, $\mathbb{P}(E)$ есть множество точек $\mathbb{P}(F)$, однородные координаты которых в базисе (e_i) удовлетворяют уравнению $\sum\limits_0^n x_i = 0$.

▶ Если $(e_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ — аффинный репер аффинного пространства $\mathscr{E}$, то можно отождествить семейство (e_i) с базисом его векторного продолжения $\hat{\mathscr{E}}$, и однородные координаты в $\tilde{\mathscr{E}}=\mathbb{P}(\hat{\mathscr{E}})$ в базисе (e_i) составят продолжение однородных барицентрических координат в $\mathscr{E}$ относительно аффинного репера. Точка с однородными координатами x_i принадлежит $\mathscr{E}$ или $\mathscr{E}_\infty=\mathbb{P}(E)$, смотря по тому, будет ли $\sum x_i\neq 0$ или $\sum x_i = 0$.

Это замечание позволит нам свободно пользоваться барицентрическими координатами, избегая некоторых затруднений (см. § 6). Связь между этим типом однородных координат и «проективными реперами» изучается в упр. IV.4.

С другой стороны, проективное обобщение «основной теоремы аффинной геометрии» рассматривается в § 12.

5. ПРИНЦИП ДВОЙСТВЕННОСТИ

Напомним сначала, что каждое правое векторное пространство над телом K можно рассматривать как *левое* векторное пространство над противоположным телом (см. § II.2). Теория правых проективных пространств сводится, таким образом, к теории левых проективных пространств; уточним только, что если E — *правое* векторное пространство над телом K, то соответствующее ему проективное пространство определяется факторизацией E_* по отношению эквивалентности $\mathscr{R}$, определенному соотношением

$$y\mathscr{R}x \Longleftrightarrow (\exists\lambda\in K^*) \quad y=x\lambda. \tag{1}$$

▶ *Итак, если некоторая теорема верна для всех левых проективных пространств, то она остается верной mutatis mutandis*[1]) *и для всех правых проективных пространств.*

Далее, если E — левое векторное пространство конечной размерности n над телом K, то его сопряженное E^* есть правое векторное пространство той же размерности n над K (§ II.6) и отношение ортогональности устанавливает биекцию $X\longmapsto X^0$ множества векторных подпространств в E на множество векторных подпространств в E^*, удовлетворяющую (теорема II.7.2) условиям $\dim(X)+\dim(X^0)=n$ и $X\subset Y\Longleftrightarrow X^0\supset Y^0$. В частности, ортогональной к прямой (соотв. гиперплоскости)[2]) в E будет гиперплоскость (соотв. прямая) в E^*. При переходе к проективным пространствам немедленно получается

Теорема 5.1. Пусть E — конечномерное векторное пространство и E^* — его сопряженное. Отношение

---

[1]) «С необходимыми изменениями» (лат.). — *Прим. перев.*

[2]) Здесь и далее можно читать «аннулятором прямой (гиперплоскости)». — *Прим. перев.*

ортогональности между E и E^* индуцирует биекцию f пространства $\mathbb{P}(E)$ на множество $\mathscr{H}^*$ проективных гиперплоскостей пространства $\mathbb{P}(E^*)$ и биекцию g пространства $\mathbb{P}(E^*)$ на множество $\mathscr{H}$ проективных гиперплоскостей $\mathbb{P}(E)$, такие, что

$$(\forall x \in \mathbb{P}(E),\ \forall H \in \mathscr{H}) \quad x \in H \Leftrightarrow g^{-1}(H) \in f(x).$$

В самом деле, точкам из $\mathbb{P}(E)$ (соотв. $\mathbb{P}(E^*)$) отвечают векторные прямые из E (соотв. E^*), а векторным гиперплоскостям из $\mathbb{P}(E)$ (соотв. $\mathbb{P}(E^*)$) отвечают векторные гиперплоскости из E (соотв. E^*).

Отсюда немедленно выводится

▶ Принцип двойственности. Если теорема верна для всех конечномерных проективных пространств, она останется верной и при перестановке слов «точки» и «проективные гиперплоскости» и при перемене условий «точка M принадлежит гиперплоскости L» и «гиперплоскость M содержит точку L».

Этот принцип будет широко использован в случае проективной плоскости (когда проективные гиперплоскости являются проективными прямыми). При этой двойственности «точки, лежащие на одной прямой», отвечают «прямым, проходящим через одну точку».

Случай конечного поля

Установим сначала следующее

Предложение 5.2. Если K — конечное поле порядка k, то всякое n-мерное проективное пространство над K содержит в точности $1 + k + \ldots + k^n$ точек.

Доказательство. Результат верен для размерности $n = 0$. Предположим, что он верен для размерностей $\leqslant n - 1$. Тогда всякое n-мерное проективное пространство над K является дизъюнктным объединением n-мерного аффинного пространства $\mathscr{E}$ над K (мощности k^n) и $(n-1)$-мерного проективного пространства $\mathscr{E}_\infty$ над K мощности $1 + k + \ldots + k^{n-1}$; итак, результат верен и для размерности n.

В частности, проективные прямые над K содержат $k + 1$ точек.

В силу двойственности, всякое проективное пространство размерности n над K содержит столько же проективных гиперплоскостей, сколько и точек. В частности, имеет место

Предложение 5.3. Проективная плоскость над конечным полем порядка k содержит в точности $k^2 + k + 1$ точек и $k^2 + k + 1$ проективных прямых.

6. ПРОЕКТИВНЫЕ ПРЯМЫЕ. ГАРМОНИЧЕСКОЕ ОТНОШЕНИЕ

Стандартная проективная прямая

Напомним, что стандартная проективная прямая $\mathbb{P}^1(K) = \mathbb{P}(K^2)$ есть фактормножество $K^2 \setminus \{(0, 0)\}$ по отношению эквивалентности $\mathscr{R}$:

$$(x', y')\,\mathscr{R}\,(x, y) \Leftrightarrow (\exists k \in K^*) \quad x' = kx, \ y' = ky.$$

Ради краткости класс эквивалентности пары (x, y) будет обозначаться $\langle x, y\rangle$.

В соответствии с общей теорией (§ 4) $\mathbb{P}^1(K)$ изоморфно проективному пополнению $\tilde{K} = K \cup \{\infty\}$ аффинной прямой K. *Точнее, мы отождествляем каждый элемент $\lambda \in K$ с элементом $\langle \lambda, 1\rangle$ из $\mathbb{P}^1(K)$* (что сводится к отождествлению K с аффинной прямой $y = 1$ в K^2). Отсюда следующее правило (если не оговорено противное):

Точка $\langle \lambda, \mu\rangle$ из $\mathbb{P}^1(K)$ отождествляется с элементом $\mu^{-1}\lambda$ в K при $\mu \neq 0$ и обозначается ∞, если $\mu = 0$.

Параметризация проективной прямой

Легко получается следующее

Предложение 6.1. Если $A = p(a)$ и $B = p(b)$ — две различные точки проективного K-пространства $\mathbb{P}(E)$, то в $\mathbb{P}(E)$ существует единственная проективная прямая, содержащая A и B. Это есть множество точек вида $p(\lambda a + \mu b)$, где (λ, μ) пробегает $K^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

В самом деле, поскольку A и B различны, векторы $a, b \in E$ независимы и искомая проективная прямая индуцируется векторной плоскостью, порожденной a и b. Эта проективная прямая будет просто называться *прямой* (AB).

Действительно, отображение f: $K^2 \to E$, $(\lambda, \mu) \mapsto \lambda a + \mu b$ является изоморфизмом K^2 на плоскость $P = \mathrm{Vect}(a, b)$ в E, и этот изоморфизм индуцирует гомографию $\mathbb{P}(K^2)$ на прямую (AB). Сформулируем следующее

Предложение 6.2. Если Δ — проективная прямая, соединяющая две точки $A = p(a)$ и $B = p(b)$ проективного K-пространства $\mathbb{P}(E)$, то параметризация

$$\mathbb{P}^1(K) \to \Delta, \quad \langle \lambda, \mu \rangle \mapsto p(\lambda a + \mu b)$$

является *гомографией*.

Замечание 1. Если $\mathbb{P}(E)$ — *проективное пополнение* аффинного пространства $\mathscr{E}$ и если $\mathscr{E}$ отождествить с собственно аффинной гиперплоскостью в E, то можно положить $a = A$, $b = B$. Тогда точка $p(\lambda a + \mu b)$ будет *барицентром* (A, λ) и (B, μ); при $\lambda + \mu = 0$ он находится в бесконечности. Это замечание позволит нам переходить от аффинной точки зрения к проективной и обратно.

Гармонические четверки

Определение 6.1. Пусть A, B — две различные точки проективного K-пространства $\mathbb{P}(E)$, и пусть $a \in p^{-1}(A)$, $b \in p^{-1}(B)$. *Гармонически сопряженной с точкой* $C = p(\lambda a + \mu b)$ прямой (AB) *относительно точек* A *и* B называется точка $D = p(\lambda a - \mu b)$ той же прямой.

Легко проверить, что точка D не зависит от выбора a в $p^{-1}(A)$ и b в $p^{-1}(B)$; она единственным образом определена заданием точек A, B, C.

Если D выбрана указанным образом, то говорят, что (A, B, C, D) — *гармоническая четверка*.

Если $C = A$, то $\mu = 0$ и $D = C = A$. Если $C = B$, то $\lambda = 0$ и $D = C = B$.

Если A, B, C различны, то можно выбрать a и b так, что $C = p(a + b)$; в этом случае $D = p(a - b)$ (достаточно заменить a на λa и b на μb). Теперь легко видеть, что C и D *совпадают только в том слу-*

чае, когда K — поле характеристики 2: в самом деле, существование скаляра K, такого, что $a-b=k(a+b)$, влечет $k=1=-1$ (так как пара (a, b) свободна).

Основной пример

Предложение 6.3. Пусть A, B — две точки аффинного пространства $\mathscr{E}$ над телом характеристики $\neq 2$, C — их середина и ∞ — бесконечно удаленная точка прямой (AB). Тогда (A, B, C, ∞) — гармоническая четверка в $\tilde{\mathscr{E}}$.

Доказательство. Отождествим $\mathscr{E}$ с собственно аффинной гиперплоскостью векторного пространства E, что позволит положить $\tilde{\mathscr{E}}=\mathbb{P}(E)$ и воспользоваться приведенным выше замечанием 1; тогда $C=(A+B)/2=p(A+B)$, в то время как $p(A-B)$ — бесконечно удаленная точка прямой (AB). Таким образом, (A, B, C, ∞) — гармоническая четверка в $\tilde{\mathscr{E}}$.

В частности, если α, β — различные элементы тела K характеристики $\neq 2$, то $(\alpha, \beta, (\alpha+\beta)/2, \infty)$ — гармоническая четверка в $\mathbb{P}^1(K)=K \cup \{\infty\}$.

Замечание 2. Если A, B — две различные точки аффинного пространства $\mathscr{E}$ и λ, μ — скаляры, такие, что $\lambda \neq \mu$ и $\lambda+\mu \neq 0$, то точки $C=\mathscr{B}((A, \lambda), (B, \mu))$ и $D=\mathscr{B}((A, \lambda), (B, -\mu))$ гармонически сопряжены относительно A и B в $\tilde{\mathscr{E}}$ и принадлежат $\mathscr{E}$. Мы говорим тогда, что точки (A, B, C, D) находятся в *гармоническом отношении* в $\mathscr{E}$.

Свойства гармонического отношения

Отношение «(A, B, C, D) — гармоническая четверка» очевидным образом симметрично, с одной стороны, по первой паре точек A, B и, с другой стороны, по второй паре C, D (достаточно поменять местами a и b и заменить b на $-b$ в определении 6.1). Кроме того, имеет место

Предложение 6.4. Если характеристика основного тела K отлична от 2 и гармоническая четверка (A, B, C, D) состоит из различных точек, то четверка (C, D, A, B) также гармоническая.

Доказательство. Так как точки A, B, C различны, можно положить $A = p(a)$, $B = p(b)$, $C = p(a+b)$, откуда $D = p(a-b)$. Положив $c = a + b$, $d = a - b$, получим $c + d = 2a$ и $c - d = 2b$, откуда, в силу $\operatorname{car}(K) \neq 2$, имеем $A = p(c+d)$, $B = p(c-d)$. Таким образом, (C, D, A, B) — гармоническая четверка.

Обобщение. Чтобы сохранить справедливость предложения 6.4 и в случае, когда точки *не являются различными*, можно условиться, что четверка с тремя совпадающими точками и одной отличной от них — всегда гармоническая.

Этот случай мало интересен, и практически мы ограничиваемся лишь четверками несовпадающих точек.

▶ Теорема 6.5. Пусть (A, B, C, D) — гармоническая четверка в проективном пространстве $\mathbb{P}(E)$ и φ: $\mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(F)$ — *полупроективный морфизм.* Если все точки $\varphi(A)$, $\varphi(B)$, $\varphi(C)$, $\varphi(D)$ определены, то либо они все совпадают, либо образуют *гармоническую четверку.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда A, B, C различны, что позволяет положить $A = p(a)$, $B = p(b)$, $C = p(a+b)$ и $D = p(a-b)$.

Обозначим через q каноническое проектирование F_* на $\mathbb{P}(F)$ и предположим, что φ индуцировано полулинейным отображением f: $E \to F$. Полагая $a' = f(a)$, $b' = f(b)$, получим $\varphi(A) = q(a')$, $\varphi(B) = q(b')$, $\varphi(C) = q(f(a+b)) = q(a'+b')$ и $\varphi(D) = q(f(a-b)) = q(a'-b')$.

Если a', b' зависимы, то точки $\varphi(A)$, $\varphi(B)$, $\varphi(C)$, $\varphi(D)$ совпадают; если пара (a', b') свободна, то они образуют гармоническую четверку.

В частности, *если φ — гомография $\mathbb{P}(E)$ на $\mathbb{P}(F)$, то образ любой гармонической четверки из $\mathbb{P}(E)$ есть гармоническая четверка в $\mathbb{P}(F)$.*

▶ Следствие. Пусть Δ — проективная прямая проективного K-пространства $\mathbb{P}(E)$ и φ: $\mathbb{P}^1(K) \to \Delta$ — гомографическая параметризация Δ (см. предложение 6.2); для того чтобы четверка точек Δ была гармонической, необходимо и достаточно, чтобы их параметры находились в гармоническом отношении в $\mathbb{P}^1(K)$.

Этот результат приводит нас к изучению гармонических четверок в $\mathbb{P}^1(K) = K \cup \{\infty\}$.

Условие гармоничности четырех элементов α, β, γ, $\delta \in \mathbb{P}^1(K)$

При $\mathbb{P}^1(K) = K \cup \{\infty\}$ случай, когда одна из точек α, β, γ, δ находится в бесконечности, решается в предложении 6.3 с учетом симметрий гармонического отношения. Например, $(\alpha, \infty, \gamma, \delta)$ — гармоническая четверка тогда и только тогда, когда $\gamma + \delta = 2\alpha$ (записанное в этой форме условие сохраняет силу и в случае характеристики 2). Поэтому можно считать α, β, γ, δ элементами K и с помощью гомографии свести дело к случаю $\alpha = 0$ и $\beta = \infty$, получив условие гармоничности в виде $\gamma + \delta = 0$.

▶ Предложение 6.6. Для того чтобы четверка $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ различных элементов K была *гармонической*, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение

$$(\gamma - \beta)^{-1}(\gamma - \alpha) = -(\delta - \beta)^{-1}(\delta - \alpha). \qquad (1)$$

Доказательство. По соглашению, принятому в начале параграфа, любой элемент $\lambda \in K$ отождествляется с элементом $\langle \lambda, 1 \rangle$ из $\mathbb{P}^1(K)$. Пусть φ при фиксированных скалярах α, β $(\alpha \neq \beta)$ есть гомография $\mathbb{P}^1(K)$, индуцированная линейным отображением $f\colon K^2 \to K^2$, $(x, y) \mapsto (x - y\alpha, x - y\beta)$. Имеем

$$\varphi(\alpha) = \langle f(\alpha, 1) \rangle = \langle 0, \alpha - \beta \rangle = 0,$$
$$\varphi(\beta) = \langle f(\beta, 1) \rangle = \langle \beta - \alpha, 0 \rangle = \infty,$$

и гармоничность $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ равносильна гармоничности $(0, \infty, \varphi(\gamma), \varphi(\delta))$, т. е. $\varphi(\gamma) + \varphi(\delta) = 0$. Итак, получаем

$$\varphi(\gamma) = \langle \gamma - \alpha, \gamma - \beta \rangle = (\gamma - \beta)^{-1}(\gamma - \alpha),$$
$$\varphi(\delta) = \langle \delta - \alpha, \delta - \beta \rangle = (\delta - \beta)^{-1}(\delta - \alpha),$$

откуда и следует (1).

Можно проверить, что это условие сохраняется при перестановке α и β или γ и δ или (α, β) и (γ, δ).

Далее заметим, что найденное условие не зависит от способа отождествления $\mathbb{P}^1(K)$ с $K \cup \{\infty\}$, так как его изменение приводит лишь к гомографии $\mathbb{P}^1(K)$.

В [AR], § 9 гл. II, с. 111 и далее, можно найти различные эквивалентные формы соотношения (1). В случае коммутативного K запись (1), очевидно, наиболее удобна (см. упр. IV. 18).

Если характеристика K равна 2, то (1) влечет $\alpha = \beta$ или $\gamma = \delta$; если же эта характеристика $\neq 2$, то соотношение (1) все еще можно считать верным и в случае $\gamma = (\alpha + \beta)/2$, $\delta = \infty$, если условиться, что $(\infty - \beta)^{-1}(\infty - \alpha) = 1$.

Интерпретация гармонических гомологий

Предложение 6.7. Пусть $\mathbb{P}(E)$ — проективное пространство, $\mathbb{P}(H)$ — проективная гиперплоскость в $\mathbb{P}(E)$ и $S = \mathbb{P}(D)$ — точка в $\mathbb{P}(E) \setminus \mathbb{P}(H)$. Гармоническая гомология с центром S и гиперплоскостью $\mathbb{P}(H)$ (см. пример 3 § 3) есть биекция φ пространства $\mathbb{P}(E)$, определенная следующими требованиями:

i) если $M = S$, то $\varphi(M) = M$;

ii) если $M \neq S$ и P обозначает точку пересечения $\mathbb{P}(H)$ с прямой (SM), то четверка $(R, P, M, \varphi(M))$ гармоническая (откуда $\varphi(M) = M$, если $M = P$).

Доказательство. Напомним (см. пример 3 § 3), что φ есть гомография $\mathbb{P}(E)$, индуцированная *симметрией* f пространства E в направлении D относительно гиперплоскости H. Для любых $s \in D_*$, $h \in H_*$ и $(x, y) \in K^2$ выполнено $f(xs + yh) = -xs + yh$; итак, образ при φ точки $M = p(xs + yh)$ есть точка $\varphi(M) = p(-xs + yh)$, гармонически сопряженная с M относительно пары $S = p(s)$ и $P = p(h)$. □

В частности, если A, B — две различные точки проективной прямой Δ, то можно получить инволютивную гомографию φ, положив по условию $(\forall M \in \Delta)$ $(A, B, M, \varphi(M))$ — гармоническая четверка (в нашем случае размерность $\mathbb{P}(E)$ равна 1).

Заметим в заключение, что любая биекция проективной прямой, переводящая гармонические четверки в гармонические, полупроективна, если характеристика $K \neq 2$ (см. упр. IV. 19).

7. ГАРМОНИЧЕСКИЕ ЧЕТВЕРКИ ПРЯМЫХ НА ПЛОСКОСТИ

▶ Теорема 7.1. Пусть Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 — четыре прямые проективной плоскости Π, имеющие общую точку S. Если существует проективная прямая Δ в Π, такая, что точки $A_i = \Delta_i \cap \Delta$ образуют *гармоническую четверку*, то то же самое выполняется и для любой другой проективной прямой Δ', не проходящей через S.

Доказательство. Это вытекает из того, что проекция из центра S определяет гомографию Δ на Δ', и из теоремы 6.5 (см. рис. 4).

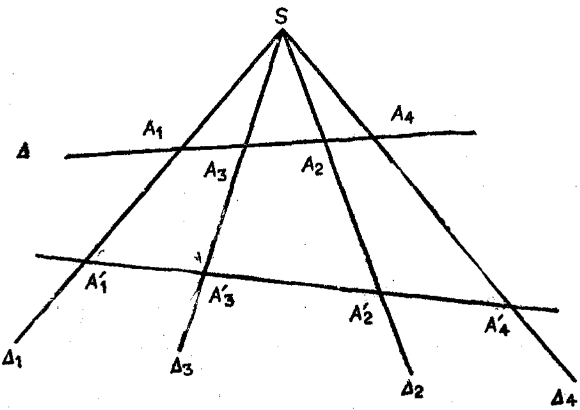


Рис. 4

▶ Определение 7.1. Если четыре прямые проективной плоскости удовлетворяют условиям теоремы 7.1, то будем говорить, что они образуют *гармоническую четверку* (прямых)[1].

Ради общности говорят, что четыре (пересекающиеся в одной точке или параллельные) прямые аффинной плоскости $\mathscr{P}$ образуют гармоническую четверку, если ее образуют их пополнения в $\tilde{\mathscr{P}}$.

[1]) Это частный случай понятия «гармонической четверки гиперплоскостей» в произвольном проективном пространстве (см. упр. IV, 24).

Пример. Пусть $\mathscr{P}$ — аффинная плоскость над телом K характеристики $\neq 2$ и (A, B, C, D) — параллелограмм в $\mathscr{P}$. Тогда диагонали Δ_1, Δ_2 и «медианы» Δ_3, Δ_4 этого параллелограмма образуют гармоническую четверку (см. рис. 5).

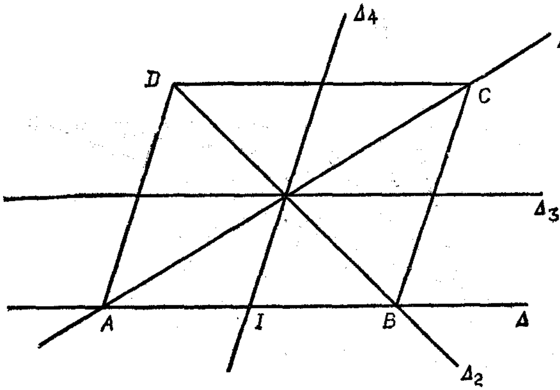


Рис. 5

В самом деле, эти четыре прямые пересекаются в одной точке, их проективные пополнения $\tilde{\Delta}_1$, $\tilde{\Delta}_2$, $\tilde{\Delta}_3$, $\tilde{\Delta}_4$ пересекают проективную прямую $\Delta = (AB)$ плоскости $\tilde{\mathscr{P}}$ в точках A, B, Δ_∞, I, где Δ_∞ — бесконечно удаленная точка прямой Δ, а I — середина отрезка $[A, B]$. Сформулированное утверждение вытекает теперь из предложения 6.3.

С помощью отправки в бесконечность отсюда можно вывести следующую более общую теорему.

▶ Теорема 7.2. Пусть Π — проективная плоскость над телом характеристики $\neq 2$ и $(A\ B\ C\ D)$ — *четырехугольник*, образованный четырьмя точками, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Обозначим[1] $E = (AB) \cap (CD)$, $F = (AD) \cap (BC)$, $G = (AC) \cap (BD)$. Тогда прямые (GAC), (GBD), (GE), (GF) образуют гармоническую четверку (см. рис. 6).

[1]) Точку пересечения прямых (AB) и (CD) мы обозначим $(AB) \cap (CD)$.

Доказательство. Если мы отправим в бесконечность прямую (EF), то получим аффинную плоскость, в которой $(A\ B\ C\ D)$ — параллелограмм с центром G, и тем самым вернемся к предыдущему примеру.

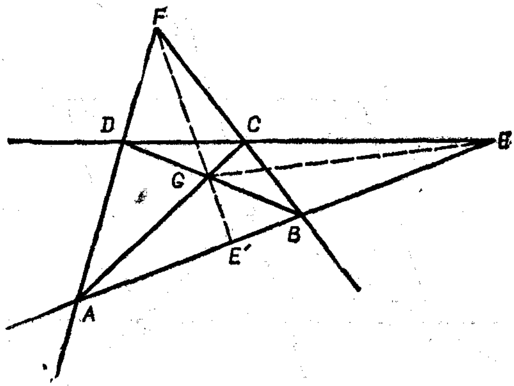


Рис. 6

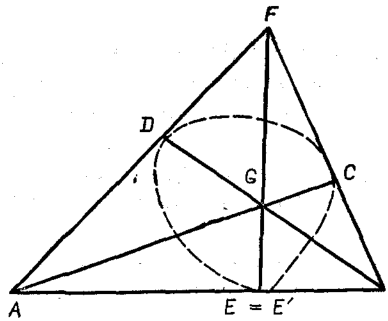


Рис. 7

Замечание. Если выполнить те же действия в случае тела характеристики 2, то $(A\ B\ C\ D)$ по-прежнему перейдет в параллелограмм, но его диагонали (AC) и (BD) будут параллельны. Это означает, что точки E, F, G лежат на одной прямой; на рис. 7 изображена так называемая *конфигурация Фано*. Она позволяет охарактеризовать проективные плоскости над телами характеристики 2. Сформулируем

▶ Предложение 7.3. Для того чтобы основное тело проективной плоскости П было *характеристики* 2, достаточно, чтобы существовала четверка точек A, B, C, D, никакие три из которых не лежат на одной прямой, такая, что точки $E=(AB)\cap(CD)$, $F=(AD)\cap\cap(BC)$, $G=(AC)\cap(BD)$ коллинеарны, и тогда то же самое имеет место для любого четырехугольника в П.

Действительно, в аффинной плоскости $\mathcal{P}$ из существования настоящего параллелограмма с параллельными диагоналями следует, что характеристика равна 2; тогда то же самое имеет место и для любого параллелограмма.

Применение к построению гармонически сопряженной точки

Если даны три точки A, B, E на прямой, то легко восстановить рис. 6, проведя две различные секущие (AF) и (BF), а затем секущую (ECD); точку G выберем как пересечение прямых (BD) и (AC); тогда гармонически сопряженной с E относительно точек A и B будет точка E' пересечения прямых (GF) и (AB). Из этого построения ясно, что *всякая биекция* П, *переводящая прямые в прямые, сохраняет гармоническое отношение.* Можно было бы воспользоваться этим для доказательства основной теоремы проективной геометрии (см. § 12 и упр. IV. 19).

Тот же рисунок позволяет построить четвертую прямую гармонической четверки по трем заданным; положив $\Delta_1=(FA)$, $\Delta_2=(FB)$, $\Delta_3=(FE)$, получим $\Delta_4=(FG)$.

Наконец, тот же рисунок позволяет доказать, что понятия «гармонических четверок» для точек и прямых *двойственны* (см. упр. IV. 25).

8. ГОМОГРАФИИ ПРОЕКТИВНОЙ ПРЯМОЙ. ДВОЙНОЕ ОТНОШЕНИЕ

► Теорема 8.1. Пусть Δ, Δ' — проективные прямые над одним и тем же телом K. Для любой тройки (A, B, C) различных точек Δ и любой тройки (A', B', C') различных точек Δ' *существует по меньшей мере одна гомография* φ прямой Δ на Δ', такая, что $\varphi(A)=A'$, $\varphi(B)=B'$, $\varphi(C)=C'$. Более того, эта гомография *единственна* тогда и только тогда, когда тело K *коммутативно* (т. е. является полем).

Доказательство. Положим $\Delta = \mathbb{P}(E)$, $\Delta' = \mathbb{P}(E')$, где E, E' — две *векторные плоскости* над K. По сделанному выше замечанию (стр. 142) в E существует базис (a, b), а в E' — базис (a', b'), такие, что

$$A = p(a), \qquad B = p(b), \qquad C = p(a+b),$$
$$A' = p'(a'), \qquad B' = p'(b'), \qquad C' = p'(a'+b'),$$

где p (соотв. p') обозначает каноническую проекцию E_* на Δ (соотв. E'_* на Δ').

Для того чтобы линейное отображение f: $E \to E'$ индуцировало гомографию, удовлетворяющую наложенным требованиям, необходимо и достаточно, чтобы существовали три элемента α, β, γ из K^*, такие, что

$$f(a) = \alpha a', \quad f(b) = \beta b', \quad f(a+b) = \gamma c', \tag{1}$$

откуда

$$\alpha a' + \beta b' = f(a+b) = \gamma(a' + b'),$$

и поскольку пара (a', b') свободная, $\alpha = \beta = \gamma$.

Изоморфизм f_1: $E \to E'$, определяемый условиями $f_1(a) = a'$ и $f_1(b) = b'$, удовлетворяет всем нужным требованиям и, значит, φ *существует.*

Если K *коммутативно,* то всякое линейное отображение, удовлетворяющее (1) с $\alpha = \beta = \gamma$, имеет вид $f = \alpha f_1$, и f и f_1 индуцируют одну и ту же *единственную* гомографию φ.

Если K *не коммутативно,* то существуют два элемента α, $\lambda \in K^*$, такие, что $\alpha\lambda \neq \lambda\alpha$. Тогда линейное отображение f: $E \to E'$, задаваемое с помощью $f(a) = \alpha a'$, $f(b) = \alpha b'$, удовлетворяет равенствам $f(a + \lambda b) = f(a) + \lambda f(b) = \alpha a' + \lambda\alpha b'$, в то время как для f_1 имеем $f_1(a + \lambda b) = a' + \lambda b'$. Поскольку $\lambda\alpha \neq \alpha\lambda$, вектор $\alpha a' + \lambda\alpha b'$ не коллинеарен вектору $a' + \lambda b'$. Отсюда следует, что гомографии φ, φ_1, индуцированные отображениями f и f_1, различны, хотя обе они удовлетворяют всем условиям. Итак, в этом случае φ не единственна. □

Следствие. Если A, B, C — три *различные* точки проективной прямой Δ над *полем* K, то существует *единственная гомография* φ прямой Δ на $\mathbb{P}^1(K) = K \cup \{\infty\}$, такая, что $\varphi(A) = \infty$, $\varphi(B) = 0$, $\varphi(C) = 1$.

▶ Определение 8.1. В принятых обозначениях если D — произвольная точка Δ, то *двойным отношением*, или *ангармоническим отношением*, точек A, B, C, D называется элемент $\varphi(D) \in \mathbb{P}^1(K)$, обозначаемый $[A, B, C, D]$ (по-английски: cross ratio).

В частности, имеем $[A, B, C, A] = \infty$, $[A, B, C, B] = 0$, $[A, B, C, C] = 1$ и $[A, B, C, D] \neq \infty$, если $D \neq A$.

Следует принимать во внимание, что двойное отношение определено здесь только для случая, когда K — *поле* (по поводу некоммутативного случая см. упр. IV. 22). Немедленно получаем

Предложение 8.2. *Двойное отношение четверки коллинеарных точек есть инвариант любой гомографии.*

Выражение двойного отношения в $\mathbb{P}^1(K)$

Рассмотрим прежде всего четверку элементов α, β, γ, $\delta \in K$, отождествив их с элементами $\langle\alpha, 1\rangle$, $\langle\beta, 1\rangle$, $\langle\gamma, 1\rangle$, $\langle\delta, 1\rangle$ из $\mathbb{P}^1(K)$ (см. начало § 6). Для того чтобы линейное отображение f: $K^2 \to K^2$ индуцировало гомографию, для которой $\varphi(\alpha) = \infty$ и $\varphi(\beta) = 0$, необходимо и достаточно, чтобы оно имело вид

$$f: (x, y) \mapsto (\lambda(x - \beta y), \ \mu(x - \alpha y)),$$

и требование $\varphi(\gamma) = 1$ будет равносильно $\lambda(\gamma - \beta) = \mu(\gamma - \alpha)$. Таким образом, гомография, удовлетворяющая условиям $\varphi(\alpha) = \infty$, $\varphi(\beta) = 0$, $\varphi(\gamma) = 1$, индуцируется отображением

$$f: K^2 \to K^2, \quad (x, y) \mapsto ((\gamma - \alpha)(x - \beta y), \ (\gamma - \beta)(x - \alpha y)),$$

и мы находим, что

$$[\alpha, \beta, \gamma, \delta] = \frac{(\gamma - \alpha)(\delta - \beta)}{(\gamma - \beta)(\delta - \alpha)} = \frac{\gamma - \alpha}{\gamma - \beta} : \frac{\delta - \alpha}{\delta - \beta}. \tag{2}$$

Случай, когда одна из точек бесконечно удаленная, трактуется просто; например, $[\alpha, \beta, \gamma, \infty] = (\gamma -$

$-\alpha)/(\gamma-\beta)$. Заметим, что $[\alpha, \beta, \gamma, \delta]$ изменяется на противоположное при перестановке α и β или γ и δ и сохраняется, если поменять (α, β) с (γ, δ).

Случай аффинной прямой

Пусть $\mathscr{D}$ — аффинная прямая над полем K; аффинная параметризация $K \to \mathscr{D}$, $t \mapsto (1-t)A + tB$, продолжается в гомографию, $\tilde{K} \to \tilde{\mathscr{D}}$, если положить $\varphi(\infty) = \mathscr{D}_\infty$, где $\mathscr{D}_\infty$ — бесконечно удаленная точка прямой $\mathscr{D}$. Таким образом, если $C = (1-u)A + uB$ и $D = (1-v)A + vB$ — две точки $\mathscr{D}$, то $[A, B, C, D] = [0, 1, u, v] = \frac{u}{u-1} : \frac{v}{v-1}$, и, допуская вольность в обозначениях [1]), получаем

$$[A, B, C, D] = \frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} : \frac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{DB}}$$

и, в частности, $[A, B, C, \mathscr{D}_\infty] = \frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}}$.

Интерпретация гармонических четверок

Предложение 8.3. Для того чтобы четыре точки A, B, C, D проективной прямой над полем K с различными A, B, C образовали *гармоническую четверку*, необходимо и достаточно, чтобы $[A, B, C, D] = -1$.

Доказательство. По определению двойного отношения достаточно проверить, что четверка $(\infty, 0, 1, \delta)$, где $\delta \in K$, гармоническая тогда и только тогда, когда $\delta = -1$.

Этот результат сохраняет силу и в случае, когда характеристика K равна 2.

Двойное отношение четырех прямых, проходящих через одну точку (коммутативный случай)

Из предложений 4.3 и 8.2 немедленно выводится

[1]) Напомним, что деление векторов лишено смысла, если они не коллинеарны.

Предложение 8.4. Если Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 — четыре прямые проективной плоскости над полем, проходящие через одну точку, то двойное отношение четверки точек их пересечения с любой прямой Δ, не проходящей через их общую точку, не зависит от выбора прямой Δ.

9. ПРОЕКТИВНАЯ ПЛОСКОСТЬ. ТЕОРЕМЫ ЧЕВЫ И МЕНЕЛАЯ

Пусть $\mathscr{P}$ — аффинная плоскость над произвольным телом K, снабженная аффинным репером (A, B, C), и $\tilde{\mathscr{P}} = \mathscr{P} \cup \mathscr{P}_\infty = \mathbb{P}(E)$, где $\dim E = 3$, — ее проективное пополнение. В § 4 мы видели, что в E существует базис (e_1, e_2, e_3), такой, что однородные координаты в $\tilde{\mathscr{P}}$ в этом базисе являются продолжениями барицентрических однородных координат плоскости $\mathscr{P}$ в репере (A, B, C). В частности, бесконечно удаленная прямая $\mathscr{P}_\infty$ плоскости $\mathscr{P}$ в этом базисе есть прямая $x + y + z = 0$ в $\tilde{\mathscr{P}}$.

Обратно, если $\mathbb{P}(E)$ — проективная плоскость и (e_1, e_2, e_3) — базис E, то мы сводим дело к предыдущему случаю, отправляя в бесконечность проективную прямую Δ с уравнением $x + y + z = 0$ в этом базисе и выбирая в качестве аффинного репера в $\mathbb{P}(E) \setminus \Delta$ репер $(A = p(e_1),\ B = p(e_2),\ C = p(e_3))$.

Это замечание позволит нам одновременно рассматривать задачи аффинной геометрии в $\mathscr{P}$ и проективной геометрии в $\tilde{\mathscr{P}}$. Ради краткости точка с однородными координатами (x, y, z) в базисе (e_i) будет обозначаться $b(x, y, z)$.

Уравнения прямых

В указанных выше обозначениях проективные прямые в $\tilde{\mathscr{P}}$ индуцируются векторными плоскостями в E; следовательно, это подмножества $\tilde{\mathscr{P}}$, допускающие в базисе (e_i) уравнение вида $x\alpha + y\beta + z\gamma = 0$, где $(\alpha, \beta, \gamma) \in K^3 \setminus \{0, 0, 0\}$. Бесконечно удаленная прямая в $\mathscr{P}$ снова появляется при $\alpha = \beta = \gamma$.

Прямыми, проходящими через $A = p(e_1)$, являются те, которые допускают уравнение вида $y\beta + z\gamma =$

$=0$; точка пересечения такой прямой с прямой (BC), имеющей уравнение $x=0$, есть точка $b(0, \beta^{-1}, -\gamma^{-1})$. Аналогично характеризуются прямые, проходящие через $B=p(e_2)$ или $C=p(e_3)$.

Заметим далее, что всякая точка P *прямой* (BC), отличная от C, допускает однородные координаты вида $(0, 1, -\lambda)$ и что при $\lambda \neq 1$ скаляр λ определен в аффинной плоскости $\mathscr{P}$ условием $\overrightarrow{PB}=\lambda\overrightarrow{PC}$. Если же $\lambda=1$, то точка $b(0, 1, -1)$ есть бесконечно удаленная точка прямой (BC). Отсюда легко получается

▶ Теорема 9.1. Пусть $P=b(0, 1, -\lambda)$, $Q=b(-\mu, 0, 1)$, $R=b(1, -\nu, 0)$ — три точки $\tilde{\mathscr{P}}$, взятые соответственно на прямых (BC), (CA), (AB) и отличные от A, B, C.

a) Для того чтобы прямые (AP), (BQ) и (CR) имели в $\tilde{\mathscr{P}}$ общую точку, необходимо и достаточно, чтобы $\lambda\mu\nu=-1$.

b) Для того чтобы точки P, Q, R лежали на одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы $\lambda\mu\nu=1$.

Доказательство. a) Прямые (AP), (BQ), (CR) представимы уравнениями

$$z+y\lambda=0, \quad x+z\mu=0, \quad y+x\nu=0.$$

Очевидно, что они имеют общую точку тогда и только тогда, когда $\lambda\mu\nu=-1$.

b) Точки P, Q, R лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда существуют три не равных одновременно нулю скаляра α, β, γ, таких, что координаты каждой из точек P, Q, R удовлетворяют уравнению $x\alpha+y\beta+z\gamma=0$, откуда получаем условия

$$\beta-\lambda\gamma=0, \quad \gamma-\mu\alpha=0, \quad \alpha-\nu\beta=0,$$

и ненулевая тройка (α, β, γ), удовлетворяющая этим условиям, существует лишь при $\lambda\mu\nu=1$. □

Эта теорема очевидным образом обобщает *теоремы Чевы* (утверждение a)) *и Менелая* (утверждение b)). *Она имеет место в случае произвольного тела.*

▶ *Обсуждение.* При желании можно дать чисто аффинную формулировку. Для этого нужно ограничиться случаем, когда P, Q, R лежат в $\mathscr{P}$, и определить скаляры λ, μ, ν соотношениями

$$\overrightarrow{PB} = \lambda\overrightarrow{PC}, \quad \overrightarrow{QC} = \mu\overrightarrow{QA}, \quad \overrightarrow{RA} = \nu\overrightarrow{RB}.$$

Утверждение b) сохраняется без изменений, а утверждение a) заменяется следующим:

a′) Для того чтобы прямые (AP), (BQ), (CR) пересекались в одной точке (соотв. были параллельны) в $\mathscr{P}$, необходимо и достаточно, чтобы $\lambda\mu\nu = -1$, где $\mu \neq 1 - \lambda^{-1}$ (соотв. $\mu = 1 - \lambda^{-1}$ и $\nu = (1 - \lambda)^{-1}$).

Действительно, если $\lambda\mu\nu = -1$, то точка пересечения прямых (AP), (BQ), (CR) есть $b(1, -\nu, \nu\lambda)$, и эта точка лежит на бесконечности, если $\mu = 1 - \lambda^{-1}$ $\nu = (1 - \lambda)^{-1}$.

От теоремы Менелая к теореме Чевы

Заметим, что при любом $\lambda \in K$ точки $P = b(0, 1, -\lambda)$ и $P' = b(0, 1, \lambda)$ *гармонически сопряжены* относительно B и C; в самом деле, четверка (B, C, P, P') является образом гармонической четверки $(0, \infty, -\lambda, \lambda)$ при гомографии $\mathbb{P}^1(K)$ на прямую (BC), заданной условиями $\varphi(\lambda) = b(0, 1, \lambda)$, если $\lambda \in K$, и $\varphi(\infty) = C$ (см. § 6).

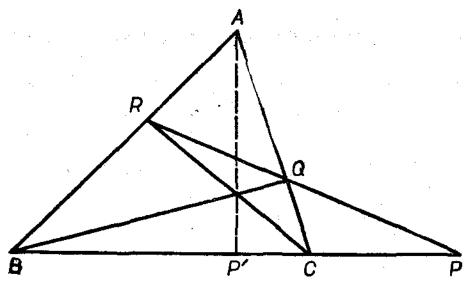


Рис. 8

Полагая по-прежнему $Q = b(-\mu, 0, 1)$ и $R = b(1, -\nu, 0)$, мы увидим, что отношение «точки P, Q, R коллинеарны» равносильно отношению «прямые (AP'), (BQ), (CR) проходят через одну точку» (см. рис. 8): мы вновь приходим здесь к построению гармонически сопряженной с P точки относительно (B, C), которое было дано в § 7.

Аналогичную эквивалентность мы получим, если вместо замены P на P' заменим Q на $Q' = b(\mu, 0, 1)$ (гармонически сопряженную с Q относительно (C, A)) или R на $R' = b(1, \nu, 0)$ (гармонически сопряженную с R относительно (A, B)). Кроме того, отношение «P, Q, R коллинеарны» равносильно «прямые (AP'), (BQ'), (CR') проходят через одну точку».

Если основное поле K имеет характеристику 2, то $P = P'$, $Q = Q'$, $R = R'$, и мы вновь приходим к конфигурации Фано (см. § 7, рис. 7).

10. ТЕОРЕМА ДЕЗАРГА

Пусть Π — проективная плоскость над произвольным телом K, для определенности — левая. Напомним, что ради краткости мы обозначаем точку пересечения двух проективных прямых (AB) и (CD) через $(AB) \cap (CD)$; условимся также, что слово «треугольник» обозначает тройку неколлинеарных точек.

Проективная формулировка теоремы Дезарга

▶ Теорема 10.1. Пусть (A, B, C) и (A', B', C') — два треугольника проективной плоскости Π, такие, что прямые (AA'), (BB'), (CC') *все различны*. Для того чтобы они *имели общую точку*, необходимо и достаточно, чтобы точки $P = (BC) \cap (B'C')$, $Q = (CA) \cap \cap (C'A')$, $R = (AB) \cap (A'B')$ *лежали на одной прямой* (см. рис. 9).

Доказательство. а) *Необходимость.* Положим $\Pi = \mathbb{P}(E)$ и обозначим через $p\colon E_* \to \Pi$ каноническую проекцию.

При $A = A'$, $B = B'$ или $C = C'$ результат очевиден, поэтому допустим, что $A \neq A'$, $B \neq B'$, $C \neq C'$, и положим $A = p(a)$, $B = p(b)$, $C = p(c)$.

Если прямые (AA'), (BB'), (CC') имеют общую точку $S = p(s)$, то найдутся такие скаляры λ, μ, ν, что $A' = p(s + \lambda a)$, $B' = p(s + \mu b)$, $C' = p(s + \nu c)$. Далее проверяем, что точка $p(\mu b - \nu c)$ есть точка P пересечения прямых (BC), $(B'C')$; аналогично,

$Q = p(\nu c - \lambda a)$ и $R = p(\lambda a - \mu b)$. Поскольку сумма векторов $\mu b - \nu c$, $\nu c - \lambda a$ и $\lambda a - \mu b$ в E равна нулю, точки P, Q, R коллинеарны.

b) *Достаточность.* Можно было бы провести доказательство от противного, как это будет сделано в случае предложения V.6.1, однако интереснее заметить, *что утверждение* b) *следует из* a) *по принципу двойственности.*

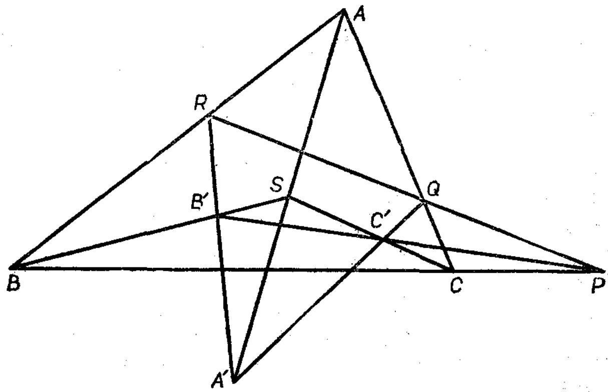


Рис. 9

Действительно, пусть E^* — сопряженное с E и A_1, B_1, C_1, A_1', B_1', C_1' — точки $\mathrm{P}(E^*)$, соответствующие прямым (BC), (CA), (AB), $(B'C')$, $(C'A')$, $(A'B')$. Точкам P, Q, R соответствуют прямые $\alpha = (A_1A_1')$, $\beta = (B_1B_1')$, $\gamma = (C_1C_1')$; легко видеть, что эти прямые различны, если предположить, что $A' \neq A$, $B' \neq B$, $C' \neq C$. Следовательно, если точки P, Q, R коллинеарны, то прямые α, β, γ проходят через одну точку. В силу справедливости утверждения a) в плоскости $\mathrm{P}(E^*)$ точки $P_1 = (B_1C_1) \cap (B_1'C_1')$, $Q_1 = (C_1A_1) \cap (C_1'A_1')$ и $R_1 = (A_1B_1) \cap (A_1'B_1')$ коллинеарны. Но эти точки соответствуют прямым (AA'), (BB'), (CC') в $\mathrm{P}(E)$, которые, следовательно, проходят через одну точку.

Аффинная интерпретация

Доказательство утверждения a) легко приспособить к аффинной геометрии и получить элементарное доказательство теоремы Дезарга в аффинной плоскости.

В самом деле, пусть (A, B, C) и (A', B', C') — два треугольника в аффинной плоскости $\mathscr{P}$. Мы можем отождествить $\mathscr{P}$ с собственно аффинной гиперплоскостью ее векторного продолжения $E = \widehat{\mathscr{P}}$ и положить $\widehat{\mathscr{P}} = \mathbb{P}(E) = \mathscr{P} \cup \mathscr{P}_\infty$. Тогда каждая точка $A \in \mathscr{P}$ отождествляется с $p(A)$. Подсчеты, проведенные в а), сохранят силу, при условии что $p\left(\sum_{i \in I} \lambda_i A_i\right)$ обозначает *барицентр трех взвешенных точек* $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ в $\mathscr{P}$, причем этот барицентр есть «направление прямой» в случае, когда $\sum \lambda_i = 0$.

Разумеется, это дает повод для обсуждения: ведь придется выделять случаи, когда прямые (AA'), (BB'), (CC') проходят через одну точку или параллельны, а также случай, когда некоторые из точек P, Q, R бесконечно удаленные. По поводу прямого элементарного рассмотрения теоремы Дезарга в аффинной плоскости см. упр. III. 14.

Доказательство с помощью отправки в бесконечность [1]

Для дальнейшего важно убедиться, что теорема Дезарга с помощью процедуры отправки в бесконечность сводится к двум простым свойствам аффинной плоскости.

В предположениях теоремы 10.1 обозначим через Δ прямую (QR) и снабдим $\mathscr{P} = \Pi \setminus \Delta$ такой аффинной структурой, чтобы Δ была «бесконечно удаленной прямой» в плоскости $\mathscr{P}$ (см. § 4). Случай, когда прямая Δ проходит через одну из точек A, B, C, A', B', C', без труда изучается непосредственно, и мы его исключим. Тогда мы приходим к простой теореме аффинной геометрии, а именно:

▶ Теорема 10.2. *Пусть (A, B, C) и (A', B', C') — два треугольника в аффинной плоскости, такие, что $(A'B') \parallel (AB)$ и $(A'C') \parallel (AC)$.*

---

[1] В § V.11 дается другое доказательство, с помощью погружения Π в проективное пространство размерности $n \geqslant 3$.

Тогда, для того чтобы прямые (AA'), (BB'), (CC') (предполагаем, что они различны) проходили через одну точку или были *параллельными*, необходимо и достаточно, чтобы прямая $(B'C')$ была параллельна прямой (BC).

Доказательство. По предположению, существуют λ, $\mu \in K^*$, такие, что $\overrightarrow{A'B'} = \lambda \overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A'C'} = \mu \overrightarrow{AC}$. Поэтому $\overrightarrow{B'C'} = \mu \overrightarrow{AC} - \lambda \overrightarrow{AB}$ и параллельность прямых $(B'C')$ и (BC) равносильна равенству $\lambda = \mu$ (так как вектор $\overrightarrow{B'C'} = \mu \overrightarrow{AC} - \lambda \overrightarrow{AB}$ коллинеарен $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ лишь при $\lambda = \mu$). Разберем теперь две возможности:

a) $\lambda = \mu = 1$ тогда и только тогда, когда обе прямые (BB') и (CC') параллельны (AA') (рис. 10).

