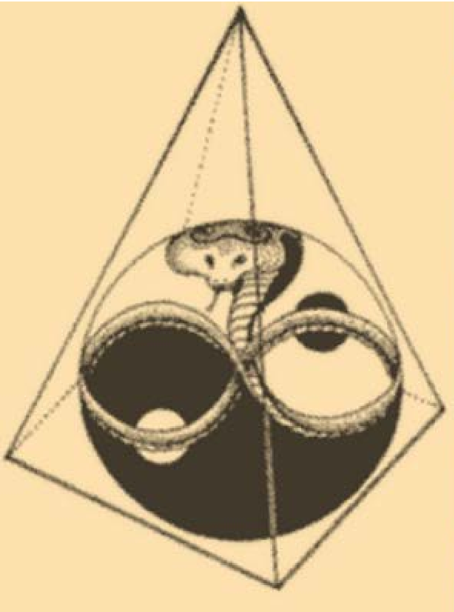


БАХАРЕВ ЮРИЙ ПАВЛОВИЧ

ФАКУЛЬТАТИВ в средней ШКОЛЕ – ПРОРЫВ образования в XXI ВЕК

НА ПРИМЕРЕ ТЕМЫ: «КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА»

МОСКВА - 2014

*Болонский процесс расплодит в РОССИИ **недоучек!***

Итоговая аттестация и прием в вузы на основе ЕГЭ,
*превращает всю страну в одну огромную **психиатрическую больницу!***

Обучение учащихся готовым приемам умственной деятельности –
это путь достижения обычной активности, а не творческой.

Я ничему не учу своих учеников, я лишь создаю условия, в которых они сами научатся.
А.Эйнштейн

Лучше изучить лишнее, чем ничего не изучить
Сенека Л.
Чему бы ты ни учился, ты учишься для себя.
Петроний
Долог путь поучения, короток и успешен путь примеров.
Сенека

Вся гордость учителя - в учениках, в росте посеянных им семян.

Д.И. Менделеев

ОГЛАВЛЕНИЕ:

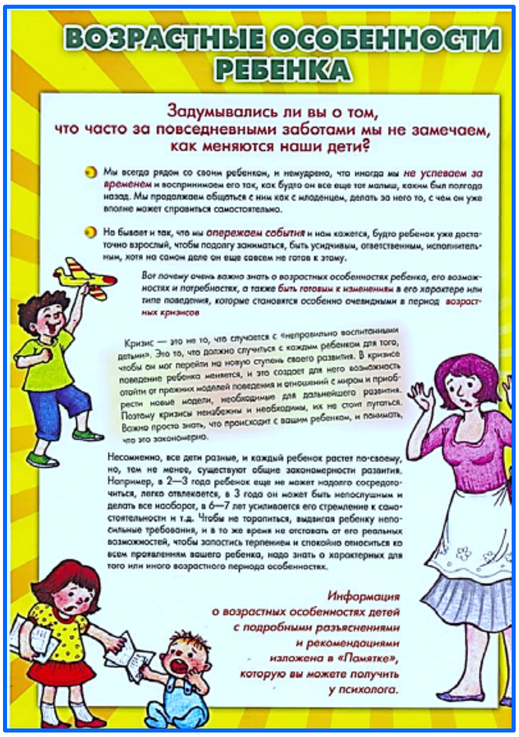

Комплексные числа имеют прикладное значение во многих областях науки, являются основным аппаратом для расчетов в электротехнике и связи.
2A

Часть I. Психофизиологическое обоснование факультативов в средней школе России

Вместо введения: Прорыв Русских школьников в XXI век

I. Психология развития ШКОЛЬНИКА

Психология развития — раздел психологии, который изучает возрастную динамику развития человеческой психики, онтогенез психических процессов и психологических качеств личности. Психологию развития можно назвать «возрастной психологией», хотя данный термин будет не совсем точным. В возрастной психологии развитие изучается только в связи с определенным хронологическим возрастом.



Психология развития изучает не только возрастные этапы человеческого онтогенеза, она также рассматривает различные процессы психического развития вообще. Поэтому правильнее будет считать, что возрастная психология — это один из разделов психологии развития.

В настоящее время в мире существует множество учебников по детской психологии. Наука о психическом развитии ребенка — детская психология — зародилась как ветвь сравнительной психологии в конце XIX в. Объективные условия становления детской психологии, которые сложились к концу XIX в., были связаны с интенсивным развитием промышленности, с новым уровнем общественной жизни, что создавало необходимость возникновения современной школы. Учителей интересовал вопрос: как учить и воспитывать детей?

Задача понимания маленького человека стала одной из главных. Желание ребенка понять себя как взрослого человека побудило исследователей относиться к детству более внимательно. Они пришли к выводу, что только через изучение психологии ребенка лежит путь к пониманию того, что собой представляет психология взрослого человека.

Онтогенез (от греч. on, ontos — «сущее, рождение, происхождение») — процесс развития индивидуального организма. В психологии онтогенез — формирование основных структур психики индивида в течение его детства; изучение онтогенеза — главная задача детской психологии. С позиций отечественной психологии основное содержание онтогенеза составляют предметная деятельность и общение ребенка (прежде всего совместная деятельность — общение с взрослым).

Таким образом, в центре изучения и исследования находится человек — существо, воплощающее высшую ступень развития жизни, субъект общественно-исторической деятельности. Человек является системой, в которой физическое и психическое, генетически обусловленное и прижизненно сформированное, природное, социальное и духовное образуют нерасторжимое единство.

Человек выступает как организм, наделенный психикой.

Объективно существующее многообразие проявлений человека в эволюции природы, истории общества и в его собственной жизни создали его образы, явно или скрыто существующие в культуре на определенных этапах ее развития.

В социологических, психологических и педагогических представлениях существуют следующие «образы человека», оказывающие непосредственное влияние на исследование и практическую работу с людьми:

1) «ощущающий человек» — человек как сумма знаний, умений и навыков; человек как «устройство по переработке информации»;
2) «человек-потребитель», т.е. человек нуждающийся, как система инстинктов и потребностей;
3) «запрограммированный человек», т.е. в поведенческих науках человек предстает как система реакций, в социальных — как репертуар социальных ролей;
4) «деятельностный человек» — это такой человек, который осуществляет выбор;
5) человек как выразитель смыслов и ценностей.

В педагогике исходят из образа «ощущающего человека», и понятие человека сводится к сумме знаний, его действия расцениваются как продукт прошлого опыта, а процесс воспитания подменяется убеждениями, уговорами, т.е. чисто словесными воздействиями.

В результате преобладания подобного подхода в обучении и воспитании происходит процесс «обнищания души при обогащении информацией».

Образ человека как вместилища нужд, инстинктов и влечений утвердился в ряде направлений психологии, прежде всего, под влиянием психоанализа. Образ «запрограммированного человека» определяет представления о нем в социобиологии, которая изучает развитие человека как развертывание

генетических программ. Если трактовка человека в психологии основывается на образе «запрограммированного человека», то воздействие так или иначе сводится к удачному подбору стимулов и подкреплений, на которые должны послушно реагировать живые социальные автоматы.
От образов человека в культуре и науке зависят как конкретные действия по отношению к нему, так и теоретические схемы анализа его развития. В их обособлении проявляется метафизическая схема детерминации развития человека под влиянием двух факторов — среды и наследственности. В рамках историко-эволюционного подхода разрабатывается принципиально иная схема детерминации развития. В этой схеме свойства человека как индивида рассматриваются как «безличные» предпосылки развития, которые в процессе жизненного пути могут стать продуктом этого развития. Социальная среда также представляет собой источник, а не фактор, непосредственно определяющий поведение человека. Будучи условием осуществления деятельности, социальная среда несет те нормы, ценности, роли, церемонии, орудия, системы знаков, с которыми сталкивается индивид.
Такой социальной средой для школьников в России является –средняя ШКОЛА! Точкой роста развития детей в школе может стать только – факультатив, при полном комплекте остальных условий положенных по Уставу средней школы. Разберем все это по шагам – «Step by step».

II. Возрастное развитие человека

Возрастная психология как научная дисциплина в России начала складываться в середине XX в. Получившая распространение идея воспитания, построенного на знании законов духовного и телесного развития человека, выдвинула на первый план физиологию и психологию. На первоначальном этапе главной задачей было доказательство значимости психологии и педагогики. Необходимо было на основе сведений о духовном и физическом развитии ребенка попытаться ответить на ряд принципиальных вопросов. Попытка их решения нашла наиболее яркое воплощение в трудах **Н. И. Пирогова, К. Д. Ушинского, Н. Х. Весселя и П. Д. Юркевича, Л. С. Выготского**.
Учение о психологическом возрасте позволяет избежать биологического и средового редукционизма при объяснении детского развития.
Традиционно принято разделять начало жизненного цикла на следующие периоды: внутриутробный период, детство, отрочество, юность.
Внутриутробный период делят на 3 стадии:

1) предзародышевую стадию — составляет две недели;

2) зародышевую стадию — до двух месяцев развития. На этой стадии происходит формирование и развитие различных органов;
3) стадию плода — длится до появления младенца на свет.

Детство также делится на несколько периодов:

1) младенчество (от 0 до 12-14 месяцев);
2) ранний возраст (от 1 до 3 лет);
3) дошкольный возраст (от 3 до 6-7 лет);
4) младший школьный возраст (от 6-7 до 10-11 лет).

Детство — период, продолжающийся от новорожденности до полной социальной и, следовательно, психологической зрелости; это период становления ребенка полноценным членом человеческого общества. При этом продолжительность детства в первобытном обществе не равна продолжительности детства в эпоху Средневековья или в наши дни. Этапы детства человека — продукт истории, и они столь же подвержены изменению, как и тысячи лет назад. Поэтому нельзя изучать детство ребенка и законы его становления вне развития человеческого общества и законов, определяющих его развитие. Продолжительность детства находится в прямой зависимости от уровня материальной и духовной культуры общества.

Отрочество включает две стадии: подростковую, или пубертатного развития (длится до 15 лет. У подростка начинает формироваться новое мировоззрение, складывается новое представление об окружающем мире и о себе), и юношескую, или ювенильную (длится до 22-23 лет).

Юность — период в развитии человека, соответствующий переходу от подросткового возраста к самостоятельной взрослой жизни. Хронологические границы юности определяются в психологии по-разному, наиболее часто исследователи выделяют раннюю юность, т.е. старший школьный возраст (от 15 до 18 лет), и позднюю юность (от 18 до 23 лет). К концу юношеского периода завершаются процессы физического созревания человека. Психологическое содержание этого этапа связано с развитием самосознания, решением задач профессионального самоопределения и вступлением во взрослую жизнь. В ранней юности формируются познавательные и профессиональные интересы, потребность в труде, способность строить жизненные планы, общественная активность. **В юношеском возрасте окончательно преодолевается свойственная предшествующим этапам онтогенеза зависимость от взрослых и утверждается самостоятельность личности.**

В отношениях со сверстниками наряду с сохранением коллективно-групповых форм общения нарастает значение индивидуальных контактов и привязанностей. Юность — напряженный период формирования нравственного сознания, выработки ценностных ориентаций и идеалов, устойчивого мировоззрения, гражданских качеств личности. Ответственные и сложные задачи, стоящие перед индивидом в юношеском возрасте, при неблагоприятных общественных или макросоциальных условиях могут приводить к острым психологическим конфликтам и глубоким переживаниям, к кризисному протеканию юности, а также к разнообразным отклонениям в поведении юношей и девушек от предписанных общественных нормативов.

Аристотель предлагал в качестве критерия возрастной периодизации степень развития **души**. Он предложил классификацию по «седмицам» (по 7 лет).

Возрастную периодизацию предлагал также Ян Амос Коменский (возрастные периоды по 6 лет):

> **1) от 6 до 12 лет — период отрочества — ребенок посещает школу родного языка;**
> **2) от 12 до 18 лет — юность — подростки обучаются в школе латинского языка;**
> **3) от 18 до 24 лет — период возмужалости — юноша может поступать в академию.**

Классификация Ж.-Ж. Руссо:

> **1) от рождения до 2 лет — период физического развития;**
> **2) от 2 до 12 лет — имеет место сон разума;**
> **3) с 12 до 15 лет — активное умственное развитие;**
> **4) с 15 лет и старше — период бурь и страстей.**

Критерии периодизации, принятые в психологии:

Комплексные критерии возрастной периодизации:

а) в отечественной психологии приняты следующие критерии:
- социальная ситуация развития;
- ведущий вид деятельности;
- личностные новообразования;
- характер протекания кризиса;

б) периодизация З. Фрейда: в основе классификации видел развитие сексуальности. Он рассматривал несколько возрастных периодов, полагая, что в основе критерия развития лежит сексуальное развитие ребенка:
- оральный. От рождения до раннего детства;
- анальное детство. Возникают проблемы: расточительство, накопительство;
- пассивно-сексуальная стадия (5-6 лет).

Дети впервые влюбляются;
- латентный возрастной этап. В этот период дети утрачивают интерес к сексуальной теме;
- активный генитальный. Период активной сексуальности (от 11-12 до 15-16 лет).

в) в периодизации Э. Эриксона выделяется 8 фаз развития:

- младенчество, первый год жизни. Первая фаза характеризуется доверием или недоверием ребенка к окружающему миру;
- раннее детство, 2-3-й годы жизни ребенка. Вторая фаза характеризуется автономией или стыдом и сомнением;
- дошкольный возраст, 4-5-й годы жизни ребенка. Третья фаза характеризуется инициативой или чувством вины;
- школьный возраст, с 6 до 11-12 лет. Четвертая фаза характеризуется чувством ценности и трудолюбия или малоценности;
- юношество, с 13 до 20 лет. Пятая фаза характеризуется личностной индивидуальностью, идентичностью или диффузией идентичности;
- молодость, с 20 до 30 лет. Характеризуется близостью, интимностью и солидарностью или изоляцией;
- зрелость, с 30 до 40 лет. Характеризуется творческим началом, интегративностью или застоем;
- старший взрослый возраст плюс старость. Характеризуется целостностью личности или раздвоенностью, отчаянием;

г) в отечественной психологии принята периодизация Д. Б. Эльконина. Периоды и стадии детского развития он классифицировал следующим образом:

1) этап раннего детства состоит из двух стадий. Первая стадия — младенчество, открывается кризисом новорожденности. Именно на кризисе новорожденности развивается мотивацион-но-потребностная сфера личности. Вторая стадия — ранний возраст. Начало этой стадии — кризис первого года жизни;
2) этап детства. Начало данного этапа — кризис 3 лет, который открывает начало дошкольного возраста. Вторая стадия начинается с кризиса 6-7 лет. Этот кризис — начальный этап младшего школьного возраста;
3) этап отрочества делится на две стадии. Первая — стадия подросткового возраста. Начало — кризис 11-12 лет. Вторая — стадия ранней юности, начинается кризисом 15 лет.

В данной периодизации последовательность ступеней — это смена режима индивидуальной жизни. Начало новой ступени — это новое рождение в новую форму жизни, кризис рождения — это кризис самоидентичности («так жить нельзя») и поиск новых форм бытия на стадии принятия.

III. Развитие: этапы, теории, законы и закономерности.

Жизнь человека начинается с момента оплодотворения. Это подтверждают многочисленные исследования. С момента оплодотворения в организме женщины зародыш живет своей собственной жизнью, реагирует на голоса, на настроение матери, на внешние стимулы. Существует гипотеза, что зародыш начинает реагировать еще раньше, чем будет сформирована центральная нервная система, потому что клетки живого организма могут улавливать изменения в химическом составе крови матери. А такие изменения неизбежно появляются в связи с любыми положительными или отрицательными эмоциями женщины.

Многочисленные исследования показали, что в развитии плода играет огромное значение деятельность нервной системы. Если у плода по какой-то причине повреждается мозг, длина и масса уменьшаются, то во время родов плод может погибнуть. Движения плода в организме матери определяются деятельностью развивающейся нервной системы. Выражены глотательные и хватательные движения, подвижны конечности. Хватательный эффект впервые проявляется в возрасте 11,5 недель внутриутробной жизни.

Специалисты по проблемам раннего развития мозга, внешней среды и психического здоровья доказали, что ребенок чувствует отрицательные эмоции матери, и они влияют на него самым сильным образом. Основные характеристики мозга зависят не только от наследственности, но и от качества контактов плода с окружающей средой. Если будущий ребенок был не желателен для матери, в период беременности она была озлоблена или раздражена, то плод все это чувствовал. Гормоны, образующиеся в организме женщины, самым негативным образом воздействовали на ребенка. Акт рождения сопровождается сильным стрессом как для матери, так и для новорожденного. После того как ребенок появился на свет, нервная система глубоко потрясена всем происшедшим. Это дает основание говорить о психологической травме рождения.

Понимание того факта, что ребенок чувствует и сознает еще до рождения, дает возможность осознать беременной женщине, что она может повлиять на личность ребенка, может направить его развитие в том или ином направлении с помощью своих мыслей и чувств. Это не означает, что любые мимолетные волнения или тревоги могут навредить ребенку и качественно повлиять на его характер, в некоторых случаях это даже может сыграть положительную роль в развитии ребенка. А значит это только то, что мать ребенка имеет возможность качественно улучшать его эмоциональное развитие.

Открытию факта внутриутробного формирования личности способствовал ряд открытий, среди которых открытие существования системы общения между матерью и новорожденным ребенком, названной «привязанностью».

Что важно, сделанные открытия по-новому объясняют роль присутствия любящего мужа рядом с беременной женщиной. Для нее общение с ним является постоянным источником эмоциональной поддержки и чувства защищенности, что, в свою очередь, передается ребенку.

Возвращаясь к теме о психологической травме рождения с точки зрения данных открытий, становится очевидным, что для ребенка очень важно родиться в теплой, душевной обстановке, рождающей чувства безопасности и защищенности.

Однако все эти открытия не означают, что ребёнок в утробе матери обладает полностью сформированной эмоциональной и психической базой. Он не может понять тонкости разговора взрослых людей, однако он понимает этот разговор с точки зрения эмоций, улавливая малейшие изменения, не ограничиваясь сильными и ярко выраженными, такими как любовь или ненависть, но также распознавая такие эмоции, как неуверенность или двойственность чувств.

Ребенок в утробе матери является очень способным учеником. Одним из главных источников информации для него являются его чувства. Так, например, если мать ребенка курит — он испытывает негативные эмоции (предположительно это связано с тем что во время курения ему недостает кислорода). И даже если мать будет просто думать о курении, у ребенка будет наблюдаться волнение (учащенное сердцебиение, повышенная активность) — так называемый условный рефлекс на негативное событие.

Другим источником информации для ребенка является **речь**. Не секрет, что у каждого человека индивидуальный ритм речи. И доказано, что источником рисунка речи человека является речь его матери, звучание которой он копировал. Причем процесс обучения начинается еще в утробе матери, это доказывается тем фактом, что ребенок движется в ритм ее речи. Младенец в возрасте 4-5 месяцев обладает хорошо развитым слухом и может различать не только голоса родителей, но и музыку. Если включить спокойную музыку, то даже достаточно беспокойный ребенок успокоится, в случае с быстрой и громкой музыкой будет наблюдаться резкое изменение поведения плода в сторону повышения его активности.

Рождение ребенка резко вносит в его мироощущения новые эмоции, новые впечатления, зачастую не всегда приятные. И то, как поведет себя ребенок в первые минуты после рождения, в большинстве случаев покажет, каково будет его поведение в дальнейшей жизни. Так, ребенок, родившийся и оказавшийся в руках акушера, может развернуться, а может остаться в позе эмбриона, привычной ему по утробе матери. В первом случае ребенок будет активным и деятельным, а во втором — будет психологически замыкаться и отстраняться. Для ослабления кризисности перехода из пренатального в перинатальный период развития необходимо создать условия при рождении и сразу после него близкие к тем, что были у ребенка в последние девять месяцев: положить его сразу после рождения на живот матери, после чего в ванну с теплой водой и т. д.

Психология возрастного развития — это отрасль знаний, рассматривающая динамику возрастных изменений.

Развитие происходит благодаря влиянию окружающей среды на организм.

Эволюционное изменение психики — это длительное и достаточно медленное развитие, в результате которого происходят устойчивые изменения организма, обогащается словарный запас человека.
Революционные изменения — это быстрые, глубокие преобразования психики и поведения человека. Происходят во время возрастных кризисов, сопутствуют им.
Ситуационные изменения — это быстрые, но недостаточно устойчивые изменения психики и поведения, требующие подкрепления. Бывают организованные и неорганизованные.
Организованные — предполагают разработку оказания обучающего влияния на человека, осуществляются в системе и носят целенаправленный характер.
Неорганизованные ситуационные изменения носят, как правило, случайный характер и не предполагают системной работы по обучению и воспитания.
Законы психического развития — это общие и частные закономерности, с помощью которых можно описать психическое развитие и опираясь на которые можно управлять ходом психического развития.
Л. С. Выготский отмечал, что разные стороны психической деятельности ребенка развиваются неравномерно. Например, речевое развитие бурно происходит в раннем детском возрасте, а логическое мышление развивается в подростковом возрасте.
Закон метаморфозы детского развития заключается в том, что развитие не сводится к количественным изменениям психики, оно представляет собой цепь качественных изменений.
Закон цикличности заключается в том, что возраст как стадия развития представляет собой определенный цикл, каждый цикл имеет свое содержание и свой темп.
По проблеме развития мнения большинства зарубежных и отечественных психологов расходятся. Многие зарубежные психологи, например, **Ж. Пиаже**, считают, что обучение ориентируется на развитие, т.е. при обучении необходимо исходить из того, что ребенок осваивает информацию в соответствии с уровнем развития познавательных процессов в данный период времени. Соответственно, нужно давать ребенку то, что он может «взять».

IV. Понятие характера

Характер (от греч. charakter — «печать, чеканка, зарубка») — подструктура личности, образуемая индивидуально-своеобразным комплексом устойчивых личностных особенностей (черт, диспозиций), определяющих присущие личности типичные формы и способы достижения целей (инструментальные проявления характера) и самовыражения в общении с другими людьми (экспрессивные проявления характера).

Этимологически слово «характер» употребляется в трех значениях:

> **1) применительно к любым объектам и явлениям (характер процесса, характер ландшафта) как обозначающее их «образное своеобразие», нечто «характерное» для них;**
> **2) применительно к животным и человеку как обозначающее их душевное (психическое) своеобразие;**
> **3) применительно только к человеку как характеризующее его не только с психологической, но и с морально-этической стороны (хороший или плохой, сильный или слабый характер, «с характером» или бесхарактерный).**

Наука о характере в психологическом значении слова — характерология — имеет столь же длительную историю, как и сама психология. На протяжении тысячелетий характерология как сфера науки, искусства и житейской мудрости стремилась решить две основные задачи: типологизации характеров (темпераментов) и определения характера (или темперамента) по тем или иным внешним признакам (или «психогностика») (В. Штерн).

Различия человеческих характеров, как наиболее существенных свойств и особенностей человека, определяющих его внешний облик и поведение (индивидуальные различия в широком смысле), с глубокой древности обращали на себя внимание философов и врачей.

С развитием в 10-30-е гг. XX в. психологии личности встала проблема соотношения понятий личности и характера. В послевоенной американской академической психологии понятие характера практически вышло из употребления, сохранившись только в клинически ориентированных подходах как обозначающее принадлежность к тому или иному типу. В то же время в европейской психологии (Германия, Франция) понятие **характера** сохраняется как одно из важных общепсихологических понятий, причем в немецкой традиции оно включает в свое определение элементы духовности, а во французской трактуется как совокупность присущих личности характерных форм аффективного реагирования.

В российской психологии основы учения о характере были заложены А. Ф. Лазурским, трактовавшим характер как совокупность устойчиво присущих человеку душевных наклонностей. Позже, в 50-е гг. XIX в. характер отождествлялся с индивидуально-своеобразным в личности в противоположность социально-типичному. Новый всплеск интереса к проблеме характера возник в 80-е гг. XIX в., когда ряд авторов начал рассматривать его как подструктуру личности, опираясь на идеи Л. С. Выготского, противопоставившего традиционной идее характера, как неизменного типа, представление о нем, как о динамически развивающейся

функционально целесообразной структуре, участвующей в процессах адаптации индивида к миру и формирующейся в ходе этой адаптации.
Согласно современным отечественным воззрениям, характер выступает как форма проявления личности в узком смысле слова (содержательной или смысловой сферы личности), как готовность человека осуществлять в более или менее типичных ситуациях при определенных условиях определенные фиксированные формы или способы поведения. Он выступает как защитная оболочка, опосредующая как воздействия внешней среды на личность (смягчая или обостряя их), так и воздействия личности на среду, придавая действиям субъекта те или иные инструментальные или экспрессивные свойства (напористость, мягкость, импульсивность, открытость, осторожность и др.).
Понятие социального характера, введенное **Э. Фроммом**, означает совокупность устойчивых личностных черт, присущих членам некоторой социальной группы и сложившихся в результате основного опыта и способа жизни, общего для этой группы. Понятие национального характера означает совокупность черт, характеризующих представителей одной нации или этнокультурной общности в отличие от другой. Проблемам национального характера было посвящено в 50-80-е гг. XIX в. большое количество экспериментальных исследований, в которых не удалось обнаружить значимых и устойчивых характерологических различий между нациями; тем самым проблема национального характера перешла в плоскость социально-психологических стереотипов.
Особенности поведения заключаются в том, что человек действует, повинуясь исключительно импульсам, абсолютно не задумываясь над поступками. Это отличает детей от взрослых, которые, в свою очередь, действуют осознанно. Ребенка можно легко отвлечь. Если пару минут назад он горько плакал от боли, то в следующую минуту он может смеяться от радости, взяв в руки любимую игрушку. Именно в этом возрасте у ребенка начинает формироваться любовь к близким людям — к матери, отцу.
Сначала ребенок начинает присваивать, копировать модели поведения взрослых мужчин и женщин, их интересы. Экспериментально доказано, что начиная с четырехлетнего возраста дети осознают свою принадлежность к женскому или мужскому полу. И это осознание очень важно для дальнейшего формирования личности и поэтому необходимым является образец для подражания: для девочек — это мама, для мальчиков — папа, с которыми дети могли бы себя идентифицировать.
Мышление детей в этот период находится на уровне конкретных операций, т.е. оно наглядно-образное.

В отечественной психологии различными авторами в качестве важнейших выделяется следующий ряд психических новообразований, которые формируются в дошкольном возрасте:

1) возникновение цельного детского мировоззрения;
2) возникновение первичных этических инстанций;
3) возникновение соподчинения мотивов;
4) возникновение произвольного поведения;
5) появление внутреннего плана умственных действий;
6) возникновение личного сознания.

В качестве основных линий развития ребенка, определяющих его включение в новый вид деятельности — учебную деятельность, принято указывать:

1) формирование произвольного поведения;
2) овладение средствами и эталонами познавательной деятельности;
3) переход от эгоцентризма к децентрации (способности видеть мир с точки зрения другого человека, считаться с интересами других людей);
4) мотивационное развитие познавательной деятельности.

Считается, что именно эти линии развития ребенка определяют его готовность к школьному обучению.

Исследователи выделяют ряд направлений образовательной деятельности и умения, которые являются показателем развития у детей дошкольного и младшего школьного возраста:

1) развитие умений включаться в достойные формы общения и взаимодействия с другими людьми, а также умений считаться с интересами других людей.
2) развитие речевых умений и способностей:
а) фонематические и грамматические умения:
- умение дифференцировать звуковой состав речи;
- умение согласовывать слова в предложениях;
- устанавливать значения слов;
б) регулятивные функции речи:
- выполнение действий по словесной инструкции;
- организация действий другого человека с помощью речи;
- выполнение действий на основе самостоятельного речевого планирования;
- умение подчиняться правилам и следить за этим;
в) коммуникативные функции речи:
- речевое описание каких-либо предметов;
- умение передавать содержание какого-либо впечатления, события, сказки;
- совместное планирование действий в речевом общении;
- понимание смысла сообщений;

г) коммуникативно-личностные и рефлексивные функции речи:
- умение рассказать о поведении другого и объяснить его;
- умение рассказать о переживаниях другого и объяснить их;
- умение рассказать о своем поведении, переживаниях и объяснить их причины;

3) формирование и развитие умений выполнять знаково-символические действия и умений выполнять действия во внутреннем умственном пространстве:

а) умение обозначать и замещать различными знаками явления, процессы и события;
б) умение разводить обозначаемое содержание и средства обозначения;
в) умение «наполнять» условные знаковые схемы и модели содержанием;
г) умение выполнять простые действия схематизации и моделирования;
д) умение объективировать представления;
е) умение использовать речь как средство преобразования внешней формы ориентировки в умственное действие;

4) развитие простых логических и математических умений и способностей — дифференциация качественных и количественных характеристик предметов:

а) умение сравнивать множество предметов;
б) умение выделять и классифицировать свойства и признаки предметов по различным основаниям;
в) использование эталонов измерения с целью сравнения предметов и их количества;
г) умение использовать простые математические знаки;
д) умение выполнять последовательности математических действий по речевой инструкции.

5) Развитие двигательных умений и способностей:

а) умение выполнять действия, требующие ориентировки тела в пространстве;
б) умение ориентировать локомоторные действия во внешнем пространстве;
в) умение выполнять точные, «прицельные» действия в пространственном поле с предметами;
г) умение изменять, поддерживать и произвольно регулировать тонус мускулатуры;
д) развитие «тонкой моторики» манипулятивных действий;
е) умение осознавать выполняемые действия (рассказать о выполняемом действии);
ж) умение выполнять последовательности действий в соответствии с речевой инструкцией и намеченным планом;

6) развитие художественно-изобразительных умений и способностей. Умения, связанные с техникой использования орудий художественно-изобразительной деятельности:

а) умение пользоваться карандашом;

б) умение пользоваться кисточкой и красками;
7) умения, связанные с техникой построения изображения:
а) умение ориентироваться в пространстве листа бумаги;
б) умение передавать изображение в цвете;
в) умение соблюдать пропорции между изображаемыми предметами и использовать «глубину».
8) умения рассказывать о замысле будущего изображения и переносить его во внешний план рисунка:
а) умение рассказать о сюжете предъявляемого изображения;
б) умение рассказать о своем сюжете изображаемого и перечислить элементы сюжета;
в) умение отразить в рисунке сюжет и его элементы в соответствии с планом;
9) развитие музыкально-выразительных умений и способностей:
а) умение ориентироваться в ритмических характеристиках музыки;
б) умение ориентироваться в звуковысотных отношениях;
в) умение рассказать об объективных особенностях музыкального произведения;
г) умение рассказать о переживаниях и образах, которые вызывает музыкальное произведение;
д) умение выражать свои эмоционально-ценностные переживания, отношения и представления через музыкальные произведения;
е) умение самостоятельно воспроизводить и интонировать мелодии, песни;
ж) умение двигаться в соответствии с характером музыки.

VI. Формирование внутреннего плана умственных действий

Овладение умениями использовать в различных видах деятельности и общения язык, а позднее и другие знаково-символические средства, обеспечивает формирование и развитие у ребенка внутреннего плана умственных действий. Часто это психическое образование в психологии называют сознанием. В умственном плане человек может выполнять действия над представлениями и понятиями в отсутствии реальных предметов или явлений. По словам С. В. Маланова, при этом внутренний план умственных действий лежит в основе совокупности всех умений и способностей человека, которые связаны с абстрактными формами мышления, с произвольными формами регуляции и планирования своего поведения и деятельности, с возможностью приобретения различных знаний на основе речевого общения и т. д. Умение выполнять простые действия во внутреннем, умственном плане считается одним из необходимых условий готовности ребенка к учебной деятельности.

