А. А. Абрамов

ВВЕДЕНИЕ В ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ И РИМАНОВУ ГЕОМЕТРИЮ

URSS

А. А. Абрамов

ВВЕДЕНИЕ В ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ И РИМАНОВУ ГЕОМЕТРИЮ

Рекомендовано
Учебно-методическим советом
Московского физико-технического института
(государственного университета)
в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлению
«Прикладные математика и физика»

Издание третье

URSS
МОСКВА

ББК 22.151.4 22.161.6 22.311

Абрамов Александр Александрович

Введение в тензорный анализ и риманову геометрию. Изд. 3-е.
М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012. — 128 с.

Настоящая книга содержит краткое изложение основных результатов тензорной алгебры, тензорного анализа и римановой геометрии. Она написана на основе лекций, прочитанных автором студентам Московского физико-технического института. Для понимания материала книги достаточно знаний по математическому анализу, линейной алгебре и теории обыкновенных дифференциальных уравнений в объеме общевузовских программ.

Книга предназначена для студентов математических, физических и инженерных специальностей, а также научных работников.

Рецензенты:

проф. *Д. В. Беклемишев*;
проф. *М. М. Постников*

Издательство «Книжный дом "ЛИБРОКОМ"».
117335, Москва, Нахимовский пр-т, 56.
Формат 60×90/16. Печ. л. 8. Зак. № ЖТ-82.

Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД».
117312, Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, 11А, стр. 11.

ISBN 978-5-397-02711-3

10933 ID 158853

9 785397 027113

Содержание

Предисловие

В настоящее время имеется много прекрасных книг, посвященных современной дифференциальной геометрии. Особенно мы рекомендуем книгу «Современная геометрия. Методы и приложения» (М.: URSS, 2000–2001) Б. А. Дубровина, С. П. Новикова и А. Т. Фоменко и серию книг М. М. Постникова «Лекции по геометрии». Незаменимой остается книга П. К. Рашевского «Риманова геометрия и тензорный анализ» (М.: URSS, 2010).

Предлагаемая книга соответствует полугодовому курсу, который автор читал в Московском физико-техническом институте, и ставит своей целью на небольшом числе страниц изложить самые основные результаты тензорного анализа и римановой геометрии. Предполагается, что читатель знаком с основными понятиями математического анализа, линейной алгебры и теории обыкновенных дифференциальных уравнений. При изложении материала мы подчеркиваем его связь с соответствующими разделами общих математических курсов и стараемся избегать новых терминов, не входящих в эти курсы.

Использование тензорного исчисления дает возможность доказывать многие утверждения прямыми выкладками. Мы часто опускаем эти выкладки, заменяя их пояснениями типа «легко проверить, что». Читателю рекомендуется самостоятельно провести все подобные доказательства: это будет хорошим упражнением и контролем усвоения материала.

Излагаемый материал сгруппирован так, чтобы читатель, завершив очередную главу, мог остановиться и вернуться к книге позднее. Прочтя главу первую, читатель получит достаточно полное представление о тензорной алгебре в вещественном пространстве. Глава вторая, опирающаяся на главу первую, содержит сведения об основных конструкциях тензорного анализа, используемого, как известно, в различных научных областях. Некоторые доказательства в этой главе автор,

тор, стремясь к простоте и краткости, привел, не используя принятый уровень строгости, а опираясь только на геометрическую наглядность. Глава третья содержит некоторые основные результаты теории римановых пространств; в ней используется аппарат, развитый в главах первой и второй; отбор небольшого излагаемого материала из богатой теории частично отражает вкусы автора. Некоторые факты, связывающие для римановых пространств геометрию «в малом» и геометрию «в целом», вынесены в Дополнение, которое написано схематично с доказательством только части утверждений.

Автор благодарен А. А. Асланян, А. Л. Дышко и Л. Ф. Юхно за обсуждение текста и помощь при его подготовке к печати, а также Д. В. Беклемишеву и М. М. Постникову за важные замечания.

Автор благодарен работникам издательства URSS за внимание при издании этой книги.

Третье издание книги отличается от второго уточнением некоторых формулировок и исправлением замеченных опечаток.

Глава 1

ТЕНЗОРНАЯ АЛГЕБРА

§ 1. Тензоры в линейном пространстве

1. Определение тензора. Зафиксируем предположения и обозначения, общие для всего дальнейшего изложения.

Все величины, которые мы будем употреблять, вещественны.

Пусть R^n — n-мерное линейное пространство. Пусть e — какой-либо базис R^n, составленный из векторов $e_1, \ldots, e_n$. Пусть e' — также какой-либо базис R^n, составленный из векторов $e_{1'}, \ldots, e_{n'}$. Нам будет удобно выделять базис множеством индексов базисных векторов ($1, 2, \ldots, n$ — для одного базиса; $1', 2', \ldots, n'$ — для другого; $\widetilde{1}, \widetilde{2}, \ldots, \widetilde{n}$ — для третьего и т. д.). Пусть e и e' связаны формулами

$$e_{i'} = \sum_i A^i_{i'} e_i, \quad e_i = \sum_{i'} A^{i'}_i e_{i'}. \tag{1.1}$$

Числа $A^i_{i'}$ и $A^{i'}_i$ ($i = 1, \ldots, n$; $i' = 1', \ldots, n'$) удовлетворяют, очевидно, соотношениям

$$\sum_{i'} A^i_{i'} A^{i'}_j = \delta^i_j, \quad \sum_i A^i_{i'} A^{j'}_i = \delta^{j'}_{i'}. \tag{1.2}$$

Здесь δ^α_β — символ Кронекера:

$$\delta^\alpha_\beta = \begin{cases} 1 & \text{при } \alpha = \beta, \\ 0 & \text{при } \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

Определение. Тензором в R^n называется объект s, определяемый в каждом базисе e набором чисел

$$s^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$$

так, что при переходе от базиса e к базису e' (см. (1.1)) эти числа преобразуются по формуле

$$s^{i'_1\dots i'_p}_{j'_1\dots j'_q} = \sum_{\substack{i_1,\dots,i_p\\ j_1,\dots,j_q}} A^{i'_1}_{i_1}\dots A^{i'_p}_{i_p} A^{j_1}_{j'_1}\dots A^{j_q}_{j'_q} s^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}. \qquad (1.3)$$

Эти числа называются *координатами* тензора s в заданном базисе; они обозначены тем же символом s с индексами, где каждый индекс пробегает множество индексов базисных векторов. Некоторые индексы написаны справа вверху от s, они называются *контравариантными* индексами, некоторые — справа внизу от s — *ковариантные* индексы. Пара (p, q) определяет *тип* тензора; число p называется *контравариантной валентностью* тензора s, $p \geqslant 0$; q — *ковариантной валентностью* s, $q \geqslant 0$; $p+q$ — *полной валентностью* s, $p+q \geqslant 0$.

Наряду с выражением «$s^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$ — координаты тензора» допускается выражение «$s^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$ — тензор»; будем писать также s: $s^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$.

Использование слов «ковариантный» (преобразующийся соответственно) и «контравариантный» (преобразующийся противоположно) связано со следующим обстоятельством. В формуле (1.3), выражающей координаты тензора в базисе e' через координаты тензора в базисе e, для каждого ковариантного индекса стоят коэффициенты $A^j_{j'}$ — те же, что в формуле, выражающей векторы e' через векторы e, а для каждого контравариантного индекса стоят коэффициенты $A^{i'}_i$ — те, с помощью которых векторы e выражаются через векторы e'. Удачность термина «валентность» выяснится позже.

Определение. Два тензора в R^n равны, если они имеют один и тот же тип и в каждом базисе их соответствующие координаты равны.

Сразу же отметим, что если задан тип тензора и заданы его координаты в каком-либо одном базисе, то тем самым уже полностью определены координаты этого тензора в любом другом базисе. Это свойство следует непосредственно из определения тензора. В частности, если все координаты тензора в каком-либо базисе нули, то они нули в любом базисе (такие тензоры называются нулевыми).

Отметим также, что если зафиксировать тип тензора и выбрать в R^n какой-либо базис, то для построения тензора можно в качестве значений его координат в этом базисе взять любые числа. Действительно, используя эти числа, определим в каждом базисе набор чисел с помощью формулы (1.3). Замечательно, что так полученные числа преобразуются по формуле (1.3) при переходе от любого базиса к любому, а не только при переходе от начально выбранного базиса к любому (докажите!). Тем самым, они действительно являются координатами тензора в соответствующих базисах.

Примеры.

1. s не имеет индексов. Объект определяется одним числом, при переходе к новому базису это число не меняется. Такой тензор называется скаляром (или инвариантом).

2. x^i. Объект в базисе $e_1, \ldots, e_n$ определяется n координатами $x^1, \ldots, x^n$. При переходе к новому базису эти координаты изменяются по формуле

$$x^{i'} = \sum_i A_i^{i'} x^i.$$

Такой тензор называется вектором. Название вызвано тем, что тензору может быть сопоставлен элемент из R^n (вектор), обозначим его x, определяемый равенством

$$x = \sum_i x^i e_i. \tag{1.4}$$

Легко проверить, используя формулы (1.1)–(1.4), что элемент x, определяемый равенством (1.4), не зависит от выбора базиса. Обратно, если для произвольного вектора x из R^n определить в каждом базисе $e_1, \ldots, e_n$ координаты $x^1, \ldots, x^n$ формулой (1.4), то эти числа преобразуются по тензорному закону.

3. f_i. Объект определяется n координатами $f_1, \ldots, f_n$, которые при переходе к новому базису изменяются по формуле

$$f_{i'} = \sum_i A_{i'}^i f_i.$$

Такой тензор называется линейной формой. Название вызвано тем, что такому тензору может быть сопоставлена линейная форма в R^n, обозначим ее f, определяемая формулой

$$f(x) = \sum_i f_i x^i \quad (x^i \text{ — координаты } x). \tag{1.5}$$

Легко проверить, используя формулы (1.1)–(1.5), что значение $f(x)$ не зависит от выбора базиса в R^n. Обратно, если для произвольной линейной формы

$f(x)$, $x \in R^n$, определить в каждом базисе $e_1, \ldots, e_n$ координаты $f_1, \ldots, f_n$ формулой

$$f_i = f(e_i),$$

то $f_1, \ldots, f_n$ преобразуются по тензорному закону и имеет место (1.5). Тензор f_i называют также ***ковариантным вектором*** (или ***ковектором***) в отличие от вектора (или контравариантного вектора) x^i.

4. M^i_j. Объект определяется n^2 координатами $M^1_1, \ldots, M^n_n$. При переходе к новому базису эти координаты изменяются по формуле

$$M^{i'}_{j'} = \sum_{i,j} A^{i'}_i A^j_{j'} M^i_j.$$

Этому тензору можно поставить в соответствие линейное преобразование $y = Mx$ в R^n, определяемое формулой

$$y^i = \sum_j M^i_j x^j. \tag{1.6}$$

Легко проверить, используя (1.1)–(1.4), (1.6), что вектор y, определяемый равенством (1.6), не зависит от выбора базиса. Обратно, для произвольного линейного преобразования в R^n элементы матрицы, отвечающей этому преобразованию в заданном базисе (см. (1.6)), образуют тензор рассматриваемого типа.

5. h_{ij}. Объект определяется n^2 координатами $h_{11}, \ldots, h_{nn}$, преобразующимися по формуле

$$h_{i'j'} = \sum_{i,j} A^i_{i'} A^j_{j'} h_{ij}.$$

Этому тензору можно поставить в соответствие билинейную форму в R^n, определяемую формулой

$$h(x; y) = \sum_{i,j} h_{ij} x^i y^j. \tag{1.7}$$

Легко проверить, используя (1.1)–(1.4), (1.7), что значение $h(x; y)$ не зависит от выбора базиса. Обратно, если для произвольной билинейной формы $h(x; y)$, x и y из R^n, определить в каждом базисе $e_1, \ldots, e_n$ координаты h_{ij} формулой

$$h_{ij} = h(e_i;\ e_j),$$

то h_{ij} преобразуются по тензорному закону и имеет место (1.7).

6. δ^i_j. Оказывается, символ Кронекера — тензор (проверьте!). Его тип тот же, что и линейного преобразования (см. пример 4); δ^i_j отвечает единичному линейному преобразованию.

2. Соглашение об обозначениях. Формулы тензорной алгебры становятся более обозримыми, если придерживаться следующих правил.

- Координатная система в R^n выделяется множеством индексов базисных векторов (мы уже использовали этот прием).
- Если какой-либо объект задается числами, зависящими от выбора базиса в R^n (или нескольких базисов), то эти числа обозначаются символом, обозначающим сам объект (коренной символ), с какой-либо пометкой, отмечающей зависимость этих чисел от выбора базисов (примеры: координаты тензора $s^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$; величины $A^i_{i'}$ и $A^{i'}_i$, связывающие два базиса).
- Если какие-либо величины помечаются индексами, то следует выбирать удачное место для расположения индексов (примеры: ковариантные и контравариантные индексы координат тензора, $A^i_{i'}$ и $A^{i'}_i$, e_i), имея в виду, в особенности, нижеследующее правило.
- Если по какому-либо индексу, входящему в выражение один раз в строке ковариантных индексов и один раз в строке контравариантных индексов, проводится полное суммирование (т. е. суммирование по всему множеству индексов базисных векторов), то знак суммирования опускается.

Примеры. Ранее использованные формулы (1.1)–(1.7) в соответствии с введенными правилами следует писать так:

$$e_{i'} = A^i_{i'} e_i, \quad e_i = A^{i'}_i e_{i'}. \tag{1.1$'$}$$

$$A^i_{i'} A^{i'}_j = \delta^i_j, \quad A^i_{i'} A^{j'}_i = \delta^{j'}_{i'}. \tag{1.2$'$}$$

$$s^{i'_1\ldots i'_p}_{j'_1\ldots j'_q} = A^{i'_1}_{i_1} \ldots A^{i'_p}_{i_p} A^{j_1}_{j'_1} \ldots A^{j_q}_{j'_q} s^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}. \tag{1.3$'$}$$

$$x = x^i e_i. \tag{1.4$'$}$$

$$f(x) = f_i x^i. \tag{1.5$'$}$$

$$y^i = M^i_j x^j. \tag{1.6$'$}$$

$$h(x; y) = h_{ij} x^i y^j. \tag{1.7$'$}$$

Следует подчеркнуть, что при записи выражений тензорной алгебры перечисленные правила применяются не только к координатам тензоров, см., например, формулы (1.1$'$)–(1.4$'$). Кстати, набор базисных векторов по записи аналогичен набору координат линейной формы; ясно, что это совершенно различные объекты; сходство обозначений соответствует сходству формул $e_{i'} = A^i_{i'} e_i$ и $f_{i'} = A^i_{i'} f_i$.

Места справа вверху и справа внизу от коренного символа резервируются обычно для индексов, пробегающих множество индексов базисных векторов. Все другие индексы (например, номера объектов) рекомендуется ставить в каком-либо другом месте. Так, если мы имеем m тензоров, то их можно обозначить, например, $\underset{1}{s}, \dots, \underset{m}{s}$ или $\overset{1}{s}, \dots, \overset{m}{s}$; обозначение $s_1, \dots, s_m$ нежелательно.

3. Алгебраические операции над тензорами. Даваемые здесь определения операций над тензорами используют координатную систему. В результате каждой такой операции для любого базиса R^n возникает набор чисел. Оказывается, эти числа при переходе от одного базиса к другому преобразуются в соответствии с формулой (1.3′) (несложное доказательство этого важного факта мы доверяем читателю). Таким образом, результат этих операций над тензорами — также тензор. Определения даем, употребляя для простоты тензоры какого-либо несложного типа.

Умножение на число. Пусть $s\colon s^i_{jk}$ — тензор, α — число.

Определение. $t = \alpha s$, если $t^i_{jk} = \alpha s^i_{jk}$.
Тензор t имеет тот же тип, что и s.

Сложение. Пусть s и t два однотипных тензора: $s\colon s^{ij}_k$, $t\colon t^{ij}_k$.

Определение. $u = s + t$, если $u^{ij}_k = s^{ij}_k + t^{ij}_k$.
Тензор u имеет тот же тип, что и тензоры s и t.

Введение операции сложения однотипных тензоров в R^n и умножения тензоров на число превращает совокупность тензоров данного типа (p, q) в линейное пространство; эти операции, как легко проверить, обладают всеми требуемыми для этого свойствами; размерность этого пространства равна n^{p+q} (докажите!).

Перестановка индексов. Пусть $s\colon s^{hijk}_l$ — тензор. Образуем, например, $t : t^{hijk}_l = s^{kjhi}_l$.

Определение. Операция, с помощью которой тензор t получен из s, называется перестановкой индексов.

Тензор t имеет тот же тип, что и s.

Переставлять можно только однотипные индексы (ковариантные или контравариантные).

Операция перестановки индексов вместе с операциями сложения и умножения на число дает возможность провести определенную симметризацию по индексам. Множество симметризаций (в общем смысле этого слова) очень обширно. Рассмотрим два основных симметризатора.

Симметрирование (в узком смысле этого слова) по группе однотипных индексов. Пусть задан тензор s: $s^i_{j_1\ldots j_q}$. Выделим, например, индексы $j_1, \ldots, j_r$, $r \leqslant q$. Образуем тензор

$$t^i_{j_1\ldots j_q} = \frac{1}{r!} \sum_{(k_1,\ldots,k_r)} s^i_{k_1\ldots k_r j_{r+1}\ldots j_q},$$

где наборы $(k_1, \ldots, k_r)$ — всевозможные перестановки $j_1, \ldots, j_r$.

Обозначение: $t^i_{j_1\ldots j_q} = s^i_{(j_1\ldots j_r)j_{r+1}\ldots j_q}$.

Альтернирование. В тех же обозначениях введем тензор

$$u^i_{j_1\ldots j_q} = \frac{1}{r!} \sum_{(k_1,\ldots,k_r)} \operatorname{sign} \begin{pmatrix} k_1, \ldots, k_r \\ j_1, \ldots, j_r \end{pmatrix} s^i_{k_1\ldots k_r j_{r+1}\ldots j_q},$$

где $\operatorname{sign} \begin{pmatrix} k_1, \ldots, k_r \\ j_1, \ldots, j_r \end{pmatrix}$ — знак перестановки, т. е. $+1$ для четной перестановки и -1 для нечетной.

Обозначение: $u^i_{j_1\ldots j_q} = s^i_{[j_1\ldots j_r]j_{r+1}\ldots j_q}$.

Примеры. $s_{(ij)} = \dfrac{s_{ij} + s_{ji}}{2}$, $s_{[ij]} = \dfrac{s_{ij} - s_{ji}}{2}$.

Тензор называется *симметричным* по группе индексов, если при перестановке двух индексов этой группы он не меняется. Тензор называется *антисимметричным* по группе индексов, если при перестановке двух индексов этой группы он меняет знак.

Совокупность тензоров данного типа с заданными условиями симметрии образует линейное пространство — подпространство в пространстве всех тензоров рассматриваемого типа.

Пример. Совокупность симметричных билинейных форм в R^n(s : s_{ij}, $s_{ij} = s_{ji}$) представляет собой $n(n+1)/2$-мерное линейное пространство; совокупность антисимметричных билинейных форм (s: s_{ij}, $s_{ij} = -s_{ji}$) является $n(n-1)/2$-мерным линейным пространством.

Подчеркнем, что симметрирование и альтернирование можно проводить только по однотипным индексам.

Умножение. Пусть s: s^i_j и t : t^k_{lm} — тензоры.

Определение. $u = s \otimes t$, если $u^{ik}_{jlm} = s^i_j t^k_{lm}$.

Если s имеет тип (p, q), а t — тип $(\widetilde{p}, \widetilde{q})$, то тензор u имеет тип $(p + \widetilde{p}, q + \widetilde{q})$.

Операция умножения тензоров обладает следующими легко проверяемыми свойствами (s, t, z — какие-то тензоры):

- $t \otimes s$ получаются из $s \otimes t$ перестановкой индексов;
- $(s \otimes t) \otimes z = s \otimes (t \otimes z)$;
- если s и t — тензоры одного типа, а α и β — числа, то $(\alpha s + \beta t) \otimes \otimes z = \alpha(s \otimes z) + \beta(t \otimes z)$ и $z \otimes (\alpha s + \beta t) = \alpha(z \otimes s) + \beta(z \otimes t)$.

Свертка. Пусть s: s^i_{jk} — тензор. Образуем, например, t: $t_k = s^i_{ik}$.

Определение. Полное суммирование по индексу, входящему один раз в строку ковариантных индексов и один раз в строку контравариантных индексов, называется сверткой.

Если s имеет тип (p, q), то после свертки по какому-либо одному индексу получается тензор типа $(p - 1, q - 1)$.

Операция свертки делает понятным использование слова «валентность» для указания числа верхних и нижних индексов.

Еще раз обратимся к примерам п. 1.

1. $f_i x^i$ дает инвариант. Действительно, возьмем тензоры f : f_i и x: x^j, образуем $z = f \otimes x$: $z^j_i = f_i x^j$; используя операцию свертки, получим $w = z^i_i = f_i x^i$.

2. $M^i_j x^j$ дает вектор. Возьмем тензоры M: M^i_j и x: x^k, образуем $z = M \otimes x$: $z^{ik}_j = M^i_j x^k$; используя операцию свертки, получим $y^i = z^{ij}_j = M^i_j x^j$.

3. $h_{ij} x^i y^j$ дает инвариант (докажите сами!).

Имеет место следующая замечательная

Теорема. *Пусть $u, v, \ldots$ — тензоры фиксированных типов. Пусть w — тензор, координаты которого суть многочлены от координат $u, v, \ldots$ Тогда w получается из $u, v, \ldots, \delta$ (тензор Кронекера) и нулевых тензоров перечисленными выше тензорными операциями.*

(Предполагается, что многочлены, фигурирующие в формулировке теоремы, имеют фиксированные, независящие от выбора координатной системы коэффициенты и что они дают величины, преобразующиеся по тензорному закону для любых $u, v, \ldots$ заданных типов.)

Доказательство теоремы не приводим[1].

4. Другие возможности определения тензора. Определение тензора может быть дано различными способами, основываясь на различных исходных соображениях. В п. 1 для определения мы использовали формулу (1.3) (или, что то же самое, (1.3′)). Кратко остановимся еще на двух возможностях.

4.1. По-прежнему R^n — n-мерное линейное пространство. Рассмотрим множество линейных форм в R^n, т. е. множество числовых функций $f(x)$, $x \in R^n$, обладающих свойством: $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ для любых x, y из R^n и любых чисел α, β.

Это множество с обычными операциями сложения функций и умножения функции на число является линейным пространством; размерность этого пространства равна n; обозначим его $\widetilde{R}^n$.

Линейное пространство $\widetilde{R}^n$ называется *сопряженным* к R^n.

Интересно, что пространство, сопряженное к $\widetilde{R}^n$, может быть естественно идентифицировано с R^n формулой

$$x(f) = f(x) \quad (x \in R^n, f \in \widetilde{R}^n).$$

Взаимность (и равноправие) R^n и $\widetilde{R}^n$ подчеркивают, используя для линейной формы обозначение

$$fx \quad \text{или} \quad (f, x).$$

Числовое значение fx называют *скалярным произведением* f и x; f и x называют *ортогональными*, если $fx = 0$.

Определение. Базисы $e_1, \ldots, e_n$ в R^n и $e^1, \ldots, e^n$ в $\widetilde{R^n}$ называются взаимными, если

$$e^j e_i = \delta^j_i.$$

---

[1] Доказательство теоремы (в несколько другой формулировке) см., например, в книге: *Гуревич Г. Б.* Теория алгебраических инвариантов. — М.; Л.: ГТТИ, 1948.

Теорема. *Для каждого базиса R^n существует (единственный) взаимный ему базис $\widetilde{R^n}$.*

Несложное доказательство опускаем.

Легко проверить, что при изменении базиса R^n (см. (1.1′)) взаимный ему базис $\widetilde{R^n}$ меняется контравариантно: если $e_{i'} = A^i_{i'} e_i$, то $e^{j'} = A^{j'}_j e^j$.

В базисе $e^1, \dots, e^n$ пространства $\widetilde{R}^n$ координатами вектора z из $\widetilde{R}^n$ являются числа $z_1, \dots, z_n$ такие, что

$$z = z_i e^i.$$

Числа z_i преобразуются контравариантно при переходе от базиса $e^1, \dots, e^n$ к базису $e^{1'}, \dots, e^{n'}$ и, тем самым, ковариантно при переходе от базиса $e_1, \dots, e_n$ пространства R^n, взаимного базису $e^1, \dots, e^n$, к базису $e_{1'}, \dots, e_{n'}$, взаимному базису $e^{1'}, \dots, e^{n'}$.

Определение. Числовая функция

$s(\underset{1}{x}, \dots, \underset{q}{x}; \underset{1}{z}, \dots, \underset{p}{z})$, где $\underset{1}{x}, \dots, \underset{q}{x}$ из R^n, а $\underset{1}{z}, \dots, \underset{p}{z}$ из $\widetilde{R}^n$,

линейная по каждому своему аргументу, называется тензором.

Выберем в R^n какой-либо базис $e_1, \dots, e_n$; возьмем в $\widetilde{R^n}$ взаимный базис $e^1, \dots, e^n$. Образуем числа

$$s^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = s(e_{j_1}, \dots, e_{j_q}; e^{i_1}, \dots, e^{i_p}).$$

Легко видеть, что при переходе к новому базису R^n (базис в $\widetilde{R^n}$ при этом тоже меняется) эти числа преобразуются в соответствии с формулой (1.3′). Пользуясь линейностью s, легко доказать, что

$$s(\underset{1}{x}, \dots, \underset{q}{x}; \underset{1}{z}, \dots \underset{p}{z}) = s^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \underset{1}{x}^{j_1} \dots \underset{q}{x}^{j_q} \underset{1}{z}_{i_1} \dots \underset{p}{z}_{i_p}, \tag{1.8}$$

где $\underset{r}{x}^{j_r}$ и $\underset{m}{z}_{i_m}$ — координаты $\underset{r}{x}$ и $\underset{m}{z}$. Обратно, если $s^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ преобразуются по формуле (1.3′), то выражение (1.8) дает значение, не зависящее от выбранной системы координат.

Таким образом, даваемое здесь определение тензора эквивалентно определению, данному в п. 1.

Сопоставление этих определений тензора приводит к следующему утверждению. Пусть в каждом базисе заданы числа $s^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$ так, что для любых векторов $\underset{1}{x},\dots,\underset{q}{x}$ и ковекторов $\underset{1}{z},\dots,\underset{p}{z}$ значение

$$s^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}\underset{1}{x}^{j_1}\dots\underset{q}{x}^{j_q}\,\underset{1}{z}_{i_1}\dots\underset{p}{z}_{i_p}$$

не зависит от базиса. Тогда $s^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$ — тензор.

Отметим еще одно полезное утверждение. Пусть в каждом базисе заданы числа $s^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$ так, что для любых векторов $\underset{1}{x},\dots,\underset{k}{x}$ и ковекторов $\underset{1}{z},\dots,\underset{m}{z}$ (k и m фиксированы, $0 \leqslant k \leqslant q$, $0 \leqslant m \leqslant p$) числа

$$r^{i_{m+1}\dots i_p}_{j_{k+1}\dots j_q} = s^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}\underset{1}{x}^{j_1}\dots\underset{k}{x}^{j_k}\,\underset{1}{z}_{i_1}\dots\underset{m}{z}_{i_m}$$

являются координатами тензора. Тогда $s^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$ — тензор. Это утверждение легко сводится к предыдущему.

Дополнение к примерам п. 1

Тензор M: M^i_j определяет линейное преобразование в R^n (см. формулу (1.6′)). Этот же тензор определяет линейное преобразование в $\widetilde{R^n}$ формулой

$$y_i = M^j_i x_j \tag{1.6''}$$

Линейные преобразования (1.6′) и (1.6″) называются *сопряженными.*

Тензор h: h_{ij} определяет линейное отображение R^n в $\widetilde{R^n}$ формулой

$$y_i = h_{ij}x^j.$$

Тензор l: l^{ij} определяет линейное отображение $\widetilde{R^n}$ в R^n формулой

$$y^i = l^{ij}x_j.$$

4.2. Пусть $\underset{1}{R}^n$ и $\underset{2}{R}^m$ — два каких-либо линейных пространства. Введем символ $\otimes$. Рассмотрим формальные суммы

$$\sum_{r=1}^{N}\underset{r}{\alpha}\,\underset{r}{x}\otimes\underset{r}{z}, \tag{1.9}$$

где N — любое положительное целое число; $\underset{1}{x},\dots,\underset{N}{x}$ — любые векторы из $\underset{1}{R}$; $\underset{1}{z},\dots,\underset{N}{z}$ — любые векторы из $\underset{2}{R}$; $\underset{1}{\alpha},\dots,\underset{N}{\alpha}$ — любые числа.

Будем преобразовывать выражения (1.9), представляя $\underset{r}{x}$ и $\underset{r}{z}$ в виде линейных комбинаций векторов $\underset{1}{R}$ и, соответственно, $\underset{2}{R}$ и предполагая, что символ $\otimes$ обладает свойствами операции умножения («множитель» из $\underset{1}{R}$ всегда пишем слева от «множителя» из $\underset{2}{R}$). Точнее, по определению считаются эквивалентными выражения

$$
\begin{array}{rcl}
(x+y)\otimes z & \text{и} & x\otimes z+y\otimes z, \\
x\otimes(z+u) & \text{и} & x\otimes z+x\otimes u, \\
(\alpha x)\otimes z, \quad x\otimes(\alpha z) & \text{и} & \alpha x\otimes z
\end{array}
$$

для любых x и y из $\underset{1}{R}$, любых z и u из $\underset{2}{R}$ и любого числа α.

Два выражения вида (1.9), преобразующихся одно к другому, считаем эквивалентными.

Введем естественным образом операции сложения таких выражений и умножения их на число. Мы получим линейное пространство, элементами которого являются классы эквивалентных между собой выражений. Это линейное пространство называется *тензорным произведением* $\underset{1}{R}$ и $\underset{2}{R}$. Обозначение: $\underset{1}{R}\otimes\underset{2}{R}$.

Если мы возьмем какой-либо базис $\underset{1}{e}_1,\dots,\underset{1}{e}_n$ в $\underset{1}{R}$ и какой-либо базис $\underset{2}{e}_1,\dots,\underset{2}{e}_m$ в $\underset{2}{R}$, то выражения

$$\underset{1}{e}_i\otimes\underset{2}{e}_j \quad (i=1,\dots,n;\, j=1,\dots,m)$$

образуют базис в $\underset{1}{R}\otimes\underset{2}{R}$.

Докажем это. Так как каждый вектор из $\underset{1}{R}$ представляется в виде линейной комбинации векторов $\underset{1}{e}_i$, а каждый вектор из $\underset{2}{R}$ — линейной комбинации векторов $\underset{2}{e}_j$, то каждый вектор из $\underset{1}{R}\otimes\underset{2}{R}$ может быть приведен к виду линейной комбинации векторов $\underset{1}{e}_i\otimes\underset{2}{e}_j$. Тем самым, достаточно показать, что эти последние векторы линейно независимы. Возьмем в $\underset{1}{\widetilde{R}}$ базис $\underset{1}{e}^1,\dots,\underset{1}{e}^n$, взаимный базису $\underset{1}{e}_1,\dots,\underset{1}{e}_n$, а в $\underset{2}{\widetilde{R}}$ — базис $\underset{2}{e}^1,\dots,\underset{2}{e}^m$, взаимный базису $\underset{2}{e}_1,\dots,\underset{2}{e}_m$. Рассмотрим линейную числовую функцию f, определенную на выражениях вида (1.9) формулой

$$f = \sum_{r=1}^{N} \underset{r}{\alpha}(\underset{1}{e}^{i_0}\,\underset{r}{x})(\underset{2}{e}^{j_0}\,\underset{r}{z}),$$

где i_0 и j_0 — какие-либо фиксированные индексы. Очевидно, значение функции f не меняется при переходе от этого выражения к эквивалентным ему выражениям. Поэтому f — линейная форма в $\underset{1}{R} \otimes \underset{2}{R}$.

Пусть для некоторых чисел β^{ij} имеет место

$$\beta^{ij}\,\underset{1}{e_i} \otimes \underset{2}{e_j} = 0.$$

Тогда получаем

$$0 = f(0) = f(\beta^{ij}\,\underset{1}{e_i} \otimes \underset{2}{e_j}) = \beta^{ij}(\underset{1}{e}^{i_0}\,\underset{1}{e_i})(\underset{2}{e}^{j_0}\,\underset{2}{e_j}) = \beta^{i_0 j_0}.$$

Из того, что i_0 и j_0 любые, следует линейная независимость совокупности векторов $\underset{1}{e_i} \otimes \underset{2}{e_j}$.

Заметим, что так получаются не все базисы в $\underset{1}{R} \otimes \underset{2}{R}$.

Из доказанного следует, в частности, что размерность $\underset{1}{R^n} \otimes \underset{2}{R^m}$ равна nm.

Аналогично (или по индукции) определяется тензорное произведение $\underset{1}{R} \otimes \underset{2}{R} \otimes \ldots \otimes \underset{k}{R}$.

Пример. Рассмотрим два множества: X, содержащее n элементов, и Y, содержащее m элементов. Совокупность числовых функций на X (функций $f(x)$, $x \in X$) с обычными операциями сложения и умножения на число образуют n-мерное линейное пространство $\underset{1}{R}$; совокупность функций $g(y)$, $y \in Y$, — m-мерное линейное пространство $\underset{2}{R}$. Пусть $\otimes$ в (1.9) обозначает обычное произведение функций. Оказывается, $\underset{1}{R} \otimes \underset{2}{R}$ состоит из всех функций $h(x, y)$, $x \in X$, $y \in Y$ (докажите!).

Определение. Пусть R^n — какое-либо линейное пространство, $\widetilde{R}^n$ — линейное пространство, сопряженное к R^n. Возьмем p экземпляров R^n и q экземпляров $\widetilde{R}^n$. Образуем пространство

$$\hat{R} = \underbrace{R^n \otimes \ldots \otimes R^n}_{p} \otimes \underbrace{\widetilde{R^n} \otimes \ldots \otimes \widetilde{R^n}}_{q}.$$

Элемент (вектор) пространства $\hat{R}$ называется **тензором в R^n**.

Выбрав какой-либо базис $e_1, \ldots, e_n$ в R^n и взяв взаимный ему базис $e^1, \ldots, e^n$ в $\widetilde{R^n}$, образуем базис в $\hat{R}$ — совокупность всех $e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_q}$. Пусть $s \in \hat{R}$. Координаты s в этом базисе суть числа $s^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ такие, что

$$s = s^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_q}. \tag{1.10}$$

Легко проверить, что при изменении базиса в R^n (базис в $\widetilde{R^n}$ при этом тоже изменится) числа $s^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ преобразуются по формуле (1.3′). Обратно, если числа $s^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ преобразуются по формуле (1.3′), то элемент s пространства $\hat{R}$, определяемый формулой (1.10), не зависит от выбора базиса в R^n. Таким образом, даваемое здесь определение тензора также эквивалентно определению, данному в п. 1.

