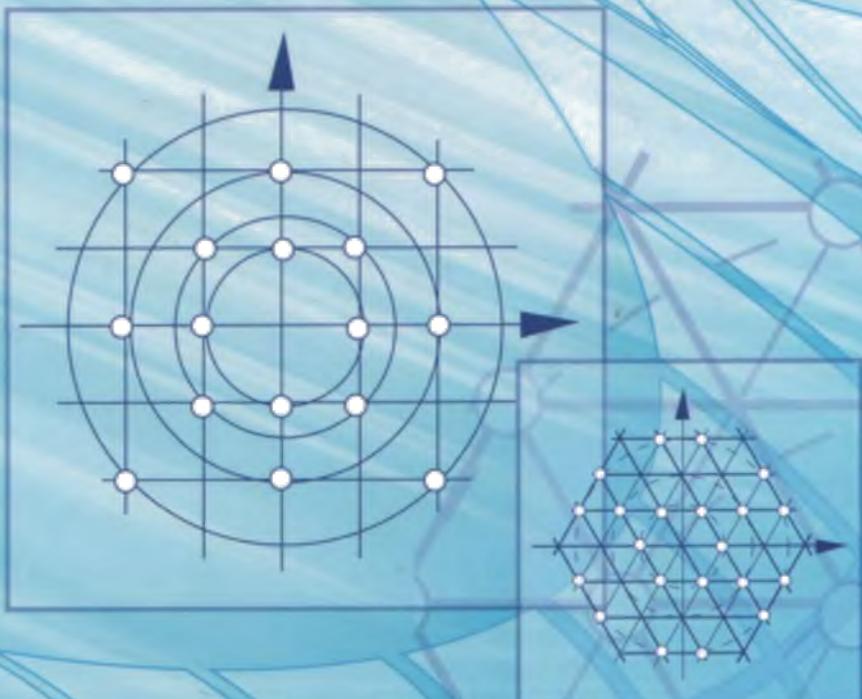


Д. И. Бардзокас, Л. А. Фильшинский
М. Л. Фильшинский

АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ СВЯЗАННЫХ ФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛАХ

Том 1

Математический аппарат
физических и инженерных наук



**Д. И. Бардзокас, Л. А. Фильшинский,
М. Л. Фильшинский**

**АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ
СВЯЗАННЫХ ФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ
В ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛАХ**

МОНОГРАФИЯ

В пяти томах

Под общей редакцией
академика РАЕ Л. А. Фильшинского

Том 1

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ
ФИЗИЧЕСКИХ И ИНЖЕНЕРНЫХ НАУК**



Москва ◆ Ижевск

2010

УДК 539.3

ББК 22.251

Б 247

Бардзокас Д. И., Фильшинский Л. А., Фильшинский М. Л.

Актуальные проблемы связанных физических полей в деформируемых телах: В 5 т. — Т. 1. Математический аппарат физических и инженерных наук. — М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010. — 864 с.

Первый том монографии является математическим введением в методы решения современных научных задач физики, механики сплошной среды, техники. В доступной форме излагаются наиболее востребованные разделы математики: элементы теории аналитических функций комплексного переменного, некоторые аспекты математической физики, основы функционального анализа, теория регулярных интегральных, сингулярных и гиперсингулярных уравнений, а также некоторые их приложения к решению целого круга задач.

Данный том совместно с последующими томами планируемой пятитомной серии может служить учебным пособием для студентов механико-математических и физических факультетов, а также вузов с повышенной математической подготовкой. Эта книга может быть также востребованной специалистами в области прикладной математики, механики связанных физических полей, физики твердого тела и т. п.

Ил.: 154. Табл.: 9. Библ.: 470.

ISBN 978-5-93972-781-5

© Д. И. Бардзокас, Л. А. Фильшинский, 2010

© НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010

<http://shop.rcd.ru>

<http://ics.org.ru>

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	8
ГЛАВА 1. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ	
1.1. Основные определения. Теорема Коши	15
1.2. Интегральные представления	17
1.3. Предельные значения интеграла типа Коши и некоторых интегралов со специальными ядрами	22
1.4. Асимптотика интегралов типа Коши	25
1.5. Представления аналитических функций рядами	30
1.6. Структурные представления мероморфных и целых функций	37
1.7. Некоторые специальные мероморфные и целые функции. Эллиптические функции	42
1.8. Конформные отображения	65
1.9. Вычисление определенных интегралов от однозначных и многозначных функций	71
Литература к главе 1	84
ГЛАВА 2. ГАРМОНИЧЕСКИЕ И МЕТАГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ	
2.1. Гармонические функции в R^2	86
2.2. Гармонические функции в R^3	109
2.3. Границные задачи для уравнения $\Delta u + cu = f$	116
2.4. Цилиндрические функции. Некоторые формулы и таблицы	140
Литература к главе 2	156
ГЛАВА 3. ЭЛЕМЕНТЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА	
3.1. Линейные нормированные пространства	158
3.2. Интеграл Лебега	172
3.3. Пространство Лебега $L^1[a, b]$, p -пространства	179
3.4. Абстрактное гильбертово пространство	183
3.5. Приложения в задачах управления упругой системой	200
3.6. Пространства Соболева	205
3.7. Функции	211
3.8. Линейные операторы в банаевых пространствах	217
3.9. Линейные функционалы в банаевых пространствах	233
3.10. Проблема моментов и некоторые приложения	255
3.11. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве H	264
3.12. Матричное представление сопряженного оператора в пространстве с базисом	272
3.13. Уравнения	275
Приложение А. Метрические пространства	293
Приложение В. P -неравенства	323
Литература к главе 3	327

ГЛАВА 4. ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ	329
4.1. Некоторые примеры и соображения	
к мотивации введения и использования обобщенных функций	332
4.2. Пространство основных функций D	336
4.3. Пространство обобщенных функций D'	341
4.4. Регулярные обобщенные функции	344
4.5. Сингулярные обобщенные функции	346
4.6. Преобразования переменных	350
4.7. Дифференцирование и интегрирование обобщенных функций	353
4.8. Дельтообразные последовательности	367
4.9. Свертка обобщенных функций	370
4.10. Решения дифференциальных уравнений с правой частью	381
4.11. Обобщенные функции медленного роста	384
4.12. Обобщенные функции с компактным носителем	390
4.13. Конечные части. Определенные интегралы	392
4.14. Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста	395
4.15. Преобразование Фурье в пространстве обобщенных функций D'	403
4.16. Пространства распределений $L^2(R^n), L^1(R^n), L^p(R^n)$	408
4.17. Преобразование Лапласа обобщенных функций	414
4.18. Приложение техники обобщенных функций к решению уравнений	419
4.19. Регуляризация расходящихся интегралов	430
4.20. Обобщенные решения дифференциальных уравнений в частных производных	435
4.21. Уравнения гиперболического типа	437
4.22. Уравнения эллиптического типа	440
4.23. Уравнения параболического типа	443
4.24. Задача Коши	444
Приложение к главе 4. Применения обобщенных функций в упругости	452
Литература к главе 4	482
ГЛАВА 5. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ	485
5.1. Исходные определения и обозначения	485
5.2. Решение интегральных уравнений Фредгольма второго рода методом последовательных приближений	490
5.3. Интегральные уравнения Фредгольма второго рода с вырожденными ядрами	495
5.4. Уравнения Фредгольма. Общий случай	500
5.5. Симметричные интегральные уравнения	506
5.6. Уравнения Фредгольма 1-го рода	528
5.7. Применение симметричных интегральных уравнений в задачах на собственные значения	532
5.8. Интегральные уравнения теории потенциала	539
5.9. Интегральные уравнения граничных задач теплопроводности	549
5.10. Интегральные уравнения теории упругости	553
5.11. Некоторые типы нелинейных интегральных уравнений	562

5.12. Метод Ньютона для нелинейных операторов	572
5.13. Бифуркация решений	580
Литература к главе 5	585
ГЛАВА 6. СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ	588
6.1. Предварительные сведения	588
6.2. Краевая задача Римана	595
6.3. Одномерные сингулярные интегральные уравнения с ядром Коши на замкнутом контуре	600
6.4. Регуляризация полного СИУ. Теоремы Ф. Нетера	604
6.5. Регуляризация СИУ по Карлеману–Векуа	609
6.6. Системы сингулярных интегральных уравнений	615
6.7. Случай разомкнутых контуров	621
6.8. Применение метода ортогональных многочленов к решению интегральных уравнений	631
6.9. Интегральные уравнения с ядром Гильберта	635
6.10. Интегральные уравнения с неподвижными особенностями	639
6.11. Многомерные сингулярные интегралы и сингулярные интегральные уравнения	642
Литература к главе 6	654
ГЛАВА 7. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТИПА СВЕРТКИ	657
7.1. Типы уравнений с ядрами, зависящими от разности аргументов	657
7.2. Интегральное преобразование Фурье	658
7.3. Связь между интегральными преобразованиями Меллина, Лапласа и Фурье ..	663
7.4. Интегродифференциальное уравнение на оси	665
7.5. Интегральное уравнение типа Винера–Хопфа	666
Литература к главе 7	676
ГЛАВА 8. ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ	678
8.1. Интеграл в смысле конечной части по Адамару в плоских задачах	679
8.1.1. Интеграл в смысле конечной части по Адамару для функций, определенных на отрезке прямой	679
8.1.2. Интеграл в смысле конечной части по Адамару для функций, определенных на гладком разомкнутом контуре	685
8.1.3. Вычисление конечной части интегралов по Адамару с постоянной плотностью	690
8.1.4. Вычисление конечной части интегралов по Адамару для различных аппроксимаций плотности	691
8.2. Интегралы в смысле конечной части по Адамару в пространственных задачах	695
8.2.1. Вычисление нормальной производной гармонического потенциала двойного слоя по плоской области	695
8.2.2. Вычисление нормальной производной потенциала двойного слоя на разомкнутой поверхности Ляпунова	696
8.2.3. Эквивалентность интегральных представлений нормальной производной потенциала двойного слоя	697

8.2.4. Вычисление интегралов в смысле конечного значения по Адамару по плоскому многоугольнику	699
8.2.5. Вычисление гиперсингулярных интегралов с дифференцируемой плотностью	703
8.3. Обобщенный потенциал двойного слоя на разомкнутой поверхности Ляпунова	705
8.4. Методы численного решения гиперсингулярных уравнений	711
8.4.1. Плоские задачи	711
8.4.2. Пространственные задачи	712
Литература к главе 8	716
ГЛАВА 9. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ	717
9.1. Плоская задача теории упругости	718
9.2. Некоторые плоские задачи теории упругости для изотропной области с дефектами типа трещин и включений	723
9.3. Численное решение плоских задач теории упругости для тел с дефектами	745
9.4. Теория регулярно армированного волокнистого композитного материала	763
9.5. Математическое моделирование эксперимента по определению механических характеристик наноразмерных объектов	773
9.6. Плоские задачи теории упругости для анизотропной области с дефектами	778
9.7. Классические плоские термоупругие задачи	792
9.8. Неклассические модели теплопереноса	807
9.9. Плоская задача термоупругости для анизотропной среды	824
9.10. Пространственная задача связанный термоупругости	832
9.11. Сопряженные электроупругие поля в пьезокерамическом слое с полостью	846
9.12. Гармонические и импульсные возбуждения многосвязных цилиндрических тел	849
Литература к главе 9	858

Книга посвящается светлой памяти
Михаила Фильштинского, музыканта и математика,
погибшего в самом расцвете своих творческих сил

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данная книга представляет собой первый том пятитомной серии, посвященной взаимодействию физических полей в структурированных системах. В последние десятилетия эта тематика становится особенно актуальной в связи с развитием новых технологий. Теория и техника интеллектуальных систем, нанокомпозиты и нанотехнологии, лазерные технологии, теория термодинамических потоков во фрактальных структурах привели к развитию междисциплинарных и мультидисциплинарных областей знания, которые используют современный математический аппарат и нередко стимулируют новые математические идеи и знания. Так было и раньше, достаточно упомянуть исследования Хевисайда в теории электрических цепей, положившие начало операционному исчислению, дельта-функцию Дирака, явившуюся предвестником обобщенных функций, исследования Э. Нётер в области аналитической механики, обогатившие теорию топологических групп. Развитие физики всегда приводило к обогащению математики. Так, работы фон Неймана по математическому обоснованию квантовой механики привели к созданию теории самосопряженных операторов в гильбертовых пространствах. Таких примеров можно привести множество.

Следует отметить, что идеи и методы функционального анализа, аппарат теории обобщенных функций, техника сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений сравнительно недавно используются в технических и естественнонаучных дисциплинах. Многие специалисты, закончившие технические вузы, с некоторым предубеждением относятся к современным математическим методам решения актуальных проблем.

Цель данной книги заключается в том, чтобы снабдить инженера, механика, физика элементами знания, идей, методов, особенно аппаратной части, наиболее эксплуатируемых разделов математики. Книга — не университетский учебник и не справочник, уровень изложения материала часто не соответствует современным требованиям математической строгости. Многие теоремы приводятся без доказательств, но после соответствующей аргументации и подготовки. В работе над книгой у нас было несколько ориентиров, среди которых непревзойденный двухтомник Ф. М. Морса и Г. Фешбаха «Методы теоретической физики».

А теперь, после этого краткого и несколько сумбурного введения, пройдемся по содержанию. В первой главе излагаются элементы теории аналитических функций одного комплексного переменного. Основное внимание уделяется аппаратной части и инструментарию теории. Сюда вошли: интегральные представления голоморфных и кусочно-голоморфных функций, представления автоморфных, а также эллиптических функций; предельные значения интегралов типа Коши, обобщенных интегралов типа Коши. Представлены некоторые методы вычисления интегралов от однозначных, а также многозначных функций. В конце главы содержатся таблицы часто используемых сингулярных интегралов.

Во второй главе излагаются элементы теории гармонических и метагармонических функций в R^2 и R^3 . Даются постановки задач Дирихле, Неймана и смешанной. Излагаются основные теоремы теории потенциала. Выводятся интегральные представления гармонических и метагармонических функций. В плоском случае мы предпочитаем опираться на мощный и далеко продвинутый аппарат теории аналитических функций. В трехмерном случае используются функции Грина соответствующих задач теории потенциала. Материал этой главы содержит большое количество примеров решения граничных задач.

В пункте 2.2 рассматривается теория потенциала в R^3 для уравнения $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) - qu = 0$. Выводятся формулы Грина для первой, второй и третьей граничных задач, рассмат-

риваются вопросы существования и единственности их решений. В конце этого пункта приводится построение функций Грина для некоторых канонических областей.

В пункте 2.3 рассматриваются граничные задачи для уравнения $\Delta u + Cu = f$. Выписываются фундаментальные решения оператора Гельмгольца ($c = k^2 > 0$) и обсуждаются вопросы единственности решения в связи с условиями излучения Зоммерфельда. При $c = -k^2 < 0$ фундаментальные решения оператора Гельмгольца экспоненциально затухают на бесконечности. Далее в этом пункте описываются два универсальных принципа, которые позволяют выделить единственное решение уравнения Гельмгольца: принцип предельного поглощения и принцип предельной амплитуды. В конце этого пункта рассмотрен ряд примеров использования теории в задачах определения физических полей в сплошных средах. В пункте 2.4 приведен справочный материал из теории цилиндрических функций.

Глава 3 представляет собой элементарное введение в функциональный анализ. В первых четырех пунктах объектом изучения являются пространства (линейные нормированные, предгильбертовы, гильбертовы). Вводится понятие интеграла Лебега, пространство Лебега L^1 и p -пространства L^p . Определяются такие фундаментальные понятия анализа, как компактность, сепарабельность, полнота и приводятся основные факты, связанные с ними. Рассматриваются вопросы аппроксимации в банаевых и гильбертовых пространствах, теория рядов Фурье и некоторые другие.

В пункте 3.5 приводится приложение теоремы об ортогональной декомпозиции гильбертова пространства к задаче об оптимальном управлении вынужденными движениями пьезокерамического стержня под действием переменной во времени электрической разности потенциалов, прикладываемой к торцевым электродам.

В пункте 3.6 даются определения и некоторые сведения из теории соболевских пространств. В частности, определено понятие обобщенной производной, на уровне правдоподобных рассуждений выведено неравенство Фридрихса, использующееся в теории граничной задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка.

В пункте 3.7 рассматриваются свойства непрерывных отображений в метрических пространствах. В 3.8 излагаются основы теории непрерывных и вполне непрерывных операторов в банаевых пространствах, принцип равномерной ограниченности, теорема Банаха–Штейнгауза. В качестве приложения рассматриваются вопросы сходимости квадратурных формул.

В пункте 3.9 дается очерк теории линейных функционалов в банаевых пространствах. Вводятся сопряженные пространства для p -пространств ($p > 1$) и для пространства $C[a,b]$. Определяется конструкция интеграла Стильтьеса и доказывается, что общая форма линейного непрерывного функционала в $C[a,b]$ дается интегралом Стильтьеса. Доказывается теорема Ф. Рисса об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве. Центральное место в этом пункте занимает фундаментальная теорема Хана–Банаха о продолжении линейного непрерывного функционала и следствия из нее.

Пункт 3.10 посвящен проблеме моментов и доказательству теоремы М. Г. Крейна о существовании решения L -проблемы моментов. В качестве приложения этой теоремы рассматривается задача об оптимальном управлении некоторой динамической системой. В конце этого пункта введено понятие сопряженного оператора, указаны элементарные свойства, приведены примеры сопряженных операторов в различных пространствах.

В пункте 3.11 излагаются основы теории самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, основные теоремы об эрмитовых, положительных и положительно определенных операторах. Вводится понятие энергетического пространства и устанавливается связь между

задачей о минимуме квадратичного функционала энергии $I(u) = (Au, u) - 2(f, u)$ и решением уравнения $Au = f$, где A — положительный оператор в гильбертовом пространстве H .

В пункте 3.12 рассматривается задача о представлении сопряженного оператора в банаховом пространстве с базисом. При этом используется понятие биортогональной системы $\{f_i\} \subset X^*$ к базисной системе $\{e_k\} \subset X$.

Пункт 3.13 посвящен важной для приложений проблеме решения операторных уравнений. Введено понятие обратного оператора, доказаны простейшие теоремы об обратных операторах, теорема Банаха о непрерывной обратимости линейного ограниченного оператора. Далее рассматриваются линейные операторные уравнения с параметром, вводится понятие спектра и резольвентного оператора. Доказывается, что спектр — замкнутое множество. В конце этого пункта излагаются основные выводы из теории Ф. Рисса и Ю. Шаудера линейных уравнений с вполне непрерывными операторами, которые формулируются как теоремы Фредгольма. Вводится также определение нормально разрешимого оператора, понятие о нетеровых операторах, формулируются теоремы Ф. Нетера о разрешимости уравнений с N -оператором.

В приложении А дан краткий очерк теории метрических пространств. Доказан принцип скжатых отображений, приведены примеры его применения к решению уравнений. Формулируется более общий принцип неподвижной точки (принцип Шаудера). Доказывается фундаментальная теорема о пополнении метрического пространства.

Вводится понятие компактного множества в метрическом пространстве, доказывается критерий компактности Ф. Хаусдорфа и теорема Ч. Арцела о компактности множества в $C[a, b]$. В конце приложения приведены доказательства теорем Вейерштрасса о непрерывных функционалах на компактах в метрических пространствах.

В приложении Б доказываются p -неравенства для конечных и бесконечных сумм и интегралов.

В главе 4 излагаются элементы теории обобщенных функций. В пункте 4.1 представлены некоторые рассмотрения и задачи, приводящие к обобщенным функциям.

В пункте 4.2 вводится понятие основного пространства D , а также некоторых других основных пространств, определяется сходимость в этих пространствах, приводятся факты относительно конструирования основных функций.

В пунктах 4.3–4.5 вводятся понятия пространства D' , регулярных и сингулярных обобщенных функций. Определяется простой слой на поверхности, главные значения функций $Vp \frac{1}{x}$, $Vp \frac{1}{x^2}$, $Vp \frac{1}{x^n}$ и некоторых других. Доказываются формулы Сохоцкого. В пункте 4.6 рассматривается вопрос о невырожденном линейном преобразовании переменных под знаком обобщенной функции.

В пункте 4.7 вводится понятие производной от обобщенной функции, показывается, что производная любого порядка от обобщенной функции также принадлежит D' . Дается вывод для производной от разрывного физического поля в одномерном и многомерном случаях. Доказывается формула Грина, приводятся сведения о фундаментальных решениях некоторых операторов. В конце этого пункта рассматриваются вопросы интегрирования в D' обыкновенных дифференциальных уравнений и систем. Некоторые сведения о дельтообразных последовательностях приведены в пункте 4.8.

Прямое произведение и свертка обобщенных функций определены в 4.9, 4.10. Приведены основные свойства и примеры. Определены объемные и поверхностные потенциалы простого и двойного слоя в виде сверток фундаментального решения уравнения Лапласа в R^n с простым и двойным слоем соответственно. Сформулированы условия существования свертки и т. п.

Пространства основных и обобщенных функций медленного роста рассмотрены в 4.11. Представлены основные свойства, общие представления этих обобщенных функций, рассмотрены примеры. Определение обобщенных функций с помощью линейных дифференциальных операторов производится в 4.12.

Постановка задачи о выделении конечной части сингулярной обобщенной функции, интеграла с сильной особенностью приведена в 4.13. Здесь дан вывод формулы Адамара для конечной части. Приведен пример регуляризации простейшего гиперсингулярного интеграла в комплексной плоскости. Более подробные рассмотрения гиперсингулярных интегралов содержатся в главе 8.

В 4.14–4.17 рассматриваются интегральные преобразования Фурье и Лапласа в пространствах обобщенных функций. Выводятся основные свойства, показывается, что интегральное преобразование Фурье непрерывно из \mathcal{L}' в \mathcal{L}' . Приводится краткое описание распределений $L^p(R^n)$ и преобразования Фурье в $L^1(R^n)$. Для удобства выписаны таблицы преобразований Фурье и Лапласа обобщенных функций, часто используемых в приложениях. Пункт 4.18 посвящен решению уравнений в свертках. Помимо сверточной алгебры здесь применяется также интегральное преобразование Лапласа. Приведены примеры. В пункте 4.19 выписан алгоритм канонической регуляризации расходящихся интегралов и определена связанная с этим операция дробного интегродифференцирования.

В пункте 4.20 дается понятие обобщенного решения дифференциального уравнения в частных производных с использованием сопряженного дифференциального оператора. Показана процедура построения фундаментального решения линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами при помощи интегрального преобразования Фурье.

В пунктах 4.21–4.23 методом интегральных преобразований построены фундаментальные решения волнового уравнения, уравнений Гельмгольца и теплопроводности соответственно для $n=1, 2$ и 3. Обобщенные решения задачи Коши для этих уравнений рассмотрены в 4.24. Последний пункт этой главы посвящен приложению обобщенных функций в плоских и пространственных задачах упругости, термоупругости, электроупругости.

Глава 5 в основном посвящена теории регулярных интегральных уравнений. В первых двух пунктах излагаются исходные понятия и определения, а также процедура метода последовательных приближений. Вводятся итерированные ядра, определяется резольвента ядра и достаточные условия сходимости в пространствах C и L^2 .

В пункте 5.3 интегральные уравнения Фредгольма второго рода с вырожденными ядрами сводятся к равносильным системам линейных алгебраических уравнений, что дает возможность элементарными средствами построить теорию и доказать соответствующие теоремы Фредгольма.

Общая теория уравнения Фредгольма второго рода с непрерывным или L^2 -ядром представлена в 5.4. Согласно схеме Э. Шмидта такое ядро многими способами можно представить в виде суммы PG -ядра и «малого» ядра, что дает возможность обратить уравнение, т. е. свести его к уравнению с вырожденным ядром. Таким образом, и в этом общем случае справедливы теоремы Фредгольма.

Теория симметричных интегральных уравнений представлена в 5.5. Здесь доказываются основные теоремы о спектре, теорема Гильберта–Шмидта, выводятся билинейные разложения для итерированных ядер и т. п. Излагаются также приближенные схемы определения характеристических чисел и собственных функций симметричных ядер. В пункте 5.6 излагаются элементы теории уравнений Фредгольма первого рода. В частности описывается схема М. М. Лаврентьева регуляризации этого уравнения.

Симметричные интегральные уравнения эффективно используются в задачах математической физики на собственные значения. Этот фрагмент теории представлен в пункте 5.7. Излагается теория задачи Штурма–Лиувилля и связанные с ней факты.

Пункты 5.8–5.10 посвящены приложению интегральных уравнений в теории потенциала, в теплопроводности и теории упругости. Указаны условия разрешимости интегральных уравнений внутренних и внешних краевых задач, которые получены предельным переходом на границу области соответствующих потенциалов (простого или двойного слоя). В теории упругости этот метод потенциалов приводит, вообще говоря, к сингулярным интегральным уравнениям, однако для них справедливы все теоремы Фредгольма.

Конец главы (п. 5.11–5.13) посвящен рассмотрению некоторых типов нелинейных интегральных уравнений. Указываются условия, при которых для решения уравнения типа Гаммерштейна можно применить метод последовательных приближений. Приведена таблица различных случаев существования решений уравнения Гаммерштейна. Для решения более общего нелинейного интегрального уравнения Урысона с оператором, удовлетворяющим условию Липшица, указаны признаки существования и единственности решения. При этом с успехом применяется принцип сжатых отображений. Для уравнений с вполне непрерывным оператором существование решений доказывается с использованием принципа Шаудера. В пункте 5.12 излагаются процедуры метода Ньютона для решения нелинейных операторных уравнений, а в 5.13 дается математическое описание явления бифуркации решений нелинейных уравнений.

В 6-й главе дан очерк теории сингулярных интегральных уравнений. Приведены основные сведения, касающиеся интегралов типа Коши, регулярные представления таких интегралов на разомкнутых и замкнутых контурах, формулы перестановки Пуанкаре–Бергмана, теоремы Привалова о предельных значениях интегралов типа Коши и некоторые другие факты.

В пункте 6.2 дается постановка и решение задачи Римана (задачи сопряжения) для замкнутых контуров, в 6.3–6.5 излагается теория одномерных сингулярных интегральных уравнений (СИУ) с ядром Коши на замкнутом контуре, метод Карлемана решения характеристического уравнения, проблемы регуляризации полного СИУ. В 6.4 формулируются и доказываются теоремы Ф. Нетера. В 6.5 проводится регуляризация полного СИУ по методу Карлемана (решением характеристического уравнения). Здесь же дано описание общей постановки задачи о регуляризации операторного уравнения в рамках функционального анализа. Системы СИУ на замкнутых контурах рассматриваются в 6.6. Определяется понятие символа системы, формулируются теоремы Ф. Нетера, приводится пример.

СИУ на разомкнутых контурах рассматриваются в 6.7. Анализ решений и определение классов решений основывается на результатах задачи Римана для разомкнутых контуров. Формулируются условия существования классов решений в зависимости от индекса данного класса. Решения характеристических уравнений классов h_0, h_1, h_2 , определяются в замкнутом виде.

В пункте 6.8 применяется метод ортогональных многочленов к решению некоторых простейших уравнений. В 6.9 рассматриваются СИУ с ядром Гильберта. Выводится формула перестановки порядка интегрирования аналогичная формуле Пуанкаре–Бергмана, формулы обращения для сингулярных интегралов с ядром Гильберта. Даётся решение характеристического уравнения. Выписан двухсторонний регуляризатор для полного СИУ с ядром Гильберта.

В 6.10 приводится решение по методу Кармана СИУ Трикоми с неподвижными особенностями. В конце главы (п. 6.11) содержится фрагментарное изложение теории многомерных сингулярных интегралов и сингулярных уравнений и систем. Фундаментальное значение имеет введенное С. Г. Михлиным понятие символа сингулярного оператора. В терминах символа сформулированы основные теоремы теории. В качестве приложения рассматриваются системы интегральных уравнений краевых задач теории упругости. Поскольку символические определители этих систем не равны нулю, то для этих уравнений справедливы теоремы Фредгольма.

В 7-й главе рассматриваются некоторые интегральные уравнения типа свертки. В пунктах 7.2 и 7.3 изложены сведения из теории интегральных преобразований Фурье, Лапласа и Меллина, которые используются в дальнейшем изложении. В 7.4 с применением преобразования Фурье и теоремы о свертке приведено решение интегродифференциального уравнения на оси.

В пункте 7.5 дано изложение основ метода Винера–Хопфа, теории факторизации функций. Отмечается связь проблемы факторизации на оси с краевой задачей Римана для полуплоскости. Рассмотрен пример на решение интегрального уравнения Винера–Хопфа второго рода.

Главу 8, посвященную гиперсингулярным интегральным уравнениям, любезно согласилась написать и поместить в данную книгу Е. А. Стрельникова. Здесь дается определение конечной части гиперсингулярного интеграла по Адамару на отрезке прямой и на гладком разомкнутом контуре, различные интерпретации гиперсингулярного интеграла. Рассматривается проблема вычисления интегралов типа Адамара.

В пунктах 8.2 и 8.3 рассматриваются гиперсингулярные интегралы в пространственном случае, проблемы вычисления их по плоским элементам, обобщенные потенциалы двойного слоя на куске поверхности Ляпунова и некоторые другие вопросы. Наконец, в п. 8.4 описаны различные численные методы решения гиперсингулярных уравнений в плоском и пространственном случаях.

В главе 9 приведены различные приложения математического аппарата в задачах физики и механики сплошной среды.

О тематике следующих выпусков можно составить представление по примерному оглавлению этих томов, которое помещено ниже.

Том II. Статические и динамические задачи электромагнитотермоупругости.

Том III. Контактные проблемы механики разрушения анизотропных пластин и оболочек.

Том IV. Неклассические проблемы теплопроводности и термоупругости. Фрактальные модели. Учет эффектов памяти (интеллектуальные материалы). Гиперболические модели. Вязкоупругие модели.

Том V. Неклассические проблемы механики композитов. Наномеханика.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность проф. Е. А. Стрельниковой за участие в работе над книгой, обсуждение результатов, способствовавшее улучшению ее содержания.

Авторы благодарят также сотрудников лаборатории электротермомагнитоупругости при кафедре прикладной и вычислительной математики Сумского госуниверситета за обсуждение тематики 1-го тома и следующих томов серии.

Наконец, мы выражаем глубокую признательность сотрудникам лаборатории Л. Л. Фильшинской и А. О. Кладиенко за техническую работу над рукописью: компьютерный набор, бесконечные его правки и вычитку текста.

Бардзокас Демостенис Иоаниис. Профессор Афинского национального технического университета (NTUA). Родился в г. Ташкенте в 1952 г. в семье греческих политэмигрантов. После окончания средней школы в 1970 г. поступил на механико-математический факультет Ташкентского государственного университета им. В. И. Ленина и окончил его в 1975 г. После падения диктатуры в Греции вся семья возвращается на Родину. В 1976 г. был принят научным сотрудником на кафедру механики Афинского национального технического университета, заведующим которой был известный ученый, академик П. С. Теокарис. Под его руководством в 1984 г. защитил диссертацию «Исследование плоских задач укрепления тел с трещинами и плоских контактных задач упругих тел методом ТФКП». С 1987 по 1990 гг. проходил научную стажировку в МИХМе под руководством В. З. Партона и Б. А. Кудрявцева. Сейчас является

профессором на кафедре механики факультета прикладной математики и физических наук Афинского национального университета. Опубликовал более 130 научных работ по различным разделам механики сплошной среды (механика разрушения, упругость, термоупругость, электроупругость, механика связанных полей, механика композиционных материалов, механика землетрясений, теория волн и т. д.), является автором и соавтором многих учебников и монографий в вышеуказанной научной области, которые были изданы на разных языках (русский, английский, греческий).

Фильшинский Леонид Аншевич. Доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной и вычислительной математики Сумского государственного университета, академик Российской академии естествознания (РАЕ). Заслуженный деятель науки и образования по определению РАЕ. Подготовил 3 докторов и 26 кандидатов наук. Автор более 300 научных статей, 11 монографий и учебных пособий. Научные интересы: математическая физика, механика сплошной среды.

Фильшинский Михаил Леонидович. Родился в г. Новосибирске (Россия) в 1961 г. С 1975 г. жил в г. Сумы (Украина). В 1989 г. защитил кандидатскую диссертацию «Решение двумерных динамических задач теории упругости и электроупругости для тел с полостями-разрезами» на механико-математическом факультете МГУ. Ведущий научный сотрудник Сумского государственного университета, автор более 55 научных трудов. Безвременно ушел из жизни 21 ноября 2003 г. Характерной чертой деятельности Михаила Леонидовича было сочетание таланта с большой работоспособностью, без которой невозможно было довести до конца многие интересные работы, отличающиеся актуальностью как с точки зрения теоретической постановки, так и приложения. Другой компонентой его природного дара и увлечения была музыка и ее композиция.

КАТАЛОГ НЕКОТОРЫХ МОНОГРАФИЙ АВТОРОВ

1. Григолюк Э. И., Фильшинский Л. А. Перфорированные пластины и оболочки. М.: Наука, 1970, 556 с.
2. Григолюк Э. И., Фильшинский Л. А. Периодические кусочно-однородные упругие структуры. М.: Наука, 1992, 228 с.
3. Григолюк Э. И., Фильшинский Л. А. Регулярные кусочно-однородные структуры с дефектами. М.: Физ.-мат. литература, 1994, 336 с.
4. Бардзокас Д. И., Фильшинский М. Л. Электроупругость кусочно-однородных тел. Сумы: Изд-во Университетская книга, 2000, 308 с.
5. Бардзокас Д. И., Зобнин А. И. Математическое моделирование физических процессов в композиционных материалах периодической структуры. М.: УРСС, 2003, 376 с.
6. Бардзокас Д. И., Кудрявцев Б. А., Сеник Н. А. Распространение волн в электромагнитоупругих средах. М.: УРСС, 2003, 336 с.
7. Бардзокас Д. И., Зобнин А. И., Сеник Н. А., Фильшинский М. Л. Математическое моделирование в задачах механики связанных полей. Т. 1, 2. М.: УРСС, 2005, 311 с.; 374 с.
8. Бардзокас Д. И., Зобнин А. И., Сеник Н. А., Фильшинский М. Л. Задачи по теории термопьезоэлектричества с подробными решениями. М.: УРСС, 2005, 173 с.
9. Bardzokas D. I., Filshtinsky M. L., Filshtinsky L. A. Mathematical methods in Electro-Magneto-Elasticity. Springer – Verlag, 2007, 530 p.

ГЛАВА 1

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

1.1. Основные определения. Теорема Коши

Пусть $f(x, y)$ — дифференцируемая комплекснозначная функция комплексных переменных x и y . Введем невырожденное преобразование $z = x + iy$, $z^* = x - iy$ и операторы комплексного дифференцирования (i — мнимая единица)

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial z^*} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right). \quad (1.1)$$

Необходимым и достаточным условием независимости функции $f(x, y)$ от переменной z^* является равенство

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \quad (1.2)$$

Пусть теперь x и y — действительные переменные. В этом случае функцию $f(x, y)$ и операторы комплексного дифференцирования (1.1) можно представить в виде

$$f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y), \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right),$$

где $u(x, y), v(x, y)$ — действительные функции переменных x и y , \bar{z} — величина комплексно-сопряженная с z .

Условие (1.2) с учетом представления (1.3) дает следующие соотношения между действительной и мнимой частями функции $f(x, y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Таким образом, если функции $u(x, y), v(x, y)$ дифференцируемы в некоторой области \mathcal{D} на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, то эти условия (Коши–Римана, Даламбера–Эйлера) необходимы и достаточны для того, чтобы

1) $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) = f(x + iy) = f(z);$

2) существовала производная

$$f'(z) = \frac{df}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}, \quad z \in \mathcal{D}. \quad (1.5)$$

Однозначная функция $f(z)$, дифференцируемая в каждой точке области \mathcal{D} , называется аналитической (голоморфной, регулярной, моногенной) в этой области. Равенства (1.4) или (1.5) доставляют необходимые и достаточные условия аналитичности функции $f(z)$. На самом деле аналитичность функции $f(z)$ в области \mathcal{D} обеспечивает существование производной любого порядка $f^{(k)}(z)$ в этой области. Указанное замечательное свойство аналитических функций вытекает, например, из интегральной формулы Коши, о которой речь пойдет ниже.

Из равенств (1.4) следует, что действительная и мнимая части $f(z)$ — гармонические функции, т. е.

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Они называются сопряженными гармоническими функциями в области \mathcal{D} , ибо в силу (1.4) каждая из них с точностью до аддитивной постоянной определяет сопряженную с ней функцию.

Интеграл от функции $f(z)$ по спрямляемой дуге C определяется обычным образом

$$\int_C f(z) dz = \int_C u dx - v dy + i \int_C v dy + u dx. \quad (1.6)$$

В силу (1.4) подынтегральные выражения в криволинейных интегралах являются полными дифференциалами, поэтому значение интеграла в левой части определяется только концами дуги C . Для замкнутого контура интеграл (1.6) равен нулю. Точнее, имеет место теорема Коши [12, 16, 21].

Пусть \mathcal{D} — односвязная область, ограниченная простой замкнутой спрямляемой кривой Γ , и функция $f(z)$ аналитична в \mathcal{D} и непрерывна в замыкании $\bar{\mathcal{D}} = \mathcal{D} \cup \Gamma$. Тогда

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

Теорема Коши обобщается на многосвязную область \mathcal{D} , ограниченную конечным числом контуров Γ_k в предложении, что $f(z)$ аналитична в этой области и непрерывна в замыкании $\bar{\mathcal{D}} = \mathcal{D} \cup \Gamma$ (рис. 1.1). Направление обхода контуров Γ_k принимается таким, чтобы область \mathcal{D} оставалась слева.

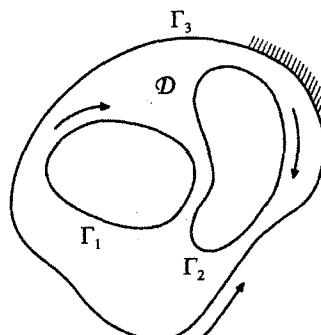


Рис. 1.1. Многосвязная область \mathcal{D}

Применительно к конфигурации, изображенной на рис. 1.1, можно записать

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz + \int_{\Gamma_2} f(z) dz + \int_{\Gamma_3} f(z) dz = 0.$$

Здесь $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$ — полная граница области \mathcal{D} .

1.2. Интегральные представления

Из теоремы Коши вытекает формула Коши [4, 21, 22], которая определяет интегральное представление функции $f(z)$, голоморфной в конечной многосвязной области \mathcal{D} и непрерывной в $\overline{\mathcal{D}} = \mathcal{D} \cup \Gamma$, через ее граничные значения $f(\zeta)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \mathcal{D}. \quad (1.7)$$

Здесь обнаруживается еще одно замечательное свойство: значение $f(z)$ в любой внутренней точке области ее аналитичности однозначно определяется ее граничными значениями.

Если $f(z)$ аналитична на внешности конечной односвязной области \mathcal{D} с границей Γ и исчезает на бесконечности ($\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$, $z \rightarrow \infty$), то формула Коши (1.7) остается в силе. Необходимо только обходить контур Γ по часовой стрелке (таким образом область аналитичности функции $f(z)$ будет оставаться слева). В том случае, когда $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = c = \text{const}$ при $z \rightarrow \infty$, формула (1.7) определяет функцию $f(z) - c$. Из формулы Коши следует существование производной любого порядка у аналитической функции $f(z)$.

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (1.8)$$

Пусть \mathcal{D} — круг $|z - z_0| < R$, Γ — граница области \mathcal{D} , функция $f(z)$ аналитична в \mathcal{D} и непрерывна в $\overline{\mathcal{D}}$; M — максимум модуля $f(z)$ в $\overline{\mathcal{D}}$. Из формулы (1.8) выводятся неравенства Коши, которые в этих обозначениях имеют вид [21, 22, 29]

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq M \frac{n!}{R^n} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (1.9)$$

Имеет место теорема Лиувилля, вытекающая из (1.9): если $f(z)$ аналитична в полной z -плоскости, то она постоянна.

Рассмотрим теперь интеграл Коши, фигурирующий в правой части (1.7), как самостоятельную аналитическую конструкцию. Пусть \mathcal{D}^+ — конечная односвязная область, ограниченная контуром Γ , $\overline{\mathcal{D}} = \mathcal{D} \cup \Gamma$, \mathcal{D}^- — дополнение замкнутой области $\overline{\mathcal{D}}$ до полной z -плоскости (т. е. плоскости, содержащей точку $z = \infty$), $f(\zeta)$ — граничное значение функции $f(z)$ на Γ . Для наших целей достаточно будет предположить, что Γ — замкнутая кусочно-гладкая кривая без точек самопересечения.

Тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} f(z), & z \in \mathcal{D}^+, \\ 0, & z \in \mathcal{D}^-. \end{cases}$$

Это означает, что интеграл Коши определяет на полной плоскости z так называемую кусочно-голоморфную (кусочно-аналитическую) функцию $F(z)$ с линией скачков Γ , причем

$$[F(z)]_{\Gamma} = F^+(\zeta) - F^-(\zeta) = f(\zeta).$$

Более общий пример кусочно-голоморфной функции доставляет нам интеграл типа Коши [5, 21, 24, 25].

Пусть Γ — простой гладкий замкнутый или разомкнутый контур, и пусть $f(\zeta) = f_1(\zeta) + if_2(\zeta)$ — комплексная функция точки $\zeta \in \Gamma$. Будем говорить, что $f(\zeta)$ удовлетворяет на Γ условию Гельдера (непрерывна по Гельдеру, принадлежит классу $H(\mu)$), если

$$|f(\zeta_1) - f(\zeta_2)| \leq A |\zeta_1 - \zeta_2|^{\mu}, \quad \forall \zeta_1, \zeta_2 \in \Gamma, \quad A > 0, \quad 0 < \mu \leq 1. \quad (1.10)$$

Если ζ_0 — фиксированная точка на Γ , то будем говорить, что функция $f(\zeta)$ удовлетворяет условию $H(\mu)$ в точке ζ_0 при $|f(\zeta) - f(\zeta_0)| < A |\zeta - \zeta_0|^{\mu}$, $A > 0$, $0 < \mu \leq 1$ для $\zeta \in \Gamma$ достаточно близких к ζ_0 .

Под интегралом типа Коши понимается конструкция

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \notin \Gamma, \quad (1.11)$$

где $f(\zeta) \in H(\mu)$ и направление интегрирования для замкнутого контура Γ — против часовой стрелки (рис. 1.2), для разомкнутого контура Γ — от начала (точка a) к концу дуги (точка b). При таком выборе направления обхода контура область, расположенную по левую (правую) руку от контура Γ , обозначим через \mathcal{D}^+ (\mathcal{D}^-).

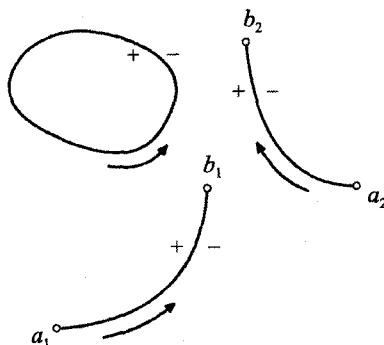


Рис. 1.2. Положительные направления на замкнутых и разомкнутых контурах

Интеграл типа Коши (1.11) существует для любого $z \in \Gamma$ и исчезает на бесконечности ($\lim F(z) = 0, z \rightarrow \infty$). Определяемая им функция $F(z)$ аналитична в любой точке, не лежащей на Γ . Если же $z \in \Gamma$, то интеграл типа Коши (1.11) в обычном (римановом) смысле не существует. Для того, чтобы придать ему определенный смысл, строится специальная процедура (выделения конечной части особого интеграла).

Пусть точка z совпадает с фиксированной точкой ζ_0 , лежащей на линии Γ и не совпадающей с ее концами. Обозначим через ζ' и ζ'' точки пересечения контура Γ с окружностью $|z - \zeta_0| = r$, а через γ дугу кривой Γ между точками ζ' и ζ'' (рис. 1.3).

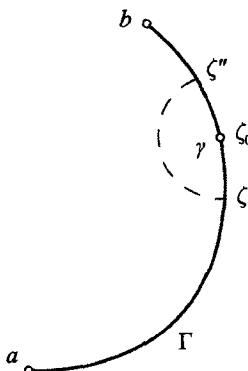


Рис. 1.3. К определению главного значения особого интеграла по Коши

Под главным значением интеграла типа Коши (1.11) в точке контура ζ_0 понимается следующее [4, 5, 21, 24, 25]:

$$Vp \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Gamma \setminus \gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta. \quad (1.12)$$

Так как

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma \setminus \gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta &= f(\zeta_0) \int_{\Gamma \setminus \gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - \zeta_0} + \int_{\Gamma \setminus \gamma} \frac{f(\zeta) - f(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta, \\ \int_{\Gamma \setminus \gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - \zeta_0} &= \ln(\zeta - \zeta_0) \Big|_a^{\zeta'} + \ln(\zeta - \zeta_0) \Big|_{\zeta'}^b = \ln \frac{b - \zeta_0}{a - \zeta_0} - \ln \frac{\zeta'' - \zeta_0}{\zeta' - \zeta_0}, \\ \left| \int_{\Gamma \setminus \gamma} \frac{f(\zeta) - f(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta \right| &\leq \int_{\Gamma \setminus \gamma} |f(\zeta)| |\zeta - \zeta_0|^{\mu-1} d\zeta, \end{aligned}$$

то предел в правой части (1.12) существует. Имеем окончательно

$$Vp \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta = \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) - f(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta + \left(i\pi + \ln \frac{b - \zeta_0}{a - \zeta_0} \right) f(\zeta_0). \quad (1.13)$$

Таким образом, главное значение (особого, сингулярного) интеграла типа Коши в точке ζ_0 определяется формулой (1.13). Для справедливости определения (1.13) в любой внутренней (не совпадающей с концами) точке линии Γ достаточно, чтобы функция $f(\zeta)$ удовлетворяла условию Гельдера (1.10) на Γ . Для замкнутого контура ($a=b$) формула (1.13) упрощается. Имеем

$$Vp \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta = \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) - f(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta + i\pi f(\zeta_0). \quad (1.14)$$

В большинстве источников знак главного значения Vp (*valeur principale*) опускается и используется обычное обозначение интеграла. Ниже мы также будем придерживаться этого соглашения.

Из равенства (1.14) вытекает формула Гаусса для замкнутого контура

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - \zeta_0} = \frac{1}{2}, \quad \zeta_0 \in \Gamma. \quad (1.15)$$

В соответствии с этим простейший интеграл типа Коши определяет на плоскости z кусочно-голоморфную функцию с линией скачков Γ .

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \begin{cases} 1, & z \in \mathcal{D}^+, \\ 1/2, & z \in \Gamma, \\ 0, & z \in \mathcal{D}^-. \end{cases} \quad (1.16)$$

В приложениях часто используется следующее обобщение интеграла типа Коши. Пусть μ_1 — комплексное число, для определенности будем считать, что $\operatorname{Im} \mu_1 > 0$. Введем комплексную переменную $z_1 = x + \mu_1 y = \operatorname{Re} z + \mu_1 \operatorname{Im} z$, осуществляющую аффинное отображение плоскости комплексного переменного z на плоскость z_1 . При этом ноль переходит в ноль, бесконечность в бесконечность, связность области и направление обхода не меняются. Любая внутренняя точка области \mathcal{D} на плоскости комплексного переменного z переходит при аффинном отображении во внутреннюю точку области \mathcal{D}_1 на плоскости z_1 (рис. 1.4).

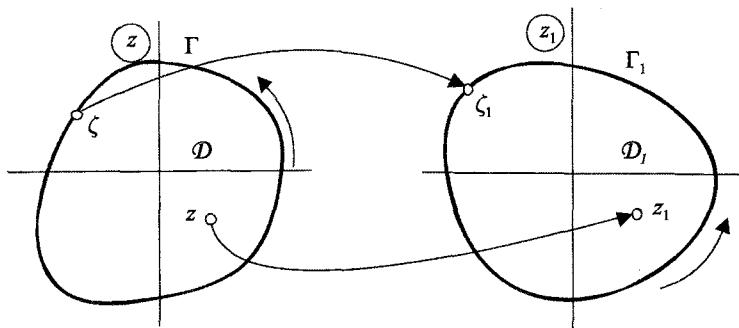


Рис. 1.4. К топологии аффинного отображения $z_1 = \operatorname{Re} z + \mu_1 \operatorname{Im} z$, $\mu_1 > 0$

Обобщенный интеграл типа Коши [44]

$$F(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1} d\zeta,$$

$$\zeta_1 = \operatorname{Re} \zeta + \mu_1 \operatorname{Im} \zeta \in \Gamma_1, \quad \zeta \in \Gamma \quad (1.17)$$

определяет на плоскости комплексного переменного z_1 затухающую на бесконечности кусочно-голоморфную функцию $F(z_1)$ с линией скачков Γ_1 . Аффинное преобразование переменных

$$\begin{cases} z_1 = x + \mu_1 y, \\ \bar{z}_1 = x + \bar{\mu}_1 y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{z_1 \bar{\mu}_1 - \bar{z}_1 \mu_1}{\bar{\mu}_1 - \mu_1}, \\ y = \frac{z_1 - \bar{z}_1}{\mu_1 - \bar{\mu}_1}, \end{cases} \quad \operatorname{Im} \mu_1 > 0 \quad (1.18)$$

определяет операторы комплексного дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial z_1} = \frac{1}{2i \operatorname{Im} \mu_1} \left(\frac{\partial}{\partial y} - \bar{\mu}_1 \frac{\partial}{\partial x} \right), \quad (1.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} = -\frac{1}{2i \operatorname{Im} \mu_1} \left(\frac{\partial}{\partial y} - \mu_1 \frac{\partial}{\partial x} \right).$$

На основании соотношений (1.19) условие независимости комплекснозначной дифференцируемой функции $\Phi(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ от переменной \bar{z}_1 имеет вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}_1} = -\frac{1}{2i \operatorname{Im} \mu_1} \left(\frac{\partial}{\partial y} - \mu_1 \frac{\partial}{\partial x} \right) (u + iv) = 0.$$

После разделения в этом равенстве действительной и мнимой частей приходим к соотношениям вполне аналогичным условиям Коши–Римана (1.4)

$$\begin{cases} \operatorname{Im} \mu_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \operatorname{Re} \mu_1 \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} - \operatorname{Re} \mu_1 \frac{\partial u}{\partial x} = -\operatorname{Im} \mu_1 \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \Leftrightarrow \mu_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) = i \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (1.20)$$

При $\mu_1 = i$ они и переходят в условия (1.4).

Таким образом, условия (1.20) необходимы и достаточны для того, чтобы:

- 1) $\Phi(x, y) = \Phi(x + \mu_1 y) = \Phi(z_1)$;
- 2) существовала производная

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z_1} = \Phi'(z_1) = \frac{\partial}{\partial x} (u + iv) = \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial}{\partial y} (u + iv). \quad (1.21)$$

Взяв вещественную производную $\partial^2\Phi/\partial z_1\partial\bar{z}_1$ от комплексной функции $\Phi(x, y) = u + iv$, приходим к выводу, что сопряженные функции u, v есть решения однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} L\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)w &= 0, \\ L\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2\operatorname{Re}\mu_1 \frac{\partial^2}{\partial x\partial y} - \mu_1\bar{\mu}_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Вводя невырожденное преобразование

$$\begin{cases} \xi = x + y \operatorname{Re}\mu_1 \\ \eta = y \operatorname{Im}\mu_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \xi + \frac{\operatorname{Re}\mu_1}{\operatorname{Im}\mu_1}\eta \\ y = \frac{\eta}{\operatorname{Im}\mu_1} \end{cases},$$

приходим к сопряженным гармоническим функциям $U(\xi, \eta) = u(x, y)$ и $V(\xi, \eta) = v(x, y)$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} \right)U &= 0, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} \right)V = 0, \\ \frac{\partial U}{\partial\xi} &= \frac{\partial V}{\partial\eta}, \quad \frac{\partial U}{\partial\eta} = -\frac{\partial V}{\partial\xi}. \end{aligned}$$

1.3. Пределевые значения интеграла типа Коши и некоторых интегралов со специальными ядрами

Пусть Γ — простой гладкий замкнутый контур, точка $\zeta \in \Gamma$, $\rho(z, \Gamma) = \min_{\zeta \in \Gamma} \rho(z, \zeta) = d > 0$ — расстояние от точки z до множества Γ и $z \notin \Gamma$. Получим предельные значения интеграла типа Коши, когда точка z стремится к ζ_0 из области $\mathcal{D}^+(\mathcal{D}^-)$. В предположении, что величина $|z - \zeta_0|/d$ — ограниченная (точка $z \rightarrow \zeta_0 \in \Gamma$ по некасательному пути), можно показать, что интеграл

$$\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) - f(\zeta_0)}{\zeta - z} d\zeta \rightarrow \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) - f(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta$$

при стремлении z к ζ_0 как из области \mathcal{D}^+ , так и из области \mathcal{D}^- . Выражая его из (1.14) через главное значение особого интеграла типа Коши и учитывая при этом формулу (1.16), запишем

$$\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right)_{z \rightarrow \zeta_0}^{\pm} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta - \frac{1}{2} f(\zeta_0) + \begin{cases} f(\zeta_0), & z \in \mathcal{D}^+, \\ 0, & z \in \mathcal{D}^-. \end{cases}$$

Отсюда получаем формулы Сохоцкого–Племеля для предельных значений интеграла типа Коши (1.11)

$$\begin{aligned} F^+(\zeta_0) &= \frac{1}{2} f(\zeta_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta, \\ F^-(\zeta_0) &= -\frac{1}{2} f(\zeta_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Очевидно, формулы (1.23) справедливы и для разомкнутого контура Γ , если ζ_0 — внутренняя точка (не совпадает с его концами). Таким образом, интеграл типа Коши (1.11) определяет на полной плоскости z кусочно-голоморфную, исчезающую на бесконечности функцию $F(z)$ с линией разрывов Γ , причем скачок $F(z)$ на Γ равен «плотности» $f(\zeta)$.

Аналогичные рассуждения относительно обобщенного интеграла типа Коши (1.17) дают

$$\begin{aligned} F^+(\zeta_{10}) &= \frac{1}{2} f(\zeta_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta_1 - \zeta_{10}} d\zeta_1, \\ F^-(\zeta_{10}) &= -\frac{1}{2} f(\zeta_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta_1 - \zeta_{10}} d\zeta_1, \\ \zeta_{10} &= \operatorname{Re} \zeta_0 + \mu_1 \operatorname{Im} \zeta_0, \quad \zeta_0 \in \Gamma. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Подчеркнем еще раз, что в предельных соотношениях (1.23), (1.24) фигурируют главные значения сингулярных интегралов с ядром Коши, которые определяются формулами (1.13) и (1.14) соответственно для разомкнутого и замкнутого контуров [5, 14, 24, 25].

В приложениях часто встречается интеграл вида

$$F_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\bar{\zeta} - \bar{z}}{\zeta - z} \cdot \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (1.25)$$

Относительно этого интеграла справедливо следующее утверждение [7, 8]. Пусть Γ — простой гладкий замкнутый или разомкнутый контур, точка $\zeta_0 \in \Gamma$ (не совпадает с концами, если таковые имеются) и $f(\zeta)$ удовлетворяет условию Гельдера в точке ζ_0 . Тогда функция $F_1(z)$ непрерывно продолжима слева и справа (из области \mathcal{D}^+ и области \mathcal{D}^-) на точку ζ_0 . Соответствующие граничные значения в этой точке таковы:

$$F_1^\pm(\zeta_0) = \mp \frac{1}{2} f(\zeta_0) e^{-2i\psi_0} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0}{\zeta - \zeta_0} \cdot \frac{f(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta. \quad (1.26)$$

Здесь ψ_0 — угол между положительной нормалью к Γ в точке ζ_0 и осью Ox_1 .

С использованием формул (1.23)–(1.26) можно вычислять граничные значения некоторых интегралов. Приведем примеры.

1. Интеграл, содержащий в качестве ядра дзета-функцию Вейерштрасса [1, 2, 36]. Пусть ω_1 и ω_2 ($\operatorname{Im} \omega_2 / \omega_1 > 0$) — основные периоды, Π_0 — основной параллелограмм периодов

и Γ — замкнутый или разомкнутый контур, целиком лежащий внутри Π_0 . Рассмотрим интеграл

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(t) \zeta(t-z) dt, \quad (1.27)$$

где $\zeta(z)$ — дзета-функция Вейерштрасса, построенная на основных периодах ω_1, ω_2 .

Относительно эллиптических функций мы поговорим позже, сейчас же отметим, что в пределах основной ячейки Π_0 можно записать

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \varphi(z),$$

где $\varphi(z)$ — регулярная функция. Используя это представление и формулы Сохоцкого—Племеля (1.23), получим предельные значения функции (1.27) при $z \rightarrow t_0 \in \Gamma$:

$$F^{\pm}(t_0) = \pm \frac{1}{2} f(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(t) \zeta(t-t_0) dt. \quad (1.28)$$

2. Рассмотрим интеграл

$$F(x_1, x_2) = \frac{i\gamma}{4} \int_{\Gamma} f(\zeta) e^{-i\alpha} H_1^{(1)}(\gamma r) ds, \quad (1.29)$$

где $\zeta - z = re^{i\alpha}, z = x_1 + ix_2, \zeta = \xi_1 + i\xi_2 \in \Gamma, H_p^{(1)}(x)$ — функция Ганкеля первого рода порядка $p, \gamma > 0$ — числовой параметр, ds — элемент дуги контура Γ . Имеет место представление [6, 15, 23, 27, 31]

$$H_1^{(1)}(x) = \frac{2}{i\pi x} + H_1(x), \quad (1.30)$$

причем $H_1(x)$ не имеет особенностей при $x \geq 0$.

Подстановка в (1.29) выражения (1.30) с учетом связи $d\zeta = ie^{i\psi} ds$, дает

$$F(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{e^{i\psi} (\zeta - z)} + \frac{i\gamma}{4} \int_{\Gamma} f(\zeta) e^{-i\alpha} H_1(\gamma r) ds.$$

Здесь первый интеграл типа Коши с плотностью $f(\zeta) e^{-i\psi}$, второй интеграл существует в обычном смысле и непрерывно продолжим через Γ . Таким образом, окончательно получаем при $z \rightarrow \zeta_0 \in \Gamma$:

$$F^{\pm}(\xi_{10}, \xi_{20}) = \pm \frac{1}{2} f(\zeta_0) e^{-i\psi_0} + \frac{i\gamma}{4} \int_{\Gamma} f(\zeta) e^{-i\alpha_0} H_1^{(1)}(\gamma r_0) ds,$$

где $r_0 = |\zeta - \zeta_0|, \alpha_0 = \arg(\zeta - \zeta_0)$.

3. Пусть

$$F(x_1, x_2) = \frac{i\gamma}{4} \int_{\Gamma} f(\zeta) e^{-3i\alpha} H_1^{(1)}(\gamma r) ds.$$

Этот интеграл путем подстановки (1.30) вместо ядра сводится к выражению, сингулярная часть которого совпадает с интегралом (1.25). Поэтому, привлекая формулу (1.26), получим

$$F^\pm(\xi_{10}, \xi_{20}) = \mp \frac{1}{2} f(\zeta_0) e^{-3i\psi_0} + \frac{i\gamma}{4} \int_{\Gamma} f(\zeta) e^{-3i\alpha_0} H_i^{(1)}(\gamma r_0) ds.$$

Сформулируем теперь несколько предложений относительно свойств сингулярного интеграла типа Коши [5, 14, 25]:

а) в точках $t \in \Gamma$ и отличных от концов имеет место формула дифференцирования

$$\frac{d}{dt} \int_{\Gamma} f(\zeta) \ln(\zeta - t) d\zeta = i\pi f(t) - \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - t};$$

б) пусть

$$f'(z) = F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

тогда в точках $t \in \Gamma$ и отличных от концов допустима перестановка операции предельного перехода и дифференцирования

$$F^\pm(t) = \frac{d}{dt} f^\pm(t);$$

в) если Γ — гладкий замкнутый или разомкнутый контур и $f(\zeta)$ удовлетворяет на Γ условию Гельдера $H(\mu)$, то предельные значения интеграла типа Коши (1.11) $F^+(\zeta_0)$ и $F^-(\zeta_0)$ также удовлетворяют условию $H(\mu)$, в том случае когда $\mu < 1$, и условию $H(\mu - \delta)$, где $\delta > 0$ — сколь угодно малая величина, в случае $\mu = 1$. Разумеется, для разомкнутого контура предполагается, что точка ζ_0 не совпадает ни с одним из концов;

г) при сформулированных выше условиях предыдущее предложение справедливо и для сингулярного интеграла (понимаемого в смысле главного значения)

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta.$$

Предложения в) и г) составляют содержание теоремы Племеля–Привалова.

1.4. Асимптотика интегралов типа Коши

Концевые точки контура Γ являются исключительными хотя бы потому, что даже если плотность интеграла типа Коши (1.11) удовлетворяет условию H на Γ , включая концы, в этих точках функция $F(z)$ имеет особенности. Характер этих особенностей зависит от поведения плотности $f(\zeta)$ на концах. Рассмотрим наиболее часто встречающиеся ситуации [5, 24, 25].

1. Плотность интеграла типа Коши удовлетворяет условию Гельдера на всей дуге Γ , включая концы. Имеем

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{f(c)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) - f(c)}{\zeta - z} d\zeta,$$

где c — концевая точка (a или b).

При $z \rightarrow c$ последний интеграл существует в обычном смысле (как несобственный), поэтому он представляет собой ограниченную функцию на Γ , включая концы. Первый интеграл дает

$$\int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \ln \frac{b-z}{a-z}.$$

Окончательно получаем в окрестности концов a и b соответственно

$$\begin{aligned} F(z) &= -\frac{f(a)}{2\pi i} \ln(z-a) + F_1(z), \quad \lim_{z \rightarrow a} F_1(z) = F_1(a), \\ F(z) &= \frac{f(b)}{2\pi i} \ln(z-b) + F_2(z), \quad \lim_{z \rightarrow b} F_2(z) = F_2(b). \end{aligned} \quad (1.31)$$

2. Особенность степенного характера на конце c . Пусть

$$f(\zeta) = \frac{f_*(\zeta)}{(\zeta - c)^\gamma}, \quad \gamma = \alpha + i\beta, \quad 0 \leq \alpha < 1, \quad (1.32)$$

где $f_*(\zeta)$ удовлетворяет условию Гельдера $H(\lambda)$ на контуре Γ , включая концы. Представим интеграл типа Коши (1.11) в виде

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f_*(\zeta) d\zeta}{(\zeta - c)^\gamma (\zeta - z)} = \\ &= \frac{f_*(c)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{(\zeta - c)^\gamma (\zeta - z)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f_*(\zeta) - f_*(c)}{(\zeta - c)^\gamma (\zeta - z)} d\zeta. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Последний интеграл остается ограниченным, если $\alpha < \lambda$ и при $z \rightarrow c$ имеет определенный предел. Если же $\alpha \geq \lambda$, то он представляет неограниченную в окрестности точки c функцию, порядок особенности которой меньше α [13, 25, 28]. Главную особенность в точке c дает первый интеграл. Пусть, например, точка c совпадает с левым концом Γ — точкой a . Проведем разрез на плоскости z , соединяющий точки ветвления функции $(z-a)^{-\gamma}$: a и ∞ . Удобнее всего этот разрез проводить через контур Γ (рис. 1.5).

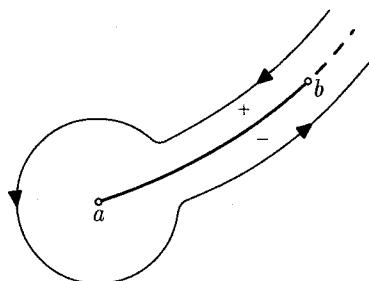


Рис. 1.5. К построению степенной асимптотики интеграла типа Коши в окрестности левого конца контура Γ

Согласно определению общей степенной функции

$$z^w = e^{w \ln z}$$

запишем

$$(\zeta - a)^{-\gamma} = e^{-\gamma \ln(\zeta - a)} = e^{-\gamma \ln r - i\theta}, \quad (1.34)$$

где $r = |\zeta - a|$, $\theta = \arg(\zeta - a)$.

Многозначность функции (1.34) связана с наличием в показателе угла θ , который увеличивается на 2π при полном обходе точки a против часовой стрелки (см. рис. 1.5). Поэтому, обозначив значение какой-либо ее ветви на левом берегу разреза через

$$[(\zeta - a)^{-\gamma}]^+ = (\zeta - a)^{-\gamma},$$

получим в этой же точке ζ на правом берегу

$$[(\zeta - a)^{-\gamma}]^- = (\zeta - a)^{-\gamma} e^{-2\pi i \gamma}. \quad (1.35)$$

Покажем, что функция

$$\varphi(z) = \omega(z) - \frac{e^{i\pi\gamma}}{2i \sin \pi\gamma} (\zeta - a)^{-\gamma}, \quad (1.36)$$

где

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{(\zeta - a)^{\gamma} (\zeta - z)};$$

непрерывно продолжима через разрез, включая и конец a . Имеем в силу (1.23) и (1.35) цепочку равенств

$$\begin{aligned} \varphi^+(z) - \varphi^-(z) &= \omega^+(z) - \omega^-(z) + \frac{e^{i\pi\gamma}}{2i \sin \pi\gamma} (\zeta - a)^{-\gamma} (e^{-2\pi i \gamma} - 1) = \\ &= (\zeta - a)^{-\gamma} \left\{ 1 + \frac{e^{i\pi\gamma}}{2i \sin \pi\gamma} (e^{-2\pi i \gamma} - 1) \right\} = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, имеет место представление

$$\omega(z) = \frac{e^{i\pi\gamma}}{2i \sin \pi\gamma} (z - a)^{-\gamma} + \omega_1(z), \quad (1.37)$$

где $\omega_1(z)$ аналитична в окрестности точки a .

Учитывая равенство (1.33) и замечание относительно второго слагаемого в этом равенстве, получаем в окрестности точки a

$$F(z) = \frac{e^{i\pi\gamma} f_*(a)}{2i \sin \pi\gamma} (z - a)^{-\gamma} + F_1(z),$$

где $F_1(z)$ может иметь особенность в точке a , но более низкого порядка, чем $r^{-\alpha}$. Аналогичные рассуждения можно провести для случая степенной особенности на правом конце дуги — в точке b

$$f(\zeta) = \frac{f_*(\zeta)}{(\zeta - b)^\gamma}, \quad \gamma = \alpha + i\beta.$$

Таким образом, если плотность $f(\zeta)$ имеет на концах контура Γ особенности степенного характера, то поведение интеграла типа Коши (1.11) в окрестности концевых точек a и b определяется формулами [5, 25]

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{e^{i\pi\gamma} f_*(a)}{2i \sin \pi\gamma} (z-a)^{-\gamma} + F_1(z), \quad z \in \Gamma, \\ F(z) &= -\frac{e^{-i\pi\gamma} f_*(b)}{2i \sin \pi\gamma} (z-b)^{-\gamma} + F_2(z), \end{aligned} \quad (1.38)$$

где функции $F_1(z), F_2(z)$ могут иметь особенности на концах a и b соответственно, но более низкого порядка, чем $r^{-\alpha}$.

В точках контура Γ вблизи концов функция $\omega(z)$ из (1.36) определяется при помощи формул Сохоцкого–Племеля (1.23) и соотношения (1.35)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{(\zeta-a)^\gamma (\zeta-\zeta_0)} &= \omega^+(\zeta_0) + \omega^-(\zeta_0) = \\ &= \frac{e^{i\pi\gamma}}{2i \sin \pi\gamma} (\zeta_0 - a)^{-\gamma} + \frac{e^{-i\pi\gamma}}{2i \sin \pi\gamma} (\zeta_0 - a)^{-\gamma} + \\ &+ \omega_1(\zeta_0) = \frac{\operatorname{ctg} \pi\gamma}{i} (\zeta_0 - a)^{-\gamma} + \omega_1(\zeta_0), \\ \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{(\zeta-b)^\gamma (\zeta-\zeta_0)} &= -\frac{\operatorname{ctg} \pi\gamma}{i} (\zeta_0 - b)^{-\gamma} + \omega_2(\zeta_0), \quad \zeta_0 \in \Gamma, \end{aligned} \quad (1.39)$$

где функции $\omega_1(\zeta_0)$ и $\omega_2(\zeta_0)$ аналитичны вблизи концов a и b соответственно. Значения интеграла (1.33) на контуре Γ в точке ζ_0 получим с использованием асимптотики (1.39). Имеем для точек a и b [5, 25]

$$\begin{aligned} F(\zeta_0) &= \frac{f_*(a)}{i} (\zeta_0 - a)^{-\gamma} \operatorname{ctg} \pi\gamma + F_1(\zeta_0), \\ F(\zeta_0) &= -\frac{f_*(b)}{i} (\zeta_0 - b)^{-\gamma} \operatorname{ctg} \pi\gamma + F_2(\zeta_0), \quad \zeta_0 \in \Gamma. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Функции $F_1(\zeta_0), F_2(\zeta_0)$ могут иметь особенности в соответствующих точках, но более низкого порядка, чем $|\zeta_0 - c|^{-\alpha}$.

Выпишем теперь асимптотику интеграла (1.25) в окрестности узла c ($c = a$ или b). Положим

$$f(\zeta) = \frac{f_*(\zeta)}{(\zeta - c)^\gamma}, \quad \gamma = \alpha + i\beta \quad (1.41)$$

и преобразуем интеграл следующим образом:

$$F_1(z) = \frac{f_*(c)}{2\pi i} \left\{ (1-\gamma) \int_{\Gamma} \frac{\bar{\zeta} - \bar{c}}{\zeta - c} \cdot \frac{d\zeta}{(\zeta - c)^\gamma (\zeta - z)} + (\bar{c} - \bar{z}) \int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{(\zeta - c)^\gamma (\zeta - z)^2} \right\} +$$

$$+\frac{f_*(c)}{2\pi i} \left\{ \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\bar{\zeta} - \bar{c}}{\zeta - c} \right) \cdot \frac{(\zeta - c)^{1-\gamma}}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\bar{\zeta} - \bar{z}}{\zeta - z} \cdot \frac{f_*(\zeta) - f_*(c)}{(\zeta - c)^\gamma (\zeta - z)} d\zeta \right\} + \\ + \frac{\bar{\zeta} - \bar{c}}{\zeta - c} \cdot \frac{(\zeta - c)^{1-\gamma}}{\zeta - z} \Bigg|_{\Gamma}.$$

Первый интеграл здесь — типа Коши, второй интеграл вычисляется через интеграл типа Коши при помощи соотношения

$$\frac{d}{dz} \int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{(\zeta - c)^\gamma (\zeta - z)} = \int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{(\zeta - c)^\gamma (\zeta - z)^2}.$$

Остальные слагаемые могут иметь особенности, но более слабые чем $|z - c|^{-\alpha}$. Окончательно получаем, используя формулы (1.37), (1.41), асимптотику интеграла (1.25) в окрестности узла (точка z не лежит на Γ)

$$F_1(z) = \pm \frac{\exp(\pm i\gamma\pi) f_*(c)}{2i(z - c)^\gamma \sin \gamma\pi} \left\{ -(1 - \gamma)e^{-2i\psi_c} + \gamma \frac{\bar{c} - \bar{z}}{c - z} \right\} + F_0(z). \quad (1.42)$$

Здесь ψ_c — угол между нормалью к левому берегу контура Γ в узле c и осью Ox_1 , верхний знак берется при $c = a$, нижний — при $c = b$, порядок роста $|F_0(z)|$ в окрестности узла c меньше, чем $\alpha = \operatorname{Re} \gamma$ [7, 8, 10].

Наконец, выпишем асимптотику интеграла типа Коши (1.17) в окрестности концов линии интегрирования. Положим, вблизи точки c (a или b)

$$f(\zeta) = \frac{f_*(\zeta)}{(\zeta_1 - c_1)^\gamma}, \quad c_1 = \operatorname{Re} c + \mu_1 \operatorname{Im} c, \quad \gamma = \alpha + i\beta, \quad 0 \leq \alpha < 1. \quad (1.43)$$

Тогда согласно (1.17) и (1.43)

$$F(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f_*(\zeta) d\zeta_1}{(\zeta_1 - c_1)^\gamma (\zeta_1 - z_1)}. \quad (1.44)$$

Применив к этому интегралу формулы (1.38), получим в окрестности узла c_1

$$F(z_1) = \pm \frac{e^{\pm i\pi\gamma} f_*(c)}{2i \sin \pi\gamma} (z_1 - c_1)^{-\gamma} + F_0(z_1). \quad (1.45)$$

Здесь верхний знак берется при $c = a$ ($c_1 = a_1$), нижний — при $c = b$ ($c_1 = b_1$), функции $F_0(z_1)$ могут иметь особенности в узле, но более низкого порядка, чем $|z - c|^{-\alpha}$. Так как

$$z_1 - c_1 = \operatorname{Re}(z - c) + \mu_1 \operatorname{Im}(z - c) = r(\cos \alpha + \mu_1 \sin \alpha),$$

то асимптотику (1.45) интеграла (1.44) в окрестности узла можно представить в виде

$$F(z_1) = \pm \frac{e^{\pm i\pi\gamma} f_*(c) r^{-\gamma}}{2i \sin \pi\gamma (\cos \alpha + \mu_1 \sin \alpha)^\gamma} + F_0(z_1). \quad (1.46)$$

1.5. Представления аналитических функций рядами

Согласно концепции Вейерштрасса любой степенной ряд (типа Тейлора или Маклорена) внутри своего круга сходимости представляет голоморфную (т. е. однозначную аналитическую) функцию. С другой стороны, из интегрального представления аналитической функции (1.7) следует теорема Коши.

Функция $f(z)$ представима своим рядом Тейлора в любом открытом круге с центром в точке a , в котором она аналитична. Во всякой замкнутой области, лежащей внутри круга аналитичности, ряд Тейлора

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (z-a)^k$$

сходится равномерно [33–35]. Например, при $|z| < 1$ однозначная ветвь $\ln(1+z)$ является суммой ряда Маклорена

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots$$

Если $f(z)$ аналитична в круговом кольце $\mathcal{D}: r < |z-a| < R$ и непрерывна в замкнутом кольце $\bar{\mathcal{D}}$ (рис. 1.6), то согласно интегральной формуле Коши (1.7)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta + \int_{c_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta. \quad (1.47)$$

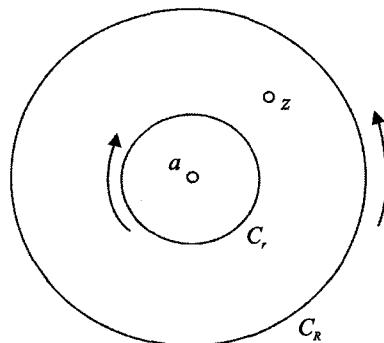


Рис. 1.6. Круговое кольцо $r < |z-a| < R$ с центром в точке a

Для любой внутренней точки $z \in \mathcal{D}$ имеем:

1) при $\zeta \in C_R$ отношение $\left| \frac{z-a}{\zeta-a} \right| < 1$, поэтому имеет место разложение

$$\frac{1}{\zeta-z} = \frac{1}{\zeta-a} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-a}{\zeta-a}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}},$$

2) при $\zeta \in C_r$ отношение $\left| \frac{\zeta - a}{z - a} \right| < 1$ и справедливо разложение

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta - a}{z - a}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - a)^n}{(z - a)^{n+1}}.$$

Полученные ряды равномерно сходятся в чуть зауженном замкнутом кольце $D': k^{-1}r \leq |z - a| \leq kR$, $0 < k < 1$. Поэтому подстановка их в (1.47) для кольца D' и почленное интегрирование допустимы. В результате приходим к представлению [21, 37–39]

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n, \quad (1.48)$$

где коэффициенты c_n выражаются в виде интегралов по любой окружности $\gamma: |z - a| = \rho$, $k^{-1}r < \rho < kR$ в виде

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (1.49)$$

Таким образом, если функция $f(z)$ аналитична в круговом кольце $0 < r < |z - a| < R$, то в любой внутренней точке z она может быть представлена своим рядом (1.48), который называется рядом Лорана. Этот ряд равномерно сходится в любой замкнутой области, лежащей внутри кольца аналитичности функции $f(z)$. Имеет место и обратное утверждение. Если ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z - a)^n \quad (1.50)$$

сходится в круговом кольце $r < |z - a| < R$, то его сумма $f(z)$ аналитична в этом кольце и разложение (1.50) представляет собой ряд Лорана для функции $f(z)$.