Содержание психических образов, представлений, понятий и их умственные преобразования порождаются в ходе реализации различных видов внешних предметных практических действий, а также действий перцептивных по мере перехода их во внутренний план мышления (сознания). В умственную форму может быть преобразовано как предметное содержание, так и способы действий с ним. В многочисленных психологических исследованиях по формированию зрительных, слуховых, осязательных образов и представлений убедительно показано, что внешние практические предметные двигательно-исполнительные действия с опорой на перцептивные действия, которые реализуются органами чувств, как бы уподобляются структурным особенностям воспринимаемых предметов и явлений. Далее развернутая во времени последовательность двигательных и перцептивных действий и операций сворачивается в одновременно обозреваемую структуру — образ. Вслед за этим такая структура уже в качестве представления начинает выполнять функцию ориентировочной основы для выполнения определенного диапазона действий.

При общении главным носителем информации являются мимика и жесты — 60%, поэтому речь ребенка, не содержащая сложных семантических структур, но наполненная мимическим содержанием, воспринимается взрослыми и, в большинстве случаев, адекватно распознается.

Ранний дошкольный возраст ребенка характеризуется обретением речи как средства развития самосознания и личности ребенка в целом. Посредством речевого общения ребенок получает информацию, необходимую для развития его как личности. Речь сама по себе содержит средства поощрения или наказания, самоконтроля и дисциплины. Она также доносит до ребенка нормы и правила, принятые в окружающем его обществе. В процессе усвоения речи у ребенка наблюдается качественный прорыв в возможности самоконтроля и самореализации, подтверждаемый усиленным развитием личностных показателей. Поэтому не вызывает удивление тот факт, что в раннем возрасте у ребенка наблюдаются качественные изменения психологии мышления.

Общение состоит из двух составляющих: так называемого «говорения» и понимания. Понимание позволяет усвоить нормы и требования, предъявляемые ребенку со стороны взрослых или сверстников. Оно позволяет корректировать свое поведение в зависимости от усвоенной информации. И чем более развит ребенок, т.е. чем более сложные структуры способен понимать, тем более тонко он сможет реагировать на воздействия, оказываемые с помощью общения. «Говорение» позволяет ребенку самому вносить корректировки в поведение окружающих, уточнять требования, предъявляемые к нему, и формировать диалог в виде, соответствующем его личностному развитию.

Потребность в общении основывается на желании ребенка познать себя и других людей. Успешное общение с взрослыми и детьми влияет на его самооценку. В возрасте 3-5 лет у ребенка складывается внеситуативно-познавательная форма общения с окружающими, которая основывается на «теоретическом» сотрудничестве ребенка с взрослыми. Такое сотрудничество приходит на смену сотрудничеству «практическому».

Поскольку ребенок начинает нуждаться в уважении со стороны взрослых, возможно появление особой обидчивости, выражающейся в прекращении той или иной деятельности после замечаний со стороны взрослых. И, наоборот, похвала взрослого вызывает у ребенка особый восторг.

Выделим несколько комплексов проявления детей в адрес сверстников, что дает возможность классифицировать их как типы или варианты общения со сверстниками.

Первый комплекс. Ребенок стремится осуществить совместную деятельность со сверстниками. Он активно помогает сверстнику, дает ему советы, делится своими предложениями и т. д. Данный комплекс основывается на трех вариантах проявления:

1) ребенок учится чему-либо у сверстника. В данном случае ребенок выступает как младший в общении;

2) ребенок сам предлагает сверстнику сценарий деятельности, выступает организатором, но при этом принимает предложения сверстника. В данном случае дети являются равноправными партнерами;

3) ребенок выступает как старший, чему-либо учит партнера, направляет его деятельность. Первый комплекс показывает, насколько ребенок стремится к совместной деятельности и сотрудничеству с окружающими. Ребенок говорит о своих действиях: «Мы сделали», «Мы построили», «У нас получилось» и т. д.

Второй комплекс. Проявляется в том, что ребенок начинает отделять себя от своих сверстников. Ребенок всячески стремится демонстрировать свои истинные или мнимые таланты. Ребенок заявляет: «Я сделал», «У меня получилось» и т. д. К сверстникам ребенок относится критически, оценивая их способности и умения: «А ты умеешь?» Исследователи определяют поведения ребенка как феномен соревновательного подражания. Ребенок проделывает то же самое, что и другие, но заявляет, что результаты именно его деятельности — лучшие. В данном случае ребенок стремится перехватить инициативу у сверстников, не желает соглашаться на предложения других. Распоряжения, отданные сверстником, им игнорируются. Ребенок стремится командовать сам, не желает, чтобы его действия и слова обсуждались, зато сам активно критикует сверстников.

Если с ребенком сверстники не соглашаются, он прекращает с ними общаться, показывает обиду. Данный комплекс показывает потребность детей дошкольного возраста добиться уважения сверстников. В поведении детей проявляется стремление выделить собственную личность, осознание и высокая оценка своих умений, постоянное сравнивание себя со сверстником, критика окружающих. Исследователи связывают такое поведение с потребностью в признании и тщеславием ребенка.

Третий комплекс. Основывается на том, что сверстники постоянно находятся в поле внимания. Ребенок стремится поделиться со сверстниками своими впечатлениями, эмоциями и т. д. Он стремится предугадать действия партнера. Когда ребенок что-либо рассказывает, то наблюдает за партнером и его реакцией, хочет увидеть, какое впечатление производит его рассказ. В третьем комплексе отражается потребность в сопереживании со стороны сверстников.

Четвертый комплекс. Основывается на том, что поведение ребенка переходит от серьезного к фантазированию. Ребенок сочиняет небылицы, развивает шутки и фантазии сверстников. Одобрение собеседника вызывает у ребенка еще больший прилив воображения. Это отражает стремление ребенка к сотворчеству со сверстником.

Именно в дошкольном возрасте происходит обогащение чувственного опыта ребенка, он овладевает специфическими человеческими формами восприятия и мышления. Активно развивается речь, воображение, память.

Формируется психика уже в дошкольном возрасте, что является весьма сложным и многообразным процессом. Поэтому было бы неправильно думать, что только изменение общего строения деятельности, происходящее вследствие возникающих связей, мотивов нового высшего типа, исчерпывает содержание этого процесса. По словам А. Н. Леонтьева, это изменение характеризует его лишь с одной стороны и к тому же лишь в самой общей форме.

Тем не менее, выделение этого изменения в строении деятельности ребенка является решающим. Оно позволяет понять и установить взаимосвязи между теми конкретно-психологическими изменениями, которые наблюдаются в дошкольном возрасте, и подойти к этим изменениям, как к единому процессу психологического развития личности ребенка. А только так и следует подходить к вопросу, потому что реальным субъектом развития, конечно, является ребенок, а не его отдельные психические процессы сами по себе. Развитие возможности управлять своим поведением составляет один из существенных моментов, образующих психологическую готовность ребенка к обучению в школе. Обучение в школе требует от ребенка, чтобы он не только владел определенным кругом представлений и знаний и имел известный уровень развития физических сил, но и предъявляет определенные требования к развитию его психики, к особенностям его памяти, к восприятию и ко многим другим процессам. Например, уже с первых дней школьного обучения ребенок должен следить за своим внешним поведением: правильно строиться в линейку и сидеть за партой, подчиняться определенным правилам поведения во время перемен. Все это предполагает умение сдерживать свои импульсивные двигательные реакции, умение контролировать свое поведение, управлять своими движениями.

От каких же основных психологических моментов зависит развитие процесса произвольного управления своим поведением?

На этот вопрос был получен ответ благодаря исследованиям, которые были построены таким образом, что задача произвольного сохранения той же самой позы часового вытекала из игровой роли, которую принимал на себя ребенок. В этих условиях даже дети 4 лет, которым в условиях первой серии задача произвольного сохранения позы сколько-нибудь длительное время была недоступна, отлично с ней справлялись. Это объясняется тем, что в условиях игры отношение между целью — сохранить позу — и тем мотивом, которому она подчинена, является психологически более простым для ребенка. В самой задаче вести себя «как часовой» для ребенка уже содержится и задача стоять «хорошо» — не допускать резких, нарушающих принятую позу движений и т. д. Одно прямо вытекает здесь из другого. Напротив, задача сохранить позу и мотив выполнить как можно лучше взрослого находятся между собой психологически в гораздо более сложных отношениях. Это объяснение было тщательно проверено путем сопоставления экспериментальных данных, полученных в других специально проведенных для этого исследованиях. А. Н. Леонтьев указывает, что непосредственность отношения, связывающего между собой мотив, побуждающий ребенка выполнять задачу, и выделяющуюся в ней новую для него цель — следить за собой, играет решающую роль только на этапе первоначального формирования произвольности двигательного поведения. Для старших же детей, у которых механизм произвольности уже сформировался, указанное обстоятельство не имеет решающего значения. Управление своим поведением становится у них свободным не только в том отношении, что оно не занимает всего их внимания, но также и в том, что оно не ограничено рамками определенных предметно-смысловых связей.

Таким образом, вначале сознательное и произвольное управление своей позой опирается еще на механизм сознательного управления движениями, направленными на внешне предметные цели, который формируется гораздо раньше. На следующем этапе развитие управления собой передается уже на другие нервные механизмы. Управление осуществляется под контролем двигательных ощущений. Конечно, этим ощущениям и прежде принадлежала решающая роль в движениях, в их координации, но теперь они начинают обслуживать именно произвольный, сознательный контроль, хотя и в особой форме. Раньше происходит

фактическое складывание новых внутренних связей и отношений в деятельности еще на прежней неврологической основе, а затем перестраивается и сама основа, а это, в свою очередь, открывает новые возможности для дальнейшего развития управления своим поведением.
Оставаясь подконтрольным сознанию и полностью произвольно регулируемым, управление вместе с тем приобретает черты автоматически протекающего процесса: не требует непрерывного усилия и не занимает собой сознания. Именно таким и становится управление собой у старших дошкольников, и именно такое управление требуется от ребенка в школе.
Связи другого рода, как показывает исследование, это связи между происходящей перестройкой двигательного поведения и теми изменениями, которые происходят на протяжении дошкольного возраста во внутренних, психических процессах ребенка — изменениями в его памяти, восприятии и других процессах. (По материалам А. Н. Леонтьева)

VII. Развитие памяти у детей-дошкольников

Память — это особенность человека, которая определяется способностью накапливать, хранить и воспроизводить полученный опыт и информацию; способность воспроизводить события, произошедшие в прошлом с уточнением места, времени происходящего события, а также все эмоциональные переживания, сопутствующие данному событию, в сочетании с событиями окружающего мира, происходящими в тот момент времени.

Составляющими памяти являются следующие процессы:

1) создание — возникновение непосредственно самого факта наличия информации, которую необходимо запомнить;
2) сохранение — фиксирование информации в ячейках памяти;
3) воспроизведение — процесс «проигрывания» события (факта), которое было запомнено;
4) сокрытие — всегда относительно, так как некоторая информация хранится в нашей памяти в течении всей жизни, однако «воспроизвести» ее без посторонней помощи мы уже не можем. Только возникновение каких-либо событий, напоминающих требуемый факт, может вызвать его воспроизведение в памяти.

Также память обладает качественными и количественными характеристиками:

1) длительность — период времени, в течении которого память хранит информацию и извлекает ее в нужный момент без постороннего вмешательства;
2) точность — показатель достоверности и детализации вспоминаемой информации;

3) объем — количество запоминаемой информации за единицу времени;
4) быстрота — скорость, с которой информация переходит из состояния «создание» в состояние «сохранение».
5) готовность воспроизведения — скорость, с которой необходимая информация извлекается из памяти.

Все эти характеристики зависят от личности человека. Человек внимательный и кропотливый будет обладать высокой точностью однако быстрота запоминания будет низкой. А человек импульсивный будет запоминать быстро, но детализация информации будет намного ниже чем у первого.

Существует три мнения по вопросу памяти детей-дошкольников. Первое мнение, высказанное рядом психологов, говорит о существовании у детей двух видов памяти, где первая — это физиологическая составляющая, а вторая — психологическая (духовная). Согласно второму мнению, память ребенка достигает развития в раннем возрасте, после чего ее активность резко снижается. Третье мнение высказывают сторонники кульминационной идеи, которые утверждают, что развитие памяти достигает своего апогея в возрасте 10 лет, после чего постепенно снижается.

П. П. Блонский высказал свою теорию о строении памяти ребенка, разделив ее на четыре временные составляющие. Самая первая — моторная (двигательная) — представляет собой условные рефлексы, начиная с первых движений новорожденного. Следующей составляющей является эмоциональная память ребенка, которая основана на запоминании информации и ее усвоении в виде эмоций, вызываемых этой информацией. По ходу формирования сознания и развития образности мышления ребенка его память становится образной, где информация хранится в виде образов и понятий. И по мере развития у ребенка такого механизма, как общение, память становится словесной.

Исследование З. М. Истоминой, посвященное развитию памяти у детей-дошкольников, показало, что главная особенность процессов памяти, которые происходят в этот период, заключается именно в том, что процессы запоминания, припоминания из непроизвольных превращаются в намеренные, произвольные. А это значит, что перед ребенком выделяется сознательная цель запомнить, припомнить, и он научается активно достигать этой цели. А. Н. Леонтьев указывает, что сам по себе факт формирования произвольной памяти в дошкольном возрасте не является неожиданным, но самое важное заключается в том, как протекает этот процесс и чем он внутренне обусловлен.

Данные, полученные в исследованиях, позволяют уяснить связь изученных изменений с одним центральным фактом. Этот факт состоит в том, что ребенок в ходе своего развития активно проникает в окружающий его мир человеческих отношений, усваивая — первоначально в очень конкретной и действенной форме —

общественные функции людей, общественно выработанные нормы и правила поведения.

Эта первоначально обязательная конкретность и действенность формы, в какой происходит овладение ребенком высшими процессами человеческого поведения, непременно требуют, чтобы задачи, которые воспитатель ставит перед ребенком, были содержательны для него, чтобы связь между тем, что он должен сделать, тем, ради чего он действует, и условиями его действия была не формальной, не условной и не слишком сложной, но возможно более непосредственной и близкой.

Только при этом условии первоначально и могут завязываться новые высшие внутренние связи и соотношения в деятельности ребенка, отвечающие тем сложным задачам, которые ставят перед человеком общественно-исторические условия его жизни.

В возрасте 6 лет у ребенка формируется готовность к обучению. Л. С. Выготский выделил кризис 6-7 лет. Согласно исследованиям Л. С. Выготского, старшего дошкольника отличает манерничанье, капризность, вычурное, искусственное поведение. У ребенка проявляется упрямство, негативизм. Исследуя эти особенности характера, Л. С. Выготский объяснил их тем, что детская непосредственность утрачивается. В данный период также возникает осмысленность в собственных переживаниях. Ребенку вдруг становится ясно, что у него присутствуют собственные переживания. Ребенок понимает, что они принадлежат только ему, сами переживания приобретают для него смысл. Это связано с весьма специфическим новообразованием — обобщением переживания, т.е. меняется отношение ребенка к окружающему миру.

Отношения окружающих взрослых людей не дают возможности ребенку удовлетворить потребности, которые у него появились. Это приводит к возникновению фрустрации, депривации потребностей, которые порождаются появившимися к этому времени психическими новообразованиями.

В старшем дошкольном возрасте дети могут быть подразделены на две группы:

1) дети, которые по внутренним предпосылкам уже готовы к учебной деятельности;
2) дети, которые по внутренним предпосылкам еще не готовы к учебной деятельности, находятся на уровне игровой деятельности.

Для детей, принадлежащих к первой группе, кризис 6-7 лет становится следствием необходимости замены игровой деятельности на деятельность учебную. У детей, принадлежащих ко второй группе, негативных симптомов не будет, если не стремиться слишком быстро начать учебную деятельность. Если же дети, принадлежащие ко второй группе, начнут учиться с 6 лет, то произойдет насильственный слом деятельности. Это станет заметно по кризисным проявлениям. Соответственно, часть детей приходит в школу «из кризиса», а часть — «в кризис».

Тем не менее в процессе общения с друзьями-школьниками, в процессе подготовки в детском саду или дома к школе, а также под воздействием других причин у ребенка формируется субъективное желание пойти в школу.

После модификации игровой деятельности у ребенка проявляется заметный интерес к неигровым формам деятельности, например к конструированию, лепке, рисованию, а затем постепенно ребенок переходит к деятельности, которая положительно оценивается взрослыми людьми. Например, ребенок стремится что-то сделать по дому, выполняет поручения взрослых, желает чему-то научиться и т. д.

В данный период у ребенка формируется стремление пойти в школу, он уже имеет определенное представление об учебной деятельности. Но у старшего дошкольника сам переход в школу — событие, которое возможно только в будущем. Соответственно, дошкольник попадает в латентный период. Ребенок готов учиться, но сам процесс обучения еще не начат. Чем дальше отстоят друг от друга сроки готовности и возможности пойти в школу, тем сильнее в поведении ребенка проявляются негативные симптомы.

Критическая фаза характеризуется дискредитацией мотивов игровой деятельности. Они уже практически не интересуют ребенка, у него появляется желание пойти в школу.

Ребенок воспринимает себя как взрослого!

Его тяготит несоответствие занимаемой социальной позиции и своих устремлений. Для данный фазы характерен психологической дискомфорт и негативные симптомы в поведении.

Нередко складывается впечатление, что у ребенка тяжелый характер. Негативные симптомы имеют функцию — привлечь внимание к себе, к своим переживаниям, а также внутренние причины — у ребенка происходит переход на новый возрастной этап.

В игре у ребенка-дошкольника совершенствуются игровые действия, а также ряд психических функций, повышается уровень развития восприятия, памяти, воли и т. д. Например, для проведения некоторых игр детям нужно специально знакомиться со свойствами и особенностями отношений людей, явлений природы и т. п. Первоначально такое знакомство выступает только как конкретная цель действия, мотивированного игровой ситуацией.

Но постепенно у старших дошкольников значение результатов такой познавательной активности как бы перерастает обусловливающие это действие игровые мотивы, и ребенок начинает интересоваться сведениями об окружающем сам по себе, вне ситуации игры. Произошел сдвиг мотива на цель, и тем самым действие «ознакомления» приобрело иной характер. Таким образом, активная позиция деятельности заключается в формировании новых мотивов, их целенаправленной перестройке. Цель, даже самая близкая, выводит человека за пределы непосредственного настоящего, строит проект будущего, т.е. того, что еще только нужно сделать для отсроченного во времени удовлетворения потребности. Это положение относится и к действиям взрослого, и к действиям ребенка, с той только разницей, что ребенок в процессе психического развития постепенно переходит от простых и близких целей к целям более отдаленным и перспективным. В отличие от мотивов, которые далеко не всегда осознаются, выражаясь косвенно, существуя в виде стремления к цели, переживания, желания, цель деятельности выступают в виде обязательного осознанного компонента и несут особенно активную нагрузку. Каждая развернутая деятельность предполагает достижение ряда конкретных целей, которые выделяются из общей цели.

Если рассматривать представления ребенка о себе лишь как констатирующие наличный уровень и характер его индивидуальных возможностей, то естественно предположить, что они составлены преимущественно из суждений ребенка о своих умениях, знаниях и т. п. Однако представления ребенка о себе как об индивиде могут носить и предвосхищающий характер, так же как представления подростка о своих личностных характеристиках. Развитие человеческой психики совершается благодаря процессу интериоризации, «присвоению» ребенком социальных по своей природе отношений. Система отношений ребенка с взрослыми строится, в первую очередь, именно на их ожиданиях, предвосхищающих формирование у него отдельных психических качеств. Поэтому можно предполагать, что ранний образ «я» характеризуется, в основном, предвосхищающими представлениями о себе. По-видимому, они играют весьма важную роль в психическом развитии ребенка: в них проецируются ценностные ориентации детей, касающиеся качеств человеческой индивидуальности и личности, которые оказывают существенное формирующее влияние на личность ребенка.

VII. Изучение развития процессов запоминания

Проблема развития памяти давно занимает центральное место в психологии. Научная разработка этой проблемы непосредственно связана с изучением психологической природы процессов памяти, с характеристикой возрастных особенностей памяти у детей, с выяснением путей и способов ее воспитания.

Концепция механической и логической памяти упрочилась в результате сохранения для низших форм памяти механизма ассоциаций в старом классическом его понимании и надстройки над ним различных форм активности сознания (произвольность, осмысленность и пр.) — для высших форм памяти.

Ассоциативные, якобы не смысловые связи и смысловые, будто бы не ассоциативные связи, представляли собой конкретную форму выражения этой концепции в памяти.

Механическая и логическая память и заостренные их формы — физиологическая и духовная (А. Бергсона) — рассматривались как две формы памяти принципиально разной природы как по содержанию, так и по механизмам. Проблема этих двух форм памяти продолжает обсуждаться.

В признании механической и логической памяти надо различать, по крайней мере, две стороны.

Человек имеет дело с материалом различной степени сложности, который фиксируется в памяти в различных формах отражения: в единичных и общих представлениях, в понятиях различной степени обобщенности и пр. Разный материал предъявляет и разные по степени сложности требования к умственной деятельности человека, к процессам его памяти, к физиологическим ее основам. Материал таким образом выступает как одно из важных условий успешности памяти. Известно, что связанный по своему содержанию материал, вызывающий более или менее сложные процессы понимания, осмысливания, запоминается значительно эффективнее, чем совокупность бессвязных элементов. В последнем случае снижается значение процессов осмысливания при запоминании, возрастает роль повторений. С этой точки зрения можно говорить условно о механическом запоминании в противоположность осмысленному, логическому. Это чисто эмпирическое различие процессов памяти, определяющееся особенностями материала, имеет важное практическое значение, так как оно связано с разными условиями запоминания и различной его успешностью. Одно дело — запоминать серию бессмысленных слогов и другое дело запоминать систему мыслей, фактов, выраженных в связном тексте.

Концепция механической и логической памяти в разных формах получила широкое распространение не только в зарубежной, но и в отечественной психологии. Она определяла собой содержание и направление многих исследований и длительное время тормозила разработку как общей теории памяти, так и проблемы ее развития.

В исследованиях так называемой механической памяти внимание психологов было направлено на выявление способности мозга к запечатлению, к образованию следов, их сохранению в отрыве от осмысленной деятельности человека с определенным материалом. Такой же характер носили и исследования логической памяти. Они были направлены на обнаружение способностей сознания к схватыванию и удержанию смысла, мыслей в отрыве от мозговой деятельности.

Деление связей на ассоциативные и смысловые сохраняло, прежде всего, серьезные ошибки в трактовке физиологических основ памяти. Условные рефлексы считались физиологической основой ассоциативных процессов, характерных якобы только для низшей памяти. В качестве основы смысловых связей, характерных якобы только для высшей формы памяти, допускались какие-то, еще неизученные закономерности нервных процессов, принципиально отличные от закономерностей образования условных рефлексов.

Ассоциативные и смысловые связи противопоставлялись со стороны своего психологического содержания. Ассоциации трактовались как чисто внешние, механические связи. Считалось, что их образование не зависит ни от содержания связываемых объектов, ни от значения, смысла для субъекта. Низшая форма памяти лишалась осмысленности. Осмысленный характер память приобретала якобы только на высших ступенях своего развития благодаря участию в ней развернутых процессов понимания, мышления. Это привело к противопоставлению низших и высших форм памяти со стороны развития ее осмысленности.

Деление связей на ассоциативные и смысловые является антигенетическим. Оно исключает преемственность в развитии физиологических механизмов памяти и характеристику основных особенностей памяти на разных ступенях ее развития. Низшая форма памяти, опирающаяся на ассоциативные связи, лишается осмысленности. Ассоциативные связи не связываются с пониманием, с начальными формами мышления, они противопоставляются смысловым связям. Последние, как и понимание, отрываются от своих генетических истоков, поэтому исключается возможность изучения их постепенного усложнения и развития на разных этапах фило — и онтогенеза. Активность высших форм памяти также отрывается от предшествующих ступеней развития. По этим же основаниям исключается генетическая преемственность и в характеристике произвольной и непроизвольной памяти со стороны физиологических основ и психологических особенностей этих видов памяти. Сведение низшей памяти к механическим ассоциациям создало у психологов видимость того, что они знают эту память. Главное внимание исследователей было направлено на изучение высших форм памяти. Однако это изучение не могло быть до конца плодотворным по той простой причине, что высшее, более сложное нельзя как следует понять, не разобравшись в низшем, более простом. Смысловая, логическая память надстраивалась над механической. Положение Павлова об универсальном характере условно-рефлекторных связей, лежащих в основе ассоциаций в качестве их физиологических механизмов, широкая биологическая трактовка сущности этих связей и условий их образования полностью исключают имевшее место противопоставление ассоциативных связей смысловым. Все связи, которыми оперирует память на всех этапах своего развития, являются ассоциативными, условно-рефлекторными по своей природе и условиям образования и вместе с тем смысловыми по своему содержанию и жизненному значению.

VIII. Эмоциональность речи и развитие структуры ее понимания и порождения

Выразительность и эмоциональность речи является важной ее составляющей. Часто речь ребенка содержит множество восклицаний, резких прерываний, многократные построения, ускорен-ность темпа речи — словом, все обороты речи, выражающие эмоциональность. Подобные обороты не являются признаком четко продуманного стилистического приема или средства, это показатели эмоциональности речи ребенка, который посредством перечисленных средств пытается передать наполненную эмоциями картину слушателю. Его не сдерживают рамки поведения, указывающие на необходимость сдерживать свои эмоции в обществе. В его речи нет четко установленных правил построения предложения, как нет и мотивации для сдерживания своей эмоциональности. И взамен упорядоченности и семантическому построению предложения приходит эмоциональное построение: эмоциональная составляющая слова выдвигает его на первый план, отодвигая другое, таким образом выстраивается структура, не отвечающая никаким правилам, но тем не менее являющаяся информационно и эмоционально наполненной. В дальнейшем, по мере взросления ребенка, он присматривается к людям, окружающим его, и начинает копировать их манеру речи, подмечает отличия, в том числе сокращает свою излишнюю эмоциональность, делая свою речь более регламентируемой, в виду чего яркость и выразительность речи снижается, становится более сглаженной. В результате встает обратная ситуация: после того как излишняя выразительность речи спадает — если не обращать на это внимания родителей — речь ребенка может стать крайне маловыразительной.

Одно из средств выразительности, часто встречающееся в общении, — это интонация. Слушая интонации родителей — эмоциональный ребенок начинает копировать их, и в его речи появляются просительная, гневная и многие другие интонации. Часто излишняя эмоциональность речи проявляется в ее ускоренности. Желая рассказать как можно больше, некоторые дети начинают говорить очень быстро, что приводит к эффекту «смазывания» речи.

Область исследования эмоциональности детской речи заинтересовала многих лингвистов в последнее десятилетие XX в. Эта лингвистическая категория имеет большие перспективы в толковании многих необъясненных фактов и явлений в речи детей. Этот интерес вызван рядом причин. Во-первых, эмоциональные средства являются способом выражения вербального выражения чувств у детей; во-вторых, отсутствуют универсальные схемы и критерии, которые позволили бы изучить эмоциональное поведение детей.

В психологии существуют и активно развиваются два направления в изучении эмоций и их проявлений у детей:

1) эмоциональное детское мышление;
2) соотношение эмоций и мышления как основа формирования детского языка и интеллекта. В процессе развития личности жизненный опыт находит свое интеллектуальное и языковое выражение как сознательно, так и на бессознательном уровне.

Имеется много данных, что ребенок довольно долго не дифференцирует интонационные и фонемные составляющие речи. Замена словарного состава обращенных к нему требований взрослого при сохранении их ритмико-мелодической интонационной структуры до определенного возраста не вызывает изменений в выработанных на эти требований реакциях ребенка, а изменение интонации при неизмененном содержании высказываний, наоборот, приводит к полному отсутствию выработанных на слово реакций.

Первое направление дифференциации — это постепенное высвобождение слов как самостоятельных сигналов определенных значений из включающего обстановочного контекста. Как известно, примерно на 8-м месяце жизни дети дают ряд адекватных реакций на обращенные к ним слова взрослых. В ответ на вопрос: «Где мама?» и «Где папа?» ребенок оборачивается в сторону лица, о котором спрашивают; в ответ на просьбы «Покажи носик» или «Покажи ушки» ребенок делает требуемое движение. В ответ на обращение «Сделай ладушки» он начинает оживленно хлопать в ладоши. Как показывают многие наблюдения, на этом этапе развития слово является лишь компонентом целостного комплексного раздражителя, составленного наряду со словом многими элементами ситуации, в которой оно употребляется. Иначе говоря, то, что можно назвать значением, это еще не значение слова как такового, а значение комплексного сигнала, состоящего из нескольких раздражителей, включая слово.

Общение ребенка на ранних этапах его развития сводится к общению с родителями и близкими причем на вполне конкретные темы — удовлетворение возникающих потребностей. В связи с этим, речь ребенка — на начальных стадиях — является ситуативной, так как ребенок говорит о конкретном месте, конкретном предмете и конкретном его применении. И по мере взросления у ребенка возникают менее конкретные потребности, все более осложняются мыслительные процессы, и в общении он уже может приводить примеры, добавлять подробные описания, т.е. включать в свою речь контекст. И по мере взросления речь ребенка не перестанет быть ситуативной, и, если он рассказывает о конкретном событии, к оборотам речи, необходимым для непосредственного описания времени, места и действа, добавятся контекстные обороты — примеры, аналогии, описания и т. д.

Переход к контекстной речи, как основной, у ребенка происходит постепенно. Вначале он не видит никакой необходимости пояснять что-либо. Он сказал, и если его не поняли, будет повторять то же самое, что и говорил. По мере взросления, он начинает понимать необходимость того, чтобы его поняли. Поэтому он добавляет уточняющие обороты, вначале на примитивном уровне — вместо «Она поиграет» уже «Пусть она — эта девочка — поиграет». Ребенок интуитивно строит свою речь, исходя из ложного представления, что все знают то же, что и он. Соответственно, все должны понимать что «она» — это «девочка», а «он» — это «шарик». Но постепенно он начинает анализировать поведение слушателей и осознает необходимость того, чтобы его поняли, и вносит в свою речь уточнения.

Речь как основной механизм взаимодействия с обществом выполняет следующие функции:

1) коммуникативная — это функция речи, отражающая ее роль в общении. Посредством речи человек общается, начиная с детства, когда его речь ситуативна и выражает необходимый минимум информации, зачастую непонятной окружающим, заканчивая взрослой полноценной речью, являющейся гибким механизмом общения с отдельными индивидами и с обществом в целом;

2) планирующая — с точки зрения этой функции, речь выступает в качестве средства планирования и регулирования поведения ребенка;

3) знаковая — речь дает возможность заменить отсутствующий предмет неким знаковым смыслом, раскрывающим функциональное назначение указанного предмета;

4) экспрессивная — эмоциональность речи, самая ранняя и самая главная ее составляющая. Маленький ребенок, еще не умеющий скрывать свои эмоции и не видящий в этом необходимости, наполняет свою примитивную речь эмоциональным контекстом, позволяющим взрослым интуитивно понять о чем идет речь. Экспрессивность речи делает ее выразительной, интуитивно более понятной и интересной.

Одна из главных проблем, возникающих в общении с ребенком в процессе его развития, — детская агрессия.

В психологии проблема агрессии изучалась многими специалистами. Разработка ее велась и ведется в рамках разных направлений. Поэтому существует масса различных концепций, разработчики которых предлагают и свои методы коррекции этого психологического явления.

Агрессивность можно определить как стремление одного существа причинить вред другому. В животном мире она является средством утверждения своего господства в среде себе подобных, признанием силы, мощи и власти той или иной особи. В этом ее биологический смысл. У людей же агрессия всегда оценивалась как негативное явление. Человек не должен жить, заставляя страдать других и тем более испытывая от этого удовольствие.