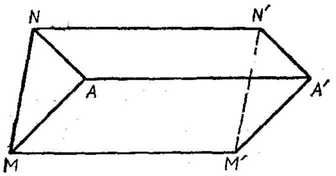


Рис. 10

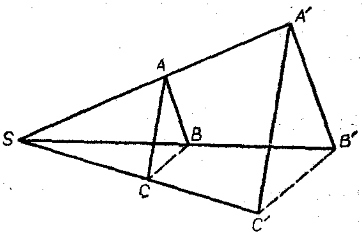


Рис. 11

b) Если $\lambda \neq 1$, то прямые (AA') и (BB') пересекаются в точке S, такой, что $\overrightarrow{SA'} = \lambda \overrightarrow{SA}$, и если $\mu \neq 1$, то прямые (AA') и (CC') пересекаются в точке T, такой, что $\overrightarrow{TA'} = \mu \overrightarrow{TA}$. Итак, $\lambda = \mu$ тогда и только тогда, когда $S = T$, т. е. прямые (AA'), (BB') и (CC') проходят через одну точку (см. рис. 11). Это и доказывает наше утверждение. □

Замечание. Сведение теоремы Дезарга к аффинному случаю приводит к двум различным конфигурациям (рис. 10 и 11), отвечающим соответственно случаям, когда прямая (PQR) проходит или не проходит через точку S, общую для прямых (AA'), (BB'), (CC').

Эти две конфигурации будут играть важную роль при аксиоматическом построении аффинной плоскости (см. гл. V).

11. ТЕОРЕМА ПАППА И КОММУТАТИВНОСТЬ ТЕЛА

Начнем с аффинного изучения.

▶ Теорема 11.1. *Пусть $\mathscr{P}$ — аффинная плоскость над телом K. Для* коммутативности *K необходимо и достаточно, чтобы существовала пара различных* пересекающихся *прямых $\mathscr{D}$, $\mathscr{D}'$, таких, чтобы для любых троек (A, B, C) точек на $\mathscr{D}$ и (A', B', C') на $\mathscr{D}'$ из параллельности $(AB') \parallel (A'B)$ и $(AC') \parallel (A'C)$ следовала параллельность $(BC') \parallel (B'C)$.*

Обратно, если K коммутативно, то любая пара $(\mathscr{D}, \mathscr{D}')$ прямых в $\mathscr{P}$ (пересекающихся или параллельных) удовлетворяет этому условию.

Доказательство. a) Предположим, что существуют прямые $\mathscr{D}$, $\mathscr{D}'$, пересекающиеся в точке O и удовлетворяющие высказанному требованию. Выберем точки $C \in \mathscr{D}$, $B' \in \mathscr{D}'$.

С любой парой (x, y) элементов K^* свяжем точки A, B на $\mathscr{D}$ и точки A', C' на $\mathscr{D}'$, определив их условиями

$$\overrightarrow{OA} = x\overrightarrow{OC}, \qquad \overrightarrow{OB} = y\overrightarrow{OA} = yx\overrightarrow{OC},$$
$$\overrightarrow{OA'} = y\overrightarrow{OB'}, \qquad \overrightarrow{OC'} = x\overrightarrow{OA'} = xy\overrightarrow{OB'}.$$

Тогда $\overrightarrow{AC'} = x\overrightarrow{CA'}$, $\overrightarrow{BA'} = y\overrightarrow{AB'}$ и, следовательно, $(AB') \parallel (BA')$, $(AC') \parallel (CA')$ (см. рис. 12); отсюда вытекает, что $(BC') \parallel (CB')$, и поскольку $\overrightarrow{OB} = yx\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OC'} = xy\overrightarrow{OB'}$, то параллельность (BC') и (CB') влечет $xy = yx$.

Тем самым тело K коммутативно (т. е. является полем).

b) Предположим теперь, что K коммутативно, и пусть (A, B, C), (A', B', C') — две тройки коллинеарных точек, для которых $(AB') \parallel (A'B)$ и $(AC') \parallel (A'C)$. Если прямые $\mathscr{D}$, $\mathscr{D}'$, на которых лежат эти тройки, пересекаются в точке O, то существуют два скаляра x, y, такие, что

$$\overrightarrow{OA}=x\overrightarrow{OC},\quad \overrightarrow{OC'}=x\overrightarrow{OA'},\quad \overrightarrow{OB}=y\overrightarrow{OA},\quad \overrightarrow{OA'}=y\overrightarrow{OB'},$$

откуда находим, что $\overrightarrow{OC'}=xy\overrightarrow{OB'}$ и $\overrightarrow{OB}=yx\overrightarrow{OC}$, и потому в силу $xy=yx$ имеем $\overrightarrow{BC'}=xy\overrightarrow{CB'}$ и $(BC')\parallel(B'C)$.

Если прямые (A, B, C) и (A', B', C') *параллельны*, то утверждение $(BC')\parallel(B'C)$ сохраняет силу и *без предположения* коммутативности K по следующей лемме:

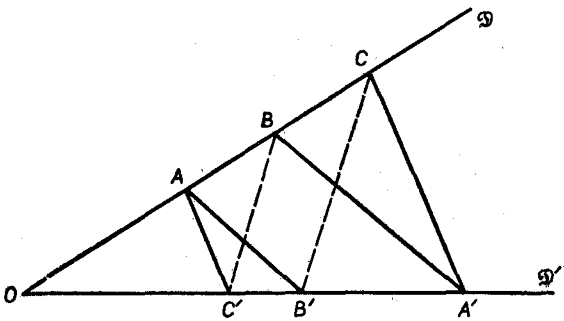


Рис. 12

Предложение 11.2. Пусть $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}'$ — две различные аффинные параллельные прямые аффинной плоскости $\mathcal{P}$ над произвольным телом K и $(A, B, C)\in\mathcal{D}^3$, $(A', B', C')\in\mathcal{D}'^3$ — такие тройки точек, что $(AB')\parallel(A'B)$, $(AC')\parallel(A'C)$; тогда и $(BC')\parallel(B'C)$.

Доказательство. По предположению четырехугольники $(AB'A'B)$ и $(AC'A'C)$ — параллелограммы (рис. 13). Следовательно, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{B'A'}$ и $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{C'A'}$, откуда $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{C'A'}-\overrightarrow{B'A'}=\overrightarrow{C'B'}$ и $\overrightarrow{BC'}=\overrightarrow{B'C}$. □

Применяя метод отправки в бесконечность, мы можем доказать такое утверждение[1]:

▶ Теорема 11.3. Пусть Π — проективная плоскость над некоторым телом K. Для коммутативности K не-

[1]) По поводу другого доказательства теоремы Паппа см. упр. III.11 и III.16.

обходимо и достаточно, чтобы существовали *две различные прямые* Δ, Δ' в Π, обладающие следующим свойством (рис. 14):

(P) Для каждой тройки точек (A, B, C) на Δ и (A', B', C') на Δ' точки $P=(BC')\cap(CB')$, $Q=(CA')\cap\cap(AC')$, $R=(AB')\cap(BA')$ коллинеарны.

Обратно, если K коммутативно, то любая пара (Δ, Δ') прямых в Π обладает этим свойством.

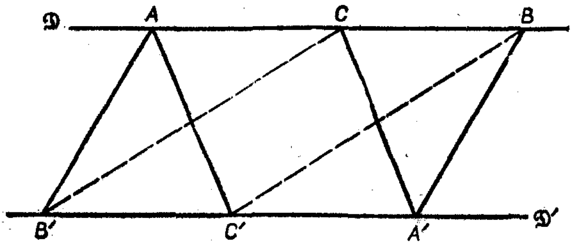


Рис. 13

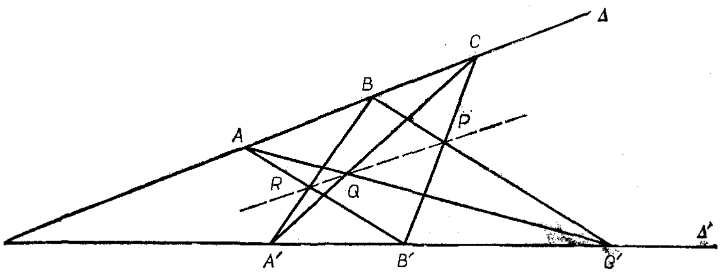


Рис. 14

Доказательство. а) Предположим, что существует пара прямых (Δ, Δ') со свойством (P), и пусть Δ'' — любая прямая в Π, не содержащая точки $O=\Delta\cap\Delta'$. Снабдим множество $\mathscr{P}=\Pi\setminus\Delta''$ структурой аффинной плоскости, получаемой отправкой прямой Δ'' в бесконечность; пусть $\mathscr{D}=\Delta\cap\mathscr{P}$, $\mathscr{D}'=\Delta'\cap\mathscr{P}$ — аффинные прямые в $\mathscr{P}$, полученные сужением прямых Δ, Δ'. Поскольку точка O не принадлежит $\mathscr{P}_\infty = \Delta''$, прямые $\mathscr{D}$, $\mathscr{D}'$ пересекаются в O и мы можем применить к ним теорему 11.1: достаточно воспользоваться свойством (P) для троек $(A, B, C) \in \Delta^3$ и $(A', B', C') \in \Delta'^3$, образованных различными точками и таких, что точки $Q = (CA') \cap (AC')$ и $R = (AB') \cap (BA')$ принадлежат бесконечно удаленной прямой Δ''. Точки Q, R различны, ибо таковы C и B, а коллинеарность $P = (BC') \cap (CB')$ с Q и R в Π влечет $P \in \Delta''$. Иначе говоря, в аффинной плоскости $\mathscr{P}$ условия $(CA') \| (AC')$ и $(AB') \| (BA')$ (где A, B, C принадлежат прямой $\mathscr{D}$, а A', B', C' — прямой $\mathscr{D}'$) влекут $(BC') \| (CB')$ и, значит, K коммутативно.

b) *Предположим, что K коммутативно* (т. е. K — поле). Пусть (A, B, C), (A', B', C') — две тройки различных точек, лежащие соответственно на прямых Δ, Δ' плоскости Π. Исключим тривиальный случай, когда одна из этих точек совпадает с $O = \Delta \cap \Delta'$, и положим $Q = (CA') \cap (AC')$, $R = (AB') \cap (BA')$. Легко видеть, что тогда прямая $\Delta'' = (QR)$ не проходит ни через одну из точек A, B, C, A', B', C'. Отправляя эту прямую в бесконечность, мы придем к двум тройкам (A, B, C), (A', B', C') коллинеарных точек аффинной плоскости $\mathscr{P} = \Pi \setminus \Delta''$, для которых $(CA') \| (AC')$ и $(AB') \| (BA')$. Тогда и $(BC') \| (CB')$, откуда следует, что точка P пересечения проективных прямых (BC'), (CB') плоскости Π лежит на бесконечно удаленной прямой $\Delta'' = (QR)$. □

12. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Цель этого параграфа — дать геометрическую характеризацию *полупроективных* биекций. Установим сначала некоторые предварительные свойства.

▶ Предложение 12.1. Для того чтобы подмножество L проективного пространства $\mathbb{P}(E)$ было *проективным подпространством* в $\mathbb{P}(E)$, необходимо и достаточно, чтобы любая проективная прямая, соединяющая две различные точки $A, B \in L$, содержалась в L.

Доказательство. Необходимость условия очевидна. Обратно, предположим, что условие выполнено, и пусть a, b — два различных элемента в $p^{-1}(L)$. Тогда $A = p(a)$, $B = p(b)$ принадлежат L *и для каждой* пары $(\lambda, \mu) \in K^2$, такой, что $\lambda a + \mu b \neq 0$, $p(\lambda a + \mu b)$ будет точкой прямой (AB), если $A \neq B$, или точкой A, если $A = B$. В обоих случаях $p(\lambda a + \mu b)$ принадлежит L и $\lambda a + \mu b \in p^{-1}(L)$. Итак, $p^{-1}(L) \cup \{0\}$ есть векторное подпространство в E, а L есть проективное подпространство в $\mathbb{P}(E)$. □

Замечание. Эта теорема аналогична предложению III. 4.8, но здесь нет необходимости предполагать, что $K \neq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

▶ Определение 12.1[1]. Пусть $\mathbb{P}(E)$, $\mathbb{P}(F)$ — два проективных пространства. *Коллинеацией* $\mathbb{P}(E)$ на $\mathbb{P}(F)$ называется такая *биекция*, что *образы любых трех коллинеарных точек* $\mathbb{P}(E)$ *коллинеарны в* $\mathbb{P}(F)$.

Предложение 12.2. Если f: $\mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(F)$ — коллинеация, то *прообраз* $f^{-1}(L)$ проективного подпространства L пространства $\mathbb{P}(F)$ является проективным подпространством в $\mathbb{P}(E)$.

Доказательство. Пусть A, B — две точки из $f^{-1}(L)$ и C — точка на прямой (AB). Так как f — коллинеация, точка $f(C)$ лежит на прямой $(f(A)f(B))$ и, значит, содержится в L. Отсюда вытекает, что прямая (AB) принадлежит $f^{-1}(L)$, что и доказывает утверждение. □

Предложение 12.3. Пусть $\mathbb{P}(E)$, $\mathbb{P}(F)$ — два проективных пространства *одной и той же конечной размерности* n и f: $\mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(F)$ — коллинеация. Тогда образ каждой проективной прямой из $\mathbb{P}(E)$ при отображения f есть проективная прямая в $\mathbb{P}(F)$.

Доказательство. Пусть Δ — прямая в $\mathbb{P}(E)$. Так как f — коллинеация, то образ Δ *содержится* в некоторой прямой Δ' пространства $\mathbb{P}(F)$ (*прямой, соединяющей*

[1] Часто дают и другое определение коллинеации, но эквивалентное ему в случае конечной размерности (см. предложение 12.7).

образы двух точек Δ). Остается доказать, что $f(\Delta) = \Delta'$.

Обозначим через q каноническую проекцию F_* на $\mathbb{P}(F)$. В векторном пространстве F легко построить строго возрастающую последовательность $(X_1, \ldots, X_n)$ векторных подпространств F, таких, что $\dim X_k = k+1$ при $k = 1, 2, \ldots, n$, первый член которой X_1 — плоскость, индуцирующая прямую Δ'; пусть $X_1 = q^{-1}(\Delta') \cup \{0\}$ (действуем далее по индукции, выбирая $a_k \in F \setminus X_k$ и полагая $X_{k+1} = \mathrm{Vect}(X_k \cup \{a_k\})$). Имеем, очевидно, $X_n = F$.

Эта последовательность $(X_1, \ldots, X_n)$ индуцирует строго возрастающую последовательность $(\Delta_1', \Delta_2', \ldots, \Delta_n')$ проективных подпространств $\mathbb{P}(F)$, такую, что $\Delta_1' = \Delta'$, $\Delta_n' = \mathbb{P}(F)$.

Так как f биективно и в силу предложения 12.2 множества $\Delta_k = f^{-1}(\Delta_k')$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ образуют строго возрастающую последовательность проективных подпространств в $\mathbb{P}(E)$, такую, что $\Delta \subset \Delta_1$ (поскольку $f(\Delta) \subset \Delta_1')$) и $\Delta_n = \mathbb{P}(E)$.

Размерности этих подпространств удовлетворяют, следовательно, неравенствам

$$\dim \Delta \leqslant \dim \Delta_1 < \dim \Delta_2 < \ldots < \dim \Delta_n = n$$

(так как два различных проективных подпространства, содержащиеся одно в другом, не могут быть одинаковой размерности).

Из этих неравенств следует условие $\dim \Delta_1 \leqslant 1$ и, значит, $\Delta_1 = \Delta$ и $\Delta' = f(\Delta_1) = f(\Delta)$. □

Замечание. Предложение 12.3 не имеет места без предположения о том, что f — биекция. Пусть, например, j — вложение $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ в $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, которое в однородных координатах точке $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ ставит в соответствие точку с теми же координатами $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Тогда j преобразует коллинеарные точки в коллинеарные, но образ прямой в $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ не есть прямая в $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ и отображение не полулинейно.

Предложение 12.4. Пусть $\mathbb{P}(E)$, $\mathbb{P}(F)$ — два произвольных проективных пространства и f: $\mathbb{P}(E) \to$

$\to \mathbb{P}(F)$ — такая *биекция*, что образ любой прямой из $\mathbb{P}(E)$ есть прямая в $\mathbb{P}(F)$. Тогда *прообраз гиперплоскости* в $\mathbb{P}(F)$ есть *гиперплоскость в* $\mathbb{P}(E)$.

Доказательство. Пусть H — гиперплоскость в $\mathbb{P}(F)$; по предложению 12.2, $f^{-1}(H)$ есть проективное подпространство в $\mathbb{P}(E)$, очевидно отличное от $\mathbb{P}(E)$. С другой стороны, если Δ — прямая в $\mathbb{P}(E)$, то $f(\Delta)$ будет прямой в $\mathbb{P}(F)$, пересекающей H по меньшей мере в одной точке; следовательно, Δ пересечет $f^{-1}(H)$ по меньшей мере в одной точке.

Если V — векторное подпространство в E, индуцирующее $f^{-1}(H)$, то пересечение V с любым двумерным векторным подпространством в E имеет размерность $\geqslant 1$, а поскольку $V \neq E$, то V оказывается гиперплоскостью в E (см. упр. II. 8). □

Теперь может быть установлена

▶ **Теорема 12.5.** Пусть $\mathbb{P}(E)$, $\mathbb{P}(F)$ — два проективных пространства любой (*конечной* или *бесконечной*) размерности $\geqslant 2$ и f: $\mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(F)$ — биекция, такая, что образ любой прямой из $\mathbb{P}(E)$ есть прямая в $\mathbb{P}(F)$. Тогда f *полупроективна.*

Доказательство. Обозначим через H произвольную гиперплоскость в $\mathbb{P}(F)$ и снабдим $\mathscr{E} = \mathbb{P}(E) \setminus f^{-1}(H)$ (соотв. $\mathscr{F} = \mathbb{P}(F) \setminus H$) аффинной структурой, полученной отправкой $f^{-1}(H)$ (соотв. H) в бесконечность. Ограничение $\bar{f}$ отображения f на $\mathscr{E}$ есть биекция $\mathscr{E}$ на $\mathscr{F}$, преобразующая аффинные прямые из $\mathscr{E}$ направления $\delta \in f^{-1}(H)$ в аффинные прямые в $\mathscr{F}$ направления $f(\delta)$. По теореме III. 8.1 $\bar{f}$ есть *полуаффинная* биекция $\mathscr{E}$ на $\mathscr{F}$.

С помощью легкого обобщения предложения 4.1 видим, что такая биекция $\bar{f}$ продолжается до *полупроективной* биекции $\mathbb{P}(E)$ на $\mathbb{P}(F)$, с необходимостью совпадающей с f (поскольку образ прямой направления δ из $\mathscr{E}$ есть прямая направления $f(\delta)$ в $\mathscr{F}$); отсюда и вытекает результат. □

Путем сравнения этой теоремы с предложением 12.3 получается, наконец,

► Теорема 12.6. Если $\mathbb{P}(E)$, $\mathbb{P}(F)$ — два проективных пространства *одинаковой конечной размерности* $n \geqslant 2$, то всякая коллинеация $\mathbb{P}(E)$ на $\mathbb{P}(F)$ *полупроективна.*

Коллинеации и корреляции (случай конечной размерности)

С каждым проективным пространством $\mathbb{P}(E)$ *конечной размерности* свяжем множество $\tilde{\mathbb{P}}(E)$ его проективных подпространств (включая пустое множество и само $\mathbb{P}(E)$). Немедленно убеждаемся, что каждая полупроективная биекция f: $\mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(F)$ продолжается в биекцию $\tilde{f}$: $\tilde{\mathbb{P}}(E) \to \tilde{\mathbb{P}}(E)$, для которой выполнено условие

$$(\forall X, Y \in \tilde{\mathbb{P}}(E)) \quad X \subset Y \Rightarrow \tilde{f}(X) \subset \tilde{f}(Y). \tag{1}$$

Обратно, имеет место

Предложение 12.7. Пусть $\mathbb{P}(E)$, $\mathbb{P}(F)$ — два проективных пространства одинаковой конечной размерности n, и пусть $\tilde{f}$: $\tilde{\mathbb{P}}(E) \to \tilde{\mathbb{P}}(F)$ — биекция, удовлетворяющая условию (1). Тогда $\tilde{f}$ является продолжением на $\tilde{\mathbb{P}}(E)$ некоторой коллинеации f: $\mathbb{P}(E) \to$ $\to \mathbb{P}(F)$.

Доказательство. а) Покажем сначала, что $\tilde{f}$ сохраняет размерность. Для этого рассмотрим произвольное проективное подпространство X размерности k пространства $\mathbb{P}(E)$. Обобщением процедуры, примененной при доказательстве предложения 12.3, можно построить конечную строго возрастающую последовательность $(L_{-1}, L_0, L_1, \ldots, L_n)$ проективных подпространств из $\mathbb{P}(E)$, такую, что $L_{-1} = \varnothing$, $L_n = \mathbb{P}(E)$, $L_k = X$ и $\dim(L_j) = j$ для всех j[1]. Из того что $\tilde{f}$ биективно и удовлетворяет условию (1), вытекает, что последовательность $(L'_j = \tilde{f}(L_j))$ строго возрастает

[1]) Напомним, что пустое подмножество в $\mathbb{P}(E)$ рассматривается как проективное подпространство размерности -1, тогда как точки $\mathbb{P}(E)$ суть проективные подпространства размерности 0.

$(-1 \leqslant j \leqslant n)$. Следовательно, имеют место неравенства

$$-1 \leqslant \dim(L'_{-1}) < \dim(L'_0) < \dim(L'_1) < \ldots$$
$$\ldots < \dim(L'_n) \leqslant n,$$

которые влекут $\dim(L'_j) = j$ для всех j и, в частности,

$$\dim(\tilde{f}(X)) = \dim(L'_k) = k.$$

b) По предыдущему, образ точки M из $\mathrm{P}(E)$ есть проективное подпространство нулевой размерности в $\mathrm{P}(F)$, т. е. сводится к точке, которую мы обозначим $f(M)$. С другой стороны, если Δ — прямая в $\mathrm{P}(E)$, то $\tilde{f}(\Delta)$ есть прямая в $\mathrm{P}(F)$ и условие (1) влечет включение $f(\Delta) \subset \tilde{f}(\Delta)$. Тогда f — коллинеация, и по теореме 12.6 f полупроективна.

Наконец, если X — проективное подпространство размерности k в пространстве $\mathrm{P}(E)$, то $f(X)$ есть проективное подпространство размерности k в $\mathrm{P}(F)$ (так как полупроективная биекция сохраняет размерности подпространств). Далее, соотношение (1) влечет $f(X) \subset \tilde{f}(X)$ (так как образы точек из X при отображении f суть подпространства в $\mathrm{P}(F)$, содержащиеся в $\tilde{f}(X)$), и поскольку $\tilde{f}(X)$ есть проективное подпространство в $\mathrm{P}(F)$ той же размерности, что и $f(X)$, то $f(X) = \tilde{f}(X)$. Итак, $\tilde{f}$ действительно есть продолжение f на $\tilde{\mathrm{P}}(E)$. □

В случае пространств одинаковой конечной размерности можно, следовательно, определить коллинеации как биекции $\tilde{\mathrm{P}}(E)$ на $\tilde{\mathrm{P}}(F)$, удовлетворяющие условию (1).

По аналогии введем

▶ Определение 12.2. Пусть $\mathrm{P}(E)$, $\mathrm{P}(F)$ — два проективных пространства одинаковой конечной размерности n. *Корреляцией* $\mathrm{P}(E)$ на $\mathrm{P}(F)$ называется биекция $\varphi\colon \tilde{\mathrm{P}}(E) \to \tilde{\mathrm{P}}(F)$, удовлетворяющая условию:

$$(\forall X, Y \in \tilde{\mathrm{P}}(E)) \quad X \subset Y \Rightarrow \varphi(X) \supset \varphi(Y). \tag{2}$$

Пример. Если E^* — пространство, сопряженное с E, то *отношение ортогональности* определяет корреляцию δ_E: $X \mapsto X^0$ пространства $\tilde{\mathbb{P}}(E)$ на $\tilde{\mathbb{P}}(E^*)$ (см. § II. 6).

Если φ: $\tilde{\mathbb{P}}(E) \to \tilde{\mathbb{P}}(E)$ — произвольная *корреляция*, то непосредственно видно, что $\varphi \circ \delta_E^{-1}$ — *коллинеация* $\tilde{\mathbb{P}}(E^*)$ на $\tilde{\mathbb{P}}(F)$. Поэтому можно сформулировать

Предложение 12.8. Любая *корреляция* $\tilde{\mathbb{P}}(E)$ на $\tilde{\mathbb{P}}(F)$ имеет вид $\varphi = f \circ \delta_E$, где f — некоторая *коллинеация* $\tilde{\mathbb{P}}(E^*)$ на $\tilde{\mathbb{P}}(F)$, а δ_E — *корреляция* $\tilde{\mathbb{P}}(E)$ на $\tilde{\mathbb{P}}(E^*)$, определенная отношением ортогональности.

По поводу построения корреляций с помощью полуторалинейных форм см. [FR], гл. V.

Глава V

АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ АФФИННОЙ И ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИЙ

1. ОСНОВНЫЕ АКСИОМЫ ПЛОСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Целью этой главы является обоснование аффинной и проективной геометрий при помощи простых аксиом, не использующих иных свойств, кроме принадлежности точек прямым и пересечения прямых, проверяемых (в некотором смысле) с помощью одного простого правила. Мы ограничимся по существу *геометрией плоскости*, которая только и приводит к новым структурам; «аффинная» и «проективная» точки зрения будут тесно перемешаны. Случай пространственной геометрии рассматривается в § 11 и 12.

Уточним прежде всего рамки нашего исследования, введя понятия «плоскости проективного типа» и «плоскости аффинного типа»[1].

Плоскости проективного типа

▶ Определение 1.1. *Плоскость проективного типа* есть пара, состоящая из

a) некоторого множества Π, называемого *плоскостью*, элементы которого называются *точками*;

b) *непустого* множества $\mathscr{L}$ подмножеств Π, называемых *прямыми* и удовлетворяющих следующим аксиомам:

P_1 Через две любые различные точки Π проходит одна и только одна прямая.

P_2 Две различные прямые имеют общую точку (единственную по аксиоме P_1).

[1]) В курсах, построенных аксиоматически, говорят просто о «проективной плоскости» и «аффинной плоскости»; мы предпочли избежать двусмысленности, сохранив последние термины для двумерных проективных (соотв. аффинных) пространств над некоторым телом; они являются частными случаями плоскостей проективного [соотв. аффинного] типа.

P_3 Каждая прямая содержит по меньшей мере три точки.

P_4 Существуют три точки, не лежащие на одной прямой.

Естественно, можно привести и другие, равносильные, формулировки этих аксиом. В частности, можно заменить аксиому P_4 на

P'_4 Какова бы ни была прямая Δ, множество $\Pi \setminus \Delta$ не пусто.

Из этих аксиом вытекает

Предложение 1.1. Плоскость проективного типа содержит не меньше семи точек и семи прямых.

Доказательство. Пусть Δ — прямая на Π и A, B, C — три точки Δ, а D — точка $\Pi \setminus \Delta$. Существует точ-

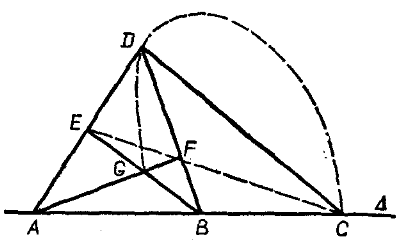


Рис. 1

ка E прямой (AD), отличная от A и D, и точка F прямой (BD), отличная от B и D (см. рис. 1). Тогда прямые (AF) и (BE) пересекаются в новой точке G, что и дает нам семь различных точек. С другой стороны, шесть прямых уже начерчены, и существует по меньшей мере еще одна, седьмая, соединяющая E и F.

Замечание. Для того чтобы плоскость Π содержала лишь семь точек и семь прямых, требуется, чтобы точки C, E, F были коллинеарны, равно как и точки C, D, G. Мы вновь получаем *конфигурацию Фано*, с которой уже встречались в § IV. 7.

Плоскости аффинного типа

▶ Определение 1.2. *Плоскостью аффинного типа* называется пара $(\mathscr{P}, \mathscr{L})$, состоящая из:

a) множества $\mathscr{P}$, называемого *плоскостью*, элементы которого называются *точками*;

b) непустого множества $\mathscr{L}$ подмножеств $\mathscr{P}$, называемых *прямыми* и удовлетворяющих следующим аксиомам:

A_1 Через две различные точки $\mathscr{P}$ проходит одна и только одна прямая.

A_2 Любая прямая содержит не менее двух точек.

A_3 Существуют три точки, не лежащие на одной прямой.

A_4 (Сильная аксиома Евклида.) Каковы бы ни были прямая $\mathscr{D}$ и точка $A \in \mathscr{P} \setminus \mathscr{D}$, существует *единственная прямая*, проходящая через A и не пересекающая $\mathscr{D}$.

Немедленно получаем

Предложение 1.2. Если $(\Pi, \mathscr{L})$ — плоскость проективного типа и Δ — любая прямая в Π, то можно получить структуру аффинного типа на $\Pi \setminus \Delta$, назвав «прямыми» пересечения прямых из Π с $\Pi \setminus \Delta$.

Действительно, две «прямые» из $\Pi \setminus \Delta$, не имеющие точки пересечения, происходят из двух прямых в Π, проходящих через одну и ту же точку Δ.

Мы увидим, что и, обратно, всякая плоскость аффинного типа может быть канонически дополнена до плоскости проективного типа. Прежде всего имеет место

Предложение 1.3. Если $(\mathscr{P}, \mathscr{L})$ — плоскость аффинного типа, то отношение *параллелизма* на $\mathscr{L}$, определенное с помощью $\mathscr{D} \parallel \mathscr{D}' \Leftrightarrow (\mathscr{D} = \mathscr{D}'$ или $\mathscr{D} \cap \mathscr{D}' = \varnothing)$, есть *отношение эквивалентности*.

Доказательство. Симметрия и рефлексивность введенного отношения очевидны; транзитивность вытекает из условия единственности в аксиоме A_4.

Класс эквивалентности, содержащий прямую $\mathscr{D}$, будет называться *направлением прямой* $\mathscr{D}$.

Предложение 1.4. Пусть $\mathscr{P}$ — плоскость аффинного типа, а $\mathscr{P}_\infty$ — множество направлений ее прямых. На $\mathscr{P} \cup \mathscr{P}_\infty$ получим структуру плоскости проективного плоскости над телом»; мы увидим тогда, что эти аксиомы равносильны существованию достаточно широкой группы преобразований плоскости, состоящей из *трансляций* и *гомотетий*. Чтобы облегчить изложение, мы изучим эти преобразования с самого начала, не зная, существуют ли среди них отличные от тождественного.

Определение 2.1. Пусть $\mathscr{P}$ — плоскость аффинного типа. *Дилатацией* $\mathscr{P}$ мы назовем биекцию $\mathscr{P}$ на $\mathscr{P}$, такую, что для любой пары различных точек (A, B) прямая $(f(A)f(B))$ *параллельна* прямой (AB).

Очевидно, что тождественное преобразование есть дилатация и что дилатации $\mathscr{P}$ образуют *группу*.

Предложение 2.1. Если f — дилатация $\mathscr{P}$, то каждая прямая $\mathscr{D}$, содержащая некоторую точку M и ее образ $f(M)$, *устойчива* относительно f (т. е. $f(\mathscr{D}) = \mathscr{D}$). В частности, *любая прямая, проходящая через неподвижную точку f, устойчива при действии f.*

Доказательство. Пусть $M \in \mathscr{P}$. Если $f(M) \neq M$, обозначим через $\mathscr{D}$ прямую $(Mf(M))$; если же $f(M) = M$, то пусть $\mathscr{D}$ — любая прямая, проходящая через M. Для всякой точки $P \in \mathscr{D} \setminus \{M\}$ прямая $(f(M)f(P))$ должна быть параллельна прямой (MP), т. е. $\mathscr{D}$, и, следовательно, совпадает с $\mathscr{D}$; отсюда $f(P) \in \mathscr{D}$ и мы имеем включение $f(\mathscr{D}) \subset \mathscr{D}$.

Аналогично, если $P \in \mathscr{D} \setminus \{f(M)\}$ и $f^{-1}(P)$ — прообраз P, то прямая $(Mf^{-1}(P))$ должна быть параллельной прямой $(f(M)P)$, т. е. $\mathscr{D}$, и потому совпадет с $\mathscr{D}$, откуда $f^{-1}(P) \in \mathscr{D}$ и $f(\mathscr{D}) \supset \mathscr{D}$. Окончательно имеем $f(\mathscr{D}) = \mathscr{D}$.

Предложение 2.2. Дилатация, допускающая *две различные неподвижные точки*, сводится к тождественному преобразованию.

Доказательство. Пусть A, B — две различные неподвижные точки дилатации f. По предложению 2.1 любая прямая, проходящая через A или B, устойчива при f: каждая точка M плоскости $\mathscr{P}$, не принадлежа-

щая прямой (AB), является единственной общей точкой пары устойчивых прямых (AM), (BM), откуда и следует, что $f(M) = M$.

Выбрав такую точку M, мы покажем (теми же рассуждениями), что любая точка, не лежащая на прямой (AM), неподвижна при отображении f; тем самым любая точка плоскости $\mathscr{P}$ остается неподвижной при дилатации f. □

▶ Определение 2.2. Пусть $\mathscr{P}$ — плоскость аффинного типа. Дилатация без неподвижных точек называется *трансляцией*; дилатация с одной неподвижной точкой I — *гомотетией с центром* I. Наконец, тождественное преобразование одновременно рассматривается как трансляция и как гомотетия с произвольным центром.

Свойства трансляций

Предложение 2.3. *Если* τ — *трансляция, отличная от* $\mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$, *то прямые* $(M\tau(M))$, *где* M *пробегает* $\mathscr{P}$, *параллельны*.

Доказательство. Пусть M, P — две точки $\mathscr{P}$. Если бы устойчивые прямые $(M\tau(M))$ и $(P\tau(P))$ имели одну общую точку, то она была бы неподвижной при τ, что противоречит предположению. Итак, указанные прямые параллельны.

Следствие. *Если* τ — *трансляция, отличная от* $\mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$, *то для любых двух точек* M, P *на* $\mathscr{P}$ *либо четыре точки* M, P, $\tau(M)$, $\tau(P)$ *коллинеарны, либо* $(M, \tau(M), \tau(P), P)$ — *параллелограмм*.

Действительно, $(MP) \parallel (\tau(M)\tau(P))$ и $(M\tau(M)) \parallel (P\tau(P))$ (см. рис. 3).

Предложение 2.4. *Для любой пары точек* (A, A') *плоскости* $\mathscr{P}$ *существует не более одной трансляции* τ, *такой, что* $\tau(A) = A'$.

Доказательство. При $A' = A$ результат тривиален (τ — тождественное отображение), поэтому предположим, что $A' \neq A$, и обозначим через $\mathscr{D}$ прямую (AA'). Образ M' любой точки $M \in \mathscr{P} \setminus \mathscr{D}$ полностью определен условием «$(AA'M'M)$ — параллелограмм». Фиксируем такую точку M; теперь образ P' каждой точки $P \in \mathcal{D}$ полностью определен условием «$(MM'P'P)$ — параллелограмм» (рис. 4). Итак, задание образа $A' = \tau(A)$ определяет τ. $\square$

Предложение 2.5. Трансляции плоскости аффинного типа $\mathcal{P}$ образуют *группу*.

Доказательство. Пусть σ, τ — две трансляции $\mathcal{P}$ и $\varphi = \tau^{-1} \circ \sigma$. Ясно, что φ — дилатация (так как дилатации образуют группу). Если φ допускает неподвиж-

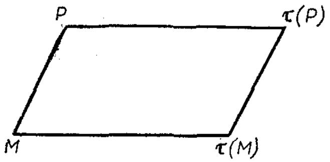


Рис. 3

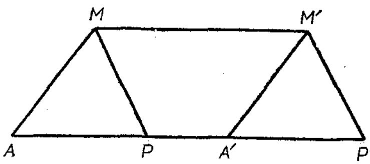


Рис. 4

ную точку A, то $\sigma(A) = \tau \circ \varphi(A) = \tau(A)$, откуда $\sigma = \tau$ по предложению 2.4 и $\varphi = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$. Итак, φ либо не имеет неподвижных точек, либо совпадает с $\mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$; в обоих случаях φ — трансляция. $\square$

Свойства гомотетий

Если f — гомотетия с центром I, отличная от $\mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$, то образ произвольной точки $M \in \mathcal{P} \setminus \{I\}$ принадлежит устойчивой прямой (IM) (предложение 2.1). Отсюда выводится

Предложение 2.6. Если I, A, A' — три коллинеарные точки $\mathcal{P}$, причем $A \neq I$, $A' \neq I$, то существует *не более одной гомотетии* f с центром I, такой, что $f(A) = A'$.

Доказательство. Обозначим прямую (IAA') через $\mathcal{D}$, и пусть f — гомотетия с центром I, такая, что $f(A) = A'$. Заметим прежде всего, что образ M' точки M из $\mathcal{P} \setminus \mathcal{D}$ однозначно определен условиями «(I, M, M') коллинеарны» и $(A'M') \parallel (AM)$. Фиксируем такую точку M; образ P' произвольной точки P из

$\mathcal{D}\setminus\{I\}$ определяется условиями $P'\in\mathcal{D}$ и $(P'M')\parallel(PM)$ (см. рис. 5). Значит, гомотетия f единственна. □

Предложение 2.7. Гомотетии с заданным центром I образуют группу.

В самом деле, если f, g — гомотетии с центром I, то $g\circ f^{-1}$ — дилатация с неподвижной точкой I.

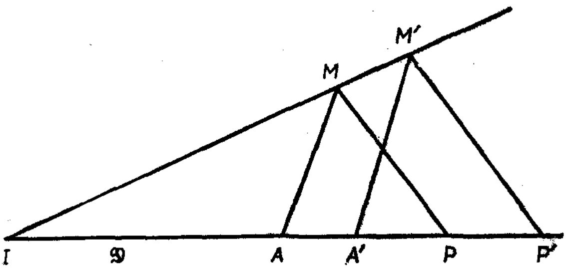


Рис. 5.

3. ПЛОСКОСТИ ТРАНСЛЯЦИЙ

Изучение, проведенное в § 2, побуждает нас заинтересоваться прежде всего теми плоскостями аффинного типа, на которых группа трансляций действует *транзитивно*. Введем

▶ Определение 3.1. Плоскость аффинного типа $\mathcal{P}$ называется плоскостью *трансляций*, если для любой пары (A, A') точек $\mathcal{P}$ существует такая трансляция τ, что $\tau(A)=A'$.

По предложению 2.4 такая трансляция *единственна*; мы обозначим ее $\tau_A^{A'}$.

Покажем, что наложенное требование равносильно геометрическому свойству, проверяемому по чертежу.

▶ Теорема 3.1. Для того чтобы плоскость аффинного типа $\mathcal{P}$ была плоскостью трансляций, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие:

▶ (d) (*Малая аффинная аксиома Дезарга.*) Если (ABC) и $(A'B'C')$ — два треугольника, таких, что (AA'), (BB') и (CC') — три *параллельные и различ-*

ные прямые, то из соотношений $(A'B') \parallel (AB)$ и $(A'C') \parallel (AC)$ вытекает $(B'C') \parallel (BC)$.

Иными словами: если $(ABB'A')$ и $(ACC'A')$ — параллелограммы и точки B, C, B', C' не коллинеарны, то $(BCC'B')$ — параллелограмм.

Доказательство. a) *Условие необходимо.* Если $\mathscr{P}$ — плоскость трансляций и $(ABB'A')$, $(ACC'A')$ — параллелограммы на $\mathscr{P}$, то трансляция $\tau = \tau_A^{A'}$ удовлетворяет соотношениям $\tau(B) = B'$ и $\tau(C) = C'$ (следствие из предложения 2.3). Значит, $(B'C') \parallel (BC)$.

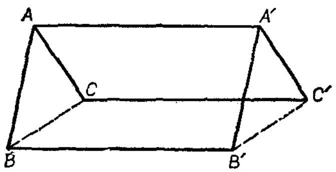


Рис. 6

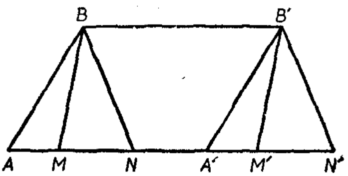


Рис. 7

b) *Условие достаточно.* Пусть плоскость аффинного типа $\mathscr{P}$ удовлетворяет аксиоме (d) и (A, A') — пара точек $\mathscr{P}$. Существование трансляции, для которой $\tau(A) = A'$, тривиально, если $A = A'$; поэтому положим $A' \neq A$ и построим пару точек (B, B') в $\mathscr{P}$, таких, что $(ABB'A')$ — параллелограмм. Тогда мы получим отображение τ плоскости $\mathscr{P}$ в $\mathscr{P}$, определив образ $M' = \tau(M)$ точки M следующими условиями (см. рис. 6 и 7):

i) если M не принадлежит прямой (AA'), то $(AMM'A')$ — параллелограмм;

ii) если M принадлежит прямой (AA'), то $(BMM'B')$ — параллелограмм.

Очевидно, что τ есть биекция $\mathscr{P}$ на $\mathscr{P}$, для которой $\tau(A) = A'$, и что τ не имеет неподвижных точек. Мы докажем, что для любой пары (M, N) точек $\mathscr{P}$ точки $M' = \tau(M)$, $N' = \tau(N)$ удовлетворяют условию $(M'N') \parallel (MN)$.

Первый случай. Ни одна из точек M, N не принадлежит прямой (AA'). Тогда $(AMM'A')$ и $(ANN'A')$ —

параллелограммы (см. рис. 6). Следовательно, если точки M, M', N, N' не коллинеарны, то соотношение $(M'N') \parallel (MN)$ вытекает из аксиомы (d).

Второй случай. Обе точки M, N принадлежат прямой (AA') (см. рис. 7). Тогда и точки M', N' принадлежат этой прямой, и результат очевиден.

Третий случай. Точка M принадлежит прямой (AA'), а точка N не принадлежит ни одной из прямых (AA'), (BB').

По построению, $(BMM'B')$, $(BAA'B')$, $(ANN'A')$ — параллелограммы (см. рис. 8). Первое применение аксиомы (d) показывает, что $(BNN'B')$ — параллелограмм, повторное применение этой аксиомы показывает, что и $(MNN'M')$ — параллелограмм, откуда $(M'N') \parallel (MN)$.

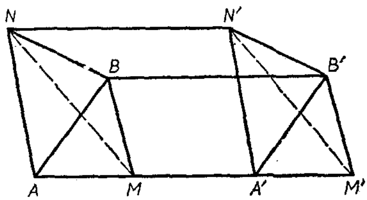


Рис. 8

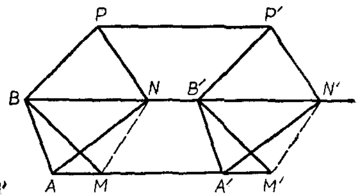


Рис. 9

Четвертый случай. Точка M принадлежит прямой (AA'), а точка N — прямой (BB') (см. рис. 9).

Заметим сначала, что плоскость $\mathcal{P}$ сводится к объединению прямых (AA') и (BB') лишь тогда, когда она состоит из четырех точек A, A', B, B' (см. упр. V. 1).

Так как этот случай был рассмотрен отдельно (предложение 1.5), мы можем предположить, что существует точка P, не лежащая ни на одной из прямых (AA'), (BB').

Положим $P' = \tau(P)$; рассмотрение первого случая показывает, что $(NPP'N')$ — параллелограмм; третий случай показывает, что $(MPP'M')$ — параллелограмм. Применяя аксиому (d), выведем отсюда, что

$(MNN'M')$ — параллелограмм; таким образом, $(M'N') \parallel (MN)$.

В итоге τ есть трансляция, для которой $\tau(A) = A'$. □

▶ Теорема 3.2. *Группа трансляций плоскости трансляций $\mathscr{P}$ коммутативна.*

Доказательство. Пусть σ, τ — две трансляции и A — произвольная точка плоскости $\mathscr{P}$. Положим $\sigma(A) = B$ и $\tau(B) = C$.

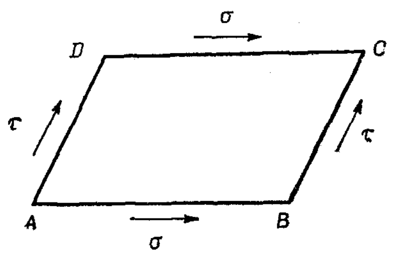


Рис. 10

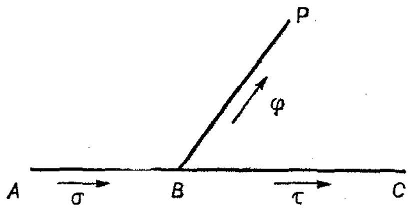


Рис. 11

a) Если точки A, B, C не коллинеарны, то точка $D = \tau(A)$ определяется условием «$(ABCD)$ есть параллелограмм», и поскольку $B = \sigma(A)$, то $C = \sigma(D)$ (см. рис. 10), откуда $\sigma \circ \tau(A) = \sigma(D) = C = \tau(B) = \tau \circ \sigma(A)$. Предложение 2.4 показывает, что тогда $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$.

b) Если точки A, B, C коллинеарны, выберем точку P, не лежащую на прямой (ABC) (см. рис. 11), и обозначим через $\varphi = \tau_B^P$ такую трансляцию, что $\varphi(B) = P$. В силу доказанного в п. a) трансляции φ и φ^{-1} коммутируют с σ и τ (так как, с одной стороны, точки A, B, P и, с другой стороны, точки P, B,

C не коллинеарны). Подобным же образом трансляции $\varphi\circ\sigma=\tau_A^P$ и $\tau\circ\varphi^{-1}=\tau_P^C$ коммутируют (в силу неколлинеарности точек A, P, C). Следовательно,

$$\tau\circ\sigma=(\tau\circ\varphi^{-1})\circ(\varphi\circ\sigma)=(\varphi\circ\sigma)\circ(\tau\circ\varphi^{-1})=$$
$$=(\sigma\circ\varphi)\circ(\varphi^{-1}\circ\tau)=\sigma\circ\tau,$$

откуда $\sigma\circ\tau=\tau\circ\sigma$ во всех случаях.

Заметим, что в случае b) используется *транзитивность* группы трансляций. □

4. ВЕКТОРНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ В ПЛОСКОСТИ ТРАНСЛЯЦИЙ

Отношение эквиполлентности

Определение 4.1. Две (упорядоченные) пары точек (A, B) и (C, D) плоскости трансляций $\mathscr{P}$ называются *эквиполлентными*, если (в обозначениях предыдущего параграфа) $\tau_A^B=\tau_C^D$.

Определенное так отношение очевидным образом является *отношением эквивалентности* на $\mathscr{P}^2$. Классы эквивалентности называем *векторами*; вектор, представляемый парой (A, B), обозначаем $\overrightarrow{AB}$. Множество всех векторов на $\mathscr{P}$ будет обозначаться $\vec{\mathscr{P}}$.

В частности, пары вида (A, A), где $A\in\mathscr{P}$, образуют класс эквивалентности, называемый *нулевым вектором* и обозначаемый $\vec{0}$ или просто 0.

Если $u=\overrightarrow{AB}$ — ненулевой вектор, то направление прямой (AB) не зависит от выбора представителя (A, B) вектора u; действительно, если (C, D) — другой представитель u, то соотношение $\tau_C^D=\tau_A^B$ влечет $(CD)\parallel(AB)$. По определению направление ненулевого вектора $u=\overrightarrow{AB}$ есть направление прямой (AB); два ненулевых вектора называются *коллинеарными*, если они имеют общее направление.

Геометрическая интерпретация эквиполлентности

Из построения образа точки M при трансляции $\tau_A^{A'}$ (предложение 2.4), с изменением обозначений, выводится следующее правило:

Предложение 4.1. a) Если $A=B$, то $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ равносильно $C=D$.

b) Если A, B, C не коллинеарны, то $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ равносильно утверждению «$(ABCD)$ — параллелограмм».

c) Если A, B, C коллинеарны и $A \neq B$, то $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ равносильно существованию таких двух точек E, F, что $(ABFE)$ и $(CDFE)$ — параллелограммы.

Можно было бы непосредственно изучать отношение эквиполлентности, приняв это правило за определение; симметричность и рефлексивность определенного таким способом бинарного отношения очевидны. Однако доказательство транзитивности исходя из аксиомы (d) (см. § 3) потребовало бы рассуждений, аналогичных тем, которые встретились в части b) доказательства теоремы 3.1.

Трансляции, совмещающие пары точек

Предложение 4.2. Эквиполлентность $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ равносильна эквиполлентности $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$.

Доказательство. В принятых обозначениях имеем

$$\tau_A^C=\tau_B^C \circ \tau_A^B \quad \text{и} \quad \tau_B^D=\tau_C^D \circ \tau_B^C.$$

С другой стороны, коммутативность группы трансляций и соотношение $\tau_A^B=\tau_C^D$ влекут $\tau_A^C=\tau_A^B \circ \tau_B^C = \tau_C^D \circ \tau_B^C = \tau_B^D$.

Иными словами, из $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ следует $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$; противоположная импликация получается изменением обозначений.

Следствие. *Для существования трансляции, отображающей пару (A, B) на пару (C, D), необходимо и достаточно, чтобы $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.*

Аддитивная группа векторов

По определению трансляция τ_A^B зависит только от вектора $u=\overrightarrow{AB}$; обозначим ее τ_u и будем называть ее *трансляцией на вектор u*.

При таких обозначениях отображение $u \mapsto \tau_u$ есть биекция множества векторов $\vec{\mathscr{P}}$ плоскости $\mathscr{P}$ на группу $\mathscr{T}$ трансляций $\mathscr{P}$; эта биекция позволяет перенести на $\vec{\mathscr{P}}$ структуру группы $\mathscr{T}$. Поскольку эта группа абелева, мы примем аддитивные обозначения и введем

Определение 4.2. *Суммой* $u+v$ двух векторов назовем вектор трансляции $\tau_u \circ \tau_v = \tau_v \circ \tau_u$.

Тогда очевидно, что $(\vec{\mathscr{P}}, +)$ *есть абелева группа* с нулевым вектором в качестве нейтрального элемента. С другой стороны, предложение 2.4 и определение 3.1 позволяют нам высказать

Предложение 4.3. Для всякой точки $A \in \mathscr{P}$ и всякого вектора u существуют единственная точка B и единственная точка C, такие, что $\overrightarrow{AB} = u$, $\overrightarrow{CA} = u$.