Правильная часть ряда Лорана

$$c_0 + c_1(z - a) + c_2(z - a)^2 + \dots$$

дает разложение функции, аналитической внутри круга радиуса $R > 0$ с центром в точке a . Главная часть ряда Лорана

$$\frac{c_{-1}}{z - a} + \frac{c_{-2}}{(z - a)^2} + \dots + \frac{c_{-n}}{(z - a)^n} + \dots$$

представляет функцию, аналитическую вне некоторой окрестности точки $a: |z - a| > r$. Это обстоятельство дает возможность конструктивно классифицировать так называемые изолированные особые точки аналитической функции. Точка a называется изолированной особой точкой функции $f(z)$, если существует окрестность этой точки, в которой $f(z)$ аналитична за исключением самой точки a .

Различают три типа изолированных особых точек в зависимости от поведения функции $f(z)$ в их окрестности.

1. Устранимая особая точка. В этом случае лорановское разложение в окрестности точки a не содержит главной части, т. е.

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots \quad (1.51)$$

Отсюда

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = c_0$$

и ряд Тейлора (1.51) представляет аналитическую в окрестности точки a и в самой этой точке функцию.

2. Полюс порядка p . Точка a называется полюсом порядка p функции $f(z)$, если

$$\lim_{z \rightarrow a} (z-a)^p f(z) = c_{-p} < \infty.$$

Следовательно, справедливо разложение

$$(z-a)^p f(z) = c_{-p} + (z-a)c_{-p+1} + \dots + (z-a)^p c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-a)^{n+p}.$$

Отсюда вытекает структура ряда Лорана для функции $f(z)$ в окрестности полюса порядка p

$$f(z) = \frac{c_{-p}}{(z-a)^p} + \frac{c_{-p+1}}{(z-a)^{p-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n. \quad (1.52)$$

3. Существенно особая точка. В этой точке $\lim f(z)$ при $z \rightarrow a$ не существует и главная часть ряда Лорана не обрывается, т. е. содержит бесконечно много членов. В произвольной как угодно малой окрестности существенно особой точки функция $f(z)$ может принимать любые наперед заданные значения. Это утверждение составляет содержание теоремы Сохоцкого [21, 22].

По характеру особых точек выделяют:

а) Класс целых функций, т. е. голоморфных функций, не имеющих особых точек в любой конечной части плоскости z . Очевидно, целая функция представима степенным рядом, радиус сходимости которого $R = \infty$. Примеры целых функций: $\sin z, \cos z, e^z$, многочлен любой степени и др.

б) Мероморфные функции в любой ограниченной области имеют конечное число полюсов, других особых точек не имеют. Примеры мероморфных (дробных) функций: $\operatorname{tg} z, \operatorname{sc}^2 z, \operatorname{cth} z, \frac{P(z)}{Q(z)}$, ($P(z), Q(z)$ — многочлены).

Таким образом, если $f(z)$ голоморфна в круге, на внешности круга или в круговом кольце, то целесообразно пользоваться для ее аналитического представления рядами типа Тейлора или Лорана. Если область голоморфности функции $f(z)$ (конечная или бесконечная) ограничена круговыми контурами (рис. 1.7), то для ее описания можно использовать представления типа Аппеля [40, 43].

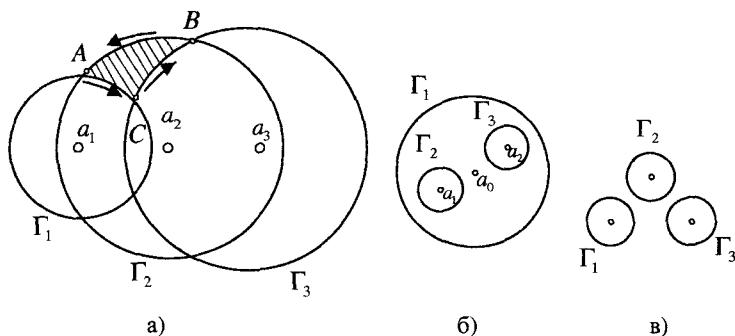


Рис. 1.7. Конфигурации круговых областей

Рассмотрим функцию $f(z)$, голоморфную в криволинейном треугольнике ABC , ограниченном дугами окружностей $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ с центрами в точках соответственно a_1, a_2, a_3 . Формула Коши для этого случая дает

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{AC} + \int_{CB} + \int_{BA} \right\} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

На каждой из этих дуг имеем разложение

$$\frac{1}{\zeta - z} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - a_k)^n}{(z - a_k)^{n+1}}, \quad \zeta \in AC \ (k=1), \quad \zeta \in CB \ (k=2),$$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - a_3)^n}{(\zeta - a_3)^{n+1}}, \quad \zeta \in BA.$$

В результате приходим к представлению типа Аппеля функции, голоморфной внутри криволинейного треугольника ACB :

$$f(z) = \sum_{k=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{nk}}{(z - a_k)^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z - a_3)^n,$$

где d_n и c_{nk} — коэффициенты, которые могут быть легко определены.

Для функции $f(z)$, голоморфной в ограниченной многосвязной области (рис. 1.7, б), представления типа Аппеля аналогичны. Так, если область ограничена круговым контуром Γ_1 и контурами Γ_k ($k=1, 2, \dots, N$), то

$$f(z) = \sum_{k=1}^N \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{nk}}{(z - a_k)^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z - a_0)^n. \quad (1.53)$$

Наконец, для третьей конфигурации (рис. 1.7, в) в представлении (1.53) отсутствует ряд по целым степеням бинома $z - a$.

Если $f(z)$ аналитична в некоторой (ограниченной или неограниченной) области, то представление ее в виде ряда можно получить с помощью конформного отображения области на круг в плоскости w с центром в точке $w=0$ [21]:

$$w = \omega(z) \Leftrightarrow z = \omega^{-1}(w).$$

Внутри круга имеем разложение

$$f(z) = f[\omega^{-1}(w)] = f_*(w) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n w^n = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \omega^n(z). \quad (1.54)$$

Пример. Пусть $f(z)$ голоморфна в полосе $y = \pm h$. Отобразим ее на единичный круг при помощи функции

$$w = \omega(z) = \frac{e^{\frac{\pi z}{2h}} - 1}{e^{\frac{\pi z}{2h}} + 1}, \quad \omega(0) = 0.$$

Тогда в соответствии с (1.54) получаем

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{e^{\frac{\pi z}{2h}} - 1}{e^{\frac{\pi z}{2h}} + 1} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\operatorname{th} \frac{\pi z}{4h} \right)^n.$$

Для областей, отличных от круговых, применяют иногда ряды по полиномам Фабера [22].

Пусть K — ограниченный континуум (замкнутое связное множество), содержащий более одной точки, и G_∞ — та из смежных с ним областей, которой принадлежит точка $z = \infty$. Это односвязная область полной z -плоскости, граница которой Γ_∞ является частью континуума K . Конформное отображение области G_∞ на внешность круга с центром в точке $w=0$ обозначим через $w = \Phi(z)$, причем фиксируем $\Phi(z)$ условиями

$$\Phi(\infty) = \infty, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\Phi(z)}{z} = 1.$$

С учетом этого можно показать, что в окрестности бесконечно удаленной точки имеет место лорановское разложение

$$\Phi(z) = z + \alpha_0 + \frac{\alpha_{-1}}{z} + \dots$$

Соответственно, $\Phi^n(z)$ ($n > 0$ — целое) имеет разложение вида

$$\Phi^n(z) = z^n + \alpha_{n-1}^{(n)} z^{n-1} + \dots + \alpha_0^{(n)} + \frac{\alpha_{-1}^{(n)}}{z} + \dots, \quad \alpha_0^{(0)} = \alpha_0.$$

Многочлены

$$\Phi_n(z) = z^n + \alpha_{n-1}^{(n)} z^{n-1} + \dots + \alpha_0^{(n)}, \quad (1.55)$$

представляющие совокупности членов с неотрицательными степенями z в лорановских разложениях функций $\Phi^n(z)$, называются многочленами Фабера для континуума K .

Примеры.

1. K есть круг $|z - z_0| \leq r_0$. В этом случае $w = \Phi(z) = z - z_0$ и, значит,

$$\Phi_n(z) = (z - z_0)^n.$$

2. K есть замкнутая внутренность лемнискаты с двумя фокусами $|z^2 - 1| \leq 1$ (рис. 1.8).

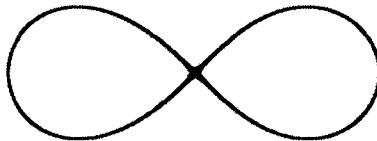


Рис. 1.8. Кривая $|z^2 - 1| = 1$

В этом случае, в силу (1.55) имеем

$$\Phi(z) = z(1 - z^{-2})^{-\frac{1}{2}}.$$

Соответственно, многочлены Фабера таковы:

$$\Phi_0(z) = 1, \quad \Phi_1(z) = z, \quad \Phi_2(z) = z^2 - 1, \quad \Phi_3(z) = z^3 - \frac{3}{2}z,$$

$$\Phi_4(z) = z^4 - 2z^2 + 1, \quad \Phi_5(z) = z^5 - \frac{5}{2}z^3 + \frac{15}{8}z, \dots$$

3. K есть отрезок действительной оси: $-1 \leq x \leq 1$. Здесь функция

$$w = \Phi(z) = z + \sqrt{z^2 - 1}$$

отображает K на область $|w| > \frac{1}{2}$, при этом берется ветвь $\sqrt{z^2 - 1}$, удовлетворяющая ус-

ловию $\lim z^{-1} \sqrt{z^2 - 1} = 1$ при $z \rightarrow \infty$. В этом случае

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{2^n} \left[\left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right)^n + \left(z - \sqrt{z^2 - 1} \right)^n \right] \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Полагая $z = \cos t$, получим

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos z) = T_n(z), \quad (1.56)$$

т. е. многочлены Фабера для отрезка $[-1, 1]$ совпадают с многочленами Чебышева первого рода.

Пусть $|\zeta| = R$ — какая-либо окружность, содержащая континуум K , тогда интегральное представление многочленов Фабера имеет вид

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{\Phi'(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Рассмотрим ряд по многочленам Фабера

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_n(z). \quad (1.57)$$

Если

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R_o} < \frac{1}{\rho},$$

то ряд (1.57) сходится внутри области, ограниченной кривой C_{R_0} (прообраза окружности $|w| = R_0 > \rho$ при отображении $w = \Phi(z)$), абсолютно и равномерно и расходится на внешности кривой C_{R_0} . Сумма ряда (1.57) представляет функцию, аналитическую внутри C_{R_0} . Справедливо и обратное утверждение. всякая функция $f(z)$, аналитическая внутри C_{R_0} ($R_0 > \rho$), может быть представлена в этой области в виде суммы ряда (1.57), причем внутри области, ограниченной кривой C_{R_0} , этот ряд сходится абсолютно и равномерно [22]. Так, функция, аналитическая внутри эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$a = R_0 + \frac{1}{4R_0}, \quad b = R_0 - \frac{1}{4R_0},$$

разлагается в ряд по многочленам Чебышева

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(z). \quad (1.58)$$

Внутри этого эллипса ряд (1.58) равномерно сходится.

К проблеме представления $f(z)$ рядом многочленов можно подойти и с другой стороны. Пусть Γ — замкнутый выпуклый гладкий контур (достаточно, чтобы он имел непрерывную касательную), и пусть радиус кривизны Γ не превышает некоторого положительного числа. Тогда для каждой точки $M \in \Gamma$ существует соответствующий круг C , касающийся в этой точке контура Γ , содержащий эту кривую (и, стало быть, конечную область с границей Γ) внутри себя и притом такой, что его центр перемещается непрерывно вместе с точкой M (рис. 1.9).

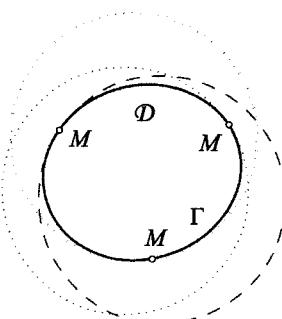


Рис. 1.9. К идее Пенлеве

Если $f(z)$ голоморфна в области \mathcal{D} и непрерывна в замыкании $\overline{\mathcal{D}}$, то она представима формулой Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \mathcal{D}.$$

Пусть точке $\zeta \in \Gamma$ соответствует круг с центром в точке a . Очевидно, $a = a(\zeta)$ — непрерывная функция. Имеем

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}; \quad |z-a| \leq k < 1.$$

Подставляя это разложение в формулу Коши, запишем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\Gamma} f(\zeta) \frac{(z-a(\zeta))^n d\zeta}{(\zeta-a(\zeta))^{n+1}}. \quad (1.59)$$

Таким образом, получаем представление голоморфной в области \mathcal{D} функции $f(z)$ в виде ряда по многочленам. Для применения этого ряда необходимо иметь аналитическое выражение для траектории $a(\zeta)$.

1.6. Структурные представления мероморфных и целых функций

Под окрестностью бесконечно удаленной точки $z = \infty$ понимается внешность круга $|z| > R$ достаточно большого радиуса. Если в бесконечно удаленной точке функция $f(z)$ имеет полюс порядка p , то главная часть $f(z)$ представляется в виде

$$g(z) = \sum_{k=1}^p c_k z^k. \quad (1.60)$$

Пусть функция $f(z)$ имеет конечное число полюсов в точках a_n ($n = 1, 2, \dots, N$), порядок полюса в точке a_n обозначим через p_n . Занумеруем их в порядке неубывания их модулей

$$|a_1| \leq |a_2| \leq \dots \leq |a_N| < \infty.$$

Тогда главная часть $f(z)$ в полюсе a_n согласно нашим обозначениям примет вид

$$g_n(z) = \frac{c_{-p_n}^{(n)}}{(z-a_n)^{p_n}} + \frac{c_{-p_n+1}^{(n)}}{(z-a_n)^{p_n-1}} + \dots + \frac{c_{-1}^{(n)}}{z-a_n} = \sum_{k=1}^{p_n} \frac{c_{-k}^{(n)}}{(z-a_n)^k}. \quad (1.61)$$

Разность

$$\varphi(z) = f(z) - g(z) - \sum_{n=1}^N g_n(z)$$

аналитична в полной z -плоскости, и на основании теоремы Лиувилля можно сделать заключение, что $\varphi(z) = c_0 = \text{const}$. Отсюда получаем представление

$$f(z) = c_0 + g(z) + \sum_{n=1}^N g_n(z). \quad (1.62)$$

Если в (1.62) подставить выражения главных частей из (1.60) и (1.61), то после приведения правых частей к общему знаменателю найдем, что мероморфная функция, имеющая в полной z -плоскости конечное число полюсов, есть отношение двух многочленов. Для мероморфной функции с бесконечным числом полюсов a_1, a_2, \dots

$$|a_1| \leq |a_2| \leq \dots \leq |a_n| \leq \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty.$$

Формула (1.62) в общем случае непригодна, так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(z)$ может оказаться расходящимся. Для сходимости, согласно Миттаг–Леффлеру [12, 22], необходимо и достаточно в каждом члене ряда вычесть из главной части $g_n(z)$ отрезок ее тейлоровского разложения

$$h_n(z) = \sum_{k=0}^{p_n} \frac{g_n^{(k)}(0)}{k!} z^k. \quad (1.63)$$

Тогда произвольная мероморфная функция, правильная в нуле и имеющая в полюсах a_n главные части $g_n(z)$, может быть представлена в виде

$$f(z) = h(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \{g_n(z) - h_n(z)\}, \quad (1.64)$$

где $h(z)$ — целая функция, p_1, p_2, \dots — последовательность положительных целых чисел. Если $f(z)$ имеет в точке $z = 0$ полюс с главной частью $g_0(z)$, то формула (1.64) будет справедливой для функции $f(z) - g_0(z)$.

Для структурных разложений многих мероморфных функций удобен более конструктивный подход Коши [21]. Условимся под правильной системой контуров $\{C_n\}$ понимать совокупность замкнутых кривых, удовлетворяющих следующим требованиям:

1) C_1 содержит внутри себя точку $z = 0$, каждый контур C_n находится внутри области, ограниченной контуром C_{n+1} ; 2) кратчайшее расстояние d_n от точек контура C_n до начала координат неограниченно возрастает с ростом n ; 3) отношение длины l_n контура C_n к d_n остается ограниченным $l_n / d_n \leq A$. Имеет место теорема Коши.

Пусть мероморфная функция $f(z)$ на некоторой правильной системе контуров $\{C_n\}$ растет не быстрее, чем z^p , т. е. на всех C_n

$$|f(z)| \leq M |z|^p,$$

где M — постоянная и $p \geq 0$ — целое число; пусть еще $z = 0$ не является полюсом $f(z)$. В этих условиях справедливо представление

$$f(z) = h(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \{g_n(z) - h_n(z)\}, \quad (1.65)$$

где $g_n(z)$ — главные части $f(z)$ в ее полюсах a_n , и

$$h(z) = \sum_{k=0}^p \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k, \quad h_n(z) = \sum_{k=0}^p \frac{g_n^{(k)}(0)}{k!} z^k$$

— многочлены степени не выше p .

Ряд (1.65) сходится (при надлежащем порядке суммирования) в любой правильной точке $f(z)$, причем сходимость его равномерна в любой замкнутой ограниченной области, не содержащей полюсов. Если точка $z=0$ является полюсом $f(z)$ с главной частью $g_0(z)$, то равенство (1.65) будет справедливым для функции $f(z)-g_0(z)$.

Переходим теперь к представлениям целых функций, имеющих нули в точках a_1, a_2, \dots , через первичные множители Вейерштрасса. Толчком к этим исследованиям послужила формула Эйлера

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \left(1 - \frac{x^2}{1}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) \cdots \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) \cdots,$$

справедливая при всех значениях x . Предположим, следуя Коши, что все корни a_n — различные и сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|}$. Расположим все корни в порядке возрастания их модулей

$$|a_1| < |a_2| < \dots < |a_n| < \dots; \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty.$$

В окрестности корня a_n целая функция $f(z)$ имеет представление

$$f(z) = (z - a_n) F(z), \quad F(a_n) \neq 0.$$

Следовательно, выражение

$$\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{1}{z - a_n} = \frac{F'(z)}{F(z)}$$

конечно в точке a_n , а, значит, выражение

$$\frac{f'(z)}{f(z)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z - a_n} = G'(z), \quad G(0) = 0 \quad (1.66)$$

представляет собой голоморфную функцию на всей плоскости z . Заметим, что ряд, фигурирующий в (1.66), сходится при любых z , отличных от a_n . Интегрирование выражения (1.66) дает [21]

$$\frac{f(z)}{f(0)} = e^{G(z)} \left(1 - \frac{z}{a_1}\right) \left(1 - \frac{z}{a_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \cdots = e^{G(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right). \quad (1.67)$$

В том случае, когда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{-1}$ расходится, предыдущие рассуждения нуждаются в уточнении [13, 37, 40]. Пусть сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{\lambda+1}}. \quad (1.68)$$

Обозначим

$$P_\lambda(z) = \frac{1}{a_n} + \frac{z}{a_n^2} + \dots + \frac{z^{\lambda-1}}{a_n^\lambda} = \frac{1}{z} P_{\lambda+1}\left(\frac{z}{a_n}\right).$$

Тогда

$$\frac{1}{z-a_n} + P_\lambda(z) = \frac{z^\lambda}{a_n^\lambda(z-a_n)} = -\frac{z^\lambda}{a_n^{\lambda+1}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)}.$$

Стало быть, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{z-a_n} + \frac{1}{z} P_{\lambda+1}\left(\frac{z}{a_n}\right) \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^\lambda}{a_n^{\lambda+1}(z-a_n)} \quad (1.69)$$

сходится в любой точке $z \neq a_n$. В этом случае соотношение (1.66) видоизменяется следующим образом:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} - \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{z-a_n} + \frac{1}{z} P_{\lambda+1}\left(\frac{z}{a_n}\right) \right\} = G'(z). \quad (1.70)$$

Обозначив через

$$Q_\lambda\left(\frac{z}{a_n}\right) = \int_0^z \frac{P_{\lambda+1}\left(\frac{z}{a_n}\right)}{z} dz = \frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{\lambda}\left(\frac{z}{a_n}\right)^\lambda,$$

получаем после интегрирования (1.70)

$$\frac{f(z)}{f(0)} = e^{G(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{Q_\lambda\left(\frac{z}{a_n}\right)} \right\}. \quad (1.71)$$

Возможна еще одна ситуация, когда ряд (1.68) расходится при любом конечном λ . Например, при $a_n = \ln n$ ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^\lambda}$$

расходится. В таком случае показатель λ нельзя брать постоянным, он должен изменяться вместе с n . Примем, следуя Вейерштрассу, $\lambda = n-1$. Тогда ряд (1.69) приобретает вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{z-a_n} + \frac{1}{z} P_n\left(\frac{z}{a_n}\right) \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{a_n^{n-1}(z-a_n)} = \frac{1}{z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{a_n^n} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{a_n}},$$

и на основании признака Коши заключаем, что этот ряд сходится при любом $z \neq a_n$. Значит, и в этой общей ситуации представление (1.71) остается в силе, надо только иметь в виду, что теперь $\lambda = \lambda_n = n-1$.

Выражения

$$\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\varrho_i\left(\frac{z}{a_n}\right)}$$

названы Вейерштрассом первичными множителями.

Наконец, если $z=0$ является корнем $f(z)$ кратности m и среди корней a_n есть кратные, то все рассуждения необходимо проводить относительно функций $f(z)z^{-m}$, а первичный множитель, соответствующий кратному корню возвести в нужную степень. Тогда представление целой функции $f(z)$ будет таким:

$$f(z) = z^m e^{G(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \exp \left\{ \frac{z}{a_n} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{\lambda_n} \left(\frac{z}{a_n}\right)^{\lambda_n} \right\}. \quad (1.72)$$

Здесь множитель, соответствующий кратному корню, повторяется столько раз, какова его кратность.

В заключение приведем структурные представления некоторых встречающихся в приложениях мероморфных и целых функций [6, 23, 30]

$$\operatorname{ctg} \pi z = \frac{1}{\pi z} + \frac{2z}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - n^2} = \frac{1}{\pi z} + \frac{z}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n(z-n)},$$

$$\operatorname{cosec} \pi z = \frac{1}{\pi z} + \frac{2z}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^2 - n^2},$$

$$\operatorname{cosec}^2 \pi z = \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2} = \frac{1}{\pi^2 z^2} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^2 + n^2}{(z^2 - n^2)^2},$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi z}{2} = \frac{4z}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2 - z^2},$$

$$\sin z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2 \pi^2}\right),$$

$$\cos z = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{4z^2}{(2n+1)^2 \pi^2}\right),$$

$$\frac{\sin \pi(z+a)}{\sin \pi a} = \frac{z+a}{a} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n-a}\right) \left(1 + \frac{z}{n+a}\right),$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{cz} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}},$$

здесь $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера, $C=0,5772157\dots$ — постоянная Эйлера.

1.7. Некоторые специальные мероморфные и целые функции. Эллиптические функции

Пусть ω_1 и ω_2 ($|\omega_1| \neq 0$, $|\omega_2| \neq 0$, $\operatorname{Im} \omega_2 / \omega_1 > 0$) — два комплексных числа и $P = m\omega_1 + n\omega_2$ ($m, n = 0, \pm 1, \pm \dots$). Точки z_1 и z_2 , связанные соотношением

$$z_2 = z_1 + P, \quad (1.73)$$

называются конгруэнтными (символическая запись $z_1 \equiv z_2 \bmod(\omega_1, \omega_2)$).

На плоскости z можно выделить область, не содержащую двух конгруэнтных точек, такую, что для внешней точки внутри области найдется конгруэнтная ей точка. Легко видеть, что за такую область можно взять параллелограмм, построенный на векторах ω_1 и ω_2 , со сторонами OA и OB без точек A и B и остальной части границы (рис. 1.10). Функция $f(z)$ называется двоякопериодической, если для любой точки z выполняются соотношения

$$f(z + \omega_1) = f(z), \quad f(z + \omega_2) = f(z). \quad (1.74)$$

Однозначная мероморфная двоякопериодическая функция называется эллиптической функцией [1, 2, 9, 21–23, 36, 45]. Преобразование (1.73) переводит параллелограмм периодов в новый параллелограмм, конгруэнтный исходному. Таким образом, всю плоскость z можно покрыть указанными параллелограммами и в каждом из них эллиптическая функция будет принимать одни и те же значения в конгруэнтных точках.

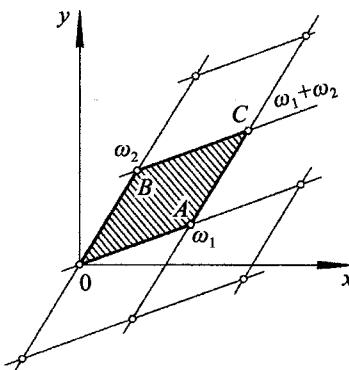


Рис. 1.10. Основной параллелограмм периодов Π_0

Относительно эллиптических функций справедливы следующие утверждения.

- Любая рациональная комбинация эллиптических функций с периодами ω_1 и ω_2 , а также производная от эллиптической функции являются эллиптическими функциями.
- Эллиптическая функция, не имеющая полюсов, постоянна. Это следует из ограниченности функции в полной z -плоскости.
- Сумма вычетов эллиптической функции $f(z)$ относительно всех ее полюсов, принадлежащих параллелограмму периодов, равна нулю.

Для доказательства этого утверждения достаточно вычислить интеграл от $f(z)$ по контуру параллелограмма периодов, учитывая то обстоятельство, что значения $f(z)$ на противоположных его сторонах равны. Отсюда следует утверждение.

4. Не существует эллиптической функции первого порядка, т. е. не существует эллиптической функции, имеющей в параллелограмме периодов один полюс первого порядка. Это следует из предыдущего утверждения.

5. Эллиптическая функция в параллелограмме периодов принимает каждое свое значение одинаковое число раз, равное ее порядку.

Функции Вейерштрасса $\wp(z)$ и $\zeta(z)$. Рассмотрим эллиптическую функцию второго порядка, имеющую полюс второго порядка (двойной полюс) в начале координат. Это означает, что в точках $P \equiv 0 \pmod{\omega_1, \omega_2}$ функция $f(z)$ имеет полюсы второго порядка. Построим мероморфную функцию, имеющую в полюсе $z = P$ главную часть $(z - P)^{-2}$. Согласно схеме Миттаг–Леффлера или Коши (см., например, (1.64) структурное представление такой функции будет иметь вид [1, 21]

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum'_{m,n} \left\{ \frac{1}{(z - P)^2} - \frac{1}{P^2} \right\}, \quad (1.75)$$

где $P = m\omega_1 + n\omega_2$ и штрих над знаком суммы указывает на то, что член, соответствующий значениям $m = n = 0$, не участвует в суммировании. Равномерная сходимость ряда (1.75) в любой замкнутой области, не содержащей полюсов, следует из сходимости ряда

$$\sum'_{m,n} \frac{1}{|P|^3}.$$

Покажем, что $\wp(z)$ — двоякопериодическая функция. Дифференцируя (1.75), запишем

$$\wp'(z) = -2 \sum'_{m,n} \frac{1}{(z - P)^3}. \quad (1.76)$$

Формула (1.76) справедлива при любом $z \neq P$. Заменив в ней z на $z + \omega_1$, получим

$$\wp'(z + \omega_1) = -2 \sum'_{m,n} \frac{1}{[z - (P - \omega_1)]^3}.$$

Поскольку m и n пробегают все целочисленные значения, то $P - \omega_1$ будет принимать тот же ряд значений, что и P . Аналогичные рассуждения имеют место и для второго периода ω_2 . Отсюда следуют соотношения периодичности

$$\wp'(z + \omega_1) - \wp'(z) = 0, \quad \wp'(z + \omega_2) - \wp'(z) = 0. \quad (1.77)$$

Интегрируя тождества (1.77), находим

$$\wp(z + \omega_1) - \wp(z) = c_1, \quad \wp(z + \omega_2) - \wp(z) = c_2.$$

Функция (1.75) четная, следовательно, постоянные $c_1 = c_2 = 0$. Таким образом, $\wp(z)$ — мероморфная двоякоперiodическая функция, она называется функцией Вейерштрасса (пе-функцией).

Производная любого порядка от $\wp(z)$ также эллиптическая функция и имеет в точках $m\omega_1 + n\omega_2$ ($m, n = 0, \pm 1, \pm \dots$) полюс, порядок которого равен порядку производной плюс два. Для любой нечетной производной от пе-функции Вейерштрасса справедливы равенства (в полуperiодах)

$$\wp^{(2k+1)}\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = 0, \quad \wp^{(2k+1)}\left(\frac{\omega_2}{2}\right) = 0, \quad \wp^{(2k+1)}\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) = 0.$$

Интегрируя функцию $\wp(z)$ согласно равенству (1.75), находим

$$\int \wp(z) dz = -\zeta(z) + \text{const},$$

где функция

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{m,n} \left\{ \frac{1}{z - P} + \frac{1}{P} + \frac{z}{P^2} \right\} \quad (1.78)$$

называется дзета-функцией Вейерштрасса. Здесь, согласно общей теории (см. п. 1.6), в каждом члене суммы из функции $(z - P)^{-1}$ вычитается два первых члена ее тейлоровского разложения в окрестности нуля. Тогда ряд в (1.78) мажорируется в основном параллелограмме периодов сходящимся рядом

$$\text{const} \sum_{m,n} \frac{1}{|P|^3}.$$

Таким образом, между функциями Вейерштрасса $\wp(z)$ и $\zeta(z)$ имеет место связь

$$\zeta'(z) = -\wp(z). \quad (1.79)$$

Дзета-функция представляет собой нечетную мероморфную функцию, имеющую в точках $m\omega_1 + n\omega_2$ ($m, n = 0, \pm 1, \pm \dots$) простой полюс. Она относится к классу так называемых квазипериодических функций $F(z)$, которые в конгруэнтных точках связаны соотношениями

$$F(z + \omega_1) - F(z) = \text{const},$$

$$F(z + \omega_2) - F(z) = \text{const}.$$

В самом деле, интегрируя тождества

$$\wp(z + \omega_1) - \wp(z) = 0, \quad \wp(z + \omega_2) - \wp(z) = 0$$

и учитывая при этом равенство (1.79), получим

$$\zeta(z + \omega_1) - \zeta(z) = \delta_1,$$

$$\zeta(z + \omega_2) - \zeta(z) = \delta_2, \quad (1.80)$$

где δ_v — некоторые постоянные.

Положим в соотношениях (1.80) $z = -0,5\omega_1$ и $z = -0,5\omega_2$ соответственно. В силу нечетности дзета-функции получим

$$\delta_1 = 2\zeta\left(\frac{\omega_1}{2}\right), \quad \delta_2 = 2\zeta\left(\frac{\omega_2}{2}\right). \quad (1.81)$$

Между постоянными δ_1 и δ_2 имеет место соотношение Лежандра [1]

$$\delta_1\omega_2 - \delta_2\omega_1 = 2\pi i. \quad (1.82)$$

Это соотношение можно получить, рассмотрев интеграл от $\zeta(z)$ по контуру параллелограмма с вершинами $\pm 0,5\omega_1 \pm 0,5\omega_2$ и учитывая при этом равенства (1.80). Производные от функции Вейерштрасса $\wp(z)$ определяются выражениями

$$\frac{\wp^{(k)}(z)}{(k+1)!} = (-1)^k \left\{ \frac{1}{z^{k+2}} + \sum'_{m,n} \frac{1}{(z-P)^{k+2}} \right\} \quad (k=1,2,\dots). \quad (1.83)$$

Используя разложение функции $(z-P)^{-m}$ в ряд Тейлора в окрестности нуля получаем из определений (1.78) и (1.83) следующие ряды Лорана [9]:

$$\begin{aligned} \zeta(z) &= \frac{1}{z} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{g_{2j+2}^{(0)}}{2^{2j+2}} z^{2j+1} = \frac{1}{z} - \sum_{j=2}^{\infty} c_j \frac{z^{2j-1}}{2j-1}, \quad c_j = (2j-1) \frac{g_{2j}^{(0)}}{2^{2j}}, \\ \frac{\wp^{(k)}(z)}{(k+1)!} &= \frac{(-1)^k}{z^{k+2}} + \sum_{j=0}^{\infty} r_{k,j}^{(0)} z^j \quad (k=0,1,\dots), \end{aligned} \quad (1.84)$$

где

$$r_{k,j}^{(0)} = \left[1 + (-1)^{k+j} \right] \frac{(k+j+1)! g_{k+j+2}^{(0)}}{(k+j)! j! 2^{k+j+3}} \quad (k+j \geq 1),$$

$$g_2^{(0)} = 0, \quad g_{2k+1}^{(0)} = 0, \quad g_{2k}^{(0)} = \sum'_{m,n} \left(\frac{1}{T} \right)^{2k} \quad (k \geq 2),$$

$$T = \frac{1}{2}P = \frac{1}{2}(m\omega_1 + n\omega_2), \quad m, n = 0, \pm 1, \pm \dots$$

Для вычисления констант решетки $g_{2k}^{(0)}$ можно воспользоваться рекуррентным соотношением

$$(k-3)(2k+1)c_k = 3 \sum_{j=2}^{k-2} c_j c_{k-j}, \quad (1.85)$$

из которого определяются все константы, если известны $g_4^{(0)}$ и $g_6^{(0)}$. Покажем, что функция Вейерштрасса $\wp(z)$ является решением дифференциального уравнения

$$[\wp'(z)]^2 = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3, \quad (1.86)$$

Функция (1.75) четная, следовательно, постоянные $c_1 = c_2 = 0$. Таким образом, $\wp(z)$ — мероморфная двоякопериодическая функция, она называется функцией Вейерштрасса (пе-функцией).

Производная любого порядка от $\wp(z)$ также эллиптическая функция и имеет в точках $m\omega_1 + n\omega_2$ ($m, n = 0, \pm 1, \pm \dots$) полюс, порядок которого равен порядку производной плюс два. Для любой нечетной производной от пе-функции Вейерштрасса справедливы равенства (в полупериодах)

$$\wp^{(2k+1)}\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = 0, \quad \wp^{(2k+1)}\left(\frac{\omega_2}{2}\right) = 0, \quad \wp^{(2k+1)}\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) = 0.$$

Интегрируя функцию $\wp(z)$ согласно равенству (1.75), находим

$$\int \wp(z) dz = -\zeta(z) + \text{const},$$

где функция

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum'_{m,n} \left\{ \frac{1}{z - P} + \frac{1}{P} + \frac{z}{P^2} \right\} \quad (1.78)$$

называется дзета-функцией Вейерштрасса. Здесь, согласно общей теории (см. п. 1.6), в каждом члене суммы из функции $(z - P)^{-1}$ вычитается два первых члена ее тейлоровского разложения в окрестности нуля. Тогда ряд в (1.78) мажорируется в основном параллелограмме периодов сходящимся рядом

$$\text{const} \sum'_{m,n} \frac{1}{|P|^3}.$$

Таким образом, между функциями Вейерштрасса $\wp(z)$ и $\zeta(z)$ имеет место связь

$$\zeta'(z) = -\wp(z). \quad (1.79)$$

Дзета-функция представляет собой нечетную мероморфную функцию, имеющую в точках $m\omega_1 + n\omega_2$ ($m, n = 0, \pm 1, \pm \dots$) простой полюс. Она относится к классу так называемых квазипериодических функций $F(z)$, которые в конгруэнтных точках связаны соотношениями

$$F(z + \omega_1) - F(z) = \text{const},$$

$$F(z + \omega_2) - F(z) = \text{const}.$$

В самом деле, интегрируя тождества

$$\wp(z + \omega_1) - \wp(z) = 0, \quad \wp(z + \omega_2) - \wp(z) = 0$$

и учитывая при этом равенство (1.79), получим

$$\zeta(z + \omega_1) - \zeta(z) = \delta_1,$$

$$\zeta(z + \omega_2) - \zeta(z) = \delta_2, \quad (1.80)$$

где δ_ν — некоторые постоянные.

Положим в соотношениях (1.80) $z = -0,5\omega_1$ и $z = -0,5\omega_2$ соответственно. В силу нечетности дзета-функции получим

$$\delta_1 = 2\zeta\left(\frac{\omega_1}{2}\right), \quad \delta_2 = 2\zeta\left(\frac{\omega_2}{2}\right). \quad (1.81)$$

Между постоянными δ_1 и δ_2 имеет место соотношение Лежандра [1]

$$\delta_1\omega_2 - \delta_2\omega_1 = 2\pi i. \quad (1.82)$$

Это соотношение можно получить, рассмотрев интеграл от $\zeta(z)$ по контуру параллелограмма с вершинами $\pm 0,5\omega_1 \pm 0,5\omega_2$ и учитывая при этом равенства (1.80). Производные от функции Вейерштрасса $\wp(z)$ определяются выражениями

$$\frac{\wp^{(k)}(z)}{(k+1)!} = (-1)^k \left\{ \frac{1}{z^{k+2}} + \sum_{m,n} \frac{1}{(z-P)^{k+2}} \right\} \quad (k=1,2,\dots). \quad (1.83)$$

Используя разложение функции $(z-P)^{-m}$ в ряд Тейлора в окрестности нуля получаем из определений (1.78) и (1.83) следующие ряды Лорана [9]:

$$\begin{aligned} \zeta(z) &= \frac{1}{z} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{g_{2j+2}^{(0)}}{2^{2j+2}} z^{2j+1} = \frac{1}{z} - \sum_{j=2}^{\infty} c_j \frac{z^{2j-1}}{2j-1}, \quad c_j = (2j-1) \frac{g_{2j}^{(0)}}{2^{2j}}, \\ \frac{\wp^{(k)}(z)}{(k+1)!} &= \frac{(-1)^k}{z^{k+2}} + \sum_{j=0}^{\infty} r_{k,j}^{(0)} z^j \quad (k=0,1,\dots), \end{aligned} \quad (1.84)$$

где

$$r_{k,j}^{(0)} = \left[1 + (-1)^{k+j} \right] \frac{(k+j+1)! g_{k+j+2}^{(0)}}{(k+j)! j! 2^{k+j+3}} \quad (k+j \geq 1),$$

$$g_2^{(0)} = 0, \quad g_{2k+1}^{(0)} = 0, \quad g_{2k}^{(0)} = \sum_{m,n} \left(\frac{1}{T} \right)^{2k} \quad (k \geq 2),$$

$$T = \frac{1}{2}P = \frac{1}{2}(m\omega_1 + n\omega_2), \quad m, n = 0, \pm 1, \pm \dots$$

Для вычисления констант решетки $g_{2k}^{(0)}$ можно воспользоваться рекуррентным соотношением

$$(k-3)(2k+1)c_k = 3 \sum_{j=2}^{k-2} c_j c_{k-j}, \quad (1.85)$$

из которого определяются все константы, если известны $g_4^{(0)}$ и $g_6^{(0)}$. Покажем, что функция Вейерштрасса $\wp(z)$ является решением дифференциального уравнения

$$[\wp'(z)]^2 = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3, \quad (1.86)$$

где введены обозначения Вейерштрасса

$$g_2 = 20c_2 = \frac{60}{16} g_4^{(0)}, \quad g_3 = 28c_3 = \frac{140}{64} g_6^{(0)}. \quad (1.87)$$

В самом деле, на основании соотношений (1.84)–(1.87) можем записать

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + c_2 z^2 + c_3 z^4 + \dots,$$

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + 2c_2 z + 4c_3 z^3 + \dots,$$

$$[\wp'(z)]^2 = \frac{4}{z^6} - \frac{8c_2}{z^2} - 16c_3 + \dots,$$

$$\wp^3(z) = \frac{1}{z^6} + 3\frac{c_2}{z^2} + 3c_3 + \dots$$

Отсюда находим

$$[\wp'(z)]^2 - 4\wp^3(z) + 20c_2\wp(z) = -28c_3 + O(z).$$

В левой части этого равенства стоит эллиптическая функция, не имеющая полюсов в параллелограмме периодов. Следовательно, она постоянна. Используя обозначения Вейерштрасса (1.87), приходим отсюда к дифференциальному уравнению (1.86). Обозначим

$$e_1 = \wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right), \quad e_2 = \wp\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right), \quad e_3 = \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right).$$

Так как $\wp'(z)$ функция нечетная, то из соотношений периодичности

$$\wp'(z + \omega_1) - \wp'(z) = 0, \quad \wp'(z + \omega_2) - \wp'(z) = 0,$$

получаем равенства

$$\wp'\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = 0, \quad \wp'\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) = 0, \quad \wp'\left(\frac{\omega_2}{2}\right) = 0.$$

Отсюда вытекает, что числа e_k ($k = 1, 2, 3$) суть двойные корни уравнения

$$\wp(z) - e = 0,$$

т. е. дифференциальное уравнение (1.86) можно представить в виде

$$[\wp'(z)]^2 = 4(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3). \quad (1.88)$$

Сравнивая правые части уравнений (1.86) и (1.88), получаем (соотношения Виета)

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0, \quad e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_3 e_1 = -\frac{1}{4} g_2,$$

$$e_1 e_2 e_3 = -\frac{1}{4} g_3, \quad \Delta = 16(e_1 - e_2)^2 (e_1 - e_3)^2 (e_2 - e_3)^2 = g_2^3 - 27g_3^2.$$

Здесь Δ — так называемый дискриминант кубического уравнения $4x^3 - g_2x - g_3 = 0$, постоянные g_2 и g_3 называются инвариантами функции Вейерштрасса $\wp(z)$.

Из уравнения (1.86) следует, что величина $u = \wp(z)$ есть обращение эллиптического интеграла первого рода в форме Вейерштрасса [12, 23, 41]

$$z = \int_{u}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{4u^3 - g_2u - g_3}}.$$

При рассмотрении некоторых физических задач возникает необходимость в теореме сложения эллиптических функций подобной тем, которые, например, имеют место в теории тригонометрических функций. Такая теорема есть и формулируется следующим образом. При любых значениях z_1 и z_2 справедливо равенство

$$\wp(z_1 + z_2) = \frac{1}{4} \left\{ \frac{\wp'(z_1) - \wp'(z_2)}{\wp(z_1) - \wp(z_2)} \right\}^2 - \wp(z_1) - \wp(z_2). \quad (1.89)$$

Отсюда при помощи предельного перехода $z_1 \rightarrow z_2$, получаем формулу удвоения

$$\wp(2z) = \frac{1}{4} \left\{ \frac{\wp''(z)}{\wp'(z)} \right\}^2 - 2\wp(z).$$

Аналитические представления эллиптических функций. Если $f(z)$ — эллиптическая функция порядка p с простыми полюсами z_1, z_2, \dots, z_p , лежащими в параллелограмме периодов, а B_k ($k = 1, 2, \dots, p$) — вычеты функции $f(z)$ в полюсах, то

$$\sum_{k=1}^p B_k = 0. \quad (1.90)$$

Образуем выражение

$$f(z) = \sum_{k=1}^p B_k \zeta(z - z_k). \quad (1.91)$$

Приращение $f(z)$ в конгруэнтных точках дает в силу (1.80)

$$f(z + \omega_1) - f(z) = \delta_1 \sum_{k=1}^p B_k = 0,$$

$$f(z + \omega_2) - f(z) = \delta_2 \sum_{k=1}^p B_k = 0.$$

Следовательно, представление (1.91) определяет эллиптическую функцию с простыми полюсами z_1, z_2, \dots, z_p в параллелограмме периодов. Это представление можно распространить и на тот случай, когда z_1, z_2, \dots, z_p — любые различные точки параллелограмма периодов, а коэффициенты B_k — любые числа, удовлетворяющие соотношению (1.90).

Если $f(z)$ имеет в точках z_1, z_2, \dots, z_p параллелограмма периодов полюсы порядков s_1, s_2, \dots, s_p соответственно, то представление $f(z)$ имеет вид

$$f(z) = C + \sum_{k=1}^p \left\{ B_{k,1} \zeta(z - z_k) - B_{k,2} \zeta'(z - z_k) + \frac{B_{k,3}}{2!} \zeta''(z - z_k) - \dots - (-1)^{s_k} \frac{B_{k,s_k}}{(s_k - 1)!} \zeta^{(s_k-1)}(z - z_k) \right\}. \quad (1.92)$$

При этом в полюсе z_k имеем главную часть функции $f(z)$.

$$G_k(z) = \frac{B_{k,1}}{z - z_k} + \frac{B_{k,2}}{(z - z_k)^2} + \dots + \frac{B_{k,s_k}}{(z - z_k)^{s_k}}.$$

Функции $\nu(z)$ и $\xi(z)$. Введем функции $\nu(z)$ и $\xi(z)$ при помощи соотношений [9, 10]

$$\nu'(z) = \zeta(z), \quad \xi'(z) = \nu(z). \quad (1.93)$$

Интегрирование выражения (1.78) для дзета-функции Вейерштрасса приводит к следующим структурным представлениям многозначных функций (1.93):

$$\begin{aligned} \nu(z) &= \ln z + \sum'_{m,n} \left\{ \ln \left(1 - \frac{z}{P} \right) + \frac{z}{P} + \frac{z^2}{2P^2} \right\}, \quad \ln 1 = 0, \\ \xi(z) &= z \ln z - z + \sum'_{m,n} \left\{ (z - P) \ln \left(1 - \frac{z}{P} \right) - z + \frac{z^2}{2P} + \frac{z^3}{6P^2} \right\}. \end{aligned} \quad (1.94)$$

Разложения функций (1.94) имеют вид (в окрестности нуля)

$$\begin{aligned} \nu(z) - \ln z &= - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{g_{2j+2}^{(0)} z^{2j+2}}{(2j+2) 2^{2j+2}}, \\ \xi(z) + z - z \ln z &= - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{g_{2j+2}^{(0)} z^{2j+3}}{(2j+2)(2j+3) 2^{2j+2}}. \end{aligned}$$

Интегрируя соотношения (1.80), получаем зависимости в конгруэнтных точках

$$\begin{aligned} \nu(z + \omega_1) - \nu(z) &= \pi i + \delta_1 \left(z + \frac{1}{2} \omega_1 \right), \quad \nu \left(\frac{\omega_k}{2} \right) - \nu \left(-\frac{\omega_k}{2} \right) = \pi i, \quad (k = 1, 2), \\ \nu(z + \omega_2) - \nu(z) &= \pi i + \delta_2 \left(z + \frac{1}{2} \omega_2 \right), \\ \xi(z + \omega_1) - \xi(z) &= \frac{1}{2} \delta_1 (z + \omega_1) z + \pi i z + \xi_1, \\ \xi(z + \omega_2) - \xi(z) &= \frac{1}{2} \delta_2 (z + \omega_2) z + \pi i z + \xi_2. \end{aligned} \quad (1.95)$$

Полагая здесь $z = -0,5\omega_1$, $z = -0,5\omega_2$ и учитывая равенство

$$\xi(z) + \xi(-z) = -i\pi z.$$

Определяем константы ξ_1 и ξ_2

$$\xi_k = 2\xi\left(\frac{\omega_k}{2}\right) + \frac{1}{8}\delta_k\omega_k^2 \quad (k=1,2).$$

Функция В. Я. Натанзона и родственные ей специальные функции. В своем исследовании напряженного состояния упругой пластины, ослабленной гексагональной либо тетрагональной системой одинаковых круговых отверстий, В. Я. Натанзон ввел мероморфную функцию вида [26]

$$f(z) = -2 \sum_{m,n} \left\{ \frac{\bar{P}}{(z-P)^3} + \frac{\bar{P}}{P^3} \right\}, \quad P = m\omega_1 + n\omega_2.$$

Эта функция имеет полюсы третьего порядка во всех точках, конгруэнтных нулю, кроме самого нуля, который является трехкратным корнем уравнения $f(z) = 0$.

Развивая идею работы, введем систему специальных мероморфных функций [10]

$$\wp_i(z) = \sum_{m,n} \left\{ \frac{\bar{P}^i}{(z-P)^2} - \sum_{r=0}^i (r+1) \frac{\bar{P}^i z^r}{P^{r+2}} \right\} \quad (i=1,2,\dots). \quad (1.96)$$

Функции (1.96) определены и аналитичны при любом z не конгруэнтном нулю, а также в самом нуле. В точках $z = P = m\omega_1 + n\omega_2$ ($m,n = \pm 1, \pm 2, \dots$) они имеют полюсы второго порядка. Например, при $i=1$ имеем

$$\wp_1(z) = \sum_{m,n} \left\{ \frac{\bar{P}}{(z-P)^2} - \frac{\bar{P}}{P^2} - 2z \frac{\bar{P}}{P^3} \right\}. \quad (1.97)$$

Очевидно производная от функции (1.97) совпадает с функцией В. Я. Натанзона $f(z)$. Для изучения свойств функций (1.96) продифференцируем функции $\wp_i(z)$ последовательно k раз. Получим

$$\wp_i^{(k)}(z) = (-1)^k (k+1)! \sum_{m,n} \frac{\bar{P}^i}{(z-P)^{k+2}} \quad (k \geq i+1, \quad i=1,2,\dots),$$

$$\wp_0^{(k)}(z) = \wp^{(k)}(z).$$

Запишем далее

$$(-1)^k \frac{\wp_i^{(k)}(z+\omega_\nu)}{(k+1)!} = \sum_{m,n} \frac{\bar{P}^i}{[(z+\omega_\nu)-P]^{k+2}} = \sum_{m,n} \frac{(\bar{P} + \bar{\omega}_\nu)^i}{(z-P)^{k+2}}, \quad (\nu=1,2).$$

Раскрывая бином в правой части этого равенства, находим

$$\wp_i^{(k)}(z + \omega_\nu) - \wp_i^{(k)}(z) = \sum_{j=1}^i C_i^j \bar{\omega}_\nu^j \wp_{i-j}^{(k)}(z), \quad (1.98)$$

где

$$C_i^j = \frac{i!}{j!(i-j)!} \quad (k \geq i+1; \nu = 1, 2; i = 1, 2, \dots).$$

Из определения функций $\wp(z)$ и $\wp_i(z)$ следуют условия симметрии

$$\wp_i^{(k)}(-z) = (-1)^{i+k} \wp_i^{(k)}(z).$$

Учитывая их, находим, положив в (1.98) $z = -0,5\omega_\nu$

$$\left[1 - (-1)^{k+i} \right] \wp_i^{(k)}\left(\frac{\omega_\nu}{2}\right) = \sum_{j=1}^i (-1)^{k+i+j} C_i^j \bar{\omega}_\nu^j \wp_{i-j}^{(k)}\left(\frac{\omega_\nu}{2}\right) \quad (\nu = 1, 2).$$

Отсюда получаем связи между значениями введенных функций в полупериодах

$$2\wp_i^{(2k+i+1)}\left(\frac{\omega_\nu}{2}\right) = \sum_{j=1}^i (-1)^{j+1} C_i^j \bar{\omega}_\nu^j \wp_{i-j}^{(2k+i+1)}\left(\frac{\omega_\nu}{2}\right) \quad (\nu = 1, 2; i = 1, 2, \dots; k = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.99)$$

Можно показать при помощи (1.99), что соотношения (1.98) справедливы и для случая $k = i$. Соотношения (1.98) будем называть обобщенными условиями инвариантности относительно группы трансляции $T(z) = z + P$. В частности, при $i = 1$ имеем связи в полупериодах

$$\wp'_1(z + \omega_\nu) - \wp'_1(z) = \bar{\omega}_\nu \wp'(z) \quad (\nu = 1, 2).$$

Интегрируя это равенство, находим

$$\wp_1(z + \omega_\nu) - \wp_1(z) = \bar{\omega}_\nu \wp(z) + \gamma_\nu \quad (\nu = 1, 2). \quad (1.100)$$

Постоянные γ_ν вычисляем, положив в соотношениях (1.100) $z = -0,5\omega_\nu$ и учитывая условия симметрии функций $\wp(z)$ и $\wp_1(z)$. Имеем

$$\gamma_\nu = 2\wp_1\left(\frac{\omega_\nu}{2}\right) - \bar{\omega}_\nu \wp\left(\frac{\omega_\nu}{2}\right).$$

Можно установить связь γ_1 и γ_2 с циклическими весами дзета-функции Вейерштрасса. Для этого необходимо рассмотреть интеграл от $\wp_1(z)$ по контуру основного параллелограмма периодов, учитывая ее регулярность внутри Π_0 и формулу (1.100). В результате получим равенство

$$\gamma_2 \omega_1 - \gamma_1 \omega_2 = \delta_1 \bar{\omega}_2 - \delta_2 \bar{\omega}_1, \quad (1.101)$$

аналогичное соотношению Лежандра (1.82).

Выразим теперь функцию $\wp_1(z)$ через функции Вейерштрасса $\wp(z)$ и $\zeta(z)$. Введем функцию

$$f_1(z) = \alpha \wp'_1(z) + \beta z \wp'(z) - \zeta(z) \wp'(z). \quad (1.102)$$

В силу равенств (1.80), (1.100) и периодичности $\wp'(z)$ находим

$$f_1(z + \omega_\nu) - f_1(z) = (\alpha\bar{\omega}_\nu + \beta\omega_\nu - \delta_\nu)\wp'(z) \quad (\nu = 1, 2).$$

Отсюда получаем условия периодичности функции $f_1(z)$.

$$\alpha\bar{\omega}_1 + \beta\omega_1 = \delta_1, \quad \alpha\bar{\omega}_2 + \beta\omega_2 = \delta_2.$$

Решение этих уравнений дает

$$\alpha = \frac{2\pi i}{\bar{\omega}_1\omega_2 - \omega_1\bar{\omega}_2}, \quad \beta = \frac{\delta_2\bar{\omega}_1 - \delta_1\bar{\omega}_2}{\bar{\omega}_1\omega_2 - \omega_1\bar{\omega}_2}, \quad \bar{\omega}_1\omega_2 - \omega_1\bar{\omega}_2 = 2iF, \quad (1.103)$$

где F — площадь параллелограмма периодов.

Таким образом, $f_1(z)$ — четная эллиптическая функция. Согласно (1.102) она имеет особенность $2z^{-4} - 2\beta z^{-2}$ в точке $z = 0$ и во всех конгруэнтных нулю точках плоскости z . В силу теоремы Лиувилля приходим к равенству

$$f_1(z) = \frac{1}{3}\wp''(z) - 2\beta\wp(z) + c, \quad (1.104)$$

где c — некоторая константа.

Из равенств (1.102) и (1.104) получаем

$$\alpha\wp'_1(z) = \frac{1}{3}\wp''(z) + (\zeta(z) - \beta z)\wp'(z) - 2\beta\wp(z) + c.$$

Интегрирование этого выражения дает

$$\alpha\wp_1(z) = \frac{1}{3}\wp'(z) + (\zeta(z) - \beta z)\wp(z) + \beta\zeta(z) + \int\wp^2(z)dz + cz + c_1, \quad (1.105)$$

где c — постоянная, которая будет определена ниже, а $c_1 = 0$ в силу нечетности $\wp_1(z)$.

Для вычисления интеграла в (1.105) воспользуемся дифференциальным уравнением (1.86) для функции Вейерштрасса $\wp(z)$. Дифференцируя его, находим

$$2\wp''(z) = 12\wp^2(z) - g_2.$$

Подстановка выражения для $\wp^2(z)$ под знак интеграла в правой части (1.105) дает окончательно

$$\alpha\wp_1(z) = \frac{1}{2}\wp'(z) + (\zeta(z) - \beta z)\wp(z) + \beta\zeta(z) + \left(\frac{g_2}{12} + c\right)z. \quad (1.106)$$

Аналогичные соотношения имеют место и для остальных функций системы (1.96).

Вычислим приращения функции $\wp_1(z)$ при переходе от точки z к конгруэнтным ей точкам. Используя формулу (1.106), запишем

$$\alpha[\wp_1(z + \omega_\nu) - \wp_1(z)] = (\delta_\nu - \beta\omega_\nu)\wp(z) + \beta\delta_\nu + \left(\frac{g_2}{12} + c\right)\omega_\nu \quad (\nu = 1, 2). \quad (1.107)$$

Из сравнения соотношений инвариантности (1.100) и (1.107) получаем связи

$$\alpha\gamma_\nu = \beta\delta_\nu - \frac{1}{12}\omega_\nu g_2 \quad (\nu=1,2). \quad (1.108)$$

Соотношения (1.108) выражают постоянные γ_ν , фигурирующие в (1.107) через постоянную Вейерштрасса g_2 .

Функции $\wp_i(z)$ вместе со всеми своими производными аналитичны в параллелограмме периодов с центром в начале координат. Поэтому их можно разложить в ряды Тейлора в окрестности нуля. Имеем после обычных преобразований [10]

$$\frac{\wp_i^{(k)}(z)}{(k+1)!} = \sum_{j=0}^{\infty} r_{k,j}^{(i)} z^j \quad (i=1,2,\dots; k=0,1,2,\dots), \quad (1.109)$$

где

$$r_{k,j}^{(i)} = \left[1 + (-1)^{k+j+1} \right] \frac{(k+j+1)! g_{j+k+2}^{(i)}}{(k+1)! j! 2^{j+k-i+3}} \quad (k+j-i > 1),$$

$$r_{k,j}^{(i)} = 0 \quad (k+j-i < 1), \quad g_k^{(i)} = \sum_{m,n} \frac{T^i}{T^k}, \quad T = 0,5P, \quad k-i \geq 3.$$

Если $k-i$ — нечетное число, то очевидно, $g_k^{(i)} = 0$. В частности, при $i=1$ получаем разложения

$$\begin{aligned} \frac{\wp_1^{(2k)}(z)}{(2k+1)!} &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(2k+2j+2)! g_{2k+2j+3}^{(1)} z^{2j+1}}{(2k+1)! (2j+1)! 2^{2k+2j+2}}, \\ \frac{\wp_1^{(2k+1)}(z)}{(2k+2)!} &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(2k+2j+2)! g_{2k+2j+3}^{(1)} z^{2j}}{(2k+2)! (2j)! 2^{2k+2j+2}}. \end{aligned} \quad (1.110)$$

Ряды (1.110) абсолютно сходятся в круге $|z| < \min(|\omega_1|, |\omega_2|)$.

Подставим теперь в выражение (1.106) разложения входящих туда функций из (1.84), (1.110). Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z , находим

$$\begin{aligned} c &= -\frac{1}{6}g_2, \quad \alpha g_5^{(1)} = \frac{2}{5}g_3 - \frac{4}{15}\beta g_2, \\ \alpha g_{2j+7}^{(1)} &= -\beta g_{2j+6}^{(0)} + \left[\frac{(2j+7)(2j+8)}{12} + \frac{1}{2(2j+6)} \right] \frac{g_{2j+8}^{(0)}}{(2j+5)} - \\ &\quad - \sum_{k=0}^j \frac{(2k+2)(2k+3) g_{2k+4}^{(0)} g_{2j-2k+4}^{(0)}}{4(2j+5)(2j+6)} \quad (j=0,1,\dots), \end{aligned} \quad (1.111)$$

где g_2 и g_3 — постоянные Вейерштрасса (1.87).

Формулы (1.111) дают возможность по известным значениям постоянных $g_k^{(0)}$ вычислить величины $g_k^{(1)}$, а также константу c , фигурирующую в представлении (1.106).

Ниже приведем значения некоторых констант для правильных решеток. Под этим понимаем гексагональную ($\omega_1 = 2, \omega_2 = 2\exp(i\pi/3)$) и тетрагональную ($\omega_1 = 2, \omega_2 = 2i$) систему периодов (рис. 1.11). Гексагональная система: $\omega_1 = 2, \omega_2 = 2\exp(i\pi/3)$.

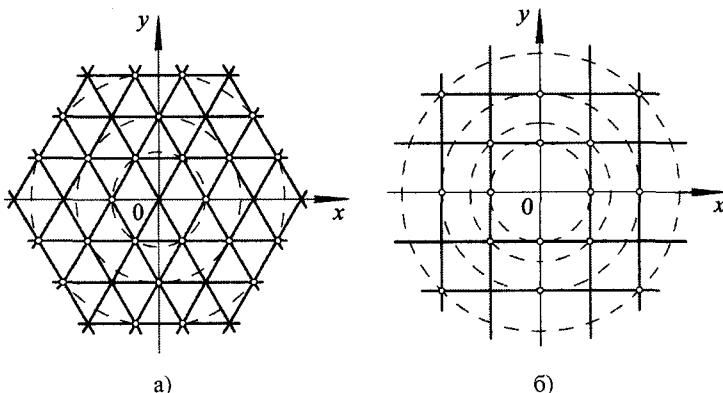


Рис. 1.11. Правильные периодические системы: а) — гексагональная; б) — тетрагональная

Так как множества точек

$$T = m + ne^{\frac{i\pi}{3}} \text{ и } Te^{-\frac{i\pi}{3}} = n + me^{-\frac{i\pi}{3}} \quad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \dots)$$

совпадают, то

$$g_{6k}^{(0)} = \sum_{m,n} \frac{1}{T^{6k}} \neq 0 \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Остальные постоянные $g_{2k}^{(0)}$ равны нулю.

Величину $g_6^{(0)}$ можно вычислить посредством быстро сходящегося ряда по формуле

$$g_6^{(0)} = \frac{31\pi^6}{4725} + 16\pi^6 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\beta_n} \right)^2 \left(\frac{1}{\beta_n} - \frac{2}{5} \right), \quad \beta_n = 1 - (-1)^n \operatorname{ch}(\pi n \sqrt{3}).$$

Остальные константы вычисляются по рекуррентным соотношениям (1.85). Результаты расчетов приведены в таблице.

Таблица 1.1

Значения величин $g_{6k}^{(0)}$ для гексагональной периодической системы

k	1	2	3	4	≥ 5
$g_{6k}^{(0)}$	5,863032	6,009640	5,9997183	6,000012	6,000000

Аналогичные рассуждения по отношению к функции $\wp_1(z)$ приводят к выводу о том, что отличны от нуля лишь величины $g_{6k-1}^{(1)}$. Результаты приведены в следующей таблице.

Таблица 1.2

Значения величин $g_{6k-1}^{(1)}$ для гексагональной периодической системы

k	1	2	3	4	5	≥ 6
$g_{6k-1}^{(1)}$	5,656803	6,03012	5,999179	6,000035	5,999999	6,000000

Остальные константы решетки таковы:

$$\delta_1 = 2\zeta\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}, \quad \delta_2 = \delta_1 e^{-\frac{i\pi}{3}},$$

$$\gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = 0.$$

Тетрагональная система: $\omega_1 = 2, \omega_2 = 2i$. В этом случае

$$\delta_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \delta_2 = -i\delta_1, \quad \gamma_1 = -\frac{5}{2\pi} g_4^{(0)}, \quad \gamma_2 = i\gamma_1.$$

Значения констант $g_{4k}^{(0)}$ и $g_{4k+3}^{(1)}$ приведены в таблицах 1.3 и 1.4 соответственно.

Таблица 1.3

Значения констант $g_{4k}^{(0)}$ для тетрагональной периодической системы $\omega_1 = 2, \omega_2 = 2i$

k	1	2	3	4	5	6	7
$g_{4k}^{(0)}$	3,151211	4,255773	3,938849	4,015695	3,996097	4,000977	3,989756
k	8	9	10	≥ 11			
$g_{4k}^{(0)}$	4,000061	3,999985	4,000004	4,000000			

Таблица 1.4

Значения констант $g_{4k+3}^{(1)}$ для тетрагональной периодической системы $\omega_1 = 2, \omega_2 = 2i$

k	1	2	3	4	5	≥ 6
$g_{4k+3}^{(1)}$	4,001954	3,999512	4,000122	3,999969	4,000008	4,000000

Постоянная $g_4^{(0)}$ рассчитывается по формуле

$$g_4^{(0)} = \frac{\pi^4}{45} + \frac{2\pi^4}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\operatorname{sh}^2 \pi n} + \frac{3}{\operatorname{sh}^4 \pi n} \right).$$

Для вычисления остальных величин необходимо воспользоваться рекуррентными соотношениями (1.85), (1.111).

Функция Вейерштрасса $\sigma(z)$. Целая функция $\sigma(z)$ определяется при помощи равенства [1, 21]

$$\frac{d}{dz} \ln \sigma(z) = \zeta(z),$$

где $\zeta(z)$ — дзета-функция Вейерштрасса.

Учитывая определение функции $\nu(z)$ в (1.93), (1.94), получаем

$$\ln \sigma(z) = \nu(z)$$

и, следовательно,

$$\sigma(z) = z \prod_{m,n} \left(1 - \frac{z}{P}\right) \exp\left(\frac{z}{P} + \frac{z^2}{2P^2}\right). \quad (1.112)$$

Из этой формулы видно, что $\sigma(z)$ целая функция, имеющая простые нули в точках $P = m\omega_1 + n\omega_2$ ($m, n = 0, \pm 1, \pm \dots$).

Получим соотношения инвариантности для функции $\sigma(z)$. Для этого воспользуемся равенствами (1.95) для $\nu(z)$. Имеем

$$\ln \sigma(z + \omega_k) - \ln \sigma(z) = \pi i + \delta_k \left(z + \frac{1}{2} \omega_k \right) \quad (k = 1, 2).$$

Отсюда

$$\sigma(z + \omega_k) = -\sigma(z) \exp\left\{\delta_k \left(z + \frac{1}{2} \omega_k\right)\right\}. \quad (1.113)$$

В частности,

$$\sigma\left(-\frac{\omega_k}{2}\right) = -\sigma\left(\frac{\omega_k}{2}\right) \quad (k = 1, 2).$$

И, вообще, $\sigma(z)$ — нечетная функция.

Тэта-функции Якоби. Для вычислений, связанных с эллиптическими функциями, целесообразно пользоваться их выражениями с помощью быстро сходящихся рядов. Удобным аппаратом для этого являются тэта-функции Якоби. Они определяются следующими рядами [1, 2, 6]:

$$\begin{aligned} \vartheta_1(v) &= i \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k h^{(k-0.5)^2} z^{2k-1} = 2 \left(h^{\frac{1}{4}} \sin \pi v - h^{\frac{9}{4}} \sin 3\pi v + h^{\frac{25}{4}} \sin 5\pi v - \dots \right), \\ \vartheta_2(v) &= \vartheta_1\left(v + \frac{1}{2}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h^{(k-0.5)^2} z^{2k-1} = 2 \left(h^{\frac{1}{4}} \cos \pi v + h^{\frac{9}{4}} \cos 3\pi v + h^{\frac{25}{4}} \cos 5\pi v + \dots \right), \\ \vartheta_3(v) &= h^{\frac{1}{4}} e^{\pi i z} \vartheta_1\left(v + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h^{k^2} z^{2k} = 1 + 2h \cos 2\pi v + 2h^4 \cos 4\pi v + 2h^9 \cos 6\pi v + \dots, \\ \vartheta_4(v) &= \vartheta_3\left(v + \frac{1}{2}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k h^{k^2} z^{2k} = 1 - 2h \cos 2\pi v + 2h^4 \cos 4\pi v - 2h^9 \cos 6\pi v + \dots, \end{aligned} \quad (1.114)$$

где

$$h = \exp\{i\pi\tau\}, \quad \tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad \operatorname{Im} \tau > 0, \quad |h| = e^{-\pi \operatorname{Im} \tau} < 1, \quad z = \exp\{i\pi v\}.$$

Функция $\vartheta_1(v)$ — нечетная, периодическая с периодом 2, т. е.

$$\vartheta_1(v+2) - \vartheta_1(v) = 0.$$

Нули функции $\vartheta_1(v)$ простые и расположены в точках $m+n\pi$ ($m,n=0,\pm 1,\pm \dots$). Функции $\vartheta_2(v)$, $\vartheta_3(v)$, $\vartheta_4(v)$ — четные целые с периодами 2; 1 и 1 соответственно. Ряды (1.114) сходятся чрезвычайно быстро.

Приведем еще выражения функций Вейерштрасса через тэта-функции. Имеем

$$\begin{aligned} \sigma(z) &= \omega_1 \frac{\vartheta_1'(v)}{\vartheta_1'(0)} \exp \left\{ \frac{\delta_1 z^2}{2\omega_1} \right\}, \\ \zeta(z) &= \delta_1 v + \frac{1}{\omega_1} \frac{\vartheta_1'(v)}{\vartheta_1(v)}, \quad \wp(z) = e_3 + \frac{1}{\omega_1^2} \left\{ \frac{\vartheta_1'(0) \vartheta_4(v)}{\vartheta_1(v) \vartheta_4'(0)} \right\}^2, \\ \delta_1 &= -\frac{\vartheta_1'''(0)}{3\omega_1 \vartheta_1'(0)}, \quad e_3 = -\frac{\pi^2}{3\omega_1^2} \{ \vartheta_2^4(0) + \vartheta_3^4(0) \}, \end{aligned} \quad (1.115)$$

где

$$\begin{aligned} \vartheta_1'(0) &= 2\pi \left(h^{\frac{1}{4}} - 3h^{\frac{9}{4}} + 5h^{\frac{25}{4}} - 7h^{\frac{49}{4}} + \dots \right), \\ \vartheta_2'(0) &= 2h^{\frac{1}{4}} + 2h^{\frac{9}{4}} + 2h^{\frac{25}{4}} + \dots, \\ \vartheta_3'(0) &= 1 + 2h + 2h^4 + 2h^9 + \dots, \\ \vartheta_4'(0) &= 1 - 2h + 2h^4 - 2h^9 + \dots \end{aligned}$$

Полигармонические функции, инвариантные относительно группы трансляции $T(z)$. Под полигармонической функцией понимают решение (вообще, комплексное) полигармонического уравнения $U \in C^{2n}$.

$$\Delta^n U = 0, \quad \Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2, \quad \Delta^n = \Delta(\Delta^{n-1}).$$

Имеет место общее представление

$$U = U_n(z, \bar{z}) = \sum_{k=0}^{n-1} [\bar{z} \varphi_{k,n}(z) + z \psi_{k,n}(\bar{z})], \quad (1.116)$$

где $\varphi_{k,n}(z)$ и $\psi_{k,n}(\bar{z})$ — аналитические функции своих комплексных переменных.

Поставим задачу: построить функции $\varphi_{k,n}(z)$ и $\psi_{k,n}(\bar{z})$ таким образом, чтобы выполнялись условия инвариантности выражения (1.116)

$$U_n(z + \omega_\nu, \bar{z} + \bar{\omega}_\nu) - U_n(z, \bar{z}) = 0 \quad (\nu = 1, 2). \quad (1.117)$$

С этой целью рассмотрим систему полигармонических функций [10]

$$f_n(z, \bar{z}) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_{n-1}^k \bar{z}^{n-k-1} \wp_k^{(n-1)}(z), \quad (1.118)$$

где

$$C_p^k = \frac{p!}{k!(p-k)!}, \quad \wp_k^{(n-1)}(z) = \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \wp_k(z).$$

Покажем, что функции (1.118) удовлетворяют условию инвариантности (1.117). Действительно, из (1.118) находим

$$f_n(z + \omega_\nu, \bar{z} + \bar{\omega}_\nu) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_{n-1}^k (\bar{z} + \bar{\omega}_\nu)^{n-k-1} \wp_k^{(n-1)}(z + \omega_\nu) \quad (\nu = 1, 2; n = 1, 2, \dots).$$

В силу соотношения (1.98) это выражение представим следующим образом:

$$\begin{aligned} f_n(z + \omega_\nu, \bar{z} + \bar{\omega}_\nu) &= f_n(z, \bar{z}) + \\ &+ \sum_{k=0}^{n-2} \wp_k^{(n-1)}(z) \sum_{m=k+1}^{n-1} z^{n-m-1} \bar{\omega}_\nu^{m-k} \sum_{s=k}^m (-1)^s C_{n-1}^s C_{n-s-1}^{m-s} C_s^k. \end{aligned} \quad (1.119)$$

Можно показать, что последняя сумма в (1.119) при $n = 2, 3, \dots$ и $0 \leq k \leq n-2$, $k+1 \leq m \leq n-1$ обращается в ноль. При $n = 1$ функция $f_n(z, \bar{z})$ совпадает с $\wp(z)$ и, следовательно, также удовлетворяет (1.117).

Таким образом, функцию $f_n(z, \bar{z})$, определенную формулой (1.118), можно трактовать как двоякопериодическую гармонику. Дифференцируя последовательно эту функцию по переменной z , образуем систему высших гармоник

$$f_n^{(m)}(z, \bar{z}) = \frac{\partial^n}{\partial z^m} f_n(z, \bar{z}) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_{n-1}^k \bar{z}^{n-k-1} \wp_k^{(m+n-1)}(z).$$

Искомая полигармоническая функция, удовлетворяющая условиям периодичности (1.117), приобретает вид

$$U_n(z, \bar{z}) = \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{f_n^{(m)}(z, \bar{z})}{(m+n-1)!} A_{m+n-1} + \frac{f_n^{(m)}(\bar{z}, z)}{(m+n-1)!} A_{m+n-1}^* \right\}.$$

Учитывая представления (1.118), находим окончательно

$$U_n(z, \bar{z}) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \bar{z}^k \varphi_{k,n}(z) + z^k \psi_{k,n}(\bar{z}) \right\}, \quad (1.120)$$

где

$$\varphi_{k,n}(z) = (-1)^{n-k-1} C_{n-1}^k \sum_{s=n-1}^{\infty} \frac{A_s}{s!} \wp_{n-k-1}^{(s)}(z),$$

$$\psi_{k,n}(\bar{z}) = (-1)^{n-k-1} C_{n-1}^k \sum_{s=n-1}^{\infty} \frac{A_s^*}{s!} \wp_{n-k-1}^{(s)}(\bar{z}), \quad \bar{z} = x - iy.$$

Формула (1.120) дает решение поставленной задачи.

В качестве первого примера построим вещественную гармоническую двоякопериодическую функцию. В этом случае $n=1$ и формулы (1.118), (1.120) дают

$$f_1(z) = \varphi(z), \quad f_1^{(m)}(z) = \varphi^{(m)}(z) = \frac{d^m}{dz^m} \varphi(z).$$

Искомая гармоническая функция имеет вид

$$U = \operatorname{Re} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \frac{\varphi^{(m)}(z)}{m!}. \quad (1.121)$$

Построим теперь двоякопериодическую бигармоническую функцию вида $\bar{z}\varphi(z) + \psi(z)$. В этом случае $n=2$ и формулы (1.118), (1.120) дают

$$f_2(z, \bar{z}) = \bar{z}\varphi^{(1)}(z) - \varphi_1^{(1)}(z), \quad f_2^{(m)}(z, \bar{z}) = \bar{z}\varphi^{(m+1)}(z) - \varphi_1^{(m+1)}(z).$$

Полагая в (1.120): $\bar{A}_s = A_s^*$, ($s = n-1, n, n+1, \dots$), получаем окончательно

$$U_2(z, \bar{z}) = 2\operatorname{Re} \left\{ \bar{z}\varphi_{1,2}(z) + \varphi_{0,2}(z) \right\}, \quad (1.122)$$

где

$$\varphi_{0,2}(z) = -\sum_{s=1}^{\infty} \frac{A_s}{s!} \varphi_1^{(s)}(z), \quad \varphi_{1,2}(z) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{A_s}{s!} \varphi_1^{(s)}(z).$$

Очевидно, $\varphi_{1,2}(z)$ — функция двоякопериодическая, а $\varphi_{0,2}(z)$ удовлетворяет в силу (1.100) условиям

$$\varphi_{0,2}(z + \omega_\nu) - \varphi_{0,2}(z) = -\bar{\partial}_\nu \varphi_{1,2}(z) \quad (\nu = 1, 2).$$

Интегральные представления автоморфных функций. Под дробно-линейным преобразованием (дробно-линейной подстановкой) понимается выражение

$$z' = \frac{az + b}{cz + d} = T(z), \quad (1.123)$$

где a, b, c, d — постоянные и детерминант преобразования $ad - bc \neq 0$ (обычно его полагают равным единице). Обратное преобразование

$$z = T^{-1}(z') = \frac{z'd - b}{a - z'c}$$

также дробно-линейное и его детерминант равен единице.

Очевидно, что два последовательно выполненных дробно-линейных преобразования $T(z)$ и $S(z)$ снова дают дробно-линейное преобразование и если детерминанты каждого сомножителя равны единице, то детерминанты $TS, ST, T^2, S^2, T^{-1}, S^{-1}, \dots$ равны единице. Таким образом, конечное число последовательно выполненных дробно-линейных подстановок равносильно одному дробно-линейному преобразованию.