Детская агрессивность — явление специфическое и отнюдь не неизбежное. Так или иначе психологи выделяют 3 формы, в которых может проявиться агрессивное поведение:

1) агрессивные действия;
2) словесная агрессия;
3) агрессивные мысли, намерения, которые развиваются в двух направлениях — на себя и на других.

У дошкольников чаще других встречаются первые две формы (агрессивные действия и словесная агрессия). Родители и учителя стараются наказывать и перевоспитывать детей, направляющих свою агрессию на других, т.е. драчунов, забияк, невеж, сквернословов. Но в практике встречаются и другие формы проявления агрессии.

Реагировать на проявление агрессии у маленьких детей, несомненно, нужно, но можно и предотвратить формирование у них такой черты характера. Для этого существует очень много разных методик и разработок. Но прежде всего нужно попытаться найти причину самостоятельно.

У детей ограничен выбор источников моделей поведения, это, в первую очередь, семья, которая может выработать у ребенка агрессивную манеру поведения, развить ее и закрепить. Часто это вызвано психологическим отторжением ребенка родителями, нежелание участвовать в его развитии и воспитании, что ребенок на подсознательном уровне воспринимает и, в свою очередь, пытается преодолеть, используя любые доступные средства, в том числе агрессию. Также семья прививает нормы и правила поведения как в формальном виде, посредством общения, так и в неформальном — собственным примером. И агрессивное поведение одного из родителей может восприняться ребенком как норма.

Другим источником поведенческой модели могут стать сверстники. Здесь наблюдаются две ситуации возникновения агрессивного поведения.

Первая ситуация — это когда ребенком осознаются преимущества агрессивного поведения, вседозволенность и безнаказанность которого может привести к закреплению этого чувства в подсознании.

Вторая ситуация — это месть, когда посредством агрессии обиженный пытается наказать обидчика. При некоторых способствующих факторах вторая модель может перерасти в первую, т.е. обиженный может стать обидчиком, поняв все привилегии этого положения и ощутив возможность закрепления статуса «сильного» среди окружающих его сверстников.

Третьим источником примера агрессивного поведения являются так называемые символические образы — телевидение, книги, игрушки, влияние которых уже не оспаривается.

Главная проблема, возникающая в подобных ситуациях, — это неспособность родителей предотвратить агрессию со стороны ребенка и определить ее причину.

Часто в воспитательных целях к ребенку применяют физические наказания. Однако ребенок по примеру родителей начинает применять силу по направлению к более слабым детям для достижения собственных целей. И если не пресечь это в самом начале, он может и в дальнейшем применять силу для достижения своих целей.

Однако противоположностью физического наказания является излишняя избалованность ребенка, которому дозволено все, и наряду с таким чувствами как нетерпимость, эгоизм и вседозволенность появляется и агрессия, в этом случае направленная как на более слабого ребенка, так и на родителей.

Но всякого ли ребенка можно назвать агрессивным?

Существует ряд показателей агрессии ребенка:

1) в большинстве ситуаций не осуществляется контроль эмоций;
2) слабо проявляются все эмоции, кроме гнева;
3) не несется ответственность за свои поступки, склонность обвинять в своих ошибках окружающих;
4) гипертрофированное чувство собственного достоинства;
5) резкая реакция на негативную оценку своих действий;
6) угрозы физические, словесные окружающим;
7) жестокость по отношению к животным;
8) намеренное проявление непослушания;
9) излишняя завистливость и ревность.

Детские слезы — явление вполне обычное. Это своеобразный язык, усвоенный ребенком еще в младенчестве и успешно применяемый и в более позднем возрасте. Но даже столь привычное явление, как слезы становится проблемой для родителей и окружающих. Плач лишь дополняет арсенал человеческих средств общения, делая его более разнообразным, гибким и универсальным. Другое дело, что не всем доступны его приемы, поскольку они сложны для понимания и правильной интерпретации. Тогда-то первые результаты неудачного взаимодействия с взрослыми дополняются и искажаются оттенками обиды, разочарования, желания усилить вызванную реакцию.

Реакции ребенка в кризисном возрасте иногда выявляются с очень большой силой и остротой, особенно при неправильном воспитании. Обычно ребенок, которому в чем-нибудь отказано или которого не поняли, обнаруживает резкое нарастание аффекта, заканчивающегося часто тем, что ребенок ложится на пол, начинает неистово кричать, отказывается ходить, бьет ногами об пол, но ни потери сознания, ни энуреза, ни других признаков, характеризующих эпилептические припадки, не бывает.

Любой человек плачет когда ему плохо, когда его что-то сильно расстроило, слезы — это внешнее проявление расстройства. Зачастую взрослому человеку сложно сдержать слезы, а у ребенка нет даже мотивации для их сдерживания, не говоря уж о возможности. Дети не знают, что свои страдания и переживания нужно скрывать, даже наоборот они очень часто излишне громко плачут, чтобы привлечь внимание родителей к своему горю и вызвать у них жалость и сострадание. И качественно не правильно требовать от ребенка прекратить плач, потому что для этого есть причины, и ребенок ждет от вас помощи, жалости и любви, а не криков и уж тем более наказаний. Необходимо объяснить ребенку, что все можно исправить, переключить его внимание на другой объект, и самое главное, в первую очередь ласково поговорить.

Для развития способностей к познанию новых явлений, предметов, понятий у ребенка, необходимо ознакомить его с реальным носителем значения этого явления или понятия или их изображением. Родители (учителя) могут комментировать действия, которые необходимо выполнить ребенку, тем самым задавать верный путь исследования данного явления. Со временем нужно передать функцию речевого сопровождения процесса ребенку, переключить его на самостоятельное выполнение работы. После этого в качестве задания попросить ребенка прокомментировать проведенную работу уже в отсутствии явления, основываясь на воспоминания, образы, сформированные в сознании. Далее можно попросить провести аналогии, сделать предположения о возможности перенесения полученных умений на работу с другим явлением. Впоследствии, при анализе проведенной работы, ребенок будет вспоминать произведенные действия и сделанные выводы в виде комплекса образов, ассоциированных с данным явлением.

Психологическая деформация — нарушение целостности системы ценностей, наличие ненормативных установок, непонимание друг друга членами семьи, может быть вызвано пристрастием одного из членов семьи к наркотикам или алкоголю, вступление в религиозную секту, объявление бойкота родителями друг другу и т. д.

Влияние матери на развитие ребенка является основополагающим.

Выделяют следующие типы матерей:

1) мать «Снежная королева» — мать холодная, неприступная, повелевающая, непреклонная;
2) «унтер Пришибеев» — мать, постоянно наказывающая, грубая, часто прибегающая к физическим наказаниям;
3) мать — «наседка» — опекающая;
4) мать «Царевна Несмеяна» — мать принципиальная, любящая читать нотации, вечно чем-то обеспокоенная, иронизирующая;

5) «суматошная мать» — мать взбалмошная, делающая из мухи слона, невротизирующая;
6) мать — «вечный ребенок» — постоянно драматизирует ситуацию, несамостоятельная, обидчивая. Отдает своего ребенка на поруки более сильному, любому, кто готов взять на себя ответственность.

В психологии выделяют пять стилей воспитания:

1) авторитарный — полное подавление воли ребенка, полный контроль его действий со стороны родителей, ограничение самостоятельности, применение физических наказаний. В такой семье ребенок может вырасти морально подавленным, безынициативным, во всем полагающимся на других. В случае, когда ребенок пытается противостоять такому стилю воспитание — он рано уходит из дома, перестает поддерживать отношения с семьей, полностью от них независим;
2) демократический — родителями поддерживается любая инициатива ребенка (в разумных пределах), ему оказывается всевозможная посильная помощь. Ребенок выступает в качестве полноценного члена семьи, однако, в свою очередь, от него требуется ответственность за свои поступки, дисциплинированность, послушность;
3) попустительский-снисходительное отношение к любым действиям и инициативам ребенка. Предоставление его самому себе. Отсутствие ограничений. Нежелание принимать участие в воспитании ребенка, поддерживать и опекать его, разделять с ним его переживания. Ребенок воспринимает такое отношение как равнодушие, отдаляется от родителей, теряет уважение в ним. Возможно подпадание под влияние более сильного человека;
4) опекающий — принятие на себя родителями всех решений за ребенка, чрезмерное оберегание и опека. У родителей жизнь ребенка вызывает излишнюю тревожность, они стараются всячески оградить ребенка, решая за него все возникающие трудности. В связи с чем он вырастает беспомощным, неспособным самостоятельно принимать решение, избалованным, неспособным полноценно общаться со сверстниками. Сильно развито чувство эгоцентризма;
5) хаотический — непредсказуемость и разрозненность воспитательных мер. Отсутствие единого направления, разногласия в требованиях к ребенку. В такой семье у ребенка повышается тревожность, неуверенность в себе, импульсивность, занижается самооценка, вяло осуществляется самоконтроль и слабо развито чувство ответственности.

IX. Развитие психики в онтогенезе.

Движущие силы развития психики ребенка Толчком к развитию психики человека является наличие культурных, общественных, деятельностных факторов, окружающих человека в повседневной жизни и являющихся неотъемлемой частью окружающего мира. Развитие и формирование психики человека выводит его из разряда животных в разряд разумно мыслящих. И передача историко-культурных знаний и опыта человечества, составляющих процесс формирования психики, коренным образом меняют структуру деятельности человека, его личностную составляющую.

Процесс развития психики подразумевает прохождение человеческим индивидом следующих этапов:

1) овладение способами изготовления и применение предметов, увеличивающих функциональность человеческого организма (орудия труда);
2) обретение способности использовать культурные достижения человечества;
3) изучение и применение знаково-речевых средств для структуризации сознания и рационального управления психическими и эмоциональными процессами;
4) овладение способами личностной организации, регуляции собственного поведения;
5) овладение способами межличностного и социального взаимодействия.

Уровень познавательного развития человека часто подразумевает под собой умение человеком использовать приобретенный опыт для организации межличностного и социального взаимодействия, применент познанную информацию в виде знаково-символических средств.

Личностно-совершенным человеком можно назвать человека, умеющего ставить перед собой цели с последующим их достижением, с использованием приобретенного широкого спектра знаний и развитого межличностного взаимодействия.

Овладение широким спектром умений и знаний у человека происходит в процессе обучения и воспитания.

В ходе развития ребенка под влиянием конкретных обстоятельств его жизни меняется место, которое он занимает в системе человеческих отношений. Как утверждает **А. Н. Леонтьев**, дошкольное детство является порой жизни, когда перед ребенком открывается окружающий мир человеческой действительности. Именно теперь он проникает в окружающий мир, осваивает его в действенной форме. В данный период ребенок испытывает свою зависимость от окружающих людей, жизненные потребности удовлетворяются взрослыми, а он должен считаться с требованиями, которые окружающие люди предъявляют к его поведению. В этот период жизни ребенка мир окружающих его людей как бы распадается для него на два круга.

Первый круг составляют те близкие люди, отношение с которыми определяют его отношения со всем остальным миром.

Второй круг составляют все другие люди, отношение к которым опосредствованы для ребенка его отношениями, устанавливающимися в первом, малом круге.
Так происходит не только в условиях воспитания ребенка в семье. Даже если дошкольника, который воспитывался дома, отдают в детский сад, и образ жизни ребенка меняется, психологически деятельность ребенка остается в своих основных чертах прежней. Отношения детей этого возраста к воспитательнице своеобразны, для ребенка необходимо ее внимание лично к нему, он часто прибегает к ее посредству в своих отношениях со сверстниками. Поэтому можно сказать, что отношения к воспитательнице входят в малый, интимный круг его общения.
Ребенок-дошкольник может хорошо уметь читать, его знания могут быть относительно велики. Но это не стирает и не может стереть в нем детского, истинно дошкольного. Если основные отношения ребенка к жизни перестроятся, например, на его руках окажется маленькая сестренка, а мать обратится к нему как к своему помощнику, участнику взрослой жизни, то общий психический облик ребенка изменится. В нормальных случаях переход от дошкольного детства к следующей стадии развития психической жизни происходит в связи с поступлением ребенка в школу. Значение этого события очень велико, вся система жизненных отношений ребенка перестраивается. Теперь у него появляются обязанности не только перед родителями и воспитателями, но и обязанности и перед обществом. Это обязанности, от выполнения которых будут зависеть его место в жизни, его общественная функция и роль, а отсюда и содержание всей его дальнейшей жизни. Обычно ребенок знает об этом еще задолго до начала учения. Однако действительный и психологически действенный смысл эти требования приобретают для него лишь тогда, когда он начинает учиться, причем первоначально они выступают еще в очень конкретной форме — в форме требований учителя. Когда ребенок садится за приготовление уроков, он чувствует себя занятым по-настоящему важным делом. Меняется реальное место, которое ребенок занимает в повседневной жизни, окружающих его взрослых, в жизни своей семьи.
А. Н. Леонтьев указывал, что изменение места, занимаемого ребенком в системе общественных отношений, есть то первое, что надо отметить, пытаясь подойти к решению вопроса о движущих силах развития его психики. Однако само по себе это место не определяет развития; оно только характеризует наличную, уже достигнутую ступень. То, что непосредственно определяет развитие психики ребенка, — это сама его жизнь, развитие реальных процессов этой жизни, иначе говоря, развитие деятельности ребенка как внешней, так и внутренней. Леонтьев считал, что в изучении развития психики ребенка следует исходить из анализа развития его деятельности, так как она складывается в данных конкретных условиях его жизни. Только при таком подходе может быть выяснена роль как

внешних условий жизни ребенка, так и задатков, которыми он обладает. Жизнь или деятельность в целом не складываются механически из отдельных видов деятельности. Одни виды деятельности являются на данном этапе ведущими и имеют большее значение для дальнейшего развития личности, другие — меньшее. Одни играют главную роль в развитии, другие — подчиненную. Поэтому нужно говорить о зависимости развития психики не от деятельности вообще, а от ведущей деятельности. Признаком перехода от одной стадии к другой является именно изменение ведущего типа деятельности, ведущего отношения ребенка к деятельности. Признаком ведущей деятельности не являются чисто количественные показатели. Ведущая деятельность — это не просто деятельность, наиболее часто встречающаяся на данном этапе развития. **Ведущая действительность — это вид деятельности, который характеризуется следующим признаком: это деятельность, в форме которой возникают и внутри которой дифференцируются другие, новые виды деятельности. Например, обучение, в более тесном значении этого слова, впервые появляющееся уже в дошкольном детстве, прежде возникает в игре, т.е. именно в ведущей на данной стадии развития деятельности. Ребенок начинает учиться, играя.**

Ведущая деятельность — это такая деятельность, в которой формируются или перестраиваются частные психические процессы.

Например, в игре впервые формируются процессы активного воображения ребенка, в учении — процессы отвлеченного мышления. Из этого не следует, что формирование или перестройка всех психических процессов происходят только внутри ведущей деятельности. Некоторые психические процессы формируются и перестраиваются не непосредственно в самой ведущей деятельности, а и в других видах деятельности, генетически с ней связанных. Например, процессы абстрагирования и обобщения цвета формируются в дошкольном возрасте не в самой игре, а в рисовании, цветной аппликации и т. п., т.е. в тех видах деятельности, которые лишь в своем истоке связаны с игровой деятельностью.

Ведущая деятельность — это деятельность, от которой ближайшим образом зависят наблюдаемые в данный период развития основные психологические изменения личности ребенка. Например, ребенок-дошкольник именно в игре отстаивает общественные функции и соответствующие нормы поведения людей, а это является важным моментом формирования его личности.

Таким образом, как указывает **А. Н. Леонтьев**, ведущая деятельность — это такая деятельность, развитие которой обусловливает главнейшие изменения в психических процессах и психологических особенностях личности ребенка на данной стадии его развития.

В зависимости от того, в какую деятельность включено действие, оно получает ту или иную психологическую характеристику. Это основной закон процесса развития действий.

Осознание — осмысливание ребенком явлений действительности — происходит в связи с его деятельностью. На каждой стадии развития ребенка оно ограничено кругом его деятельности, зависящим в свою очередь от ведущего отношения, от ведущей деятельности, которая характеризует данную стадию в целом. Как указывает А. Н. Леонтьев, речь здесь идет именно об осознании, т.е. о том, какой личностный смысл имеет для ребенка данное явление, а не о знании им этого явления.

По словам А. Н. Леонтьева, следующая группа изменений, наблюдаемых в процессе развития ребенка, — изменения в области операций. Операции — это способ выполнения действия. Операция представляет собой необходимое содержание всякого действия, но она не тождественна с действием. Одно и то же действие может осуществляться разными операциями, и, наоборот, одними и теми же операциями осуществляются иногда разные действия. Это объясняется тем, что в то время как действие определяется целью, операция зависит от условий, в которых эта цель дана. Операция определяется задачей, т.е. целью, данной в условиях, требующих определенного способа действия. Для развития сознательных операций характерно, что, как показывают экспериментальные исследования, всякая сознательная операция впервые формируется в качестве действия и иначе возникнуть не может.

Все эти функции составляют основу соответствующих субъективных явлений сознания: ощущений, эмоциональных переживаний, чувственных явлений, памяти, образующих как бы субъективную «материю сознания», чувственное богатство, многокрасочность и рельефность картины мира в сознании человека. Как показывают исследования, всякая функция развивается и перестраивается внутри процесса, который она осуществляет. Развитие ощущений, например, происходит в связи с развитием процессов целенаправленного восприятия.

При дальнейшем развитии личности ребенок он проходит несколько стадий, таких как резкое повышение самостоятельности и ухудшение поведения. Самостоятельность ребенка логична, так как он осознал себя, осознал свою независимость и пытается показать ее окружающим и любую попытку вмешаться воспринимает как посягательство на свою независимость. Непослушание в раннем возрасте вызвано обилием информации, которую ребенок стал понимать. Он готов к большим познаниям, чем ему разрешают родители, следствием чего становится ухудшение поведения, непослушание, так как для ребенка в большинстве случаев это единственно возможное проявление протеста.

X. Причины, пагубно влияющие на развитие ребенка

В. М. Бехтерев указывает, что вопрос о том, какое влияние на личность оказывает окружающая ее природа, очень широк. В частности, не подлежит сомнению факт, что умеренный климат для развития личности является более благоприятным, чем нелегкий суровый климат севера и жаркий климат тропиков. Наряду с климатом важное значение имеют географические условия. Великие пустыни, малопригодные для человеческого жилья, и все те местности, где человеку приходится затрачивать много сил и энергии на борьбу с окружающей природой, не благоприятствуют развитию личности. Равным образом неблагоприятные почвенные и метеорологические условия, характеризующиеся эндемическим развитием тех или других общих болезней, не могут не отражаться пагубно на развитии личности, подтачивая в корне физическое здоровье организма.

Уже в антропологических особенностях расы кроются те основы, которые определяют развитие личности. Внимания заслуживает другой фактор, влияющий на развитие личности, — фактор биологический, связанный с условиями зачатия и развития человеческого организма. Здесь, как указывает В. М. Бехтерев, нельзя не отметить важного значения в развитии личности тех элементов, которые известны под названием вырождения и которые коренятся в условиях неблагоприятного зачатия и развития плода. От каких бы причин эти условия ни зависели — от неблагоприятной психо-или невропатической наследственности, физических недостатков, болезней матери во время зачатия и беременности, алкоголизма родителей, тяжелых физических и психических моментов в течение беременности — последствием их являются дегенеративные особенности потомства, которые, в конце концов, сводятся к разложению личности и к ее упадку. Вполне понятно, что развитие личности как высшего проявления психики находится в зависимости от физических условий. Нельзя не принимать во внимание тот факт, что только гармоническое развитие тела и духа обеспечивает правильное совершенствование личности. Если физическое развитие от природы слабо, если человек с раннего возраста подвергается физическим невзгодам и целому ряду общих инфекционных болезней, особенно с затяжным течением, если вместе с тем у него развиваются общие болезненные поражения, коренящиеся в недостаточном и неправильном питании организма, то полный расцвет личности будет в той или иной мере задержан. Если затем в зрелом возрасте продолжаются физические невзгоды, то упадок личности обнаруживается уже вполне ясно.

На развитие личности оказывают существенное влияние неблагоприятные экономические условия, приводящие последовательно к физическому ослаблению организма. На почве этого развивается ряд истощающих физических болезней, подрывающих в корне питание организма и нарушающих правильное развитие мозга, а следовательно, и личности. Да и помимо этих болезней недостаточное питание населения, подрывающее физические его силы и приводящее к развитию физического истощения и малокровия, — это условие, содействующее ослаблению питания мозга, быстрой истощае-мости умственных сил и, вместе с тем, препятствующее полному расцвету личности.

На психологическое и физическое здоровье детей влияет семья. Она играет важную, чуть ли не главенствующую роль. Она является социально-культурной средой воспитания и развития личности. Воспитание в семье должно основываться на некоторых принципах, прежде всего, на принципе гуманного отношения между ее членами. Ведь семья — это важнейший институт социализации общества, так как первый опыт общения с окружающим миром ребенок получает в семье. И если он не был благополучным, то это повлияет на дальнейшее психическое развитие. И только гораздо позднее в жизни ребенка появляется школа, улица, в более взрослом возрасте — какие-либо группировки.

Существует ряд причин неправильного воспитания детей в семье. Э. Г. Эйдемиллер выделяет 2 наиболее важные:

1) психические отклонения у родителей чаще приводят к неправильном воспитанию и развитию ребенка в семье. При таком отклонении наблюдаются пониженные требования к ребенку либо доминирующая роль родителей, где главным фактором является жестокое обращение с ребенком. Иногда наблюдается противоречивый стиль воспитания. В обществе, в присутствии людей родители проявляют чрезмерную заботу о ребенке, а в их отсутствии — полное игнорирование.

Иногда с детства родители внушают ребенку, что он должен оправдать их надежды и ожидания, тем самым накладывая на него повышенную моральную ответственность. В итоге дети становятся нервными и переживают психологические срывы.

Концепция рационального воспитания, основанного на строгой дисциплине, проникла в семейную жизнь в XVII в. Внимание родителей начали привлекать все стороны детской жизни. Но функцию организованной подготовки детей к взрослой жизни приняла на себя не семья, а специальное общественное учреждение — школа, призванная воспитывать квалифицированных работников и примерных граждан.

Всего выделяют 7 типов неправильного воспитания:

1) безнадзорность. Со стороны родителей: полное или частичное отсутствие внимания к ребенку, отсутствие ответственности за его поступки, отсутствие или наличие неправильного воспитания. Со стороны ребенка: отсутствие авторитета родителей, пренебрежение моральными и этическими нормами. В младшем дошкольном и начальном школьном возрастах наблюдаются попытки привлечь внимание

родителей в виде истерик, хулиганского поведения, откровенного неповиновения. В более позднем возрасте — уход из дома, опасность впадения в наркотическую или алкогольную зависимость;

2) гиперопека. Со стороны родителей: постоянный неусыпный контроль и чрезмерная забота о ребенке. Несколько вариантов развития:

а) потворство любому его желанию. Ребенок растет избалованным, эгоистичным, конфликтным, жадным, не способным к общению с сверстниками;

б) чрезмерная забота о здоровье ребенка. У ребенка развиваются комплексы неполноценности, он сложно общается со сверстниками, замкнут, молчалив;

в) усиленная опека, постоянные указы, полный контроль, отсутствие самостоятельности и самовыражения. Ребенок становится неинициативным, подавленным, малоподвижным, а в случае сильной личности ребенка — постоянные скандалы с родителями по поводу свободы, уход из дома;

3) потворствующая опека. Со стороны родителей: потворство желаниям ребенка, безнаказанность любого проступка. Переложение ответственности на других, отрицание любой возможности виновности ребенка. Со стороны ребенка: неприспособленность, вседозволенность, безответственность;

4) воспитание Золушки. Со стороны родителей: безразличие, отсутствие внимания, постоянные упреки и замечания. Со стороны ребенка: ревность к более любимым детям, озлобленность, обидчивость;

5) жесткое воспитание. Со стороны родителей: жестокое обращение, полное подчинение ребенка воле родителей, нередко воспитание с применением физического наказания. Со стороны ребенка: угрюмость, вялость, боязливость, затаенный гнев;

6) повышенная моральная ответственность. Со стороны родителей: требования и запросы, не соответствующие возрасту ребенка. Желание видеть в ребенке ответственность, самостоятельность, независимость, переложение на него ответственности за дела других членов семьи. Со стороны ребенка: агрессивное отношение к опекаемому члену семьи, затаённая злость, агрессия в случае неустойчивого психического состояния ребенка. Возможны ситуации, когда ребенок берет на себя роль «главы семьи». Часто такой стиль воспитания характерен в неполной семье, где мать перекладывает ответственность на сына;

7) противоречащее воспитание. Со стороны родителей: применение несовместимых стилей воспитания. Постоянный конфликт на этой почве. Со стороны ребенка: раздвоенность, избалованность, часто проявляется неспособность развить слабые стороны характера, в связи с чем повышенная незащищенность и восприимчивость.

Отношение к людям, страдающими психическими расстройствами, зависело от конкретной исторической эпохи. В период Средневековья их считали от дьявола. На

Руси называли юродивыми, хотя и не отрицали неких способностей к провидению и предсказаниям, и поэтому таких людей боялись. Это продолжалось вплоть до XVII в. В 1792 г. французский врач **Ф. Пинель** начал исследовать безумных и пытался найти корни болезней. Уже в XIX в. медики всерьез занялись классификацией психических расстройств. Таким образом возник медицинский подход.

В начале XX в. возник и стал развиваться психологический подход.

Этой проблемой активно занимались видные психологи того времени, такие как немецкий психолог **З. Фрейд** с его теорией бессознательного и **К. Юнг**, изучающий коллективное подсознание. Также возникло много так называемых течений: например бихевиоризм, представители которого считали, что аномальное поведение — это реакция на внешние факторы окружения и воспитания.

Представители когнитивного направления считали, что причиной аномального поведения является неспособность больного объективно оценивать ситуацию.

Но в 1960 г. была принята международная классификация психических расстройств. Выделяли неврозы, которые возникают при внутренних психологических противоречиях; органические психозы — при нарушениях нервной системы; функциональные психозы, которые еще до конца не исследованы.

В настоящее время многие болезни уже исследованы и описаны. Так, например, болезнь Дауна вызвана лишней хромосомой из 21 пары.

От того, является ли ген доминантным или рецессивным, зависит передача болезней генами. Если ген доминантный, то болезнь проявляется, если же ген рецессивный, т.е. подавляемый, то ребенок является носителем болезни, но в течение жизни она может и не проявиться.

Детям с задержкой психического развития трудно даются познавательные процессы. Они начинают ходить, говорить позже, чем дети с нормальным уровнем развития. Среди форм нарушения интеллектуальной деятельности у детей выделяют следующие: связанные с нарушением условий среды и воспитания, с длительными астеническими состояниями, с разными видами инфантилизма или с нарушениями речи, слуха, чтения и письма вызванные соматическими заболеваниями.

В национальной классификации обнаруживаются значимые групповые различия в способах воспитания детей, эмоциональных реакциях, сексуальном поведении, интересах и т. д. и в выполнении множества тестов на оценку способностей. При всех таких исследованиях характер и степень различия групп зависят от исследуемой черты. Так как каждая культура или субкультура создает условия для развития специфической для нее совокупности способностей и личностных черт, сравнение индивидов по таким глобальным показателям, как IQ или общий эмоциональный настрой, может не иметь большого смысла. Расы — это популяции, которые отличаются по относительной частоте определенных генов. Они формируются всякий раз, когда группа по географическим или социальным причинам становится изолированной. Таким образом, вклады культурных и биологических факторов в происхождении различий трудно разделить. При сравнениях рас средние различия между группами намного меньше диапазона индивидуальных различий внутри каждой группы. Следовательно, распределения групп значительно перекрываются. Получается, что принадлежность индивида к какой-либо группе служит плохим основанием для ожидания у него сильного развития какой-либо психологической черты.

Однако разделение по умственному уровню развития существует, и зачастую необходимо выявить те или иные крайности этого сравнения. В случае возникновения у детей задержки развития необходимо ее выявление для своевременного лечения и обучения по специальной программе. Главной проблемой в таком выборе является выявление показателя, некой характеристики, по которой можно провести дифференциацию уровней умственного развития детей.

Попытку выявить детей с отстающим уровнем развития сделал **А. Бине,** проводивший анализ способностей учеников, после чего пытался аккумулировать данные и привести их к единому показателю, т.е. найти ряд вопросов, ответив на которые ребенок продемонстрирует уровень своего интеллекта и позволит сделать прогноз о дальнейшем развитии способностей. Эти вопросы были объединены в тесты, различающиеся по возрастным категориям и определяющие так называемый коэффициент интеллекта (IQ).

Однако применимость коэффициента интеллекта в качестве параметра, разделяющего детей по уровню развития, не всегда актуальна, так как у человека множество интеллектуальных способностей которые нельзя рассматривать в сочетании со всеми остальными, а тесты IQ как раз коррелируют способности друг с другом.

В психологии **интеллект** [1] — относительно устойчивая структура умственных способностей индивида. В ряде психологических концепций интеллект отождествляют с системой умственных операций, со стилем и стратегией решения проблем, с эффективностью индивидуального подхода к ситуации, требующего познавательной активности, с когнитивным стилем и др. В современной западной психологии наиболее распространенным является понимание интеллекта как биопсихической адаптации к наличным обстоятельствам жизни (В. Штерн, Ж. Пиаже и др.). Попытка изучения продуктивных творческих компонентов интеллекта была предпринята представителями гештальтпсихологии (М. Вертгеймер, В. Келер), разработавшими понятие инсайта.

---

[1] *от лат. intellectus — «разумение, понимание, постижение»*

В начале XX в. французские психологи А. Бине и Т. Симон предложили определять степень умственной одаренности посредством специальных тестов. Их работы положили начало широко распространенной до настоящего времени прагматистской трактовке интеллекта как способности справляться с соответствующими заданиями, эффективно включаться в социокультурную жизнь, успешно приспосабливаться. При этом выдвигается представление о существовании базовых структур интеллекта независимо от культурных влияний. С целью совершенствования методики диагностики интеллекта были проведены (как правило, с помощью факторного анализа) различные исследования его структуры. При этом разными авторами выделяется различное количество базовых «факторов интеллекта»: от 1-2 до 120. Такое дробление интеллекта на множество составляющих препятствует пониманию его целостности. **Ч. П. Сноу (1986 г.) предложил в качестве структуры интеллекта систему шести составляющих:**

Мышление — способность получать информацию о предмете, не поддающемся непосредственному физическому восприятию.

Понимание — способность увязать полученную информацию с личным опытом и ранее полученной информацией.

Модификация стратегии — способность приспосабливаться к изменяющимся событиям, принимать волевые решения, изменять промежуточные цели.

Аналитическое рассуждение — способность рассмотреть изучаемое событие со всех сторон, сделать логическое умозаключение и привести полученные данные к законченной структурированной форме.

Нестандартность — желание, вызванное в следствие возникшего интереса к постановке цели, отличной от общепринятых, для получения интеллектуального удовольствия.

Идиосинкразическое обучение — способность развиваться с помощью обучения и развивать методы обучения.

Отечественная психология исходит из принципа единства интеллекта, его связи с личностью. Большое внимание уделяется исследованию взаимоотношения практического и теоретического интеллекта, их зависимости от эмоционально-волевых особенностей личности. Содержательное определение самого интеллекта и особенности инструментов его измерения зависят от характера соответствующей общественно значимой активности сферы индивида (учение, производство, политика и др.).

Для стимулирования познавательной деятельности ребенка нужно стараться не ограничивать его свободное перемещение в пространстве и привлекать к участию в различного рода хозяйственной деятельности. Это способствует восприятию все более сложных явлений и постижению их при помощи разнообразных органов чувств. Главное, чтобы развитие ребенка сопровождалось вниманием и любовью со стороны взрослых, а воздействие на его умственные и физические способности было максимально, но не чрезмерно (т. е. не препятствовало усвоению), разнообразным.