Иначе говоря, можно произвольно выбрать *начальную* или *конечную* точку пары, представляющей вектор u.

Предложение 4.4. Каковы бы ни были точки A, B, C плоскости $\mathscr{P}$, выполняется *соотношение Шаля*

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.$$

В частности (если $C = A$), вектор $\overrightarrow{BA}$ противоположен вектору $\overrightarrow{AB}$.

В самом деле, по определению 4.2, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ есть вектор трансляции $\tau_B^C \circ \tau_A^B = \tau_A^C$.

Заметим, наконец, что *векторы заданного направления d образуют подгруппу группы $(\vec{\mathscr{P}}, +)$, которую мы обозначим* $(d, +)$[1]), действительно, если $u = \overrightarrow{AB}$ и $v = \overrightarrow{AC}$ имеют общее направление d, то точки A, B, C коллинеарны и вектор $v - u = \overrightarrow{BC}$ имеет то же направление, что u и v.

[1]) При этом предполагается, что нулевой вектор принадлежит каждому направлению. — *Прим. перев.*

5. МАЛАЯ ТЕОРЕМА ФАЛЕСА В ПЛОСКОСТИ ТРАНСЛЯЦИЙ

Понятие *проектирования* немедленно распространяется на плоскости аффинного типа: пусть $\mathscr{P}$ — такая плоскость, $\mathscr{D}$ — прямая в $\mathscr{P}$ и δ — направление прямой, отличное от направления $\mathscr{D}$. Тогда *проектирование $\mathscr{P}$ на $\mathscr{D}$ в направлении* δ есть отображение $p^{\delta}_{\mathscr{D}}$: $\mathscr{P} \to \mathscr{D}$, которое каждой точке $M \in \mathscr{P}$ ставит в соответствие точку пересечения $\mathscr{D}$ с прямой направления δ, проходящей через M.

Начиная отсюда предполагается, что $\mathscr{P}$ — плоскость трансляций. Тогда имеет место

Предложение 5.1. Пусть (A, B) — пара точек $\mathscr{P}$. Проекциями пары (A, B) в направлении δ на две параллельные прямые $\mathscr{D}$, $\mathscr{D}'$ являются *две эквиполлентные пары* (C, D), (C', D').

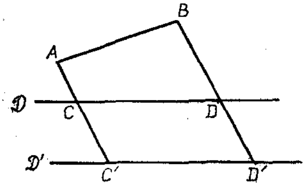


Рис. 12

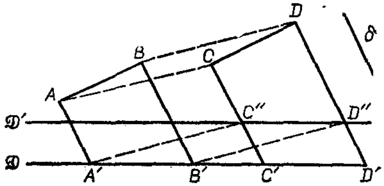


Рис. 13

Доказательство. Если $C = D$, то прямая (AB) имеет направление δ и $C' = D'$.

Если $C \neq D$, то $(CDD'C')$ — параллелограмм (рис. 12), откуда и вытекает результат.

Предложение 5.2. Образами при одном и том же проектировании p *двух эквиполлентных пар* (A, B) и (C, D) являются две эквиполлентные пары (A', B') и (C', D').

Доказательство. Пусть p — проектирование в направлении δ на прямую $\mathscr{D}$ и τ — трансляция, переводящая (A, B) в (C, D) (см. следствие из предложения 4.2). Пусть C'', D'' — проекции C, D в направлении δ на прямую $\mathscr{D}' = \tau(\mathscr{D})$ (рис. 13). Трансляция τ сохраняет параллелизм и $C''=\tau(A')$, $D''=$ $=\tau(B')$, откуда $\overrightarrow{C''D''}=\overrightarrow{A'B'}$. Далее, предложение 5.1 показывает, что $\overrightarrow{C''D''}=\overrightarrow{C'D'}$ и, следовательно, $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{C'D'}$. □

В тех же обозначениях из предложений 5.1, 5.2 следует, что вектор $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{p(A)\,p(B)}$ зависит только от вектора $\overrightarrow{AB}$, направления δ проектирования p и направления d прямой $\mathscr{D}$; мы будем обозначать его $\pi_d^\delta(\overrightarrow{AB})$. Таким путем получаем отображение π_d^δ из $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ на подгруппу $(d, +)$, состоящую из векторов направления d (см. конец § 4). Более того, если $u=\overrightarrow{AB}$ и $v=\overrightarrow{AC}$ — два произвольных вектора, то

$$\pi_d^\delta(v-u)=\pi_d^\delta(\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{p(B)\,p(C)}=$$
$$=\overrightarrow{p(A)\,p(C)}-\overrightarrow{p(A)\,p(B)}=\pi_d^\delta(v)-\pi_d^\delta(u).$$

Итак, можно сформулировать

Предложение 5.3. Для любой пары (d, δ) различных направлений прямых существует гомоморфизм π_d^δ из $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ на группу $(d, +)$ векторов направления d, такой, что для любой прямой $\mathscr{D}$ направления d и любой пары $(A, B)\in\mathscr{P}^2$ выполнено $\overrightarrow{p_{\mathscr{D}}^\delta(A)\,p_{\mathscr{D}}^\delta(B)}=\pi_d^\delta(\overrightarrow{AB})$.

Мы называем π_d^δ *проектированием* $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ *на* d *в направлении* δ. Ядром этого гомоморфизма является, очевидно, подгруппа $(\delta, +)$, состоящая из векторов направления δ. Отсюда вытекает

▶ Теорема 5.4. Пусть d, d', δ — три направления различных прямых. Тогда ограничение π_d^δ на $(d', +)$ есть *изоморфизм* $(d', +)$ на $(d, +)$.

Теорема 5.4 представляет собой «малую теорему Фалеса», которой при обучении придается наглядность с помощью такого ее следствия:

Следствие. Пусть $\mathscr{D}$, $\mathscr{D}'$ — две произвольные прямые плоскости трансляций $\mathscr{P}$, δ — направление, отличное от направлений прямых $\mathscr{D}$, $\mathscr{D}'$, и p — ограничение на $\mathscr{D}$ проектирования в направлении δ плоскости $\mathscr{P}$ на прямую $\mathscr{D}'$. Если $A_1, \ldots, A_n$ — последовательность точек $\mathscr{D}$, таких, что

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{A_2A_3} = \ldots = \overrightarrow{A_{n-1}A_n},$$

то их проекции $A'_i = p(A_i)$ удовлетворяют равенствам

$$\overrightarrow{A'_1A'_2} = \overrightarrow{A'_2A'_3} = \ldots = \overrightarrow{A'_{n-1}A'_n}.$$

Коротко говорят, что *проекция правильного подразделения $\mathscr{D}$ есть правильное подразделение $\mathscr{D}'$.*

Из этих результатов мы выведем одно примечательное свойство группы векторов плоскости $\mathscr{P}$.

▶ Предложение 5.5. Пусть $\mathscr{P}$ — плоскость трансляций, $(\vec{\mathscr{P}}, +)$ — группа ее векторов и $n \geqslant 2$ — целое число.

a) Если существует вектор $a \neq 0$, такой, что $na = 0$, то $nu = 0$ для всякого $u \in \vec{\mathscr{P}}$.

b) Если существует вектор a, такой, что $na \neq 0$, то для каждого вектора u найдется единственный вектор v, такой, что $nv = u$.

Доказательство. Мы можем считать, что $u \neq 0$.

a) Предположим, что $na = 0$ для некоторого $a \neq 0$. Пусть u — вектор, *неколлинеарный* a; если d — направление u и δ — направление $a - u$, то $\pi_d^\delta(a) = u$ (рис. 14), и по предложению 5.3 имеем $\pi_d^\delta(na) = nu = 0$.

Если $na = 0$, $a \neq 0$ и *u коллинеарен a*, то мы можем применить предыдущий результат к ненулевому вектору b, неколлинеарному a. Тогда $nb = 0$, откуда (в силу неколлинеарности u и b) $nu = 0$.

b) Если $na \neq 0$, то a) показывает, что $nb \neq 0$ для любого $b \neq 0$.

При заданном векторе $u \neq 0$ мы можем выбрать $b \neq 0$, неколлинеарный u. Если d и δ обозначают соответственно направления u и $nb - u$, то вектор

$v = \pi_d^\delta(b)$ (рис. 15) удовлетворяет равенству $nv = \pi_d^\delta(nb) = u$.

Наконец, если v, v' — два вектора, для которых $nv = nv' = u$, то $n(v'-v) = 0$ и, значит, $v' = v$. □

Следствие. Пусть p — наименьшее целое $\geqslant 1$, для которого можно указать вектор $a \neq 0$, такой, что $pa = 0$ (если такое p существует); если такого p нет, то положим $p = 0$ (в обоих случаях p назовем характеристикой $\mathscr{P}$).

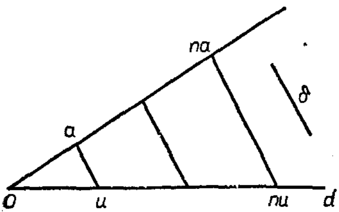


Рис. 14

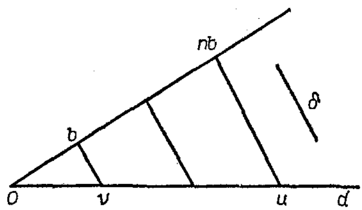


Рис. 15

a) Если $p \neq 0$, то p — простое число.

b) В любом случае, если целое $n \geqslant 1$ не является кратным p и $u \in \vec{\mathscr{P}}$ — произвольный вектор, то существует вектор v, такой, что $nv = u$.

Доказательство. a) Если $p \neq 0$ и не является простым, то можно положить $p = mn$, где $1 < m < p$ и $1 < n < p$. Тогда при $na \neq 0$ $(a \neq 0)$ соотношение $m(na) = mna = 0$ противоречит определению p.

b) Если $p \neq 0$ и целое $n \geqslant 1$ не является кратным p, то, разделив n на p, получим $n = pq + r$, где $0 < r < p$ и, следовательно, $na = ra \neq 0$, что позволяет применить предложение 5.5. При $p = 0$ результат получается немедленно. □

Отсюда вытекает, что $\vec{\mathscr{P}}$ допускает *структуру векторного пространства над* $\mathbb{Q}$, если $p \neq 0$, и *структуру векторного пространства над* $\mathbb{Z}_p$, если $p \neq 0$.

Эти результаты показывают, что аддитивная группа $\vec{\mathscr{P}}$ не является произвольной. Более глубокое исследование показывает, что на каждой подгруппе $(d, +)$

можно определить закон умножения, дистрибутивный справа, который превращает ее в «почти-тело»[1]) (см., например, [PI] или [ST]). Лишь аксиома Дезарга (см. § 6) позволит нам определить на каждой подгруппе $(d, +)$ структуру *тела*, а на $\vec{\mathscr{P}}$ структуру *векторного пространства*.

6. ДЕЗАРГОВА ПЛОСКОСТЬ

Определение 6.1. Плоскость аффинного типа называется *дезарговой*, если выполняется следующая аксиома:

▶ (D) (*Большая аффинная аксиома Дезарга.*) Пусть (ABC) и $(A'B'C')$ — два таких треугольника, что прямые (AA'), (BB') и (CC') различны и пересекаются в одной точке; тогда соотношения $(A'B') \parallel (AB)$ и $(A'C') \parallel (AC)$ влекут $(B'C') \parallel (BC)$.

Мы покажем, что всякая дезаргова плоскость является плоскостью трансляций. Для этого нужно доказать, что из аксиомы (D) следует аксиома (d) из теоремы 3.1. Предварительно покажем, что из аксиомы (D) вытекает обратное утверждение, а именно

Предложение 6.1. Пусть (ABC) и $(A'B'C')$ — два треугольника дезарговой плоскости, такие, что прямые (AA'), (BB') и (CC') различны и удовлетворяют условиям $(A'B') \parallel (AB)$, $(A'C') \parallel (AC)$ и $(B'C') \parallel (BC)$. Тогда прямые (AA'), (BB') и (CC') *пересекаются в одной точке или параллельны.*

Доказательство. Если прямые (AA'), (BB') и (CC') не параллельны, то две из них, для определенности (AA') и (BB'), имеют общую точку O; чтобы доказать, что и (CC') проходит через O, допустим противное. Прямая (OC) не может быть параллельной одновременно прямым $(A'C')$ и $(B'C')$; предположим для определенности, что она пересекает прямую $(A'C')$ в точке C'' (рис. 16). Применив свойство

[1]) В советской литературе более принят термин «система Веблена — Веддерберна». — *Прим. перев.*

(D) к треугольникам (ABC) и $(A'B'C')$, мы увидим, что соотношения $(A'B') \parallel (AB)$ и $(A'C'') \parallel (AC)$ влекут $(B'C'') \parallel (BC)$, и поскольку $(B'C') \parallel (BC)$, точки B', C', C'' коллинеарны. Так как точки A', C', C'' тоже коллинеарны, то $C'' = C'$, откуда и следует коллинеарность O, C, C'. □

Теперь мы можем доказать, что *из аксиомы* (D) *вытекает аксиома* (d).

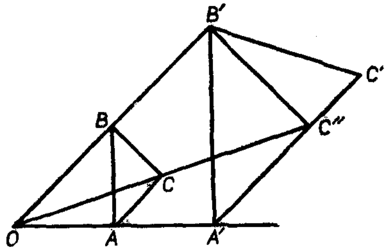


Рис. 16

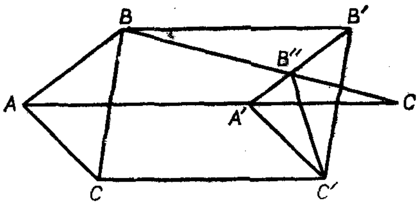


Рис. 17

Предложение 6.2. Пусть (ABC) и $(A'B'C')$ — два треугольника на дезарговой плоскости, такие, что прямые (AA'), (BB') и (CC') различны и параллельны. Тогда из условий $(A'B') \parallel (AB)$ и $(A'C') \parallel (AC)$ вытекает и $(B'C') \parallel (BC)$.

Доказательство. Если бы прямые $(B'C')$ и (BC) не были параллельными, то проходящая через C' параллель к (BC) пересекала бы прямую $(A'B')$ в некоторой точке B'', отличной от B' (рис. 17), а прямая (BB'') пересекла бы прямую (AA') в некоторой точке O. По предложению 6.1 соотношения

$(A'B'') \parallel (AB)$, $(A'C') \parallel (AC)$ и $(B''C') \parallel (BC)$ привели бы к пересечению прямых (AA'), (BB') и (CC') в точке O, что противоречит предположению $(AA') \parallel \parallel (CC')$. □

▶ Следствие. Любая дезаргова плоскость есть плоскость трансляций.

Это утверждение можно также установить, применяя гомотетии (см. упр V. 3).

Существование гомотетий

По изложенному выше аксиома (D) ведет к существованию транзитивной группы *трансляций*; мы увидим, что она влечет и существование *гомотетий* с заданным центром.

▶ Теорема 6.3. Пусть $\mathscr{P}$ — дезаргова плоскость. Для любой тройки коллинеарных точек (O, A, A'), такой, что $A \neq O$ и $A' \neq O$, существует *единственная гомотетия* h с центром O, такая, что $h(A) = A'$.

Доказательство. Единственность уже была установлена (предложение 2.6). Для доказательства существования h выполним конструкцию, аналогичную той, которую мы провели для трансляции $\tau_A^{A'}$ (теорема 3.1).

Ввиду тривиальности случая $A = A'$ предположим, что $A' \neq A$, и обозначим через $\mathscr{D}$ прямую (OAA'). Выберем точку $B \in \mathscr{P} \setminus \mathscr{D}$ и обозначим через B' точку пересечения прямой (OB) с проведенной через A' параллелью к (AB). Определим теперь отображение h плоскости $\mathscr{P}$ в $\mathscr{P}$ следующими условиями:

i) $h(O) = O$;

ii) если $M \in \mathscr{P} \setminus \mathscr{D}$, то точка $M' = h(M)$ коллинеарна с O и M и $(A'M') \parallel (AM)$ (рис. 18);

iii) если $M \in \mathscr{D} \setminus \{O\}$, то $M' = h(M)$ коллинеарна с O и M и $(B'M') \parallel (BM)$ (рис. 19).

Очевидно, что h есть биекция $\mathscr{P}$ на $\mathscr{P}$, имеющая единственную неподвижную точку O. Для того чтобы доказать, что h — гомотетия, достаточно проверить, что для любой пары точек (M, N) из $\mathscr{P} \setminus \{O\}$ точки

$M' = h(M)$ и $N' = h(N)$ удовлетворяют условию $(M'N') \parallel (MN)$.

Первый случай. Ни одна из точек M, N не принадлежит прямой $\mathscr{D} = (AA')$ (рис. 18).

В этом случае из $(A'M') \parallel (AM)$ и $(A'N') \parallel (AN)$, применяя (D), получим $(M'N') \parallel (MN)$.

Второй случай. Обе точки M, N принадлежат прямой $\mathscr{D}$; тогда прямые (MN) и $(M'N')$ совпадают.

Третий случай. Точка M лежит на прямой $\mathscr{D} = (AA')$, а точка N не лежит ни на какой из прямых (AA'), (BB') (см. рис. 19).

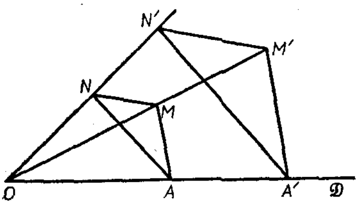


Рис. 18

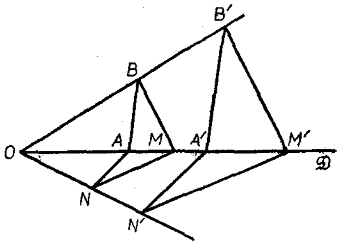


Рис. 19

Первое применение аксиомы (D) дает $(B'N') \parallel (BN)$, и поскольку $(B'M') \parallel (BM)$ по построению, повторное применение (D) дает $(M'N') \parallel (MN)$.

Четвертый случай. Точка M лежит на прямой (AA'), а точка N на прямой (BB') (построение рисунка предоставляется читателю).

Так как плоскость $\mathscr{P}$ не может сводиться к объединению пары пересекающихся прямых (AA'), (BB') (см. упр. V.2), то в $\mathscr{P}$ найдется точка P, не принадлежащая ни одной из этих прямых. Положим $P' = h(P)$. Обращаясь к первому случаю, найдем, что $(N'P') \parallel (NP)$. Согласно третьему случаю, $(M'P') \parallel (MP)$. Отсюда $(M'N') \parallel (MN)$ получается новым применением аксиомы (D). □

Отметим строгую аналогию этого рассмотрения с частью b) доказательства теоремы 3.1.

Для полноты этой аналогии с теоремой 3.1 можно без труда установить такое обращение теоремы 6.3:

Пусть $\mathcal{P}$ — *плоскость аффинного типа, такая, что для любой тройки* (O, A, A') *различных коллинеарных точек существует гомотетия* h *с центром* O, *такая, что* $h(A) = A'$. *Тогда плоскость* $\mathcal{P}$ *дезаргова.*

7. ПОСТРОЕНИЕ ТЕЛА, АССОЦИИРОВАННОГО С ДЕЗАРГОВОЙ ПЛОСКОСТЬЮ

Векторные гомотетии

Поскольку гомотетии плоскости аффинного типа сохраняют параллелизм, они переводят любой параллелограмм снова в параллелограмм. Отсюда легко выводится

Предложение 7.1. В плоскости трансляций образы при гомотетии h двух эквиполлентных пар (A, B) и (C, D) — также эквиполлентные пары.

Следствие. С каждой гомотетией h плоскости трансляций $\mathcal{P}$ ассоциируется отображение $\vec{h}$ из $\vec{\mathcal{P}}$ в $\vec{\mathcal{P}}$, для которого

$$(\forall (A, B) \in \mathcal{P}^2) \qquad \overrightarrow{h(A)\,h(B)} = \vec{h}(\overrightarrow{AB}).$$

Мы называем $\vec{h}$ *векторной гомотетией* и *векторной частью* h (слово «линейной» не имело бы в данный момент смысла).

Предложение 7.2. Если h — гомотетия плоскости трансляций $\mathcal{P}$, то ее векторная часть есть биекция $\vec{\mathcal{P}}$ на $\vec{\mathcal{P}}$, для которой $\vec{h}(-u) = -\vec{h}(u)$ и

$$(\forall (u, v) \in \vec{\mathcal{P}}^2) \qquad \vec{h}(u + v) = \vec{h}(u) + \vec{h}(v). \tag{1}$$

С другой стороны, если h_1, h_2 — две гомотетии с общим центром, то векторная часть $h_2 \circ h_1$ есть $\vec{h}_2 \circ \vec{h}_1$.

Наконец, если h — гомотетия с центром O и τ — трансляция, то $\tau \circ h \circ \tau^{-1}$ — гомотетия с центром $\tau(O)$ и с той же векторной частью, что и h.

Доказательство. a) Если h = гомотетия с центром O, то $\vec{h}$ — отображение $\vec{\mathscr{P}} \to \vec{\mathscr{P}}$, $\overrightarrow{OM} \longmapsto \overrightarrow{Oh(M)}$, очевидным образом биективное.

Если $u = \overrightarrow{OA}$ и $v = \overrightarrow{OB}$ — два элемента $\vec{\mathscr{P}}$, то

$$\vec{h}(v-u) = \vec{h}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{h(A)\,h(B)} = \overrightarrow{Oh(B)} - \overrightarrow{Oh(A)}$$

или

$$\vec{h}(v-u) = \vec{h}(v) - \vec{h}(u),$$

откуда следуют равенства $\vec{h}(-u) = -\vec{h}(u)$ и (1).

b) Если $h = h_2 \circ h_1$ — композиция двух гомотетий с центром O, то для любой пары (A, B) точек $\mathscr{P}$

$$\overrightarrow{h(A)\,h(B)} = \overrightarrow{h_2(A_1)\,h_2(B_1)}, \quad \text{где} \quad A_1 = h_1(A),\ B_1 = h_1(B),$$

или

$$\overrightarrow{h(A)\,h(B)} = \vec{h}_2(\overrightarrow{A_1B_1}) = \vec{h}_2 \circ \vec{h}_1(\overrightarrow{AB}),$$

что и требовалось установить.

c) Если h — гомотетия с центром O и τ — трансляция, то $h' = \tau \circ h \circ \tau^{-1}$ — дилатация, допускающая неподвижную точку $\tau(O)$, и, следовательно, гомотетия с центром $\tau(O)$; соотношение $\vec{h}' = \vec{h}$ следует из того, что для любой пары (A, B) точек $\mathscr{P}$ имеем $\overrightarrow{\tau(A)\,\tau(B)} = \overrightarrow{AB}$. □

Следствие. Векторные гомотетии образуют группу H биекций $\vec{\mathscr{P}}$; если H_O обозначает группу гомотетий с заданным центром O, то отображение $H_O \to H$, $h \longmapsto \vec{h}$ есть изоморфизм групп.

Предложение 7.3. *Для каждого вектора $u \neq 0$ и любой гомотетии λ множества $\vec{\mathscr{P}}$ вектор $\lambda(u)$ коллинеарен u.*

Обратно, если u, v — *два ненулевых коллинеарных вектора на дезарговой плоскости* $\mathscr{P}$, то существует единственная векторная гомотетия λ множества $\vec{\mathscr{P}}$, такая, что $\lambda(u) = v$.

Доказательство. В силу вышеизложенного дело сводится к известным свойствам гомотетий с данным центром O (предложение 2.1 и теорема 6.3). □

Полученные свойства позволят нам определить при условии дезарговости $\mathscr{P}$ векторную структуру на $\vec{\mathscr{P}}$.

▶ *Обозначения и определения.* Обозначим через $\mathscr{P}$ *дезаргову плоскость*, через ω — нулевое отображение $\vec{\mathscr{P}}$ (ставящее в соответствие каждому вектору u нулевой вектор) и положим $K = H \cup \{\omega\}$, где H по-прежнему обозначает группу векторных гомотетий $\vec{\mathscr{P}}$.

Определим произведение $\lambda\mu$ двух элементов λ, μ из K как *их композицию* $\lambda \circ \mu$, что влечет $\lambda\omega = \omega\lambda = \omega$ для всех $\lambda \in K$.

С другой стороны, *образом вектора* u при действии элемента $\lambda \in K$ назовем *произведение* вектора u на λ, обозначаемое просто λu; тем самым для всех $u \in \vec{\mathscr{P}}$

$$\omega u = 0 \quad \text{и} \quad (\forall (\lambda, \mu) \in K^2) \quad \lambda(\mu u) = (\lambda\mu) u. \tag{2}$$

Структура аддитивной группы на K

Предложение 7.4. Если λ, μ — элементы K, то отображение ν: $\vec{\mathscr{P}} \to \vec{\mathscr{P}}$, $u \mapsto \mu(u) - \lambda(u)$ есть элемент K, который мы обозначим $\mu - \lambda$.

Доказательство. Для фиксированной точки O в $\mathscr{P}$ обозначим через f отображение $\mathscr{P}$ в $\mathscr{P}$, заданное условием

$$(\forall M \in \mathscr{P}) \quad \overrightarrow{Of(M)} = \mu\overrightarrow{OM} - \lambda\overrightarrow{OM}.$$

Тогда точки O, M и $f(M)$ коллинеарны; для любой пары (M, N) различных точек

$$\overrightarrow{f(M)f(N)} = \mu\overrightarrow{MN} - \lambda\overrightarrow{MN}. \tag{3}$$

Если $\lambda = \mu$, то $\nu = \omega$ и результат тривиален. Если $\lambda \neq \mu$, то соотношение (3) показывает, что f инъективно (см. предложение 7.3) и прямая $(f(M)f(N))$ параллельна прямой (MN). Обозначая через A некоторую точку в $\mathscr{P} \setminus \{O\}$ и полагая $A' = f(A)$, мы легко получаем, что f совпадает с гомотетией h с центром O, удовлетворяющей условию $h(A) = A'$, хотя мы и не предполагали заранее сюръективности f (см. построение h в доказательстве теоремы 6.1). Итак, f — гомотетия и $\nu = \vec{f}$. □

В частности, если $\mu = \omega$, отображение $-\lambda$: $u \mapsto -\lambda u$ есть элемент K и можно определить сумму двух элементов $\lambda + \mu$ из K как $\lambda + \mu = \lambda - (-\mu)$; тогда

$$(\forall u \in \vec{\mathscr{P}}) \quad (\lambda + \mu) u = \lambda u + \mu u. \tag{4}$$

Из того что $\vec{\mathscr{P}}$ — абелева группа, легко вывести, что $(K, +)$ есть *абелева группа* с нейтральным элементом ω.

Структура тела на K

Мы уже знаем, что $(K, +)$ — абелева группа и $H = K \setminus \{\omega\}$ — группа по отношению к композиции отображений. Для того чтобы доказать, что $(K, +, \circ)$ — *тело*, достаточно обосновать распределительные законы:

Предложение 7.5. Для любых элементов $\lambda, \mu, \nu \in K$ выполняются равенства

$$(\lambda + \mu)\nu = \lambda\nu + \mu\nu \quad (5) \quad \text{и} \quad \nu(\lambda + \mu) = \nu\lambda + \nu\mu. \quad (6)$$

Доказательство. Для любого $u \in \vec{\mathscr{P}}$ по определению суммы $\lambda + \mu$ имеем

$$(\lambda + \mu)\nu u = (\lambda + \mu) \circ \nu(u) =$$
$$= \lambda \circ \nu(u) + \mu \circ \nu u = \lambda\nu u + \mu\nu u,$$

т. е. выполнено (5). Точно так же, если $\nu \neq \omega$, то, применяя (1) при $\vec{h} = \nu$, имеем

$$[\nu \cdot (\lambda + \mu)] u = \nu(\lambda(u) + \mu(u)) =$$
$$= \nu \circ \lambda(u) + \nu \circ \mu(u) = \nu\lambda u + \nu\mu u,$$

т. е. выполнено (6). При $\nu = \omega$ результат тривиален. □

Теперь может быть сформулирована

▶ Теорема 7.6. Пусть $\mathscr{P}$ — дезаргова плоскость аффинного типа, H — группа векторных гомотетий и $K = H \cup \{\omega\}$, где ω — нулевое отображение $\vec{\mathscr{P}}$. Тогда

a) если сложение в K определено формулой (4), то $(K, +, \circ)$ есть тело с нулевым элементом ω;

b) внешнее умножение $K \times \vec{\mathscr{P}} \to \vec{\mathscr{P}}$, $(\lambda, u) \mapsto \lambda(u)$ определяет на группе $(\vec{\mathscr{P}}, +)$ структуру векторного пространства над K размерности 2.

Доказательство. Утверждение a) вытекает из предыдущего. Соотношения (2) и (4) показывают, что $\vec{\mathscr{P}}$ есть векторное пространство над K. Наконец, легко видеть, что если u, v — два неколлинеарных вектора, то всякий вектор w из $\vec{\mathscr{P}}$ единственным образом разлагается в сумму некоторого вектора x, коллинеарного u, и вектора y, коллинеарного v. Тогда предложение 7.3 показывает, что найдется единственная пара $(\lambda, \mu) \in K \times K$, такая, что $x = \lambda u$ и $y = \mu v$, откуда вытекает единственность разложения $w = \lambda u + \mu v$. Этим устанавливается, что размерность $\vec{\mathscr{P}}$ равна 2. □

▶ Следствие. Всякая дезаргова плоскость аффинного типа $\mathscr{P}$ допускает структуру *аффинной плоскости* над ассоциированным телом K.

Доказательство. Прежде всего группа $(\vec{\mathscr{P}}, +)$ действует на $\mathscr{P}$ с помощью трансляций τ_u просто транзитивно (см. § 3). С другой стороны, если A, A' — две различные точки какой-либо прямой $\mathscr{D}$ в $\mathscr{P}$, то предыдущее исследование показывает, что $\mathscr{D}$ есть множество точек M, таких, что $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AA'}$, где λ пробегает K. Таким образом, «прямые» $\mathscr{P}$ совпадают с прямыми аффинной структуры, определенной на $\mathscr{P}$ действием $\vec{\mathscr{P}}$.

► В заключение приведем формулировку в краткой форме: *для того чтобы плоскость аффинного типа была аффинной плоскостью, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла аффинной аксиоме Дезарга* (D).

В самом деле, необходимость условия нам известна.

Возврат к проективному случаю

Из полученных результатов легко выводится

► Теорема 7.7. Для того чтобы плоскость проективного типа была проективным пространством размерности 2, необходимо и достаточно, чтобы выполнялась следующая аксиома:

(ДР) (*Проективная аксиома Дезарга.*) Если (ABC) и $(A'B'C')$ — такие два треугольника, что прямые (AA'), (BB') и (CC') различны и имеют общую точку O, то точки $P=(BC)\cap(B'C')$, $Q=(CA)\cap(C'A')$ и $R=(AB)\cap(A'B')$ коллинеарны.

Доказательство. Мы знаем, что условие необходимо (теорема IV. 10.1); обратно, если условие выполнено и Δ — какая-нибудь прямая в Π, то множество $\Pi\setminus\Delta$ обладает структурой плоскости аффинного типа, удовлетворяющей аксиомам (d) и (D). Следовательно, $\Pi\setminus\Delta$ есть аффинная плоскость и Π — проективная плоскость.

Замечания. 1) В действительности достаточно, чтобы $\Pi\setminus\Delta$ удовлетворяла аксиоме (D), что приводит лишь к предположению, что свойство (DP) выполнено, если точки Q, R принадлежат *заданной* прямой Δ, а точка O ей не принадлежит.

2) Для того чтобы плоскость $\Pi\setminus\Delta$ была *плоскостью трансляций*, достаточно предположить справедливость (DP) лишь при условии, что точка O *принадлежит* прямой (QR). Плоскости проективного типа, удовлетворяющие этому ослабленному предположению (называемому малой проективной аксиомой Дезарга), изучала Р. Муфанг. Они называются «альтернативными плоскостями» в связи с природой ал-

гебраической структуры, которую они индуцируют (см. [PI], [ST]).

Напомним, наконец, что *свойство Фано* (см. предложение IV. 7.3) позволяет выяснить, будет ли тело, ассоциированное с дезарговой плоскостью, *характеристики* 2 или нет.

8. ПЛОСКОСТЬ ПАППА — ПАСКАЛЯ

▶ Определение 8.1. Плоскость $\mathcal{P}$ аффинного типа называется *папповой* (или *паскалевой*), если она удовлетворяет следующей аксиоме:

(PA) (Аффинная аксиома Паппа.) Если (A, B, C) и (A', B', C') — две различные тройки коллинеарных точек, то соотношения $(AB') \parallel (BA')$ и $(AC') \parallel (CA')$ влекут $(BC') \parallel (CB')$.

По предыдущему исследованию и теореме IV. 11.1 мы знаем, что всякая плоскость аффинного типа, удовлетворяющая аксиоме Дезарга (D) и аксиоме Паппа (PA), есть аффинная плоскость над коммутативным телом (т. е. полем). В действительности, как мы увидим далее, аксиома (PA) влечет и аксиому (D).

▶ Теорема 8.1 (Гессенберга). Каждая паппова плоскость является дезарговой (а значит, и плоскостью трансляций).

Доказательство. Предположим, что плоскость $\mathcal{P}$ удовлетворяет аксиоме (PA), и пусть (ABC), $(AB'C')$ — —два таких треугольника, что прямые (AA'), (BB'), (CC') различны и пересекаются в точке O; предположим, кроме того, что $(A'B') \parallel (AB)$ и $(A'C') \parallel (AC)$.

Обозначим через $\mathcal{D}$ прямую, проведенную через O параллельно (AC), и через D — точку $\mathcal{D} \cap (AB)$ (см. рис. 20). Поскольку прямая $(B'D)$ пересекает $\mathcal{D}$, она также пересекает и прямую $(A'C')$ в некоторой точке E. Применим свойство (PA) к тройкам (D, E, B'), (A', O, A); очевидные соотношения $(DO) \parallel$ $\parallel (EA')$, $(DA) \parallel (B'A')$ повлекут $(EA) \parallel (B'O)$. Отсюда следует, что прямая (EA) пересекает прямую (OC) в некоторой точке F и что $(FA) \parallel (OB)$.

Применяя свойство (PA) к тройкам (O, C, F) и (A, D, B), мы видим, что из условий $(OD) \parallel (CA)$, $(OB) \parallel (FA)$ вытекает $(CB) \parallel (FD)$. Наконец, применив свойство (PA) к тройкам (O, C', F) и (E, D, B'), получим, что соотношения $(OD) \parallel (C'E)$, $(OB') \parallel (EF)$ влекут $(C'B') \parallel (FD)$ и, значит, $(C'B') \parallel (CB)$. Это и доказывает, что на $\mathscr{P}$ выполняется аксиома (D). □

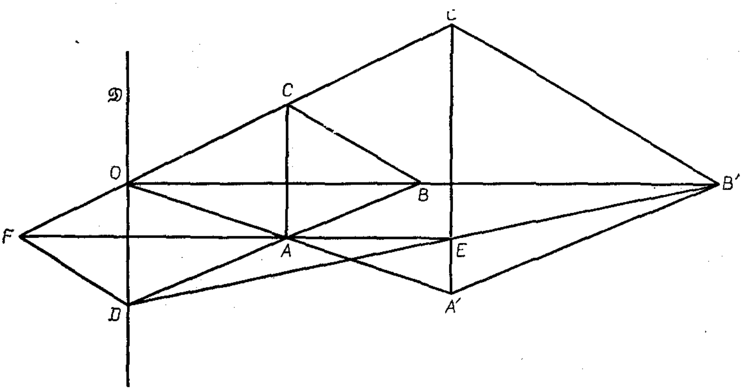


Рис. 20

► Следствие. Для того чтобы плоскость аффинного типа была *аффинной плоскостью над полем*, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла аффинной аксиоме Паппа (PA).

Возврат к проективному случаю

Из полученных результатов немедленно выводится

► Теорема 8.2. Для того чтобы плоскость П проективного типа была проективным пространством размерности 2 над полем, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла следующей аксиоме:

(PP) (Проективная аксиома Паппа.) Если (A, B, C) и (A', B', C') — две тройки различных коллинеарных точек, то точки $P=(BC')\cap(CB')$, $Q=(CA')\cap(AC')$ и $R=(AB')\cap(BA')$ коллинеарны.

Отметим простоту аксиом, лежащих в основании плоской проективной геометрии.

Перейдем теперь к изучению аксиом, на которых основана плоская аффинная геометрия *над полем действительных чисел* (§ 9 и 10). Отправляясь от некоторой плоскости трансляций, мы введем аксиомы порядка и воспользуемся аксиоматическими характеризациями $\mathbb{R}$, установленными в гл. I. Аксиомы Дезарга и Паппа появятся в этом случае как следствия аксиом порядка.

9. УПОРЯДОЧЕННЫЕ ПЛОСКОСТИ, АРХИМЕДОВЫ ПЛОСКОСТИ

▶ Определение 9.1. Плоскость аффинного типа $\mathcal{P}$ называется *упорядоченной*, если на каждой ее прямой установлены два взаимно обратных *отношения линейного порядка* (позволяющие определить отрезки прямой) так, что выполняется следующая аксиома:

▶ (O) (Аксиома Паша.) Если A, B, C — три неколлинеарные точки, то любая прямая, пересекающая один из отрезков [AB], [BC], [CA], пересекает и второй.

Эта аксиома равносильна следующему свойству, позволяющему определить *полуплоскости*, ограниченные прямой $\mathcal{D}$:

▶ (O′) Для каждой прямой $\mathcal{D}$ плоскости $\mathcal{P}$ определено отношение эквивалентности на $\mathcal{P}\setminus\mathcal{D}$ условием: $A\mathcal{R}B$, если отрезок $[AB]$ не пересекается с прямой $\mathcal{D}$.

Действительно, определенные так отношения симметричны и рефлексивны, а их транзитивность равносильна обратному к противоположному для утверждения (O):

«Если отрезки $[AB]$ и $[BC]$ не пересекаются с прямой $\mathcal{D}$, то с ней не пересекается и отрезок $[AC]$».

Будем говорить, что прямая *ориентирована*, если на ней выбрано одно из двух взаимно обратных отношений порядка.

Теорема 9.1. Если $\mathscr{P}$ — упорядоченная плоскость аффинного типа, то проектирование ориентированной прямой $\mathscr{D}$ на ориентированную прямую $\mathscr{D}'$ в направлении δ монотонно.

Доказательство. Пусть A, B, C — три точки на $\mathscr{D}$, такие, что B лежит между A и C, т. е. принадлежит отрезку $[AC]$, и пусть A', B', C' — их проекции на $\mathscr{D}'$ (рис. 21). Тогда прямая (BB') пересекает сторону

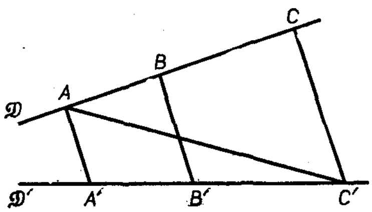


Рис. 21

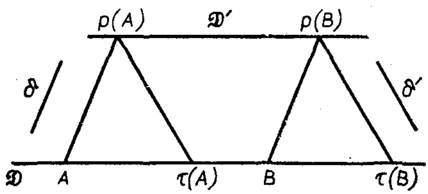


Рис. 22

$[AC]$ треугольника (ACC'), и так как она параллельна его стороне $[CC']$, то она пересекает третью сторону этого треугольника $[AC']$. Аналогично, поскольку прямая (BB') параллельна стороне $[AA']$ треугольника $(AA'C')$ и пересекает его сторону $[AC']$, она пересекает и сторону $[A'C']$ того же треугольника. Этим доказано, что проектирование сохраняет отношение «лежать между». Итак, проектирование p есть монотонное отображение, каковы бы ни были выбранные ориентации прямых $\mathscr{D}$ и $\mathscr{D}'$ (случай, когда $p(\mathscr{D})$ сводится к одной точке, тривиален). □

Упорядоченные плоскости трансляций

Предложение 9.2. Если $\mathscr{P}$ — *упорядоченная плоскость трансляций*, то трансляции любой ориентированной прямой являются *возрастающими отображениями.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{D}$ — ориентированная прямая в $\mathscr{P}$ и τ — ограничение на $\mathscr{D}$ трансляции на вектор u параллельно $\mathscr{D}$, сохраняющей $\mathscr{D}$; можно считать, что $u \neq 0$.

a) Покажем сначала, что τ *монотонно*. Для этого выберем прямую $\mathscr{D}'$, параллельную $\mathscr{D}$ ($\mathscr{D}' \neq \mathscr{D}$), и проектирование p прямой $\mathscr{D}$ на $\mathscr{D}'$ в произвольном направлении δ. Тогда направление δ' прямой $(\tau(A)p(A))$ не зависит от выбора точки A на $\mathscr{D}$ (см. рис. 22), так как для любой пары (A, B) точек $\mathscr{D}$ имеем $\overrightarrow{p(A)p(B)} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\tau(A)\tau(B)}$, и потому $(\tau(B)p(B)) \parallel (\tau(A)p(B))$. Обозначая через p' проектирование $\mathscr{D}'$ в направлении δ' на $\mathscr{D}$, получим $\tau = p' \circ p$, и поскольку p и p' монотонны при любой ориентации $\mathscr{D}'$, то τ монотонно и даже строго монотонно в силу биективности.

b) Поскольку τ строго монотонно, то так же обстоит дело и с трансляцией τ^n на вектор nu при любом целом $n \geqslant 1$. Следовательно, $nu \neq 0$ при $n \geqslant 1$ и, в частности, $2u \neq 0$. По исследованию, проведенному в § 5, отсюда следует существование вектора v, для которого $u = 2v$. Трансляция на вектор v сохраняет $\mathscr{D}$, а ее ограничение на $\mathscr{D}$ является строго монотонной биекцией σ, такой, что $\tau = \sigma \circ \sigma$. Отсюда следует строгое возрастание τ. □

Следствие. Две эквиполлентные пары точек (A, B), (A', B') на одной и той же ориентированной прямой $\mathscr{D}$ находятся в одинаковом отношении порядка.

В самом деле, существует такая трансляция τ, что $A' = \tau(A)$ и $B' = \tau(B)$. □

Эти результаты позволят нам упорядочить группу $(d, +)$ векторов $\mathscr{P}$ с заданным направлением d. Но для большей наглядности мы используем *пунктированные* прямые в направлении d: пунктированной прямой $\mathscr{D}_O$ называется прямая $\mathscr{D}$, на которой выбрана некоторая начальная точка (начало) O. Если M, N — две точки на $\mathscr{D}_O$, то мы определим точку $P = M + N$ равенством $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$. Тогда $\mathscr{D}_O$ превратится в *группу*, изоморфную группе $(d, +)$ векторов того же направления d, что и $\mathscr{D}$.

Предложение 9.3. В упорядоченной плоскости трансляций каждая пунктированная и ориентированная прямая $\mathscr{D}_O$ является *упорядоченной абелевой группой*. Более того, если $\mathscr{D}'_{O'}$ — другая пунктированная и ориентированная прямая и p — *проектирование* $\mathscr{D}$ на $\mathscr{D}'$, такое, что $p(O) = O'$, то p есть *монотонный гомоморфизм* групп.

Доказательство. Пусть A, B, C — три точки прямой $\mathscr{D}_O$, такие, что $B > A$, и $A' = A + C$, $B' = B + C$ — точки прямой $\mathscr{D}$, определенные условиями $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{OC}$. Тогда $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ и, по предложению 9.2, $B' > A'$. Итак, $\mathscr{D}_O$ в самом деле есть упорядоченная группа. Второе утверждение вытекает из теорем 9.1 и 5.4. □

Архимедовы плоскости

▶ Определение 9.2. *Упорядоченная плоскость трансляций* называется *архимедовой*, если каждая ее пунктированная и ориентированная прямая является *архимедовой группой* (см. § I. 5).

Предложение 9.4. *Для того чтобы упорядоченная плоскость трансляций была архимедовой, достаточно, чтобы на ней существовала пунктированная и ориентированная прямая $\mathscr{D}_O$, составляющая архимедову группу.*

Доказательство. Если пунктированная прямая $\mathscr{D}_O$ архимедова по отношению к одному из своих упорядочений, то же самое имеет место и для второго упорядочения; она останется архимедовой и при выборе нового начала O', так как трансляция $\tau_{\overrightarrow{OO'}}\colon \mathscr{D}_O \to \mathscr{D}_{O'}$

является строго монотонным гомоморфизмом. Наконец, если $\mathscr{D}'_{O'}$ — другая пунктированная ориентированная прямая, то можно свести дело к случаю, когда $O \notin \mathscr{D}'$, $O' \notin \mathscr{D}$; тогда проектирование p в направлении (OO') прямой $\mathscr{D}_O$ на $\mathscr{D}'_{O'}$ будет строго монотонным гомоморфизмом по предложению 9.3. Отсюда следует, что $\mathscr{D}'_{O'}$ — также архимедова группа.

Применением следствия из теоремы I. 5.2 немедленно получается

Предложение 9.5. Пусть $\mathscr{D}_O$ — пунктированная ориентированная прямая архимедовой плоскости.

Тогда для каждой точки $A \in \mathscr{D} \setminus \{O\}$ существует *единственный монотонный гомоморфизм* θ_O^A группы $\mathscr{D}_O$ в $(\mathbb{R}, +)$, такой, что $\theta_O^A(A) = 1$.

В этом случае действительное число $\theta_O^A(M)$ называется *абсциссой точки* M в репере (O, A) прямой $\mathscr{D}$; эта абсцисса обозначается $\overline{OM}$, если точка A фиксирована.

Отметим, что гомоморфизм θ_O^A не зависит от ориентации $\mathscr{D}$, и напомним, что он *строго монотонен*; если $\mathscr{D}$ ориентирована так, что $A > 0$, то он строго возрастает.

▶ Теорема 9.6 (Сильная теорема Фалеса.) Пусть $\mathscr{D}$, $\mathscr{D}'$ — прямые, пересекающиеся в O, A — точка на $\mathscr{D} \setminus \{O\}$ и A' — точка на $\mathscr{D}' \setminus \{O\}$. В принятых выше обозначениях соотношение $\theta_O^A(M) = \theta_O^A(M')$ (где $M \in \mathscr{D}$ и $M' \in \mathscr{D}'$) равносильно $(MM') \parallel (AA')$.

Другими словами, если $\mathscr{D}$, $\mathscr{D}'$ отнесены к реперам (O, A), (O, A'), то проектирование p прямой $\mathscr{D}$ на $\mathscr{D}'$ в направлении (AA') *сохраняет абсциссы*.

Доказательство. Отображение $f = \theta_O^{A'} \circ p$ есть монотонный гомоморфизм $\mathscr{D}_O$ в $\mathbb{R}$, для которого $f(A) = 1$, и потому он равен θ_O^A. В силу инъективности гомоморфизма $\theta_O^{A'}$ равенство $\theta_O^{A'}(M') = \theta_O^A(M)$ равносильно $M' = p(M)$ и к тому же $(MM') \parallel (AA')$. □

10. АФФИННАЯ СТРУКТУРА АРХИМЕДОВОЙ ПЛОСКОСТИ

Образ пунктированной прямой $\mathscr{D}_O$ при одном из гомоморфизмов θ_O^A является, очевидно, *подгруппой* $(\mathbb{R}, +)$. Мы увидим, что эта подгруппа в действительности является *подполем* поля $\mathbb{R}$ (предложение 10.1) и не зависит ни от выбора $\mathscr{D}_O$, ни от точки A (предложение 10.2).

Прежде всего, чтобы доказать, что $\theta_O^A(\mathscr{D})$ — подполе поля $\mathbb{R}$, достаточно установить, что частное двух его элементов ему принадлежит; это и утверждается в следующем предложении.

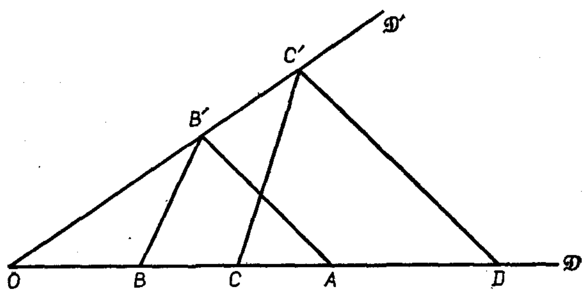


Рис. 23

Предложение 10.1. Пусть $\mathscr{D}_O$ — пунктированная прямая архимедовой плоскости. Каковы бы ни были точки A, B, C из $\mathscr{D} \setminus \{O\}$, найдется точка $D \in \mathscr{D} \setminus \{O\}$, такая, что $\theta_O^A(D) = \theta_O^A(C)/\theta_O^A(B)$.

Доказательство. При фиксированных на $\mathscr{D}$ точках A, B отображение $f\colon \mathscr{D} \to \mathbb{R}$, $M \mapsto \theta_O^A(M)/\theta_O^A(B)$ есть монотонный гомоморфизм $\mathscr{D}_O$ в $(\mathbb{R}, +)$, такой, что $f(B) = 1$, и потому равный θ_O^B. Значит, нам следует построить такую точку D, что $\theta_O^A(D) = \theta_O^B(C)$.

Для этого проведем через O отличную от $\mathscr{D}$ прямую $\mathscr{D}'$ и выберем точку B' на $\mathscr{D}' \setminus \{O\}$ (рис. 23). Построим на $\mathscr{D}'$ точку C', такую, что $(CC') \parallel (BB')$, и на $\mathscr{D}$ точку D, такую, что $(C'D) \parallel (B'A)$. Обозначив через $\theta_O^{B'}$ гомоморфизм $\mathscr{D}'_O$ в $(\mathbb{R}, +)$, для которого $\theta_O^{B'}(B') = 1$, и применив теорему Фалеса 9.6, получим

$\theta_O^A(D) = \theta_O^{B'}(C') = \theta_O^B(C)$. Следовательно, D — искомая точка. □

Если обозначить абсциссу точки M на $\mathscr{D}$ в репере (O, A) этой прямой просто как $\overline{OM}$, то точка D определится из равенства $\dfrac{\overline{OD}}{\overline{OC}} = \dfrac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$.

Итак, мы выполнили построение «четвертой пропорциональной».