Мы использовали для обозначения произведения двух пространств тот же символ $\otimes$, что и для обозначения произведения тензоров (см. п. 3). Причина этого в следующем. Рассмотрим, например, $R^n \otimes \widetilde{R}^n$. Тензоры w вида $w = u \otimes v$, где $u \in R^n$, $v \in \widetilde{R}^n$, $\otimes$ определено в п. 3, естественно вкладываются в $R^n \otimes \widetilde{R}^n$. Действительно, если $e_1, \ldots, e_n$ — какой-либо базис R^n, $e^1, \ldots, e^n$ — взаимный ему базис $\widetilde{R}^n$, $u = u^i e_i$, $v = v_i e^i$, $w^i_j = u^i v_j$, то возьмем w, $w \in R^n \otimes \widetilde{R}^n$, определяемый равенством $w = w^i_j e_i \otimes e^j$. Так построенный вектор пространства $R^n \otimes \widetilde{R}^n$ не зависит от выбора базиса в R^n (докажите!). Отметим, что построенные таким образом векторы w, если u пробегает все R^n, а v — все $\widetilde{R}^n$, при $n > 1$ не заполняют всего пространства $R^n \otimes \widetilde{R}^n$, но их всевозможные линейные комбинации заполняют все это пространство (докажите!).

Итак, приведены три определения тензора (см. п. 1 и 4), которые, как показано, являются эквивалентными. Какое из них «лучше»? Каждое имеет свои достоинства.

§ 2. Ориентация. Псевдотензоры

1. Ориентация. Мы хотим сейчас обратить внимание на одно обстоятельство, которое раньше мы избегали подчеркивать. Зафиксировав координатную систему в R^n, мы выделяем ее множеством индексов базисных векторов. Какое множество может быть взято в качестве множества индексов? Любое, состоящее из n элементов. Для R^7 можно в качестве индексов взять, например, дни недели или семь чудес света или, разумеется, целые числа от 1 до 7. Еще пример. В тензорном произведении $\underset{1}{R} \otimes \underset{2}{R}$ двух линейных пространств (см. п. 4.2 § 1) в качестве базиса удобно взять совокупность векторов вида $\underset{1}{e}_i \otimes \underset{2}{e}_j$, где совокупность $\underset{1}{e}_i$ — базис $\underset{1}{R}$, совокупность $\underset{2}{e}_j$ — базис $\underset{2}{R}$. В этом случае индексом базисного вектора для $\underset{1}{R} \otimes \underset{2}{R}$ является пара (i, j), где i — индекс базисного вектора $\underset{1}{R}$, j — индекс базисного вектора $\underset{2}{R}$.

Множество индексов не упорядочено. Когда мы перечисляем его элементы, то делаем это в некоторой последовательности. Но это лишь свойство изложения. Например, выбрав в качестве множества индексов множество дней недели, можно перечислять эти дни в порядке следования, начав с любого, а можно расположить их по алфавиту русского языка. Выбрав в качестве базиса $\underset{1}{R} \otimes \underset{2}{R}$ совокупность векторов вида $\underset{1}{e}_i \otimes \underset{2}{e}_j$, можно перечислять пары (i, j) в любом порядке. Формулы алгебры тензоров в R^n не должны зависеть от порядка перечисления элементов множества индексов.

Приведем примеры.

Для двухиндексных тензоров h_{ij}, M^i_j, l^{ij} при фиксированном базисе определены значения $\det \|h_{ij}\|$, $\det \|M^i_j\|$, $\det \|l^{ij}\|$, где $\|\cdot\|$ — обозначение матрицы. Действительно, расположим индексы базисных векторов в каком-либо порядке и возьмем квадратную матрицу, элементы которой — координаты рассматриваемого тензора; один из индексов дает номер строки, другой — номер столбца. Вычислим определитель этой матрицы. Полученное значение не зависит от распределения ролей между двумя индексами, так как соответствующие матрицы получаются одна из другой транспонированием. Это значение не зависит также от выбранного порядка индексов, так как при его изменении строки и столбцы матрицы переставляются соответственно.

В качестве величин $A^{i'}_i$, связывающих два базиса e и e' (см. п. 1 § 1), могут быть взяты любые n^2 чисел, удовлетворяющих условию

$$\det \|A^{i'}_i\| \neq 0.$$

Для того чтобы вычислить число ρ, $\rho = \det \|A^{i'}_i\|$, надо расположить индексы i, а также индексы i' в каком-то порядке. При изменении порядка индексов i величина ρ может изменить знак, то же может произойти и при изменении порядка индексов i'. Порядки индексов i и i' не связаны между собой. Таким образом, при $n > 1$ число ρ определено с точностью до знака. Условие $\rho \neq 0$ очевидно удовлетворяет требованию независимости от порядка перечисления элементов множества индексов.

Введем новое понятие. Возьмем какой-либо базис R^n, $n \geqslant 1$. Выберем некоторый порядок перечисления элементов базиса. Этот порядок перечисления, рассматриваемый с точностью до четных перестановок, назовем *ориентацией* базиса. Базис с учетом его ориентации назовем *ориентированным.* При $n \geqslant 2$ каждый базис можно ориентировать двумя способами. Для двух ориентированных базисов e и e' значение ρ очевидно определено полностью, а не с точностью до знака. Два ориентированных базиса назовем *одинаково ориентированными*, если это число положительно (так как $\det \|A^{i'}_i\| \cdot \det \|A^i_{i'}\| = 1$, то свойство базисов быть одинаково ориентированными взаимно). Легко проверить, что если какой-либо базис одинаково ориентирован с каждым из каких-то двух базисов, то эти два базиса одинаково ориентированы.

Множество всех ориентированных базисов разбивается на два класса, в каждом из которых базисы одинаково ориентированы; при переходе от базиса одного класса к базису другого класса $\rho < 0$.

Зафиксируем S — один из двух классов одинаково ориентированных базисов. R^n в комплекте с S называется *ориентированным линейным пространством.*

Выбор S вводит в R^n ориентацию. При $n \geqslant 1$ каждое R^n можно ориентировать одним из двух способов; эти две ориентации совершенно равноправны.

2. Псевдотензоры. Будем использовать в R^n ориентированные базисы.

Определение. Псевдотензором в R^n называется объект s, определяемый в каждом ориентированном базисе набором чисел $s^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$ так, что при переходе от одного такого базиса к другому эти числа преобразуются по формуле

$$s^{i'_1\ldots i'_p}_{j'_1\ldots j'_q} = \operatorname{sign}\bigl(\det \|A^i_{i'}\|\bigr) A^{i'_1}_{i_1} \ldots A^{i'_p}_{i_p} A^{j_1}_{j'_1} \ldots A^{j_q}_{j'_q} s^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} \tag{2.1}$$

(ср. с определением тензора, см. (1.3$'$)).

Определение тензора, данное в п. 1 § 1, остается действительным также для ориентированных базисов.

Из формулы (2.1) следует, в частности, что при переходе от одного ориентированного базиса к другому, состоящему из тех же векторов и полученному из первого изменением его ориентации, координаты псевдотензора меняют знак.

Введенные в § 1 алгебраические операции распространяются и на псевдотензоры. Мы не будем приводить полных формулировок. Отметим только:

- результат умножения псевдотензора на число и сумма двух однотипных псевдотензоров — псевдотензор;
- сумма тензора и псевдотензора не определена;
- перестановка однотипных индексов псевдотензора дает псевдотензор;
- произведение двух псевдотензоров — тензор;
- произведение тензора и псевдотензора — псевдотензор;
- свертка по какому-либо индексу у псевдотензора дает псевдотензор.

Тензоры и псевдотензоры в общем R^n — различные понятия, но если мы имеем дело с ориентированным R^n и используем только базисы, ориентация которых соответствует ориентации R^n, то различие между тензором и псевдотензором, очевидно, исчезает.

Для краткости часто термины «тензор» и «псевдотензор» объединяют в термин «тензор».

Содержательный пример псевдотензора будет рассмотрен в следующем параграфе.

§ 3. Тензоры в евклидовом пространстве

1. Общие соображения. Евклидовым пространством H^n называется комплект из линейного пространства R^n и введенного в R^n скалярного произведения (мы будем обозначать его $(\cdot, \cdot)$), обладающего принятыми в линейной алгебре свойствами.

Теорема. *Пусть в H^n задана линейная форма f. Тогда существует (единственный) элемент $\tilde{f} \in H^n$ такой, что*

$$f(x) = (\tilde{f}, x).$$

Доказательство легко провести, если взять какой-либо ортогональный и нормированный базис H^n. Ясно, что для любого $\tilde{f}$ из H^n функция $(\tilde{f}, x)$ есть линейная форма. Очевидно, что соответствие $f \longleftrightarrow \tilde{f}$ линейно.

Тем самым устанавливается естественный изоморфизм линейных пространств H^n и $\widetilde{R^n}$ (см. обозначения в п. 4 § 1). Можно идентифицировать H^n и $\widetilde{R^n}$ и сопоставлять неоднотипные тензоры одинаковой полной валентности. Эта идея часто используется в линейной алгебре. Пример: в R^n билинейная форма и линейное преобразование совершенно разные объекты, в H^n между ними устанавливается взаимно однозначное соответствие.

2. Метрический тензор. Возьмем в пространстве H^n какой-либо базис $e_1, \ldots, e_n$. Введем числа

$$g_{ij} = (e_i, e_j).$$

Теорема. g_{ij} — *тензор (так называемый метрический тензор).*

Несложное доказательство опускаем (ср. с примером 5 п. 1 § 1).

Свойства метрического тензора:

1. $g_{ij} = g_{ji}$,
2. квадратичная форма $g_{ij}\xi^i\xi^j$ положительно определена.

Первое из этих свойств соответствует тому, что $(x, y) = (y, x)$ для любых x и y из H^n, второе — тому, что $(x, x) > 0$ при $x \neq 0$.

Обратно, пусть в R^n определен тензор g_{ij}, обладающий свойствами 1, 2. Тогда билинейная форма $(x, y) = g_{ij}x^iy^j$ удовлетворяет требованиям, предъявляемым к скалярному произведению. Итак, H^n — это комплект из R^n и тензора g_{ij}, определенного в R^n и удовлетворяющего требованиям 1 и 2.

Далее нам понадобится следующий дважды контравариантный тензор, строящийся по g_{ij}. Зафиксируем базис в H^n. Рассмотрим матрицу, элементами которой являются числа g_{ij}. Эта матрица невырождена, так как ее определитель положителен в силу свойства 2. Поэтому существует обратная к ней; обозначим ее элементы g^{ij}. (Может показаться, что некорректно использовать букву g, ведь она уже занята — означает метрический тензор. Как будет видно из дальнейшего, в подобном обозначении есть проявление некоторой системы.)

Тем самым g^{ij} определяются (однозначно) уравнениями

$$g^{ji} g_{ik} = \delta^j_k.$$

Теорема. *g^{ij} – тензор.*

Доказательство. При переходе к новой системе координат имеем

$$g^{ji} A^{i'}_i A^{k'}_k g_{i'k'} = \delta^j_k.$$

Поэтому

$$g^{ji} A^{i'}_i A^{k'}_k A^k_{h'} A^{j'}_j g_{i'k'} = \delta^j_k A^k_{h'} A^{j'}_j = \delta^{j'}_{h'},$$

т. е.

$$g^{ji} A^{j'}_j A^{i'}_i g_{i'h'} = \delta^{j'}_{h'}.$$

Но $g^{j'i'}$ однозначно определены условием

$$g^{j'i'} g_{i'h'} = \delta^{j'}_{h'},$$

следовательно,

$$g^{ji} A^{j'}_j A^{i'}_i = g^{j'i'},$$

что и требовалось доказать.

Свойства тензора g^{ij}:

1. $g^{ij} = g^{ji}$,
2. квадратичная форма $g^{ij}\eta_i\eta_j$ положительно определена.

Если $e_1, \ldots, e_n$ и $e^1, \ldots, e^n$ — взаимные базисы H^n, то они, как легко проверить, связаны формулами:

$$e^i = g^{ij} e_j, \quad e_i = g_{ij} e^j.$$

3. Опускание и поднятие индексов. Возьмем какой-нибудь тензор, например, s^i_{jk}. Составим тензор $t_{ijk} = g_{ir} s^r_{jk}$. Будем говорить, что t получен из s *опусканием индекса.* Можно также поднимать индекс. Например, образуем тензор u формулой $u^{ij}_k = s^i_{rk} g^{rj}$ — тензор u получен из тензора s *поднятием индекса.*

При поднятии и опускании индексов возникает следующий вопрос. Пусть, например, мы опускаем верхний индекс. На какое место среди нижних индексов его можно ставить? На любое. Тем самым, опуская, например, индекс у тензора s^{i}_{jk}, мы получаем три различных тензора:

$$\underset{1}{t}_{ijk} = g_{ir}s^{r}_{jk}, \quad \underset{2}{t}_{ijk} = g_{jr}s^{r}_{ik}, \quad \underset{3}{t}_{ijk} = g_{kr}s^{r}_{ij},$$

переходящих друг в друга перестановкой индексов. Для достижения однозначности операций поднятия и опускания индексов у тензоров любого типа в евклидовом пространстве принято отмечать совместный порядок следования верхних и нижних индексов. Делается это обозначением, которое мы поясним на примере. Запись $s_{j\cdot k}^{\cdot i}$ означает, что при поднятии и опускании индексов порядок их следования таков: первый нижний, верхний, второй нижний. Тем самым тензоры $s_{jk}^{\cdot\cdot i}$ и $s^{i}_{\cdot jk}$ породят различные тензоры при опускании верхнего индекса.

Оказывается, операции поднятия и опускания индексов взаимно обратны. Проверим это на примере:

$$g^{iq}(g_{ir}s^{r}_{\cdot jk}) = (g^{iq}g_{ir})s^{r}_{\cdot jk} = \delta^{q}_{r}s^{r}_{\cdot jk} = s^{q}_{\cdot jk}.$$

Конечно, после поднятия (опускания) индекса мы получаем другой тензор. Но в силу соображений, изложенных в п. 1, оказывается возможной следующая трактовка.

Два тензора в евклидовом пространстве, один из которых получен из другого операциями поднятия и (или) опускания некоторых индексов, мы считаем представителями одного и того же объекта (точнее, идентифицируем два соответствующих им объекта) и разрешаем обозначать одним и тем же символом.

Примеры.

1. x^{i} — вектор, $g_{ij}x^{j}$ — линейная форма; мы пишем $x_{i} = g_{ij}x^{j}$ и называем x^{i} контравариантными координатами вектора x, а x_{i} — ковариантными координатами этого вектора; x^{i} определяются равенством

$$x = x^{i}e_{i},$$

x_{i} — равенством

$$x_{i} = (x, e_{i});$$

имеет место

$$x = x_{i}e^{i},$$

где $e^{1}, \ldots, e^{n}$ — базис, взаимный базису $e_{1}, \ldots, e_{n}$. Пусть f_{i} — линейная форма, $f^{i} = g^{ij}f_{j}$ — вектор; этот вектор порождает линейную форму

$$f(x) = (x, f) = g_{ij}x^{i}f^{j};$$

в самом деле, $f(x) = f_{i}x^{i}$, а $f_{i} = g_{ij}f^{j}$.

2. M^i_j — линейное преобразование, $g_{ik}M^k_j$ — билинейная форма; мы пишем $M_{ji} = g_{ik}M^k_j$; билинейная форма $M_{ij}x^iy^j$ задается формулой (Mx, y); действительно,

$$(Mx, y) = g_{ij}(Mx)^i y^j = g_{ij}M^i_k x^k y^j = M_{kj}x^k y^j.$$

Вернемся к определению тензора, которое дано в п. 4 § 1. Начнем с п. 4.2. Наряду с

$$\hat{R} = \underbrace{R^n \otimes \ldots \otimes R^n}_{p} \otimes \underbrace{\widetilde{R^n} \otimes \ldots \otimes \widetilde{R^n}}_{q}$$

можно рассматривать тензорные произведения, в которых множители R^n и $\widetilde{R}^n$ стоят в каком-либо порядке, отличном от взятого, где сначала идет последовательность p множителей R^n, а затем q множителей $\widetilde{R}^n$. Поясним все на примере тензоров M^i_j типа (1,1). Элементу из $R^n \otimes \widetilde{R}^n$ поставим в соответствие тензор $M^i_{\cdot j}$, элементу из $\widetilde{R}^n \otimes R^n$ — тензор $M_j^{\cdot i}$. Конечно, $R^n \otimes \widetilde{R}^n$ и $\widetilde{R}^n \otimes R^n$ — разные пространства. Таким образом, возникает возможность различать тензоры $M^i_{\cdot j}$ и $M_j^{\cdot i}$ уже для линейного пространства. Однако для тензорной алгебры такое различие $M^i_{\cdot j}$ и $M_j^{\cdot i}$ в линейном пространстве несущественно. Так что вполне можно считать, что порядок сомножителей в $\hat{R}$ является обязательным и что совокупность контравариантных индексов предшествует совокупности ковариантных.

Аналогично, для определения тензора, данного в п. 4.1 § 1, можно рассматривать полилинейные функции аргументов из R^n и $\widetilde{R}^n$, перечисляемых в любом порядке (детали обдумайте сами!).

Положение меняется при переходе к евклидову пространству. Здесь R^n и $\widetilde{R}^n$ — это одно и то же пространство H^n. Тем самым,

$$\hat{H} = \underbrace{H^n \otimes \ldots \otimes H^n}_{p+q}.$$

Возьмем в некоторых p из этих множителей базис $e_1, \ldots, e_n$, а в остальных q — взаимный ему базис $e^1, \ldots, e^n$. Тогда векторам в $\hat{H}$ отвечают тензоры в H^n, из $p+q$ индексов которых некоторые p являются контравариантными, а некоторые q — ковариантными. Общий порядок индексов здесь является существенным. Опускание какого-либо индекса соответствует замене в соответствующем множителе базиса $e_1, \ldots, e_n$ на базис $e^1, \ldots, e^n$; поднятие — замене $e^1, \ldots, e^n$ на $e_1, \ldots, e_n$.

4. $\sqrt{g}$. Здесь будет рассмотрен один важный для дальнейшего пример псевдотензора.

Обозначим $g = \det \|g_{ij}\|$. Как уже говорилось, из положительной определенности квадратичной формы $g_{ij}\xi^i\xi^j$ следует, что $g > 0$. Для ориентированного базиса $e_1, \dots, e_n$ (см. п. 1 § 2) составим числа

$$\gamma_{i_1\dots i_n} = \sqrt{g}\,\varepsilon_{i_1\dots i_n},$$

где каждый индекс пробегает значения $1, \dots, n$ и

$$\varepsilon_{i_1\dots i_n} = \begin{cases} +1, & \text{если } i_1, \dots, i_n \text{ попарно различны и порядок} \\ & i_1, \dots, i_n \text{ соответствует ориентации базиса,} \\ -1, & \text{если } i_1, \dots, i_n \text{ попарно различны и порядок} \\ & i_1, \dots, i_n \text{ не соответствует ориентации базиса,} \\ 0, & \text{если среди } i_1, \dots, i_n \text{ есть равные.} \end{cases}$$

Теорема. $\gamma_{i_1\dots i_n}$ *— псевдотензор.*

Доказательство. Возьмем еще один ориентированный базис $e_{1'}, \dots, e_{n'}$. Докажем, что в соответствии с формулой (2.1) имеет место

$$\gamma_{i'_1\dots i'_n} = A^{i_1}_{i'_1} \dots A^{i_n}_{i'_n} \operatorname{sign} \det \|A^i_{i'}\| \gamma_{i_1\dots i_n}.$$

Обозначим $g' = \det \|g_{i'j'}\|$. Мы должны доказать равенство

$$\varepsilon_{i'_1\dots i'_n}\sqrt{g'} = A^{i_1}_{i'_1} \dots A^{i_n}_{i'_n}\sqrt{g}\,\varepsilon_{i_1\dots i_n} \operatorname{sign} \det \|A^i_{i'}\|.$$

Как легко проверить,

$$A^{i_1}_{i'_1} \dots A^{i_n}_{i'_n}\varepsilon_{i_1\dots i_n} = \det \|A^i_{i'}\| \varepsilon_{i'_1\dots i'_n}.$$

Поэтому задача сводится к доказательству равенства

$$\sqrt{g'} = \sqrt{g}\left|\det \|A^i_{i'}\|\right|,$$

т. е. равенства

$$g' = g\left(\det \|A^i_{i'}\|\right)^2,$$

которое легко получается из известных формул линейной алгебры.

Если поднять все индексы у $\gamma_{i_1\dots i_n}$, то получим псевдотензор $\gamma^{i_1\dots i_n}$,

$$\gamma^{i_1\dots i_n} = g^{i_1j_1} \dots g^{i_nj_n} \quad \gamma_{j_1\dots j_n}.$$

Легко вычислить, что

$$\gamma^{i_1\dots i_n} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{g}}, & \text{если } i_1,\dots,i_n \text{ попарно различны и порядок} \\ & i_1,\dots,i_n \text{ соответствует ориентации базиса,} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{g}}, & \text{если } i_1,\dots,i_n \text{ попарно различны и порядок} \\ & i_1,\dots,i_n \text{ не соответствует ориентации базиса,} \\ 0, & \text{если среди } i_1,\dots,i_n \text{ есть равные.} \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что $\gamma_{[i_1\dots i_n]} = \gamma_{i_1\dots i_n}$ и $\gamma^{[i_1\dots i_n]} = \gamma^{i_1\dots i_n}$.

Вместо $\gamma_{i_1\dots i_n}$ и $\gamma^{i_1\dots i_n}$ очень удобными и наглядными являются соответственно обозначения $(\sqrt{g})_{i_1\dots i_n}$ (или $\sqrt{g}_{i_1\dots i_n}$) и $(1/\sqrt{g})^{i_1\dots i_n}$.

Псевдотензор $(\sqrt{g})_{i_1\dots i_n}$ появляется, в частности, в следующих геометрических конструкциях.

Объем. Возьмем n векторов $\underset{1}{u},\dots,\underset{n}{u}$. В ориентированном базисе $e_1,\dots,e_n$ составим псевдоскаляр, т. е. псевдотензор типа (0, 0)

$$U = (\sqrt{g})_{i_1\dots i_n}\, \underset{1}{u}^{i_1} \dots \underset{n}{u}^{i_n}. \tag{3.1}$$

Очевидно,

$$U = \sqrt{g} \begin{vmatrix} \underset{1}{u}^{i_1} & \cdots & \underset{n}{u}^{i_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \underset{1}{u}^{i_n} & \cdots & \underset{n}{u}^{i_n} \end{vmatrix}, \tag{3.2}$$

где порядок $i_1,\dots,i_n$ соответствует ориентации базиса.

Псевдоскаляр U называется *объемом* параллелепипеда, построенного на векторах $\underset{1}{u},\dots,\underset{n}{u}$. Если $\underset{1}{u},\dots,\underset{n}{u}$ линейно зависимы, то $U = 0$. В противном случае знак U учитывает ориентацию $\underset{1}{u},\dots,\underset{n}{u}$: если набор $\underset{1}{u},\dots,\underset{n}{u}$ имеет ту же ориентацию, что и $e_1,\dots,e_n$, то $U > 0$, если противоположную, то $U < 0$. Эти свойства объема непосредственно следуют из формулы (3.2).

Векторное произведение. В ориентированном H^3 векторным произведением векторов x и y называется вектор z, определяемый в базисе, ориентация которого соответствует ориентации H^3, следующей формулой:

$$z^i = g^{ij}(\sqrt{g})_{jkl}x^k y^l.$$

(Если эту формулу считать действительной для всех ориентированных базисов, то z — псевдовектор.) Докажем, что так введенное векторное произведение совпадает с известным из аналитической геометрии: введенное нами векторное произведение дает ответ, не зависящий от взятого базиса, векторное произведение из аналитической геометрии — тоже; а как легко проверить, в ортогональном и нормированном базисе, имеющем нужную ориентацию, два рассматриваемых понятия совпадают.

Задача. «Придумать» векторное произведение в ориентированном H^n. Точнее. По тензорам x^i, y^i, g_{ij}, g^{ij}, $(\sqrt{g})_{i_1\ldots i_n}$, $(1/\sqrt{g})^{i_1\ldots i_n}$ и нулевым тензорам построить, пользуясь алгебраическими операциями, перечисленными в п. 3 § 1, выражение, билинейное по x и по y и дающее контравариантный вектор.

Ответ. При $n \neq 1$ и $n \neq 3$ — только $O^i_{jk}x^jy^k$, где O^i_{jk} — нулевой тензор. При $n = 3$ нужное выражение пропорционально тому, которое дает знакомое нам векторное произведение. При $n = 1$ искомое векторное произведение пропорционально векторному произведению, определенному следующим образом: превратим H^1 в числовую прямую, считая единицей конец единичного вектора, задающего ориентацию H^1; операция умножения на этой прямой дает векторное произведение, выражаемое, если ориентация базиса соответствует ориентации пространства, формулой

$$z^1 = \sqrt{g}\, x^1 y^1.$$

В тензорной записи она может быть представлена в виде

$$z^i = \sqrt{g}_j x^i y^j = \sqrt{g}_j x^j y^i = \left(\frac{1}{\sqrt{g}}\right)^i g_{jk} x^j y^k = \left(\frac{1}{\sqrt{g}}\right)^i \sqrt{g}_j x^j \sqrt{g}_k y^k.$$

Глава 2

ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ

В настоящей главе мы будем использовать некоторые понятия и факты топологии. Мы не будем стремиться сделать изложение безупречно строгим: в некоторых рассуждениях (особенно в § 4) мы ограничимся наглядными соображениями, считая их доказательствами. Основные конструкции главы достаточно содержательны для того частного случая, когда исходный объект (гладкое многообразие) — просто некоторая область (т. е. открытое связное множество) в координатном пространстве с одной фиксированной системой координат, порождающей остальные координатные системы.

§ 1. Основные понятия

1. Гладкое многообразие.

Определение. Хаусдорфово топологическое пространство называется n-мерным (топологическим) многообразием, если каждая точка этого пространства имеет окрестность, гомеоморфную некоторой области в R^n, $n \geqslant 1$.

Зафиксировав какой-либо гомеоморфизм, упоминаемый в определении, и выбрав в R^n какой-либо базис, мы введем тем самым в рассматриваемой окрестности координатную систему: координатами точки являются координаты соответствующего вектора R^n в выбранном базисе.

Сузим класс координатных систем. Зафиксируем r, $r = 1, 2, \ldots, \infty$. Пусть в некоторых областях n-мерного многообразия введены некоторые координатные системы (эти области и координатные системы далее будут называться *допустимыми*) так, что выполнены следующие условия.

1. Объединение допустимых областей есть все многообразие.
2. Если две допустимые области имеют непустое пересечение, то на этом пересечении переход от одних допустимых координат к другим задается r раз непрерывно дифференцируемыми функциями. Так как произведение якобианов двух возникающих систем функций равно единице, то якобиан каждой такой системы функций отличен от нуля в каждой точке.
3. Если какая-либо координатная система обладает тем свойством, что ее присоединение к совокупности допустимых систем не противоречит условию 2, то эта система допустимая.

Определение. n-мерное многообразие с выделенным классом координатных систем, удовлетворяющих условиям 1–2–3, назовем дифференцируемым (или гладким) многообразием класса r (стандартное обозначение: X^n_r, X^n или X).

Далее будем использовать только допустимые координатные системы.

На X^n_r имеет смысл понятие «q раз, $q \leqslant r$, непрерывно дифференцируемая функция», поскольку свойство функции иметь непрерывные частные производные до порядка q, очевидно, не зависит от выбора допустимой системы координат.

Два дифференцируемых многообразия одного и того же класса r назовем *диффеоморфными*, если существует их взаимно однозначное отображение, являющееся в обоих направлениях r раз непрерывно дифференцируемым, то есть задаваемое в допустимых системах координат r раз непрерывно дифференцируемыми функциями. Сами такие отображения назовем *диффеоморфизмами*.

Отметим различие в ролях, которые играют условия 1–2 и условие 3. Если на каком-либо многообразии выделено множество координатных систем, удовлетворяющих условиям 1–2, то это множество уже предопределяет X^n_r; остальные координатные системы могут быть выделены по этим исходным, для этого достаточно руководствоваться условием 3. Точнее. Если каждая из добавленных координатных систем обладает тем свойством, что добавление только ее одной не противоречит условию 2, то добавление всей совокупности этих систем не противоречит условию 2. Действительно, если две добавленные координатные области имеют непустое пересечение, то в достаточно малой окрестности каждой точки этого пересечения переход от одной добавленной координатной системы к другой можно осуществить в два этапа: переход от нее к какой-то из исходных, а затем переход от этой исходной ко второй добавленной. На каждом таком этапе переход задается r раз непрерывно дифференцируемыми функциями; тем самым суперпозиция этапов задается так же.

Обычный способ задания X_r^n — это фиксация исходного n-мерного многообразия и выделение некоторого легко обозримого набора допустимых областей и координатных систем так, чтобы удовлетворялись условия 1–2.

Любая область G в X_r^n является гладким многообразием того же класса, если взять те допустимые координатные системы X_r^n, области которых лежат в G.

Если задано некоторое X_r^n и целое число q, $1 \leqslant q < r$, то это X_r^n можно превратить в X_q^n, расширив множество допустимых координатных систем: берем допустимые координатные системы X_r^n и добавляем все те системы, которые могут быть получены для взятого q использованием свойства 3.

Примеры.

1. Возьмем R^n. Выберем в R^n какой-либо базис $e_1, \ldots, e_n$; этот базис порождает в R^n систему координат. Условия 1–2 выполнены для любого r. Зафиксируем r. Добавим к указанной выше координатной системе все те системы, которые удовлетворяют условию 3. Получим некоторое X_r^n.

2. В H^3 возьмем единичую сферу S: $(x, x) = 1$. Для каждой точки сферы в некоторой малой ее окрестности введем на сфере какую-либо сферическую (географическую) систему координат, для которой полюсы не лежат в этой окрестности и каждая точка окрестности имеет однозначно определенную долготу. Условия 1–2 выполнены для любого r. Фиксируя r, получим некоторое X_r^2.

3. В H^3 возьмем тор, задаваемый в некоторой прямоугольной системе координат x, y, z уравнением $(\sqrt{x^2+y^2}-a)^2+z^2=b^2$; a и b фиксированные числа, $0 < b < a$. Зададим этот тор уравнениями

$$x = (a + b\cos\lambda)\cos\mu, \quad y = (a + b\cos\lambda)\sin\mu, \quad z = b\sin\lambda.$$

Здесь $-\infty < \lambda < +\infty$, $-\infty < \mu < +\infty$; для того, чтобы пара λ, μ и пара λ', μ' определяли одну и ту же точку, необходимо и достаточно, чтобы было $(\lambda - \lambda')/(2\pi)$ — целое и $(\mu - \mu')/(2\pi)$ — целое. В малой окрестности каждой точки тора возьмем систему координат, выбрав какой-либо малый диапазон изменения λ и μ. Условия 1–2 выполняются для любого r. Фиксируя r, получим некоторое X_r^2.

4. Возьмем R^2. Введем какие-либо прямолинейные координаты x, y. Две точки (x, y) и (x', y') из R^2 назовем эквивалентными, если $x - x'$ — целое и $y - y'$ — целое. Точка пространства — точка R^2 с точностью до замены эквивалентной. Беря в малой окрестности каждой точки эту систему координат и фиксируя r, получим некоторое X_r^2. Это X_r^2 диффеоморфно тору (см. предыдущий пример).

5. Возьмем сферу S (см. пример 2). Каждые две диаметрально противоположные точки S объявим эквивалентными. Точки S с точностью до замены на эквивалентные — точки нашего многообразия. Беря системы координат, описанные в примере 2, и фиксируя r, получим некоторое X_r^2 (так называемую проективную плоскость).

6. Возьмем в R^2 в прямолинейных координатах x, y полосу: $-\infty < x < +\infty$, $-1 < y < 1$. Точки (x, y) и (x', y') объявим эквивалентными, если $x - x' = k$ — целое, а $y = (-1)^k y'$. Точки многообразия — точки полосы с точностью до замены на эквивалентные. Беря в малой окрестности точки координаты x, y и фиксируя r, получим некоторое X_r^2 (так называемый лист Мебиуса).

Далее для краткости изложения значение r и вообще порядок гладкости используемых функций не фиксируем; употребляем термин «гладкая функция», означающий «достаточно гладкая функция, так чтобы проводимые дифференциальные операции были законны».

Возьмем какое-либо отображение

$$\varphi\colon \underset{1}{X^m} \to \underset{2}{X^n}.$$

Пусть $\varphi(a) = b$. Если зафиксировать в окрестности точки a какую-либо координатную систему $x^1, \ldots, x^m$ в $\underset{1}{X^m}$, а в окрестности точки b какую-либо координатную систему $z^1, \ldots, z^n$ в $\underset{2}{X^n}$, то в некоторой окрестности точки a отображение задается формулами

$$z^1 = z^1(x^1, \ldots, x^m), \ldots, \qquad z^n = z^n(x^1, \ldots, x^m). \tag{1.1}$$

Функции $z^1, \ldots, z^n$ считаем достаточно гладкими. Отметим важный факт: $\operatorname{rank} \|\partial z^\alpha / \partial x^i\|$ в данной точке не зависит от выбираемых в $\underset{1}{X^m}$ и $\underset{2}{X^n}$ систем координат; это утверждение непосредственно следует из правила преобразования якобиевых матриц при переходе к новым переменным.

Определение. Отображение $\varphi\colon \underset{1}{X}^m \to \underset{2}{X}^n$ называется погружением, если $\operatorname{rank}\|\partial z^\alpha/\partial x^i\| = m$ для всех $x \in \underset{1}{X}^m$.

Пример 4 реализует погружение R^2 в тор.

Если φ — погружение $\underset{1}{X}$ в $\underset{2}{X}$ и $\underset{1}{X}$ гомеоморфно $\varphi(\underset{1}{X})$, то погружение называется *вложением*.

Если $\varphi\colon \underset{1}{X}^m \to \underset{2}{X}^n$, $m < n$, — вложение, то образ $\underset{1}{X}^m$ будем называть гладким m-мерным *подмногообразием* многообразия $\underset{2}{X}^n$.

Пусть $\varphi\colon \underset{1}{X}^m \to \underset{2}{X}^n$ — погружение; $b = \varphi(a)$. Зафиксируем в $\underset{1}{X}^m$ в некоторой окрестности точки a координаты $x^1, \dots, x^m$, а в $\underset{2}{X}^n$ в некоторой окрестности точки b координаты $z^1, \dots, z^n$. Так как $\operatorname{rank}\|\partial z^\alpha/\partial x^i\| = m$, то по теореме о неявных функциях в малой окрестности точки a переменные $x^1, \dots, x^m$ могут быть выражены из соотношений (1.1) через какие-то m переменных из числа $z^1, \dots, z^n$, для определенности через $z^1, \dots, z^m$. Тем самым эта окрестность вложена в $\underset{2}{X}^n$.

Пусть $m < n$. Тогда мы будем иметь в $\underset{2}{X}^n$ уравнение образа этой окрестности точки a

$$z^{m+1} = g^{m+1}(z^1, \dots, z^m), \dots, \quad z^n = g^n(z^1, \dots, z^m).$$

Перейдя в $\underset{2}{X}^n$ в окрестности точки b к координатам $w^1, \dots, w^n$:

$$w^1 = z^1, \dots, w^m = z^m,$$
$$w^{m+1} = z^{m+1} - g^{m+1}(z^1, \dots, z^m), \dots, w^n = z^n - g^n(z^1, \dots, z^m)$$

(это допустимые координаты, проверьте!), мы получим это уравнение в виде

$$w^{m+1} = 0, \dots, w^n = 0. \tag{1.2}$$

Значения $w^1, \dots, w^m$ — координаты на образе окрестности точки a.