Однако в психологии существуют общие положения, которых следовало бы придерживаться при развитии как ребенка, так и взрослого. В целом они сводятся к следующим моментам:

1) прежде всего следует исходить из уже проявленных ребенком способностей. Выделить их можно из тех видов деятельности, которые не только получаются у него наиболее хорошо, но и вызывают искренний интерес. Этим направлением ребенок будет заниматься с особым удовольствием;

2) максимально использовать и поддерживать заинтересованность ребенка. Ведь гораздо труднее помочь ребенку сохранить интерес, чем вызвать заинтересованность. Кроме того, интерес ребенка нужно сделать целенаправленным, поскольку значительно проще достичь цели, если ее ясно представляешь;

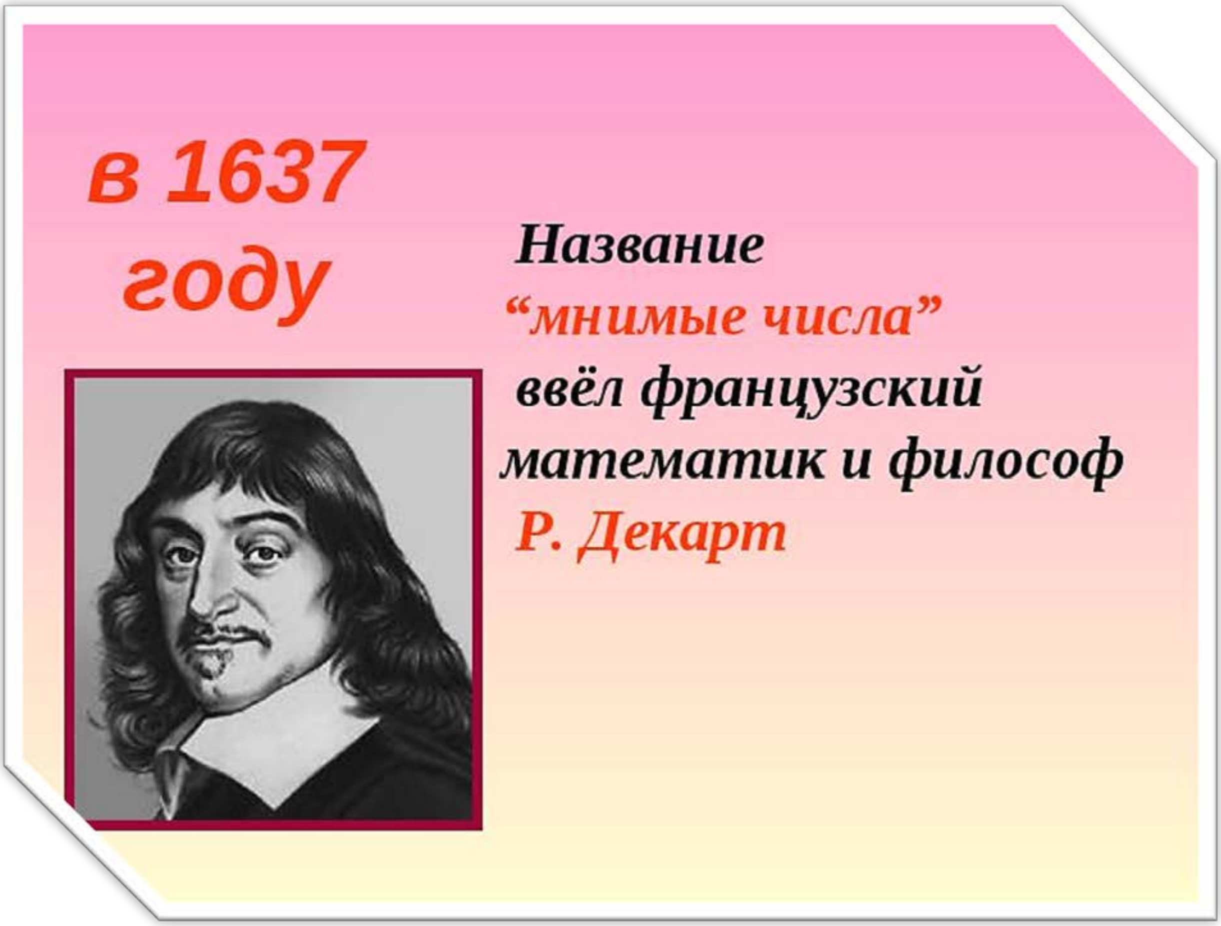
3) чтобы достичь высоких результатов, необходимо постоянно стимулировать занятия выбранной деятельностью. Всевозможные препятствия не должны останавливать при достижении цели — к этому очень важно приучить ребенка. Причем мотивация должна постоянно расширяться: на основе достигнутого необходимо стремиться к более важным целям;

4) нужно ориентировать ребенка на общественную значимость деятельности. Осознание внесения собственного вклада в развитие своего общества и даже человечества стимулирует занятия выбранным направлением, облегчает преодоление многих трудностей;

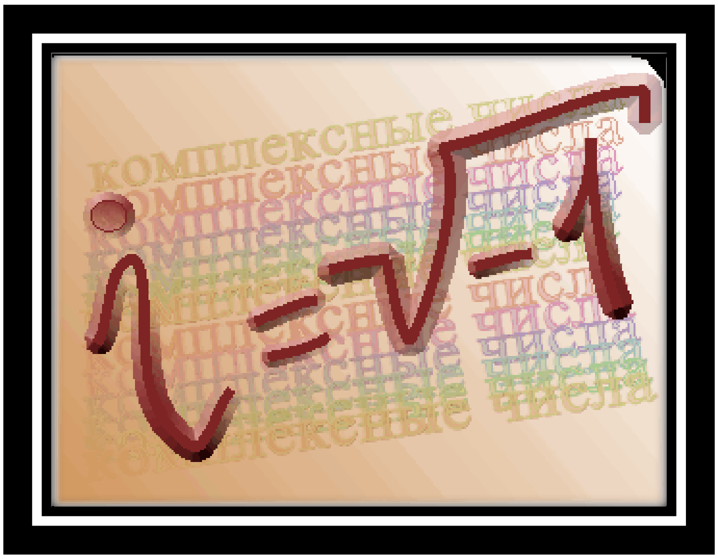
5) направлять процесс развития способностей нужно очень осторожно, искренне веря в его силы и способность достигать задуманного. Ребенок должен ощущать поддержку взрослых;

6) развивать способности нужно организованно и целенаправленно. Даже в самом начале занятия ребенка нужно направлять в определенное русло.

Часть II. Факультатив «КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА»



Цель современной школы развитие личности учащегося, формирование его ценностного сознания. Ее невозможно достичь без ориентации подростков на значимые для него ценности, без развития духовного мира школьника, его нравственной и эстетической воспитанности. Полноценная познавательная деятельность школьника выступает в обучении главным условием развития у них инициативы, активной жизненной позиции, находчивости. Дополнительное образование в школе, а значит и наличие факультативных курсов позволяет, во-первых, создать широкий общекультурный, эмоционально значимый для ученика фон усвоения различных направлений стандарта общего образования и, во-вторых, предметно ориентировать его в таких областях деятельности, которые будут содействовать определению его жизненных планов. Интеллектуальное и эмоциональное удовлетворение, которое получает ученик в самой деятельности, и есть залог формирования у учащихся увлеченности наукой, техникой, искусством, трудом, без чего невозможно всестороннее развитие личности. Важно не только то, что изучают учащиеся, но и то, как они это делают, какими методами самостоятельного приобретения знаний и применения их на практике они овладевают. При знакомстве с новыми объектами ранее приобретенные знания, умения и навыки обязательно найдут себе применение в процессе выявления взаимосвязи этих объектов с другими математическими понятиями. В 5-6 классах средней школы изучается курс арифметики, содержащей основы науки о числах. Это название происходит от греческого слова "арифмос" — число. От сознательного и прочного усвоения арифметики целиком зависит успешность усвоения многих других предметов, в частности алгебры, геометрии, тригонометрии, физики, химии, астрономии. В старших классах средней школы уже заложена определенная база знаний для изучения понятия комплексного числа, представления его в различных формах записи. А тот фундамент, который был заложен в 5-6 классах дает возможность построить на факультативных занятиях арифметику новых объектов и познакомиться с их многочисленными свойствами. Говоря о значении комплексных чисел в математическом образовании учащихся, прежде



всего следует иметь ввиду большое идейное богатство этого понятия. Понятие комплексных чисел обогащает и завершает одну из основных идей школьной математики — идею обобщения понятия числа. Знание комплексных чисел позволяет учащимся глубже осмыслить такие разделы школьной программы, как решение уравнений и неравенств, тригонометрические функции. Открытие комплексных чисел не только обогатило математику новыми числами более общего вида, но и вооружило ученых более общими методами исследования. Многие теоремы алгебры, которые раньше приходилось разбивать на ряд частных случаев, после введения комплексных чисел приобрели общность, стала в итоге развиваться одна из важнейших ветвей математического анализа — теория функций комплексного переменного. Весь этот разнообразный материал не может быть доведен до сведения учащихся, однако, некоторые вопросы могут быть изучены в школе на факультативных занятиях, а это расширит представления учащихся и об аппарате комплексных чисел и о методах математических исследований. Существуют пособия для школьников, где кратко изложена теория делимости в кольце комплексных чисел. Возможно, неоднократно поднимался вопрос о включении этой темы в школьную программу, но на данный момент эта проблема осталась нерешенной. Школьники уже знакомы с различными видами чисел, правилами выполнения возможных операций над ними, о существовании не всегда выполнимых математических действий в определенных числовых множествах.

Знакомство с арифметикой гауссова кольца расширит понятие о числе и покажет, что наряду с "привычной" арифметикой есть еще и другая, где тоже имеет место теорема об однозначности разложения на простые множители.

Предмет любого факультатива состоит в обосновании и разработке наиболее эффективных методов организации повторения и углубления знаний школьников.

Для решения проблемы были сформулируем следующие задачи:

1.Выявление психолого-педагогических и методических особенностей преподавания математики в старших классах с целью повышения эффективности изучения курса "Арифметика комплексных чисел".

2.Разработка содержания и методики изучения факультативного курса "Арифметика комплексных чисел".

В помощь школьному учителю математики должен быть представлен анализ содержания психолого-педагогической, математической и методической литературы, а также содержания школьных учебников и учебных пособий по теме "комплексные числа", анализ работ по методике преподавания математики.

ГЛАВА 1. Психолого-педагогические и исторические основы построения факультативных занятий в средней школе.

Факультативные занятия в средней школе.

Уже в далеких 1967/1968 годах в учебный процесс года для 7-10 классах средней школы были введены факультативные занятия по выбору учащихся. Цель таких занятий — расширение, углубления знаний, развитие интересов и способностей учащихся в избранных ими областях знаний и воспитание у них определенных навыков самостоятельной работы. Применительно к математике эта цель заключается в ознакомлении школьников с важнейшими современными понятиями и идеями математики, и отдельными вопросами, связанными с ее приложениями. Факультативный курс включает в себя такое содержание, которое предстоит осваивать школьникам за пределами общеобразовательного государственного стандарта. **По сравнению с другими формами повышенной подготовки учащихся (специальными школами и классами с углубленным изучением отдельных предметов) факультативные занятия являются самой массовой формой, доступной для учащихся.**

Специфика факультативных занятий разрешает определенную автономность содержания факультативного курса, что позволяет преподавателю проявлять самостоятельность в отборе материала для изучения и выборе форм его изложения. Одной из важнейших задач обучения математике в общеобразовательной школе является формирование и развитие средствами математики интеллектуальных качеств личности. Специфика факультативных курсов позволяет решать сложные проблемы: повышение интереса к наукам, обеспечение высокого теоретического уровня знаний, ориентация учащихся в отношении выбора жизненного пути. Учитывая то, что учащийся вправе сам выбирать вид деятельности, занятия в соответствии со своими интересами, склонностями и способностями, и то, что индивидуальные различия учащихся в характере мыслительной деятельности, степени подготовки тоже присутствуют, особую значимость в ходе факультативных занятий обретает индивидуальный подход и самостоятельность в процессе изучения содержания курса. Отсутствие обязательного минимума знаний и умений, которыми должны овладеть учащиеся дает учителю возможность применять индивидуальный подход к каждому ученику с учетом его способностей. С другой стороны, заинтересованность и добровольное посещение учащимися факультативов создает благоприятную почву для получения, понимания и усвоения новых знаний.

Разделим учащихся по отношению к школьному курсу математики на три группы.

Первую группу должны составлять школьники, для которых математика является лишь элементом общего развития и в их дальнейшей деятельности будет использоваться лишь в незначительном объеме. Для этой категории существенно овладение общей математической культурой, а вовсе не ремесленными навыками решения стандартных задач.

Во вторую группу могут входить учащиеся, для которых математика будет важным инструментом в их профессиональной деятельности. Для этой категории существенны не только знания о математических фактах, навыки логического мышления, пространственного представления, но и прочные навыки решения математических задач.

Наконец, в третью группу нужно отнести тех учащихся, которые выберут математику (или близкие к ней области знания) в качестве основы своей будущей деятельности. Учащиеся этой группы проявляют повышенный интерес к изучению математики и должны творчески овладеть ее основами.

Таким образом, получаем, что современная трактовка дифференциации делится на уровневую и профильную. Уровневая дифференциация вытекает из того, что, обучаясь в одном классе, по одной программе и учебнику, школьники по-разному усваивают материал. Определяющим здесь является уровень обязательной подготовки и достижение его свидетельствует об усвоении. Профильная дифференциация предполагает обучение различных групп школьников по программам, отличающимися глубиной изложения материала, объемом, формами и методами преподавания. Этот вид дифференциации предполагает наличие достаточно единого базового образования и утверждения школьников в своих склонностях. Таким образом, наличие в современной школе классов с различной специализацией, а также всевозможных типов учебных заведений (гимназий, лицеев и др.), наложило отпечаток на организацию и проведение факультативных занятий, особенно в старших классах.

При разработке факультативного курса надо учитывать:

В каких классах (с какой специализацией) будут проводиться факультативные занятия;
В каком объеме в них изучается выбранная для факультатива тема;
В каком порядке целесообразно рассматривать программный и факультативный материал;

В старших классах современной школы факультативные занятия способствуют: учету индивидуальных способностей и склонностей учащихся при обучении, стимуляции интереса к наукам, достижению высокого уровня знаний, возможности профессионально ориентировать школьников, ликвидации перегрузки учебных планов и программ.

1.2. Психолого-педагогические особенности построения факультативов для учащихся старших классов.

Любой факультативный курс конструируется таким образом, что несет в себе выполнение основных образовательных функций: психолого-педагогическую, познавательную и практическую.

Психолого-педагогическая функция включает воспитание математической культуры учащихся. Сюда входят знания и умения в формировании которых математика участвует наряду с другими школьными предметами, и также те знания и умения, которые составляют специфику самой математики. Овладение практически любой современной профессией требует тех или иных знаний по математике. С математикой связана и компьютерная грамотность. Развитие науки и техники, высокий интеллектуальный уровень специалистов-все это приводит людей к необходимости пополнять свои знания и стремиться к повышению квалификации. Это выдвигает перед школой **задачу всемерного развития у учащихся математических способностей, склонностей и интересов.**

Важнейшая задача обучения **математике** — пробудить у школьников потребность активно мыслить, преодолевать трудности при решении разнообразных задач, искать наиболее рациональные пути решения этих задач. Научить их доказывать существование вводимых математических понятий, опровергать ложные предложения, проверять правильность обратного предложения и т. д. — такими логическими умениями должен овладеть школьник.

Решение выдвинутых задач возможно на факультативных занятиях по математике, учитывая их специфику: это и малочисленность группы учащихся, и их заинтересованность в посещении таких занятий, а также присутствие интереса к "новым открытиям", которые трудно реализовать в полном объеме. Факультативный курс должен способствовать формированию и развитию самостоятельной, творческой и мыслительной деятельности учащихся. Психология является необходимой базой методики любого учебного предмета, в том числе и математики. Знакомство с психологическими теориями и концепциями помогает учителю глубже понять основные направления в совершенствовании учебного процесса по математике.

Огромную роль здесь играет принцип единства сознания и деятельности, разработанный А. Н. Леонтьевым и С. Л. Рубинштейном.

Его суть состоит в том, что человеческая психика проявляется и формируется в деятельности — трудовой, учебной, игровой. Какими бы природными задатками ни обладал от рождения человек, они смогут получить свое развитие лишь в процессе деятельности. Важно, чтобы школьник усваивал материал в порядке активной работы над ним. Задача преподавателя заключается в том, чтобы работа эта была насыщена элементами самостоятельности, творчества, только тогда ученики смогут направлять свою интеллектуальную активность и ранее усвоенные знания на "открытие" важных существенных признаков новых понятий и применять их в своей дальнейшей познавательно-практической деятельности. Развивает не само знание, а специальное его конструирование. Факультативный курс должен не просто излагать систему знаний, а особым образом организовывать познание ее ребенком. Здесь очень многое зависит от учителя, задача которого состоит в создании психолого-педагогических условий, стимулирующих учащихся к использованию и выбору наиболее рациональных, личностно-значимых способов. При таком подходе в центре внимания оказывается не усредненный ученик, а каждый школьник, как личность в своей самобытности, уникальности.

При разработке факультативного курса нужно учитывать самостоятельность и индивидуальный подход в обучении.

Хорошо известно, что все люди разные. Выявляются различия в типе темперамента, в психических свойствах и в скорости протекания нервных процессов. Люди рождаются с различными задатками, которые развиваются в различные способности. При значительном разбросе индивидуальных особенностей учеников и их численности, обычно учитель не может учесть в достаточной мере особенности каждого, и учебный процесс строится в расчете на среднего ученика, который только и чувствует себя более или менее комфортно при таком обучении. Но учитель всегда должен учитывать индивидуальные особенности учащихся. Процесс изучения факультативного курса должен быть организован так, чтобы каждый учащийся в данный отрезок времени овладел одним и тем же объемом теоретического материала, выбрав такой уровень изложения этого материала, который соответствует его индивидуальным особенностям. При разработке курса для старшеклассников должен быть учтен и критерий самостоятельности в обучении. Сочетание индивидуализации и самостоятельности при изучении содержания факультативного курса дает возможность школьникам выполнять различное количество упражнений разного уровня.

При разработке факультативного курса нужно учитывать и возрастные особенности учащихся.

Школа занимает большое место в жизни старших подростков, но у разных детей проявляется по-разному, несмотря на осознание важности и необходимости учения. Известно, что дети различаются по некоторым важным параметрам: отношение к учению, общему развитию, способам усвоения учебного материала. Учет перечисленных различий дает более полноценное усваивание новых знаний школьниками. Для старших подростков обучение в 10-11 классах это период выработки жизненной позиции, сознательного отношения к выбору профессии. Таким образом при обучении старшеклассников имеется возможность использовать специфические достоинства возраста: возросшие моральные и интеллектуальные силы и их продолжающийся рост; рост произвольности психических процессов, лежащих в основе умения управлять собой; формирование обобщенных форм самосознания, отношение к себе как к реально взрослым; умение увидеть сильные и слабые стороны своего развития. Самообразование главным образом связано с выбором будущей профессии. Кроме того, возникает потребность в саморегуляции, т.е. в управлении и развитии личности. Все большее значение мышлении старшеклассника наряду с конкретным занимает абстрактное мышление. Учащиеся стремятся к установлению причинно-следственных связей и других закономерностей между явлениями окружающего мира, проявляют критичность мышления, умение аргументировать суждения, более успешно осуществляют перенос знаний и умений из одной ситуации в другую. В ходе усвоения учебного материала старшеклассники стремятся самостоятельно раскрывать отношения общего и конкретно выделять существенное, а затем формулировать определения научных понятий. Учащиеся старших классов умеют абстрагировать и обобщать материал, происходит формирование теоретического мышления.

Теоретическое мышление характерно тем, что совершается в форме абстрактных понятий и рассуждений – исходя из этого при построении занятий со старшеклассниками удобно использовать такие особенности мышления, как:

- Умение сравнивать — сопоставлять объекты познания с целью нахождения сходства и различия между ними
- Умение анализировать — мысленное расчленение предмета познания на части Умение синтезировать — мысленное соединение отдельных элементов в единое целое
- Умение абстрагировать — мысленное выделение каких-либо существенных свойств и признаков объектов при одновременном отвлечении от всех других их свойств и признаков. Это умение особенно важно для математических наук, т. к. многие математические понятия являются абстрактными объектами
- Умение обобщать — мысленное выделение общих свойств в двух или нескольких объектах и объединение этих объектов в группы (от частного к общему); мысленное выделение в рассматриваемом объекте или нескольких объектах их свойств в виде общего понятия (от общего к частному)
- Умение конкретизировать — может выступать в двух формах: мысленный переход от общего к единичному или восхождение от абстрактно-общего к конкретно частному путем выявления различных свойств и признаков этого абстрактно-общего.

Формирование у учащихся способности к выполнению умозаключений влечет за собой развитие логического мышления. Развитие интеллекта в юношеском возрасте тесно связано с развитием творческих способностей. Старшеклассники не просто усваивают информацию, а проявляют интеллектуальную инициативу, стремятся к созданию чего-то нового, любят исследовать и экспериментировать. Все это создает благоприятную основу для развития творческого мышления. Результат такого мышления не просто применение известных представлений, понятий и операций, а создание новых образов, значений и способов решения задач. В юношеском возрасте происходит активный процесс формирования мировоззрения. Молодые люди стремятся свести все принципы в определенную целостную систему, понять окружающий мир, оценить его, определить свое отношение к нему. Поэтому старшеклассники в большей степени интересуются предметами, которые им нужны в связи с выбранной профессией. Для них на этот период времени целесообразнее сосредоточить свое внимание на избранных науках, чем изучать все подряд в ознакомительных целях. Поэтому одной из важнейших задач является формирование у старшеклассников правильных представлений о той роли, которую играет тот или иной раздел обучения в жизни общества.

Факультативный курс должен способствовать появлению у учащихся умения решать задачи.

Решение задач занимает в математическом образовании огромное место. Психологические исследования проблемы обучения решению задач показывают, что основные причины несформированности у учащихся общих умений и способностей в решении задач состоят в том, что школьникам не даются необходимые знания о сущности задач и их решений, а поэтому они решают задачи, не осознавая должным образом свою собственную деятельность. У учащихся не вырабатываются отдельно умения и навыки в действиях, входящих в общую деятельность по решению задач, поэтому им приходится осваивать эти действия в самом процессе решения задач, что многим школьникам не под силу. За время обучения в школе каждый ученик решает огромное число задач. При этом все учащиеся решают одни и те же задачи. Но в итоге некоторые ученики овладевают общим умением решения задач, а многие встретившись с задачей незнакомого или малознакомого вида, теряются и не знают, как к ней подступиться. Одной из причин является то, что одни ученики вникают в процесс решения задачи, стараются понять, в чем состоят приемы и методы решения задач, изучают задачи. Другие же, к сожалению, не задумываются над этим, стараются лишь как можно быстрее решить заданные задачи. Эти учащиеся не анализируют в должной степени решаемые задачи и не выделяют из решения общие приемы и способы, задачи они решают лишь ради получения ответа. С такими учащимися надо работать наиболее интенсивно: стимулировать постоянный анализ ими (учащимися) своей деятельности по решению задач и выделению в них общих подходов и методов, их теоретического осмысления и обоснования. **Все это можно реализовать только….. и только на факультативе.**

ПОЧЕМУ?

Во-первых, время преимущественно распределяет сам преподаватель,

во-вторых, он вправе выбрать тот оптимальный ход урока, который будет способствовать не только прочному усвоению новых знаний, но и выработке умения решать задачи.

Главный принцип при этом — научить учащихся такому подходу к задаче, при котором задача выступает как объект тщательного изучения, а ее решение как объект конструирования и изобретения.

Факультативный курс должен вызывать интерес учащихся к содержанию и процессу обучения. Только благодаря появлению эмоционального переживания возникает интерес к предмету, отдельному явлению, появляется потребность в деятельности. Без интереса ученик не учится, без потребности по той или иной причине он не решает задачи, без устойчивости этих сопровождающих деятельность потребностей невозможно формирование системы ценностей. Поэтому изучаемый материал должен вызывать интерес у учащихся. Как бы ни старался учитель, к каким бы методикам не прибегал, какой бы техникой не владел — повысить эффективность обучения, не вызывая у обучающихся интереса к учебному материалу, невозможно. При построении занятий со старшеклассниками необходимо учитывать их психолого-педагогические возможности и потребности: развивать логическое мышление, которое учит внимательности, аккуратности, умению абстрагироваться от конкретного содержания; обращать внимание учащихся на межпредметные связи; подбирать задания, способствующие проявлению самостоятельности и творческих способностей учащихся; создавать возможности для углубления и совершенствования знаний в направлении выбранной ими профессии; подкреплять все новые понятия историческими сведениями для дальнейшего развития математической культуры.

ГЛАВА 2. Методические особенности изучения курса "Арифметика комплексных чисел".

2.1. Анализ содержания учебной литературы по теме "комплексные числа". Существует достаточное количество пособий по комплексным числам. Рассмотрим поподробнее, как изложен в них учебный материал по комплексным числам. В пособии для факультатива А. А. Абрамова, Н. Я. Виленкина содержится глубокий традиционный курс: построение комплексных чисел в виде a+bi, далее идет знакомство с тригонометрической формой комплексных чисел. Рассматривается показательная, логарифмическая и тригонометрическая функции комплексного переменного. Большое место в пособии занимают приложения комплексных чисел: рассматривается основная теорема алгебры многочленов и ее следствия; применение комплексных чисел для описания всевозможных перемещений плоскости; затронуты и дифференциальные уравнения. В пособии под редакцией **В. А. Жарова** исследуется расширение понятия числа, комплексные числа представлены через вектора. Учебник алгебры и математического анализа для учащихся 11 классов с углубленным изучением математики Н. Я. Виленкина и др. также содержит тему **"Комплексные числа".** Первоначально комплексные числа представлены упорядоченными парами, а далее учащимся предложено перейти к алгебраическому виду. Основные сведения по комплексным числам даны обзорно и в минимальном объеме. Из приложений можно выделить лишь применение основной теоремы алгебры многочленов. В пособии **А. П. Иванова** и **В. М. Кондакова** рассматривается тригонометрическая форма записи комплексного числа и соответствие между комплексными числами и точками плоскости. Решение алгебраических уравнений **n**-ой степени выделены в виде приложений комплексных чисел. Объем изложенного материала с текстом упражнений занимает всего 10 страниц, что говорит о чрезмерной краткости. В пособии Лисичкина сначала вводится понятие мнимой единицы, а только потом идет определение комплексного числа. Далее рассматриваются действия над комплексными числами в алгебраической и тригонометрической формах и, показательная форма комплексного числа. На этом знакомство с комплексными числами заканчивается. В пособии Л. А. Калужнина сразу вводятся только целые комплексные числа. Дальше определяются операции над ними. Потом следует определение нормы целого комплексного числа. Рассматриваются взаимосвязи между простыми гауссовыми и простыми рациональными числами. Поднимается вопрос о том, когда же положительное целое рациональное число является нормой некоторого целого гауссова числа. Материал, содержащийся в этом издании, отличается своей неординарностью и конкретными целями изложения, но теория делимости здесь четко не выстроена, т. к. часть необходимых формулировок и доказательств отсутствует. Именно поэтому наша задача при создании факультативного курса "Арифметика комплексных чисел" объединить "традиционную часть" (определение понятия комплексного числа, возможные формы записи комплексных чисел, правила выполнения действий над ними и т. д.) с постепенным углублением в построение арифметики комплексных чисел, показывая тем самым, что основная теорема арифметики может быть применима к "новым объектам".

ПАРАДИГМА ФАКУЛЬТАТИВА ПО КОМПЛЕКСНЫМ ЧИСЛАМ

На протяжении курса элементарной алгебры несколько раз происходит обогащение запаса чисел. Школьник, приступающий к изучению алгебры, приносит из арифметики знакомство с положительными целыми и дробными числами. Алгебра начинается по существу с введения отрицательных чисел, т.е. с оформления первой среди важнейших числовых систем - системы целых чисел, состоящей из всех положительных и всех отрицательных целых чисел и нуля, и более широкой системы рациональных чисел, состоящей из всех целых чисел и всех дробных чисел, как положительных, так и отрицательных.

Дальнейшее расширение запаса чисел происходит тогда, когда в рассмотрение вводятся иррациональные числа. Система, состоящая из всех рациональных и всех иррациональных чисел, называется системой действительных (или вещественных) чисел. Строгое построение системы действительных чисел содержится обычно в университетском курсе математического анализа - оставим это в стороне. В самом конце курса элементарной алгебры система действительных чисел расширяется до системы комплексных чисел. Эта система чисел остается для школьника менее привычной, конечно, чем система действительных чисел, хотя на самом деле она обладает многими очень хорошими свойствами. В нашем факультативном курсе будет еще раз с необходимой полнотой изложена теория комплексных чисел.

Комплексные числа вводятся в связи со следующей задачей.

Известно, что действительных чисел недостаточно для того, чтобы решить любое квадратное уравнение с действительными коэффициентами. Простейшее из квадратных уравнений, не имеющих корней среди действительных чисел, есть

$$x^2 + 1 = 0; \quad (1)$$

только это уравнение будет нас сейчас интересовать. Задача, стоящая перед нами, такова: нужно расширить систему действительных чисел до такой системы, чисел, в которой уравнение (1) уже обладало бы корнем.

2.2. Содержание факультативного курса "Арифметика комплексных чисел".

В качестве материала, из которого будет строиться новая система чисел – назовем ее **комплексные числа**, мы возьмем точки плоскости. Напомним, что изображение действительных чисел точками прямой линии (основанное на том, что мы получаем взаимно однозначное соответствие между множеством всех точек прямой и множеством всех действительных чисел, если при заданном начале координат и единице масштаба всякой точке прямой поставим в соответствие ее абсциссу) систематически используется во всех отделах математики и является столь привычным, что обычно мы не делаем различия между действительным числом и точкой, его изображающей факт который строго доказывается в математике, но мы оставим его в стороне. **Таким образом, мы хотим определить систему чисел, изображающихся всеми точками плоскости**. До сих пор нам не приходилось складывать или перемножать точки плоскости, поэтому определение операций над точками мы имеем право выбирать, заботясь лишь о том, чтобы новая система чисел обладала всеми теми свойствами, ради которых мы ее создаем. Эти определения, особенно для произведения, покажутся в первый момент весьма искусственными.

Ниже будет показано, однако, что никакие другие определения операций, на первый взгляд даже более естественные, не привели бы нас к цели, т.е. к построению расширения системы действительных чисел, содержащего корень уравнения (1).
Там же будет показано, что замена точек плоскости в этом построении любым Другим м а т е р и ал ом не привела бы к системе чисел, по своим алгебраическим свойствам отличающейся от той системы к о м п л е к с н ы х чисел, которая строится ниже.
Проанализировав психолого-педагогические особенности построения факультативов для учащихся старших классов, содержание учебной литературы, содержащей тему "комплексные числа", мы подобрали оптимальное на наш взгляд содержание факультативного курса, которое приведем ниже.