Предложение 10.2. *При вышеуказанных обозначениях подполе $\theta_O^A(\mathscr{D})$ не зависит ни от выбора $\mathscr{D}$, ни от репера (O, A) на $\mathscr{D}$.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{D}$, $\mathscr{D}'$ — прямые в $\mathscr{P}$ (необязательно различные), снабженные соответственно реперами (O, A), (O', A'), и пусть p — проектирование $\mathscr{D}'$ на $\mathscr{D}$ в произвольном направлении (равное тождественному отображению при $\mathscr{D}' = \mathscr{D}$). Обозначим через $\theta = \theta_O^A$ гомоморфизм $\mathscr{D}_0$ в $\mathbb{R}$, удовлетворяющий условию $\theta(A) = 1$, и пусть θ' — отображение $\mathscr{D}'$ в $\mathbb{R}$, определенное условием

$$(\forall M \in \mathscr{D}') \quad \theta' M = \frac{\theta \circ p(M) - \theta \circ p(O')}{\theta \circ p(A') - \theta \circ p(O')}. \qquad (1)$$

Можно проверить, что θ' — монотонный гомоморфизм $\mathscr{D}_{O'}^{*}$ в $\mathbb{R}$, для которого $\theta'(A') = 1$, и потому он равен $\theta_{O'}^{A'}$; соотношение (1) показывает, что $\theta'(M)$ принимает значения в поле $\theta_O^A(\mathscr{D})$. Таким образом, имеет место включение $\theta_{O'}^{A'}(\mathscr{D}') \subset \theta_O^A(\mathscr{D})$. Меняя ролями $\mathscr{D}$ и $\mathscr{D}'$, получим требуемое равенство. □

Если $\mathscr{D}' = \mathscr{D}$ и $p = \mathrm{Id}_{\mathscr{D}}$, то, как показывает формула (1), *при изменении репера на прямой $\mathscr{D}$ абсциссы подвергаются аффинному преобразованию.*

Обозначив через $K_{\mathscr{P}}$ подполе в $\mathbb{R}$, образованное абсциссами точек какой-либо пунктированной прямой, мы сможем установить

Предложение 10.3. *Если $\mathscr{P}$ — упорядоченная архимедова плоскость трансляций, то аддитивная груп-*

па ее векторов допускает *структуру векторного пространства* размерности 2 над полем $K_{\mathscr{P}}$.

Доказательство. a) Поскольку сложение векторов уже определено и изучено (см. § 4), мы определим *произведение* λu ненулевого вектора $u = \overrightarrow{OA}$ на элемент λ из $K_{\mathscr{P}}$ как такой вектор $\overrightarrow{OB}$, что точки O, A, B коллинеарны и $\theta_O^A(B) = \lambda$. Используя свойства проектирований, легко показать, что это определение не зависит от выбора точки O (если поместить новое

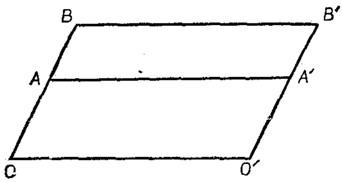


Рис. 24

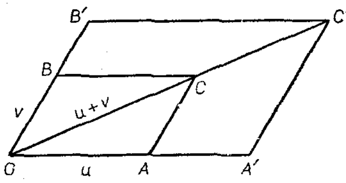


Рис. 25

начало в точку O', то точки A, B подвергнутся трансляции на вектор $\overrightarrow{OO'}$, см. рис. 24).

Положим $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$ для всех $\lambda \in K_{\mathscr{P}}$.

b) Фиксируем вектор $u = \overrightarrow{OA}$ и покажем, что для любых $(\lambda, \mu) \in K_{\mathscr{P}} \times K_{\mathscr{P}}$ выполняется

$$(\lambda + \mu) u = \lambda u + \mu u \qquad (2) \qquad \text{и} \qquad \mu(\lambda u) = (\mu\lambda) u. \qquad (3)$$

Можно считать, что $u \neq 0$; при $u = \overrightarrow{OA}$ обозначим через $\mathscr{D}$ прямую (OA) и пусть точки B, C, D прямой $\mathscr{D}$ таковы, что

$$\overrightarrow{OB} = \lambda u, \qquad \overrightarrow{OC} = \mu u, \qquad \overrightarrow{OD} = \lambda u + \mu u = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

Поскольку θ_O^A есть гомоморфизм пунктированной прямой $\mathscr{D}_O$ в $(\mathbb{R}, +)$, то $\theta_O^A(D) = \theta_O^A(B) + \theta_O^A(C) = \lambda + \mu$, откуда $\overrightarrow{OD} = (\lambda + \mu) u$, т. е. выполнено (2).

Чтобы установить (3), мы можем положить $\lambda \neq 0$ и, значит, $B \neq 0$. По одному замечанию, уже сделанному при доказательстве предложения 10.1, теперь для любой точки M прямой $\mathscr{D}$ имеем $\theta_O^A(M) = \theta_O^A(B)\,\theta_O^B(M) = \lambda\theta_O^B(M)$, откуда, если $\overrightarrow{OM} = \mu\overrightarrow{OB}$, получаем $\theta_O^A(M) = \lambda\mu = \mu\lambda$ и $\overrightarrow{OM} = \mu(\lambda\overrightarrow{OA}) = (\mu\lambda)\,\overrightarrow{OA}$; это и есть требуемое равенство (3).

c) Фиксируем элемент $\lambda \in K_{\mathscr{P}}$ и покажем, что для любых векторов u, v имеет место $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$.

Можно считать векторы u, v ненулевыми; будем различать два случая.

Первый случай. Векторы u, v коллинеарны. Тогда можно положить $v = ku$, где $k \in K_{\mathscr{P}}$. Применяя (2) и (3), получим

$$\lambda u + \lambda v = \lambda u + \lambda k u = (\lambda + \lambda k)\,u = \lambda\,[(1+k)\,u] = \\ = \lambda(u + ku) = \lambda(u+v).$$

Второй случай. Векторы u, v не коллинеарны Положив $u = \overrightarrow{OA}$, $v = \overrightarrow{OB}$, $u + v = \overrightarrow{OC}$ и аналогично $\lambda u = \overrightarrow{OA'}$, $\lambda v = \overrightarrow{OB'}$, $\lambda(u+v) = \overrightarrow{OC'}$, по теореме 9.6 получим $(A'C') \parallel (AC)$ и $(B'C') \parallel (BC)$ (см. рис. 25). Поскольку $(OACB)$ — параллелограмм, то и $(OA'C'B')$ — параллелограмм, откуда $\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'}$, т. е. $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$.

d) Наконец, легко видеть, что при ненулевых и неколлинеарных векторах u, v любой вектор w единственным образом разлагается как $w = \lambda u + \mu v$, где λ, μ принадлежат $K_{\mathscr{P}}$. Итак, $(\vec{\mathscr{P}}, +)$ в самом деле есть векторное пространство размерности 2 над полем $K_{\mathscr{P}}$ при определенном нами внешнем законе умножения. □

Отсюда выводится

▶ Теорема 10.4. Каждая *упорядоченная архимедова плоскость трансляций* есть *аффинная плоскость* над подполем $K_{\mathscr{P}}$ поля $\mathbb{R}$.

Доказательство. В силу результатов § 4, $(\vec{\mathscr{P}}, +)$ действует просто транзитивно на $\mathscr{P}$ трансляциями; отсюда следует существование аффинной структуры размерности 2 на $\mathscr{P}$. С другой стороны, каждая «прямая» $\mathscr{D}$ в $\mathscr{P}$ есть множество точек M, таких, что $\overrightarrow{OM} = \lambda\overrightarrow{OA}$, где (O, A) — фиксированный репер $\mathscr{D}$ и λ пробегает $K_{\mathscr{P}}$: это получается из самого определения вектора $\lambda\overrightarrow{OA}$. Таким образом, «прямые» в $\mathscr{P}$ — это прямые аффинной структуры на $\mathscr{P}$. □

Отметим, что этот результат получен *без предположения, что плоскость трансляций $\mathscr{P}$ удовлетворяет большой аксиоме Дезарга или аксиоме Паппа*: здесь это следствие аксиом порядка и аксиомы Архимеда (см. § 9).

▶ Отметим также, что любая аффинная плоскость над каким-либо подполем $\mathbb{R}$ удовлетворяет этим аксиомам: *поле $K_{\mathscr{P}}$* остается *неопределенным подполем $\mathbb{R}$, пока на плоскость $\mathscr{P}$ не накладываются дополнительные требования.*

Теорема 10.4 составляет основу элементарной геометрии. В гл. VI мы изучим дополнительные аксиомы. позволяющие построить евклидову геометрию.

11. ПРОЕКТИВНЫЕ ПРОСТРАНСТВА ПРОИЗВОЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ: ИСТОЛКОВАНИЕ АКСИОМЫ ДЕЗАРГА С ПОМОЩЬЮ ВЛОЖЕНИЯ

Обобщая определение 1.1, введем

▶ Определение 11.1. Пространством *проективного* типа называется пара $(E, \mathscr{L})$, состоящая из

a) множества E, называемого *пространством*, элементы которого именуются *точками*;

b) множества $\mathscr{L}$ подмножеств E, называемых *прямыми* и удовлетворяющих следующим аксиомам:

E_1 Через любые две различные точки E проходит одна и только одна прямая.

E_2 Если A, B, C, D — четыре различные точки E, такие, что прямые (AB) и (CD) пересекаются, то пересекаются и прямые (AC), (BD).

E_3 Каждая прямая содержит по меньшей мере три точки.

Это определение очевидным образом охватывает *плоскости* проективного типа, пустое множество и множества, сводящиеся к точке или к «прямой».

Несмотря на слабость сформулированных аксиом [1]), мы увидим, что, за исключением особых случаев, которые будут перечислены, всякое пространство проективного типа удовлетворяет аксиоме Дезарга и допускает проективную структуру над подходящим телом. С этой целью начнем с аксиоматического исследования *подпространств* пространства проективного типа.

Определение 11.2. Пусть E — пространство проективного типа. Подмножество $X \subset E$ называется *подпространством* E, если для любой пары (A, B) точек X, такой, что $A \neq B$, прямая (AB) содержится в X.

Каждое подпространство E допускает естественную структуру пространства проективного типа, индуцированную структурой E, и справедливо

Предложение 11.1. Пересечение семейства подпространств E есть подпространство E.

В частности, если X — непустое подмножество E, то пересечение подпространств E, содержащих X, называется подпространством, *порожденным* X.

Предложение 11.2. Пусть E — пространство проективного типа, X — подпространство E и A — точка в $E \setminus X$. Тогда подпространство E, порожденное $X \cup \{A\}$, есть множество Y точек M в E, таких, что прямая (AM) пересекается с X.

Доказательство. Очевидно, что каждое подпространство в E, содержащее A и X, содержит и Y. Остается доказать, что Y — подпространство в E, установив, что каждая прямая, соединяющая две точки M, N из Y, содержится в Y. Этот факт тривиален, если M или N совпадает с A. Предположим, что $M \neq A$, $N \neq A$, и пусть M' (соотв. N') — точка пе-

[1]) Эти аксиомы введены Вебленом и Юнгом [VE—YO]; они намного более простые и общие, чем аксиомы Бибербаха, касающиеся лишь трехмерного случая (см. [KE], т. 2).

ресечения прямой (AM) (соотв. (AN)) с X (эта точка единственная, так как A не принадлежит X). Обозначив через P произвольную точку прямой (MN), отличную от M и N, мы докажем, что $P \in Y$.

Первый случай. $M' \neq M$ и $N' \neq N$ (рис. 26). Поскольку прямые (MM') и (NN') пересекаются в A, прямые (MN) и $(M'N')$ имеют общую точку I, принадлежащую X (по аксиоме E_2); аналогично, поскольку прямые (AN') и (PI) пересекаются в N, прямые (AP) и (IN') имеют общую точку P'. Так как

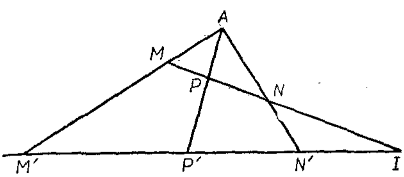


Рис. 26

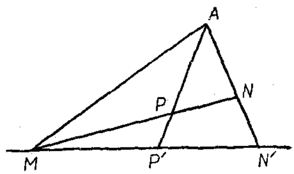


Рис. 27

прямая (IN') содержится в X, то P' принадлежит X; прямая (AP) пересекает X и $P \in Y$.

Второй случай. $M' = M$ (рис. 27). Случай $M = N'$ очевиден (прямая (MN) проходит через A), поэтому предположим, что $M \neq N'$. Тогда, поскольку прямые (MP) и (AN') пересекаются в N, прямые (MN') и (AP) имеют также общую точку P'; так как прямая (MN') содержится в X, точка P' принадлежит X и $P \in Y$. □

Понятие размерности; плоскости

Определение 11.2. Говорят, что пространство E проективного типа имеет *конечную размерность* n, если существует конечная система $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ из $n+1$ точек, порождающая E, и не существует системы из n точек, порождающей E (такое натуральное n единственно). Если E не порождается никакой конечной системой точек, то говорят, что E *бесконечномерно*.

Эти определения применимы равным образом и к подпространствам в E. В частности, подпространство размерности 0 есть *точка*, размерности 1 — *прямая*. Подпространство размерности 2 называется *плоскостью*.

Теорема 11.3. Через любые три неколлинеарные точки A, B, C пространства проективного типа E проходит единственная плоскость, совпадающая с множеством Π таких точек M, что прямая (AM) пересекается с прямой (BC).

Доказательство. По предложению 11.2, Π есть подпространство E. С другой стороны всякое подпространство в E, содержащее A, B, C, содержит и прямую (BC), а значит, и Π, причем Π порождается системой точек A, B, C и не сводится к прямой. Итак, $\dim(\Pi) = 2$.

Обратно, если плоскость Π', порожденная тремя неколлинеарными точками P, Q, R, содержит и точки A, B, C, то легко доказать, что прямые (AB), (BC), (CA) пересекаются с прямыми (PQ), (QR), (RP), откуда следует, что P, Q, R принадлежат Π. Имеют место включения $\Pi' \supset \Pi$ и $\Pi \supset \Pi'$, а потому $\Pi' = \Pi$. □

Предложение 11.4. Две прямые в E, лежащие в одной плоскости Π, имеют общую точку.

Доказательство. По предыдущему, мы можем предполагать, что плоскость Π порождена одной из прямых, например X, и точкой A на второй прямой. Предложение 11.2 показывает, что эти прямые пересекаются.

Следствие. На плоскостях пространства проективного типа определена структура плоскостей проективного типа в смысле определения 1.1.

Теорема Дезарга в пространстве

► Теорема 11.5. Пусть E — пространство проективного типа размерности $\geqslant 3$ и (A, B, C), (A', B', C') — две тройки неколлинеарных точек, таких, что прямые (AA'), (BB') и (CC') различны и проходят через одну точку. Тогда точки $P = (BC) \cap (B'C')$, $Q =$

$=(CA)\cap(C'A')$, $R=(AB)\cap(A'B')$ (существующие по аксиоме E_2) коллинеарны.

Доказательство распадается на два случая.

Первый случай. Прямые (AA'), (BB') и (CC') не лежат в одной плоскости пространства E.

Пусть тогда Π — плоскость, порожденная A, B, C, а Π' — плоскость, порожденная A', B', C'. Три точки P, Q, R принадлежат одновременно обеим плоскостям Π и Π'. Если бы они не были коллинеарными, то по предложению 11.3 мы имели бы $\Pi=\Pi'$ вопреки предположению.

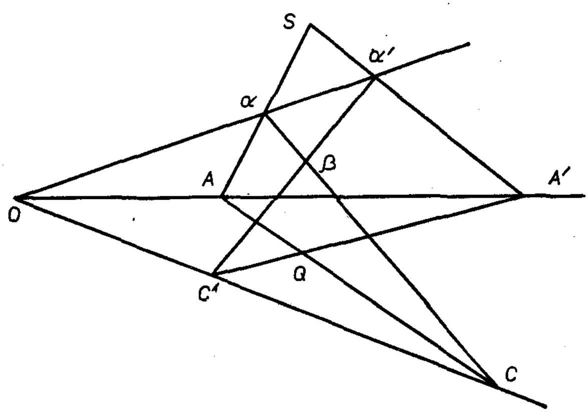


Рис. 28

Второй случай. Прямые (AA'), (BB') и (CC') лежат в одной плоскости Π.

Тогда в силу условия $\dim(E)\geqslant 3$ существует точка $S\in E$, не принадлежащая Π. Обозначим через O общую точку прямых (AA'), (BB'), (CC') и выберем точку α на прямой (SA), отличную от S и A. Тогда точки O, α, S, A' все различны и неколлинеарны (рис. 28), и поскольку прямые (OA') и $(S\alpha)$ пересекаются в A, то прямые $(O\alpha)$ и (SA') имеют единственную общую точку α'.

Три различные прямые $(\alpha\alpha')$, (BB'), (CC') пересекаются в O и не содержатся в одной плоскости. К ним применим предыдущий результат, что доказывает коллинеарность точек $P=(BC)\cap(B'C')$, $\beta=(\alpha C)\cap(\alpha' C')$ и $\gamma=(\alpha B)\cap(\alpha' B')$.

Прямая $(S\beta)$ является пересечением плоскости X, проходящей через точки S, α, C, и плоскости X', проходящей через S, α', C'. С другой стороны, $\Pi\cap X$ есть прямая (AC), а $\Pi\cap X'$ — прямая $(A'C')$. Таким образом, прямая $(S\beta)=X\cap X'$ пересекает плоскость Π в точке $Q=(AC)\cap(A'C')=\Pi\cap X\cap X'$ (см. рис. 28). Аналогично, прямая $(S\gamma)$ пересечет Π в точке $R=(AB)\cap(A'B')$. Таким образом, прямая (QR) есть пересечение Π с плоскостью Π', проходящей через точки S, β, γ, и поскольку P лежит на прямой $(\beta\gamma)$ и в Π, то P принадлежит и $\Pi\cap\Pi'$, т. е. прямой (QR). □

▶ Следствие. Для того чтобы плоскость проективного типа Π могла быть *вложена* в пространство проективного типа размерности $\geqslant 3$, необходимо и достаточно, чтобы на ней выполнялась *проективная аксиома Дезарга* (DP) (см. теорему 7.7).

Мы видели, что это условие необходимо; обратно, если оно выполнено, то, как мы знаем, Π допускает структуру проективного пространства размерности 2 над телом K и для любого натурального $n\geqslant 3$ изоморфна некоторой плоскости в $P^n(K)$.

12. ПРОЕКТИВНАЯ СТРУКТУРА ПРОСТРАНСТВА

Как мы объявили, мы докажем, что аксиомы E_1, E_2, E_3 из определения 11.1 достаточны для построения на E структуры проективного пространства, если только размерность E (конечная или бесконечная) не меньше 3.

С этой целью мы вернемся к построению аффинной структуры на множестве $E\setminus H$, полученном исключением из E подходящего подпространства H. Установим прежде всего

Предложение 12.1. Если E — пространство проективного типа размерности $\geqslant 2$, то найдется по меньшей мере одно подпространство H в E, отличное от E и такое, что любая прямая из E пересекается с H.

Такое подпространство называется *гиперплоскостью* в E.

Доказательство. a) Предположим сначала, что E имеет конечную размерность n; тогда оно порождено $n+1$ точками $A_0, A_1, \ldots, A_n$, и H — подпространство в E, порожденное точками $A_1, \ldots, A_n$. Значит, $H \neq E$ и E порождено множеством $H \cup \{A_0\}$. Тогда из предложения 11.2 вытекает, что для каждой точки $M \in E$ прямая (A_0M) пересекает H в некоторой точке M'. Если $\mathscr{D}$ — какая-нибудь прямая в E, не проходящая через A_0, и M, N — две точки на $\mathscr{D}$, то прямые (A_0M) и (A_0N) пересекаются с H в различных точках M', N'. Отсюда выводим, что прямые (MN) и $(M'N')$ пересекаются, и, следовательно, прямая $\mathscr{D} = (MN)$ пересекает H.

b) Если E не имеет конечной размерности, нам придется обратиться к аксиоме Цорна. Собственные подпространства E, упорядоченные по включению, образуют индуктивное упорядоченное множество, и любой максимальный элемент H этого множества удовлетворяет требуемому условию: достаточно повторить предыдущее рассуждение, приняв за A_0 произвольную точку в $E \setminus H$ и заметив, что $H \cup \{A_0\}$ порождает E. □

Чтобы получить возможность формулировать свойства $E \setminus H$, мы дадим

▶ Определение 12.1. *Пространством аффинного типа* называется пара $(\mathscr{E}, \mathscr{L})$, состоящая из:

a) множества $\mathscr{E}$, элементы которого называются *точками*;

b) множества $\mathscr{L}$ подмножеств $\mathscr{E}$, называемых *прямыми*, снабженного *отношением эквивалентности*, именуемым *параллелизмом*. При этом должны быть выполнены следующие условия:

$\mathscr{E}_1$ Через любые две различные точки $\mathscr{E}$ проходит одна и только одна прямая.

$\mathscr{E}_2$ Через любую данную точку $\mathscr{E}$ проходит одна и только одна прямая, параллельная некоторой заданной прямой.

$\mathscr{E}_3$ Если A, B, C, D — четыре различные точки, такие, что прямые (AB) и (CD) *пересекаются или параллельны*, то и прямые (AC) и (BD) пересекаются или параллельны.

$\mathscr{E}_4$ Каждая прямая содержит не менее двух точек.

Тогда немедленно получим

Предложение 12.2. Пусть E — пространство проективного типа и H — *гиперплоскость* в E. Назвав «прямыми» ограничения прямых E на $E \setminus H$, а «параллельными прямыми» — ограничения прямых, пересекающих H в одной и той же точке, мы получим на $E \setminus H$ структуру аффинного типа.

Поскольку это так, легко распространить на пространства аффинного типа теорию дилатаций. Можно доказать, что основные теоремы 3.1 и 6.3 (существование трансляций и гомотетий) применимы к каждому пространству аффинного типа, удовлетворяющему формулировке (D) аксиомы Дезарга. Обобщая построения, выполненные в § 3—7, можно вывести существование на $\mathscr{E}$ аффинной структуры, ассоциированной с некоторым телом, и ее «прямые» суть те же «прямые» в $\mathscr{E}$ (упр. V.3).

Итак, если E — пространство проективного типа размерности $n \geqslant 3$ и H — гиперплоскость в E, то по теореме 11.5 пространство аффинного типа $E \setminus H$ удовлетворяет аксиоме (D). Поэтому $E \setminus H$ обладает структурой аффинного пространства над телом K и H легко отождествляется с множеством «направлений прямых» в E. Отсюда следует, что E наделено структурой проективного пространства над K. Имеет место

► Теорема 12.3. Всякое пространство E проективного типа размерности $n \geqslant 3$ имеет структуру проективного пространства, ассоциированного с некоторым телом, и его прямые совпадают с «прямыми» E.

Непосредственное, чисто проективное, доказательство этого результата можно найти в [VE — YO], т. 2, [KE], т. 2, и [GA].

Пространства аффинного типа. Если $\mathscr{E}$ — пространство аффинного типа, то можно попытаться продолжить его до пространства проективного типа путем присоединения «бесконечно удаленных точек» (направлений прямых в $\mathscr{E}$). Но в общем случае это продолжение осуществляется не так быстро, как в случае плоскости: нужно действительно определить «бесконечно удаленные прямые» и проверить аксиому E_2, когда некоторые из точек A, B, C, D бесконечно удаленные. На деле быстрее действовать прямым путем, воодушевляясь проективным случаем. Так, можно доказать, что если $\mathscr{E}$ содержит четыре некомпланарные точки, то аффинные аксиомы Дезарга (d) и (D) выполнены. Предшествующий анализ позволит тогда дать такую формулировку:

▶ Теорема 12.4. *Для того чтобы пространство аффинного типа допускало аффинную структуру над телом, достаточно, чтобы существовали четыре различные точки A, B, C, D, такие, что прямые (AB) и (CD) не пересекаются и не параллельны.*

Заключение. Итак, случай пространств размерности $\geqslant 3$ улажен; случай пространств размерности 0 или 1 тривиален. Поэтому только «плоскости» проективного или аффинного типа выдвигают новые проблемы. Можно построить «плоскости», не удовлетворяющие аксиоме Дезарга. Изучение этих плоскостей, называемых «недезарговыми», дало толчок многочисленным исследованиям и привело к введению новых алгебраических структур (см., например, [AZ], [OS], [PI], [ST], [LÜ]).

Глава VI

МЕТРИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ (ЕВКЛИДОВА И НЕЕВКЛИДОВА)

1. ВВЕДЕНИЕ

Напомним, что геометрия аффинной плоскости основана на следующих аксиомах:

- аксиомы плоскости аффинного типа (§ V. 1): аксиомы инцидентности, сильная аксиома Евклида;
- малая аффинная аксиома Дезарга (d) (§ V.3);
- аксиомы порядка, аксиома Паша и аксиома Архимеда (§ V. 9).

Для того чтобы основным полем нашей геометрии было все $\mathbb{R}$, а не одно из его подполей, достаточно подчинить его еще аксиоме (ВГ) верхней грани (§ I. 6) или взамен потребовать его *максимальности* (т. е. чтобы оно было наибольшим из полей, удовлетворяющих наложенным условиям, см. § I. 8): это была бы *аксиома полноты* Гильберта.

На достигнутом этапе нам не остается ничего более для обоснования евклидовой геометрии, как ввести *скалярное произведение* в ассоциированном векторном пространстве; так и делалось последние годы в курсах геометрии, и нетрудно найти изложение, ставшее уже классическим, с выводом соответствующих свойств (метрических соотношений, свойств вращений и симметрий, меры углов).

Но этот путь изложения, при котором геометрия рассматривается как некая конкретизация алгебраических структур, имеет относительно недавнее происхождение, долгими же веками геометрия воспринималась как моделирование физического пространства, и потому как проистекающая из опыта и подчиняющаяся ему. Возможность переместить фигуру, не подвергая ее деформации, входила в число основных аксиом и позволяла измерять длины и углы; прямые неизбежно участвовали как кратчайшие пути, соединяющие пары точек. Но при этом понятие «параллельные прямые» вызывало трудности в связи с невозможностью проверить с полной достоверностью, что две прямые не пересекаются. И несколько вычурная форма, которую придал Евклид аксиоме о параллельных (см. конец § 9), заставляла думать, что речь, скорее, идет о еще недоказанном следствии других аксиом, чем о некоторой физической очевидности. Для отличения ее от других аксиом долго использовался термин «постулат» [1]).

Поэтому изложение геометрии начиналось со свойств, не зависящих от этой аксиомы (предложения 1—26 первой книги Евклида). Сохранялась надежда доказать ее от противного; для этого нужно было долго изучать логические следствия ее отрицания в поисках противоречия. Однако вывести *пятый постулат* Евклида из остальных аксиом не удавалось. Со времен Евклида и до наших дней можно насчитать сотни «доказательств» этого постулата [2]); многие математики, и среди них весьма крупные, занимались этой проблемой. Из наиболее близких к современности и наиболее известных упомянем лишь Карно, Лапласа, Больцано, Эйлера, Лагранжа и особенно Фурье (1768—1830). Со временем, в начале XIX в., их постоянные неудачи и влияние Гаусса (1777—1855) привели к сомнениям в возможности доказать такими средствами пятый постулат.

Наконец, около 1830 г., почти одновременно Янош Бойаи и *Н. И. Лобачевский* [3]) дали систематическое построение «неевклидовой геометрии», начатое Саккери и Лежандром. Однако вера в логическую необ-

---

[1]) Термин «постулат» введен самим Евклидом; у него девять аксиом и пять постулатов. — *Прим. перев.*

[2]) История попыток доказать пятый постулат Евклида весьма полно изложена в книге [PN], где рассказано о страстях, кипевших вокруг этой проблемы. Подробный анализ этого труда дан нами в июньском номере за 1987 г. журнала «Pour le science».

[3]) Приоритет Н. И. Лобачевского, равно как и полная самостоятельность Яноша Бойаи, прочно установлены (см. Розенфельд Б. А. История неевклидовой геометрии. — М.: Наука, 1976). — *Прим. перев.*

ходимость постулата Евклида так сильно укоренилась в умах, что теории Бойаи и Лобачевского сначала вызвали недоверие, переходящее в возмущение. Полемика, возникшая в связи с этой геометрией, продолжалась до 1870 г.

Проблема получила полное решение лишь после того, как удалось установить непротиворечивость неевклидовой геометрии; построение «моделей» этой геометрии Бельтрами (1835—1900), Клейном (1849—1925) и Пуанкаре (1854—1912) показало, что эта непротиворечивость равносильна непротиворечивости аксиоматики действительных чисел. Неевклидова геометрия оказывалась столь же состоятельной, что и евклидова. В конце XIX в. она выступила как частный случай геометрии римановых пространств постоянной кривизны, другим примером которой может служить сферическая геометрия, и не могла более быть оспорена.

Одновременно начал развиваться интерес к основаниям евклидовой геометрии, и в 1899 г. Давид Гильберт дал в своих «Основаниях геометрии» (см. [HI — RO]) первую полную систему аксиом, которую можно положить в основу этой геометрии. Тем самым была оправдана теория Евклида и ее преподавание, которое вплоть до 1970 г. велось под влиянием его «Начал».

Хотя мы теперь действительно освободились от исторически сложившегося недоверия к аксиоме Евклида о параллельных, все же небесполезно получить четкое представление о возможном построении геометрии на основе *метрических свойств*, несомненно более ощутимых и чаще употребляемых, чем *аффинные* свойства.

С другой стороны, небезынтересно убедиться, что в рамках теории метрических пространств имеются другие свойства, эквивалентные аксиоме Евклида о параллельных (например, существование прямоугольника); становятся понятными ценность задач на построение, которые предлагаются ученикам, и то внимание, которое уделяется изучению «простых фигур»: менее абстрактные, чем свойство параллельных, свойства этих фигур составляют на деле надежную основу для обучения геометрии.

На последующих страницах мы изложим аксиоматику метрической геометрии, следуя исторически сложившемуся пути (т. е. откладывая по мере возможности введение аксиомы о параллельных) и оставаясь как можно ближе к преподаванию начал геометрии. Затем мы обсудим различные эквивалентные варианты пятого постулата Евклида. Наконец, в завершение мы опишем простую модель гиперболической геометрии. Подробнее все это изложено в работах [HI — RO], [EV], [EF], [BK], [KE].

2. АКСИОМЫ МЕТРИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ

В своей аксиоматике евклидовой плоскости Гильберт воссоздает геометрию Евклида, не вводя никаких аксиом, относящихся к «геометрической» или «числовой прямой»; его аксиоматика содержит полное построение поля действительных чисел под именем «исчисления отрезков», основанное на аксиомах порядка, конгруэнтности и непрерывности (см. [HI — RO]). В действительности для первых математиков построение $\mathbb{R}$ тесно связывалось со свойствами евклидовой плоскости: сначала доказывалось, что длины (определяемые как классы эквивалентности отрезков) составляют *измеримую величину*; затем шла теорема Фалеса, позволяющая строить «четвертое пропорциональное», что приводило к структуре поля после выбора единицы длины. Наконец, в большей или меньшей степени уточнялась природа подполей $\mathbb{R}$.

На самом деле, если допустить, что длины образуют измеримую величину, нет необходимости прибегать к теореме Фалеса (которая опирается на аксиому о параллельных) для определения *частного* или *произведения* двух длин; это показано нами в § I.7.

Таким образом, мы облегчим изложение, предполагая известным *поле действительных чисел* и рассматривая как решенную предварительно задачу измерения длин, благодаря изучению, проведенному в § I.5. Итак, мы считаем, что выбрана *единица длины*, и допускаем в наших аксиомах *существование рас-*

стояния. Так мы можем изложить общие свойства, относящиеся как к евклидовой, так и к неевклидовой геометриям, которые составляют содержание «абсолютной геометрии».

Метрическая плоскость

Ради краткости мы называем *метрической плоскостью* любое множество $\mathscr{P}$, удовлетворяющее четырем приведенным ниже группам аксиом[1]). Тем самым *абсолютная геометрия* будет изучением этой «метрической плоскости». В дальнейшем метрическая плоскость станет *евклидовой* или *неевклидовой* плоскостью в зависимости от того, будет ли принята аксиома Евклида о параллельных или ее отрицание.

I. Аксиомы инцидентности

Плоскость есть множество $\mathscr{P}$, элементы которого называются *точками*, а некоторые его подмножества, называемые *прямыми*, удовлетворяют следующим условиям:

$\mathrm{I_a}$ Через две различные точки $\mathscr{P}$ проходит единственная прямая.

$\mathrm{I_b}$ Каждая прямая содержит не менее двух точек.

$\mathrm{I_c}$ Существуют три неколлинеарные (т. е. не лежащие на одной прямой) точки.

II. Аксиомы порядка

$\mathrm{II_a}$ Каждая прямая из $\mathscr{P}$ снабжена двумя взаимно противоположными отношениями линейного порядка.

Эта аксиома приводит к заданию тернарного отношения «лежать между» и позволяет определить *отрезки* и *полупрямые*. Обозначим через $[AB]$ отрезок, образованный точками прямой (AB), лежащими между A и B (включая и концевые точки), и сформулируем еще одну аксиому:

---

[1]) Некоторые из этих аксиом уже формулировались. Для большей ясности мы их воспроизводим с другой нумерацией. Уточним на будущее, что нас не беспокоит вопрос о *независимости* аксиом. По этому поводу можно обратиться к [HI—RO].

$\mathrm{II_b}$ (*Аксиома Паша.*) Если прямая $\mathscr{D}$ пересекает одну из сторон $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$ треугольника (ABC), то она пересекает по меньшей мере еще одну его сторону.

III. Аксиомы расстояния

Мы предполагаем, что задано отображение d: $\mathscr{P}\times\times\mathscr{P}\to\mathbb{R}_+$, называемое *функцией расстояния* (между точками), которое удовлетворяет следующим условиям:

$\mathrm{III_a}$ $(\forall(A, B)\in\mathscr{P}\times\mathscr{P})\quad d(A, B)=d(B, A)$.

$\mathrm{III_b}$ $d(A, B)=0\Leftrightarrow A=B$.

$\mathrm{III_c}$ Для того чтобы точка C прямой (AB) принадлежала отрезку $[AB]$, необходимо и достаточно, чтобы

$$d(A, B)=d(A, C)+d(C, B).$$

$\mathrm{III_d}$ На каждой полупрямой (Ou) с началом O и для *любого* действительного $x>0$ [1]) существует точка M, такая, что $d(O, M)=x$.

(Из предыдущих аксиом следует единственность этой точки.) Число $d(A, B)$ называется также *длиной* отрезка $[AB]$ и часто обозначается просто AB (см. § 8).

IV. Аксиомы симметрии [2])

Для удобства их формулировки введем некоторые предварительные термины.

Определение 2.1. *Автоморфизмом* $\mathscr{P}$ называется биекция $\mathscr{P}$ на $\mathscr{P}$, сохраняющая расстояния и преобразующая прямые в прямые.

Теперь сформулируем следующие аксиомы:

---

[1]) Вместо предположения о том, что x — произвольное действительное число, можно в этом условии ограничиться подходяще выбранным подмножеством действительных чисел (см. упр. VI. 23).

[2]) В оригинале «Axiomes de pliage» (аксиомы сгибания), что связано с обычным для школьной геометрии «перегнем плоскость по прямой». — *Прим. перев.*

$\mathrm{IV_a}$ Для любой прямой $\mathscr{D}$ в $\mathscr{P}$ существует *единственный автоморфизм* $\mathscr{P}$ помимо тождественного, оставляющий неподвижной каждую точку $\mathscr{D}$.

Этот автоморфизм называется *симметрией с осью* $\mathscr{D}$ и обозначается $s_{\mathscr{D}}$.

$\mathrm{IV_b}$ Для любой пары (Ox, Oy) полупрямых с началом O существует по меньшей мере одна прямая $\mathscr{D}$, такая, что $s_{\mathscr{D}}(Ox) = Oy$.

3. ОБЩИЕ СВОЙСТВА МЕТРИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ

Свойства, связанные с порядком

Предложение 3.1. Прямая плоскости $\mathscr{P}$ не может пересекать трех сторон треугольника (ABC), за исключением случая, когда она проходит через одну из его вершин.

Доказательство. Предположим, что прямая $\mathscr{D}$ пересекает $[BC]$ в P, $[CA]$ в Q, $[AB]$ в R и не прохо-

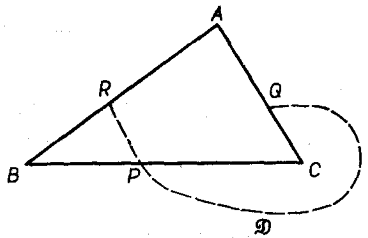


Рис. 1

дит ни через одну из точек A, B, C. Тогда точки P, Q, R различны и одна из них, для определенности P, лежит между двумя другими. Прямая (BC) пересекает отрезок $[QR]$ в P, но не пересекает ни одного из отрезков $[AQ]$, $[AR]$, что противоречит аксиоме Паша, примененной к треугольнику (AQR) (рис. 1). □

Предложение 3.2. Для любой прямой $\mathscr{D}$ в $\mathscr{P}$ отношение $\mathscr{R}$, определенное на $\mathscr{P} \setminus \mathscr{D}$ с помощью

$$A\mathscr{R}B \Leftrightarrow [AB] \cap \mathscr{D} = \varnothing, \tag{1}$$

есть отношение эквивалентности, разбивающее $\mathscr{P}$ на два класса эквивалентности; эти классы называются *полуплоскостями*, ограниченными прямой $\mathscr{D}$.

Доказательство. Симметричность и рефлексивность отношения $\mathscr{R}$ очевидны. Его транзитивность равносильна утверждению:

(O′) Если (A, B, C) — три точки $\mathscr{P}$, такие, что $[AB]$ и $[BC]$ не пересекаются с прямой $\mathscr{D}$, то и $[AC]$ не пересекается с $\mathscr{D}$.

Но утверждение (O′) обратно противоположно аксиоме Паша $\mathrm{II_a}$ и потому выполнено.

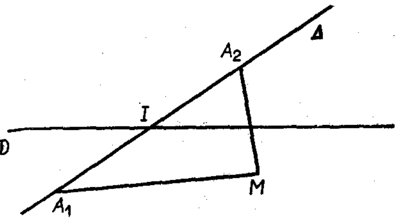


Рис. 2

С другой стороны, можно построить две точки A_1, A_2 в $\mathscr{P}\setminus\mathscr{D}$, такие, что отрезок $[A_1A_2]$ пересекает $\mathscr{D}$ в некоторой точке I: достаточно провести через I прямую Δ и применить аксиому $\mathrm{III_d}$ для построения двух точек A_1, A_2 прямой Δ по разные стороны от I, таких, что $d(I, A_1) = d(I, A_2) = 1$ (рис. 2).

Если M — любая точка в $\mathscr{P}\setminus\mathscr{D}$, то прямая $\mathscr{D}$ не проходит ни через одну из вершин треугольника (MA_1A_2), и поскольку она пересекает отрезок $[A_1A_2]$, она пересекает только один из отрезков $[MA_1]$, $[MA_2]$, т. е. M принадлежит либо классу A_1, либо классу A_2, и отношение $\mathscr{R}$ действительно определяет два класса эквивалентности. □

Напомним здесь, что прямая $\mathscr{D}$ в $\mathscr{P}$ называется *ориентированной*, если выбрано одно из двух определенных на ней отношений порядка.

Свойства, связанные с расстоянием

Признаемся сначала, что мы употребили слово «расстояние», не приняв всех аксиом метрического пространства: аксиома $\mathrm{III_c}$ влечет неравенство треугольника $d(A, B) \leqslant d(A, C) + d(C, B)$ только для троек *коллинеарных* точек, но не в общем случае. Однако, как мы увидим далее, общее неравенство треугольника есть следствие принятой системы аксиом (предложение 8.4), что апостериори оправдывает применение термина «расстояние».

Покажем, теперь, что прямые в $\mathscr{P}$ изометричны «числовой прямой» $\mathbb{R}$.

Предложение 3.3. Для каждой ориентированной прямой $\mathscr{D}$ и каждой ее точки O существует единственная возрастающая биекция f прямой $\mathscr{D}$ на $\mathbb{R}$, для которой $f(O) = 0$ и

$$(\forall (A, B) \in \mathscr{D}^2) \quad |f(B) - f(A)| = d(A, B).$$

Доказательство. Пусть (Ox) (соотв. (Ox')) — полупрямая с началом O, состоящая из точек $M \in \mathscr{D}$, лежащих после (соотв. перед) O относительно выбранного на $\mathscr{D}$ отношения порядка; легко видеть, что единственная функция, удовлетворяющая поставленным условиям, определяется равенствами $f(M) = d(O, M)$, если $M \in (Ox)$, и $f(M) = -d(O, M)$, если $M \in (Ox')$. □

Действительное значение $f(M)$ называется *абсциссой* точки M на ориентированной и пунктированной прямой $\mathscr{D}_O$ и обозначается $\overline{OM}$.

Отметим, что если изменить ориентацию $\mathscr{D}$, не меняя начала O, то функция f изменит знак на противоположный.

Следствие. Для любой пары (A, B) различных точек $\mathscr{P}$ существует единственная точка C на прямой (AB), для которой $d(A, C) = d(B, C)$; эта точка лежит между A и B и называется *серединой* отрезка $[AB]$.

Доказательство. Из аксиомы $\mathrm{III_c}$ видно, что A не может лежать между B и C, B между A и C; таким образом, C лежит между A и B. При любой ориентации прямой (AB) точка C определяется равенством

$$d(A, C) = {}^1\!/_2 d(A, B).$$

Если $A = B$, то будем говорить, что серединой отрезка $[AA]$ служит A.

Общие свойства автоморфизмов

Аксиома $\mathrm{III_c}$ показывает, что всякий автоморфизм $\mathscr{P}$ сохраняет отношение «лежать между». Итак, если f — автоморфизм $\mathscr{P}$ и $\mathscr{D}$ — прямая на $\mathscr{P}$ и если выбраны ориентации прямых $\mathscr{D}$ и $f(\mathscr{D})$, то ограничение f на $\mathscr{D}$ будет *монотонной* биекцией $\mathscr{D}$ на $f(\mathscr{D})$. Отсюда вытекает

Предложение 3.4. Если f — автоморфизм $\mathscr{P}$, то

a) образ *отрезка* $[AB]$ есть отрезок $[f(A)f(B)]$;
b) образ *полупрямой* с началом O есть полупрямая с началом $f(O)$;
c) образ *полуплоскости*, ограниченной прямой $\mathscr{D}$, есть полуплоскость, ограниченная прямой $f(\mathscr{D})$.

С другой стороны, краткое изучение неподвижных точек автоморфизмов дает нам

Предложение 3.5. Пусть f — автоморфизм $\mathscr{P}$; тогда

a) если f имеет две неподвижные точки A и B, то он оставляет неподвижной и каждую точку прямой (AB);
b) если f *меняет местами точки* A и B, то он оставляет неподвижной середину отрезка $[AB]$;
c) если f допускает три *неколлинеарные* неподвижные точки A, B, C, то f является тождественным отображением.

Доказательство. Утверждение a) следует из того, что точка M прямой (AB) полностью определяется своими расстояниями от точек A, B. Можно также воспользоваться предложением 3.3, чтобы свести дело к изометрии $\mathbb{R}$.

b) Если $f(A)=B$ и $f(B)=A$, то образ середины C отрезка $[AB]$ есть середина образа $[f(A)f(B)]=$ $=[BA]$, т. е. C.

c) Если f допускает три неколлинеарные неподвижные точки A, B, C, то, как показывает утверждение a), f оставляет на месте каждую точку прямых (AB), (BC), (CA). Но через каждую точку M в $\mathscr{P}$, не принадлежащую этим прямым, проходит по крайней мере одна прямая $\mathscr{D}$, пересекающая две из этих прямых в различных точках (достаточно применить аксиому Паша $\mathrm{II_b}$ к прямой $\mathscr{D}$, соединяющей M с одной из внутренних точек отрезка $[BC]$). Тогда все точки $\mathscr{P}$ неподвижны при f и, в частности, $f(M) = M$. □

Наконец, очевидно, что *автоморфизмы $\mathscr{P}$ образуют группу*. Отсюда следует

Предложение 3.6. На множестве $\mathscr{F}$ подмножеств $\mathscr{P}$ можно ввести *отношение эквивалентности*, полагая $F = F'$ тогда и только тогда, когда существует автоморфизм f плоскости $\mathscr{P}$, такой, что $f(F) = F'$.

Это отношение эквивалентности называется *конгруэнтностью* или, не совсем правильно, *равенством*. Далее мы встретим примеры этого отношения.

Замечание. Установленные в этом параграфе свойства не зависят от аксиом симметрии $\mathrm{II_a}$ и $\mathrm{II_b}$. Теперь мы изучим следствия этих аксиом.

4. ОСЕВЫЕ СИММЕТРИИ. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПРЯМЫЕ

Свойства осевых симметрий

Предложение 4.1. Любая осевая симметрия $s_{\mathscr{D}}$ *инволютивна*; она не имеет других неподвижных точек, кроме точек своей оси $\mathscr{D}$, и меняет местами полуплоскости, ограниченные прямой $\mathscr{D}$.

Доказательство. Композиция $s_{\mathscr{D}} \circ s_{\mathscr{D}}$ есть автоморфизм $\mathscr{P}$, отличный от $s_{\mathscr{D}}$ и оставляющий неподвижной каждую точку $\mathscr{D}$, а следовательно, совпадающий с $\mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$ по аксиоме $\mathrm{IV_a}$. С другой стороны, как показывает предложение 3.5, c), симметрия $s_{\mathscr{D}}$ не имеет других неподвижных точек, кроме точек прямой $\mathscr{D}$. Наконец, для любой точки $M \in \mathscr{P} \setminus \mathscr{D}$ середина I отрезка $[Ms_{\mathscr{D}}(M)]$ остается на месте при $s_{\mathscr{D}}$ по предложению 3.5, b) (в силу инволютивности $s_{\mathscr{D}}$); таким образом, $I \in \mathscr{D}$ и $s_{\mathscr{D}}(M)$ лежат в другой полуплоскости, чем M, относительно $\mathscr{D}$.

Предложение 4.2. Если A, B — две *различные* точки $\mathscr{P}$, то существует *единственная прямая* $\mathscr{D}$, такая, что $s_{\mathscr{D}}(A) = B$.

Доказательство. Существование. Пусть O — середина отрезка $[AB]$ и Ox (соотв. Oy) — полупрямая с началом O, содержащая A (соотв. B); по аксиоме $\mathrm{IV_b}$ найдется хотя бы одна прямая $\mathscr{D}$, такая, что $s_{\mathscr{D}}(Ox) = Oy$, и поскольку $d(O, A) = d(O, B)$, то $s_{\mathscr{D}}(A) = B$.

Единственность. Пусть $\mathscr{D}'$ — другая прямая, такая, что $s_{\mathscr{D}'}(A) = B$. Тогда $s_{\mathscr{D}}$ и $s_{\mathscr{D}'}$ — автоморфизмы, переставляющие A и B, сохраняющие, следовательно, прямую $\Delta = (AB)$ и отличные от s_Δ. Поскольку прямые $\mathscr{D}$ и $\mathscr{D}'$ отличны от прямой Δ, то $s_{\mathscr{D}}$ и $s_{\mathscr{D}'}$ имеют неподвижные точки, не лежащие на Δ. Композиция $s_{\mathscr{D}} \circ s_{\mathscr{D}'}$ есть автоморфизм, оставляющий неподвижными точки A и B, а потому и любую точку прямой Δ, и отличный от s_Δ, так как он сохраняет полуплоскости, ограниченные прямой Δ. Итак, $s_{\mathscr{D}} \circ s_{\mathscr{D}'} = \mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$, откуда $\mathscr{D} = \mathscr{D}'$. □

Следствие. Если Ox, Oy — две полупрямые с общим началом O, то существует единственная прямая $\mathscr{D}$, такая, что $s_{\mathscr{D}}(Ox) = Oy$. *Эта прямая, проходящая через O, называется биссектрисой полупрямых Ox и Oy.*

Доказательство. Прежде всего для того, чтобы выполнялось условие $s_{\mathscr{D}}(Ox) = Oy$, необходимо, чтобы $s_{\mathscr{D}}(O) = O$ (см. предложение 3.4, b)), а потому $O \in \mathscr{D}$. Пусть тогда $A \in (Ox)$ и $B \in (Oy)$ — такие точки, что $d(O, A) = d(O, B) > 0$. Условие $s_{\mathscr{D}}(Ox) = Oy$ влечет $s_{\mathscr{D}}(A) = B$. Если $Ox = Oy$, то $A = B$ и $\mathscr{D}$ может быть лишь прямой (OA), содержащей Ox. Если же $Ox \neq Oy$, то $A \neq B$ и $\mathscr{D}$ есть ось симметрии, переставляющей A и B.

Медиатриса отрезка

▶ Теорема 4.3. Множество точек, *равноудаленных* от двух различных точек A и B, есть ось $\mathscr{D}$ единственной осевой симметрии, переставляющей A и B.

Доказательство. Очевидно, что из $M \in \mathscr{D}$ следует $d(A, M) = d(B, M)$ (так как M неподвижна относительно симметрии $s_{\mathscr{D}}$). Обратно, пусть $M \in \mathscr{P}$ — такая точка, что $d(A, M) = d(B, M)$, и пусть Δ есть ось симметрии, переставляющей полупрямые с началом M, содержащие соответственно A и B; тогда $s_\Delta(A) = B$, откуда $\Delta = \mathscr{D}$ и $M \in \mathscr{D}$. □

Перпендикулярные прямые

Определение 4.1. Говорят, что прямая Δ *перпендикулярна* (или *ортогональна*) прямой $\mathscr{D}$, если $\Delta \neq \mathscr{D}$ и $s_\Delta(\mathscr{D}) = \mathscr{D}$; в этом случае пишут $\Delta \perp \mathscr{D}$.

Покажем, что отношение ортогональности *симметрично* (хотя и не рефлексивно).

▶ Теорема 4.4. Отношение $\Delta \perp \mathscr{D}$ влечет $\mathscr{D} \perp \Delta$; из него также следует, что прямые Δ и $\mathscr{D}$ пересекаются.