Пусть даны подстановки $T(z), S(z), \dots, R(z)$. Если образовать множество, содержащее данные подстановки, обратные к ним и построенные из них всеми возможными способами произведения, то это множество образует группу. Такая группа называется порожденной подстановками $T(z), S(z), \dots, R(z)$, а сами эти подстановки называются основными подстановками группы. Каждая группа содержит циклические подгруппы, порожденные какой-либо одной подстановкой.

Для того, чтобы циклическая группа, порожденная подстановкой $T(z)$ и содержащая все ее последовательные итерации

$$T_1(z) = T(z), \quad T[T(z)] = T_2(z), \quad T[T(T(z))] = T_3(z), \dots$$

была конечной, необходимо и достаточно, чтобы на каком-то шаге $T_n(z) \equiv z$.

Выражение для n -й итерации $T_n(z)$ получим, используя так называемые неподвижные точки ξ_1, ξ_2 преобразования (отображения) (1.123). Положим

$$T(z) = z \Leftrightarrow \frac{az + b}{cz + d} = z.$$

Если $c \neq 0$, то находим из этого уравнения две неподвижные точки

$$\xi_{1,2} = \frac{a - d \pm \sqrt{M}}{2c},$$

где с учетом равенства детерминанта преобразования единице

$$M = (d - a)^2 + 4bc = (a + d)^2 - 4.$$

При $a + d = \pm 2$ получаем одну неподвижную точку

$$\xi = \frac{a - d}{2c}.$$

Если $c = 0$, то имеем две неподвижные точки

$$\xi_1 = \frac{b}{d - a}, \quad \xi_2 = \infty.$$

При $c = 0, d = a$ подстановка $\omega(z) = z + b$ имеет одну неподвижную точку $\xi = \infty$.

Вывод таков: дробно-линейное отображение имеет не более двух неподвижных точек, если оно не есть тождественное: $z' \equiv z$.

Возвращаясь к n -й итерации $T_n(z)$, воспользуемся выражением преобразования через неподвижные точки (предполагается, что $c \neq 0$). Имеем

$$\frac{T_1(z) - \xi_1}{T_1(z) - \xi_2} = K \frac{z - \xi_1}{z - \xi_2}, \tag{1.124}$$

где K — множитель преобразования определяется формулой

$$K = \frac{a - c\xi_1}{a - c\xi_2} \neq 1.$$

При выполнении условия $ad - cb = 1$ имеем

$$K + \frac{1}{K} = (a+d)^2 - 2 \Leftrightarrow \sqrt{K} + \frac{1}{\sqrt{K}} = \pm(a+d). \quad (1.125)$$

Из (1.124) выводим

$$\frac{T_n(z) - \xi_1}{T_n(z) - \xi_2} = K^n \frac{z - \xi_1}{z - \xi_2}.$$

Отсюда

$$T_n(z) = \frac{(K^n \xi_2 - \xi_1)z + (1 - K^n)\xi_1 \xi_2}{(K^n - 1)z + \xi_2 - K^n \xi_1}.$$

Следовательно, $T_n(z) = z$ тогда и только тогда, когда $K^n = 1$, т. е.

$$K = \exp\left\{\frac{2i\pi k}{n}\right\} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1).$$

Выражение (1.125) дает в этом случае

$$a + d = \pm 2 \cos \frac{\pi k}{n} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1). \quad (1.126)$$

Условия (1.126) и $ad - cb = 1$ необходимы и достаточны для того, чтобы циклическая группа, порожденная подстановкой (1.123), была конечной (n -членной) [22, 41].

Пример. Пусть $n = 3$, тогда $k = 1, 2$.

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad a + d = 1,$$

$$\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \quad a + d = -1.$$

Получаем два (двухпараметрических) семейства подстановок

$$T_1(z) = \frac{az + b}{cz + 1 - a}, \quad a(1 - a) - bc = 1, \quad T_3(z) \equiv z,$$

$$S_1(z) = \frac{az + b}{cz - 1 - a}, \quad a(1 + a) + bc = -1, \quad S_3(z) \equiv z.$$

Группы дробно-линейных подстановок могут быть конечными или бесконечными. Приведем примеры.

1. Группа вращения. Эта группа порождена подстановкой

$$T(z) = z \exp\left\{\frac{2\pi i}{n}\right\}.$$

Имеем

$$T_1(z) = z \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right), \quad T_2(z) = z \exp\left(\frac{4\pi i}{n}\right), \dots, T_{n-1}(z) = z \exp\left(\frac{2(n-1)}{n}\pi i\right).$$

Очевидно, $T_n(z) \equiv z$.

2. Группа трансляции для функции с одним периодом. Множество преобразований

$$T_m(z) = z + m\omega \quad (m = 0, \pm 1, \pm \dots),$$

где $\omega \neq 0$ — постоянное число, образует группу, порожденную преобразованием $T_1(z) = z + \omega$.

3. Группа трансляции для двоякоперiodической функции. Множество преобразований

$$T(z) = z + m\omega_1 + n\omega_2; \quad \operatorname{Im} \frac{\omega_2}{\omega_1} \neq 0 \quad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \dots),$$

где ω_1 и ω_2 — постоянные, отличные от нуля числа, образует группу, порожденную преобразованиями $T = z + \omega_1$, $T' = z + \omega_2$.

4. Модулярная группа. Множество всех преобразований вида

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

с действительными целыми коэффициентами a, b, c, d для которых $ad - bc = 1$, образует группу. Обратные преобразования и произведения всех таких преобразований есть преобразования с целыми коэффициентами и детерминантами, равными единице. Каждое из этих преобразований переводит действительную ось в себя.

Под автоморфной функцией понимается однозначная аналитическая функция, инвариантная по отношению к некоторой группе дробно-линейных подстановок [41].

Точки или фигуры, получаемые одна из другой при помощи подстановок группы, называются конгруэнтными. Автоморфная функция принимает в конгруэнтных точках одно и те же значения.

Фундаментальной областью (фундаментальной ячейкой) называется область, не содержащая двух различных конгруэнтных точек, но содержащая точки, конгруэнтные любой точке плоскости относительно данной группы.

Пусть

$$T_0(z) \equiv z, \quad T_1(z), \dots, T_{n-1}(z)$$

дробно-линейные функции, составляющие группу, и Γ_0 — некоторая простая гладкая кривая (замкнутая или разомкнутая). Автоморфная функция

$$G(z, a) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{T_k(z) - a} \tag{1.127}$$

называется основной функцией группы. Здесь a — некоторое число, принимающее в каждой фундаментальной области любое свое значение один раз.

Интегральное представление кусочно-голоморфной автоморфной функции, исчезающей на бесконечности, имеет вид [5, 42]

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} f(t) \{G(t, z) - G(t, \infty)\} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} f(t) \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \frac{1}{t - T_k(z)} - \frac{1}{t - T_k(\infty)} \right\} dt. \end{aligned} \tag{1.128}$$

Функция (1.128) голоморфна всюду, кроме кривой Γ_0 и кривых Γ_k , уравнения которых имеют вид $z = T_k^{-1}(t)$, $t \in \Gamma_0$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$).

Например, функция автоморфная относительно группы вращения, порожденной подстановкой $T(z) = z \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$, имеет на основании (1.127), (1.128) интегральное представление

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} f(t) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{dt}{t - ze^{\frac{2k\pi i}{n}}}, \quad t \in \Gamma_0. \quad (1.129)$$

Если Γ_0 расположен в основном фундаментальном секторе Π_0 (рис. 1.12), то в каждом конгруэнтном секторе расположен конгруэнтный Γ_0 контур Γ_k , $k = 1, 2, \dots, n-1$. Для бесконечной группы формула (1.127) нуждается в уточнении, так как сумма, фигурирующая в ней, превращается в бесконечный ряд, вообще расходящийся.

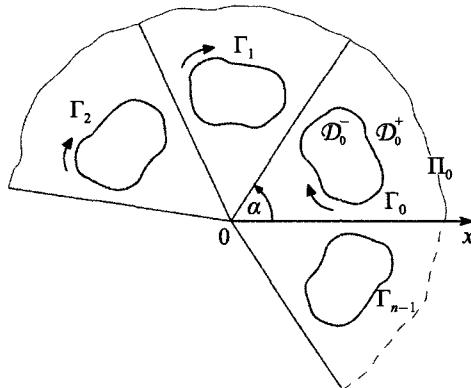


Рис. 1.12. Фундаментальный сектор Π_0 и конгруэнтные ему секторы $\left(\alpha = \frac{2\pi}{n}\right)$

Пусть $\Phi(z)$ — функция, автоморфная относительно группы трансляции $T(z) = z + m\omega$ ($m = 0, \pm 1, \pm \dots$). Периодическую основную функцию группы представим в виде

$$G(z, a) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z + m\omega - a} = \frac{1}{z - a} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(z-a)}{(z-a)^2 - m^2\omega^2}.$$

Вспоминая разложение $\operatorname{ctg} z$ на простые дроби (см. п. 1.6), получаем отсюда

$$G(z, a) = \frac{\pi}{\omega} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega}(z - a).$$

Следовательно, периодическую функцию $\Phi(z)$ можно представить в виде

$$\Phi(z) = \frac{1}{2i\omega} \int_{\Gamma_0} f(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega}(t - z) dt, \quad z \in \mathcal{D}_0^+, \quad (1.130)$$

где Γ_0 — замкнутый или разомкнутый контур, лежащий в фундаментальной области (полосе периодов Π_0). В каждой контргруэнтной полосе Π_m ($m = \pm 1, \pm 2, \dots$) расположены контуры Γ_m , контргруэнтные Γ_0 (рис. 1.13). На бесконечности $y \rightarrow \pm\infty$ имеем

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} \Phi(z) = \mp \frac{1}{2\omega} \int_{\Gamma_0} f(t) dt.$$

Поэтому для затухания функции $\Phi(z)$ на бесконечности необходимо и достаточно выполнения условия

$$\int_{\Gamma_0} f(t) dt = 0. \quad (1.131)$$

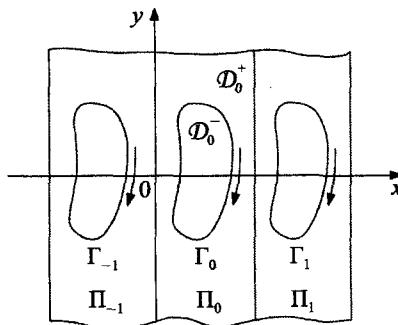


Рис. 1.13. Периодическая область, Π_0 — основная полоса периодов

Пусть теперь $\Phi(z)$ — функция автоморфная относительно группы трансляции $T(z) = z + m\omega_1 + n\omega_2$ ($m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) и $\zeta(z)$ — дзета-функция Вейерштрасса, построенная на основных периодах ω_1 и ω_2 (рис. 1.14).

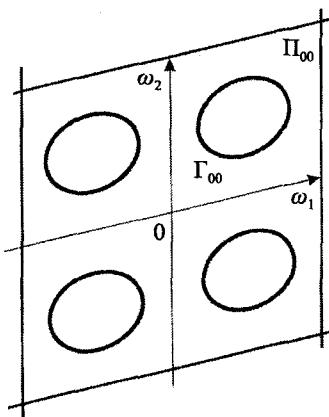


Рис. 1.14. Двоякопериодическая область, Π_{00} — основной параллелограмм периодов

Рассмотрим функцию

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} f(t) \zeta(t-z) dt. \quad (1.132)$$

В силу соотношений (1.80) запишем

$$\varphi(z + \omega_\nu) - \varphi(z) = -\frac{\delta_\nu}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} f(t) dt = \alpha_\nu, \quad (\nu = 1, 2).$$

Следовательно, представление (1.132) определяет квазипериодическую функцию с циклическими весами α_1, α_2 . Необходимым и достаточным условием двоякопериодичности функции (1.132) является равенство

$$\int_{\Gamma_0} f(t) dt = 0.$$

Условия типа (1.131) обычно проистекают из физических соображений.

Формула Коши для квазипериодической функции. Вместо представления квазипериодической функции интегралами типа Коши, в некоторых случаях целесообразнее использовать формулу Коши. Следуя В. Т. Койтеру [45], выскажем соображения, приводящие к интегральной формуле Коши для квазипериодической функции $\varphi(z)$, построенной на периодах ω_1, ω_2 . Пусть \mathcal{D}_{00} — конечная область с границей Γ_{00} , а $\mathcal{D}_{00}^+ = \Pi_{00} \setminus \overline{\mathcal{D}_{00}}$ и пусть $\varphi(z)$ — квазипериодическая функция, регулярная в области $\mathcal{D}^+ = \bigcup \mathcal{D}_{mn}^+$, где $\mathcal{D}_{mn}^+ \equiv \mathcal{D}_{00}^+ (\bmod \omega_1, \omega_2)$.

Рассмотрим интеграл вдоль контура L_0 параллелограмма периодов Π_{00}

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \varphi(t) \zeta'(t-z) dt, \quad z \in \Pi_{00}. \quad (1.133)$$

Поскольку мы строим представление квазипериодической функции $\varphi(z)$ с заданными циклическими весами α_1 и α_2 , то должны выполняться соотношения

$$\varphi(z + \omega_1) - \varphi(z) = \alpha_1, \quad \varphi(z + \omega_2) - \varphi(z) = \alpha_2. \quad (1.134)$$

Учитывая двоякую периодичность функции $\zeta'(z)$ и равенства (1.134), находим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \varphi(t) \zeta'(t-z) dt = \frac{1}{2\pi i} (\alpha_1 \delta_2 - \alpha_2 \delta_1), \quad z \in \Pi_{00}.$$

Интегрирование этого выражения по z в пределах от нуля до z дает

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \varphi(t) [\zeta(t-z) - \zeta(t)] dt = \frac{1}{2\pi i} (\alpha_2 \delta_1 - \alpha_1 \delta_2) z. \quad (1.135)$$

Пусть теперь $z \in \mathcal{D}_{00}^+$, так как подынтегральная функция имеет простой полюс в точке z с вычетом, равным $\varphi(z)$, то имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{L_0} + \int_{\Gamma_0} \right\} \varphi(t) [\zeta(t-z) - \zeta(t)] dt = \varphi(z). \quad (1.136)$$

Отсюда, с учетом равенства (1.135), приходим к интегральной формуле Коши для квазипериодической функции $\varphi(z)$ с заданными циклическими весами α_1 и α_2

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} (\alpha_2 \delta_1 - \alpha_1 \delta_2) z + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\infty} \varphi(t) [\zeta(t-z) - \zeta(t)] dt, \quad z \in \mathcal{D}_{00}^+. \quad (1.137)$$

Формула (1.137) получена в предположении, что $\varphi(t)$ — граничное значение квазипериодической функции $\varphi(z)$. Выясним, при каких условиях это действительно так. Поместим точку z в область \mathcal{D}_{00}^- , тогда вместо равенства (1.136) получим

$$(\alpha_1 \delta_2 - \alpha_2 \delta_1) z = \int_{\Gamma_\infty} \varphi(t) [\zeta(t-z) - \zeta(t)] dt. \quad (1.138)$$

Соотношение (1.138) является необходимым условием существования регулярной в \mathcal{D}^+ и непрерывной в $\overline{\mathcal{D}}^+$ квазипериодической функции $\varphi(z)$, обладающей циклическими весами α_1 и α_2 . При выполнении дополнительного соотношения

$$\int_{\Gamma_\infty} \varphi(t) dt = \alpha_2 \omega_1 - \alpha_1 \omega_2$$

оно является также достаточным условием.

1.8. Конформные отображения

Функция $w = f(z)$ называется однолистной в области \mathcal{D} , если в различных точках области \mathcal{D} она принимает различные значения. Если $w = f(z)$ регулярная, т. е. однозначная аналитическая функция, то из определения ее однолистности следует, что и обратная функция $z = \varphi(w)$ — однозначная функция, т. е. $w = f(z)$ осуществляет взаимно-однозначное отображение области \mathcal{D} в плоскости z на область \mathcal{D}^* плоскости w .

Отображение окрестности точки z_0 на окрестность точки w_0 , осуществляющее функцией $w = f(z)$, называется конформным, если в точке z_0 оно сохраняет углы между линиями и осуществляет преобразование подобия в малом. Последнее означает, что бесконечно малый кружок $|z - z_0| \leq r$ на плоскости z отображается в бесконечно малый круг $|w - w_0| \leq kr$ на плоскости w , где $w_0 = f(z_0)$ и коэффициент растяжения $k = |f'(z_0)|$.

Очевидно, для того чтобы отображение окрестности точки z_0 на окрестность точки w_0 было взаимно-однозначным, необходимо потребовать выполнения условия

$$f'(z_0) \neq 0.$$

Отображение $w = f(z)$ называется конформным в области \mathcal{D} , если оно конформно в каждой точке этой области. Имеет место критерий конформности отображения.

Для того чтобы отображение $w = f(z)$ было конформным в области \mathcal{D} , необходимо и достаточно, чтобы в этой области $f(z)$ была однолистной, мероморфной функцией, причем $f'(z) \neq 0$ для всех $z \in \mathcal{D}$. Впрочем, из условия однолистности уже следует, что $f'(z) \neq 0$.

Основной вопрос о существовании конформного отображения регламентируется теоремой Римана: каковы бы ни были односвязные области \mathcal{D} и \mathcal{D}^* (с границами, состоящими более чем из двух точек) и как бы ни были заданы точки z_0 и w_0 из этих областей и действительное число α , существует одно и только одно конформное отображение $w = f(z)$ области \mathcal{D} на область \mathcal{D}^* , такое, что $f(z_0) = w_0$ и $\arg f'(z_0) = \alpha$.

В практике конформных отображений используется следующий принцип соответствия границ [21, 19].

Пусть даны две односвязные области \mathcal{D} и \mathcal{D}^* с границами C и C^* , причем область \mathcal{D}^* ограничена. Если функция $w = f(z)$: 1) аналитична в \mathcal{D} и непрерывна в $\bar{\mathcal{D}}$, 2) осуществляет взаимно-однозначное отображение C на C^* с сохранением направления обхода, то она осуществляет (однолистное) конформное отображение области \mathcal{D} на \mathcal{D}^* .

Имеет место принцип симметрии. Пусть область \mathcal{D} , содержащая в составе своей границы прямолинейный интервал γ , отображается функцией $w = f(z)$ на область \mathcal{D}^* так, что γ переходит в прямолинейный интервал γ^* , входящий в границу области \mathcal{D}^* . Тогда если $w = f(z)$ аналитична в области \mathcal{D} , а также во всех точках граничного интервала γ , то эта функция аналитична также в области \mathcal{D}_1 , симметричной с \mathcal{D} относительно γ , и обладает тем свойством, что любые две точки z и z_1 , симметричные относительно γ , отображаются в точки w и w_1 , симметричные относительно γ^* (рис. 1.15). Согласно этому принципу функция $w = f(z)$, определенная в области \mathcal{D} , может быть аналитически продолжена в область \mathcal{D}_1 через γ по формуле

$$f_1(z) = \overline{f(\bar{z})}, \quad z \in \mathcal{D}_1.$$

Определенные ограничения на искажение формы фигур при конформном отображении накладываются леммой Шварца, которая утверждает, что отображения $w = f(z)$, переводящие единичный круг в себя при условии $f(0) = 0$, могут перевести точку z_0 в любую точку круга $|w| \leq |z_0|$ и только в точку такого круга. Равенство расстояний $|w| = |z_0|$ возможно лишь в том случае, когда отображение $w = f(z)$ сводится к вращению вокруг начала [21].

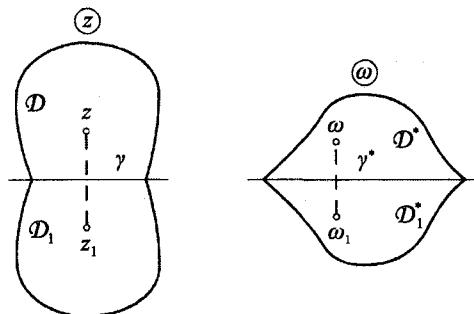


Рис. 1.15. Иллюстрация к принципу симметрии

Если (кусочно-гладкий) контур C в плоскости z отображается функцией $w = f(z)$ в контур C^* в плоскости w , то длина его l^* определяется формулой

$$l^* = \int_C |f'(z)| dz.$$

Соответственно, если область \mathcal{D} при конформном отображении $w = f(z)$ отображается на область \mathcal{D}^* , то площадь S^* вычисляется по формуле

$$S^* = \iint_{\mathcal{D}} |f'(z)|^2 dx dy.$$

Конформные отображения применяются чаще всего при решении задач теории плоских гармонических полей (стационарная теплопроводность, электро- и магнитостатика, теория фильтрации, гидромеханика) и рассмотрении плоских задач теории упругости, электроупругости, термоупругости и т. п. Применяются обычно отображения рассматриваемой односвязной области на круг или внешность круга, полу平面. Отображение двухсвязной области на круговое кольцо [19, 21, 23, 24, 28, 33, 35, 37 и др.].

При отображении многоугольных областей используется интеграл Кристоффеля–Шварца и различные его модификации. Имеет место теорема [21, 37].

Если функция $w = f(z)$ реализует конформное отображение верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ на внутренность ограниченного многоугольника с углами

$$\alpha_k \pi (0 < \alpha_k \leq 2, k = 1, 2, \dots, n)$$

при вершинах, причем известны точки a_k действительной оси ($-\infty < a_1 < a_2 < \dots < a_n < \infty$), соответствующие вершинам этого многоугольника, то $f(z)$ представляется интегралом (рис. 1.16)

$$f(z) = c \int_{z_0}^z (t - a_1)^{\alpha_1 - 1} (t - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (t - a_n)^{\alpha_n - 1} dt + c_1, \quad (1.139)$$

где z_0 , c и c_1 — некоторые постоянные. Например, отображение верхней полуплоскости на треугольник дается функцией

$$f(z) = c \int_0^z t^{\alpha_1 - 1} (t - 1)^{\alpha_2 - 1} dt + c_1.$$

Здесь вершинам треугольника соответствуют точки 0, 1 и ∞ .

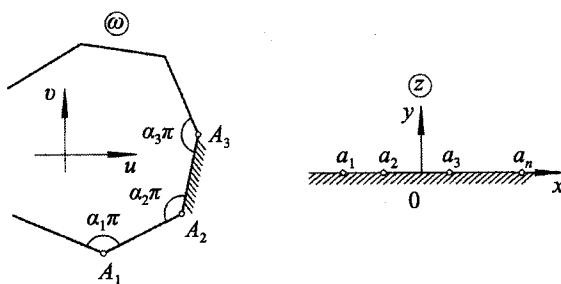


Рис. 1.16. К конформному отображению многоугольников ($\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = n - 2$)

Для безграничного треугольника с углами $0, 5\pi$, $0, 5\pi$ и 0 (рис. 1.17) эта формула дает

$$f(z) = c \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{t(t-1)}} + c_1.$$



Рис. 1.17. К отображению верхней полуплоскости на внутренность полуполосы

Пусть прямоугольник в плоскости w имеет вершины в точках

$$-\frac{1}{2}\omega_1, \frac{1}{2}\omega_1, \frac{1}{2}\omega_1 + i\omega_2, -\frac{1}{2}\omega_1 + i\omega_2,$$

где $\omega_1 > 0$, $\omega_2 > 0$ — заданные числа (рис. 1.18).

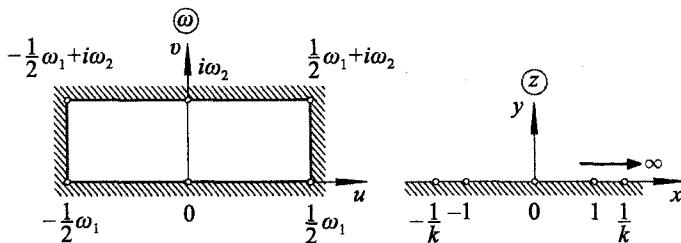


Рис. 1.18. К отображению верхней полуплоскости $\text{Im } z > 0$ на прямоугольник. Точкам $x = -1, 0, 1, \infty$ соответствуют точки $w = -\frac{1}{2}\omega_1, 0, \frac{1}{2}\omega_1, i\omega_2$; точкам $x = \frac{1}{k}, -\frac{1}{k}$ соответствуют вершины $w = \frac{1}{2}\omega_1 + i\omega_2, -\frac{1}{2}\omega_1 + i\omega_2$ ($0 < k < 1$)

Отображение верхней полуплоскости $\text{Im } z > 0$ на этот прямоугольник, осуществляемое функцией $w = f(z)$, имеет вид

$$w = f(z) = c \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \quad (0 < k < 1). \quad (1.140)$$

Фигурирующий здесь (эллиптический) интеграл первого рода в форме Лежандра в элементарных функциях не берется. Его обращение, т. е. функция $z = \varphi(w)$, осуществляющая отображение прямоугольника на полуплоскость, называется эллиптическим синусом $z = \text{sn } w$ (читается «эн эн w »). Эллиптический синус принадлежит к числу эллиптических функций Якоби [1, 2, 5, 22, 23]. Она является нечетной мероморфной двоякопериодической функцией с периодами $\tau = 2\omega_1$ и $\tau' = 2i\omega_2$, т. е.

$$\text{sn}(w + 2\omega_1) = \text{sn } w, \quad \text{sn}(w + 2i\omega_2) = \text{sn } w.$$

Очевидно, периоды $s_n w$ можно определить по формулам

$$\tau = 2\omega_1 = 4c \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

$$\tau' = 2\omega_2 = 2c \int_1^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}.$$

Отображение внутренности (внешности) единичного круга на внутренность (внешность) многоугольника осуществляется функцией $w = f(z)$ по формуле (1.139), где α_k — измеренные в долях π внутренние (внешние) углы многоугольника, $a_k, |a_k| = 1$ — точки единичной окружности, соответствующие его вершинам. При отображении внешности на внешность предполагается, что точки $z = \infty$ и $w = \infty$ соответствуют друг другу.

Например, при отображении единичного круга с центром в начале координат на правильный n -угольник с центром в точке $w = 0$ получаем

$$w = f(z) = c \int_0^z \frac{dz}{\sqrt[n]{(z^n - 1)^2}}.$$

Модуль c определяется размерами n -угольника, аргумент — дает поворот вокруг его центра (рис. 1.19). При рассмотрении задач с использованием конформных отображений обычно вводят физическую плоскость z , в которой расположена исследуемая конфигурация, и параметрическую плоскость ζ , на которую отображается рассматриваемая область физической плоскости. Функцию, отображающую конформно одну область на другую, записывают в виде $z = \omega(\zeta)$. Если область физической плоскости отображается на единичный круг или на его внешность, то $|\zeta| = 1$, т. е. $\zeta = e^{i\theta}$.

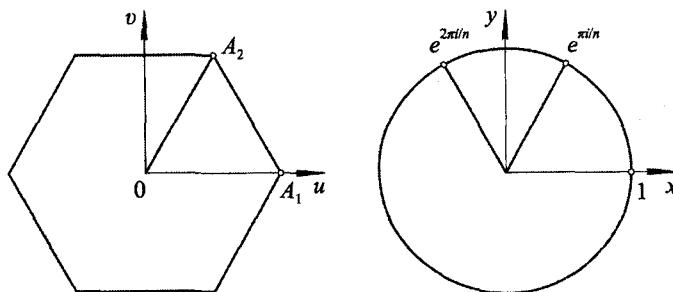


Рис. 1.19. К отображению единичного круга на правильный n -угольник

В этих обозначениях для внешности равностороннего треугольника имеем

$$z = \omega(\zeta) = -c \int_1^\zeta \left(1-t^3\right)^{\frac{2}{3}} \frac{dt}{t^2} + c_1.$$

Разлагая подынтегральную функцию в ряд и интегрируя, получаем при надлежащем выборе постоянной c_1

$$\omega(\zeta) = A \left(\frac{1}{\zeta} + \frac{\zeta^2}{3} + \frac{\zeta^5}{45} \dots \right). \quad (1.141)$$

Функция (1.141) определяет отображение внешности равностороннего треугольника (со скругленными углами) на внешность единичного круга. С увеличением числа членов в разложении (1.141) искажение формы треугольника уменьшается и при $n \rightarrow \infty$ стремится к нулю. Иллюстрацией этому служит рис. 1.20.

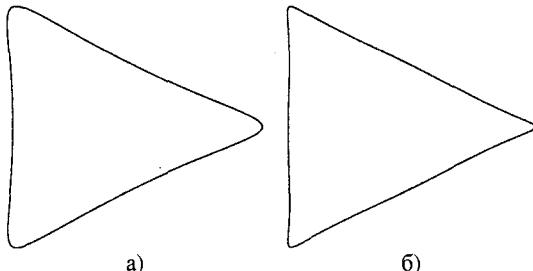


Рис. 1.20. Приближенное отображение внешности треугольника на внешность единичного круга:

а) $\omega(\zeta) = A \left(\frac{1}{\zeta} + \frac{\zeta^2}{3} \right)$; б) $\omega(\zeta) = A \left(\frac{1}{\zeta} + \frac{\zeta^2}{3} + \frac{\zeta^5}{45} \right)$

Отображение внешности квадрата на внешность единичного круга осуществляется функцией

$$z = \omega(\zeta) = -c \int_1^\zeta (1+t^4)^{-\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^2} + c_1.$$

Разложение в ряд дает

$$\omega(\zeta) = A \left(\frac{1}{\zeta} - \frac{\zeta^3}{6} + \frac{\zeta^7}{56} - \frac{\zeta^{11}}{176} + \dots \right). \quad (1.142)$$

Оставляя в разложении (1.142) два, три или четыре члена, получаем фигуры, изображенные на рис. 1.21.

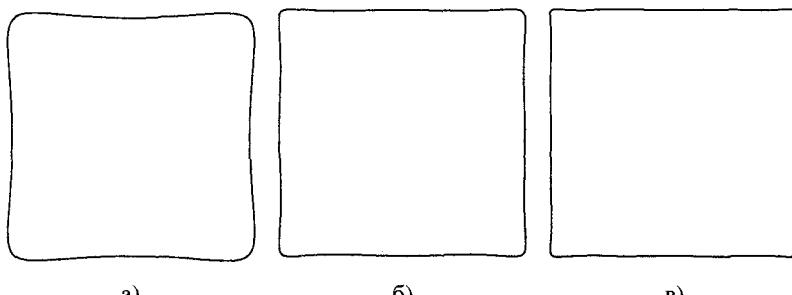


Рис. 1.21. Приближенное отображение внешности квадрата: а) оставлено два первых члена в разложении (1.142); б) три первых члена; в) четыре первых члена

При рассмотрении внешности прямоугольных областей можно воспользоваться конформным отображением на внешность единичного круга. Коэффициенты функции $\omega(\zeta)$ приведены в табл. 1.5.

Таблица 1.5

**Значения коэффициентов отображающей функции
в зависимости от отношения сторон прямоугольника,
 \tilde{k} — приведенная кривизна**

$z = \omega(\zeta) = R \left(\zeta + \sum_{k=1,3,\dots}^N C_k \zeta^{-k} \right), \quad \lambda = \frac{a}{b}, \quad \tilde{k} = 30$						
$\lambda \backslash C_k$	1	3	5	7	10	18
C_1	0,0000	0,4649	0,6325	0,7180	0,7900	0,8650
C_3	-0,1666	-0,1306	-0,0999	-0,0807	-0,0528	-0,0416
C_5	0,0000	-0,0384	-0,0379	-0,0347	-0,0297	-0,0216
C_7	0,0178	-0,0011	-0,0101	-0,0131	-0,0142	-0,0164

1.9. Вычисление определенных интегралов от однозначных и многозначных функций

Интегралы от однозначных функций [6, 12, 13, 15, 20, 21–23, 30–32]. Пусть \mathcal{D} — конечная многосвязная область, ограниченная простыми кусочно-гладкими замкнутыми кривыми Γ_k , $\Gamma = \bigcup \Gamma_k$ — полная граница области \mathcal{D} . Рассмотрим мероморфную функцию $f(z)$ с полюсами в точках $a_1, a_2, \dots, a_N \in \mathcal{D}$. В области \mathcal{D} с исключенными точками a_n ($n = 1, 2, \dots, N$) будем предполагать, что она регулярна (голоморфна) и непрерывно продолжима на Γ .

Проведя разрезы так, как это показано на рис. 1.22, запишем на основании теоремы Коши

$$\int_{\Gamma} f(z) dz + \sum_{n=1}^N \int_{\gamma_n} f(z) dz = 0,$$

где γ_n — окружность достаточно малого радиуса с центром в точке a_n . Главная часть $f(z)$ в точке a_n определяется формулой (1.61), поэтому

$$\int_{\gamma_n} f(z) dz = -2\pi i c_{-1}^{(n)}, \quad (n = 1, 2, \dots, N). \quad (1.143)$$

Коэффициент $c_{-1}^{(n)}$ при $(z - a_n)^{-1}$ в главной части $f(z)$ называется вычетом этой функции в полюсе a_n (обозначение: $\text{Res } f(a_n)$). Окончательно получаем [21]

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{n=1}^N \text{Res } f(a_n). \quad (1.144)$$

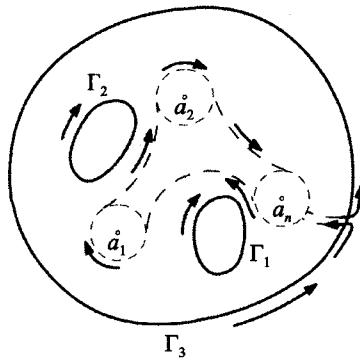


Рис. 1.22. К формулировке теоремы Коши о вычетах

Итак, интеграл от однозначной аналитической функции, имеющей в области \mathcal{D} полюсы в точках a_n , равен сумме вычетов в полюсах, умноженной на $2\pi i$. В этом состоит содержание теоремы Коши о вычетах. На основании (1.49) вычет функции $f(z)$ в полюсе a определяется равенством

$$\operatorname{Res} f(a) = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta, \quad (1.145)$$

где γ — круговой контур достаточно малого радиуса, содержащий точку a внутри себя. Поскольку вычет есть дифференциальная характеристика функции, то его легче вычислять при помощи операций дифференцирования и предельного перехода.

Пусть $f(z)$ имеет простой полюс в точке $z = a$. Представим эту функцию в виде отношения целых функций

$$f(z) = \frac{F(z)}{G(z)} = \frac{F(z)}{(z-a)g(z)}, \quad F(a) \neq 0, \quad g(a) \neq 0.$$

Функция $F(z)/g(z)$ регулярна в окрестности точки a и в самой этой точке. Поэтому имеют место разложения

$$\frac{F(z)}{g(z)} = c_{-1} + c_0(z-a) + c_1(z-a)^2 + \dots$$

$$f(z) = \frac{F(z)}{(z-a)g(z)} = \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + \dots$$

Отсюда

$$c_{-1} = \operatorname{Res} f(a) = \lim_{z \rightarrow a} \{(z-a)f(z)\} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{F(z)}{G(z)-G(a)} = \frac{F(a)}{G'(a)}. \quad (1.146)$$

Если точка a есть полюс порядка p , то рассуждая аналогично предыдущему, запишем

$$f(z) = \frac{F(z)}{(z-a)^p g(z)} = \frac{c_{-p} + c_{-p+1}(z-a) + \dots + c_{-1}(z-a)^{p-1} + c_0(z-a)^p + \dots}{(z-a)^p}.$$

Отсюда

$$\operatorname{Res} f(a) = c_{-1} = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}} \{ (z-a)^p f(z) \}. \quad (1.147)$$

Если $f(z)$ в бесконечно удаленной точке ограничена, то разложение ее в окрестности $z = \infty$ имеет вид

$$f(z) = c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \dots$$

Вычет

$$\operatorname{Res} f(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) dz = c_{-1}, \quad (1.148)$$

где γ — окружность достаточно большого радиуса с центром в точке $z = 0$, обход контура Γ по часовой стрелке.

Сравнивая соотношения (1.144) и (1.148), заключаем, что сумма вычетов однозначной аналитической функции по всем ее полюсам в полной z -плоскости равна нулю. Для вычисления некоторых интегралов типа Коши удобно пользоваться формулой Коши и теоремой о вычетах. Пусть Γ — простой замкнутый контур, ограничивающий конечную область \mathcal{D}^+ . Обозначим, как обычно $\bar{\mathcal{D}}^+ = \Gamma \cup \mathcal{D}^+$, \mathcal{D}^- — дополнение $\bar{\mathcal{D}}^+$ до полной z -плоскости, и пусть $f(z)$ — функция, голоморфная в \mathcal{D}^- и непрерывная в $\mathcal{D}^- \cup \Gamma$. Тогда имеют место формулы

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} f(z) - f(\infty), & z \in \mathcal{D}^-, \\ -f(\infty), & z \in \mathcal{D}^+. \end{cases} \quad (1.149)$$

В самом деле, если $z \in \mathcal{D}^-$, то обозначив $c_0 = f(\infty)$, запишем для функции $f_0(z) = f(z) - c_0$, голоморфной в \mathcal{D}^- и исчезающей на бесконечности,

$$f_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f_0(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f_0(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{c_0}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Так как последний интеграл в правой части равен нулю, приходим к первому равенству (1.149).

Если $z \in \mathcal{D}^+$, то (рис. 1.23)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0, \quad (1.150)$$

где C_R — окружность радиуса R , содержащая область $\bar{\mathcal{D}}^+$ внутри себя. Последний интеграл представим в виде

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{c_0}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(\zeta) - f(\infty)}{\zeta - z} d\zeta.$$

При $R \rightarrow \infty$ второй интеграл здесь исчезает и равенство (1.150) дает

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{c_0}{2\pi i} \cdot i\theta \Big|_{10}^{2\pi} = 0.$$

Отсюда получаем второе равенство (1.149).

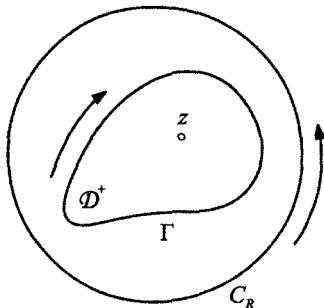


Рис. 1.23. К выводу соотношения (1.149) при $z \in \mathcal{D}^+$

В том случае, когда $f(z)$ голоморфна в \mathcal{D}^+ и непрерывна в $\bar{\mathcal{D}}^+$, имеем на основании формулы Коши (1.7)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} f(z), & z \in \mathcal{D}^+, \\ 0, & z \in \mathcal{D}^-. \end{cases} \quad (1.151)$$

Формулы (1.149), (1.151) легко обобщаются следующим образом. Пусть функция $f(z)$ голоморфна в \mathcal{D}^+ и непрерывна в $\bar{\mathcal{D}}^+$ за исключением точек $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathcal{D}^+$, в которых она имеет полюсы с главными частями $g_1(z), g_2(z), \dots, g_n(z)$ соответственно. Тогда [24]

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} f(z) - g_1(z) - g_2(z) - \dots - g_n(z), & z \in \mathcal{D}^+, \\ -g_1(z) - g_2(z) - \dots - g_n(z), & z \in \mathcal{D}^-. \end{cases} \quad (1.152)$$

В самом деле, при $z \in \mathcal{D}^+$ функция $f_0(z) = f(z) - \sum_{k=1}^n g_k(z)$ голоморфна и на основании формулы Коши имеем цепочку равенств

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f_0(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f_0(z) \Rightarrow f(z) - \sum_{k=1}^n g_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\sum g_k(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Но $\sum_{k=1}^n g_k(z)$ — голоморфна в \mathcal{D}^- и исчезает на бесконечности, поэтому в силу (1.149)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\sum g_k(z)}{\zeta - z} d\zeta = 0, \quad z \in \mathcal{D}^+$$

и приходим к первой формуле (1.152).

Для вывода второй формулы (1.152) заметим, что в силу голоморфности $f_0(z)$ в \mathcal{D}^+ и того обстоятельства, что $\sum g_k(z)$ голоморфна в \mathcal{D}^- и исчезает на бесконечности, получаем цепочку равенств при $z \in \mathcal{D}^-$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) - \sum g_k(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0 \Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\sum g_k(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = - \sum_{k=1}^n g_k(z).$$

Наконец, если функция $f(z)$ голоморфна в \mathcal{D}^- и непрерывна в $\mathcal{D}^- \cup \Gamma$ за исключением конечного числа точек $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathcal{D}^-$, а также точки $z = \infty$, в которых она может иметь полюсы с главными частями $g_1(z), g_2(z), \dots, g_n(z), g_\infty(z)$, то справедливы формулы

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} f(z) - g_1(z) - g_2(z) - \dots - g_n(z) - g_\infty(z), & z \in \mathcal{D}^-, \\ -g_1(z) - g_2(z) - \dots - g_n(z) - g_\infty(z), & z \in \mathcal{D}^+. \end{cases} \quad (1.153)$$

Здесь под главной частью полюса порядка p функции $f(z)$ на бесконечности понимается многочлен

$$g_\infty(z) = b_0 + b_1 z + \dots + b_p z^p.$$

Для вывода первой формулы в (1.153) заметим, что функция

$$f_0(z) = f(z) - g_1(z) - g_2(z) - \dots - g_n(z) - g_\infty(z)$$

голоморфна в \mathcal{D}^- , непрерывна в $\mathcal{D}^- \cup \Gamma$ и исчезает на бесконечности. В силу (1.149)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f_0(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f_0(z). \quad (1.154)$$

Учитывая то, что функции $g_k(z)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) и $g_\infty(z)$ голоморфны в \mathcal{D}^+ и непрерывны в $\mathcal{D}^+ \cup \Gamma$, имеем в силу (1.151)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g_\infty(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0, \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g_k(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0, \quad z \in \mathcal{D}^- \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Поэтому равенство (1.154) дает при $z \in \mathcal{D}^-$

$$f(z) - \sum_{k=1}^n g_k(z) - g_\infty(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Аналогично выводится второе соотношение в (1.153).

Для вычисления несобственных интегралов вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

можно воспользоваться теоремой о вычетах, если $f(z)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $f(z)$ регулярна в верхней полуплоскости за исключением полюсов a_1, a_2, \dots, a_n и непрерывно продолжима на границу $\operatorname{Im} z = 0$;

2) функция $f(z)$ при $z \rightarrow \infty$ удовлетворяет условию $f(z) = o(z^{-1})$ в полуплоскости $\operatorname{Im} z \geq 0$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(a_k).$$

Наконец, при вычислении интегралов с бесконечными пределами часто привлекается лемма Жордана [21]. Если $f(z)$ в верхней полуплоскости и на вещественной оси удовлетворяет условию $f(z) \rightarrow 0$ равномерно при $z \rightarrow \infty$ и $m > 0$ — некоторое число, то

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) e^{imz} dz = 0,$$

где C_R — полуокружность радиуса R с центром в начале координат, лежащая в верхней полуплоскости. Приведем примеры:

1. Вычислить интеграл

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{(z^2 + 1)^2},$$

где контур интегрирования Γ показан на рис. 1.24. Подынтегральная функция

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^2} = \frac{1}{(z+i)^2(z-i)^2}$$

имеет два полюса второго порядка в точках $z = i$ и $z = -i$. Вычет в точке i согласно формуле (1.147)

$$\operatorname{Res} f(i) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left\{ (z+i)^{-2} \right\} = \frac{1}{4i}.$$

Находим по (1.144)

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{(z^2 + 1)^2} = 2\pi i \operatorname{Res} f(i) = \frac{i\pi}{2}.$$

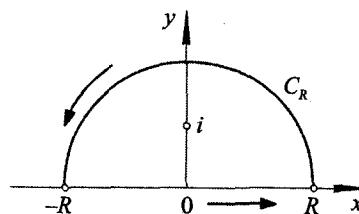


Рис. 1.24. Контур интегрирования $\Gamma = [-R, R] \cup C_R$

2. Вычислить интеграл

$$I = \int_0^\infty \frac{\cos mx}{x^2 + a^2} dx, \quad a > 0, \quad m > 0.$$

Заметим прежде всего, что если $f(x) = f(-x)$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_0^{\infty} (f(x) + f(-x)) dx = 2 \int_0^{\infty} f(x) dx.$$

Значит,

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mx}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} \frac{e^{imz}}{z^2 + a^2} dz = \pi i \operatorname{Res} f(ai) = \frac{\pi}{2a} e^{-am}.$$

Интегралы от многозначных функций. Рассмотрим интеграл

$$I = \int_l (-z)^{\alpha-1} Q(z) dz,$$

где $\alpha \neq 1$ — некоторое вещественное число и $Q(z)$ — рациональная дробь, причем $z^\alpha Q(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow 0$ и $z \rightarrow \infty$. Потребуем также, чтобы $Q(z)$ не имела полюсов на положительной полуоси Ox . Контур интегрирования l выберем так, как показано на рис. 1.25. На плоскости с разрезом вдоль Ox выделим однозначную ветвь функции $(-z)^{\alpha-1}$ следующим образом. На верхнем берегу разреза $x > 0$ положим

$$(-z)^{\alpha-1} = (xe^{-i\pi})^{\alpha-1} = x^{\alpha-1}e^{-i\pi(\alpha-1)}.$$

На нижнем берегу

$$(-z)^{\alpha-1} = (xe^{i\pi})^{\alpha-1} = x^{\alpha-1}e^{i\pi(\alpha-1)}.$$

Тогда в силу условий, накладываемых на функцию $Q(z)$, при $R \rightarrow \infty$ и при $\varepsilon \rightarrow 0$ интегралы по C_R и C_ε исчезнут и останутся интегралы по полуоси Ox , проходящие в прямом и обратном направлении. В результате имеем

$$\left(e^{i\pi\alpha} - e^{-i\pi\alpha} \right) \int_0^\infty x^{\alpha-1} Q(x) dx = 2\pi i \sum_k \operatorname{Res} \left\{ (-z)^{\alpha-1} Q(z) \right\}_{z=a_k},$$

где a_k — полюсы функции $(-z)^{\alpha-1} Q(z)$. Окончательно, получаем

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} Q(x) dx = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi} \sum_k \operatorname{Res} \left\{ (-z)^{\alpha-1} Q(z) \right\}_{z=a_k}. \quad (1.155)$$

Например,

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi} \operatorname{Res} \left\{ (-z)^{\alpha-1} \frac{1}{1+z} \right\} = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi} \lim_{z \rightarrow -1} (-z)^{\alpha-1} = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi}, \alpha \neq 1.$$

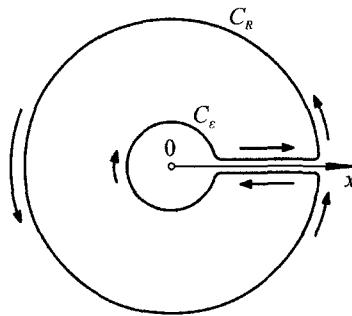


Рис. 1.25. Контур интегрирования l

При решении двумерных граничных задач механики сплошной среды иногда возникает необходимость в вычислении интегралов вида [24, 25]

$$I(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\zeta) d\zeta}{X(\zeta)(\zeta - z)}, \quad (1.156)$$

где

$$f(\zeta) = A_m \zeta^m + A_{m-1} \zeta^{m-1} + \dots + A_0,$$

$$X(z) = (z-a)^{-\gamma} (z-b)^{\gamma-1}, \quad \gamma = \alpha + i\beta, \quad 0 \leq \alpha < 1,$$

L — гладкая разомкнутая дуга ab (рис. 1.26). Для вычисления интеграла (1.156) окружим дугу ab замкнутым контуром C и рассмотрим интеграл

$$\Omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t) dt}{X(t)(t-z)}. \quad (1.157)$$

Стягивая контур C к дуге L , запишем

$$\Omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{ab} \frac{f(\zeta) d\zeta}{X^+(\zeta)(\zeta-z)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{ba} \frac{f(\zeta) d\zeta}{X^-(\zeta)(\zeta-z)}.$$

Наличие разреза L позволяет выделить однозначную ветвь функции $X(z)$. Очевидно, сделав полный обход вдоль контура C , мы вернемся к исходному значению $X(z)$. Поэтому, обойдя по часовой стрелке точку a , например, получим:

на правом берегу

$$X^+(\zeta) = (\zeta - a)^{-\gamma} (\zeta - b)^{\gamma-1} = X(\zeta),$$

на левом берегу

$$X^-(\zeta) = X(\zeta) e^{-2\pi i \gamma}.$$

Окончательно получаем выражение искомого интеграла через $\Omega(z)$

$$I(z) = \frac{1}{(1-g)} \Omega(z), \quad g = \frac{X^-(\zeta)}{X^+(\zeta)} = e^{-2\pi i \gamma}. \quad (1.158)$$

Таким образом, вопрос свелся к вычислению интеграла (1.158). Так как функция $f(z)/X(z)$ голоморфна в области \mathcal{D}^- , то необходимо воспользоваться первой формулой (1.153). Имеем согласно определению (1.157)

$$\Omega(z) = \frac{f(z)}{X(z)} - g_\infty(z), \quad (1.159)$$

где $g_\infty(z)$ — главная часть функции $f(z)/X(z)$ в бесконечно удаленной точке.

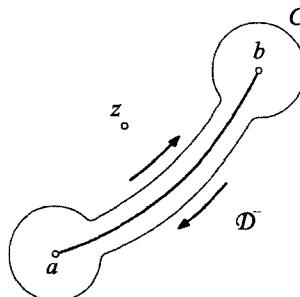


Рис. 1.26. К вычислению интеграла (1.156). \mathcal{D}^- — бесконечная часть плоскости с границей-контуром C

Запишем разложение функции $X^{-1}(z)$ в окрестности точки $z = \infty$

$$\begin{aligned} X^{-1}(z) &= (z-a)^\gamma (z-b)^{1-\gamma} = z \left(1 - \frac{a}{z}\right)^\gamma \left(1 - \frac{b}{z}\right)^{\lambda} = \\ &= z \left(1 - \gamma \frac{a}{z} + \frac{\gamma(\gamma-1)}{1 \cdot 2} \frac{a^2}{z^2} - \dots\right) \left(1 - \lambda \frac{b}{z} + \frac{\lambda(\lambda-1)}{1 \cdot 2} \frac{b^2}{z^2} - \dots\right) = z + B_0 + \frac{B_1}{z} + \frac{B_2}{z^2} + \dots, \end{aligned} \quad (1.160)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda &= 1 - \gamma, \quad B_0 = \gamma(b-a) - b, \quad B_1 = \frac{\gamma(\gamma-1)(a-b)^2}{2}, \\ B_2 &= \frac{1}{6} \gamma(\gamma-1) \{ (1+\gamma)b^3 - 3\gamma ab^2 - 3(1+\gamma)a^2b + (2-\gamma)a^3 \}, \end{aligned}$$

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Если $f(z) = 1$, то в соответствии с равенствами (1.156), (1.158)–(1.160) находим

$$\begin{aligned} g_\infty(z) &= z + B_0, \quad X(z) = (z-a)^{-\gamma} (z-b)^{\gamma-1}, \\ \Omega(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dt}{X(t)(t-z)} = X^{-1}(z) - g_\infty(z), \\ I(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{d\zeta}{X(\zeta)(\zeta-z)} = \frac{1}{(1-e^{-2\pi i\gamma})} \Omega(z). \end{aligned} \quad (1.161)$$

Прямое значение интеграла в точке $\zeta_0 \in L$ получаем на основании формул Сохоцкого–Племеля (1.23). Имеем

$$2I(\zeta_0) = I^+(\zeta_0) + I^-(\zeta_0) = \frac{1+e^{-2\pi i\gamma}}{1-e^{-2\pi i\gamma}} \cdot X^{-1}(\zeta_0) - \frac{2g_\infty(\zeta_0)}{1-e^{-2\pi i\gamma}}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{d\zeta}{X(\zeta)(\zeta-\zeta_0)} = \frac{i e^{i\pi\gamma}}{\sin \pi\gamma} (\zeta_0 + B_0) - i X^{-1}(\zeta_0) \operatorname{ctg} \pi\gamma. \quad (1.162)$$

Пусть, например, $a=-1$, $b=1$ ($L=[-1, 1]$), $\gamma=0,5$. Тогда из (1.160) вычисляем: $B_0=0$ и формулы (1.161), (1.162) дают

$$\begin{aligned} \Omega(z) &= \sqrt{z^2 - 1} - z, \\ I(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{x^2 - 1} dx}{x - z} = \frac{1}{2} \Omega(z), \\ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x-x_0} dx &= -x_0, \quad -1 < x_0 < 1. \end{aligned} \quad (1.163)$$

Здесь принято, что $\sqrt{x^2 - 1} = i\sqrt{1-x^2}$.

2. Если $f(z)=z$, то в соответствии с (1.160)

$$g_\infty(z) = z^2 + B_0 z + B_1,$$

$$\Omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{t dt}{X(t)(t-z)} = z X^{-1}(z) - g_\infty(z),$$

$$I(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\zeta d\zeta}{X(\zeta)(\zeta-z)} = \frac{\Omega(z)}{1-e^{-2\pi i\gamma}},$$

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\zeta d\zeta}{X(\zeta)(\zeta-\zeta_0)} = \frac{i e^{i\pi\gamma}}{\sin \pi\gamma} (\zeta_0^2 + B_0 \zeta_0 + B_1) - i \zeta_0 X_0^{-1}(\zeta_0) \operatorname{ctg} \pi\gamma.$$

Положив $\gamma=0,5$, $L=(-1,1)$, получим с учетом (1.160)

$$\begin{aligned} B_0 &= 0, B_1 = -\frac{1}{2}, \quad g_\infty(z) = z^2 - \frac{1}{2}, \quad X^{-1}(z) = \sqrt{z^2 - 1}, \quad \Omega(z) = z X^{-1}(z) - g_\infty(z), \\ I(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{x \sqrt{x^2 - 1}}{x - z} dx = \frac{1}{2} \Omega(z), \\ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{x \sqrt{1-x^2}}{x - x_0} dx &= -x_0^2 + \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (1.164)$$

Рассмотрим теперь интеграл (1.156) в том случае, когда

$$X(z) = (z-a)^\gamma (z-b)^{1-\gamma}, \quad \gamma = \alpha + i\beta, \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Рассуждения остаются прежними за исключением выражения для главной части функции $f(z)X^{-1}(z)$, которую вычисляем с учетом разложения в окрестности бесконечно удаленной точки

$$X^{-1}(z) = \frac{1}{z} + \frac{b_0}{z^2} + \frac{b_1}{z^3} + \dots,$$

где

$$b_0 = \gamma(a-b) + b, \quad b_1 = \frac{1}{2} (\gamma(\gamma+1)a^2 + 2\gamma(1-\gamma)ab + (1-\gamma)(2-\gamma)b^2), \dots$$

Так, если $f(z)=1$, то $g_\infty(z)=0$, и мы получаем

$$\Omega(z) = X^{-1}(z) = \frac{1}{(z-a)^\gamma (z-b)^{1-\gamma}},$$

$$I(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{d\zeta}{X(\zeta)(\zeta-z)} = \frac{\Omega(z)}{(1-e^{2\pi i\gamma})},$$

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{d\zeta}{X(\zeta)(\zeta-\zeta_0)} = \frac{\Omega^+(\zeta_0) + \Omega^-(\zeta_0)}{1-e^{2\pi i\gamma}} = \frac{1+e^{2\pi i\gamma}}{1-e^{2\pi i\gamma}} X^{-1}(\zeta_0) = -i X^{-1}(\zeta_0) \operatorname{ctg} \pi\gamma. \quad (1.165)$$

Аналогично, если $f(z)=z$, то главная часть функции $z X^{-1}(z)$ в бесконечности $g_\infty(z)=1$, и далее имеем

$$\Omega(z) = z X^{-1}(z) - 1,$$

$$I(z) = \frac{\Omega(z)}{1-e^{2\pi i\gamma}},$$

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\zeta d\zeta}{X(\zeta)(\zeta - \zeta_0)} = -i \frac{e^{-\pi i \gamma}}{\sin \pi \gamma} + i \zeta_0 X^{-1}(\zeta_0) \operatorname{ctg} \pi \gamma. \quad (1.166)$$

При $f(z) = z^2$ главная часть $g_\infty(z) = z + b_0$ и, стало быть,

$$\begin{aligned} \Omega(z) &= z^2 X^{-1}(z) - g_\infty(z), \\ \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\zeta^2 d\zeta}{X(\zeta)(\zeta - z)} &= \frac{z^2 X^{-1}(z) - g_\infty(z)}{1 - e^{2\pi i \gamma}}, \\ \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\zeta^2 d\zeta}{X(\zeta)(\zeta - \zeta_0)} &= i \zeta_0^2 X^{-1}(\zeta_0) \operatorname{ctg} \pi \gamma - i \frac{e^{-\pi i \gamma}}{\sin \pi \gamma} g_\infty(\zeta_0). \end{aligned} \quad (1.167)$$

В частном случае при $\gamma = 0,5$ и $L = [-1, 1]$ получаем

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}(x-z)} &= -\frac{\pi}{\sqrt{z^2-1}}, \quad \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}(x-x_0)} = 0, \\ \int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}(x-z)} &= \pi \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2-1}}\right), \quad \int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}(x-x_0)} = \pi, \\ \int_{-1}^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}(x-z)} &= \pi \left(z - \frac{z^2}{\sqrt{z^2-1}}\right), \quad \int_{-1}^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}(x-x_0)} = \pi x_0. \end{aligned} \quad (1.168)$$

Вычисление сингулярных интегралов типа (1.168) с помощью многочленов Чебышева. Многочлены Чебышева первого и второго рода обладают рядом замечательных свойств и определяются соответственно следующими выражениями [6, 15, 23]:

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \cos(n \arccos x), \\ U_n(x) &= \frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sin(\arccos x)}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (1.169)$$

Приведем несколько первых многочленов $T_n(x)$ и $U_n(x)$

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1, \quad T_3(x) = 4x^3 - 3x, \dots$$

$$U_0(x) = 1, \quad U_1(x) = 2x, \quad U_2(x) = 4x^2 - 1, \quad U_3(x) = 8x^3 - 4x, \dots$$

Вообще, зная $T_0(x)$ и $T_1(x)$, можно определить все последующие многочлены $T_n(x)$ по рекуррентному соотношению

$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Аналогичное соотношение имеет место и для многочленов $U_n(x)$

$$U_{n+1}(x) - 2xU_n(x) + U_{n-1}(x) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Кроме этих равенств выпишем еще две рекуррентные формулы

$$T_n(x) = U_n(x) - xU_{n-1}(x),$$

$$(1-x^2)U_{n-1}(x) = xT_n(x) - T_{n+1}(x).$$

Многочлены Чебышева первого рода ортогональны с весом $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ на отрезке $[-1,1]$, а многочлены Чебышева второго рода ортогональны на этом отрезке с весом $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$. Имеют место соотношения [6]

$$\int_{-1}^1 T_n(x)T_m(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \pi, & m = n. \end{cases}$$

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} U_n(x)U_m(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \frac{\pi}{2}, & m = n. \end{cases}$$

Из спектральных свойств многочленов Чебышева следуют формулы для сингулярных интегралов с ядром Коши [6]

$$\begin{aligned} Vp \int_{-1}^1 \frac{T_n(x)dx}{\sqrt{1-x^2}(x-x_0)} &= \pi U_{n-1}(x_0), \quad -1 < x_0 < 1 \quad (n=1,2,\dots), \\ Vp \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x^2} U_{n-1}(x)dx}{x-x_0} &= -\pi T_n(x_0) \quad (n=1,2,\dots). \end{aligned} \quad (1.170)$$

Легко видеть, что формулы (1.163)–(1.168) для сингулярных интегралов дают те же результаты для соответствующих интегралов, что и соотношения (1.170).

В заключение выпишем значения часто встречающихся интегралов [11, 24, 30–32].

1. Пусть $L = [-a, b]$, $a > 0$, $b > 0$

$$\begin{aligned} X(z) &= \sqrt{(z+a)(z-b)}, \quad X^+(x) = X(x) = \sqrt{(x+a)(x-b)}, \\ \int_L \frac{X(x)dx}{(x-z)(x-z_0)} &= \pi i \left\{ \frac{X(z) - X(z_0)}{z - z_0} - 1 \right\}, \quad z, z_0 \in L, \\ \int_L \frac{dx}{X(x)} &= \pi, \\ \int_L \frac{dx}{X(x)(x-z_0)} &= \frac{\pi i}{X(z_0)}. \end{aligned}$$

2. Пусть $I = [-1, 1]$, $J_k(z)$ — функция Бесселя первого рода порядка k , $U_p(x)$ — многочлены Чебышева второго рода

$$\int_I \frac{\cos mx}{\sqrt{1-x^2}} dx = \pi J_0(m),$$

$$\int \frac{\cos mx}{i(x-x_0)\sqrt{1-x^2}} dx = 2\pi \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k J_{2k}(m) U_{2k-1}(x_0), \quad -1 < x_0 < 1,$$

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{i} U_{2k-1}(x) \sin mx dx = (-1)^{k+1} 2k\pi J_{2k}(m),$$

$$\int \frac{T_m(x)}{i\sqrt{1-x^2}} \ln(x_0-x) dx = \begin{cases} -\pi \ln 2, & m=0, \\ -\frac{\pi}{m} T_m(x_0), & m=1, 2, \dots \end{cases} \quad -1 < x_0 < 1,$$

$$\int \frac{x^{2n} T_{2m}(x)}{i\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0, & n < m, \\ \frac{\pi}{2^{2n}} C_{2n}^{n-m}, & n \geq m, \end{cases} \quad C_p^k = \frac{p!}{k!(p-k)!},$$

$$\int \frac{T_{2n}(x) \cos ax}{i\sqrt{1-x^2}} dx = (-1)^n \pi J_{2n}(a), \quad a > 0,$$

$$\int \frac{(y-x)^k T_{2m}(x)}{i\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0, & k < m, \\ \sum_{j=m}^k C_{2k}^{2j} C_{2j}^{j-m} \frac{\pi}{2^{2j}} x^{2(k-j)}, & k \geq m, \end{cases}$$

$$\sum_{j=m}^k C_{2k}^{2j} C_{2j}^{j-m} \frac{\pi}{2^{2j}} \int \frac{x^{2(k-j)} T_{2n}(x)}{i\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} \frac{\pi^2}{2^{2k}} \frac{[(2k!)^2]}{(k+m-n)!(k+n-m)!(k+n+m)!(k-m-n)!}, & k \geq m+n, \\ 0, & k < m+n, \end{cases}$$

$$\int (1+x)^s T_k(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi(2s)!}{2^s (s+k)! \Gamma(s-k+1)},$$

$$\int (1+x)^s U_k(x) \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi(k+1)(2s+1)!}{2^s (s+k+2)! \Gamma(s-k+1)} \quad (\Gamma(k) — \text{гамма-функция Эйлера}).$$

3. Пусть $L = [-a, b]$, $a \geq 0$, $b > 0$. Обозначим

$$X(x) = (x+a)^{-\lambda} (b-x)^{\lambda-1}, \quad X_1(z) = (z+a)^{-\lambda} (z-b)^{\lambda-1},$$

$$\lambda = \frac{\theta}{2\pi}, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{2\gamma}{1-\gamma^2}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi,$$

$$\int_L X(x) dx = \pi \frac{\sqrt{1+\gamma^2}}{\gamma},$$

$$\int_L \frac{X(x) dx}{x-z} = -\pi \frac{\sqrt{1+\gamma^2}}{\gamma} X_1(z),$$

$$Vp \int_a^a \frac{\sqrt{a^2-x^2} dx}{(x-z)(x-x_0)} = -\pi \left(\frac{\sqrt{z^2-a^2}}{x_0-z} + 1 \right), \quad -a < x_0 < a.$$

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ 1

1. Ахиезер Н. И. Элементы теории эллиптических функций / Н. И. Ахиезер. М.-Л.: Гостехиздат, 1948. 291 с.
2. Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции, функции Ламе и Матье / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. М.: Наука, 1967. 300 с.
3. Бицадзе А. В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка / А. В. Бицадзе. М.: Наука, 1966. 203 с.
4. Бицадзе А. В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного / А. В. Бицадзе. М.: Наука, 1984. 320 с.
5. Гахов Ф. Д. Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. М.: Физматгиз, 1977. 640 с.
6. Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. М.: Наука, 1971. 1108 с.
7. Григорюк Э. И. Об одном подходе к исследованию сингулярных полей напряжений в кусочно-однородной среде с ветвящимися разрезами / Э. И. Григорюк, М. Г. Грингауз, Л. А. Фильшинский // Докл. АН СССР. 1981. Т. 261, № 3. С. 567–570.
8. Григорюк Э. И. К решению двумерных задач теории упругости для областей с кусочно-гладкой границей / Э. И. Григорюк, М. Г. Грингауз, Л. А. Фильшинский // Докл. АН СССР. 1984. Т. 275, № 4. С. 831–834.
9. Григорюк Э. И. Перфорированные пластины и оболочки / Э. И. Григорюк, Л. А. Фильшинский. М.: Наука, 1970. 554 с.
10. Григорюк Э. И. Периодические кусочно-однородные упругие структуры / Э. И. Григорюк, Л. А. Фильшинский. М.: Наука, 1982. 290 с.
11. Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений / Г. А. Гринберг. М.: Гостехиздат, 1948. 727 с.
12. Гурвиц А. Теория функций / А. Гурвиц, Р. Курант. М.: Наука, 1968. 648 с.
13. Гурса Э. Курс математического анализа. Т. II. Теория аналитических функций. Дифференциальные уравнения / Э. Гурса. М.-Л.: ОНТИ, 1936. 563 с.
14. Гюнтер Н. М. Теория потенциала и ее применения к основным задачам математической физики / Н. М. Гюнтер. М.-Л.: Гостехиздат, 1953. 415 с.
15. Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы / Г. Б. Двайт. М.: Наука, 1973. 224 с.
16. Евграфов М. А. Аналитические функции: [учеб. пособие для вузов] / М. А. Евграфов. М.: Наука, 1965. 423 с.
17. Каландия А. И. Математические методы двумерной упругости / А. И. Каландия. М.: Наука, 1973. 303 с.
18. Канторович Л. В. Приближенные методы высшего анализа / Л. В. Канторович, В. И. Крылов. 5-е изд., испр. М.: Физматгиз, 1962. 708 с.
19. Коппенфельс В. Практика конформных отображений / В. Коппенфельс, Ф. Штальман; пер. с нем. К. М. Фишмана. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 406 с.
20. Крылов В. А. Приближенное вычисление интегралов / В. А. Крылов. 2-е изд. М.: Наука, 1967. 500 с.
21. Лаврентьев М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. М.: Наука, 1973. 736 с.
22. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций / А. И. Маркушевич. М.: Физматгиз, 1960.

23. Морс Ф. М. Методы теоретической физики: в 2-х т. / Ф. М. Морс, Г. Фешбах. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. Т. 1. 930 с.; 1960. Т. 2. 886 с.
24. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. М.: Наука, 1966. 707 с.
25. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения / Н. И. Мусхелишвили. М.: Наука, 1968. 512 с.
26. Натанзон В. Я. О напряжениях в растягиваемой пластинке, ослабленной одинаковыми отверстиями, расположенными в шахматном порядке / В. Я. Натанzon // Мат. сб. 1935. Т. 42, № 5. С. 616–636.
27. Никифоров А. Ф. Основы теории специальных функций / А. Ф. Никифоров, В. Б. Уваров. М.: Наука, 1974. 304 с.
28. Парсон В. З. Методы математической теории упругости / В. З. Парсон, П. И. Перлин. М.: Наука, 1968. 688 с.
29. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного / И. И. Привалов. М.: Наука, 1984. 432 с.
30. Прудников А. П. Интегралы и ряды. Элементарные функции / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. М.: Наука, 1981. 800 с.
31. Прудников А. П. Интегралы и ряды. Специальные функции / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. М.: Наука, 1983. 752 с.
32. Прудников А. П. Интегралы и ряды. Дополнительные главы / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. М.: Наука, 1986. 800 с.
33. Романовский П. И. Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа / П. И. Романовский. М.: Наука, 1980. 336 с.
34. Свешников А. Г. Теория функций комплексной переменной / А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов. М.: Наука, 1971. 1108 с.
35. Сидоров Ю. В. Лекции по теории функций комплексного переменного / Ю. В. Сидоров, М. В. Федорюк, М. И. Шабунин. М.: Наука, 1982. 488 с.
36. Сикорский Ю. С. Элементы теории эллиптических функций с приложениями к механике. М.–Л.: ОНТИ, 1936. 365 с.
37. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. III, ч. 2 / В. И. Смирнов. Л.–М.: ГИТТЛ, 1949. 672 с.
38. Стоилов С. Теория функций комплексного переменного. Т. 1 / С. Стоилов. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 364 с.
39. Стоилов С. Теория функций комплексного переменного. Т. 2 / С. Стоилов. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 416 с.
40. Уиттекер Е. Курс современного анализа: в 2 ч. Ч. II. Трансцендентные функции / Е. Уиттекер, Г. Ватсон. М.: ОНТИ, 1934. 468 с.
41. Форд Л. Р. Автоморфные функции / Л. Р. Форд. М.: ОНТИ, 1936. 340 с.
42. Чибркова Л. И. О краевой задаче Римана для автоморфных функций / Л. И. Чибркова // Учен. зап. Казан. ун-та. 1956. Т. 116, № 4. С. 59–109.
43. Эрмит Ш. Курс анализа / Ш. Эрмит. М.–Л.: ОНТИ, 1936. 383 с.
44. Шерман Д. И. Метод интегральных уравнений в плоских и пространственных задачах статической теории упругости / Д. И. Шерман // Труды Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике (27 янв. – 3 февр. 1960 г.): обзор. докл. М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1962. С. 405–467.
45. Koiter W. T. Some general theorems on doubly-periodic and quasi-periodic functions / W. E. Koiter // Proc. Konikl. Nederl. Akademie Wetenschappen, Amsterdam. 1959. Vol. 62, № 2. P. 120–128.

ГЛАВА 2

ГАРМОНИЧЕСКИЕ И МЕТАГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

2.1. Гармонические функции в R^2

Теория гармонических функций играет важную роль в математической физике, в гидродинамике, теории электричества, теплопроводности и т. д. Гармонические функции двух переменных тесно связаны с аналитическими функциями. По определению, гармонической в области D называется любая функция $u(x, y) \in C^2(D)$, удовлетворяющая в этой области уравнению Лапласа.

Поскольку произвольную гармоническую функцию можно определить как действительную (или мнимую) часть аналитической функции и обратно, по гармонической функции можно восстановить с точностью до аддитивной постоянной аналитическую функцию, то положив, например,

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(z), \quad (2.1)$$

получим

$$\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} u(x, y) = \operatorname{Re} [i^n f^{(k)}(z)], \quad k = m + n.$$

Следовательно, из определения (2.1) вытекает существование всех производных от гармонической функции в области голоморфности $f(z)$.

Задача Дирихле [12, 14, 24, 35, 41, 42, 45]. Пусть область D есть круг $|z| < R$ с границей $\Gamma: |z| = R$. Поставим следующую задачу. Найти функцию $u(x, y)$, гармоническую в D и принимающую на Γ заданные значения. По общепринятой терминологии ее называют задачей Дирихле для области D (в данном случае для круга). Формальная постановка такова:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in D, \quad (2.2)$$

$$u|_{\Gamma} = \Phi_*(\zeta), \quad \zeta = Re^{i\theta} \in \Gamma.$$

Относительно функции $\Phi_*(\zeta) = \Phi_*(Re^{i\theta}) = \Phi(\theta)$ будем предполагать, что она разлагается в равномерно и абсолютно сходящийся ряд Фурье вида

$$\Phi(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\theta}, \quad c_{-k} = \bar{c}_k, \quad (2.3)$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(\alpha) e^{-ik\alpha} d\alpha \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Для этого, очевидно, достаточно, чтобы $\Phi(2\pi) = \Phi(0)$ и для коэффициентов Фурье c_k имели место оценки ($\Phi'(\theta)$ — удовлетворяет условию Дирихле на $[0, 2\pi]$)

$$|c_k| < \frac{c}{k^2}, \quad c > 0.$$

Задача Дирихле для круга решается по стандартной схеме. Аналитическая внутри круга функция $f(z)$ представляется своим рядом Тейлора

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\frac{z}{R}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\frac{r}{R}\right)^k e^{ik\theta}, \quad z = r e^{i\theta}. \quad (2.4)$$

Подстановка ряда (2.4) в формулу (2.1) дает

$$u(x, y) = \operatorname{Re} a_0 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^k (a_k e^{ik\theta} + \bar{a}_k e^{-ik\theta}) = U(r, \theta).$$

Очевидно, для удовлетворения граничного условия в (2.2) необходимо и достаточно выполнения равенств

$$\operatorname{Re} a_0 = c_0, \quad a_k = 2c_k \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Следовательно, разложение гармонической в круге функции имеет вид

$$u(x, y) = c_0 + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(\frac{r}{R}\right)^k e^{ik\theta}. \quad (2.5)$$

Преобразуем формулу (2.5), для этого подставим туда выражения для коэффициентов Фурье c_k из (2.3) и поменяем местами операции суммирования и интегрирования. Это возможно в силу равномерной сходимости ряда (2.5) вплоть до границы. В результате получим

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(\alpha) \left\{ 1 + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^k e^{ik(\theta-\alpha)} \right\} d\alpha.$$

Выражение в фигурных скобках легко суммируется при $r < R$ на основании формулы для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^k e^{ik(\theta-\alpha)} = \frac{re^{i(\theta-\alpha)}}{R - re^{i(\theta-\alpha)}} = \frac{Rre^{i(\theta-\alpha)} - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha) + r^2}.$$

Окончательно получаем

$$u(x, y) = U(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(\alpha) \frac{(R^2 - r^2) d\alpha}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha) + r^2}. \quad (2.6)$$

Здесь $\Phi(\alpha)$ — граничное значение $U(r, \theta)$ на Γ , т. е. $\Phi(\alpha) = U(Re^{i\alpha})$.

Формула (2.6), дающая интегральное представление гармонической в круге функции через ее граничные значения, называется интегральной формулой Пуассона, а сам интеграл в правой части — интегралом Пуассона.

Аналогично решается внешняя задача Дирихле для круга. Отличие заключается лишь в том, что в данном случае аналитическая функция $f(z)$ представляется рядом Лорана (а не Тейлора)

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\frac{R}{z} \right)^k.$$

После очевидных преобразований приходим к формуле Пуассона, которая определяет функцию $u(x, y)$ — гармоническую в области $|z| > R$ — через ее граничные значения на контуре $|z| = R$

$$u(x, y) = U(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(\operatorname{Re}^{i\alpha}) \frac{(r^2 - R^2) d\alpha}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha) + r^2}.$$

К выводу формулы Пуассона можно подойти также исходя из интегральной формулы Коши для произвольной регулярной в круге D и непрерывной в замкнутом круге \bar{D} функции $f(z)$. Пусть $r < R$. Тогда

$$z = re^{i\theta} \in D, \quad z^* = \frac{R^2}{z} = \frac{R^2}{r} e^{i\theta} \notin \bar{D},$$

и мы имеем

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\alpha}) \frac{Re^{i\alpha} d\alpha}{Re^{i\alpha} - re^{i\theta}}, \\ 0 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z^*} d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\alpha}) \frac{re^{i\alpha} d\alpha}{re^{i\alpha} - Re^{i\theta}}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Вычитая одно равенство из другого, получаем после простых преобразований

$$f(re^{i\theta}) = u(re^{i\theta}) + iv(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\alpha}) \frac{(R^2 - r^2) d\alpha}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha) + r^2}.$$

Отделяя здесь действительную часть, приходим вновь к формуле Пуассона

$$U(r, \theta) = u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\alpha}) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha) + r^2} d\alpha. \tag{2.8}$$

Таким образом, произвольная гармоническая в круге $|z| < R$ и непрерывная в \bar{D} функция $u(re^{i\theta})$ представляется формулой (2.8).

Теоремы о среднем, принцип максимума [24, 41, 42]. Из (2.8), полагая $r = 0$, получаем теорему о среднем для гармонических функций

$$u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\alpha}) da,$$

т. е. значение гармонической функции в центре круга, в котором она гармонична, равно среднему арифметическому ее значений на границе Γ .

Аналогичная теорема о среднем для функции $f(z)$, аналитической в круге D и непрерывной в \bar{D} , немедленно следует из интегральной формулы Коши. Имеем

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{ia}) da,$$

Из теоремы о среднем для аналитических и гармонических функций вытекают соответствующие принципы максимума.

1. Модуль функции $f(z)$, регулярной в некоторой области D , не может достигать наибольшего значения внутри D , если только $f(z)$ отлична от постоянной. Модуль $f(z)$ не может достигать в этой области и наименьшего значения, если только $f(z)$ не равна постоянной и не обращается в ноль.