1. **Понятие комплексного числа.**
2. **Действия над комплексными числами.**
3. **Сопряженные комплексные числа.**
4. **Геометрическая интерпретация комплексного числа.**
5. **Тригонометрическая форма комплексного числа.**
6. **Решение квадратных уравнений, дискриминант которых отрицателен.**
7. **Целые гауссовы числа, как частный случай комплексных чисел. Целые гауссовы числа и их расположение на комплексной плоскости. Отношение делимости на множестве целых гауссовых чисел. Простые гауссовы числа. НОД целых гауссовых чисел.**
8. **Основная теорема арифметики в кольце гауссовых чисел.**
9. **Основное свойство простого числа. Алгоритм факторизации целого гауссова числа.**
10. **История открытия комплексных чисел.**

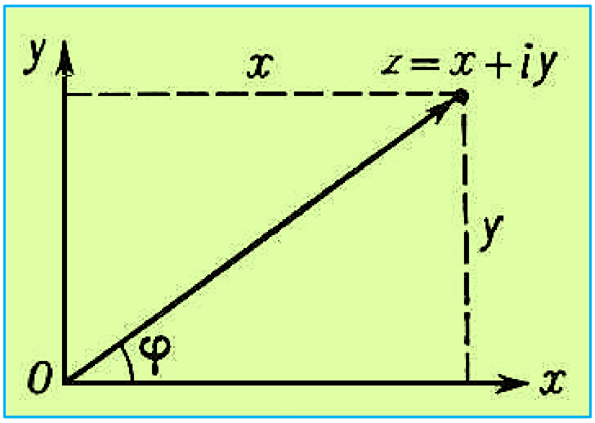
КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Как известно, комплексными числами называются выражения вида **a + bi**, где **a** и **b** — вещественные числа, **i** — некоторый символ, удовлетворяющий соотношению $i^2 = -1$. Первые попытки введения в математику комплексных чисел были сделаны итальянскими математиками XVIв. **Кардано** и **Бомбелли** в связи с решением уравнений 3-й и 4-й степеней. Однако признание комплексных чисел как ценного орудия исследования происходило очень медленно. Недоверие вызывал сам символ **i** («мнимая единица») заведомо не существующий среди вещественных чисел.
Это недоверие усугублялось тем, что некритическое перенесение некоторых формул обычной алгебры на комплексные числа порождало неприятные парадоксы (например, $i^2 = -1$, но вместе с тем, используя формальное выражение $i = \sqrt{-1}$ и обычные правила действий с квадратными корнями, получим
$i^2 = \sqrt{-1} \bullet \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)^2} = 1$.
Лишь в XIXв. Гауссу удалось дать достаточно убедительное обоснование понятия комплексного числа. Построенная в XIXв. на основе комплексных чисел теория функций комплексного переменного обогатила математический анализ новыми результатами, придала значительной части математического анализа чрезвычайную стройность и простоту, а в дальнейшем оказалась могущественным средством исследования в важных разделах механики и физики. Таким образом, «невозможные», «мнимые» числа явились ценнейшим средством исследования, и тем самым их введение в науку оказалось оправданным не только их непротиворечивостью, но и практической важностью.

1. Обоснование комплексных чисел.

Наводящие соображения.
Задание комплексного числа **a+bi** вполне определяется заданием двух обыкновенных вещественных чисел **a** и **b**, называемых его компонентами. Вводя комплексные числа, необходимо ввести и арифметические действия над ними, по возможности с сохранением обычных правил действий, но с обязательством заменять символ i^2 на **-1**. Постараемся охарактеризовать правила этих действий в терминах компонент, без упоминания о «сомнительном» символе **i**.
Так, если по обычным правилам элементарной алгебры «сложить» два комплексных числа a + bi и c + di, то мы получим комплексное (a + c) + (b+d)i, и при этом компоненты суммы двух комплексных чисел будут равны суммам соответствующих компонент слагаемых.

Далее, (a + bi) (c +di) = ac + bci + adi + bdi^2 = (ac — bd) + (bc + ad)i, т. е. первая компонента произведения двух комплексных чисел равна разности произведений первых и вторых компонент, а вторая компонента равна сумме произведений первой компоненты одного из сомножителей на вторую компоненту другого.



Наконец, положив **b = 0** (и считая, что **0•i = 0**), получим **a + 0i = a**, т.е. комплексное число с нулевой второй компонентой отождествляется с вещественным числом, именно, с первой компонентой. Разумеется, все эти соображения имеют лишь наводящий характер: мы сформулировали в терминах компонент правила действий над комплексными числами, как будто мы уже каким-то образом убедились в закономерности введения этих странных математических объектов. Но то, что нам это удалось сделать, естественно наводит на мысль дать само определение комплексных чисел и действий над ними в терминах компонент, т.е. вещественных чисел.

2. Определение комплексных чисел.

Комплексными числами называются упорядоченные пары вещественных чисел (компонент), для которых понятия равенства, суммы, произведения и отождествления некоторых пар с вещественными числами вводятся согласно следующим определениям (аксиомам).

I. Пары (a, b) и (c, d) считаются равными в том и только в том случае, когда равны их соответствующие компоненты. В символической записи:

$$(a,b)\overset{def}{=}(c,d)\Leftrightarrow\begin{cases}a=c\\ b=d\end{cases}$$

Здесь: $\overset{def}{=}$ definition – определение, это означает **РАВНО ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ**

II. Суммой пар (a, b) и (c, d) называется пара (a + c, b+d), т.е.

$$(a,b)+(c,d)\overset{def}{=}(a+c;\ b+d)$$

III. Произведением пар (a, b) и (c, d) называется пара (ac — bd, ad + bc), т. е.

$(a, b) \bullet (c, d) \overset{def}{=} (ac - bd,\ ad + bc)$.

IV. Пара (a, 0) отождествляется с вещественным числом **a**, т.е

$(a, 0) \overset{def}{=} a$.

Таким образом, в данном определении комплексных чисел, составными частями которого являются определения их равенства, суммы, произведения, нет речи о каком-либо извлечении квадратного корня из отрицательных чисел.
Все определения формулируются в терминах вещественных чисел и действий над ними. В первых трех аксиомах речь идет об определении разных понятий. Поэтому их сопоставление не может привести к каким-либо противоречиям. Единственное, чего можно опасаться, это нарушения обычных законов действий, которое априори могло бы произойти.
Несколько в другом положении находится аксиома IV.
Дело в том, что понятия равенства, суммы и произведения для вещественных чисел имеют определенный смысл, и если бы оказалось, что эти понятия расходятся с теми, которые возникают в силу аксиом I, II, III при рассмотрении вещественных чисел как пар специального вида, то это привело бы к такой путанице (пришлось бы отличать сумму вещественных чисел как таковых, от их суммы как пар, и т. д.), что следовало бы от аксиомы IV отказаться.
Поэтому прежде всего нужно сопоставить аксиому IV с аксиомами I, II, III.

I и IV. Пусть вещественные числа **a** и **b** равны, как отождествленные с ними пары **(a, 0) и (b, 0)**. Это будет, согласно аксиоме I, в том и только в том случае, когда **a = b**, т.е. если они равны в обычном смысле.

II и IV. Сумма вещественных чисел a и b, рассматриваемых как пары (a, 0) и (b, 0), равна, согласно аксиоме II, паре (a + b, 0), отождествленной с числом a+ b, т.е. с суммой a и b в обычном смысле.

III и IV. Произведение вещественных чисел a и b, рассматриваемых как пары (a, 0) и (b, 0), равно согласно аксиоме III паре $(ab - 0\bullet 0,\ a0 + 0b) = (ab, 0)$, отождествленной с числом ab, т.е. с произведением a и b в обычном смысле.

Таким образом, аксиома IV хорошо согласована с аксиомами I, II, III и не приводит к путанице, которой можно было бы опасаться.

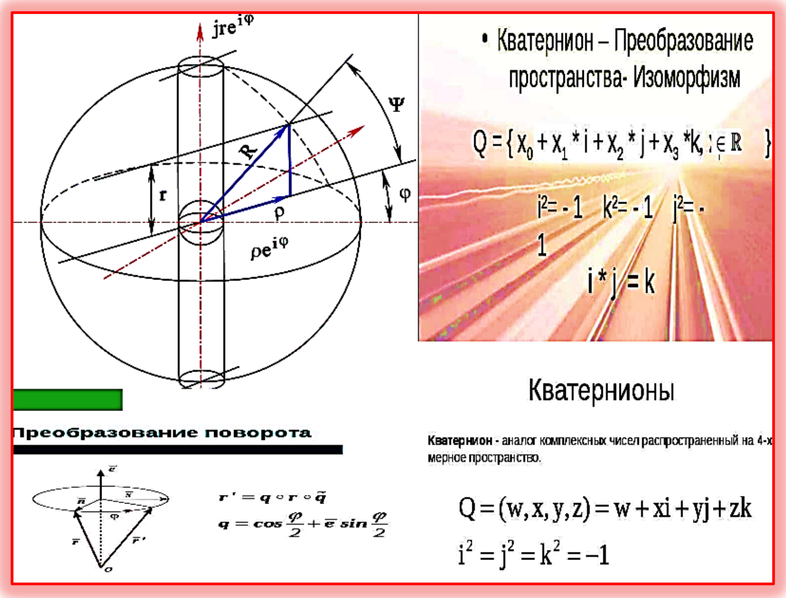
Обратим внимание еще на одну формулу, непосредственно вытекающую из аксиом III, IV, именно, **m(a, b)=(ma, mb)**, если **m** — какое угодно вещественное число. Действительно, **m(a, b) = (m, 0) (a, b) = (ma — 0b, mb + 0a) = (ma, mb).**

Допустим теперь, что **m** — натуральное число.

<u>В силу аксиомы II</u>

(a, b) + (a, b) = (2a, 2b), (2a, 2b) + (a, b) = (3a, 3b) и т. д., так что **(ma, mb)** есть результат последовательного сложения **m** слагаемых, равных **(a, b)**, что хорошо согласуется с привычным представлением о том, что умножение на натуральное число m равносильно сложению m равных слагаемых. Это еще раз свидетельствует о хорошем согласовании аксиом.

В заключение заметим, что проведенное нами построение системы комплексных чисел подсказывает следующий вопрос: нельзя ли так определить сложение и умножение точек трехмерного пространства, чтобы совокупность этих точек стала системой чисел, содержащей в себе систему комплексных чисел или хотя бы систему действительных чисел?



Этот вопрос выходит за рамки нашего факультативного курса, и мы лишь отметим, что ответ на него оказывается **отрицательным**. С другой стороны, замечая, что сложение комплексных чисел, определенное выше, по существу совпадает со сложением векторов на плоскости, выходящих из начала координат(естественно поставить такой вопрос: можно ли при некоторых преобразованиях так определить умножение векторов в n-мерном действительном векторном пространстве, чтобы по отношению к этому умножению и обычному сложению векторов наше пространство оказалось числовой системой, содержащей в себе систему действительных чисел? Можно показать, что этого сделать нельзя, если требовать выполнения всех тех свойств операций, которые имеют место в системах рациональных, действительных. и комплексных чисел.

Если же отказать я от коммутативности умножения, то такое построение возможно в четырехмерном пространстве - получающаяся система чисел называется системой **кватернионов**.
Аналогичное построение возможно и в восьмимерном пространстве - получается так называемая **система чисел Кэли**.

Здесь приходится отказываться, впрочем, не только от коммутативности умножения, но и от его ассоциативности, заменяя последнее одним более слабым требованием.

3. Свойства действий.

Теперь нам нужно проверить, что аксиомы II и III согласованы в себе и друг с другом так, что привычные нам свойства действий над числами сохраняются при переходе к комплексным числам. Именно, мы установим, что комплексные числа образуют **поле**. Дадим определение поля в алгебре и оставим для школьников доказательство в стороне.

полный список аксиом кольца и поля.

1. $\forall$ a, b, c: (a + b) + c = a + (b + c) — ассоциативность сложения.
2. $\forall$ a, b: a + b = b + a — коммутативность сложения.
3. $\exists 0 \forall$ a: a + 0 = 0 + a = a — существование нуля.
4. $\forall$ a$\exists$ (- a): a + (- a) = (- a) + a = 0 — существование противоположного элемента.
5. $\forall$ a, b, c: (a + b)c = ac + bc — правая дистрибутивность.
6. $\forall$ a, b, c: c (a + b) = ca + cb — левая дистрибутивность.
7. $\forall$ a, b, c: (ab)c = a(bc) — ассоциативность умножения.
8. $\forall$ a, b: ab = ba — коммутативность умножения.
9. $\exists 1 \forall$ a: a 1 = 1 a = a — существование единицы.

10. $\forall$ a ≠ 0 $\exists$ a-1: aa-1 = a-1a = 1 — существование обратного элемента.

Таким образом, алгебраическая система с операциями сложения и умножения, удовлетворяющими аксиомам 1–7 (или 1–6, если не предполагать, что кольцо ассоциативно), является кольцом, а система с операциями, удовлетворяющими аксиомам 1–10, является полем.

Итак, мы доказали, что комплексные числа составляют поле.

4. Возвращение к обычной форме записи.

Ясно, что **(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) (0, 1)=a + bi**, где буквой **i** обозначена пара **(0, 1)**. Из аксиомы III следует, что **i^2 = (0, 1) (0, 1) = (0 - 1, 0 + 0) = (-1, 0) = -1.** Таким образом, мы вернулись к обычной записи комплексного числа в виде a + bi, но «мнимая» единица **i** получила реальное истолкование как одна из пар, действия над которыми определены аксиомами I, II, III, IV, именно, **пара (0, 1).** Если угодно, множитель i при вещественном числе b можно истолковать как указание на то, что b является второй компонентой пары (a, b).

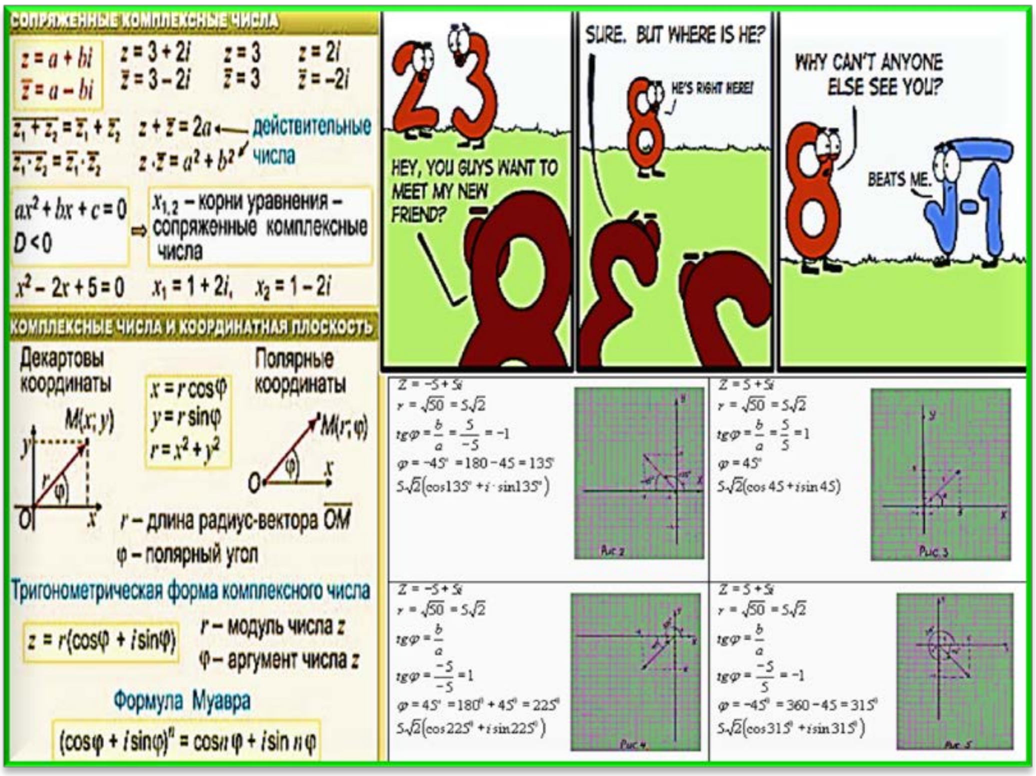
Первая компонента комплексного числа **α = a + bi** называется вещественной частью этого числа и обозначается **Reα**,

а вторая компонента называется его мнимой частью и обозначается **Imα**.

Подчеркнем, что мнимая часть (так же, как и вещественная часть) комплексного числа есть число вещественное. В дальнейшем, говоря о комплексных числах, мы должны помнить, что вещественные числа мы рассматриваем как частный случай комплексных (с нулевой второй компонентой), так что фраза «α есть комплексное число» отнюдь не исключает того, что α может быть и вещественным числом.

Вычитание и деление комплексных чисел.

Действия вычитания и деления определяются как действия, обратные к действиям сложения и умножения, т.е. вычитание — как действие, восстанавливающее одно из слагаемых по данной сумме и второму слагаемому, а деление — как отыскание одного из сомножителей по данному произведению и второму сомножителю. Их возможность и единственность обосновывается следующими предложениями.



Занятие № 1.

ТЕМА: Понятие комплексного числа. Действия над комплексными числами.

Определение 1: символ **√ -1** будем называть мнимой единицей и обозначать **i**: **i=√ -1**.

Следуя определению находим, что **i^2=-1.**

Введение мнимой единицы позволяет извлекать квадратные корни из отрицательных чисел.

Пример:

$\sqrt{-36}=\sqrt{36(-1)}=\sqrt{36}\bullet\sqrt{-1}=6i$

Рассмотрим степени мнимой единицы:

$i^1=1$, $i^2=-1$, $i^3=i^2\cdot i=(-1)\bullet i=-i$, $i^4=i^3 i=-i\bullet i=1$,...... далее значения степеней начнут повторяться.

Т. е. если выписывать все значения степеней числа i подряд, то получим последовательность: i, – 1, – i, 1, i, – 1, – i, 1....... и т. д.

Определение 2: выражения вида **z=a+bi**, где a и b-действительные числа, i-мнимая единица, будем называть комплексными числами.

a-действительная часть числа z;   bi-мнимая часть числа z,

z=a+bi - алгебраическая форма комплексного числа z.

Определение 3: два комплексных числа z=a+bi, z=c+di условимся считать равными тогда и только тогда, когда в отдельности равны их действительные и мнимые части.

Определение 4: суммой комплексных чисел $z_1=a+bi$, $z_2=c+di$ называют комплексное число z= (a+c)+(b+d)i.

Определение 5: разностью комплексных чисел a+bi, $z_2=c+di$ называют комплексное число z= (a-c)+(b-d)i.

Определение 6: произведением комплексных чисел $z_1=a+bi$, $z_2=c+di$ называют комплексное число z=(ac-bd)+(ad+bc)i.

<u>Замечание</u>: на практике нет нужды пользоваться формулой произведения. Можно перемножать данные числа как двучлены, а потом учитывать, что $i^2=-1$.

Таким образом, видим, что сложение, вычитание и умножение комплексных чисел в алгебраической форме производят по правилам соответствующих действий над многочленами.

Задания.

1. **Вычислите значение выражения:**

   (a) $i^{28}+i^{33}+i^{135}$, (b) $(i^{13}+i^{14}+i^{15})i^{32}$, (c) $i^{43}+i^{48}+i^{44}+i^{45}$;

Решим (a):

Выяснив, что значения степеней числа i повторяются с периодом 4, получаем алгоритм вычисления любой степени числа i:

- ***Показатель степени делится на 4, значение степени равно 1***
- ***Показатель степени при делении на 4 дает остаток 1, значение степени равно i***
- ***Показатель степени при делении на 4 дает остаток 2, значение степени равно-1***
- ***Показатель степени при делении на 4 дает остаток 1, значение степени равно – i***

$28=4\bullet 7$, $i^{28}=1$

$33=4\bullet 8+1$, $i^{33}=i$

$135=4\bullet 33+3$, $i^{135}=-i$

Таким образом, получаем: $\mathbf{i^{28}+i^{33}+i^{135}=1+i-i=1}$

2. **Найти такие значения x, y при которых комплексные числа z_1, z_2 будут равны:**

a. $z_1=3y+5xi$ и $z_2=15-7i$
b. $z_1=7x+5i$ и $z_2=1-10iy$

Решение (a):

По определению комплексные числа равны, если $3y=15$, $5x=-7$.

Отсюда находим $x=(-7)/5$, $y=5$.

1. **При каких x и y справедливы равенства?**

1. $(2x+3y)+(x-y)i=7+6i$
2. $x+(3x-y)i=2-i$
3. $(3i-1)x+(2-3i)y=2-3i$

1. **Выполните действия:** $(3+5i)+(7-2i)$

Решение: $(3+5i)+(7-2i)=(3+7)+(5i-2i)=10+3i$;

a. $(-5+2i)-(5+2i)$;
b. $(5-4i)+(6+2i)$;

1. **Найдите значение выражения:** $(2+3i)^2$

Решение:

Здесь рациональнее будет использовать формулы сокращенного умножения, а не разбивать в произведение некоторого числа скобок.

$(2+3i)^2=4+2\bullet2\bullet3i+9i^2=4+12i-9=-5+12i$

a. $(3-5i)^2$;
b. $(17+6i)^3$;
c. $(11-7i)(11+7i)$;

Занятие № 2.

ТЕМА: Сопряженные комплексные числа.

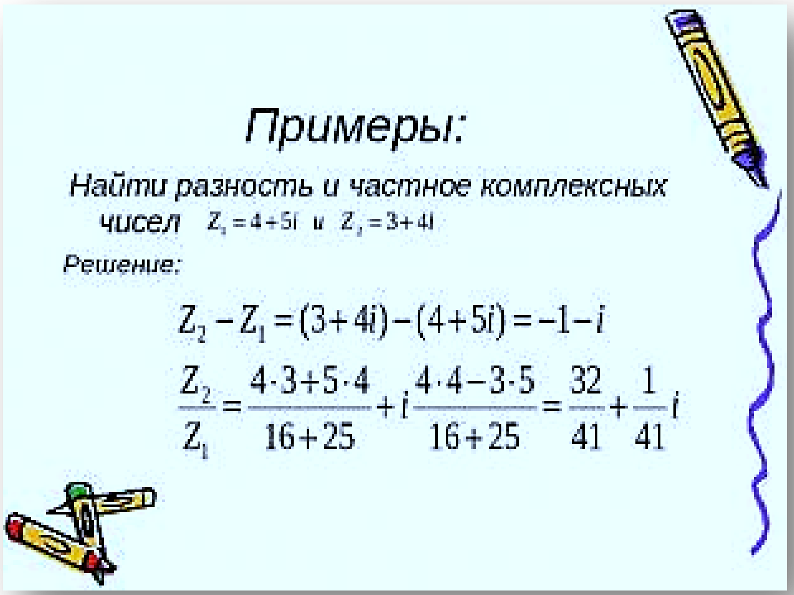
<u>**Определение 1**</u>**:** два комплексных числа называются сопряженными, если они отличаются друг от друга только знаками перед мнимой частью.

Пример:

$25+3i$ и $25-3i$ – сопряженные комплексные числа

-6+i и -i-6 – сопряженные комплексные числа

8,2-i и -i+8,2 – не сопряженные комплексные числа



Задания.

1. Выполните деление (2+3i)/(5-7i)

Чтобы выполнить деление, произведем дополнительное действие:

умножим делимое и делитель на комплексное число, сопряженное делителю

$((2+3i)/(5-7i))((5+7i)/(5+7i))=(10+14i+15i+21i^2)/(25-49i^2)=$

$=(-11+29i)/74=-11/74+(29/74)i$

1. 5/(3+2i);
2. (1-i)/(1+i);
3. (6-7i)/i;

2. Вычислите значение выражения:

A. $i^{123}+(1-i)^6-(1+i)^8$;
B. $[(1+i)/(1-i)]^{12}+[(1-i)/(1+i)]^{12}$;

Решение В:

$[(1+i)/(1-i)]^{12}+[(1-i)/(1+i)]^{12}=[((1+i)(1+i))/((1-i)(1+i))]^{12}+$

$+[((1-i)(1-i))/(1+i)(1-i))]^{12}=[(1+i)^2/(1-i^2)]^{12}+=[(1-i)^2/(1-i^2)]^{12}=$

$=[(1+2i+i^2)^{12}+(1-2i+i^2)^{12}]/2^{12}=[2^{12}\bullet i^{12}+2\bullet(-i)^{12}]/2^{12}=i^{12}+(-i)^{12}=1+1=2$

3. Найдите число, сопряженное данному:

5-17,7i; 5-7i; 33i+12; 6i; -8-63i; 11i

4. Найдите сумму числа z и ему сопряженного: z=113,75+21i

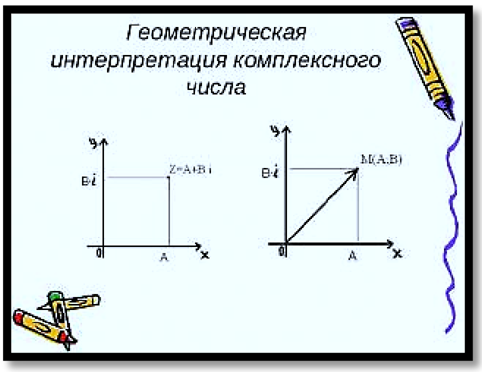
5. Найдите число сопряженное сопряженному, если z=39+i

1. Найдите произведение z и числа ему сопряженному, если z=11-i.
2. Найдите сумму сопряженных чисел,у одного из которых действительная часть равна – 3, мнимая 17.

Занятие № 3.

ТЕМА: Геометрическая интерпретация комплексного числа.

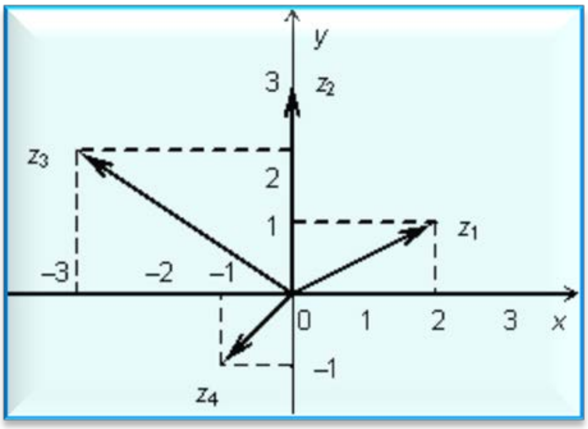
Комплексное число z=a+bi можно изобразить точкой Z плоскости с координатами (a, b).



Для этого выберем на плоскости декартову систему координат (рис.).

Действительные числа изображаются точками оси абсцисс. Чисто мнимые числа, т. е. числа вида bi (0+bi), изображаются точками оси ординат. Заметим, что числа (a=0), т. е. вида bi, изображаются точками оси ординат.

Существует другой способ геометрической интерпретации комплексных чисел.



- **каждой точке плоскости с координатами (a, b) соответствует**

один и только один вектор с началом O(0, 0) и концом Z(a, b).

Поэтому комплексное число z=a+bi можно изобразить в виде вектора с началом в точке O(0, 0) и концом в точке Z(a, b). Очевидно, что при таком изображении:

- **Сопряженные комплексные числа изображаются точками, симметричными относительно оси абсцисс** (см. рисунок)

  $z_1=2+i$, $z_2=+3i$; $z_3=-3+2i$; $z_4=-1-i$

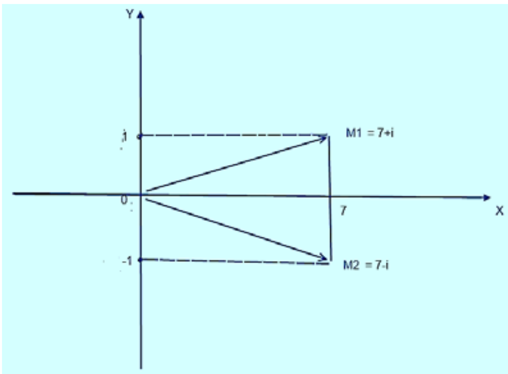
Задания.

Изобразите на координатной плоскости следующие числа

$z_1=5$, $z_2=-3i$, $z_3=3+2i$, $z_4=5-2i$, $z_5=-3+2i$, $z_6=-4-5i$

- в виде точек плоскости;
- при помощи векторов;

a. Изобразить на плоскости комплексное число $z_1=7+i$, ему сопряженное z_2. Найти площадь треугольника, заключенного между векторами OM_1 и OM_2, (где OM_1 – изображение комплексного числа z_1, OM_2 – изображение z_2) и отрезком M_1M_2.



Решение:

z=7+i, z=7-i

Построив оба вектора, соответствующие комплексным числам, видим, что высота

треугольника OM_1 M_2 равна 7, основание 2.

По формуле ищем площадь треугольника:

$S=(1/2)\bullet M_1M_2\bullet h=(1/2)\bullet 2\bullet 7=7$

b. Найдите площадь фигуры, заключенной между векторами, изображающими комплексные числа $z_1=2-2i$, $z_2=1+3i$ и прямой, проходящей через точки A(2, – 2), C(1, 3).
c. Даны четыре комплексных числа: $z_1=3$, $z_2=-3$, $z_3=3i$, $z_4=-3i$. Изобразите их точками комплексной плоскости, соединив эти точки, определите какая фигура будет изображена и найдите длины диагоналей этой фигуры.

Занятие № 4.

ТЕМА: Тригонометрическая форма комплексного числа. Решение квадратных уравнений, дискриминант которых отрицателен.

Пусть комплексное число z=a+bi изображено в виде вектора **r** с началом O(0, 0) и концом Z(a, b)(рис.) Вектор OZ можно задавать не только его координатами a и b, но также длиной r и углом φ, который он образует с положительным направлением оси абсцисс. При этом a=rcosφ , b=rsinφ и число z принимает вид **z=r(cosφ +isinφ)**, который называется **тригонометрической формой комплексного числа**. Число **r** называют **модулем** комплексного z и обозначают **|z|** . Число **φ** называют **аргументом z** и обозначают **Arg z.**

Определение 1: модулем комплексного числа z=a+bi называется длина вектора z, которую можно можно вычислить по формуле $|z| =\sqrt{a^2 + b^2}$.
Обозначив модуль комплексного числа буквой $r=|z| =\sqrt{a^2 + b^2}$.

Определение 2: аргументом комплексного числа z=a+bi называется угол φ , который образует вектор z с положительным направлением оси абсцисс, отсчитываемый против часовой стрелки.

Т. к cosφ , sinφ – функции периодические с периодом 2π , то φ =φ +2π k, где k-целое число.

Назовем главным аргументом φ при k=0 и при составлении тригонометрической формы комплексного числа будем искать этот угол.

Из этих соотношений видим, что cos φ =a/r, sin φ =b/r, тогда

z=a+bi=rcos φ + irsin φ =r(cos φ +isin φ) - тригонометрическая форма комплексного числа.

Задания.

1. **Записать каждое комплексное число в тригонометрической форме:**

z=1+i; z=-2+2i•3; z=-3i; z=5; z=6i

- z=1+i;

Решение:

$a=1, b=1, r= |z| =\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

$\cos \varphi =1/\sqrt{2}=\sqrt{2}/2$; $\sin \varphi =1/\sqrt{2}=\sqrt{2}/2$;

$\varphi =\pi /4$

$z=1+i=\sqrt{2}(\cos\pi/4+i\sin\pi /4)$.

- $z=-2+2i\sqrt{3}$

Решение:

a=-2, b=2√ 3

r=√ (-2)²+(2√ 3)²=√16=4

cos φ =-1/2;   sin φ =2√3/4=√3/2

φ =2π /3

z=-2+2√ 3=4(cos 2π /3+isin 2π /3)

Рассмотрим теперь решение квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом

Значение дискриминанта b^2-4ac	Корни уравнения
$b^2-4ac>0$	Уравнение имеет два различных действительных корня: $x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$; $x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
$b^2-4ac=0$	Уравнение имеет два равных действительных корня: $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$
$b^2-4ac<0$	Уравнение имеет два различных мнимых корня: $x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}\,i}{2a}$; $x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}\,i}{2a}$, корни – сопряженные комплексные числа

1. Решить уравнение $x^2-6x+13=0$

Решение:

$D=b^2-4ac=(-6)^2-4\bullet 1\bullet 13=36-52=-16$

$\sqrt{D}=\sqrt{-16}=\sqrt{16(-1)}=4i$

$X_{1,2}=(-b\pm\sqrt{D})/2a$

$X_1=(6-4i)/2=2(3-2i)/2=3-2i$, $X_2=(6+4i)/2=2(3+2i)/2=3+2i$

Таким образом получаем, что если $D<0$, то уравнение всегда имеет два решения в комплексных числах.