Доказательство [1]). Пусть $A \in \mathscr{D}$ — такая точка, что $A \notin \Delta$; если $s_\Delta(\mathscr{D}) = \mathscr{D}$, то точка $B = s_\Delta(A)$ отлична от A и принадлежит $\mathscr{D}$; середина O отрезка $[AB]$ неподвижна относительно s_Δ и, значит, является общей точкой $\mathscr{D}_0$ и Δ, а потому Δ — медиатриса $[AB]$. Тогда, поскольку симметрия сохраняет расстояния, $s_\mathscr{D}(\Delta)$ есть медиатриса $[s_\mathscr{D}(A)\, s_\mathscr{D}(B)] = [AB]$ и $s_\mathscr{D}(\Delta) = \Delta$. Другими словами, из $\Delta \perp \mathscr{D}$ следует $\mathscr{D} \perp \Delta$. □

Замечание. Из этого доказательства видно, что медиатриса отрезка $[AB]$ есть перпендикуляр к прямой (AB), проходящий через середину O отрезка $[AB]$.

Предложение 4.5. Через данную точку A проходит одна и только одна прямая, перпендикулярная заданной прямой $\mathscr{D}$.

Доказательство. Если $A \notin \mathscr{D}$, то искомая прямая должна пройти через точку $B = s_\mathscr{D}(A)$; значит, это может быть лишь прямая (AB), и ее образ при симметрии $s_\mathscr{D}$ есть прямая $(s_\mathscr{D}(A)\, s_\mathscr{D}(B)) = (AB)$.

Если $A \in \mathscr{D}$, то искомый перпендикуляр есть ось единственной симметрии, переставляющей две полупрямые прямой $\mathscr{D}$ с началом в A.

---

[1]) На ближайших страницах мы предоставляем читателю выполнить соответствующие очень простые рисунки.

Снова об автоморфизмах

Предложение 4.6. Пусть (ABC) и $(A'B'C')$ — два *треугольника* (тройки неколлинеарных точек), для которых

$$d(A, B) = d(A', B'), \quad d(A, C) = d(A', C'),$$
$$d(B, C) = d(B', C').$$

Тогда существует единственный автоморфизм f плоскости $\mathcal{P}$, который переводит (A, B, C) в (A', B', C'), и этот автоморфизм является произведением *двух* или *трех* осевых симметрий [1]).

Доказательство. Единственность f следует из предложения 3,5, с), так как если бы было два таких автоморфизма f, g, то автоморфизм $g^{-1} \circ f$ имел бы три неколлинеарные неподвижные точки A, B, C, откуда $f = g$.

Для доказательства существования f обозначим через s_1 такую симметрию, что $s_1(A) = A'$ (s_1 единственна, если $A \neq A'$), и положим $B_1 = s_1(B)$, $C_1 = s_1(C)$. Тогда $d(A', B_1) = d(A, B) = d(A', B')$, откуда следует существование симметрии s_2, такой, что $s_2(A') = A'$ и $s_2(B_1) = B'$. Полагая $C_2 = s_2(C_1)$, будем иметь $d(A', C_2) = d(A', C_1) = d(A', C')$ и $d(B', C_2) = d(B_1, C_1) = d(B', C')$. Теперь возможны два случая. Если $C_2 = C'$, то требуемым автоморфизмом является $f = s_2 \circ s_1$. Если же $C_2 \neq C'$, то прямая $(A'B')$ есть медиатриса отрезка $[C_2C']$. Обозначив через s_3 симметрию с осью $(A'B')$, найдем требуемый автоморфизм: $f = s_3 \circ s_2 \circ s_1$. □

Следствие. Всякий автоморфизм f плоскости $\mathcal{P}$ разлагается в произведение не более чем трех осевых симметрий.

5. ВРАЩЕНИЯ

Определение 5.1. *Вращением с центром O* называется автоморфизм $\mathcal{P}$, имеющий O единственной неподвижной точкой либо совпадающий с тождественным отображением.

[1]) Напомним, что существование f составляет «третий признак равенства треугольников».

Произведение симметрий

Теорема 5.1. a) Произведение двух симметрий, оси которых $\mathscr{D}$, $\mathscr{D}'$ проходят через точку O, есть вращение с центром O.

b) Обратно, для любого вращения r с центром O и любой прямой $\mathscr{D}$, проходящей через O, существуют прямые $\mathscr{D}'$, $\mathscr{D}''$, проходящие через O, такие, что $s_{\mathscr{D}'} \circ s_{\mathscr{D}} = r = s_{\mathscr{D}} \circ s_{\mathscr{D}''}$.

Доказательство. a) $r = s_{\mathscr{D}} \circ s_{\mathscr{D}'}$ есть автоморфизм $\mathscr{P}$ с неподвижной точкой O. Если r имеет вторую неподвижную точку A, то для точки $B = s_{\mathscr{D}'}(A)$ имеем $s_{\mathscr{D}}(B) = A$ и, значит, также $s_{\mathscr{D}}(A) = B$. По предложению 4.2, $A = B$ или $\mathscr{D} = \mathscr{D}'$. Но если $A = B$, то A — общая точка прямых $\mathscr{D}$, $\mathscr{D}'$ и, поскольку $A \neq 0$, мы снова имеем $\mathscr{D} = \mathscr{D}'$. Таким образом, r не имеет неподвижной точки, кроме O, за исключением случая $\mathscr{D}' = \mathscr{D}$, когда $r = \mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$. Во всех вариантах r есть вращение с центром O.

b) Если $r = \mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$, результат очевиден; в противном случае пусть $A \in \mathscr{D} \setminus \{O\}$ и $B = r(A)$. Тогда точка O равноудалена от A и B и существует симметрия с осью $\mathscr{D}'$, проходящей через O, меняющая местами A и B. Композиция $s_{\mathscr{D}'} \circ r$ есть автоморфизм $\mathscr{P}$, отличный от $\mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$, с неподвижными точками O и A; значит, он является симметрией с осью $\mathscr{D} = (OA)$, и мы имеем $s_{\mathscr{D}'} \circ r = s_{\mathscr{D}}$ или $r = s_{\mathscr{D}'} \circ s_{\mathscr{D}}$.

Аналогично, существует прямая $\mathscr{D}''$, такая, что $r^{-1} = s_{\mathscr{D}''} \circ s_{\mathscr{D}}$, откуда $r = s_{\mathscr{D}} \circ s_{\mathscr{D}''}$. □

Следствие 1. Если r — *вращение* с центром O и $\mathscr{D}$ — прямая, проходящая через O, то композиции $s_{\mathscr{D}} \circ r$ и $r \circ s_{\mathscr{D}}$ суть *симметрии* с осями, проходящими через O.

Следствие 2. Для любой пары (Ox, Oy) полупрямых с общим началом O существует *единственное вращение* r с центром O, такое, что $r(Ox) = Oy$.

Пусть, в самом деле, s — симметрия относительно прямой (Ox). Для того чтобы существовало вращение r с центром O, при котором $r(Ox) = Oy$, необходимо и достаточно, чтобы автоморфизм $r \circ s$ был симметрией s', переставляющей Ox и Oy, откуда $r = s' \circ s$. □

Группа вращений с заданным центром

▶ Теорема 5.2. Вращения с центром O образуют *коммутативную* группу.

Доказательство. Пусть r, r' — два вращения с центром O.

а) Покажем, что $r' \circ r^{-1}$ — вращение с центром O. При выбранной прямой $\mathcal{D}$, проходящей через O, теорема 5.1 показывает, что существуют две прямые Δ, Δ', проходящие через O, такие, что $r = s_\Delta \circ s_\mathcal{D}$ и $r' = s_{\Delta'} \circ s_\mathcal{D}$. Тогда

$$r' \circ r^{-1} = s_{\Delta'} \circ s_\mathcal{D} \circ s_\mathcal{D}^{-1} \circ s_\Delta^{-1} = s_{\Delta'} \circ s_\Delta,$$

откуда видно, что $r' \circ r^{-1}$ — вращение.

b) Покажем, что $r \circ r' = r' \circ r$.

Пусть A — произвольная точка в $\mathcal{P} \setminus \{O\}$ и s — симметрия с осью (OA). Тогда $r \circ s$ является симметрией с осью, проходящей через O, переводящей A в $B = r(A)$ и, следовательно, переставляющей эти точки, откуда $r \circ s(B) = A$. Аналогично, $r' \circ s$ есть симметрия с осью, проходящей через O, переставляющая точки A и $B' = r'(A)$, откуда $r' \circ s(B') = A$.

Но, в силу части а), $r \circ r'$ и $r' \circ r$ — вращения. Применяя следствие 1, мы увидим, что $r' \circ r \circ s$ — симметрия с осью, проходящей через O, переводящая B в B', в то время как $r \circ r' \circ s$ — симметрия с осью, проходящей через O, переводящая B' в B. Имеем $r' \circ r \circ s = r \circ r' \circ s$, откуда $r \circ r' = r' \circ r$. □

Приведенное выше следствие 2 можно сформулировать, сказав, что *группа вращений с центром O действует просто транзитивно на множестве полупрямых с началом в O*, а также на каждой окружности с центром O и радиусом $R \neq 0$.

Покажем, наконец, что группа $\mathcal{R}_O$ вращений с центром O всегда изоморфна некоторой фиксированной группе при изменении точки O.

Предложение 5.3. Если O, O' — две различные точки $\mathcal{P}$ и s — осевая симметрия, переставляющая O и O', то отображение h: $\mathcal{R}_O \to \mathcal{R}_{O'}$, $r \mapsto s \circ r \circ s$ является *изоморфизмом групп.*

Доказательство. Пусть $r \in \mathcal{R}_O$ и $r' = s \circ r \circ s$; если $v = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$, то $r' = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$. Если $r \neq \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$, то r' есть автоморфизм $\mathcal{P}$ с единственной неподвижной точкой $O' = s(O)$, т. е. вращение с центром O', причем $r'^{-1} = s \circ r^{-1} \circ s$. Наконец, для двух вращений r_1, r_2 с центром O имеем

$$h(r_1) \circ h(r_2) = (s \circ r_1 \circ s)(s \circ r_2 \circ s) =$$
$$= s \circ (r_1 \circ r_2) \circ s = h(r_1 \circ r_2).$$

Итак, h в самом деле есть изоморфизм $\mathcal{R}_O$ на $\mathcal{R}_{O'}$. □

Замечание. Если $O = O'$ и s — какая-либо симметрия с осью, проходящей через O, то отображение h: $\mathcal{R}_O \to \mathcal{R}_O$, $r \mapsto s \circ r \circ s$ является автоморфизмом $\mathcal{R}_O$ и можно проверить, что $h(r) = r^{-1}$ (см. упр. VI. 3).

Центральные симметрии

Определение 5.1. Если O — точка плоскости $\mathcal{P}$, то *симметрией с центром* O называется биекция σ_O плоскости $\mathcal{P}$ на $\mathcal{P}$, определяемая условием:

для любой точки $M \in \mathcal{P}$ *точка* O *есть середина отрезка* $[M\sigma_O(M)]$.

Теорема 5.4. Симметрия с центром O есть коммутативное произведение осевых симметрий относительно любой пары перпендикулярных прямых, проходящих через O; она есть, следовательно, вращение с центром O и притом единственное *инволютивное вращение* с центром O, отличное от тождественного отображения.

Доказательство. а) Обозначив через $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ две перпендикулярные прямые, проходящие через O, покажем, что симметрии $s = s_{\mathcal{D}}$ и $s = s_{\mathcal{D}'}$ коммутируют и что их произведение есть инволютивное вращение.

Выберем $A \in \mathcal{D}' \setminus \{O\}$; точка $B = s(A)$ принадлежит $\mathcal{D}'$ по условию; поэтому $s' \circ s(A) = s'(B) = B$ и $s \circ s'(A) = s(A) = B$. По вышеприведенному следствию 2 получим $s' \circ s = s \circ s'$ (единственное вращение с центром O, переводящее A в B). Отсюда $(s' \circ s) \circ (s' \circ s) = (s' \circ s) \circ (s \circ s') = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$.

b) Покажем, что инволютивное вращение r с центром O есть симметрия с центром O или тождественное отображение.

В самом деле, для каждой точки $M \in \mathcal{P}$ середина отрезка $[Mr(M)]$ есть неподвижная точка r; если $r \neq \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$, то это точка O и $r = \sigma_O$.

Так как композиция симметрий относительно двух ортогональных прямых $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ не может быть тождественным отображением (поскольку $\mathcal{D}' \neq \mathcal{D}$), то она является симметрией с центром O. Теорема 5.4 полностью доказана. □

6. УГЛЫ

Слово «угол» охватывает традиционно несколько разных математических понятий, которые необходимо различать. Но усилия, предпринятые в преподавании для устранения любых неясностей, привели к парализующей тяжести терминологии. На самом деле на практике пользуются обиходным языком: исходя из «угла» как фигуры, образованной двумя полупрямыми с общим началом, к нему присоединяют все математические понятия, в которых возникает надобность. Но, чтобы не утратить необходимой гибкости, не следует, как часто делают, сводить традиционное понятие «фигуры» к понятию множества: геометрическая фигура скорее есть семейство множеств (точек, прямых, отрезков, окружностей, ...), связанных определенными соотношениями, и мы можем по произволу обогащать фигуру посредством геометрических построений.

В частности, заметим, что задание двух полупрямых Ox, Oy с общим началом O равносильно заданию *множества* $(Ox) \cup (Oy)$ лишь в том случае, если эти полупрямые не противоположны[1]).

Каждой паре (Ox, Oy) полупрямых с общим началом, не лежащих на одной прямой, мы ставим в соответствие *открытый угловой сектор*, образованный пересечением полуплоскости Π_x, содержащей Oy и ограниченной прямой (Ox), и полуплоскости Π_y, содержащей Ox и ограниченной прямой (Oy). *Замкнутый* угловой сектор получится как пересечение *замкнутых* полуплоскостей (замкнутая полуплоскость есть объединение полуплоскости и ее граничной прямой).

Определение 6.1. Две пары (Ox, Oy), $(O'x', O'y')$ полупрямых называются *конгруэнтными* (или, не совсем правильно, равными), если существует автоморфизм f плоскости $\mathscr{P}$, такой, что $f(Ox) = O'x'$ и $f(Oy) = O'y'$.

Это отношение конгруэнтности является, очевидным образом, отношением эквивалентности, классы эквивалентности которого называются *неориентированными углами*; класс, содержащий пару (Ox, Oy), обозначается $\widehat{xOy}$.

Если полупрямые Ox, Oy совпадают (соотв. противоположны), то класс $\widehat{xOy}$, образованный совпадающими (соотв. противоположными) парами полупрямых, есть по определению *нулевой* (соотв. *развернутый*) угол $\widehat{xOy}$. Нулевой угол обозначают просто 0, а развернутый ω.

Очевидно, что $\widehat{xOy} = \widehat{yOx}$ (так как существует симметрия, переставляющая Ox и Oy).

Подобным же образом, если Ox', Oy' — две полупрямые, соответственно противоположные Ox, Oy, то $\widehat{x'Oy'} = \widehat{xOy}$ (так как симметрия с центром O меняет местами Ox с Ox' и Oy с Oy').

Наконец, как мы увидим далее, пары (Ox, Oy), такие, что прямые (Ox), (Oy) перпендикулярны, об-

[1]) В случае противоположных полупрямых их задание выделяет на прямой точку O, но прямая с выделенной точкой есть уже фигура, отличная от самой прямой (для сравнения: отрезок и отрезок с указанной серединой — фигуры разные). — *Прим. перев.*

разуют один класс эквивалентности, называемый *прямым углом* и обозначаемый δ.

Изучение углов будет облегчено благодаря использованию представителей (Ox, Oy), одна сторона Ox которых будет фиксирована, а вторая Oy будет располагаться в одной из полуплоскостей, ограниченных прямой (Ox).

Предложение 6.1. Пусть Ox — полупрямая и Π — замкнутая полуплоскость, ограниченная прямой (Ox). Для любого неориентированного угла α имеется единственный представитель вида (Ox, Oy), где $Oy \subset \Pi$ (другими словами, отображение $Oy \longmapsto \widehat{xOy}$ есть биекция множества полупрямых с началом O, содержащихся в Π, на множество углов).

Доказательство. Ввиду очевидности результата для нулевого или развернутого α будем считать, что $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq \omega$.

a) *Единственность* получается немедленно: если $\widehat{xOy} = \widehat{xOz}$, то существует автоморфизм f, такой, что $f(Ox) = Ox$ и $f(Oy) = Oz$, и, значит, сохраняющий каждую точку прямой (Ox). Если Oy, Oz лежат по одну сторону от этой прямой, то отображение f тождественное.

b) Для доказательства *существования* предположим, что α определяется в виде $\alpha = \widehat{uAv}$. Обозначим через s_1 симметрию, для которой $s_1(A) = O$. Положим $Ou_1 = s_1(Au)$ и $Ov_1 = s_1(Av)$; существует симметрия s_2 с осью, проходящей через O, такая, что $s_2(Ou_1) = Ox$. Если $s_2(Ov_1) \subset \Pi$, то полупрямая $Oy = s_2(Ov_1)$ удовлетворяет требуемым условиям; в противном случае достаточно принять за Oy полупрямую, симметричную $s_2(Ov_1)$ относительно Ox. $\square$.

В частности, существует единственная полупрямая Oy, перпендикулярная Ox и лежащая в Π: класс $\widehat{xOy}$ образован тогда парами перпендикулярных полупрямых и называется *прямым углом*; он обозначается δ.

Отношение порядка

Выберем полупрямую Ox и замкнутую полуплоскость Π, ограниченную прямой (Ox). С каждым углом $\alpha = \widehat{xOy}$, где $Oy \subset \Pi$, мы ассоциируем замкнутый угловой сектор S_α, ограниченный Ox и Oy, и условимся считать, что $S_\alpha = \Pi$, если α — развернутый угол ω, и что $S_\alpha = Ox$, если α — нулевой угол. Тогда на множестве $\mathscr{A}$ неориентированных углов получим отношение порядка, полагая $\alpha \leqslant \beta$, если $S_\alpha \subset S_\beta$. Легко видеть, что это отношение порядка не зависит от выбора пары (Ox, Π). Мы покажем, что этот порядок *линейный* и что $\mathscr{A}$, снабженное этим порядком, изоморфно замкнутому интервалу в $\mathbb{R}$.

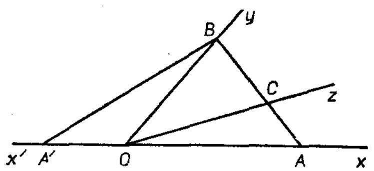


Рис. 3

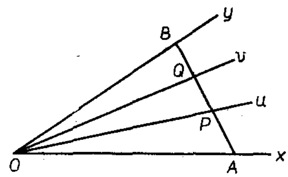


Рис. 4

Так как развернутый угол — наибольший элемент $\mathscr{A}$, а нулевой угол — наименьший, то достаточно сравнивать ненулевые и неразвернутые углы. Для этого заметим, что всякая полупрямая Ou, содержащая некоторую точку $A \neq O$ углового сектора с вершиной O, вся лежит в этом секторе; удобно обозначить замкнутый угловой сектор, ограниченный двумя полупрямыми Ox, Oy, не лежащими на одной прямой, через $S(Ox, Oy)$.

Предложение 6.2. Пусть Π — замкнутая полуплоскость, ограниченная прямой $x'Ox$, Oy — полупрямая, лежащая в Π, отличная от Ox и Ox', и A, B, A' — три точки, отличные от O, принадлежащие соответственно полупрямым Ox, Oy, Ox' (рис. 3).

а) Каждая полупрямая Oz, лежащая в Π и отличная от Ox, Oy, Ox', пересекает только один из отрезков $[AB]$, $[BA']$. В зависимости от того, пересекает она $[AB]$ или $[BA']$, имеем включение $S(Ox, Oz) \subset \subset S(Ox, Oy)$ или $S(Ox, Oy) \subset S(Ox, Oz)$.

b) Пусть Ou, Ov — две полупрямые, лежащие в $S(Ox, Oy)$ и, значит, пересекающие $[AB]$ в некоторых точках P, Q (рис. 4). Тогда включение $S(Ox, Ou) \subset \subset S(Ox, Ov)$ равносильно утверждению «P лежит между A и Q».

Доказательство. a) Аксиома Паша и предложение 3.1 показывают, что прямая (Oz) пересекает лишь один из отрезков $[AB]$, $[BA']$; эта точка пересечения неизбежно принадлежит полупрямой Oz, поскольку она лежит в П. С другой стороны, из определения полуплоскостей и угловых секторов вытекает, что $[AB] \subset S(Ox, Oy)$ и $[BA'] \subset S(Oy, Ox')$. По предыдущему замечанию $Oz \subset S(Ox, Oy)$ или $Oz \subset S(Oy, Ox')$, смотря по тому, пересекает ли Oz отрезок $[AB]$ или $[BA']$.

Если Oz пересекает $[AB]$ в точке C, то полученный нами результат показывает (в измененных обозначениях), что $S(Ox, Oz)$ есть объединение полупрямых с началом O, пересекающих $[AC]$, тогда как $S(Ox, Oy)$ есть объединение полупрямых с началом O, пересекающих $[AB]$. Отсюда вытекает включение $S(Ox, Oz) \subset S(Ox, Oy)$.

Если Oz пересекает $[BA']$, то аналогично имеем $S(Ox', Oz) \subset S(Ox', Oy)$, откуда, переходя к дополнительным секторам, получаем $S(Ox, Oz) \supset S(Ox, Oy)$.

b) По предыдущему, включение $S(Ox, Ou) \subset \subset S(Ox, Ov)$ равносильно $Ou \subset S(Ox, Ov)$, а значит, $P \in [AQ]$. $\square$

Следствие. Отношение порядка, определенное на множестве $\mathscr{A}$ углов, есть отношение *линейного порядка*, и каждое подмножество в $\mathscr{A}$ допускает верхнюю и нижнюю грани.

Доказательство. Линейность порядка вытекает из части a) предыдущего предложения. С другой стороны, часть b) показывает, что множество $[0, \alpha]$ углов, не превосходящих некоторого неразвернутого угла $\alpha = \widehat{xOy}$, допускает строго возрастающую биекцию на отрезок $[AB]$, ориентированный от A к B. Отсюда вытекает, что $\mathscr{A}$ допускает строго возрастающую биекцию на ломаную линию (ABA') (объединение отрезков $[AB]$ и $[BA']$, ориентированное от A к A'); следовательно, $\mathscr{A}$ изоморфно замкнутому ограниченному интервалу I в $\mathbb{R}$ длины $AB + BA'$. Отсюда следует наше утверждение, так как любое подмножество в I имеет в I нижнюю и верхнюю грани.

7. СЛОЖЕНИЕ И ИЗМЕРЕНИЕ УГЛОВ

Во всем последующем, если не оговорено противное слово «угол» означает *неориентированный* угол, а $S(Ox, Oy)$ обозначает замкнутый угловой сектор, ограниченный двумя не противоположными полупрямыми Ox, Oy, или полупрямую Ox в случае $Ox = Oy$.

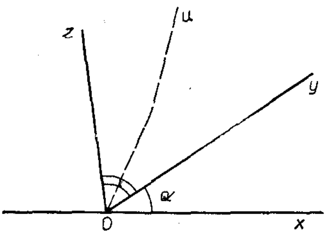


Рис. 5

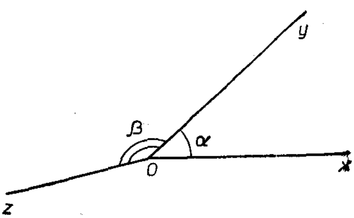


Рис. 6

Определение 7.1. Говорят, что угол γ есть *сумма* углов α, β, и пишут $\gamma = \alpha + \beta$, если существуют три полупрямые Ox, Oy, Oz с общим началом O, такие, что $\widehat{xOy} = \alpha$, $\widehat{yOz} = \beta$, $\widehat{xOz} = \gamma$ и

- либо $S(Ox, Oz) = S(Ox, Oy) \cup S(Oy, Oz)$,
- либо Oz — полупрямая, противоположная Ox (в этом случае говорят, что угол β *дополнителен* к α и что $\alpha + \beta$ — развернутый угол).

Если $\gamma = \alpha + \beta$, то пишут также $\beta = \gamma - \alpha$ и $\alpha = \gamma - \beta$.

Заметим, что в любом случае эти три полупрямые лежат в одной полуплоскости (рис. 5).

Из данного определения, основанного на теоретико-множественном объединении угловых секторов, следует, что сложение углов *коммутативно* и *ассоциативно*; оно удовлетворяет также правилу сокращения, по которому из $\alpha + \beta = \alpha + \beta'$ следует $\beta = \beta'$; однако сумма $\alpha + \beta$ определена не всегда (рис. 6).

Половинный угол. По определению, *внутренняя биссектриса* двух не противоположных полупрямых Oy, Oz есть полупрямая Ou, лежащая на прямой — биссектрисе Oy, Oz и содержащаяся в $S(Oy, Oz)$. Очевидно, что (см. рис. 5) $\widehat{yOu} = \widehat{uOz}$ и $\widehat{yOu} + \widehat{uOz} = \widehat{yOz}$, откуда $\widehat{yOz} = 2\widehat{yOu}$ [1]. Мы говорим, что угол $\widehat{yOu}$ есть *половина* угла $\widehat{yOz}$, и пишем $\widehat{yOu} = {}^1/_2\,\widehat{yOz}$.

Прямой угол δ — единственный, для которого $2\delta = \delta + \delta = \omega$; итак, половинный угол данного угла всегда определен.

По индукции для любого угла α определяется последовательность (α_n) таких углов, что $2^n\alpha_n = \alpha$; угол α_n обозначаем $2^{-n}\alpha$.

Существование градуировки на множестве углов

Воспользуемся представителями углов вида $\widehat{xOy}$, где Ox — заданная полупрямая, а Oy содержится в замкнутой полуплоскости Π, ограниченной прямой (Ox).

Пусть Ou — внутренняя биссектриса полупрямых Oy, Oz, расположенных в Π; положим $\widehat{xOy} = \alpha$, $\widehat{xOz} = \gamma$ (см. рис. 5); тогда легко видеть, что $\widehat{xOu} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}$. Более того, каждая полупрямая, лежащая в $S(Oy, Oz)$, содержится в одном из секторов $S(Oy, Ou)$ и $S(Oz, Ou)$. На основе этого замечания по индукции доказывается

Предложение 7.1. *Для любого угла α и каждого целого $n \geqslant 1$ существует единственное целое $q_n \geqslant 0$,*

---

[1] Здесь под 2α понимается $\alpha + \alpha$. — *Прим. перев.*

цию на отрезок $[AB]$, ориентированный от A к B. Отсюда вытекает, что $\mathscr{A}$ допускает строго возрастающую биекцию на ломаную линию (ABA') (объединение отрезков $[AB]$ и $[BA']$, ориентированное от A к A'); следовательно, $\mathscr{A}$ изоморфно замкнутому ограниченному интервалу I в $\mathbb{R}$ длины $AB + BA'$. Отсюда следует наше утверждение, так как любое подмножество в I имеет в I нижнюю и верхнюю грани.

7. СЛОЖЕНИЕ И ИЗМЕРЕНИЕ УГЛОВ

Во всем последующем, если не оговорено противное слово «угол» означает *неориентированный* угол, а $S(Ox, Oy)$ обозначает замкнутый угловой сектор, ограниченный двумя не противоположными полупрямыми Ox, Oy, или полупрямую Ox в случае $Ox = Oy$.

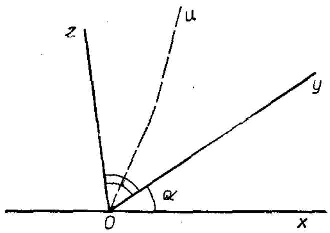


Рис. 5

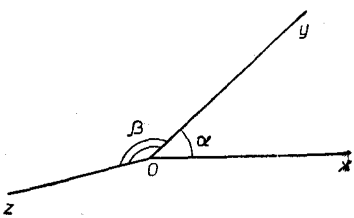


Рис. 6

Определение 7.1. Говорят, что угол γ есть *сумма* углов α, β, и пишут $\gamma = \alpha + \beta$, если существуют три полупрямые Ox, Oy, Oz с общим началом O, такие, что $\widehat{xOy} = \alpha$, $\widehat{yOz} = \beta$, $\widehat{xOz} = \gamma$ и

- либо $S(Ox, Oz) = S(Ox, Oy) \cup S(Oy, Oz)$,
- либо Oz — полупрямая, противоположная Ox (в этом случае говорят, что угол β *дополнителен* к α и что $\alpha + \beta$ — развернутый угол).

Если $\gamma = \alpha + \beta$, то пишут также $\beta = \gamma - \alpha$ и $\alpha = \gamma - \beta$.

Заметим, что в любом случае эти три полупрямые лежат в одной полуплоскости (рис. 5).

Из данного определения, основанного на теоретико-множественном объединении угловых секторов, следует, что сложение углов *коммутативно* и *ассоциативно*; оно удовлетворяет также правилу сокращения, по которому из $\alpha+\beta=\alpha+\beta'$ следует $\beta=\beta'$; однако сумма $\alpha+\beta$ определена не всегда (рис. 6).

Половинный угол. По определению, *внутренняя биссектриса* двух не противоположных полупрямых Oy, Oz есть полупрямая Ou, лежащая на прямой — биссектрисе Oy, Oz и содержащаяся в $S(Oy, Oz)$. Очевидно, что (см. рис. 5) $\widehat{yOu}=\widehat{uOz}$ и $\widehat{yOu}+\widehat{uOz}=\widehat{yOz}$, откуда $\widehat{yOz}=2\widehat{yOu}$ [1]). Мы говорим, что угол $\widehat{yOu}$ есть *половина* угла $\widehat{yOz}$, и пишем $\widehat{yOu}={}^1/_2\widehat{yOz}$.

Прямой угол δ — единственный, для которого $2\delta=\delta+\delta=\omega$; итак, половинный угол данного угла всегда определен.

По индукции для любого угла α определяется последовательность (α_n) таких углов, что $2^n\alpha_n=\alpha$; угол α_n обозначаем $2^{-n}\alpha$.

Существование градуировки на множестве углов

Воспользуемся представителями углов вида $\widehat{xOy}$, где Ox — заданная полупрямая, а Oy содержится в замкнутой полуплоскости Π, ограниченной прямой (Ox).

Пусть Ou — внутренняя биссектриса полупрямых Oy, Oz, расположенных в Π; положим $\widehat{xOy}=\alpha$, $\widehat{xOz}=\gamma$ (см. рис. 5); тогда легко видеть, что $\widehat{xOu}=\frac{\alpha}{2}+\frac{\gamma}{2}$. Более того, каждая полупрямая, лежащая в $S(Oy, Oz)$, содержится в одном из секторов $S(Oy, Ou)$ и $S(Oz, Ou)$. На основе этого замечания по индукции доказывается

Предложение 7.1. *Для любого угла α и каждого целого $n\geqslant 1$ существует единственное целое $q_n\geqslant 0$,*

[1]) Здесь под 2α понимается $\alpha+\alpha$. — *Прим. перев.*

удовлетворяющее неравенствам

$$q_n 2^{-n}\omega \leqslant \alpha < (q_n + 1)\, 2^{-n}\omega,$$

где ω — развернутый угол.

Дело сводится к построению полупрямых Oy_n^q, лежащих в Π и таких, что $\widehat{xOy_n^q} = q \cdot 2^{-n}\omega\ (0 \leqslant q \leqslant 2^n)$, и к проверке того, что 2^n угловых секторов $S(Oy_n^q, Oy_n^{q+1})$ $(0 \leqslant q \leqslant 2^n - 1)$ при фиксированном a покрывают Π.

Такая градуировка тем тоньше, чем больше n; она позволяет нам определить «меру» углов. Предварительно мы установим лемму, которая заменит нам здесь аксиому Архимеда.

Предложение 7.2. Для любого угла $\alpha > 0$ существует целое n, такое, что $2^{-n}\omega \leqslant \alpha$.

Доказательство. Пусть ε — нижняя грань углов вида $2^{-n}\omega$, которая существует в силу следствия предложения 6.2. Так как отображение $\alpha \longmapsto \alpha/2$ есть строго возрастающая биекция $\mathscr{A}$ на интервал $[0, \delta]$ множества $\mathscr{A}$, то

$$\frac{\varepsilon}{2} = \inf_{n \in \mathbb{N}^*} 2^{-n}\omega, \quad \text{откуда} \quad \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{и} \quad \varepsilon = 0.$$

Отсюда следует сформулированное утверждение. □

Следствие. Любой угол α является верхней гранью множества E_α углов вида $q \cdot 2^{-n}\omega$ $(n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant q \leqslant 2^n)$, не превосходящих α.

Доказательство. α есть мажоранта для E_α, и для каждого угла $\beta < \alpha$ существует целое $n \in \mathbb{N}$, такое, что $2^{-n}\omega < \alpha - \beta$. Если q — наименьшее целое, такое, что $q \cdot 2^{-n}\omega > \alpha$, то угол $(q-1)\,2^{-n}\omega$ принадлежит интервалу $[\beta, \alpha]$ и E_α. Значит, α — наименьшая мажоранта E_α. □

Определение 7.2. *Мерой* неориентированных углов называется любое строго возрастающее отображение

φ: $\mathscr{A} \to \mathbb{R}_+$, такое, что $\varphi(\alpha+\beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)$ всякий раз, когда сумма $\alpha+\beta$ определена.

▶ Теорема 7.3. *Для любого действительного $k > 0$ существует единственная мера φ на $\mathscr{A}$, такая что $\varphi(\omega) = k$, и φ есть биекция $\mathscr{A}$ на интервал $[0, k] \subset \mathbb{R}$.*

Доказательство. Единственность. Если такая функция φ существует, то для любой пары (n, q) положительных целых чисел, таких, что $q \leqslant 2^n$, должно иметь место равенство

$$\varphi(q \cdot 2^{-n}\omega) = q \cdot 2^{-n}k. \tag{1}$$

С другой стороны, в обозначениях вышеприведенного следствия, для любого угла α должно быть

$$\varphi(\alpha) = \sup_{x \in E_\alpha} \varphi(x). \tag{2}$$

Соотношения (1) и (2) определяют φ однозначно.

Существование. Обратно, пусть φ есть отображение $\mathscr{A}$ в $\mathbb{R}_+$, определенное условиями (1), (2). Если через E обозначить множество всех углов вида $q \cdot 2^{-n}\omega$, где целые положительные q, n таковы, что $q \leqslant 2^n$, то очевидным образом

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) \tag{3}$$

для любой пары $(x, y) \in E^2$, такой, что определена сумма $x+y$.

С помощью аппроксимации, поступая так же, как при доказательстве теоремы I. 5.2, выведем отсюда, что (3) сохраняет силу и вообще для любой пары углов x, y с определенной суммой $x+y$. Отсюда вытекает возрастание φ.

Наконец, чтобы доказать, что φ есть биекция $\mathscr{A}$ на $[0, k]$, достаточно заметить, что любое действительное $\xi \in (0, k]$ есть верхняя грань множества D_ξ действительных чисел вида $q \cdot 2^{-n}k$ ($n \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$, $q \leqslant 2^n$), меньших ξ, и что угол $x = \sup\limits_{t \in D_\xi} \left(\frac{t}{k}\omega\right)$ — единственный, удовлетворяющий условию $\varphi(x) = \xi$. □

Можно заметить аналогию между этим доказательством и доказательством теоремы I. 5.2.

Итак, мера углов определена элементарным, хотя и строгим способом; основная идея состояла в построении градуированного «транспортира» в системе счисления с основанием 2; практическая конструкция такого «транспортира», как нам кажется, помогает понять принцип этого построения.

Напомним, что если $k = 180$ (соотв. 200, π), то действительное число $\varphi(\alpha)$ называется мерой угла α в градусах (соотв. в градах, радианах).

Задачи ориентации

Ориентация действительной аффинной плоскости — относительно простой вопрос, так как существование группы трансляций позволяет свести дело к линейной группе, что приводит к ориентированию реперов с фиксированным началом. Возможно, хотя и не столь просто, ориентировать метрическую плоскость $\mathscr{P}$, не вводя дополнительной аксиомы, и доказать, что группа ее автоморфизмов распадается на два непересекающихся множества: подгруппу автоморфизмов (автоморфизмы *первого рода*[1])), разлагающихся в четное число осевых симметрий, и множество автоморфизмов (автоморфизмы *второго рода*), разлагающихся в нечетное число осевых симметрий.

Чтобы доказать это, можно начать с определения отношения эквивалентности на множестве $\mathscr{D}$ пар полупрямых (Ox, Oy)[2]), не лежащих на одной прямой: при этом говорят, что две пары имеют одинаковую ориентацию, если они принадлежат одному классу. Затем доказывается, что это отношение определяет два класса эквивалентности, и автоморфизмы классифицируются, смотря по тому, сохраняют или изменяют они ориентацию пары (Ox, Oy) из $\mathscr{D}$ (см. [LF1]).

При такой ориентации метрической плоскости можно определить понятие *ориентированного угла* и *меры* ориентированных углов; эта последняя задача равносильна отысканию гомоморфизмов группы вра-

---

[1]) В оригинале: direct и indirect. — *Прим. перев.*

[2]) Здесь эти пары упорядоченные. — *Прим. перев.*

щений $\mathcal{R}_O$ с данным центром O на мультипликативную группу U комплексных чисел с модулем, равным 1, при подчинении этих гомоморфизмов условию сохранения циклического порядка. К этому можно прийти элементарным путем, отправляясь от меры неориентированных углов.

8. НЕРАВЕНСТВА В ТРЕУГОЛЬНИКЕ. ПРИЛОЖЕНИЯ

▶ *Обозначения.* Начиная отсюда, будем обозначать расстояние между двумя точками A, B просто AB вместо $d(A, B)$ (что позволяет записать вычисления более наглядно). С другой стороны, полупрямую с началом A, содержащую точку B, будем обозначать через $(AB($. Далее речь идет всюду о неориентированных углах, и мы говорим просто об «углах»; угол называется *острым* (соотв. *тупым*), если он строго меньше (соотв. больше) прямого угла. Если (ABC) — треугольник, то будем обозначать $\widehat{BAC}$ или, короче, $\hat{A}$ угол между полупрямыми $(AB($, $(AC($; дополнительный угол $\omega - \hat{A}$ будет называться внешним углом треугольника, смежным с $\hat{A}$; это есть угол между (AB) и полупрямой, противоположной $(AC($.

Наконец, ради сохранения традиции мы говорим, что сумма двух углов, если она определена, не превосходит развернутого угла ω.

Равнобедренные треугольники

Предложение 8.1 [1]). В треугольнике (ABC) равенство $AB = AC$ равносильно $\hat{B} = \hat{C}$.

Доказательство. Если $AB = AC$, то существует симметрия s с осью, проходящей через A, переставляющая B и C; отсюда следует равенство $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.

Обратно, если $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ и A' — точка, симметричная A относительно медиатрисы отрезка $[BC]$, то

1) В старинных трактатах по геометрии это предложение называлось «ослиным мостиком» (лат. pons asinorum). Несомненно, оно рассматривалось как тест на сообразительность.

равенство $\widehat{A'BC} = \widehat{ACB} = \widehat{ABC}$ показывает, что полупрямые $(BA'($ и $(BA($, находясь по одну сторону от прямой (BC), совпадают. Точно так же $(CA'(= (CA($, откуда $A' = A$ и $AB = AC$. □

Неравенства в треугольнике

Предложение 8.2. **В треугольнике (ABC) каждый внешний угол строго больше каждого не смежного с ним внутреннего.**

Доказательство. Пусть Bx — полупрямая, противоположная $(BC($. Внешний угол при вершине B есть $\widehat{ABx}$, и нам достаточно доказать неравенство $\widehat{ABx} > \widehat{BAC}$; остальные получаются из него перестановкой

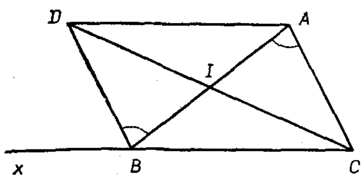


Рис. 7

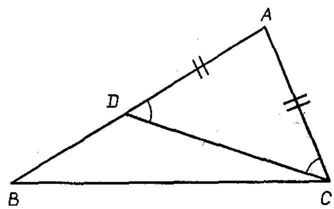


Рис. 8

вершин. Обозначим середину отрезка $[AB]$ через I, и пусть D — точка, симметричная C относительно I (рис. 7). Так как симметрия с центром I есть автоморфизм, то $\widehat{BAC} = \widehat{ABD}$. С другой стороны, D принадлежит открытому угловому сектору, ограниченному полупрямыми Bx и $(BA($, откуда $\widehat{ABx} > \widehat{ABD} = \widehat{BAC}$. □

Следствие. Сумма двух углов треугольника строго меньше развернутого угла.

Действительно, при тех же обозначениях имеем

$$\widehat{BAC} + \widehat{CBA} < \widehat{ABx} + \widehat{CBA} = \omega.$$

Предложение 8.3. В треугольнике (ABC) неравенства $AB > AC$ и $\widehat{ACB} > \widehat{ABC}$ равносильны (иными словами, меры углов образуют тот же порядок, что и длины противолежащих сторон).

Доказательство. Пусть $AB > AC$ и $D \in [AB]$ — такая точка, что $AD = AC$ (см. рис. 8). По предложению 8.1 имеем $\widehat{ADC} = \widehat{ACD}$, а по предложению 8.2 $\widehat{ABC} < \widehat{ADC}$, откуда $\widehat{ABC} < \widehat{ACB}$. Обратное утверждение получается рассуждением от противного с перестановкой B и C. □

▶ Предложение 8.4. **В треугольнике (ABC) длина каждой стороны строго меньше суммы длин двух других сторон.**

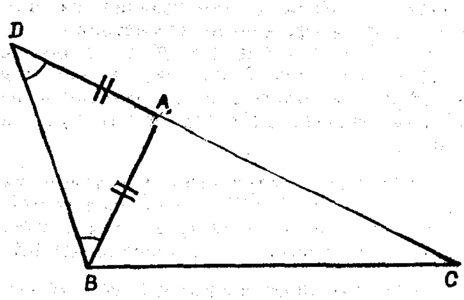


Рис. 9

Доказательство. Пусть D — точка полупрямой, противоположной $(AC($, такая, что $AD = AB$. Имеем $\widehat{ADB} = \widehat{ABD} < \widehat{CBD}$ (см. рис. 9), откуда, применяя предложение 8.3 к треугольнику (BCD), получаем $BC < CD$ и $BC < AB + AC$.

Следствие. Для любых точек A, B, C плоскости $\mathcal{P}$ имеет место неравенство $d(A, B) \leqslant d(A, C) + d(C, B)$, причем равенство выполняется лишь тогда, когда C — точка отрезка $[AB]$.

▶ Отсюда вытекает, что плоскость $\mathcal{P}$, снабженная отображением расстояния d, является ***метрическим пространством***; мы могли бы поэтому снабдить ее ассоциированной топологией.

Назовем *изометрией* всякую биекцию $\mathscr{P}$ на $\mathscr{P}$, сохраняющую расстояния; тогда имеет место

▶ Теорема 8.5. Каждая изометрия $\mathscr{P}$ является автоморфизмом.

Доказательство. Достаточно доказать, что если f — изометрия, то образ прямой есть прямая. Итак, пусть A, B, C — три коллинеарные точки. Одна из них, для определенности C, лежит между двумя другими; тогда $AB = AC + BC$, откуда $d(f(A), f(B)) = d(f(A), f(C)) + d(f(B), f(C))$. Последнее равенство означает, что $f(C)$ принадлежит прямой $(f(A)f(B))$. Итак, f сохраняет коллинеарность, а отсюда легко следует, что образ прямой есть прямая. □

▶ *Отныне мы можем применять слово «изометрия» вместо «автоморфизм».*

9. ПЕРПЕНДИКУЛЯРЫ И НАКЛОННЫЕ. ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ

Предложение 9.1. Пусть $\mathscr{D}$ — прямая плоскости $\mathscr{P}$, A — точка в $\mathscr{P}\setminus\mathscr{D}$ и H — основание перпендикуляра к $\mathscr{D}$, проведенного через A. Тогда для любой точки $M \in \mathscr{D}$ имеем $AM \geqslant AH$ и на каждой из полупрямых Hx, Hx', определяемых на $\mathscr{D}$ точкой H, расстояние AM есть строго возрастающая функция расстояния HM, стремящаяся к $+\infty$ вместе с HM.

Расстояние AH есть, таким образом, *абсолютный минимум* AM, когда M пробегает $\mathscr{D}$; оно называется *расстоянием от точки A до прямой $\mathscr{D}$.*

Доказательство. Пусть точка A' симметрична A относительно прямой $\mathscr{D}$ (рис. 10). Для каждой точки $M \in \mathscr{D}$ имеем $2AM = AM + MA' \geqslant AA' = 2AH$ и, значит, $AM \geqslant AH$, где равенство достигается лишь при $M \in [AA']$, т. е. при $M = H$.

Если M, P — две точки прямой $\mathscr{D}$, принадлежащие одной и той же полупрямой с началом H, и $HP > HM$, то $M \in [HP]$ и аксиома Паша, примененная к треугольнику (HPA'), показывает, что прямая (AM) пересекает $[PA']$ в некоторой точке Q. Поэтому

$$2AP = AP + PQ + QA' > AQ + QA' \quad \text{и}$$

$$AQ + QA' = AM + MQ + QA' > AM + MA' = 2AM,$$

$$\text{откуда } AP > AM.$$

Наконец, меняя ролями A и M, найдем, что $MA > MH$ по первой части предложения. Значит, MA стремится к $+\infty$, когда MH стремится к $+\infty$.

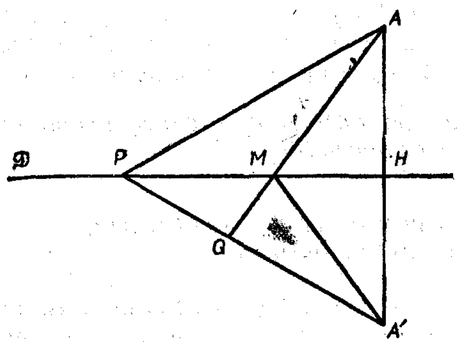


Рис. 10

Приложение: пересечение прямой с окружностью

Так как окружность $\mathscr{C}(O, R)$ есть множество точек плоскости $\mathscr{P}$, расстояние которых от ее центра, т. е. точки O, равно ее радиусу R, то имеет место

Предложение 9.2. Для того чтобы прямая $\mathscr{D}$ пересекалась с окружностью $\mathscr{C}(O, R)$, необходимо и достаточно, чтобы расстояние $d(O, \mathscr{D})$ от O до $\mathscr{D}$ не превосходило R; прямая имеет с окружностью две общие точки или одну, смотря по тому, будет ли $d(O, \mathscr{D}) < R$ или $d(O, \mathscr{D}) = R$.

Доказательство. Необходимость условия вытекает из предложения 9.1. Для доказательства достаточности предположим, что $d(O, \mathscr{D}) < R$, и обозначим через H ортогональную проекцию O на $\mathscr{D}$. На каждой из полупрямых Hx, Hx', определяемых началом H на $\mathscr{D}$, расстояние OM есть строго возрастающая функция расстояния HM, изменяющаяся от $d(O, \mathscr{D})$ до $+\infty$, когда HM изменяется от 0 до $+\infty$; следовательно, она единственный раз принимает значение R.

Исследование случая $d(O, \mathscr{D}) = R$ очевидно. □

Пересечение двух окружностей

Без какой-нибудь дополнительной аксиомы, по-видимому, трудно обсуждать вопрос о пересечении двух окружностей, не используя топологических соображений. Допустив, что окружности являются *связными* множествами на $\mathscr{P}$ (см. упр. VI. 6), мы установим

Предложение 9.3. Для того чтобы две окружности $\mathscr{C}(O, R)$, $\mathscr{C}(O', R')$ с различными центрами O, O' пересекались, необходимо и достаточно, чтобы расстояние $d = OO'$ между их центрами удовлетворяло неравенствам

$$|R - R'| \leqslant d \leqslant R + R'; \tag{1}$$

они имеют две общие точки или одну, смотря по тому, являются ли неравенства строгими: $|R - R'| < d < R + R'$ или одно из них становится равенством: $d = |R - R'|$ или $d = R + R'$.

Доказательство. Необходимость условия (1) следует из неравенства треугольника. Пусть, напротив, (1) выполнено; обозначим через $f(M) = O'M$ расстояние от O' до переменной точки M окружности $\mathscr{C}(O, R)$. Применив неравенства для сторон треугольника (MOO'), получим $|d - R| \leqslant f(M) \leqslant d + R$; кроме того, f принимает значения $|d - R|$, $d + R$ в точках A, B прямой (OO'). Но f — непрерывное отображение из $\mathscr{C}(O, R)$ в $\mathbb{R}$ (как ограничение на $\mathscr{C}(O, R)$ функции расстояния). Если мы допустим, что $\mathscr{C}(O, R)$ — связное множество, то f будет принимать на каждой из полуокружностей диаметра $[AB]$ каждое значение, заключенное между наименьшим $|d - R|$ и наибольшим $d + R$; в частности, f примет и значение R' (так как из (1) следует, что $|d - R| \leqslant R' \leqslant d + R$).

Остается доказать, что f на каждой из полуокружностей принимает значение R' лишь один раз. Действительно, если $f(M) = f(P) = R'$, то прямая (OO') есть медиатриса отрезка $[MP]$ и точки M, P могут принадлежать одной и той же полуокружности лишь при $M = P$. Отсюда и вытекает результат, поскольку $M \in \mathscr{C}(O, R) \cap \mathscr{C}(O', R')$ равносильно $f(M) = R'$. □

Пересечение двух прямых

Полученные результаты показывают, что существуют пары прямых, не имеющих общей точки; так, имеет место

Предложение 9.4. Если прямая $\mathscr{D}$ не проходит через точку O, то прямая $\mathscr{D}'$, симметричная $\mathscr{D}$ относительно O, не пересекается с $\mathscr{D}$.