2. Функция, гармоническая внутри некоторой области D , не может достигать во внутренней точке этой области ни своего наибольшего, ни своего наименьшего значения, если только она отлична от тождественной постоянной.

Таким образом, наибольшие и наименьшие значения функция, гармоническая в области D и непрерывная в \bar{D} , принимает на границе области. Из сказанного следует, что утверждение «функция φ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\varphi=0$ в области D » равносильно двум условиям:

1) функция φ не достигает ни максимума, ни минимума внутри области D (принцип максимума);

2) значение φ в каждой точке области должно равняться среднему арифметическому из ее значений в соседних точках (теорема о среднем).

Принцип максимума имеет далеко идущие следствия в различных физических приложениях, например в теории упругости. Рассмотрим неограниченную плоскую упругую среду, ослабленную отверстием, ограниченным гладким простым контуром Γ . Пусть отверстие свободно от сил, а на бесконечности имеет место однородное поле нормальных и сдвигающих напряжений. Сумма нормальных напряжений в произвольной внутренней точке M есть инвариант тензора напряжения. Поэтому справедливо равенство (рис. 2.1)

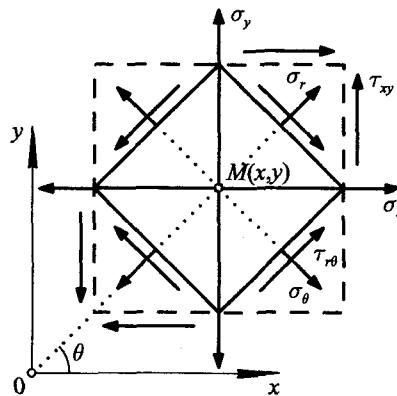
$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_r + \sigma_\theta = 4 \operatorname{Re} \Phi(z),$$

где $\Phi(z)$ — голоморфная в области, занятой средой, непрерывная вплоть до контура Γ функция.

В силу принципа максимума для гармонических функций величина $\sigma_r + \sigma_\theta$ достигает своего максимума на Γ . Учитывая то, что контур отверстия свободен от сил, т. е.

$$\sigma_r|_{\Gamma} = 0,$$

приходим к выводу, что $\max \sigma_\theta$ достигается на контуре отверстия. С этим фактом связано явление, называемое концентрацией напряжений в телах с отверстиями [31, 33].

Рис. 2.1. Бесконечно малые элементы в точке M

Формула Шварца [12, 24, 30]. Вернемся теперь к соотношениям (2.7). Складывая их почленно, запишем

$$f(z) = f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\alpha}) \left\{ \frac{Re^{i\alpha}}{Re^{i\alpha} - re^{i\theta}} + \frac{re^{i\alpha}}{re^{i\alpha} - Re^{i\theta}} \right\} d\alpha = u(re^{i\theta}) + iv(re^{i\theta}).$$

Отделяя здесь мнимые части в обеих частях равенства и учитывая соотношения

$$\frac{Re^{i\alpha}}{Re^{i\alpha} - re^{i\theta}} + \frac{re^{i\alpha}}{re^{i\alpha} - Re^{i\theta}} = \frac{R^2 - 2Rre^{i(\alpha-\theta)} + r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\alpha-\theta) + r^2} = 1 - \frac{2Rr \sin(\alpha-\theta)}{R^2 - 2Rr \cos(\alpha-\theta) + r^2},$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(Re^{i\alpha}) d\alpha = v(0),$$

получим выражение мнимой части функции $f(z)$, аналитической в круге, через граничные значения ее действительной части

$$v(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\alpha}) \frac{2Rr \sin(\theta-\alpha)}{R^2 - 2Rr \cos(\alpha-\theta) + r^2} d\alpha + v(0). \quad (2.9)$$

Наконец, комбинируя формулы (2.8) и (2.9) для действительной и мнимой частей аналитической в круге функции, выводим

$$f(re^{i\theta}) = u(re^{i\theta}) + iv(re^{i\theta}) = iv(0) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\alpha}) \frac{Re^{i\alpha} + re^{i\theta}}{Re^{i\alpha} - re^{i\theta}} d\alpha.$$

Возвращаясь к прежним обозначениям $z = re^{i\theta}$, $\zeta = Re^{i\alpha}$, приходим к формуле Шварца, дающей интегральное представление аналитической в круге функции $f(z)$ через значения ее действительной части на границе Γ

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} u(\zeta) \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \cdot \frac{d\zeta}{\zeta} + iv(0).$$

Аналогично получаем вторую формулу Шварца

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} v(\zeta) \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \cdot \frac{d\zeta}{\zeta} + \operatorname{Re} f(0),$$

где $v(\zeta)$ — граничное значение $\operatorname{Im} f(z)$ на Γ .

Заметим, что если в формулах (2.8) и (2.9) вместо $u(re^{i\alpha})$ взять какую-либо непрерывную функцию $w(\alpha)$, то получим гармонические в круге $|z| < R$ функции

$$\begin{aligned} u_*(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w(\alpha) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\alpha - \theta) + r^2} d\alpha, \\ v_*(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w(\alpha) \frac{2Rr \sin(\theta - \alpha)}{R^2 - 2Rr \cos(\alpha - \theta) + r^2} d\alpha, \end{aligned} \quad (2.10)$$

причем при $r \rightarrow R, \theta \rightarrow \alpha$ предельным значением u_* на Γ оказывается функция $w(\alpha)$.

Следовательно, формула (2.10) дает решение задачи Дирихле: определить гармоническую в круге функцию по условию $u|_{\Gamma} = w(\theta)$. Единственность решения следует из принципа максимума для гармонических функций. В самом деле, предположив, что имеется два решения u_1 и u_2 , мы обнаружим, что гармоническая в круге D функция $u = u_1 - u_2$ на границе равна нулю. Стало быть, $u \equiv 0$ в D , откуда следует, что $u_1 \equiv u_2$.

Интегральные представления [3, 5, 9, 18]. Для некруговой области D , ограниченной кусочно-гладким замкнутым контуром Γ , при решении граничной задачи Дирихле обычно исходят из интегрального представления гармонических функций, вытекающего из формулы Грина. Напомним ее.

Пусть $P(x, y), Q(x, y) \in C^1(D)$, тогда

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Gamma} (Ql - Pm) ds,$$

где l, m — проекции орта внешней нормали к контуру Γ на оси x и y соответственно. Положив здесь

$$P(x, y) = -U \frac{\partial V}{\partial y}, \quad Q(x, y) = U \frac{\partial V}{\partial x}, \quad U, V \in C^2(D),$$

приходим к так называемой предварительной (первой) формуле Грина

$$\iint_D \left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} \right) dx dy + \iint_D U \Delta V dx dy = \int_{\Gamma} U \frac{\partial V}{\partial n} ds. \quad (2.11)$$

Далее меняем в (2.11) U и V местами и вычитаем одно равенство из другого. В результате приходим ко второй формуле Грина

$$\iint_D (U \Delta V - V \Delta U) dx dy = \int_{\Gamma} \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds. \quad (2.12)$$

Эта формула справедлива и для многосвязной области D , необходимо только под Γ понимать полную границу области D , обходимую таким образом, чтобы область оставалась слева.

Если в формуле (2.12) считать $V = 1$, а $U \in C^2(D)$ — произвольной, то получим

$$\iint_D \Delta U dx dy = \int_{\Gamma} \frac{\partial U}{\partial n} ds. \quad (2.13)$$

С физической точки зрения соотношение (2.13) выражает закон сохранения в стационарном поле: то, что производится в области, выносится через ее границу. Например, в стационарном тепловом поле (без источников) в области D , заполненной однородной изотропной средой с коэффициентом теплопроводности $k = \text{const}$, производится в единицу времени количество тепла, равное

$$\iint_D \operatorname{div} \vec{q} ds,$$

где вектор теплового потока \vec{q} определяется соотношениями ($T = T(x, y)$ — температура)

$$\vec{q} = (q_1, q_2),$$

$$q_1 = -k \frac{\partial T}{\partial x}, \quad q_2 = -k \frac{\partial T}{\partial y}.$$

В этой интерпретации формула (2.13) выглядит так

$$\iint_D -k \Delta T dx dy = \int_{\Gamma} -k \frac{\partial T}{\partial n} ds,$$

т. е. количество тепла, производимое в единицу времени в области, равно тепловому потоку через ее границу.

Если $U = U(x, y)$ — гармоническая в области D функция, то из (2.13) получаем

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial U}{\partial n} ds = 0. \quad (2.14)$$

Обратно, если имеет место равенство (2.14) для произвольной области $D_* \subset D$, то $\Delta U = 0$, т. е. U — гармоническая функция в D .

Положим теперь в формуле (2.12)

$$V = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}, \quad r = |\zeta - z|, \quad \zeta \in \Gamma, \quad z \in D.$$

Если U — гармоническая в D функция, то в результате стандартных операций получаем

$$U(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial U}{\partial n} \ln \frac{1}{r} - U(\zeta) \frac{\partial}{\partial n_{\zeta}} \ln \frac{1}{r} \right\} ds. \quad (2.15)$$

Эта формула аналогична интегральной формуле Коши в теории аналитических функций. Для решения граничных задач она неудобна, так как невозможно задать граничные значения гармонической функции и ее нормальной производной.

Если иметь в виду решение задачи Дирихле, то желательно освободиться от первого слагаемого под интегралом в формуле (2.15). Идея здесь такова. Функция $\ln \frac{1}{r}$ удовлетворяет уравнению Лапласа в области D_ε (D с выброшенным кружком $|\zeta - z| < \varepsilon$). В этой области гармонической является функция

$$\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\zeta - z|} + g(\zeta, z) = G(\zeta, z),$$

где $g(\zeta, z)$ гармонична в D при любом z по переменной ζ .

Тогда, полагая в формуле (2.12) соответствующей области $D_\varepsilon : V = G(\zeta, z)$, приходим в результате предельного перехода $\varepsilon \rightarrow +0$ к видоизмененному представлению (2.15)

$$U(x, y) = \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial U}{\partial n} G(\zeta, z) - U(\zeta) \frac{\partial}{\partial n_\zeta} G(\zeta, z) \right\} ds.$$

Остается только подобрать регулярную гармоническую функцию $g(\zeta, z)$ из условия

$$G(\zeta, z) \Big|_{\Gamma} = 0, \quad \forall z \in D,$$

т. е. рассмотреть соответствующую задачу Дирихле, которая для ограниченной области D с достаточно гладкой границей Γ однозначно разрешима.

Функция $G(z, z_0)$, гармоническая в области D с выколотой точкой z_0 и равная нулю на контуре Γ , называется функцией Грина относительно полюса z_0 . В окрестности полюса она имеет представление

$$G(z, z_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|z - z_0|} + g(z, z_0).$$

Таким образом, решение задачи Дирихле в области D (если оно существует) определяется формулой

$$U(x, y) = - \int_{\Gamma} U(\zeta) \frac{\partial}{\partial n_\zeta} G(\zeta, z) ds.$$

Задача об определении функции Грина для области D и конформном отображении этой области на единичный круг равносильны. Точнее, если D — односвязная область, ограниченная простой кусочно-гладкой кривой Γ , а $f(z, z_0) = w$ — функция, конформно отображающая эту область на единичный круг $|w| < 1$, причем

$$f(z_0, z_0) = 0, \quad f'(z, z_0) \neq 0, \quad (2.16)$$

то функция Грина области D определяется равенством

$$G(z, z_0) = \ln \frac{1}{|f(z, z_0)|}.$$

Здесь $z_0 \in D$ — произвольная точка, а конформное отображение $f(z, z_0)$ условиями (2.16) определяется однозначно (теорема Римана [24]).

В самом деле, на Γ функция $f(z, z_0) = e^{i\alpha}$, т. е. $|f(z, z_0)| = 1$ и, значит,

$$G(z, z_0)|_{\Gamma} = 0, \quad \forall z_0 \in D.$$

Далее, так как

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z, z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z, z_0) - f(z_0, z_0)}{z - z_0} = f'(z_0, z_0) \neq 0,$$

то функция

$$F(z) = \frac{f(z, z_0)}{z - z_0}$$

аналитична и отлична от нуля в области D .

Следовательно, функция

$$U(x, y) = \ln \left| \frac{f(z, z_0)}{z - z_0} \right| = U(z) \quad (2.17)$$

гармонична в D . На границе области значения гармонической функции $U(z)$ не зависят от функции $f(z, z_0)$, поэтому

$$U(\zeta) = \ln \frac{1}{|\zeta - z_0|}, \quad \zeta \in \Gamma.$$

Пусть теперь $f(z, z_0)$ неизвестна. Тогда по заданным на Γ значениям можно определить гармоническую функцию $U(z)$, решив соответствующую задачу Дирихле. Затем по $U(z)$ восстанавливаем сопряженную гармоническую функцию $V(z)$ с точностью до постоянного слагаемого α . Таким образом, определяем в силу (2.17)

$$F(z) = \ln \frac{f(z, z_0)}{z - z_0} = U(z) + iV(z) + i\alpha.$$

Отсюда находим

$$f(z, z_0) = e^{i\alpha} (z - z_0) e^{U(z) + iV(z)}.$$

Задача Неймана [39, 40, 43]. Некоторые физические задачи, такие как задача о стационарном тепловом поле в пластинке при заданном на ее контуре тепловом потоке, электростатическом поле при заданном на границе потоке электрической индукции, обтекании профиля плоскопараллельным потоком идеальной несжимаемой жидкости, сводятся к так называемой задаче Неймана для гармонической функции. К этой же задаче мы при-

ходим при рассмотрении задач теории упругости об антиплоской деформации, кручении цилиндрического стержня и т. п. [31, 33].

Формальная постановка задачи Неймана такова. Необходимо найти гармоническую в области D функцию $V(x, y)$ по граничному условию

$$\left. \frac{\partial V}{\partial n} \right|_{\Gamma} = \Phi(\zeta), \quad \zeta = \zeta(s) \in \Gamma. \quad (2.18)$$

Заданная функция $\Phi(\zeta)$ предполагается непрерывной или даже кусочно-непрерывной с конечным числом точек разрыва первого рода на Γ .

Очевидно, из гармоничности функции V в области необходимо следует условие (2.14), т. е.

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial V}{\partial n} ds = \int_{\Gamma} \Phi(\zeta) ds = 0. \quad (2.19)$$

Решение задачи Неймана, как это следует из (2.18), (2.19), определяется с точностью до аддитивной постоянной.

Задачу Неймана для круга, как внутреннюю, так и внешнюю, можно решить методом рядов, подобно тому как это делалось при рассмотрении задачи Дирихле. Поскольку коэффициент a_0 в представлении (2.4) для аналитической функции $f(z)$ граничным условием (2.18) не определяется, получаем решение внутренней задачи с точностью до произвольной аддитивной постоянной в виде интеграла Дини

$$u(x, y) = U(r, \theta) = \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(Re^{i\alpha}) \ln \left\{ 1 + \frac{r^2}{R^2} - 2 \frac{r}{R} \cos(\theta - \alpha) \right\} d\alpha + \text{const.}$$

Задачу Неймана можно свести к задаче Дирихле для сопряженной гармонической функции U следующим образом. Запишем еще раз систему уравнений Коши–Римана

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial U}{\partial x}.$$

Умножив первое уравнение на $l = \cos \psi$, второе уравнение на $m = \sin \psi$, где ψ — угол, составленный нормалью к некоторой площадке в точке $z \in D$ и осью $0x$, и сложив их, представим эту систему в виде

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\partial U}{\partial s}.$$

Теперь граничная задача (2.18) сводится к задаче Дирихле для сопряженной гармонической функции U

$$\left. \frac{\partial U}{\partial s} \right|_{\Gamma} = \Phi(\zeta) \Leftrightarrow U|_{\Gamma} = \int_{\zeta_0}^{\zeta} \Phi(\zeta) ds + U(\zeta_0).$$

После решения этой задачи Дирихле сопряженная к ней гармоническая функция V определяется по формуле (с точностью до аддитивной постоянной)

$$V(z) = \int_{z_0}^z dV + V(z_0) = \int_{z_0}^z \frac{\partial U}{\partial y} dx - \frac{\partial U}{\partial x} dy + V(z_0).$$

В теории гармонических функций рассматривается также смешанная задача. Найти гармоническую в области D функцию по условиям на границе Γ

$$U|_{\Gamma_1} = \varphi_1(\zeta), \quad (2.20)$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial n} \right|_{\Gamma_2} = \varphi_2(\zeta), \quad \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \quad \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset,$$

где $\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)$ — заданные непрерывные функции.

Единственность решения граничной задачи (2.20) при условии его существования следует из энергетического равенства (2.11). В самом деле, предположив, что существует два решения U_1 и U_2 , получим для функции $U = U_1 - U_2$ однородную задачу (2.20), откуда

$$\int_{\Gamma} U \frac{\partial U}{\partial n} ds = \int_{\Gamma_1} O \frac{\partial U}{\partial n} ds + \int_{\Gamma_2} U O ds = 0.$$

Следовательно, в силу (2.11) $U(x, y) = \text{const}$ в D , а так как $U = 0$ на Γ , то

$$U = 0 \Rightarrow U_1 \equiv U_2 \text{ в } D.$$

Аналогично доказывается теорема единственности для задачи Неймана: любые два решения задачи Неймана (2.18) отличаются лишь на константу.

Оператор Лапласа инвариантен относительно конформного преобразования, что дает возможность строить функции Грина в разнообразных ортогональных координатных системах. Действительно, если функция $w = u + iv = f(z)$ осуществляет конформное преобразование области D на единичный круг, $u(x, y)$ — гармонична в D и $z = \varphi(w)$, то имеем цепочку равенств

$$\begin{aligned} u(x, y) = \operatorname{Re} A(z) = \operatorname{Re} A[\varphi(w)] = \operatorname{Re} B(w) \Rightarrow \Delta u = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \operatorname{Re} A(z) = 0 = 4 \operatorname{Re} \left[\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} B(w) \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow 4 \operatorname{Re} \left[\frac{\partial^2 B(w)}{\partial w \partial \bar{w}} \cdot \frac{dw}{dz} \cdot \frac{d\bar{w}}{d\bar{z}} \right] = |f'(z)|^2 \cdot 4 \frac{\partial^2}{\partial w \partial \bar{w}} \operatorname{Re} B(w). \end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$\Delta u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u = |f'(z)|^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) U(u, v) = 0, \quad |f'(z)| > 0.$$

Принцип Дирихле [12, 14]. Вернемся к формуле (2.11). Если $U = V$ — гармоническая функция, то получаем «энергетическое» соотношение

$$\iint_D \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy = \int_{\Gamma} U \frac{\partial U}{\partial n} ds. \quad (2.21)$$

В левой части равенства (2.21) стоит количество, пропорциональное энергии гармонического поля, в правой — величина, пропорциональная работе действующих на границе области сил внешнего поля.

Пусть Ω — произвольная область с границей Γ , $F(x, y) \in C^1(\bar{\Omega})$. Интеграл

$$D_\Omega(F) = \iint_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \quad (2.22)$$

называется интегралом Дирихле. Область Ω может быть и неограниченной. Тогда интеграл (2.22) будет несобственным и под $D_\Omega(F)$ понимается верхняя грань интегралов по любой конечной замкнутой области, лежащей в Ω .

Соотношение (2.21) наталкивает на мысль, что минимальное значение интеграл (2.22) принимает именно на гармонической функции. Точнее, имеет место следующий принцип Дирихле.

Пусть $\bar{\Omega}$ — замкнутая жорданова область, ограниченная простой замкнутой кривой Γ , $f(\zeta)$ — непрерывная функция на Γ и $\{F\}$ — множество функций $F(x, y)$, непрерывных в $\bar{\Omega}$, непрерывно дифференцируемых в Ω и принимающих на Γ значения $f(\zeta)$. Тогда гармоническая функция $U(x, y)$ из множества $\{F\}$, которая существует и определена однозначно (как решение соответствующей задачи Дирихле), придает интегралу Дирихле (2.22) минимальное значение. Среди всех функций из множества $\{F\}$ с конечным интегралом Дирихле функция $U(x, y)$ является единственной, для которой $D_\Omega(F)$ принимает минимальное значение.

Итак,

$$D_\Omega(U) \leq D_\Omega(F), \quad \forall F \in \{F\}.$$

Обратно, если в $\{F\}$ существуют функции, для которых интеграл Дирихле в области Ω конечен, и существует функция $V(x, y) \in \{F\}$, для которой этот интеграл минимален, то $V(x, y)$ — гармоническая функция. Она дает решение задачи Дирихле с заданной граничной функцией $f(\zeta)$.

С точки зрения вариационного исчисления условием стационарности функционала (2.22) является уравнение Лапласа (уравнение Эйлера для данного функционала). Следовательно, именно на гармонической функции с закрепленными концами (т. е. удовлетворяющей на Γ условию задачи Дирихле) вариация функционала (2.22) равна нулю. Принцип Дирихле утверждает, что при этом функционал принимает минимальное значение из всех возможных своих значений.

В качестве примера рассмотрим бесциркуляционное течение жидкости в области Ω . Известно, что течение, невозмущенное источниками и стоками, выбирает такой режим, при котором кинетическая энергия всей массы жидкости в Ω будет минимальной, т. е. интеграл

$$\iint_{\Omega} m V^2 dx dy = m \iint_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy$$

на истинном течении со скоростями $V = (u, v)$ принимает наименьшее из всех своих возможных значений.

Функции Грина задачи Дирихле. Метод отражений [29, 30, 36, 42, 44, 47]. Пусть в точке z_0 плоскости комплексного переменного z имеется сосредоточенный источник (например стационарный тепловой источник интенсивности q). Тогда температуру в любой точке $z \neq z_0$ можно представить в виде

$$T(x, y) = \operatorname{Re} f(z, z_0), \quad f(z, z_0) = A \ln(z - z_0), \quad z_0 = x_0 + iy_0.$$

Постоянную A необходимо определить из условия однозначности температуры $T(x, y)$ и условия существования стационарного теплового поля: поток тепла (в единицу времени) через произвольный замкнутый контур C , охватывающий точку z_0 , должен быть равен интенсивности источника q . Первое условие дает

$$[\operatorname{Re} f(z)]_C = \operatorname{Re}(A \cdot 2\pi i) = 0 \Rightarrow \operatorname{Im} A = 0,$$

где $[\cdot]_C$ обозначает приращение соответствующей величины при полном обходе контура C . Далее вычислим тепловой поток через контур C . Имеем (k — коэффициент теплопроводности)

$$q = \int_C -k \frac{\partial T}{\partial n} ds = -k \int_C \operatorname{Re}\{e^{iy} f'(z, z_0)\} ds = -k \operatorname{Re} \int_C f'(z, z_0) \frac{dz}{i} = -k [\operatorname{Im} f(z, z_0)]_C = -2\pi A k.$$

Отсюда

$$A = -\frac{q}{2\pi k}, \quad f(z, z_0) = -\frac{q}{2\pi k} \ln(z - z_0), \quad T(x, y) = -\frac{q}{2\pi k} \ln|z - z_0|. \quad (2.23)$$

Уравнение теплопроводности для данной ситуации имеет вид

$$\Delta T = -\frac{q}{k} \delta(x - x_0, y - y_0), \quad (2.24)$$

где $\delta(x, y)$ — так называемая дельта-функция Дирака (см. гл. 4), а $q\delta(x - x_0, y - y_0)$ — пространственное распределение, создаваемое тепловым источником q , сосредоточенным в точке $z_0 = x_0 + iy_0$.

Фундаментальным решением уравнения Лапласа называется (обобщенная) функция $E(x, y; x_0, y_0)$, удовлетворяющая следующему уравнению Пуассона

$$\Delta E = \delta(x - x_0, y - y_0). \quad (2.25)$$

Из соотношений (2.23)–(2.25) вытекает

$$E(x, y; x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \ln r = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r},$$

где

$$r = |z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Относительно обобщенных функций поговорим подробнее в главе 4. Здесь и ниже мы показываем некоторые физические подходы к определению полей, создаваемых сосредоточенными «источниками». В явном виде не фигурирует дельта-функция, а используются физические соображения и элементарный комплексный анализ.

Рассмотрим теперь гармоническое поле в верхней полуплоскости $y > 0$, создаваемое сосредоточенным в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, $y_0 > 0$ источником интенсивности q (рис. 2.2). Потребуем, чтобы на границе $y = 0$ искомая функция, например температура $T(x, y)$, обращалась в ноль. Таким образом, приходим к следующей задаче. Найти функцию $T(x, y)$, гармоническую в верхней полуплоскости с выколотой точкой z_0 , обладающую в этой точке характеристической особенностью $A \ln|z - z_0|$ и обращающуюся в ноль на границе $y = 0$.

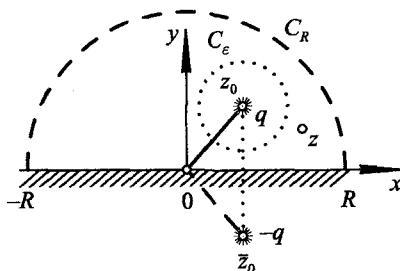


Рис. 2.2. Источник в точке z_0 и зеркально отраженный источник (сток) в точке \bar{z}_0

При решении этой задачи Дирихле для верхней полуплоскости применим метод отражений, который в данном случае заключается в учете фиктивного источника, приложенного в точке \bar{z}_0 . Полагаем (используя вновь модель стационарной теплопроводности)

$$T(x, y) = \operatorname{Re} f(z, z_0), \quad f(z, z_0) = A \{ \ln(z - z_0) + \varepsilon \ln(z - \bar{z}_0) \}, \quad (2.26)$$

где константа A определена в (2.23), а $\varepsilon = -1$.

В этом случае

$$T(x, y) = A \operatorname{Re} \left\{ \ln \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \right\} = A \ln \left| \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \right| = \frac{1}{2} A \ln \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2}. \quad (2.27)$$

Таким образом, решение представляется формулой (2.27). Согласно определению $T(x, y)$ совпадает с функцией Грина задачи Дирихле для полуплоскости:

$$T(x, y) = \frac{q}{k} G(x, y, x_0, y_0).$$

Положим теперь в формулах (2.26) $\varepsilon = +1$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial y} = \operatorname{Re} \{ i f'(z, z_0) \} &= -A \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{z - z_0} + \frac{1}{z - \bar{z}_0} \right\}, \\ \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} &= 0. \end{aligned}$$

Следовательно, функция

$$T(x, y) = A \operatorname{Re} \ln \{ (z - z_0)(z - \bar{z}_0) \} = A \ln |(z - z_0)(z - \bar{z}_0)| \quad (2.28)$$

дает решение задачи Неймана для верхней полуплоскости. Однако на бесконечности функция (2.28) возрастает как $2A \ln|z|$. Объясняется это тем, что для существования стационарного теплового поля от источника необходим теплоотвод через границу области, какой является прямолинейная граница полуплоскости и бесконечно удаленная точка. Прямолинейная граница термоизолирована, поэтому сток находится на бесконечности (ситуация аналогична наличию источника в плоскости). Таким образом, решения задачи Неймана, затухающего на бесконечности, не существует.

Это рассуждение можно обосновать следующим образом. Осуществим непрерывную деформацию контура C , содержащего внутри точку z_0 , в контур $\Gamma = (-R, R) \cup C_R$, где C_R — полуокружность радиуса R (рис. 2.2). Поскольку при любом $R > 0$ поток через $(-R, R)$ равен нулю, то при $R \rightarrow \infty$ (в бесконечно-удаленной точке) находится сток и, значит, в этой точке температура имеет логарифмическую особенность.

Покажем теперь, как метод отражений можно применить для построения фундаментальных решений в неограниченных составных телах, когда на границе раздела ставятся условия непрерывной продолжимости гармонического поля.

Рассмотрим кусочно-однородную среду, составленную из двух разнородных полуплоскостей, на общей прямолинейной линии раздела которых имеют место условия идеального теплового контакта, и пусть в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, $y_0 > 0$ действует тепловой источник интенсивности q (рис. 2.3). Пометим величины, относящиеся к верхней (нижней) полуплоскости индексом «1» («2»). Полная постановка задачи выглядит так. Дифференциальные уравнения.

$$\begin{aligned} \Delta T_1 &= 0, \quad x \neq x_0, \quad y \neq y_0, \quad y > 0, \\ \Delta T_2 &= 0, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad y < 0. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Условия сопряжения на оси x

$$\begin{aligned} T_1(x, 0) &= T_2(x, 0), \\ -k_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} \Big|_{y=0} &= -k_2 \frac{\partial T_2}{\partial y} \Big|_{y=0}. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Условие однозначности поля температур

$$\left[T_1(x, y) \right]_C = 0. \tag{2.31}$$

Условие существования стационарного теплового поля

$$q = \int_C -k_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} ds. \tag{2.32}$$

Для решения поставленной задачи воспользуемся так же, как и выше, представлениями гармонических функций через аналитические. Положим

$$\begin{aligned} T_1 &= T_1(x, y) = \operatorname{Re} f_1(z, z_0), \quad \operatorname{Im} z > 0, \\ T_2 &= T_2(x, y) = \operatorname{Re} f_2(z, z_0), \quad \operatorname{Im} z < 0, \end{aligned} \tag{2.33}$$

где под $f_1(z, z_0)$ понимаем функцию, аналитическую в верхней полуплоскости с выколотой точкой z_0 , под $f_2(z, z_0)$ — функцию аналитическую в нижней полуплоскости. Таким образом, дифференциальные уравнения (2.29) удовлетворяются. Далее, если бы сосредоточенный источник действовал в однородной среде, то решение имело бы вид (2.23). В нашем случае необходимо учесть взаимное влияние полей в компонентах составной среды. Модифицируем метод изображений для рассматриваемой ситуации следующим образом. Поместим в нижней полуплоскости зеркально отраженный (фиктивный) источник той же интенсивности и положим

$$\begin{aligned} f_1(z, z_0) &= A \ln(z - z_0) + A_1 \ln(z - \bar{z}_0), \quad \operatorname{Im} z > 0, \\ f_2(z, z_0) &= A_2 \ln(z - z_0), \quad \operatorname{Im} z < 0. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Здесь постоянная A определена в (2.23) и тем самым условия (2.31) и (2.32) выполняются. Постоянные A_1 и A_2 должны обеспечить выполнение условий сопряжения (2.30). Для упрощения дальнейших выкладок представим их в равносильной форме

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial T_1}{\partial x} \right|_{y=0} &= \left. \frac{\partial T_2}{\partial x} \right|_{y=0}, \\ \left. \frac{\partial T_1}{\partial y} \right|_{y=0} &= \gamma \left. \frac{\partial T_2}{\partial y} \right|_{y=0}, \quad \gamma = \frac{k_2}{k_1}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

С учетом представлений (2.33), (2.34) граничные равенства (2.35) можно записать так:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\frac{A}{x - z_0} + \frac{A_1}{x - \bar{z}_0} \right) &= \operatorname{Re} \frac{A_2}{x - z_0}, \\ \operatorname{Im} \left(\frac{A}{x - z_0} + \frac{A_1}{x - \bar{z}_0} \right) &= \gamma \operatorname{Im} \frac{A_2}{x - z_0}. \end{aligned}$$

Отсюда приходим к уравнениям

$$\begin{cases} A + \bar{A}_1 = A_2, \\ A - \bar{A}_1 = \gamma A_2 \end{cases} \Rightarrow A_2 = \frac{2A}{1+\gamma} = -\frac{q}{\pi k_1(1+\gamma)}, \quad A_1 = \frac{\bar{A}_2(1-\gamma)}{2} = -\frac{q(1-\gamma)}{2\pi k_1(1+\gamma)}.$$

Окончательно получаем решение

$$\begin{aligned} f_1(z, z_0) &= -\frac{q}{2\pi k_1} \left\{ \ln(z - z_0) + \frac{1-\gamma}{1+\gamma} \ln(z - \bar{z}_0) \right\}, \quad \operatorname{Im} z > 0, \\ f_2(z, z_0) &= -\frac{q}{\pi k_1(1+\gamma)} \ln(z - z_0), \quad \operatorname{Im} z < 0, \end{aligned}$$

$$T_1(x, y) = -\frac{q}{2\pi k_1} \left\{ \ln \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} + \frac{1-\gamma}{1+\gamma} \ln \sqrt{(x-x_0)^2 + (y+y_0)^2} \right\}, \quad y > 0,$$

$$T_2(x, y) = -\frac{q}{\pi k_1 (1+\gamma)} \ln \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}, \quad y < 0.$$

Очевидно, при $k_1 = k_2 (\gamma = 1)$ получаем отсюда решение для однородной среды.

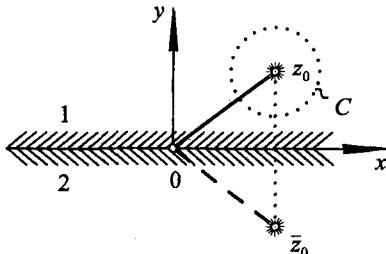


Рис. 2.3. К построению фундаментального решения в составной среде

Функцию Грина задачи Дирихле для полосы $0 \leq x \leq a, -\infty < y < \infty$ определяют с помощью метода отражений, стартуя с фундаментального решения для неограниченной среды.

$$E(x, y, x_0, 0) = \frac{1}{2\pi} \ln |z - x_0|.$$

Располагая источники (и стоки) так, как показано на рис. 2.4, и подсчитывая их вклад в функцию поля (например температуру) в точке наблюдения z , находим

$$G = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{\sin \frac{\pi}{2a} (z + x_0)}{\sin \frac{\pi}{2a} (z - x_0)} \right|.$$

Легко показывается, что на сторонах полосы iy и $a+iy, -\infty < y < \infty$ эта функция равна нулю и, кроме того, она обладает характеристической особенностью в точке x_0 , лежащей внутри полосы.

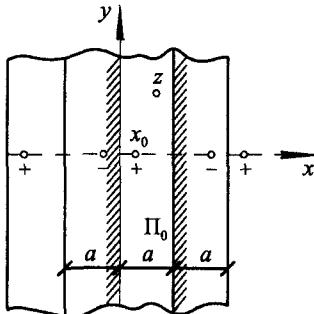


Рис. 2.4. Периодическая система источников в точках $x_0 + 2ma$ ($m = 0, \pm 1, \pm \dots$) и стоков в точках $-x_0 + 2na$ ($n = 0, \pm 1, \pm \dots$) оси x -в; Π_0 — основная полоса

Функция Грина задачи Дирихле для прямоугольника также определяется методом отражений. Распределим изображения источника, приложенного в точке z_0 основного прямоугольника двоякоперiodическим образом (рис. 2.5). Тогда функция Грина примет вид [29]

$$G = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \begin{array}{c|c} \operatorname{cn}(2kx_0/a) & \operatorname{cn}[k(z_0 - z)/a] \\ \hline \operatorname{sn}(2kx_0/a) & \operatorname{sn}[k(z_0 - z)/a] \\ \hline \operatorname{cn}(2Kx_0/a) & \operatorname{cn}[K(z_0 - z)/a] \\ \hline \operatorname{sn}(2Kx_0/a) & \operatorname{sn}[K(z_0 - z)/a] \end{array} \right|,$$

где эллиптические функции Якоби $\operatorname{sn} z$ и $\operatorname{cn} z$ (эс эн, цэ эн) определяются следующим образом [1, 4, 6, 10, 12, 16]. Это мероморфные двоякоперiodические функции второго порядка, имеющие в прямоугольнике периодов два простых полюса и два нуля и принимающие каждое свое значение в нем два раза. Периоды функции Якоби $w_1 = 4K$, $w_2 = 2iK'$, причем

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad K' = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}}, \quad (2.36)$$

$$k = \sin \alpha, \quad k' = \cos \alpha \quad (k^2 + k'^2 = 1).$$

Таким образом, $\operatorname{sn} z$ и $\operatorname{cn} z$ зависят не только от переменной z , но и от постоянной k (модуля функции $\operatorname{sn} z$, $\operatorname{cn} z$). Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, пишут иногда: $\operatorname{sn}(z, k)$, $\operatorname{cn}(z, k)$. Нули функции $\operatorname{sn}(z, k)$ расположены в точках $z = 2mK + 2niK'$, нули функции $\operatorname{cn}(z, k)$ — в точках $z = (2m+1)K + 2niK'$ (рис. 2.6). Соответственно, полюсы функций $\operatorname{sn}(z, k)$ и $\operatorname{cn}(z, k)$ находятся в точках $2mK + (2n+1)iK'$ ($m, n = 0 \pm 1, \pm 2, \pm \dots$).

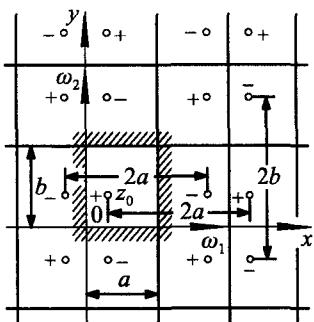


Рис. 2.5. Двоякоперiodическое распределение источников и стоков. Периоды: $\omega_1 = 2a$, $\omega_2 = 2ib$

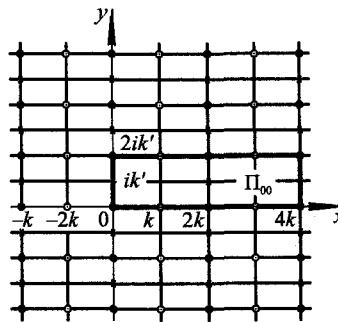


Рис. 2.6. Распределение нулей и полюсов функций $\operatorname{sn} z$ и $\operatorname{cn} z$; • — нули функции $\operatorname{sn} z$; ° — нули $\operatorname{cn} z$; * — полюсы этих функций. Жирной линией выделен контур основного прямоугольника периодов P_{00}

Формулы, выражающие функции Якоби через тета-функции и соответствующие формулы обращения эллиптических интегралов имеют вид

$$y = \operatorname{sn}(z, k) = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_4(v)}; \quad z = F(k, y) = \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \quad v = \frac{z}{2K}, \quad (2.37)$$

$$y = \operatorname{cn}(z, k) = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_4(v)}; \quad z = \int_y^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2+k^2t^2)}},$$

где функции $\vartheta_k(v) = \vartheta_k(v, h)$ определены в главе 1 (см. (1.114)), k и k' — модуль и дополнительный модуль функций $\operatorname{sn}(z, k)$, $\operatorname{cn}(z, k)$; $F(k, y)$ — эллиптический интеграл первого рода в форме Лежандра.

Отметим также полезные соотношения [29, 30]

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}^2(z, k) + \operatorname{cn}^2(z, k) &= 1, \\ \operatorname{cn}(0, k) &= 1, \quad \operatorname{sn}(0, k) = 0, \\ \operatorname{sn}(z+2K) &= -\operatorname{sn} z, \quad |\operatorname{sn} z| \leq 1, \\ \operatorname{sn} K &= 1, \quad \operatorname{sn}(K+iK') = \frac{1}{k}, \\ \operatorname{sn}(iK') &= \frac{1}{k}, \quad \sqrt{k} = \frac{\vartheta_2(0, h)}{\vartheta_3(0, h)}, \quad h = \exp(\pi i \tau) = \exp\left(-\frac{\pi K'}{K}\right). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Третья функция Якоби $\operatorname{dn}(z, k)$ определяется через $\operatorname{sn}(z, k)$ по формуле

$$\operatorname{dn}^2(z, k) = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2(z, k).$$

Если положить $k = 0$, ($K' = \infty$), то как видно из (2.37), эллиптический синус Якоби вырождается в тригонометрический синус, т. е.

$$\operatorname{sn}(z, 0) = \sin z.$$

Соответственно, из (2.38) следует

$$\operatorname{cn}(z, 0) = \cos z.$$

Эллиптические функции Якоби зависят от одного параметра — отношения K'/K . Это следует из выражений (2.37), (2.38). Величины K и K' не являются независимыми друг от друга. В самом деле, фиксируя K , определяем тем самым модуль k . По величине k находим дополнительный модуль k' , а затем и K' (см. формулы (2.36)).

Применительно к функции Грина для прямоугольника необходимо подобрать модуль k таким образом, чтобы

$$\frac{K'}{K} = \frac{b}{a}.$$

Это можно сделать, например, исходя из таблицы [29].

Таблица 2.1

Соотношения между параметрами эллиптических функций

	K/K'										
	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
K	1,571	1,571	1,571	1,571	1,573	1,583	1,604	1,643	1,699	1,768	1,854
K'	∞	15,71	7,855	5,237	3,933	3,166	2,673	2,347	2,124	1,966	1,854
k	0	0	0,00156	0,0213	0,0784	0,171	0,265	0,407	0,520	0,622	0,707

Функция Грина задачи Дирихле для первого квадранта. Пусть в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, $x_0 > 0$, $y_0 > 0$ расположен источник единичной интенсивности. Функция Грина задачи Дирихле для квадранта определяется так (рис. 2.7):

$$\Delta G(x, y; x_0, y_0) = -\delta(x - x_0, y - y_0),$$

$$G|_{OA} = G|_{OB} = 0.$$

Согласно общей схеме структура функции Грина такова:

$$G(x, y; x_0, y_0) = \operatorname{Re} f(z, z_0),$$

где

$$f(z, z_0) = -\frac{1}{2\pi} \left\{ \ln(z - z_0) + \varepsilon_1 \ln(z - \bar{z}_0) + \varepsilon_2 \ln(z + z_0) + \varepsilon_3 \ln(z + \bar{z}_0) \right\}, \quad (2.39)$$

$$\varepsilon_1 = -1, \quad \varepsilon_2 = 1, \quad \varepsilon_3 = -1.$$

В этом случае получаем

$$f(z, z_0) = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{(z - z_0)(z + z_0)}{(z - \bar{z}_0)(z + \bar{z}_0)}, \quad (2.40)$$

$$G(x, y; x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \ln \frac{z^2 - \bar{z}_0^2}{z^2 - z_0^2}.$$

Функция (2.40) обладает характеристической особенностью в точке z_0 и удовлетворяет однородным граничным условиям на лучах OA и OB .

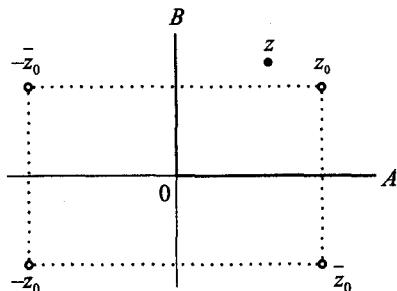


Рис. 2.7. К механизму метода отражения для квадранта. Лучи OA и OB — границы области

В самом деле, полагая $z = x$, $0 \leq x < \infty$, запишем

$$G(0, y; x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{x^2 - z_0^2}{x^2 - z_0^2} \right| = \frac{1}{2\pi} \ln 1 = 0.$$

Пусть теперь $z = iy$, $0 \leq y < \infty$. Тогда имеем

$$G(x, 0; x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{-y^2 - z_0^2}{-y^2 - z_0^2} \right| = \frac{1}{2\pi} \ln 1 = 0.$$

Заметим, что выбрав иные значения коэффициентов, фигурирующих в (2.39), мы найдем решения смешанных задач (функции Грина для смешанных граничных условий). Например, при $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -1$ получим решение следующей граничной задачи:

$$\Delta G = -\delta(x - x_0, y - y_0),$$

$$G|_{0B} = 0, \frac{\partial G}{\partial y}|_{0A} = 0.$$

Действительно, пусть

$$f(z, z_0) = -\frac{1}{2\pi} \{ \ln(z - z_0) + \ln(z - \bar{z}_0) - \ln(z + z_0) - \ln(z + \bar{z}_0) \}.$$

Тогда

$$f'(z, z_0) = \frac{d}{dz} f(z, z_0) = -\frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{z - z_0} + \frac{1}{z - \bar{z}_0} - \frac{1}{z + z_0} - \frac{1}{z + \bar{z}_0} \right\},$$

$$G(x, y; x_0, y_0) = -\frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{(z - z_0)(z - \bar{z}_0)}{(z + z_0)(z + \bar{z}_0)} \right|,$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \operatorname{Re}\{if'(z, z_0)\} = -\operatorname{Im}\{f'(z, z_0)\}.$$

Имеем на луче OA

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{x - z_0} + \frac{1}{x - \bar{z}_0} - \frac{1}{x + z_0} - \frac{1}{x + \bar{z}_0} \right\} = 0.$$

На луче OB

$$G(x, 0; x_0, y_0) = -\frac{1}{2\pi} \left\{ \ln \frac{|iy - z_0|}{|-iy - \bar{z}_0|} + \ln \frac{|iy - \bar{z}_0|}{|-iy - z_0|} \right\} = 0.$$

Функция Грина для круга. Рассмотрим область $D : |z| < R$, и пусть в точке $z_0 \in D$ имеется сосредоточенный источник единичной интенсивности. Через z_0^* обозначим точку, симметричную точке z относительно окружности $|z| = R$ (рис. 2.8). Согласно определению инверсии относительно окружности

$$z_0^* = \frac{R^2}{\bar{z}_0} = \frac{R^2}{r_0} e^{i\alpha}, \quad z_0 = r_0 e^{i\alpha}.$$

Будем разыскивать функцию Грина в виде

$$G = \operatorname{Re} f(z, z_0),$$

$$f(z, z_0) = -\frac{1}{2\pi} \left\{ \ln(z - z_0) - \ln(z - z_0^*) + A(z_0) \right\},$$

где $A(z_0)$ подлежит определению из граничного условия

$$G|_{|z|=R} = 0. \quad (2.41)$$

Имеем после простых выкладок

$$G(x, y; x_0, y_0) = -\frac{1}{2\pi} \left\{ \ln \left| \frac{z - z_0}{z - z_0^*} \right| + \operatorname{Re} A \right\} = -\frac{1}{4\pi} \ln \frac{|z|^2 - 2|z||z_0| \cos(\alpha - \theta) + |z_0|^2}{|z|^2 - 2R^2} \frac{|z|}{|z_0|} \cos(\alpha - \theta) + \frac{R^4}{|z_0|^2} - \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} A.$$

При $z = Re^{i\theta}$ получим в силу (2.41)

$$G = -\frac{1}{4\pi} \ln \frac{(R^2 - 2Rr_0 \cos(\alpha - \theta) + r_0^2)}{(r_0^2 - 2Rr_0 \cos(\alpha - \theta) + R^2)} \frac{r_0^2}{R^2} - \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} A = 0.$$

Отсюда

$$\operatorname{Re} A = \ln \frac{R}{r_0}.$$

Таким образом, функция Грина для круга такова:

$$G(x, y; x_0, y_0) = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{|(z - z_0)R|}{|(z - z_0^*)r_0|}, \quad z_0 \neq 0. \quad (2.42)$$

Если же источник расположен в нуле, то

$$G(x, y; 0, 0) = -\frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z}{R} \right|.$$

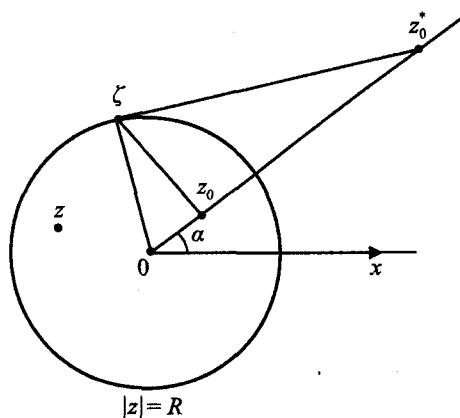


Рис. 2.8. К построению функции Грина для круга $|z| < R$

Пусть теперь необходимо решить задачу Дирихле для круга с границей Γ

$$\Delta u = 0,$$

$$u|_{\Gamma} = \varphi(\zeta), \quad \zeta = Re^{i\theta}.$$

Для того чтобы воспользоваться интегральным представлением решения, необходимо вычислить нормальную производную от функции Грина (2.42) на Γ . Имеем после преобразований, положив $z = \zeta = Re^{i\theta}$ и $z_0 = z = \rho e^{i\alpha}$,

$$\frac{\partial}{\partial n} G|_{\Gamma} = -\frac{1}{2\pi R} \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - 2R\rho \cos(\alpha - \theta) + \rho^2}.$$

Подставив это выражение в интегральное представление гармонической функции, вновь приходим к формуле Пуассона

$$u(\rho, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(Re^{i\theta}) \frac{(R^2 - \rho^2)d\theta}{R^2 - 2R\rho \cos(\alpha - \theta) + \rho^2}.$$

Таким образом, ядро интеграла Пуассона с точностью до множителя R совпадает с нормальной производной от функции Грина задачи Дирихле для круга.

Метод функций Грина дает механизм построения интегральных представлений решений как внутренних, так и внешних задач теории потенциала, а в тех (к сожалению) редких случаях, когда ее точное аналитическое выражение известно, — и само решение (по крайней мере в квадратурах).

В качестве примера рассмотрим задачу Дирихле для верхней полуплоскости

$$\Delta u = 0, \quad u(x, y), \quad -\infty < x < \infty, \quad y > 0$$

$$u|_{y=0} = \varphi(x), \quad \text{supp } \varphi \subset (a, b), \quad a < b,$$

причем предполагаем, что $\varphi(x)$ — ограниченная финитная функция. В данном случае согласно (2.23) и (2.27) функция Грина имеет вид ($x_0 = \xi, y_0 = \eta$)

$$G(x, y, x_0, y_0) = -\frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z - z_0}{z - z_0} \right| = -\frac{1}{4\pi} \left\{ \ln \left[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 \right] - \ln \left[(x - \xi)^2 + (y + \eta)^2 \right] \right\}.$$

Далее

$$\frac{\partial G}{\partial n} \Big|_{y=0} = -\frac{\partial G}{\partial \eta} \Big|_{y=0} = -\frac{1}{\pi} \frac{y}{(x - \xi)^2 + y^2}.$$

Решение поставленной задачи Дирихле для полуплоскости, следовательно, таково:

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \frac{yd\xi}{(x - \xi)^2 + y^2} = \frac{1}{\pi} \int_a^b \varphi(\xi) \frac{yd\xi}{(x - \xi)^2 + y^2}.$$

В частности, если $\varphi(x) = 1$ при $x \in (a, b)$ и $\varphi(x) = 0$ при $x \notin (a, b)$, получаем (рис. 2.9)

$$u(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{b-x}{y} - \operatorname{arctg} \frac{a-x}{y} = \varphi_1 + \varphi_2,$$

где

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg} \frac{b-x}{y}, \quad \varphi_2 = \operatorname{arctg} \frac{x-a}{y}.$$

Таким образом, искомая гармоническая функция в точке (x, y) равняется углу между отрезками, соединяющими эту точку с концами интервала (a, b) . В точках непрерывности $\varphi(x)$ — функция $u(x, y)$ непрерывно продолжается на ось x , где она совпадает с $\varphi(x)$.

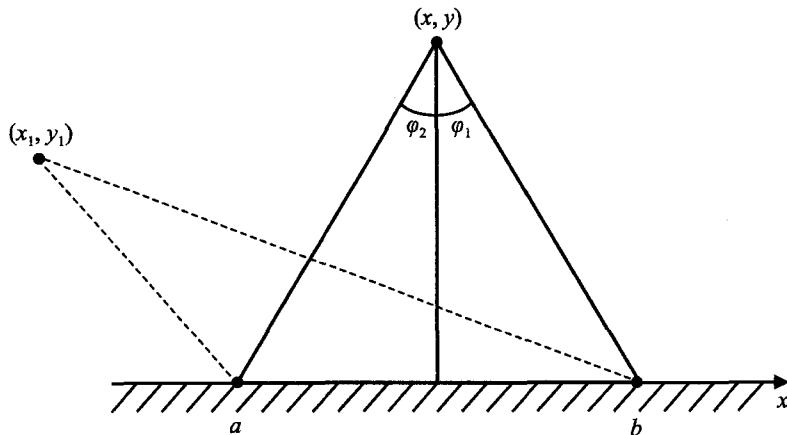


Рис. 2.9. К определению функции Грина для верхней полуплоскости

2.2. Гармонические функции в R^3

Теория гармонических функций на плоскости опирается на мощный и далеко продвинутый аппарат аналитических функций комплексной переменной. Для того чтобы читатель почувствовал это и при решении задач теории потенциала на плоскости использовал методы теории аналитических функций, мы выделили тему «гармонические функции в R^2 » в отдельный раздел.

Ниже рассмотрим граничные задачи теории потенциала в R^3 для дифференциальног о оператора [3, 9, 13, 14, 15, 18, 28, 35, 43]

$$L = \operatorname{div}(k \operatorname{grad}) - q.$$

Для удобства будем использовать индексные обозначения переменных: x_j ($j = 1, 2, 3$). Напомним некоторые векторные операции и обозначения.

Векторный оператор «набла»

$$\nabla = e_k \partial_k, \quad \partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k} \quad (k = 1, 2, 3),$$

где e_k — единичные орты координатных осей x_k , суммирование — по повторяющемуся индексу.

Градиент функции $u(x)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$

$$\operatorname{grad} u = \nabla u = e_k \partial_k u.$$

Дивергенция вектора $A = e_k A_k$

$$\operatorname{div} A = (\nabla, A) = \partial_k A_k,$$

где (\cdot, \cdot) — символ скалярного произведения.

Нам потребуется также равенство (аналог формулы Лейбница для производной от произведения)

$$\operatorname{div}(kv \operatorname{grad} u) = v \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + k(\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v). \quad (2.43)$$

Пусть $\Omega \in R^3$ — область, граница которой $\partial\Omega$ есть замкнутая достаточно гладкая поверхность. Границные условия для уравнения

$$L[u] = f(x), \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega \quad (2.44)$$

формулируются так.

Первая граничная задача (Дирихле)

$$u|_{\partial\Omega} = \varphi_1(\xi), \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \partial\Omega. \quad (2.45)$$

Вторая граничная задача (Неймана)

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = \varphi_2(\xi). \quad (2.46)$$

Третья граничная задача (смешанная)

$$\left. \left(\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha_2 u \right) \right|_{\partial\Omega} = \varphi_3(\xi). \quad (2.47)$$

В уравнениях (2.43)–(2.47) $k = k(x) \in C^1(\bar{\Omega})$; $f(x) \in C(\Omega)$; $\varphi_k(\xi) \in C^2(\partial\Omega)$; $\alpha_k(\xi) \in C(\partial\Omega)$ — известные функции. Разыскивается решение уравнения (2.44) в классе $C^2(\Omega)$, удовлетворяющее одному из трех перечисленных граничных условий.

Замечание. При рассмотрении внешних граничных задач для уравнения Лапласа $L[u] = \Delta u = 0$ необходимо потребовать, чтобы в случае двух переменных гармоническая функция $u(x, y)$ была ограниченной на бесконечности, а в случае трех переменных

$$R|u(x)| < C, \quad R \rightarrow \infty, \quad x = (x_1, x_2, x_3),$$

где R — расстояние от начала координат до точки x и C — постоянная.

Интегральные представления решений. Формулы Грина. Определим специальные решения (функции Грина, функции влияния, функции источника) первой, второй и третьей граничных задач для уравнения (2.44) так:

$$L[G_k] = -\delta(x - y), \quad x = (x_1, x_2, x_3), \quad y = (y_1, y_2, y_3) \in \Omega, \\ G_1|_{\partial\Omega} = 0, \quad \left. \frac{\partial G_2}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = 0, \quad \left. \left(\alpha_1 \frac{\partial G_3}{\partial n} + \alpha_2 G_3 \right) \right|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2.48)$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака.

Функция Грина G_2 внутренней задачи Неймана для оператора $L[u] = \Delta u$ в постановке (2.48) не существует. Приняв граничное условие в виде

$$\left. \frac{\partial G_2}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = \frac{1}{S_0},$$

где S_0 — площадь поверхности $\partial\Omega$, заключаем, что G_2 существует и определяется с точностью до аддитивной постоянной.

Пусть $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$. Тогда с использованием формулы Гаусса–Остроградского (n_k — направляющие косинусы внешней нормали в поверхности $\partial\Omega$)

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} A \, dx = \int_{\partial\Omega} (A, n) \, d\sigma \Leftrightarrow \int_{\Omega} \partial_k A_k \, dx = \int_{\partial\Omega} A_k n_k \, d\sigma \quad (k = 1, 2, 3)$$

и, используя соотношения (2.43), можно записать

$$\int_{\Omega} v L[u] \, dx = \int_{\partial\Omega} kv \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma - \int_{\Omega} (v \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} u) \, dx - \int_{\Omega} q u v \, dx. \quad (2.49)$$

Формула (2.49) имеет смысл при условии интегрируемости входящих в нее выражений. При $k \equiv 1$ и $q \equiv 1$ она совпадает с первой формулой Грина для оператора Лапласа в R^3 , а для двумерного случая с формулой Грина (2.11).

Положив в (2.49) $v = u$, получим

$$\int_{\Omega} u L[u] \, dx = \int_{\partial\Omega} ku \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma - \int_{\Omega} k |\operatorname{grad} u|^2 \, dx - \int_{\Omega} qu^2 \, dx.$$

Если u гармонична в Ω ($q \equiv 0$, $k \equiv 1$, $L[u] = \Delta u = 0$, $x \in \Omega$), то получаем из (2.49)

$$\int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma = \int_{\Omega} (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v) \, dx.$$

Учитывая структуру формулы (2.49), запишем вторую формулу Грина для оператора L

$$\int_{\Omega} (v L[u] - u L[v]) \, dx = \int_{\partial\Omega} k \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) \, d\sigma. \quad (2.50)$$

Для функций u, v — гармонических в Ω вторая формула Грина (2.50) дает

$$\int_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) \, d\sigma = 0.$$

Пусть теперь $u = u(x)$ — решение уравнения $L[u] = -f(x)$, а $v = G(x, y)$ — функция Грина, удовлетворяющая уравнению $L[G] = -\delta(y - x)$. Предварительно поменяв переменную интегрирования x на y , получим из (2.50) интегральное представление решения уравнения (2.44)

$$u(x) = - \int_{\Omega} G(x, y) f(y) \, dy - \int_{\partial\Omega} k \left(u \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial u}{\partial n} \right) \, d\sigma. \quad (2.51)$$

При выводе формулы (2.51) мы опирались на определение дельта-функции (см. гл. 4)

$$(\delta(x), \varphi(x)) = \varphi(0), \quad (\delta(x-y), \varphi(x)) = \varphi(y).$$

В случае первой основной задачи (2.45) представление (2.51) дает решение

$$u(x) = - \int_{\Omega} G_1(x, y) f(y) dy - \int_{\partial\Omega} k(\xi) \varphi_1(\xi) \frac{\partial G_1}{\partial n_\xi} d\sigma, \quad (2.52)$$

где G_1 — функция Грина первого рода.

Для второй основной задачи (2.46) получаем

$$u(x) = - \int_{\Omega} G_2(x, y) f(y) dy + \int_{\partial\Omega} k(\xi) G_2(x, \xi) \varphi_2(\xi) d\sigma, \quad (2.53)$$

где G_2 — функция Грина второго рода (функция Неймана).

В случае третьей основной задачи $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$. Из граничного условия (2.47) выражаем нормальные производные от функции через сами функции на границе. Имеем

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = \frac{1}{\alpha_1} \varphi_3(\xi) - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} u \Big|_{\partial\Omega}, \quad \left. \frac{\partial G}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} G \Big|_{\partial\Omega}.$$

С учетом этих соотношений формула (2.51) дает

$$u(x) = - \int_{\Omega} G_3(x, y) f(y) dy + \int_{\partial\Omega} \frac{k(\xi)}{\alpha_1(\xi)} G_3(x, \xi) \varphi_3(\xi) d\sigma.$$

Функции Грина $G_k(x, y)$ ($k = 1, 2, 3$) обладают свойством симметрии

$$G_k(x, y) = G_k(y, x), \quad \forall x, y \in \overline{\Omega}.$$

Для доказательства применим вторую формулу Грина (2.50) к функциям $G(x, y_1)$ и $G(x, y_2)$. Имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \{G(x, y_1) L[G(x, y_2)] - G(x, y_2) L[G(x, y_1)]\} dx = \\ & = \int_{\partial\Omega} k \left\{ G(\xi, y_1) \frac{\partial}{\partial n} G(\xi, y_2) - G(\xi, y_2) \frac{\partial}{\partial n} G(\xi, y_1) \right\} d\sigma. \end{aligned}$$

Так как

$$L[G(x, y_2)] = -\delta(x - y_2), \quad L[G(x, y_1)] = -\delta(x - y_1),$$

запишем

$$G(y_2, y_1) - G(y_1, y_2) = \int_{\partial\Omega} k \left\{ G(\xi, y_2) \frac{\partial}{\partial n} G(\xi, y_1) - G(\xi, y_1) \frac{\partial}{\partial n} G(\xi, y_2) \right\} d\sigma.$$

В случае задачи Дирихле $G(\xi, x) = 0, \forall x \in \partial\Omega$. Для задачи Неймана $\frac{\partial}{\partial n} G(\xi, x) = 0, \forall x \in \partial\Omega$.

Наконец, для третьей граничной задачи в (2.48), выражая нормальные производные через сами функции на границе, находим

$$G(\xi, y_1) \frac{\partial}{\partial n} G(\xi, y_2) - G(\xi, y_2) \frac{\partial}{\partial n} G(\xi, y_1) = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \{G(\xi, y_1) G(\xi, y_2) - G(\xi, y_2) G(\xi, y_1)\} \equiv 0.$$

В силу произвольности точек $y_1, y_2 \in \Omega$ получаем требуемый результат. Его называют принципом взаимности. В приложении к уравнению Лапласа $L[u] = \Delta u = 0$ в терминах

электростатики он звучит так: потенциал в точке x , порожденный зарядом сосредоточенным в точке y , равен потенциальному зарядом в точке x .

Отметим, что из существования решения задачи Неймана

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (2.54)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = \varphi_2(\xi), \quad \xi \in \partial\Omega$$

следует, что между входными данными f и φ_2 имеется связь. В самом деле, полагая в формуле (2.49) $v \equiv 1$, получим

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) dx = \int_{\partial\Omega} k \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma.$$

Учитывая равенства (2.54), находим отсюда

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \int_{\partial\Omega} k \varphi_2(\xi) d\sigma. \quad (2.55)$$

Соотношение (2.55) является необходимым условием разрешимости задачи Неймана (2.54). Если $f(x) \equiv 0$ в Ω , то приходим к условию

$$\int_{\partial\Omega} k \varphi_2(\xi) d\sigma = 0,$$

которое в двумерном случае и при $k=1$ совпадает с (2.19).

Так же как в R^2 , имеет место теорема о среднем для гармонических функций в R^n ($k \equiv 1, q = 0, x \in \Omega$).

Значение гармонической в шаре $\Omega = U_R$ функции $u(x) \in C^1(\overline{\Omega})$ в центре шара $x = 0$ равно среднему арифметическому ее значений на сфере $\partial\Omega = S_R$. При $n = 3$ имеем

$$u(0) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{S_R} u(\xi) d\sigma, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in S_R. \quad (2.56)$$

Из теоремы о среднем (2.56) вытекает принцип максимума (теорема о максимуме и минимуме).

Функция $u(x)$, гармоническая в конечной области $\Omega \subset R^n$ и непрерывная в $\overline{\Omega}$, достигает своего наибольшего и наименьшего значения на границе области. Отметим также, что гармоническую функцию можно дифференцировать любое число раз и все ее производные гармоничны. Для случая двух переменных этот факт отмечался ранее (см. п. 2.1).

Имеет место теорема Лиувилля. Функция, гармоническая во всем пространстве (на всей плоскости) и ограниченная сверху или снизу, есть постоянная.

Рассмотрим примеры.

1. Фундаментальное решение оператора Лапласа. Это обобщенная функция — решение уравнения

$$\Delta E = \delta(x),$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака.

На плоскости

$$E_2 = \frac{1}{2\pi} \ln|x|, \quad x = (x_1, x_2).$$

В пространстве

$$E_3 = -\frac{1}{4\pi|x|}, \quad x = (x_1, x_2, x_3),$$

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

Подробнее о фундаментальных решениях дифференциальных операторов см. в главе 4.

2. Функция Грина для шара U_R . Решение внутренней задачи Дирихле для шара.

Функция Грина для шара U_R с граничной сферой S_R однозначно определяется как решение внутренней задачи Дирихле

$$\Delta G_1 = -\delta(x - y), \quad x = (x_1, x_2, x_3), \quad y = (y_1, y_2, y_3) \in U_R,$$

$$G_1|_{S_R} = 0.$$

Точки $M_0(y_1, y_2, y_3)$ и $M^*(y_1^*, y_2^*, y_3^*)$ называются симметричными относительно сферы S_R с центром в точке C , если они лежат на одном луче, выходящем из центра сферы, и если $CM_0 \cdot CM^* = R^2$. Из подобия треугольников CMM_0 и CMM^* (рис. 2.10) следует, что если точка $M \in S_R$, то справедливы равенства

$$\frac{MM_0}{MM^*} = \frac{CM_0}{CR} = \frac{R}{CM^*}, \quad MM_0 = r = |x - y|, \quad CM_0 = \rho_0 = |y|, \quad CM^* = \rho_* = |x - y^*|.$$

С учетом этих обозначений функцию Грина можно представить в виде

$$G = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r} - \frac{R}{\rho_0 r^*} \right) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{|x - y|} - \frac{R}{|x - y^*||y|} \right).$$

Нормальная производная от функции G на S_R такова:

$$\frac{\partial G}{\partial n_y} \Big|_{S_R} = -\frac{1}{4\pi R} \frac{R^2 - |x|^2}{|x - y|^3} \Big|_{S_R}.$$

Подставляя это значение нормальной производной в формулу (2.52) при $f = 0$, получим

$$u(x) = \frac{1}{4\pi R} \int_{|y|=R} \varphi(y) \frac{R^2 - |x|^2}{|x - y|^3} dS_y, \quad |x| < R.$$

Формула Пуассона аналогична интегральной формуле Коши, она определяет значение гармонической в шаре функции u в любой внутренней точке $x \in U_R$ через ее граничные значения. Предполагается, что $\varphi(y) \in C(S_R)$.

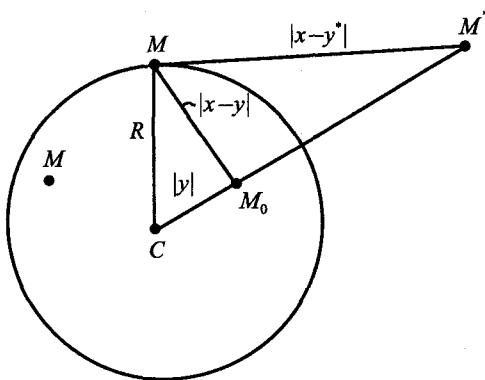


Рис. 2.10. К построению функции Грина внутренней задачи Дирихле для шара U_R

Решение внешней задачи Дирихле для шара U_R определяется интегралом

$$u(x) = \frac{1}{4\pi R} \int_{|y|=R} \varphi(y) \frac{|x^2| - R^2}{|x-y|^3} dS_y, \quad |x| > R.$$

3. Функция Грина для полупространства $x_3 > 0$. Пусть точка $y = (y_1, y_2, y_3)$ лежит в верхнем полупространстве, а точка $y^* = (y_1, y_2, -y_3)$, $y_3 > 0$ — симметрична с точкой y относительно плоскости $y_3 = 0$. Искомая функция Грина определяется формулой

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{|x-y^*|} \right\}.$$

Решение соответствующей задачи Дирихле для верхнего полупространства определяется формулой типа (2.52).

Имеем на плоскости $y_3 = 0$

$$\frac{\partial G}{\partial n_y} = -\frac{\partial G}{\partial y_3} = -\frac{1}{2\pi} \frac{x_3}{[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + x_3^2]^{3/2}},$$

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_S \varphi(y) \frac{x_3 dS_y}{|x-y_0|^{3/2}} = \frac{x_3}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int \varphi(y_1, y_2) \frac{dy_1 dy_2}{[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + x_3^2]^{3/2}},$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y_0 = (y_1, y_2, 0)$.

4. Функция Грина для слоя $0 \leq x_3 \leq h$. Располагая согласно схеме метода отражения источники так, как показано на рис. 2.11, находим

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{|x-y_n|} - \frac{1}{|x-y_n^*|} \right\},$$

где

$$y_n = (y_1, y_2, y_3 + 2nh), \quad y_n^* = (y_1, y_2, -y_3 + 2nh), \quad (n = 0, \pm 1, \pm \dots).$$

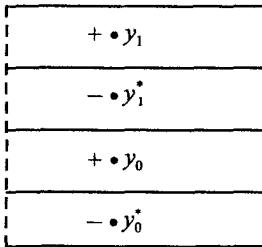


Рис. 2.11. Расположение основного и отраженных источников

2.3. Границные задачи для уравнения $\Delta u + cu = f$

Задачи стационарной диффузии газа при наличии распада молекул диффундирующего газа приводят к уравнению

$$\Delta u + cu = 0, \quad c \leq 0, \quad u = u(x), \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega. \quad (2.57)$$

При наличии цепных реакций, ведущих к размножению диффундирующих частиц, приходим в стационарном случае к уравнению (Гельмгольца)

$$\Delta u + cu = 0, \quad c > 0. \quad (2.58)$$

К уравнению (2.58) приходим также при рассмотрении установившихся колебаний с частотой ω . Для амплитуды таких колебаний $u(x, \omega)$ имеем уравнение Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad k = \frac{\omega}{a}, \quad a > 0.$$

Для уравнения (2.57) справедлив следующий принцип максимума: решения этого уравнения $u(x) \in C(\bar{\Omega})$ не могут иметь в Ω ни положительных наибольших значений, ни наименьших отрицательных значений.

Действительно, пусть в произвольной внутренней точке $M(x)$ функция $u(x)$ достигает положительного максимального значения $u(M) > 0$. Тогда в этой точке

$$\partial_i^2 u \leq 0 \quad (i=1, 2, 3)$$

и, следовательно, $\Delta u < 0$. Но это противоречит равенствам $u(M) > 0, c < 0$. Аналогичные рассуждения имеют место для второй части принципа максимума. Из принципа максимума следует единственность решения первой граничной задачи для уравнения (2.57).

Если решение первой граничной задачи

$$\Delta u + cu = 0, \quad c \leq 0, \quad u = u(x), \quad x \in \Omega,$$

$$u|_{\partial\Omega} = \varphi(\xi), \quad \xi \in \partial\Omega,$$

$u(x) \in C(\bar{\Omega})$ существует, то оно единственное.

Для уравнения (2.58) единственность имеет место, если c не совпадает ни с одним из собственных значений оператора $L = \Delta + c$ (не принадлежит спектру оператора).

Функции Грина (функции влияния) для оператора $L = \Delta + c$ [1, 40, 35]. Рассмотрим сначала случай двух независимых переменных ($n = 2$). При $c = k^2 > 0$ уравнение (2.58) имеет два фундаментальных решения.

$$E = \frac{1}{4i} H_0^{(1)}(kr), \quad E^* = -\frac{1}{4i} H_0^{(2)}(kr), \quad r = |x - y|, \quad k > 0, \quad (2.59)$$

где $H_0^{(1)}(r), H_0^{(2)}(r)$ — соответственно функции Ханкеля первого и второго рода нулевого порядка, $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ — точка наблюдения и точка приложения источника. Обобщенные функции $E(x, y), E^*(x, y)$ — решения неоднородного уравнения Гельмгольца

$$(\Delta + k^2)E = \delta(x - y), \quad \Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2,$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция. Что это так, будет показано в главе 4. А сейчас выясним характер особенности фундаментальных решений в точке $r = 0$. В окрестности нуля функции Ханкеля $H_0^{(1)}(kr)$ и $H_0^{(2)}(kr)$ имеют представления (см. п. 2.4)

$$H_0^{(1)}(kr) = -\frac{2i}{\pi} \ln \frac{1}{r} + O(1),$$

$$H_0^{(2)}(kr) = \frac{2i}{\pi} \ln \frac{1}{r} + O(1).$$

Следовательно, в силу (2.59) находим

$$E = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} + \text{регулярный член} = E_0 + \dots,$$

$$E^* = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} + \text{регулярный член} = E_0 + \dots,$$

где E_0 — фундаментальное решение оператора Лапласа в R^2 .

В окрестности бесконечно удаленной точки ($r \rightarrow \infty$) поведение функций Ханкеля определяется асимптотическими формулами (см. п. 2.4)

$$H_\nu^{(1)}(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi k r}} e^{i(kr - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4})} \left[1 + O\left(\frac{1}{r}\right) \right],$$

$$H_\nu^{(2)}(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi k r}} e^{-i(kr - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4})} \left[1 + O\left(\frac{1}{r}\right) \right].$$

Отсюда следует, что если при рассмотрении стационарного волнового процесса (установившихся колебаний) в R^2 временную зависимость брать в виде $e^{-i\omega t}$ (ω — круговая частота, t — время), то вдали от источника выражение $e^{-i\omega t} H_0^{(1)}(kr)$ дает расходящуюся (от источника) цилиндрическую волну

$$f(r)e^{-i\omega t + ikr} = f(r)e^{-ik(r-at)},$$

где $f(r) = O(r^{-1/2})$.

Соответственно, функция $e^{-i\alpha x} H_0^{(2)}(kr)$ определяет расходящуюся (из бесконечности) цилиндрическую волну. Следовательно, при таком выборе временной зависимости необходимо использовать первое фундаментальное решение (2.59).

В случае трех измерений фундаментальные решения оператора Гельмгольца суть обобщенные функции, удовлетворяющие уравнению

$$(\Delta + k^2)E = \delta(x), \quad \Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2, \quad x = (x_1, x_2, x_3).$$

Они имеют вид (см. гл. 4)

$$E(x) = -\frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}, \quad E^*(x) = -\frac{e^{-ik|x|}}{4\pi|x|} = \bar{E}(x), \quad k > 0, \quad (2.60)$$

$$|x| = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}.$$

При выборе временного множителя $e^{-i\alpha x}$ для получения расходящейся сферической волны на бесконечности необходимо брать первое фундаментальное решение $E(x)$. Второе фундаментальное решение физического смысла в этом случае не имеет.

Выпишем еще фундаментальные решения оператора Гельмгольца в R^3 . Они являются решениями уравнения

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + k^2 \right) E = \delta(x), \quad k > 0 \quad (2.61)$$

и имеют вид (см. гл. 4)

$$E(x) = \frac{e^{ik|x|}}{2ik}, \quad E^*(x) = -\frac{e^{-ik|x|}}{2ik} = \bar{E}(x), \quad k > 0. \quad (2.62)$$

Отметим соотношения для одномерного фундаментального решения

$$[E(x)]_0 = E(+0) - E(-0) = \frac{1}{k} \sin kx \Big|_{x=0} = 0,$$

$$[E'(x)]_0 = \cos kx \Big|_{x=0} = 1.$$

К последнему результату приходим так же интегрируя уравнение (2.61). Имеем

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{d^2}{dx^2} E dx + k^2 \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} E dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x) dx = (\delta(x), 1) = 1, \quad \varepsilon > 0.$$

Отсюда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E'(x) \Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = 1.$$

Фундаментальные решения оператора $L = \Delta - k^2$ определяются как обобщенные функции — решения уравнения

$$(\Delta - k^2)E = \delta(x). \quad (2.63)$$

В пространстве R^3

$$E = -\frac{e^{-k|x|}}{4\pi|x|}, \quad x = (x_1, x_2, x_3). \quad (2.64)$$

в R^2

$$E = -\frac{1}{2\pi} K_0(k|x|), \quad (2.65)$$

где $K_0(r)$ — цилиндрическая функция Макдональда нулевого порядка (см. п. 2.4). Наконец, в R^1 фундаментальное решение оператора

$$L = \frac{d^2}{dx^2} - k^2$$

имеет вид

$$E(x) = \frac{e^{-k|x|}}{2k}.$$

Интегральные представления решений [3, 22, 23]. Для операторов $L = \Delta \pm k^2$ справедлива вторая формула Грина (2.50)

$$\int_{\Omega} (vL[u] - uL[v]) dx = \int_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) d\sigma,$$

где под Ω понимается ограниченная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Если $L[u] = f(x)$, а $v = G_k(x, y)$ — функции Грина задачи Дирихле или Неймана

$$\begin{aligned} L[G_k] &= -\delta(x-y) \quad (k=1,2), \\ G_1|_{\partial\Omega} &= 0, \quad \frac{\partial}{\partial n} G_2|_{\partial\Omega} = 0, \end{aligned} \quad (2.66)$$

то приходим в силу (2.51) к интегральному представлению решения этих задач

$$u_k(x) = - \int_{\Omega} G_k(x, y) f(y) dy - \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial G_k}{\partial n_y} - G_k \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma_y \quad (k=1,2),$$

причем в силу граничных условий (2.66) для функций Грина первой и второй основных задач (2.45), (2.46) интегральные представления будут иметь соответственно вид (2.52), (2.53).