В дальнейшем, если $\underset{1}{X}^m$ погружено в $\underset{2}{X}^n$, мы локально (т. е. в достаточно малой окрестности выбранной точки из $\underset{1}{X}^m$) для наглядности не будем различать $\underset{1}{X}^m$ и образ $\underset{1}{X}^m$ в $\underset{2}{X}^n$; основанием для этого является тот факт, что всякое погружение, как показано, локально является вложением. Поэтому при погружении $\underset{1}{X}^m$ в $\underset{2}{X}^n$, $m < n$, мы локально представляем себе $\underset{1}{X}^m$ реализованным в виде m-мерного гладкого подмногообразия многообразия $\underset{2}{X}^n$. При этом рассматриваемые на $\underset{1}{X}^m$ конструкции (например, системы координат) будем представлять в виде конструкций на образе $\underset{1}{X}^m$ в $\underset{2}{X}^n$.

Кривой, соединяющей точки a и b, принадлежащие X^n, называется образ такого гладкого отображения $\varphi : [t_1, t_2] \to X^n$, что $\varphi(t_1) = a$, $\varphi(t_2) = b$.

Далее будем считать, что X^n связно, т. е. что для любых двух его точек существует кривая, их соединяющая. Все примеры, приведенные выше, суть примеры связных многообразий. Читатель сам приведет пример многообразия, не являющегося связным.

Приведем без доказательства некоторые тонкие результаты, хорошо иллюстрирующие различие понятий «топологическое многообразие» и «гладкое многообразие».

Существуют топологические многообразия, в которых невозможно ввести гладкость.

Можно привести примеры гомеоморфных, но не диффеоморфных многообразий. В частности, обозначим через $\theta(n)$ максимальное число попарно недиффеоморфных гладких многообразий класса дифференцируемости 1, гомеоморфных n-мерной сфере. Для некоторых n значения $\theta(n)$ таковы:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\theta(n)$	1	1	1	?	1	1	28	2	8	6	992	1

2. Касательное пространство. Рассмотрим какое-либо X^n и возьмем $\underset{0}{x} \in X^n$.

Определение. **Касательным** к X^n в точке $\underset{0}{x}$ **пространством** называется линейное **пространство** R^n, для которого установлены следующие связи с X^n:

1. каждой системе координат $x^1, \dots, x^n$, введенной в окрестности $\underset{0}{x}$, соответствует базис $e_1, \dots, e_n$ в R^n;
2. при переходе от одной системы координат $x^1, \dots, x^n$ к другой системе $x^{1'}, \dots, x^{n'}$ соответствующие базисы связаны формулой

$$e_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\bigg|_{\underset{0}{x}} e_i;$$

здесь и далее всюду в подобных случаях индекс i' в выражении $\partial x^i/\partial x^{i'}$ считается входящим в строку ковариантных индексов, а индекс i — в строку контравариантных индексов.

Дадим способ построения касательного пространства. Возьмем $\underset{0}{x} \in X^n$. Возьмем специально для этой точки $\underset{0}{x}$ экземпляр R^n. Выберем в окрестности $\underset{0}{x}$ какую-либо координатную систему и в этом R^n какой-либо базис. Этот базис назначим соответствующим выбранной координатной системе. При переходе в окрестности $\underset{0}{x}$ к новой системе координат будем соответственно менять базис в этом R^n. Замечательно, что эти базисы преобразуются указанным образом при переходе от одной к другой для любых двух координатных систем, а не только при переходе от начально выбранной координатной системы к любой другой (докажите!).

Отметим, что если $\underset{1}{R}{}^n$ и $\underset{2}{R}{}^n$ два касательных пространства в одной и той же точке $\underset{0}{x} \in X^n$, то между $\underset{1}{R}$ и $\underset{2}{R}$ устанавливается естественный изоморфизм: выбираем в окрестности $\underset{0}{x}$ какую-либо координатную систему; ей в $\underset{1}{R}$ и $\underset{2}{R}$ соответствуют определенные базисы; для $\underset{1}{u} \in \underset{1}{R}$ и $\underset{2}{u} \in \underset{2}{R}$ полагаем $\underset{1}{u} \longleftrightarrow \underset{2}{u}$, если $\underset{1}{u}{}^i = \underset{2}{u}{}^i$ (выполнение последнего равенства в силу правила изменения базисов в $\underset{1}{R}$ и $\underset{2}{R}$ не зависит от выбираемой системы координат).

Таким образом, для каждой точки $\underset{0}{x} \in X^n$ касательное пространство существует и единственно.

Обозначения, которые мы далее примем в качестве стандартных:

- $\dfrac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} = A^i_{i'}$;

- $T^n(x)$ (а также $T(x)$, $T^n_X(x)$, T, T^n) — касательное к X в точке x пространство.

Подчеркнем, что пространства, касательные к X^n в разных точках, — это разные линейные пространства, «не имеющие друг к другу никакого отношения».

Если φ отображение $\underset{1}{X}^m$ в $\underset{2}{X}^n$, то φ индуцирует для каждого $\underset{0}{x} \in \underset{1}{X}$ линейное отображение $\underset{1}{T}$ в $\underset{2}{T}$, где $\underset{1}{T}$ — касательное пространство к $\underset{1}{X}$ в точке $\underset{0}{x}$, а $\underset{2}{T}$ — к $\underset{2}{X}$ в точке $\varphi(\underset{0}{x})$. Это линейное отображение, обозначим его B, строится следующим образом. Возьмем на $\underset{1}{X}$ в окрестности $\underset{0}{x}$ какую-либо координатную систему $x^1, \ldots, x^m$ и на $\underset{2}{X}$ в окрестности $\varphi(\underset{0}{x})$ какую-либо координатную систему $y^1, \ldots, y^n$. Эти координатные системы определяют базисы в $\underset{1}{T}$ и $\underset{2}{T}$. В этих базисах B задается формулой

$$z^\alpha = B^\alpha_i u^i.$$

Здесь $u \in \underset{1}{T}$, $z \in \underset{2}{T}$, а $B^\alpha_i = \dfrac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}(\underset{0}{x})$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что так определенное отображение не зависит от выбираемых в $\underset{1}{X}$ и $\underset{2}{X}$ систем координат.

Это линейное отображение $\underset{1}{T}$ в $\underset{2}{T}$ называется *дифференциалом* отображения φ; обозначение:

$$B = \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Пусть $l: x = x(t)$ — параметрически заданная кривая в X^n, $x(t_0) = \underset{0}{x}$. Введем в окрестности $\underset{0}{x}$ систему координат $x^1, \ldots, x^n$. Сопоставим числа $u^i = \dfrac{dx^i}{dt}\Big|_{t_0}$. Этим числам соответствует вектор из $T^n(\underset{0}{x})$. Действительно, при переходе к другой системе координат $x^{1'}, \ldots, x^{n'}$ мы получим

$$u^{i'} = \frac{dx^{i'}}{dt}\Big|_{t_0} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\Big|_{\underset{0}{x}} \frac{dx^i}{dt}\Big|_{t_0} = A^{i'}_i u^i.$$

Определение. Построенный выше вектор называется касательным вектором к l при $t = t_0$; будем обозначать его $u = \frac{dx}{dt}(t_0)$.

Если взять две параметризации l, то получившиеся в какой-либо точке этой кривой два касательных вектора, очевидно, коллинеарны.

Приведем некоторые дополнения к введенным определениям.

Беря всевозможные кривые, проходящие через точку $\underset{0}{x}$, и соответствующие касательные к ним векторы, мы получим все векторы из $T^n(\underset{0}{x})$; можно считать, таким образом, что $T^n(\underset{0}{x})$ состоит из векторов, касательных в $\underset{0}{x}$ к различным кривым.

Если φ — погружение $\underset{1}{X^m}$ в $\underset{2}{X^n}$, то для каждого $x \in \underset{1}{X^m}$ касательное пространство $T^m(x)$ при применении $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x)$ переходит в некоторое m-мерное линейное подпространство касательного пространства $T^n(\varphi(x))$: это подпространство состоит из векторов, касательных в $\varphi(x)$ к кривым, лежащим в $\varphi(Q)$, где Q — некоторая окрестность x в X^m.

Зафиксируем в окрестности точки $\underset{0}{x} \in X^n$ какую-либо систему координат $x^1, \ldots, x^n$. Эта система координат порождает взаимно однозначное отображение этой окрестности на некоторую окрестность нуля $T^n(\underset{0}{x})$: точке $x \in X^n$ соответствует вектор $z \in T^n(\underset{0}{x})$, если $z^i = x^i - \underset{0}{x^i}$. Если взять в этой же окрестности точки $\underset{0}{x}$ другую систему координат $x^{1'}, \ldots, x^{n'}$, мы получим для той же точки x вектор z'. Возможно $z \neq z'$. Однако, как нетрудно проверить, если x близко к $\underset{0}{x}$, то координаты вектора $z' - z$ в каждой из этих двух координатных систем суть величины второго порядка малости относительно $\sum\limits_i |x^i - \underset{0}{x^i}|$ (или, что эквивалентно, относительно $\sum\limits_{i'} |x^{i'} - \underset{0}{x^{i'}}|$). Другими словами, каждая система координат, определенная в окрестности $\underset{0}{x}$, порождает свое отображение этой окрестности $\underset{0}{x}$ на некоторую окрестность нуля $T^n(\underset{0}{x})$; главная (линейная) часть этих отображений общая.

Полезно представлять себе наглядно связь между X^n и $T^n(\underset{0}{x})$ так: $\underset{0}{x}$ — это нуль $T^n(\underset{0}{x})$; точки X^n, бесконечно близкие к $\underset{0}{x}$ (т. е. точки, имеющие координаты $\underset{0}{x}^i + dx^i$, где dx^i бесконечно малы, — мы разрешаем в этом случае запись $\underset{0}{x} + dx$), могут быть снесены с неопределенностью второго порядка малости на $T^n(\underset{0}{x})$, а именно, точка $\underset{0}{x} + dx$, перенесенная на $T^n(\underset{0}{x})$, совпадает с $dx \in T^n(\underset{0}{x})$. Здесь dx обозначает и бесконечно малое смещение на X^n и дифференциал этого смещения, т. е. вектор касательного пространства. Если $\varphi : \underset{1}{X}^m \to \underset{2}{X}^n$ и $y = \varphi(x)$, то $dy = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx$.

Пример. Пусть X^m погружено в линейное пространство R^n; $z = z(x^1, \ldots, x^m)$, $z \in R^n$, $x^1, \ldots, x^m$ — координаты на X^m. Тогда $T^m(\underset{0}{x})$ может быть реализовано следующим образом.

Возьмем $e_i = \left.\frac{\partial z}{\partial x^i}\right|_{\underset{0}{x}}$, $i = 1, \ldots, m$; e_i — векторы R^n. Так как $\operatorname{rank} \frac{\partial z}{\partial x} = m$, то $e_1, \ldots, e_m$ линейно независимы. Они порождают некоторое линейное подпространство R^m. Построенное R^m обладает всеми свойствами касательного пространства; $e_1, \ldots, e_m$ — базис R^m, порожденный системой координат $x^1, \ldots, x^m$.

Для большей наглядности сдвинем параллельно это подпространство так, чтобы его нуль попал в $z(\underset{0}{x})$. Мы получим желаемую картину взаимного расположения X^m (точнее, образа в R^n малой окрестности в X^m точки $\underset{0}{x}$) и $T^m(\underset{0}{x})$. Приведем рис. 1 для $m = 2$, $n = 3$.

Далее, если X^m погружено в R^n, мы всегда будем брать $e_i = \partial z / \partial x^i$.

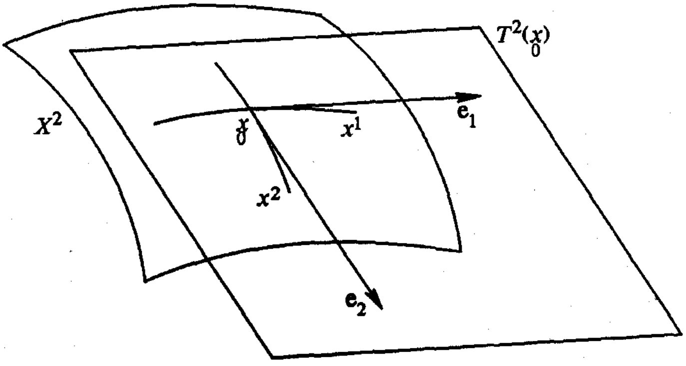

Рис. 1

3. Тензорное поле.

Определение. Тензорным полем типа (p, q) на X^n называется функция

$$u = F(x),$$

где $x \in X^n$, $u(x)$ — тензор типа (p, q) в $T^n(x)$.

Естественным образом определяется сумма двух однотипных тензорных полей, произведение, свертка и т. д. Распространение тензорной алгебры на понятие тензорного поля совершенно очевидно.

Выбрав в X^n какую-либо систему координат $x^1, \ldots, x^n$, мы породим для каждой точки x из координатной области соответствующую координатную систему в $T^n(x)$. Тем самым координаты тензора $u^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ становятся функциями $x^1, \ldots, x^n$. Без всяких дополнительных оговорок мы предполагаем эти функции достаточно гладкими.

4. Векторное поле (пример тензорного поля). В соответствии с определением, данным выше, векторное поле $u(x)$ на X^n в системе координат $x^1, \ldots, x^n$ задается функциями (координатами вектора) $u^i(x^1, \ldots, x^n)$, $i = 1, \ldots, n$, так, что при переходе к другой системе координат $x^{1'}, \ldots, x^{n'}$ координаты $u^{i'}(x)$ связаны с координатами $u^i(x)$ формулами

$$u^{i'} = A^{i'}_i u^i, \quad A^{i'}_i = \left.\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right|_x.$$

Если X^m погружено в R^n, то поле $u(x)$ может быть локально реализовано как поле векторов R^n, определенное на образе X^m; вектор $u(x)$ с началом в точке x касается образа X^m. При этом вектор $u(x)$ не зависит от выбора координат в X^m и R^n (несложную проверку этого опускаем, см. пример п. 2).

Векторное поле на гладком многообразии — богатый объект для изучения. Бегло упомянем лишь одну тему. Векторное поле $u(x)$ порождает в каждой системе координат $x^1, \ldots, x^n$ в X^n автономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx^i}{dt} = u^i(x^1, \ldots, x^n), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.3}$$

Зададим начальные данные: $x(0) = z$. В силу гладкости $u(x)$ (напомним: все используемые нами функции — гладкие) решение системы (1.3), удовлетворяющее этим начальным условиям, существует и единственно. Обозначим его $\varphi(t, z)$. Важно, что функция $\varphi(t, z)$ не зависит от выбора координатной системы, в которой составлялась система обыкновенных дифференциальных уравнений (1.3). Это следует из того, что dx/dt и u — векторы и тем самым соотношения (1.3) сохраняются при переходе к другой координатной системе.

При фиксированном t функция $\varphi(t, x)$, рассматриваемая в достаточно малой окрестности какой-либо точки $\underset{0}{x}$, осуществляет диффеоморфизм этой окрестности на некоторую окрестность точки $\varphi(t, \underset{0}{x})$. Эти диффеоморфизмы обладают групповым свойством

$$\varphi(t_2, \varphi(t_1, x)) = \varphi(t_2 + t_1, x).$$

Для малых t справедливо

$$\varphi^i(t, x) = x^i + tu^i(x) + O(t^2).$$

Имеет смысл говорить, что для бесконечно малых dt точка x переходит в точку $x + u(x)dt$. Соответствующий диффеоморфизм определяет (см. п. 2) линейное соответствие между касательными пространствами в точках x и $x + u(x)\,dt$. Это соответствие записывается в выбранной системе координат следующим образом. Для $B^i_j = \dfrac{\partial\varphi^i}{\partial x^j}$ из (1.3) получаем систему уравнений

$$\frac{dB^i_j}{dt} = \frac{\partial u^i}{\partial x^k} B^k_j$$

(уравнения в вариациях для (1.3)). Так как $B^i_j = \delta^i_j$ при $t = 0$, то

$$B^i_j = \delta^i_j + \frac{\partial u^i}{\partial x^j} dt.$$

Это дает: вектор w^i из $T^n(x)$ соответствует вектору $w^i + dw^i$ из $T^n(x + u(x)\,dt)$, если $dw^i = \dfrac{\partial u^i}{\partial x^j} w^j dt$.

Пусть на X^n задано тензорное поле w какого-либо типа. Можно определить операцию дифференцирования поля w вдоль решений системы (1.3) следующим образом. Возьмем $w(x + u\,dt)$ — это тензор в $T(x+u\,dt)$; перенесем его в $T(x)$, пользуясь указанным выше соответствием $T(x+u\,dt)$ и $T(x)$, получим $\widetilde{w}(x)$; составим $\widetilde{w}(x)-w(x)$.

Линейная по dt часть этой разности, обозначим ее $\underset{L}{d}w(x)$, называется *дифференциалом Ли* тензорного поля w.

В силу того, что использованное соответствие между $T(x)$ и $T(x+u\,dt)$ не зависит от выбора координатной системы, $\underset{L}{d}w(x)$ — тензор в $T(x)$. Мы не будем приводить нужные выкладки, проведенное выше рассуждение полностью их определяет (близкую конструкцию мы подробно опишем в § 2 гл. 3). Приведем окончательную формулу:

$$\underset{L}{d}w^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} = \left(u^h \frac{\partial w^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}}{\partial x^h} - \sum_{k=1}^{p} w^{i_1\dots i_{k-1}hi_{k+1}\dots i_p}_{j_1\dots j_q} \frac{\partial u^{i_k}}{\partial x^h} + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{q} w^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_{k-1}hj_{k+1}\dots j_q} \frac{\partial u^h}{\partial x^{j_k}}\right) dt. \qquad (1.4)$$

В частности, векторное поле $u(x)$ определяет операцию дифференцирования скалярной функции $w(x)$ вдоль решений автономной системы (1.3) (вдоль поля u):

$$Mw = \frac{\underset{L}{d}w}{dt} = u^i \frac{\partial w}{\partial x^i}$$

(проверьте, что результат вычисления Mw не зависит от выбора системы координат).

Задача. Пусть на X^n задано два векторных поля $u(x)$ и $v(x)$. Сохраним обозначение $\varphi(t,x)$, введенное выше для поля $u(x)$; соответствующую функцию для поля $v(x)$ обозначим $\psi(t,x)$. Доказать, что для малых t имеет место

$$\psi(-t,\varphi(-t,\psi(t,\varphi(t,x)))) = x + t^2 a(x) + O(t^3),$$

где векторное поле $a(x)$ вычисляется по формуле

$$a^i = u^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} - v^j \frac{\partial u^i}{\partial x^j}$$

(проверьте, что a — векторное поле).

Векторное поле a называется ***коммутатором*** векторных полей u и v (происхождение термина становится понятным, если вспомнить смысл функций φ и ψ); обозначение: $a=[u,v]$.

Задача. Сохраняя обозначение M для операции дифференцирования скалярной функции $w(x)$ вдоль поля $u(x)$, обозначим через N соответствующую операцию для поля $v(x)$. Вычислить

$$M(Nw) - N(Mw).$$

5. Ориентация. Псевдотензорное поле

5.1. Ориентация. Возьмем какую-нибудь систему координат в X^n, определенную в некоторой области. Установим какой-либо порядок перечисления координатных индексов, рассматриваемый с точностью до четных перестановок. Мы получаем *ориентированную систему координат*. Пусть две ориентированные системы координат имеют пересекающиеся области. Эти две системы назовем *одинаково ориентированными*, если $\det \|A^{i}_{i'}\| > 0$ на пересечении.

X^n назовем *ориентированным*, если

1. каждая допустимая координатная система ориентирована;
2. каждые две координатные системы с пересекающимися областями ориентированы одинаково.

Оказывается, если X^n связно, то реализуется одна из двух возможностей:

1. в X^n нельзя ввести ориентацию (X^n неориентируемо);
2. X^n можно ориентировать двумя способами.

Докажем это утверждение. Пусть X^n ориентируемо. В каждой допустимой области ориентацию можно ввести двумя способами. Если две допустимые области пересекаются, то ориентация одной из них однозначно определяет ориентацию другой. Поэтому ориентация одной допустимой области однозначно определяет ориентацию всех тех допустимых областей, к которым можно перейти за конечное число шагов, на каждом из которых мы переходим к допустимой области, имеющей непустое пересечение с объединением областей, уже пройденных на предыдущих шагах. Если взять какую-либо кривую, соединяющую две точки X^n, то от допустимой области, содержащей начало кривой, можно за конечное число указанных шагов перейти к допустимой области, содержащей конец кривой (строгое доказательство этого наглядного факта опускаем). Таким образом, если X^n связно и ориентируемо, то ориентацию на X^n можно ввести двумя способами.

Примером X^n, в котором невозможно согласовать ориентации допустимых областей, является лист Мебиуса; здесь легко построить замкнутую кривую, вдоль которой описанный способ продолжения ориентации приводит при возвращении в исходную точку к противоположной ориентации. Также неориентируема проективная плоскость (исследуйте сами!).

5.2. Псевдотензорное поле. Ориентация координатной системы устанавливает очевидным образом ориентацию базисов в касательных пространствах. Тем самым появляется возможность рассматривать псевдотензорные поля и соответствующие операции над ними.

§ 2. Тензорные дифференциальные операции

1. Предварительные соображения и примеры. Мы хотим ввести операцию дифференцирования тензорного поля на X^n, не оснащенном никакими дополнительными структурами. При этом мы сталкиваемся со следующей трудностью. Обычный подход

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$

совершенно непригоден, так как $y(x)$ и $y(x+h)$ — элементы разных пространств (тензор в $T^n(x)$ и тензор в $T^n(x+h)$), между которыми не установлено никакой связи; выражение $y(x+h) - y(x)$ не имеет смысла. Что же, совсем отказаться от попыток ввести операцию дифференцирования? Оказывается, нет. Предварительно рассмотрим три примера.

1. Пусть $u(x)$ скалярная функция на X^n (тензорное поле типа $(0,0)$). Составим в каждой точке числа

$$v_i = \frac{\partial u}{\partial x^i}.$$

Легко проверить, что v_i — тензор (ковектор).

Обозначение: $v = \operatorname{Grad} u$.

2. Пусть u_i — поле ковектора. Составим в каждой точке числа

$$v_{ji} = \frac{\partial u_i}{\partial x^j}.$$

Легко проверить, что v_{ji} не образуют тензора: при переходе к новой системе координат они преобразуются по формуле

$$v_{j'i'} = A^j_{j'} A^i_{i'} v_{ji} + \frac{\partial A^r_{i'}}{\partial x^{j'}} u_r.$$

Заметим, что

$$\frac{\partial A^r_{i'}}{\partial x^{j'}} = \frac{\partial^2 x^r}{\partial x^{j'} \partial x^{i'}},$$

поэтому выражение $\partial A^r_{i'}/\partial x^{j'}$ симметрично по i', j'. Тогда $v_{[j'i']} = A^j_{j'} A^i_{i'} v_{[ji]}$. А отсюда следует, что $w_{ji} = v_{[ji]}$ — тензор.

Обозначение: $2w = \mathrm{Rot}\, u$.

3. Пусть $u^i_{i_1\ldots i_n}$ — тензорное поле в X^n такое, что $u^i_{[i_1\ldots i_n]} = u^i_{i_1\ldots i_n}$. Составим $v^i_{ji_1\ldots i_n} = \partial u^i_{i_1\ldots i_n}/\partial x^j$. Это не тензор. Но, оказывается, $w_{i_1\ldots i_n} = v^i_{ii_1\ldots i_n}$ — тензор. В п. 2 мы докажем утверждение, для которого этот пример — частный случай.

Обозначение: $w = \mathrm{Div}\ u$.

2. Определение тензорных дифференциальных операций в X^n.

В этом пункте мы будем рассматривать в X^n два класса тензорных полей:

$$u\colon u_{i_1\ldots i_p},\ u_{[i_1\ldots i_p]} = u_{i_1\ldots i_p}, \quad p \geqslant 0;$$

$$v\colon v^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_n},\ v^{[i_1\ldots i_p]}_{[j_1\ldots j_n]} = v^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_n}, \quad p \geqslant 0.$$

Эти два класса связаны следующим образом:

- если $u_{i_1\ldots i_p}$ — поле первого класса, то поле

$$v^{i_1\ldots i_{n-p}}_{j_1\ldots j_n} = \delta^{i_1}_{[j_1} \ldots \delta^{i_{n-p}}_{j_{n-p}} u_{j_{n-p+1}\ldots j_n]}$$

— второго класса;

- если $v^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_n}$ — поле второго класса, то поле

$$u_{i_1\ldots i_{n-p}} = v^{h_1\ldots h_p}_{i_1\ldots i_{n-p} h_1\ldots h_p}$$

— первого класса.

Здесь δ — тензор Кронекера, $p \leqslant n$.

Введем две дифференциальные операции. Будем пользоваться принятым в тензорном анализе обозначением $\partial_i = \partial/\partial x^i$.

Ротор. Пусть $u_{i_1\ldots i_p}$ — поле первого класса. Тогда $v_{i_1\ldots i_{p+1}} = \partial_{[i_1}u_{i_2\ldots i_{p+1}]}$ — тензорное поле. Доказательство — несущественное усложнение рассуждений примера 2 п. 1.

Обозначение: $(p+1)v = \operatorname{Rot} u$.

Дивергенция. Пусть $u^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_n}$ — поле второго класса, $p \geqslant 1$. Тогда $w^{i_1\ldots i_{p-1}}_{j_1\ldots j_n} = \partial_k u^{ki_1\ldots i_{p-1}}_{j_1\ldots j_n}$ — тензорное поле. Докажем это. Имеет место при $p \leqslant n$ формула

$$\partial_k u^{ki_1\ldots i_{p-1}}_{j_1\ldots j_n} = (-1)^{np-1}\frac{n!}{p!(n-p)!}\delta^{i_1}_{[j_1}\ldots\delta^{i_{p-1}}_{j_{p-1}}\partial_{j_p}u^{h_1\ldots h_p}_{j_{p+1}\ldots j_n]h_1\ldots h_p}, \qquad (2.1)$$

в справедливости которой легко убедиться, сопоставив отдельные слагаемые, возникающие в результате операций альтернирования и свертки. Справа стоит выражение, получаемое тензорными алгебраическими операциями из $\partial_{[j_p}v_{j_{p+1}\ldots j_n]}$, где $v_{j_{p+1}\ldots j_n} = u^{h_1\ldots h_p}_{j_{p+1}\ldots j_n h_1\ldots h_p}$ (альтернирование по $j_1\ldots j_n$, очевидно, можно предварить альтернированием по $j_p\ldots j_n$). А при определении операции Rot было указано, что $\partial_{[j_p}v_{j_{p+1}\ldots j_n]}$ — тензор.

Обозначение: $w = \operatorname{Div} u$.

При $p = 0$ по определению $\operatorname{Div} u = 0$.

Формула (2.1) выражает операцию Div через операцию Rot. Можно также выразить Rot через Div. Введем для тензорного поля u: $u_{i_1\ldots i_p}$, $u_{[i_1\ldots i_p]} = u_{i_1\ldots i_p}$, $0 \leqslant p \leqslant n-1$, тензорное поле z: $z^{j_1\ldots j_{n-p}}_{i_1\ldots i_n}$ формулой $z^{j_1\ldots j_{n-p}}_{i_1\ldots i_n} = \delta^{j_1}_{[i_1}\ldots\delta^{j_{n-p}}_{i_{n-p}}u_{i_{n-p+1}\ldots i_n]}$; тогда аналогично (2.1) имеет место формула

$$\partial_{[i_1}u_{i_2\ldots i_{p+1}]} = (-1)^{np}\frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!}\partial_k z^{kh_1\ldots h_{n-p-1}}_{i_1\ldots i_{p+1}h_1\ldots h_{n-p-1}}. \qquad (2.2)$$

Операции Rot и Div можно применять и к псевдотензорным полям: получаются также псевдотензорные поля.

3. Некоторые дополнения.

1. А операция Grad? Операция Grad, очевидно, есть частный случай операции Rot : Grad скалярной функции — это Rot тензорного поля типа $(0,0)$.

2. Оказывается, к операциям Rot и Div (вместе с алгебраическими тензорными операциями) сводятся все дифференциальные операции, которые могут быть получены по следующей схеме: пусть задано

тензорное поле $u^{\cdots}_{\cdots}$; составим в каждой точке числа $\partial_i u^{\cdots}_{\cdots}$; будем употреблять операции перестановки индексов, сложения и умножения на число с целью получить из этих чисел тензорное поле[1].

Формулы (2.1), (2.2) показывают, что сами операции Div и Rot могут быть тензорно выражены одна через другую.

3. Легко убедиться, что $\operatorname{Rot}\operatorname{Rot} u = 0$. Действительно, пусть $v = \operatorname{Rot} u$, $w = \operatorname{Rot} v$. Это дает

$$v_{i_1\dots i_{p+1}} = (p+1)\partial_{[i_1}u_{i_2\dots i_{p+1}]},$$
$$w_{i_1\dots i_{p+2}} = (p+2)\partial_{[i_1}v_{i_2\dots i_{p+2}]} = (p+2)(p+1)\partial_{[i_1}\partial_{i_2}u_{i_3\dots i_{p+2}]}.$$

Но для любой гладкой функции $\varphi(x^1, \ldots, x^n)$ имеет место $\partial_{[i}\partial_{j]}\varphi = 0$; отсюда следует, что $w = 0$.

Этот факт углубляет

Теорема Пуанкаре. *Пусть* $v = \operatorname{Rot} u$, *тогда* $\operatorname{Rot} v = 0$. *Пусть* v *— ковариантное антисимметричное поле ненулевой валентности такое, что* $\operatorname{Rot} v = 0$. *Тогда для каждой точки в* X^n *существует такая ее окрестность и в этой окрестности такое поле* u, *что* $v = \operatorname{Rot} u$.

Доказательство. Первая часть теоремы уже доказана предшествующими выкладками. Докажем второе утверждение. Пусть

$$v\colon v_{i_1\dots i_{p+1}} = v_{[i_1\dots i_{p+1}]}, \quad p \geqslant 0, \quad \partial_{[i_1}v_{i_2\dots i_{p+2}]} = 0.$$

Все рассмотрение проводится в фиксированной системе координат в окрестности Q точки $\underset{0}{x}$ с координатами $x^1 = \ldots = x^n = 0$, Q: $|x^i| < \alpha$, $i = 1, \ldots, n$, α — фиксированное положительное число. Построим в Q поле u: $u_{i_1\dots i_p} = u_{[i_1\dots i_p]}$ такое, что

$$(p+1)\partial_{[i_1}u_{i_2\dots i_{p+1}]} = v_{i_1\dots i_{p+1}}. \tag{2.3}$$

Для понимания последующих конструкций полезно отметить, что это поле u определяется с большим произволом: если мы построили какое-то нужное нам поле u, то при $p > 0$ можно взять любое поле w: $w_{i_1\dots i_{p-1}} = w_{[i_1\dots i_{p-1}]}$ и поле $u + \operatorname{Rot} w$ тоже будет обладать требуемым свойством.

Мы построим вполне определенное поле u. Строить его будем методом математической индукции по n при фиксированном p. При

---

[1] См.: *Схоутен Я.* Тензорный анализ для физиков. — М.: Наука, 1965.

$n \leqslant p$ имеем $v = 0$, поэтому достаточно взять $u = 0$. Пусть заключение теоремы верно, если размерность многообразия меньше n. Возьмем $(n-1)$-мерное подмногообразие X^{n-1}, задаваемое уравнением $x^n = 0$. Обозначим $\widetilde{v}_{i_1\ldots i_{p+1}}$ значения $v_{i_1\ldots i_{p+1}}$ при $x^n = 0$. По индуктивному предположению на X^{n-1} существует поле $\widetilde{u}_{i_1\ldots i_p}$ такое, что

$$(p+1)\partial_{[i_1}\widetilde{u}_{i_2\ldots i_{p+1}]} = \widetilde{v}_{i_1\ldots i_{p+1}},$$

где $i_1, \ldots, i_{p+1}$ пробегают значения от 1 до $n-1$. Будем искать нужное поле $u_{i_1\ldots i_p}$ в Q такое, что $u_{i_1\ldots i_p} = 0$, если среди индексов $i_1, \ldots, i_p$ встречается значение n. Тогда для $u_{i_1\ldots i_p}$ ($i_1, \ldots, i_p$ не принимают значения n) получаем уравнения

$$\partial_n u_{i_1\ldots i_p} = (p+1)\partial_{[n}u_{i_1\ldots i_p]} = v_{ni_1\ldots i_p}.$$

Решением этих уравнений в области Q являются функции

$$u_{i_1\ldots i_p}(x) = \widetilde{u}_{i_1\ldots i_p}(\widetilde{x}) + \int\limits_0^{x^n} v_{ni_1\ldots i_p}(\widetilde{x}, \xi)d\xi; \tag{2.4}$$

здесь $\widetilde{x}$ — точка на X^{n-1}, имеющая координаты, равные первым $n-1$ координатам точки x.

Построенное таким образом поле $u(x)$ в Q — полностью определено; очевидно, $u_{i_1\ldots i_p} = u_{[i_1\ldots i_p]}$. Осталось показать, что в Q действительно имеет место (2.3) для всех наборов индексов $i_1, \ldots, i_{p+1}$, пробегающих значения от 1 до n. Если один из $i_1, \ldots, i_{p+1}$ равен n, то нужное утверждение следует из способа построения u (см. (2.4)). Пусть ни один из индексов $i_1, \ldots, i_{p+1}$ не равен n. Обозначим

$$z_{i_1\ldots i_{p+1}} = (p+1)\partial_{[i_1}u_{i_2\ldots i_{p+1}]} - v_{i_1\ldots i_{p+1}}.$$

При $x^n = 0$ имеем

$$z_{i_1\ldots i_{p+1}} = (p+1)\partial_{[i_1}\widetilde{u}_{i_2\ldots i_{p+1}]} - \widetilde{v}_{i_1\ldots i_{p+1}} = 0.$$

Кроме того, в Q имеет место

$$\begin{aligned}\partial_n z_{i_1\ldots i_{p+1}} &= (p+1)\partial_{[i_1}v_{|n|i_2\ldots i_{p+1}]} - \partial_n v_{i_1\ldots i_{p+1}} = \\ &= -(p+2)\partial_{[n}v_{i_1\ldots i_{p+1}]} = 0\end{aligned}$$

(индекс n в одном из членов заключен в $||$ в знак того, что он не участвует в альтернировании). Из последних двух формул вытекает, что в Q имеет место равенство $z_{i_1\ldots i_{p+1}} = 0$, что и требуется.

Задача. Пользуясь связью между операциями Rot и Div сформулировать и доказать аналогичную теорему для операции Div.

4. Для H^3 в векторном анализе вводятся операции: градиент скалярной функции (результат — векторное поле), ротор векторного поля (результат — векторное (для ориентированного H^3) поле), дивергенция векторного поля (результат — скалярное поле); соответствующие обозначения grad, rot, div.