Доказательство. Если бы $\mathscr{D}$ и $\mathscr{D}'$ имели общую точку A, то им принадлежала бы и точка B, симметричная A относительно O. Эта точка отлична от точки A (так как $A \neq O$), поэтому прямые $\mathscr{D}$ и $\mathscr{D}'$ должны были бы совпадать и $\mathscr{D}$ проходила бы через O как середину отрезка $[AB]$, то противоречит предположению. □

Предложение 9.5 Две различные прямые $\mathscr{D}$, $\mathscr{D}'$, *перпендикулярные к одной и той же прямой* Δ, не имеют общих точек.

Это есть прямое следствие предложения 4.5. Из него выводится

► Предложение 9.6. Через любую точку A, не лежащую на прямой $\mathscr{D}$, проходит *по меньшей мере одна прямая* $\mathscr{D}'$, не пересекающаяся с $\mathscr{D}$.

Доказательство. Первый способ: выберем на $\mathscr{D}$ точку B и примем за $\mathscr{D}'$ прямую, симметричную $\mathscr{D}$ относительно середины O отрезка $[AB]$.

Второй способ: проведем через A прямую Δ, перпендикулярную $\mathscr{D}$, и затем построим $\mathscr{D}'$ как перпендикуляр к Δ в точке A. □

Предложение 9.5 допускает следующее обобщение:

Предложение 9.7. Если две различные прямые $\mathscr{D}$, $\mathscr{D}'$, образуют с некоторой прямой Δ соответственно равные углы[1]) (см. рис. 11), то они не имеют общей точки.

Доказательство. Если $\mathscr{D}$, $\mathscr{D}'$ пересекают Δ в точках A, A', то, как легко видеть, $\mathscr{D}'$ и $\mathscr{D}$ симметричны относительно середины I отрезка $[AA']$.

▶ Этот результат, которым иногда пренебрегают, имеет важное практическое значение, так как служит оправданием приема построения параллельных с помощью угольника (см. рис. 12).

Наконец, предложение 9.7 само допускает следующее уточнение:

Предложение 9.8. *Если Ax, By — полупрямые, такие, что сумма $\widehat{xAB}+\widehat{yBA}$ равна развернутому углу или не определена, то они не имеют общей точки* (см. рис. 13).

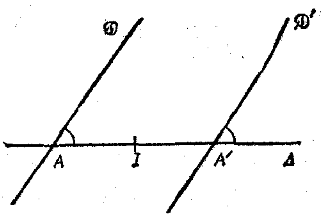


Рис. 11

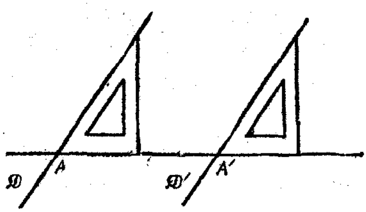


Рис. 12

Доказательство. Если бы Ax и By пересекались в точке C, то треугольник (ABC) не удовлетворял бы следствию из предложения 8.2. □

Аксиома Евклида о параллельных

Только дойдя до этого места, Евклид в своих «Началах» формулирует свой знаменитый пятый постулат в следующей форме:

▶ (E_0) *Если две полупрямые Ax, By расположены по одну сторону от прямой (AB) и сумма $\widehat{xAB}+\widehat{yBA}$*

[1]) Выше не было определения соответствующих углов; читателя не затруднит дать его, пользуясь понятиями полупрямых и полуплоскостей. — *Прим. перев.*

строго меньше развернутого угла, то эти полупрямые имеют общую точку (см. рис. 14).

Легко видеть, что утверждение (E_0) равносильно следующему, которое является современной формой постулата Евклида, введенной в практику преподавания Дж. Плэйфером (J. Playfair, 1748—1819)[1]).

▶ (E_1) Через точку, не лежащую на прямой $\mathscr{D}$, проходит *не более одной прямой*, не пересекающей $\mathscr{D}$.

Эти формулировки равносильны также следующей:

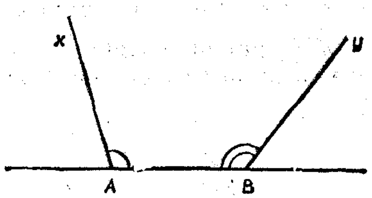


Рис. 13

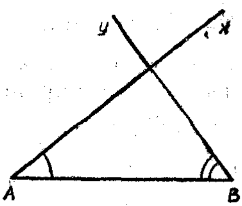


Рис. 14

▶ (E_0') Для того чтобы две различные прямые не пересекались, необходимо, чтобы их соответственные углы с каждой общей секущей были равны.

Доказательство равносильности этих аксиом элементарно.

Не принимая временно ни одной из этих аксиом, мы продолжим изучение абсолютной геометрии, идя по стопам Саккери и Лежандра; мы обнаружим другие свойства, эквивалентность которых аксиоме Евклида менее очевидна, в их числе

▶ (E_2) Существуют прямая $\mathscr{D}$ и не лежащая на ней точка A, такие, что через A проходит единственная прямая, не пересекающая $\mathscr{D}$.

▶ (E_3) Существует прямоугольник (т. е. четырехугольник с четырьмя прямыми углами).

---

[1]) В такой форме постулат также называют именем Прокла или Прокла — Плэйфера. — *Прим. перев.*

▶ (E_4) Сумма углов любого треугольника равна развернутому углу.

▶ (E_5) Существует треугольник, сумма углов которого равна развернутому углу.

▶ (E_6) Существует пара *неизометричных* треугольников (ABC) и $(A'B'C')$ с равными углами: $\widehat{A'} = \widehat{A}$, $\widehat{B'} = \widehat{B}$, $\widehat{C'} = \widehat{C}$.

Равносильность (E_6) с (E_1) доказывает, что евклидова плоскость — единственная, для которой существуют подобия, не сводящиеся к изометриям.

10. ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК САККЕРИ. ПРИЛОЖЕНИЯ

Уточним сначала, что многоугольник в плоскости $\mathscr{P}$ называется *выпуклым*, если все его вершины располагаются по одну сторону от прямой, соединяющей любую пару последовательных вершин.

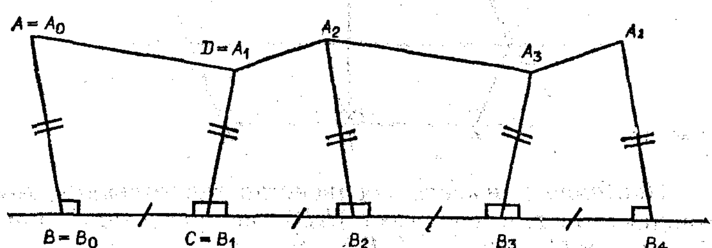


Рис. 15

Определение 10.1. В метрической плоскости $\mathscr{P}$ *четырехугольником Саккери* называется выпуклый четырехугольник $(ABCD)$, такой, что углы $\widehat{ABC}$ и $\widehat{BCD}$ прямые и $AB = CD$. Отрезок $[BC]$ называется его нижним, а отрезок $[AD]$ — верхним основаниями (рис. 15).

Легко видеть, что в случае евклидовой геометрии такой четырехугольник будет прямоугольником. Поэтому изучение этого четырехугольника позволит нам углубить представление о значении постулата Евклида.

▶ Теорема 10.1. Если $(ABCD)$ — четырехугольник Саккери, то $AD \geqslant BC$ и равные углы $\widehat{BAD}$, $\widehat{CDA}$ острые или прямые.

Доказательство. a) С помощью последовательных осевых симметрий мы можем построить последовательность четырехугольников Саккери $(A_nB_nB_{n+1}A_{n+1})$, такую, что $A_0 = A$, $B_0 = B$, $A_1 = D$, $B_1 = C$ и для всякого $n \in \mathbb{N}^*$ отрезок $[A_{n+1}B_{n+1}]$ симметричен $[A_{n-1}B_{n-1}]$ относительно прямой (A_nB_n) (см. рис. 15). Тогда точки $B_0, B_1, \ldots, B_n$ коллинеарны и для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено равенство $B_nB_{n+1} = BC$.

Точки (A_n) необязательно коллинеарны, но для всех $n \in \mathbb{N}$ имеем $A_nA_{n+1} = AD$ и $A_nB_n = AB$.

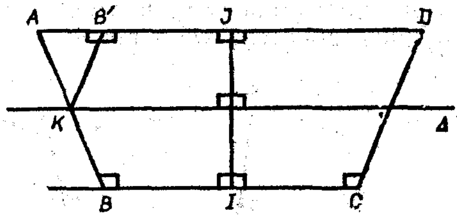


Рис. 16

Повторно применяя неравенство треугольника, мы увидим, что длина отрезка $[BB_n]$ не превосходит длины ломаной $(BAA_1 \ldots A_nB_n)$, откуда

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad nBC \leqslant nAD + 2AB,$$

и переходя к пределу после деления на n, получаем $BC \leqslant AD$.

b) Отрезки $[CD]$ и $[BA]$ очевидным образом симметричны относительно медиатрисы отрезка $[BC]$ (рис. 16). Последняя соединяет, таким образом, середины I и J отрезков $[BC]$ и $[AD]$, и медиатриса Δ отрезка $[IJ]$ не пересекает ни одной из прямых (AD) и (BC) (поскольку прямые (AD), (BC) и Δ перпендикулярны к прямой (IJ)). Тогда, поскольку I и J не лежат по одну сторону от Δ, так же обстоит дело и с точками A и B; отрезок $[AB]$ пересекает Δ в некоторой точке K. Но $BC \leqslant AD$, поэтому точка B', симметричная B относительно Δ, принадлежит отрезку $[AJ]$.

Если $B' = A$ (случай, когда $BC = AD$), то $\widehat{BAD} = \widehat{ABC} = \delta$. Если $B' \neq A$, то в треугольнике (KAB') угол в вершине B' прямой и по предложению 8.2 другие его углы острые, откуда $\widehat{BAD} = \widehat{KAB'} < \delta$. □

Сформулированное утверждение доказано, и видно, что равенство $AB = CD$ имеет место только в случае $\widehat{BAD} = \widehat{CDA} = \delta$, когда $(ABCD)$ — прямоугольник. В этом случае имеем

Предложение 10.2. Пусть $(ABCD)$ — четырехугольник Саккери, являющийся прямоугольником (т. е. такой, что $\widehat{BAD} = \widehat{CDA} = \delta$). Если $A' \in [BA]$ и $D' \in [CD]$ — такие точки, что $BA' = CD'$, то прямая $(A'D')$ перпендикулярна прямым (AB) и (CD).

Доказательство. Равенства $BA = CD$ и $BA' = CD'$ влекут $A'A = D'D$, и видно, что $(A'BCD')$ и $(A'ADD')$ — четырехугольники Саккери (рис. 17).

Поэтому $\widehat{BA'D'} \leqslant \delta$ и $\widehat{AA'D'} \leqslant \delta$, что вместе с равенством $\widehat{BA'D'} + \widehat{AA'D'} = \omega$ приводит к равенствам $\widehat{BA'D'} = \widehat{AA'D'} = \delta$. Итак, прямая $(A'D')$ перпендикулярна к (AB). Аналогично можно убедиться, что она перпендикулярна и к (CD). □

Применение к изучению суммы углов треугольника

Для начала установим

Предложение 10.3. Сумма непрямых углов прямоугольного треугольника не превосходит прямого угла.

Доказательство. В силу следствия из предложения 8.2 треугольник имеет не более одного прямого угла. Пусть (ABC) — прямоугольный треугольник с прямым углом в B и B' — точка, симметричная B относительно середины I отрезка $[AC]$ (рис. 18). На перпендикуляре к прямой (BC), проведенном в точке C, найдется такая точка D, что $CD = AB$, причем D расположена по ту же сторону, что и A, от прямой (BC). Тогда $(ABCD)$ есть четырехугольник Саккери, и в силу симметрии $\widehat{BAC} = \widehat{B'CA}$.

● Если $B' = D$, то $\widehat{BCA} + \widehat{BAC} = \widehat{BCA} + \widehat{DCA} = \widehat{BCD} = \delta$.

● Если $B' \neq D$, то по симметрии $AB' = BC$, откуда, применив теорему 10.1, получим $AB' \leqslant AD$. Следовательно (см. упр. VI. 1), A лежит с той же стороны,

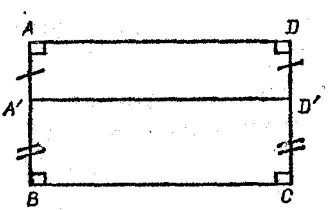


Рис. 17

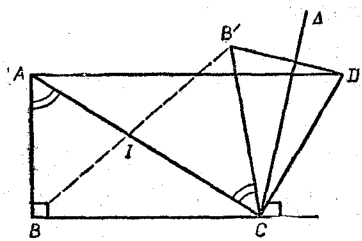


Рис. 18

что и B', относительно медиатрисы Δ отрезка $[B'D]$, проходящего через C (поскольку $CB' = AB = CD$). Таким образом, $\widehat{ACB'} < \widehat{ACD}$, откуда

$$\widehat{BCA} + \widehat{BAC} = \widehat{BCA} + \widehat{B'CA} = \widehat{BCB'} < \widehat{BCD} = \delta.$$

Во всех случаях $\widehat{BCA} + \widehat{BAC} \leqslant \delta$. □

▶ Теорема 10.4 (называемая теоремой Лежандра — Саккери). **Сумма углов треугольника не превосходит развернутого угла.**

Доказательство. Согласно следствию из предложения 8.2, треугольник имеет не более одного прямого или тупого угла. Поэтому мы можем считать, что углы $\widehat{ABC}$ и $\widehat{ACB}$ треугольника (ABC) острые. Тогда основание H перпендикуляра, проведенного к прямой (BC) через A, принадлежит отрезку $[BC]$ (см. рис. 19) и $\widehat{ABC} + \widehat{BCA} + \widehat{CAB} = \widehat{ABH} + \widehat{BAH} + \widehat{HAC} + \widehat{ACH} \leqslant \delta + \delta = \omega$. □

Одно свойство прямоугольников

Предложение 10.5. Если $(ABCD)$ — прямоугольник (т. е. четырехугольник с четырьмя прямыми углами), то прямая (AD) является *единственной прямой*, проходящей через A и не пересекающей прямой (BC).

Доказательство. Допустим, что существует прямая $\mathscr{D}$, проходящая через A, отличная от прямой (AD) и не пересекающая прямой (BC), и пусть C', D' симметричны C, D относительно прямой (AB) (рис. 20).

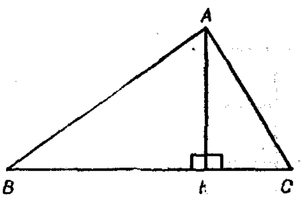


Рис. 19

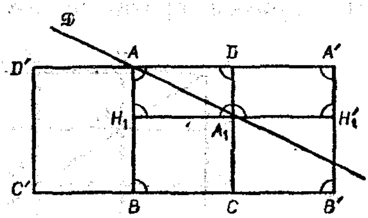


Рис. 20

Если бы $\mathscr{D}$ не пересекала ни один из отрезков (CD), $[C'D']$, то точка C (соотв. C') лежала бы по одну сторону с D (соотв. D') относительно $\mathscr{D}$, и поскольку $\mathscr{D}$ пересекает отрезок $[DD']$, то вопреки предположению $\mathscr{D}$ пересекала бы также и отрезок $[CC']$.

Предположим для определенности, что $\mathscr{D}$ пересекает $[CD]$ в точке A_1, и обозначим через A', B' точки, симметричные A, B относительно прямой (CD) (см. рис. 20).

Теперь $(ABB'A')$ есть четырехугольник Саккери, одновременно являющийся и прямоугольником. Если H_1, H_1' обозначают ортогональные проекции A_1 на прямые (AB), $(A'B')$, то из соображений симметрии $BH_1 = B'H_1'$, и предложение 10.2 показывает, что прямая H_1H_1' перпендикулярна (AB) и $(A'B')$ и, значит, проходит через точку A_1. Тогда (ADA_1H_1) — прямоугольник, и мы можем с помощью повторных симметрий замостить плоскость прямоугольниками, конгруэнтными (ADA_1H_1) (рис. 21). Отсюда вытекает существование последовательности (A_n) точек $\mathscr{D}$ с $A_0 =$

$=A$, такой, что ортогональная проекция H_n точки A_n на прямую (AB) удовлетворяет условию

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad AH_n = nAH_1,$$

где $AH_1 \neq 0$ (поскольку $\mathcal{D}$ не проходит через D). Тогда при достаточно больших n будем иметь $AH_n >$ $> AB$; в этом случае A и H_n не лежат по одну сторону от прямой (BC). Далее, прямые (BC) и (H_nA_n) не пересекаются (они обе перпендикулярны к (AB)). Таким образом, A_n и H_n лежат по одну сторону от (BC), причем противоположную той, где находится

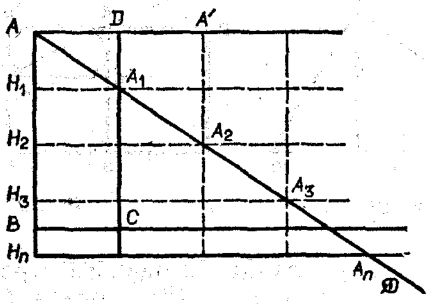


Рис. 21

A. Значит, отрезок $[AA_n]$ пересечет (BC) вопреки предположению. □

▶ Заметим, что это доказательство основано на том факте, что прямые — архимедовы.

11. РАЗЛИЧНЫЕ ФОРМЫ АКСИОМЫ ЕВКЛИДА

Теперь мы в состоянии установить равносильность утверждений E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, сформулированных в конце § 9. Она будет следовать из предложения 10.5 и предложений, приведенных ниже.

Предложение 11.1. Предположим, что существуют прямая $\mathcal{D}$ и точка A, такие, что через A проходит *единственная* прямая $\mathcal{D}'$, не пересекающая $\mathcal{D}$. Тогда для каждого действительного $d > 0$ существует прямоугольник, одна из сторон которого равна d, и через любую точку M плоскости $\mathcal{P}$ проходит не более одной

прямой, не пересекающей произвольной заданной прямой Δ.

Доказательство. a) Пусть B — основание перпендикуляра, опущенного из A на D, и C — такая точка на $\mathscr{D}$, что $BC = d$ (см. рис. 22). Так как $\mathscr{D}'$ — единственная прямая, проходящая через A и не пересекающаяся с $\mathscr{D}$, то она совпадает с прямой, симметричной $\mathscr{D}$ относительно середины отрезка $[AB]$, и, следовательно, перпендикулярна к (AB). Пусть, далее, $\mathscr{D}''$ — перпендикуляр к $\mathscr{D}$, проведенный через C;

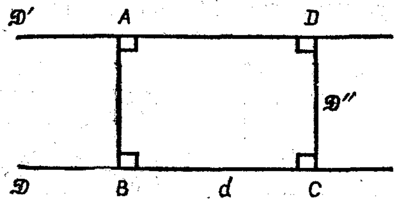


Рис. 22

поскольку прямая, перпендикулярная к $\mathscr{D}''$ и проведенная через A, не пересекает прямой $\mathscr{D}$, то она совпадает с $\mathscr{D}'$ и пересекает $\mathscr{D}''$ в некоторой точке D. Таким образом, $(ABCD)$ — прямоугольник, сторона $[BC]$ которого имеет длину d.

b) Пусть Δ — прямая в плоскости $\mathscr{P}$, M — точка из $\mathscr{P} \setminus \Delta$ и P — основание перпендикуляра к Δ, проходящего через M (см. рис. 23). Положим $MP = d$, и пусть $(ABCD)$ — такой прямоугольник, что $BC = d$. Существует изометрия f плоскости $\mathscr{P}$, которая переводит B в M и C в P. Пусть $A' = f(A)$, $D' = f(D)$; тогда $(MPD'A')$ — прямоугольник и $D' \in \Delta$. Предложение 10.5 показывает, что (MA') — единственная прямая, проходящая через M и не пересекающая Δ. □

Предложения 10.5 и 11.1 делают очевидной эквивалентность аксиом (E_1)—(E_3) из конца § 9. Далее, хорошо известно, что (E_1) влечет (E_4) (см. упр. VI.8) и (E_6), и поскольку из (E_4) следует (E_5), нам остается доказать, что из (E_5) вытекает (E_3), а (E_6) влечет (E_5).

Предложение 11.2. **Пусть (ABC) — треугольник, сумма углов которого равна развернутому углу; тогда**

существует прямоугольник, диагональ которого является одной из сторон этого треугольника.

Доказательство. Можно считать, что углы $\widehat{B}$ и $\widehat{C}$ острые. Тогда основание H высоты, проведенной из A, лежит между B и C; сумма всех непрямых углов прямоугольных треугольников (AHB) и (AHC) равна ω. Из предложения 10.3 вытекает, что сумма непрямых углов каждого из этих треугольников равна прямому углу. Если K — точка, симметричная H относительно середины I отрезка $[AB]$ (см. рис. 24), то легко обнаружить, что $(AHBK)$ — прямоугольник. □

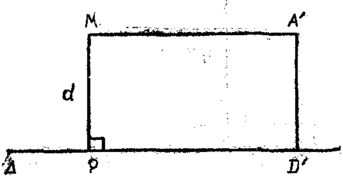


Рис. 23

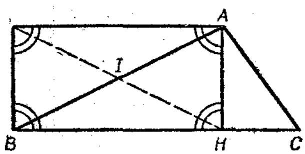


Рис. 24

Замечание. Отождествив каждый угол с его радианной мерой, легко убедимся, что существование треугольника с суммой углов, равной π, равносильно *существованию выпуклого четырехугольника с суммой углов, равной* 2π [1]. Чтобы доказать, что из аксиомы (E_6) следует аксиома (E_5), достаточно, таким образом, установить

Предложение 11.3. **Если существует два *неизометричных* треугольника (ABC), $(A'B'C')$ с равными углами: $\widehat{A'}=\widehat{A}$, $\widehat{B'}=\widehat{B}$, $\widehat{C'}=\widehat{C}$, то существует выпуклый четырехугольник, сумма углов которого равна 2π.**

Доказательство. **Ввиду неизометричности треугольников можно для определенности положить** $A'B' >$

---

[1] Можно также, не используя меры углов, придать соответствующий смысл утверждению: «сумма углов четырехугольника равна 2ω».

$> AB$. Пусть f — та изометрия, которая переводит полупрямую $(A'B'($ в полупрямую $(AB($, а полупрямую $(A'C'($ — в полупрямую $(AC($. Обозначим $B_1 = f(B')$, $C_1 = f(C')$ (см. рис. 25). Тогда $\widehat{ABC} = \widehat{AB_1C_1}$ и $\widehat{ACB} = \widehat{AC_1B_1}$, откуда следует, что сумма углов выпуклого четырехугольника (BB_1C_1C) равна 2π.

Указанная выше эквивалентность аксиом полностью доказана. □

Эта эквивалентность не решает, однако, вопроса о независимости пятого постулата Евклида от остальных аксиом. Эта независимость следует из того фак-

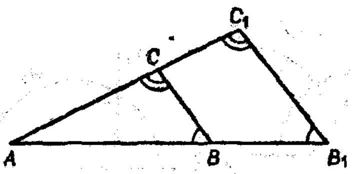


Рис. 25

та, что можно определить на $\mathbb{R}^2$ или на некоторых частях $\mathbb{R}^2$ структуру «метрической плоскости», для которой аксиома Евклида не выполняется; такая плоскость называется *гиперболической* и представляет собой «модель» неевклидовой геометрии. Мы приведем такой пример в § 12.

Более того, свойства метрической плоскости, полученные Бойаи и Лобачевским при отрицании постулата Евклида, позволяют построить биекцию, изометрическую с точностью до постоянного множителя, этой «метрической неевклидовой плоскости» на гиперболическую плоскость. Но связанные с этим вычисления далеко не элементарны и слишком длинны, чтобы их здесь привести; их можно найти в гл. VI в [BK—SZ].

Существование этого изоморфизма легко позволяет построить новые формулировки, равносильные аксиоме Евклида (см. упражнения). Оно показывает, кроме того, что с точностью до гомотетии существуют лишь две «метрические плоскости»: евклидова и гиперболическая — это итог 25 веков исследований, от Евклида до XIX в.

12. ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ ПЛОСКОСТЬ (МОДЕЛЬ ПУАНКАРЕ)

Назовем *гиперболической плоскостью* множество $\mathscr{P} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$, именуемое также *полуплоскостью Пуанкаре*; назовем *гиперболической прямой* любое подмножество в $\mathscr{P}$, определяемое уравнением вида $x = x_0$ (x_0 постоянно) или вида $(x - x_0)^2 + y^2 = r^2$ (x_0, r постоянны). Гиперболические прямые — это пересечения с $\mathscr{P}$ евклидовых прямых из $\mathbb{R}^2$, ортогональных оси $x'x$, и евклидовых окружностей с центрами на $x'x$ (предполагается, что плоскость $\mathbb{R}^2$ снабжена канонической евклидовой структурой).

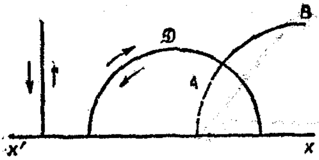


Рис. 26

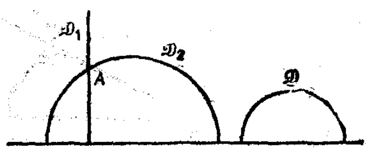


Рис. 27

Легко видеть, что пара $(\mathscr{P}, \mathscr{L})$, состоящая из гиперболической плоскости $\mathscr{P}$ и множества гиперболических прямых $\mathscr{L}$, удовлетворяет аксиомам инцидентности I из § 2. С другой стороны, каждая гиперболическая прямая $\mathscr{D}$ допускает очевидным образом два естественных взаимно противоположных отношения порядка (см. рис. 26) и разбивает $\mathscr{P} \setminus \mathscr{D}$ на две области, которые мы можем назвать «полуплоскостями». Если $\mathscr{D}$ имеет уравнение $x = x_0$, то полуплоскости определяются неравенствами $x > x_0$ и $x < x_0$; если же $\mathscr{D}$ определяется уравнением $(x - x_0)^2 + y^2 = r^2$, то полуплоскости соответственно задаются неравенствами $(x - x_0)^2 + y^2 > r^2$ и $(x - x_0)^2 + y^2 < r^2$. Кроме того, две точки A, B принадлежат одной и той же полуплоскости, ограниченной $\mathscr{D}$, тогда и только тогда, когда соединяющий их отрезок гиперболической прямой не пересекает $\mathscr{D}$. Отсюда нетрудно вывести, что $\mathscr{P}$ удовлетворяет аксиоме Паша $\mathrm{II_b}$. Наконец, очевидно, что $\mathscr{P}$ не удовлетворяет аксиоме Евклида о параллельных: на рис. 27 изображены две гиперболические прямые $\mathscr{D}_1$ $\mathscr{D}_2$, пересекающиеся в точке A и не пересекающие гиперболической прямой $\mathscr{D}$.

Расстояние между двумя точками

Мы определим гиперболическое расстояние между двумя точками A и B плоскости $\mathscr{P}$ криволинейным интегралом

$$d(A, B)=\int_A^B \frac{ds}{y}, \quad \text{где} \quad ds=\sqrt{dx^2+dy^2}, \tag{1}$$

взятым по дуге $\widehat{AB}$, образованной сегментом гиперболической прямой, соединяющей точки A и B.

Это расстояние очевидным образом удовлетворяет аксиомам $\mathrm{III_a}$, $\mathrm{III_b}$, $\mathrm{III_c}$ из § 1. Ясно, что $d(A, B)$ удовлетворяет неравенству

$$d(A, B)\geqslant\left|\int_A^B \frac{dy}{y}\right|=\left|\ln\frac{y_B}{y_A}\right|,$$

причем равенство достигается лишь тогда, когда A и B имеют одинаковые абсциссы. Отсюда видно, что $d(A, B)$ стремится к $+\infty$, когда y_B стремится к 0 или $+\infty$, и поскольку $d(A, B)$ — непрерывная функция B, то отображение $M\mapsto d(A, M)$ определяет биекцию каждой из гиперболических полупрямых с началом A на полупрямую $\mathbb{R}_+$. Поэтому, гиперболическое расстояние удовлетворяет и аксиоме $\mathrm{III_d}$ из § 1.

Формула гиперболического расстояния

a) Если A, B имеют одну и ту же абсциссу x_0, то гиперболическая прямая, которая их соединяет, есть евклидова полупрямая $x=x_0$, $y>0$, и мы имеем [1]

$$d(A, B)=\left|\int_{y_A}^{y_B} \frac{dy}{y}\right|=\left|\ln\frac{y_B}{y_A}\right|.$$

b) Если абсциссы точек A, B различны, то соеди-

[1] Удобно считать, что путь интегрирования ориентирован так, что $y_B>y_A$. — *Прим. перев.*

няющая их гиперболическая прямая является евклидовой полуокружностью $\mathscr{D}$ с диаметром $[PQ]$, лежащим на $x'x$. Если мы отождествим $\mathbb{R}^2$ с $\mathbb{C}$ и обозначим через a, b, p, q аффиксы точек A, B, P, Q, то полуокружность $\mathscr{D}$ допускает параметрическое представление $\theta \longmapsto \omega + re^{i\theta}$ $(0 < \theta < \pi)$ с $\omega = (p+q)/2$ и $r = |(p-q)/2|$ (рис. 28), откуда

$$d(A, B) = \left| \int\limits_{\operatorname{Arg}(a-\omega)}^{\operatorname{Arg}(b-\omega)} \frac{d\theta}{\sin\theta} \right| = \left| \left[\ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right]_{\operatorname{Arg}(a-\omega)}^{\operatorname{Arg}(b-\omega)} \right| = \left| \left[\ln \frac{q-z}{p-z} \right]_{z=a}^{z=b} \right|$$

и

$$d(A, B) = \left| \ln \left(\frac{b-p}{b-q} : \frac{a-p}{a-q} \right) \right| = \Big| \ln [a, b, p, q] \Big|, \quad (2)$$

где $[a, b, p, q]$ — двойное отношение a, b, p, q (см. § IV. 8), которое действительно[1]) ввиду концикличности точек A, B, P, Q (упр. IV. 29).

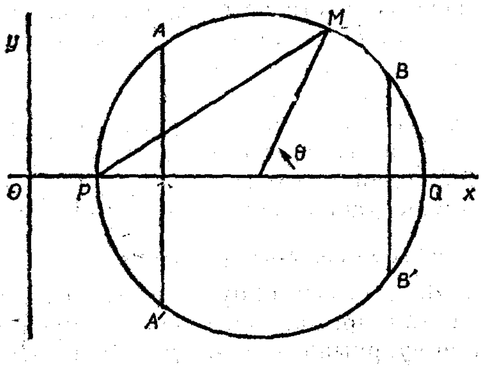


Рис. 28

Можно заметить, что формула (2) остается верной и в случае а), если положить $p = x_0$ и $q = \infty$. Легко также доказать, что формула (2) равносильна формуле

$$d(A, B) = 2 \operatorname{Arth} [a, \bar{a}, b, \bar{b}]^{1/2} = 2 \operatorname{Arth} \left| \frac{b-a}{b-\bar{a}} \right|, \quad (2')$$

[1]) *Легко проверить, что оно положительно. — Прим. перев.*

где $\bar{a}$, $\bar{b}$ комплексно сопряжены с a, b и Arth — функция $t \mapsto {}^1/_2 \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$ ($|t| < 1$).

Автоморфизмы и симметрии $\mathscr{P}$

Легко видеть, что если отождествить $\mathscr{P}$ с множеством $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$, то отображения вида

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \quad (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \quad \text{и} \quad ad - bc > 0$$

или

$$z \mapsto \frac{c\bar{z}+d}{a\bar{z}+b}, \quad (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \quad \text{и} \quad ad - bc < 0$$

являются биекциями $\mathscr{P}$ на $\mathscr{P}$, преобразующими каждую гиперболическую прямую в гиперболическую прямую (так как это преобразования $\mathbb{C}$, которые переводят окружность или прямую снова в окружность или прямую и сохраняют ось $x'x$, а, значит, множество прямых и окружностей, ортогональных $x'x$). Кроме того, эти преобразования сохраняют двойные отношения или переводят их в комплексно сопряженные. По формулам (2) и (2′) они сохраняют гиперболическое расстояние и являются *автоморфизмами* $\mathscr{P}$ в смысле определения 2.1. В частности, евклидовы симметрии, ось которых ортогональна $x'x$ (преобразования вида $z \mapsto 2x_0 - \bar{z}$, где $x_0 \in \mathbb{R}$) и инверсии с положительной степенью, полюс которых принадлежит $x'x$ (вида $z \mapsto x_0 + \frac{k}{\bar{z} - x_0}$ с $k > 0$), индуцируют инволютивные автоморфизмы $\mathscr{P}$, которые мы назовем *гиперболическими симметриями*; теперь нам остается лишь проверить аксиомы симметрии $\mathrm{V_a}$ и $\mathrm{V_b}$ из § 2.

Предложение 12.1. Для каждой гиперболической прямой $\mathscr{D}$ существует гиперболическая симметрия $s_{\mathscr{D}}$, для которой эта прямая $\mathscr{D}$ есть множество неподвижных точек и которая является единственным нетождественным автоморфизмом $\mathscr{P}$, оставляющим неподвижными все точки прямой $\mathscr{D}$.

Доказательство. а) Если $\mathscr{D}$ лежит на евклидовой прямой, ортогональной $x'x$, то подходит евклидова симметрия относительно этой прямой. Если $\mathscr{D}$ лежит на евклидовой окружности радиуса r с центром в точке I оси $x'x$, то искомую симметрию даст преобразование инверсии с полюсом I и степенью r^2.

b) Пусть f — автоморфизм $\mathscr{P}$, оставляющий на месте каждую точку гиперболической прямой $\mathscr{D}$. Если $f \neq \mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$, то применимое здесь предложение 3.5 показывает, что f не имеет других неподвижных точек. С другой стороны, из предыдущего мы видим, что существует автоморфизм h, такой, что $h(\mathscr{D})$ располагается на евклидовой прямой Δ, ортогональной к $x'x$; в этом случае $g = h \circ f \circ h^{-1}$ есть автоморфизм с множеством неподвижных точек $h(\mathscr{D})$. Если z обозначает аффикс точки M в $\mathscr{P}$, а z' — аффикс точки $g(M)$, то по формуле (2′)

$$\left|\frac{z'-a}{z'-\bar{a}}\right| = \left|\frac{z-a}{z-\bar{a}}\right|$$

для всех $a \in \mathbb{C}$, для которых точка с аффиксом a принадлежит $h(\mathscr{D})$. Значит, M' расположена симметрично с M относительно евклидовой прямой Δ, откуда вытекает единственность g, а значит, и f. □

Предложение 12.2. Существует по меньшей мере одна гиперболическая симметрия, меняющая местами две гиперболические полупрямые с общим началом.

Доказательство. Действуя, как и ранее, мы можем свести дело к случаю, когда одна из гиперболических полупрямых расположена на евклидовой прямой Δ, ортогональной в H к $x'x$; при этом другая гиперболическая полупрямая будет представлена дугой $\widehat{AP}$ окружности Γ с диаметром $[PQ]$ на оси $x'x$; так как Γ пересекает Δ, то H лежит между P и Q (рис. 29).

Если первая полупрямая представлена отрезком $[AH]$ прямой Δ, то инверсия с полюсом Q и положительной степенью $QP \cdot QH$ дает искомую симметрию; если же первая полупрямая представлена евклидовой полупрямой Ay, то искомую симметрию даст инверсия с полюсом P и положительной степенью $PQ \cdot PH$. □

Итак, мы сумели построить «метрическую плоскость» $\mathscr{P}$, удовлетворяющую пяти группам аксиом из § 2, но не удовлетворяющую аксиоме Евклида о параллельных; этим доказана независимость последней аксиомы и невозможность доказать ее исходя из аксиом метрической плоскости. ◾

Замечание. Можно доказать, что угол между двумя гиперболическими прямыми равен углу между

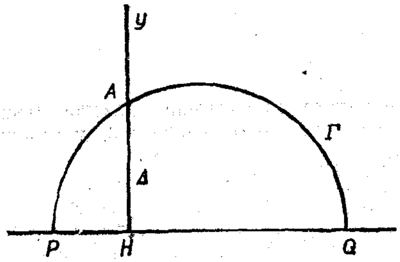


Рис. 29

представляющими их дугами окружностей евклидовой плоскости. Модель Пуанкаре оказывается, таким образом, *конформной*, т. е. сохраняющей углы, моделью гиперболической плоскости. Существуют и другие модели этой геометрии, и среди них модель Бельтрами, в которой гиперболические прямые представлены отрезками евклидовых прямых (см. упр. VI. 17). Дальнейшие подробности по гиперболической геометрии, а также изложение сферической или эллиптической геометрии, см. в книге [BE], т. 5.

УПРАЖНЕНИЯ

ГЛАВА I

1. Исходя из определения сложения действительных чисел, данного в § I. 1, усильте предложение 4.2, установив неравенство $D_n(x+y) \leqslant D_n(x) + D_n(y) + 10^{-n}$.

2. (Изучение последовательности частных с точностью до 10^{-n}.) Пусть a, b — два действительных числа, причем $b > 0$. Покажите (не опираясь на существование частного), что для любого $n \in \mathbb{N}$ существует такое $p_n \in Z$, что $10^{-n} p_n b \leqslant a < 10^{-n} (1 + p_n) b$.

Покажите, что для $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ имеет место неравенство

$$10^{-n} p_n < 10^{-m} (1 + p_m).$$

Выведите отсюда, что последовательность $(10^{-n} p_n)$ имеет верхнюю грань q, такую, что $qb = a$, и что $10^{-n} p_n$ есть десятичное приближение порядка n для q.

3. a) Каковы гомоморфизмы группы $(\mathbb{Q}, +)$ в себя?

b) Покажите, что единственный автоморфизм поля $\mathbb{Q}$ есть тождественное отображение.

4. a) Пусть $k > 0$ — такое целое число, что $\sqrt{k}$ иррационален. Покажите, что действительные числа вида $a + b\sqrt{k}$, где $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$, образуют подполе K поля $\mathbb{R}$.

b) Покажите, что отображение $K \longrightarrow K$, $a + b\sqrt{k} \longmapsto a - b\sqrt{k}$ является автоморфизмом поля K.

5. Пусть $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ — монотонное отображение, удовлетворяющее условиям

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) = {}^1\!/_2 \cdot (f(x) + f(y)).$$

Покажите, что f — аффинное отображение (положив $\varphi(x) = f(x) - f(0)$, можно установить, что $\varphi(x/2) = {}^1\!/_2 \varphi(x)$ и $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$).

6. Подмножество $A \subset \mathbb{R}$ называется **всюду плотным** в $\mathbb{R}$, если в каждом (непустом) открытом интервале $]y, v[\subset \mathbb{R}$ содержится хотя бы один элемент из A.

Покажите, что если G — архимедова группа без дыр и h — строго монотонный гомоморфизм G в $\mathbb{R}$, то $h(G)$ всюду плотно в $\mathbb{R}$ (воспользуйтесь предложением 6.1).

7. a) Пусть G — упорядоченная абелева группа, удовлетворяющая аксиоме (ВГ) (см. определение 6.2). Покажите, что любое непустое минорируемое подмножество G имеет нижнюю грань.

b) Пусть G — подгруппа в $(\mathbb{R}, +)$, не сводящаяся к $\{0\}$, и пусть $a = \inf\{g \in G \mid g > 0\}$. Покажите, что если $a = 0$, то G всюду плотна в $\mathbb{R}$ (см. упр. 6).

Покажите, что если $a > 0$, то G есть множество aZ чисел вида na, где $n \in Z$ (нужно доказать, что если x — действительное число, удовлетворяющее неравенствам $pa \leqslant x < (p+1)a$, где $p \in Z$, то $x = pa$).

c) Выведите отсюда классификацию архимедовых групп, удовлетворяющих аксиоме (ВГ).

8. Пусть G — подгруппа в $(\mathbb{R}, +)$, образованная действительными числами вида $p + q\omega$, где ω — фиксированное иррациональное число и $(p, q) \in Z^2$. Покажите, что множество элементов G счетно и не существует действительного a, такого, что $G = aZ$. Выведите отсюда, что G всюду плотно в $\mathbb{R}$ и отлично от $\mathbb{R}$ (воспользуйтесь предыдущим упражнением).

9. Покажите, что мультипликативная группа положительных действительных чисел архимедова [1]. Выведите отсюда, что для любого действительного $a > 0$ существует единственная монотонная биекция h_a из $\mathbb{R}_+^*$ на $\mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям $h_a(a) = 1$ и $h(xy) = h(x) + h(y)$ для любых $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ (тем самым будет доказано существование и единственность логарифма по основанию a).

10. Пусть K — тело (коммутативность не предполагается), снабженное отношением линейного порядка, таким, что если $y \geqslant x$, то для любого $z \in K$ имеем $y + z \geqslant x + z$, и если $z > 0_K$, то $zy \geqslant zx$, $yz \geqslant xz$.

a) Покажите, что K имеет характеристику нуль.

b) Предположим, что группа $(K, +)$ архимедова, и обозначим через h монотонный гомоморфизм $(K, +)$ в $(\mathbb{R}, +)$, такой, что $h(1_K) = 1$. Покажите, что элементы K вида $q^{-1}p = (q \cdot 1_K)^{-1}(p \cdot 1_K)$, где $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, составляют подтело K_0 тела K и что $h(q^{-1}p) = p/q$.

c) Покажите, что для любых x, y из K выполнено равенство $h(xy) = h(x)h(y)$, и выведите отсюда, что K коммутативно (можно предположить, что $x > 0_K$, $y > 0_K$, и воспользоваться оценками для x, y вида $10^{-n}p_n \leqslant x < 10^{-n}(1 + p_n)$, $10^{-n}q_n \leqslant y < 10^{-n}(1 + q_n)$). Заключение: всякое архимедово упорядоченное тело есть поле.

---

[1]) «Положительными» в этой группе считаются элементы >1. Следует предположить, что $a \neq 1$. — *Прим. перев.*

11. (Элемент наибольшего порядка в конечной коммутативной группе.) Пусть G — конечная коммутативная группа порядка n в мультипликативных обозначениях, с нейтральным элементом 1.

a) Покажите, что для любого $a \in G$ существует целое $p \geqslant 1$, такое, что $a^p = 1$ и $a^q \neq 1$ при $1 \leqslant q < p$. Это целое p называется *порядком* a.

b) Если $a \in G$ — элемент порядка p, то p является делителем n (рассмотрите факторизацию G по подгруппе $G_a = \{1, a, \ldots, a^{p-1}\}$). Покажите, что соотношение $a^q = 1$ (где $q \in \mathbb{N}^*$) равносильно тому, что p — делитель q.

c) Пусть a, b — два элемента G порядков p, q соответственно, причем p и q взаимно просты. Покажите, что ab — элемент порядка pq (возведите соотношение $a^n b^n = 1$ в степень p или q).

d) Пусть m — наименьшее общее кратное порядков элементов G и $m = p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r}$ — его разложение на простые множители. Обозначим $m_1 = m/p_1$, $n_1 = m/p_1^{\alpha_1}$. Покажите, что существует такой элемент $a \in G$, что $a^{m_1} \neq 1$ и элемент $b_1 = a^{n_1}$ имеет порядок $p_1^{\alpha_1}$. Покажите также, что для любого $i \leqslant r$ найдется элемент $b_i \in G$ порядка $p_i^{\alpha_i}$, и с помощью c) установите, что произведение $c = b_1 b_2 \ldots b_r$ имеет порядок m.

12. С помощью предыдущего упражнения покажите, что если K — конечное поле, то мультипликативная группа $K^* = K \setminus \{0\}$ циклическая. (Указания: предположив, что K имеет порядок n, обозначим через m НОК порядков элементов K^*, тогда m делит $n - 1$, и $n - 1$ элементов K^* являются корнями уравнения $X^m - 1 = 0$; отсюда $m = n - 1$, и, значит, существует элемент a, такой, что $K^* = \{1, a, \ldots, a^{n-1}\}$.)

13. Пусть K — поле характеристики p. Пользуясь формулой бинома Ньютона, покажите, что для любых $(a, b) \in K^2$ верны равенства $(a + b)^p = a^p + b^p$ и $(a - b)^p = a^p - b^p$. Выведите отсюда, что отображение $f: K \to K$, $x \longmapsto x^p$ есть инъективный гомоморфизм поля. Покажите, что в случае конечного поля f является автоморфизмом. Что будет в случае, когда $K = Z/pZ$?

14. Пусть K — конечное поле порядка n.

a) Покажите, что для любого $a \in K$ существует целое положительное q, такое, что $qa = 0$; выведите отсюда, что поле K имеет конечную характеристику p.

b) Покажите, что множество элементов K вида $m \cdot 1_K$, где $m \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$, образует подполе K_0 поля K, изоморфное Z/pZ.

c) Покажите, что K допускает структуру векторного пространства над K_0 и что если d — его размерность, то порядок поля равен $n = p^d$. Далее покажите, что отображение f: $K \to K$, $x \longmapsto x^p$ линейно. (Эти результаты вместе с результатами упр. 12 показывают, что K отождествляется с «полем корней» полинома $X^n - X$ над Z/pZ в теории Галуа.)

15. *Построение поля*[1]. Пусть K — поле и $P \in K[X]$ — неприводимый полином над K (т. е. неразложимый в произведение двух полиномов положительной степени над тем же полем).

a) Покажите, что, полагая $R \equiv S$ тогда и только тогда, когда полином $R - S$ делится на P, мы получим на кольце полиномов $K[X]$ отношение эквивалентности $\mathscr{R}$.

Далее класс эквивалентности полинома R обозначаем через $\bar{R}$, а соответствующее факторпространство — через $K[X]/(P)$.

b) Покажите, что класс эквивалентности суммы (соотв. произведения) двух полиномов R, S зависит только от их классов $\bar{R}$, $\bar{S}$. Выведите отсюда, что на $K[X]/(P)$ можно определить сложение и умножение, такие, что

$$(\forall (R, S) \in (K[X])^2) \quad \overline{R+S} = \bar{R} + \bar{S} \quad \text{и} \quad \overline{RS} = \bar{R}\bar{S}.$$

c) Покажите, что $K[X]/(P)$, снабженное этими двумя операциями, является коммутативным кольцом.

d) Используя неприводимость P, покажите, что $K[X]/(P)$ является полем той же характеристики, что и K (для доказательства того, что у элемента $\bar{R} \neq 0$ есть обратный, заметьте, что R и P взаимно просты, и примените тождество Безу[2])).

e) Если K — *поле конечного порядка* n, покажите, что $K[X]/(P)$ имеет порядок n^d, где $d = \deg(P)$ (каждый элемент можно представить полиномом степени $\leqslant d-1$).

f) Покажите, что полином степени 2 или 3 над K неприводим тогда и только тогда, когда он не имеет корней в K (это замечание будет использовано в приложениях).

16. Пусть $K = \{0, 1, a, b\}$ — множество из четырех элементов.

a) Покажите, что K допускает структуру поля характеристики 2, в котором 0 есть нулевой, а 1 — единичный элементы, причем $1 + a = b$, $1 + b = a$, $a^2 = b$, $b^2 = a$, $ab = 1$.

b) Проверьте, что полином $P = X^2 + X + 1$ неприводим над полем $Z_2 = Z/2Z$, и покажите, что поле $Z_2[X]/(P)$, полученное как указано в предыдущем упражнении, изоморфно полю K из a). (Это есть поле Галуа порядка 4, его обозначают F_4.)

17. Проверьте, что полином $X^3 + X + 1$ неприводим над полем Z_2. Выведите отсюда существование поля F_8 характеристики 2 и *порядка* 8, такого, что отображение $X \longmapsto X^2$ является автоморфизмом, отличным от тождественного.

18. a) Проверьте, что полиномы $X^2 + 1$ и $X^3 - X + 1$ неприводимы над полем $Z_3 = Z/3Z$. Выведите из этого, что существуют поля характеристики 3 и порядков 9 и 27 соответственно.

---

[1]) Это построение связано с теорией Галуа.

[2]) Под тождеством Безу здесь понимается следующее: если R, P взаимно просты, то существуют такие полиномы u, v, что $Ru + Rv = 1$ (можно считать, что $\deg u > \deg P$, $\deg v < \deg R$). — *Прим. перев.*

b) Постройте аналогичным путем поле характеристики 5 с 25 элементами (подыщите полином степени 2, неприводимый над полем $Z_5 = Z/5Z$).

ГЛАВА II

1. a) Пусть G — какая-либо группа, A, B — две ее подгруппы, такие, что $G = A \cup B$. Покажите, что $G = A$ или $G = B$ (предположив, что $G \neq B$, выберите в $G \setminus B$ элемент a и покажите, что если $b \in B$, то $ab \in A$).

b) Пусть X, Y — два ВПП векторного пространства E, таких, что $X \cup Y$ есть ВПП в E. Покажите, что $X \subset Y$ или $Y \subset X$.

c) Выведите отсюда, что E не может быть объединением двух гиперплоскостей.

2. Пусть X, Y — два конечномерных ВПП векторного пространства E.

a) Покажите, что $X + Y$ и $X \cap Y$ конечномерны и $\dim X + \dim Y = \dim(X + Y) + \dim(X \cap Y)$.

b) Выведите отсюда, что если $\dim E = n$, то $\dim(X \cap Y) \geqslant \dim X + \dim Y - n$.

3. Напомним, что два ВПП векторного пространства E называются *дополнительными*, если каждый элемент $z \in E$ единственным образом записывается в виде $z = x + y$, где $x \in X$, $y \in Y$. Отображение p: $E \to E$, $z \mapsto x$ называется *проектированием* на X в направлении Y.

a) Покажите, что отображение p линейно, причем $\operatorname{Ker} p = Y$ и $\operatorname{Im} p = X$, и что $p \circ p = p$.

b) Покажите, что верно и обратное, всякий эндоморфизм E, удовлетворяющий условию $p \circ p = p$, является проектированием.

c) Пусть s — инволютивный автоморфизм E. Считая, что характеристика основного тела не равна 2, покажите, что $p = {}^1/_2(\mathrm{Id}_E - s)$ является проектированием, и выведите отсюда, что существуют два таких взаимно дополнительных подпространства X, Y, что s является *симметрией* в направлении Y относительно X (определяемой как $s(x + y) = x - y$ для всех $x \in X$ и $y \in Y$).