Сравнивая определения функций Грина (2.66) с определением фундаментальных решений в пространстве R^n ($n=1, 2, 3$) и учитывая формулы (2.59), (2.60), (2.63)–(2.65), заключаем: для оператора $L = \Delta + k^2$ в пространстве R^3

$$G_m = \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} + v_m(x, y) \quad (m=1,2),$$

где v_m — регулярные решения уравнения $L[v_m] = 0$ в Ω , причем

$$\left. \left(v_1(x, y) + \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \right) \right|_{y \in \partial\Omega} = 0, \quad \left. \frac{\partial}{\partial n} \left(v_2(x, y) + \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \right) \right|_{y \in \partial\Omega} = 0, \quad x \in \Omega.$$

На плоскости

$$G_m(x, y) = -\frac{1}{4i} H_0^{(1)}(k|x-y|) + v_m(x, y) \quad (m=1, 2), \quad x=(x_1, x_2), \quad y=(y_1, y_2),$$

где v_m — регулярные решения уравнения $L[v_m] = 0$, удовлетворяющие соответствующим граничным условиям

$$\left. \left(v_1(x, y) - \frac{1}{4i} H_0^{(1)}(k|x-y|) \right) \right|_{y \in \partial\Omega} = 0,$$

$$\left. \left(v_2(x, y) - \frac{1}{4i} H_0^{(1)}(k|x-y|) \right) \right|_{y \in \partial\Omega} = 0, \quad x \in \Omega.$$

Для оператора $L = \Delta - k^2$ имеем:
при $n=3$

$$G_m(x, y) = \frac{e^{-k|x-y|}}{4\pi|x-y|} + v_m(x, y) \quad (m=1, 2), \quad x=(x_1, x_2, x_3), \quad y=(y_1, y_2, y_3),$$

при $n=2$

$$G_m(x, y) = \frac{1}{2\pi} K_0(k|x-y|) + v_m(x, y) \quad (m=1, 2), \quad x=(x_1, x_2), \quad y=(y_1, y_2),$$

где $v_m(x, y)$ — регулярные решения уравнения $(\Delta - k^2)v_m = 0$, удовлетворяющие соответствующим граничным условиям первой или второй граничной задачи.

Условия на бесконечности для неограниченной области [3, 5]. Для уравнения $(\Delta - k^2)u = -f(x)$, где $f(x)$ — финитная функция, $k > 0$, имеет место следующая теорема единственности: это уравнение не может иметь более одного решения, исчезающего на бесконечности.

С физической точки зрения вывод очевиден, так как если в ограниченной области распределены источники вещества, то концентрация его (в процессе диффузии) стремится к нулю по мере удаления от этой области.

Рассмотрим теперь уравнение Гельмгольца $(\Delta + k^2)u = -f(x)$ в пространстве (т. е. в области, содержащей бесконечно удаленную точку). Здесь возникает проблема выбора решения, ибо есть два фундаментальных решения и оба на бесконечности стремятся к нулю. В самом деле, положив в формуле Грина (2.50)

$$L(u) = (\Delta + k^2)u = -f(x), \quad L[v] = \delta(x-y),$$

получим, например, для $n=3$

$$u(x) = \int_{\Omega_0} f(y) \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} dy + \int_{\partial\Omega} \left\{ \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \right) u(y) \right\} d\sigma_y. \quad (2.67)$$

Здесь предполагается, что $f(x)$ — финитная функция, $\text{supp } f \subset \Omega_0$, $\partial\Omega$ — граница области Ω^- , внешней к ограниченной области $\Omega \in R^3$ ($\Omega^- = R^3 \setminus \overline{\Omega}$).

Условия излучения [5, 9, 15, 18, 21, 22, 26, 33, 35, 42]. Из физических соображений ясно, что из двух выражений (2.67) нужно выбрать то, которое дает расходящуюся волну на бесконечности.

Чтобы выделить класс единственности решения для уравнения Гельмгольца в неограниченных областях, являющихся внешностью ограниченных областей, нужно потребовать дополнительные ограничения на поведение решения на бесконечности. Такими ограничениями являются условия излучения Зоммерфельда.

В пространственном случае ($n = 3$) они выглядят так:

$$u(x) = O(|x|^{-1}), \quad \frac{\partial u(x)}{\partial |x|} - iku(x) = o(|x|^{-1}), \quad |x| \rightarrow \infty \quad (2.68)$$

или

$$u(x) = O(|x|^{-1}), \quad \frac{\partial u(x)}{\partial |x|} + iku(x) = o(|x|^{-1}), \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (2.69)$$

Условия (2.68) соответствуют расходящимся сферическим волнам (при временном множителе $e^{-i\omega t}$), условия (2.69) — сходящимся волнам (приходящим из бесконечности). В двумерном пространстве соответствующие условия излучения имеют вид

$$u = O\left(|x|^{\frac{1}{2}}\right), \quad \frac{\partial u(x)}{\partial |x|} - iku(x) = o\left(|x|^{\frac{1}{2}}\right) \quad (2.70)$$

или

$$u = O\left(|x|^{\frac{1}{2}}\right), \quad \frac{\partial u(x)}{\partial |x|} + iku(x) = o\left(|x|^{\frac{1}{2}}\right). \quad (2.71)$$

В зависимости от того, какой временной множитель $e^{-i\omega t}$ или $e^{i\omega t}$ используется. В первом случае условия (2.70) или (2.71) относятся соответственно к расходящимся или сходящимся цилиндрическим волнам на бесконечности. Во втором случае — наоборот.

Покажем, что элементарные решения уравнения Гельмгольца подчиняются условиям излучения. В одномерном случае функции

$$u = f\left(t - \frac{x}{a}\right), \quad u^* = f\left(t + \frac{x}{a}\right)$$

определяют соответственно прямую и обратную бегущие волны, которые являются решениями дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u^*}{\partial x} - \frac{1}{a} \frac{\partial u^*}{\partial t} = 0.$$

Для установившегося режима

$$u(x, t) = v(x) e^{-i\omega t}, \quad u^*(x, t) = v^*(x) e^{i\omega t}$$

эти уравнения дают

$$l[v] = \frac{\partial v}{\partial x} - ikv = 0, \quad l_1[v^*] = \frac{\partial v^*}{\partial x} + ikv^* = 0, \quad k = \frac{\omega}{a}.$$

Первое соотношение записано для прямой волны (идущей на бесконечность ($x \rightarrow +\infty$)), второе — для обратной волны.

Перейдем теперь к сферической волне. В случае точечного источника в начале координат прямая волна имеет вид

$$u(r, t) = \frac{e^{-i(\omega t - kr)}}{4\pi r} = v(r)e^{-i\omega t}.$$

Отсюда

$$l[v] = \frac{\partial v}{\partial r} - ikv = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{ikr}}{4\pi r} \right) - ik \frac{e^{ikr}}{4\pi r} = -\frac{e^{ikr}}{4\pi r^2} = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow \infty.$$

Если источник расположен не в начале координат, а в некоторой точке M_0 (рис. 2.12), то амплитуда сферической волны равна

$$v(M) = \frac{e^{ikR}}{4\pi R},$$

где R — расстояние между точками M и M_0 равно

$$R = \sqrt{r^2 + \rho_0^2 - 2r\rho_0 \cos \theta} = |x - y|.$$

Имеем при больших r

$$R = r \left(1 + O\left(\frac{1}{r}\right) \right),$$

$$\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{r - \rho_0 \cos \theta}{R} = \frac{1 - \frac{\rho_0}{r} \cos \theta}{\sqrt{1 - 2\frac{\rho_0}{r} \cos \theta + \frac{\rho_0^2}{r^2}}} = 1 + O\left(\frac{1}{r}\right),$$

$$l[v] = \frac{\partial v}{\partial r} - ikv = \frac{\partial v}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial r} - ikv = o\left(\frac{1}{r}\right).$$

Таким образом, выполняются условия излучения (2.68). Наконец, если источники расположены в некоторой ограниченной области Ω_0 пространства R^3 , то для волнового уравнения относительно амплитуды v

$$(\Delta + k^2)v = -f(x) \tag{2.72}$$

имеем представление (2.67).

Применим теперь формулу (2.67) к шару U_R с границей S_R достаточно большого радиуса (с центром в начале координат). Имеем

$$v(x) = \int_{\Omega_0} f(y) \frac{e^{ikr}}{4\pi r} dy - \int_{S_R} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{ikr}}{4\pi r} \right) v(y) - \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \frac{\partial v}{\partial r} \right\} dS_y, \quad r = |x - y|. \tag{2.73}$$

Для подынтегрального выражения Q в поверхностном интеграле, получаем на основании соотношения (2.68) при $R \rightarrow \infty$

$$Q = \left(o\left(\frac{1}{r}\right) + ikE \right) O\left(\frac{1}{r}\right) - E\left(ikO\left(\frac{1}{r}\right) + o\left(\frac{1}{r}\right) \right) = o\left(\frac{1}{r}\right) O\left(\frac{1}{r}\right) - o\left(\frac{1}{r}\right) O\left(\frac{1}{r}\right) = o\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

Следовательно, при $R \rightarrow \infty$ поверхностный интеграл исчезает.

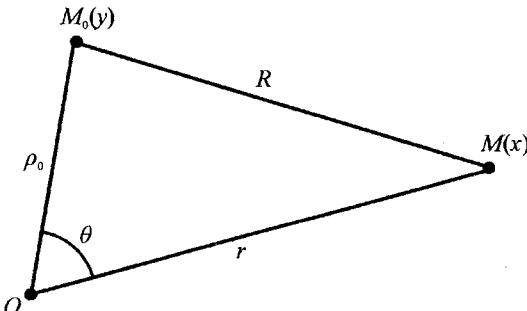


Рис. 2.12. К описанию сферической волны на большом расстоянии от источника, расположенного в точке M_0 ; M — точка наблюдения

Таким образом, условия излучения выделяют единственное решение неоднородного уравнения Гельмгольца (2.72), соответствующее расходящимся волнам на бесконечности

$$v(x) = \int_{\Omega_0} f(y) \frac{e^{ikr}}{4\pi r} dy, \quad r = |x - y|. \quad (2.74)$$

Точнее, имеет место следующая теорема единственности для уравнения (2.72).

Пусть $f(x)$ — финитная функция. Тогда решение уравнения Гельмгольца

$$\Delta v + k^2 v = -f(x), \quad (2.75)$$

удовлетворяющее на бесконечности условиям излучения

$$v(x) = O(|x|^{-1}), \quad \frac{\partial v(x)}{\partial |x|} - ikv(x) = o(|x|^{-1}) \quad (2.76)$$

(если оно существует) единственно.

В самом деле, предположив, что существует два решения уравнения (2.75), удовлетворяющих условиям излучения (2.76), придем к тому, что их разность будет решением однородного уравнения Гельмгольца, для которого выполняются условия (2.76). В этом случае для разности двух решений $w = v_1 - v_2$ формула (2.73) дает

$$w(x) = \int_{S_R} \left[\frac{e^{ikr}}{4\pi r} \frac{\partial w}{\partial r} - w(y) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{ikr}}{4\pi r} \right) \right] dS_y = \int_{S_R} o\left(\frac{1}{r^2}\right) dS \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty.$$

В силу произвольности точки $x \in \Omega$, отсюда следует, что $w = v_1 - v_2 \equiv 0$.

Для двух независимых переменных при временном множителе $e^{-i\omega t}$ расходящуюся на бесконечности волну, как выяснено выше, дает функция Ханкеля $H_0^{(1)}(kr)$. Условиям излучения (2.70) удовлетворяет первое фундаментальное решение в (2.59)

$$E = \frac{1}{4i} H_0^{(1)}(kr).$$

Действительно, при $r \rightarrow \infty$

$$H_0^{(1)}(kr) = O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad H_0^{(2)}(kr) = O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right).$$

Далее воспользуемся рекуррентными соотношениями (см. п. 2.4)

$$\frac{d}{dx} H_0^{(1)}(x) = -H_1^{(1)}(x), \quad \frac{d}{dx} H_0^{(2)}(x) = -H_1^{(2)}(x)$$

и асимптотическими формулами при $\nu = 0$ и $\nu = 1$. Получим цепочку равенств при $r \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} H_0^{(1)}(kr) - ikH_0^{(1)}(kr) &= -kH_1^{(1)}(kr) - ikH_0^{(1)}(kr) = \\ &= -k\sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \left\{ e^{i(kr-\frac{3\pi}{4})} \left(1 + O\left(\frac{1}{r}\right) \right) + ie^{i(kr-\frac{\pi}{4})} \left(1 + O\left(\frac{1}{r}\right) \right) \right\} = \\ &= -k\sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{i(kr-\frac{3\pi}{4})} \cdot 2O\left(\frac{1}{r}\right) = o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right). \end{aligned}$$

Таким образом, функция Ханкеля $H_0^{(1)}(kr)$ удовлетворяет условиям излучения (2.70). Приведя аналогичные выкладки относительно функции $H_0^{(2)}(kr)$ убеждаемся, что второму из условий излучения (2.70) она не удовлетворяет. Зато она удовлетворяет условиям излучения (2.71), и если временной множитель при амплитуде колебаний взять в виде $e^{i\alpha t}$, то расходящуюся на бесконечности волну дает функция $e^{i\alpha t} H_0^{(2)}(kr)$.

Учитывая сказанное, решение неоднородного уравнения (2.72) для внешности ограниченной плоской области Ω представим в виде

$$v(x) = \frac{i}{4} \int_{\Omega_0} f(y) H_0^{(1)}(k|x-y|) dy,$$

где $f(x)$ — финитная функция и $\text{supp } f \subset \Omega_0$.

Принцип предельного поглощения [33, 35, 42]. Условия излучения были получены для внешности ограниченной области Ω , т. е. для бесконечной области $R^3 \setminus \bar{\Omega}$ или $R^2 \setminus \bar{\Omega}$ в двумерном варианте. В иных случаях, например для области с бесконечными границами, условия излучения могут иметь другой вид. Опишем здесь принцип предельного поглощения, который применим ко всем задачам дифракции установившихся колебаний.

Если ввести в задачу о вынужденных колебаниях сопротивление, пропорциональное скорости, то придем к уравнению

$$\Delta u - \frac{1}{a^2} \ddot{u} - \beta \dot{u} = -f(x) e^{-i\omega t}, \quad \beta > 0. \quad (2.77)$$

Положив здесь

$$u = v(x) e^{-i\omega t},$$

сведем (2.77) к уравнению относительно амплитуды

$$\Delta v + q^2 v = -f(x). \quad (2.78)$$

$$q^2 = k^2 + i\beta\omega, \quad k = \frac{\omega}{a}, \quad \operatorname{Im} q^2 = \beta\omega > 0.$$

Уравнение (2.78) называется в литературе уравнением с комплексным поглощением. Фундаментальные решения этого уравнения (в R^3) имеют согласно (2.60) вид

$$E(x) = -\frac{e^{iq|x|}}{4\pi|x|}, \quad E^*(x) = -\frac{e^{-iq|x|}}{4\pi|x|}, \quad (2.79)$$

где

$$q = \pm\sqrt{k^2 + i\beta\omega} = \pm\sqrt{\rho} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right),$$

$$\rho = |k^2 + i\beta\omega| = \sqrt{k^4 + \beta^2\omega^2}, \quad \cos \theta = \frac{k^2}{\rho}, \quad \sin \theta = \frac{\beta\omega}{\rho},$$

$$\cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos \theta}{2}} = \sqrt{\frac{k^2 + \rho}{2\rho}}, \quad \sin \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos \theta}{2}} = \sqrt{\frac{\rho - k^2}{2\rho}}.$$

Окончательно запишем

$$q = \sqrt{\frac{\sqrt{k^4 + \beta^2\omega^2} + k^2}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{k^4 + \beta^2\omega^2} - k^2}{2}} = q_0 + iq_1.$$

При таком выборе знаков $q_1 > 0$ (если $\beta > 0$) и фундаментальные решения (2.79) принимают вид

$$E(x) = -\frac{e^{iq_0|x|}}{4\pi|x|} e^{-q_1|x|}, \quad E^*(x) = -\frac{e^{-iq_0|x|}}{4\pi|x|} e^{q_1|x|},$$

т. е. второе фундаментальное решение неограниченно возрастает при $|x| \rightarrow \infty$ и физического смысла не имеет. Первое фундаментальное решение определяет единственное затухающее на бесконечности решение уравнение (2.78), которое аналогично (2.74) имеет вид

$$v(x, \beta) = \int_{\Omega} f(y) \frac{e^{iq_0 r}}{4\pi r} e^{-q_1 r} dy, \quad r = |x - y|.$$

При $\beta \rightarrow 0$ получаем $q_0 \rightarrow k, q_1 \rightarrow 0$. Следовательно, $v(x, \beta)$ стремится к потенциальному (2.74).

Таким образом, единственное решение уравнения Гельмгольца (2.75), соответствующее расходящимся волнам, есть предел ограниченного решения волнового уравнения с комплексным поглощением при стремлении к нулю коэффициента поглощения β .

Принцип предельной амплитуды [33, 35, 42]. Рассмотрим волновое уравнение с периодической правой частью

$$\Delta u - \frac{1}{a^2} \ddot{u} = -f(x) e^{-i\omega t}.$$

Начальные условия примем нулевыми

$$u|_{t=0} = 0, \quad \dot{u}|_{t=0} = 0.$$

С течением времени решение $u(x, t)$ этой задачи Коши совершает эволюцию от начального распределения до периодического движения $v(x) e^{-i\omega t}$.

Принцип предельной амплитуды утверждает, что единственное решение уравнения Гельмгольца для амплитуды

$$\Delta v + k^2 v = -f(x), \quad k > 0,$$

соответствующее расходящимся на бесконечности волнам, определяется при помощи предельного перехода

$$v(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \{e^{i\omega t} u(x, t)\}.$$

Влияние граничных условий. Построение функций Грина методом отражений [3, 5, 9, 38, 40].

1. Функция Грина задачи Дирихле для полупространства $x_3 > 0$. Построим функцию Грина для уравнения

$$(\Delta - k^2) v = 0, \quad k > 0. \quad (2.80)$$

Согласно определению функции Грина задачи Дирихле

$$G(x, y) = \frac{e^{-k|x-y|}}{4\pi|x-y|} + v(x, y), \quad x = (x_1, x_2, x_3), \quad y = (y_1, y_2, y_3),$$

где $v(x, y)$ — регулярное в верхнем полупространстве решение уравнения (2.80), удовлетворяющее граничному условию

$$\left[v(x, y) + \frac{e^{-k|x-y|}}{4\pi|x-y|} \right]_{x_3=0} = 0.$$

Легко видеть, что этому граничному условию подчиняется функция

$$v(x, y) = -\frac{e^{-k|x-y^*|}}{4\pi|x-y^*|},$$

где $y^* = (y_1, y_2, -y_3)$ — точка, симметричная точке y относительно плоскости $x_3 = 0$.

Таким образом, функция Грина для верхнего полупространства (по схеме метода отражений) построена в виде

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{e^{-k|x-y|}}{|x-y|} - \frac{e^{-k|x-y^*|}}{|x-y^*|} \right). \quad (2.81)$$

В точке $y = (y_1, y_2, y_3)$ верхнего полупространства имеет место единичный источник, в точке $y^* = (y_1, y_2, -y_3)$ — фиктивный источник.

2. Функция Грина задачи Неймана для уравнения (2.80). В данном случае функция Грина задачи Неймана для верхнего полупространства такова:

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{e^{-k|x-y|}}{|x-y|} + \frac{e^{-k|x-y^*|}}{|x-y^*|} \right).$$

Действительно,

$$4\pi \frac{\partial G}{\partial x_3} = -e^{-kr} \frac{x_3 - y_3}{r} (1 + kr) - e^{-kr^*} \frac{x_3 + y_3}{r^*} (1 + kr^*),$$

где

$$r = |x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2},$$

$$r^* = |x - y^*| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 + y_3)^2}.$$

При $x_3 = 0$ выражения для r и r^* совпадают, поэтому

$$\left. \frac{\partial G}{\partial x_3} \right|_{x_3=0} = 0.$$

3. Функции Грина для полуплоскости. Рассуждая аналогично предыдущему, запишем в случае задачи Дирихле

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi} K_0(k|x-y|) - \frac{1}{2\pi} K_0(k|x-y^*|),$$

где $x = (x_1, x_2)$, $x_2 > 0$, $y = (y_1, y_2)$, $y^* = (y_1, -y_2)$.

Для задачи Неймана

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi} K_0(k|x-y|) + \frac{1}{2\pi} K_0(k|x-y^*|).$$

В самом деле,

$$\left. \frac{\partial G}{\partial x_2} \right|_{x_2=0} = \frac{ky_2}{2\pi r_0} (K_1(kr_0) - K_1(kr_0)) = 0, \quad r_0 = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (-y_2)^2}.$$

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1. Стационарное волновое поле температур в полупространстве $x_3 > 0$. Будем предполагать, что в некоторой ограниченной области Ω_0 , лежащей в верхнем полу-

пространстве, распределены тепловыделяющие источники, плотность которых периодически меняется во времени и имеет вид (знак реальной части опускается ниже)

$$F(x, t) = f(x) e^{-i\omega t}, \quad \text{supp } f \subset \Omega_0, \quad f(x) \in C(\overline{\Omega}_0).$$

На плоскости $x_3 = 0$ зададим граничный режим $\varphi(x_1, x_2) e^{-i\omega t}$, отличный от нуля в плоской области D .

Формальная постановка задачи такова [36, 42].

Дифференциальное уравнение

$$\Delta u - \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{f(x)}{\lambda} e^{-i\omega t}, \quad \text{supp } f \subset \Omega_0, \quad x = (x_1, x_2, x_3), \quad (2.82)$$

$$a^2 = \frac{\lambda}{c\rho}.$$

Здесь λ — теплопроводность материала, c — удельная теплоемкость, ρ — плотность.

Граничное условие

$$u|_{x_3=0} = \varphi(x_1, x_2) e^{-i\omega t}, \quad \text{supp } \varphi \subset D. \quad (2.83)$$

В установившемся режиме можно разыскивать решение граничной задачи (2.82), (2.83) в виде

$$u(x, t) = v(x) e^{-i\omega t}, \quad x_3 > 0,$$

где для амплитуды $v(x)$ ставится следующая задача:

$$\Delta v + k^2 v = -\frac{1}{\lambda} f(x), \quad k^2 = \frac{i\omega}{a^2}, \quad (2.84)$$

$$v|_{x_3=0} = \varphi(x_1, x_2).$$

В (2.84), в отличие от рассмотренных выше случаев, k^2 — чисто мнимая величина, а k имеет два комплексных значения

$$k = \pm \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\omega}{2}} (1+i). \quad (2.85)$$

В соответствии с этим получаем два фундаментальных решения

$$E = -\frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}, \quad E^* = -\frac{e^{-ik|x|}}{4\pi|x|}.$$

Если в формуле (2.85) взять верхний знак, то E экспоненциально затухает при $|x| \rightarrow \infty$, E^* — неограниченно возрастает. Поэтому функцию Грина согласно (2.81) запишем в виде

$$G = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{e^{-ry}}{r} e^{iry} - \frac{e^{-ry^*}}{r^*} e^{iry^*} \right), \quad (2.86)$$

где

$$\gamma = \sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} > 0, \quad r = |x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2},$$

$$r^* = |x - y^*| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 + y_3)^2}.$$

В соответствии с представлением (2.52) решение граничной задачи Дирихле (2.84) определяется формулой

$$v(x) = -\frac{1}{\lambda} \int_{\Omega_0} f(y) G(x, y) dy - \int_D \varphi(y) \frac{\partial}{\partial n_y} G(x, y) dS_y,$$

где функция Грина $G(x, y)$ определена в (2.86).

Согласно (2.86)

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} G &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{e^{-\gamma r}}{r} \cos \gamma r - \frac{e^{-\gamma r^*}}{r^*} \cos \gamma r^* \right), \\ \operatorname{Re} \frac{\partial}{\partial n_y} G \Big|_{y_3=0} &= -\operatorname{Re} \frac{\partial}{\partial y_3} G \Big|_{y_3=0} = \frac{x_3}{2\pi} \operatorname{Re} \left\{ e^{\gamma(i-1)r_0} \left(\frac{1}{r_0^3} - \frac{\gamma(i-1)}{r_0^2} \right) \right\} = \\ &= \frac{x_3}{2\pi} e^{-\gamma r_0} \left\{ \frac{1 + \gamma r_0}{r_0^3} \cos \gamma r_0 + \frac{\gamma \sin \gamma r_0}{r_0^2} \right\}. \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$u(x, t) = v(x) \cos \omega t,$$

$$\begin{aligned} v(x) &= -\frac{1}{4\pi\lambda} \iiint_{\Omega_0} f(y_1, y_2, y_3) \left(\frac{e^{-\gamma r}}{r} \cos \gamma r - \frac{e^{-\gamma r^*}}{r^*} \cos \gamma r^* \right) dy_1 dy_2 dy_3 - \\ &\quad - \frac{x_3}{2\pi} \iint_D \varphi(y_1, y_2) e^{-\gamma r_0} \left(\frac{1 + \gamma r_0}{r_0^3} \cos \gamma r_0 + \frac{\gamma \sin \gamma r_0}{r_0^2} \right) dy_1 dy_2, \\ r_0 &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + y_2^2}. \end{aligned}$$

Пример 2. Температурные волны в гиперболической модели теплопроводности [48, 49]. Уравнение теплопроводности Фурье базируется на гипотезе о прямой пропорциональности вектора теплового потока и градиента температуры и неявно содержит допущение о бесконечной скорости распространения тепловых возмущений. На основе термодинамики необратимых процессов получена более сложная зависимость между тепловым потоком и градиентом температуры

$$q + \tau^* \frac{\partial q}{\partial t} = -\lambda \operatorname{grad} T. \quad (2.87)$$

Этот закон Каттанео–Вернотта обобщает классический закон Фурье и совпадает с последним, если время релаксации τ^* теплового потока равно нулю. Физический смысл заключается в том, что процесс теплопереноса в локально-неравновесных средах обладает инерционными свойствами: система реагирует на тепловое воздействие не в тот же момент времени t , как в классическом локально-равновесном случае, а на время релаксации τ^* позже.

Из закона сохранения энергии, с учетом соотношения (2.87), приходим к уравнению теплопереноса телеграфного типа

$$\lambda \Delta T - c\rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \tau^* \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right) = - \left(F + \tau^* \frac{\partial F}{\partial t} \right),$$

где $F = F(x, t)$ — плотность тепловых источников. Это уравнение сочетает в себе свойства волнового уравнения, описывающего распространение волн со скоростью $V_T = (\lambda/c\rho\tau^*)^{1/2} = (a^2/\tau^*)^{1/2}$, и диффузионного уравнения, соответствующего диссипативному способу передачи энергии.

Рассмотрим стационарный диффузионно-волновой процесс в верхней полуплоскости в описанной выше неклассической постановке. Пусть в пятне (ограниченной области D), расположенному в верхней полуплоскости распределены тепловые источники с плотностью $F(x, t) = \operatorname{Re}(e^{-i\omega t} f(x))$, а на участке (α, β) границы $x_2 = 0$ задан температурный режим $\operatorname{Re}(e^{-i\omega t} \varphi(x_1))$. Стационарное поле температур будем разыскивать в виде

$$T = \operatorname{Re}\{e^{-i\omega t} v(x)\}, \quad x = (x_1, x_2), \quad x_2 > 0.$$

Тогда для амплитуды $v(x)$, придем к граничной задаче

$$(\Delta + q_T^2)v(x) = -\frac{1}{\lambda}(1-i\omega\tau^*)f(x), \quad \sup p f \subset D, \quad x = (x_1, x_2), \quad (2.88)$$

$$v(x)|_{x_2=0} = \varphi(x_1), \quad \sup p \varphi \subset (\alpha, \beta),$$

где

$$\gamma_T^2 = \frac{\omega^2}{V_T^2}, \quad \gamma^2 = \frac{\omega}{a^2}, \quad q_T^2 = \gamma_T^2 + i\gamma^2.$$

Формально это дифференциальное уравнение по внешнему виду совпадает с уравнением (2.78) принципа предельного поглощения. Но если в последнем случае $\operatorname{Im} q_T^2 \rightarrow 0$, то эта величина в уравнении (2.88) может на много порядков превышать $\operatorname{Re} q_T^2$. В самом деле, отношение

$$\frac{\gamma^2}{\gamma_T^2} = \frac{\omega}{a^2}; \quad \frac{\omega^2}{V_T^2} = \frac{1}{\omega\tau^*}.$$

Для металлов $\tau^* \approx 10^{-11} \text{ с}$, для некоторых полимерных материалов типа поливинилбутираля $\tau^* \approx 10^{-5}, 10^{-6} \text{ с}$. Поэтому, для того чтобы наряду с диффузионным процессом заметное влияние оказывал волновой процесс, необходимо возбуждение тела с достаточно высо-

кой частотой либо импульсное возбуждение с продолжительностью импульса соизмеримой со временем релаксации τ^* .

Возвращаясь к решению граничной задачи (2.88), запишем выражение для параметра q_T в виде

$$q_T = \frac{\gamma_T}{\sqrt{2}} \left\{ \sqrt{1 + (\omega\tau^*)^{-2}} + 1 \right\} + i \sqrt{\sqrt{1 + (\omega\tau^*)^{-2}} - 1}. \quad (2.89)$$

Отсюда следует, что если $\omega\tau^* \ll 1$, то можно принять

$$q_T = \frac{\gamma_T}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{\omega\tau^*}} (1+i) = \frac{\gamma}{\sqrt{2}} (1+i),$$

т. е. в этом случае полностью преобладает диффузионный процесс. Если же $\omega\tau^* \geq 1$, то для q_T необходимо использовать формулу (2.89). Тогда функция Грина задачи Дирихле для полуплоскости будет иметь вид

$$G(x, x_0) = \frac{i}{4} \left\{ H_0^{(1)}(q_T r) - H_0^{(1)}(q_T r^*) \right\}. \quad (2.90)$$

$$r = |x - x_0| = \sqrt{(x_1 - x_{10})^2 + (x_2 - x_{20})^2}, \quad r^* = |x - x_0^*| = \sqrt{(x_1 - x_{10})^2 + (x_2 + x_{20})^2}.$$

Используя асимптотику функции Ханкеля (см. п. 2.4), получим выражение функции G при больших значениях $q_T r$

$$G = i \sqrt{\frac{\pi}{2q_T}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{r}} e^{-r \operatorname{Im} q_T} e^{i(r \operatorname{Re} q_T - \frac{\pi}{4})} - \sqrt{\frac{1}{r^*}} e^{-r^* \operatorname{Im} q_T} e^{i(r^* \operatorname{Re} q_T - \frac{\pi}{4})} \right\} + O\left(\frac{1}{|x|}\right).$$

Отсюда видно, что при $\omega\tau^* \ll 1$ волновое поле мгновенно затухает при удалении от источника (уже в непосредственной близости от источника). Практический смысл функция (2.90) имеет при высокочастотных возбуждениях.

Далее находим нормальную производную от функции Грина на границе полуплоскости:

$$\left. \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y} \right|_{y_2=0} = - \left. \frac{\partial G}{\partial y_2} \right|_{y_2=0} = - \frac{i q_T}{2} \frac{x_2}{r_0} H_1^{(1)}(q_T r_0),$$

где

$$r_0 = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + x_2^2}.$$

После этого согласно формуле (2.52) записываем решение граничной задачи (2.88)

$$v(x) = \frac{i + \omega\tau^*}{4\lambda} \iint_D f(y_1, y_2) \left\{ H_0^{(1)}(q_T |x - y|) - H_0^{(1)}(q_T |x - y^*|) \right\} dy_1 dy_2 + \\ + \frac{1}{2} i q_T x_2 \int_{-\alpha}^{\beta} \varphi(y_1) \frac{H_1^{(1)}(q_T r_0)}{r_0} dy_1.$$

Пример 3. Гармонические колебания пьезокерамической среды. Здесь рассмотрим простейшую двумерную задачу электроупругости о гармонических колебаниях пьезокерамического слоя [7, 11, 34, 47].

В декартовой прямолинейной системе координат $0x_1x_2x_3$ рассмотрим бесконечную пьезокерамическую среду (пьезоэлектрик гексагонального класса симметрии 6 mm), возбуждаемую вдоль шнура $x_1 = x_{10}$, $x_2 = x_{20}$, $-\infty < x_3 < \infty$ гармоническими во времени усилиями постоянной интенсивности p , направленными вдоль оси $0x_3$. Такая модель (волнового поля продольного сдвига) в пьезокерамической среде описывается следующими соотношениями (в квазистатическом приближении).

Уравнение движения

$$\partial_1\sigma_{13} + \partial_2\sigma_{23} + X_3 = \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \quad \partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k} \quad (k = 1, 2). \quad (2.91)$$

Материальные уравнения

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= c_{44}\partial_1 u_3 - e_{15}E_1, \quad \sigma_{23} = c_{44}\partial_2 u_3 - e_{15}E_2, \\ D_1 &= e_{15}\partial_1 u_3 + \varepsilon_{11}E_1, \quad D_2 = e_{15}\partial_2 u_3 + \varepsilon_{11}E_2. \end{aligned} \quad (2.92)$$

Уравнения электростатики

$$\begin{aligned} E_1 &= -\partial_1\varphi, \quad E_2 = -\partial_2\varphi, \\ \partial_1 D_1 + \partial_2 D_2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.93)$$

В соотношениях (2.91)–(2.93) σ_{m3} и u_3 — компоненты тензора напряжения и перемещение точек среды в направлении оси x_3 , E_m , D_m — компоненты векторов электрической напряженности и индукции, φ — потенциал электрического поля; $c_{44} = c_{44}^E$, e_{15} и $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^E$ — модуль сдвига, измеренный при постоянном значении электрического поля, пьезомодуль и диэлектрическая проницаемость, измеренная при постоянной деформации, X_3 — интенсивность объемных сил в направлении оси x_3 , ρ — плотность материала.

Подстановка выражений (2.92) в уравнения движения (2.91) и условие сохранения заряда (2.93) приводит к следующим уравнениям относительно перемещения и электростатического потенциала:

$$\Delta u_3 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = -\frac{P}{\rho c^2} \delta(x - x_0), \quad (2.94)$$

$$\Delta\varphi = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}c_{44}(1+\kappa^2)} \left\{ \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - P\delta(x - x_0) \right\}, \quad (2.95)$$

где

$$c = \sqrt{\frac{c_{44}(1+\kappa^2)}{\rho}}, \quad \kappa^2 = \frac{e_{15}^2}{\varepsilon_{11}c_{44}}, \quad P = pe^{-i\omega t}.$$

Величины c и κ представляют соответственно скорость сдвиговой волны в пьезоэлектрической среде и коэффициент электромеханической связи материала (если пьезоэффект отсутствует, то $\kappa = 0$).

Таким образом, для перемещения u_3 имеем неоднородное волновое уравнение (с дельта-функцией в правой части). После определения u_3 можно найти электростатический потенциал φ из уравнения (2.95).

Полагая

$$u_3 = e^{-i\omega t} U_3(x), \quad x = (x_1, x_2),$$

$$\varphi = e^{-i\omega t} \Phi(x),$$

запишем уравнения (2.94), (2.95) в амплитудах

$$\begin{aligned} \Delta U_3 + \gamma^2 U_3 &= -\frac{p}{\rho c^2} \delta(x - x_0), \quad \gamma = \frac{\omega}{c}, \\ \Delta \Phi &= -\frac{e_{15}}{\epsilon_{11}} \left(\gamma^2 U_3 + \frac{p}{\rho c^2} \delta(x - x_0) \right). \end{aligned} \quad (2.96)$$

Отсюда следует, что U_3 пропорциональна фундаментальному решению оператора Гельмгольца, т. е.

$$U_3 = \frac{ip}{4\rho c^2} H_0^{(1)}(\gamma r), \quad r = |x - x_0| = \sqrt{(x_1 - x_{10})^2 + (x_2 - x_{20})^2}. \quad (2.97)$$

С учетом этого выражения определяем из (2.96) амплитуду электростатического потенциала

$$\Phi = \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}} U_3. \quad (2.98)$$

Итак, сопряженное электроупругое поле в бесконечной пьезокерамической среде с гармоническим источником определяется функциями (2.97), (2.98). Интересно отметить, что при механическом возбуждении (как в нашем случае) вектор электрической индукции $D \equiv 0$.

Вернемся теперь к рассмотрению волновых электроупругих полей в пьезокерамическом слое $0 \leq x_1 \leq a$, $-\infty < x_2$, $x_3 < \infty$, основания которого $x_1 = 0$ и $x_1 = a > 0$ свободны от сил и граничат с вакуумом. Пусть вдоль шнура $x_1 = x_{10}$, $x_2 = x_{20}$, $-\infty < x_3 < \infty$ ($0 < x_{10} < a$) распределены механические усилия $pe^{-i\omega t}$ ($p = \text{const}$), ориентированные вдоль третьей координаты. В соответствии со сказанным, запишем граничные условия (механические и электрические) на основаниях слоя. Имеем

$$\sigma_{13} \Big|_{x_1=0,a} = 0, \quad D_1 \Big|_{x_1=0,a} = 0.$$

Учитывая материальные уравнения (2.92), получаем отсюда

$$\partial_1 U_3 \Big|_{x_1=0,a} = 0, \quad \partial_1 \Phi \Big|_{x_1=0,a} = 0.$$

На самом деле эти условия равносильны, поэтому остается одно из них. Таким образом, приходим к задаче Дирихле для полосы, которую можно решить методом отражения. Рассматривая фиктивные источники так, как показано на рис. 2.13, запишем

$$U_3 = \frac{ip}{4\rho c^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ H_0^{(1)} \left(\gamma \sqrt{(x_1 - x_{10} - 2ma)^2 + (x_2 - x_{20})^2} \right) + \right. \\ \left. + H_0^{(1)} \left(\gamma \sqrt{(x_1 + x_{10} - 2ma)^2 + (x_2 - x_{20})^2} \right) \right\}. \quad (2.99)$$

Этот ряд сходится быстро, если $ay \gg 1$, т. е. $\lambda \ll 2a\pi$, где λ — длина волны. Таким образом, выражение (2.99) целесообразно применять для коротких волн. Если $\gamma a \ll 1$, то для анализа волнового поля в слое лучше применить метод разделения переменных.

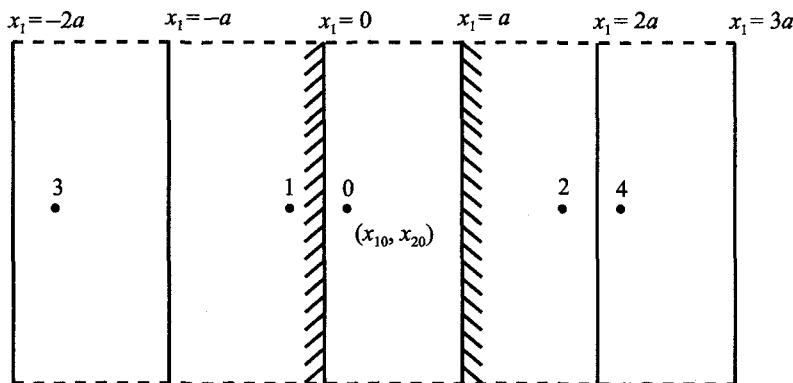


Рис. 2.13. Схема расположения основного источника и его образов

Пусть

$$(\Delta + \gamma^2)E = \delta(x - x_0), \quad x = (x_1, x_2),$$

$$\Delta E_0 = \delta(x - x_0), \quad x_0 = (x_{10}, x_{20}).$$

Используя разложение $2a$ — периодической дельта-функции

$$\delta(x_1 - x_{10}) = \frac{1}{a} + \frac{2}{a} \sum_{\nu=1}^{\infty} \cos \alpha_{\nu} x_1 \cos \alpha_{\nu} x_{10}, \quad \alpha_{\nu} = \frac{\pi \nu}{a}$$

и представляя функции E и E_0 в виде соответствующих тригонометрических рядов по переменной x_1 , приходим к процедуре определения фундаментальных решений обыкновенных дифференциальных уравнений по переменной x_2 . В результате получаем

$$E(x, x_0) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu}(x_2 - x_{20}) \cos \alpha_{\nu} x_1 \cos \alpha_{\nu} x_{10}, \\ E_0(x_1, x_0) = \sum_{\nu=1}^{\infty} d_{\nu}(x_2 - x_{20}) \cos \alpha_{\nu} x_1 \cos \alpha_{\nu} x_{10}, \quad (2.100)$$

где

$$b_\nu(x_2) = -\frac{1}{a\lambda_\nu} e^{-\lambda_\nu|x_2|}, \quad b_0(x_2) = \frac{e^{i\gamma|x_2|}}{2i\gamma a}, \quad d_\nu(x_2) = -\frac{1}{a\alpha_\nu} e^{-\alpha_\nu|x_2|},$$

$$\lambda_\nu = \begin{cases} \sqrt{\alpha_\nu^2 - \gamma^2}, & \gamma < \alpha_\nu, \\ -i\sqrt{\gamma^2 - \alpha_\nu^2}, & \gamma > \alpha_\nu \end{cases} \quad (\nu = 1, 2, \dots).$$

Ряды (2.100) сходятся медленно, если точка наблюдения x расположена достаточно близко к точке x_0 . Однако ряд для функции E_0 можно просуммировать и, учитывая тот факт, что главные части у E и E_0 одинаковы, провести следующую процедуру усиления сходимости ряда для $E(x, x_0)$.

Прежде всего просуммируем ряд для функции E_0 . Учитывая равенство

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-m|x|}}{m} \cos my = \frac{1}{2} \left\{ |x| - \ln [2(chx - \cos y)] \right\},$$

сворачиваем второй ряд в (2.100) к виду

$$E_0 = -\frac{1}{2a} |x_2 - x_{20}| + \frac{1}{2\pi} \ln \left| 4 \sin \frac{\pi(z_0 - z)}{2a} \sin \frac{\pi(z_0 + \bar{z})}{2a} \right|.$$

Далее функцию E представляем в виде

$$E(x, x_0) = E_0(x, x_0) + E_1(x, x_0),$$

где «остаток» E_1 представляет собой ряд

$$E_1(x, x_0) = \frac{e^{i\gamma|x_2 - x_{20}|}}{2ia\gamma} - \frac{1}{a} \sum_{m=1}^{\infty} c_m(x_2 - x_{20}) \cos \alpha_m x_1 \cos \alpha_m x_{10},$$

$$c_m(x_2) = \frac{1}{\lambda_m} e^{-\lambda_m|x_2|} - \frac{1}{\alpha_m} e^{-\alpha_m|x_2|}.$$

После выделения главной особенности E_0 полученный ряд сходится существенно быстрее. Так, его общий член в точке $x = x_0$ затухает как m^{-3} .

Пример 4. Интегральные представления решений граничных задач для уравнения Гельмгольца $\Delta u + \gamma^2 u = 0$ в двумерной области определены в пункте 2.2. Если область, в которой ищется решение, представляет собой круг или внешность круга, то полные системы частных решений уравнения Гельмгольца имеют соответственно вид [2, 8, 17, 20]

$$e^{in\theta} J_n(\gamma r), \quad e^{in\theta} H_n^{(1)}(\gamma r), \quad \gamma > 0 \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm, \dots), \quad (2.101)$$

где $J_n(x), H_n^{(1)}(x)$ — цилиндрические функции Бесселя и Ханкеля порядка n ; r и θ — полярные координаты точки наблюдения. В этом частном случае целесообразно использовать представление искомого решения в виде ряда по функциям (2.101).

Пусть в неограниченной упругой, однородной изотропной среде, отнесенной к декартовым осям $0x_1x_2x_3$, имеется бесконечно протяженная вдоль оси x_3 круговая цилиндрическая полость радиуса R . Предположим, что поверхность полости свободна от усилий, а из бесконечности вдоль оси x_2 падает на полость плоская монохроматическая SH -волну вектора упругого перемещения (рис. 2.14).

$$u_3^0 = Ae^{i\gamma x_2 + i\alpha x}, \quad (2.102)$$

где $\gamma = \omega/c_2$, c_2 — скорость распространения сдвиговой SH -волны в среде, ω — круговая частота, A — амплитуда волны, t — время. В этих условиях волновое поле в среде соответствует состоянию антиплюской деформации (в плоскости $0x_1, x_2$) или, как иногда говорят, состоянию продольного сдвига (вдоль оси x_3). Отличны от нуля лишь компоненты вектора упругого перемещения $u_3 = u_3(x_1, x_2)$ и компоненты тензора напряжения $\sigma_{23} = \sigma_{23}(x_1, x_2)$ и $\sigma_{13} = \sigma_{13}(x_1, x_2)$.

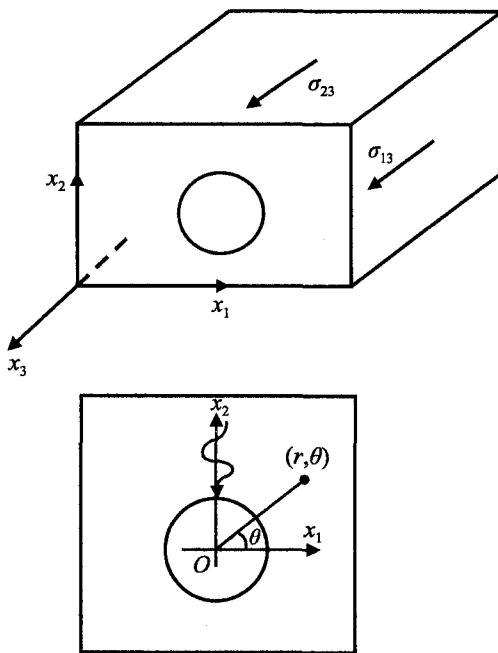


Рис. 2.14. К постановке задачи о рассеянии SH -волны на цилиндрической полости в упругой среде

Имея в виду гармонические колебания массива с полостью, положим (знак реальной части здесь опускаем)

$$u_3 = e^{-i\alpha x} U_3(x_1, x_2), \quad \sigma_{k3} = e^{-i\alpha x} S_{k3}(x_1, x_2) \quad (k=1, 2).$$

С учетом этих обозначений полная система уравнений модели волнового поля в амплитудах записывается в виде [33, 34, 47].

Уравнение «движения»

$$\Delta U_3 + \gamma^2 U_3 = 0, \quad \gamma > 0. \quad (2.103)$$

Соотношения Коши, связывающие перемещение U_3 с компонентами тензора деформации

$$e_{k3} = e^{-i\alpha x} \gamma_{k3}, \quad \gamma_{k3} = \frac{1}{2} \partial_k U_3 \quad (k = 1, 2),$$

Закон Гука для антиплюской деформации (μ — модуль сдвига)

$$S_{k3} = 2\mu \gamma_{k3} \quad (k = 1, 2).$$

Границные условия на поверхности полости $r = R$

$$S_{n3} = S_{13} \cos \theta + S_{23} \sin \theta = 0, \quad (2.104)$$

Волна (2.102) не может обеспечить выполнения граничного условия (2.104) на полости, поэтому возникает дополнительная (рассеянная) волна, излучающаяся от граничной поверхности в упругое пространство. Эту волну представим в виде суперпозиции частных решений (2.101)

$$U_3^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n H_n^{(1)}(\gamma r) e^{in\theta}, \quad (2.105)$$

где постоянные A_n — вообще комплексные, подлежат определению из граничного условия на поверхности полости.

Учитывая формулы (2.102), (2.105), суммарное волновое поле представим в виде

$$U_3(x_1, x_2) = A e^{i\gamma x_2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n H_n^{(1)}(\gamma r) e^{in\theta}. \quad (2.106)$$

Границное условие (2.104) для кругового контура упрощается и выглядит так:

$$\left. \frac{\partial U_3}{\partial r} \right|_{r=R} = 0.$$

Таким образом, поставленная задача свелась к внешней задаче Неймана для уравнения Гельмгольца (2.103). Для ее решения воспользуемся известным разложением (см. п. 2.4)

$$e^{i\rho \sin \theta} = J_0(\rho) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(\rho) \left[e^{in\theta} + (-1)^n e^{-in\theta} \right].$$

Вставляя выражение (2.106) с учетом этого разложения в граничное условие, приходим к равенству

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left\{ AJ_0(\gamma r) + A \sum_{n=1}^{\infty} e^{in\theta} J_n(\gamma r) + A \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-in\theta} J_n(\gamma r) + \right. \\ \left. + A_0 H_0^{(1)}(\gamma r) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n H_n^{(1)}(\gamma r) e^{in\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} A_{-n} H_{-n}^{(1)}(\gamma r) e^{-in\theta} \right\}_{r=R} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда определяем искомые коэффициенты $A_{\pm n}$

$$A_0 = -A \frac{J_1(\gamma R)}{H_1^{(1)}(\gamma R)}, \quad A_n = A_{-n} = -A \frac{J_{n+1}(\gamma R) - J_{n-1}(\gamma R)}{H_{n+1}(\gamma R) - H_{n-1}(\gamma R)}.$$

Подставляя значения этих коэффициентов в формулу (2.106), определяем искомое волновое поле в упругом массиве с полостью

$$U_3(x_1, x_2) = A \left\{ e^{i\gamma x_2} - \frac{J_1(\gamma R)}{H_1^{(1)}(\gamma R)} H_1^{(1)}(\gamma r) - \right. \\ \left. - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_{n+1}(\gamma R) - J_{n-1}(\gamma R)}{H_{n+1}^{(1)}(\gamma R) - H_{n-1}^{(1)}(\gamma R)} (e^{in\theta} + (-1)^n e^{-in\theta}) H_n^{(1)}(\gamma r) \right\}.$$

Ряд в правой части сходится весьма быстро, так как при больших n его общий член затухает как $(0,5\gamma R)^{n-2}/(n-2)!$.

Если поверхность полости закреплена, то необходимо принять, что

$$U_3|_{r=R} = 0.$$

В этом случае волновое поле будет иметь вид

$$U_3(x_1, x_2) = A \left\{ e^{i\gamma x_2} - \frac{J_0(\gamma R)}{H_0^{(1)}(\gamma R)} H_0^{(1)}(\gamma r) - \right. \\ \left. - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n(\gamma R)}{H_n^{(1)}(\gamma R)} H_n^{(1)}(\gamma r) (e^{in\theta} + (-1)^n e^{-in\theta}) \right\}.$$

Пример 5. Рассмотрим отнесенную к декартовым осям x_1, x_2 неограниченную упругую среду, ослабленную круговым отверстием радиуса R . Пусть на контуре отверстия действует гармонически изменяющееся во времени нормальное давление $N = e^{-i\omega t} P$, $P = \text{const}$. В этих условиях среда совершает планарные колебания с вектором перемещения $u_k = e^{-i\omega t} U_k(x_1, x_2)$ и тензором напряжения $\sigma_{km} = e^{-i\omega t} S_{km}(x_1, x_2)$.

Математическая модель процесса формулируется следующим образом [33]. Уравнения движения в амплитудах (суммирование по m)

$$\Delta U_k + \sigma \partial_k (\partial_m U_m) + \gamma_2^2 U_k = 0 \quad (k, m = 1, 2), \quad (2.107)$$

где $\gamma_2 = \omega/c_2$ — второе волновое число, c_2 — скорость распространения поперечной звуковой волны в среде, $\sigma = (1 - 2\nu)^{-1}$, ν — коэффициент Пуассона материала.

Закон Гука, связывающий тензоры напряжений и деформаций в среде

$$S_{km} = \lambda (\partial_m U_m) \delta_{km} + \mu (\partial_k U_m + \partial_m U_k) = 0 \quad (k, m = 1, 2), \quad (2.108)$$

где λ, μ — параметры Ламе материала, δ_{km} — символ Кронекера.

Границочное условие на контуре отверстия Γ

$$S_{rr}|_{\Gamma} = P. \quad (2.109)$$

Причем нормальное напряжение S_{rr} , действующее в точке R, θ контура отверстия в направлении радиуса, определяется по формуле

$$S_{rr} = S_{11} \cos^2 \theta + S_{12} \sin 2\theta + S_{22} \sin^2 \theta. \quad (2.110)$$

Согласно общей теореме векторного анализа [25, 30] вектор перемещения можно представить в виде суммы градиента некоторой скалярной функции и ротора некоторого вектора. В приложении к рассматриваемой двумерной задаче это выглядит так:

$$U_1 = \partial_1 \Phi_1 + \partial_2 \Phi_2, \quad U_2 = \partial_2 \Phi_1 - \partial_1 \Phi_2, \quad (2.111)$$

где функции Φ_1 и Φ_2 отвечают соответственно за потенциальное (изменение объема) и вихревое состояния. Действительно, объемная деформация и угол поворота элемента имеют вид

$$\theta = \partial_m U_m = \Delta \Phi_1, \quad \partial_2 U_1 - \partial_1 U_2 = \Delta \Phi_2.$$

Подстановка в систему (2.107) представлений (2.111) приводит к двум уравнениям Гельмгольца

$$\Delta \Phi_1 + \gamma_1^2 \Phi_1 = 0, \quad \Delta \Phi_2 + \gamma_2^2 \Phi_2 = 0,$$

где $\gamma_1 = \omega/c_1$ — первое волновое число, c_1 — скорость распространения продольной волны в среде.

В рассматриваемой постановке волновые поля осесимметричны, поэтому следует положить $\Phi_2 = 0$. С учетом этого обстоятельства находим компоненты тензора напряжения из закона Гука (2.108) и соотношений (2.111). Имеем

$$\begin{aligned} S_{11} &= \lambda \Delta \Phi_1 + 2\mu \partial_1^2 \Phi_1, \\ S_{22} &= \lambda \Delta \Phi_1 + 2\mu \partial_2^2 \Phi_1, \\ S_{12} &= 2\mu \partial_1 \partial_2 \Phi_1. \end{aligned} \quad (2.112)$$

Оссесимметричное решение уравнения Гельмгольца имеет вид

$$\Phi_1 = A H_0^{(1)}(\gamma_1 r), \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}. \quad (2.113)$$

Выполняя предписанные в (2.112) операции над Φ_1 и вводя S_{ij} в выражение (2.110), получаем

$$\begin{aligned} S_{rr} &= (\gamma + \mu) \Delta \Phi_1 + 2\mu \left(e^{2i\theta} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Phi_1 + e^{-2i\theta} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Phi_1 \right) = \\ &= A \left\{ -\mu \gamma_1^2 \sigma H_0^{(1)}(\gamma_1 r) + \mu \gamma_1^2 H_2^{(1)}(\gamma_1 r) \right\}. \end{aligned} \quad (2.114)$$

При выводе этой формулы были использованы формулы комплексного дифференцирования (2.121), а также равенство $(\lambda + \mu) = \mu\sigma$. Постоянная A определяется из граничного условия (2.109). Имеем с учетом (2.114)

$$\mu \gamma_1^2 A = \frac{P}{H_2^{(1)}(\gamma_1 r) - \sigma H_0^{(1)}(\gamma_1 r)}. \quad (2.115)$$

Таким образом, волновой потенциал Φ_1 определяется формулой (2.113), где постоянная A задана в (2.115). Остается вычислить напряжение $S_{\theta\theta}$ — нормальное напряжение в текущей точке контура отверстия на площадке, ориентированной вдоль нормали к контуру в этой точке. Заменяя в (2.110) угол θ на $\theta + \pi/2$, вычисляем

$$S_{\theta\theta} = S_{11} \sin^2 \theta - S_{12} \sin 2\theta + S_{22} \cos^2 \theta.$$

Складывая оба этих равенства, находим с учетом соотношений (2.112)

$$S_{\theta\theta} + S_{rr} = S_{11} + S_{22} = 2(\lambda + \mu)\Delta\Phi_1 = -2\mu\sigma\gamma_1^2\Phi_1.$$

Окончательно получаем нормальное окружное напряжение на контуре отверстия

$$\sigma_{\theta\theta} = \operatorname{Re}\{e^{-i\alpha} S_{\theta\theta}\},$$

где

$$S_{\theta\theta} = P \frac{\sigma H_0^{(1)}(\gamma_1 R) + H_2^{(1)}(\gamma_1 R)}{\sigma H_0^{(1)}(\gamma_1 R) - H_2^{(1)}(\gamma_1 R)}.$$

Аналогично, но с использованием цилиндрических функций первого рода решается внутренняя задача для кругового цилиндра, возбуждаемого нормальным давлением $N = Pe^{-i\alpha}$. Напряжение $S_{\theta\theta}$ на границе определяется равенством

$$S_{\theta\theta} = P \frac{\sigma J_0(\gamma_1 R) + J_2(\gamma_1 R)}{\sigma J_0(\gamma_1 R) - J_2(\gamma_1 R)}.$$

2.4. Цилиндрические функции. Некоторые формулы и таблицы

Уравнение Бесселя [8, 10, 19, 20, 27, 30–32, 37, 46]

$$z^2 u'' + zu' + (z^2 - \nu^2)u = 0 \quad (2.116)$$

имеет смысл для любого действительного или комплексного параметра ν и комплексного переменного z .

Если ν — нецелое, то общее решение уравнения (2.116) можно представить в виде

$$u = AJ_\nu(z) + BJ_{-\nu}(z),$$

где

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}, \quad J_{-\nu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(-\nu + k + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-\nu}. \quad (2.117)$$

Очевидно, эти функции многозначны с точкой ветвления $z = 0$, поэтому их необходимо рассматривать в плоскости с разрезом $(-\infty, 0)$.

При целом $\nu = \pm n$ имеют место линейные зависимости

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z) \quad (n = 1, 2, \dots),$$

где функция Бесселя или цилиндрическая функция первого рода n -го порядка определяется формулой

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}.$$

Это частное решение уравнения (2.116) при целом ν регулярно в любой конечной части плоскости z и имеет в точке $z=0$ ноль кратности n . Второе частное решение этого уравнения, функция Неймана, или цилиндрическая функция второго рода, имеет представление ($C \approx 0,577215\dots$ — постоянная Эйлера)

$$N_m(z) = \frac{2}{\pi} J_m\left(\ln \frac{z}{2} + C\right) - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-m} - \frac{1}{m!} \left(\frac{z}{2}\right)^m \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} - \\ - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(m+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+m} \left(\sum_{p=1}^{m+k} \frac{1}{p} + \sum_{p=1}^k \frac{1}{p} \right) (m=0,1,\dots).$$

Эта функция при $m=1,2,\dots$ имеет в нуле полюс кратности m . Общее решение уравнения Бесселя при целых $\nu=m$ есть линейная комбинация

$$u = AJ_m(z) + BN_m(z).$$

При рассмотрении задач математической физики, связанных с уравнением Гельмгольца, удобно работать с цилиндрическими функциями третьего рода, или функциями Ханкеля $H_n^{(1)}(z)$ или $H_n^{(2)}(z)$, которые определяются в виде следующих комплексных комбинаций:

$$H_n^{(1)}(z) = J_n(z) + iN_n(z), \quad H_n^{(2)}(z) = J_n(z) - iN_n(z).$$

Если $\operatorname{Im} z = 0$, то эти функции комплексно сопряжены друг с другом.

Имеют место представления в виде ряда

$$H_n^{(1,2)}(z) = J_n(z) \pm \frac{i}{\pi} \left\{ 2J_n(z) \ln \frac{z}{2} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} - \right. \\ \left. - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}}{k!(n+k)!} [\psi(n+k+1) + \psi(k+1)] \right\}, \quad (2.118)$$

$$\psi(m+1) = -C + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k}, \quad C = -\int_0^\infty e^{-t} \ln t dt = 0,577215\dots,$$

в частности

$$H_0^{(1,2)}(z) = J_0(z) \pm \frac{2i}{\pi} \left[\left(\ln \frac{z}{2} + C \right) J_0(z) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \sum_{m=1}^k \frac{1}{m} \right],$$

$$H_1^{(1,2)}(z) = J_1(z) \pm \frac{i}{\pi} \left\{ 2J_1(z) \ln \frac{z}{2} - \frac{2}{z} - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+1}}{k!(k+1)!} [\psi(k+2) + \psi(k+1)] \right\}.$$

Отсюда следует, что при $z \rightarrow 0$ справедливы асимптотические равенства

$$H_0^{(1,2)}(z) = \pm \frac{2i}{\pi} \ln z + O(1),$$

$$H_1^{(1,2)}(z) = \mp \frac{2i}{\pi z} \pm \frac{i}{\pi} z \ln z + O(z^2).$$

При $n \rightarrow \infty$ и $|z| \ll n$ имеют место асимптотики

$$J_n(z) \sim \frac{1}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^n, \quad H_n^{(1,2)}(z) \sim \mp \frac{(n-1)!}{\pi} \left(\frac{2}{z}\right)^n,$$

$$\frac{d}{dz} J_n(z) \sim \frac{n}{z} J_n(z), \quad \frac{d}{dz} H_n^{(1,2)}(z) \sim -\frac{n}{z} H_n^{(1,2)}(z).$$

При $|z| \rightarrow \infty$ и фиксированном ν асимптотики цилиндрических функций таковы:

$$\begin{aligned} J_\nu(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left[\cos\left(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{z}\right) \sin z + O\left(\frac{1}{z}\right) \cos z \right], \\ H_\nu^{(1)}(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i\left(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right], \quad |\arg z| < \pi. \end{aligned} \quad (2.119)$$

Отсюда, в частности, следует, что выражение $e^{-i\omega t} H_\nu^{(1)}(\gamma r)$, где γ — волновое число, ω — круговая частота, t — время, при больших r имеет характер уходящей на бесконечность гармонической цилиндрической волны. Ее амплитуда затухает по r в полном соответствии с условиями излучения Зоммерфельда.

При перемене знака у индекса функций Ханкеля выполняются соотношения

$$H_{-\nu}^{(1)}(z) = e^{i\pi\nu} H_\nu^{(1)}(z), \quad H_{-\nu}^{(2)}(z) = e^{-i\pi\nu} H_\nu^{(2)}(z),$$

что дает возможность определить эти функции при всех значениях ν .

Имеют место также следующие соотношения обхода:

$$H_\nu^{(1)}(\rho e^{i\pi}) = -e^{-\nu\pi i} H_\nu^{(2)}(\rho),$$

$$H_\nu^{(2)}(\rho e^{-i\pi}) = -e^{\nu\pi i} H_\nu^{(1)}(\rho),$$

справедливые при любом вещественном или комплексном ρ .

При практическом использовании цилиндрических функций удобно иметь в виду рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} u_{\nu-1}(z) + u_{\nu+1}(z) &= \frac{2\nu}{z} u_\nu(z), \\ u_{\nu-1}(z) - u_{\nu+1}(z) &= 2 \frac{d}{dz} u_\nu(z), \end{aligned} \quad (2.120)$$

где под $u_\nu(z)$ понимается любая из функций $J_\nu(z), N_\nu(z), H_\nu^{(1,2)}(z)$. Отсюда, в частности, получаем

$$J'_0(z) = -J_1(z), \quad [H_0^{(1)}(z)]' = -H_1^{(1)}(z).$$

Пусть $z = x_1 + ix_2$, под операторами комплексного дифференцирования по переменным z и \bar{z} понимаем следующее:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\partial_1 - i\partial_2), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_1 + i\partial_2), \quad \partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k} \quad (k=1,2).$$

Тогда справедливы следующие формулы комплексного дифференцирования цилиндрических функций:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n}{\partial z^n} J_0(\gamma r) &= \left(-\frac{\gamma}{2}\right)^n e^{-in\theta} J_n(\gamma r), \\ \frac{\partial^n}{\partial \bar{z}^n} J_0(\gamma r) &= \left(-\frac{\gamma}{2}\right)^n e^{in\theta} J_n(\gamma r), \\ \frac{\partial^n}{\partial z^n} H_0^{(1)}(\gamma r) &= \left(-\frac{\gamma}{2}\right)^n e^{-in\theta} H_n^{(1)}(\gamma r), \\ \frac{\partial^n}{\partial \bar{z}^n} H_0^{(1)}(\gamma r) &= \left(-\frac{\gamma}{2}\right)^n e^{in\theta} H_n^{(1)}(\gamma r), \\ \gamma > 0, \quad z &= re^{i\theta}. \end{aligned} \tag{2.121}$$

Пусть $u_1(z), u_2(z)$ — любые два частных решения уравнения Бесселя $L(u) = 0$. Под их вронскианом понимается определитель вида

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_1(z), u_2(z) \\ u'_1(z), u'_2(z) \end{vmatrix} = u_1(z)u'_2(z) - u_2(z)u'_1(z).$$

Рассматривая соотношение $u_2 L(u_1) - u_1 L(u_2) = 0$, приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{d\Delta}{dz} + \frac{\Delta}{z} = 0,$$

откуда находим

$$\Delta = u_1(z)u'_2(z) - u_2(z)u'_1(z) = \frac{c}{z}.$$

Константа c зависит от выбора частных решений u_1, u_2 .

Так, при $u_1(z) = J_\nu(z), u_2(z) = J_{-\nu}(z)$ получаем

$$J'_\nu(z)J_{-\nu}(z) - J_\nu(z)J'_{-\nu}(z) = J_{-\nu+1}(z)J_\nu(z) + J_{-\nu}(z)J_{\nu-1}(z) = \frac{2\sin \pi\nu}{\pi z}.$$

Для функций Ханкеля имеем

$$H_{\nu}^{(1)}(z) \frac{d}{dz} H_{\nu}^{(2)}(z) - H_{\nu}^{(2)}(z) \frac{d}{dz} H_{\nu}^{(1)}(z) = -\frac{4i}{\pi z},$$

а также

$$J_{\nu}(z) \frac{d}{dz} H_{\nu}^{(1,2)}(z) - H_{\nu}^{(1,2)}(z) \frac{d}{dz} J_{\nu}(z) = \pm \frac{2i}{\pi z}.$$

Производящей функцией для $J_n(z)$ является экспонента

$$\exp\left\{\frac{1}{2}z\left(t-\frac{1}{t}\right)\right\}.$$

Точнее, имеет место равенство

$$e^{\frac{1}{2}z\left(\frac{t-1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(z), \quad t \neq 0. \quad (2.122)$$

В частности, полагая здесь сначала $t = ie^{i\theta}$, затем $t = e^{i\theta}$, получаем следующие ряды Фурье (формулы Якоби–Ангера):

$$\begin{aligned} e^{iz\cos\theta} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(z) e^{in\theta} = J_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(z) \cos n\theta, \\ e^{iz\sin\theta} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) e^{in\theta} = J_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(z) \left(e^{in\theta} + (-1)^n e^{-in\theta} \right). \end{aligned} \quad (2.123)$$

Пусть $R = \sqrt{\rho^2 - 2\rho r \cos\varphi + r^2}$, тогда имеет место следующая теорема сложения для функции Бесселя $J_0(R)$:

$$J_0(R) = J_0(\rho) J_0(r) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} J_m(\rho) J_m(r) \cos m\varphi.$$

Более общая теорема сложения (Графа) имеет вид

$$e^{i\nu\psi} Z_{\nu}(mR) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(m\rho) Z_{\nu+k}(mr) e^{ik\phi}, \quad e^{i\psi} = \frac{r - \rho e^{-i\phi}}{R}, \quad \rho < r, \quad (2.124)$$

где m — произвольное комплексное число, $r > 0$, $\rho > 0$, $R > 0$ представляют собой стороны треугольника, φ — угол между сторонами r и ρ , $0 < \psi < \pi/2$ — угол, противолежащий стороне ρ (рис. 2.15). Под $Z_{\nu}(mR)$ понимается любая из цилиндрических функций $J_{\nu}(mR)$, $H_{\nu}^{(1,2)}(mR)$, $N_{\nu}(mR)$, причем при $Z_{\nu} = J_{\nu}$ ограничение $\rho < r$ снимается.

Приведем еще теорему сложения (Неймана)

$$Z_{\nu}(u \pm v) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Z_{\nu+k}(u) J_k(v), \quad |v| < |u|.$$

Если ν — целое и $Z_{\nu} = J_{\nu}$, то это ограничение можно снять.

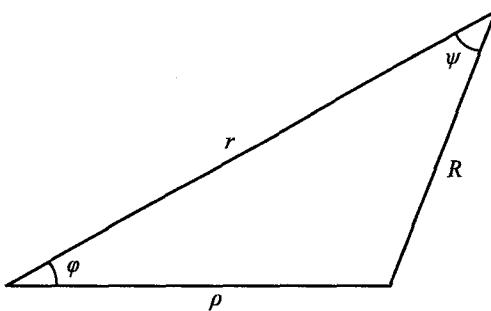


Рис. 2.15. К теореме сложения Графа

Иногда полезно воспользоваться теоремой умножения

$$J_\nu(\lambda z) = \lambda^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (\lambda^2 - 1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^k J_{\nu+k}(z),$$

которая в данном варианте справедлива при любом λ .

Модифицированные функции Бесселя определяются при помощи равенств

$$I_\nu(z) = e^{\frac{i\pi\nu}{2}} J_\nu(iz),$$

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} e^{\frac{i\pi\nu+1}{2}} H_\nu^{(1)}(iz), \quad |\arg z| < \pi,$$

справедливых при любом действительном или комплексном ν . Если ν не является целым числом, то модифицированные функции Бесселя $I_\nu(z)$ и $I_{-\nu}(z)$ представляют собой два линейно независимых частных решения дифференциального уравнения

$$z^2 u'' + zu' - (z^2 + \nu^2)u = 0.$$

Если $\nu = n$ — целое число, то $I_n(z) = I_{-n}(z)$. В этом случае вторым линейно независимым частным решением этого уравнения служит функция Макдональда $K_n(z)$.

Представления модифицированных функций в виде рядов вытекает из соответствующих формул (2.117), (2.118). Имеем

$$I_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}}{k! \Gamma(k+\nu+1)},$$

$$K_n(z) = (-1)^{n+1} I_n(z) \ln \frac{z}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} + \quad (2.125)$$

$$+ \frac{1}{2} (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}}{k!(k+n)!} \{ \psi(n+k+1) + \psi(k+1) \}.$$

В частности,

$$K_0(z) = -I_0(z) \ln \frac{z}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2} \psi(k+1),$$

$$K_1(z) = I_1(z) \ln \frac{z}{2} + \frac{1}{z} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+1}}{k!(k+1)!} \{\psi(k+2) + \psi(k+1)\}.$$

Отсюда следуют асимптотики в окрестности нуля (ν — фиксировано)

$$I_\nu(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} + O(z^2) \quad (\nu \neq -1, -2, \dots),$$

$$K_0(z) = -\ln z + O(1),$$

$$K_n(z) \sim \frac{(n-1)!}{2} \left(\frac{2}{z}\right)^n.$$

В окрестности бесконечно удаленной точки асимптотические формулы для модифицированных функций Бесселя имеют вид (ν — фиксировано)

$$\begin{aligned} I_\nu(z) &= \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right\}, \\ K_\nu(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right\}. \end{aligned} \tag{2.126}$$

Рекуррентные соотношения для модифицированных функций Бесселя вытекают из (2.120) при $z \rightarrow iz$. Получаем

$$I_{\nu-1}(z) - I_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} I_\nu(z),$$

$$I_{\nu-1}(z) + I_{\nu+1}(z) = 2 \frac{d}{dz} I_\nu(z),$$

$$K_{\nu-1}(z) - K_{\nu+1}(z) = -\frac{2\nu}{z} K_\nu(z),$$

$$K_{\nu-1}(z) + K_{\nu+1}(z) = -2 \frac{d}{dz} K_\nu(z).$$

В частности,

$$I'_0(z) = I_1(z), \quad K'_0(z) = -K_1(z).$$

Имеют место полезные конечные соотношения, содержащие модифицированные функции Бесселя,

$$I_\nu(z) \frac{\partial}{\partial z} I_{-\nu}(z) - I_{-\nu}(z) \frac{\partial}{\partial z} I_\nu(z) = -\frac{2}{\pi z} \sin \pi \nu,$$

$$I_\nu(z) \frac{\partial}{\partial z} K_\nu(z) - K_\nu(z) \frac{\partial}{\partial z} I_\nu(z) = -\frac{1}{z},$$

$$I_\nu(z) I_{-\nu+1}(z) - I_{-\nu}(z) I_{\nu-1}(z) = -\frac{2}{\pi z} \sin \pi \nu,$$

$$K_{\nu+1}(z) I_\nu(z) + K_\nu(z) I_{\nu+1}(z) = \frac{1}{z}.$$

Из формул (2.123), заменив z на iz , получаем следующие разложения:

$$e^{z \cos \theta} = I_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_n(z) \cos n\theta, \quad e^{z \sin \theta} = I_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_n(z) \cos \left(\frac{\pi n}{2} - n\theta \right),$$

в частности,

$$e^z = I_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_n(z).$$

Отметим также две простейшие теоремы сложения, а также теорему умножения

$$I_\nu(R) e^{i\nu\psi} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k I_{\nu+k}(r) I_k(\rho) e^{ik\phi},$$

$$K_\nu(R) e^{i\nu\psi} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} K_{\nu+k}(r) I_k(\rho) e^{ik\phi}, \quad (2.127)$$

$$\begin{Bmatrix} I_\nu(\lambda z) \\ K_\nu(\lambda z) \end{Bmatrix} = \lambda^{\pm\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2 - 1)^k}{k!} \left(\frac{z}{2} \right)^k \begin{Bmatrix} I_{\nu \pm k}(z) \\ K_{\nu \pm k}(z) \end{Bmatrix}, \quad |\lambda^2 - 1| < 1.$$

Если в верхней формуле взяты верхние знаки, то ограничение на λ снимается. Некоторые оценки

$$|J_\nu(r)| \leq 1 \quad (\nu \geq 0), \quad |J_\nu(r)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\nu \geq 1),$$

$$|J_\nu(z)| \leq \frac{e^{|Im z|}}{\Gamma(\nu+1)} \left| \frac{z}{2} \right|^\nu \quad \left(\nu \geq -\frac{1}{2} \right),$$

$$K_{n+1}(r) > K_n(r) \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$|H_{n+1}^{(1,2)}(z)| > |H_n^{(1,2)}(z)|, \quad z = x, ix, \quad x > 0.$$

В задачах математической физики используются разложения функций $f(x)$ в ряды по функциям Бесселя. Приведем некоторые из них [8, 10, 16].

Ряды Фурье–Бесселя для функции $f(x)$ на интервале $(0, l)$ имеют вид

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_{\nu} \left(\mu_{kv} \frac{x}{l} \right), \quad \nu > -1,$$

где $\mu_{1\nu} < \mu_{2\nu} < \mu_{3\nu} < \dots$ — положительные корни уравнения

$$J_{\nu}(x) = 0.$$

Коэффициенты разложения a_k определяются из условий ортогональности

$$\int_0^l x J_{\nu} \left(\mu_{iv} \frac{x}{l} \right) J_{\nu} \left(\mu_{iv} \frac{x}{l} \right) dx = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \frac{l^2}{2} J_{\nu+1}^2(\mu_{iv}), & i = j, \nu > -1 \end{cases}$$

по формуле

$$a_k = \frac{2}{l^2 J_{\nu+1}^2(\mu_{kv})} \int_0^l x f(x) J_{\nu} \left(\mu_{kv} \frac{x}{l} \right) dx.$$

Например, разложение Фурье–Бесселя функции $f(x) = 1$ на $(0, l)$ имеет вид

$$1 = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_k x)}{\mu_k J_1(\mu_k)},$$

где $\mu_k > 0$ — последовательные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

Имеет место теорема [20, 32, 38]. Пусть $\int_0^l \sqrt{t} |f(t)| dt < \infty$ и в любом интервале (a, b) ,

где $0 < a < b < l$, функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию. Тогда при $n > -\frac{1}{2}$ для $\forall x \in (a, b)$ справедливо разложение в ряд

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_n \left(\mu_{kn} x \right).$$

Ряды Дини определяются следующим образом

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k J_{\nu} \left(\mu_{kv} \frac{x}{l} \right),$$

где $\mu_{1\nu} < \mu_{2\nu} < \dots$ — положительные корни уравнения

$$\alpha J_{\nu}(x) + \beta x J'_{\nu}(x) = 0, \quad \frac{\alpha}{\beta} + \nu > 0.$$

Коэффициенты b_k вычисляются по формуле

$$b_k = \frac{2}{l^2 \left(1 + \frac{\alpha^2 - \nu^2 \beta^2}{\beta^2 \mu_{kv}^2} \right) J_{\nu}^2(\mu_{kv})} \int_0^l x f(x) J_{\nu} \left(\mu_{kv} \frac{x}{l} \right) dx.$$

Ниже приведено несколько первых значений величин β_{mn} — n -й корень уравнения $J_m(\pi\beta)=0$ и α_{mn} — n -й корень уравнения $\frac{d}{d\alpha}J_m(\pi\alpha)=0$. Эти данные взяты из книги [30].