Выберем в H^3 какую-либо криволинейную систему координат. Приведем запись соответствующих этим операциям выражений (g_{ij}, $\sqrt{g}_{ijk}$ и т. д. — (псевдо)тензорные поля, соответствующие метрическому тензору H^3):

$$u = \operatorname{grad} v: \qquad u^i = g^{ij}\partial_j v,$$

$$u = \operatorname{rot} v: \qquad u^i = \left(\frac{1}{\sqrt{g}}\right)^{ijk} \partial_{[j}(v^s g_{k]s})$$

(система координат должна быть ориентирована в соответствии с ориентацией H^3),

$$u = \operatorname{div} v: \quad u = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\right)^{ijk} \partial_s(v^s \sqrt{g}_{ijk}).$$

Доказательство этих формул. В правых частях равенств написаны выражения, дающие тензор нужного типа. В прямоугольной системе координат, порожденной ортогональным и нормированным базисом H^3, указанные выражения дают нужные значения. Следовательно, эти выражения дают нужные значения в любой системе координат.

Выражение для операции div можно упростить. Очевидно,

$$u = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_s(v^s\sqrt{g}).$$

Однако в то время как из исходной записи и результатов п. 2 следует независимость значения div от выбора системы координат, для упрощенного вида этот факт нуждается в дополнительном доказательстве.

Задача. Сопоставьте теорему Пуанкаре с рассматриваемыми в векторном анализе условием того, что заданное векторное поле является полем градиента некоторой скалярной функции, и условием того, что заданное векторное поле является полем ротора некоторого векторного поля.

Операции grad и div можно обобщить для векторного анализа в H^n. Операция grad определяется той же формулой, что и при $n = 3$, операция div — формулой

$$u = \operatorname{div} v: \quad u = \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\right)^{i_1\ldots i_n} \partial_s(v^s\sqrt{g}_{i_1\ldots i_n}) = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_s(v^s\sqrt{g}).$$

Операции grad , rot , div сводятся к операциям Grad, Rot , Div ; это сведение существенно использует то, что в рассматриваемом пространстве введен метрический тензор, и то, что для rot берем $n = 3$. Использование в векторном анализе операций Grad, Rot и Div не в «чистом» виде вызвано стремлением обойтись только понятиями скалярного и векторного полей. При $n = 3$ и при наличии метрического тензора это оказалось возможным.

§ 3. Внешние дифференциальные формы

1. Антисимметричное ковариантное тензорное поле. Рассмотрим на X^n антисимметричные ковариантные тензорные поля

$$u(x)\colon u_{i_1\ldots i_p}, \quad u_{[i_1\ldots i_p]} = u_{i_1\ldots i_p}.$$

Число p, $p \geqslant 0$, будем называть *порядком поля*. Очевидно, $u = 0$, если $p > n$.

В дополнение к уже известным алгебраическим операциям сложения полей одного порядка и умножения поля на скалярную функцию введем операцию внешнего умножения полей, обозначим ее $\wedge$.

Определение. Пусть $u\colon u_{i_1\ldots i_p}$, $v\colon v_{i_1\ldots i_q}$, тогда

$$w = u \wedge v\colon w_{i_1\ldots i_{p+q}} = u_{[i_1\ldots i_p}v_{i_{p+1}\ldots i_{p+q}]}.$$

Ясно, что $u \wedge v$ — антисимметричное тензорное поле.

Эта операция обладает следующими свойствами (несложную проверку опускаем):

- $u \wedge (v \wedge w) = (u \wedge v) \wedge w$,
- $u \wedge (v + w) = u \wedge v + u \wedge w$,
- $\alpha \wedge u = \alpha u$, где α — скалярная функция,
- $u \wedge v = (-1)^{pq} v \wedge u$, где p — порядок u, q — порядок v.

Введем операцию дифференцирования антисимметрического ковариантного тензорного поля; будем обозначать ее ∂.

Определение. $v = \partial u$: $v_{i_1\dots i_{p+1}} = \partial_{[i_1} u_{i_2\dots i_{p+1}]}$.

В п. 2 § 2 было доказано, что $\partial_{[i_1} u_{i_2\dots i_{p+1}]}$ — тензорное поле ($v = \partial u$ эквивалентно $(p+1)v = \mathrm{Rot}\, u$).

Имеют место формулы (несложную проверку опускаем):

- $\partial(u+v) = \partial u + \partial v$,
- $\partial(\alpha u) = \alpha \partial u$, где α — число,
- $\partial(u \wedge v) = (\partial u) \wedge v + (-1)^p u \wedge \partial v$, где p — порядок u.

2. Внешняя дифференциальная форма. Для каждого $x \in X^n$ антисимметричное ковариантное тензорное поле u порядка p определяет в $T^n(x)$ антисимметричную p-линейную форму

$$\omega = u_{i_1\dots i_p}(x)\, \underset{1}{z}^{i_1} \dots \underset{p}{z}^{i_p},$$

где $\underset{1}{z}, \dots, \underset{p}{z}$ — векторы $T^n(x)$.

Возьмем в качестве $\underset{1}{z}, \dots, \underset{p}{z}$ векторы $\underset{1}{dx}, \dots, \underset{p}{dx}$ — дифференциалы бесконечно малых смещений и обозначим

$$\underset{1}{dx}^{[i_1} \dots \underset{p}{dx}^{i_p]} = dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$$

(знак $\wedge$ тот же, что и в предыдущем пункте; смысл этого совпадения выяснится позже). С учетом введенных обозначений получаем

$$\omega = u_{i_1\dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}, \quad u_{[i_1\dots i_p]} = u_{i_1\dots i_p}.$$

Выражение $u_{i_1\dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$ называется *внешней дифференциальной формой.*

Операции над формами $(\underset{1}{\omega} + \underset{2}{\omega},\ \underset{1}{\omega} \wedge \underset{2}{\omega},\ \partial\omega)$, соответствующие операциям над тензорными полями, принимают особенно простой вид (проверку опускаем):

1. алгебраические операции проводятся по обычным правилам преобразования алгебраических выражений (в частности, оправданной является двойная роль символа $\wedge$) с учетом дополнительного правила

$$dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i;$$

2. операция дифференцирования проводится по формуле

$$\partial\omega = (du_{i_1\dots i_p}) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p},$$

где $du_{i_1\dots i_p} = \partial_j u_{i_1\dots i_p} dx^j$; $\partial\omega$ называется *внешней производной* (или *дифференциалом*) ω; часто вместо $\partial\omega$ пишут $d\omega$;

3. переход к новым координатам $x^{1'}, \dots, x^{n'}$ осуществляется подстановкой

$$dx^i = A^i_{i'} dx^{i'} \quad (\text{напомним,} \quad A^i_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}});$$

4. любые преобразования следует завершать переходом в нужной координатной системе к записи вида $u_{i_1\dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$, где $u_{[i_1\dots i_p]} = u_{i_1\dots i_p}$ (легко видеть, что такой переход всегда возможен и дает однозначно определенный ответ).

С использованием понятия внешней дифференциальной формы теорема Пуанкаре (см. п. 3 § 2) может быть сформулирована следующим образом.

Пусть ω — любая внешняя дифференциальная форма; тогда $\partial(\partial\omega) = 0$. Пусть ω — внешняя дифференциальная форма ненулевого порядка и $\partial\omega = 0$. Тогда для каждой точки существует такая ее окрестность и такая определенная в этой окрестности внешняя дифференциальная форма θ, что $\omega = \partial\theta$.

3. Зачем нужны внешние дифференциальные формы. Разумеется, понятия «антисимметричное ковариантное тензорное поле» и «внешняя дифференциальная форма» равноценны. Однако отметим следующее.

Полезным оказывается геометрический смысл внешней дифференциальной формы: $\omega = u_{i_1\dots i_p}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$ — это число, которое ставится в соответствие бесконечно малому ориентированному симплексу с вершиной в точке x и ребрами $\underset{1}{dx}, \dots, \underset{p}{dx}$, лежащему в X^n. Это число не зависит от выбираемой системы координат и от того, от какой именно вершины отходят ребра; оно является полилинейной антисимметричной функцией $\underset{1}{dx}, \dots, \underset{p}{dx}$. Будем называть его значением формы ω на указанном симплексе.

4. О псевдоформах. Рассмотрим в X^n в ориентированных системах координат выражение

$$\omega = u_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p},$$

где $u_{i_1 \dots i_p}$ — антисимметричное псевдотензорное поле. Такое выражение называется *внешней дифференциальной псевдоформой*. Ее отличие от формы в том, что значение ω зависит от ориентации системы координат: при переходе к противоположно ориентированной координатной системе значение ω для тех же $\underset{1}{dx}, \dots, \underset{p}{dx}$ меняет знак.

Свойства псевдоформ очевидными изменениями получаются из свойств форм.

§ 4. Интегрирование

В математике имеются два близких, но все же разных, понятия интеграла.

Интеграл 1*-го рода.* Фиксировано пространство с мерой. Рассматриваются числовые функции в этом пространстве, для них определяется понятие интеграла.

Интеграл 2*-го рода.* В X^n задано антисимметричное тензорное поле $u_{i_1 \dots i_p}$. Рассмотрим какое-либо ориентированное X^p в X^n. Для бесконечно малого симплекса с вершиной в точке x, порожденного векторами $\underset{1}{dx}, \dots, \underset{p}{dx}$, лежащего в X^p и имеющего ориентацию, индуцированную заданной ориентацией X^p, число $u_{i_1 \dots i_p}(x) \, \underset{1}{dx}^{i_1} \dots \underset{p}{dx}^{i_p}$ не зависит от системы координат. Разбивая X^p на такие симплексы и суммируя эти числа, мы получим интеграл по ориентированному X^p от заданного тензорного поля (или от дифференциальной формы $u_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$). Это понятие мы и будем изучать в настоящем параграфе. Было бы соблазнительно строить теорию независимо от изучаемой в математическом анализе теории кратных интегралов, непосредственно реализуя конструкцию, схематично описанную выше. Однако удобнее вводить нужные нам понятия, связывая их с понятием кратного интеграла.

Следует иметь в виду, что кратный интеграл использует понятие меры. На гладком многообразии понятия меры нет. Мы будем давать определения, взяв какую-либо систему координат и используя свойства интеграла по мере, которая порождается этой координатной системой. Мы докажем, что получаемое значение интеграла не зависит от выбранной системы координат. Таким образом, мера, порождаемая координатной системой, является лишь вспомогательным средством.

1. Интеграл и его свойства.

Определение. Куском гладкого многообразия называется его подмножество такое, что:

- оно может быть покрыто какой-то одной допустимой координатной системой;
- оно является замыканием области с кусочно-гладкой границей;
- оно компактно.

Не требует особых пояснений термин «ориентированный кусок гладкого многообразия».

Теорема. *Пусть в X^n определено тензорное поле $u_{i_1\dots i_p}$, $u_{[i_1\dots i_p]} = u_{i_1\dots i_p}$. Пусть C^p — ориентированный p-мерный кусок, погруженный в X^n. Покроем C^p какой-либо одной координатной системой $\lambda^1,\dots,\lambda^p$, где порядок перечисления координат соответствует ориентации C^p. Пусть C^p в координатах $\lambda^1,\dots,\lambda^p$ выделяется условием $\lambda\in G$, где G — замыкание некоторой ограниченной области в координатном пространстве. Выбрав в X^n какие-либо координатные системы $x^1,\dots,x^n$, покрывающие образ C^p, вычислим*

$$I=\int\limits_G\dots\int u_{i_1\dots i_p}(x(\lambda))\frac{\partial(x^{i_1},\dots,x^{i_p})}{\partial(\lambda^1,\dots,\lambda^p)}d\lambda^1\dots d\lambda^p.$$

Тогда I не зависит от выбора координатных систем $x^1,\dots,x^n$ и от выбора координатной системы $\lambda^1,\dots,\lambda^p$.

Доказательство. Очевидно,

$$\frac{\partial(x^{i_1},\dots,x^{i_p})}{\partial(\lambda^1,\dots,\lambda^p)}=p!\frac{\partial x^{[i_1}}{\partial\lambda^1}\dots\frac{\partial x^{i_p]}}{\partial\lambda^p}.$$

При фиксированной системе координат $\lambda^1,\dots,\lambda^p$ для каждого r значения $\partial x^i/\partial\lambda^r$ — координаты вектора $\underset{r}{v}$. Поэтому

$$\frac{\partial(x^{i_1},\dots,x^{i_p})}{\partial(\lambda^1,\dots,\lambda^p)}=p!\,\underset{1}{v}^{[i_1}\dots\underset{p}{v}^{i_p]}$$

— тензор. Следовательно,

$$u_{i_1\dots i_p}\frac{\partial(x^{i_1},\dots,x^{i_p})}{\partial(\lambda^1,\dots,\lambda^p)}$$

— инвариант. Тем самым подынтегральное выражение для I не зависит от выбора координатной системы $x^1,\dots,x^n$.

При переходе от $\lambda^1,\dots,\lambda^p$ к $\lambda^{1'},\dots,\lambda^{p'}$ имеем

$$\frac{\partial(\lambda^1,\dots,\lambda^p)}{\partial(\lambda^{1'},\dots,\lambda^{p'})}>0,$$

так как ориентация каждой из этих координатных систем соответствует ориентации C^p. В силу известного свойства якобианов имеем

$$\frac{\partial(x^{i_1},\dots,x^{i_p})}{\partial(\lambda^{1'},\dots,\lambda^{p'})}=\frac{\partial(x^{i_1},\dots,x^{i_p})}{\partial(\lambda^1,\dots,\lambda^p)}\frac{\partial(\lambda^1,\dots,\lambda^p)}{\partial(\lambda^{1'},\dots,\lambda^{p'})}.$$

Поэтому при переходе от $\lambda^1,\dots,\lambda^p$ к $\lambda^{1'},\dots,\lambda^{p'}$ подынтегральное выражение умножается на

$$\left|\frac{\partial(\lambda^1,\dots,\lambda^p)}{\partial(\lambda^{1'},\dots,\lambda^{p'})}\right|,$$

т. е. меняется именно так, как оно должно меняться при замене переменных под знаком интеграла. Следовательно, значение I не меняется при переходе от $\lambda^1,\dots,\lambda^p$ к $\lambda^{1'},\dots,\lambda^{p'}$.

Определение и обозначение интеграла от внешней дифференциальноой формы по ориентированному гладкому куску C^p, погруженному в X^n:

$$\int_{C^p}\omega=I,$$

где $\omega=u_{i_1\dots i_p}dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_p}$, а I определено предыдущей теоремой.

Для полноты дальнейших формулировок дополним это определение понятием интеграла по C^0: C^0 — это какая-либо точка c из X^n, снабженная знаком $+$ или $-$ (то есть $+c$ или $-c$). Пусть $\varphi(x)$ — скалярная функция на X^n. Тогда интеграл от φ по C^0 определяется так:

$$\int_{+c}\varphi=\varphi(c),\qquad\int_{-c}\varphi=-\varphi(c).$$

Свойства интеграла по куску (несложные доказательства опускаем).

1. Обозначим $-C^p$ ориентированный кусок, полученный из C^p изменением ориентации (при $p = 0$ — изменением знака). Тогда

$$\int\limits_{-C^p} \omega = -\int\limits_{C^p} \omega.$$

2. Пусть ориентированный кусок C^p составлен из ориентированных кусков $\underset{1}{C^p}$ и $\underset{2}{C^p}$ ($\underset{1}{C^p} \cup \underset{2}{C^p} = C^p$, $\underset{1}{C^p}$ и $\underset{2}{C^p}$ не имеют общих внутренних точек, ориентация C^p индуцирует ориентации $\underset{1}{C^p}$ и $\underset{2}{C^p}$). Тогда

$$\int\limits_{C^p} \omega = \int\limits_{\underset{1}{C^p}} \omega + \int\limits_{\underset{2}{C^p}} \omega.$$

Определение. Пусть $\underset{1}{C^p}, \ldots, \underset{m}{C^p}$ — ориентированные p-мерные куски, погруженные в X^n. Формальная сумма $\underset{1}{s}\,\underset{1}{C^p} + \ldots + \underset{m}{s}\,\underset{m}{C^p}$, где $\underset{1}{s}, \ldots, \underset{m}{s}$ — целые числа, называется *p-мерной цепью.*

Если ориентированный кусок C^p составлен из ориентированных кусков $\underset{1}{C^p}$ и $\underset{2}{C^p}$, то $\underset{1}{C^p} + \underset{2}{C^p}$ интерпретируется как C^p. Цепь $-1 \cdot C^p$ интерпретируется как $-C^p$.

Нестрогая геометрическая интерпретация p-мерной цепи в X^n очевидна.

Определение. Пусть C^p — цепь, $C^p = \underset{1}{s}\,\underset{1}{C^p} + \ldots + \underset{m}{s}\,\underset{m}{C^p}$. По определению,

$$\int\limits_{C^p} \omega = \sum_{r=1}^{m} \underset{r}{s} \int\limits_{\underset{r}{C^p}} \omega.$$

Отметим, что последнее определение согласовано со свойствами 1 и 2 интеграла по куску.

Свойства интеграла по цепи:

1. $\int\limits_{C^p} (\alpha \underset{1}{\omega} + \beta \underset{2}{\omega}) = \alpha \int\limits_{C^p} \underset{1}{\omega} + \beta \int\limits_{C^p} \underset{2}{\omega}$, где α и β — числа;

2. $\int\limits_{'C^p + ''C^p} \omega = \int\limits_{'C^p} \omega + \int\limits_{''C^p} \omega.$

Примеры. Рассмотрим случаи $p = 1$ и $p = 2$.

1. $p = 1$, n — произвольно.

Пусть $\omega = u_i dx^i$ и C^1 — ориентированный кусок кривой в X^n; $x = x(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, — параметрическое уравнение C^1;

$$I = \int\limits_{C^1} \omega = \int\limits_{t_1}^{t_2} u_i \frac{dx^i}{dt} dt.$$

В этом примере особенно хорошо видно, что I не зависит от выбора координатных систем $x^1, \ldots, x^n$ и параметризации C^1.

2. $p = 2$.

Возьмем $n = 2$. Пусть $\omega = v_{ij} dx^i \wedge dx^j$, C^2 — замыкание ориентированной области в координатном пространстве x^1, x^2. Пусть порядок x^1, x^2 соответствует ориентации C^2; берем $\lambda^1 = x^1$, $\lambda^2 = x^2$. Тогда

$$\int\limits_{C^2} v_{ij} dx^i \wedge dx^j = \iint\limits_{D} \left(v_{12} \frac{\partial(x^1, x^2)}{\partial(x^1, x^2)} + v_{21} \frac{\partial(x^2, x^1)}{\partial(x^1, x^2)} \right) dx^1 dx^2 =$$

$$= \iint\limits_{D} (v_{12} - v_{21})\, dx^1 dx^2 = 2 \iint\limits_{D} v_{12} dx^1 dx^2,$$

где D обозначает C^2 без учета ориентации.

2. Теорема Стокса—Пуанкаре.

Определение. Пусть C^p — ориентированный кусок, $p \geqslant 2$. Введем на гладких кусках, составляющих в совокупности границу C^p, ориентацию так, чтобы в точках границы направление на C^p внешнее к C^p и ориентация границы (взятые именно в этом порядке) соответствовали ориентации C^p. Получившуюся $(p-1)$-мерную цепь будем называть границей куска C^p и обозначать ∂C^p.

Очевидно, если C^p погружено в X^n, то и ∂C^p погружено в X^n.

При $p = 1$ граница определяется так: границей ориентированного куска кривой, имеющего начало в точке a и конец в точке b, называется цепь $+b - a$. При $p = 0$ граница по определению — пустое множество.

Если $C^p = \underset{1}{s}\,\underset{1}{C^p} + \ldots + \underset{m}{s}\,\underset{m}{C^p}$ — цепь, то по определению $\partial C^p = \underset{1}{s}\partial\underset{1}{C^p} + \ldots + \underset{m}{s}\partial\underset{m}{C^p}$. Отметим, что принятая нами интерпретация, при которой $-C^p$ получается из C^p изменением ориентации, согласуется с формулой $\partial(-C^p) = -\partial C^p$. Вспомним также, что если ориентированный кусок C^p составлен из ориентированных кусков $\underset{1}{C}^p$ и $\underset{2}{C}^p$, то мы считали $C^p = \underset{1}{C}^p + \underset{2}{C}^p$. Соотношение $\partial C^p = \partial\underset{1}{C}^p + \partial\underset{2}{C}^p$ интерпретируется в этом случае так: граница C^p есть сумма границ $\underset{1}{C}^p$ и $\underset{2}{C}^p$; те части этих двух границ, которые разделяют $\underset{1}{C}^p$ и $\underset{2}{C}^p$, берутся с противоположными ориентациями; в сумме эти две части взаимно уничтожаются.

Теорема Стокса—Пуанкаре. *Для любой p-мерной цепи C^p и любой формы ω порядка $p-1$ имеет место*

$$\int\limits_{C^p} \partial\omega = \int\limits_{\partial C^p} \omega.$$

Доказательство предварим иллюстрацией, рассмотрим случай, когда $n = p = 2$ и C^p — ориентированный кусок. Пусть порядок x^1, x^2 соответствует ориентации C^2 (рис. 2). Возьмем $\omega = u_i dx^i$. Тогда $\partial\omega = v_{ij} dx^i \wedge dx^j$, где

$$v_{ij} = \partial_{[i}u_{j]} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j - \partial_j u_i).$$

Мы имеем

$$\int\limits_{C^2} \partial\omega = \iint\limits_{D} (v_{12} - v_{21})\, dx^1 dx^2 = \iint\limits_{D} (\partial_1 u_2 - \partial_2 u_1)\, dx^1 dx^2,$$

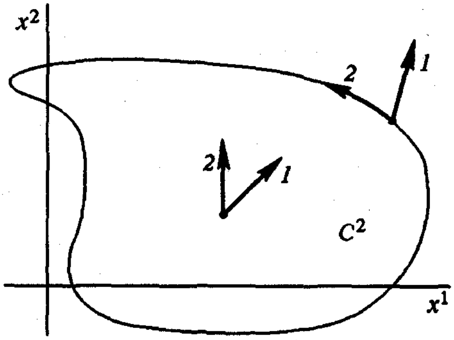

Рис. 2

где D — это C^2 без учета ориентации;

$$\int\limits_{\partial C^2} \omega = \int\limits_{\Gamma} u_1 dx^1 + u_2 dx^2,$$

где Γ — это граница D, пробегаемая с учетом ориентации ∂C^2.

Нужное нам равенство — это известная формула Грина.

Приведем теперь доказательство для общего случая. Оно проводится по тому же плану, что и доказательство упомянутой формулы Грина (а также формулы Гаусса—Остроградского). Нужно только аккуратно разобраться со знаками, коэффициентами и т. п. Приведем выкладки, сопроводив их краткими пояснениями.

Разобьем каждый из кусков, составляющих C^p, на куски, диффеоморфные p-мерному симплексу (необходимые для строгого доказательства уточнения опускаем); сведем нужные интегралы к интегралам по этим «криволинейным симплексам» и их «криволинейным граням». Так как интегралы в обеих частях доказываемого равенства не зависят от выбираемых систем координат, то можно малый «криволинейный симплекс» считать расположенным в координатном подпространстве $x^{p+1} = \ldots = x^n = 0$ (см. п. 1 § 1); можно считать, что он выделяется условиями

$$x^1 \geqslant 0, \ldots, x^p \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{p} x^i \leqslant 1;$$

ориентация этого симплекса соответствует порядку индексов $1, \ldots, p$.

Для доказательства теоремы, в силу сказанного, достаточно взять $n = p$ и в качестве C^p — указанный симплекс.

Введем обозначения:

- D — тот же симплекс без учета ориентации;
- D_i, $i = 1, \ldots, p$, — грань D, выделяемая условием $x^i = 0$;
- D_0 — грань D, выделяемая условием $\sum\limits_{i=1}^{p} x^i = 1$;
- $(\partial C^p)_i$, $i = 0, \ldots, p$, — соответствующие этим граням части ∂C^p.

Для каждого i, $i = 1, \ldots, p$, симплекс D может быть задан соотношениями

$$(x^1, \ldots, x^{i-1}, x^{i+1}, \ldots, x^p) \in D_i, \quad 0 \leqslant x^i \leqslant 1 - \sum_{j \neq i} x^j.$$

Пусть

$$\omega = u_{i_1\ldots i_{p-1}} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p-1}, \qquad \partial\omega = v_{i_1\ldots i_p} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p},$$

$$v_{i_1\ldots i_p} = \partial_{[i_1} u_{i_2\ldots i_p]}.$$

Обозначим также

$$\bar{u}_{1\ldots i-1,i+1\ldots p} = u_{1\ldots i-1,i+1\ldots p}(x^1, \ldots, x^{i-1}, 0, x^{i+1}, \ldots, x^p),$$

$$\overset{+}{u}_{1\ldots i-1,i+1\ldots p} = u_{1\ldots i-1,i+1\ldots p}\left(x^1, \ldots, x^{i-1}, 1 - \sum_{j\neq i} x^j, x^{i+1}, \ldots, x^p\right)$$

($\bar{u}$ и $\overset{+}{u}$ — значения u на гранях D_i и D_0 соответственно).

Тогда

$$\int\limits_{C^p} \partial\omega = \int\limits_D \ldots \int v_{i_1\ldots i_p} \frac{\partial(x^{i_1}, \ldots, x^{i_p})}{\partial(x^1, \ldots, x^p)} dx^1 \ldots dx^p =$$

$$= p! \int\limits_D \ldots \int v_{1\ldots p} dx^1 \ldots dx^p = p! \int\limits_D \ldots \int \partial_{[1} u_{2\ldots p]} dx^1 \ldots dx^p =$$

$$= (p-1)! \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} \int\limits_D \ldots \int \partial_i u_{1\ldots i-1,i+1\ldots p} dx^1 \ldots dx^p =$$

$$= (p-1)! \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} \int\limits_{D_i} \ldots \int (\overset{+}{u}_{1\ldots i-1,i+1\ldots p} -$$

$$- \bar{u}_{1\ldots i-1,i+1\ldots p}) dx^1 \ldots dx^{i-1} dx^{i+1} \ldots dx^p.$$

Поясним каждый из знаков равенства, фигурирующих в этой цепочке. Первый соответствует определению интеграла от дифференциальной формы (см. п. 1). Второй имеет место, так как $v_{i_1\ldots i_p} = \pm v_{1\ldots p}$ для попарно различных $i_1 \ldots i_p$, а

$$\frac{\partial(x^{i_1}, \ldots, x^{i_p})}{\partial(x^1, \ldots, x^p)} = \pm 1$$

для таких $i_1, \ldots, i_p$, причем знаки + или − в этих последних равенствах совпадают — это

$$\operatorname{sign} \begin{pmatrix} i_1, \ldots, i_p \\ 1, \ldots, p \end{pmatrix};$$

всего таких слагаемых в сумме-свертке под знаком интеграла в левой части второго равенства $p!$, остальные слагаемые — нули. Третий знак равенства имеет место, так как $v_{1\ldots p} = \partial_{[1}u_{2\ldots p]}$ в силу определения v. Четвертый соответствует детализации

$$p!\partial_{[1}u_{2\ldots p]} = (p-1)!\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i-1}\partial_i u_{1\ldots i-1,i+1\ldots p};$$

множитель $(-1)^{i-1}$ появляется, так как порядок следования индексов i, $1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, p$ получается из порядка следования $1, \ldots, p$ последовательной перестановкой индекса i с $i-1$ ему предшествующими; множитель $p!$ слева от этого знака равенства дает все члены $\partial_{i_1}u_{i_2\ldots i_p}$ с нужными знаками при различных комбинациях $i_1, \ldots, i_p$, являющихся перестановкой $1, \ldots, p$; справа аналогичную роль играет множитель $(p-1)!$. Пятый знак равенства соответствует использованию формулы Ньютона—Лейбница при интегрировании по x^i.

С другой стороны,

$$\int\limits_{\partial C^p}\omega = \sum_{i=1}^{p}\int\limits_{(\partial C^p)_i}\omega + \int\limits_{(\partial C^p)_0}\omega.$$

При $i = 1, \ldots, p$ имеем

$$\int\limits_{(\partial C^p)_i}\omega = -(p-1)!(-1)^{i-1}\int\ldots\int\limits_{D_i}\bar{u}_{1\ldots i-1,i+1\ldots p}dx^1\ldots dx^{i-1}dx^{i+1}\ldots dx^p.$$

Здесь сделан переход к кратному интегралу. Множители $(p-1)!$ и $(-1)^{i-1}$ объясняются так же, как и при преобразовании интеграла $\int\limits_{C^p}\partial\omega$; перед всем выражением стоит знак минус, поскольку ориентация $(\partial C^p)_i$ задается порядком координат $-x^i, x^1, \ldots, x^{i-1}, x^{i+1}, \ldots, x^p$ (см. определение), что дает ориентацию противоположную ориентации, задаваемой порядком координат $x^i, x^1, \ldots, x^{i-1}, x^{i+1}, \ldots, x^p$.

Осталось выразить сходным образом $\int\limits_{(\partial C^p)_0}\omega$. Представим для выбранной системы координат $u = \underset{1}{u} + \ldots + \underset{p}{u}$ (соответственно, $\omega = \underset{1}{\omega} + \ldots + \underset{p}{\omega}$), где $\underset{i}{u}_{i_1\ldots i_{p-1}} = 0$, если один из индексов $i_1, \ldots, i_{p-1}$ равен i. Для вычисления $\int\limits_{(\partial C^p)_0} \underset{i}{\omega}$ возьмем на D_0 в качестве координат значения $x^1, \ldots, x^{i-1}, x^{i+1}, \ldots, x^p$. Получим

$$\int\limits_{(\partial C^p)_0} \underset{i}{\omega} = (p-1)!(-1)^{i-1} \int \underset{D_i}{\ldots} \int \overset{+}{u}_{1\ldots i-1, i+1\ldots p} dx^1 \ldots dx^{i-1} dx^{i+1} \ldots dx^p.$$

Здесь, в отличие от выражения $\int\limits_{(\partial C^p)_i} \omega$, в правой части отсутствует знак минус, так как ориентация $(\partial C^p)_0$ задается порядком координат $x^i, x^1, \ldots, x^{i-1}, x^{i+1}, \ldots, x^p$.

Собирая вместе полученные выражения, мы видим, что, действительно,

$$\int\limits_{\partial C^p} \omega = \int\limits_{C^p} \partial\omega.$$

Задача. Придумать и доказать формулу, аналогичную формуле интегрирования по частям.

3. Об интеграле от дифференциальной псевдоформы. В случае, когда мы имеем дело не с дифференциальной формой, а с дифференциальной псевдоформой (см. п. 4 § 3), приведенные для формы в п. 1–2 настоящего параграфа определения и утверждения требуют корректировки.

Определяя интеграл от псевдоформы $\omega = u_{i_1\ldots i_p} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$ по ориентированному куску C^p, потребуем дополнительно, чтобы координатные системы $x^1, \ldots, x^n$, покрывающие C^p, были ориентированы и притом согласованно. При одновременном изменении ориентации этих координатных систем значение интеграла меняет знак, так как меняют знак $u_{i_1\ldots i_p}$.

Если в X^n взять ориентированный кусок C^n и в качестве координат $x^1, \ldots, x^n$ взять $\lambda^1, \ldots, \lambda^n$ (см. формулировку и доказательство теоремы п. 1), то интеграл по C^n от псевдоформы $\omega = u_{i_1\ldots i_n} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_n}$ не зависит от выбора ориентации C^n: вследствие изменения ориентации $\lambda^1, \ldots, \lambda^n$ при неизменной ориентации $x^1, \ldots, x^n$ интеграл меняет знак, вследствие изменения ориентации $x^1, \dots, x^n$ он еще раз меняет знак, т. е. в результате остается неизменным.

Вводя интеграл по цепи, мы дополнительно потребуем, чтобы вся совокупность образов кусков, составляющих цепь, была покрыта совокупностью ориентированных координатных систем с согласованной ориентацией.

С учетом указанных изменений в определениях и дополнительных предположений формулировка теоремы Стокса—Пуанкаре остается неизменной.

4. О теоремах Ньютона—Лейбница, Грина, Гаусса—Остроградского, Стокса. В книге В. И. Арнольда «Математические методы классической механики» теорема Стокса—Пуанкаре (принятое ее название) названа теоремой Ньютона—Лейбница—Гаусса—Грина—Остроградского—Стокса—Пуанкаре. Действительно, эта теорема обобщает и объединяет в единой формулировке (данной Пуанкаре) теоремы Ньютона—Лейбница, Грина, Гаусса—Остроградского, Стокса.

Приведем эти теоремы в тензорной записи. В качестве X^n берем H^n; g_{ij}, $\sqrt{\mathrm{g}}_{i_1 \dots i_n}$ — тензорные поля, соответствующие метрике H^n; система координат — произвольная криволинейная.

Теорема Ньютона—Лейбница:

$$\int\limits_{C^1} \partial_1 u(x^1)\, dx^1 = u(b) - u(a).$$

Здесь $p = n = 1$, C^1 — отрезок $[a, b]$ в ориентироавнном H^1.

Эта теорема была использована при доказательстве теоремы Стокса—Пуанкаре.

Теорема Гаусса—Остроградского:

$$\int\limits_{C^n} \partial_{[i_1}(u^j \sqrt{\mathrm{g}}_{i_2 \dots i_n]j}) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n} = \int\limits_{\partial C^n} u^j \sqrt{\mathrm{g}}_{i_1 \dots i_{n-1} j} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{n-1}}.$$

Здесь $p = n \geqslant 2$, C^n — ориентированный кусок H^n. В соответствии с определением псевдотензора (напомним, $\sqrt{\mathrm{g}}_{i_1 \dots i_n}$ — псевдотензор) нужно ориентировать координатную систему. В качестве ориентации системы $x^1, \dots, x^n$ берем ту, которая индуцируется ориентацией C^n.

Тогда, как отмечено в п. 3, значения интегралов в обеих частях равенства не зависят от ориентации C^n: при изменении ориентации C^n перед каждым из интегралов появляется знак минус, но подынтегральные выражения при этом также меняют знак, так как они псевдотензоры.

Теорема Стокса:

$$\int\limits_{C^2} \partial_{[i}(u^s g_{j]s}) dx^i \wedge dx^j = \int\limits_{\partial C^2} u^s g_{sj} dx^j.$$

В формулировке векторного анализа в этой теореме нужно взять $n = 3$ и преобразовать подынтегральное выражение в левой части равенства в соответствии со способом получать с помощью операции rot векторное поле (см. п. 3 § 2). В приведенном выражении C^2 — ориентированный кусок, погруженный в H^n, где n — любое, удовлетворяющее условию $n \geqslant 2$.

Теорема Грина может быть получена как частный случай теоремы Стокса при $n = 2$; см. также начало доказательства теоремы Стокса—Пуанкаре (п. 2).

Мы видим, что в приведенных формулировках используется то, что пространство евклидово, а для принятой в векторном анализе формулировки теоремы Стокса еще и то, что оно трехмерно. Общая теорема, доказанная Пуанкаре, снимает эти наслоения и дает в чистом виде связь между интегралом по области и интегралом по ее границе.

Глава 3

РИМАНОВА ГЕОМЕТРИЯ

§ 1. Риманово пространство

1. Основные понятия.

Определение. Римановым пространством V^n называется комплект $\{X^n, g_{ij}\}$ из гладкого многообразия X^n и определенного на нем дважды ковариантного гладкого тензорного поля g_{ij}, удовлетворяющего в каждой точке $x \in X^n$ условиям:

1. $g_{ij} = g_{ji}$,
2. квадратичная форма $g_{ij}z^i z^j$ — положительно определена.

Пример. H^n есть V^n.