4. Пусть E — векторное пространство над телом характеристики 2 и f — инволютивный автоморфизм E.

a) Покажите, что $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \supset \operatorname{Im}(f - \mathrm{Id}_E)$.

b) Предположив, что $\dim E = 2$ и $f \neq \mathrm{Id}_E$, покажите, что в E существует такой базис (i, j), что $f(i) = i$ и $f(j) = i + j$. Покажите, что верно и обратное: эндоморфизм, определенный этими условиями, инволютивен.

c) Покажите, что и вообще всякая трансвекция инволютивна (см. упр. 14).

5. Пусть E — конечномерное векторное пространство и X, Y — два его ВПП. Покажите, что любые два из следующих трех условий влекут третье: $X \cap Y = \{0\}$, $X + Y = E$, $\dim(X) + \dim(Y) = \dim(E)$.

6. Пусть E — векторное пространство; определим *сумму* $F = E_1 + E_2 + \ldots + E_p$ нескольких его ВПП как векторное пространство, порожденное объединением $E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_p$. Назовем ее *прямой суммой*, если сюръективное отображение

$$f\colon E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p \longrightarrow F, \qquad (x_1, \ldots, x_p) \longmapsto x_1 + \ldots + x_p$$

инъективно. В этом случае будем писать $F = E_1 \oplus \ldots \oplus E_p$.

a) Пусть $p = 2$; покажите, что сумма $E_1 + E_2$ будет прямой тогда и только тогда, когда $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.

b) Пусть $p \geqslant 3$; для каждого $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$ положим

$$F_k = E_1 + \ldots + E_{k-1} + E_{k+1} + \ldots + E_p.$$

Покажите, что $\sum_{i=1}^{p} E_i$ — прямая сумма тогда и только тогда, когда $E_k \cap F_k = \{0\}$ для всех k.

c) Приведите пример трех ВПП в $\mathbb{R}^2$, таких, что $E_1 \cap E_2 \cap E_3 = \{0\}$, но $E_1 + E_2 + E_3$ не является прямой суммой.

d) Допустим, что все подпространства E_i конечномерны. Покажите, что $\sum_{i=1}^{p} E_i$ является прямой суммой тогда и только тогда, когда $\dim(F) = \sum_{i=1}^{p} \dim(E_i)$.

7. Пусть E — векторное пространство и X — его ВПП коразмерности p (т. е. такое, что $\dim(E/X) = p$). Покажите, не применяя аксиому Цорна, что X допускает дополнительное подпространство размерности p.

8. Пусть E — векторное пространство и V — его ВПП, такое, что для любого ВПП $X \subset E$ размерности p выполнено условие $\dim(V \cap X) \geqslant 1$. Покажите, что коразмерность V не превосходит $p - 1$ (проведите рассуждение методом от противного, предположив, что существуют p элементов $x_1, \ldots, x_p$ пространства E, таких, что их классы по модулю V независимы, и рассмотрите пересечение V с $X = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_p)$).

9. Пусть H_1, H_2 — две гиперплоскости одного и того же векторного пространства E. Покажите, что существует векторная прямая, одновременно дополнительная к H_1 и H_2 (можно использовать упр. 1, и тогда упр. 12 позволит вывести заключение о существовании инволютивного автоморфизма E, переставляющего H_1 и H_2).

10. Пусть E — векторное пространство и X, Y — два его ВПП одинаковой конечной размерности. Покажите, что X, Y допускают общее дополнительное подпространство. (Можно построить базис $X + Y$ вида $(e_1, \ldots, e_k, a_1, \ldots, a_q, b_1, \ldots, b_q)$, такой, что $(e_1, \ldots, e_k)$ будет базисом $X \cap Y$, $(e_1, \ldots, e_k, a_1, \ldots, a_q)$ — базисом X и $(e_1, \ldots, e_k, b_1, \ldots, b_q)$ — базисом Y. Если L —

подпространство, дополнительное к $X+Y$, то $L+\mathrm{Vect}(a_1+b_1, \ldots, a_q+b_q)$ будет дополнительным к X и к Y.)

11. а) Пусть E — векторное пространство, X — его ВПП и f — автоморфизм X. Покажите, что существует автоморфизм g пространства E, ограничение которого на X совпадает с f; кроме того, если f инволютивно, то можно и на g наложить условие инволютивности (воспользуйтесь подпространством, дополнительным к X).

b) Пусть X, Y — два ВПП пространства E одинаковой конечной размерности и f — изоморфизм X на Y. Покажите, что f продолжается до автоморфизма E (примените упр. 10).

12. Пусть E — векторное K-пространство и X, Y — два его ВПП, допускающие общее дополнительное подпространство L. Обозначим через p проектирование E на Y в направлении L.

а) Покажите, что существует автоморфизм f пространства E, такой, что $f|_X = p|_X$ и $f|_L = -\mathrm{Id}_L$.

b) Покажите, что для всех $(x, y) \in X \times Y$, таких, что $x - y \in L$, выполняется $f(x) = y$ и $f(y) = x$. Выведите отсюда, что f инволютивен и меняет местами X и Y.

c) Предположим, что характеристика K отлична от 2. Покажите, что f — симметрия в направлении L. Как построить множество неподвижных точек f, исходя из X, Y и L?

Приложение. Для двух заданных гиперплоскостей X, Y или двух ВПП в E одинаковой конечной размерности установите существование переставляющего их инволютивного автоморфизма E (воспользуйтесь упр. 9 и 10).

13. Пусть E — левое векторное пространство над телом K и f — полулинейное отображение E в K, ассоциированное с внутренним автоморфизмом θ тела K. Проверьте, что $\theta^{-1} \circ f$ — линейная форма, и выведите отсюда, что ядром f является гиперплоскость.

14. (Трансвекции.) Пусть E — векторное пространство и $H = \mathrm{Ker}\, h$ — гиперплоскость в E.

а) Покажите, что эндоморфизмы f пространства E, такие, что $f(x) = x$ для всех $x \in H$, имеют вид f_a: $x \longmapsto x + h(x)\, a$, где $a \in E$ (выбрав $b \in E \setminus H$, мы увидим, что a можно выбрать таким образом, чтобы выполнялось $f_a(b) = f(b)$, и тогда $f_a = f$). Если $a \in H$, то f_a называется *трансвекцией* гиперплоскости H; если $a \notin H$, то f_a иногда называют дилатацией [1]) или аффинитетом.

b) Как нужно выбирать a, чтобы f_a было автоморфизмом (соотв. инволютивным)?

c) Покажите, что произведение двух симметрий в различных направлениях *относительно гиперплоскости* H является трансвекцией этой гиперплоскости.

15. Пусть E, F — левые векторные пространства, K — основное поле для F и f, g — два полулинейных отображения E в F,

---

[1]) Не путать с дилатациями, определенными в § V. 2!

Допустим, что существует функция $h: E \to K$, такая, что для любого $x \in E$ имеем $f(x) = h(x)g(x)$.

a) Покажите, что если x, y — элементы E, такие, что пара $(g(x), g(y))$ свободна, то $h(x+y) = h(x) = h(y)$.

b) Выведите отсюда, что если ранг $g \geqslant 2$, то существует константа $k \in K$, такая, что $f = kg$.

c) Покажите, что этот результат сохраняет силу, если ранг g равен 1 и если f, g линейны.

Приложение. Пусть E имеет размерность $\geqslant 2$ и f — полулинейное отображение E в E, такое, что x и $f(x)$ зависимы при всех $x \in E$. Покажите, что f — гомотетия или нулевое отображение.

16. Пусть E — векторное пространство размерности $\geqslant 2$ над телом K и f — полулинейное отображение E в E.

a) Предположим, что существует элемент $a \in E$, такой, что пара $(a, f(a))$ свободна; обозначим через H гиперплоскость, для которой $a \in H$, $f(a) \notin H$. Покажите, что тогда существует автоморфизм g пространства E, такой что $g(f(a)) = a + f(a)$ и $g|_H = \mathrm{Id}_H$, и проверьте, что g не перестановочно с f.

b) Покажите, что если f перестановочно со всеми автоморфизмами E, то f имеет вид $x \mapsto kx$, где $k \in K$ (воспользуйтесь предыдущим упражнением). Выведите отсюда, что центр $GL(E)$ состоит из отображений $x \mapsto kx$, где $k \neq 0$ принадлежит центру K.

c) Исследуйте случай $\dim(E) = 1$.

17. Пусть E — векторное пространство, X, Y — два его ВПП и X^0, Y^0 — их аннуляторы (подпространства в E^*). Установите соотношение $(X \cap Y)^0 = X^0 + Y^0$ (см. предложение II. 6.3).

Указание: для $f \in (X \cap Y)^0$ рассмотрите ограничения f на ВПП $L \cap X$, $L \cap Y$, где L обозначает дополнительное к $X \cap Y$ подпространство, и воспользуйтесь предложением II. 4.2 для получения разложения f в $f = g + h$, где $g \in X^0$ и $h \in Y^0$.

18. Пусть E — векторное пространство над полем K и B — такая билинейная форма на E, что из $B(x, y) = 0$ следует $B(y, x) = 0$.

a) Проверьте, что для любых $(x, y, z) \in E^3$ выполняется $B[x, B(x, z)y - B(x, y)z] = 0$, и выведите из этого, что $B(x, z)B(y, x) = B(x, y)B(z, x)$. Затем покажите, что если $B(x, y) \neq B(y, x)$, то $B(x, x) = B(y, y) = 0$.

b) Предположим, что существует пара $(x, y) \in E^2$, такая, что $B(y, x) \neq B(x, y)$. Покажите, что для любого $z \in E$, для которого $B(x, z) \neq 0$, верно также $B(x, z) \neq B(z, x)$, и потому $B(z, z) = 0$.

c) Снова предположив, что $B(y, x) \neq B(x, y)$, покажите, что для $z \in E$, для которого $B(x, z) = B(y, z) = 0$, выполнено также равенство $B(y + z, y + z) = 0$. Получите отсюда снова, что $B(z, z) = 0$.

d) Выведите из предыдущего, что

$$\text{либо } (\forall (x, y) \in E^2) \quad B(x, y) = B(y, x),$$
$$\text{либо } (\forall z \in E) \quad B(z, z) = 0,$$

и покажите, что во втором случае

$$(\forall (x, y) \in E^2) \quad B(x, y) + B(y, x) = 0.$$

19. (Примеры свободных семейств в случае бесконечной размерности.)

a) Покажите, что функции f_α: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R}_+)$ образуют свободное семейство в пространстве отображений $\mathbb{R}_+$ в $\mathbb{R}$. (Исследуйте поведение на бесконечности некоторой линейной комбинации f_α.)

b) Пусть для каждого $a \in \mathbb{R}$ функция f_a: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задана как $f_a(x) = |x - a|$. Покажите, что функции f_a образуют свободное семейство в пространстве отображений $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$.

(Покажите, что функция вида $\sum \lambda_i f_{a_i}$, где λ_i — действительные числа, не равные одновременно нулю, не может быть всюду дифференцируемой и, значит, не может тождественно равняться нулю.)

ГЛАВА III

1. Пусть f — биекция множества X в себя и A — подмножество в X. Покажите, что в каждом из следующих случаев включение $f(A) \subset A$ влечет $f(A) = A$:

a) A конечно:

b) X является векторным пространством, f — автоморфизмом X и A — ВПП конечной размерности;

c) X — аффинное пространство, f — аффинная биекция X на X и A — ЛАМ конечной размерности в X;

d) X — аффинное пространство, f — аффинная биекция X на X и A — гиперплоскость в X;

e) X — нормированное векторное пространство, f — биективная векторная изометрия X и A — шар или сфера в X (воспользуйтесь тем фактом, что ограниченное множество не может иметь более одного центра симметрии).

2. Пусть $\mathscr{V}_1$, $\mathscr{V}_2$ — два конечномерных ЛАМ аффинного пространства над телом $K \neq Z_2$. Покажите, что $\mathscr{V}_1 \cup \mathscr{V}_2$ будет ЛАМ только в том случае, если $\mathscr{V}_1 \subset \mathscr{V}_2$ или $\mathscr{V}_2 \subset \mathscr{V}_1$. (Случай, когда $\mathscr{V}_1 \cap \mathscr{V}_2$ не пусто, сводится к векторному; если $\mathscr{V}_1 \cap \mathscr{V}_2$ пусто, то можно применить теорему III.4.8.)

3. Пусть $\mathscr{V}_1$, $\mathscr{V}_2$ — два конечномерных ЛАМ аффинного пространства $\mathscr{E}$. Покажите, что размерность $\mathrm{Aff}(\mathscr{V}_1 \cup \mathscr{V}_2)$ равна $\dim(\mathscr{V}_1) + \dim(\mathscr{V}_2) - \dim(\mathscr{V}_1 \cap \mathscr{V}_2)$, если $\mathscr{V}_1 \cap \mathscr{V}_2$ не пусто, и $\dim(\mathscr{V}_1) + \dim(\mathscr{V}_2) + 1$, если $\mathscr{V}_1 \cap \mathscr{V}_2$ пусто (примените упр. II.2; последнее утверждение дает основание считать, что пустое подмножество есть ЛАМ размерности -1).

4. Постройте теорию линейных аффинных многообразий, основываясь на одном из следующих определений:

a) Непустое подмножество $\mathscr{V} \subset \mathscr{E}$ является ЛАМ, если множество векторов $\overrightarrow{PQ}$, для которых $(P, Q) \in \mathscr{V}^2$, является векторным пространством.

b) Непустое подмножество $\mathscr{V} \subset \mathscr{E}$ является ЛАМ, если барицентр любой системы взвешенных точек $\mathscr{E}$ с носителем в $\mathscr{V}$ содержится в $\mathscr{V}$.

5. Пусть $\mathscr{E}$ — аффинное пространство, τ — трансляция $\mathscr{E}$ на вектор u и f — аффинная биекция $\mathscr{E}$ на $\mathscr{E}$ с линейной частью $L(f) = \varphi$.

a) Покажите, что $f \circ \tau \circ f^{-1}$ есть трансляция на вектор $\varphi(u)$, и выведите отсюда условие перестановочности f и τ.

b) Воспользуйтесь этим результатом для построения инволютивных аффинных биекций $\mathscr{E}$ в случае основного тела характеристики 2 (обратитесь к упр. II. 4 и используйте то, что трансляции и трансвекции инволютивны).

6. Пусть $\mathscr{E}$ — аффинное пространство над телом характеристики $\neq 2$ и s — аффинная симметрия $\mathscr{E}$ в направлении W относительно ЛАМ $\mathscr{V}$.

a) Покажите, что если τ — трансляция на вектор $u \in W$, то $s \circ \tau$ и $\tau \circ s$ являются аффинными симметриями.

b) Пусть f — аффинная биекция $\mathscr{E}$ с инволютивной линейной частью. Покажите, что f получается как коммутативное произведение аффинной симметрии и трансляции на вектор u, инвариантный при действии $L(f)$ (примените пункт a) предыдущего упражнения).

7. Пусть $\mathscr{E}$ — аффинное пространство над телом характеристики 2. Покажите, что если $(ABCD)$ — параллелограмм, то каждая его вершина является эквибарицентром трех остальных. Получите отсюда доказательство части b) теоремы III. 5.4.

8. Пусть $\mathscr{E}$ — аффинное пространство и $f: \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ — такое инъективное отображение, что для любой пары (A, B) различных точек прямая $(f(A)f(B))$ параллельна прямой (AB). Покажите, что

a) если A, B — такие две точки $\mathscr{E}$, что прямые $(Af(A))$ и $(Bf(B))$ пересекаются в точке I, то I есть неподвижная точка отображения f;

b) если I — неподвижная точка f, то прямые, проходящие через I, сохраняются при отображении f и f есть гомотетия с центром I;

c) если f не допускает неподвижных точек, то f — трансляция.

9. Пусть E — векторное пространство и H — его аффинная гиперплоскость, не проходящая через начало. Покажите, что на E существует единственная линейная форма h, такая, что $H = h^{-1}(1)$.

10. a) Пусть h_A, h_B — две гомотетии аффинного пространства $\mathscr{E}$, отличные от $\mathrm{Id}_{\mathscr{E}}$, с различными центрами A, B. Покажите, что

$h_B \circ h_A$ является гомотетией, центр которой лежит на прямой (AB), или трансляцией на вектор u, параллельный этой прямой. Покажите также, что h_A и h_B не коммутируют.

b) Покажите, что гомотетия $h \neq \mathrm{Id}_{\mathscr{E}}$ не может коммутировать с трансляцией $\tau \neq \mathrm{Id}_{\mathscr{E}}$.

11. Пусть три гомотетии p, q, r с различными центрами P, Q, R аффинного пространства $\mathscr{E}$ удовлетворяют условию $pqr = rpq$ *или* $pqr = rqp$, причем композиция pq не является трансляцией.

Покажите, что P, Q, R лежат на одной прямой (первый случай прост; для исследования второго следует различать две возможности: первая, когда pqr — гомотетия, центр которой можно определить по центрам A, B гомотетий (pq), (qp), и вторая, когда pqr — трансляция).

Приложение. Пусть основное тело K коммутативно, $\mathscr{D}$, $\mathscr{D}'$ — пара параллельных прямых, A, B, C — три точки на $\mathscr{D}$ и A', B', C' — три точки на $\mathscr{D}'$. Докажите, что точки $P = (BC') \cap (CB')$, $Q = (CA') \cap (AC')$ и $R = (AB') \cap (BA')$, если они существуют, принадлежат одной прямой (примените гомотетию p с центром P, переводящую B в C', и аналогичные гомотетии q, r с центрами Q, R и докажите, что $pq^{-1}r = rq^{-1}p$; это есть специальный случай теоремы Паппа, см. § IV. 11).

12. В аффинном пространстве $\mathscr{E}$, ассоциированном с векторным пространством E, дано конечное семейство $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ взвешенных точек, для которых $\sum\limits_{i \in I} \lambda_i = 0$.

a) Покажите, что функция Лейбница f: $\mathscr{E} \to E$, $M \mapsto \sum\limits_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{MA_i}$ постоянна.

b) Постройте систему из трех точек A, B, C, снабженных ненулевыми массами λ, μ, ν, такую, чтобы функция $M \mapsto \lambda\overrightarrow{MA} + \mu\overrightarrow{MB} + \nu\overrightarrow{MC}$ была всюду равна нулю (точки A, B, C должны быть коллинеарны).

c) Докажите предложение: для того чтобы $n+1$ точек $A_0, \ldots, A_n$ в $\mathscr{E}$ *принадлежали одному ЛАМ размерности* $\leqslant n-1$, необходимо и достаточно, чтобы существовали не равные нулю одновременно скаляры $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$, такие, что функция $M \mapsto \sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i \overrightarrow{MA_i}$ равна нулю тождественно (можно использовать векторную структуру с началом A_0).

13. Пусть $\mathscr{E}$ — евклидово аффинное пространство. Каждому конечному семейству $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ взвешенных точек сопоставим вторую функцию Лейбница φ: $\mathscr{E} \to \mathbb{R}$, $M \mapsto \sum\limits_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{MA_i}^2$.

a) Покажите, что если $\sum_{i \in I} \lambda_i \neq 0$ и G — барицентр семейства, то

$$(\forall M \in \mathscr{E}) \qquad \varphi(M) = \left(\sum \lambda_i\right) \overrightarrow{MG}^2 + \varphi(G).$$

b) Покажите, что при $\sum_{i \in I} \lambda_i = 0$ функция φ постоянна. В каком случае она равна нулю? (Воспользуйтесь предыдущим упражнением.)

Приложение. 1) При данных точках A, B выясните, каково множество точек M, для которых $MB = kMA$ $(k = \text{const})$.

2) Для заданной тройки коллинеарных точек A, B, C выведите соотношение Стюарта

$$(\forall M \in \mathscr{E}) \qquad \overrightarrow{MA}^2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}^2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}^2\overrightarrow{AB} = 0.$$

14. (Теорема Дезарга[1].) Пусть $\mathscr{E}$ — аффинное пространство над каким-либо телом K и (ABC), $(A'B'C')$ — две тройки не коллинеарных точек, такие, что прямые (AA'), (BB'), (CC') различны и пересекаются в точке S. Предполагается, что $A' \neq A$, $B' \neq B$, $C' \neq C$.

a) Покажите, что существуют скаляры λ, μ, ν, такие, что

$$A' = \mathscr{B}((S, 1), (A, \lambda)), \qquad B' = \mathscr{B}((S, 1), (B, \mu)),$$
$$C' = \mathscr{B}((S, 1), (C, \nu)),$$

и проверьте, что если $\mu \neq \nu$, то $\mathscr{B}((B, \mu), (C, -\nu))$ есть точка P пересечения прямых (BC) и $(B'C')$.

b) Определите таким же путем точки $Q = (CA) \cap (C'A')$ и $R = (AB) \cap (A'B')$, если они существуют; проверьте, что $(\nu - \mu)\overrightarrow{SP} + (\lambda - \nu)\overrightarrow{SQ} + (\mu - \lambda)\overrightarrow{SR} = 0$. Выведите отсюда, что точки P, Q, R принадлежат одной прямой.

c) В случае когда прямые (BC) и $(B'C')$ параллельны, но точки Q и R существуют, покажите, что прямая (QR) параллельна (BC).

15. (Теорема Менелая о полном четырехстороннике.) Пусть (ABC) — треугольник в аффинной плоскости $\mathscr{E}$ и P, Q, R — точки, заданные условиями $\overrightarrow{BP} = \lambda\overrightarrow{CP}$, $\overrightarrow{CQ} = \mu\overrightarrow{AQ}$, $\overrightarrow{AR} = \nu\overrightarrow{BR}$, где λ, μ, ν — ненулевые скаляры. Обозначим через p, q, r гомотетии с центрами соответственно в P, Q, R и коэффициентами λ, μ, ν.

a) Покажите, что $p \circ q \circ r = \mathrm{Id}_{\mathscr{E}}$ тогда и только тогда, когда $\lambda\mu\nu = 1$, и выведите из этого, что приведенное условие равносильно коллинеарности точек P, Q, R.

b) Предположив коллинеарность точек P, Q, R, покажите,

[1] Это доказательство — аффинный вариант данного в § IV. 10. Заметим, что здесь нет предположения о двумерности $\mathscr{E}$.

что середины α, β, γ отрезков $[AP]$, $[BQ]$ и $[CR]$ также коллинеарны. (Если $\lambda\mu\nu = 1$, то можно положить $\lambda = v^{-1}w$, $\mu = w^{-1}u$, $\nu = u^{-1}v$ и доказать, что для любой точки $O \in \mathscr{E}$ выполнено $(w - v)\overrightarrow{O\alpha} + (u - w)\overrightarrow{O\beta} + (v - u)\overrightarrow{O\gamma} = 0$.)

16. (Теорема Паппа.) Пусть в аффинной плоскости над некоторым полем (A, B, C) и (A', B', C') — две тройки коллинеарных точек, расположенные соответственно на прямых $\mathscr{D}$, $\mathscr{D}'$, пересекающихся в O (случай параллельности прямых $\mathscr{D}$, $\mathscr{D}'$ разобран в упр. 11).

a) Выбрав декартов репер (O, i, j) с началом O, такой, что i имеет направление $\mathscr{D}$, а j — направление $\mathscr{D}'$, положим $\overline{OA} = \alpha^{-1}$, $\overline{OB} = \beta^{-1}$, $\overline{OC} = \gamma^{-1}$, $\overline{OA'} = \alpha'^{-1}$, $\overline{OB'} = \beta'^{-1}$, $\overline{OC'} = \gamma'^{-1}$. Напишите уравнения прямых (AB') и (BA') и найдите координаты точки их пересечения R.

b) Аналогичным образом найдите координаты точек $P = (BC') \cap (CB')$ и $Q = (CA') \cap (AC')$ и проверьте, что $(\beta\beta' - \gamma\gamma')\overrightarrow{OP} + (\gamma\gamma' - \alpha\alpha')\overrightarrow{OQ} + (\alpha\alpha' - \beta\beta')\overrightarrow{OR} = 0$. Выведите отсюда заключение о коллинеарности точек P, Q, R.

17. Пусть f — аффинная биекция аффинного евклидова пространства $\mathscr{E}$ на себя. Предположим, что существует сфера S с центром A и радиусом R, образом которой также служит сфера S' с центром A' и радиусом R'. Покажите, что $A' = f(A)$ и что линейная часть f есть преобразование подобия. Выведите отсюда, что f — аффинное преобразование подобия.

18. Пусть $\mathscr{C}$ — множество, состоящее из окружностей ненулевого радиуса и прямых евклидовой плоскости $\mathscr{E}$.

a) Покажите, что элемент $\Delta \in \mathscr{E}$ — прямая тогда и только тогда, когда для любой пары (A, B) точек $\mathscr{E}$ существует элемент из $\mathscr{C}$, проходящий через A и B и имеющий с Δ не более одной общей точки. (Если Δ — окружность, возьмите в качестве A внутреннюю, а в качестве B — внешнюю точку относительно Δ.)

b) Пусть f — биекция $\mathscr{E}$ на $\mathscr{E}$, преобразующая всякую прямую или окружность снова в прямую или окружность. Покажите, что при этом условии f переводит прямые в прямые и окружности в окружности (воспользуйтесь предыдущим упражнением).

ГЛАВА IV

Проективные подпространства и проективные морфизмы

1. Пусть $\mathbb{P}(E)$ — проективное пространство размерности n и X, Y — два его проективных подпространства, таких, что целое $p = \dim(X) + \dim(Y) \geqslant n$. Покажите, что $X \cap Y$ не пусто и $\dim(X \cap Y) \geqslant p - n$ (воспользуйтесь упр. II. 2).

2. Пусть $\mathbb{P}(E)$ есть n-мерное проективное пространство над те-

лом K. Покажите, что отображение, определяемое в однородных координатах при заданном автоморфизме тела θ условием $(X_0, \ldots, X_n) \longmapsto (\theta(X_0), \ldots, \theta(X_n))$, является полупроективным.

3. a) Пусть X — подмножество проективного пространства $\mathbb{P}(E)$. Покажите, что существует проективное подпространство $\mathbb{P}(E)$ — обозначим его $L(X)$, содержащее X и такое, что любое проективное подпространство $\mathbb{P}(E)$, содержащее X, содержит также и $L(X)$ (мы говорим, что $L(X)$ есть проективное подпространство в $\mathbb{P}(E)$, *порожденное* X).

b) Покажите, что если H — проективная гиперплоскость и точка $A \in \mathbb{P}(E) \setminus H$, то $H \cup \{A\}$ порождает $\mathbb{P}(E)$.

c) Покажите, что n-мерное проективное пространство $\mathbb{P}(E)$ не может быть порождено конечным подмножеством мощности $\leqslant n$ и что $\{A_0, A_1, \ldots, A_n\}$ порождает $\mathbb{P}(E)$ тогда и только тогда, когда $n+1$ точек A_i не лежат в одной проективной гиперплоскости.

4. (Проективные реперы.) Пусть E — векторное K-пространство размерности $n+1$. Назовем *проективным репером* пространства $\mathbb{P}(E)$ систему $(A_0, A_1, \ldots, A_{n+1})$ из $n+2$ точек, никакие $n+1$ из которых не лежат в одной проективной гиперплоскости.

a) Покажите, что в E существует базис $(e_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$, такой, что $p(e_i) = A_i$ для $i = 0, 1, \ldots, n$ и $p(e_0 + \ldots + e_n) = A_{n+1}$; установите, что любой другой базис, удовлетворяющий тем же условиям, имеет вид $(\lambda e_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$, где $\lambda \in K^*$. Выведите отсюда, что однородные координаты в $\mathbb{P}(E)$ относительно этого базиса зависят только от выбора точек A_i $(0 \leqslant i \leqslant n+1)$. Их называют однородными координатами в проективном репере (A_i).

b) Пусть $\mathscr{E}$ — аффинное n-мерное пространство над телом K, $(A_0, \ldots, A_n)$ — аффинный репер в $\mathscr{E}$ и A_{n+1} — эквибарицентр точек $A_0, \ldots, A_n$ (лежащий в бесконечности, если n кратно характеристике тела K). Покажите, что $(A_0, \ldots, A_{n+1})$ является проективным репером $\mathscr{E}$ и что однородные координаты относительно этого репера суть продолжения барицентрических координат $\mathscr{E}$ в аффинном репере $(A_0, \ldots, A_n)$.

5. Пусть $\mathbb{P}(E)$, $\mathbb{P}(F)$ — два проективных пространства одинаковой размерности n над одним и тем же телом K и $(A_i)_{0 \leqslant i \leqslant n+1}$, $(B_i)_{0 \leqslant i \leqslant n+1}$ — проективные реперы в этих пространствах (см. упр. 4).

a) Покажите, что существует не менее одной гомографии φ: $\mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(F)$, такой, что $\varphi(A_i) = B_i$ для всех i.

b) Покажите, что такая гомография единственна тогда и только тогда, когда тело K коммутативно. (Это обобщение теоремы IV. 8.1, известное как «первая основная теорема проективной геометрии».)

6. (Обобщение понятий проектирования и гомологии.) Пусть $\mathbb{P}(E)$ — проективное пространство и X, Y — два взаимно дополнительных ВПП пространства E. Положим $U = \mathbb{P}(E) \setminus (\mathbb{P}(X) \cup \cup \mathbb{P}(Y))$.

a) Покажите, что через любую точку $M \in U$ проходит единственная проективная прямая Δ_M, пересекающая $\mathbb{P}(X)$ и $\mathbb{P}(Y)$. (Указание: выберите $z \in p^{-1}(M)$ и разложите z в $z = x + y$, где $x \in X$, $y \in Y$.)

b) Для любого $k \in K$ обозначим через φ_k морфизм, индуцированный полулинейным отображением f_k, таким, что $f_k(x) = kx$ для $x \in X$ и $f_k(y) = y$ для $y \in Y$. Покажите, что для любой точки $M \in U$ образ $\varphi_k(M)$ лежит на прямой Δ_M, и постройте геометрически $\varphi_k(M)$ при $k = 0$ и $k = -1$ (при $k = 0$ это будет обобщением примера 1 из § 3, а при $k = -1$ — обобщением гармонических гомологий).

c) Если K — поле, покажите, что $[P, Q, M, \varphi_k(M)] = k$, где P, Q — точки пересечения Δ_M с $\mathbb{P}(X)$, $\mathbb{P}(Y)$.

7. Пусть $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}'$ — два аффинных пространства над одним и тем же телом K, $\tilde{\mathscr{E}}$ и $\tilde{\mathscr{E}}'$ — их проективные пополнения и φ: $\tilde{\mathscr{E}} \to \tilde{\mathscr{E}}'$ — такая гомография, что $\varphi(\mathscr{E}_\infty) = \mathscr{E}'_\infty$.

a) Покажите, что ограничение φ на $\mathscr{E}$ является *полуаффинной биекцией, ассоциированной* с внутренним автоморфизмом тела K. (Полагая $\tilde{\mathscr{E}} = \mathbb{P}(E)$, $\tilde{\mathscr{E}}' = \mathbb{P}(E')$ и считая φ индуцированным линейным отображением f: $E \to E'$, можно отождествить $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}'$ соответственно с гиперплоскостями в E, E' и доказать существование такого $k \in K^*$, что kf переводит $\mathscr{E}$ в $\mathscr{E}'$.)

b) Получите тот же результат в случае конечной размерности n, используя в $\tilde{\mathscr{E}}$ и $\tilde{\mathscr{E}}'$ однородные координаты, в которых уравнение бесконечно удаленной плоскости имеет вид $x_{n+1} = 0$.

c) В случае $\mathscr{E}' = \mathscr{E}$ покажите, что φ является гомологией (соотв. гармонической гомологией, элацией) гиперплоскости $\mathscr{E}_\infty$ тогда и только тогда, когда ее ограничение на $\mathscr{E}$ является гомотетией (соотв. центральной симметрией, трансляцией).

8. Покажите, что в проективном пространстве композиция двух гармонических гомологий с общей гиперплоскостью и различными центрами является элацией. Обратно, в случае когда характеристика основного тела $\neq 2$, покажите, что каждая элация может быть представлена как произведение двух гармонических гомологий (см. упр. II. 14).

9. Пусть A, B, A', B' — четыре точки проективной плоскости Π, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Покажите, что существуют единственная гармоническая гомология и единственная элация, переводящие (A, B) в (A', B'). (Можно предположить, что характеристика тела $\neq 2$.)

10. Пусть $\mathbb{P}(E)$ — проективное пространство размерности $\geqslant 2$, $\mathscr{L}$ — проективная гиперплоскость, S — точка $\mathbb{P}(E)$ и A, A' — две точки в $\mathbb{P}(E) \setminus \mathscr{L}$, коллинеарные с S и отличные от S. Покажите, что существует единственная гомология или элация φ пространства $\mathbb{P}(E)$ с центром S и гиперплоскостью $\mathscr{L}$, такая, что $\varphi(A) = A'$.

Указания. Единственность φ получается из «правил перспективы» (см. конец § 3). Для доказательства существования φ можно отправить $\mathcal{L}$ в бесконечность, и тогда дело сведется к отысканию дилатации аффинного пространства $\mathbb{P}(E)\setminus\mathcal{L}$ (см. упр. 7). Можно также воспользоваться упражнением II. 14 для построения автоморфизма E, индуцирующего φ.

Приложение. Пусть $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}'$ — две проективные гиперплоскости проективного пространства $\mathbb{P}(E)$ и S, S' — две точки в $\mathbb{P}(E)\setminus(\mathcal{L}\cup\mathcal{L}')$. Обозначив через p проектирование $\mathcal{L}$ на $\mathcal{L}'$ из центра S, а через q — проектирование $\mathcal{L}'$ на $\mathcal{L}$ из центра S', дайте строгое доказательство того, что $q\circ p$ есть гомология или элация $\mathcal{L}$.

11. В проективной плоскости П два треугольника (ABC) и $(A'B'C')$ расположены так, что прямые (AA'), (BB') и (CC') различны и пересекаются в одной точке. Покажите, что теорема Дезарга равносильна существованию гомологии или элации, переводящей (ABC) в $(A'B'C')$. (Воспользуйтесь предыдущим упражнением.)

12. (Обобщение теоремы Дезарга.) Пусть $\mathbb{P}(E)$ есть n-мерное проективное пространство и $(A_0, \ldots, A_n)$ $\left(\text{соотв. } \left(A'_0, \ldots, A'_n\right)\right)$ — система $n+1$ точек, не принадлежащих одной гиперплоскости, таких, что $A'_k \neq A_k$ при всех k, и прямая $\left(A_kA'_k\right)$ не содержит ни одной из точек A_h, A'_h при $h \neq k$. Предположим также, что при $k \neq h$ прямые (A_kA_h) и $\left(A'_kA'_h\right)$ имеют одну общую точку P_{kh} и все точки P_{kh} лежат в одной гиперплоскости $\mathcal{L}$.

a) Покажите, что все прямые $\left(A_kA'_k\right)$ имеют общую точку S.

b) Выведите отсюда, что существует такая гомология или элация φ с центром S и гиперплоскостью $\mathcal{L}$, что $\varphi(A_k) = A'_k$ для всех k.

13. Пусть φ — гомография проективного пространства $\mathbb{P}(E)$, оставляющая неподвижной каждую точку некоторой гиперплоскости $\mathcal{L}$ и не совпадающая с тождественным отображением; допустим еще, что $\dim \mathbb{P}(E) \geqslant 2$.

a) Покажите, что каждая проективная прямая Δ, содержащая точку $M \in \mathbb{P}(E)\setminus\mathcal{L}$ вместе с ее образом при φ, переходит в себя.

b) Пусть A, B — две точки в $\mathbb{P}(E)\setminus\mathcal{L}$ и A', B' — их образы. Покажите, что прямые (AB) и $(A'B')$ пересекают $\mathcal{L}$ в одной и той же точке.

c) Покажите, что можно выбрать точки A и B так, чтобы прямые (AA') и (BB') были различны, и что в этом случае они имеют общую точку S, неподвижную при гомографии φ. Покажите далее, что все прямые $(M, \varphi(M))$ проходят через S (если $S \notin \mathcal{L}$, это получается сразу; если же $S \in \mathcal{L}$, то можно Выведите отсюда, что φ является гомологией или элацией. (Это можно доказать также, отправляя $\mathcal{L}$ в бесконечность.)

14. Пусть $\mathbb{P}(E)$ — проективное пространство размерности $\geqslant 2$, S — точка в $\mathbb{P}(E)$ и φ — гомография, сохраняющая все прямые, проходящие через S.

a) Пусть A, B — две точки $\mathbb{P}(E)$, не лежащие на одной прямой с S, и A', B' — их образы. Покажите, что прямые (AB) и $(A'B')$ пересекаются в неподвижной точке гомографии φ.

b) Пусть $\mathscr{L}$ — множество полученных таким путем неподвижных точек φ. Применяя теорему Дезарга, покажите, что произвольная проективная плоскость Π, проведенная через S, пересекает $\mathscr{L}$ по прямой и что ограничение φ на Π является гомологией или элацией.

c) Покажите, что любая прямая, соединяющая две точки из $\mathscr{L}$, содержится в $\mathscr{L}$; выведите отсюда, что $\mathscr{L}$ — гиперплоскость (см. предложение 12.1) и что φ — гомология или элация. (Это можно также доказать, удаляя точку S в бесконечность.)

15. Пусть K — произвольное тело; отождествим $\mathbb{P}^1(K)$ с $K \cup \{\infty\}$, следуя соглашениям, принятым в § 6.

a) Покажите, что гомографии $\mathbb{P}^1(K)$ записываются в виде $x \longmapsto (xc+d)^{-1}(xa+b)$, а те из них, которые сохраняют бесконечно удаленную точку, в виде $x \longmapsto \lambda(xa+b)$, где $(\lambda, a, b) \in K^* \times K^* \times K$.

b) Покажите, что элации, сохраняющие бесконечно удаленную точку, представляются в форме $x \longmapsto x+b$ (см. упр. 7). Выведите из этого, что элации, допускающие в качестве неподвижной точку $\alpha \in K$, задаются соотношениями вида $(\varphi(x)-\alpha)^{-1} = (x-\alpha)^{-1}+b$ $(b = \text{const})$. (Воспользуйтесь гомографией $x \longmapsto (x-\alpha)^{-1}$.)

c) Покажите, что гомологии, сохраняющие бесконечно удаленную точку, имеют вид $x \longmapsto x\lambda+b$ или $x \longmapsto \lambda x+b$, смотря по тому, является ли точка ∞ их центром или нет. Получите из этого, что гомологии с центром $\alpha \in K$, имеющие вторую неподвижную точку $\beta \in K$, могут быть заданы соотношением вида

$$(\varphi(x)-\beta)^{-1}(\varphi(x)-\alpha) = \lambda(x-\beta)^{-1}(x-\alpha) \qquad (\lambda \in K), \tag{1}$$

и проверьте, что в случае поля K соотношение (1) равносильно $[\beta, \alpha, x, \varphi(x)] = \lambda$. (Воспользуйтесь гомографией $x \longmapsto (x-\beta)^{-1}(x-\alpha)$.)

d) В случае поля K покажите, что гомологии и элации являются единственными гомографиями $\mathbb{P}^1(K)$, допускающими хотя бы одну неподвижную точку.

16. Пусть E — конечномерное векторное пространство над полем K[1]. Напомним, что линейная группа порождается автоморфизмом E, множество неподвижных точек которого есть гиперплоскость (см. упр. II. 14 и [LFA], т. 3, упр. I. 14).

a) Выведите из этого, что $\mathrm{PGL}(E)$ порождается гомологиями и элациями (см. упр. 13).

---

[1] По поводу некоммутативного случая см. [AR], гл. IV.

b) Пусть $\mathscr{L}$ — проективная гиперплоскость в $\mathbb{P}(E)$. Покажите, что любая гомография $\mathscr{L}$ получается как композиция конечного числа перспектив.

c) Пусть $K=\mathbb{R}$; покажите, что любая гомография $\mathbb{P}(E)$ индуцируется автоморфизмом E с детерминантом ± 1. Допустим, что такой автоморфизм разлагается в произведение симметрий относительно гиперплоскостей; покажите, что $\mathrm{PGL}(E)$ порождается гармоническими гомологиями.

Гармонические четверки и двойное отношение

17. В случае произвольного тела K покажите, что четверка $(0, \beta, \gamma, \delta)$ гармоническая тогда и только тогда, когда $\gamma^{-1}+\delta^{-1}=2\beta^{-1}$.

18. Покажите, что для поля характеристики $\neq 2$ четверка $(\alpha, -\alpha, \gamma, \delta)$ гармоническая тогда и только тогда, когда $\gamma\delta=\alpha^2$.

19. Пусть K — произвольное тело характеристики $\neq 2$ и φ — биекция $\mathbb{P}^1(K)$ на $\mathbb{P}^1(K)$, такая, что образ любой гармонической четверки есть гармоническая четверка. Докажите, что отображение φ полупроективно (теорема фон Штаудта). План доказательства:

a) Покажите, что можно свести дело к случаю $\varphi(0)=0$, $\varphi(1)=1$, $\varphi(\infty)=\infty$; тогда, отождествив $\mathbb{P}^1(K)$ с $K\cup\{\infty\}$, получим

$$\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{1}{2}(\varphi(x)+\varphi(y)), \quad \varphi(2x)=2\varphi(x)$$

$$\text{и} \quad \varphi(x^2)=[\varphi(x)]^2.$$

(Пользуемся тем, что $(x, y, (x+y)/2, \infty)$, $(0, 2x, x, \infty)$ и $(1, x^2, x, -x)$ — гармонические четверки.) Выведите из этого, что φ — автоморфизм тела K.

b) Возвратившись к общему случаю, выведите сформулированное утверждение.

20. Пусть a, b, c, d — четыре элемента поля K и $k=[a, b, c, d]$ — их двойное отношение. Покажите, что если f пробегает множество (содержащее 24 элемента) всех перестановок a, b, c, d, то двойное отношение $[f(a), f(b), f(c), f(d)]$ принимает лишь значения k, k^{-1}, $1-k$, $1-k^{-1}$, $(1-k)^{-1}$, $(1-k^{-1})^{-1}$.

a) При каком выборе a, b, c, d не все эти шесть значений различны?

b) Выясните, каково число значений, принимаемых этим двойным отношением, в следующих случаях:

i) $k=-1$ (рассмотрите случаи, когда характеристика K равна 2 и 3);

ii) $k^2-k+1=0$;

iii) k есть поле F_4 из упр. I. 16.

21. Пусть $\mathbb{P}(E)$, $\mathbb{P}(F)$ — два проективных пространства над полями K, K' и φ: $\mathbb{P}(E)\to\mathbb{P}(F)$ — полупроективный морфизм, ассоцированный с изоморфизмом θ: $K \to K'$. Покажите, что если A, B, C, D — коллинеарные точки $\mathbb{P}(E)$ и $[A, B, C, D] = k$, то $[\varphi(A), \varphi(B), \varphi(C), \varphi(D)] = \theta(k)$.

22. (Обобщение понятия двойного отношения.) Пусть Δ — проективная прямая над некоммутативным телом K и A, B, C, D — четыре ее точки. Обозначим через $[A, B, C, D]$ множество значений $\varphi(D)$, где φ — гомография Δ на $\mathbb{P}^1(K)$, такая, что $\varphi(A) = \infty$, $\varphi(B) = 0$, $\varphi(C) = 1$.

a) Покажите, что $[A, B, C, D]$ инвариантно при любой гомографии.

b) Покажите, что если $k \in [A, B, C, D]$, то

$$[A, B, C, D] = \{\lambda k \lambda^{-1} \mid \lambda \in K^*\}.$$

c) Что будет в случае гармонической четверки (A, B, C, D)?

23. Пусть $\mathscr{P}$ — аффинная плоскость над полем K, отнесенная к декартову реперу с началом в O. Каждому элементу $m \in \mathbb{P}^1(K)$ поставим в соответствие прямую (прямая с наклоном m) с уравнением $y = mx$, если $m \in K$, и $x = 0$, если $m = \infty$. Покажите, что двойное отношение четырех прямых, проходящих через O, равно двойному отношению их наклонов.

24. (Пучок гиперплоскостей.) Пусть φ, ψ — две независимые линейные формы на векторном K-пространстве E и L, M — гиперплоскости в $\mathbb{P}(E)$ с однородными уравнениями $\varphi = 0$, $\psi = 0$ соответственно.

a) *Покажите, что гиперплоскости* в $\mathbb{P}(E)$, содержащие $L \cap M$, суть те, которые могут быть заданы однородным уравнением вида $\lambda\varphi + \mu\psi = 0$, где $(\lambda, \mu) \in K^2 \setminus \{0, 0\}$ (говорят, что эти гиперплоскости образуют пучок с базисом (L, M)).

b) Назовем секущей пучка любую проективную прямую, не пересекающую $L \cap M$. Покажите, что гиперплоскости с уравнениями $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $\lambda\varphi + \mu\psi = 0$, $\lambda\varphi - \mu\psi = 0$ определяют гармоническую четверку на каждой секущей. (Воспользуйтесь параметрическими уравнениями секущей.)

c) Докажите более общий результат: четыре гиперплоскости с уравнениями $\lambda_i\varphi + \mu_i\psi = 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ определяют гармоническую четверку на каждой секущей тогда и только тогда, когда точки $\langle\lambda_i, \mu_i\rangle$ образуют гармоническую четверку в $\mathbb{P}^1(K)$ (тогда говорят, что эти гиперплоскости образуют гармоническую четверку). Выведите отсюда обобщение теоремы IV. 7.1 и дайте этому обобщению прямое геометрическое доказательство (для сравнения четверок на секущих Δ, Δ' можно пользоваться вспомогательной секущей, имеющей общие точки и с Δ и с Δ', и применять теорему IV. 7.1).

d) Предполагая K коммутативным, покажите, что двойное отношение точек пересечения четырех гиперплоскостей $\lambda_i\varphi + \mu_i\psi = 0$ с секущей равно двойному отношению точек $\langle\lambda_i, \mu_i\rangle$ прямой $\mathbb{P}^1(K)$.

25. Покажите, что фигура, двойственная гармонической четверке точек, есть гармоническая четверка гиперплоскостей (см. предыдущее упражнение.)

26. Пусть $\mathbb{P}(E)$ — проективное пространство над полем характеристики $\neq 2$. Обозначим через L, M две гиперплоскости в $\mathbb{P}(E)$ и через S точку в $\mathbb{P}(E) \setminus (L \cup M)$.

a) Покажите, что геометрическое место точек, гармонически сопряженных с S относительно точек пересечения с L, M секущей, проходящей через S, является гиперплоскостью (см. упр. 24).

b) Выведите из этого, что существует гармоническая гомология с центром S, меняющая местами L и M.

Случай, когда основное тело есть $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$

27. Пусть S^n — сфера в $\mathbb{R}^{n+1}$, определенная уравнением $\sum x_i^2 = 1$.

a) Каждой паре $(x, -x)$ диаметрально противоположных точек S^n поставим в соответствие точку $p(x)$ в $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$. Покажите, что таким путем получается биекция $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ на фактормножество S^n по соответствующему отношению эквивалентности.

b) Каждой паре (A, B) точек $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ поставим в соответствие действительное число $d(A, B)$ — радианную меру острого угла, образованного прямыми $p^{-1}(A)$ и $p^{-1}(B)$. Покажите, что таким образом можно определить расстояние в $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, и найдите множество точек, равноудаленных от двух данных. Каковы гомографии, сохраняющие это расстояние?

28. Пусть S — сфера в $\mathbb{R}^3$ с уравнением $x^2 + y^2 + z^2 - z = 0$. Проверьте, что инъекция $\mathbb{C} \to S$:

$$x + iy \longmapsto \left(\frac{x}{1 + x^2 + y^2}, \frac{y}{1 + x^2 + y^2}, \frac{x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2}\right)$$

продолжается с помощью предельного перехода до биекции $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ на S. (В теории функций комплексного переменного множество $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, отождествленное с S, называется «сферой Римана».)

29. a) Дайте геометрическую интерпретацию двойного отношения четырех различных элементов a, b, c, $d \in \mathbb{C}$ с помощью отношений CA/CB, DA/DB и величин углов $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$, $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})$. Здесь A, B, C, D обозначают точки с аффиксами a, b, c, d.

b) Покажите, что $[a, b, c, d] \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда точки A, B, C, D лежат на одной прямой или окружности. Для проверки вычислите $[e^{it_1}, e^{it_2}, e^{it_3}, e^{it_4}]$, где $(t_1, t_2, t_3, t_4) \in \mathbb{R}^4$.

c) Как следует выбирать точки A, B, C, D для того, чтобы модуль $[a, b, c, d]$ был равен 1?

d) Для данных точек A, B, C постройте такую точку D, чтобы $[a, b, c, d] = -1$, и проверьте, что инверсия с центром в A преобразует точки B, C, D в точки B', C', D', такие, что B' является серединой отрезка $[C'D']$.

30. (Формула Лагерра.) Пусть D_1, D_2 — прямые евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ с уравнениями $y = m_1 x$, $y = m_2 x$ и θ — угол между ними. Проверьте, что $[m_1, m_2, i, -i] = e^{-i\theta}$. Получите отсюда *интерпретацию угла в терминах двойного отношения прямых*, используя инъективное отображение $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{C}^2$.

31. Гомографии прямой $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Ниже $\mathbb{C}$ отождествляется с евклидовой плоскостью $\mathbb{R}^2$.

a) Проверьте, что гомографии $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ представляются в виде $\varphi\colon z \longmapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$, где $ad - bc \neq 0$ и в случае $c \neq 0$ приняты соглашения $\varphi(\infty) = a/c$, $\varphi(-d/c) = \infty$.

b) Проверьте, что гомографии $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ разлагаются в произведение трансляций, преобразований прямого подобия и (при $c \neq 0$) гомографии $z \longmapsto 1/z$. Выведите отсюда, что они являются конформными преобразованиями евклидовой плоскости (т. е. сохраняют ориентированные углы между любыми кривыми) и переводят любую прямую или окружность снова в прямую или окружность.

c) Обратно, пусть f — биекция $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, преобразующая каждую прямую или окружность в прямую или окружность. Используя композицию f с гомографией, покажите, что дело сводится к случаю $f(\infty) = \infty$, и выведите отсюда, что f — гомография или *антигомография* (биекция вида $z \longmapsto (a\bar{z} + b)/(c\bar{z} + d)$). (Воспользуйтесь упр. III. 18.)