β_{mn}	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
$m=0$	0,7655	1,7571	2,7546	3,7535	4,7527
$m=1$	1,2197	2,2331	3,2383	4,2411	5,2429
$m=2$	1,6348	2,6792	3,6988	4,7097	5,7168
$m=3$	2,0308	3,1070	4,1428	5,1639	6,1781
$m=4$	2,4153	3,5221	4,5748	5,6073	6,6254

α_{mn}	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
$m=0$	0,0000	1,2197	2,2331	3,2383	4,2411
$m=1$	0,5861	1,6970	2,7140	3,7261	4,7312
$m=2$	0,9722	2,1346	3,1734	4,1923	5,2036
$m=3$	1,3373	2,5513	3,6115	4,6428	5,6624
$m=4$	1,6926	2,9547	4,0368	5,0815	6,1103

Асимптотические формулы для этих величин имеют вид

$$\beta_{m1} \sim \frac{m}{\pi} + 0,5907m^{\frac{1}{3}},$$

$$\alpha_{m1} \sim \frac{m}{\pi} + 0,2574m^{\frac{1}{3}}, \quad m \gg 1,$$

$$\beta_{mn} \sim \delta_{mn} - \frac{4m^2 - 1}{8\delta_{mn}}, \quad \delta_{mn} = n + \frac{m}{2} - \frac{1}{4}, \quad m < n, \quad n \gg 1,$$

$$\alpha_{mn} \sim \delta_{mn}^* - \frac{4m^2 - 1}{8\delta_{mn}^*}, \quad \delta_{mn}^* = n + \frac{m}{2} - \frac{3}{4}, \quad m < n, \quad n \gg 1.$$

Разложения Неймана. Если $f(z)$ аналитична в круге D с центром в начале координат и границей C , то в любой точке $z \in D$ она представима формулой Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{t-z} dt. \quad (2.128)$$

Для ядра Коши справедлива формула [10]

$$\frac{1}{t-z} = O_0(t) J_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} O_n(t) J_n(z), \quad |z| < |t|, \quad (2.129)$$

где многочлены Неймана $O_n(t)$ определяются выражениями

$$O_{2n}(t) = \frac{n}{2} \sum_{m=0}^n \frac{(n+m-1)!}{(n-m)!} \left(\frac{2}{t}\right)^{2m+1},$$

$$O_{2n+1}(t) = \frac{1}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right) \sum_{m=0}^n \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \left(\frac{2}{t} \right)^{2m+2}.$$

Например,

$$O_0(t) = \frac{1}{t}, \quad O_1(t) = \frac{1}{t^2}, \quad O_2(t) = \frac{1}{t} + \frac{4}{t^3}, \dots$$

Заменяя ядро Коши в (2.128) рядом (2.129) и интегрируя почленно по окружности C_1 (это возможно, так как на C_1 он равномерно сходится), получаем ряд Неймана для функции $f(z)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_n(z), \quad (2.130)$$

где

$$a_0 = f(0), \quad a_n = \frac{1}{\pi i} \int_{C_1} O_n(t) f(t) dt.$$

Интегрирование здесь производится по окружности C_1 любого радиуса, лишь бы внутри $f(z)$ не имела особых точек.

Для степенной функции легко находятся коэффициенты a_n , получаем следующее разложение Неймана:

$$\left(\frac{z}{2} \right)^v = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v+2n}{n!} \Gamma(v+n) J_{v+2n}(z), \quad v \neq -1, -2, -\dots$$

Пусть теперь

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k.$$

Заменяя степень z ее рядом Неймана, получим ряд Гегенбауэра

$$f(z) z^v = \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_{v+n}(z), \quad (2.131)$$

где

$$a_n = (v+n) 2^{v+n} \sum_{s=0}^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(v+n-s)}{2^{2s} s!} b_{n-2s}.$$

Таким образом, по ряду Маклорена для функции $f(z)$ восстанавливается ее ряд (2.130). Обратно, если задан ряд Гегенбауэра (2.131), то однозначно определяется ее ряд Маклорена при помощи соотношения

$$b_k \Gamma(v+k+1) = 2^{-k-v} \sum_{m=0}^{\frac{k}{2}} (-1)^m \frac{\Gamma(v+k) a_{k-2m}}{m! \Gamma(v+k-m+1)}.$$

Разложение Шлемильха. Оно вытекает из решения интегрального уравнения Шлемильха

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} F(x \sin \varphi) d\varphi. \quad (2.132)$$

Здесь $f(x) \in C^1[0, \pi]$ — заданная функция с производной ограниченной вариации, $F(x)$ — искомое решение, разыскиваемое в том же классе функций, что и $f(x)$. Единственное решение этого уравнения, найденное Шлемильхом, таково [20]:

$$F(x) = f(0) + x \int_0^{\pi/2} f'(x \sin \varphi) d\varphi.$$

Разлагая в (2.132) подынтегральную функцию в ряд Фурье по косинусам, меняя местами операции суммирования и интегрирования и привлекая интегральное представление

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(nx \sin \varphi) d\varphi = J_0(nx),$$

получаем на $(0, \pi)$

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_0(kx), \\ a_0 &= f(0) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} u du \int_0^{\pi/2} f'(u \sin \varphi) d\varphi, \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u \cos n u du \int_0^{\pi/2} f'(u \sin \varphi) d\varphi \quad (n=1, 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

Приведем несколько разложений типа Шлемильха.

$$1. \frac{\pi^2}{8} - \frac{|x|}{2} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0[(2m-1)x]}{(2m-1)^2}, \quad -\pi < x < \pi.$$

$$2. 0 = \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m J_0(mx), \quad 0 < x < \pi.$$

При $x = \pi$ ряд в правой части расходится к ∞ .

$$3. \sqrt{x^2 - \pi^2} - \frac{1}{2}x - \pi \arccos\left(\frac{\pi}{x}\right) + \frac{\pi^2}{8} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0[(2m-1)x]}{(2m-1)^2}, \quad \pi < x < 2\pi.$$

Цилиндрические функции с полуцелым индексом (сферические функции Бесселя) определяются следующими конечными выражениями [8, 20]:

$$J_{\frac{n+1}{2}}(z) = (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi}} z^{\frac{n+1}{2}} \left(\frac{d}{zdz} \right)^n \frac{\sin z}{z},$$

$$J_{-\frac{n+1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} z^{\frac{n+1}{2}} \left(\frac{d}{zdz} \right)^n \frac{\cos z}{z},$$

$$K_{\frac{n+1}{2}}(z) = (-1)^n \sqrt{\frac{\pi}{2z}} z^{n+1} \left(\frac{d}{zdz} \right)^n \frac{e^{-z}}{z} = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \sum_{k=0}^n \frac{(n+k)!}{k!(n-k)!} \left(\frac{1}{2z} \right)^k,$$

$$H_{\frac{n+1}{2}}^{(1)}(z) = -i(-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi z}} z^{n+1} \left(\frac{d}{z dz}\right)^n \frac{e^{iz}}{z},$$

$$H_{-\frac{n-1}{2}}^{(1)}(z) = i(-1)^n H_{\frac{n+1}{2}}^{(1)}(z).$$

В частности,

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z, \quad I_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \operatorname{sh} z,$$

$$H_{\frac{1}{2}}^{(1)}(z) = -i H_{-\frac{1}{2}}^{(1)}(z) = -i \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{iz},$$

$$K_{\frac{\pm 1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}.$$

Некоторые интегральные представления и интегралы, содержащие цилиндрические функции. Интегральное представление Бесселя [3, 8, 10]. В разложении (2.122) полагаем $t = e^{i\varphi}$. Умножая левую и правую части полученного равенства на $e^{-im\varphi}$, интегрируя по φ в пределах от 0 до 2π и учитывая условия ортогональности

$$(e^{-im\varphi}, e^{in\varphi}) = \begin{cases} 2\pi, & m = n, \\ 0, & m \neq n, \end{cases}$$

получаем интегральное представление Бесселя:

$$2\pi J_n(z) = \int_0^{2\pi} e^{-in\varphi} \exp(iz \sin \varphi) d\varphi = 2 \int_0^\pi \cos(z \sin \varphi - n\varphi) d\varphi.$$

Интегральное представление Пуассона имеет вид [3, 8, 10]

$$\Gamma\left(v + \frac{1}{2}\right) J_v(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{z}{2}\right)^v \int_0^{\pi/2} \cos(z \sin \varphi) (\cos \varphi)^{2v} d\varphi, \quad \operatorname{Re} v > -\frac{1}{2}. \quad (2.133)$$

Для проверки этого равенства разложим $\cos(z \sin \varphi)$ в ряд по степеням z и подставим под интеграл. Получим

$$\int_0^{\pi/2} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(z \sin \varphi)^{2m}}{(2m)!} (\cos \varphi)^{2v} d\varphi.$$

Меняя местами операции интегрирования и суммирования (это возможно в силу равномерной сходимости ряда) и используя определение бета-функции Эйлера [6, 27]

$$\beta(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} = 2 \int_0^{\pi/2} (\sin t)^{2z-1} (\cos t)^{2w-1} dt \quad (\operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Re} w > 0),$$

а также формулу удвоения для гамма-функции при $z = m + \frac{1}{2}$

$$\Gamma(2z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2^{2z-\frac{1}{2}} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right),$$

сводим (2.133) к равенству

$$J_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2m+\nu}}{\Gamma(m+1)\Gamma(\nu+m+1)},$$

что и требовалось.

Приведем еще интегральное представление функции Макдональда, справедливое при $\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}$, $\operatorname{Re}z > 0$ [8]

$$\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) K_\nu(z) = \sqrt{\pi} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_1^\infty e^{-zu} (t^2 - 1)^{\nu - \frac{1}{2}} dt.$$

Некоторые часто встречающиеся интегралы (эти данные взяты из различных справочников и оригинальных статей):

$$\int_0^{\pi/2} J_\mu(\alpha \sin \theta) (\sin \theta)^{\mu+1} (\cos \theta)^{2\rho+1} d\theta = 2^\rho \Gamma(\rho+1) \alpha^{\rho-1} J_{\rho+\mu+1}(\alpha), \quad \operatorname{Re}\rho > -1, \quad \operatorname{Re}\mu > -1,$$

$$\int_0^{\pi/2} J_\nu(2z \sin \theta) (\sin \theta)^\nu (\cos \theta)^{2\nu} d\theta = \frac{\sqrt{\pi}}{2z^\nu} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) [J_\nu(z)]^2, \quad \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2},$$

$$\int_0^{\pi/2} J_{\nu+\mu}(2z \cos \theta) \cos[(\mu-\nu)\theta] d\theta = \frac{\pi}{2} J_\nu(z) J_\mu(z), \quad \operatorname{Re}(\nu+\mu) > -1,$$

$$\int_0^\pi J_0(2z \sin \theta) \cos(2n\theta) d\theta = \pi [J_n(z)]^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\int_0^\infty e^{-\gamma t} J_\mu(\alpha t) t^\mu dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (2\alpha)^\mu \Gamma\left(\mu + \frac{1}{2}\right) (\gamma^2 + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}-\mu}, \quad \operatorname{Re}(2\mu+1) > 0, \quad \operatorname{Re}(\gamma \pm i\alpha) > 0,$$

$$\int_0^\infty e^{-\gamma t} J_\mu(\alpha t) dt = \frac{\left(\sqrt{\gamma^2 + \alpha^2} - \gamma\right)^\mu}{\alpha^\mu \sqrt{\gamma^2 + \alpha^2}}, \quad \operatorname{Re}\mu > -1, \quad \operatorname{Re}(\gamma \pm i\alpha) > 0,$$

$$\int_0^\infty J_\mu(\alpha t) t^{\rho-1} dt = \frac{2^{\rho-1} \Gamma\left(\frac{\mu+\rho}{2}\right)}{\alpha^\rho \Gamma\left(1 + \frac{\mu-\rho}{2}\right)}, \quad -\operatorname{Re}\mu < \operatorname{Re}\rho < \frac{3}{2}, \quad \alpha > 0,$$

$$\int_0^\infty J_\mu(\alpha t) e^{-\gamma^2 t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\gamma} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{8\gamma^2}\right) I_{\frac{\mu}{2}}\left(\frac{\alpha^2}{8\gamma^2}\right), \quad \operatorname{Re}\gamma^2 > 0, \quad \operatorname{Re}\mu > -1,$$

$$\int_0^\infty J_\mu(\alpha t) e^{-\gamma^2 t^2} t^{\mu+1} dt = \frac{\alpha^\mu}{(2\gamma^2)^{\mu+1}} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{4\gamma^2}\right), \quad \operatorname{Re}\mu > -1, \quad \operatorname{Re}\gamma^2 > 0,$$

$$\int_0^\infty J_\nu(\alpha t) J_\nu(\beta t) e^{-\gamma^2 t^2} t dt = \frac{1}{2\gamma^2} \exp\left(-\frac{\alpha^2 + \beta^2}{4\gamma^2}\right) I_\nu\left(\frac{\alpha\beta}{2\gamma^2}\right), \quad \operatorname{Re}\nu > -1, \quad \operatorname{Re}\gamma^2 > 0,$$

$$\int_0^\infty K_\nu(\beta t) t^{\mu-1} dt = 2^{\mu-2} \beta^{-\mu} \Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right), \quad \operatorname{Re}(\mu \pm \nu) > 0, \quad \operatorname{Re}\beta > 0,$$

$$\int_0^1 \frac{1}{t} \exp\left(-\frac{t}{2} - \frac{z^2 + Z^2}{2t}\right) K_\nu\left(\frac{zZ}{t}\right) dt = 2K_\nu(z) K_\nu(Z),$$

$$|\arg z| < \pi, \quad |\arg Z| < \pi, \quad |\arg(z+Z)| < \frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{t} \exp\left(-\frac{t}{2} - \frac{x^2 + X^2}{2t}\right) I_\nu\left(\frac{xX}{t}\right) dt = \begin{cases} 2I_\nu(x) K_\nu(X), & x < X, \\ 2K_\nu(x) I_\nu(X), & x > X, \end{cases}$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-y\sqrt{u^2-k^2}}}{\sqrt{u^2-k^2}} \cos(xu) du = -\frac{\pi i}{2} H_0^{(2)}\left(k\sqrt{x^2+y^2}\right),$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ik(\eta \sin \theta + \sqrt{\rho^2 + \eta^2})}}{\sqrt{\rho^2 + \eta^2}} d\eta = i\pi H_0^{(1)}(k\rho \cos \theta),$$

$$\int_0^\infty J_m(bt) \frac{K_n(a\sqrt{t^2+x^2})}{(t^2+x^2)^{n/2}} t^{m+1} dt = \left(\frac{b}{a}\right)^m \left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{x}\right)^{n-m-1} K_{n-m-1}(x\sqrt{a^2+b^2}),$$

$$a > 0, b > 0, m > -1,$$

$$\int_0^\infty J_0(r\xi) J_0(x\xi) d\xi = \frac{2}{\pi(r+x)} K\left(\frac{2\sqrt{rx}}{r+x}\right),$$

$K(z)$ — полный эллиптический интеграл 1-го рода [4, 6].

$$\int_0^\infty \xi J_0(r\xi) J_0(x\xi) d\xi = \frac{1}{\sqrt{rx}} \delta(x-r),$$

$\delta(x)$ — дельта-функция Дирака.

$$\int_{-1}^1 \frac{\cos m\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi = \pi J_0(m),$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\cos m\xi d\xi}{(\xi - x) \sqrt{1-\xi^2}} = 2\pi \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k J_{2k}(m) U_{2k-1}(x),$$

U_k — полином Чебышева второго рода [10, 17].

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-\xi^2} U_{2k-1}(\xi) \sin m\xi d\xi = (-1)^{k+1} 2k\pi J_{2k}(m), \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-z\sqrt{\rho^2-k^2}} J_0(r\rho) \rho}{\sqrt{\rho^2-k^2}} d\rho = \frac{e^{-ikR}}{R}, \quad R = \sqrt{r^2+z^2}, \quad \operatorname{Im} k < 0.$$

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ 2

1. Абрамович М. Справочник по специальным функциям / М. Абрамович, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.
2. Анто А. Математика для электро- и радиоинженеров / А. Анто. М.: Наука, 1965. 780 с.
3. Арсенин В. Я. Методы математической физики и специальные функции / В. Я. Арсенин. М.: Наука, 1974. 431 с.
4. Ахисзер Н. И. Элементы теории эллиптических функций / Н. И. Ахисзер. М.-Л.: Гостехиздат, 1948. 291 с.
5. Бабич В. М. Линейные уравнения математической физики / В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин. М.: Наука, 1964. 368 с.
6. Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Маттье / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. М.: Наука, 1967. 300 с.
7. Берлинкур Д. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях / Д. Берлинкур, Д. Керран, Г. Жаффе // Физическая акустика. Т. I. Методы и приборы ультразвуковых исследований. Ч. А. М.: Мир, 1966. С. 204–326.
8. Ватсон Г. Н. Теория Бесселевых функций. Ч. 1 / Г. Н. Ватсон. М.: Изд-во иностр. лит., 1949. 798 с.
9. Владимиров В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. М.: Наука, 1981. 512 с.
10. Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.
11. Гринченко В. Т. Механика связанных полей в элементах конструкций: в 5 т. Т. 5: Электроупругость / В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко, Н. А. Шульга. Киев: Наукова думка, 1989. 279 с.
12. Гурвиц А. Теория функции / А. Гурвиц, Р. Курант. М.: Наука, 1968. 648 с.
13. Гурса Э. Курс математического анализа. Т. II / Э. Гурса. М.–Л.: ОНТИ, 1936. 564 с.
14. Гюнтер Н. М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики / Н. М. Гюнтер. М.: ГИТГЛ, 1953. 416 с.
15. Джейффрис Г. Методы математической физики: [в 3 вып.]. Вып. 3 / Г. Джейффрис, Б. Свирлс. М.: Мир, 1970. 344 с.
16. Функции математической физики / Ж. Кампе де Ферье [и др.]. М.: ГИФМЛ, 1963. 102 с.
17. Корн Г. Справочник по математике: (для науч. работников и инженеров) / Г. Корн, Т. Корн. М.: Наука, 1973. 832 с.
18. Кошляков Н. С. Уравнения в частных производных математической физики / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. М.: Высш. шк., 1970. 712 с.
19. Кратцер А. Трансцендентные функции / А. Кратцер, В. Франц. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 466 с.
20. Кузьмин Р. О. Бесселевы функции / Р. О. Кузьмин. Л.–М.: ОНТИ, 1935. 244 с.
21. Купрадзе В. Д. Основные задачи математической теории дифракции: (установившиеся процессы) / В. Д. Купрадзе. М.–Л.: ОНТИ, 1935. 112 с.
22. Курант Р. Уравнения с частными производными / Р. Курант. М.: Мир, 1964. 830 с.
23. Курант Р. Методы математической физики. Т. 1 / Р. Курант, Д. Гильберт. М.–Л.: ГИТГЛ, 1951. 476 с.
24. Лаврентьев М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. М.: Наука, 1973. 736 с.

25. Ландау Л. Д. Теория упругости / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Наука, 1987. 204 с.
26. Ландау Л. Д. Электродинамика сплошных сред / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Физматгиз, 1959. 532 с.
27. Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации / Ю. Люк. М.: Мир, 1980. 608 с.
28. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных / В. П. Михайлов. М.: Наука, 1976. 392 с.
29. Морс Ф. М. Методы теоретической физики. Т. I / Ф. М. Морс, Г. Фешбах. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 930 с.
30. Морс Ф. М. Методы теоретической физики. Т. II / Ф. М. Морс, Г. Фешбах. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 886 с.
31. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. М.: Наука, 1966. 648 с.
32. Никифоров А. Ф. Основы теории специальных функций / А. Ф. Никифоров, В. Б. Уваров. М.: Наука, 1974. 304 с.
33. Новацкий В. Теория упругости / В. Новацкий. М.: Мир, 1975. 872 с.
34. Парトン В. З. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел / В. З. Парトン, Б. А. Кудрявцев. М.: Наука, 1988. 472 с.
35. Положий Г. Н. Уравнения математической физики / Г. Н. Положий. М.: Высш. шк., 1964. 560 с.
36. Радыгин В. М. Применение функций комплексного переменного в задачах физики и техники: учеб. пособие для вузов / В. М. Радыгин, О. В. Голубева. М.: Высш. шк., 1983. 160 с.
37. Розет Т. А. Элементы теории цилиндрических функций с приложениями к радиотехнике / Т. А. Розет. М.: Совет. радио, 1956. 224 с.
38. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. III, ч. 2 / В. И. Смирнов. М.–Л.: ГИТТЛ, 1949. 672 с.
39. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. IV / В. И. Смирнов. М.–Л.: ГИТТЛ, 1951. 804 с.
40. Соболев С. Л. Уравнения математической физики / С. Л. Соболев. М.: ГИТТЛ, 1954. 444 с.
41. Тиман А. Ф. Введение в теорию гармонических функций / А. Ф. Тиман, В. Н. Трофимов. М.: Наука, 1968. 208 с.
42. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. М.: Наука, 1977. 736 с.
43. Уэрмер Дж. Теория потенциала / Дж. Уэрмер. М.: Мир, 1980. 134 с.
44. Фильштинский Л. А. Функция Грина для составной пьезокерамической плоскости с межфазной трещиной / Л. А. Фильштинский, М. Л. Фильштинский // Приклад. математика и механика. 1994. Т. 58, Вып. 2. С. 159–166.
45. Эрмит Ш. Курс анализа / Ш. Эрмит. М.–Л.: ОНТИ, 1936. 384 с.
46. Янке Е. Таблицы функций с формулами и кривыми / Е. Янке, Ф. Эмде. М.: ГИФМЛ, 1959. 420 с.
47. Bardzokas D. I. Mathematical Methods in Electro-Magneto-Elasticity / D. I. Bardzokas, M. L. Filshinsky, L. A. Filshinsky. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2007. 530 p.
48. Cattaneo C. Sur une forme de l'équation de la Chaleur éliminant le paradoxe d'une propagation instantanée / C. Cattaneo // C. R. Acad. Sci. 1958. Vol. 247. P. 431–433.
49. Vernotte P. Les paradoxes de la théorie continue de l'équation de la chaleur / P. Vernotte // C. R Acad. Sci. 1958. Vol. 246. P. 3154–3155.

ГЛАВА 3

ЭЛЕМЕНТЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

3.1. Линейные нормированные пространства

Напомним определение линейного пространства. Поскольку набор элементов в рассматриваемых множествах может оказаться бесконечным, целесообразно ввести аксиоматическое определение.

Непустое множество L элементов x, y, z, \dots называется линейным или векторным пространством, если в нем введены операции сложения и умножения на число из поля $P(R$ или C) и $\forall x, y, z \in L$, и $\forall \alpha, \beta \in P$ выполняются следующие аксиомы:

1. $\alpha x + \beta y \in L$.
2. $x + y = y + x$, $x + (y + z) = (x + y) + z$.
3. \exists единственный элемент θ , такой что $x + \theta = x$.
4. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$.
5. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$, $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.
6. $1x = x$, $\theta x = 0$.
7. \exists элемент $-x$, такой что $x + (-x) = \theta$.

Нулевой элемент пространства $L: \theta$ обычно обозначается через 0.

Примеры.

1. На множестве всевозможных упорядоченных наборов из n действительных чисел $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n), \dots$ введем операции сложения и умножения на числа из R естественным образом

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n), \quad \lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n).$$

В результате получим линейное пространство. Здесь $\theta = (0, 0, \dots, 0)$, противоположный элемент $-x = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$.

2. Множество функций, непрерывных на $[a, b]$ с естественными операциями сложения и умножения на число, образует линейное пространство. В частности, множество всех многочленов с введенными линейными операциями есть линейное пространство.

3. Отрезок $[0, 1]$ с операциями сложения и умножения на числа из поля R , очевидно, не является линейным пространством.

Перейдем теперь к определению линейного нормированного пространства. Линейное пространство X называется нормированным, если $\forall x \in X$ определено вещественное число $\|x\|$ (норма x), удовлетворяющее следующим аксиомам:

1. $\|x\| \geq 0$ и $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$.

2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \forall \lambda \in P.$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in X.$

Расстояние между элементами x и $y \in X$ определяется так:

$$\rho(x, y) = \|x - y\|.$$

Такое определение позволяет ввести сходимость в X следующим образом.

Последовательность $\{x_n\} \subset X$ сходится к элементу $x \in X$, если

$$\rho(x, x_n) = \|x - x_n\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Такая сходимость называется сходимостью по норме пространства X (или сильной сходимостью).

Заметим, что из сходимости последовательности $\{x_n\} \subset X$ к x следует сходимость числовых последовательностей $\|x_n\| \rightarrow \|x\|, n \rightarrow \infty$. Этот факт вытекает из второго неравенства треугольника

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|. \quad (3.3)$$

Последовательность $\{x_n\} \subset X$ называется фундаментальной (последовательностью Коши), если $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$ такое, что

$$m, n > N \Rightarrow \|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

Отсюда следует, что для любого натурального p имеет место предельное соотношение

$$\|x_{n+p} - x_n\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

В конечномерном линейном нормированном пространстве X в силу принципа сходимости Больцано–Коши [23] всякая фундаментальная последовательность сходится к элементу из X . В общем случае это не так. Точнее, из сходимости последовательности в X следует ее фундаментальность

$$\|x_m - x_n\| = \|x_m - x + x - x_n\| \leq \|x_m - x\| + \|x - x_n\| \rightarrow 0, m, n \rightarrow \infty.$$

Обратное утверждение не всегда верно.

Линейное нормированное пространство, в котором всякая фундаментальная последовательность сходится (к элементу этого пространства) называется полным или банаховым пространством (B -пространством).

Приведем примеры линейных нормированных пространств.

1. Пространство R^n с элементами $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ с обычными линейными операциями сложения и умножения на число. Норма элемента

$$\|x\| = |x| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}.$$

Расстояние между элементами

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2}.$$

В данном пространстве сходимость по норме равносильна покоординатной сходимости.

2. Пространство R_p^n ($p \geq 1$). Запас элементов тот же, что в R^n , но норма вводится по-другому:

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p},$$

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^p \right)^{1/p}.$$

Сходимость здесь также равносильна покоординатной сходимости. Третья аксиома нормы (неравенство треугольника) проверяется с помощью неравенства Гельдера для конечных сумм (см. приложение Б).

$$\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q \right)^{1/q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

3. Пространство l^p ($p \geq 1$). Элементы этого пространства представляют собой бесконечные последовательности с p -сходимостью

$$x = (x_1, x_2, \dots), \quad \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty,$$

$$y = (y_1, y_2, \dots), \quad \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p < \infty$$

.....

.....

Норма элемента и расстояние между элементами определяются равенствами

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p}, \quad \rho(x, y) = \|x - y\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p \right)^{1/p}.$$

Выполнение неравенства треугольника проверяется при помощи p -неравенства Гельдера для бесконечных сумм (см. приложение Б).

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q \right)^{1/q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad p > 1.$$

При этом неравенство треугольника есть неравенство Минковского.

4. Пространство ограниченных бесконечных последовательностей $m = l^\infty$ с элементами $x = (x_1, x_2, \dots)$, $y = (y_1, y_2, \dots)$, ... и нормой $\|x\| = \sup_{k=1,2,\dots} |x_k|$. Неравенство треугольника проверяется так:

$$|x_k + y_k| \leq |x_k| + |y_k| \leq \sup_k |x_k| + \sup_k |y_k| \Rightarrow \sup_k |x_k + y_k| \leq \sup_k |x_k| + \sup_k |y_k|.$$

5. Функциональное пространство $C[a, b]$ — линейное множество всех непрерывных на $[a, b]$ функций, на котором введена норма

$$\|x\| = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|.$$

Так введенная норма называется равномерной или чебышевской, поскольку сходимость по $\|x\|_{C[a, b]}$ — равномерная.

6. Пространство $C^m[a, b]$ — линейное пространство m раз непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций, на котором введена норма

$$\|x\| = \sum_{k=0}^m \max_{[a, b]} |x^{(k)}(t)|. \quad (3.4)$$

Сходимость по норме (3.4) — это равномерная сходимость последовательностей производных $x^{(k)}(t)$ до m -го порядка включительно.

7. Пространство $\mathcal{L}_*^p[a, b]$ — линейное пространство всех непрерывных на $[a, b]$ функций с нормой

$$\|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Неравенство треугольника проверяется с помощью неравенства Гельдера для интегралов (см. приложение Б).

$$\int_a^b |x(t)y(t)| dt \leq \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_a^b |y(t)|^q dt \right)^{1/q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Сходимость в этом пространстве называется сходимостью в среднем.

Линейные нормированные пространства, рассмотренные в примерах, за исключением $\mathcal{L}_*^p[a, b]$, являются банаховыми. Пространство $\mathcal{L}_*^p[a, b]$ не полно в своей метрике. В самом деле, последовательность, составленная из функции

$$x_n(t) = \begin{cases} -1, & t \in \left[-1, -\frac{1}{n}\right], \\ nt, & t \in \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right], \\ 1, & t \in \left[\frac{1}{n}, 1\right], \end{cases}$$

является фундаментальной (в среднеквадратичной метрике). Но предел этой последовательности — разрывная функция

$$x_n(t) \rightarrow \begin{cases} -1, & t \in [-1, 0), \\ 0, & t = 0, \\ 1, & t \in (0, +1]. \end{cases}$$

Таким образом, эта фундаментальная последовательность сходится (в себе), но не к элементу из $\mathcal{L}_*[a, b]$.

Следует иметь в виду весьма общую теорему о пополнении метрических (нормированных) пространств, которая утверждает, что любое (не полное) пространство X можно пополнить в следующем смысле [12]. Существует полное пространство X^* , такое что исходное пространство X изометрично плотному в X^* подпространству $X_1 \subset X^*$ (относительно метрических пространств см. приложение А).

Естественным обобщением приведенных выше линейных нормированных пространств, построенных на функциях одной переменной, является выход в пространства n -измерений. Пусть $\Omega \in R^n$ — ограниченная область, $\partial\Omega$ — ее граница, $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ — замыкание множества Ω .

Линейное пространство всех непрерывных на $\bar{\Omega}$ функций $u(x)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$ с нормой

$$\|u\|_{C(\bar{\Omega})} = \max_{x \in \bar{\Omega}} |u(x)| \quad (3.5)$$

обозначается через $C(\bar{\Omega})$. Это пространство банаево, так как на $\bar{\Omega}$ справедлив критерий равномерной сходимости Коши.

Рассмотрим теперь пространства дифференцируемых функций нескольких переменных. Введем так называемый мультииндекс — целочисленный вектор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_s \geq 0$ ($s = 1, 2, \dots, n$) и примем такие обозначения для частных производных

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} u(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Здесь число $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ (длина мультииндекса) определяет порядок производной. Например, если $\alpha = (1, 0, 3)$, то

$$D^\alpha u = \frac{\partial^4 u}{\partial x_1 \partial x_2^3}.$$

Будем говорить, что функция $u(x)$ принадлежит классу $C^k(\Omega)$, если она определена и непрерывна в Ω вместе со всеми своими производными до k -го порядка включительно. В том случае, когда $u(x)$ и все ее производные до порядка k включительно непрерывны в Ω и непрерывно продолжимы на границу $\partial\Omega$, т. е. непрерывны в $\bar{\Omega}$, говорят, что $u(x) \in C^k(\bar{\Omega})$.

Норма в классе $C^k(\bar{\Omega})$ вводится следующим образом:

$$\|u\|_{C^k(\bar{\Omega})} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \max_{x \in \bar{\Omega}} |D^\alpha u(x)|. \quad (3.6)$$

Пространства $C^k(\bar{\Omega})$, $k \geq 1$ полны в своих нормах, т. е. банаевы.

В чебышевской метрике (3.5) пространство k раз непрерывно дифференцируемых функций является линейным многообразием (не замкнутым) в банаховом пространстве $C(\bar{\Omega})$. Это следует из факта существования последовательностей непрерывно дифференцируемых функций, сходящихся по норме $C(\bar{\Omega})$ к непрерывной функции, которая ни в одной точке $\bar{\Omega}$ не имеет производной [24].

Приведем некоторые физические прототипы рассмотренных банаховых пространств.

1. Рассмотрим пространство импульсных амплитудно-модулированных сигналов (рис. 3.1). Пусть параметры сигнала T и τ фиксированы. Тогда каждый такой сигнал есть вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$. Если на линейном пространстве сигналов ввести норму l^p при $p=1$, то

$$\|x\| = \sum_k |x_k|$$

пропорциональна площади под кривой сигнала.

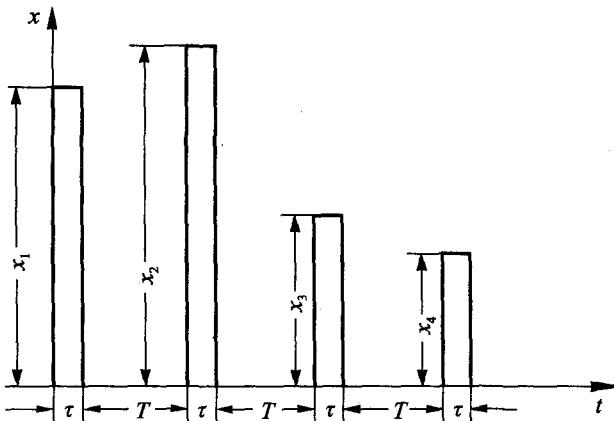


Рис. 3.1. Импульсный амплитудно-модулированный сигнал

При $p=2$ квадрат нормы пропорционален энергии сигнала $x(t)$. Представление физических сигналов как элементов пространства l^p целесообразно, когда сигналы дискретны, т. е. квантованы во времени.

2. Рассмотрим теперь непрерывную систему с входной переменной u , выходной переменной x и импульсной характеристикой (функцией Грина) W . В любой момент времени t эти три функции связаны уравнением

$$x(t) = \int_{t_0}^t W(t,s)u(s)ds, \quad t \geq t_0. \quad (3.7)$$

Соотношение (3.7) описывает разнообразные физические системы, находящиеся в состоянии покоя в момент времени t_0 . Одной из задач управления такой системой является следующая.

За фиксированное время $T = t_1 - t_0$ привести систему в заданное состояние $x^* = x(T)$ при минимизации нормы управления $\|u\|$. Например, в системе управления ракетой-носителем величина u может обозначать угловое отклонение оси реактивного двигателя от расчетного направления, поэтому величина u в каждый момент времени должна быть достаточно малой, а мерой u может служить

$$\|u\| = \sup_{t \in [t_0, t_1]} |u(t)|.$$

Напомним теперь некоторые важные понятия, на которые придется опираться в дальнейшем.

Множество $Q \subset X$ называется плотным (всюду плотным) в X , если $\bar{Q} = X$. Иными словами, Q плотно в X , если $\forall x \in X$ в Q найдется последовательность, сходящаяся к элементу x .

Пространство X называется сепарабельным, если в нем существует счетное плотное множество.

Все конечномерные пространства сепарабельны. Это утверждение вытекает из следующих фактов:

1. Множество Q всех n -мерных векторов с рациональными координатами плотно в R^n .
2. Множество Q счетно как объединение счетных множеств.
3. Нормы всех конечномерных пространств эквивалентны, откуда следует, что если счетное множество Q плотно в R^n , то оно плотно и в любом другом нормированном n -мерном пространстве.

Относительно эквивалентности норм. Пусть в линейном пространстве L двумя способами введены две нормы $\|x\|_1$ и $\|x\|_2$. Эти нормы называются эквивалентными, если $\exists \alpha, \beta > 0$ такие, что $\forall x \in L$ имеют место неравенства

$$\alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1.$$

Следовательно, из сходимости в одной норме вытекает сходимость в другой норме и наоборот. Сепарабельными являются банаховы пространства L^p , $C[a, b]$, $C^k[a, b]$, $C^k(\bar{\Omega})$ и др. Пространство m -ограниченных последовательностей не является сепарабельным (более подробно см. в приложении А).

Компактность. Фундаментальным понятием анализа является компактность. Напомним некоторые элементарные определения.

Точка $x \in M$ называется внутренней точкой множества M , если $\exists \varepsilon > 0$ такое, что шар $B(x, \varepsilon) = \{y \in M : \|y - x\| < \varepsilon\}$ с центром в точке x и радиусом ε лежит в M . Иными словами, внутренняя точка множества M принадлежит этому множеству вместе с некоторой своей ε -окрестностью ($\varepsilon > 0$).

Множество M называется открытым, если оно состоит из внутренних точек. Например, множество $B(x, r) = \{y \in M : \|y - x\| < r\}$ — открытое, поэтому и называется открытым шаром.

Пусть X — линейное нормированное пространство. Точка $x \in X$ называется предельной точкой множества $M \subset X$, если в любом шаре $B(x, r)$ содержатся точки из M , от-

личные от x . То есть, x — предельная точка множества M , если в M существует последовательность из различных элементов, сходящаяся к x . Предельная точка множества может и не принадлежать ему. Например, предельные точки множества $M = \{x, y \in M : x^2 + y^2 < 1\}$, лежащие на окружности $x^2 + y^2 = 1$, не принадлежат M .

Множество M , содержащее все свои предельные точки, называется замкнутым. Любой множество можно сделать замкнутым, присоединив к нему все его предельные точки. Эта операция называется замыканием, обозначается \bar{M} или $[M]$. Очевидно замкнутое множество совпадает со своим замыканием.

Имеют место следующие свойства замыкания множества $M \subset X$:

1. $M \subset \bar{M}$.
2. \bar{M} — замкнутое множество
3. \bar{M} — наименьшее замкнутое множество, содержащее M .

Пусть $M \subset X$, дополнение M до всего X обозначается CM , т. е. $CM = X \setminus M$. Связь между открытыми и замкнутыми множествами, лежащими в X , регламентируется следующим предложением.

Дополнение открытого множества (CM) есть замкнутое множество, дополнение замкнутого множества (CF) — открытое множество.

Следующие предложения устанавливают результаты теоретико-множественных операций в X .

Объединение открытых множеств в любом числе и пересечение конечного числа открытых множеств есть открытое множество. Двойственное предложение: пересечение любого числа замкнутых множеств и объединение их в конечном числе — множества замкнутые.

Одно из этих предложений следует из другого в силу теоретико-множественного принципа двойственности

$$\begin{aligned} C\left(\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}\right) &= \bigcap_{\alpha} CA_{\alpha}, \\ C\left(\bigcap_{\alpha} A_{\alpha}\right) &= \bigcup_{\alpha} CA_{\alpha}. \end{aligned}$$

Определение. Множество M , лежащее в банаховом пространстве X , называется компактным, если из любой его бесконечной части можно выделить сходящуюся последовательность. Если пределы всех таких последовательностей принадлежат M , то оно называется компактным в себе. Замкнутое компактное в себе множество называется компактом.

Приведем несколько примеров.

1. Множества $(0, 1)$, $[0, 1)$, $(0, 1]$ в R^1 — компактные, но не компактные в себе множества.
 2. Отрезок $[0, 1] \subset R^1$ — компактное в себе множество, т. е. компакт.
 3. Любое ограниченное множество $\Omega \subset R^n$ компактно, а $\bar{\Omega}$ — компакт.
- Это следует из теоремы Больцано–Вейерштрасса, в которой утверждается, что из любой ограниченной последовательности действительных чисел можно выделить сходящуюся подпоследовательность [23].

Всякое компактное множество ограничено. Предположим противное, что M — компактное, но не ограниченное множество. Возьмем $x_1 \in M$ и число $r > 0$. Так как, по предположению, не существует шара конечного радиуса, содержащего M , то $\exists x_2 \in M$ такая, что $\|x_2 - x_1\| > r$. По тем же соображениям $\exists x_3 \in M$ такая, что $\|x_3 - x_1\| > r$ и $\|x_2 - x_1\| > r$, и т. д. Построенная бесконечная последовательность $\{x_n\} \subset M$ обладает тем свойством, что $\|x_n - x_k\| > r$ ($n \neq k$). Ясно, что из нее нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность. Полученное противоречие доказывает утверждение.

Обратное неверно, в бесконечномерном пространстве множество может быть ограниченным, но не компактным. Приведем пример. Множество векторов в l^2 :

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots),$$

$$e_2 = (0, 1, 0, \dots),$$

$$e_3 = (0, 0, 1, 0, \dots)$$

.....

ограниченное, так как $\|e_n\| = 1$ ($n = 1, 2, \dots$). Все эти векторы лежат на единичной сфере в l^2 , и, значит, $e_n \in B[0, 1]$. С другой стороны, $\|e_n - e_k\| = \sqrt{2}$ ($n \neq k$), следовательно, из бесконечной последовательности $\{e_n\}$ нельзя выбрать сходящуюся подпоследовательность. Однако в l^2 существуют и компактные множества. Примером может служить «гильбертов кирпич», т. е. множество элементов $x = (x_1, x_2, \dots)$, для которых выполняются условия

$$|x_1| \leq 1, |x_2| \leq \frac{1}{2}, \dots, |x_n| \leq \frac{1}{2^{n-1}}, \dots$$

Прежде чем сформулировать критерий компактности множеств в линейных нормированных пространствах, напомним некоторые определения.

Пусть X — линейное нормированное пространство и множество $M \subset X$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Множество M^* называется ε -сетью множества M , если $\forall x \in M, \exists x^* \in M^*$ такой, что $\|x - x^*\| < \varepsilon$. Если ε -сеть конечна, т. е. множество M^* состоит из конечного числа элементов, то будем говорить, что существует конечная ε -сеть множества M (для заданного $\varepsilon > 0$).

Множество $M \subset X$ называется вполне ограниченным, если $\forall \varepsilon > 0$ существует его конечная ε -сеть. Критерий компактности множества дается теоремой Хаусдорфа [12]:

для компактности множества M в линейном нормированном пространстве X необходимо, а в случае полноты X и достаточно, чтобы M было вполне ограниченным. Из теоремы Хаусдорфа следует, что вполне ограниченное множество ограничено (более подробно см. в приложении А).

Аппроксимация в линейных нормированных пространствах. Во многих прикладных задачах возникает проблема аппроксимации некоторого элемента x линейного нор-

мированного пространства X элементами подпространства L (как правило, конечномерного). Точнее, необходимо найти элемент $u_* \in L$, такой что

$$\rho(x, L) = \inf_{u \in L} \|x - u\| = \|x - u_*\|.$$

Вектор u_* называется элементом наилучшего приближения x элементами подпространства L . Элемент наилучшего приближения может не существовать вовсе или быть не единственным. Однако имеет место теорема.

Элемент наилучшего приближения вектора $x \in X$ элементами конечномерного подпространства L существует для $\forall x \in X$.

В самом деле, для фиксированного $x \in X$ функционал $f(u) = \|x - u\|$ непрерывен на L (по норме пространства X). Действительно, $\forall u, u' \in L$:

$$|f(u) - f(u')| = \|x - u\| - \|x - u'\| \leq \|u' - u\|.$$

Введем на L вторую норму $\|x\|_c$, получив тем самым евклидово пространство E^n (n — размерность подпространства L). Очевидно, эти нормы эквивалентны, т. е.

$$\alpha \|x\|_c \leq \|x\| \leq \beta \|x\|_c.$$

Отсюда следует, что функционал $f(u) = \|x - u\|$ непрерывен в E^n (т. е. по норме $\|x\|_c$). Пусть $\inf \|x - u\| = d > 0$ (на некотором шаре $B[0, r] \subset E^n$). Тогда вне шара $\|u\|_c \leq r$, где $r = (d + 1 + \|x\|) \alpha^{-1}$, точная нижняя грань функционала $f(u)$ не достигается. В самом деле, при $\|u\|_c > r$ имеем

$$\|x - u\| \geq \|u\|_c - \|x\| \geq \alpha \|u\|_c - \|x\| > \alpha r - \|x\| = d + 1.$$

Итак, точная нижняя грань $f(u)$ достигается на шаре $\|u\|_c \leq r$ ($f(u)$ непрерывен на компакте $B[0, r] \subset E^n$) и, следовательно, $\exists u_* \in L$ такой, что $\inf_{u \in L} \|x - u\| = \|x - u_*\|$.

Пример. В пространстве R^2_1 всех наборов $x = (x_1, x_2)$ из вещественных элементов с нормой

$$\|x\| = \sum_{i=1}^2 |x_i|$$

возьмем точку $x_0 = (1, -1)$ и одномерное пространство L с базисным вектором $e = (1, 1) : L = \{\lambda e, \lambda \in R^1\}$. Вычислим расстояние

$$\rho(x_0, L) = \inf_{u \in L} \|x_0 - u\| = \inf_{\lambda} \|x_0 - \lambda e\| = \inf_{\lambda \in R^1} \{|1 - \lambda| + |-1 - \lambda|\} = 2.$$

Точная нижняя грань достигается на множестве элементов $\lambda e \in L$ при $-1 \leq \lambda \leq 1$. Таким образом, элемент наилучшего приближения в ЛНП может оказаться не единственным.

Линейное нормированное пространство X называется строго нормированным, если равенство

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$$

возможно только при $y = \lambda x, \lambda > 0$.

Имеет место теорема.

Для любого x из строго нормированного пространства X и любого конечномерного пространства L элемент наилучшего приближения $u_* \in L$ определяется единственным образом.

Доказательство. В силу предыдущей теоремы элемент наилучшего приближения $u_1^* \in L$ существует. Предположим противное, что есть еще один элемент наилучшего приближения $u_2^* \in L$, отличный от u_1^* . Это означает, что

$$\inf_{u \in L} \|x - u\| = \|x - u_1^*\| = \|x - u_2^*\| = d > 0 \quad (x \in L).$$

Пусть

$$u = \frac{u_1^* + u_2^*}{2} \in L.$$

Тогда

$$\|x - u\| \leq \frac{1}{2} \|x - u_1^*\| + \frac{1}{2} \|x - u_2^*\| = d.$$

Учитывая неравенство $\|x - u\| \geq d$, заключаем, что $\|x - u\| = d$. Следовательно,

$$\|(x - u_1^*) + (x - u_2^*)\| = \|x - u_1^*\| + \|x - u_2^*\| > 0.$$

Но в строго нормированном пространстве это равенство возможно только при условии $x - u_2^* = \lambda(x - u_1^*)$, $\lambda > 0$. При $\lambda = 1$ получаем, что $u_1^* = u_2^*$, поэтому $\lambda \neq 1$. При $\lambda \neq 1$ имеем $x = (1 - \lambda)^{-1}(u_2^* - \lambda u_1^*) \in L$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Пространство $C[a, b]$ не является строго нормированным. Действительно, пусть линейно независимые функции $x(t)$, $y(t) \in C[a, b]$ имеют максимум в одной и той же точке $t_0 \in [a, b]$. Тогда

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\|,$$

хотя $y \neq \alpha x$.

Пространства L^p ($1 < p < \infty$) строго нормированы.

Лемма Рисса [12, 22]. В трехмерном пространстве рассмотрим любую плоскость, проходящую через начало координат (подпространство L) и точку z , расстояние которой до L равно единице (рис. 3.2).

Длина любой наклонной $\|u - z\| > 1$. Такое утверждение можно высказать, ибо здесь введено понятие ортогональности векторов. В линейном нормированном пространстве понятие угла между векторами и, в частности, ортогональности векторов не имеет места. Однако более слабое утверждение о существовании «почти перпендикуляра» составляет содержание следующего предложения.

Лемма (Ф. Рисс).

Пусть L — произвольное линейное подпространство в линейном нормированном пространстве X и $L \neq X$. Тогда $\forall \varepsilon \in (0, 1), \exists z_\varepsilon \in X (z_\varepsilon \notin L)$ такой, что

$$\|z_\varepsilon\| = 1 \text{ и } \rho(z_\varepsilon, L) > 1 - \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть $\rho(z, L) = \inf_{u \in L} \|z - u\| = d > 0$ (при $d = 0$ элемент z принадлежал бы L). По свойству точной нижней грани $\forall \varepsilon \in (0, 1), \exists u_\varepsilon \in L$ такой, что

$$d \leq \|z - u_\varepsilon\| < d/(1 - \varepsilon).$$

Рассмотрим теперь элемент

$$z_\varepsilon = \frac{z - u_\varepsilon}{\|z - u_\varepsilon\|}.$$

Очевидно, $\|z_\varepsilon\| = 1$ и $z_\varepsilon \notin L$ (иначе $z - u_\varepsilon \in L \Rightarrow z \in L$, что противоречит условию). Покажем, что z_ε — искомый элемент. Мы имеем

$$\|z_\varepsilon - u\| = \left\| \frac{z - u_\varepsilon}{\|z - u_\varepsilon\|} - u \right\| = \frac{\|z - (u_\varepsilon + u\|z - u_\varepsilon\|)\|}{\|z - u_\varepsilon\|} > \frac{(1 - \varepsilon)d}{d} = 1 - \varepsilon,$$

так как $u_\varepsilon + \|z - u_\varepsilon\|u \in L$. Лемма доказана.

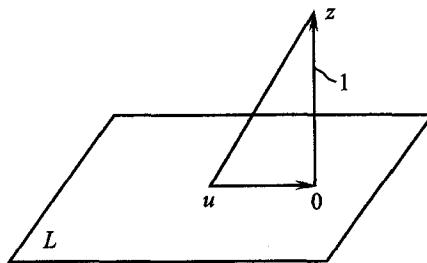


Рис. 3.2. К лемме Ф. Рисса

Выпуклые множества в линейном нормированном пространстве. Если $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ — вектор в трехмерном пространстве, то множество $\{\lambda \vec{a}\}$, где λ пробегает R^1 , очевидно, определяет прямую в пространстве, проходящую через начало координат. Пусть X — линейное нормированное пространство и $x_0 \in X$. Множество $\{\lambda x_0\}$, где $\lambda \in R^1$ называется прямой в X .

Пусть $x, y \in X$, множество

$$\{\alpha x + \beta y\}, \alpha + \beta = 1, 0 \leq \alpha \leq 1$$

называется замкнутым отрезком, соединяющим точки x и y в X .

Множество M элементов линейного нормированного пространства называется выпуклым, если всякие две точки из M принадлежат ему вместе с отрезком, их соединяющим.

Примеры.

1. Пусть $x, y \in L$, где L — линейное многообразие в X . Тогда $\alpha x + \beta y \in L$ при любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^1$, и в частности при $\alpha + \beta = 1$, $0 \leq \alpha \leq 1$. Следовательно, L — выпуклое множество в X .

2. Любой шар (открытый или замкнутый) в X — выпуклое множество. Покажем это. Пусть $x, y \in B(x_0, r)$. Это означает, что

$$\|x - x_0\| < r, \|y - x_0\| < r.$$

Тогда ($\alpha + \beta = 1$, $0 \leq \alpha \leq 1$)

$$\|\alpha x + \beta y - x_0\| = \|\alpha(x - x_0) + \beta(y - x_0)\| \leq |\alpha| \|x - x_0\| + |\beta| \|y - x_0\| < \alpha r + \beta r = r.$$

Следовательно, $\{\alpha x + \beta y\} \subset B(x_0, r)$, что и требовалось.

Выпуклым телом в линейном нормированном пространстве X называется всякое выпуклое замкнутое множество, имеющее по крайней мере одну внутреннюю точку.

Примеры.

1. Замкнутый шар $B[x_0, r]$ является выпуклым телом.

2. Гильбертов кирпич в l^2 — выпуклое замкнутое множество, но не выпуклое тело. Имеет место теорема.

Пересечение любого числа выпуклых множеств само является выпуклым множеством.

Фактор пространства. Пусть X — линейное нормированное пространство и X_0 некоторое его подпространство. Назовем произвольные $x, y \in X$ эквивалентными, если

$$x - y \in X_0.$$

Это отношение (эквивалентности) рефлексивно ($x \sim x$), симметрично ($x \sim y \Rightarrow y \sim x$) и транзитивно ($x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z$). Следовательно, множество элементов X разбивается на непересекающиеся классы $[x], [y], [z], \dots$. Если x — какой-либо представитель из класса $[x]$ ($x \in [x]$), то все остальные элементы этого класса эквивалентны элементу x . Поэтому любой класс можно представить в виде

$$[x] = x + X_0, \quad x \in [x].$$

На множестве классов $[x], [y], \dots$ можно ввести линейные операции следующим образом. Пусть $x \in [x]$, $y \in [y]$ — представители классов $[x]$ и $[y]$ соответственно. Назовем суммой классов $[x] + [y]$ третий класс $[z]$, каждый элемент которого эквивалентен элементу $x + y \in X$. Это означает, что если $z \in [z]$, то

$$x + y - z \in X_0 \quad ([z] = [x] + [y] \Rightarrow x + y + X_0 = [x + y]).$$

Под произведением класса $[x]$ на число λ будем понимать класс $[\lambda x] = [\lambda x]$, каждый элемент которого эквивалентен элементу λx . Это означает, что если $u \in [u]$, то $\lambda x - u \in X_0$.

($[u] = \lambda[x] = \lambda x + X_0$). Если вместо x, y взять любые другие представители x', y' классов $[x]$ и $[y]$, то результат не изменится. Действительно, определим сумму $[z'] = [x] + [y]$ как класс элементов, эквивалентных элементу $x' + y' \in X$. Так как $x \sim x'$, $y \sim y'$, то $x' + y' - (x + y) \in X_0$, т. е. $x' + y' \sim x + y$, откуда следует, что $[z'] = [z]$.

Множество всех таких (смежных) классов с введенными на нем линейными операциями является линейным пространством. В частности, нулевой элемент $\theta = X_0 = [0]$. Это линейное пространство называется фактор-пространством пространства X по подпространству X_0 (X/X_0).

На фактор-пространстве X/X_0 вводится норма

$$\|[x]\| = \inf_{x \in [x]} \|x\|.$$

Проверим выполнение аксиом нормы.

1. $\|[x]\| \geq 0$. Если $[x] = \theta = X_0$, то $\|[x]\| = \inf_{x \in X_0} \|x\| = 0$. Обратно, если $\|[x]\| = \inf_{x \in [x]} \|x\| = 0$, то в $[x]$ имеется последовательность $\{x_n\}$, сходящаяся к нулю ($\|x_n - 0\| \rightarrow 0$). Так как $[x]$ — замкнутое множество, то $0 \in [x]$. Следовательно, $[x] = X_0 = \theta = [0]$.

$$2. \|\lambda[x]\| = \inf_{x \in [x]} |\lambda| \|x\| = |\lambda| \|[x]\|.$$

3. Пусть $[z] = [x] + [y]$. Тогда

$$\|[z]\| = \|[x] + [y]\| = \inf_{x \in [x], y \in [y]} \|x + y\| \leq \inf_{x \in [x]} \|x\| + \inf_{y \in [y]} \|y\| = \|[x]\| + \|[y]\|.$$

Таким образом, фактор-пространство X/X_0 с введенной на нем нормой становится линейным нормированным пространством. Размерность X/X_0 называется коразмерностью подпространства X_0 в пространстве X .

Теорема. Если X — конечномерное линейное нормированное пространство размерности n ($\dim X = n$), а X_0 — его подпространство размерности $k \leq n$, то коразмерность X_0 ($\text{codim } X_0$) равна $n - k$. В более симметричной форме утверждение теоремы сводится к равенству

$$\dim X_0 + \text{codim } X_0 = \dim X = n.$$

Доказательство. Пусть e_1, e_2, \dots, e_n базис в X , перенумерованный таким образом, что e_1, e_2, \dots, e_k — базис в X_0 . Покажем, что любой класс $[x] \in X/X_0$ есть линейная комбинация классов $[e_{k+1}], \dots, [e_m]$. Имеем

$$[x] = \left[\sum_{i=1}^n \xi_i e_i \right] = \left[\sum_{i=1}^k \xi_i e_i + \sum_{i=k+1}^n \xi_i e_i \right] = \sum_{i=k+1}^n \xi_i [e_i] + \left[\sum_{i=1}^k \xi_i e_i \right] = \sum_{i=k+1}^n \xi_i [e_i] + \theta,$$

т. е.

$$[x] = \sum_{i=k+1}^n \xi_i [e_i].$$

Теперь покажем, что элементы $[e_{k+1}], \dots, [e_n]$ линейно независимы. Действительно,

$$\sum_{i=k+1}^n \alpha_i [e_i] = \theta \Rightarrow \left[\sum_{i=k+1}^n \alpha_i e_i \right] = [\theta] \Rightarrow \sum_{i=k+1}^n \alpha_i [e_i] \in X_0 \Rightarrow \alpha_{k+1} = \alpha_{k+2} = \dots = \alpha_n = 0.$$

Таким образом, классы $[e_{k+1}], [e_{k+2}], \dots, [e_n]$ образуют базис в X/X_0 и, следовательно, $\dim(X/X_0) = n - k = \text{codim } X_0$. Теорема доказана.

Изометрические линейные нормированные пространства. Линейные нормированные пространства X_1 и X_2 называются линейно изометрическими, если они, как линейные пространства, изоморфны друг другу и, как метрические пространства с метриками $\rho_1(x, y) = \|x - y\|_{X_1}$ и $\rho_2(x, y) = \|x - y\|_{X_2}$, изометричны.

С точки зрения своих алгебраических и метрических свойств эти пространства не различимы.

3.2. Интеграл Лебега

Здесь мы опишем (без доказательств) некоторые свойства конструкции, называемой интегралом Лебега. На простейшем примере построим эту конструкцию.

Мера Лебега в R . Пусть некоторое точечное множество g содержится в интервале (a, b) . Если интервалу (a, b) в качестве его меры сопоставить число $b - a$, то не очень ясно, какую меру присвоить множеству g . Ниже будет введено понятие меры точечного множества.

Объединение открытых множеств в любом числе — множество открытое. Известно и обратное утверждение: открытое множество в R состоит из объединения конечного или счетного числа открытых интервалов.

Говорят, что множество G покрывает множество g , если $g \subset G$. Рассмотрим открытое множество G , покрывающее g . Так как G есть объединение открытых интервалов, то можно найти сумму длин этих интервалов. Поступим так с каждым открытым покрытием множества g . Точная нижняя грань сумм длин интервалов открытых покрытий называется внешней мерой множества g и обозначается через $m_e(g)$.

Примеры.

1. Пусть $g = [a, b]$. Если G — открытое покрытие множества g и $v(G)$ — сумма длин составляющих его интервалов, то очевидно $v(G) > b - a$. С другой стороны, имеем

$$G_* = (a - \varepsilon, b + \varepsilon) \supset [a, b], \quad \forall \varepsilon > 0 \text{ и } v(G_*) = b - a - 2\varepsilon.$$

Отсюда следует, что

$$m_e([a, b]) = \inf_{G_* \supset g} v(G_*) = b - a. \tag{3.8}$$

2. Пусть g — некоторое счетное множество точек прямой. Положим $g = \{a_1, a_2, \dots\}$ и «накроем» множество g объединением интервалов G_*

$$I_n = \left(a_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, a_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \right), \quad \varepsilon > 0.$$

Тогда $\forall \varepsilon > 0$

$$\nu \left(\bigcup_n I_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \nu(I_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

Следовательно, согласно определению (3.8)

$$m_e(g) = \inf \nu(G_*) = 0.$$

Число m_e — мера с избытком. Теперь нужно «изнутри», не выходя за пределы множества, измерить его (построить меру с возможным недостатком). Для этого рассмотрим множество $g_1 = cg = [a, b] \setminus g$ и найдем его внешнюю меру. Внутренней мерой множества $g \subset [a, b]$ называют величину

$$m_i(g) = b - a - m_e(g_1).$$

Множество называется измеримым, если его внутренняя и внешняя меры совпадают, т. е.

$$m_e(g) = m_i(g).$$

Общая величина внутренней и внешней меры измеримого множества называется его мерой (мерой Лебега, лебеговой мерой) и обозначается $m(g)$ или $\text{mes } g$.

Пример. Мера Лебега счетного множества. Выше мы выяснили (см. пример 2), что внешняя мера m_e счетного множества равна нулю. Внутренняя мера $0 \leq m_i \leq m_e$. Отсюда следует, что $m_i = m_e = 0$, т. е. счетное множество точек на прямой имеют нулевую меру. Отметим некоторые свойства меры нуль.

1. Всякое множество, содержащееся во множестве меры нуль, имеет меру нуль.
2. Объединение конечного или счетного числа множеств меры нуль, имеет нулевую меру.
3. Пусть A и B — точечные множества, тогда $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$.

Если $A \cap B = \emptyset$, то $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$.

Говорят, что некоторое свойство выполняется почти всюду (почти везде, п. в.), если множество точек, которые не обладают этим свойством, имеет меру нуль.

Интеграл Лебега для функции одной переменной. При изучении определенного интеграла обычно приводят в качестве примера неинтегрируемую на $[0, 1]$ функцию Дирихле

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рациональное число,} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррациональное число.} \end{cases}$$

Эта функция не интегрируема из-за того, что она слишком быстро изменяется (предельно быстро). Можно рассматривать и не столь быстро изменяющиеся функции, для которых

интеграл Римана все-таки плохо приспособлен. Пусть график функции $\varphi(x) > 0$ изображен на рис. 3.3. При вычислении площади криволинейной трапеции $aABb$ заменяем площадь криволинейной трапеции с основанием $[x_{k-1}, x_k]$ площадью прямоугольника с тем же основанием и высотой $\varphi(\xi_k)$. В результате получим

$$\int_a^b \varphi(x) dx \approx \sum_{k=1}^n \varphi(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Но, очевидно, значение этой суммы резко меняется в зависимости от выбора точек ξ_k .

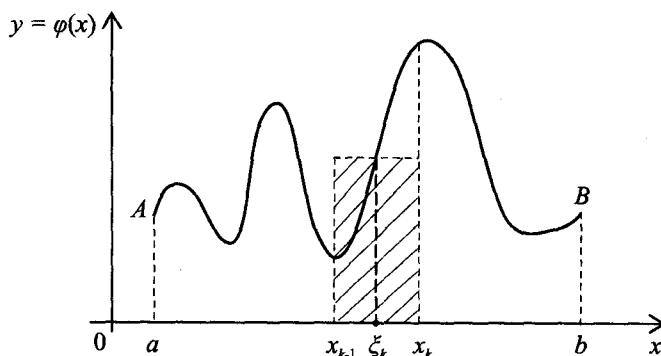


Рис. 3.3. Пример функции с резко меняющимся рельефом

Желая избавиться от влияния «неправильностей» рельефа графика функции для вычисления площади трапеции $aABb$, поступим следующим образом. Отрезок $[c, d]$, где $c = \inf_{x \in [a, b]} \varphi(x)$, $d = \sup_{x \in [a, b]} \varphi(x)$, расположенный на оси Oy , разобьем на частичные интервалы точками

$$c = y_0 < y_1 < \dots < y_{n-1} < y_n = d$$

и проведем через точки y_i горизонтальные прямые (рис. 3.4). Приближенно подсчитаем площадь той части трапеции $aABb$, которая попала в полоску между y_{i-1} и y_i

$$S_i \approx m(g_i)(y_i - y_{i-1}),$$

где $g_i = \{x \in [a, b] : \varphi(x) \geq y_{i-1}\}$.

В это выражение входит мера множества g . Поэтому нужно потребовать, чтобы функция $\varphi(x)$ удовлетворяла условию: для любого y множество $g = \{x \in [a, b] : \varphi(x) \geq y\}$ измеримо. Если функция $\varphi(x)$ удовлетворяет этому условию, то она называется измеримой.

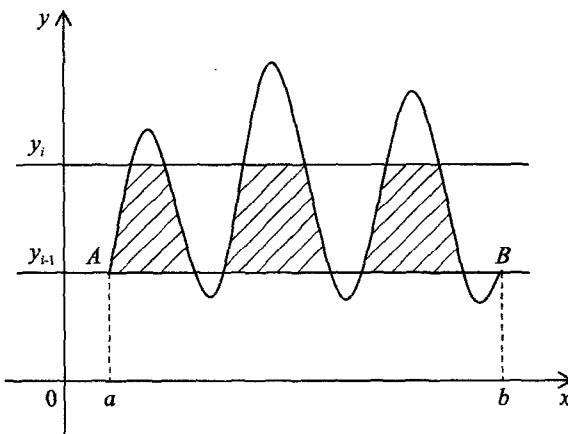


Рис. 3.4. К построению интеграла Лебега

Замечание. Вообще, функция $\varphi(x)$ называется измеримой, если $\varphi^{-1}[a, b]$ измерима $\forall[a, b]$.

Таким образом, если функция $\varphi(x)$ измерима, то

$$S_{aBb} \approx m(g_0)y_0 + \sum_{i=1}^n m(g_i)(y_i - y_{i-1}). \quad (3.9)$$

Интеграл Лебега определяется как предел (интегральной) суммы (3.9). Точнее, пусть $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} (y_i - y_{i-1})$ — диаметр разбиения. Если $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ и число I так, что из неравенства $\lambda < \delta$ следует

$$\left| m(g_0)y_0 + \sum_{i=1}^n m(g_i)(y_i - y_{i-1}) - I \right| < \varepsilon,$$

то число I называется интегралом (Лебега) функции $\varphi(x)$ по $[a, b]$. Обозначается обычно так $(\mathcal{L}) \int_a^b \varphi(x) dx$.

Имеет место теорема. Интеграл Лебега от ограниченной измеримой функции $\varphi(x) \geq 0$ существует. В частности, функция Дирихле интегрируема по Лебегу и интеграл от нее равен нулю, так как эта функция больше нуля лишь на множестве меры нуль.

До сих пор в наших рассуждениях подынтегральная функция была ограниченной в $[a, b]$. Пусть теперь $\varphi(x) \geq 0$ и неограничена сверху. Пусть $N > 0$. «Срежем» верхушку функции, положив

$$\varphi_N(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{если } \varphi(x) \leq N, \\ N, & \text{если } \varphi(x) > N. \end{cases}$$

Так как $\varphi_N(x)$ ограниченная функция, то интеграл Лебега

$$I_N = (\mathcal{L}) \int_a^b \varphi_N(x) dx$$

существует. Далее, последовательность I_N — неубывающая, поэтому существует предел $\lim_{N \rightarrow \infty} I_N$, конечный или бесконечный. Если этот предел конечен, то его значение счи-

тается равным $(\mathcal{L}) \int_a^b \varphi(x) dx$.

Пусть теперь $\varphi(x)$ может принимать значения любого знака. Тогда

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x),$$

где

$$\varphi_1(x) = \frac{|\varphi(x)| + \varphi(x)}{2} \geq 0, \quad \varphi_2(x) = \frac{|\varphi(x)| - \varphi(x)}{2} \geq 0.$$

По определению

$$(\mathcal{L}) \int_a^b \varphi(x) dx = (\mathcal{L}) \int_a^b \varphi_1(x) dx - (\mathcal{L}) \int_a^b \varphi_2(x) dx \quad (3.10)$$

в предположении, что оба интеграла в правой части существуют.

Функция $\varphi(x)$, для которой интеграл (3.10) существует, называется суммируемой (интегрируемой по Лебегу).

Так как

$$(\mathcal{L}) \int_a^b |\varphi(x)| dx = (\mathcal{L}) \int_a^b \varphi_1(x) dx + (\mathcal{L}) \int_a^b \varphi_2(x) dx,$$

то вместе с $\varphi(x)$ — суммируемой является и функция $|\varphi(x)|$. Если $\varphi(x)$ — комплексно-значная функция, то по определению

$$(\mathcal{L}) \int_a^b \varphi(x) dx = (\mathcal{L}) \int_a^b \operatorname{Re} \varphi(x) dx + i (\mathcal{L}) \int_a^b \operatorname{Im} \varphi(x) dx,$$

если оба интеграла справа существуют.

Отметим основные свойства интеграла Лебега и суммируемых функций в R^n (без доказательств). Теорию меры и интеграла Лебега см., например, в [6, 8, 15, 20, 27].

Из определения интеграла Лебега следует, что его значение не изменится, если изменить подынтегральную функцию на множестве нулевой меры. Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ отличаются друг от друга на множестве нулевой меры, то

$$(\mathcal{L}) \int_a^b \varphi(x) dx = (\mathcal{L}) \int_a^b \psi(x) dx.$$

Обратно, если $\varphi(x) \geq 0$ и

$$(\mathcal{L}) \int_a^b \varphi(x) dx = 0,$$

то $\varphi(x) = 0$ (т. е. она может быть отличной от нуля лишь на множестве нулевой меры).

Пусть A — измеримое множество, χ_A — функция множества, т. е. $\chi_A(x) = 1, x \in A$ и $\chi_A(x) = 0, x \notin A$. Будем говорить, что функция $f(x)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ интегрируема по Лебегу на измеримом множестве A , если $f(x)\chi_A(x)$ интегрируема по Лебегу. Число

$$\int_A f(x)\chi_A(x) dx = (\mathcal{L}) \int_A f(x) dx$$

называется интегралом Лебега функции f по множеству A .

Функция $f(x)$ называется локально-интегрируемой по Лебегу в области G , если она интегрируема по Лебегу на любой подобласти $G' \Subset G$ (строго лежащей в G , т. е. $\bar{G}' \subset G$) и локально интегрируемой в R^n , если она интегрируема в любой ограниченной области $G \subset R^n$.

Всякая кусочно-непрерывная финитная функция интегрируема по Лебегу и ее интегралы Римана и Лебега совпадают. Далее, если $f(x)$ и $|f(x)|$ интегрируемы по Риману (возможно в несобственном смысле), то они интегрируемы и по Лебегу, и оба интеграла совпадают.

Начиная с этого момента мы будем пользоваться для интеграла Лебега обычным обозначением интеграла.

$$\int f(x) dx = \iint_{R^n} \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Интеграл Лебега линеен относительно $f: \forall f$ и g , интегрируемых по Лебегу, и $\forall \lambda, \mu \in P$, функция $\lambda f + \mu g$ также интегрируема по Лебегу и справедливо равенство

$$\int (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int f(x) dx + \mu \int g(x) dx.$$

Если A имеет меру нуль, то

$$\int_A f(x) dx = 0,$$

какова бы ни была функция f . Например, многообразия размерности $k \leq n-1$ в R^n имеют нулевую меру (если они достаточно регулярны).

Имеют место оценки

$$m \operatorname{mes} G \leq \int_G f(x) dx \leq M \operatorname{mes} G, \quad m \leq f(x) \leq M.$$

Замена переменных в интеграле Лебега. Пусть $x_k = x_k(y_1, y_2, \dots, y_n)$, $k=1, 2, \dots, n$ — преобразование переменных, отображающее взаимно-однозначно область G на область G_1 , функции $x_k = x_k(y) \in C^1(\bar{G})$ и $D\left(\frac{x}{y}\right)$ — якобиан этого преобразования. Для того чтобы

функция $f(x)$ была интегрируема по Лебегу на G , необходимо и достаточно, чтобы функция

$$\left| D\left(\frac{x}{y}\right) \right| f[x(y)]$$

была интегрируема по Лебегу на G_1 . При этом справедливо равенство

$$\int_G f(x) dx = \int_{G_1} f[x(y)] \left| D\left(\frac{x}{y}\right) \right| dy. \quad (3.11)$$

Напомним выражение якобиана (функционального определителя)

$$D\left(\frac{x}{y}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1}, & \frac{\partial x_1}{\partial y_2}, & \dots, & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1}, & \frac{\partial x_2}{\partial y_2}, & \dots, & \frac{\partial x_2}{\partial y_n} \\ \dots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1}, & \frac{\partial x_n}{\partial y_2}, & \dots, & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}. \quad (3.12)$$

Пример. Переход к полярной системе координат на плоскости. Положим $x_1 = y_1 \cos y_2$, $x_2 = y_1 \sin y_2$, $y_1 > 0$, $0 \leq y_2 < 2\pi$ и пусть точка $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ также принадлежит полуполосе G_1 (рис. 3.5). Якобиан в соответствии с формулой (3.12) вычисляется так:

$$D\left(\frac{x}{y}\right) = \begin{vmatrix} \cos y_2, & -y_1 \sin y_2 \\ \sin y_2, & y_1 \cos y_2 \end{vmatrix} = y_1.$$

Поэтому, если функция

$$f(y_1 \cos y_2, y_1 \sin y_2) y_1$$

суммируема на G_1 , то согласно (3.11)

$$\int_{R^2} f(x) dx = \int_{G_1} f(y_1 \cos y_2, y_1 \sin y_2) y_1 dy_1 dy_2.$$

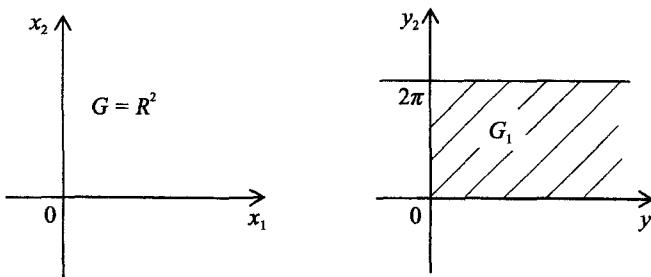


Рис. 3.5. К отображению $G = R^2$ на полуполосу G_1

Пределный переход под знаком интеграла Лебега. Пусть последовательность измеримых функций $f_k(x)$ сходится почти везде к функции $f(x)$. Если существует интегрируемая мажоранта $g(x)$, такая что $|f_k(x)| < g(x)$, $k = 1, 2, \dots$ почти везде, то $f(x)$ суммируема и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k(x) dx = \int f(x) dx \quad (\text{теорема Лебега})$$

(слева интегралы Римана, справа интеграл Лебега). В частности, если $g(x)$ суммируема и $|f(x)| \leq g(x)$ почти везде, то $f(x)$ также интегрируема и справедливо неравенство

$$\int |f(x)| dx \leq \int g(x) dx.$$

Таким образом, если $f(x)$ — ограниченная функция на ограниченном измеримом множестве A , то интеграл Лебега от нее существует. Например,

$$\int_A dx = \int \chi_A(x) dx.$$

Этот интеграл определяет меру Лебега области A . В R^n — это объемная мера. Если множество $\Omega \subset R^n$ представляет собой параллелепипед (брюс) $a_i \leq x_i \leq b_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), то

$$\text{mes}(\Omega) = \prod_{k=1}^n (b_k - a_k) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n).$$

Теорема Фубини. Если функция $f(x, y)$, заданная в R^{n+m} , $x \in R^n$, $y \in R^m$, измерима и существует повторный интеграл функции $|f(x, y)|$

$$\int \left[\int |f(x, y)| dx \right] dy < \infty,$$

то $f(x, y)$ интегрируема, интегралы

$$\int f(x, y) dx, \quad \int f(x, y) dy$$

существуют почти везде и интегрируемы, причем справедливо равенство

$$\iint f(x, y) dxdy = \int \left[\int f(x, y) dy \right] dx = \int \left[\int f(x, y) dx \right] dy. \quad (3.13)$$

Теорема Фубини сохраняется и для интегралов Лебега от функций $f(x, y)$, заданных на $R^n \times S$, где S — кусочно-гладкая поверхность.

3.3. Пространство Лебега $L[a, b]$, p -пространства

Определим сначала пространство $\mathcal{L}_*[a, b]$. На линейном множестве всех непрерывных на $[a, b]$ функций введем норму

$$\|x\| = \int_a^b |x(t)| dt.$$

Очевидно, все аксиомы нормы выполняются. Однако, это пространство не полно, так как существуют в $\mathcal{L}_*[a,b]$ фундаментальные последовательности, сходящиеся к разрывным функциям.

Замечание. Если последовательность непрерывных на $[a,b]$ функций равномерно сходится, то пределом является непрерывная на $[a,b]$ функция (теорема Вейерштрасса). Если же сходимость только поточечная (в каждой точке $x \in [a,b]$), то предел может оказаться разрывной на $[a,b]$ функцией. Оказывается, что если последовательность непрерывных на $[a,b]$ функций сходится почти всюду на $[a,b]$, то ее предел есть измеримая функция. В частности, функция непрерывная почти всюду является измеримой.

Если φ и ψ — измеримые функции, то $\varphi \pm \psi$, $\varphi\psi$, $\sup(\varphi, \psi)$, $\inf(\varphi, \psi)$, $|\varphi|$, φ/ψ , если $\psi \neq 0$ всюду, являются измеримыми.