Поле g_{ij} превращает каждое из касательных к X^n пространств $T^n(x)$ в евклидово пространство; скалярное произведение (u, v) векторов u и v из $T^n(x)$ определим формулой

$$(u, v) = g_{ij}(x)u^i v^j.$$

Требования 1–2 — это именно те требования, которые предъявляются к тензору при каждом фиксированном $x \in X^n$, чтобы указанное выражение могло быть принято в качестве скалярного произведения (см. § 3 гл. 1).

Тем самым могут быть определены, в частности, понятия: длина касательного вектора к параметрически заданной кривой в фиксированной на ней точке, угол между ненулевыми касательными векторами к двум кривым в точке, являющейся точкой их пересечения.

Основополагающим для всех концепций риманова пространства является следующее

Определение[1]. Расстоянием между двумя бесконечно близкими точками x и $x + dx$ риманова пространства называется неотрицательная величина ds, определяемая равенством

$$ds^2 = g_{ij}(x)\, dx^i dx^j.$$

Ясно, что так определенное расстояние между x и $x + dx$ не зависит от системы координат, в которой оно вычисляется. Тензор g_{ij} называется *метрическим тензором*.

Это определение можно заменить на следующее

Определение. Длиной кривой l: $x = x(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, называется число

$$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ij}(x(t)) \frac{dx^i(t)}{dt} \frac{dx^j(t)}{dt}}\, dt.$$

Легко проверить, что так определенная длина кривой не зависит от способа параметризации этой кривой и от выбора координатных систем.

В геометрии V^n важную роль играет псевдотензор $\sqrt{\mathrm{g}}_{i_1 \dots i_n}$, так называемый тензор Леви-Чивиты. Если взять в V^n бесконечно малый параллелепипед с вершиной в точке x и ребрами $\underset{1}{dx}, \dots, \underset{n}{dx}$, то в ориентированной системе координат выражение $\sqrt{\mathrm{g}(x)}_{i_1 \dots i_n} \underset{1}{dx}^{i_1} \dots \underset{n}{dx}^{i_n}$ или, что то же самое, $\sqrt{\mathrm{g}(x)}_{i_1 \dots i_n} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}$ дает объем (с учетом знака) этого параллелепипеда (см. формулу (3.1) гл. 1). Можно также говорить, что $\sqrt{\mathrm{g}(x)}dx^1 \dots dx^n$ дает «элемент объема» в V^n. Это приводит к интегралу 1-го рода

$$I = \int \dots \int\limits_G f(x)\sqrt{\mathrm{g}(x)}dx^1 \dots dx^n.$$

Здесь G — замыкание области в V^n, G — компактно, $f(x)$ — заданная скалярная функция.

---

[1] Б. Риман «О гипотезах, лежащих в основании геометрии» — пробная лекция, прочитанная 10 июня 1854 года в Геттингенском университете для получения места доцента.

Введенное значение интеграла не зависит от выбора координатной системы. В самом деле, при переходе к другой системе координат $x^{1'},\dots,x^{n'}$ вместо множителя $\sqrt{\mathrm{g}}$ появится множитель $\sqrt{\mathrm{g}'}$. Но

$$\sqrt{\mathrm{g}} = \sqrt{\mathrm{g}'}\left|\frac{\partial(x^{1'},\dots,x^{n'})}{\partial(x^1,\dots,x^n)}\right|,$$

что соответствует известной формуле замены переменных под знаком интеграла.

Определенное здесь понятие интеграла тесно связано с понятием интеграла, введенным в предыдущей главе. Пусть C^n — ориентированный кусок в V^n. Если ориентация координатной системы $x^1,\dots,x^n$ соответствует ориентации C^n, то (см. § 4 гл. 2)

$$\int\limits_{C^n} f\sqrt{\mathrm{g}}_{i_1\dots i_n}dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_n} = n!\int\dots\int\limits_{G} f\sqrt{\mathrm{g}}dx^1\dots dx^n,$$

где G состоит из тех же точек, что и C^n; выбор ориентации C^n роли не играет, так как $\sqrt{\mathrm{g}}_{i_1\dots i_n}$ — псевдотензор (см. п. 3 § 3 гл. 2).

Операции grad и div рассмотрены в п. 3 § 2 гл. 2 в евклидовом пространстве H^n, а операция rot — в ориентированном H^3. Ясно, что теми же формулами можно определить операции grad и div в произвольном V^n, а операцию rot в ориентированном V^3.

Теоремы Гаусса—Остроградского и Стокса сформулированы в § 4 гл. 2 с использованием метрического тензора евклидова пространства. Очевидно, эти теоремы без каких-либо изменений в их формулировках имеют место и для риманова пространства.

2. Подпространства V^n. Если в V^n погружено некоторое X^m, $1 \leqslant m \leqslant n-1$, то это X^m естественно превращается в V^m. Действительно, билинейная форма $g_{ij}(x)$, заданная во всем $T^n(x)$ (T^n — касательное пространство к V^n), рассматриваемая только в $T^m(x)$ (T^m — касательное пространство к образу X^m, являющееся подпространством T^n), удовлетворяет по-прежнему условиям 1–2. Если образ X^m в V^n определяется уравнениями

$$x^i = x^i(\lambda^1,\dots,\lambda^m), \quad i = 1,\dots,n,$$

где $x^1,\dots,x^n$ — координаты на X^n, а $\lambda^1,\dots,\lambda^m$ — координаты на X^m, то в этих координатах метрический тензор $\hat{g}_{\alpha\beta}$ для V^m вычисляется, как легко проверить, по формуле

$$\hat{g}_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^i}{\partial \lambda^\alpha}\frac{\partial x^j}{\partial \lambda^\beta} g_{ij}.$$

Тем самым появляется понятие «элемент m-мерного объема». В частности, одномерный объем — это длина.

Пример. Пусть X^2 погружено в H^3. Тогда X^2 можно превратить в V^2, введя метрику (расстояние между двумя бесконечно близкими точками), индуцированную метрикой H^3. Изучение этого примера составляет содержание так называемой элементарной дифференциальной геометрии.

Определение. $\underset{1}{V}^m = \{\underset{1}{X}^m, \hat{g}_{\alpha\beta}\}$ погружено в $\underset{2}{V}^n = \{\underset{2}{X}^n, g_{ij}\}$, если $\underset{1}{X}^m$ погружено в $\underset{2}{X}^n$ и метрический тензор на $\underset{1}{X}^m$, индуцированный тензором g_{ij}, совпадает с $\hat{g}_{\alpha\beta}$.

Приведем формулу теоремы Гаусса—Остроградского (§ 4 гл. 2) к виду, известному из векторного анализа.

Возьмем в C^n ориентированную систему координат $x^1, \ldots, x^n$, согласованную с ориентацией C^n. Из формулы (2.1) гл. 2 следует, что

$$\partial_{[i_1}(u^j \sqrt{g}_{i_2 \cdots i_n]j}) = \frac{(-1)^{n-1}}{n}\partial_j(u^j \sqrt{g}_{i_1 \cdots i_n}).$$

Поэтому в левой части формулы Гаусса—Остроградского под знаком интеграла стоит выражение

$$\frac{(-1)^{n-1}}{n}(\mathrm{div}\ u)\sqrt{g}_{i_1 \cdots i_n} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_n}.$$

Учитывая связь интеграла от дифференциальной псевдоформы с интегралом 1-го рода, получаем левую часть этой формулы в виде

$$\frac{(-1)^{n-1}n!}{n} \int \ldots \int_G \mathrm{div}\ u\, dv,$$

где G — это C^n без учета ориентации, dv — элемент объема в V^n. Преобразуем правую часть формулы. Возьмем какую-либо точку $\underset{0}{x}$ на гладком куске, входящем в ∂C^n. Выберем в малой окрестности этой точки координатную систему $x^1, \ldots, x^n$ такую, что: малая окрестность на ∂C^n точки $\underset{0}{x}$, обозначим ее C^{n-1}, имеет уравнение $x^1 = 0$;

$x^2, \dots, x^n$ — координаты на C^{n-1}; вектор, касательный в $\underset{0}{x}$ к координатной линии x^1, направлен наружу от C^n; порядок $x^1, \dots, x^n$ соответствует ориентации C^n. Тогда порядок $x^2, \dots, x^n$ соответствует ориентации ∂C^n. Представим $u(x)$, $x \in C^{n-1}$, в виде $u = (u, h)h + z$, где h — единичная внешняя нормаль к C^{n-1}, а $z \in T^{n-1}_{C^{n-1}}(x)$. Под знаком интеграла в правой части рассматриваемой формулы стоит

$$\omega = (-1)^{n-1}\sqrt{g}_{ji_1\dots i_{n-1}} u^j \underset{1}{d}x^{i_1} \dots \underset{n-1}{d}x^{i_{n-1}}.$$

Так как векторы z, $\underset{1}{d}x, \dots, \underset{n-1}{d}x$ линейно зависимы (все они принадлежат $T^{n-1}_{C^{n-1}}(x)$), то

$$\omega = (-1)^{n-1}(u, h)\sqrt{g}_{ji_1\dots i_{n-1}} h^j \underset{1}{d}x^{i_1} \dots \underset{n-1}{d}x^{i_{n-1}}.$$

Как отмечалось ранее, значение $\sqrt{g}_{ji_1\dots i_{n-1}} h^j \underset{1}{d}x^{i_1} \dots \underset{n-1}{d}x^{i_{n-1}}$ равно объему (с учетом знака!) параллелепипеда, построенного на векторах h, $\underset{1}{d}x, \dots, \underset{n-1}{d}x$. Ориентация C^n соответствует порядку: направление h, ориентация C^{n-1}. Кроме того, h — единичный вектор, ортогональный векторам $\underset{1}{d}x, \dots, \underset{n-1}{d}x$. Поэтому указанный объем равен (с учетом знака) объему основания — параллелепипеда, построенного на векторах $\underset{1}{d}x, \dots, \underset{n-1}{d}x$ (это свойство объема следует из формул (3.1) и (3.2) гл. 1). Последний объем, в свою очередь, равен $\sqrt{\hat{g}}_{i_1\dots i_{n-1}} \underset{1}{d}x^{i_1} \dots \underset{n-1}{d}x^{i_{n-1}}$, где $\sqrt{\hat{g}}_{i_1\dots i_{n-1}}$ соответствует в C^{n-1} системе координат $x^2, \dots, x^n$. Таким образом, под знаком интеграла в правой части формулы Гаусса—Остроградского стоит выражение, равное

$$(-1)^{n-1}(u, h)\sqrt{\hat{g}}_{i_1\dots i_{n-1}} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{n-1}}.$$

Заменяя интеграл от дифференциальной псевдоформы интегралом 1-го рода, получим правую часть этой формулы в виде

$$(-1)^{n-1}(n-1)! \underset{\Gamma}{\int \dots \int} (u, h) d\sigma,$$

где Г — это ∂C^n без учета ориентации, $d\sigma$ — элемент $(n-1)$-мерного объема в Г. Окончательно получаем знакомое равенство

$$\int\limits_{G}\!\!\ldots\!\!\int \operatorname{div}\, u\, dv = \int\limits_{\Gamma}\!\!\ldots\!\!\int (u, h) d\sigma.$$

3. Геодезическая. Пусть a и b заданные точки V^n. Рассмотрим кривые, соединяющие a и b. Пусть $x = x(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ — уравнение такой кривой. Длина S каждой такой кривой определяется формулой

$$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} F(x, \dot{x}) dt,$$

где $F = \sqrt{g_{ij}(x)\dot{x}^i\dot{x}^j}$, $x(t_1) = a$, $x(t_2) = b$, точкой обозначена производная по t. Предполагаем, что в каждой точке кривой $F \neq 0$. Пусть кривая l реализует кратчайший путь из a в b и тем самым дает минимум S. Тогда $x^i(t)$, соответствующие l, удовлетворяют, как известно, системе уравнений Эйлера

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^k}\right)^{\cdot} - \frac{\partial F}{\partial x^k} = 0, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Используя выражение F, получаем

$$\left(\frac{g_{kj}\dot{x}^j}{F}\right)^{\cdot} - \frac{(\partial_k g_{ij})\dot{x}^i\dot{x}^j}{2F} = 0.$$

Отсюда следует

$$\frac{(g_{kj}\frac{\dot{x}^j}{F})^{\cdot}}{F} - \frac{1}{2}(\partial_k g_{ij})\frac{\dot{x}^i}{F}\frac{\dot{x}^j}{F} = 0.$$

Заметим, что

$$\frac{1}{F}\frac{d}{dt} = \frac{d}{ds},$$

где s — длина участка кривой, принятая в качестве параметра на l. Таким образом, на l имеет место

$$\frac{d}{ds}\left(g_{kj}\frac{dx^j}{ds}\right) - \frac{1}{2}\partial_k g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} = 0, \quad k = 1, \ldots, n. \qquad (1.1)$$

Рассмотрим теперь уравнения (1.1), не учитывая способ их получения. Зафиксируем в V^n какую-либо систему координат. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений (1.1), где координаты g_{ij} метрического тензора заданные гладкие функции $x^1, \dots, x^n$; s — независимое переменное (здесь никакой связи s с длиной куска кривой мы не предполагаем); $x^1(s), \dots, x^n(s)$ — искомые функции. График в V^n какого-либо решения этой автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.1) мы называем *геодезической* (геодезической линией).

Определенное понятие очевидным образом использует выбранную систему координат. В следующем параграфе мы докажем, что кривая, являющаяся геодезической в одной системе координат, геодезическая и в других. А пока ограничимся следующими утверждениями.

1. Система (1.1) может быть разрешена относительно d^2x^i/ds^2, $i = 1, \dots, n$ (напомним, $\det \|g_{ij}\| > 0$). Если задать начальные данные $\underset{0}{x} \in V^n$ и $\underset{0}{v} \in T^n(\underset{0}{x})$, то существует, и притом единственное, решение (1.1), удовлетворяющее условиям:

$$x(0) = \underset{0}{x}, \qquad \frac{dx}{ds}(0) = \underset{0}{v}.$$

2. *Если $x(s)$ — решение (1.1), то для любого числа α функция* $x(\alpha s)$ — также решение.

3. Функция

$$\Phi\left(x, \frac{dx}{ds}\right) = g_{ij}(x)\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}$$

— первый интеграл (1.1). Если интерпретировать s как время, а систему (1.1) считать описывающей движение точек V^n, то это утверждение означает, что каждая точка движется по геодезической с постоянной скоростью. Если $g_{ij}(\underset{0}{x})\,\underset{0}{v^i}\,\underset{0}{v^j} = 1$, то s дает длину дуги геодезической. В общем случае длина дуги пропорциональна s.

4. Приведенные выше утверждения — простые следствия основных фактов теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Дополнительными исследованиями можно доказать также следующее:

- каждая геодезическая на достаточно малом ее участке действительно является кратчайшей;

- для каждой точки $\underset{0}{x} \in V^n$ существует такая ее окрестность, что с любой точкой этой окрестности $\underset{0}{x}$ может быть соединена геодезической и притом единственной среди геодезических, целиком лежащих в этой окрестности.

Пример. Пусть V^2 — единичная сфера в H^3. Геодезические на V^2 — дуги больших кругов (примем это пока без доказательства). Дуга большого круга, *имеющая длину меньше π, действительно кратчайшая среди кривых, соединяющих* ее концы. Дуга большого круга, имеющая длину больше π, разумеется, не является кратчайшим путем из одного ее конца в другой. Если две точки не являются диаметрально противоположными, то существует единственная дуга большого круга, соединяющая эти точки и имеющая длину меньше π.

§ 2. Параллельный перенос. Ковариантное дифференцирование

Ранее мы подчеркивали, что для гладкого многообразия X^n, не оснащенного никакими дополнительными структурами, касательные пространства в разных точках не имеют друг к другу никакого отношения. В 1917 году Туллио Леви-Чивита сделал замечательное открытие: он выяснил, что введение римановой метрики в X^n дает возможность установить естественную связь между касательными пространствами в двух бесконечно близких точках. Эта связь фиксирует некоторый изоморфизм между такими касательными пространствами и дает возможность переносить вектор из одного касательного пространства в касательное пространство в бесконечно близкой точке; такой перенос называется *параллельным переносом* в пространстве V^n.

Существуют различные способы введения этого параллельного переноса. Мы изберем следующий путь. Выведем формулы для параллельного переноса в H^n в криволинейной системе координат (в H^n параллельный перенос определен структурой линейного пространства). Окажется, что эти формулы содержат кроме координат переносимого вектора еще координаты метрического тензора и их первые производные. Для произвольного V^n определим параллельный перенос, используя именно эти формулы. Докажем, что так определенный параллельный перенос не зависит от выбора системы координат.

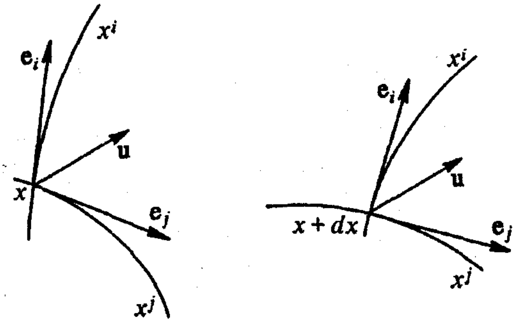

Рис. 3

1. Формулы для параллельного переноса в H^n в криволинейной системе координат. Введем в H^n какую-либо криволинейную систему координат $x^1, \dots, x^n$. Найдем условие того, что вектор u^i в точке x и вектор $u^i + du^i$ в точке $x + dx$ равны (рис. 3).

Мы имеем $u = u^i e_i$, где $e_i = \partial_i x$. Так как u переносится из x в $x + dx$ параллельно, то $du = 0$, т. е.

$$du^i \cdot e_i + u^i de_i = 0,$$

следовательно,

$$du^i \cdot e_i + u^i \partial_j e_i dx^j = 0.$$

Поэтому

$$(e_i, e_k) du^i + (\partial_j e_i, e_k) u^i dx^j = 0.$$

По определению метрического тензора $(e_i, e_k) = g_{ik}$. Обозначив $\Gamma_{ji,k} = (\partial_j e_i, e_k)$, получим

$$g_{ik} du^i + \Gamma_{ji,k} u^i dx^j = 0.$$

Оказывается, величины $\Gamma_{ji,k}$ выражаются через производные координат метрического тензора. В самом деле,

$$(\partial_q e_i, e_k) + (e_i, \partial_q e_k) = \partial_q g_{ik}.$$

Но $\partial_q e_i = \partial_q(\partial_i x) = \partial_i(\partial_q x) = \partial_i e_q$. Поэтому величины $\Gamma_{qi,k}$ симметричны по первым двум индексам: $\Gamma_{qi,k} = \Gamma_{iq,k}$. Зафиксировав тройку индексов i, j, k, получаем

$$\Gamma_{ij,k} + \Gamma_{ik,j} = \partial_i g_{jk}, \quad \Gamma_{jk,i} + \Gamma_{ji,k} = \partial_j g_{ki},$$
$$\Gamma_{ki,j} + \Gamma_{kj,i} = \partial_k g_{ij}.$$

Отсюда, пользуясь указанной симметрией $\Gamma_{ij,k}$, находим

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2}(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}).$$

Введя величины

$$\Gamma^k_{ij} = g^{rk}\Gamma_{ij,r},$$

получаем окончательно нужное условие

$$du^k + \Gamma^k_{ij}u^i dx^j = 0.$$

2. Определение параллельного переноса в V^n. Рассмотрим произвольное V^n. Зафиксируем какую-либо систему координат. Используя метрический тензор g_{ij}, введем величины

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2}(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}) \quad \text{и} \quad \Gamma^k_{ij} = g^{kr}\Gamma_{ij,r};$$

$\Gamma_{ij,k}$ и Γ^k_{ij} называются *коэффициентами связности*. Легко убедиться, что

$$\Gamma_{ij,k} = \Gamma_{ji,k}, \quad \Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}.$$

Отметим также равенство

$$\partial_i g_{jk} = \Gamma_{ij,k} + \Gamma_{ik,j}.$$

Определение. Вектор u^i, заданный в точке x, перенесен в бесконечно близкую точку $x + dx$ параллельно, если его координаты становятся равными $u^i + du^i$, где

$$du^i + \Gamma^i_{jk}(x)u^j dx^k = 0. \tag{2.1}$$

Это же определение в других терминах. Вектор, заданный в точке a, переносится параллельно по кривой l в точку b, если его координаты u^i удовлетворяют уравнениям

$$\frac{du^i(t)}{dt} + \Gamma^i_{jk}(x(t))u^j(t)\frac{dx^k(t)}{dt} = 0.$$

Здесь $x = x(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, — параметрическое уравнение l, $x(t_1) = a$, $x(t_2) = b$.

Так как параллельный перенос векторов описывается системой линейных однородных уравнений, то он является линейной операцией.

Пример. Покажем, что геодезическая линия может быть определена следующим свойством: единичный касательный вектор к геодезической переносится вдоль геодезической параллельно («кратчайшая» линия есть «прямейшая»).

Как уже отмечалось, касательный вектор к кривой является единичным в том и только том случае, когда в качестве параметра на кривой взята длина дуги s.

Обозначим $u^i = dx^i/ds$. Условие параллельного переноса вектора u вдоль кривой дает

$$\frac{du^i}{ds} + \Gamma^i_{jk} u^j \frac{dx^k}{ds} = 0,$$

т. е.

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2.2}$$

Покажем, что эта система эквивалентна системе (1.1), определяющей геодезические. Действительно, преобразуя (1.1), получаем последовательно

$$\left(\frac{d}{ds} g_{kj}\right)\frac{dx^j}{ds} + g_{kj}\frac{d^2x^j}{ds^2} - \frac{1}{2}(\partial_k g_{ij})\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} = 0,$$

$$g_{kj}\frac{d^2x^j}{ds^2} + (\partial_i g_{kj})\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} - \frac{1}{2}(\partial_k g_{ij})\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} = 0,$$

$$g_{kj}\frac{d^2x^j}{ds^2} + \frac{1}{2}(\partial_i g_{kj} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij})\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} = 0,$$

$$g_{kj}\frac{d^2x^j}{ds^2} + \Gamma_{ij,k}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} = 0,$$

откуда и получается (2.2).

Мы определили параллельный перенос вектора формулой, явно использующей выбранную координатную систему. Важный вопрос: зависит ли результат параллельного переноса вектора от выбранной системы координат? Ответ дает

Теорема. *Результат параллельного переноса вектора не зависит от выбранной системы координат.*

Доказательство. Нам потребуется следующая

Лемма. *При переходе к новой системе координат имеют место формулы*

$$\partial_{k'} g_{i'j'} = A^k_{k'} A^i_{i'} A^j_{j'} \partial_k g_{ij} + \left(\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{i'}\partial x^{k'}} A^j_{j'} + \frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}} A^i_{i'}\right) g_{ij},$$

$$\Gamma_{i'j',k'} = A^k_{k'} A^i_{i'} A^j_{j'} \Gamma_{ij,k} + A^k_{k'} \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} g_{ik},$$

$$\Gamma^{k'}_{i'j'} = A^{k'}_k A^i_{i'} A^j_{j'} \Gamma^k_{ij} + A^{k'}_k \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}}.$$

Доказательство леммы. Выведем первую из этих формул. Имеем

$$\partial_{k'} g_{i'j'} = \partial_{k'}(g_{ij} A^i_{i'} A^j_{j'}) = (\partial_{k'} g_{ij}) A^i_{i'} A^j_{j'} + g_{ij} (\partial_{k'} A^i_{i'}) A^j_{j'} + g_{ij} A^i_{i'} \partial_{k'} A^j_{j'},$$

но

$$\partial_{k'} A^i_{i'} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{k'} \partial x^{i'}}, \qquad \partial_{k'} A^j_{j'} = \frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{k'} \partial x^{j'}}, \qquad \partial_{k'} g_{ij} = A^k_{k'} \partial_k g_{ij},$$

откуда сразу получаем нужное выражение. Остальные две формулы следуют из первой, если вспомнить определение $\Gamma_{ij,k}$ и Γ^k_{ij}. Лемма доказана.

Перейдем к непосредственному доказательству теоремы.

Для координат вектора u, переносимого параллельно из точки x в точку $x + dx$, мы имеем в системе координат $x^1, \ldots, x^n$ равенство (2.1). При переходе к системе координат $x^{1'}, \ldots, x^{n'}$ это равенство дает

$$d(A^i_{i'} u^{i'}) + \Gamma^i_{jk} A^j_{j'} u^{j'} A^k_{k'} dx^{k'} = 0,$$

т. е.

$$u^{i'} (\partial_{k'} A^i_{i'}) dx^{k'} + A^i_{i'} du^{i'} + \Gamma^i_{jk} A^j_{j'} A^k_{k'} u^{j'} dx^{k'} = 0,$$

откуда

$$A^i_{i'} du^{i'} + (\Gamma^i_{jk} A^j_{j'} A^k_{k'} + \partial_{k'} A^i_{j'}) u^{j'} dx^{k'} = 0,$$

и, наконец,

$$du^{i'} + \left(\Gamma^i_{jk} A^j_{j'} A^k_{k'} A^{i'}_i + A^{i'}_i \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{k'} \partial x^{j'}} \right) u^{j'} dx^{k'} = 0.$$

В последнем равенстве выражение в скобках равно $\Gamma^{i'}_{j'k'}$ (см. лемму), поэтому тот же параллельный перенос в новой системе координат записывается формулой

$$du^{i'} + \Gamma^{i'}_{j'k'} u^{j'} dx^{k'} = 0,$$

что и доказывает теорему.

Из этой теоремы, в частности, следует, что свойство кривой быть геодезической не зависит от координатной системы.

Задача. Доказать, что геодезические на сфере в H^3 — дуги больших кругов. Рассматривая пример в конце п. 3 § 1, мы приняли этот факт без доказательства.

Решение. Возьмем в H^3 ортонормированный базис; ξ, η, ζ — координаты в этом базисе. Уравнение сферы S радиуса r с центром в начале координат имеет вид

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = r^2.$$

Введем на сфере сферические координаты θ, φ:

$$\xi = r\cos\theta\cos\varphi, \quad \eta = r\cos\theta\sin\varphi, \quad \zeta = r\sin\theta;$$

точки, в которых $\cos\theta = 0$, не рассматриваем. Вычислим g_{ij}, g^{ij}, $\Gamma_{ij,k}$, Γ^k_{ij} в этих координатах; пусть индекс 1 соответствует θ, индекс 2 соответствует φ.

В H^3 имеет место

$$ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2.$$

Поэтому на S выполняется

$$ds^2 = r^2(d\theta^2 + \cos^2\theta\, d\varphi^2).$$

Это дает $g_{11} = r^2$, $g_{12} = g_{21} = 0$, $g_{22} = r^2\cos^2\theta$, а следовательно, $g^{11} = 1/r^2$, $g^{12} = g^{21} = 0$, $g^{22} = 1/(r^2\cos^2\theta)$. Тогда

$$\partial_1 g_{22} = -2r^2\cos\theta\sin\theta,$$

остальные $\partial_i g_{jk}$ равны нулю. Поэтому

$$\Gamma_{22,1} = r^2\cos\theta\sin\theta, \quad \Gamma_{12,2} = \Gamma_{21,2} = -r^2\cos\theta\sin\theta,$$

остальные $\Gamma_{ij,k}$ равны нулю. Отсюда

$$\Gamma^1_{22} = \cos\theta\sin\theta, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = -\mathrm{tg}\theta,$$

остальные Γ^k_{ij} равны нулю.

Докажем, что кривая l на S, определяемая уравнением $\theta = 0$, является геодезической. Действительно, на l имеем $ds^2 = r^2 d\varphi^2$. Так как на l все Γ^i_{jk} равны нулю, то уравнения (2.2), определяющие геодезическую (где $x^1 = \theta$ и $x^2 = \varphi$), удовлетворяются парой функций $\theta = 0$, $\varphi = s/r + \varphi_0$.

Покажем, что каждая дуга большого круга на S — геодезическая. Для этого выберем на S ту сферическую систему координат, для которой эта дуга имеет уравнение $\theta = 0$.

Покажем, наконец, что каждая геодезическая l на S — дуга большого круга. Возьмем на l какую-либо точку $\underset{0}{x}$, возьмем $\underset{0}{v} = \left.\frac{dx}{ds}\right|_{\underset{0}{x}}$, s — длина дуги кривой, взятая в качестве параметра на l, $|\underset{0}{v}| = 1$. Возьмем на S дугу большого круга $\tilde{l}$, проходящую через $\underset{0}{x}$ и касающуюся в $\underset{0}{x}$ вектора $\underset{0}{v}$; дуга $\tilde{l}$, как было показано, геодезическая. Мы получили на S две геодезические l и $\tilde{l}$, проходящие через $\underset{0}{x}$ и касающиеся $\underset{0}{v}$. Тем самым (см. п. 3 § 1), l и $\tilde{l}$ совпадают.

3. Параллельный перенос произвольных тензоров в V^n. Введенное понятие параллельного переноса векторов дает возможность установить изоморфизм между касательными пространствами в различных точках:

- между $T^n(x)$ и $T^n(x + dx)$

или

- между $T^n(x)$ вдоль кривой $l : x = x(t)$.

Это позволяет установить связь между тензорами в касательных пространствах. В самом деле, если зафиксирован некоторый изоморфизм линейных пространств $\underset{1}{R}^n$ и $\underset{2}{R}^n$, то тем самым фиксируется некоторый изоморфизм линейных пространств тензоров заданного типа в $\underset{1}{R}^n$ и в $\underset{2}{R}^n$; это непосредственно следует из каждого определения тензора, данного в § 1 гл. 1.

Таким образом, параллельный перенос контравариантных векторов дает возможность ввести (и притом однозначно) параллельный перенос тензоров любого фиксированного типа.

Выведем соответствующие формулы.

Если u — скаляр, то условие параллельного переноса u, очевидно, имеет вид

$$du = 0.$$

Рассмотрим случай ковариантного вектора. В соответствии со сказанным выше ковектор $v(x + dx)$ получен из $v(x)$ параллельным переносом, если при параллельном переносе любого вектора z из x в $x+dx$ имеет место

$$d(z^i v_i) = 0.$$

Это дает

$$(dz^i)v_i + z^i dv_i = 0.$$

Но при параллельном переносе z^i мы имеем $dz^i + \Gamma^i_{jk} z^j dx^k = 0$. Поэтому $-\Gamma^i_{jk} z^j v_i dx^k + z^i dv_i = 0$ или, что то же самое,

$$(-\Gamma^i_{jk} v_i dx^k + dv_j) z^j = 0.$$

Так как для фиксированной точки x вектор z^j — произвольный, то получаем условие параллельного переноса ковариантного вектора из точки x в точку $x + dx$ в виде

$$dv_j - \Gamma^i_{jk} v_i dx^k = 0.$$

Этот же прием применим к тензорам произвольного типа. Например, условие параллельного переноса тензора u^i_{jk} получается так. Берем произвольные z_i, v^j, w^k. Составляем $u^i_{jk} z_i v^j w^k$. Переносим z, v, w параллельно из x в $x+dx$ (формулы для переноса векторов и ковекторов уже выведены). Из условия $d(u^i_{jk} z_i v^j w^k) = 0$, учитывая произвольность z, v, w и проведя нужные выкладки, получаем равенство

$$du^i_{jk} + (\Gamma^i_{hr} u^h_{jk} - \Gamma^h_{jr} u^i_{hk} - \Gamma^h_{kr} u^i_{jh}) dx^r = 0.$$

Читатель сам докажет общую формулу, дающую условие параллельного переноса тензора $u^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$:

$$du^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} + \left(\sum_{k=1}^{p} \Gamma^{i_k}_{hr} u^{i_1 \ldots i_{k-1} h i_{k+1} \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} - \sum_{k=1}^{q} \Gamma^{h}_{j_k r} u^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_{k-1} h j_{k+1} \ldots j_q} \right) dx^r = 0.$$

В силу общих соображений, приведенных в начале настоящего пункта, результат параллельного переноса тензора любого типа не зависит от выбранной системы координат.

4. Ковариантное дифференцирование. Введя связь между касательными пространствами в бесконечно близких точках, мы можем осуществить стандартный способ введения операции дифференцирования.

Пусть u — заданное на V^n тензорное поле какого-либо типа. Возьмем точки x и $x+dx$. Перенесем $u(x+dx)$ параллельно в точку x. Вычтем из этого тензора тензор $u(x)$. Мы получим бесконечно малое приращение тензорного поля, его линейная часть — *дифференциал тензорного поля*. Рассмотрим, как эта идея реализуется в координатной записи.

Начнем с вектора. Так как мы учитываем только линейные части приращений, то берем $u^i(x+dx) = u^i(x) + du^i$. Обозначим $\underset{0}{d}u^i$ — дифференциал, соответствующий параллельному переносу из $x + dx$ в x, и $Du^i = u^i(x+dx) + \underset{0}{d}u^i - u^i(x) = du^i + \underset{0}{d}u^i$.

Мы имеем

$$\underset{0}{d}u^i - \Gamma^i_{jk}u^j dx^k = 0$$

(переход от $x + dx$ к x — смещение на $-dx$), поэтому

$$Du^i = du^i + \Gamma^i_{jk}u^j dx^k.$$

Так как $du^i = \partial_k u^i dx^k$, то

$$Du^i = (\partial_k u^i + \Gamma^i_{jk}u^j)dx^k.$$

Определение и обозначение:

- $\nabla_k u^i = \partial_k u^i + \Gamma^i_{jk}u^j$ — ковариантная производная поля u^i,
- $Du^i = du^i + \Gamma^i_{jk}u^j dx^k$ — ковариантный дифференциал поля u^i.

Аналогично для ковекторного поля получим ковариантный дифференциал и ковариантную производную:

$$Du_j = \nabla_i u_j dx^i,$$

где

$$\nabla_i u_j = \partial_i u_j - \Gamma^k_{ij}u_k.$$

Для тензора произвольного типа получаем формулу:

$$Du^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} = \nabla_r u^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} dx^r,$$

где

$$\nabla_r u^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} = \partial_r u^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} + \sum_{k=1}^{p} \Gamma^{i_k}_{hr} u^{i_1\ldots i_{k-1} h i_{k+1}\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} - \sum_{k=1}^{q} \Gamma^h_{j_k r} u^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_{k-1} h j_{k+1}\ldots j_q}.$$

Если u — скалярная функция, то в соответствии с общим правилом получаем:

$$Du = du, \quad \nabla_r u = \partial_r u.$$

Пример. В H^n в прямолинейных координатах g_{ij} — const, поэтому $\partial_i g_{jk} = 0$, значит, $\Gamma_{ij,k} = 0$, следовательно, $\Gamma^i_{jk} = 0$. Так что в прямолинейных координатах

$$\nabla_i u^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} = \partial_i u^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}, \quad Du^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} = du^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q},$$

что и следовало ожидать.

Теорема. *Для тензорного поля $u^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$ любого типа ковариантная производная $\nabla_k u^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$ и ковариантный дифференциал $Du^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$ — тензоры.*

Доказательство для $Du^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$ следует из определения операции D и из независимости операции параллельного переноса тензора от системы координат. Так как

$$Du^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} = \nabla_r u^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} dx^r$$

и dx^r — произвольный по направлению вектор, то отсюда следует, что $\nabla_r u^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$ — тензор.

Очень полезное упражнение — непосредственная проверка того, что числа $\nabla_r u^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$ преобразуются как координаты тензора; эта проверка дает другое доказательство теоремы.