32. a) Покажите, что каждая гомография φ прямой $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ допускает по меньшей мере одну неподвижную точку.

b) Покажите, что если ∞ — неподвижная точка, то φ имеет вид $z \longmapsto az + b$ $(a \neq 0)$.

c) Покажите, что в случае двух неподвижных точек $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ гомография φ может быть задана соотношением вида $(\varphi(z) - \beta)/(\varphi(z) - \alpha) = k(z - \beta)/(z - \alpha)$, где $k \in \mathbb{C}^*$.

d) Покажите, что с случае единственной неподвижной точки $\alpha \in \mathbb{C}$ гомографию φ можно определить соотношением вида $(\varphi(z) - \alpha)^{-1} = (z - \alpha)^{-1} + h$, где $h \in \mathbb{C}$ (ср. с упр. 15).

33. Определите все инволютивные гомографии $\mathbb{C}$.

34. Отождествим евклидову плоскость $\mathbb{R}^2$ с $\mathbb{C}$ и обозначим через D прямую с уравнением $y = 0$ (действительную ось).

a) Покажите, что гомографии D отождествляются с гомографиями $\mathbb{C}$ вида $z \longmapsto (az + b)/(cz + d)$ с действительными a, b, c, d.

b) Пусть φ — гомография указанного вида без действительной неподвижной точки. Покажите, что тогда φ допускает пару комплексно сопряженных неподвижных точек α, β и ее ограничение на D можно задать геометрически условием вида $(\widehat{AM, AM'}) = \theta$, где A, M, M' — точки с аффиксами α, z, $\varphi(z)$, а θ — заданный угол между прямыми. Как выбрать θ, чтобы гомография φ была *инволютивной*?

35. (Двойное отношение четырех точек окружности.) Пусть $\mathcal{P}$ — евклидова плоскость, отождествленная с $\mathbb{C}$ выбором ортонормированного репера $\mathcal{R}$.

a) Покажите, что замена репера сохраняет или заменяет на комплексно сопряженное двойное отношение аффиксов четверки точек в зависимости от того, имеет ли новый репер ту же ориентацию, что и исходный, или нет. Покажите, что, с другой стороны, инверсия изменяет двойное отношение на его комплексно сопряженное.

b) Покажите, что двойное отношение аффиксов четырех точек A, B, C, D, лежащих на одной окружности Γ, не зависит от выбора репера $\mathcal{R}$ (см. упр. 29) и равно двойному отношению прямых (IA), (IB), (IC), (ID), соединяющих эти точки с произвольной точкой I окружности Γ (примените инверсию с полюсом I). Обозначив это двойное отношение через $[A, B, C, D]$, покажите, наконец, что его абсолютная величина равна $\frac{CA}{CB}\cdot\frac{DB}{DA}$. Получите отсюда геометрическое доказательство того, что двойное отношение четырех コцикличных точек сохраняется по абсолютной величине при преобразованиях инверсии. (Если j — инверсия с полюсом I и степенью k и A', B' — образы точек A, B, то можно показать, что $A'B' = \frac{|k|\,AB}{IA\cdot IB}$.)

36. Пусть A, B — две точки на полуокружности с диаметром $[PQ]$ и A', B' — их ортогональные проекции на прямую (PQ). Покажите, что $[A, B, P, Q]^2 = [A', B', P, Q]$.

37. (Гармонические гомологии, сохраняющие квадрику.) Невырожденная квадрика Q проективного пространства $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ определена однородным уравнением вида $q(x_1, \ldots, x_{n+1}) = 0$, где q — невырожденная неопределенная квадратичная форма. Каждой точке $S = p(s)$ пространства $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ ставится в соответствие гиперплоскость H_S, называемая полярной гиперплоскостью точки S, задаваемая уравнением $B(x, s) = 0$, где B — билинейная симметричная форма, соответствующая q.

Покажите, что точка, гармонически сопряженная с S относительно точек пересечения с Q секущей, проведенной через S, лежит в H_S. (Воспользуйтесь параметрическими уравнениями секущей.)

Выведите отсюда, что гармоническая гомология с центром S и гиперплоскостью H_S сохраняет Q.

38. (Коники. Двойное отношение четырех точек.) Квадрика в $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ называется коникой.

a) Пусть Γ — коника в $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$; покажите, что существует система однородных координат, в которой Γ имеет уравнение $x^2 + y^2 = z^2$. Выведите отсюда, что любые две коники получаются друг из друга с помощью гомографии.

b) Пусть A, B, C, D — четыре точки в $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ и $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Покажите, что множество точек M, таких, что двойное отношение прямых MA, MB, MC, MD равно k, является коникой, проходящей через точки A, B, C, D. Каково уравнение такой коники, если принять четверку (A, B, C, D) за проективный репер?

c) Обратно, пусть A, B, C, D — четыре точки коники Γ. Покажите, что если M — точка Γ, то двойное отношение прямых MA, MB, MC, MD не зависит от M (можно с помощью гомографии свести дело к случаю окружности, разобранному в упр. 35, или действовать прямым образом).

39. Пусть A, B — две точки проективной плоскости. Биекция h пучка прямых с центром A на пучок прямых с центром B называется гомографической, если существует прямая Δ_0, не проходящая ни через A, ни через B и такая, что точки $M = \Delta \cap \Delta_0$ и $M' = h(\Delta) \cap \Delta_0$ находятся в гомографическом соответствии.

a) Покажите, что в этом случае то же имеет место и для любой прямой Δ_0', не проходящей ни через A, ни через B.

b) В случае когда основное поле есть $\mathbb{R}$, покажите, что геометрическое место точек пересечения прямых Δ и $h(\Delta)$ есть прямая или коника, смотря по тому, является ли прямая (AB) своим собственным образом или нет. (Можно использовать однородные координаты, в которых $A = (1, 0, 0)$ и $B = (0, 0, 1)$.)

ГЛАВА V

1. Пусть $\mathscr{P}$ — плоскость аффинного типа и $\mathscr{D}$, $\mathscr{D}'$ — такие две ее прямые, что $\mathscr{P} = \mathscr{D} \cup \mathscr{D}'$. Обозначим через A, B две произвольные точки $\mathscr{D}$ и через A', B' две произвольные точки $\mathscr{D}'$; покажите, что $(AA') \parallel (BB')$, и выведите отсюда, что $\mathscr{P}$ сводится к четырем точкам A, B, A', B'.

2. Пусть в плоскости $\mathscr{P}$ аффинного типа две прямые $\mathscr{D}$, $\mathscr{D}'$ пересекаются в точке O. Покажите, что в $\mathscr{P}$ существует точка, не лежащая ни на $\mathscr{D}$, ни на $\mathscr{D}'$ (постройте параллелограмм $(OACB)$, такой, что $A \in \mathscr{D}$ и $B \in \mathscr{D}'$).

3. Пусть $\mathscr{E}$ — пространство аффинного типа (см. § 12), не сводящееся к прямой. Дилатацией пространства $\mathscr{E}$ называется любая его биекция f на себя, такая, что для любой пары (A, B) точек $\mathscr{E}$ имеем $(f(A)f(B)) \parallel (AB)$.

a) Покажите, что сохраняют силу результаты § V. 2.

b) Определим трансляции и гомотетии как в § V. 2; обозначим через h, h' две гомотетии с различными центрами O, O' и через A — точку $\mathscr{E}$, не лежащую на прямой (OO'). Полагая $B = h' \circ h(A)$, покажите, что $h' \circ h$ является гомотетией или трансляцией в зависимости от того, пересекает ли прямая (AB) прямую (OO') или ей параллельна.

c) Предположим, что для любой тройки (O, A, A') различных коллинеарных точек существует гомотетия h с центром O, такая, что $h(A) = A'$. Покажите, что для любой пары (A, B) точек $\mathscr{E}$ существует такая трансляция τ, что $\tau(A) = B$ (примените пункт b) для построения τ как произведения двух гомотетий).

d) Предположив, что $\mathscr{E}$ удовлетворяет аксиоме Дезарга (D), покажите, что гипотеза пункта c) верна (это легкое обобщение теоремы V. 6.3).

С помощью c) выведите отсюда, что $\mathscr{E}$ удовлетворяет также аксиоме (d) (см. § V. 3), и покажите, что $\mathscr{E}$ допускает аффинную структуру (расширьте теорию, развитую в § V. 4, V. 5 и V. 7).

Замечание. В случае плоскости таким путем получается новое доказательство того, что из (D) следует (d).

4. Пусть $\mathscr{P}$ — такая плоскость аффинного типа, что каждой паре (A, B) точек $\mathscr{P}$ можно поставить в соответствие точку $m(A, B)$ на (AB), называемую серединой отрезка $[AB]$, таким образом, что:

i) $m(A, B) = m(B, A)$;

ii) $m(A, A) = A$;

iii) если A', B' — образы точек A, B при каком-либо проектировании $p_{\mathscr{D}}^{\delta}$ (см. § V. 5), то $m(A', B')$ является образом $m(A, B)$.

a) Покажите, что диагонали любого параллелограмма $(ABCD)$ пересекаются в их серединах (покажите, что предположение $m(A, C) \neq m(B, D)$ ведет к тому, что прямая, соединяющая эти точки, одновременно должна быть параллельна (AB) и (AD)).

b) Покажите, что в $\mathscr{P}$ выполняется малая аксиома Дезарга (d), и потому $\mathscr{P}$ — плоскость трансляций.

ГЛАВА VI

Абсолютная геометрия

В упр. 1—9 $\mathscr{P}$ обозначает метрическую плоскость (см. § 2).

1. Пусть A, B — две различные точки $\mathscr{P}$ и Δ — медиатриса $[AB]$. Обозначим через $\mathscr{P}_A$, $\mathscr{P}_B$ полуплоскости, ограниченные Δ и соответственно содержащие A, B. Покажите, что если $M \in \mathscr{P}_A$, то $MA < MB$ (постройте точку пересечения $[MB]$ с Δ и примените неравенство треугольника). Выведите отсюда, что

$$\mathscr{P}_A = \{M \in \mathscr{P} \mid MA < MB\}, \quad \mathscr{P}_B = \{M \in \mathscr{P} \mid MA > MB\}.$$

2. Установите три «признака равенства треугольников» (случай равенства трех пар соответственных сторон, случай равных углов, заключенных между парами равных сторон, и случай пары равных сторон с двумя парами равных прилежащих углов).

3. Пусть r — вращение с центром O и σ — симметрия относительно оси, проходящей через O. Покажите, что $\sigma \circ r \circ \sigma^{-1} = r^{-1}$. (Воспользуйтесь разложением r в произведение симметрий.) Получите отсюда другое доказательство коммутативности группы вращений с центром O.

4. Говорят, что множество X в $\mathcal{P}$ *выпукло*, если любой отрезок $[AB]$, соединяющий две точки A, B из X, весь содержится в X.

a) Покажите, что всякий угловой сектор выпуклый.

b) Покажите, что любой круг выпуклый (открытый круг с центром O и радиусом R есть множество точек $\{M \in \mathcal{P} \mid OM < R\}$.

5. Пусть $\mathcal{D}$ — множество полупрямых с началом O. Покажите что на $\mathcal{D}$ можно ввести расстояние δ, полагая $\delta(Ox, Oy) = \widehat{xOy}$[1]). Покажите, что $\mathcal{D}$, снабженное таким расстоянием изометрично единичной окружности U евклидовой плоскости. Выведите отсюда, что $\mathcal{D}$ компактно и связно.

6. Связность окружности.

a) Пусть A — фиксированная точка и Ou — переменная полупрямая с началом $O \neq A$. Пусть $\alpha = \widehat{AOu}$. Покажите, что при $\alpha \in [0, \pi/2]$ (см. примечание к предыдущей задаче) расстояние от A до прямой (Ou) есть возрастающая функция $\varphi(\alpha)$ угла α, стремящаяся к нулю вместе с α.

b) На каждой полупрямой Ox с началом O отметим точку $f(Ox)$ ее пересечения с заданной окружностью Γ с центром O. При фиксированной точке $A = f(Ox)$ пусть $M = f(Oy)$ — другая точка на Γ. Полагая $\widehat{xOy} = 2\alpha$ и применяя обозначения п. a), проверьте, что $d(A, M) = 2\varphi(\alpha)$.

c) Пусть $\mathcal{D}$ — множество полупрямых с началом O, снабженное метрикой из упр. 5. Покажите, что f есть непрерывное отображение $\mathcal{D}$ на Γ и что Γ связно. Покажите также, что любая дуга окружности связна.

7. Пусть $\mathcal{P}$ — метрическая плоскость, не удовлетворяющая аксиоме Евклида о параллельных, $\mathcal{D}$ — прямая в $\mathcal{P}$ и $M \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{D}$.

a) Покажите, что объединение полупрямых с началом в M, пересекающих $\mathcal{D}$, является *открытым* угловым сектором и делится пополам перпендикуляром, проведенным через M к $\mathcal{D}$; его угол раствора обозначают 2α (α называется углом параллелизма M относительно $\mathcal{D}$).

b) Покажите, что α зависит только от расстояния d от точки M до прямой $\mathcal{D}$ и является убывающей функцией d (функция $\alpha(d)$ называется функцией Лобачевского; можно доказать (см. [BO—SZ]), что она имеет вид $\alpha = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} e^{-d/k}$, где k — константа; мы проверяем это на моделях Пуанкаре и Бельтрами).

8. Пусть (ABC) — треугольник в метрической плоскости $\mathcal{P}$. Обозначим через B' (соотв. C') точку, симметричную с C (соотв. B) относительно середины $[AB]$ (соотв. $[AC]$), и пусть S — сумма углов треугольника (ABC).

[1]) Для упрощения мы применяем в этих упражнениях обычное отождествление углов с их мерой в радианах.

a) Покажите, что $S = \widehat{B'AC'}$, и выведите из этого, что S — развернутый угол, если $\mathscr{P}$ удовлетворяет аксиоме E_1 § 9.

b) Если $\mathscr{P}$ не удовлетворяет аксиоме E_1, обозначим через α угол параллелизма A относительно прямой (BC). Покажите, что тогда $S \geqslant 2\alpha$.

9. Пусть $\mathscr{P}$ — метрическая плоскость, не удовлетворяющая аксиоме Евклида. Назовем *дефектом* треугольника $T = (ABC)$ число $\delta(T) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$, где α, β, γ — углы треугольника.

Покажите, что если D — многоугольная область, разбитая на конечное число треугольников, то сумма дефектов этих треугольников не зависит от выбранного способа разбиения (рассмотрите сначала случай, когда D — треугольная область).

Обозначим эту сумму через $\delta(D)$; теория меры показывает, что площадь многоугольной области D имеет вид $k\delta(D)$, где $k = \text{const}$ (площадь подчинена условию инвариантности при изометриях).

Приложения. a) Если $\mathscr{P}$ — модель Пуанкаре, покажите, что $k = 1$ (примените упр. 14).

b) Используя упр. 16, покажите, что в гиперболической плоскости существуют четырехугольники, площадь которых больше площади любого треугольника: такой четырехугольник не может быть заключен в треугольной области.

Модель Пуанкаре (см. § 12)

В упр. 10—14 через $\mathscr{P}$ обозначена полуплоскость Пуанкаре, снабженная гиперболической метрикой.

10. Пусть $\mathscr{D}$, $\mathscr{D}'$ — пара гиперболических прямых в $\mathscr{P}$, представленных евклидовыми полуокружностями, не пересекающимися и не касающимися.

a) Покажите, что существует единственная гиперболическая прямая Δ, перпендикулярная одновременно к $\mathscr{D}$ и $\mathscr{D}'$.

b) Покажите, что существуют две осевые симметрии, переводящие $\mathscr{D}$ и $\mathscr{D}'$ друг в друга.

c) Пусть A — точка $\mathscr{P}$, не принадлежащая ни $\mathscr{D}$, ни $\mathscr{D}'$, ни их общему перпендикуляру, и пусть B, C — точки, симметричные A относительно прямых $\mathscr{D}$, $\mathscr{D}'$. Покажите, что точки A, B, C не лежат на одной прямой и через них не проходит никакая гиперболическая окружность. (Отсюда выводится, что аксиома Евклида равносильна утверждению: через любые три неколлинеарные точки проходит окружность.)

d) Пусть гиперболические прямые $\mathscr{D}$, $\mathscr{D}'$ в $\mathscr{P}$ представлены касающимися евклидовыми полуокружностями. Покажите, что существует единственная осевая симметрия, переставляющая $\mathscr{D}$ и $\mathscr{D}'$, и у $\mathscr{D}$, $\mathscr{D}'$ нет общего перпендикуляра.

11. Пусть $\mathscr{D}$, $\mathscr{D}'$ — две гиперболические прямые, представленные евклидовыми полуокружностями с диаметрами $[AB]$, $[A'B']$ соответственно.

a) Покажите, что $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}'$ пересекаются тогда и только тогда, когда отрезки $[AB]$ и $[A'B']$ имеют хотя бы одну общую внутреннюю точку.

b) Предположим, что $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}'$ пересекаются в точке I и обозначения выбраны так, что точки B и A' принадлежат отрезку $[AB']$. Покажите, что через точку $\mathcal{P}$, внутреннюю по отношению к евклидову диску с диаметром $[BA']$, не проходит никакая гиперболическая прямая, пересекающая обе гиперболические полупрямые $(IB($ и $(IA'($. (Отсюда выводится, что аксиома Евклида равносильна утверждению: через любую точку углового сектора проходит хотя бы одна прямая, пересекающая стороны этого сектора.)

12. a) Пусть M — точка $\mathcal{P}$ с кординатами a, b и $\mathcal{D}$ — гиперболическая прямая $(x=0,\ y>0)$ в $\mathcal{P}$. Найдите проходящую через M прямую, гиперболически ортогональную к $\mathcal{D}$, и проверьте, что расстояние от M до $\mathcal{D}$ равно $d = \ln((a^2+b^2)^{1/2}+a)-\ln b$. (Примените упр. IV. 36.)

b) Покажите, что пересекающие $\mathcal{D}$ полупрямые с началом в M — это те прямые, которые принадлежат открытому угловому сектору, ограниченному полупрямой Mx, лежащей на прямой $x=a$, и дугой евклидовой окружности, касательной к Oy в точке O. Выведите отсюда, что угол параллелизма α в точке M относительно прямой $\mathcal{D}$ равен $\alpha = 2\operatorname{arc\,tg} e^{-d}$.

13. Предположим, что любая метрическая плоскость $\mathcal{P}$, не удовлетворяющая аксиоме Евклида, допускает биекцию f на полуплоскость Пуанкаре $\mathcal{P}_0$, удовлетворяющую условиям

$$(\forall (A, B) \in \mathcal{P}^2) \qquad d\,[f(A), f(B)] = \frac{1}{R}\, d(A, B), \quad \text{где} \quad R = \text{const}.$$

Покажите, что отображение f конформно (т. е. соответственные углы имеют одинаковую радианную меру). Выведите из этого выражение $\alpha = 2\operatorname{arc\,tg} e^{-d/R}$ для функции Лобачевского (см. упр. 7).

14. В полуплоскости Пуанкаре $\mathcal{P}$ три-асимптотическим треугольником называют фигуру, образованную тремя гиперболическими прямыми, представленными тремя ортогональными к $x'x$ попарно касающимися полуокружностями или полупрямыми.

a) Покажите, что два любых три-асимптотических треугольника изометричны (постройте гомографию, переводящую одну тройку точек $x'x$ в другую).

b) Покажите, что площадь три-асимптотического треугольника равна π (она выражается несобственным интегралом $\iint \frac{dx\,dy}{y^2}$, распространенным на внутренность треугольника). (Отсюда можно получить, что площадь треугольника с углами α, β, γ равна $\pi-(\alpha+\beta+\gamma)$.)

Другая конформная модель гиперболической геометрии

15. Каждой точке M полуплоскости Пуанкаре $\mathscr{P}$ с аффиксом $z = x + iy$ $(y > 0)$ поставим в соответствие точку $f(M)$ в $\mathbb{R}^2$ с аффиксом $Z = (z - i)/(z + i)$.

a) Покажите, что f является биекцией $\mathscr{P}$ на единичный круг $\mathscr{D}$, определенный неравенством $|Z| < 1$, и что образами гиперболических прямых из $\mathscr{P}$ являются пересечения с $\mathscr{D}$ прямых, проходящих через O, и окружностей, ортогональных единичной окружности U (определяемой условием $|Z| = 1$).

b) С помощью этой биекции перенесите на $\mathscr{D}$ гиперболическую метрику, определенную на $\mathscr{P}$. Проверьте, что расстояние между двумя точками A, B в $\mathscr{D}$ равно $d(A, B) = \ln[A, B, P, Q]$, где P, Q — точки пересечения с U окружности или прямой, ортогональной U и проходящей через A, B (см. упр. IV. 35).

c) Покажите, что евклидовы вращения вокруг центра O сохраняют это расстояние и что гиперболический угол между двумя диаметрами $\mathscr{D}$ равен евклидову углу между ними (вспомните, что f конформно). В последующих упражнениях круг $\mathscr{D}$, снабженный расстоянием, определенным в b), будет называться «гиперболическим кругом».

16. Пусть γ — гиперболическая прямая, представленная в гиперболическом круге $\mathscr{D}$ дугой окружности радиуса r с центром I, ортогональной к U (см. упр. 15), и пусть γ_1, γ_2 — образы γ при вращениях вокруг O на углы $\pm 2\pi/3$.

a) Какому условию должно удовлетворять r для того, чтобы γ пересекалась с γ_1 и γ_2? (Напомним, что $OI^2 = r^2 + 1$.) Положим тогда $A = \gamma \cap \gamma_1$, $B = \gamma \cap \gamma_2$, $C = \gamma_1 \cap \gamma_2$; проверьте, что углы гиперболического треугольника (ABC) со сторонами γ, γ_1, γ_2 все равны α, причем $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2r}(r^2 + 1)^{1/2}$. (Можно вычислить синус угла $\widehat{OAI}$ в евклидовом треугольнике (OAI).)

Выведите отсюда, что для любого действительного $\alpha \in]0, \pi/3[$ можно построить гиперболический треугольник, все углы которого равны α; покажите, что существует четырехугольник (полученный объединением двух треугольников) с суммой углов $< \pi$.

Модель Бельтрами

17. Обозначим через j инверсию $\mathbb{R}^3$ с полюсом $S(0, 0, -1)$ и степенью 2 и через p ортогональную проекцию $(x, y, z) \longmapsto (x, y, 0)$. Пусть, наконец, $\mathscr{D}$ обозначает единичный круг в плоскости $z = 0$, снабженный гиперболической метрикой d (из упр. 15).

a) Покажите, что ограничение f отображения $p \circ j$ на $\mathscr{D}$ является биекцией, и вычислите координаты точки $f(M)$ как функции от координат M.

b) Покажите, что образ гиперболической прямой в $\mathscr{D}$ при отображении f есть интервал евклидовой прямой.

c) Любой паре (A, B) точек $\mathscr{D}$ поставлено в соответствие число $\delta(A, B) = d[f^{-1}(A), f^{-1}(B)]$, где d обозначает гиперболическое расстояние. Покажите, что $\delta(A, B) = {}^1/_2 \ln[A, B, P, Q]$, где P, Q — точки пересечения евклидовой прямой (AB) с единичной окружностью U. (Обозначим $C = f^{-1}(A)$, $D = f^{-1}(B)$; упр. IV. 36 покажет, что $[A, B, P, Q] = [j(C), j(D), P, Q]^2$, и останется применить результат упр. IV. 35, b).)

Круг $\mathscr{D}$, *снабженный* метрикой δ, называется моделью Бельтрами гиперболической плоскости.

d) Покажите, что расстояние между двумя точками A, B в $\mathscr{D}$ задается в модели Бельтрами формулой

$$\operatorname{ch} \delta(A, B) = \frac{1 - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{(1 - \overrightarrow{OA}^2)^{1/2} (1 - \overrightarrow{OB}^2)^{1/2}},$$

где $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ обозначает евклидово скалярное произведение (воспользуйтесь параметризацией прямой (AB)).

e) Покажите, что осевые симметрии круга Бельтрами представляются гармоническими гомологиями проективного пополнения $\mathbb{R}^2$ с центром вне $\mathscr{D}$ и с осью, служащей полярой центра относительно окружности U, рассматриваемой как коническое сечение (см. упр. IV. 37).

18. Теорема Брианшона.

a) Покажите, что в любой метрической плоскости $\mathscr{P}$ биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке.

b) Дайте истолкование этого результата в модели Бельтрами (выберите точку O в круге Бельтрами и точки P, Q на единичной окружности U и покажите, что биссектриса внутреннего угла между полупрямыми $(OP($, $(OQ($ представляется прямой, соединяющей точку O с точкой пересечения касательных к U в точках P, Q).

c) Выведите из этого, что диагонали шестиугольника, стороны которого касаются одной и той же коники на проективной плоскости, пересекаются в одной точке (можно предположить, что коника определяется однородным уравнением вида $x^2 + y^2 = z^2$, и отождествить ее с окружностью, см. упр. IV. 38).

19. Теорема Паскаля. Из предыдущего результата выведите по принципу двойственности теорему Паскаля (обобщающую теорему Паппа в $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$): если A, B, C, A', B', C' — шесть точек на одной и той же конике, то точки $P = (BC') \cap (CB')$, $Q = (CA') \cap (AC')$, $R = (AB') \cap (BA')$ лежат на одной прямой.

20. Пусть $\mathscr{D}$ — круг Бельтрами.

a) Покажите, что гиперболический угол между двумя диаметрами $\mathscr{D}$ имеет ту же меру, что и евклидов угол между ними.

b) Пусть P, Q — две точки на единичной окружности U и Δ — гиперболическая прямая, представленная открытым интервалом $]P, Q[$. Выразите гиперболическое расстояние d от O до Δ с помощью евклидова расстояния r; проверьте, что угол параллелизма Δ относительно точки O есть

$$\alpha = {}^1\!/_2\widehat{POQ}, \qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = e^{-d}.$$

c) Покажите, что это общая формула в $\mathscr{D}$.

21. Гиперболическая тригонометрия. Ставится задача доказать, что углы α, β, γ и гиперболические длины сторон a, b, c треугольника (ABC) в круге Бельтрами $\mathscr{D}$ связаны соотношением

$$\operatorname{ch} a = \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c - \operatorname{sh} b \operatorname{sh} c \cos\alpha \tag{1}$$

и ему аналогичными.

a) Покажите, что можно свести дело к случаю, когда точка A совпадает с центром $\mathscr{D}$.

b) Выразите в этом случае $\operatorname{ch} a$, $\operatorname{ch} b$ и $\operatorname{ch} c$ через $u = \|\overrightarrow{AB}\|$, $v = \|\overrightarrow{AC}\|$ и $w = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ (примените формулу (1) из упр. 17).

c) Получите отсюда соотношения

$$\frac{\operatorname{sh} a}{\sin\alpha} = \frac{\operatorname{sh} b}{\sin\beta} = \frac{\operatorname{sh} c}{\sin\gamma}. \tag{2}$$

22. Обобщим модель Бельтрами, заменив единичный круг $\mathscr{D}$ кругом $\mathscr{D}_R$, определенным неравенством $x^2 + y^2 < R^2$. Расстояние между точками A, B зададим соотношением

$$\operatorname{ch}\left(\frac{\delta(A, B)}{R}\right) = \frac{R^2 - \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{(R^2 - \overrightarrow{OA}^2)^{1/2}(R^2 - \overrightarrow{OB}^2)^{1/2}}.$$

a) Проверьте, что в полученной «метрической плоскости» функция Лобачевского выражается как $\alpha = 2 \operatorname{arc\,tg} e^{-d/R}$.

b) Как изменятся формулы (1) и (2) из упр. 21?

c) Покажите, что при $R \to \infty$ расстояние $\delta(A, B)$ между двумя фиксированными точками имеет пределом евклидово расстояние между ними. (Евклидова геометрия становится, таким образом, предельным случаем гиперболической геометрии.)

23. Обозначим через K такое подполе в $\mathbb{R}$, что для любого $x \in K$ действительное число $|x|^{1/2}$ принадлежит K. Покажите, что $K \times K$, снабженное канонической евклидовой структурой, удовлетворяет аксиомам, получаемым из аксиом метрической плоскости (аксиом расстояния, § III. 2) при замене в них $\mathbb{R}_+$ на K_+. Сохраняется ли такое положение для гиперболической геометрии? (Примените формулы гиперболической тригонометрии.)

24. Пусть $\mathscr{P}$ — евклидова плоскость, т. е. «метрическая плоскость», в которой выполняется аксиома Евклида E_1 (см. конец § VI. 9).

a) Проверьте, что $\mathscr{P}$ является упорядоченной плоскостью аффинного типа (см. § V. 9).

b) Покажите, что произведение двух центральных симметрий является трансляцией (см. § V. 2). Выведите отсюда, что $\mathscr{P}$ есть плоскость трансляций (см. определение V. 3.1).

c) Пусть p — проектирование в направлении δ ориентированной прямой $\mathscr{D}$ на другую ориентированную прямую $\mathscr{D}'$. Покажите, что p — монотонное отображение и что расстояние $d(p(A), p(B))$ зависит только от расстояния $d(A, B)$ (где A, $B \in \mathscr{D}$). Выведите отсюда, что p — аффинное отображение (идею можно почерпнуть из исследования, проведенного в § V. 9, а затем применить теорему I. 7.8).

d) Покажите, что $\mathscr{P}$ есть аффинная плоскость над полем $\mathbb{R}$ (теорема Фалеса, установленная в c), позволяет определить произведение вектора на действительное число).

25. Пусть $\mathscr{P}$ — евклидова плоскость.

a) Установите «признаки подобия треугольников», соответствующие их «признакам равенства» (см. упр. VI. 2).

b) Сравните различные доказательства, которые можно привести для теоремы Пифагора. (Применение ортогонального проектирования, скалярного умножения, признаков подобия прямоугольных треугольников.)

ЛИТЕРАТУРА [1])

[AR] Artin E. Algèbre géométrique. Cahiers scientifiques, fasc. XXVIII. — Paris: Gauthier-Villars, 1972. [Имеется перевод: Артин Э. Геометрическая алгебра. — М.: Мир, 1976.]

[AZ] Artzy R. Linear geometry. — Addison Wesley, 1965.

[BA] Bonola R. Non euclidean geometry. — New York: Dover publications, 1955.

[BE] Berger M. Géométrie. 5 vol. — Paris: CEDIC, Fernand Nathan, 1977. [Имеется перевод: Берже М. Геометрия. Т. 1, 2. — М.: Мир, 1984.]

[BI—ML] Birkhoff G., Mac Lane S., Algèbre. 2 vol. Cahiers scientifiques, fasc. XXXV et XXXVI. — Paris, Gauthier Villars.

[BK—SZ] Borsuk K., Szmielew W. Foundations of geometry. — Amsterdam; North Holland Publishing company, 1960.

[BO 1] Bourbaki N. Algèbre (Livre II), Chapitre I, V, VI. Actualités scientifiques. — Paris: Hermann. [Имеется перевод: Бурбаки Н. Алгебра — М.: Физматгиз, 1962 (гл. I—III), Наука, 1965 (гл. IV—VI).]

[BO 2] Bourbaki N. Topologie générale (Livre III), Chapitres III à VI. Actualités scientifiques. — Paris: Hermann. [Имеется перевод: Бурбаки Н. Общая топология — М.: Физматгиз, 1958. (гл. I—III), 1959, гл. IV—VII.]

[BR] Brisac R. Exposé élémentaire des principes de la géométrie euclidienne. — Paris: Gauthier-Villars, 1955.

[BU] Buseman H. The geometry of geodesics. — New York: Academic Press, 1955. [Имеется перевод: Буземан Г. Геометрия геодезических. — М.: Физматгиз, 1962.]

[BU—KE] Buseman H., Kelly P. J. Projective geodesics and projective metrics. — New York: Academic Press, 1953. [Имеется перевод: Буземан Г., Келли П. Проективная геометрия и проективные метрики. — М.: ИЛ, 1957.]

[CA] Carrega J. C. Théorie des corps. La règle et le compas. — Actualités scientifiques, fasc. 1402. — Paris: Hermann, 1981.

---

[1]) Чтобы не дезориентировать читателя, мы даем лишь ограниченную библиографию, отдавая предпочтение литературе на французском языке. Более полная библиография содержится в [EV], [PI], [ST].

[CH] Choquet G. L'enseignement de la géométrie. — Paris: Hermann, 1964. [Имеется перевод: Шоке Г. Геометрия. — М.: Мир, 1970.]

[CO] Coolidge J. L. The mathematics of great amateurs. — Dover publications.

[CX 1] Coxeter H. S. M. Non euclidean geometry. — Toronto: University of Toronto Press, 1947.

[SX 2] Coxeter N. S. M. Introduction to geometry. — New York: John Wiley and Sons, 1969. [Имеется перевод: Кокстер Г. С. М. Введение в геометрию. — М.: Наука, 1966.]

[DE] Deheuvels R. Formes quadratiques et groupes classiques. — Paris: Presses Universitares de France, 1982.

[DI] Dieudonné J. Algèbre linéaire et géométrie élémentaire. — Paris: Hermann, 1968. [Имеется перевод: Дьедонне Ж. Линейная алгебра и элементарная геометрия. — М.: Наука, 1972.]

[DK] Dembowski P. Finite geometries. — Berlin: Springer, 1968.

[DO] Doneddu A. Géométrie euclidienne plane. — Paris: Dunod, 1965.

[EF] Ефимов Н. В. Высшая геометрия. — М.: Наука, 1978.

[EU] Les oeuvres d'Euclide (avec introduction de J. Itard). — Paris: Librairie scientifique et technique Albert Blanchard, 1966 [1]).

[EV] Eves H. A survey of geometry. — Boston: Allyn and Bacon, 1972.

[FR] Frenkel J. Géométrie pour l'élève professeur. Actualités scientifiques, fasc. 1362. — Paris: Hermann, 1972.

[GA] Garner L. E. An outline of projective geometry. — New York: Elsevier North Holland, 1981.

[HI—RO] Hilbert D. Les fondements de la géométrie. Edition critique préparée par P. Rossier. — Paris: Dunod, 1971 [2]).

[KE] Kerekjarto B. Les fondements de la géométrie, 2 vol. — Budapest: Academiai, 1955.

[LF 1] Lelong-Ferrand J. Géométrie différentielle. — Paris: Masson, 1963.

[LF 2] Lelong-Ferrand J. Notions mathématiques de base. — Paris: Armand Colin, 1964.

[LF—AR] Lelong-Ferrand J., Arnaudies J. M. Cours de mathématiques. 4 vol. — Paris: Dunod.

[LÜ] Lüneburg H. Translation planes. — Berlin: Springer, 1980.

[OS] Ostrom T. G. Finite translation planes. Lecture Notes № 158. — New York: Springer, 1970.

[1]) Евклид. Начала. Пер. с греч. и комментарии Д. Д. Мордухай-Болтовского при ред. участии М. Я. Выгодского и И. Н. Веселовского. — М.: ГТТИ, 1948—1950.

[2]) Гильберт Д. Основания геометрии. Пер. с нем. — М.: ГТТИ, 1948.

[PI] Pickert G. Projective Ebenen. — Berlin: Springer, 1955.
[PN] Pont J. C. L'aventure des parallèles. Histoire de la géométrie non euclidienne, précursours et attardés. — Bern, Frankfurt, New York: Peter Lang, 1986.
[PO] Погорелов А. В. Лекции по основаниям геометрии. — Харьков: Госуниверситет, 1964.
[RU] Russel B. An essay on the foundations of geometry. — New York: Dover publications, 1956.
[SP] Springer C. E. Geometry and analysis of projective spaces. — San-Francisco: W. H. Freeman, 1972.
[ST] Stevenson F. W. Projective planes. — San Francisco: W. H. Freeman, 1972.
[TI] Tisseron C. Géométrie affine projective et euclidienne. — Paris: Hermann, 1983.
[VE—YO] Veblen O., Young J. W. Projective geometry. Vol. I. — Boston: Ginn, 1938; Vol. II. — New York: Blaisdell, 1946.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Автоморфизм векторного пространства (automorphisme d'espace vectoriel) 54
— метрической плоскости (—du plan métrique) 225
— тела (—d'un corps) 43
Аксиома *Архимеда* (Axiome d'Archimède) 22
— верхней грани (—de la borne supérieure) 28
— выбора (—du choix) 77
— *Дезарга* аффинная малая (petit axiome de Desargues affine)
— — — большая (grand — — — —) 190
— — проективная (axiome de Desargues projectif) 199
— *Евклида* (—d'Euclide) 255, 261
— — сильная (— — fort) 173
— *Паппа* аффинная (axiome de Pappus affine) 200
— — проективная (— — — projectif) 201
— *Паша* (—de Pasch) 202, 225
— *Цермело* (— — Zermelo) 77
— *Цорна* (— — Zorn) 77
Аксиомы инцидентности (axiomes d'incidence) 224
— порядка (— d'ordre) 224
— расстояния (— des distances) 225
— симметрии (— de pliage) 225
Аннулятор (orthogonal) 64
Антиавтоморфизм тела (antiautomorphisme d'un corps) 43
Антиизоморфизм тел (antiisomorphisme de corps) 43
Базис (base) 47
— дуальный (base duale) 66
Барицентр (barycentre) 92

Вектор (vecteur) 46
Вращение (rotation) 233

Гармоническая четверка точек (division harmonique) 142
— — прямых (faisceau harmonique des droites) 147
— — гиперплоскостей (— — d'hyperplans) 147, 289
Гармонически сопряженная (conjugué harmonique) 142
Гиперплоскость аффинная (hyperplan affine) 89
— бесконечно удаленная (— à l'infini) 134
— векторная (— vectoriel) 62
— проективная (— projectif) 124
Гомография (homographie) 130
Гомология (homologie) 130
— гармоническая (— harmonique) 130
Гомоморфизм тела (homomorphisme de corp) 37
Гомотетия аффинная (homothétie affine) 54
— векторная (vectorielle) 103
Грань верхняя (borne supérieure) 14
— нижняя (— inférieure) 15
Группа архимедова (groupe archimédien) 22
— аффинная (affine) 102
— дилатаций (— des dilatations) 103
— изотропии (— d'isotropie) 82
— *линейная* (— linéaire) 54
— полуаффинная (—semi-affine) 102

— полулинейная (— semi-linéaire) 54
— преобразований (— de transformations) 81
— — транзитивная (— — — transitif) 82
— проективная (— projectif) 132
— упорядоченная (ordonné) 22

Действие группы (action d'un groupe) 81
Действительное число (nombre réel) 16
Десятичная дробь бесконечная (développement décimal illimité) 11
— единица *n*-го порядка (unité décimal du *n*-me ordre) 16
Десятичное приближение (valeur décimale approchée) 65
Десятичный знак *n*-го порядка (décimale d'ordre *n*) 11
Дилатация (dilatation) 103, 176
Дуальность (dualité) 63

Измерение величин (mesure des grandeurs) 27
— углов (— — angles) 242
Изоморфизм векторных пространств (isomorphisme d'espaces vectoriels) 54
— проективных пространств (—d'espaces projectifs) 54
— тел (— de corps) 37

Кватернионы (quaternions) 37
Коллинеация (collinéation) 165
Конфигурация Фано (configuration de Fano) 149, 172
Корреляция (corrélation) 170

Линейная комбинация векторов (combinaison linéaire des vecteurs) 47
Линейное аффинное многообразие (variété linéaire affine) 87
Линейные аффинные многообразия параллельные (variétés linéaires affines parallèles) 90

Мажоранта (majorant) 14
Матрица линейного отображения (matrice d'une application linéaire) 60
Модель *Бельтрами* (modèle de Beltrami) 298
— *Пуанкаре* (— — Poincaré) 265
Морфизм полупроективный (morphisme semi-projectif) 127
— проективный (— projectif) 127

Направление линейного аффинного многообразия (direction d'une variété linéaire affine) 87
Неравенство треугольника (inégalité triangulaire) 22, 249
Норма (norme) 79

Образ полулинейного отображения (image d'une application semi-linéaire) 55
Орбита (orbite) 82
Отношение ангармоническое (rapport anharmonique) 152
— двойное (birapport) 152
— — четырех точек на окружности (— de quatre points d'un circle) 292
— дуальности (dualité) 63
— ортогональности (relation d'orthogonalité) 72
Отображение аффинное (application affine) 97
— линейное (— linéaire) 53
— — транспонированное (transposée (d'une — —) 65
— полуаффинное (application semi-affine) 97
— полулинейное (— semi-linéaire) 54

Перспектива (perspective) 128, 136
Плоскость альтернативная (plan alternatif) 199
— архимедова (— archimédien) 205
— аффинная (— affine) 89

— аффинного типа (— de type affine) 172
— гиперболическая (— hyperbolique) 265
— дезаргова (arguésien) 190
— евклидова (—euclidien) 224
— метрическая (— métrique) 208
— *Муфанг* (—de Moufang) 199
— недезаргова (— non arguésien) 219
— *Паппа—Паскаля* (— de Pappus—Pascal) 200
— проективного типа (— de type projectif) 171
— трансляций (— de translation) 179
— упорядоченная (ordonné) 202
Подмножество свободное (partie libre) 47
— образующих (partie génératrice) 47
Подпространство аффинное (sous-espace affine) 87
— векторное (— vectoriel) 46
— дополнительное (— supplémentaire) 52, 275
— проективное (— projectif) 124
Поле архимедово (corps archimédien) 37
— упорядоченное (— ordonné) 34
— — неархимедово (— — non archimédien) 40
Пополнение проективное (complété projectif) 133
Порядок лексикографический (ordre lexicographique) 13
— линейный (— total) 12
Принцип двойственности (principe de dualité) 139
Продолжение векторное (prolongement vectoriel) 108
Проектирование аффинное (projection affine) 103
— векторное (— vectoriel) 5, 275
— центральное (— centrale) 121
Пространство аффинное (espace affine) 84
— аффинного типа (— de type affine) 217
— векторное (— vectoriel) 45
— однородное (— homogéne) 83
— орбит (— des orbites) 83
— проективного типа (— de type projectif) 197
— проективное (— projectif) 124
— сопряженное (— dual) 59
— — второе (— bidual) 65
Прямая аффинная (droite affine) 89
— векторная (— vectorielle) 48
— проективная (— projective) 124
Прямые перпендикулярные (droites perpendiculaires) 232

Размерность пространства аффинного (*dimension d'un* espace affine 86
— — векторного (— — — vectoriel) 124
— — проективного (— — — projectif) 213
Ранг линейного отображения (rang d'une application linéaire) 60
Расстояние гиперболическое (distance hyperbolique) 266
Репер аффинный (repère affine) 95
— проективный (— projectif) 284

Свойство верхней грани (propriété de la borne supérieure) 28
Сдвиг левый (translation gauche) 82
— правый (— droite) 82
Семейство зависимое (famille liée) 47
— образующих (— génératrice) 47
— свободное (— libre) 47
Симметрия аффинная (symétrie affine) 104

— векторная (— vectorielle) 275
— осевая (— axiale) 226
— *центральная* (— centrale) 104, 236
Скаляр (scalaire) 46
Скалярное произведение (produit scalaire) 79
Соотношение *Шаля* (relation de Chasles) 85
Спаривание (couplage) 64
Стабилизатор (stabilisateur) 82

Тело кватернионов (corps des quaternions) 42
— коммутативное (— commutatif) 41
— некоммутативное (— non commutatif) 41
— противоположное (— opposé) 41
— упорядоченное (— ordonné) 272
Теорема *Брианшона* (théorème de Brianchon) 299
— *Веддерберна* (— — Wedderburn) 45
— *Гессенберга* (— — Hessenberg) 200
— *Дезарга* (— — Desargues) 157
— *Лежандра — Саккери* (— — Legendre—Saccheri) 259
— *Менелая* (— — Ménéläus) 155
— о замене (— d'echange) 48
— о размерности (— de dimension) 50
— *Паппа* (— — Pappus) 161
— *Паскаля* (— — Pascal) 299
— *Фалеса* (— — Thalès) 105
— — малая (petit — — —) 187
— — сильная (thèoréme de Thalès fort) 206
— *Штаудта* (— — Von Staudt) 288
— *Чевы* (— — Ceva) 155
Точка взвешенная (point pondéré) 92
Трансвекция (transvection) 277
Трансляция (translation) 85, 177

Угол (angle) 237

Форма билинейная (forme bilinéaire) 71
— — невырожденная (— — non dégénérée) 71
— — транспонированная (— — transposée) 71
— линейная (— linéaire) 59
— полулинейная (— semi-linéaire) 63
Формы независимые (formes indépendentes) 68
Формула *Лагерра* (formule de Laguerre) 291
Функции *Лейбница* (fonctions de Leibnitz) 106

Характеристика плоскости трансляций (caractéristique d'un plan de translation) 189
— *поля* (*тела*) (— d'un corps) 36

Центр тела (centre d'un corps) 41

Четырехугольник Саккери (quadrangle de Saccheri) 256

Эквибарицентр (équibaricentre) 93
Эквиполлентность (équipollence) 183
Элация (élation) 131
Эндоморфизм (endomorphisme) 54

Ядро полулинейного отображения (noyau d'une application semi-linéaire) 55

ОГЛАВЛЕНИЕ

От переводчика 5
Предисловие 6

Глава I. Поле действительных чисел 9
Введение 9
1. Бесконечные десятичные дроби 10
2. Лексикографический порядок на $\mathscr{D}$ 12
3. Действительные числа. Десятичные приближения 15
4. Сложение действительных чисел. Групповая структура 19
5. Архимедовы группы 22
6. Аксиоматическая характеризация $\mathbb{R}$ как группы 28
7. Автоморфизмы группы $(\mathbb{R}, +)$. Структура поля. Гомоморфизмы $(\mathbb{R}, +)$ в себя 31
8. Упорядоченные поля. Характеризация $\mathbb{R}$ как поля 36

Глава II. Структура векторного пространства над телом 41
1. Общее понятие тела 41
2. Векторные пространства над произвольным телом 45
3. Конечномерные векторные пространства . . 50
4. Линейные и полулинейные отображения . . 53
5. Линейные и полулинейные отображения в конечномерном случае 59
6. Линейные формы, гиперплоскости, дуальность 61
7. Дуальность в конечномерном случае 66
8. Изоморфизмы векторного пространства на его сопряженное (коммутативный случай, конечная размерность) 70
9. О бесконечномерных пространствах 72
10. Некоторые приложения аксиомы Цорна . . . 77

Глава III. Структура аффинного пространства над телом 81
1. Введение 81
2. Аффинные пространства 84
3. Аффинные подпространства (линейные аффинные многообразия) 86
4. Барицентры; приложения к изучению аффинных подпространств 92
5. Аффинные и полуаффинные отображения . . 97

6. Каноническое погружение аффинного пространства в векторное. Приложения . . . 105
7. Приложения теоремы о погружении 108
8. Геометрическая характеризация инъективных полуаффинных отображений 113
9. Основная теорема аффинной геометрии . . . 116

Глава IV. Элементы проективной геометрии 121
1. Введение 121
2. Понятие проективного пространства 123
3. Проективные морфизмы. Гомографии . . . 126
4. Проективное пополнение аффинного пространства 133
5. Принцип двойственности 139
6. Проективные прямые. Гармонические отношения 141
7. Гармонические четверки прямых на плоскости 147
8. Гомографии проективной прямой. Двойное отношение 150
9. Проективная плоскость. Теоремы Чевы и Менелая 154
10. Теорема Дезарга 157
11. Теорема Паппа и коммутативность тела . . 161
12. Основная теорема проективной геометрии 164

Глава V. Аксиоматическое построение аффинной и проективной геометрий 171
1. Основные аксиомы плоской геометрии . . . 171
2. Дилатации плоскости аффинного типа . . . 175
3. Плоскости трансляций 179
4. Векторное исчисление в плоскости трансляций 183
5. Малая теорема Фалеса в плоскости трансляций 186
6. Дезаргова плоскость 190
7. Построение тела, ассоциированного с дезарговой плоскостью 194
8. Плоскость Паппа — Паскаля 200
9. Упорядоченные плоскости, архимедовы плоскости 202
10. Аффинная структура архимедовой плоскости 207
11. Проективные пространства произвольной размерности: истолкование аксиомы Дезарга с помощью вложения 211
12. Проективная структура пространства 216

Глава VI. Метрическая геометрия (евклидова и неевклидова) 220
1. Введение 220
2. Аксиомы метрической плоскости 223
3. Общие свойства метрической плоскости . . 226
4. Осевые симметрии. Перпендикулярные прямые 230
5. Вращения 233
6. Углы 237
7. Сложение и измерение углов 242

8. Неравенства в треугольнике. Приложения . . 247
9. Перпендикуляры и наклонные. Проблемы пересечения 250
10. Четырехугольник Саккери. Приложения . . 250
11. Различные формы аксиомы Евклида . . . 261
12. Гиперболическая плоскость (модель Пуанкаре) 265

Упражнения 271
Литература 302
Предметный указатель 305

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., 2, издательство «Мир».

Учебное издание

Жаклин Лелон-Ферран

ОСНОВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ

Заведующий редакцией чл.-корр. АН СССР
профессор В. И. Арнольд
Зам. зав. редакцией А. С. Попов
Ст. научн. ред. Н. И. Плужникова, А. А. Бряндинская
Мл. научн. ред. Л. А. Королева
Художник О. С. Василькова
Художественный редактор В. И. Шаповалов
Технический редактор И. И. Володина
Корректор Л. Д. Панова

ИБ № 6803

Сдано в набор 19.10.88. Подписано к печати 03.05.89. Формат 84×108[1]/32. Бумага тип. № 1. Печать высокая. Гарнитура литературная. Объем 4,88 бум. л. Усл. печ. л. 16,38. Усл. кр.-отт. 16,60. Уч.-изд. л. 16,39. Изд. № 1/6035. Тираж 25 000 экз. Зак. 1241. Цена 1 р. 20 к.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР» В/О «Совэкспорткнига» Государственного комитета СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, 129820, ГСП, Москва, И-110, 1-й Рижский пер., 2

Ленинградская типография № 2 головное предприятие ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 198052, г. Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29.

1 р. 20 к.

ISBN 5-03-001008-4 (русск.
ISBN 2-13-038851-5 (франц