Согласно теореме о пополнении, нормированное пространство $\mathcal{L}_*[a,b]$ можно пополнить. Полученное в результате пополнения полное линейное нормированное пространство $\mathcal{L}(a,b)$ называется пространством Лебега. Опишем схему пополнения $\mathcal{L}_*[a,b]$. Сначала введем некоторые понятия.

Последовательность $\{x_n(t)\}$ и $\{x_n^*(t)\}$ непрерывных на $[a,b]$ функций называются эквивалентными в среднем, если

$$\|x_n - x_n^*\| = \int_a^b |x_n(t) - x_n^*(t)| dt \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Последовательность $\{x_n(t)\}$ непрерывных на $[a,b]$ функций называется фундаментальной в $\mathcal{L}_*[a,b]$ или фундаментальной в среднем, если $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) > 0$ так, что при всех натуральных p

$$n > N \Rightarrow \|x_{n+p} - x_n\| = \int_a^b |x_{n+p}(t) - x_n(t)| dt < \varepsilon.$$

Отношение эквивалентности разбивает множество всех последовательностей непрерывных на $[a,b]$ функций на (не пересекающиеся) классы. Две фундаментальные в среднем последовательности $\{x_n(t)\}$ и $\{x_n^*(t)\}$ входят в один класс $[x]$ тогда и только тогда, когда они эквивалентны в среднем.

Пространство Лебега $\mathcal{L}(a,b)$ состоит из элементов $[x(t)]$ — классов эквивалентных в среднем и фундаментальных в среднем последовательностей непрерывных на $[a,b]$ функций. Это фактор-пространство часто обозначают, в отличие от $\mathcal{L}(a,b)$, через $L^1(a,b)$ или просто $L(a,b)$. Если $\{x_n(t)\} \in [x(t)]$, то по определению

$$\|[x]\|_{L[a,b]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |x_n(t)| dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|.$$

Если учесть, что интеграл Лебега от функции $\llbracket x(t) \rrbracket$, где $\llbracket x(t) \rrbracket \in L(a, b)$, определяется при помощи предельного равенства

$$(\mathcal{L}) \int_a^b \llbracket x(t) \rrbracket dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |x_n(t)| dt,$$

то норма в $L(a, b)$ такова:

$$\|x\|_{L[a,b]} = (\mathcal{L}) \int_a^b |x(t)| dt.$$

Таким образом, пространство Лебега $L(a, b)$ состоит из всех непрерывных на $[a, b]$ функций и из функций, являющихся пределами фундаментальных в среднем последовательностей. Эти предельные функции (идеальные элементы), вообще говоря, разрывны. Если говорить точнее, то $L(a, b)$ состоит из классов непрерывных на $[a, b]$ функций (если $x(t)$ непрерывна на $[a, b]$, то в один класс $\llbracket x(t) \rrbracket$ с ней войдут все функции, равные $x(t)$ почти везде, например функции отличные от $x(t)$ в конечном числе точек) и из классов предельных элементов пространства $\mathcal{L}_*[a, b]$ (в один класс входят пределы эквивалентных в среднем фундаментальных в среднем последовательностей непрерывных на $[a, b]$ функций). В частности, функция Дирихле $\chi(t) \in L(0, 1)$ как представитель класса $[0]$.

Имеет место теорема. Пусть $x(t)$ определена на $[a, b]$ и имеет на $[a, b]$ конечное число точек разрыва, причем сходится интеграл (несобственный)

$$\int_a^b |x(t)| dt.$$

Тогда существует фундаментальная в среднем на $[a, b]$ последовательность непрерывных функций $\{x_n(t)\}$, такая что

$$\int_a^b |x_n(t) - x(t)| dt \rightarrow 0, n \rightarrow \infty,$$

т. е. $x(t) \in \mathcal{L}(a, b)$.

Замечание. К определению пространства Лебега можно подойти, действуя в обратном порядке. Прежде всего вводится расширенное понятие интеграла на более «широком» пространстве функций, чем $C[a, b]$. Обозначается это пространство $L^1(a, b)$ или просто $L(a, b)$. Затем доказывается полнота $L[a, b]$ и, наконец, тот факт, что замыкание C в L совпадает с L . После того, как введено понятие интеграла Лебега и, соответственно, суммируемой функции, можно определить пространство $\mathcal{L}(a, b)$, как линейное множество всех функций, суммируемых на $[a, b]$ с «нормой»:

$$\|f\| = \int_a^b |f(x)| dx. \quad (3.14)$$

Однако \mathcal{L} не является нормированным пространством, так как выражение (3.14) не удовлетворяет первой аксиоме нормы (из $\|f\|=0$ не следует $f(x) \equiv 0$ на $[a,b]$).

Для того чтобы избавиться от этой неприятности, совокупность всех суммируемых на $[a,b]$ функций разбивают на непересекающиеся классы эквивалентных функций. Две функции $f, g \in \mathcal{L}$ эквивалентны, если $f(x) \stackrel{\text{п.в.}}{=} g(x)$. Отсюда следует, что

$$f(x) - g(x) \stackrel{\text{п.в.}}{=} 0,$$

т. е.

$$\int |f-g| dx = 0.$$

Множество классов эквивалентности в \mathcal{L} с нормой

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f| dx = \int |f| dx$$

есть линейное нормированное пространство (обозначается $L^1(a,b)$ или $L(a,b)$). Каждый элемент L — это класс, содержащий функции, совпадающие почти всюду.

Вопрос о полноте пространства L решает следующая фундаментальная теорема (Рисс, Фишер). Пространство L полно.

Наконец, можно доказать, что пространство $C[a,b]$ плотно (по норме $\|\cdot\|_1$) в $L[a,b]$, т. е. L есть пополнение C .

Банаховы p -пространства $L^p(\bar{G})$, $p \geq 1$. При построении этих пространств исходят из линейного нормированного пространства $\mathcal{L}_*^p(\bar{G})$ — линейного множества всех непрерывных в $\bar{G} \subset R^n$ функций с нормой

$$\|u\| = \left(\int_{\bar{G}} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in G.$$

Пространство $L^p(\bar{G})$, по определению, является пополнением (неполного) пространства $\mathcal{L}_*^p(\bar{G})$. Поскольку $\mathcal{L}_*^p(\bar{G})$ плотно в $L^p(\bar{G})$, то элементы этого пространства — некоторые «функции» (точнее классы эквивалентных функций), приблизиться к которым с любой степенью точности в среднем (по метрике пространства \mathcal{L}_*^p) можно с помощью непрерывных на \bar{G} функций. Пространство Лебега L^1 есть частный случай L^p при $p=1$.

Таким образом, банахово пространство $L^p(\bar{G})$ состоит из классов эквивалентности функций, суммируемых с p -й степенью в области \bar{G} , т. е. таких измеримых функций $u(x)$, что $\int_{\bar{G}} |u(x)|^p dx < \infty$.

В приложениях используется также пространство L^∞ измеримых функций, каждая из которых ограничена почти везде. Норма

$$\|x\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} = \text{vrai} \sup_{[a,b]} |x(t)|,$$

что означает существенную (с точностью до множества меры нуль) верхнюю грань $x(t)$ на $[a,b]$.

3.4. Абстрактное гильбертово пространство

Предгильбертовы пространства. Линейное вещественное пространство E называется евклидовым (предгильбертовым), если в нем введено скалярное (внутреннее) произведение. Это означает, что каждой паре его элементов ставится в соответствие действительное число, обозначаемое (x, y) , так что выполняются следующие аксиомы $\forall x, y, z \in E$ и $\forall \lambda \in \mathbb{R}$:

1. $(x, x) \geq 0$, $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. (3.15)
2. $(x, y) = (y, x)$.
3. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$.
4. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$.

В E вводится норма элемента, порожденная скалярным произведением

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}. \quad (3.16)$$

Выполнение двух первых аксиом нормы (3.15) очевидно. Проверим выполнение неравенства треугольника. Для этого воспользуемся неравенством Шварца (Коши–Буняковского)

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|, \quad (3.17)$$

которое выводится следующим образом. При любом $\lambda \in \mathbb{R}$ имеем в силу (3.15), (3.16) цепочку соотношений

$$\begin{aligned} (x - \lambda y, x - \lambda y) &= (x, x) - (\lambda y, x) - (x, \lambda y) + (\lambda y, \lambda y) = \\ &= \|x\|^2 - 2\lambda(x, y) + \lambda^2\|y\|^2 \geq 0 \Rightarrow (x, y)^2 - \|x\|^2\|y\|^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Отсюда получаем неравенство (3.17). Теперь элементарно проверяется третья аксиома нормы. Имеем

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y, x + y) = \|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|. \end{aligned}$$

Таким образом, с введением нормы (3.16) евклидово пространство становится линейным нормированным пространством. Отметим, что не во всяком нормированном пространстве можно ввести скалярное произведение. Чуть ниже покажем это.

Характеристическим свойством пространства со скалярным произведением является существование в нем равенства параллелограмма.

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \quad \forall x, y \in E. \quad (3.18)$$

Рассмотрим в линейном нормированном пространстве R_1^n векторы $x = (1, 0, \dots, 0)$, $y = (0, 1, 0, \dots, 0)$. Имеем

$$\|x\| = \sum_{k=1}^n |x_k| = 1, \quad \|y\| = 1, \quad \|x+y\| = \sum_{k=1}^n |x_k + y_k| = 2, \quad \|x-y\| = 2.$$

Отсюда видно, что равенство параллелограмма (3.18) не выполняется, т. е. в R_1^n нельзя ввести скалярное произведение.

Отметим еще свойство непрерывности скалярного произведения (x, y) по обеим переменным.

Пусть $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$. Тогда

$$(x_n, y_n) \rightarrow (x, y), \quad n \rightarrow \infty.$$

В самом деле, используя неравенство Шварца (3.17), получим

$$|(x, y) - (x_n, y_n)| = |(x, y - y_n) + (x - x_n, y_n)| \leq \|x\| \|y - y_n\| + \|y_n\| \|x - x_n\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Ограниченнность нормы сходящейся последовательности следует из второго неравенства треугольника (3.3). Имеем $\forall \varepsilon > 0$

$$\|y_n\| - \|y\| \leq \|y - y_n\| < \varepsilon \Rightarrow \|y_n\| \leq \|y\| + \varepsilon.$$

В физике используются также пространства с комплексными элементами, в которых определено скалярное произведение (u, v) над полем C (комплексных чисел). Скалярное произведение вводится при помощи следующих аксиом ($\lambda \in C$).

1. $(u, u) \geq 0$, $(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$.
2. $(u, v) = (\overline{v}, u)$.
3. $(\lambda u, v) = \lambda(u, v)$.
4. $(u+v, w) = (u, w) + (v, w)$.

Такое скалярное произведение обычно называют эрмитовым, а соответствующее пространство U унитарным. Норма в U вводится таким же образом, как в евклидовом пространстве

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)}. \quad (3.20)$$

Неравенство Шварца здесь также имеет место и устанавливается следующим образом $\forall \lambda \in C$ и $\forall u, v \in U$, имеем, согласно (3.19), (3.20).

$$\|u + \lambda v\|^2 = (u + \lambda v, u + \lambda v) = \|u\|^2 + (u, \lambda v) + (\lambda v, u) + \|\lambda v\|^2 \geq 0.$$

Пусть $v \neq 0$. Положим

$$\lambda = -\frac{(u, v)}{\|v\|^2}$$

и подставим в наше неравенство. Тогда получим

$$\|u\|^2 - \frac{(u, v)\overline{(u, v)}}{\|v\|^2} - \frac{\overline{(u, v)}(u, v)}{\|v\|^2} + \frac{|(u, v)|^2}{\|v\|^4} \|v\|^2 \geq 0 \Rightarrow \|u\|^2 \|v\|^2 - |(u, v)|^2 \geq 0,$$

т. е.

$$|(u, v)| \leq \|u\| \|v\|.$$

Неравенство Шварца справедливо $\forall u, v \in U$, так как при $v = 0$ оно также выполняется. Неравенство треугольника для нормы, порожденной скалярным произведением в унитарном пространстве, проверяется обычным образом с использованием неравенства Шварца.

Гильбертовы пространства. Дадим несколько важных определений.

Евклидово (унитарное) пространство, полное относительно нормы порожденной скалярным произведением, называется вещественным (комплексным) гильбертовым пространством H .

Банахово пространство B — это полное линейное нормированное пространство, однако норма B не обязательно порождается скалярным произведением. Но если $\forall u, v \in B$, выполняется правило параллелограмма, то можно ввести скалярное произведение по формуле [10].

$$(u, v) = \frac{1}{4} \left\{ \|u + v\|^2 - \|v - u\|^2 + i\|iu + v\|^2 - i\|v - iu\|^2 \right\}, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Конечная система ненулевых элементов $\{\varphi_k\} \subset H$ называется ортогональной, если

$$(\varphi_k, \varphi_m) = \begin{cases} \|\varphi_k\|^2 > 0, & k = m, \\ 0, & k \neq m. \end{cases}$$

Система $\{\varphi_k\}$ называется ортонормированной, если

$$(\varphi_k, \varphi_m) = \begin{cases} 1, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases} = \delta_{km},$$

где δ_{km} — символ Кронекера.

Бесконечная система ненулевых элементов называется ортогональной, если ортогональна любая ее конечная подсистема. Ортогональная система $\{\varphi_k\}$ линейно независима. Для неортогональной системы ненулевых функций $\{f_k\}$ имеет место следующий критерий линейной независимости.

Для линейной независимости конечной системы $\{f_k\} \subset H$ необходимо и достаточно, чтобы определитель Грама этой системы

$$G\{f_1, f_2, \dots, f_m\} = \begin{vmatrix} (f_1, f_1), (f_2, f_1) \dots (f_m, f_1) \\ (f_1, f_2), (f_2, f_2) \dots (f_m, f_2) \\ \dots \dots \dots \\ (f_1, f_m), (f_2, f_m) \dots (f_m, f_m) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Примеры.

1. Евклидово пространство E^n . Скалярное произведение и норма вводятся обычным образом

$$(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k, \quad \|x\| = \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Неравенство Шварца (3.17) выглядит так:

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right| \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Условие ортогональности

$$\sum_{k=1}^n x_k y_k = 0.$$

Поскольку конечномерное пространство полно, пространство E^n — гильбертово.

2. Пространство l^2 . Скалярное произведение определяется формулой

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k. \tag{3.21}$$

Так как

$$x_k y_k \leq \frac{1}{2} (x_k^2 + y_k^2) \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} y_k^2 < \infty,$$

то ряд в правой части (3.21) сходится. Норма элемента, порожденная скалярным произведением, определяется формулой

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Неравенство Шварца записывается так:

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \right| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} y_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Условие ортогональности имеет вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k = 0.$$

Так как l^2 — полное пространство, оно гильбертово.

3. Комплексное гильбертово пространство l^2 . Скалярное произведение можно определить одним из двух способов:

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{x}_k y_k, \quad (x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k.$$

Норма элемента

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

4. Пространство $\mathcal{L}_*^2[a, b]$. На множестве всех непрерывных на $[a, b]$ комплекснозначных функций зададим скалярное произведение.

$$(u, v) = \int_a^b u(x) \overline{v(x)} dx, \quad \forall u, v \in C[a, b].$$

Норма, порожденная скалярным произведением

$$\|u\| = \left(\int_a^b |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.22}$$

удовлетворяет всем аксиомам нормы. Неравенство Шварца имеет вид

$$\left| \int_a^b u(x) \overline{v(x)} dx \right| \leq \left(\int_a^b |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |v(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Это унитарное пространство неполно в метрике (3.22), т. е. не является гильбертовым. Его пополнение $L^2[a, b]$ — гильбертово пространство.

5. Пусть $\rho(x) > 0$ непрерывная на $[a, b]$ функция. Введем скалярное произведение

$$(u, v) = \int_a^b \rho(x) u(x) \overline{v(x)} dx, \quad \forall u, v \in C[a, b].$$

Все аксиомы скалярного произведения (3.19) выполняются. Норма элемента определяется равенством

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)} = \left(\int_a^b \rho(x) |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.23}$$

Такое (предгильбертово) пространство обозначается $\mathcal{L}_*^2[a, b; \rho]$. Условие ортогональности в нем имеет вид

$$\int_a^b \rho(x) u(x) \overline{v(x)} dx = 0, \quad \forall u, v \in \mathcal{L}_*^2[a, b; \rho].$$

Неравенство Шварца выглядит так:

$$\left| \int_a^b \rho(x) u(x) \overline{v(x)} dx \right| \leq \left(\int_a^b \rho(x) |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b \rho(x) |v(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Пространство $\mathcal{L}_*^2[a, b; \rho]$ не полно в метрике (3.23).

Ортонормированный базис в H . Линейно независимая система $\{f_k\}$ в гильбертовом пространстве H называется полной, если линейное многообразие $L(\{f_k\})$ плотно в H , т. е. $\overline{L(\{f_k\})} = H$. Так как ортонормированная система $\{\varphi_k\} \subset H$ линейно независима, то, по определению, она полна в H , если $L(\{\varphi_k\})$ плотно в H . Полная ортонормированная система называется ортонормированным базисом в H .

Пример. В гильбертовом пространстве l^2 система векторов

$$e_1 = (1, 0, \dots), \quad e_2 = (0, 1, 0, \dots), \dots, \quad e_n = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots), \dots$$

является ортонормированным базисом. Действительно, пусть $x = (x_1, x_2, \dots) \in l^2$, рассмотрим последовательность векторов $x^{(n)} = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$, $n = 1, 2, \dots$. Эта последовательность сходится к x по норме l^2 , так как

$$\|x - x^{(n)}\|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k^2 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

как остаток сходящегося ряда. Отсюда следует, что

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_k e_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k \Rightarrow \overline{L(\{e_k\})} = l^2.$$

Можно показать, что если ортонормированная система $\{\varphi_k\}$ полна в H , то не существует в H отличного от нуля элемента, ортогонального всем $\varphi_k(x)$.

Действительно, предположим, что такой отличный от нуля элемент $\psi(x)$ существует в H . Тогда в силу полноты системы $\{\varphi_k\}$ имеем представление

$$\psi = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x).$$

Условие ортогональности дает

$$(\psi, \varphi_m) = \left(\sum_{k=1}^n a_k \varphi_k, \varphi_m \right) = a_m = 0 \quad (m = 1, 2, \dots, n).$$

Если $\psi(x)$ является предельным элементом линейного многообразия $L(\{\varphi_k\})$, т. е.

$$\psi = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k,$$

то в силу непрерывности скалярного произведения получаем $a_m = 0$ ($m = 1, 2, \dots$). Полученное противоречие доказывает утверждение.

Имеет место теорема.

В сепарабельном евклидовом (гильбертовом) пространстве любая ортонормированная система не более чем счетна.

Доказательство. Пусть $\{\varphi_\alpha\}$ — ортонормированная система, тогда

$$\|\varphi_\alpha - \varphi_\beta\|^2 = (\varphi_\alpha - \varphi_\beta, \varphi_\alpha - \varphi_\beta) = \|\varphi_\alpha\|^2 - 2(\varphi_\alpha, \varphi_\beta) + \|\varphi_\beta\|^2 = 2 \Rightarrow \|\varphi_\alpha - \varphi_\beta\| = \sqrt{2}.$$

Рассмотрим множество шаров $B(\varphi_\alpha, 1/2)$, очевидно, они не пересекаются. Поскольку E — сепарабельно, то в нем существует счетное всюду плотное множество $Q = \{q_1, q_2, \dots\}$. В каждый из шаров $B(\varphi_\alpha, 1/2)$ попадет по крайней мере один элемент множества Q , а это означает, что множество шаров $B(\varphi_\alpha, 1/2)$ не более чем счетно. То же можно сказать и о множестве их центров $\{\varphi_\alpha\}$, что и требовалось.

Справедливо и обратное утверждение. Если гильбертово пространство H содержит полную ортонормированную систему $\{\varphi_k\}$, то оно сепарабельно.

Процесс ортогонализации Шмидта. Из любой линейно независимой системы векторов $\{f_k\}$ в H или E можно построить ортонормированную систему φ_k при помощи процесса ортогонализации Шмидта.

На первом шаге процесса введем вспомогательный элемент $f_1^* = f_1$ и положим $\varphi_1 = f_1 / \|f_1\|$. Очевидно $f_1^* = f_1 \neq 0$, поэтому определение элемента φ_1 корректно.

На втором шаге введем элемент $f_2^* = f_2 + \alpha_{21}\varphi_1$ и потребуем, чтобы f_2^* и φ_1 были ортогональны. Тогда получим

$$(f_2^*, \varphi_1) = (f_2 + \alpha_{21}\varphi_1, \varphi_1) = 0 \Rightarrow \alpha_{21} = -(f_2, \varphi_1).$$

Поскольку $f_2^* \neq 0$ (ибо в противном случае векторы f_1 и f_2 были бы линейно зависимы), можно положить

$$\varphi_2 = \frac{f_2^*}{\|f_2^*\|}.$$

На третьем шаге, полагаем $f_3^* = f_3 + \alpha_{31}\varphi_1 + \alpha_{32}\varphi_2$ и из условий $f_3^* \perp \varphi_1$ и $f_3^* \perp \varphi_2$ определяем: $\alpha_{31} = -(f_3, \varphi_1)$, $\alpha_{32} = -(f_3, \varphi_2)$ и $\varphi_3 = f_3^* / \|f_3^*\|$. Продолжая процесс, мы на m -м шаге построим элемент

$$\varphi_m = \frac{f_m^*}{\|f_m^*\|}, \quad f_m^* = f_m - \sum_{k=1}^{m-1} (f_m, \varphi_k) \varphi_k, \quad (3.24)$$

причем по построению $(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{ij}$ ($i, j = 1, 2, \dots, m$). Непосредственно видно, что

$$L(\{\varphi_\alpha\}) = L(\{\varphi_\alpha\}).$$

Пример. Система $\{x^k\}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) — линейно независима в $L^2[-1, 1]$. Воспользовавшись процессом ортогонализации, построим несколько первых элементов ортонормированной системы $\{\varphi_k\}$. Здесь

$$f_1 = 1, f_2 = x, f_3 = x^2, \dots$$

Находим согласно процедуре Шмидта (3.24)

$$f_1^* = f_1 = 1, \|f_1^*\| = \sqrt{2}, \varphi_1 = 1/\sqrt{2},$$

$$f_2^* = f_2 - (f_2, \varphi_1) \varphi_1 \Rightarrow f_2^* = f_2 = x, \|f_2^*\| = \sqrt{2/3}, \varphi_2 = \sqrt{3/2} x,$$

$$f_3^* = f_3 - (f_3, \varphi_1) \varphi_1 - (f_3, \varphi_2) \varphi_2 \Rightarrow f_3^* = x^2 - \frac{2}{3}, \|f_3^*\| = \sqrt{\frac{2}{5}},$$

$$\varphi_3 = \sqrt{\frac{5}{2}} \left(x^2 - \frac{2}{3} \right)$$

.....
.....

Таким путем мы приходим к ортогональным на $[-1, 1]$ многочленам Лежандра, имеющим многочисленные приложения в математической физике и других вопросах.

Исходя из сказанного выше можно утверждать, что в бесконечномерном сепарабельном евклидовом пространстве E существует не более чем счетный, ортонормированный базис.

Действительно, пусть $Q = \{q_1, q_2, \dots\}$ — счетное всюду плотное в E множество, тогда $\overline{L(\{q_k\})} = E$. Возьмем произвольный ненулевой вектор $q_{k_1} \in Q$. Если предположить, что все остальные векторы из Q линейно зависимы с q_{k_1} , то $L(\{q_k\})$ — одномерное линейное многообразие в E , т. е. $\dim E = 1$. Поэтому в Q всегда найдется вектор q_{k_2} , линейно независимый с q_{k_1} . Если теперь предположим, что все остальные элементы из Q принадлежат $L(\{q_{k_1}, q_{k_2}\})$, то придем к выводу, что $\dim E = 2$. Следовательно, найдется вектор $q_{k_3} \in Q$, такой что система $q_{k_1}, q_{k_2}, q_{k_3}$ будет линейно независимой. Продолжая этот процесс, построим линейно независимую счетную систему векторов

$$q_{k_1}, q_{k_2}, \dots, q_{k_n}, \dots$$

Она полна, так как $L(\{q_k\}) = L(\{q_{k_n}\}) \Rightarrow \overline{L(\{q_{k_n}\})} = E$. Применяя теперь к системе $\{q_{k_n}\}$ процесс ортогонализации, получим ортонормированную систему $\{e_k\}$, причем $L(\{q_{k_n}\}) = L(\{e_k\})$. Стало быть, векторы e_1, e_2, \dots образуют базис в E .

Аппроксимация в гильбертовом пространстве. Пусть H -гильбертово пространство и M — замкнутое выпуклое множество в нем. Расстояние от элемента $x \in H$ до множества M определяется формулой

$$\rho(x, M) = \inf_{u \in M} \|x - u\|.$$

Если $x \in M$, то $\rho(x, M) = 0$, в противном случае $\rho(x, M) = d > 0$.

Задача о разыскании элемента наилучшего приближения, т. е. элемента $u_* \in M$, такого что

$$\rho(x, M) = \inf_{u \in M} \|x - u\| = \|x - u_*\| = d$$

в гильбертовом пространстве всегда однозначно разрешима. Точнее, имеет место теорема.

Пусть M — замкнутое выпуклое множество в гильбертовом пространстве H и точка $x \in M$. Тогда существует единственный элемент $u_* \in M$, такой что

$$\rho(x, M) = \|x - u_*\|.$$

Действительно, так как $x \in M$, то $\rho(x, M) = d > 0$. По свойству точной нижней грани $\exists \{u_n\} \subset M$ такая, что

$$d \leq \|x - u_n\| \leq d + 1/n \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (3.25)$$

Покажем, что последовательность $\{u_n\}$ — фундаментальная. Имеем согласно равенству параллелограмма

$$\begin{aligned} 2(\|x - u_n\|^2 + \|x - u_m\|^2) &= \|u_n - u_m\|^2 + \|2x - u_n - u_m\|^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \|u_n - u_m\|^2 &= 2(\|x - u_n\|^2 + \|x - u_m\|^2) - 4\left\|x - \frac{u_n + u_m}{2}\right\|^2. \end{aligned}$$

Так как M выпукло и $u_n, u_m \in M$, то и середина отрезка их соединяющего $\frac{1}{2}(u_n + u_m) \in M$.

Поэтому

$$\left\|x - \frac{u_n + u_m}{2}\right\| \geq d.$$

Теперь можно записать

$$\begin{aligned} \|u_n - u_m\|^2 &\leq 2(d + 1/n)^2 + 2(d + 1/m)^2 - 4d^2 = \frac{4d}{n} + \frac{4d}{m} + \\ &+ \frac{2}{n^2} + \frac{2}{m^2} \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

В силу полноты гильбертова пространства фундаментальная последовательность $\{u_n\}$ сходится к элементу $u_* \in H$, а так как M — замкнутое множество, то $u_* \in M$. Переходя в (3.25) к пределу при $n \rightarrow \infty$, находим

$$\|x - u_*\| = d,$$

откуда следует, что u_* — элемент наилучшего приближения к $x \in H$.

Докажем единственность решения экстремальной задачи

$$\inf_{u \in M} \|x - u\| = \|x - u_*\| = d.$$

Пусть наряду с u_* имеется еще один элемент наилучшего приближения u_{**} . Тогда по равенству параллелограмма

$$\begin{aligned} 2(\|x - u_*\|^2 + \|x - u_{**}\|^2) &= \|2x - u_* - u_{**}\|^2 + \|u_* - u_{**}\|^2 \Rightarrow 4d^2 = \\ &= 4 \left\| x - \frac{u_* + u_{**}}{2} \right\|^2 + \|u_* - u_{**}\|^2 \Rightarrow 4d^2 \geq 4d^2 + \|u_* - u_{**}\|^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \|u_* - u_{**}\| \leq 0 \Rightarrow u_* - u_{**} = 0, \end{aligned}$$

что и требовалось.

Пусть x — произвольный элемент гильбертова пространства H . Рассмотрим вопрос о линейном приближении к нему (приближение элементами подпространства $L \subset H$). Так как L — замкнутое выпуклое множество, то предыдущая теорема остается в силе, если под расстоянием $\rho(x, L)$ понимать величину

$$\rho(x, L) = \inf_{u \in L} \|x - u\|, \quad x \in L.$$

Таким образом, имеет место следствие.

Пусть L — подпространство в гильбертовом пространстве H и элемент $x \in L$. Тогда существует единственный элемент $y \in L$, такой что

$$\rho(x, L) = \inf_{u \in L} \|x - u\| = \|x - y\| = d > 0.$$

В качестве иллюстрации рассмотрим трехмерное пространство, произвольную плоскость L , проходящую через начало координат и точку $x \in L$ (рис. 3.6). Точка $y \in L$ является элементом наилучшего приближения. Расстояние от точки x до плоскости L : $\rho(x, L) = \|x - y\| = d$. Очевидно, $x - y \perp L$.

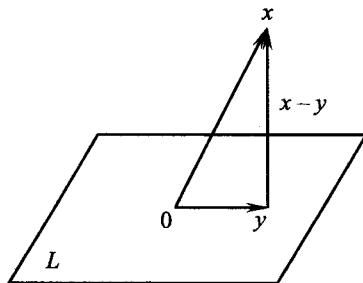


Рис. 3.6. Иллюстрация к проблеме аппроксимации в E^3

Ортогональная декомпозиция. Возвращаясь к произвольному гильбертовому пространству H , отметим, что факт ортогональности элементов y (проекции элемента x на подпространство L) и $x - y$ справедлив и здесь.

Имеет место теорема (о проекции). Пусть H — гильбертово пространство, L — его подпространство и $x \in H$, но не принадлежит L . Если y — проекция элемента x на L (т. е. $\rho(x, L) = \|x - y\| = d$, $y \in L$), то $y \perp x - y$.

Доказательство. Пусть $h \neq 0$ — произвольный элемент из L и λ — комплексное (вещественное в случае действительного H) число. Пусть $x - (y + \lambda h)$ — наклонная. Имеем

$$\begin{aligned} (x - y - \lambda h, x - y - \lambda h) &= \|x - y\|^2 - \lambda(h, x - y) - \bar{\lambda}(h, x - y) + \\ &+ |\lambda|^2 \|h\|^2 \geq d^2 \Rightarrow -2 \operatorname{Re}[\lambda(h, x - y)] + |\lambda|^2 \|h\|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Полагая $\lambda = \frac{(x - y, h)}{\|h\|^2}$, находим

$$-2 \frac{|(x - y, h)|^2}{\|h\|^2} + \frac{|(x - y, h)|^2}{\|h\|^2} \geq 0 \Rightarrow |(x - y, h)| = 0 \Rightarrow (x - y, h) = 0 \Rightarrow x - y \perp h.$$

Поскольку h — произвольный элемент в L , то $x - y \perp L$ и, в частности, $x - y \perp y$.

Из доказанной теоремы имеем следствие. Для $\forall x \in H$ справедливо представление

$$x = y + z, \quad y \in L, \quad z \perp L.$$

В самом деле $x = y + (x - y)$, где y — ортогональная проекция элемента x на подпространство L , а элемент $x - y = z \perp L$ (по доказанному выше).

Теорема (об ортогональной декомпозиции гильбертова пространства). Пусть H — гильбертово пространство, L — линейное многообразие в нем и L^\perp — совокупность всех элементов из H , ортогональных L . Тогда L^\perp — подпространство в H .

Доказательство. Покажем, что L^\perp — линейное многообразие в H . Если $u_1, u_2 \in L^\perp$, а $x \in L$, то $(x, u_1) = 0, (x, u_2) = 0$. Имеем для произвольных скаляров λ_1, λ_2 и $\forall x \in L$

$$(x, \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \bar{\lambda}_1 (x, u_1) + \bar{\lambda}_2 (x, u_2) = 0.$$

Это означает, что $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \in L^\perp$, т. е. L^\perp — линейное многообразие в H . Теперь покажем, что L^\perp — замкнутое линейное многообразие в H . Пусть $\{u_n\} \in L^\perp$ и $u_n \rightarrow u$ ($n \rightarrow \infty$). Тогда $\forall x \in L : (x, u_n) = 0$. В силу непрерывности скалярного произведения $(u_n, x) \rightarrow (u, x) = 0$.

Замечание. Если L — замкнутое линейное многообразие в H (т. е. подпространство), то, по доказанному, ортогональное дополнение к нему L^\perp — тоже подпространство. Это означает, что $\forall x \in H$ представим в виде

$$x = y + z, \quad y \in L, \quad z \in L^\perp,$$

причем это представление единственно. Действительно, пусть имеет место еще одно представление элемента $x : x = y' + z'$. Тогда $y - y' = z' - z$, где $y = y' + z' \in L$, $v = z' - z \in L^\perp$. Из равенства $(u, v) = 0 \Rightarrow \|u\|^2 = \|v\|^2 = 0$, т. е. $y = y'$ и $z = z'$, что и требовалось.

Из этого рассуждения видно, что $L \cap L^\perp = \{0\}$, других общих элементов они не имеют. Следовательно, гильбертово пространство H представляет собой прямую сумму взаимно-ортогональных подпространств L и L^\perp (ортогональную декомпозицию H):

$$H = L \oplus L^\perp.$$

Аналогично, если $L_j (j = 1, 2, \dots, m)$ — взаимно-ортогональные подпространства в H , то $H = L_1 \oplus L_2 \oplus \dots \oplus L_m$ в том смысле, что $\forall x \in H$ может быть представлен в виде $x = u_1 + u_2 + \dots + u_m$, $u_k \in L_k$ и $L_k \perp L_j (k \neq j)$.

Ряды Фурье в гильбертовом пространстве. Рассмотрим задачу об аппроксимации произвольного элемента $f \in H$ элементами ортонормированной системы $\{\varphi_k\}$. Для этого зафиксируем n , составим всевозможные линейные комбинации вида

$$u = \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k$$

и потребуем, чтобы расстояние от f до n -мерного линейного многообразия $L(\{\varphi_k\})$

$$\Delta_n = \left\| f - \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k \right\| \rightarrow \min.$$

Поскольку конечномерное линейное многообразие всегда замкнуто, то речь идет об аппроксимации f элементами конечномерного подпространства $L \subset H$. Мы имеем

$$\Delta_n^2 = \left\| f - \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k, f - \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n \alpha_k (\varphi_k, f) - \sum_{k=1}^n \overline{\alpha_k (\varphi_k, f)} + \sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2.$$

Введем следующее определение. Числа $C_k = (f, \varphi_k)$ называются коэффициентами Фурье элемента $f \in H$ по ортонормированной системе $\{\varphi_k\}$. Учитывая равенство

$$|C_k - \alpha_k|^2 = (C_k - \alpha_k)(\bar{C}_k - \bar{\alpha}_k) = |C_k|^2 - \alpha_k \bar{C}_k - C_k \bar{\alpha}_k + |\alpha_k|^2,$$

получаем

$$\Delta_n^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n |C_k|^2 + \sum_{k=1}^n |C_k - \alpha_k|^2.$$

Отсюда следует, что минимальное значение (квадрат среднего квадратического уклонения) Δ_n^2 принимает тогда и только тогда, когда $\alpha_k = C_k$ (минимальное свойство коэффициентов Фурье). Таким образом,

$$\min \Delta_n^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n |C_k|^2 \geq 0. \quad (3.26)$$

В силу равенства (3.26) определяем расстояние от f до n -мерного подпространства $L = L(\{\varphi_k\})$

$$\rho(f, L) = \inf_{u \in L} \|f - u\| = \inf_{\alpha_k} \left\| f - \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k \right\| = \left\| f - \sum_{k=1}^n C_k \varphi_k \right\| = \left\{ \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n |C_k|^2 \right\}^{1/2}. \quad (3.27)$$

Замечание. Вектор $u = f - \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k$ ортогонален вектору φ_m ($m = 1, 2, \dots, n$), а следовательно, и $L(\{\varphi_m\})$ в том и только в том случае, когда $\alpha_k = C_k$. В остальных случаях u представляет собой «наклонную». Поэтому равенство (3.26) можно интерпретировать так: длина перпендикуляра, опущенного из точки x на подпространство (прямую, плоскость), меньше длины наклонной, проведенной из той же точки.

Из (3.26) следует

$$\sum_{k=1}^n |C_k|^2 \leq \|f\|^2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |C_k|^2 \leq \|f\|^2.$$

Это неравенство называется неравенством Бесселя. Таким образом, $\forall f \in H$ ряд из квадратов его коэффициентов Фурье по ортонормированной системе $\{\varphi_k\}$ сходится. Очевидно, $C_k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$).

Коэффициенты Фурье $C_k = (f, \varphi_k)$ называются координатами элемента f в ортонормированной системе $\{\varphi_k\}$. В этом смысле неравенство Бесселя выражает тот факт, что сумма квадратов координат вектора не превышает квадрата его длины.

Пусть f — произвольный элемент сепарабельного гильбертова бесконечномерного пространства H и $\{\varphi_k\}$ — некоторая ортонормированная система в H . Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k \varphi_k, \quad C_k = (f, \varphi_k) \tag{3.28}$$

называется рядом Фурье элемента f по системе $\{\varphi_k\}$. Формальный ряд Фурье (3.28) может оказаться расходящимся или сходящимся (по норме H), но не к элементу f . Для того чтобы это понятие было содержательным, необходимо сформулировать условия, при которых он сходится к элементу f .

Определение. Ортонормированная система $\{\varphi_k\}$ в сепарабельном гильбертовом пространстве H называется замкнутой, если $\forall f \in H$, имеет место равенство (Парсеваля)

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k^2 = \|f\|^2, \quad C_k = (f, \varphi_k).$$

Из (3.27) непосредственно следует, что для сходимости ряда Фурье к элементу f (по норме H) необходимо и достаточно, чтобы ортонормированная система $\{\varphi_k\}$ была замкнутой. Действительно, переходя в (3.27) к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{k=1}^n C_k \varphi_k \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n |C_k|^2 \right\}^{1/2} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n C_k \varphi_k = f \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} C_k \varphi_k = f.$$

Следующая теорема определяет связь между понятиями полноты и замкнутости.

В сепарабельном гильбертовом пространстве понятия полноты и замкнутости для любой ортонормированной системы равносильны.

Доказательство. Пусть ортонормированная система $\{\varphi_k\}$ замкнута в H . Это означает, что $L(\{\varphi_k\})$ всюду плотно в H , т. е. $\{\varphi_k\}$ — полная ортонормированная система (ортонормированный базис в H). Обратно, пусть система полна, т. е. $\forall f \in H$ можно аппроксимировать линейными комбинациями вида $u_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k$ ($\|f - u_n\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$). Но тогда и подавно элемент f можно аппроксимировать линейными комбинациями $f_n = \sum_{k=1}^n C_k \varphi_k$. Имеем из (3.27)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\| = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |C_k|^2 = \|f\|^2,$$

т. е. система $\{\varphi_k\}$ замкнута в H , что и требовалось.

Из предыдущих рассуждений следует, что по заданному элементу $f \in H$, в фиксированной замкнутой ортонормированной системе $\{\varphi_k\}$ однозначно определяются числа $C_k = (f, \varphi_k)$ — коэффициенты Фурье, причем

$$\sum_{k=1}^{\infty} |C_k|^2 = \|f\|^2 = (f, f).$$

Имеет место и обратное утверждение.

Теорема (Рисс, Фишер). Пусть $\{\varphi_k\}$ — ортонормированная система в сепарабельном гильбертовом пространстве H и числа C_1, C_2, \dots таковы, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |C_k|^2 < \infty.$$

Тогда найдется элемент $f \in H$, для которого

$$C_k = (f, \varphi_k), \quad \sum_{k=1}^{\infty} |C_k|^2 = (f, f) = \|f\|^2.$$

Доказательство. Рассмотрим частичную сумму ряда $f_n = \sum_{k=n+1}^n C_k \varphi_k$. Последовательность $\{f_n\}$ фундаментальная. Действительно,

$$\|f_{n+p} - f_n\|^2 = \left(\sum_{k=n+1}^{n+p} C_k \varphi_k, \sum_{k=n+1}^{n+p} C_k \varphi_k \right) = \sum_{k=n+1}^{n+p} |C_k|^2 \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty).$$

Так как гильбертово пространство полное, то $f_n \rightarrow f \in H$ ($n \rightarrow \infty$). Покажем, что f — искомый элемент. Имеем в силу непрерывности скалярного произведения

$$(f, \varphi_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n, \varphi_k) = C_k \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Далее

$$\begin{aligned} (f, f) &= (f - f_n, f) + (f_n, f) = (f - f_n, f) + \left(\sum_{k=1}^n C_k \varphi_k, f \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left\| f \right\|^2 - \sum_{k=1}^n C_k \bar{C}_k = |(f - f_n, f)| \leq \|f - f_n\| \|f\| \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |C_k|^2.$$

Теорема доказана.

Критерием полноты ортонормированной системы может служить следующая теорема (мы вновь доказываем это утверждение, но теперь опираемся на теорему Рисса–Фишера).

Для того чтобы ортонормированная система $\{\varphi_k\}$ в сепарабельном гильбертовом пространстве H была полной необходимо и достаточно, чтобы в H не существовало отличного от нуля элемента, ортогонального всем элементам $\{\varphi_k\}$.

Доказательство необходимости.

Пусть $\{\varphi_k\}$ — полная ортонормированная система в H . Необходимо показать, что не существует отличного от нуля элемента $f \in H$, такого, что $(f, \varphi_k) = C_k = 0 \ (k = 1, 2, \dots)$.

Предположим, что такой элемент $f \in H$ существует. Тогда

$$C_k = (f, \varphi_k) = 0 \ (k = 1, 2, \dots).$$

Так как полная ортонормированная система замкнута, то имеет место равенство Парсеваля

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |C_k|^2 = 0 \Rightarrow f = 0.$$

Доказательство достаточности.

Необходимо показать, что если не существует отличного от нуля элемента в H , ортогонального всем элементам ортонормированной системы $\{\varphi_k\}$, то она полна в H . Предположим противное, что система $\{\varphi_k\}$ не полна. Тогда $\exists g \in H$ такой, что

$$\|g\|^2 > \sum_{k=1}^{\infty} |C_k|^2, \quad C_k = (g, \varphi_k).$$

По теореме Рисса–Фишера для чисел C_1, C_2, \dots существует элемент $f \in H$, такой что

$$C_k = (f, \varphi_k), \quad \|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |C_k|^2.$$

Но тогда

$$(f - g, \varphi_k) = 0 \ (k = 1, 2, \dots) \Rightarrow f = g.$$

С другой стороны, $\|f\|^2 < \|g\|^2$. Полученное противоречие завершает доказательство.

Замечание. Если в условии теоремы Рисса–Фишера потребовать полноту ортонормированной системы $\{\varphi_k\}$, то тогда можно гарантировать единственность элемента f . Это непосредственно следует из доказанной выше теоремы.

Изоморфизм гильбертовых пространств. Определение. Говорят, что гильбертовы (евклидовы) пространства H и H^* изоморфны, если между их элементами можно установить взаимно-однозначное соответствие, согласованное с линейными операциями и сохраняющее скалярное произведение. Иными словами, если

$$x \leftrightarrow x^*, \quad y \leftrightarrow y^* \quad (x, y \in H; x^*, y^* \in H^*),$$

то

$$x + y \leftrightarrow x^* + y^*, \quad \lambda x \leftrightarrow \lambda x^*, \quad (x, y) = (x^*, y^*).$$

Все конечномерные евклидовые пространства изоморфны друг другу. Бесконечномерные евклидовые пространства могут не быть изоморфными. Однако, имеет место теорема.

Любые два сепарабельных гильбертовых пространства изоморфны между собой. Докажем, что любое сепарабельное гильбертово пространство H изоморфно l^2 . Отсюда будет следовать утверждение теоремы.

Взаимно-однозначное соответствие. Выберем в H произвольную полную ортонормированную систему $\{\varphi_k\}$ (ортонормированный базис). Для любого $f \in H$ определим числа $C_k = (f, \varphi_k)$. Тогда вектор

$$C = (C_1, C_2, \dots), \quad \sum_{k=1}^{\infty} |C_k|^2 = \|f\|^2 < \infty$$

является элементом гильбертова пространства l^2 . Обратно, $\forall C = (C_1, C_2, \dots) \in l^2$ по теореме

Рисса–Фишера соответствует один элемент $f \in H$, такой что $C_k = (f, \varphi_k)$ и $\sum_{k=1}^{\infty} |C_k|^2 = \|f\|^2$.

Таким образом, взаимно-однозначное соответствие

$$l^2 \ni C \leftrightarrow f \in H$$

установлено.

Согласованность с линейными операциями. Если $H \ni f \leftrightarrow C \in l^2$, $H \ni g \leftrightarrow D \in l^2$, то $f + g \in H$ и $(f + g, \varphi_k) = C_k + D_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} |C_k + D_k|^2 = \|f + g\|^2 < \infty$. Следовательно, вектор $C + D = (C_1 + D_1, C_2 + D_2, \dots) \in l^2$ и $f + g \leftrightarrow C + D$. Аналогично: $\lambda f \leftrightarrow \lambda C$.

Сохранение скалярного произведения. Мы имеем

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |C_k|^2 = \|C\|^2, \quad \|g\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |D_k|^2 = \|D\|^2, \quad \|f + g\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |C_k + D_k|^2 = \|C + D\|^2.$$

Отсюда

$$\|f\|^2 + 2(f, g) + \|g\|^2 = \|C\|^2 + 2(C, D) + \|D\|^2 \Rightarrow (f, g) = (C, D),$$

что и требовалось.

Таким образом, с точностью до изоморфизма существует лишь одно сепарабельное гильбертово пространство. Например, l^2 является его координатной реализацией.

Гильбертово пространство $L^2(\Omega)$. Функциональной реализацией абстрактного гильбертова пространства является пространство $L^2(\Omega)$ — совокупность (классов эк-

вивалентных функций $f(x)$), суммируемых с квадратом на области $\Omega \subset R^n$, т. е. таких, что

$$\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx < \infty.$$

Покажем, что $L^2(\Omega)$ — линейное множество (линейное пространство). Если $f \in L^2(\Omega)$ и $g \in L^2(\Omega)$, то

$$|\lambda f + \mu g|^2 = (\lambda f + \mu g)(\bar{\lambda} \bar{f} + \bar{\mu} \bar{g}) \leq |\lambda|^2 |f|^2 + |\mu|^2 |g|^2$$

и, следовательно, линейная комбинация $\lambda f + \mu g$, $\forall \lambda, \mu \in P$ также принадлежит $L^2(\Omega)$. Нулевым элементом является класс $[0]$, содержащий все функции, эквивалентные нулю. Далее, в $L^2(\Omega)$ справедливо неравенство Шварца. Действительно, так как f, g и $\lambda f + \mu g$ принадлежат $L^2(\Omega)$, то $\forall \lambda \in R$

$$\int_{\Omega} (|f| + \lambda |g|)^2 dx = \int_{\Omega} |f|^2 dx + 2\lambda \int_{\Omega} |fg| dx + \lambda^2 \int_{\Omega} |g|^2 dx \geq 0.$$

Из неотрицательности этого квадратного трехчлена (относительно λ) следует неположительность дискриминанта

$$\left(\int_{\Omega} |fg| dx \right)^2 - \int_{\Omega} |f|^2 dx \int_{\Omega} |g|^2 dx \leq 0.$$

Отсюда вытекает неравенство Шварца в $L^2(\Omega)$

$$\left| \int_{\Omega} f(x) g(x) dx \right| \leq \int_{\Omega} |f(x) g(x)| dx \leq \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.29)$$

Пусть Ω — ограниченная область в R^n и $g \equiv 1$. тогда из (3.29) получаем

$$\int_{\Omega} |f(x)| dx \leq \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} dx \right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

т. е. из того, что $f \in L^2(\Omega) \Rightarrow f \in L^1(\Omega)$.

На линейном пространстве $L^2(\Omega)$ введем скалярное произведение и норму, индуцированную скалярным произведением

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(x) \overline{g(x)} dx, \quad (3.30)$$

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)} = \left(\int_{\Omega} |f|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.31)$$

В терминах нормы (3.31) неравенство Шварца (3.29) приобретает стандартную форму

$$|(f, g)| \leq \|f\| \|g\|.$$

Аксиомы скалярного произведения (3.30) и нормы (3.31) выполняются. При проверке первой аксиомы надо помнить, что функции, равные нулю почти везде образуют класс $[0]$.

Свойство полноты пространства $L^2(\Omega)$ выражает теорема Рисса–Фишера [7, 18], которая утверждает, что всякая фундаментальная в среднем последовательность $\{f_k\} \subset L^2(\Omega)$ сходится в этом пространстве. Напомним, что применительно к $L^2(\Omega)$ фундаментальной будет последовательность $\{f_k\} \subset L^2(\Omega)$, такая что

$$\|f_k - f_m\| = \left(\int_{\Omega} |f_k(x) - f_m(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \quad m \rightarrow \infty.$$

Сходимость $\{f_k\} \subset L^2(\Omega)$ к функции $f \in L^2(\Omega)$ означает, что

$$\|f - f_k\| = \left(\int_{\Omega} |f(x) - f_k(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Таким образом, нормированное линейное пространство $L^2(\Omega)$ является гильбертовым (функциональным) пространством.

3.5. Приложения в задачах управления упругой системой

В некоторых физических устройствах, например в электронных микроскопах, необходимо выдерживать очень высокую точность при управлении движениями мишени. Здесь в качестве датчиков применяются пьезоэлектрические элементы. В связи с этим возникают задачи об оптимальном (в некотором смысле) управлении движениями пьезоэлектрического (пьезокерамического) элемента.

Рассмотрим модельную задачу об управлении вынужденными движениями тонкого пьезокерамического стержня, свободного от механической нагрузки и совершающего продольные движения под воздействием переменной во времени электрической разности потенциалов, прикладываемой к торцевым электродам (рис. 3.7).

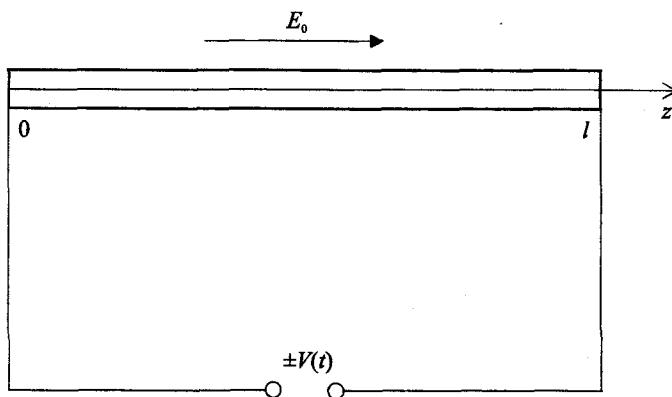


Рис. 3.7. Схема электрического нагружения пьезокерамического стержня

Согласно [2], состояние стержня описывается двумя функциями: упругим (осевым) перемещением точек стержня $w = w(z, t)$ и потенциалом электрического (электростатического) поля $\varphi = \varphi(z, t)$. Соответственно, механическое (осевое) напряжение $\sigma_z = \sigma_z(z, t)$, осевая деформация $\varepsilon_z = \varepsilon_z(z, t)$, электрическая индукция $D_z = D_z(z, t)$ и напряженность электрического поля $E_z = E_z(z, t)$ определяются при помощи соотношений

$$\begin{aligned}\sigma_z &= c_{33}\varepsilon_z - e_{33}E_z, \quad D_z = \varepsilon_{33}E_z + e_{33}\varepsilon_z, \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z},\end{aligned}\tag{3.32}$$

где c_{33} , ε_{33} и e_{33} — модуль упругости, диэлектрическая проницаемость и пьезомодуль материала стержня. Уравнение движения и условие сохранения электрического заряда в рассматриваемом случае имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0,\tag{3.33}$$

где ρ — плотность материала стержня.

Подстановка в (3.33) соотношений (3.32) дает

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0, \quad a^2 = (1 + \kappa_3^2) \frac{c_{33}}{\rho}; \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} (e_{33}w - \varepsilon_{33}\varphi) &= 0, \quad \kappa_3^2 = \frac{e_{33}^2}{c_{33}\varepsilon_{33}}.\end{aligned}\tag{3.34}$$

Первое соотношение в (3.34) — волновое уравнение, причем a есть скорость распространения продольных возмущений в пьезокерамическом стержне, κ_3 — так называемый коэффициент электромеханической связи.

Для замыкания модели дифференциальные уравнения (3.34) необходимо дополнить начальными и граничными условиями

$$\begin{aligned}w|_{t=0} &= 0, \quad \left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq z \leq l, \\ \sigma_z|_{z=0,l} &= 0, \quad \varphi|_{z=0,l} = \mp V(t), \quad t > 0.\end{aligned}\tag{3.35}$$

Решение начально-краевой задачи (3.34), (3.35), опуская утомительные подробности, представим в виде

$$\begin{aligned}w(z, t) &= \frac{2e_{33}}{c_{33}} \int_0^t \dot{V}(\tau) g_1(z, t-\tau) d\tau, \quad V(0) = 0, \\ \sigma_z(z, t) &= \frac{4e_{33}}{a} (1 + \kappa_3^2) \int_0^t \dot{V}(\tau) g_2(z, t-\tau) d\tau, \\ \varphi(z, t) &= \int_0^t \dot{V}(\tau) g_3(z, t-\tau) d\tau, \quad D_z(z, t) = 2\varepsilon_{33} (1 + \kappa_3^2) \int_0^t \dot{V}(\tau) g_4(t-\tau) d\tau,\end{aligned}\tag{3.36}$$

где

$$\begin{aligned}
 g_1(z, t) &= \frac{1}{2} - \frac{z}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left[2\zeta_n\left(\frac{z}{l} - \frac{1}{2}\right)\right]}{\zeta_n \delta_n(\zeta_n)} \cos(2\zeta_n t^*), \\
 g_2(z, t) &= \frac{2a}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\zeta_n \frac{z}{l}\right) \sin\left[\zeta_n\left(1 - \frac{z}{l}\right)\right]}{\delta_n(\zeta_n)} \cos(2\zeta_n t^*), \\
 g_3 &= \frac{2z}{l} - 1 + 4\kappa_3^2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos(2\zeta_n t^*) \frac{\sin\left(\zeta_n \frac{z}{l}\right) \cos\left[\zeta_n\left(1 - \frac{z}{l}\right)\right] - \frac{z}{l} \sin \zeta_n}{\zeta_n \delta_n(\zeta_n)}, \\
 g(t) &= \frac{1}{l} \left\{ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\zeta_n t^*) \cos \zeta_n}{\delta_n(\zeta_n)} - 1 \right\}, \\
 t^* &= \frac{at}{l}, \quad \delta_n(\zeta) = (1 + \kappa_3^2) \zeta \sin \zeta - \cos \zeta.
 \end{aligned}$$

Числа ζ_n — корни уравнения

$$\kappa_3^2 \sin \zeta - (1 + \kappa_3^2) \zeta \cos \zeta = 0$$

с асимптотикой

$$\zeta_n = \frac{2n-1}{2} \pi + \theta_n, \quad \lim \theta_n = 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Наконец, протекающий по стержню ток смещения вычисляется по формуле

$$I = -S \frac{d}{dt} D_z.$$

Таким образом, все полевые величины определены в виде сверток известных стандартных функций с производной от поступающего на обкладки стержня электрического сигнала. Рассмотрим теперь несколько задач управления.

1. Оптимальный перевод стержня в заданное состояние. Поставим следующую задачу: за заданный промежуток времени T привести смещения наблюдаемых точек стержня из начального нулевого состояния к заданным значениям при условии минимизации нормы управления. Под управлением будем понимать скорость изменения подаваемого напряжения, т. е. $\dot{V}(t)$. Рассмотрим эту задачу в гильбертовом пространстве $L^2(0, T)$.

Формальная постановка задачи выглядит следующим образом

$$\begin{aligned}
 w(z_k, T) &= \frac{2e_{33}}{c_{33}} w_k, \quad (k = 1, 2, \dots, N), \\
 \|\dot{V}\|_{L^2[0, T]} &\rightarrow \min,
 \end{aligned}$$

где $0 \leq z_k \leq l$ — заданные точки; w_k — заданные числа; T — время управления.

Учитывая первое равенство в (3.36), приходим к следующей l -проблеме моментов [10]:

$$\int_0^T \dot{V}(\tau) g_1(z_k, T-\tau) d\tau = w_k, \quad (k=1, 2, \dots, N),$$

$$\|\dot{V}\|_{L^2[0,T]} \rightarrow \min. \quad (3.37)$$

Моментные функции $r_k(t) = g_1(z_k, T-t)$ определяются из (3.36). Общий член ряда для $g_1(z, t)$ затухает как $1/n^2$, поэтому $r_k(t)$ — непрерывные функции и мы вправе положить, что $r_k(t) \in L^2[0, T]$. Рассмотрим N -мерное подпространство

$$L = \sum_{k=1}^N \alpha_k r_k(t) \subset L^2[0, T].$$

По теореме об ортогональной декомпозиции всякий элемент $\dot{V} \in L^2[0, T]$ может быть представлен единственным образом в виде

$$\dot{V}(t) = \sum_{k=1}^N \alpha_k r_k(t) + h^\perp, \quad (3.38)$$

где $h^\perp \in L^\perp$ — ортогонален подпространству L .

Подстановка выражения (3.38) в моментные равенства (3.37) приводит к системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов α_k вида

$$\sum_{k=1}^N C_{nk} \alpha_k = w_n, \quad (n=1, 2, \dots, N),$$

$$C_{nk} = (r_k, r_n) = \int_0^T g_1(z_k, T-t) g_1(z_n, T-t) dt. \quad (3.39)$$

Определитель этой системы есть определитель Грама. Поэтому она однозначно разрешима.

Остался пока неопределенным элемент h^\perp . Его вычислим из условия минимума нормы управления. Имеем

$$\|\dot{V}\|_{L^2[0,T]}^2 = \left\| \sum_{k=1}^N \alpha_k r_k(t) \right\|^2 + \|h^\perp\|^2.$$

Отсюда следует, что $h^\perp = 0$, ибо элемент $\sum_{k=1}^N \alpha_k r_k(t)$ уже зафиксирован и единственным варьируемым элементом является h^\perp .

Таким образом, функция управления имеет вид

$$\dot{V}(t) = \sum_{k=1}^N \alpha_k r_k(t), \quad (3.40)$$

где величины α_k однозначно определяются системой (3.39).

Рассмотрим представляющий практический интерес случай, когда необходимо к моменту времени $t = T$ получить заданное перемещение конца стержня $z = 0$. В этой ситуации $N = 1$, $r_1(t) = g_1(0, T - t)$, $\alpha_1 = w_1 / \|r_1\|^2$ и функция управления согласно (3.40) такова:

$$\dot{V}(t) = \frac{w_1}{\|r_1\|^2} r_1(t).$$

Здесь

$$r_1(t) = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos[2\zeta_n(T^* - t^*)],$$

$$a_n = \frac{\sin \zeta_n}{\zeta_n \delta_n(\zeta_n)}, \quad T^* = \frac{a}{l} T, \quad t^* = \frac{a}{l} t.$$

Отсюда непосредственно видно, что норма управления пропорциональна заданному перемещению конца стержня. Иными словами, чем большего перемещения мы требуем, тем больше энергетических затрат, обеспечивающих выполнение этой программы, надо произвести. Эти затраты также существенно зависят от заданного времени управления. Очевидно, чем меньше времени отпущено на управление, тем больше должна быть норма управления.

2. Задача о максимальной «раскачке» стержня. В некоторых случаях необходимо максимизировать перемещение в избранной точке стержня при определенных ограничениях на норму управления (задача о максимальной «раскачке» стержня). При этом целесообразно разыскивать управляющую функцию в различных функциональных пространствах. По результатам можно будет судить об эффективности управления.

В связи со сказанным выше поставим следующую задачу управления. К заданному моменту времени $t = T$ максимизировать перемещение w в фиксированной точке стержня при ограничении на норму управления в избранном функциональном пространстве.

Формальная постановка экстремальной задачи имеет вид

$$w(z_0, T) \rightarrow \max,$$

$$\|\dot{V}\| \leq \Lambda, \quad (3.41)$$

где $\Lambda > 0$ — заданное число; $z_0 \in [0, l]$ — заданная точка стержня. Учитывая первую формулу в (3.36), запишем (3.41) так:

$$L(\dot{V}) = \int_0^T \dot{V}(\tau) g_1(z_0, T - \tau) d\tau \rightarrow \max,$$

$$\|\dot{V}\| \leq \Lambda. \quad (3.42)$$

Управление в пространствах $L^p(0, T)$, $p > 1$. Полезно рассмотреть управление в функциональных пространствах L^p с целью выявления его эффективности. Возвращаясь к постановке (3.42), запишем ограничение на норму управления применительно к банахову пространству L^p . Имеем

$$\|\dot{V}\|_{L^p} = \left\{ \int_0^T |\dot{V}(t)|^p dt \right\}^{1/p} \leq \Lambda, \quad (p > 1). \quad (3.43)$$

Для построения управляющей функции в экстремальной задаче (3.42), (3.43) оценим прежде всего функционал $L(\dot{V})$. Получаем, в силу неравенства Гельдера

$$L(\dot{V}) \leq |L(\dot{V})| \leq \int_0^T |\dot{V}(t)| \|g_1(z_0, T-t)\| dt \leq \|\dot{V}\|_{L^p} \|g_1\|_{L^q} \leq \Lambda \|g_1\|_{L^q},$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad p > 1.$$

Равенство здесь достигается на функции

$$\dot{V}_0(t) = \frac{\Lambda}{\|g_1\|^{q/p}} |g_1(z_0, T-t)|^{q-1} \operatorname{sign} g_1(z_0, T-t). \quad (3.44)$$

Действительно, на элементе $\dot{V}_0(t)$

$$L(\dot{V}_0) = \int_0^T \frac{\Lambda}{\|g_1\|^{q/p}} |g_1(z_0, T-t)|^q dt = \frac{\Lambda}{\|g_1\|^{q/p}} \int_0^T |g_1(z_0, T-t)|^q dt = \Lambda \|g_1\|_{L^q}.$$

При этом норма управления

$$\|\dot{V}_0\|_{L^p} = \left\{ \int_0^T |\dot{V}_0(t)|^p dt \right\}^{1/p} = \frac{\Lambda}{\|g_1\|^{q/p}} \left(\int_0^T |g_1(z_0, T-t)|^q dt \right)^{1/p} = \Lambda.$$

Таким образом, условия (3.42), (3.43) выполняются на функции (3.44), откуда следует, что эта функция и является искомым управлением.

Отметим, что элемент $\dot{V}_0(t)$ лежит на границе области допустимых управлений. Это является следствием того факта, что область допустимых управлений в нашем случае выпукла.

3.6. Пространства Соболева

Пусть $\bar{\Omega} \in R^n$ — ограниченная замкнутая область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Определим на $\bar{\Omega}$ линейное пространство функций $u(x) \in C^l(\bar{\Omega})$ с числовыми значениями в R^1 и естественными линейными операциями. Введем норму в этом линейном пространстве по формуле

$$\|u\| = \left\{ \int_{\bar{\Omega}} |u(x)|^p dx + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq l} \int_{\bar{\Omega}} |D^\alpha u|^p dx \right\}^{1/p}, \quad p \geq 1. \quad (3.45)$$

Легко проверяется, что все аксиомы нормы выполнены.

Построенное таким образом линейное нормированное пространство обозначается $\tilde{W}_p^l(\bar{\Omega})$. Его пополнение в норме (3.45) обозначается $W_p^l(\Omega)$ и называется пространством Соболева. При $p = 2$ пространство $W_p^l(\Omega)$ обозначается обычно через $H^l(\Omega)$. Это про-

странство гильбертово, является пополнением пространства $\tilde{W}_2^1(\bar{\Omega})$ в норме, порожденной скалярным произведением

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx + \sum_{1 \leq \alpha \leq l} \int_{\Omega} D^\alpha u(x)D^\alpha v(x)dx.$$

Соболевские пространства используются в теории дифференциальных уравнений в частных производных, в прикладной математике, некоторых вопросах механики сплошной среды, теории упругости, например в смешанных задачах упругости [4, 5].

Пространство $H^1(a, b)$. Рассмотрим на $[a, b]$ пространство $\tilde{H}^1[a, b]$, состоящее из всех непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ вещественных функций со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_a^b u(x)v(x)dx + \int_a^b u'(x)v'(x)dx \quad (3.46)$$

и соответствующей нормой

$$\|u\| = \left(\int_a^b u^2(x)dx + \int_a^b u'^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.47)$$

Пространство Соболева $H^1(a, b)$ является пополнением $\tilde{H}^1[a, b]$ в норме (3.47).

Согласно теореме о пополнении, элементами пространства $H^1(a, b)$ являются классы, состоящие из последовательностей $\{u_n(x)\} \subset \tilde{H}^1[a, b]$, фундаментальных в $\tilde{H}^1[a, b]$ в среднем, т. е. таких что

$$\int_a^b |u_n(x) - u_m(x)|^2 dx + \int_a^b |u'_n(x) - u'_m(x)|^2 dx \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty.$$

Две такие последовательности $\{u_n(x)\}$ и $\{v_n(x)\}$ принадлежат одному классу, если они эквивалентны в среднем (в метрике $\tilde{H}^1[a, b]$), т. е.

$$\int_a^b |u_n(x) - v_n(x)|^2 dx + \int_a^b |u'_n(x) - v'_n(x)|^2 dx \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Отсюда вытекает, что отдельно при $m \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$

$$\int_a^b |u_n(x) - u_m(x)|^2 dx \rightarrow 0, \quad \int_a^b |u'_n(x) - u'_m(x)|^2 dx \rightarrow 0, \quad (3.48)$$

а также при $n \rightarrow \infty$

$$\int_a^b |u_n(x) - v_n(x)|^2 dx \rightarrow 0, \quad \int_a^b |u'_n(x) - v'_n(x)|^2 dx \rightarrow 0.$$

Из (3.48) следует, что $\{u_n(x)\}$ и $\{u'_n(x)\}$ — фундаментальные последовательности по метрике пространства $L^2(a, b)$ и в силу его полноты, существуют элементы $u \in L^2(a, b)$ и $w \in L^2(a, b)$ такие, что

$$u_n(x) \rightarrow u \text{ и } u'_n(x) \rightarrow w, \quad n \rightarrow \infty$$

в среднем.

Выход из этих рассуждений таков. Если $\{u_n(x)\} \in \tilde{H}^1(a, b)$, то тем самым в $L^2[a, b]$ определен элемент u с представителем $\{u_n(x)\}$ и элемент w с представителем $\{u'_n(x)\}$, который называется обобщенной производной (в смысле Соболева) от $u(x)$. Записывается это так: $u'(x) = w$. Обобщенная производная w определяется не в точках интервала, а глобально — сразу на всем $[a, b]$.

Пусть $u_n(x), v_n(x) \in \tilde{H}^1[a, b]$ ($n=1, 2, \dots$), т. е.

$$\{u_n(x)\} \in u \in H^1(a, b), \quad \{v_n(x)\} \in v \in H^{(1)}(a, b).$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ в равенствах

$$(u_n, v_n) = \int_a^b u_n(x) v_n(x) dx + \int_a^b u'_n(x) v'_n(x) dx, \quad ,$$

$$\|u_n\|^2 = \int_a^b u_n^2(x) dx + \int_a^b u'^2_n(x) dx,$$

придем к равенствам (3.46), (3.47), где теперь интегралы понимаются в смысле Лебега, а производные в обобщенном смысле.

Подойдем теперь к понятию обобщенной производной с другой точки зрения. Пусть $C_0^1[a, b]$ — множество всех финитных функций $v(x) \in C^1[a, b]$, причем $\text{supp } v(x) \subset (a, b)$. Напомним, что носителем непрерывной функции $f(x)$ (обозначается $\text{supp } f$) называется замыкание множества точек x , таких что $f(x) \neq 0$. Если $u(x) \in C^1[a, b]$, то справедливо равенство $\forall v(x) \in C_0^1[a, b]$.

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = - \int_a^b u'(x) v(x) dx. \quad (3.49)$$

Допустим, что $\forall v(x) \in C_0^1[a, b]$, $\exists w(x) \in C[a, b]$ такая, что

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = - \int_a^b w(x) v(x) dx. \quad (3.50)$$

Сравнивая (3.49) и (3.50), получаем

$$\int_a^b [u'(x) - w(x)] v(x) dx = 0 \Rightarrow u'(x) = w(x),$$

так как $C_0^1[a, b]$ плотно в $\mathcal{L}_*[a, b]$.

Интегральное соотношение (3.49) справедливо и в том случае, когда $u \in H^1(a, b)$. Действительно, пусть $\{u_n(x)\} \in u(x) \in H^1(a, b)$. Тогда $\forall v \in C_0^1[a, b]$, имеем согласно (3.49)

$$(u_n, v') = -(u'_n, v) \Rightarrow \int_a^b u(x) v'(x) dx = - \int_a^b u'(x) v(x) dx, \quad n \rightarrow \infty$$

по непрерывности скалярного произведения.

Наконец, пусть даны $u(x) \in H^1(a, b)$ и $w \in L^2(a, b)$, такие что $\forall v(x) \in C_0^1[a, b]$ справедливо (3.50). Покажем, что тогда $u'(x) = w$ есть обобщенная производная.

Действительно, пусть $\{u_n(x)\} \in u(x)$, $\{w_n(x)\} \in w(x)$. Тогда $\forall v(x) \in C_0^1[a, b]$

$$\int_a^b u_n(x) v'(x) dx + \int_a^b w_n(x) v(x) dx = - \int_a^b [u'_n(x) - w_n(x)] v(x) dx \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.51)$$

Обозначим через $z \in L^2(a, b)$ класс, представителем которого является $\{u'_n(x) - w_n\}$. Тогда, переходя в (3.51) к пределу $n \rightarrow \infty$, получим

$$\int_a^b z(x) v(x) dx = 0, \quad \forall v \in C_0^1[a, b],$$

отсюда $z(x) = 0$.

Таким образом, интегральное тождество (3.50) можно принять за определение обобщенной производной.

В трехмерном случае пространство Соболева $H^1(\Omega)$ вводится следующим образом. Пусть $\Omega \subset R^3$ — односвязная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. В $\bar{\Omega}$ рассмотрим линейное пространство всевозможных функций $u(x) \in C^1(\bar{\Omega})$ со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_{\bar{\Omega}} u(x) v(x) dx + \int_{\bar{\Omega}} (\nabla u, \nabla v) dx, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \bar{\Omega} \quad (3.52)$$

и нормой

$$\|u\| = \left(\int_{\bar{\Omega}} u^2(x) dx + \int_{\bar{\Omega}} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.53)$$

В равенствах (3.52), (3.53) величина ∇u (набла u) определяется обычным образом

$$\nabla u = \text{grad } u = \sum_{k=1}^3 e_k \partial_k u, \quad \partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k},$$

где e_k — единичные орты координатных осей x_k .

Полученное линейное нормированное пространство обозначается $\tilde{H}^1(\bar{\Omega})$, а его дополнение в норме (3.53) называется пространством Соболева $H^1(\Omega)$.

Если $\{u_n(x)\}$ — фундаментальная последовательность в $\tilde{H}^1(\bar{\Omega})$, т. е.

$$\|u_n - u_m\|_{\tilde{H}_1(\bar{\Omega})} \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty,$$

то согласно (3.53)

$$\int_{\bar{\Omega}} |u_n - u_m|^2 dx \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty,$$

$$\int_{\Omega} |\nabla(u_n - u_m)|^2 dx \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty.$$

Значит, последовательности

$$\{u_n(x)\}, \quad \{\partial_k u_n(x)\} \quad (k=1,2,3)$$

фундаментальны в $L^2(\Omega)$ и в силу полноты этого гильбертова пространства в $L^2(\Omega)$ имеются предельные элементы (в смысле сходимости в норме $L^2(\Omega)$)

$$u_n(x) \rightarrow u(x), \quad \partial_1 u_n \rightarrow \partial_1 u, \quad \partial_2 u_n \rightarrow \partial_2 u, \quad \partial_3 u_n \rightarrow \partial_3 u, \quad n \rightarrow \infty.$$

Элементы

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_3}$$

называются обобщенными частными производными элемента u . Скалярные произведения и норма в $H^1(\Omega)$ задаются соотношениями (3.52), (3.53), но интегралы теперь понимаются в смысле Лебега, а производные понимаются в обобщенном смысле.

Введем пространство $H_0^1(\Omega)$, которое является пополнением в метрике

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2}$$

линейного пространства функций класса $C^1(\Omega)$, удовлетворяющих на границе области условию

$$u|_{\partial\Omega} = 0.$$

$H_0^1(\Omega)$ — гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla v) dx. \quad (3.54)$$

Можно показать, что если $u \in H^1(\Omega)$, а $v \in H_0^1(\Omega)$, то

$$(u, \partial_j v)_{L^2(\Omega)} = -(\partial_j u, v)_{L^2(\Omega)} \quad (j=1,2,3). \quad (3.55)$$

В самом деле, для $u \in C^1(\bar{\Omega})$ и $v \in C_0^1(\bar{\Omega})$ это очевидно. Если $\{u_n\} \subset \tilde{H}^1(\bar{\Omega})$ — фундаментальная последовательность в $\tilde{H}^1(\bar{\Omega})$, причем $\lim u_n = u \in H^1(\Omega)$, то, переходя к пределу (по метрике $L^2(\Omega)$) в равенствах

$$(u_n, \partial_j v) = -(\partial_j u_n, v), \quad n \rightarrow \infty \quad (j=1,2,3)$$

и учитывая непрерывность скалярного произведения

$$|(u_n, w) - (u, w)| = |(u_n - u, w)| \leq \|u_n - u\| \|w\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

получаем

$$(u, \partial_j v) = -(\partial_j u, v) \quad (j=1,2,3).$$

Пусть теперь $\{v_n\}$ — фундаментальная последовательность в $\tilde{H}_c^1(\bar{\Omega})$, переходя к пределу в тождестве

$$(u_n, \partial_j v_n) = -(\partial_j u_n, v_n), \quad n \rightarrow \infty,$$

получим (3.54).

Из соотношения (3.55) вытекает следствие: $H_c^1(\Omega)$ содержится строго внутри $H^1(\Omega)$. Действительно, $1 \in H^1(\Omega)$, но не принадлежит $H_c^1(\Omega)$. В противном случае из (3.55) мы бы имели

$$(u, 0) = -(\partial_1 u, 1) \Rightarrow \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} dx = 0, \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

Взяв $u = x$, получим

$$\int_{\Omega} dx = 0,$$

что невозможно.

Пространства $H_c^1(\Omega)$ и $H^1(\Omega)$ играют существенную роль при исследовании классических граничных задач для эллиптического уравнения второго порядка.

Неравенство Фридрихса [14, 16]. Для $\forall u \in H^1(\Omega)$, $\exists C > 0$, такая что

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|u\|_{H_c^1(\Omega)}. \quad (3.56)$$

В развернутой записи

$$\int_{\Omega} u^2(x) dx \leq C \int_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_3} \right)^2 \right\} dx.$$

Пусть куб $Q_a = \{ |x_j| \leq a, j = 1, 2, 3 \}$ содержит область $\bar{\Omega}$. Рассмотрим $\{u_n\} \in H_c^1(\Omega)$ и доопределим функции $u_n(x)$ нулем в области $Q_a / \bar{\Omega}$. Для $\forall x \in \bar{\Omega}$ имеем

$$u_n(x) = \int_{-a}^{x_1} \frac{\partial u_n(\xi, x_2, x_3)}{\partial \xi} d\xi, \quad x = (x_1, x_2, x_3).$$

Далее, используя неравенство Шварца, получаем

$$|u_n(x)|^2 = \left| \int_{-a}^{x_1} \frac{\partial}{\partial \xi} u_n(\xi, x_2, x_3) d\xi \right|^2 \leq \left(\int_{-a}^a \left| \frac{\partial}{\partial \xi} u_n(\xi, x_2, x_3) \right| d\xi \right)^2 \leq \int_{-a}^a 1 \cdot d\xi \int_{-a}^a \left| \frac{\partial u_n}{\partial \xi} \right|^2 d\xi = 2a \int_{-a}^a \left| \frac{\partial u_n}{\partial \xi} \right|^2 d\xi.$$

Интегрируя это неравенство по Q_a , запишем

$$\begin{aligned} \int_{Q_a} |u_n(x)|^2 dx &\leq 2a \int_{-a}^a \int_{-a}^a dx_2 dx_3 \int_{-a}^a dx_1 \int_{-a}^a \left| \frac{\partial}{\partial \xi} u_n(\xi, x_2, x_3) \right|^2 d\xi \\ &= 4a^2 \int_{-a}^a \int_{-a}^a \int_{-a}^a \left| \frac{\partial}{\partial x_1} u_n(x_1, x_2, x_3) \right|^2 dx_1 dx_2 dx_3 \leq 4a^2 \int_{Q_a} \left\{ \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_3} \right)^2 \right\} dx. \end{aligned}$$

Так как $u_n \equiv 0$ вне $\bar{\Omega}$, то

$$\int_{\Omega} |u_n|^2 dx \leq 4a^2 \int_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_3} \right)^2 \right\} dx,$$

т. е.

$$\|u_n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 4a^2 \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

Переходя здесь к пределу при $n \rightarrow \infty$, приходим к неравенству Фридрихса (3.56). Отметим еще раз, что в (3.56) интегрирование понимается в смысле Лебега, а $\partial_k u$ ($k=1, 2, 3$) — обобщенные производные в Ω .