Операция вычисления ковариантного дифференциала обладает следующими алгебраическими свойствами (докажите сами!):

1. $D(\alpha u + \beta v) = \alpha Du + \beta Dv$, где α и β — числа,
2. $D(u \otimes v) = (Du) \otimes v + u \otimes Dv$,
3. $D(w^{\cdot\cdot j\cdot\cdot}_{\cdot j\cdots}) = (Dw)^{\cdot\cdot j\cdot\cdot}_{\cdot j\cdots}$.

Аналогичные свойства имеют место для ковариантных производных (для операции ∇_i).

Очевидно, что свойство

- *«Тензор u переносится параллельно вдоль кривой l»*

эквивалентно свойству

- *«Вдоль l имеет место $Du = 0$»*.

В этом параграфе мы имеем дело с тензорами; ясно, что параллельно переносить и ковариантно дифференцировать можно также и псевдотензоры.

Задача. Доказать формулу (1.4) гл. 2.

5. Связь между параллельным переносом в V^n и V^m, если V^m погружено в V^n. Ограничимся только полями контравариантных векторов. Пусть V^m погружено в V^n, $m < n$. Возьмем $x \in V^m$; будем рассматривать V^m в достаточно малой окрестности точки x как такое гладкое подмногообразие пространства V^n, для которого метрический тензор, индуцированный метрическим тензором V^n, совпадает с метрическим тензором V^m (см. п. 2, § 1). Возьмем какой-либо вектор u, лежащий в касательном к V^m в точке x пространстве $T^m(x)$. Можно перенести этот вектор параллельно в точку $x + dx$, лежащую в V^m, в соответствии с геометрией V^m; перенесенный вектор будет принадлежать касательному к V^m в точке $x + dx$ пространству $T^m(x + dx)$. В то же время этот вектор можно перенести в точку $x + dx$ в соответствии с геометрией V^n; результат такого переноса, конечно, не обязан лежать в $T^m(x + dx)$. Какова связь между этими двумя параллельными переносами?

Теорема. *Параллельный перенос вектора, касательного к V^m, в бесконечно близкую точку, лежащую на V^m, осуществляемый в соответствии с геометрией V^m, может быть реализован следующим образом: перенесем вектор параллельно в соответствии с геометрией V^n и ортогонально спроектируем получившийся вектор на касательное к V^m пространство.*

Доказательство. Зафиксируем $x \in V^m$. Выберем в V^n систему координат $x^1, \ldots, x^n$ так, чтобы в окрестности точки x многообразие V^m задавалось уравнениями

$$x^{m+1} = \ldots = x^n = 0.$$

Значения $x^1, \ldots, x^m$ — координаты на V^m. Тогда для точек этой окрестности касательное пространство T^m к V^m задается в T^n (касательном пространстве к V^n) уравнением

$$v^i = 0 \quad \text{при} \quad i > m.$$

Подправим эту координатную систему так, чтобы в выбранной точке x имело место

$$g_{ij} = 0 \quad \text{при} \quad i \leqslant m, \quad j > m.$$

Тогда, очевидно, в этой точке

$$g^{ij} = 0 \quad \text{при} \quad i \leqslant m, \quad j > m.$$

Обозначим $\hat{g}_{ij}$ и $\hat{g}^{ij}$, $i, j = 1, \dots, m$, — координаты метрического тензора V^m. Легко видеть, что $\hat{g}_{ij} = g_{ij}$ и в выбранной точке $\hat{g}^{ij} = g^{ij}$, здесь $i, j = 1, \dots, m$. Обозначим $\hat{\Gamma}_{ij,k}$ и $\hat{\Gamma}^k_{ij}$, $i, j, k = 1, \dots, m$, — коэффициенты связности V^m (в отличие от $\Gamma_{ij,k}$ и Γ^k_{ij}, $i, j, k = 1, \dots, n$, для V^n). Тогда

$$\hat{\Gamma}_{ij,k} = \frac{1}{2}(\partial_i \hat{g}_{jk} + \partial_j \hat{g}_{ik} - \partial_k \hat{g}_{ij}) = \Gamma_{ij,k}$$

и в выбранной точке

$$\hat{\Gamma}^k_{ij} = \sum_{h=1}^{m} \hat{g}^{kh} \hat{\Gamma}_{ij,h} = \sum_{h=1}^{n} g^{kh} \Gamma_{ij,h} = \Gamma^k_{ij}.$$

При параллельном переносе вектора u в соответствии с геометрией V^m имеет место

$$\hat{d}u^i + \hat{\Gamma}^i_{jk} u^j dx^k = 0, \quad i \leqslant m.$$

А *при параллельном переносе вектора u в соответствии с геометрией* V^n имеет место

$$du^i + \Gamma^i_{jk} u^j dx^k = 0, \quad i \leqslant n.$$

Для рассматриваемого случая в последнем равенстве $u^j = 0$ и $dx^k = 0$ при $j > m$ и $k > m$. Поэтому $du^i = \hat{d}u^i$ при $i \leqslant m$. Различие между du^i и $\hat{d}u^i$ лишь в том, что при $m < i$ имеем $\hat{d}u^i = 0$, в то время как возможно $du^i \neq 0$. Поэтому $\hat{d}u^i$ могут быть получены по формулам, дающим du^i, с последующей дополнительной операцией: положим $\hat{d}u^i = 0$ при $i > m$. А это и есть аналитическая интерпретация геометрической формулировки теоремы.

6. Координаты, геодезические в точке.

Определение. Система координат $x^1, \dots, x^n$ называется геодезической в точке $\underset{0}{x}$, если $\Gamma^i_{jk}(\underset{0}{x}) = 0$.

Так как $\partial_i g_{jk} = \Gamma_{ij,k} + \Gamma_{ik,j}$ (см. п. 2), условие $\Gamma^i_{jk}(\underset{0}{x}) = 0$ эквивалентно тому, что в этой точке имеет место $\partial_i g_{jk} = 0$.

Применение таких координатных систем часто упрощает выкладки, приводящие к тензорным величинам; далее мы будем использовать эту возможность.

Теорема. *Для каждой точки $\underset{0}{x}$ из V^n существуют системы координат геодезические в этой точке.*

Доказательство. Выберем какую-либо координатную систему $x^1, \dots, x^n$ в окрестности $\underset{0}{x}$ и будем проводить все выкладки в этой системе; без ограничения общности можно считать, что $\underset{0}{x}$ имеет нулевые координаты. При переходе от одной системы координат к другой имеет место (см. лемму в п. 2)

$$\Gamma^i_{jk} = A^i_{i'} A^{j'}_j A^{k'}_k \Gamma^{i'}_{j'k'} + A^i_{i'} \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^j \partial x^k}.$$

Равенство $\Gamma^{i'}_{j'k'} = 0$, очевидно, эквивалентно равенству $A^i_{i'} A^{j'}_j A^{k'}_k \Gamma^{i'}_{j'k'} = 0$; поэтому, чтобы система координат $x^{1'}, \dots, x^{n'}$ была геодезической в точке $\underset{0}{x}$, необходимо и достаточно выполнение в этой точке условия

$$\Gamma^i_{jk} = A^i_{i'} \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^j \partial x^k},$$

которое эквивалентно условию

$$A^{i'}_i \Gamma^i_{jk} = \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^j \partial x^k}.$$

Перейдем к непосредственному построению геодезической в $\underset{0}{x}$ системы координат. Значения $A^{i'}_i$ (т. е. $\partial x^{i'}/\partial x^i$) в точке $\underset{0}{x}$ берем любыми, удовлетворяющими условию $\det \|A^{i'}_i\| \neq 0$. Получим значения $b^{i'}_{jk} = A^{i'}_i \Gamma^i_{jk}$ в этой точке. Величины $b^{i'}_{jk}$ удовлетворяют соотношению $b^{i'}_{jk} = b^{i'}_{kj}$. Завершаем построение координатной системы $x^{1'}, \dots, x^{n'}$, взяв в малой окрестности точки $\underset{0}{x}$, например, координаты

$$x^{i'} = A^{i'}_i x^i + \frac{1}{2} b^{i'}_{jk} x^j x^k.$$

7. Некоторые важные факты и формулы.

1. Имеют место формулы:

$$\text{a) } \nabla_i \delta^j_k = 0; \quad \text{b) } \nabla_i g_{jk} = 0;$$

$$\text{c) } \nabla_i g^{jk} = 0; \quad \text{d) } \nabla_i \sqrt{g}_{i_1 \dots i_n} = 0; \quad \text{e) } \nabla_i \left(\frac{1}{\sqrt{g}}\right)^{i_1 \dots i_n} = 0.$$

Докажем эти равенства. Как было показано в п. 4, значение каждого из этих выражений — тензорное (псевдотензорное) поле. Тем самым для вычислений можно взять любую координатную систему. Для доказательства нужных равенств в точке x возьмем геодезическую в x систему координат. В этой системе в точке x имеет место $\Gamma^i_{jk} = 0$ и $\partial_i g_{jk} = 0$ (см. п. 6), а следовательно, $\partial_i \mathrm{g} = 0$ и $\partial_i g^{jk} = 0$. Тогда, если выписать полностью каждое искомое выражение (общую формулу см. в п. 4), все слагаемые в этих выражениях будут равны нулю.

Для случаев a, b, c легко провести выкладки и в общей системе координат (мы рекомендуем сделать это); для случаев d и e соответствующие выкладки очень громоздки.

2. Параллельный перенос является линейной операцией.

Точнее. Пусть $\underset{0}{u}$ и $\underset{0}{v}$ — тензоры или псевдотензоры какого-либо одного и того же типа, заданные в точке a. Пусть l: $x = x(t)$ — кривая, начинающаяся в точке a. Пусть α и β — числа. Пусть, наконец, $u(t)$ и $v(t)$ — результаты параллельного переноса $\underset{0}{u}$ и $\underset{0}{v}$ вдоль кривой l. Тогда $\alpha u(t)+\beta v(t)$ — результат параллельного переноса вдоль l тензора $\alpha \underset{0}{u} + \beta \underset{0}{v}$.

Докажем это. Условия параллельного переноса тензоров u и v вдоль кривой l могут быть записаны в виде

$$\frac{Du}{dt} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{Dv}{dt} = 0 \quad \text{соответственно.}$$

Каждое из них приводит (см. общую формулу в п. 4) к одной и той же линейной однородной системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно координат соответствующего тензора. А для таких систем линейная комбинация начальных данных дает ту же линейную комбинацию ее решений.

3. При параллельном переносе векторов u и v имеет место

$$d(g_{ij}u^i v^j) = 0.$$

Доказательство. Так как $g_{ij}u^i v^j$ — скалярная функция, то

$$d(g_{ij}u^i v^j) = D(g_{ij}u^i v^j) = (Dg_{ij})u^i v^j + g_{ij}(Du^i)v^j + g_{ij}u^i Dv^j.$$

Каждый член последней суммы равен нулю: $Du^i = 0$ и $Dv^j = 0$, так как u и v переносятся параллельно, равенство $Dg_{ij} = 0$ следует из формулы b этого пункта.

Это важное соотношение. Оно показывает, что параллельный перенос векторов устанавливает изоморфизм $T(x)$ и $T(x+dx)$ как евклидовых пространств.

4. *Ясно*, что параллельный перенос можно осуществлять и вдоль кусочно гладких кривых; все отмеченные выше свойства сохраняются.

§ 3. Тензор кривизны

В § 1–2 подчеркивались те свойства V^n, которые аналогичны свойствам H^n. В настоящем параграфе мы изучим явление, характерное для общего случая V^n и отсутствующее в H^n — «кривизну пространства» (H^n имеет «нулевую кривизну»).

1. Определение тензора кривизны. Вернемся к операции ковариантного дифференцирования. Пусть $u_{\cdots}^{\cdot\cdot}$ — какое-либо гладкое тензорное поле. Имеет ли место формула

$$\nabla_i(\nabla_j u_{\cdots}^{\cdot\cdot}) = \nabla_j(\nabla_i u_{\cdots}^{\cdot\cdot})?$$

Рассмотрим сначала случай: u — скалярное поле. Тогда

$$v_i = \nabla_i u = \partial_i u, \quad \nabla_j v_i = \partial_j v_i - \Gamma^k_{ji} v_k = \partial_j(\partial_i u) - \Gamma^k_{ji}\partial_k u,$$
$$\nabla_{[j}(\nabla_{i]} u) = \partial_{[j}(\partial_{i]} u) - \Gamma^k_{[ji]}\partial_k u = 0.$$

Рассмотрим теперь случай: u_r — поле ковариантного вектора. Тогда

$$\begin{aligned} v_{ir} &= \nabla_i u_r = \partial_i u_r - \Gamma^k_{ir} u_k, \\ \nabla_j v_{ir} &= \partial_j v_{ir} - \Gamma^q_{jr} v_{iq} - \Gamma^q_{ji} v_{qr} = \\ &= \partial_j(\partial_i u_r - \Gamma^k_{ir} u_k) - \Gamma^q_{jr}(\partial_i u_q - \Gamma^k_{iq} u_k) - \Gamma^q_{ji} v_{qr} = \\ &= \partial_j\partial_i u_r - (\partial_j \Gamma^k_{ir}) u_k - \Gamma^k_{ir}\partial_j u_k - \Gamma^q_{jr}\partial_i u_q + \Gamma^q_{rj}\Gamma^k_{iq} u_k - \Gamma^q_{ji} v_{qr}. \end{aligned}$$

В итоге получаем

$$\nabla_{[j}\nabla_{i]} u_r = -(\partial_{[j}\Gamma^k_{i]r} + \Gamma^k_{q[j}\Gamma^q_{i]r}) u_k.$$

Обозначение:

$$R_{ij,k}^{\cdot\cdot\cdot\ r} = -2(\partial_{[i}\Gamma^r_{j]k} + \Gamma^r_{h[i}\Gamma^h_{j]k}). \tag{3.1}$$

Теорема. $R_{ij,k}^{\cdot\cdot\cdot\ r}$ — *тензор (он называется тензором кривизны или тензором Римана—Кристоффеля).*

Доказательство следует из того, что $\nabla_{[i}\nabla_{j]}u_r$ — тензор и u_k — произвольный ковариантный вектор.

Пример. Вычислим тензор кривизны H^n. В прямолинейной системе координат g_{ij} — const, поэтому $\partial_k g_{ij} = 0$, так что $\Gamma^k_{ij} = 0$. Отсюда следует (см. (3.1)), что в указанной системе координат $R_{ij,k}^{\cdot\cdot\cdot r} = 0$. Так как $R_{ij,k}^{\cdot\cdot\cdot r}$ — тензор, то $R_{ij,k}^{\cdot\cdot\cdot r} = 0$ в каждой точке в любой криволинейной системе координат.

Далее (в § 5) мы увидим, что существуют V^n, для которых $R_{ij,k}^{\cdot\cdot\cdot r} \neq 0$.

2. Аналитические свойства тензора кривизны

2.1. Тождества, которым удовлетворяет тензор кривизны. Опустим у тензора кривизны верхний индекс, т. е. введем

$$R_{ij,kr} = g_{rs}R_{ij,k}^{\cdot\cdot\cdot s};$$

$R_{ij,kr}$ называется *ковариантным тензором кривизны.*

Используя связь коэффициентов связности с координатами метрического тензора и их производными (см. п. 2 § 2), несложно доказать формулу

$$R_{ij,kr} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{ir}}{\partial x^j \partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i \partial x^r} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^r} - \frac{\partial^2 g_{jr}}{\partial x^i \partial x^k}\right) + \\ + g_{pq}\left(\Gamma^p_{ir}\Gamma^q_{jk} - \Gamma^p_{jr}\Gamma^q_{ik}\right).$$

Имеют место тождества:

1. $R_{(ij),k}^{\cdot\cdot\cdot r} = 0$, $R_{(ij),kr} = 0$ (см. (3.1));

2. $R_{[ij,k]}^{\cdot\cdot\cdot r} = 0$, $R_{[ij,k]r} = 0$ — тождество Риччи (также см. (3.1));

3. $R_{ij,kr} = R_{kr,ij}$ (см. приведенную выше формулу для ковариантного тензора кривизны);

число существенных компонент тензора, удовлетворяющего условиям 1–2–3, равно $n^2(n^2 - 1)/12$ (вывод опускаем);

4. $\nabla_{[s}R_{ij],k}^{\cdot\cdot\cdot r} = 0$, $\nabla_{[s}R_{ij],kr} = 0$ — тождество Бианки. Так как в левых частях этих равенств стоят тензоры, то достаточно провести выкладки, выбрав какую-либо удобную координатную систему. Возьмем координатную систему, геодезическую в той точке, для которой доказывается равенство. Тогда в этой точке $\Gamma^i_{jk} = 0$ и, следовательно,

$\nabla_s = \partial_s$ для тензоров любого типа (см. п. 6 § 2); речь здесь, разумеется, идет только о первых производных. Но очевидно, $\partial_{[s}\partial_i\Gamma^r_{j]k} = 0$, а

$$\partial_s(\Gamma^r_{hi}\Gamma^h_{jk}) = (\partial_s\Gamma^r_{hi})\Gamma^h_{jk} + \Gamma^r_{hi}(\partial_s\Gamma^h_{jk}) = 0,$$

так как $\Gamma^p_{qm} = 0$ в рассматриваемой точке.

По тензору $R_{ij,k}^{\cdot\cdot\cdot\,r}$ строятся тензоры:

- $\widetilde{R}_{ij} = R_{ik,j}^{\cdot\cdot\cdot\,k}$ — тензор Риччи, $\widetilde{R}_{ij} = \widetilde{R}_{ji}$,
- $\widetilde{\widetilde{R}} = \widetilde{R}_{ij}g^{ij}$ — скалярная кривизна,

дающие частичную информацию о кривизне V^n.

2.2. Повторное ковариантное дифференцирование и тензор кривизны. Имеют место следующие формулы:

$$\nabla_{[i}\nabla_{j]}u = 0,$$

где u — скалярное поле (см. п. 1);

$$\nabla_{[i}\nabla_{j]}u_k = \frac{1}{2}R_{ij,k}^{\cdot\cdot\cdot\,s}u_s$$

(см. п. 1);

$$\nabla_{[i}\nabla_{j]}u^k = -\frac{1}{2}R_{ij,s}^{\cdot\cdot\cdot\,k}u^s$$

(вывод совершенно аналогичен проведенному в п. 1);

$$\nabla_{[i}\nabla_{j]}u^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}R_{ij,r}^{\cdot\cdot\cdot\,i_k}u^{i_1\ldots i_{k-1}ri_{k+1}\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{q}R_{ij,j_k}^{\cdot\cdot\cdot\,r}u^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_{k-1}rj_{k+1}\ldots j_q}$$

(выведите сами).

2.3. Теорема. *Пусть на V^n заданы поля $u, v, \ldots$ тензоров некоторых типов. Пусть w — тензорное поле и координаты w суть полиномы от координат $u, v, \ldots$, метрического тензора (с верхними и нижними индексами) и их производных до некоторого порядка. Тогда w выражается с помощью операций тензорной алгебры над $u, v, \ldots$, тензором кривизны, их ковариантными производными до некоторого порядка, метрическим тензором и нулевыми тензорами.*

Формулировка и доказательство эквивалентного этому утверждения[2] использует важные понятия нормальных координат и тензорных расширений (темы, нами не затронутые).

3. Геометрический смысл тензора кривизны. В определении параллельного переноса фигурировала кривая, по которой совершается перенос. Как зависит результат переноса от выбора кривой, соединяющей заданные начало и конец?

Пусть $l: x = x(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, — ориентированная кривая, соединяющая точки a и b, $a = x(t_1)$, $b = x(t_2)$. Параллельный перенос векторов вдоль l из a в b определяет отображение $T^n(a)$ на $T^n(b)$; это отображение является, как следует из результатов предыдущего параграфа, линейным и изометричным; обозначим его $\mathcal{D}(l)$. Отметим, что если кривая $\hat{l}$ получена из l изменением ориентации, то $\mathcal{D}(l)$ и $\mathcal{D}(\hat{l})$ — взаимно обратные отображения.

Зафиксируем теперь какую-либо замкнутую ориентированную кривую l. Для каждой точки x, лежащей на l, определено отображение $C(x)$ касательного пространства $T^n(x)$ на себя: $C(x) = \mathcal{D}(l)$, если считать эту точку началом и концом l.

Очень простым и очень важным является следующее утверждение. *При фиксированной кривой l линейные преобразования $C(\underset{1}{x})$ и $C(\underset{2}{x})$ подобны для любой пары точек $\underset{1}{x}$ и $\underset{2}{x}$ на этой кривой.*

Докажем это. Очевидно (см. рис. 4),

$$C(\underset{1}{x}) = \mathcal{D}(\underset{2}{x}\,\underset{1}{x})\mathcal{D}(\underset{1}{x}\,\underset{2}{x}),$$

$$C(\underset{2}{x}) = \mathcal{D}(\underset{1}{x}\,\underset{2}{x})\mathcal{D}(\underset{2}{x}\,\underset{1}{x}).$$

Поэтому

$$C(\underset{1}{x}) = \mathcal{D}(\underset{2}{x}\,\underset{1}{x})C(\underset{2}{x})\mathcal{D}^{-1}(\underset{2}{x}\,\underset{1}{x}),$$

что доказывает подобие $C(\underset{1}{x})$ и $C(\underset{2}{x})$.

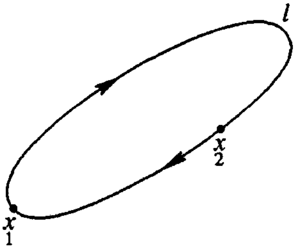

Рис. 4

Рассмотрим ситуацию, когда контур l мал. В этом случае ортогональное линейное преобразование $C(x)$ близко к единичному: $C = I + B$,

---

[2] См., например: *Thomas T. Y.* The differential invariants of generalized spaces. — Cambr. Univ. Press, 1934.

B — мало. Ортогональность C дает $((I+B)u,(I+B)v) = (u,v)$, т. е. $(Bu,v)+(u,Bv)+(Bu,Bv)=0$. Пренебрегая членом (Bu,Bv), имеющим второй порядок малости, получаем $(Bu,v)+(u,Bv)\approx 0$: билинейная форма, соответствующая B, близка к антисимметричной.

Оказывается, если контур мал, то главная часть малого линейного преобразования B определяется тензором кривизны в точке x, касательной плоскостью к малой площадке, ограниченной l, площадью этой площадки, выбранным на l направлением.

Перейдем к точным формулировкам. Зафиксируем в V^n точку $\underset{0}{x}$. Рассмотрим какое-либо V^2, проходящее через $\underset{0}{x}$. Возьмем на V^2 замкнутую несамопересекающуюся ориентированную кривую l длины h, начинающуюся и кончающуюся в точке $\underset{0}{x}$. Далее h — малая величина, l ограничивает на V^2 малый ориентированный участок σ. Будем характеризовать σ парой векторов $\underset{1}{d}$ и $\underset{2}{d}$, касательных в $\underset{0}{x}$ к V^2 и таких, что площадь параллелограмма π, построенного на $\underset{1}{d}$ и $\underset{2}{d}$, равна (с учетом ориентации!) площади σ; соответствующие обозначения: пл π, пл σ (рис. 5).

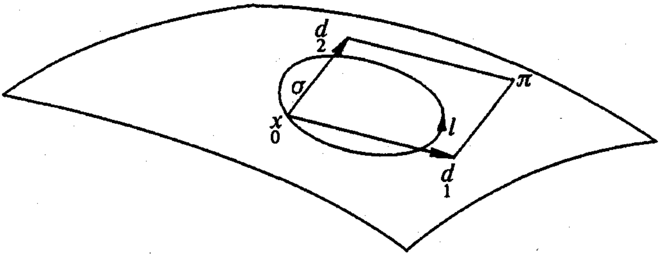

Рис. 5

Образуем тензор $w^{ij} = 2\underset{1}{d}^{[i}\underset{2}{d}^{j]}$; w^{ij} называется *бивектором*, характеризующим σ. Заметим, что $\underset{1}{d}$ и $\underset{2}{d}$ определяются нашими требованиями неоднозначно, в то время как w определено однозначно.

Возьмем теперь какой-либо вектор $\underset{0}{u}\in T^n(\underset{0}{x})$. Перенесем его параллельно по l. Мы получим в результате вектор $\underset{1}{u}\in T^n(\underset{0}{x})$. Обозначим $\Delta u = \underset{1}{u}-\underset{0}{u}$. Пусть $R_{ij,k}^{\cdot\,\cdot\,\cdot\,r}$ — тензор кривизны в точке $\underset{0}{x}$.

Теорема. $\Delta u^r = \frac{1}{2} R_{ij,k}{}^{\cdot\cdot\cdot r} w_{ij} \underset{0}{u}^k + O(h^3)$.

Другая формулировка этой теоремы. Как уже говорилось, при фиксированной кривой l вектор Δu получается из $\underset{0}{u}$ линейным преобразованием $\Delta u^r = B^r_k \underset{0}{u}^k$, B зависит от l. Теорема утверждает, что

$$B^r_k = \frac{1}{2} R_{ij,k}{}^{\cdot\cdot\cdot r} w^{ij} + O(h^3).$$

Отметим, что если контур l «не слишком сплющен», то w^{ij} — величины порядка h^2; в этом случае $\frac{1}{2} R_{ij,k}{}^{\cdot\cdot\cdot r} w^{ij}$ является линейным преобразованием, дающим главную часть приращения $\underset{0}{u}$.

Доказательство. Зафиксируем систему координат, в которой будем проводить все выкладки. Без ограничения общности можно считать, что $\underset{0}{x}^i = 0$. Далее значком 0 внизу будем помечать значения рассматриваемых величин в точке $\underset{0}{x}$: например, $\underset{0}{\Gamma}{}^i_{jk}$ и т. п. Введем на l в качестве параметра s — длину дуги; будем обозначать $d/ds = {}^{\boldsymbol{\cdot}}$.

Так как u мы переносим параллельно, то

$$\Delta u^r = \int\limits_l du^r = -\int\limits_l \Gamma^r_{pq} u^p dx^q.$$

На l имеет место $g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j = 1$, поэтому $\dot{x}^i = O(1)$, так что $x^i = O(h)$. Легко убедиться в справедливости следующих равенств:

$$\Gamma^r_{pq} = \underset{0}{\Gamma}{}^r_{pq} + (\partial_k \Gamma^r_{pq})_{0}\, x^k + O(h^2), \quad \dot{u}^i = O(1), \quad u^i = \underset{0}{u}^i + O(h).$$

Так как

$$u^i(x) = \underset{0}{u}^i - \int\limits_{\underset{0}{x}}^{x} \Gamma^i_{jk}(y) u^j(y) dy^k,$$

где интеграл берется по части l, то

$$u^i(x) = \underset{0}{u}^i - \underset{0}{\Gamma}{}^i_{jk} \underset{0}{u}^j x^k + O(h^2).$$

Поэтому

$$\Delta u^r = -\int\limits_l \Big(\underset{0}{\Gamma}{}^r_{ij} + (\partial_k \Gamma^r_{ij})_0 x^k + O(h^2)\Big)\Big(\underset{0}{u}{}^i - \underset{0}{\Gamma}{}^i_{qm}\underset{0}{u}{}^q x^m + O(h^2)\Big)\,dx^j =$$

$$= -\underset{0}{\Gamma}{}^r_{ij}\underset{0}{u}{}^i \int\limits_l dx^j - \Big((\partial_k \Gamma^r_{ij})_0 - \underset{0}{\Gamma}{}^q_{ik}\underset{0}{\Gamma}{}^r_{qj}\Big)\underset{0}{u}{}^i \int\limits_l x^k dx^j + O(h^3).$$

Очевидно, $\int\limits_l dx^j = 0$. Мы хотим доказать, что

$$w^{kj} - \int\limits_l x^k dx^j = O(h^3).$$

Упростим нашу задачу. В формулировке теоремы величины Δu^r и $R_{ij,k}^{\cdot\cdot\cdot r} w^{ij}\underset{0}{u}{}^k$ являются тензорами. Поэтому для доказательства теоремы мы можем выбрать любую систему координат. Возьмем такую систему координат в V^n, в которой V^2 является координатной поверхностью x^1, x^2, а в V^2 возьмем координаты так, чтобы касательные векторы к координатным линиям x^1 и x^2 в точке $\underset{0}{x}$ были ортонормированы и кратчайший поворот от первого из этих векторов ко второму был в направлении обхода l. Очевидно, w^{kj} и $\int\limits_l x^k dx^j$ равны нулю, если $k > 2$ или $j > 2$. Тем самым, так как

$$\int\limits_l x^j dx^k = -\int\limits_l x^k dx^j,$$

все свелось к доказательству того, что

$$w^{12} - \int\limits_l x^1 dx^2 = O(h^3).$$

В выбранной системе координат

$$\text{пл}\,\sigma = \text{пл}\,\pi = \underset{1}{d}{}^1\underset{2}{d}{}^2 - \underset{1}{d}{}^2\underset{2}{d}{}^1 = w^{12},$$

а также

$$\text{пл}\,\sigma = \iint\limits_\sigma \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\,dx^1 dx^2.$$

Но в точке $\underset{0}{x}$ имеют место равенства $g_{11} = g_{22} = 1$ и $g_{12} = 0$. Тем самым, на σ имеет место $\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = 1 + O(h)$ и, следовательно,

$$\iint\limits_{\sigma} \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\,dx^1 dx^2 = \iint\limits_{\sigma} dx^1 dx^2 + O(h^3) = \int\limits_{l} x^1 dx^2 + O(h^3).$$

Поэтому

$$w^{12} = \text{пл}\,\sigma = \int\limits_{l} x^1 dx^2 + O(h^3),$$

что и требовалось.

Для завершения доказательства теоремы достаточно заметить, что $w^{kj} = -w^{jk}$, поэтому

$$-(\partial_k \Gamma^r_{ij} - \Gamma^q_{ik}\Gamma^r_{qj})w^{kj} = -(\partial_{[k}\Gamma^r_{j]i} + \Gamma^r_{q[k}\Gamma^q_{j]i})w^{kj} = \frac{1}{2}R_{kj,i}^{\cdot\cdot\cdot\,r}w^{kj}.$$

Доказанная в этой теореме формула для линейного преобразования B обладает теми свойствами, которые были указаны перед ее формулировкой. А именно:

- билинейная форма $B^j_k g_{jr}$, соответствующая B, мало отличается от антисимметричной, так как

$$B^j_k g_{jr} = R_{iq,kr}w^{iq} + O(h^3), \quad \text{а} \quad R_{ij,kr} = -R_{ij,rk};$$

- главная часть B^j_k пропорциональна площади σ (при фиксированной плоскости, касательной к тому V^2, в котором мы брали l); действительно, w^{ij} пропорционально площади σ, $R_{ij,k}^{\cdot\cdot\cdot\,r}$ не зависит от l, $R_{ij,k}^{\cdot\cdot\cdot\,r}w^{ij}$ пропорционально площади σ.

Задача. Доказать, что при тех же обозначениях

$$\Delta u_r = -\frac{1}{2}R_{ij,r}^{\cdot\cdot\cdot\,k}w^{ij}u_k + O(h^3);$$

вычислить $\Delta u^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$.

4. Условие того, что V^n — локально евклидово. Два римановых пространства называются *изометричными*, если существует их диффеоморфизм, при котором расстояния между соответствующими парами бесконечно близких точек равны. Риманово пространство называется *локально евклидовым*, если каждая точка этого пространства имеет окрестность, изометричную некоторой области евклидова пространства.

Пример. На торе можно ввести метрику, превращающую его в локально евклидово пространство. Действительно, введем на торе координаты λ, μ, как в примере 3 (п. 1 § 1 гл. 2) (или x, y, как в примере 4 (там же)), и в этой системе координат зададим координаты метрического тензора, например, так: $g_{11} = g_{22} = 1$, $g_{12} = g_{21} = 0$.

Теорема. *V^n локально евклидово тогда и только тогда, когда тензор кривизны в каждой точке V^n равен нулю.*

Доказательство. Если V^n локально евклидово, то его тензор кривизны в каждой точке равен нулю. В самом деле, возьмем диффеоморфизм, осуществляющий изометрическое отображение и, выбрав в H^n какую-либо систему координат, введем в V^n соответствующую ей координатную систему. Из равенства расстояний между соответствующими парами бесконечно близких точек следует, что метрические тензоры V^n и H^n в соответствующих точках равны. Поэтому тензоры кривизны V^n и H^n в соответствующих точках также равны. Но тензор кривизны H^n нулевой, следовательно, и тензор кривизны в каждой точке V^n нулевой.

Пусть тензор кривизны в каждой точке V^n нулевой. Возьмем какую-либо точку $\underset{0}{x} \in V^n$. Ясно, что для доказательства того, что V^n локально евклидово, достаточно построить в окрестности $\underset{0}{x}$ такую координатную систему $x^{1'}, \ldots, x^{n'}$, в которой $g_{i'j'}$ постоянны, что эквивалентно $\Gamma^{i'}_{j'k'} = 0$. Возьмем какую-либо координатную систему $x^1, \ldots, x^n$. Используя формулы изменения Γ при переходе от $x^{1'}, \ldots, x^{n'}$ к $x^1, \ldots, x^n$,

$$\Gamma^k_{ij} = A^k_{k'} A^{i'}_i A^{j'}_j \Gamma^{k'}_{i'j'} + A^k_{k'} \frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^i \partial x^j},$$

и учитывая, что $\Gamma^{i'}_{j'k'} = 0$ эквивалентно $A^k_{k'} A^{i'}_i A^{j'}_j \Gamma^{k'}_{i'j'} = 0$, получаем уравнения

$$\Gamma^k_{ij} = A^k_{k'} \frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^i \partial x^j},$$

т. е.

$$\frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^i \partial x^j} = \Gamma^r_{ij} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^r}.$$

Совокупность последних уравнений — необходимое и достаточное условие того, что $\Gamma^{r'}_{i'j'} \equiv 0$. Эти уравнения разбиваются на группы, в каждой из которых k' — какое-либо фиксированное. Тем самым мы получаем n экземпляров системы уравнений

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} = \Gamma^r_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x^r}.$$

Обозначив $\partial_i \varphi = \psi_i$, получим систему уравнений

$$\partial_j \psi_i = \Gamma^r_{ij} \psi_r. \qquad (3.2)$$

Ее нужно решить n раз (для $k' = 1', 2', \ldots, n'$). Зададим условия

$$\psi_i(\underset{0}{x}) = \underset{0}{\psi}{}^{k'}_i, \qquad (3.3)$$

где $\underset{0}{\psi}{}^{k'}_i$ берем такими, чтобы $\det \| \underset{0}{\psi}{}^{k'}_i \| \neq 0$. Если эти $\psi_i(x)$ найдены, то в силу равенства Rot $\psi = 0$ (см. (3.2) с учетом равенства $\Gamma^r_{ij} = \Gamma^r_{ji}$), для каждого k' существует скалярная функция $\varphi(x)$, для которой $\psi =$ Grad φ (см. теорему Пуанкаре в п. 3 § 2 гл. 2). Возьмем $x^{k'} = \varphi$. Для этих переменных

$$\left. \frac{\partial(x^{1'}, \ldots, x^{n'})}{\partial(x^1, \ldots, x^n)} \right|_{\underset{0}{x}} = \det \| \underset{0}{\psi}{}^{i'}_i \| \neq 0,$$

поэтому по теореме о неявных функциях переменные $x^{1'}, \ldots, x^{n'}$ порождают в некоторой окрестности $\underset{0}{x}$ допустимую систему координат.