2. Решить уравнение $x^2+3x+4=0$;
3. Найти корни x_1 и x_2 уравнения $4x^2-20x+26=0$;

Занятие № 5.

ТЕМА: История открытия комплексных чисел. Целые гауссовы числа, как частный случай комплексных чисел.

Древнегреческие математики под числами понимали только натуральные числа. Постепенно складывалось представление о бесконечности множества натуральных чисел. В III веке Архимед разработал систему обозначения вплоть до громадных чисел. Наряду с натуральными числами применяли дробные числа, составленные из целого числа с долей единицы. В практических расчетах дроби применялись за две тысячи лет до нашей эры в древнем Египте и древнем Вавилоне.

Долгое время полагали, что результат измерения всегда выражается или в виде натурального числа, или в виде отношения таких чисел, то есть дроби. Древнегреческий философ и математик **Пифагор** учил, что "элементы чисел являются элементами всех вещей и весь мир в целом является гармонией и числом. " Сильнейший удар по этому взгляду был нанесен открытием, сделанным одним из пифагорейцев. Он доказал, что диагональ квадрата несоизмерима со стороной. Отсюда следует, что натуральных чисел и дробей недостаточно для того, чтобы выразить длину диагонали квадрата со стороной 1. Есть основания утверждать, что именно с этого открытия начинается эра теоретической математики: открыть существование несоизмеримых величин с помощью опыта, не прибегая к абстрактному рассуждению, было невозможно.

Следующим важным этапом в развитии понятия о числе было введение отрицательных чисел. Это было сделано китайскими математиками за два века до нашей эры. Отрицательные числа применял в III веке древнегреческий математик Диофант, знавший уже правила действия с ними, а в VII веке эти числа уже подробно изучили индийские ученые, которые сравнивали такие числа с долгом. С помощью отрицательных чисел можно было единым образом описывать изменения величин. Уже в

VIII веке было установлено, что квадратный корень из положительного числа имеет два значения – положительное и отрицательное, а из отрицательных чисел квадратный корень извлекать нельзя: нет такого числа x, чтобы $x^2=-9$.

В XVI веке в связи с изучением кубических уравнений оказалось необходимым извлекать квадратные корни из отрицательных чисел. В формуле для решения кубических уравнений вида ($x^3+px+q=0$) появились кубические корни и квадратные корни:

$^{3}\square(-q/2+\square(q^2/4+p^3/27))+{}^{3}\square(-q/2-\square(q^2/4-p^3/27))$

Эта формула безотказно действует в случае, когда уравнение имеет один действительный корень ($x^3+3x-4=0$), а если оно имеет три действительных корня ($x^3-7x+6=0$), то под знаком квадратного корня оказываются отрицательные числа. Получилось, что путь к этим корням ведет через невозможную операцию извлечения квадратного корня из отрицательного числа.

Вслед за тем, как были решены уравнений четвертой степени, математики усиленно искали формулу для решения уравнения пятой степени. Но Руффини (Италия) на рубеже XVIII и XIX веков доказал, что буквенное уравнение пятой степени ($x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$) нельзя решить алгебраически, точнее его корень нельзя выразить через буквенные величины a, b, c, d, e с помощью шести алгебраических действий (сложение, умножение, вычитание, деление, возведение в степень, извлечение корня).

В 1830 году Галуа (Франция) доказал, что никакое общее уравнение, степень которого больше, чем четыре, нельзя решить алгебраически в радикалах. Тем не менее всякое уравнение n-ой степени имеет (если рассматривать и комплексные числа) № корней, среди которых могут быть и равные.

В этом математически были убеждены ещё в XVII (основываясь на разборе многочисленных частных случаев), но лишь на рубеже XVIII и XIX веков упомянутая теорема была доказана Гауссом.

Итальянский алгебраист Джон Кардане в 1545 году предложил ввести числа новой природы. Он показал, что система уравнений

$x+y=10$

$xy=40$

не имеющая решений во множестве действительных чисел, имеет решение вида ($x=5\square\square-15$, $y=5\square\square-15$), нужно только условиться действовать над такими выражениями по правилам обычной алгебры и считать, что

$\square-a\square\square-a=-a$. Кардане называл такие величины "чисто отрицательные", считая их бесполезными и старался не употреблять. В самом деле, с помощью таких чисел нельзя выразить ни результат измерения какой-нибудь величины, ни изменение какой-нибудь величины. Но уже в 1572 году вышла книга итальянского алгебраиста Р. Бомбелли, в которой были установлены первые правила арифметических операций над такими числами, вплоть до извлечения из них кубических корней. Название "мнимые числа" ввел в 1637 году французский математик и философ Р. Декарт, а в 1777 году один из крупнейших математиков XVIII века – Л. Эйлер предложил использовать первую букву французского слова **imaginaire** (мнимый) для обозначения числа □-1 (мнимой единицы). Этот символ вошел во всеобщее употребление благодаря К. Гауссу.

Термин "комплексные числа" так же был введен Гауссом в 1831 году. Слово комплекс (от латинского complexus) означает связь, сочетание, совокупность понятий, предметов, явлений и т. д., образующих единое целое. В течение XVII века продолжалось обсуждение арифметической природы мнимых чисел, возможности дать им геометрическое обоснование.

Постепенно развивалась техника операций над мнимыми числами.

На рубеже XVII и XVIII веков была построена общая теория корней n-ой степени сначала из отрицательных, а затем из любых комплексных чисел, основанная на следующей формуле английского математика **А. Муавра** (1707 год):

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n□\varphi) + i\sin(n□\varphi)$$

С помощью этой формулы можно было вывести формулы для косинусов и синусов кратных дуг.

Л. Эйлер вывел в 1748 году замечательную формулу: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$,

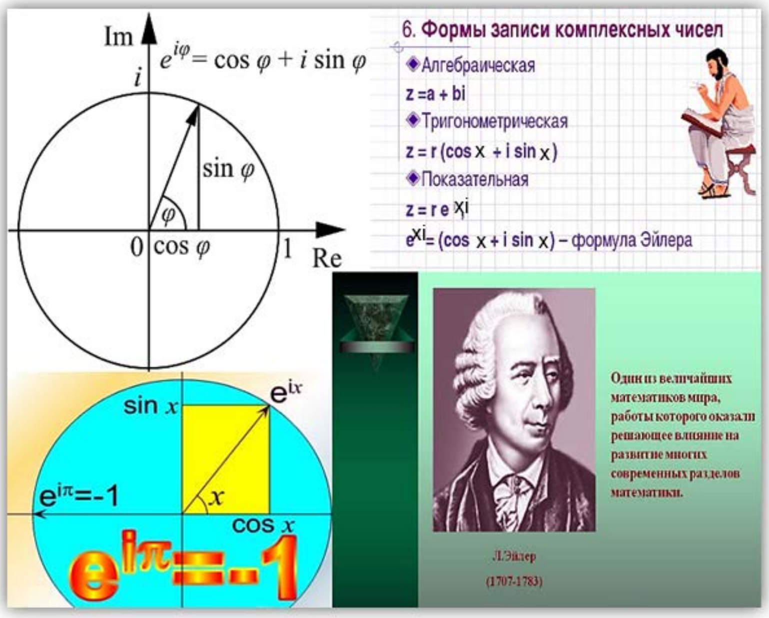
которая связывала воедино показательную функцию с тригонометрической. С помощью формулы Л. Эйлера можно было возводить число **е** в любую комплексную степень.
Любопытно, например, что $e^{i\pi} = -1$ а $e^{i2\pi} = 1$. Можно находить синус и косинус от комплексных чисел, вычислять логарифмы таких чисел, то есть строить теорию функций комплексного переменного.

В конце XVIII века французский математик Ж. Лагранж смог сказать, что математический анализ уже не затрудняет мнимые величины. С помощью мнимых чисел научились выражать решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Такие уравнения встречаются, например, в теории колебаний материальной точки в сопротивляющейся среде. Ещё раньше швейцарский математик Я. Бернулли применял комплексные числа для вычисления интегралов.

В течение XVIII века с помощью комплексных чисел были решены многие вопросы, в том числе и прикладные задачи, связанные с картографией, гидродинамикой и т. д. Однако ещё не было строго логического обоснования теории этих чисел. Поэтому французский ученый П. Лаплас считал, что результаты, полученные с помощью мнимых чисел, – только наведение, приобретающее характер настоящих истин лишь после подтверждения прямыми доказательствами. "Никто ведь не сомневался в точности результатов, получаемых при вычислениях с мнимыми количествами, хотя они представляют собой только алгебраические формы иероглифы нелепых количеств" – Л. Харна.

В конце XVIII века, в начале XIX века было получено геометрическое истолкование комплексных чисел. Датчанин К. Вессель, француз Ж. Арган и немец К. Гаусс независимо друг от друга предложили изобразить комплексное число (z=a+bi) точкой M(a,b) на координатной плоскости. Позднее оказалось, что ещё удобней изображать число не самой точкой M(a,b), а OM – вектором, идущим в эту точку от начала координат. При таком истолковании сложению и вычитанию комплексных чисел соответствует эти же операции над векторами. Вектор OM можно задавать не только его координатами a и b, но также длиной r и углом φ, который он образует с положительным направлением оси абсцисс. При этом a=rcosφ , b=rsinφ и число z принимает вид z=r(cosφ +isinφ), который называется тригонометрической формой комплексного числа. Число r называют модулем комплексного z и обозначают |z| . Число φ называют аргументом z и обозначают Arg z. Заметим, что если z=0, значение Arg z не определено, а при z ≠ 0 оно определено с точностью до кратного 2π . Упомянутая ранее формула Эйлера позволяет записать число z в виде

$z=r\bullet e^{i\varphi}$ (показательная форма комплексного числа).



Геометрическое истолкование комплексных чисел позволило определить многие понятия связанные с функцией комплексного переменного, расширило область их применения. Стало ясно, что комплексные числа полезны во многих вопросах, где имеют дело с величинами, которые изображаются на векторной плоскости. Например: при изучении течения жидкости и задачи теории упругости.

Мы не будем уделять время на изучение всех приложений комплексных чисел, рассмотрим более подробно арифметику целых комплексных чисел, с которыми мы уже знакомы. Их еще будем называть целыми гауссовыми.

Принято считать, что арифметика предшествует алгебре, что это более элементарная часть математики. Между тем, арифметика, если ее понимать как учение о свойствах целых чисел и о действиях над ними, трудный и далеко не элементарный раздел математики. Рассмотрим, например, **основную теорему арифметики.** Сначала докажем вспомогательные теоремы.

Вспомогательные теоремы

Основная теорема арифметики утверждает возможность разложения любого целого числа, которое больше единицы, на простые множители. Прежде чем сформулировать и доказать ее, рассмотрим две вспомогательные теоремы.

Теорема.

Любое целое положительное и отличное от единицы число **а** либо делится на простое число **р**, либо **а** и **р** – взаимно простые числа.

Доказательство.

Наибольший общий делитель чисел а и р делит р. Так как р – простое число по условию, то его положительными делителями являются лишь 1 и р, следовательно, НОД(а, р) равен либо 1, либо р. В первом случае НОД(а, р)=1, откуда следует, что числа а и р – взаимно простые. Во втором случае НОД(а, р)=р, а так как а делится на НОД(а, р), то а делится на р.

Теорема.

Если произведение нескольких целых положительных и отличных от единицы множителей делится на простое число р, то хотя бы один множитель делится на р.

Доказательство.

Каждый из множителей согласно предыдущей теореме либо взаимно прост с числом р, либо делится на р. Если бы все множители были взаимно просты с р, то произведение этих множителей было бы взаимно просто с р в силу свойств взаимно простых чисел. Поэтому, хотя бы один из множителей делится на р. К началу страницы

Основная теорема арифметики

Теперь мы обладаем необходимым арсеналом знаний, позволяющим провести доказательство основной теоремы арифметики.

Теорема.

Любое целое число, которое больше 1, можно разложить на произведение простых множителей, причем это разложение единственно, если не учитывать порядок следования множителей.

Доказательство.

Пусть **a** – целое число, большее единицы.

Сначала докажем возможность разложения числа **a** на простые множители.

Пусть p_1 – наименьший положительный и отличный от 1 делитель числа **a**. В силу теоремы, доказанной в разделе таблица простых чисел, число p_1 – простое. Тогда по определению делимости существует такое целое число a_1, что $a=p_1 \cdot a_1$. Если a_1 больше единицы, то существует его наименьший простой делитель p_2, откуда $a_1=p_2 \cdot a_2$ и $a=p_1 \cdot p_2 \cdot a_2$. Если a_2 больше единицы, то существует его наименьший простой делитель p_3, поэтому $a_2=p_3 \cdot a_3$, откуда $a=p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot a_3$. И так продолжаем этот процесс, пока не получим $a_n=1$, что неизбежно, так как a, a_1, a_2, … — последовательность убывающих целых положительных чисел. Итак, мы всегда можем получить разложение числа **a** на простые множители вида $a=p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$ (при $n=1$ имеем $a=p_1$, это разложение соответствует случаю, когда число а простое).

Осталось доказать единственность полученного разложения.

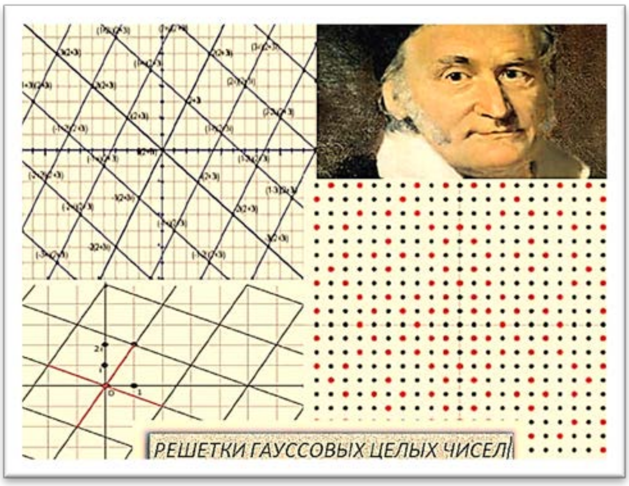
Предположим, что помимо разложения $a=p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$ существует еще одно разложение числа а на простые множители q_1, q_2, …, q_m вида $a=q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_m$. Тогда должно быть справедливо равенство $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n=q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_m$. Покажем, что при $n \neq m$ это равенство невозможно, а при $n=m$ произведения $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$ и $q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_m$ тождественно равны.
Правая часть последнего равенства делится на q_1, тогда в силу предыдущей теоремы хотя бы один из множителей p_1, p_2, …, p_n должен делиться на q_1. Допустим, на q_1 делится p_1, но так как числа p_1 и q_1 простые, то p_1 делится на q_1 только тогда, когда $q_1=p_1$. Это позволяет нам сократить обе части равенства $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n=q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_m$ на $q_1=p_1$, получаем $p_2 \cdot \ldots \cdot p_n=q_2 \cdot \ldots \cdot q_m$. Рассуждая аналогично про p_2 и q_2, придем к равенству $p_3 \cdot \ldots \cdot p_n=q_3 \cdot \ldots \cdot q_m$. И так действуем дальше, пока в какой либо части равенства не сократятся все множители. При $n \neq m$ мы получим или равенство $1=q_{n+1} \cdot \ldots \cdot q_m$, или равенство $p_{m+1} \cdot \ldots \cdot p_n=1$, которые невозможны для простых чисел q_{n+1}, …, q_m и p_m+1, …, p_n. Если же $n=m$, то мы получим тождество $1=1$, которое указывает на тождественное равенство разложений $a=p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$ и $a=q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_m$. Этим доказана единственность разложения числа на простые множители.
В заключение отметим, что основную

теорему арифметики часто называют **теоремой о разложении чисел на простые множители**

Занятие № 6.

ТЕМА: Целые гауссовы числа.
Расположение целых гауссовых чисел на комплексной плоскости.

Определение 1: целым гауссовым числом называется комплексное число, действительная и мнимая части которого являются целыми рациональными числами, т. е. это комплексные z вида **z = a+bi**, где a и b – целые рациональные числа: a,b∈ Q[2]



Определение 2: нормой целого гауссового числа z = a+bi называется неотрицательное целое рациональное число **N(z) = a²+b²**.

Теперь рассмотрим как расположены целые гауссовы числа на комплексной плоскости (т. е. где определены действительная и мнимая оси).

У каждого гауссова числа z есть 4 кратных с той же нормой (и, соответственно, тем же модулем) — это само z и ассоциированные с ним 3 числа, которые получаются последовательным умножением z на i : **z**; **iz**; **-z**; **-iz**;

Но умножение на i означает на комплексной плоскости поворот радиус-вектора числа на 90° против часовой стрелки, причём модуль результата будет тем же. Таким образом, все 4 числа образуют равносторонний крест (выделен красным на рисунке), центр и вершины которого кратны. Последовательно сдвигая этот крест во все стороны на одну из 4 величин, ассоциированных с **z** , мы получаем на всей плоскости квадратную решётку, все узлы которой (вершины квадратов) кратны z. Обратно, любое кратное z совпадает с одним из узлов решётки. Ширина каждого квадрата решётки равна $|z|$. Далее для краткости эта решётка будет называться «решёткой кратных» (или, если требуется уточнение, «z-решёткой кратных»).

Т. о. видим все точки с целочисленными координатами, лежащие в вершинах квадратов со стороной, равной 1 и 2i будут являться изображением целых гауссовых чисел. Т. е. в отличие от целых рациональных чисел, которые располагаются на одной прямой, целые гауссовы числа создают решетку при нанесении их на комплексную плоскость. На рисунке правее вы видите: Распределение гауссовых простых чисел на комплексной плоскости (простые числа выделены красным цветом).

Задания.

---

[2] *Рациональные числа(Q- от англ. quotient «частное») и может быть записано в виде:* $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$

1) Среди комплексных чисел найдите целые и вычислите их нормы:

a. 147,3+(3/2)i;   2,5+7i;   3i;   5i+2

2) Доказать **теорему 1**: норма комплексных чисел мультипликативна, т. е. $N(\alpha\beta) = N(\alpha) \bullet N(\beta)$

Задача 2:

Норма целого комплексного числа **1+ i** равна 2, а целого комплексного числа **2+ i** равна 5. Будет ли норма произведения этих чисел равна 10? $C=(1+i)(2+i)=(1\bullet2+1\bullet1) + (1\bullet1 - 1\bullet2)i=3-i \Leftrightarrow N=3^2+(-1)^2=9+1=10$ итак ответ – ДА!

3)Доказать **теорему 2**: положительное целое рациональное число **C** является нормой некоторого целого гауссова числа тогда и только тогда, когда число **C** представимо в виде суммы квадратов двух целых чисел.

Задача 3:

Будет ли 9 являться нормой некоторого целого гауссова числа?

Решение: рассмотрим алгоритм, позволяющий представить целое рациональное число в виде суммы двух квадратов.

$\sqrt{9}=3$, рассмотрим натуральные числа $n \leq 3$. В данном примере такие числа 1, 2, 3. Возводим каждое такое число в квадрат и вычитаем этот результат из 9. Если находится такая разность, которая есть квадрат какого-либо натурального числа, то мы подобрали ту пару чисел, сумма квадратов которых и будет являться исходным числом.

9-1=8 – не квадрат, 9-2=5 – не квадрат.

Вывод – следуя алгоритму мы выяснили, что 9 **не** является нормой некоторого целого гауссова числа.

4)Выберите те положительные целые рациональные числа, которые являются нормой некоторых целых гауссовых чисел: 26; 16; 10; 13; 18; 7; 17; 61; 24; 29; 50

Замечание: норма целого гауссова числа всегда является натуральным числом.

Занятие № 7

ТЕМА: Отношение делимости на множестве целых гауссовых чисел.
Простые гауссовы числа.

Определение 1: будем говорить, что целое гауссово число $\alpha\neq0$ делит целое гауссово число β и записывать этот факт через $\alpha|\beta$ – если найдется целое гауссово число γ такое, что имеет место равенство: $\beta=\alpha\bullet\gamma$

Замечание: так как норма мультипликативна, то $N(\beta)=N(\alpha)\bullet N(\gamma)$, так как $\alpha\neq0$, то $N(\alpha)\neq0$, то необходимым условием для $\alpha|\beta$ является делимость $N(\alpha)|N(\beta)$, где $N(\alpha)$, $N(\beta)$ – целые рациональные числа. Известно, что в случае целых рациональных чисел имеются только два числа, которые делят все целые числа: +1 и – 1.

В случае целых гауссовых чисел таких числа четыре.

Определение 2: числа **+1, – 1, +i, – i** называются **делителями** единицы.

Действительно: $\alpha=\alpha\bullet1$ $\alpha=(-i\alpha)\bullet i$ $\alpha=(-\alpha)\bullet(-1)$ $\alpha=(i\alpha)\bullet(-i)$

Определение 3: целое гауссово число α не являющееся делителем единицы называется простым, если в любом его разложении $\alpha=\tau\bullet\gamma$ в произведении двух целых гауссовых чисел один из сомножителей является делителем единицы.

Теорема 1: Если **р-норма** целого гауссова числа γ является простым рациональным числом, то γ будет простым гауссовым числом.

Доказательство: пусть $\gamma = a+bi$ – целое гауссово число и $N(\gamma)=p$ – простое рациональное число. Тогда если $\gamma=\alpha\beta$, то $N(\gamma)=p=N(\alpha)\bullet N(\beta)$. Следовательно возможны два случая:

1. $N(\alpha)=p$, $N(\beta)=1$, значит β – делитель единицы
2. $N(\alpha)=1$, $N(\beta)=p$, значит α – делитель единицы

Таким образом, по определению 3, γ – простое гауссово число. ■Теорема доказана.

Задания.

1. Выяснить, является ли α делителем β:
   a. $\alpha=5-7i$; $\beta=5+7i$
   b. $\alpha=1+i$; $\beta=3i+1$
   c. $\alpha=2+i$; $\beta=3i+1$
   d. $\alpha=3+7i$; $\beta=19+25i$
   e. $\alpha=4-i$; $\beta=19+25i$

f. $\alpha=-5+i$; $\beta=11i-3$

2. Проверить для тех случаев, когда $\alpha|\beta$ задания 1, выполняется ли условие, что если $\alpha|\beta$, то $N(\alpha)|N(\beta)$.
3. Среди указанных ниже гауссовых чисел выписать простые гауссовы числа:

1. $3i+2$, $4i+1$, $-2i+3$, $-4i-1$, $5+5i$;
2. $-5i+6$, $7i+1$, $1+5i$, $-4+i$, $3+2i$;
3. $-7-i$, $13+i$, $4-i$, $i-1$, $2+3i$;

Занятие № 8

ТЕМА: НОД целых гауссовых чисел.

Определение 1: два целых гауссовых числа называются **ассоциированными**, если они отличаются друг от друга на сомножитель, равный делителю единицы.

Пример: β, $-\beta$, $i\beta$, $-i\beta$ – ассоциированные целые гауссовы числа, если β – целое гауссово число.

Определение 2: общим делителем целых гауссовых чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ называется целое гауссово число γ, такое что $\gamma|\alpha_1, \ldots,\gamma|\alpha_n$.

Определение 3: наибольшим общим делителем (НОД) целых гауссовых чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ называется целое гауссово число γ, такое что

1. $\gamma|\alpha_1, \ldots, \gamma|\alpha_n$
2. Для любого другого ξ общего делителя $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ верно $\xi|\gamma$.

Утверждение: примем без доказательства факт существования НОД у целых гауссовых чисел α и β, хотя бы одно из которых не равно 0, и его представление в виде линейной комбинации этих чисел.

Т. е. $\gamma=\alpha\xi+\beta\eta$, $\gamma=$НОД (α, β); ξ, η – целые гауссовы числа.

Определение 4: целые гауссовы числа α, β называются взаимно простыми, если их НОД ассоциирован с 1.

Воспользовавшись утверждением, получаем $(\alpha, \beta)=1$ тогда и только тогда, когда существуют ξ, η – целые гауссовы числа, что верно $\alpha\xi+\beta\eta=1$.

Лемма: если α взаимно просто с β_1 и α взаимно просто с β_2, то α взаимно просто с $\beta1 \bullet \beta2$.

Доказательство: так как НОД (α, β_1) ассоциирован с 1, то по критерию взаимной простоты найдутся такие числа ξ и η, что $1=\xi\alpha+\eta\beta$.

т. к. НОД (α, β_2) ассоциирован с 1, то найдутся ρ и τ, что $1=\rho\alpha+\tau\beta$

Перемножая равенства имеем:

$1=(\xi\alpha+\eta\beta_1)(\rho\alpha+\tau\beta_2)=\alpha(\xi\rho\alpha+\eta\rho\beta_1+\xi\tau\beta_2)+(\eta\tau)(\beta_1\beta_2)$,

положим $\gamma=\xi\rho\alpha+\eta\rho\beta_1+\xi\tau\beta_2$ и $\delta=\eta\tau$, тогда γ и δ – целые гауссовы числа и $1=\gamma\alpha+\delta(\beta_1\beta_2)$, а это и показывает, что α и $\beta_1\beta_2$ взаимно простые числа. ■**Лемма доказана**.

Следствие: если α взаимно просто с числами $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$, то α взаимно просто с их произведением.

Доказательство: проведем методом математической индукции по числу сомножителей.

1. Если k=2, то утверждение совпадает с леммой
2. Допустим, утверждение доказано для числа сомножителей $< k$. Пусть теперь α взаимно просто с $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$, значит и с $\beta_1, \beta2, \ldots, \beta_{k-1}$.Тогда по предположению индукции α взаимно просто с $\beta1\bullet\beta2\bullet\ldots\bullet\beta_{k-1}$ и по условию α взаимно просто с β_k, тогда по лемме: α взаимно просто с произведением $\beta1\bullet\beta2\bullet\ldots\bullet\beta_k$. ■**что и требовалось доказать**.

Теорема о делении с остатком: пусть α, β ($\beta\neq0$) – два целых гауссовых числа, тогда существуют такие целые гауссовы числа γ и ρ, причем $N(\rho)<N(\beta)$, что $\alpha=\gamma\beta+\rho$.

Занятие № 9.

ТЕМА: Основная теорема арифметики в кольце гауссовых чисел.
Основное свойство простого гауссового числа.

Основная теорема: всякое целое гауссово число α, норма которого больше единицы, разложимо в произведение простых гауссовых чисел $\alpha=\prod_{k=1}^{k=n}\nu_k$ (ν_k – простые гауссовы числа, не обязательно все различные), причем это разложение единственно с точностью до ассоциированности и порядка следования сомножителей.

Доказательство:

Существование разложения: индукция по норме числа α

а) Если $N(\alpha)=2$, то $\alpha=1+i$, где $1+i$ – простое гауссово число б) Пусть $N(\alpha)=n$, а для всех целых гауссовых чисел с меньшей нормой утверждение уже доказано. Тогда или α – простое число и всё доказано, или $\alpha=\rho\tau$, где $N(\rho)<n$ и $N(\tau)<n$.

По предположению индукции, для ρ и τ разложения существуют: $\rho=\nu_1\bullet\nu_2\bullet\ldots\bullet\nu_k$ и $\tau=\sigma_1\bullet\sigma_2\bullet\ldots\bullet\sigma_t$, тогда $\alpha=\nu_1\bullet\ldots\bullet\nu_k\bullet\sigma_1\bullet\ldots\bullet\sigma_t$ – разложение для α.

Однозначность: индукция по норме числа α.

а) Если $N(\alpha)=2$, то $\alpha=1+i$, так как если $\alpha=x+iy$, то $N(\alpha)=x^2+y^2$, а это уравнение в целых числах $x^2+y^2=2$ имеет ровно 4 решения:

$x=1, y=1; x=-1, y=-1; x=1, y=-1; x=-1, y=-1;$

Эти решения соответствуют гауссовым числам $1+i$, $-1+i$, $1-i$, $-1-i$, которые являются ассоциированными.

б) Предположим, что доказанное свойство уже установлено для всех чисел β, таких что $N(\beta)<N(\alpha)$. Пусть $\alpha=\nu_1\bullet\nu_2\bullet\ldots\bullet\nu_s=\gamma_1\bullet\gamma_2\bullet\ldots\bullet\gamma_t$ – это два разложения числа α в произведение простых $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s$ и $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_t$ соответственно.

Заметим, что число, ассоциированное с ν_s встречается среди простых чисел γ: $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_t$. Если бы это было не так, т. е. ν_s не ассоциировано с γ_i, $i=1, 2, \ldots, t$, то ν_s было бы взаимно просто со всеми числами γ_i, а значит и с произведением $\gamma_1\bullet\gamma_2\bullet\ldots\bullet\gamma_t$ (по лемме), т. е. с числом α.. Но это невозможно, т. к. $\nu_s \mid \alpha$.

Итак, ν_s ассоциировано с каким-то из простых чисел $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_t$. Можно считать, что ν_s ассоциировано с γ_t.

Получаем: $\alpha=\nu_1\bullet\ldots\bullet\nu_{s-1}\bullet\nu_s=\gamma_1\bullet\ldots\bullet\gamma_{t-1}\bullet\gamma_t$, откуда

$\beta=\alpha \mid \nu_s=\nu_1\bullet\ldots\bullet\nu_{s-1}=\gamma_1\bullet\ldots\bullet\gamma_{t-1}$.

Но $N(\beta)<N(\alpha)$ θ, по предположению индукции, для β утверждение теоремы уже доказано, т. е. $s-1=t-1$, и представления $\nu_1\bullet\ldots\bullet\nu_{s-1}$ и $\gamma_1\bullet\ldots\gamma_{t-1}$ совпадают с точностью до порядка ассоциированности сомножителей. А так как $\nu_s=\gamma_t$, то это же верно и для последовательностей $\nu_1, \ldots, \nu_s$ и $\gamma_1, \ldots, \gamma_t$.

■ Основная теорема арифметики целых гауссовых чисел доказана.

Основное свойство простого гауссова числа: если простое гауссово число ν делит произведение гауссовых чисел α и β, то ν делит α или ν делит β.

Доказательство: $\nu|\alpha\beta$, следовательно $N(\nu)|N(\alpha\beta)$, и значит $N(\alpha\beta)>N(\nu)>2$. тогда по основной теореме, $\alpha\beta$ обладает каноническим разложением. Делимость $\nu|\alpha\beta$ означает, что $\pi\nu$ входит в каноническое разложение $\alpha\beta$, и каноническое разложение произведения есть произведение канонических разложений. Следовательно, ν входит в каноническое разложение α или β, т. е. $\nu|\alpha$ или $\nu|\beta$, что и требовалось доказать.

Занятие № 10.

ТЕМА: Алгоритм факторизации целого гауссова числа.

Лемма 1**: всякое простое гауссово число является делителем простого рационального числа.**

Доказательство: так как $N(\alpha)=\alpha\bullet\alpha$, то при каждом $\alpha\neq0$ верно $\alpha|N(\alpha)$. Пусть теперь ν – простое гауссово число. Тогда $\nu|N(\nu)$.

$N(\pi)$ – рациональное целое число, значит его можно представить как произведение простых рациональных чисел $p_1\bullet\ldots\bullet p_s$. Тогда $\nu|p_1\bullet\ldots\bullet p_s$, по основному свойству простого числа имеем: $\nu|p_i$

для некоторого i (i=1, 2, ..., s). Следовательно, ν делит некоторое простое рациональное число.