Итак, достаточно доказать разрешимость системы (3.2) при условии (3.3). Без ограничения общности можно считать, что точка $\underset{0}{x}$ имеет нулевые координаты.

Для каждого k' будем строить решение за n шагов.

Из (3.2) при $j = 1$ имеем

$$\partial_1 \psi_i = \Gamma^r_{1i} \psi_r. \qquad (3.4)$$

Мы получили задачу Коши (3.4), (3.3) для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Эта задача имеет решение и тем самым определяет все ψ_i в некоторой окрестности $\underset{0}{x}$ вдоль координатной линии x^1.

Затем аналогично, используя $\partial_2\psi_i = \Gamma^r_{2i}\psi_r$ и уже вычисленные значения ψ_i вдоль координатной линии x^1, определяем все ψ_i в некоторой окрестности $\underset{0}{x}$ в двумерной координатной поверхности x^1, x^2 и т. д. Мы получим все ψ_i в некоторой n-мерной окрестности $\underset{0}{x}$. Нужно показать, что в этой окрестности имеет место (3.2).

Доказательство осуществляем индукцией по номеру шага указанного выше способа построения функций ψ_i. Итак, пусть все ψ_i определены в некоторой окрестности $\underset{0}{x}$ при $x^m = \ldots = x^n = 0$ и для $j \leqslant m - 1$ выполняется (3.2). Доопределим ψ_i в некоторой окрестности $\underset{0}{x}$ на поверхности $x^1, \ldots, x^m$ равенством

$$\partial_m\psi_i = \Gamma^r_{mi}\psi_r. \tag{3.5}$$

Мы должны доказать, что на этой поверхности имеет место

$$\partial_s\psi_i = \Gamma^r_{si}\psi_r$$

при $s = 1, \ldots, m - 1$ (при $s = m$ это равенство выполняется в силу (3.5)). Обозначим

$$z_{si} = \partial_s\psi_i - \Gamma^r_{si}\psi_r.$$

Из (3.5) имеем

$$\begin{aligned}\partial_m z_{si} &= \partial_s\partial_m\psi_i - (\partial_m\Gamma^r_{si})\psi_r - \Gamma^r_{si}\partial_m\psi_r = \\ &= \partial_s(\Gamma^r_{mi}\psi_r) - (\partial_m\Gamma^r_{si})\psi_r - \Gamma^r_{si}\Gamma^h_{mr}\psi_h = \\ &= (\partial_s\Gamma^r_{mi})\psi_r + \Gamma^r_{mi}\Gamma^h_{sr}\psi_h + \Gamma^r_{mi}z_{sr} - (\partial_m\Gamma^r_{si})\psi_r - \Gamma^r_{si}\Gamma^h_{mr}\psi_h = \\ &= -R_{sm,i}^{\cdot\cdot\ \cdot r}\psi_r + \Gamma^r_{mi}z_{sr} = \Gamma^r_{mi}z_{sr};\end{aligned}$$

последнее равенство справедливо в силу того, что $R_{sm,i}^{\cdot\cdot\ \cdot r} = 0$.

В силу индуктивного предположения $z_{sr} = 0$ при $x^m = 0$.

Мы получили для z_{si} линейные однородные уравнения

$$\partial_m z_{si} = \Gamma^r_{mi}z_{sr}$$

и нулевые начальные условия

$$z_{si} = 0 \quad \text{при} \quad x^m = 0.$$

Отсюда следует равенство $z_{si} = 0$, что завершает доказательство теоремы.

§ 4. Коротко о пространствах аффинной связности

В § 1–3 настоящей главы рассматривалось гладкое многообразие X^n, оснащенное полем билинейной формы g_{ij}, удовлетворяющей требованиям, изложенным в п. 1 § 1. Изучение X^n, оснащенного какими-либо дополнительными структурами, — это один из основных приемов построения различных геометрических теорий (в предыдущей главе мы рассматривали X^n без каких-либо дополнительных структур).

Можно, например, изучать X^4, в котором фиксировано тензорное поле g_{ij}, удовлетворяющее следующим требованиям: $g_{ij} = g_{ji}$, канонический вид квадратичной формы $g_{ij}z^iz^j$ имеет один положительный и три отрицательных коэффициента (это частный случай так называемого псевдориманова пространства). Этот пример имеет важное значение для общей теории относительности и релятивистской теории гравитации.

Еще один важный для физики пример. На X^{2n} определено тензорное поле g_{ij}, удовлетворяющее условиям: $g_{ij} = -g_{ji}$, $\det \|g_{ij}\| \neq$ $\neq 0$, $\partial_{[i}g_{jk]} = 0$ (так называемая симплектическая геометрия).

Мы сейчас совсем кратко и без доказательств рассмотрим некоторую иную геометрическую конструкцию.

Если обратить внимание на формулы, связанные с параллельным переносом в V^n, то можно заметить следующее. После того, как введены коэффициенты связности Γ^i_{jk}, все последующие конструкции используют только эти коэффициенты, сам метрический тензор больше не нужен. Это обстоятельство дает возможность построения самостоятельной теории параллельного переноса на X^n, по отношению к которой теория параллельного переноса в V^n — частный случай.

Определение. Пространством аффинной связности L^n называется комплект, состоящий из гладкого многообразия X^n и определенного на нем поля коэффициентов связности Γ^i_{jk}, преобразующихся при переходе к новой системе координат следующим образом:

$$\Gamma^{i'}_{j'k'} = A^{i'}_i A^j_{j'} A^k_{k'} \Gamma^i_{jk} + A^{i'}_i \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}}.$$

Примеры.

1. V^n можно превратить в L^n (см. § 2);

2. R^n можно превратить в L^n: в прямолинейной системе координат $\Gamma^i_{jk} = 0$; возникающий параллельный перенос (см. ниже) совпадает с параллельным переносом, порождаемым линейной структурой R^n.

Заметим, что равенство $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$ в общем случае не предполагается.

Обозначение: $S^i_{jk} = \Gamma^i_{[jk]}$.

Теорема. *S^i_{jk} — тензор (так называемый тензор кручения).*

Обобщая на L^n полученные нами формулы параллельного переноса в V^n, нужно внимательно следить за порядком нижних индексов у Γ^i_{jk}.

Определение. Вектор u^i из $T^n(x)$ перенесен параллельно в $T^n(x + dx)$, если его координаты становятся равными $u^i + du^i$, где

$$du^i + \Gamma^i_{jk} u^j dx^k = 0.$$

Теорема. *Определенное таким образом понятие параллельного переноса вектора в бесконечно близкую точку не зависит от выбора координатной системы.*

Параллельный перенос векторов определяет, и притом однозначно, параллельный перенос тензоров любого типа (см. п. 3 § 2). Соответствующие формулы имеют вид

- $du = 0$, где u — скаляр;
- $dv_i - \Gamma^j_{ik} v_j dx^k = 0$, где v_i — ковектор

(для тензора произвольного типа выведите сами).

Основанные на введенном параллельном переносе ковариантный дифференциал и ковариантная производная (ср. с п. 4 § 2) задаются формулами:

- $Du^{\cdot\cdot}_{\cdot\cdot} = \nabla_k u^{\cdot\cdot}_{\cdot\cdot} dx^k$, $u^{\cdot\cdot}_{\cdot\cdot}$ — тензорное поле любого типа;
- $\nabla_k u = \partial_k u$, u — скалярное поле;
- $\nabla_k u^i = \partial_k u^i + \Gamma^i_{jk} u^j$;
- $\nabla_k v_i = \partial_k v_i - \Gamma^j_{ik} v_j$

и так далее для любых тензорных полей.

Обозначение: $R_{ij,k}{}^{\cdot\cdot\cdot s} = -2(\partial_{[i}\Gamma^s_{|k|j]} + \Gamma^s_{p[i}\Gamma^p_{|k|j]})$ (ср. с формулой (3.1)). Как и раньше, вертикальными черточками отделяются индексы, не входящие в группу, по которой проводится указываемая симметризация (в данном случае — альтернирование). Так как в L^n нет операции поднятия и опускания индексов, то три точки перед верхним индексом в обозначении $R_{ij,k}^{\cdot\cdot\cdot s}$ — лишние. Они все же оставлены в этом обозначении для сохранения преемственности с обозначением для риманова пространства.

Теорема. $R_{ij,k}^{\cdot\cdot\cdot s}$ — *тензор* (*тензор кривизны*).

Пример. В R^n справедливо $S_{jk}^{i} = 0$, $R_{ij,k}^{\cdot\cdot\cdot s} = 0$.

Имеют место формулы:

- $\nabla_{[i}\nabla_{j]}u = S_{ij}^{k}\nabla_k u$, где u — скалярное поле;
- $\nabla_{[i}\nabla_{j]}u_k = \frac{1}{2}R_{ij,k}^{\cdot\cdot\cdot s}u_s + S_{ij}^{r}\nabla_r u_k$;
- $\nabla_{[i}\nabla_{j]}u^k = -\frac{1}{2}R_{ij,s}^{\cdot\cdot\cdot k}u^s + S_{ij}^{r}\nabla_r u^k$

и так далее.

При переносе векторов и ковекторов по малому контуру главная часть приращения определяется формулами

$$\Delta u^k \approx \frac{1}{2}R_{ij,r}^{\cdot\cdot\cdot k}w^{ij}u^r, \qquad \Delta v_k \approx -\frac{1}{2}R_{ij,k}^{\cdot\cdot\cdot r}w^{ij}v_r.$$

Здесь w^{ij} — бивектор, характеризующий малый участок, ограниченный указанным контуром. Точные формулировки не приводим.

Геодезическая — это график решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma_{jk}^{i}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} = 0.$$

Геометрический смысл этой системы уравнений: касательный вектор, переносимый вдоль кривой (рассматриваемой с учетом некоторой ее параметризации), переносится параллельно.

Определение. Абсолютным параллелизмом называется свойство L^n, состоящее в том, что для каждой его точки существует такая окрестность, для которой результат параллельного переноса осуществляемого по кривым, лежащим в этой окрестности, зависит только от начальной и конечной точки кривой и не зависит от пути, соединяющего эти точки.

Теорема. *В L^n имеет место абсолютный параллелизм тогда и только тогда, когда тензор кривизны нулевой.*

Определение. L^n — локально-линейное, если для каждой его точки существует такая ее окрестность и такой диффеоморфизм этой окрестности на некоторую область R^n, что параллельный перенос векторов в бесконечно близкие точки в этой окрестности эквивалентен параллельному переносу в R^n соответствующих векторов.

Теорема. *L^n локально-линейное тогда и только тогда, когда его тензор кривизны и тензор кручения нулевые.*

Доказательство фактически совпадает с доказательством теоремы п. 4 § 3. Нужно только фразу «Ясно, что для доказательства того, что V^n локально евклидово, достаточно построить в окрестности $\underset{0}{x}$ такую координатную систему $x^{1'}, \ldots, x^{n'}$, в которой $g_{i'j'}$ постоянны, что эквивалентно $\Gamma^{i'}_{j'k'} = 0$» заменить на «Ясно, что для доказательства того, что L^n локально-линейное, достаточно построить в окрестности $\underset{0}{x}$ такую координатную систему $x^{1'}, \ldots, x^{n'}$, в которой $\Gamma^{i'}_{j'k'} = 0$».

§ 5. Пространство V^2

Пространство V^2 — очень важный частный случай V^n, достойный самостоятельного изучения. В примере п. 2 § 1 было указано, что V^2, погруженное в H^3, интересный объект для исследования. Ниже мы кратко рассмотрим некоторые свойства V^2 (и V^2, погруженного в H^3), связанные с тензором кривизны.

1. V^2, общие свойства кривизны. При $n = 2$ число существенных компонент тензора кривизны V^n равно единице; действительно, $R_{12,12} = -R_{12,21} = -R_{21,12} = R_{21,21}$, остальные координаты нули. Кривизна пространства в заданной точке, таким образом, полностью характеризуется одним числом. Возьмем в качестве этой характеристики число, не зависящее от выбора системы координат, а именно число $\mathcal{K}$,

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2}\tilde{\tilde{R}} = \frac{1}{2}R_{ij,k}^{\cdot\cdot\cdot j}g^{ik}.$$

Легко подсчитать, что

$$\mathcal{K} = \frac{R_{12,12}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}.$$

Действительно,

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} R_{ij,kr} g^{ik} g^{jr} = R_{12,12}(g^{11}g^{22} - (g^{12})^2).$$

Но

$$g^{11}g^{22} - (g^{12})^2 = \det \begin{Vmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{Vmatrix} = \det \left(\begin{Vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{Vmatrix}^{-1} \right) = \frac{1}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}.$$

Определение. $\mathcal{K}$ называется гауссовой кривизной V^2.

Задача. Вычислить гауссову кривизну сферы радиуса r в евклидовом пространстве.

Решение. Воспользуемся обозначениями и результатами вычислений задачи п. 2 § 2.

Учтем, что из величин Γ_{ij}^k только Γ_{22}^1, Γ_{12}^2 и Γ_{21}^2, быть может, отличны от нуля. Используя формулу, определяющую $R_{ij,k}^{\cdot\cdot\cdot p}$ (см. (3.1)), получим

$$R_{12,1}^{\cdot\cdot\cdot 2} = -2\left(\partial_{[1}\Gamma_{2]1}^2 + \Gamma_{h[1}^2\Gamma_{2]1}^h\right) = -\partial_1\Gamma_{21}^2 - \Gamma_{21}^2\Gamma_{21}^2 = 1.$$

Поэтому

$$R_{12,12} = R_{12,1}^{\cdot\cdot\cdot p} g_{p2} = r^2 \cos^2 \theta,$$

откуда

$$\mathcal{K} = \frac{R_{12,12}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \frac{1}{r^2}.$$

Таким образом, $\mathcal{K} = 1/r^2$ в каждой точке сферы.

Приведенный результат очень важен: мы получили пример V^n с ненулевой кривизной.

Возьмем в V^2 какую-либо замкнутую кривую l, ограничивающую компактный ориентируемый участок (замыкание области с кусочно гладкой границей) σ. При параллельном переносе векторов вдоль l, придя в начальную точку, мы получим ортогональное преобразование C в касательном в этой точке пространстве. Так как σ — ориентируем, то C сохраняет ориентацию. Ортогональное преобразование на евклидовой плоскости, сохраняющее ориентацию, есть поворот. Обозначим ω — угол этого поворота. Положительное направление отсчета ω определим направлением переноса по l: поворот соответствующего касательного вектора внутрь σ положителен. Легко видеть, что значение ω с учетом знака, определенного указанным выше правилом, не зависит от направления переноса по l: при изменении этого направления на противоположное мы получим противоположный поворот, но и правило, определяющее знак ω, даст противоположный результат. Значение ω определено, разумеется, неоднозначно, ω и $\omega + 2k\pi$, где k — целое, неразличимы; точнее было бы говорить: ω — одно из значений угла поворота. Значение ω не зависит от выбора той точки на l, из которой (и в которую) мы переносим вектор; это следствие утверждения, доказанного в начале п. 3 § 3.

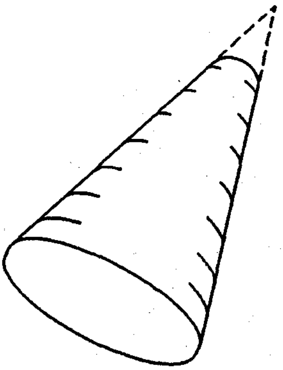

Рис. 6

Пример. Возьмем в качестве V^2 конус с затупленной вершиной. Нарисуем на плоскости развертку той части, которая получится, если отрезать затупленный кусок; обозначим α угол развертки полного конуса (рис. 6, 7).

Так как параллельный перенос определяется метрическим тензором, то параллельный перенос в соответствии с геометрией V^2 здесь эквивалентен параллельному переносу на развертке в соответствии с геометрией евклидовой плоскости. Тогда, очевидно, для любой замкнутой кривой l, однократно охватывающей вершину и не проходящей по затупленной части, $\omega = 2\pi - \alpha$.

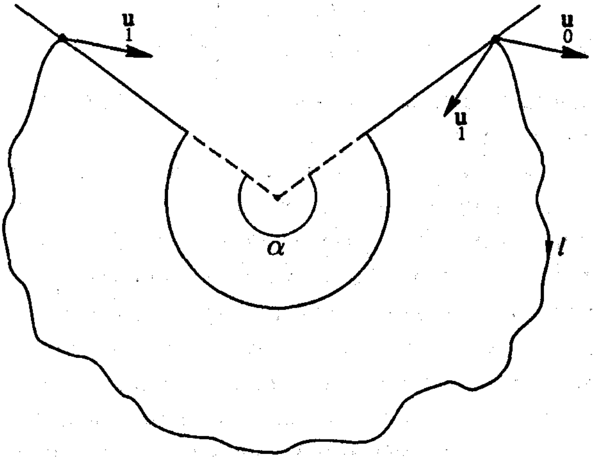

Рис. 7

Для произвольного V^2 имеет место

Теорема Леви-Чивиты. $\omega = \iint\limits_{\sigma} K d\sigma$, $d\sigma$ — *элемент площади* (*здесь мы имеем дело с интегралом* 1*-го рода*).

Доказательство разобьем на три части.

1. Пусть длина h кривой l мала. Покажем, что

$$\omega - \iint\limits_{\sigma} K d\sigma = O(h^3).$$

Ясно, что доказательство надо провести, используя основную теорему о геометрическом смысле тензора кривизны. В соответствии с этой теоремой (см. п. 3 § 3):

$$C = I + B, \quad B^i_j = \frac{1}{2} R_{kr,j}^{\cdot\cdot\cdot\, i} w^{kr} + O(h^3).$$

Возьмем точку $\underset{0}{x}$ на кривой l. Выбрав систему координат, в которой $e_1(\underset{0}{x})$ и $e_2(\underset{0}{x})$ ортогональны, нормированы и кратчайший поворот от e_1 к e_2 положителен, легко вычислить, что для $B(\underset{0}{x})$ с точностью до $O(h^3)$ имеет место

$$B^1_1 = 0, \quad B^2_2 = 0, \quad B^2_1 = -B^1_2 = R_{12,12} w^{12} = K(\underset{1}{d}^1 \underset{2}{d}^2 - \underset{1}{d}^2 \underset{2}{d}^1).$$

Но в этой системе координат выражение $\underset{1}{d}^1 \underset{2}{d}^2 - \underset{1}{d}^2 \underset{2}{d}^1$ равно площади параллелограмма, построенного на $\underset{1}{d}$ и $\underset{2}{d}$, а матрица

$$\left\| \begin{matrix} C^1_1 & C^1_2 \\ C^2_1 & C^2_2 \end{matrix} \right\|, \quad \text{равная} \quad \left\| \begin{matrix} 1 & -B^2_1 \\ B^2_1 & 1 \end{matrix} \right\|,$$

(B^2_1 — мало, $B^2_1 = O(h^2)$) с точностью до $(B^2_1)^2$ есть матрица поворота на угол B^2_1. Поэтому $\omega = K(\underset{0}{x}) \cdot \text{пл}\, \sigma + O(h^3)$, откуда следует нужное соотношение.

2. Пусть ориентируемый компактный участок σ, ограниченный кривой l, разбит на два участка σ_1 и σ_2; граница σ_1 есть l_1, граница σ_2 — l_2. Пусть ω_1 — угол поворота векторов при полном обходе по l_1, ω_2 — аналогичный угол для l_2, ω — для l. Тогда $\omega = \omega_1 + \omega_2$.

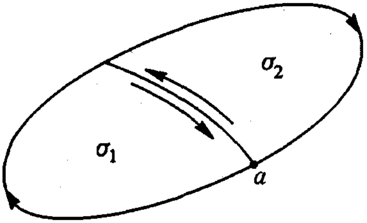

Рис. 8

Смысл этого утверждения легко непосредственно усмотреть из рис. 8.

Так как угол поворота при переносе по замкнутому контуру не зависит от выбора начальной точки, то для переноса по l_1, l_2, l можно в качестве такой точки взять какую-либо точку, общую для l_1, l_2, l (точку a на рис. 8). Тогда, как легко видеть, при надлежащем направлении обхода перенос по l эквивалентен переносу по l_1, а затем по l_2. После переноса по l_1 вектор повернется на ω_1, после переноса по l_2 – еще на ω_2, всего он повернется на $\omega_1 + \omega_2$.

3. Разобьем участок σ, фигурирующий в условии теоремы, на малые участки $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N$ так, чтобы длины ограничивающих их контуров были порядка h (h — малое число), а площади участков порядка h^2. Ясно, что N — величина порядка $1/h^2$. (Приведенное рассуждение требует некоторых уточнений, мы на них не останавливаемся.) Сумма углов поворотов, соответствующих отдельным участкам, будет равна

$$\iint_\sigma K d\sigma + \frac{1}{h^2} O(h^3) = \iint_\sigma K d\sigma + O(h).$$

Следовательно,

$$\omega = \iint_\sigma K d\sigma + O(h).$$

В силу произвольности h отсюда получается утверждение теоремы.

Далее *криволинейным N-угольником* в X^2 называется компактное множество, являющееся замыканием области гомеоморфной R^2, граница которой состоит из N сторон — гладких кусков кривых. Аналогичный смысл имеет понятие *криволинейного многогранника* в X^n.

Теорема Гаусса. *Возьмем в V^2 криволинейный N-угольник Q. Пусть стороны Q — геодезические. Пусть $\underset{1}{\alpha}, \dots, \underset{N}{\alpha}$ — внутренние углы Q. Тогда*

$$\sum_{i=1}^{N} \underset{i}{\alpha} - \pi(N-2) = \iint_Q K d\sigma.$$

Для облегчения восприятия и запоминания этой теоремы отметим следующее. В геометрии H^2 сумма углов N-угольника с геодезическими (то есть прямолинейными) сторонами равна $\pi(N-2)$. Теорема Гаусса утверждает, что в геометрии V^2 это выражение дополняется слагаемым $\iint\limits_Q K d\sigma$.

Доказательство. Рассмотрим сначала частный случай: Q — достаточно малый треугольник.

Возьмем какой-либо ненулевой вектор в какой-либо внутренней точке какой-либо стороны этого треугольника и перенесем этот вектор параллельно вдоль сторон, вернувшись в результате переноса в начальную точку. При параллельном переносе вектора вдоль стороны он сохраняет угол со стороной (сторона — геодезическая, касательная к ней переносится параллельно, угол между двумя параллельно переносимыми векторами сохраняется). При переходе через вершину угол между переносимым вектором и стороной, как легко видеть (см. рис. 9), уменьшается на $\pi - \underset{i}{\alpha}$, где $\underset{i}{\alpha}$ — внутренний угол Q в этой вершине, т. е. увеличивается на на $\underset{i}{\alpha} - \pi$. После обхода всех трех вершин угол увеличится на $\sum\limits_{i=1}^{3} \underset{i}{\alpha} - 3\pi$, это и есть угол поворота.

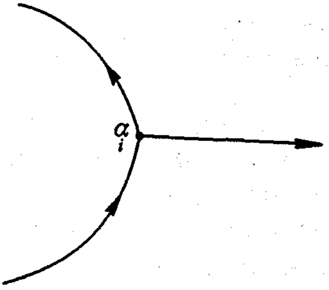

Рис. 9

По теореме Леви-Чивиты имеем

$$\sum_{i=1}^{3} \underset{i}{\alpha} - 3\pi = \iint\limits_Q K d\sigma + 2k\pi, \quad k \text{ — целое,}$$

т. е.

$$\sum_{i=1}^{3} \underset{i}{\alpha} - \pi = \iint\limits_Q K d\sigma + 2(k+1)\pi.$$

Но для малого Q имеет место $\sum\limits_{i=1}^{3} \alpha_i - \pi$ — мало и $\iint\limits_Q K d\sigma$ — мало, и следовательно,

$$\sum_{i=1}^{3} \alpha_i - \pi = \iint\limits_Q K d\sigma.$$

Рассмотрим теперь общий случай: Q — произвольный многоугольник. Вспомним какое-нибудь доказательство формулы для суммы внутренних углов N-угольника на евклидовой плоскости, сводящееся к формуле для суммы углов треугольника. Разбивая Q на малые треугольники, стороны которых геодезические (возможность такого разбиения мы принимаем без доказательства), и внося соответствующие изменения в рассуждения, получим доказательство теоремы для V^2.

2. V^2, погруженное в H^3. Сферическсе отображение. Пусть V^2 погружено в H^3. Тем самым локально можно рассматривать V^2 реализованным в виде гладкой поверхности в H^3. Пусть V^2 ориентируемо. Возьмем в H^3 единичную сферу S: $(u, u) = 1$. Осуществим отображение V^2 в S следующим образом. Построим в каждой точке V^2 единичную нормаль так, что это поле нормалей непрерывно (все нормали направлены в какую-то «одну сторону» V^2). В силу ориентируемости V^2 построение такого поля возможно. Нормаль $n(x)$, $x \in V^2$, перенесенная в начало координат, дает точку на S.

Это отображение

$$n \colon V^2 \to S$$

называется *сферическим отображением* V^2.

Важное свойство отображения n: касательная плоскость к V^2 в точке x параллельна касательной плоскости к S в точке $n(x)$ (обе эти плоскости перпендикулярны $n(x)$).

Рассмотрим какой-либо компактный участок σ на V^2. Пусть $n(\sigma)$ — образ этого участка при сферическом отображении; мы будем говорить о площади этого образа (обозначение: пл $n(\sigma)$). Эта площадь берется с учетом знака, который определяется следующим правилом. Возьмем $x \in V^2$. Как уже говорилось (см. § 1 гл. 2), отображение n определяет $\partial n(x)/\partial x$ — линейное отображение касательного пространства $T_{V^2}(x)$ в касательное пространство $T_S(n(x))$. Так как

$T_{V^2}(x)$ и $T_S(n(x))$ параллельны, то $\partial n(x)/\partial x$ можно считать линейным преобразованием в $T_{V^2}(x)$ (или в $T_S(n(x))$). Тем самым, определено понятие $\operatorname{sign} \det (\partial n(x)/\partial x)$; этот знак, кстати сказать, не зависит от того, какое именно из двух полей нормалей $n(x)$ мы взяли.

Знак ρ,

$$\rho = \det \frac{\partial n(x)}{\partial x},$$

имеет следующий геометрический смысл. Пусть $\rho \neq 0$, тогда по теореме о неявных функциях отображение n — взаимно однозначное в некоторой окрестности x. Возьмем на V^2 в окрестности x несамопересекающийся малый контур l, пробегаемый в некотором направлении. Ему соответствует на S замкнутая кривая $n(l)$, направление обхода которой индуцируется направлением обхода l и отображением n. Спроектируем ортогонально контур l на $T_{V^2}(x)$ и $n(l)$ на $T_S(n(x))$; получим, соответственно, кривые $\widetilde{l}$ и $\widetilde{n}(l)$, пробегаемые в определенных направлениях. Тогда, если $\rho > 0$, то $\widetilde{n}(l)$ тоже несамопересекающийся контур и направление его обхода совпадает с направлением обхода $\widetilde{l}$ (напомним: $\widetilde{l}$ и $\widetilde{n}(l)$ лежат в параллельных плоскостях). Если $\rho < 0$, то $\widetilde{n}(l)$ несамопересекающийся контур и направление его обхода противоположно направлению обхода $\widetilde{l}$.

Если для участка σ отображение n является взаимно однозначным отображением на $n(\sigma)$ и $\operatorname{sign} \rho$ постоянен на σ, то пл $n(\sigma)$ по определению берется с этим знаком. Если σ разбивается на несколько участков $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$, для внутренней части каждого из которых площадь образа может быть определена указанным выше способом, то по определению

$$\text{пл}\, n(\sigma) = \sum_{i=1}^{k} \text{пл}\, n(\sigma_i).$$

Можно доказать, что множество на S тех $n(x)$, для которых $\rho = 0$, имеет меру нуль (некоторое более общее утверждение — важная теорема Сарда), поэтому при подсчете пл $n(\sigma)$ это множество можно не учитывать.

Далее ограничимся случаем, который очень нагляден: V^2 разбивается на конечное число участков, на внутренней части каждого из которых отображение n взаимно однозначно и $\operatorname{sign} \rho$ постоянен.

Имеет место

Теорема.

$$\text{пл}\, n(\sigma) = \iint\limits_{\sigma} K d\sigma.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда σ — малый участок, ρ сохраняет знак и сферическое отображение взаимно однозначно на σ. Обозначим l границу σ; ясно, что $n(l)$ будет границей $n(\sigma)$. Возьмем какой-либо ненулевой вектор u, касательный к V^2 в точке x, $x \in l$, и обнесем его параллельно по l в соответствии с геометрией V^2. Оказывается, что если этот вектор откладывать от соответствующей точки $n(x)$, то он будет переноситься параллельно по $n(l)$ в соответствии с геометрией S. Действительно, параллельный перенос по кривой на поверхности в соответствии с геометрией этой поверхности может быть реализован так (см. п. 5 § 2): мы переносим вектор параллельно в бесконечно близкую точку в соответствии с геометрией H^3, а затем ортогонально проектируем его на плоскость, касательную к поверхности. Но касательные плоскости к V^2 и к S в соответствующих точках параллельны, поэтому на каждом таком бесконечно малом шаге мы получаем совпадающие результаты. Тем самым окончательные результаты двух указанных переносов вектора будут также совпадать. Для угла $\underset{V^2}{\omega}$ поворота вектора при переносе на V^2 вдоль l имеем

$$\underset{V^2}{\omega} = \iint\limits_{\sigma} K d\sigma.$$

Для угла $\underset{S}{\omega}$ поворота вектора при переносе на S вдоль $n(l)$ имеем

$$\underset{S}{\omega} = \iint\limits_{n(\sigma)} 1 dS = |\,\text{пл}\, n(\sigma)|.$$

Вспомнив правило определения знака $\underset{V^2}{\omega}$ и $\underset{S}{\omega}$ (см. п. 1), мы получим с точностью до слагаемого кратного 2π, что $\underset{V^2}{\omega} = \underset{S}{\omega}$, если ориентации $\tilde{l}$ и $\tilde{n}(l)$ совпадают, и $\underset{V^2}{\omega} = -\underset{S}{\omega}$, если ориентации различны. Но эта же альтернатива определяет знак пл $n(\sigma)$. Поэтому

$$\iint\limits_{\sigma} K d\sigma = \text{пл}\, n(\sigma) + 2k\pi, \quad k \text{ — целое.}$$

Если участок σ мал, то $\iint\limits_{\sigma} K d\sigma$ — мало и пл $n(\sigma)$ — мало. Отсюда для малого участка σ следует $k = 0$ и

$$\iint\limits_{\sigma} K d\sigma = \text{пл}\, n(\sigma).$$

В общем случае достаточно разбить σ на некоторые участки, удовлетворяющие условию предыдущей части доказательства, и сложить результаты, полученные для каждого такого участка.

Теорема. *Возьмем $x \in V^2$. Пусть σ — малая окрестность на V^2 точки x. Тогда*

$$K(x) = \lim_{\text{diam}\,\sigma \to 0} \frac{\text{пл}\, n(\sigma)}{\text{пл}\, \sigma}.$$

Доказательство непосредственно следует из предыдущей теоремы.

Число $\rho(x)$ также есть $\lim\limits_{\text{diam}\sigma \to 0} (\text{пл}\, n(\sigma)/\,\text{пл}\, \sigma)$ (вспомним геометрический смысл знака и абсолютной величины якобиана); поэтому $\rho(x) = K(x)$.

Примеры.

1. V^2 — поверхность строго выпуклого тела (например, эллипсоид). Наглядно убеждаемся (вспомним геометрический смысл знака ρ), что здесь $\rho \geqslant 0$, следовательно, $K \geqslant 0$. Если взятое тело ограничено, то его поверхность при сферическом отображении взаимно однозначно отображается на сферу; поэтому пл $n(V^2) = 4\pi$ для каждой такой поверхности.

2. V^2 — седловидная поверхность (например, часть однополостного гиперболоида или гиперболического параболоида). Здесь, как легко наглядно убедиться, $\rho \leqslant 0$, следовательно, $K \leqslant 0$.

3. V^2 — область, лежащая на каком-либо цилиндре или конусе. Здесь образ V^2 при сферическом отображении — кривая, ее площадь равна нулю. Поэтому $K = 0$ (это согласуется с тем, что такое V^2 локально евклидово).

4. Пусть V^2 — тор (см. пример 3 § 1 гл. 2). Положим этот тор на плоскость и накроем его другой плоскостью. Каждая из этих двух плоскостей касается

тора по окружности. Эти две окружности разрезают тор на две части. Одна из этих частей — выпуклая поверхность, на ней $\mathcal{K} \geqslant 0$; другая — седловидная, на ней $\mathcal{K} \leqslant 0$. При сферическом отображении каждая из двух указанных окружностей отображается в точку; соответствующие две точки — диаметрально противоположны. На любую точку, отличную от этих двух, отображаются две точки тора, одна из выпуклой части и одна из седловидной. Для первой, как уже говорилось, $\mathcal{K} \geqslant 0$, для второй $\mathcal{K} \leqslant 0$. Поэтому пл $n(V^2) = 0$.

Дополнение

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ, ПОЛУЧАЕМЫЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕМ ТЕНЗОРНЫХ ПОЛЕЙ, СТРОЯЩИХСЯ ПО МЕТРИЧЕСКОМУ ТЕНЗОРУ

Значения метрического тензора и его производных, рассматриваемые в какой-либо точке риманова пространства, зависят только от геометрии «в малом»: для определения этих значений достаточно знать метрический тензор в сколь угодно малой окрестности этой точки. В малой области метрику V^n можно задать произвольно. Тем интереснее, что для некоторых выражений, строящихся по метрическому тензору и его производным, интегралы по всему риманову пространству, если оно компактно, или по компактным многообразиям, погруженным в это пространство, не меняются при изменении метрики этого пространства.

Тем самым, эти интегралы совершенно не зависят от римановой метрики «в малом» в окрестности каждой точки, но зависят от строения «в целом» рассматриваемого многообразия, в котором вводится риманова метрика. Говорят, что эти интегралы дают *топологические инварианты*.

Здесь, строго говоря, нужно различать две конструкции.

1. Рассматривается гладкое многообразие и на нем различные гладкие метрические тензоры.
2. Рассматривается топологическое многообразие, на нем вводится различным образом гладкость и на получившихся гладких многообразиях рассматриваются различные гладкие метрические тензоры.

Если значение интеграла не меняется в первой конструкции, то говорят, что интеграл дает *дифференциально-топологический инвариант*; значение интеграла — характеристика гладкого многообразия (или пары: гладкое многообразие и погруженное в него гладкое многообразие).

Если значение интеграла не меняется и во второй конструкции, то говорят, что интеграл дает *топологический инвариант* в строгом смысле этого слова; значение интеграла — характеристика топологического многообразия (или пары: топологическое многообразие и погруженное в него топологическое многообразие).

Так как существуют гомеоморфные, но не диффеоморфные гладкие многообразия, то понятия «дифференциально-топологический инвариант» и «топологический инвариант» априори различны.

Ниже мы приведем некоторые результаты, относящиеся к построению таких характеристик.

1. Полный интеграл от гауссовой кривизны. Пусть X^2 — компактное двумерное гладкое многообразие. Пусть на X^2 введен какой-либо метрический тензор g_{ij}. Мы получаем риманово пространство V^2; пусть $\mathcal{K}$ — его гауссова кривизна, $d\sigma$ — элемент площади.