Лемма 2: норма $N(\nu)$ простого гауссова числа ν является или простым рациональным числом, или квадратом простого рационального числа.

Доказательство: по лемме 1 найдется простое рациональное p, такое, что $\nu|p$, т. е. $p=\nu\gamma$.

$p^2=N(p)=N(\nu\gamma)=N(\nu)\bullet N(\gamma)$

$N(\nu)\bullet N(\gamma)=p^2$

$N(\nu)\neq1$, т. к. ν – простое гауссово число.

Тогда возможны случаи:

1. $N(\nu)=N(\gamma)=p$
2. $N(\nu)=p^2$, $N(\gamma)=1$, ■**<u>что и требовалось доказать</u>**.

Утверждение: простое рациональное число **p**, отличное от **2**, не является простым гауссовым числом тогда и только тогда, когда p имеет вид **4k+1**.

1. <u>Алгоритм для выяснения: является ли данное целое гауссово число α простым.</u>

1. Вычислить N(α)

а) если N(α) – простое рациональное число, то α – простое гауссово число

б) если $N(\alpha)=p^2$, где p – простое рационального вида 4k+3, то α – простое гауссово

в) во всех остальных случаях α не является простым гауссовым числом.

1. <u>**Алгоритм факторизации гауссова числа**</u>:

1. вычислить N(α)
2. разложить N(α) в произведение простых рациональных чисел чисел $\alpha=\prod_{k=1}^{k=s} p_k$
все p_i (i=1, 2, ..., s) вида 4k+3 оставляем без изменений, а все p_j вида 4k+1 раскладываем в сумму двух квадратов: $p_j = x^2+y^2$ и
    a. β ассоциировано с x+yi
    b. β ассоциировано с y+xi
3. считаем все возможные произведения полученных в каждом из случаев гауссовых чисел до тех пор, пока не получим число, ассоциированное со сходным числом **α.**

Задания

1. **факторизовать α=7+4i.**

$N(\alpha)=7^2+4^2=49+16=65=5\bullet 13$

α=βγ, N(β)=5, N(γ)=13

5 и 13 – числа вида 4k+1, разложимы в сумму двух квадратов: $5=2^2+1^2$ и $13=2^2+3^2$

Возможны случаи: β ассоциировано с 2+i или с 1+2i; γ ассоциировано с 3+2i или 3i+2.

а) β'=1+2i, γ'=3+2i

Тогда β'γ'=(1+2i)(3+2i)=-1+8i – что число не ассоциировано с 7+4i

б) β'=1+2i, γ'=2+3i

Тогда β'γ'=(1+2i)(2+3i)=-4+7i=i(7+4i)→β'γ'(-i)=7+4i

Возьмем $\beta=\beta'(-i)=2-i$

Ответ: $7+4i=(2-i)(2+3i)$

2. Разложить на простые множители $\alpha=-12+6i$.

$N(\alpha)=144+36=180=2^2\bullet 3^2\bullet 5$

5 – число вида $4k+1\rightarrow$ оно разложимо в сумму двух квадратов: $5=2^2+1^2$.

3 – число вида $4k+3\rightarrow$оно остается без изменений $\alpha=\beta\gamma\delta\tau$, где $N(\beta)=N(\gamma)=2$, $\delta=3$, $N(\tau)=5$

Возможны случаи: β θ γ ассоциированы с $1-i$; τ ассоциировано с $2+i$ или $1+2i$.

а) $\beta'=\gamma'=1-i$, $\tau'=2+i$

Тогда $\beta'\gamma'\delta'\tau'=-24-12i$ – не ассоциировано с $-12+6i$

б) $\beta'=1+i$, $\gamma'=1-i$, $\tau'=1+2i$

Тогда $\beta'\gamma'\delta'\tau'=6+12i=(-i)(-12+6i)\rightarrow\beta'\gamma'\delta'\tau'i=-12+6i$

Пусть $\tau=\tau'i=(1+2i)i=-2+i$

$-12+6i=(1+i)(1-i)3(-2+i)$

3.3. Методические рекомендации по проведению факультативного курса "Арифметика комплексных чисел".

Данный факультативный курс предназначен для изучения в старших классах средней школы, где уже существует определенная база знаний и сформулированы прочные навыки выполнения арифметических операций. Школьники знакомы с различными видами чисел, правилами выполнения возможных операций над ними, изучена теория делимости кольца целых рациональных чисел. Наличие же в данном возрасте более полного, глубокого, разностороннего мышления и возможности самостоятельно выделять общее и частное, благоприятствует восприятию этого факультативного курса.

Первые четыре занятия посвящены знакомству с самими комплексными числами, правилами выполнения действий над ними. Рассматривается тригонометрическая и алгебраическая форма записи комплексных чисел. Целесообразно при объяснении нового материала пользоваться слайдами или плакатами. (см. рисунки).

Если класс с углубленным изучением естественно-математических дисциплин, то материал первых четырех занятий можно только повторить, а потом задать вопросы, чтобы проверить уровень усвоения материала. Опираясь на знания, полученные при изучении математики и учитывая возраст учащихся, многие вычислительные задания можно предложить школьникам попробовать выполнить самостоятельно, в случае неудачи, учитель дает подсказку.

Изучение "традиционной части " позволяет повторить и закрепить материал программного содержания.

Так, например, при рассмотрении тригонометрической формы записи комплексного числа учитель имеет возможность вспомнить с учащимися определения тригонометрических функций, их основные свойства, связь с геометрией, а также повторить тригонометрические формулы, которые вызывают затруднения при запоминании.

Основные понятия этого блока: комплексные числа и действия над ними, число i, мнимые числа, действительные числа, как часть множества комплексных чисел.

Главная методическая особенность состоит в том, что комплексные числа определяются как формальные выражения a+bi, где a и b действительные числа. Говорим о формальных выражениях, не приписывая никакого смысла знакам + и i, при помощи которых они составляются.

Эти выражения являются совершенно новыми объектами, и с самого начала надо договориться о том, какие из них считать равными и определять действия над ними. Завершая рассказ о действиях над комплексными числами, следует подчеркнуть, что четыре основных действия (сложение, вычитание, умножение и деление) обладают теми же свойствами, что и действия над действительными числами.

Рассматривая выражение вида a+0i, можно убедиться, что их арифметика совпадает с арифметикой действительных чисел. В самом деле, вычисляя сумму и произведение чисел z_1= a+0i и z_2=c+0i, получим (a+0i)+(c+0i)=(a+c)+0i и (a+0i)(c+0i)=ac+0i, откуда видно, что сумме чисел z_{1+} z_2 соответствует сумма действительных чисел a+c, произведению $z_1 \cdot z_2$ произведение ac.

Поскольку соответствие между комплексными числами вида a+0i и действительными числами взаимно-однозначно, то можно число a+0i считать равным соответствующему ему действительному числу a.

В результате такого отождествления множество действительных чисел становиться частью множества комплексных чисел.

Обозначив комплексное число 0+1i через i и, убедившись в том, что число 0+bi можно истолковать как произведение действительного числа b и числа i, получаем возможность рассматривать любое комплексное число как сумму комплексного числа a= a+0i и произведения комплексных чисел b=b+0i и i=0+1i.

А так как i^2=(0+1i)(0+1i)=-1+0i =-1, то полезно подчеркнуть, что при выполнении действий над комплексными числами нет надобности помнить формальные определения, а можно действовать как в случае с обычными выражениями с переменными, заменяя i^2 на -1.

При изучении геометрического изображения комплексного числа с помощью точки плоскости важно подчеркнуть, что не только комплексному числу z=a+bi ставится в соответствие точка(a, b) координатной плоскости, но и всякая точка плоскости является образом некоторого комплексного числа, т. е. соответствие между точками плоскости и комплексными числами является взаимно-однозначным. Принято термином "комплексная плоскость" обозначать координатную плоскость, каждой точке которой поставлено в соответствие комплексное число.

Геометрическое изображение комплексных чисел в виде векторов позволяет сразу же дать геометрическую интерпретацию сложения и вычитания комплексных чисел.

Модуль комплексного числа есть расстояние от точки Z до точки O, или длина вектора OZ. Таким образом, для $z=a+bi$, $|z| =\sqrt{a^2+b^2}$.

Здесь полезно заметить, что для действительных чисел $a= a+0i$ модуль равен $|a| =\sqrt{a^2+0^2}$ т. е совпадает с привычным понятием модуля действительного числа и является расстоянием от точки числовой прямой до начала отсчета.

Занятие № 5 целесообразно провести в форме лекции. С одной стороны такая форма проведения урока служит хорошей психологической подготовкой к занятиям в ВУЗе, а с другой – материал об истории открытия комплексных чисел подведет итог первоначального знакомства с ними и позволит плавно перейти к частному случаю комплексных чисел – целым гауссовым числам. К тому же присутствие исторического материала открывает учащимся другой взгляд на математику, как на развивающуюся науку, в которой ведется интенсивный поиск новых закономерностей и новых методов решения задач, поставленных несколько столетий назад.

После изучения "традиционной части" начинается построение арифметики целых гауссовых чисел. В нескольких теоремах этого блока доказательства ведутся методом математической индукции. Чтобы в дальнейшем не сосредотачивать внимание на этом методе целесообразнее будет ввести его до перехода к изучению арифметики гауссовых чисел.

Метод математической индукции является одним из высокоэффективных методов поиска новых результатов и доказательства истинности выдвинутых предположений. Хотя этот метод в математике не нов, но интерес исследователей к нему возрос в связи с развитием дискретной математики. Вряд ли удастся найти какую-нибудь серьезную книгу по дискретной математике, в которой не использовался бы метод математической индукции. Встречаются разные формы и виды математической индукции, нам будет достаточно одной. Рассматривается какое-либо подлежащее доказательству свойство бесконечной последовательности математических объектов. Для метода математической индукции безразлична природа этих объектов. Они могут быть геометрическими, теоретико-числовыми и т. д.

Преподавателю нужно учитывать, что не всегда тот факт, который учащимся предстоит доказывать, выглядит для них естественным.

А положение, представляющееся искусственным, не наглядным, вызывает у многих учащихся чувство внутреннего сопротивления, что препятствует усвоению данной темы.

Относительно связи метода математической индукции со школьной математикой можно сказать, что она вполне может стать столь же тесной, как и в так называемой высшей математике. Надо только умело использовать этот метод, рассредоточив его применение по всему курсу школьной математики. Тем самым упрощаются доказательства многих рассуждений или появляется возможность посмотреть на одни и те же факты и явления с разных сторон. Нельзя упускать из виду следующую особенность метода математической индукции. Метод математической индукции оказывается применимым к широкому кругу задач, относящихся к различным разделам математики, граничных со школьными(задачи из теории чисел, применения формулы Эйлера, начала теории графов и т. д).

Таким образом, владение этим методом рассуждения значительно расширяет возможности учащихся.

Перейдем теперь к построению арифметики кольца целых гауссовых чисел. Хорошо замечено Л. А. Калужниным:

"...суть состоит в том, что и школьная арифметика и высшая арифметика относятся к одной и той же области знания. Было бы полезно, если бы школьники старших классов, имеющие склонность к математике, углубляли тот набор знаний, который они приобрели в младших классах. Такое углубление необходимо, впрочем, и для того, чтобы в дальнейшем познакомиться с высшей арифметикой."

Целые комплексные числа являются естественным обобщением целых рациональных чисел. Важно также заметить, что связь между областями гауссовых чисел и целых гауссовых чисел аналогична связи между рациональными числами и целыми рациональными числами. Всякое рациональное число является комплексным (мнимая часть равна нулю) и всякое целое рациональное число является целым комплексным(гауссовым) числом.

Для дальнейшего полезно представить расположение целых гауссовых чисел на комплексной плоскости. Они представляются точками с целочисленными координатами, в вершинах сетки квадратов со стороной равной 1, покрывающей комплексную плоскость.

Следует обратить внимание, что геометрически модуль комплексного числа – это расстояние соответствующей точки на комплексной плоскости от начала координат.

Как и в кольце целых рациональных чисел, так и в кольце целых гауссовых чисел основной интерес представляет вопрос делимости. В случае целых рациональных чисел имеются только два числа, которые делят все целые числа: +1 и – 1.

В случае целых гауссовых таких числа четыре: +1, – 1, +i, – i.

Других чисел с данными свойствами среди целых гауссовых чисел нет. Можно предложить учащимся доказать этот факт самостоятельно.

Эти четыре решения как раз и соответствуют целым гауссовым числам +1, – 1, i, – i.

Далее для целых гауссовых чисел, аналогично тому, как это делалось для целых рациональных чисел определяются понятия общего делителя, наибольшего общего делителя, взаимно простых и простых чисел.

Первые три понятия трактуются дословно как и в случае целых рациональных чисел. Но на определении простого гауссова числа нужно остановиться поподробнее. Иначе, данное определение простого гауссова числа можно преподнести следующим образом: простое гауссово число α – это такое целое гауссово число норма которого больше единицы и которое не разложимо в произведение двух целых гауссовых чисел, нормы которых меньше, чем норма числа α .

После введения этого определения учитель может предложить каждому ученику составить по одному примеру простого числа.

Следует обратить внимание учащихся на понятие **ассоциированности целых гауссовых чисел**. Оно вводится для того, чтобы можно было компактнее сформулировать само утверждение об однозначности разложения. Доказательство утверждения можно вести по пути установления свойств наибольшего общего делителя и свойств взаимно простых чисел в кольце целых гауссовых чисел. Ключом всего доказательства является утверждение о возможности деления с остатком в кольце целых гауссовых чисел, которую можно сформулировать без доказательства.

Далее займемся описанием множества простых гауссовых чисел. Здесь целесообразно рассмотреть несколько вспомогательных утверждений. Важно обратить внимание, на то, что простое

рациональное число является всегда целым гауссовым числом, но как гауссово число оно не обязательно простое, а может делиться на целые гауссовы числа с меньшей нормой.
Так, например, число 2-простое, если его рассматривать как целое рациональное число, но оно не будет являться простым, если его рассматривать, как целое гауссово число.
Действительно, в области целых гауссовых чисел 2 допускает разложение 2=(1+i)(1-i) и ни один из сомножителей 1+i и 1-i не является делителем единицы.
Очевидно, что и 5 не является простым в кольце гауссовых чисел, так как 5=(2+i)(2-i).
Можно также показать, что все простые числа вида **4n+1** представимы в виде суммы двух квадратов, т. е. являются нормами целых гауссовых чисел, а поэтому не являются простыми гауссовыми числами и, следовательно принадлежат к классу тех простых рациональных чисел, которые разложимы в произведение двух комплексно-сопряженных простых гауссовых чисел. Доказательство этого утверждения основано на теории сравнений, поэтому для школьников оно будет слишком абстрактным и весьма объемным. Поэтому целесообразнее было бы предложить им алгоритм, при помощи которого можно разложить число вида **4n+1** в сумму двух квадратов. Предполагая известным, что все простые числа вида **4n+1** представимы в виде суммы двух квадратов, можно установить, каковы все целые рациональные числа, представимые в виде суммы двух квадратов.
Поэтому при составлении алгоритмов для выяснения простоты целого гауссова числа α и для алгоритма факторизации целого гауссова числа ***можно ввести следующий критерий представимости целого рационального числа в виде суммы двух квадратов***: **для того, чтобы целое рациональное число было представимо в виде суммы двух квадратов, необходимо и достаточно, чтобы простые числа вида 4n+3 входили в разложение этого числа на простые множители в четных степенях.**
Имея в запасе достаточное количество знаний можно заняться доказательством основной теоремы арифметики в кольце гауссовых чисел. Особое внимание следует обратить на однозначность. Существенную роль здесь играет ассоциированность, определение которой было дано ранее.
На последнем занятии данного факультативного курса важно отработать алгоритм для выяснения простоты целого гауссова числа. Навыки, полученные при этом, пригодятся при выяснении простоты произвольного целого гауссова числа.
Заканчивается факультативный курс алгоритмом факторизации целого гауссова числа. Необходимо прорешать достаточно примеров, чтобы прочно освоить такой метод разложения целых комплексных чисел на простые множители. В результате проведения 10 занятий главные цели факультативного курса будут достигнуты:

- Построена арифметика целых комплексных чисел.
- Выявлен ряд свойств целых комплексных чисел.
- Доказана однозначность разложения на простые множители.
- Построен алгоритм факторизации.

Таким образом, на протяжении всего курса должна вестись целенаправленная и систематическая работа не только по усвоению нового материала и общему развитию учащихся, но и, прежде всего, по развитию их логического мышления. Это и работа с новыми математическими объектами, выявлению их логической структуры; обучение школьников возможным приемам доказательств и рассуждений, все это позволяет сделать следующие выводы:

- Благодаря ранее изученной арифметике натуральных чисел, арифметика комплексных чисел, как арифметика новых объектов, усваивается старшеклассниками хорошо.
- Наличие интереса к изучаемой теме положительно влияет на сам процесс обучения и на уровень усвоения знаний.
- Знания по делимости и по комплексным числам, которые были изучены как две разные темы школьного курса математики в результате своего объединения дали возможность построить новую арифметику и познакомиться с ее свойствами.

ВМЕСТО ЗАКЛЮЧЕНИЯ: ФАКУЛЬТАТИВ – ПРОТИВ егэ

В заключение поговорим о ТЕСТАХ и как они соотносятся с факультативом. Ответ прост и незамысловат – никак! Факультатив и тесты (ЕГЭ) – два диаметрально противоположных подхода в обучении школьников. Факультатив развивает творческий подход в науках, а тесты развивают механистический подход основанный на.. «……угадай-ка!» Например в США, как известно, слово «тест» происходит от английского test, означающего «испытание», «проба». Так же звучит и пишется глагол со значением «испытывать», «пробовать», «проверять». Слово test употребляется и в более специальном значении психологического термина как единообразная, стандартизованная система приемов для сравнения уровней внешнего проявления тех или иных форм умственной деятельности (поведения или реакций на определенные стимулы) двух или большего числа людей.

В этом более специальном значении слово test употребляется в работах, связанных с психологией, и включает использование самых различных приемов, таких, как исследования с помощью специальной аппаратуры, опросы, беседы, анкеты, систематические наблюдения, самонаблюдение, изучение вещественных продуктов труда (сделанных человеком вещей, написанных сочинений, записанных выступлений и т. п.), а также систематические отчеты об учебной или производственной деятельности.

В педагогической литературе и практике словом test обычно называют всякую контрольную работу, зачет или экзамен. Результаты тестирования в этом понимании могут быть выражены различно: числовыми показателями, той или иной классификацией или словесными характеристиками. Иногда, правда, употребление слова test ограничивается только приемами и процедурами, дающими числовой показатель. Таковы значения слова test в английском языке и в специальной литературе. В русском языке до середины 30-х годов слово «тест» связывалось почти исключительно с испытанием «умственных способностей». В этом психологическом значении оно приобрело отрицательный смысл и практически вы-пало из употребления на многие годы.

Мне думается, что употребление этого слова в нашей педагогике вполне оправдано и целесообразно, если оно будет использовано для обозначения совершенно определенного вида контрольных работ ...и не более того! *В дальнейшем под словом* ***test*** *будет пониматься особый вид контрольной работы, которая после ее проведения в результате производимого по определенным правилам подсчета дает некий числовой показатель.* Нетрудно заметить, что это определение существенно отличается как от обычного значения соответствующего английского слова, так и от его значения как термина не только в психологии, но и в педагогике. В предложенном определении значение слова «тест» ограничивается лишь одним определенным видом или типом контрольных работ. Далее речь будет идти только об использовании тестов в педагогике. Таким образом, вне поля зрения останутся такие важные и актуальные вопросы, как использование тестов в педагогических исследованиях, и вызывавший много споров вопрос об использовании психологических тестов для определения «умственных способностей». Эти вопросы будут затронуты лишь попутно, без всякой попытки рассмотреть их по существу. Основным отличием теста от других приемов определения уровня знаний, умений или навыков является его строгое единообразие (стандартность процедуры) во всех случаях использования, а также то, что степень его надежности (грубо говоря, объективности) и другие параметры известны или могут быть определены. Это следует иметь в виду как существенное уточнение к данному выше определению слова test, в котором оно будет нами употребляться. Числовой показатель результата, полученного испытуемым, можно рассматривать как результат измерения. При таком подходе сам тест представляется как своего рода измерительный прибор. Можно ли согласиться с таким подходом к тому, что в области преподавания мы привыкли называть «оценкой», «проверкой» или «контролем»? Думается, что такой подход в определенном смысле вполне оправдан. Конечно, мы не в состоянии непосредственно измерить знания, умения, навыки и т. п., например, путем классификации и подсчета всех тех изменений, которые произошли в мозговых клетках. Образно говоря, мы не можем открыть черепную коробку и посмотреть, сколько там накопилось или прибавилось знаний, умений или других результатов обучения. Речь может идти о косвенном измерении знаний, умений, через их внешние проявления. Поскольку наши знания, умения и другие результаты обучения (и воспитания) могут проявляться в практически бесконечном разнообразии внешней деятельности, то речь может идти, как правило, об измерении лишь какой-то части этой деятельности, того, что в статистике называют образцом или выборкой. Следовательно, в педагогике результаты измерения могут обычно носить только статистический, вероятностный и приближенный характер, что не снижает их практической ценности, как и в других науках, где используются такие методы измерения, хотя от творческого подхода в обучении школьников это стоит далеко в стороне. Как известно, в нашей методической литературе и учебной практике слово «измерение» не используется. Употребление слов «контроль», «проверка», «оценка» (знаний) отражает определенное смешение понятий и подчеркивает субъективность выводимых показателей. *В действительности при «выведении оценки» мы имеем дело с двумя различными процессами, хотя сами часто не отдаем себе в этом отчета*.

Первый процесс — это попытка по возможности объективно определить уровень знаний или умений, а второй — это попытка установить их «ценность» для общества, непосредственно или как основы для дальнейшего приобретения общественно необходимых знаний или навыков.

Второй процесс основывается на первом и является, строго говоря, «оценкой». В педагогическую практику, возможно, нет необходимости вводить слово «измерение» (уровня знаний), но в методических работах и исследованиях это понятие следует использовать.

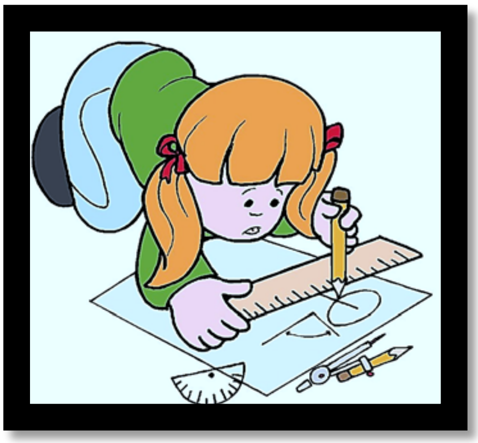
В нашем представлении слово измерение обычно связывается с числовыми результатами, однако суть измерения заключается в сравнении какой-либо величины с однородной ей величиной. Результат сравнения выражается каким-либо символом, чаще всего числом, но он может выражаться и другими символами, в том числе и словесными, скажем терминами определенной классификации. Способ выражения результатов измерения часто определяется целью его проведения. Например, при продаже лимонов их измеряют при помощи пластинки с круглыми отверстиями и выражают результат измерения словами «крупные», «средние» и «мелкие». На этом примере можно ясно показать и разницу между «измерением» и «оценкой». Давая оценку тем же лимонам, мы употребили бы такие слова, как «отличные», «хорошие», «посредственные», «плохие» и т. п. В данном случае оценка совсем не основана на результатах измерения величины, так как потребительская ценность лимонов не определяется только их размером. В той или иной форме измерение результатов обучения всегда было и является неотъемлемой частью процесса обучения. Если подходить к обучению как к управляемому процессу, то измерение результатов педагогического воздействия можно рассматривать как обратную связь, без которой невозможно эффективно управлять этим процессом. С этой точки зрения в тестировании как измерении нет ничего принципиально нового. Например, преподаватель иностранного языка, объяснив новый материал, вызывает учащихся к доске или в иной форме предлагает им какое-то упражнение на этот материал, и в соответствии с тем, как они справились с этим упражнением, он либо повторяет в иной форме свое объяснение, либо переходит к следующей части материала как покажу ниже – в математике это неприемлемо. Периодические контрольные работы, зачеты, экзамены — все это можно рассматривать как акты измерения результатов обучения, а упражнения и вопросы, предлагаемые в таких случаях, как измерительные приборы, «показания» которых так или иначе «снимаются», «считываются» преподавателем. Главным недостатком этих традиционных методов измерения является высокая степень их субъективности. Общеизвестно, что за одну и ту же контрольную работу разные преподаватели часто могут вывести разные оценки. Попыткой уменьшить элемент субъективности являются экзаменационные комиссии. Но это очень громоздкое, дорогое и не всегда надежное средство снижения уровня субъективности. Экзаменационная комиссия по сравнению с одним экзаменатором может сократить элемент субъективности главным образом на уровне «снятия показаний измерительного прибора» (выведения оценки), а сам прибор, т.е. предлагаемые вопросы, упражнения, задачи, остается по существу таким же, как и при одном экзаменаторе. То, что выше было определено как тесты, есть попытка усовершенствовать сам из-мерительный прибор. Следует иметь в виду, что тесты не отменяют, а лишь дополняют традиционные методы оценки или измерения результатов обучения. Учитывая сложность процессов, связанных с работой мозга, и в частности с обучением, едва ли можно надеяться на появление вполне объективных и точных способов измерения в педагогике. Однако, несмотря на все несовершенство традиционных приемов измерения в педагогике, преподавание велось и ведется до сих пор в большинстве случаев довольно успешно. Это объясняется тем, что у хороших преподавателей несовершенство измерительных приборов компенсировалось неким «шестым чувством», которое у них вырабатывалось в процессе профессиональной подготовки и практического опыта. Ведь хорошую сталь умели варить и в давние времена, когда не было никаких приборов для измерения температуры плавки. Хорошие мастера делали это на глазок. Это сравнение, думается, содержит достаточно ясный ответ на вопрос о том, надо ли нам совершенствовать средства измерения в педагогической работе. Дело в том, что образование не только среднее, но и высшее специальное стало массовым явлением с тенденцией охвата все большей части населения. Продолжает быстро расти и объем знаний и умений, нужных современному специалисту. В то же время социально-экономические соображения исключают возможность увеличения сроков обучения в условиях его растущей массовости. Этому количественному росту стали тесны старые рамки. Назревает переход к новому качеству, о чем свидетельствуют поиски новых методов и организационных форм обучения, например эксперименты в области программированного обучения.

В этих условиях одной из центральных и неотложных задач является совершенствование методов и приемов измерения результатов обучения, и в частности осуществление широкой программы создания и использования тестов в указанном ранее понимании этого слова. Рассмотрим некоторые доводы в подтверждение этого взгляда. Разработка, проверка и совершенствование методов обучения невозможны без достаточно точных и надежных средств измерения результатов обучения при различных методах. Иными словами, сама научно-исследовательская работа, на которой только и может основываться прогресс в педагогике, практически невозможна без совершенствования средств измерения. Без достаточно объективных и в какой-то мере стандартизованных средств измерения успешности обучения трудно контролировать, сравнивать и направлять работу различных учебных заведений, т.е. управлять процессом подготовки кадров в широких масштабах. Существующие методы сравнения по критерию успеваемости, основанному на оценках по пятибалльной системе, нельзя считать удовлетворительными из-за совершенно недостаточной объективности и сравнимости этих оценок. (Даже в пределах одного учебного заведения «пятерка» в более слабой группе может фактически равняться «четверке» или даже «тройке» в более сильной группе, не говоря уже о разных учебных заведениях одного профиля.) Усовершенствование средств объективной оценки уровня знаний и навыков дало бы возможность уменьшить вероятность потерь (отсев и низкая успеваемость) при наборе в учебные заведения, а также упростить и удешевить процедуру приема (например, путем проведения части приемных испытаний в вузы на местах без выезда кандидатов в крупные города, используя стандартизованные тесты). Повышение объективности и надежности средств измерения позволит поднять эффективность обучения путем лучшего распределения учащихся (прежде всего нового набора) по учебным группам. В настоящее время преподавателю нередко приходится расходовать отведенные ему часы на «знакомство с группой» — выявление фактического уровня знаний отдельных учащихся, причем курс приходится начинать с какого-то среднего уровня, когда более подготовленные учащиеся зря теряют время, а для наименее подготовленных материал оказывается непосильным. Хорошо составленный тест, проведенный до начала курса, позволил бы сразу сформировать группы так, что каждый учащийся мог бы начать работу от того уровня, с которым он пришел. Без разработки более совершенных средств измерения невозможна индивидуализация обучения в условиях его возрастающей массовости, и в частности разработка и применение методов программированного обучения как с применением обучающих машин, так и без них. Характерно, что в проводимых у нас сейчас опытах программированного обучения уже применяются элементарные тесты, которые у некоторых студентов даже получили название «программированные контрольные работы»., хотя и неудачное. Можно с уверенностью сказать, что из-за совершенна недостаточного внимания к проблеме педагогических измерений неизбежно тормозится и задерживается разработка и эффективное использование методов программированного обучения. Учитывая значение, которое теперь придается программированному обучению (если судить, например, по перспективному плану исследовательских работ Министерства высшего и среднего специального образования), нужно отметить еще один аспект его тесной связи с проблемой тестирования. Как известно, при создании программированного пособия прежде всего необходимо очень четко, подробно и конкретно определить цели составляемого курса или его части. Это, пожалуй, самая важная, но в то же время и самая трудная задача составителей. Все знают, что в формулировках целей обучения обычно изобилуют такие неопределенные выражения, как «учащиеся должны знать...», «...иметь представление...», «разбираться...» и т. п. Эти выражения оставляют неясным, что же конкретно должны делать учащиеся в результате изучения курса. Гораздо целесообразнее при разработке программированного пособия исходить из целей обучения, сформулированных в форме заключительного теста, который будет дан по всему курсу или по каждой его части. Таковы некоторые соображения, показывающие важность. проблемы повышения объективности измерения результатов обучения. Каков же путь к решению этой проблемы? Хотя современные тесты это еще очень грубые измерительные приборы, они пока что представляют собой единственное имеющееся у нас средство получить сколько-нибудь объективные показатели в области обучения, и через них сейчас лежит путь к решению этой важной проблемы. От решения ее, ду-мается, в большой мере зависит осуществление научного подхода к методам преподавания в условиях его растущей сложности и массовости. Прежде чем сделать по-пытку показать преимущества тестов по сравнению с традиционными контрольными работами, надо несколько дополнить и разъяснить уже данное ранее определение теста. Как, возможно, помнит читатель, тест для целей данной статьи был определен как контрольная работа, которая в результате производимого по определенным правилам подсчета дает некий числовой показатель. Возможность выведения количественного показателя, не связанного с субъективной оценкой отдельных экзаменаторов, обусловлена определенным ограничением свободы ответов испытуемого. Поскольку в составлении тестов обязательно участвуют опытные преподаватели и экзаменаторы, «отвлекающие» варианты отражают типичные ошибки, которые наблюдаются в практике преподавания. Обычно тест в США представляет собой книжку, в которой под соответствующим порядковым номером даются пункты с вопросом или заданием (описание ситуации) и предлагаемые варианты ответов (реакций на ситуацию), помеченные буквами в алфавитном порядке. Если тесты изданы типографским способом, испытуемые не должны делать никаких пометок в этих книжечках.