Теорема. $\displaystyle\iint\limits_{V^2}$ *$\mathcal{K}d\sigma$ не зависит от выбора g_{ij}.*

Доказательство. Пусть $\overset{0}{g}_{ij}$ и $\overset{1}{g}_{ij}$ — два метрических тензора на компактном гладком двумерном многообразии X^2, превращающие его соответственно в $\underset{0}{V}^2$ и $\underset{1}{V}^2$. Геометрически ясно, что переход от $\overset{0}{g}_{ij}$ к $\overset{1}{g}_{ij}$ можно осуществить за некоторое конечное число шагов, на каждом из которых метрический тензор лишь немного меняется в некоторой ориентируемой области. Пусть кривая l — граница этой ориентируемой области σ. Тогда $\displaystyle\iint\limits_{\sigma} \mathcal{K}d\sigma = \omega$, где ω — угол поворота вектора при параллельном переносе его по l. Если в некоторой окрестности кривой l метрический тензор не меняется, то ω остается, очевидно, неизменным. Следовательно, $\displaystyle\iint\limits_{\sigma} \mathcal{K}d\sigma$ не меняется (из неизменности ω непосредственно следует, что этот интеграл меняется на число, кратное 2π; но так как он может меняться лишь мало, — мы оговорили, что g_{ij} в σ меняется мало, — то он вообще не меняется). Соответствующий интеграл по остальной части X^2 не меняется потому, что там не меняется метрический тензор. Тем самым на каждом таком

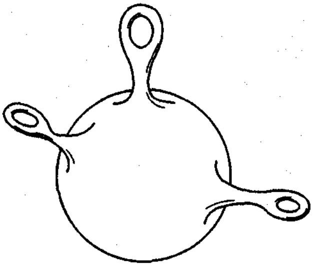

Рис. 10

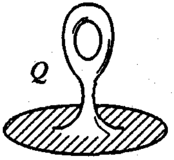

Рис. 11

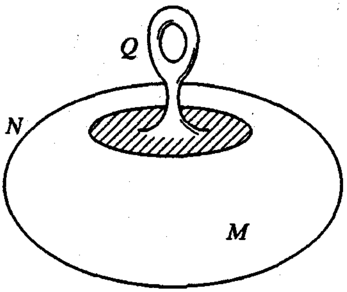

Рис. 12

шаге интеграл, фигурирующий в условии теоремы, не меняется. Следовательно, он не меняется и в результате совокупности таких шагов.

Примеры.

1. Если V^2 диффеоморфно сфере, то

$$\iint\limits_{V^2} \mathcal{K} d\sigma = 4\pi.$$

Действительно, этот интеграл равен такому же интегралу для единичной сферы, а так как на ней $\mathcal{K} = 1$ (см. задачу в п. 1 § 5 гл. 3), то он равен площади единичной сферы. (Сопоставьте с примером 1 п. 2 § 5 гл. 3.)

2. Если V^2 диффеоморфно тору, то

$$\iint\limits_{V^2} \mathcal{K} d\sigma = 0.$$

Действительно, на торе можно ввести локально евклидову метрику. Для такой метрики $\mathcal{K} = 0$ и, следовательно, интеграл равен нулю. (Сопоставьте с примером 4 п. 2 § 5 гл. 3.)

3. Пусть V^2 диффеоморфно «сфере с m ручками» (рис. 10). Прежде всего вычислим $\iint\limits_{Q} \mathcal{K} d\sigma$, где Q — одна «ручка», гладко приложенная к плоскости (рис. 11).

Дополним гладко эту «ручку» куском M до «сферы с одной ручкой», обозначим ее N (рис. 12). Тогда $\iint\limits_{N} \mathcal{K} d\sigma = 0$, так как N диффеоморфно тору. Но $\iint\limits_{M} \mathcal{K} d\sigma = 4\pi$, так как если бы мы дополнили M плоской пленкой (без «ручки») до поверхности диффеоморфной сфере, то интеграл по всей этой поверхности был бы равен 4π, а интеграл по плоской пленке равен нулю. Поэтому $\iint\limits_{Q} K d\sigma = -4\pi$. Отсюда следует, что для «сферы с m ручками»

$$\iint\limits_{V^2} K d\sigma = 4\pi(1 - m).$$

(Достаточно приставлять «ручки» по очереди, предварительно сделав участок поверхности плоским, а затем вырезав в нем отверстие и заклеив его «ручкой».)

4. Оказывается (мы не доказываем этого), что поверхность в примере 3 (для $m = 0, 1, \ldots$) — самый общий вид связного ориентируемого компактного X^2. Можно получить значение интеграла и для неориентируемых компактных X^2. Ограничимся задачей: вычислить $\iint\limits_{V^2} K d\sigma$, где V^2 диффеоморфно проективной плоскости (см. пример 4 § 1 гл. 2).

Ответ: 2π.

5. В п. 4 § 3 мы видели, что на торе можно ввести метрику, превращающую его в локально евклидово пространство.

Задача. Можно ли на сфере ввести метрику, превращающую ее в локально евклидово пространство?

2. Интеграл Аллендорфера—Вейля. Пусть X^{2n} компактное $2n$-мерное гладкое многообразие. Пусть на X^{2n} введен какой-либо метрический тензор g_{ij}. Мы получим риманово пространство V^{2n}. Обозначим $R_{ij,ks}$ — тензор кривизны, dv — элемент объема V^{2n}. Образуем инвариант (тензор нулевой валентности)

$$W = R_{i_1 i_2, j_1 j_2} \ldots R_{i_{2n-1} i_{2n}, j_{2n-1} j_{2n}} \left(\frac{1}{\sqrt{g}}\right)^{i_1 \ldots i_{2n}} \left(\frac{1}{\sqrt{g}}\right)^{j_1 \ldots j_{2n}}$$

(легко видеть, что $W = 4K$ при $n = 1$).

Теорема. $\int\limits_{V^{2n}} \ldots \int W dv$ *не зависит от выбора* g_{ij}.

Доказательство приводить не будем[1]. Идея возможного доказательства будет изложена в следующем пункте.

Очевидно, теорема п. 1 — частный случай этой теоремы.

3. Тензорные поля Понтрягина. Возьмем какое-либо V^n. Для $q = 1, 2, \ldots$ построим тензорные поля

$$\pi:\ \pi_{i_1\ldots i_{4q}} = R_{[i_1 i_2,|j_1|}^{\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ j_2} R_{i_3 i_4,|j_2|}^{\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ j_3} \ldots R_{i_{4q-1} i_{4q}],j_{2q}}^{\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ j_1}$$

(индексы $j_1, j_2, \ldots$, выделенные знаками $|$, не участвуют в альтернировании). Рассмотрим какое-либо тензорное поле $\Pi_{i_1\ldots i_{4p}}$, $4p \leqslant n$, являющееся линейной комбинацией с постоянными коэффициентами внешних произведений полей, построенных выше. Возьмем в V^n какую-либо $4p$-мерную цепь C^{4p}, имеющую нулевую границу (например, какое-либо компактное $4p$-мерное ориентированное многообразие).

Теорема. $\int\limits_{C^{4p}} \Pi_{i_1\ldots i_{4p}} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{4p}}$ *не зависит от выбора* g_{ij}.

Доказательство. Идея его такова. Пусть $\overset{0}{g}_{ij}$ и $\overset{1}{g}_{ij}$ два каких-либо метрических тензора на X^n, превращающих X^n соответственно в $\underset{0}{V^n}$ и $\underset{1}{V^n}$. Построим какое-либо семейство $\overset{t}{g}_{ij}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, метрических тензоров так, чтобы при $t = 0$ получить $\overset{0}{g}_{ij}$, а при $t = 1$ получить $\overset{1}{g}_{ij}$, например, возьмем $\overset{t}{g}_{ij} = t\,\overset{1}{g}_{ij} + (1-t)\,\overset{0}{g}_{ij}$. Тогда рассматриваемый интеграл становится функцией t. Покажем, что его производная по t равна нулю (производные по t далее обозначаются точкой сверху). Для этого представим $\dot{\Pi}$ в виде $\dot{\Pi} = \partial\Psi$ (возможность такого представления — ядро доказательства). Тогда производная интеграла по t равна

$$\int\limits_{C^{4p}} (\partial\Psi)_{i_1\ldots i_{4p}} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{4p}},$$

---

[1] Авторское доказательство см. в статье: *Allendoerfer C. B.* and *Weil A.*, Trans. Am. Math. Soc. V. 53. № 1 (1943), где и был введен рассматриваемый интеграл.

что в силу теоремы Стокса—Пуанкаре равно

$$\int\limits_{\partial C^{4p}} \Psi_{i_1\ldots i_{4p-1}} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{4p-1}}.$$

Но последний интеграл равен нулю, так как $\partial C^{4p} = 0$.

Само доказательство осуществляется прямыми выкладками. Разобьем его на этапы.

1. Пусть $\overset{t}{g}_{ij}$ порождает коэффициенты связности Γ^k_{ij}. Как уже говорилось, Γ^k_{ij} — не тензор. Составим $S^k_{ij} = \dot{\Gamma}^k_{ij}$. Докажем, что S^k_{ij} — тензор.

Мы ранее вывели (см. п. 2 § 2 гл. 3), что

$$\Gamma^{k'}_{i'j'} = A^{k'}_k A^i_{i'} A^j_{j'} \Gamma^k_{ij} + A^{k'}_k \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}}.$$

Дифференцируя это равенство по t, получим

$$S^{k'}_{i'j'} = A^{k'}_k A^i_{i'} A^j_{j'} S^k_{ij},$$

что и требовалось.

2. Вычислим $\dot{R}_{ij,k}^{\cdot\cdot\cdot\,r}$. Мы имеем (см. формулу (3.1) гл. 3)

$$R_{ij,k}^{\cdot\cdot\cdot\,r} = -2(\partial_{[i}\Gamma^r_{j]k} + \Gamma^r_{m[i}\Gamma^m_{j]k}).$$

Поэтому

$$\dot{R}_{ij,k}^{\cdot\cdot\cdot\,r} = -2(\partial_{[i}S^r_{j]k} + S^r_{m[i}\Gamma^m_{j]k} + \Gamma^r_{m[i}S^m_{j]k}) = -2\nabla_{[i}S^r_{j]k};$$

последнее равенство следует из правила вычисления ковариантной производной (см. п. 4 § 2 гл. 3) и того, что $\Gamma^r_{[ij]} = 0$.

3. Покажем, что для любого тензорного поля $u_{i_1\ldots i_q}$ имеет место

$$\partial_{[i_0}u_{i_1\ldots i_q]} = \nabla_{[i_0}u_{i_1\ldots i_q]}.$$

Действительно,

$$\nabla_{i_0}u_{i_1\ldots i_q} = \partial_{i_0}u_{i_1\ldots i_q} - \Gamma^j_{i_0 i_1}u_{j i_2\ldots i_q} - \Gamma^j_{i_0 i_2}u_{i_1 j i_3\ldots i_q} - \ldots$$

При альтернировании по $i_0, i_1, \ldots, i_q$ все $\Gamma^j_{i_0 i_m}$ пропадут (Γ^j_{ik} симметрично по i и k) и получится нужное равенство.

4. Дальнейшие выкладки проведем, ограничившись (единственно ради наглядности) полем $\pi_{i_1 i_2 i_3 i_4} = R_{[i_1 i_2,|j|}^{\cdot\;\cdot\;\cdot\;k} R_{i_3 i_4],k}^{\cdot\;\cdot\;\cdot\;j}$. Тогда

$$\dot{\pi}_{i_1 i_2 i_3 i_4} = -4(\nabla_{[i_1} S_{i_2|j|}^{k}) R_{i_3 i_4],k}^{\cdot\;\cdot\;\cdot\;j} = -4\nabla_{[i_1}(S_{i_2|j|}^{k} R_{i_3 i_4],k}^{\cdot\;\cdot\;\cdot\;j});$$

последнее равенство справедливо ввиду того, что $\nabla_{[i} R_{jk],s}^{\cdot\;\cdot\;\cdot\;r} = 0$ (тождество Бианки, см. п. 2 § 3 гл. 3). Если взять

$$\Psi_{i_1 i_2 i_3} = -4 S_{[i_1|j|}^{k} R_{i_2 i_3],k}^{\cdot\;\cdot\;\cdot\;j},$$

то $\dot{\pi} = \partial\Psi$.

5. Последний этап — использование формулы Стокса—Пуанкаре — уже реализован при изложении идеи доказательства. Теорема доказана[2].

Инвариантность интеграла Аллендорфера—Вейля (см. п. 2) может быть доказана следующим способом. Будем менять метрику V^{2n} поочередно на ориентируемых участках (см. доказательство теоремы п. 1) и для доказательства неизменности интеграла по такому участку использовать выкладки, сходные с проведенными в настоящем пункте, но более громоздкие.

4. Существуют ли еще какие-либо тензорные поля, строящиеся по метрическому тензору и его производным и дающие дифференциально-топологические инварианты? Уточним вопрос, стоящий в названии пункта. Например, если мы введем любое антисимметричное ковариантное тензорное поле и возьмем его производную, то интеграл от этой производной по цепи, имеющей нулевую границу, будет равен нулю. Если мы прибавим эту производную к какому-либо полю, дающему при интегрировании по такой цепи дифференциально-топологический инвариант, то значение этого интеграла не изменится. Это «неинтересные» возможности. Нас интересует вопрос: какие тензорные поля при интегрировании могут дать несовпадающие дифференциально-топологические характеристики многообразия.

---

[2] Авторское доказательство см. в работах: *Понтрягин Л. С.* ДАН СССР. Т. 43. № 3 (1944) и Изв. АН СССР. Сер. матем. Т. 13 (1949), где и были введены рассматриваемые тензорные поля. Приведенное доказательство взято из работы: *Абрамов А. А.* ДАН СССР. Т. 81. № 2 (1951).

Теорема. *Пусть антисимметричное тензорное поле $\Phi_{i_1\ldots i_k}$ таково, что его координаты суть функции координат тензора g_{ij} и их производных до некоторого порядка, определенные и аналитические для тех значений аргументов, при которых квадратичная форма $g_{ij}u^iu^j$ положительно определена. Пусть для любой k-мерной цепи C^k, имеющей нулевую границу, интеграл $\int\limits_{C^k} \Phi_{i_1\ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$ не меняется при изменении g_{ij}. Тогда существует такое понтрягинское поле* Π, *что*

$$\int\limits_{C^k} \Phi_{i_1\ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} = \int\limits_{C^k} \Pi_{i_1\ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$$

для любой такой цепи C^k (при $k \neq 4p$ полагаем $\Pi = 0$).

Доказательство не приводим[3].

Соответственно, в классе псевдотензорных полей, интеграл от которых не зависит от g_{ij}, единственным ненулевым (с точностью до слагаемых, дающих при интегрировании нуль, и числового множителя) является поле $W\sqrt{g}_{i_1\ldots i_{2n}}$ в компактном V^{2n} (определение W см. в п. 2). Аккуратную формулировку теоремы и доказательство не приводим[4].

5. О топологической инвариантности дифференциально-топологических инвариантов, рассмотренных в пунктах 1–3. Оказывается, интегралы, рассмотренные в пунктах 1–3, дают топологические инварианты, а не только дифференциально-топологические (разница объяснена во вводной части).

5.1. Разобьем компактное многообразие X^2 на криволинейные многоугольники, правильно примыкающие друг к другу (т. е. так, что любые два многоугольника или не примыкают друг к другу, или примыкают по вершине, или примыкают по стороне). Пусть P_0 — число вершин разбиения (т. е. точек, являющихся вершинами многоугольников), P_1 — число сторон (т. е. кривых, являющихся сторонами многоугольников), P_2 — число многоугольников. В топологии доказывается, что

---

[3] См.: *Абрамов А. А.* ДАН СССР. Т. 81. № 2 (1951).

[4] См.: *Абрамов А. А.* ДАН СССР. Т. 81. № 3 (1951).

число χ,

$$\chi = P_0 - P_1 + P_2,$$

не зависит от разбиения и является топологическим инвариантом.

Число χ называется *эйлеровой характеристикой* многообразия.

Покажем, что для компактного V^2 имеет место

$$\iint\limits_{V^2} K d\sigma = 2\pi\chi.$$

Разобьем V^2 на криволинейные многоугольники $\underset{1}{\sigma}, \ldots, \underset{P_2}{\sigma}$, стороны которых — геодезические (возможность такого разбиения мы не доказываем). Пусть $\underset{i}{\sigma}$ — это $\underset{i}{k}$-угольник, $i = 1, \ldots, P_2$. Тогда по теореме Гаусса (см. § 5 гл. 3) сумма углов многоугольника $\underset{i}{\sigma}$ равна

$$\pi \underset{i}{k} - 2\pi + \iint\limits_{\underset{i}{\sigma}} K d\sigma.$$

Общая сумма всех углов всех многоугольников $\underset{i}{\sigma}$ равна, таким образом,

$$\pi 2P_1 - 2\pi P_2 + \iint\limits_{V^2} K d\sigma;$$

здесь учтено, что каждая сторона считается дважды. Эта сумма равна, очевидно, $2\pi P_0$. Итак,

$$2\pi P_1 - 2\pi P_2 + \iint\limits_{V^2} K d\sigma = 2\pi P_0,$$

или

$$\iint\limits_{V^2} K d\sigma = 2\pi(P_0 - P_1 + P_2) = 2\pi\chi.$$

5.2. Для компактного V^{2n} имеет место[5]

$$\int \underset{V^{2n}}{\cdots} \int W\, dv = (8\pi)^n n! \chi.$$

---

[5] Доказательство см. в указанной статье Аллендорфера и Вейля.

Здесь W — см. определение в п. 2, χ — эйлерова характеристика V^{2n}, которая может быть определена следующим образом. Если разбить компактное многообразие X^m на криволинейные многогранники, правильно примыкающие друг к другу (т. е. так, что каждые два таких многогранника или не примыкают друг к другу, или примыкают по вершине или по криволинейной грани какой-либо размерности), то

$$\chi = P_0 - P_1 + P_2 - P_3 + \ldots,$$

где P_0 — число вершин разбиения, P_1 — число ребер (одномерных граней), P_2 — число двумерных граней, P_3 — трехмерных и т. д. В топологии доказывается, что χ — топологический инвариант многообразия.

5.3. Интегралы, даваемые тензорными полями Понтрягина, также дают топологические инварианты⁽⁶⁾.

---

[6] См.: *Новиков С. П.* ДАН СССР. Т. 163. № 2. С. 298–300 (1965).

URSS.ru URSS.ru URSS.ru URSS.ru

Другие книги нашего издательства:

URSS

Теория чисел

Оре О. **Приглашение в теорию чисел.**
Вейль А. **Основы теории чисел.**
Вейль Г. **Алгебраическая теория чисел.**
Понтрягин Л. С. **Обобщения чисел.**
Хинчин А. Я. **Три жемчужины теории чисел.**
Хинчин А. Я. **Цепные дроби.**
Жуков А. В. **Вездесущее число «пи».**
Парфенов И. И. **Цепные дроби — ожерелье мехатроники.**
Ожигова Е. П. **Что такое теория чисел.**
Ожигова Е. П. **Развитие теории чисел в России.**
Виноградов И. М. **Особые варианты метода тригонометрических сумм.**
Карацуба А. А. **Основы аналитической теории чисел.**
Деза Е. И. **Специальные числа натурального ряда.**
Деза Е. И., Котова Л. В. **Сборник задач по теории чисел.**
Гельфонд А. О. **Трансцендентные и алгебраические числа.**
Марченков С. С. **Элементарные арифметические функции.**
Марченков С. С. **Представление функций суперпозициями.**
Башмакова И. Г. **Диофант и диофантовы уравнения.**
Яглом И. М. **Комплексные числа и их применение в геометрии.**
Крэндалл Р., Померанс К. **Простые числа: Вычислительные и криптографические аспекты.**

Серия «Физико-математическое наследие: математика (теория чисел)»

Диофант Александрийский. **Арифметика и книга о многоугольных числах.**
Ферма П. **Исследования по теории чисел и диофантову анализу.**
Дирихле П. Г. Л. **Лекции по теории чисел.**
Дедекинд Р. **Непрерывность и иррациональные числа.**
Ингам А. Э. **Распределение простых чисел.**
Берман Г. Н. **Число и наука о нем: Общедоступные очерки.**
Ландау Э. **Основы анализа: Действия над числами.**
Титчмарш Э. Ч. **Дзета-функция Римана.**
Дэвенпорт Г. **Высшая арифметика: Введение в теорию чисел.**
Гельфонд А. О. **Решение уравнений в целых числах.**
Демидов И. Т. **Основания арифметики.**

Серия «Физико-математическое наследие: математика (геометрия)»

Вольберг О. А. **Основные идеи проективной геометрии.**
Цахариас М. **Введение в проективную геометрию.**
Буземан Г., Келли П. **Проективная геометрия и проективные метрики.**

Серия «Физико-математическое наследие: математика (топология)»

Александров П. С. **Введение в теорию множеств и общую топологию.**
Милнор Дж. **Теория Морса.**
Стинрод Н. **Топология косых произведений.**
Листинг И. Б. **Предварительные исследования по топологии.**

URSS.ru URSS.ru URSS.ru URSS.ru

URSS.ru URSS.ru URSS.ru URSS.ru

Другие книги нашего издательства:

URSS

Дифференциальные уравнения

Филиппов А. Ф. **Введение в теорию дифференциальных уравнений.**
Филиппов А. Ф. **Сборник задач по дифференциальным уравнениям.**
Эльсгольц Л. Э. **Дифференциальные уравнения.**
Степанов В. В. **Курс дифференциальных уравнений.**
Немыцкий В. В., Степанов В. В. **Качественная теория дифференциальных уравнений.**
Федорюк М. В. **Обыкновенные дифференциальные уравнения.**
Федорюк М. В. **Асимптотика: Интегралы и ряды.**
Федорюк М. В. **Метод перевала.**
Краснов М. Л. **Интегральные уравнения. Введение в теорию.**
Коддингтон Э. А., Левинсон Н. **Теория обыкновенных дифференциальных уравнений.**
Сикорский Ю. С. **Обыкновенные дифференциальные уравнения.**
Понтрягин Л. С. **Дифференциальные уравнения и их приложения.**
Трикоми Ф. Дж. **Дифференциальные уравнения.**
Трикоми Ф. Дж. **Лекции по уравнениям в частных производных.**
Филипс Г. **Дифференциальные уравнения.**
Амелькин В. В. **Автономные и линейные многомерные дифференциальные уравнения.**
Амелькин В. В. **Дифференциальные уравнения в приложениях.**
Беллман Р. **Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений.**
Лефшец С. **Геометрическая теория дифференциальных уравнений.**
Ловитт У. В. **Линейные интегральные уравнения.**

Алгебра

Чеботарев Н. Г. **Основы теории Галуа.** В 2 кн.
Вейль Г. **Классические группы. Их инварианты и представления.**
Фробениус Ф. Г. **Теория характеров и представлений групп.**
Эйзенхарт Л. П. **Непрерывные группы преобразований.**
Бэр Р. **Линейная алгебра и проективная геометрия.**
Никифоров В. А., Шкода Б. В. **Линейная алгебра и аналитическая геометрия.**
Шевалле К. **Введение в теорию алгебраических функций.**
Супруненко Д. А., Тышкевич Р. И. **Перестановочные матрицы.**
Яглом И. М. **Необыкновенная алгебра.**
Уокер Р. **Алгебраические кривые.**
Хамермеш М. **Теория групп и ее применение к физическим проблемам.**
Бауэр Э. **Введение в теорию групп и ее приложения к квантовой физике.**
Петрашень М. И., Трифонов Е. Д. **Применение теории групп в квантовой механике.**

Серия «Физико-математическое наследие: математика (алгебра)»

Чеботарев Н. Г. **Введение в теорию алгебр.**
Чеботарев Н. Г. **Теория Галуа.**
Чеботарев Н. Г. **Теория алгебраических функций.**
Александров П. С. **Введение в теорию групп.**
Маркус М., Минк Х. **Обзор по теории матриц и матричных неравенств.**
Бохер М. **Введение в высшую алгебру.**
Млодзеевский Б. К. **Основы высшей алгебры.**
Шмидт О. Ю. **Абстрактная теория групп.**

URSS.ru URSS.ru URSS.ru URSS.ru

URSS.ru URSS.ru URSS.ru URSS.ru

Другие книги нашего издательства:

URSS

Теория графов

Оре О. **Графы и их применение.**
Оре О. **Теория графов.**
Харари Ф. **Теория графов.**
Емеличев В. А., Мельников О. И. и др. **Лекции по теории графов.**
Мельников О. И. **Теория графов в занимательных задачах.**
Мельников О. И. **Обучение дискретной математике.**
Мельников О. И. **Незнайка в стране графов.**
Березина Л. Ю. **Графы и их применение.**
Малинин Л. И., Малинина Н. Л. **Изоморфизм графов в теоремах и алгоритмах.**
Панюкова Т. А. **Комбинаторика и теория графов.**
Родионов В. В. **Методы четырехцветной раскраски вершин плоских графов.**
Деза Е. И., Модель Д. Л. **Основы дискретной математики.**
Эвнин А. Ю. **Вокруг теоремы Холла.**

Теория вероятностей и математическая статистика

Гнеденко Б. В. **Очерк по истории теории вероятностей.**
Гнеденко Б. В. **Математика и контроль качества продукции.**
Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н. **Введение в теорию массового обслуживания.**
Хинчин А. Я. **Работы по математической теории массового обслуживания.**
Хинчин А. Я. **Асимптотические законы теории вероятностей.**
Хинчин А. Я. **Математические основания квантовой статистики.**
Феллер В. **Введение в теорию вероятностей и ее приложения.** В 2 т.
Боровков А. А. **Теория вероятностей.**
Боровков А. А. **Эргодичность и устойчивость случайных процессов.**
Сенатов В. В. **Центральная предельная теорема: Точность аппроксимации и асимптотические разложения.**
Дворяткина С. Н., Ляхов Л. Н. **Лекции по классической теории вероятностей.**
Пытьев Ю. П. **Возможность. Элементы теории и применения.**
Григорян А. А. **Закономерности и парадоксы развития теории вероятностей.**
Кац М. **Вероятность и смежные вопросы в физике.**
Яглом А. М., Яглом И. М. **Вероятность и информация.**
Мизес Р. **Вероятность и статистика.**
Хмаладзе Э. В. **Статистические методы в демографии и страховании жизни.**
Кудлаев Э. М. **Разделимые статистики и их применения.**
Дмитриев Е. А. **Математическая статистика в почвоведении.**
Тактаров Н. Г. **Теория вероятностей и математическая статистика.**
Ивченко Г. И., Медведев Ю. И. **Введение в математическую статистику.**

Серия «Классический университетский учебник»

Гнеденко Б. В. **Курс теории вероятностей.**
Колмогоров А. Н., Драгалин А. Г. **Математическая логика.**
Петровский И. Г. **Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.**
Кононович Э. В., Мороз В. И. **Общий курс астрономии.**
Ишханов Б. С., Капитонов И. М., Юдин Н. П. **Частицы и атомные ядра.**
Квасников И. А. **Термодинамика и статистическая физика.** В 4 т.

URSS.ru URSS.ru URSS.ru URSS.ru

URSS.ru URSS.ru URSS.ru URSS.ru

Другие книги нашего издательства:

URSS

Математическое моделирование

Тарасевич Ю. Ю. **Математическое и компьютерное моделирование.**
Тарасевич Ю. Ю. **Использование пакетов Maple, Mathcad и LATEX 2ε при решении математических задач и подготовке текстов.**
Тарасевич Ю. Ю. **Перколяция: теория, приложения, алгоритмы.**
Мышкис А. Д. **Элементы теории математических моделей.**
Блехман И. И., Мышкис А. Д., Пановко Я. Г. **Прикладная математика.**
Плохотников К. Э. **Математическое моделирование и вычислительный эксперимент.**
Морозов В. В. и др. **Исследование операций в задачах и упражнениях.**
Сухарев А. Г. **Минимаксные алгоритмы в задачах численного анализа.**
Малинецкий Г. Г., Коротаев А. В. (ред.) **Проблемы математической истории.**
Калман Р., Фалб П., Арбиб М. **Очерки по математической теории систем.**
Вайдлих В. **Социодинамика: системный подход к математическому моделированию социальных наук.**

Оптимизация

Понтрягин Л. С. **Принцип максимума в оптимальном управлении.**
Зеликин М. И. **Оптимальное управление и вариационное исчисление.**
Габасов Р., Кириллова Ф. М. **Принцип максимума в теории оптимального управления.**
Галеев Э. М. **Оптимизация: теория, примеры, задачи.**
Софиева Ю. Н., Цирлин А. М. **Введение в задачи и методы условной оптимизации.**
Ковалев М. М. **Дискретная оптимизация (целочисленное программирование).**
Ковалев М. М. **Матроиды в дискретной оптимизиции.**
Балакришнан А. **Введение в теорию оптимизации в гильбертовом пространстве.**
Бондаренко В. А., Максименко А. Н. **Геометрические конструкции и сложность в комбинаторной оптимизации.**

Программирование

Габасов Р., Кириллова Ф. М. **Методы линейного программирования.** Кн. 1–3.
Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г. **Задачи и методы линейного программирования.** Кн. 1–3.
Гольштейн Е. Г. **Выпуклое программирование: Элементы теории.**
Юдин Д. Б. **Математические методы управления в условиях неполной информации.**
Юдин Д. Б. **Вычислительные методы теории принятия решений.**
Дикин И. И. **Метод внутренних точек в линейном и нелинейном программировании.**

Теория игр

Шикин Е. В. **От игр к играм. Математическое введение.**
Оуэн Г. **Теория игр.**
Колесник Г. В. **Теория игр.**
Петров Н. Н. **Математические игры.**
Жуковский В. И. **Введение в дифференциальные игры при неопределенности.** Кн. 1–3.
Жуковский В. И. **Риски при конфликтных ситуациях.**
Жуковский В. И. **Кооперативные игры при неопределенности и их приложения.**
Жуковский В. И., Жуковская Л. В. **Риск в многокритериальных и конфликтных системах при неопределенности.**
Жуковский В. И., Кудрявцев К. Н. **Уравновешивание конфликтов и приложения.**
Вильямс Дж. Д. **Совершенный стратег, или Букварь по теории стратегических игр.**
Смольяков Э. Р. **Теория конфликтных равновесий.**
Смольяков Э. Р. **Теория антагонизмов и дифференциальные игры.**

URSS.ru URSS.ru URSS.ru URSS.ru

URSS.ru URSS.ru URSS.ru URSS.ru

Другие книги нашего издательства:

URSS

Учебники и задачники по математике

Краснов М. Л. и др. **Вся высшая математика.** Т. 1–7.
Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. **Сборники задач «Вся высшая математика» с подробными решениями.**
Босс В. **Лекции по математике.** Т. 1–16:
Т. 1: **Анализ;** Т. 2: **Дифференциальные уравнения;** Т. 3: **Линейная алгебра;**
Т. 4: **Вероятность, информация, статистика;** Т. 5: **Функциональный анализ;**
Т. 6: **От Диофанта до Тьюринга;** Т. 7: **Оптимизация;** Т. 8: **Теория групп;** Т. 9: **ТФКП;**
Т. 10. **Перебор и эффективные алгоритмы;** Т. 11. **Уравнения математической физики;**
Т. 12. **Контрпримеры и парадоксы;** Т. 13. **Топология;**
Т. 14. **Теория чисел;** Т. 15. **Нелинейные операторы и неподвижные точки;**
Т. 16. **Теория множеств: От Кантора до Коэна.**
Алексеев В. М. (ред.) **Избранные задачи по математике из журнала "AMM".**
Жуков А. В. и др. **Элегантная математика. Задачи и решения.**
Медведев Г. Н. **Участникам олимпиад и вступительных испытаний по математике.**
Александров И. И. **Сборник геометрических задач на построение (с решениями).**
Попов Г. Н. **Сборник исторических задач по элементарной математике.**
Золотаревская Д. И. **Теория вероятностей. Задачи с решениями.**
Золотаревская Д. И. **Сборник задач по линейной алгебре.**
Мостеллер Ф. **Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями.**
Антоневич А. Б. и др. **Задачи и упражнения по функциональному анализу.**
Городецкий В. В. и др. **Методы решения задач по функциональному анализу.**
Грищенко А. Е. и др. **Теория функций комплексного переменного: Решение задач.**
Гамов Г., Стерн М. **Занимательные задачи.**
Яглом А. М., Яглом И. М. **Неэлементарные задачи в элементарном изложении.**
Супрун В. П. **Математика для старшеклассников.** Кн. 1, 2.
Базылев Д. Ф. **Олимпиадные задачи по математике.**
Куланин Е. Д., Федин С. Н. **Геометрия треугольника в задачах.**
Эвнин А. Ю. **Задачник по дискретной математике.**
Кравцов А. В., Майков А. Р. **ТФКП: Методы решения задач.**
Киселев А. П. **Задачи и упражнения к «Элементам алгебры».**
Киселев А. П. **Систематический курс арифметики.**

Тел./факс:
+7 (499) 724-25-45
(многоканальный)

E-mail:
URSS@URSS.ru
http://URSS.ru

Наши книги можно приобрести в магазинах:

«НАУКУ — ВСЕМ!» (м. Профсоюзная, Нахимовский пр-т, 56. Тел. (499) 724-2545)
«Библио-Глобус» (м. Лубянка, ул. Мясницкая, 6. Тел. (495) 625-2457)
«Московский дом книги» (м. Арбатская, ул. Новый Арбат, 8. Тел. (495) 203-8242)
«Молодая гвардия» (м. Полянка, ул. Б. Полянка, 28. Тел. (495) 238-5001, 780-3370)
«Дом научно-технической книги» (Ленинский пр-т, 40. Тел. (495) 137-6019)
«Дом книги на Ладожской» (м. Бауманская, ул. Ладожская, 8, стр. 1. Тел. 267-0302)
«СПб. дом книги» (Невский пр., 28. Тел. (812) 448-2355)
«100 000 книг» (г. Екатеринбург, ул. Тургенева, 13. Тел. (343) 22-12-979)
Сеть магазинов «Дом книги» (г. Екатеринбург, ул. Антона Валека, 12. Тел. (343) 253-50-10)

URSS.ru URSS.ru URSS.ru URSS.ru


ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ГРУППА
URSS
КНИЖНЫЙ ВЫСТАВОЧНЫЙ ЗАЛ
НАУКУ — ВСЕМ!
URSS

Об авторе

Александр Александрович АБРАМОВ

Доктор физико-математических наук, профессор. Окончил механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова, а также аспирантуру. В 1949 г. защитил кандидатскую диссертацию, в 1975 г. — докторскую. Заслуженный деятель науки Российской Федерации, заслуженный профессор Московского физико-технического института. Награжден орденом Трудового Красного Знамени, медалью «За доблестный труд» и медалью «Ветеран труда». В настоящее время — главный научный сотрудник Вычислительного центра им. А. А. Дородницына РАН, профессор Московского физико-технического института.

10933 ID 158853

9 785397 027113 >

Отзывы о настоящем издании,
а также обнаруженные опечатки присылайте
по адресу URSS@URSS.ru.
Ваши замечания и предложения будут учтены
и отражены на web-страниц
в нашем интернет-магазине ht

E-mail:
URSS@URSS.ru

Каталог изданий
в Интернете:
http://URSS.ru

URSS НАШИ НОВЫЕ КООРДИНАТЫ

ТЕЛЕФО
(многока
117335,
45
56