Ответы регистрируются в специальных «ответных листках», которые получает каждый испытуемый вместе с книжечкой. В «ответном листке» напечатан только порядковый номер каждого пункта и буквы, под которыми даны варианты ответа. Испытуемый должен сделать карандашную пометку против буквы, соответствующей выбранному им варианту ответа. Такова наиболее типичная форма тестов, применяемых в американской практике. Существуют многочисленные варианты этой формы, в том числе и такие, где испытуемый должен только указать, правильно или неправильно то или иное утверждение, или вписать одно-два слова. Конкретная форма теста определяется его содержанием и назначением. Во избежание недоразумений следует разъяснить, что так называемые объективные тесты достаточно объективны и не зависят от мнения проводящих их экзаменаторов только на уровне подведения итога, т.е. проверки. Если не говорить о возможной не-честности экзаменаторов, которые могут подсказать правильный ответ или допустить пользование шпаргалкой, то результат такого теста действительно совершенно не зависит от субъективной оценки лиц, проводящих испытания. Однако совершенно не исключается элемент субъективности на уровне составления теста, при выборе включаемого в тест материала и при составлении самих пунктов теста и вариантов ответа. Но надо заметить, что отрицательное влияние элемента субъективности на этом уровне может быть сведено до разумного минимума путем привлечения к составлению тестов достаточно большого коллектива высококвалифицированных и опытных специалистов. После краткого описания типичного теста и некоторых разъяснений можно вернуться к утверждению, что путь к решению проблемы измерений (или в более обычной терминологии — контроля) в учебной работе лежит прежде всего через использование и совершенствование тестов наряду, конечно, с совершенствованием приемов выведения оценки при традиционных формах контрольных работ и экзаменов. Вот некоторые доводы в подтверждение этого тезиса. Использование тестов позволяет значительно повысить объективность, а вернее, надежность измерений («оценок»), т.е. вероятность их правильности. При ответе на каждый вопрос от испытуемого требуется сделать только карандашную пометку в ответном листке, на что уходит во много раз меньше времени, чем на полный письменный или устный ответ. Благодаря этому появляется возможность за отведенное время проверить владение гораздо большим количеством материала, пройденного по курсу или требуемого от испытуемого, чем при традиционных методах опроса. В американских источниках указывается, что за 10 минут можно ответить примерно на 35-50 вопросов описанным выше способом. Иными словами, увеличивается объем выборки, что ведет к повышению надежности результата измерения (проверки). В случае «текущего контроля» имеется возможность за очень короткое время проверить усвоение всего материала, пройденного за какой-то отрезок курса, что обеспечивает практически полную надежность результата. Благодаря единообразию процедуры и печти полному исключению элемента субъективности при оценке ответов -появляется возможность сравнивать результаты обучения у разных преподавателей, в разных учебных заведениях, при применении разных методов и т. п. Тесты предельно упрощают проверку работ, сводя ее к чисто механической процедуре, которая может быть поручена техническому персоналу или в массовых масштабах осуществляться счетными машинами. В случае создания централизованной организации для разработки и публикации тестов, а также и для механизированной проверки ответных листков этой же организации может быть поручена и статистическая обработка результатов тестирования, такая, как вычисление величины «вероятной ошибки измерения», о чем подробнее будет сказано ниже. Во всяком случае даже если проверка «ответных листков» проводится самим преподавателем, она занимает очень мало времени, что позволяет высвободить значительные резервы рабочего времени преподавателей для исследовательской деятельности, более тщательной подготовки к занятиям и другой работы, требующей высокой квалификации. Поскольку тест придает строго предопределенное направление ответу, он позволяет проверить именно тот аспект изучаемого явления, который имеет существенное значение для дальнейшей учебной или практической работы, тогда как при традиционной форме контрольных работ (особенно письменных) испытуемый может ответить на вопрос, обойдя те, часто существенные, аспекты, которые он не знает. Объективно выводимые числовые показатели поддаются статистической обработке, позволяющей увеличить их практическую полезность. Форма теста позволяет составлять контрольные работы с наперед заданными параметрами, такими, как степень трудности, «различающая способность» (возможность выявить определенную величину различия в уровне знаний испытуемых), надежность и некоторые другие. Эта форма также позволяет создавать контрольные работы, специально предназначенные для определенных педагогических целей (для контроля за успешностью обучения, для выявления пробелов у отстающих учащихся и для удовлетворения ряда других специфических потребностей, возникающих в практике обучения). Кроме перечисленных, ряд не только педагогических, но и экономических преимуществ тестов вытекает из отмеченной уже возможности при этой форме письменной контрольной работы за относительно короткое время получить ответы на очень большое по сравнению с традиционными формами число вопросов. Это позволяет, например, создавать тщательно разработанные квалифицированными специалистами и экспериментально проверенные контрольные работы для массового и неоднократного использования в строго контролируемых условиях. Накопившийся за рубежом и в нашей стране (например, в ГАИ) опыт показывает, что при многократном использовании с различными составами испытуемых такие контрольные работы не «становятся легче» даже после использования их на протяжении ряда лет. Отсюда вытекает возможность непрерывного изучения накапливающегося опыта и совершенствования уже созданных тестов с периодическим внесением исправлений при переизданиях. Представлялось нужным привести некоторые аргументы в пользу важности проблемы измерений в педагогике и обратить внимание на использование тестов при решении этой проблемы прежде всего потому, что в нашей литературе и планах

научно-исследовательских работ эти вопросы не получили должного внимания. Дело в том, что даже к словам «тест» и «тестирование» до недавнего времени мы относились с подозрением, что вполне обосновано, как увидите ниже. На протяжении более 30 лет эти термины если и употреблялись, то лишь в отрицательном смысле. Для этого были некоторые основания. Математика в этом вопросе, на мой взгляд, главный оселок.

Увы, наша система преподавания школьной математики итак полный отстой, а с введением ЕГЭ стала просто банальной дисциплиной! На самом деле, если бы мне велели придумать систему для уничтожения врожденного детского любопытства, стремления к поиску системы, я бы не смог сделать эту работу лучше, чем она уже делается: у меня попросту не хватило бы воображения дойти до этих бессмысленных и бездушных методик современного школьного математического образования. Причем все понимают, что что-то не в порядке. Политики говорят: «Нам нужны более высокие стандарты». Школы говорят: «Нам нужно больше денег и оборудования». Каждый говорит свое, но все они неправы. Но тех единственных, кто понимает, что происходит, не только не слушают, но и чаще других обвиняют во всем происходящем. Я говорю о детях. Они говорят: «Уроки математики скучные и глупые». И они правы. Математика и культура Первое, что нам следует понять — то, что математика есть искусство. Различие между математикой и другими искусствами, такими, как музыка или рисование, состоит в том, что наша культура не признает ее искусством. Все понимают, что поэты и музыканты создают произведения искусства, выражая себя в слове, картине и звуке. Наше общество, можно сказать, щедро на признание искусством области творчества: архитекторы, шеф-повара и даже телеведущие признаются людьми искусства. Так почему же не математики? Часть проблемы в том, что ни у кого в обществе нет даже приблизительного понятия о том, что же делают математики. Общее понимание, похоже, таково, будто математика как-то связана с естественными науками: математики помогают ученым своими формулами, или вычисляют огромные числа на компьютерах для той или иной научной задачи. Без сомнения, если бы потребовалось поделить мир на «поэтических мечтателей» и «рациональных мыслителей», большинство людей определило бы математиков в последнюю категорию. Тем не менее, нет ничего на свете столь же мечтательного и поэтичного, столь же радикального, взрывного и психоделичного, как математика. Она настолько же умопомрачительна, как физика или космология (в конце концов, математики мыс-лили о черных дырах задолго до того, как астрономы открыли их), и гораздо свободнее в выразительных средствах, чем поэзия, живопись или музыка (ибо они зависимы от свойств материальной Вселенной). Математика — чистейшее из искусств и самое непонятое из них. Позвольте мне объяснить, что такое математика и чем занимаются математики. Я не найду лучшего описания, чем то, что дает Г. Г. Харди: Математик, как и художник и поэт, создает узоры. И если его узоры долговечнее, то это потому что они сотканы из идей. Математикам нравится думать о простых вещах, и самые простые вещи — воображаемые. Например, когда я в настроении подумать о геометрических формах — а я часто бываю в таком настроении, — я могу представить себе треугольник, вписанный в прямоугольник: Я думаю о том, какую часть прямоугольника занимает треугольник. Примерно две трети, похоже? Тут важно понимать, что я думаю не о рисунке треугольника в прямоугольнике. И я говорю не о треугольнике-части фермы моста. В этом нет скрытой практической цели. Я играю. Это и есть математика: интерес, игра, развлечение собственным воображением. С одной стороны, вопрос о том, какую часть прямоугольника занимает треугольник, попросту не имеет смысла для реальных объектов! Даже самый тщательно изготовленный треугольник есть лишь безнадежно сложное сооружение из подрагивающих атомов, и его размер меняется каждую малую долю секунды — если мы не говорим о неких приближенных измерениях. Это не просто, и, следовательно, это некрасивый вопрос, зависящий от множества деталей реального мира. В этом проявляется эстетика математики. Мы оставим этот вопрос ученым. Математический вопрос задается о воображаемом треугольнике, вписанном в воображаемый прямоугольник. Его стороны совершенны, потому что я так хочу — или потому что мне нравится думать о таких объектах. Это лейтмотив математики: ее объекты таковы, каковыми вы их представите. Ваш выбор безграничен; реальность не встает на вашем пути. С другой стороны, как только вы сделали выбор (например, я могу сделать мой треугольник симметричным или нет), ваши создания ведут себя определенным образом, хотите вы того или нет. Удивительнейшее свойство воображаемых узоров: они вам отвечают! Треугольник занимает определенную часть прямоугольника, и не в моих силах изменить эту часть. Это число, может быть, оно равно двум третьим, может быть, нет, но главное, что я не могу просто так решить, каким оно будет. Я должен его найти. Так, мы начинаем играть, и строим воображаемые узоры, и задаем вопросы об этих узорах. Но как мы находим ответы на эти вопросы? Совсем не так, как в естественных науках. Нет такого эксперимента в лаборатории с пробирками или на какой-нибудь специальной технике, чтобы исследовать мой вымысел. Единственный способ узнать правду о воображаемых объектах — это напрячь воображение, и это непростая работа. Так выглядит и ощущается математика. Пример искусства математика: она задает простые и элегантные вопросы о воображаемых объектах, а школьник затем придумывает правильные и красивые объяснения. Ничего подобного этому царству чистой идеи при ЕГЭ нет! Понятно, но откуда взялась идея? Как школьник догадается провести линию? Как живописец знает, где приложить кисть? Вдохновение, опыт, пробы и ошибки и слепая удача. В этом и состоит искусство — создавать эти прекрасные поэмы мысли, эти сонеты чистого разума. В этом виде искусство математики есть что-то чудесно преобразующее нас. Вот почему мне так горько видеть, во что превращают математику в школе. Очаровательная, плодотворная игра воображения выхолащивается до стерильного набора зазубриваемых фактов и способов решения. Вместо простого и естественного вопроса о геометрических формах и творческого и полезного процесса изобретения и открытия ученикам дают вот это: «Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту». От учеников требуется запомнить формулу и «применять» ее раз за разом в «упражнениях». Уходит и радость, и дрожь нетерпения, и труд, и даже горечь творческого акта. Ведь это даже более не задача. Вопрос был задан вместе с ответом, и ученику ничего не осталось делать. Мне следует здесь явно объяснить, против чего я возражаю. Я не против ни формул, ни за-поминания интересных фактов. Это замечательно в контексте, и, как и заучивание слов при изучении языка, позволит вам создавать более глубокие произведения, полные тонких нюансов. Удаляя творческий процесс и оставляя лишь результат этого процесса, вы почти наверняка гарантируете, что никто не будет на самом деле заниматься предметом. Это все равно, что сказать, что Микеланджело создал чудесные скульптуры, при этом ни разу не показав их. Можно ли вдохновиться этим? (На самом деле, все гораздо хуже — по крайней мере, в последнем случае я бы знал, что эти произведения искусства существуют, но мне их попросту не показывают.) Когда концентрируются на что, но игнорируют почему, от математики остается одна пустая оболочка, видимость. Искусство — не в истине, а в объяснении, аргументации. Объяснение дает истине контекст, определяет, о чем на самом деле говорится и что имеется в виду. Математика есть искусство объяснения. Если вы не дадите ученикам возможности заняться объяснением — формулировать свои собственные задачи, предлагать свои гипотезы, делать свои открытия, ошибаться, терпеть творческие неудачи, вдохновляться и складывать свои собственные, пусть и неуклюжие, объяснения и доказательства, — вы лишите их самой математики. Я не возражаю против формул и фактов. Я жалуюсь на отсутствие математики на наших уроках математики. Если учитель рисования скажет вам, что живопись — это закрашивание пронумерованных областей на шаблоне, вы сразу почувствуете подвох. Сама культура скажет вам об этом — ведь существуют музеи и картинные галереи, и вы видите предметы искусства даже дома. Живопись хорошо понимается обществом как средство человеческого самовыражения. Подобно тому, если учитель астрономии скажет, что астрономия занимается предсказанием судьбы по дате рождения, вы сразу поймете, что он спятил, ведь наука до такой степени проникла в культуру, что почти каждый знает об атомах и галактиках и законах природы. Но если учитель математики даст вам понять, что математика занимается формулами, определениями и способами вычисления, которые надо запомнить, кто или что скажет вам правду? Ученики узнают о математике от учителей, а учителя — от своих учителей, и непонимание и неприятие математики нашей культурой поддерживается бесконечно. Хуже того, бесконечная поддержка этой псевдоматематики с упором на тесты - неосмысленную манипуляцию с символами, создает свою отрицательную ценность. Адепты ее получают громадную самооценку от своих успехов. Меньше всего они хотят слышать о том, что математика в первую очередь — чистые творчество и эстетика. Многие выпускники университетов, которым десяток лет говорили, что у них талант к математике, с ужасом осознают, что к настоящей математике у них нет никакого таланта, и что на самом деле их талант следовать указаниям, решать тесты и ……только. А математика — это не следование указателям, это расстановка указателей. И ведь я даже еще не упоминал отсутствия математической критики в школе! Школьники так и не узнают ни о том, что математика, как и любая литература, создается людьми для забавы, игры ума, ни о том, что математические труды необходимо критиковать, ни того, что человек должен выработать математический вкус. Математический дискурс подобен поэме, и нам следует спрашивать, удовлетворяет ли он нашим эстетическим критериям: тверда ли его аргументация? есть ли в нем смысл? прост ли он и элегантен? позволяет ли он добраться до сути дела? Конечно же, в школе вы не найдете такой критики. Почему мы не хотим, чтобы наши дети научились математике? Может быть, мы не доверяем им, или думаем, что это слишком сложно? Как будто мы чувствуем, что они могут

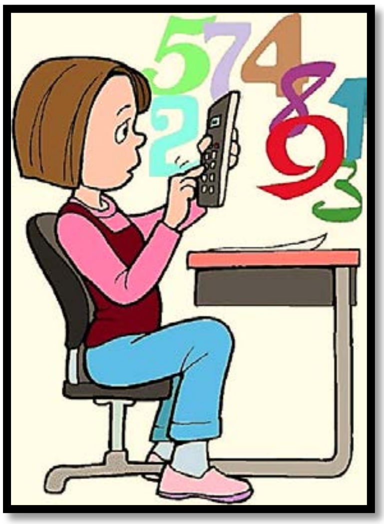


прийти к собственному мнению о Наполеоне, но не о треугольниках. Я думаю, что причина в том, что мы, как культура, не знаем, что такое математика. Впечатление, которое мы получаем — будто это что-то такое холодное и сугубо техническое, чего, наверное, никто толком и не понимает: и ведь это выходит пророчество, исполняющее само себя, если такое вообще возможно. Было бы полбеды, если бы наша культура была просто математически необразованной, а беда наша в том, что люди думают, будто они знают, что такое математика, и потому находятся под совершенно неверным впечатлением, будто математика чем-то практически полезна обществу. В этом уже видна огромная разница между восприятием математики и прочих искусств: математика рассматривается обществом, как некий инструмент решения естественнонаучных и технических задач.

Школьников нужно учить практическим результатам применения математики – это факультатив. Разве не нужны нам счетоводы, плотники и так далее? Однако, много ли людей пользуются этой самой «практической» математикой, что они изучили в школе, будто плотникам нужна тригонометрия? Много ли вы знаете взрослых, что умеют делить дроби или решать квадратные уравнения? Очевидно, что нынешнее практическое обучение не работает, и понятно почему: оно невыносимо скучно, и никому не требуется на практике. Так почему же люди думают, будто оно важно? Я не вижу, что пользы в том, что граждане носят в головах бледные воспоминания об алгебраических формулах и геометрических чертежах, и ясные воспоминания о том, как это все противно! С другой стороны, было бы куда полезнее показать им нечто прекрасное, дать им возможность стать творческими, гибкими умом мыслителями без предрассудков, — такими, какими их бы сделало настоящее математическое образование. Итак, сегодняшняя система так ужасно плоха, но и в том, что она упускает нечто воистину чудесное! Математику следует преподавать как искусство во имя искусства, а «приземленные» полезные аспекты тривиально воспоследуют сами собою. Бетховен без труда бы написал песенку для рекламного ролика, но музыке ведь он учился, чтобы создавать прекрасные произведения! Если бы каждый был предоставлен математике в ее естественной форме, со всеми ее трудными радостями и удивлением познания, что она влечет за собою, думаю, мы бы были свидетелями драматического изменения отношения детей к математике, а взрослых — к тому, что означает быть «сильным по математике». Мы теряем столь многих несостоявшихся одаренных математиков — творцов, умниц, которые совершенно справедливо отвергают то, что видится им бессмысленным и выхолощенным предметом. Они попросту слишком умны, чтобы тратить время на такую чушь! Математику давно убрали из школьной программы! Вопрос уже стоит о том, что делать с оставшейся от нее пустой засохшей шкуркой. Разумеется, я бы предпочел заменить ее исполненным радости, деятельным знакомством с математическими идеями.

Математика в школе

Нет вернее способа убить энтузиазм детей и их интерес к предмету, чем включив весь его в обязательную часть школьной программы. Включите весь курс в ЕГЭ, и вы наверняка увидите, как образовательная бюрократия высосет все его жизненные соки. В отделах образования не понимают, что такое математика — как не понимают этого ни директора школ, ни авторы учебников, ни их издатели, ни — печальнее всего — учителя. Проблема столь велика, что я едва понимаю, с какого конца начать ее излагать. Начнем с поражения множества реформ математического образования. Уже долгие годы все большее внимание уделяется разладу в системе математического образования. Оплачиваются исследования, собираются конференции, формируются бессчетные комитеты учителей, авторов и издателей учебников, чтобы «исправить ситуацию». Не упустив ни капли собственной издательской выгоды (на любые флуктуации политики обучения они отвечают предложением новых редакций своих нечитабельных корявых опусов), все эти реформаторы упустили главное: математическая программа должна быть не исправлена — она должна быть выброшена вон. Вся эта болтовня и показуха касательно того, какие «пункты программы» и в каком порядке следует учить, использовать эту систему записи вместо той, какой модели калькулятор, Господи прости, нужен школьнику, — все это напоминает перестановку стульев на палубе тонущего «Титаника». Математика есть музыка разума. Заниматься математикой — значит совершать открытия и строить предположения; жить вдохновением и интуицией; значит оказываться в отчаянии — не потому, что предмет не имеет смысла, а потому, что вы придали ему смысл и все еще не понимаете, как ведет себя ваше создание; значит испытать и прорыв фонтана идей, и поражение художника; и в ужасе неметь от почти что физически невыносимого, переполняющего вас чувства прекрасного; да значит быть живым, черт побери! Уберите это из математики, и можете собирать сколько угодно умных конференций, и это ничего не изменит. Вам не надо делать математику интересной — она уже более интересна, чем вы сможете вынести! И торжество ее в неважности для жизни — вот почему она так занимательна. Попытки изобразить математику полезной и нужной для ежедневных дел всегда натужны и убоги: «Видите, дети, как просто, когда знаешь алгебру, высчитать, сколько Марии лет, если ей на два года больше, чем дважды ее возраст семь лет назад!» — как будто кто-то в жизни получит эту безумную информацию вместо настоящего возраста. Алгебра — не инструмент для жизни, это искусство симметрии и чисел, и потому достойно постижения само по себе. Даны сумма и разность двух чисел. Каковы сами числа? Вот простой, элегантный вопрос, и не надо лезть из кожи вон, чтобы придать ему привлекательности. Древние вавилоняне любили решать такие задачи, и наши ученики их тоже любят. (Да и вам, надеюсь, понравится!) Нам не надо заворачиваться в тройные узлы, чтобы придать математике важность для ежедневных дел. Ее важность, как и важность искусства вообще — в осмыслении человеческого опыта. Или, может быть, вы думаете, что дети хотят чего-то, относящегося к их ежедневным делам? Может быть, их восхищает что-то практическое, например, сложный процент по кредиту? Людей восхищает фантазия, и это именно то, что математика может дать — убежище от ежедневного, волшебный бальзам от практических забот. Другая проблема — когда авторы учебников начинают «сюсюкать», чтобы сделать математику «дружественной» и победить «страх перед математикой» (одна из множества болезней, на самом деле вызываемых школой). Что интереснее — измерять приблизительный размер кружка по клеточкам, а потом вычислять длину окружности по формуле, которую вам дали без объяснения, или услышать историю одной из самых прекрасных, захватывающих задач, и самых ярких и сильных идей всей человеческой истории? Мы убиваем в детях интерес к кругам, в конце концов! Почему мы не даем ученикам услышать об этом, не то чтобы дать им возможность самим позаниматься математикой, прийти к собственным идеям и мнениям? Самый тоскливый способ изучать математику - стать дрессированным шимпанзе. **Вот здесь помогут факультатив и задача**. Задача — настоящий, честный до мозга костей естественный человеческий вопрос — это нечто другое. Какова длина диагонали куба? Закончатся ли простые числа? Бесконечность — число или нет? Сколькими способами можно симметрично покрыть поверхность плитками? История математики — это история решения этих вопросов, не бессмысленного пережевывания формул и алгоритмов, вместе с натянутыми упражнениями, чтобы их применять. Хорошая задача — такая, решения которой вы не знаете. Вот где загадка, вот что дает настоящие возможности! Хорошая задача не стоит в отдельности, но служит стартовой площадкой для других интересных задач. Треугольник занимает половину описанного прямоугольника. А как насчет пирамиды в кубе? Можно ли эту задачу решить тем же способом? Я принимаю идею обучения школьников технике решения, и я сам это делаю. Но это не цель. Техника в математике, как и в любом искусстве, должна изучаться в контексте. Великие задачи, их история, творческий процесс — вот этот контекст. Дайте ученикам хорошую задачу, пусть они поломают головы, пусть у них не получится ее решить. Посмотрите, что у них выйдет. Дождитесь до того момента, когда они страстно



захотят свежую идею. Тогда научите их какой-то технике, только немного. Отложите в сторону планы уроков и диапроекторы, мерзкие красочные учебники, компакт-диски и весь остальной парад уродов бродячего цирка, и займитесь с учениками математикой: выбирайте занимательные и естественные задачи, в соответствии с их вкусами, интересами и опытом. Давайте им время делать открытия и строить гипотезы, помогая им выстраивать доказательства и создавая атмосферу здорового и живого математического критицизма. Улавливая, куда меняется их интерес. В общем, выстраивая честные и открытые интеллектуальные отношения с учениками. Это требует слишком большой ответственности и слишком большой открытости — короче, это слишком много работы и на основных базовых уроках этого не достичь – тут нужен факультатив. В нынешней школе детей просто уговаривают забросить сложную задачу принятия решений своим умом и совестью, и вместо этого «проходить программу» и угадывать тесты. Это попросту путь наименьшего сопротивления: выберите правильный ответ. Изготовить произведение искусства занимает время, а, чтобы распознать его, нужен искусный учитель. Разумеется, легче вывесить список правил, чем вести за собой будущих художников, как легче написать инструкцию к телевизору, чем книгу со своей точкой зрения. Математика — искусство, а искусство должно преподаваться действующими мастерами, или уж, по крайней мере, педагогами, любящими искусство и способными его распознать. Я не пытаюсь даже сказать, что учителя математики должны быть профессиональными математиками — нет, я и не подхожу к этому. Но не должны ли они хотя бы понимать, что такое математика, знать ее, и любить? Если учеба превращается в простую передачу информации, если в ней нет делимого с учеником восхищения и чуда, если учителя суть пассивные получатели информации, а не творцы новых идей, есть ли тогда надежда у наших школьников? Если сложение дробей для учителя является случайным набором правил, а не результатом творчества или результатом эстетически обоснованного выбора, тогда несомненно надежды у бедных учеников и быть не может. Преподавание это не передача информации. Преподавание — это честные интеллектуальные отношения с учениками. Ну ладно, мне ясно, что в математике есть элемент искусства и что мы могли бы лучше это объяснять. Но ведь это, наверное, слишком заумная штука, чтобы ожидать ее от школы? Мы же не философов там учим, нам же надо, чтобы они арифметику знали до той степени, чтобы нормально вписаться в общество. Школьная математика занимается множеством вещей, не связанных с возможностью вписаться в общество — например, алгеброй и тригонометрией. Эти дисциплины совершенно бесполезны для ежедневных дел. Я просто предлагаю вот что: раз мы включаем эти вещи в план среднего образования, так уж делать это органично и естественно. К тому же, как я уже говорил, то, что из предмета можно получить практическую пользу, еще не говорит о том, чтобы на этой пользе обучение фокусировать. Мы учимся, потому что нам интересно то, чему мы учимся, здесь и сейчас, не потому, что это будет полезно в дальнейшем. А ведь с математикой мы именно так и поступаем.

Так чем же дети должны заниматься на уроках математики? Конечно- играть! Научите их играть в шахматы и го, да чему угодно — выдумайте игру! Отгадывайте загадки. Создавайте для них ситуации, где необходимо дедуктивное мышление. Не думайте о формальностях записи и технике, а помогайте их активному и творческому математическому мышлению. На базовых уроках должен быть какой-то минимум математических фактов, которые должен знать любой образованный человек - самый главный из этих фактов — то, что математикой люди занимаются для собственного удовольствия! Математика — это система символов, язык сам по себе, который надо выучить прежде, чем говорить на нем. Или - Математика — это приключение? Определенная система математической записи образовалась за века, но она не является самоважной. Математика частенько делается с друзьями за чашкой кофе на салфетках. Математика — это идеи, а идеи превосходят символы, которыми они записываются. **Гаусс** однажды заметил: «*Нам нужны идеи, а не идиомы!*» Одна из целей математического образования научить школьников думать логически точно, выработать «навыки математического мышления». Ведь самое важное умение и ученого, и инженера — умение мыслить творчески и независимо. А кому нужна нынешняя дрессировка?!

Литература.

1. Абрамов А. М., Виленкин Н. Я., Дорофеев Г. В. и другие. Избранные вопросы математики; 10 класс. Факультативный курс. – М.: Просвещение, 1980 г.
2. Андронов И. К. Математика действительных и комплексных чисел. – М.: Просвещение, 1975 г.
3. Андронов И. К. Факультативные курсы по математике в средней школе. Выпуск 1 – М.: 1974 г., Выпуск 2 – М.: 1975 г.
4. Андронов И. К., Брадис В. М. Арифметика: пособие для средней школы. – М.: Учпедгиз, 1962 г.
5. Андронов И. К., Окунев А. К. Арифметика рациональных чисел. – М.: просвещение, 1971 г.
6. Антипов И. Н., Березин В. Н., Егоров А. А. и другие. Избранные вопросы математики. Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1983 г.
7. Архангельская В. М. Элементарная теория чисел: учебное пособие. Издательство саратовского университета, 1962 г.
8. Балк М. Б., Балк Г. Д. Математический факультатив – вчера, сегодня, завтра. // Математика в школе. – М.: 1987 г.
9. Богомолов Н. В. Практические занятия по высшей математике. Учебное пособие для техникумов. – М.: Высшая школа, 1973 г.
10. Виленкин Н. Я., Ивашев-Мусатов О. С., Шварцбурд С. И. Алгебра и математический анализ для 11 класса: Уч. пособие для учащихся школ и классов с углубленным изуч. математики. – М.: Просвещение, 1993 г.
11. Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике. – М.:Физмат, 1963 г.
12. Гнеденко Б. В. Математика и математическое образование в современном мире. – М.: Просвещение, 1985 г.
13. Гнеденко Б. В., Черкасов Р. С. О преподавании математики в предстоящем тысячелетии. // Математика в школе. – М.: 1996 г.
14. Захарова А. В. Психология обучения старшеклассников. – М.: Знание,
15. Иванов А. П., Кондаков В. М. Математика. -Пермь: из-во Перм. ун-та, 1994 г.
16. Избранные вопросы факультативных и внеклассных занятий по математике. /Под ред. В. А. Жарова – Ярославль, 1971 г.

17. Калужнин Л. А. Основная теорема арифметики. – М.: Наука, 1969 г.
18. Кон И. С. Психология юношеского возраста. Учебное пособие для студентов педагогических институтов. – М.: Просвещение, 1979 г.
19. Корешкова Т. А. Научно-методические основы взаимосвязи математических курсов педвузов и школьных дисциплин. – М.: 1991 г.
20. Крутецкий В. А., Лукин Н. С. Очерки психологии старшего школьника. – М.: Учпедгиз, 1963 г.
21. Крутецкий Р. О., Фадеев Д. К. Алгебра и арифметика комплексных чисел: Пособие для учителей средних школ. – Л.: Учпедгиз, ленинградское отделение, 1939 г.
22. Липилина В. В. Пути осуществления преемственности факультативного и основного курсов математики. Автореферат диссертации. – М.: 1988 г.
23. Лисичкин В. Т., Соловейчик И. Л. Математика: Учеб. пособие для техникумов. -М.: Высшая школа, 1991 г.
24. Менчинская Н. А. Психология обучения арифметике. – М.:Учпедгиз, 1955 г.
25. Менчинская Н. А., Моро М. И. Вопросы методики и психологии обучения арифметики в начальных классах. – М.: Просвещение, 1965 г.
26. Ольшанский Д. В. Я сам (очерки становления и развития детского "Я"). – М.: Знание, 1986 г.
27. Петрова Е. С. Организация познавательной деятельности учащихся старших классов средней школы в условиях углубленного изучения математики. – Саратов, 1991 г.
28. Пидкасистый П. И. Самостоятельная познавательная деятельность школьников в обучении. – М.: Педагогика, 1980 г.
29. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегрированное исчисление для вузов. – М.: Физмат, 1963 г.
30. Под ред. Петровского А. В. Возрастная и педагогическая психология. – М.: Просвещение, 1973 г.
31. Под редакцией Петровского А. В. Возрастная и педагогическая психология. Учебное пособие для педагогических институтов. – М.: Просвещение, 1973 г.

32. Симонов А. Я., Бакаев Д. С. и другие. Система тренировочных задач и упражнений по математике. – М.: Просвещение, 1991 г.
33. Симоновская Г. А. Факультативный курс "Комплексные числа и их приложения" для старших классов средней школы. Диссертация. –
34. Скобелев Г. Н. Контроль на уроках математики. Пособие для учителя. – Минск: Народная асвета, 1986 г.
35. Фатеева Г. И. Факультативные занятия и их роль в развитии познавательных интересов учащихся. Диссертация. – М.: 1974 г.
36. Фридман Л. В., Турецкий Е. Н. Как научиться решать задачи: книга для учащихся старших классов средней школы. – М.: Просвещение, 1989 г.
37. Фридман Л. М. Психолого-педагогические основы обучения математики в школе: Учителю математики о педагогической психологии. –
38. Чередов И. М. Формы учебной работы в средней школе: Книга для учителя. – М.: Просвещение, 1988 г.
39. Шарыгин И. Ф., Голубев В. И. Решение задач: Учебное пособие для десятых классов общеобразовательных учреждений. – М.: Просвещение, 1994 г.
40. Яглом И. М. Комплексные числа. – М.: Физматгиз, 1963 г.