Из неравенства Фридрихса и определения пространства $H_0^1(\Omega)$ следует, что это пространство вложено в $L^2[\Omega]$. Действительно, всякий элемент $u \in H_0^1(\Omega)$ принадлежит $L^2(\Omega)$, а согласно неравенству (3.56)

$$\|u_n\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad C > 0.$$

Второе следствие, которое вытекает из неравенства Фридрихса, заключается в эквивалентности норм (3.53) и (3.54) в $H_0^1(\Omega)$.

Аналогичным образом доказывается неравенство Пуанкаре [19], которое эффективно используется при исследовании задачи Неймана в теории потенциала

$$\int_{\Omega} u^2(x) dx \leq A \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + B \left(\int_{\Omega} u(x) dx \right)^2, \quad A > 0, \quad B > 0.$$

3.7. Функции

Понятие функции лежит в основе всего анализа. Ниже напомним некоторые основные определения и факты, связанные с этим понятием.

Отображения. Пусть X и Y — произвольные непустые множества. Будем говорить, что задано отображение (функция, оператор) f , если $\forall x \in D_f \subset X$, по определенному правилу f можно поставить в соответствие один элемент $y \in Y$.

Множество $D_f \subset X$ называется областью определения функции $y = f(x)$, множество $R_f = \{y \in Y : f(x) = y \text{ для всех } x \in D_f\}$ называется областью значений функции f .

Пусть x — произвольный элемент из D_f , элемент $y = f(x) \in R_f$ называется образом элемента x . Для $y \in Y$ множество $\{x \in D_f : f(x) = y\}$ называется (полным) прообразом элемента y . Может оказаться, что у элемента из Y полный прообраз есть пустое множество, состоит из нескольких (и даже бесконечного множества элементов), одного элемента. В том случае, когда $y \in R_f$, его полный прообраз очевидно не пуст.

Если у каждого элемента $y \in Y$ полный прообраз есть пустое множество или состоит из одного элемента, то отображение f называется инъективным (инъекцией). Очевидно, это определение равносильно следующему: отображение f — инъекция, если любым

двум различным элементам $x_1, x_2 \in D_f$ соответствуют два различных элемента $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$ из R_f .

В самом деле, пусть f — инъекция, тогда $\forall y_1 \in R_f$ — полный прообраз состоит из одного элемента. Если $y_1 = f(x_1)$ и $x_2 \neq x_1$, то $y_2 = f(x_2) \neq y_1$, ибо в противном случае у элемента y_1 полный прообраз состоял бы более чем из одного элемента. Обратно, если для любых $x_1, x_2 \in D_f$ ($x_1 \neq x_2$) их образы $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$ различны, то f — инъекция. В противном случае это означало бы, что $y \in R_f$ имеет прообраз $\{x_1, x_2\}$.

Отображение f называется сюръекцией (сюръективным, накрытием), если $\forall y \in Y$ его полный прообраз не пуст. Если под множеством $f(D_f)$ понимать совокупность всех образов $y = f(x)$, $x \in D_f$, то по определению сюръекции: $f(D_f) = Y$. В частности, при $D_f = X$ сюръекция представляет собой отображение множества X на множество Y .

Отображение $f : X \rightarrow Y$ одновременно инъективное и сюръективное называется биекцией (биективным). Очевидно, биекция есть взаимно-однозначное отображение множества X на Y . Иллюстрация этих понятий дается на рис. 3.8–3.10.

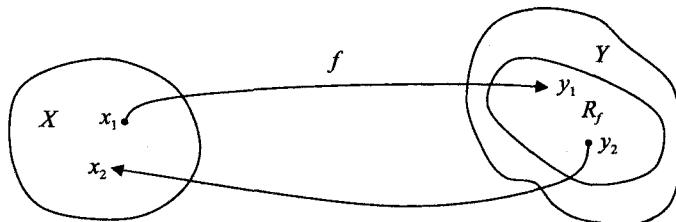


Рис. 3.8. Инъекция $f : X \rightarrow Y$ ($f(X) = R_f \subset Y$)

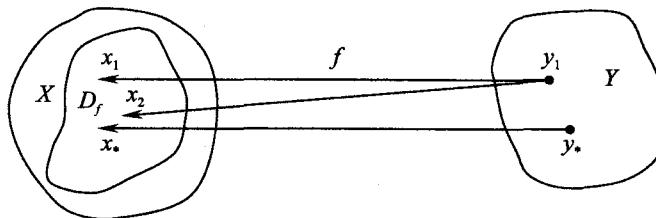


Рис. 3.9. Сюръекция $f : D_f \rightarrow Y$ ($f(D_f) = Y$)

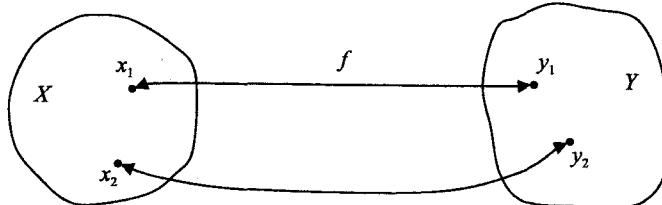


Рис. 3.10. Биекция $f : X \rightarrow Y$ ($f(X) = Y, f^{-1}(Y) = X$)

Функции f и g считаются равными, если их области определения совпадают и для всех x из их общей области определения $f(x) = g(x)$.

Пусть $f : X \rightarrow Y$, подмножество $G_f = \{(x, y) : x \in D_f, y = f(x)\}$ множества $X \times Y$ называется графиком f . На рис. 3.11 приведена иллюстрация этого понятия.

Если отображение $f : X \rightarrow Y$ есть биекция, то $\forall y \in Y$, существует его прообраз $x \in X$, причем единственный. Согласно определению функции, отображение $f^{-1} : Y \rightarrow X$ есть функция, она называется обратной по отношению к f . Имеем

$$y = f(x), \quad x = f^{-1}(y),$$

$$Y = f(X), \quad X = f^{-1}(Y).$$

Оператор f , осуществляющий биекцию, называется взаимно-однозначным.

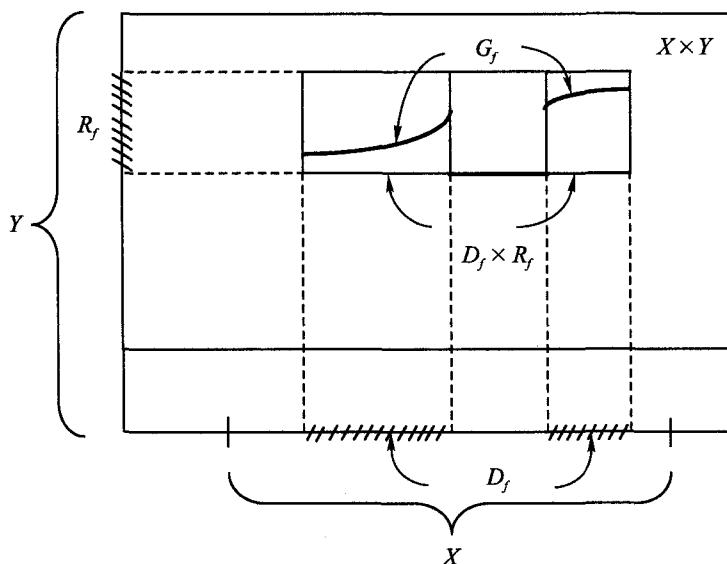


Рис. 3.11. График $f : G_f$

Пусть X, Y, Z — произвольные непустые множества, $f : X \rightarrow Y$ и $g : Y \rightarrow Z$. Композицией отображений f и g (сложной функцией) называется отображение $h : X \rightarrow Z$ по правилу

$$z = h(x) = g[f(x)].$$

Очевидно, такая композиция отображений возможна при условии, что область определения функции g содержится в области значений функции f ($D_g \subset R_f$). Иллюстрация композиции отображений дана на рис. 3.12.

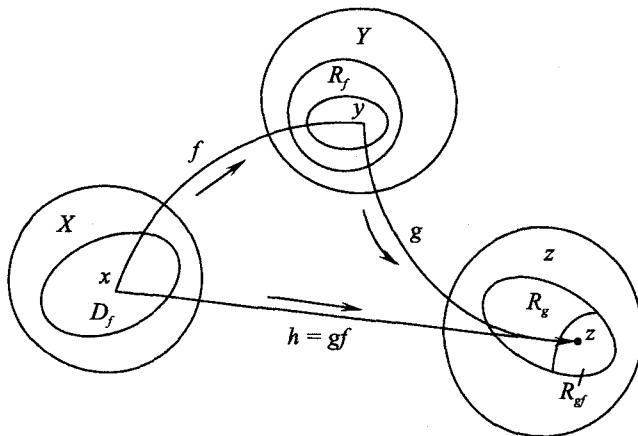


Рис. 3.12. Композиция отображений

Примеры. 1. Функция $f(x) = x^2$ осуществляет сюръективное отображение множества $X = [-2, 2]$ на $Y = [0, 4]$. Оно не является инъекцией, ибо прообраз любого отличного от нуля $y \in Y$ — множество, состоящее из двух элементов. Та же функция, как отображение множества $X = [0, 2]$ на $Y = [0, 4]$, есть биекция. Обратная функция $f^{-1}(y) = \sqrt{y} : [0, 4] \rightarrow [0, 2]$.

2. В R^2 зададим отображение f следующим образом: каждой вертикальной прямой $x = x_0$ поставим в соответствие эту точку. Очевидно $f : R^2 \rightarrow R^1$. Это отображение сюръективно, но не инъективно.

3. Функция Дирихле

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ — рационально,} \\ 0, & \text{если } x \text{ — иррационально} \end{cases}$$

задает отображение $f : R^1 \rightarrow R^1$ с областью значений $R_f = \{0, 1\}$.

4. Пусть E — некоторое подмножество метрического пространства X , тогда $f(x) = \rho(x, E) : X \rightarrow R^1$. Область определения $D_f = X$.

5. Оператор T на $C[0, 1]$ определим следующим образом:

$$\forall x(t) \in C[0, 1], (Tx)(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau = y(t) \in C[0, 1].$$

Таким образом, $T : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$.

6. Оператор D на $C^m[0, 1]$ определим так:

$$\forall x(t) \in C^m[0, 1] \quad (Dx)(t) = \frac{dx(t)}{dt}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Очевидно, $D : C^m[0, 1] \rightarrow C^{m-1}[0, 1]$.

Имеет место теорема. Пусть A и B — произвольные непустые подмножества множества X и $f : X \rightarrow Y$. Тогда:

1. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
2. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
3. Если f — биекция, то $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Доказательство.

1. Пусть $y \in f(A \cup B)$, тогда $y = f(x)$, где $x \in A \cup B$. Отсюда $y = f(x) \in f(A) \cup f(B)$. Обратно, пусть $y \in f(A) \cup f(B)$, тогда $y = f(x)$, где $x \in A \cup B$, т. е. $y \in f(A \cup B)$. Первое равенство доказано.

2. Пусть $y \in f(A \cap B)$, тогда $y = f(x)$, где $x \in A \cap B$. Отсюда $y \in f(A) \cap f(B)$, т. е. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$, что и требовалось. Обратное включение имеет место не всегда. Приведем два примера.

а) Пусть $A = [-1, 1]$, $B = [0, 2]$ и $f(x) = x^2$. Тогда имеем $A \cap B = [0, 1]$, $f(A \cap B) = [0, 1]$, $f(A) = [0, 1]$, $f(B) = [0, 4]$, $f(A) \cap f(B) = [0, 1]$. В этом случае выполняется равенство $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

б) Пусть теперь $A = [-1, 0]$, $B = [0, 1]$. Тогда $A \cap B = \{0\}$, $f(A \cap B) = \{0\}$, $f(A) = [0, 1]$, $f(B) = [0, 1]$, $f(A) \cap f(B) = [0, 1]$. Здесь $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

3. Пусть f — биекция и $y \in f(A) \cap f(B)$, тогда если $x = f^{-1}(y)$, то $x \in A \cap B$. Действительно, если $x \in A$ и $x \in B$, то $y = f(x) \in f(A)$ и $y = f(x) \in f(B)$ и, значит, $y \in f(A) \cap f(B)$, что противоречит условию. Аналогичное заключение делаем в том случае, когда $x \in B$ и $x \in A$. Следовательно, $y = f(x) \in f(A \cap B)$ и обратное включение $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$ имеет место. Прямое включение доказано в 2.

Относительно прообразов множеств при отображении $f : X \rightarrow Y$ имеет место аналогичная теорема.

Теорема.

1. Прообраз объединения множеств A и B равен объединению их прообразов:

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B).$$

2. Прообраз пересечения двух множеств равен пересечению их прообразов:

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

Доказательство.

1. Пусть $x \in f^{-1}(A \cup B)$, тогда $y = f(x) \in A \cup B$, т. е. x принадлежит по крайней мере одному из множеств $f^{-1}(A), f^{-1}(B)$. Значит, $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ и

$$f^{-1}(A \cup B) \subset f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B).$$

Докажем теперь обратное включение. Если $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, то $y = f(x) \in A \cup B$, т. е. $x \in f^{-1}(A \cup B)$. Значит,

$$f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cup B),$$

что и требовалось.

2. Пусть $x \in f^{-1}(A \cap B)$, тогда $y = f(x) \in A \cap B$, т. е. $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. Отсюда

$$f^{-1}(A \cap B) \subset f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

Обратно, пусть $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$, тогда $y = f(x) \in A \cap B$, т. е. $x \in f^{-1}(A \cap B)$. Значит, $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cap B)$, что и требовалось.

Замечание. Если интерпретировать отображение $X \rightarrow Y$ как оператор $A(A : X \rightarrow Y)$, то факт воздействия оператора на элемент x обозначают различными способами:

$$Ax = y, A(x) = y, x \rightarrow Ax.$$

Непрерывные отображения в метрических пространствах (относительно метрических пространств см. приложение А). Пусть R_1 и R_2 метрические пространства с метриками $\rho_1(x, y)$ и $\rho_2(x, y)$. Отображение (оператор) $f : R_1 \rightarrow R_2$ (с областью определения $D_f \subset R_1$ и областью значений $R_f \subset R_2$) называется непрерывным в точке $x_0 \in D_f$, если $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\rho_1(x, x_0) < \delta \Rightarrow \rho_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Предполагается, конечно, что шар $B(x_0, \delta) \subset D_f$.

Равносильное определение звучит так: отображение $f : R_1 \rightarrow R_2$ называется непрерывным в точке $x_0 \in D_f$, если для любой последовательности $\{x_n\} \subset D_f$, сходящейся (по метрике ρ_1) к точке x_0 , последовательность $\{f(x_n)\} \subset R_f$ сходится к $f(x_0)$ по метрике ρ_2 .

Отображение f , непрерывное в каждой точке из D_f , называется непрерывным в D_f . Если $D_f = R_1$, f непрерывно в каждой точке $x \in R_1$, то говорят, что отображение $f : R_1 \rightarrow R_2$ непрерывно на R_1 .

Пусть f — биекция. Если отображения $f : R_1 \rightarrow R_2$ и $f^{-1} : R_2 \rightarrow R_1$ непрерывны, то f называется гомеоморфизмом (взаимно-однозначным и взаимно-непрерывным отображением). Частным случаем гомеоморфизма является изометрия.

Отображение $f : R_1 \rightarrow R_2$ называется равномерно непрерывным, если $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ (одинаковое для всех $x \in D_f$), что $\forall x_1, x_2 \in D_f :$

$$\rho_1(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow \rho_2(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon.$$

Замечание. Поскольку числовые функции (функционалы) есть частный случай функций (область значений $R_f \subset R^1$), то введенные понятия распространяются и на них. Например, функционал $f(x)$ называется непрерывным в точке $x_0 \in D_f$, если из $\rho(x_n, x_0) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty) \Rightarrow |f(x_0) - f(x_n)| \rightarrow 0$.

Пусть X, Y — линейные нормированные пространства, $A_1: D_{A_1} \rightarrow Y, A_2: D_{A_2} \rightarrow Y (D_{A_1}, D_{A_2} \subset X)$, причем $D_{A_1} \subset D_{A_2}$ и $A_1(x) = A_2(x), \forall x \in D_{A_1}$. В этом случае оператор A_1 называют сужением оператора A_2 и, соответственно, оператор A_2 — расширением (продолжением) оператора A_1 .

3.8. Линейные операторы в банаховых пространствах

Идея линеаризации пронизывает весь анализ. В связи с этим линейные операторы применяются в различных областях прикладной математики (теория интегральных уравнений, оптимальные управление, вычислительная математика, теория упругости и т. п.).

Пусть X и Y — линейные нормированные пространства и $A: X \rightarrow Y$ — оператор (функция, отображение) с областью определения $D_A \subset X$ и областью значений $R_A \subset Y$. Оператор A называется линейным, если выполнены следующие условия:

1. D_A — линейное многообразие в X .
2. $\forall x_1, x_2 \in D_A : A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2$ — свойство аддитивности оператора.
3. $\forall x \in D_A$ и $\forall \lambda \in R^1 : A(\lambda x) = \lambda Ax$ — свойство однородности оператора.

Из определения линейного оператора видно, что $\forall x_1, x_2 \in D_A$ и любых чисел λ_1, λ_2 имеет место соотношение

$$A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 Ax_1 + \lambda_2 Ax_2 \in R_A. \quad (3.57)$$

Следовательно, область значений линейного оператора R_A — линейное многообразие в Y . Действительно, $\forall y_1, y_2 \in R_A$ найдутся $x_1, x_2 \in D_A$, такие что $y_1 = Ax_1, y_2 = Ax_2$, а тогда в силу (3.57) имеем $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in R_A$.

Из аддитивности оператора A следует:

$$A(\theta + \theta) = A(\theta) + A(\theta) \Rightarrow A(\theta) = 2A(\theta) \Rightarrow A(\theta) = \theta,$$

$$A(x - x) = A(x) + A(-x) = \theta \Rightarrow A(-x) = -A(x),$$

т. е. ноль в пространстве X переходит при аддитивном отображении $X \rightarrow Y$ в нулевой элемент пространства Y и отображение противоположного элемента $-x \in D_A$ есть элемент $-y$, противоположный элементу $y = Ax$.

Ядром оператора $A : X \rightarrow Y$ называется множество:

$$\ker A = \{x \in D_A : Ax = \theta\}.$$

Ядро линейного оператора A является линейным многообразием в X . В самом деле, если $x_1, x_2 \in \ker A$, то $Ax_1 = \theta$, $Ax_2 = \theta$, но тогда

$$A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 Ax_1 + \lambda_2 Ax_2 = \lambda_1 \theta + \lambda_2 \theta = \theta \Rightarrow \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in \ker A,$$

что и требовалось.

Определение непрерывности в точке и непрерывности «в целом» произвольного оператора (функции) в метрическом пространстве было дано в 3.7. Здесь конкретизируем это понятие на тот случай, когда оператор действует в линейном нормированном пространстве и посмотрим, что дает нам линейность оператора. Ниже будем предполагать, что $D_A = X$, если не оговорено противное.

Пусть X и Y — линейные нормированные пространства и оператор $A : X \rightarrow Y$. Оператор A называется непрерывным в точке $x \in X$, если для любой сходящейся к x последовательности $\{x_n\} \subset X : \|Ax - Ax_n\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

Для линейного оператора непрерывность в точке равносильна непрерывности «в целом». Точнее, имеет место теорема.

Если линейный (или просто аддитивный оператор) непрерывен в некоторой точке $x_0 \in X$, то он непрерывен в любой точке $x \in X$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку $x \in X$ и сходящуюся к ней последовательность $\{x_n\} \subset X : \|x - x_n\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Необходимо показать, что

$$\|x - x_n\|_X \rightarrow 0 \Rightarrow \|Ax - Ax_n\|_Y \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Возьмем последовательность $u_n = x_n - x + x_0 \in X$. Имеем

$$\|u_n - x_0\| = \|x_n - x\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \Rightarrow u_n \rightarrow x_0.$$

В силу непрерывности линейного оператора A в точке x_0 имеем цепочку предельных соотношений

$$Au_n \rightarrow Ax_0 \Rightarrow \|Au_n - Ax_0\| \rightarrow 0 \Rightarrow \|Ax_n - Ax\| \rightarrow 0,$$

что и требовалось.

Отсюда следует, что из непрерывности линейного оператора A в точке θ следует непрерывность его в X .

Введем важное понятие ограниченности оператора. Оператор $A : X \rightarrow Y$ называется ограниченным, если для любого $x \in X$ имеет место оценка

$$\|Ax\| \leq M \|x\|,$$

где $M \geq 0$ — константа, не зависящая от x . Из этого определения следует, что ограниченный оператор переводит любое ограниченное множество $D \subset X$ в ограниченное же множество $A(D) \subset Y$. В частности, если A — однородный оператор, то $\|Ax\| \leq M$ на единичной сфере $\|x\| = 1$.

Теорема. Пусть X, Y — линейные нормированные пространства и $A: X \rightarrow Y$ — линейный оператор. Тогда следующие утверждения равносильны:

1. A непрерывен в нуле.
2. A непрерывен в X .
3. A — ограниченный оператор.

Доказательство. Утверждение 2 следует из 1 на основании следствия из только что доказанной теоремы. Далее, если A — ограниченный оператор, то для всех $x \in X$, $\exists M > 0$ такая, что $\|Ax\| \leq M \|x\|$. Пусть x_0 — произвольный элемент из X и $\{x_n\} \subset X$ сходится к x_0 . Тогда

$$\|A(x_0 - x_n)\| \leq M \|x_0 - x_n\| \Rightarrow \|Ax_0 - Ax_n\| \leq M \|x_0 - x_n\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Следовательно, из ограниченности линейного оператора следует его непрерывность в X .

Докажем теперь, что из 2 следует 3. Пусть A непрерывный оператор. Предположим противное, что A — неограниченный оператор. Тогда в X найдется последовательность $\{x_n\}$, такая что:

$$\|x_n\| = 1 \text{ и } \|Ax_n\| > n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Последовательность $\{x_n/n\}$ сходится к нулю, так как

$$\left\| \frac{x_n}{n} - \theta \right\| = \left\| \frac{x_n}{n} \right\| = \frac{\|x_n\|}{n} = \frac{1}{n}.$$

В силу непрерывности оператора A в X , и в частности в точке θ , имеем $A\left(\frac{x_n}{n}\right) \rightarrow A(\theta) = \theta$ ($n \rightarrow \infty$), что противоречит предложению $\left\| A\left(\frac{x_n}{n}\right) \right\| > 1$. Теорема доказана.

Определение. Пусть $A: X \rightarrow Y$ — линейный ограниченный оператор. Наименьшая из постоянных M в неравенстве $\|Ax\| \leq M \|x\|$ называется нормой оператора ($\|A\|$). Из определения следует, что $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$ для всех $x \in X$. В замкнутом единичном шаре $\|x\| \leq 1$: $\|Ax\| \leq \|A\|$.

Покажем, что норма линейного ограниченного оператора определяется следующими равносильными равенствами:

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|, \tag{3.58}$$

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|, \tag{3.59}$$

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}. \tag{3.60}$$

1. При $\|x\| \leq 1$ имеем: $\|Ax\| \leq \|A\| \Rightarrow \sup\|Ax\| \leq \|A\|$. С другой стороны, по свойству верхней грани $\forall \varepsilon > 0$ найдется элемент $x_\varepsilon \neq 0$, такой что:

$$\|Ax_\varepsilon\| > (\|A\| - \varepsilon)\|x_\varepsilon\|.$$

Пусть $y_\varepsilon = x_\varepsilon / \|x_\varepsilon\|$, тогда получаем из этого неравенства

$$\|Ay_\varepsilon\| > \|A\| - \varepsilon \quad (\|y_\varepsilon\| = 1).$$

Так как точная верхняя грань $\sup\|Ax\|$ разыскивается на множестве всех элементов единичного шара, то

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \geq \|Ay_\varepsilon\| > \|A\| - \varepsilon \Rightarrow \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \geq \|A\|.$$

Из сравнения оценок

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \leq \|A\|, \quad \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \geq \|A\|$$

приходим к равенству (3.58).

2. В силу однородности оператора A , если $\|x\| \leq 1$, то

$$\|A\| = \sup_{\|y\|=1} \|Ay\| \|x\|.$$

Отсюда следует, что $\|A\| \leq \sup_{\|y\|=1} \|Ay\|$. С другой стороны, $\|A\| = \sup_{\|y\|=1} \|Ay\| \geq \sup_{\|y\|=1} \|Ay\|$. Следовательно, $\|A\| = \sup_{\|y\|=1} \|Ay\|$.

3. Полагая в формуле (3.59) $x = \frac{y}{\|y\|}$, ($y \neq 0$), приходим к определению (3.60).

Примеры линейных операторов.

1. Линейный оператор в n -мерном пространстве. Зададим оператор A , действующий по формуле

$$y = Ax,$$

где $y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ — n -мерные столбцы, $A = [a_{ik}]$ — квадратная $(n \times n)$ матрица. Такое задание оператора A равносильно преобразованию

$$y_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Очевидно, оператор A — линейный. Его норма зависит от того, какие нормы выбраны в пространствах X и Y .

a) Пусть $X = Y = R^n_\infty$, тогда

$$\|x\| = \max_{1 \leq k \leq n} \{|x_k|\}.$$

Имеем

$$\|y\| = \|Ax\| = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \right| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{k=1}^n |a_{ik}| |x_k| \leq \|x\| \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{k=1}^n |a_{ik}|.$$

Отсюда следует, что A — ограниченный оператор и

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{k=1}^n |a_{ik}|.$$

Более того, можно показать, что на самом деле

$$\|A\| = \|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{k=1}^n |a_{ik}|.$$

б) Пусть $X = Y = \mathbb{R}^n$, тогда

$$\|x\| = \sum_{k=1}^n |x_k|.$$

В этом случае:

$$\|y\| = \|Ax\| = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \right| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{ik}| |x_k| = \sum_{k=1}^n |x_k| \sum_{i=1}^n |a_{ik}| \leq \sum_{k=1}^n |x_k| \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ik}| = \|x\| \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ik}|.$$

Значит,

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \leq \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ik}|.$$

Здесь также можно показать, что

$$\|A\| = \|A\|_1 = \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ik}|.$$

в) Если $X = Y = \mathbb{R}^n$, то

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{1/2}.$$

В этом случае находим

$$\|y\| = \|Ax\| = \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{1/2} \leq \left\{ \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \right)^2 \right\}^{1/2} \leq \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}^2 \sum_{k=1}^n x_k^2 \right\}^{1/2} = \|x\| \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}^2 \right)^{1/2}.$$

Таким образом,

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \leq \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}^2 \right)^{1/2}.$$

Точное значение нормы оператора определяется равенством [7, 17]

$$\|A\| = \|A\|_2 = \sqrt{\lambda_1},$$

где λ_1 — наибольшее собственное значение матрицы $B = A^* A$ и A^* — матрица транспонирования к A .

2. Линейный ограниченный оператор в l^2 . Оператор в l^2 формально может быть задан в виде

$$y_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k \quad (i = 1, 2, \dots), \quad (3.61)$$

$x = \{x_1, x_2, \dots\}$, $y = \{y_1, y_2, \dots\}$ — бесконечные столбцы, причем $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty$, $A = [a_{ik}]$ — матрица бесконечного порядка. Однако чтобы это преобразование имело смысл, необходимо наложить ограничения на коэффициенты матрицы A .

Пусть

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ik}^2 < \infty.$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^n |a_{ik} x_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n a_{ik}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ik}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 \right)^{1/2} = \|x\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ik}^2 \right)^{1/2}.$$

Поскольку правая часть этих неравенств от n не зависит, а левые части при $i = 1, 2, \dots$ не убывают при возрастании n , то, переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, находим: $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik} x_k| < \infty$.

После установления факта абсолютной сходимости рядов в правых частях (3.61) легко проверяется линейность оператора A . Покажем, что A — ограниченный оператор. Имеем для вектора $x^{(n)} = \{x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots\}$

$$\|Ax^{(n)}\| \leq \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}^2 \cdot \sum_{k=1}^n x_k^2 \right\}^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{1/2}.$$

Отсюда при $n \rightarrow \infty$ получаем (в силу непрерывности нормы)

$$\|Ax\| \leq \|x\| \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^2 \right)^{1/2}.$$

Легко показывается, что $\sum_{i=1}^{\infty} y_i^2 < \infty$, т. е. $A : l^2 \rightarrow l^2$.

3. Интегральный линейный ограниченный оператор.

а) В $C[a, b]$ зададим интегральный оператор K , действующий на функцию $x(t) \in C[a, b]$ по формуле

$$(Kx)(t) = \int_a^b K(t, \tau) x(\tau) d\tau = y(t) \in C[a, b]. \quad (3.62)$$

Здесь $K(t, \tau)$ — функция, непрерывная в квадрате $[a, b] \times [a, b]$. Имеем

$$\begin{aligned} \|Kx\| &= \max_{a \leq t \leq b} \left| \int_a^b K(t, \tau) x(\tau) d\tau \right| \leq \max_{a \leq t \leq b} \int_a^b |K(t, \tau)| |x(\tau)| d\tau \leq \\ &\leq \max_a^b \int_a^b |K(t, \tau)| \max_{a \leq \tau \leq b} |x(\tau)| d\tau = \|x\| \max_a^b \int_a^b |K(t, \tau)| d\tau. \end{aligned}$$

Следовательно, K — линейный ограниченный (а значит непрерывный) оператор (Фредгольма). Для нормы этого оператора получаем оценку

$$\|K\| = \sup_{\|x\|=1} \|Kx\| \leq \max_{a \leq t \leq b} \int_a^b |K(t, \tau)| d\tau.$$

Можно показать [7], что

$$\|K\| = \max_{a \leq t \leq b} \int_a^b |K(t, \tau)| d\tau.$$

Таким образом, интегральный оператор Фредгольма — линейный ограниченный оператор в $C[a, b]$ (отображающий $C[a, b]$ в $C[a, b]$).

б) Пусть теперь интегральный оператор K снова задан формулой (3.62), но $x(t) \in L^p[a, b]$, $p > 1$. Предположим, что

$$\int_a^b \int_a^b |K(t, \tau)|^q dt d\tau < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Тогда

$$\|y\| = \|Kx\| = \left(\int_a^b |y(t)|^q dt \right)^{1/q} = \left\{ \int_a^b dt \left| \int_a^b K(t, \tau) x(\tau) d\tau \right|^q \right\}^{1/q} \leq \left\{ \int_a^b dt \left[\int_a^b |K(t, \tau)| |x(\tau)| d\tau \right]^q \right\}^{1/q}.$$

Используя интегральное неравенство Гельдера (см. приложение Б), находим

$$\int_a^b dt \left(\int_a^b |K(t, \tau)| |x(\tau)| d\tau \right)^q \leq \int_a^b dt \left(\int_a^b |K(t, \tau)|^q d\tau \right)^{\frac{q}{p}} \|x\|_{L^p}^p.$$

Отсюда

$$\|Kx\|_{L^p} \leq \|x\|_{L^p} \left\{ \int_a^b \int_a^b |K(t, \tau)|^q dt d\tau \right\}^{1/q}.$$

Следовательно, $K : L^p[a, b] \rightarrow L^q[a, b]$ — ограниченный линейный оператор и

$$\|K\| \leq \left\{ \int_a^b \int_a^b |K(t, \tau)|^q dt d\tau \right\}^{1/q} < \infty.$$

4. Пусть Ω — ограниченная область в R^n и оператор K задан формулой

$$(Kf)(x) = \int_{\Omega} K(x, y) f(y) dy, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Если

$$\int_{\Omega} |K(x, y)|^2 dx dy = C^2 < \infty,$$

то K — линейный ограниченный оператор (непрерывный из $L^2(\Omega)$ в $L^2(\Omega)$).

5. Дифференциальный оператор.

а) Рассмотрим пространство $C[a, b]$ и оператор $Dx(t) = x'(t)$. Этот оператор линеен, но не непрерывен. В самом деле, последовательность непрерывных функций $\{x_n(t)\} = \{\sin nt/n\}$ сходится по метрике $C[a, b]$ к нулю, в то время как последовательность $\{Dx_n(t)\} = \{\cos nt\}$ не имеет предела. Следовательно, D — неограниченный оператор. Задание оператора D в $C[a, b]$ вообще неудобно, так как область его определения — есть линейное многообразие непрерывно дифференцируемых функций в $C[a, b]$, а не все это пространство.

б) Пусть оператор дифференцирования D действует из $C^1[a, b]$ в $C[a, b]$. Норму в пространстве непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций определим по формуле

$$\|x\|_1 = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)| + \max_{a \leq t \leq b} |x'(t)|.$$

Область определения оператора D есть все $C^1[a, b]$. Этот оператор непрерывен. В самом деле, из сходимости последовательности $\{x_n\} \subset C^1[a, b]$ к $x \in C^1[a, b]$ следует

$$\|x - x_n\|_1 = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - x_n(t)| + \max_{a \leq t \leq b} |Dx(t) - Dx_n(t)| \rightarrow 0 \Rightarrow Dx_n \rightarrow Dx.$$

Таким образом, оператор $D : C^1[a, b] \rightarrow C[a, b]$ — линейный непрерывный, а значит, и ограниченный.

6. Оператор ортогонального проектирования (ортопроектор).

Пусть H — гильбертово пространство и L — его подпространство. Произвольный элемент $x \in H$ можно представить в виде (см. п. 3.4)

$$x = y + z, \quad y \in L, \quad z \in L^\perp.$$

Оператор P , ставящий в соответствие элементу $x \in H$ элемент $y \in L$ называется оператором ортогонального проектирования H на L . Он действует по формуле

$$Px = y.$$

Область его определения есть все H , область значений — подпространство L . Оператор P — линейный. Действительно, если $x_1, x_2 \in H$ и $Px_k = y_k$ ($k = 1, 2$), то

$$x_1 + x_2 = y_1 + y_2 + z_1 + z_2, \quad y_1 + y_2 \in L, \quad z_1 + z_2 \in L^\perp,$$

$$\lambda x = \lambda y + \lambda z, \quad \lambda y \in L, \quad \lambda z \in L^\perp,$$

$$P(x_1 + x_2) = y_1 + y_2 = P(x_1) + P(x_2), \quad P(\lambda x) = \lambda y = \lambda P(x).$$

Покажем теперь, что ортопроектор P — непрерывный оператор. Пусть $\{x_n\} \subset H$ сходится к элементу $x \in H$. Покажем, что тогда $Px_n \rightarrow Px$. Имеем

$$x_n = y_n + z_n, \quad y_n \in L, \quad z_n \in L^\perp \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$x = y + z, \quad y \in L, \quad z \in L^\perp.$$

Разность $x - x_n = y - y_n + z - z_n$, причем $y - y_n \in L$, $z - z_n \in L^\perp$. Тогда

$$\|x - x_n\|^2 = \|(y - y_n) + (z - z_n)\|^2 = \|y - y_n\|^2 + \|z - z_n\|^2 \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Отсюда $y_n \rightarrow y$, $z_n \rightarrow z$, т. е. $P(x_n) \rightarrow P(x)$, что и требовалось.

Пространство линейных операторов. Пусть X, Y — линейные нормированные пространства. На множестве $\mathcal{L}(X, Y)$ всевозможных линейных непрерывных операторов, определенных на всем пространстве X со значениями в Y , введем линейные операции сложения и умножения на число.

По определению суммой операторов A и $B \in \mathcal{L}(X, Y)$ называется оператор $A + B$, действующий $\forall x \in X$ по формуле

$$(A + B)x = Ax + Bx.$$

Произведением оператора A на число λ называется оператор λA , действующий по формуле $\forall x \in X$ и любого числа λ

$$(\lambda A)x = \lambda(Ax).$$

Согласно определению операторы $A + B$ и λA определены на всем X и принимают значения в Y . Линейность этих операторов следует из равенств

$$\begin{aligned} (A + B)(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) &= A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + B(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \\ &= \lambda_1 Ax_1 + \lambda_2 Ax_2 + \lambda_1 Bx_1 + \lambda_2 Bx_2 = \lambda_1(Ax_1 + Bx_1) + \lambda_2(Ax_2 + Bx_2) = \\ &= \lambda_1(A + B)x_1 + \lambda_2(A + B)x_2, \end{aligned}$$

$$(\lambda A)(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda A(\lambda_1 x_1) + \lambda A(\lambda_2 x_2) = \lambda \lambda_1 Ax_1 + \lambda \lambda_2 Ax_2 = \lambda_1(\lambda A)x_1 + \lambda_2(\lambda A)x_2.$$

Непрерывность линейных операторов $A + B$ и λA вытекает из оценок $\forall x \in X$:

$$\|(A + B)x\|_y = \|Ax + Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\| \leq (\|A\| + \|B\|)\|x\|_x,$$

$$\|(\lambda A)x\|_y = \|\lambda Ax\| = |\lambda| \|Ax\| \leq |\lambda| \|A\| \|x\|_x.$$

Таким образом, $A + B \in \mathcal{L}(X, Y)$ и $\lambda A \in \mathcal{L}(X, Y)$, откуда следует замкнутость множества $\mathcal{L}(X, Y)$ относительно линейных операций. Множество $\mathcal{L}(X, Y)$ со введенными на нем линейными операциями становится линейным пространством. Выполнение всех аксиом линейного пространства легко проверяется. В частности, нулевой элемент (нуль — оператор θ) $\forall A \in \mathcal{L}(X, Y)$ определяется так:

$$A + \theta = A \Rightarrow \forall x \in X : (A + \theta)x = Ax + \theta x = Ax \Rightarrow \theta x = \theta_y.$$

Здесь θ — нулевой элемент пространства $\mathcal{L}(X, Y)$, θ_y — нулевой элемент в Y .

В полученном линейном пространстве введем норму элемента:

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|. \tag{3.63}$$

Следует проверить при этом, что все аксиомы нормы выполняются. Имеем:

$$1) \|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = 0 \Rightarrow \|Ax\| = 0 \quad \forall x \in X \quad (x \neq 0) \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow A = \theta.$$

Обратно, если $A = \theta$, то $Ax = \theta_Y \Rightarrow \|Ax\|_Y = \|\theta_Y\| = 0 \Rightarrow \|A\| = 0$.

$$2) \|\lambda A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|(\lambda A)x\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|\lambda Ax\| = |\lambda| \|A\|.$$

$$3) \|(A + B)x\| = \|Ax + Bx\|_Y \leq \|Ax\| + \|Bx\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| + \sup_{\|x\| \leq 1} \|Bx\|.$$

Отсюда

$$\|A + B\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|(A + B)x\| \leq \|A\| + \|B\|.$$

Таким образом, множество $\mathcal{L}(X, Y)$ с определенными на нем линейными операциями и нормой (3.63) является линейным нормированным пространством. Оно называется пространством линейных операторов.

Докажем следующую теорему. Пусть X, Y — линейные нормированные пространства, причем Y — банахово. Тогда пространство линейных непрерывных операторов $\mathcal{L}(X, Y)$ — также банахово.

Доказательство. Пусть $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ — фундаментальная последовательность. Это означает, что $\forall \varepsilon > 0$ и любого натурального числа $p, \exists N(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\|A_{n+p} - A_n\| < \varepsilon,$$

как только $n > N(\varepsilon)$. Здесь под $\|A\|$ понимается норма в пространстве $\mathcal{L}(X, Y)$.

Рассмотрим теперь последовательность $\{A_n x\} \subset Y$. Для произвольного $x \in X$ имеем при $n \rightarrow \infty$

$$\|A_{n+p}x - A_nx\|_Y = \|(A_{n+p} - A_n)x\| \leq \|A_{n+p} - A_n\| \|x\|_X \rightarrow 0. \quad (3.64)$$

Следовательно, последовательность $\{A_n x\}$ — фундаментальна в Y . В силу полноты пространства Y эта последовательность имеет предел

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x, \quad \forall x \in X.$$

Таким образом, определен некоторый оператор A , ставящий в соответствие каждому элементу $x \in X$ элемент $y \in Y$ и действующий по формуле $y = Ax$.

Покажем, что $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Линейность его следует из цепочки равенств

$$A_n(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 A_n x_1 + \lambda_2 A_n x_2 \Rightarrow \lim A_n(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) =$$

$$= \lambda_1 \lim A_n x_1 + \lambda_2 \lim A_n x_2 = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \Rightarrow A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 Ax_1 + \lambda_2 Ax_2.$$

Оператор A — ограничен. Действительно, из фундаментальности последовательности $\{A_n\} \in \mathcal{L}(X, Y)$ следует фундаментальность последовательности норм $\{\|A_n\|\}$ в R^1 :

$$\|A_{n+p}\| - \|A_n\| \leq \|A_{n+p} - A_n\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Поэтому сходящаяся числовая последовательность $\{\|A_n\|\}$ ограничена. Пусть $\|A_n\| \leq C$ для всех $n = 1, 2, \dots$. Тогда $\|A_n x\| \leq \|A_n\| \|x\| \leq C \|x\| \quad \forall x \in X$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем требуемую оценку

$$\|Ax\| \leq C \|x\|.$$

Остается только доказать, что $\|A - A_n\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$. Устремляя в (3.64) $p \rightarrow \infty$ и учитывая тот факт, что $\{A_n x\}$ сходится к Ax , получаем: $\|(Ax - A_n x)\| < \varepsilon_* \Rightarrow \|(A - A_n)x\| < \varepsilon_* < \varepsilon \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sup_{\|x\| \leq 1} \|(A - A_n)x\| \leq \varepsilon \Rightarrow \|A - A_n\| \leq \varepsilon \quad (\text{как только } n > N).$$

Итак, A — линейный, ограниченный (а значит непрерывный) оператор, действующий из X в Y , т. е. $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Фундаментальная последовательность $\{A_n\}$ сходится к A , следовательно, $\mathcal{L}(X, Y)$ — банахово пространство. Теорема доказана.

Если $X = Y$, то пространство линейных операторов обозначается обычно через $\mathcal{L}(X)$. В пространстве операторов $\mathcal{L}(X)$ можно ввести операцию умножения элементов. Пусть $A, B \in \mathcal{L}(X)$, под произведением операторов A и B понимают оператор AB , действующий по формуле

$$(AB)x = A(Bx), \quad \forall x \in X.$$

Очевидно, $AB : X \rightarrow X$. Покажем, что AB — линейный ограниченный оператор.

$$\begin{aligned} 1. \quad (AB)(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2) &= A(B(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2)) = A(\mu_1 Bx_1 + \mu_2 Bx_2) = A(\mu_1 Bx_1) + A(\mu_2 Bx_2) = \\ &= \mu_1 A(Bx_1) + \mu_2 A(Bx_2) = \mu_1 (AB)x_1 + \mu_2 (AB)x_2. \end{aligned}$$

$$2. \quad \|(AB)x\| = \|A(Bx)\| \leq \|A\| \|Bx\| \leq \|A\| \|B\| \|x\|.$$

Следовательно, $AB \in \mathcal{L}(X)$. В частности, из 2 получаем оценку: $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

$\forall A, B, C \in \mathcal{L}(X)$ имеют место свойства ассоциативности относительно умножения и двойкой дистрибутивности, т. е.

$$(AB)C = A(BC),$$

$$(A+B)C = AC + BC, \quad C(A+B) = CA + CB.$$

Пусть $I \in \mathcal{L}(X)$ — единичный (тождественный) оператор ($\forall x \in X : Ix = x$). Тогда $\forall A \in \mathcal{L}(X) : IA = AI = A$.

Замечание. Операция умножения элементов $\mathcal{L}(X)$ некоммутативна. Например, если

$$(Ax)(t) = \int_a^b x(\tau)K(t, \tau)d\tau, \quad (Bx)(t) = x(t)y_0(t),$$

где $x(t) \in C[a, b]$, $K(t, \tau)$ непрерывна в квадрате $[a, b] \times [a, b]$ и $y_0(t)$ — фиксированная функция из $C[a, b]$, то

$$(AB)x = A(Bx) = \int_a^b x(\tau)y_0(\tau)K(t, \tau)d\tau,$$

$$(BA)x = B(Ax) = y_0(t) \int_a^b x(\tau)K(t, \tau)d\tau.$$

В пространстве $\mathcal{L}(X, Y)$ можно ввести два типа сходимости.

Определение. Говорят, что последовательность $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ равномерно сходится к элементу $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, если $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) > 0$, что

$$n > N \Rightarrow \|A - A_n\| < \varepsilon.$$

Таким образом, равномерная сходимость в $\mathcal{L}(X, Y)$ — это сходимость по метрике этого пространства.

Говорят, что последовательность $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ сходится к элементу $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ сильно или поточечно, если $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) > 0$, что

$$n > N \Rightarrow \|Ax - A_nx\| < \varepsilon, \quad \forall x \in X.$$

Очевидно, из равномерной сходимости $\{A_n\}$ к A следует сильная ее сходимость. В самом деле

$$\|Ax - A_nx\| = \|(A - A_n)x\| \leq \|A - A_n\|\|x\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Обратное утверждение, вообще говоря, не имеет места.

Приведем пример. В пространстве l^2 последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots)$ с условием $\sum x_i^2 < \infty$ рассмотрим оператор P_n , действующий по формуле

$$y = P_n x, \quad y = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots).$$

Очевидно — это линейный, ограниченный оператор. Имеем $\forall x \in l^2$

$$\|P_n x - Ix\| = \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} x_i^2 \right)^{1/2} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Следовательно, $P_n \rightarrow I$ сильно. В тоже время, взяв x в виде $x_0 = (0, 0, \dots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)$, получаем

$$\|P_n - I\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|(P_n - I)x\|}{\|x\|} \geq \frac{\|-Ix_0\|}{\|x_0\|} = 1.$$

Поэтому равномерная сходимость $P_n \rightarrow I$ невозможна.

Теорема. Пусть операторы $A, B \in \mathcal{L}(X)$. Если последовательности $\{A_n\}, \{B_n\} \subset \mathcal{L}(X)$ сходятся (равномерно) к A и B соответственно, то $A_n B_n \rightarrow AB$ равномерно, т. е. по норме $\mathcal{L}(X)$.

В самом деле, по неравенству треугольника

$$\|AB - A_n B_n\| = \|AB - A_n B + A_n B - A_n B_n\| \leq \|(A - A_n)B\| + \|A_n(B - B_n)\| \leq \|B\|\|A - A_n\| + \|A_n\|\|B - B_n\|.$$

Далее, так как $\|A - A_n\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), то

$$|\|A\| - \|A_n\|| \leq \|A - A_n\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Поэтому числовая последовательность $\{\|A_n\|\}$ — сходящаяся и, следовательно, ограниченная. Пусть $\|A_n\| \leq C$. Тогда

$$\|AB - A_n B_n\| \leq \|B\|\|A - A_n\| + C\|B - B_n\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

что и требовалось.

Вполне непрерывные операторы. Пусть X, Y — линейные нормированные пространства и A — произвольный оператор, отображающий X в Y . Оператор A называют компактным, если каждое ограниченное множество $M \subset X$ отображается в компактное множество $A(M) \subset Y$. Если к тому же A — непрерывный оператор, то он называется вполне непрерывным.

Каждый ограниченный линейный оператор преобразует любое ограниченное множество (например единичный шар) в ограниченное множество. Можно показать, что каждое компактное множество он преобразует в компактное же множество.

В самом деле, пусть $M \subset X$ есть компактное множество, которое оператор A преобразует во множество $N \subset Y$. Пусть $\{y_n\} \subset N$ — произвольная последовательность, а $\{x_n : Ax_n = y_n\}$ соответствующая последовательность в M . В силу компактности M из $\{x_n\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к элементу $x_* \subset X$. В силу непрерывности оператора A подпоследовательность $\{y_{n_k} = A(x_{n_k})\} \subset N$ сходится:

$$\|Ax_{n_k} - Ax_*\|_Y = \|A(x_{n_k} - x_*)\| \leq \|A\|\|x_* - x_{n_k}\| \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

Поэтому $Ax_{n_k} \rightarrow Ax_* = y_* \subset N$. Следовательно, из произвольной последовательности в N можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, а это указывает на компактность N .

Если оператор A — конечномерный (область его значений R_A конечномерное подпространство Y_n в Y) линейный и непрерывный, то каждое ограниченное множество в X он преобразует в ограниченное множество, лежащее в Y_n . Но такое множество компактно, следовательно, линейный непрерывный и конечномерный оператор вполне непрерывен.

Отметим, что из непрерывности оператора не следует его полная непрерывность. Так, например, тождественный оператор I непрерывен и переводит единичный шар из l^2 в себя, однако являясь ограниченным множеством, он не компактен.

Пример 1. Интегральный оператор Фредгольма $K : C[a,b] \rightarrow C[a,b]$. Он задается формулой

$$y = (Kx)(t) = \int_a^b K(t,\tau)x(\tau)d\tau,$$

где ядро $k(t,\tau)$ непрерывно в квадрате $[a,b] \times [a,b] = Q$. Покажем, что оператор Фредгольма вполне непрерывен.

Пусть $M \subset C[a,b]$ ограниченное множество, т. е. $\|x\| \leq R, \forall x \in M$. Тогда

$$\|y\| = \max_{t \in [a,b]} \left| \int_a^b K(t,\tau)x(\tau)d\tau \right| \leq \max_{t \in [a,b]} \int_a^b |K(t,\tau)| |x(\tau)| d\tau \leq R \|K\|,$$

т. е. множество функций $y(t) \in KM$ равномерно ограничено. Имеем

$$|y(t_1) - y(t_2)| \leq \int_a^b |K(t_1,\tau) - K(t_2,\tau)| |x(\tau)| d\tau \leq R \int_a^b |K(t_1,\tau) - K(t_2,\tau)| d\tau \rightarrow 0$$

независимо от $x(t) \in M$, при $t_1 \rightarrow t_2$ (вследствие равномерной непрерывности функции $K(t,\tau)$ на компакте Q). По теореме Арцела множество функций KM компактно и, значит оператор Фредгольма вполне непрерывен.

Пример 2. Пусть $X = Y = L^2[a,b]$, а ядро $K(t,\tau)$ непрерывно в квадрате $[a,b] \times [a,b]$. Можно показать, что оператор K вполне непрерывен в $L^2[a,b]$.

Пример 3. Вполне непрерывным в $L^2[a,b]$ является также интегральный оператор Гильберта–Шмидта с ядром $K(t,\tau) \in L^2(Q)$, т. е.

$$(\mathcal{L}) \int_a^b \int_a^b |K(t,\tau)|^2 dt d\tau < \infty.$$

Пример 4. Оператор Вольтера

$$(Gx)(t) = \int_a^t G(t,\tau)x(\tau)d\tau, \quad a \leq t \leq b,$$

где ядро $G(t,\tau)$ непрерывно в квадрате $[a,b] \times [a,b]$, также вполне непрерывен.

Множество вполне непрерывных операторов в $\mathcal{L}(X,Y)$ обозначим через $\sigma(X,Y)$. Имеют место следующие предложения [22].

1. $\sigma(X,Y)$ является подпространством (т. е. замкнутым линейным многообразием) в $\mathcal{L}(X,Y)$.
2. Если X или Y конечномерно, то $\sigma(X,Y) = \mathcal{L}(X,Y)$.
3. Пусть $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, $B \in \mathcal{L}(Y,Z)$. Если хотя бы один из этих операторов вполне непрерывен, то вполне непрерывным оператором будет и их произведение BA .
4. Всякий линейный функционал $f \in X^*$ вполне непрерывен (следует из предложения 2).

Принцип равномерной ограниченности. Начнем со следующей леммы.

Пусть X, Y — линейные нормированные пространства и $\{A_n\}$ — последовательность линейных непрерывных операторов из $\mathcal{L}(X, Y)$. Если $\{\|A_n x\|\}$ равномерно ограничена в некотором замкнутом шаре $B[x_0, r]$ ($\|A_n x\| \leq C, \forall x \in B[x_0, r]$), то $\{\|A_n\|\}$ ($n = 1, 2, \dots$) — ограниченная.

В самом деле, введем элемент $z = x_0 + \frac{x}{\|x\|}r$. Имеем

$$\|z - x_0\| = \left\| \frac{xr}{\|x\|} \right\| = r \Rightarrow z \in B[x_0, r].$$

Тогда

$$C \geq \|A_n z\| = \left\| A_n \left(x_0 + \frac{xr}{\|x\|} \right) \right\| = \left\| A_n x_0 + A_n \left(\frac{xr}{\|x\|} \right) \right\| \geq \left\| A_n \left(\frac{xr}{\|x\|} \right) \right\| - \|A_n x_0\| \geq \frac{r}{\|x\|} \|A_n x\| - C \Rightarrow \|A_n x\| \leq \frac{2C}{r} \|x\|.$$

Отсюда

$$\|A_n\| = \sup_{\|x\|=1} \|A_n x\| \leq \frac{2C}{r} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

что и требовалось.

Теорема (принцип равномерной ограниченности). Пусть X — банахово, Y — линейное нормированное пространство и $A_n \in \mathcal{L}(X, Y)$ ($n = 1, 2, \dots$). Если последовательность $\{\|A_n x\|\}$ ограничена при каждом фиксированном $x \in X$, то последовательность $\{\|A_n\|\}$ ограничена.

Доказательство. Предположим противное, пусть $\{\|A_n\|\}$ не ограничена. Тогда найдется шар \bar{B}_0 , на котором $\{\|A_n x\|\}$ не ограничена (в противном случае из леммы следовало бы, что $\{\|A_n\|\}$ — ограниченная). Это означает, что существует точка $x_1 \in \bar{B}_0$ и номер $n = n_1$, такие, что $\|A_{n_1} x_1\| > 1$. В силу непрерывности оператора A_{n_1} эта оценка останется справедливой и в некотором замкнутом шаре $\bar{B}_1 = B_1[x_1, r_1] \subset \bar{B}_0$. В шаре \bar{B}_1 последовательность $\{\|A_n x\|\}$ снова неограниченная, поэтому найдется точка $x_2 \in \bar{B}_1$ и номер $n_2 > n_1$, такие что $\|A_{n_2} x_2\| \geq 2$. В силу непрерывности оператора A_{n_2} найдется замкнутый шар $\bar{B}_2 = B_2[x_2, r_2] \subset \bar{B}_1$, на котором справедливо неравенство $\|A_{n_2} x_2\| \geq 2$. Продолжая этот процесс неограниченно, построим последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров $\bar{B}_0 \supset \bar{B}_1 \supset \dots \supset \bar{B}_n \supset \dots$ и последовательность $\{x_n\} \subset X$, такую что $\|A_{n_k} x_k\| > k$ в шаре $\bar{B}_k = B_k[x_k, r_k]$. По теореме о вложенных шарах существует точка $x_* \in \bar{B}_k$ ($k = 1, 2, \dots$) и, следовательно, $\|A_{n_k} x_*\| > k$. Это противоречит условию теоремы об ограниченности $\{\|A_n x\|\}$ в каждой точке $x \in X$. Теорема доказана.

Теорема (Банах–Штейнгауз). Пусть $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(X, Y)$. Для того чтобы $A_n \rightarrow A \in \mathcal{L}(X, Y)$ ($n \rightarrow \infty$) сильно, необходимо и достаточно, чтобы:

1) $\{\|A_n\|\}$ была ограничена;

2) $A_n \rightarrow A$ ($n \rightarrow \infty$) сильно на некотором линейном многообразии X_0 , всюду плотном в X .

Доказательство необходимости.

Пусть $A_n \rightarrow A$ ($n \rightarrow \infty$) сильно. Это означает, что $\forall x \in X$

$$\|Ax - A_n x\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \Rightarrow \|Ax\| - \|A_n x\| \leq \|Ax - A_n x\| \rightarrow 0 \Rightarrow \|A_n x\| \rightarrow \|Ax\|.$$

Так как $\{\|A_n x\|\}$ сходится к $\|Ax\|$, то она ограничена $\forall x \in X$ и в силу принципа равномерной ограниченности $\{\|A_n\|\}$ — ограниченная. Положив $X_0 = X$, получаем 2.

Доказательство достаточности.

Пусть теперь последовательность $\{\|A_n\|\}$ ограничена и $A_n \rightarrow A \in \mathcal{L}(X, Y)$ ($n \rightarrow \infty$) сильно на плотном в X линейном многообразии X_0 . Необходимо показать, что $A_n \rightarrow A$ сильно на X , т. е.

$$\|Ax - A_n x\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad \forall x \in X.$$

В силу плотности X_0 в X для любого $x \in X$ найдется элемент $x_0 \in X_0$, такой что

$$\|x - x_0\| < \varepsilon.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \|Ax - A_n x\| &= \|(Ax - Ax_0) + (Ax_0 - A_n x_0) + (A_n x_0 - A_n x)\| \leq \\ &\leq \|A\| \|x - x_0\| + \|Ax_0 - A_n x_0\| + \|A_n\| \|x_0 - x\|. \end{aligned}$$

Так как $\{\|A_n\|\}$ — ограниченная последовательность, то

$$\|A_n\| \leq C = \sup_{n=0,1,\dots} \{\|A_n\|\} \quad (A_0 = A).$$

Тогда

$$\|Ax - A_n x\| \leq 2C\varepsilon + \|Ax_0 - A_n x_0\|.$$

Наконец, из условия сильной сходимости $A_n \rightarrow A$ на X_0 следует: $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon)$ такое, что

$$n > N \Rightarrow \|Ax_0 - A_n x_0\| < \varepsilon.$$

Учитывая это неравенство, имеем при $n > N$

$$\|Ax - A_n x\| \leq (2C + 1)\varepsilon,$$

что и требовалось.

Сходимость квадратурных формул. Теорема Банаха–Штейнгауза имеет многочисленные приложения. Рассмотрим одно из них. Квадратурные формулы для вычисления интегралов обычно имеют вид

$$\int_a^b x(t) dt \approx \sum_{k=0}^n A_k x(t_k) \quad (a \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq b).$$

Рассмотрим последовательность таких квадратурных формул

$$\int_a^b x(t) dt \approx \sum_{k=0}^n A_k^{(n)} x(t_k^{(n)}) \quad (a \leq t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \dots < t_n^{(n)} \leq b; n = 0, 1, \dots) \quad (3.65)$$

и поставим вопрос: при каких условиях погрешность этих формул стремиться к нулю при $n \rightarrow \infty$? Если для некоторой функции $x(t)$ погрешность $\delta_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), то, говорят, что квадратурные формулы (3.65) сходятся для $x(t)$. Ответ на это вопрос дает Теорема Сёге.

Для того чтобы формулы механических квадратур (3.65) сходились для любой непрерывной функции, необходимо и достаточно, чтобы:

$$1) \sum_{k=0}^n |A_k^{(n)}| \leq M \quad (n = 0, 1, \dots);$$

2) сходимость этих формул имела место для любого полинома.

Доказательство. В пространстве $C[a, b]$ рассмотрим функционалы

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n A_k^{(n)} x(t_k^{(n)}) \quad (n = 0, 1, \dots), \quad f(x) = \int_a^b x(t) dt.$$

Мы имеем

$$|f_n(x)| \leq \sum_{k=0}^n |A_k^{(n)}| |x(t_k^{(n)})| \leq \|x\| \sum_{k=0}^n |A_k^{(n)}| \Rightarrow \|f_n\| \leq \sum_{k=0}^n |A_k^{(n)}|.$$

Таким образом, для ограниченности последовательности $\{\|f_n\|\}$ достаточно, чтобы

$$\sum_{k=0}^n |A_k^{(n)}| \leq M \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Далее, линейное многообразие всех полиномов X_0 всюду плотно в $C[a, b]$, а на X_0 (по условию теоремы): $f_n(x) \rightarrow f(x)$ ($n \rightarrow \infty$). Поэтому, в силу теоремы Банаха–Штейнгауза, последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к функционалу $f(x)$ на всем $C[a, b]$.

3.9. Линейные функционалы в банаховых пространствах

Линейный функционал является частным случаем линейного оператора. Если X — линейное нормированное пространство и $D_f \subset X$ — область определения функционала $f(x)$, то его область значений $R_f = f(D_f)$ — числовое множество (действительное или комплексное). Поэтому определения и факты, высказанные относительно линейных операторов, остаются в силе и здесь. Перечислим некоторые из них.

1. D_f — линейное многообразие в X и $\forall x_1, x_2 \in D_f$ и $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in P$:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

2. Если f непрерывен в точке $x_0 \in X$, то он непрерывен в любой точке $x \in X$.

3. f — ограниченный функционал, если он переводит любое ограниченное множество из X в ограниченное числовое множество. Аналитически это означает, что $\forall x \in X, \exists M > 0$ (константа), такая что

$$|f(x)| \leq M \|x\|.$$

4. Для линейного функционала понятие непрерывности и ограниченности равносильны.

5. Норма линейного ограниченного функционала определяется одним из следующих равносильных выражений

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)|,$$

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|,$$

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}.$$

6. Пространство $\mathcal{L}(X, R^1)$ всех линейных непрерывных функционалов $f : X \rightarrow R^1$ называется сопряженным (двойственным) к X пространством. Оно обозначается обычно через X^* .

7. Поточечная сходимость последовательности операторов $(A_n \rightarrow A \in \mathcal{L}(X, Y), n \rightarrow \infty)$:

$$\|Ax - A_n x\|_Y \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty), \forall x \in X$$

в применении к последовательности функционалов $\{f_n\} \subset X^*$ выглядит так ($f_n \rightarrow f \in X^*$):

$$|f(x) - f_n(x)| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty), \forall x \in X.$$

Такая сходимость последовательности функционалов $\{f_n\} \subset X^*$ к $f \in X^*$ называется слабой сходимостью.

8. Равномерная сходимость $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ к оператору $A \in \mathcal{L}(X, Y)$:

$$\|A - A_n\| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$$

в применении к последовательности функционалов $\{f_n\} \subset X^*$ ($f_n \rightarrow f \in X^*$):

$$\|f - f_n\|_X \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$$

называется сильной сходимостью последовательности элементов из X^* .

9. Принцип равномерной ограниченности.

Если последовательность $\{f_n(x)\} \subset X^*$ ограничена при каждом фиксированном $x \in X$, то последовательность $\{\|f_n\|\}$ ограничена.

10. Теорема Банаха–Штейнгауза.

Для того чтобы $\{f_n\} \subset X^*$ сходилась к $f \in X^*$ слабо, необходимо и достаточно, чтобы:

а) $\{\|f_n\|\}$ была ограниченной;

б) $\{f_n\}$ сходилась к элементу $f \in X^*$ слабо на некотором линейном многообразии $X_0 \subset X$, плотном в X .

11. Теорема о продолжении линейного ограниченного функционала по непрерывности.

Пусть линейный функционал f задан и ограничен на плотном в X линейном многообразии X_0 . Тогда в X^* существует линейный ограниченный функционал $F(x)$, такой что:

$$\text{а)} F(x) = f(x) \quad \forall x \in X_0.$$

$$\text{б)} \|F\|_x = \|f\|_{X_0} = \sup_{\|x\|_1, x \in X_0} |f(x)|.$$

12. Так как R^1 полно, то сопряженное пространство X^* банаово.

Приведем примеры линейных непрерывных функционалов в конкретных пространствах.

1. Конечномерное пространство. В n -мерном пространстве всевозможных упорядоченных наборов из n -действительных чисел всякий вектор может быть разложен по некоторому базису e_1, e_2, \dots, e_n :

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i.$$

Если f — линейный функционал, заданный в этом пространстве, то

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^n x_i f_i, \quad f_i = f(e_i).$$

Таким образом, по заданному функционалу однозначно определяется n -мерный вектор $\alpha = (f_1, f_2, \dots, f_n)$. Обратно, по произвольному n -мерному вектору $\alpha = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ определяется некоторый функционал (очевидно, линейный)

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f_i = \langle x, f \rangle.$$

Следовательно, между элементами множества всех линейных функционалов, действующих в n -мерном пространстве и элементами самого этого пространства можно установить взаимно-однозначное соответствие. Дальнейший ход рассуждений зависит от выбора нормы в исходном пространстве.

а) Пространство R_p^n ($p > 1$). В этом случае, используя неравенство Гельдера для конечных сумм, получаем оценку

$$|f(x)| = \left| \sum_{i=1}^n x_i f_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i f_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |f_i|^q \right)^{1/q} = \|x\|_{R_p^n} \cdot \|\alpha\|_{R_q^n}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Значит,

$$\|f\| \leq \|\alpha\|_{R_q^n}. \quad (3.66)$$

Покажем, что на элементе $x_0 = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, где $x_i = |f_i|^{q-1} \operatorname{sign} f_i$, в (3.66) достигается точное равенство. Имеем

$$\|x_0\|_{R_p^n} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} = \left(\sum_{i=1}^n |f_i|^q \right)^{1/q},$$

$$f(x_0) = \sum_{i=1}^n x_i f_i = \sum_{i=1}^n |f_i|^q.$$

Отсюда

$$\frac{f(x_0)}{\|x_0\|_{R_p^n}} = \left(\sum_{i=1}^n |f_i|^q \right)^{1/q} = \|\alpha\|_{R_q^n} \Rightarrow \|f\| \geq \|\alpha\|_{R_q^n}.$$

Следовательно, $\|f\| = \|\alpha\|_{R_q^n}$, а это означает, что пространства $(R_p^n)^*$ и R_q^n изометричны.

Таким образом, если $X = R_p^n$, то $X^* = R_q^n$ ($p > 1$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$). В частном случае $p = q = 2$ получаем $(R^n)^* = R^n$.

б) Пространство R_1^n . Здесь

$$|f(x)| \leq \sum_{i=1}^n |x_i f_i| \leq \max_{1 \leq i \leq n} |f_i| \sum_{i=1}^n |x_i| = \|\alpha\|_{R_\infty^n} \|x\|_{R_1^n}.$$

Следовательно,

$$\|f\| \leq \|\alpha\|_{R_\infty^n}. \quad (3.67)$$

Далее, пусть $\max_{1 \leq i \leq n} |f_i| = |f_{i_0}|$ ($1 \leq i_0 \leq n$). На векторе $x_0 = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, где $x_i = \operatorname{sign} f_i \delta_{ii_0}$ (δ_{ij} — символ Кронекера), в (3.67) достигается точное равенство. Действительно,

$$f(x_0) = \sum_{i=1}^n x_i f_i = \sum_{i=1}^n |f_i| \delta_{ii_0} = |f_{i_0}| = \|\alpha\|_{R_\infty^n}, \quad \|x_0\| = \sum_{i=1}^n |x_i| = \sum_{i=1}^n |\operatorname{sign} f_i \delta_{ii_0}| = 1.$$

Значит,

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)| \geq \|\alpha\|_{R_\infty^n}. \quad (3.68)$$

Из (3.67), (3.68) вытекает, что $\|f\| = \|\alpha\|_{R_\infty^n}$.

Итак, пространства $(R_1^n)^*$ и R_∞^n изометричны, поэтому можно положить, что $(R_1^n)^* = R_\infty^n$.

в) Пространство R_∞^n . Имеем

$$|f(x)| \leq \sum_{i=1}^n |x_i f_i| \leq \|x\|_{R_\infty^n} \sum_{i=1}^n |f_i| \Rightarrow \|f\| \leq \|\alpha\|_{R_\infty^n}.$$

На элементе $x_0 = (\operatorname{sign} f_1, \operatorname{sign} f_2, \dots, \operatorname{sign} f_n)$ достигается точное равенство. Действительно,

$$f(x_0) = \sum_{i=1}^n (\operatorname{sign} f_i) f_i = \sum_{i=1}^n |f_i| = \|\alpha\|_{R_\infty^n}, \|x_0\|_{R_\infty^n} = 1.$$

Стало быть, $\|f\| = \|\alpha\|_{R_\infty^n}$ и $(R_\infty^n)^* = R_1^n$.

2. Пространство последовательностей l^p ($p > 1$). Пусть $x = (x_1, x_2, \dots) \in l^p$. Векторы

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots),$$

$$e_2 = (0, 1, 0, \dots),$$

.....

$$e_n = \left(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_n, 1, 0, \dots \right)$$

.....

образуют базис в этом пространстве. В самом деле, рассмотрим в l^p векторы $x^{(n)} = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$. Очевидно,

$$\|x - x^{(n)}\| = \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \Rightarrow x^{(n)} \rightarrow x \quad (n \rightarrow \infty).$$

Так как

$$x^{(n)} = \sum_{i=1}^n x_i e_i \quad (n = 1, 2, \dots),$$

то

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = \lim \sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i.$$

В силу произвольности $x \in l^p$ заключаем, что векторы e_i ($i = 1, 2, \dots$) образуют базис в l^p .

Пусть $f(x)$ — линейный непрерывный функционал, заданный на l^p . Тогда

$$f(x^{(n)}) = \sum_{i=1}^n x_i f_i \quad (f_i = f(e_i)).$$

Так как $x^{(n)} \rightarrow x$ ($n \rightarrow \infty$), то $f(x^{(n)}) \rightarrow f(x)$ в силу его непрерывности. Следовательно,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x^{(n)}) = \lim \sum_{i=1}^n x_i f_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_i f_i.$$

Предположим, что $\alpha = (f_1, f_2, \dots) \in l^q$ $\left(\sum_{i=1}^{\infty} |f_i|^q < \infty \right)$. Тогда имеем

$$|f(x^{(n)})| \leq \sum_{i=1}^n |x_i f_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |f_i|^q \right)^{1/q} \leq \|x\|_{l^p} \|\alpha\|_{l^q}.$$

Переходя в левой части этого неравенства к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим

$$|f(x)| \leq \|\alpha\|_{l^q} \|x\|_{l^p} \Rightarrow \|f\| \leq \|\alpha\|_{l^q}.$$

Пусть $x_0 = (|f_1|^{q-1} \operatorname{sign} f_1, |f_2|^{q-1} \operatorname{sign} f_2, \dots) \in l^p$. Так как

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p = \sum_{i=1}^{\infty} |f_i|^{p(q-1)} = \sum_{i=1}^{\infty} |f_i|^q < \infty,$$

имеем

$$\begin{aligned} f(x_0) &= \sum_{i=1}^{\infty} |f_i|^q, \quad \|x_0\|_{l^p} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |f_i|^q \right)^{1/p} \Rightarrow \frac{f(x_0)}{\|x_0\|_{l^p}} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |f_i|^q \right)^{1/q} = \\ &= \|\alpha\|_{l^q} \Rightarrow \|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|_{l^p}} \geq \|\alpha\|_{l^q}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\|f\| = \|\alpha\|_{l^q}$.

Таким образом, каждому линейному ограниченному функционалу, определенному на l^p (т. е. каждому элементу $f \in (l^p)^*$) можно поставить в соответствие (единственный) элемент $\alpha = (f_1, f_2, \dots)$ из пространства l^q , причем $\|f\| = \|\alpha\|_{l^q}$. Обратно, задав произвольный вектор $\alpha = (f_1, f_2, \dots) \in l^q$, определим функционал f :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i f_i, \quad \forall x = (x_1, x_2, \dots) \in l^p. \quad (3.69)$$

Такое определение корректно, ибо ряд в правой части (3.69) абсолютно сходится

$$|f(x)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |x_i f_i| \leq \|x\|_{l^p} \|\alpha\|_{l^q} < \infty.$$

Функционал (3.69), очевидно, линейный и ограниченный, причем $\|f\| = \|\alpha\|_{l^q}$. Итак, между элементами $(l^p)^*$ и l^q установлено взаимно-однозначное соответствие с сохранением нормы. В силу изометричности $(l^p)^*$ и l^q их можно отождествить: $(l^p)^* = l^q$.

В частном случае $p = q = 2$ получаем $(l^2)^* = l^2$, т. е. пространство, сопряженное к координатному гильбертову пространству l^2 есть само это пространство (с точностью до изометрии).

3. Функциональные пространства L^p ($p > 1$).

Определим на пространстве $L^p[a, b]$ ($p > 1$) функций, суммируемых со степенью p , функционал, действующий по формуле

$$f(x) = \int_a^b x(t) y(t) dt, \quad (3.70)$$

где $y(t)$ — фиксированный элемент из L^q ($p^{-1} + q^{-1} = 1$). В силу интегрального неравенства Гельдера (Б.6) имеем $\forall x \in L^p$

$$|f(x)| \leq \int_a^b |x(t)| |y(t)| dt \leq \left\{ \int_a^b |x(t)|^p dt \right\}^{1/p} \left\{ \int_a^b |y(t)|^q dt \right\}^{1/q} = \|x\|_{L^p} \|y\|_{L^q} < \infty. \quad (3.71)$$

Следовательно, определение функционала (3.70) корректно. В силу линейности интеграла Лебега $f(x)$ — линейный функционал, а из (3.71) вытекает его ограниченность и оценка

$$\|f\| \leq \|y\|_{L^q}.$$

Получим теперь неравенство обратного знака. Для этого рассмотрим функцию $x_0(t) = |y(t)|^{q-1} \operatorname{sign} y(t)$. Элемент $x_0 \in L^p$ в самом деле

$$\int_a^b |x_0(t)|^p dt = \int_a^b |y(t)|^{p(q-1)} dt = \int_a^b |y(t)|^q dt < \infty.$$

На элементе $x_0 \in L^p$ находим

$$f(x_0) = \int_a^b |y(t)|^q dt, \|x_0\| = \left\{ \int_a^b |y(t)|^q dt \right\}^{1/p}.$$

Отсюда

$$\frac{f(x_0)}{\|x_0\|} = \|y\|_{L^q} \Rightarrow \|f\| \geq \|y\|_{L^q}.$$

Итак, $\|f\| = \|y\|_{L^q}$.

Можно показать, что формула (3.70) дает представление произвольного линейного непрерывного функционала $f : L^p \rightarrow R^1$ ($p > 1$). Таким образом, $(L^p)^* = L^q$ ($p > 1$). В случае $p = q = 2$ заключаем, что $(L^2)^* = L^2$, т. е. функциональное гильбертово пространство совпадает со своим сопряженным.

Замечание. Если рассматривается комплексный вариант $L^2[a, b]$, то общее представление линейного непрерывного функционала имеет вид (черта сверху обозначает операцию комплексного сопряжения)

$$f(x) = \int_a^b x(t) \overline{y(t)} dt, \|f\| = \|y\|_{L^2} = \left\{ \int_a^b |y(t)|^2 dt \right\}^{1/2}.$$

Прежде чем перейти к следующему примеру, напомним некоторые определения и факты, касающиеся функций ограниченной вариации и интеграла Стильтьеса.

Функции ограниченной вариации. Рассмотрим множество функций, заданных в $[a, b]$. Произведем разбиение ω отрезка $[a, b]$ точками $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$. Тогда для каждого разбиения ω и каждой функции $f(t)$ можно найти число

$$\sum_{k=0}^{n-1} |f(t_{k+1}) - f(t_k)| = |f|_\omega.$$

Пусть Ω — множество всевозможных разбиений отрезка $[a, b]$. По определению, полная вариация функции на этом промежутке определяется формулой

$$\text{var}_{[a,b]}(f) = \sup \sum_{k=0}^{n-1} |f(t_{k+1}) - f(t_k)| = \sup_{\omega \in \Omega} |f|_{\omega}.$$

В литературе встречаются и другие обозначения полной вариации: $V_a^b[f]$, $V_a^b f$. Если $\text{var}_{[a,b]}(f) < \infty$, то говорят, что функция $f(t)$ имеет ограниченную вариацию (ограниченное изменение). Укажем некоторые простейшие свойства функции ограниченной вариации.

а) Монотонно возрастающая (неубывающая) функция $f(t)$ на $[a, b]$ является функцией ограниченной вариации:

$$\text{var}_{[a,b]}(f) = f(b) - f(a).$$

б) Монотонно убывающая (не возрастающая) на $[a, b]$ функция $f(t)$ имеет ограниченную вариацию

$$\text{var}_{[a,b]}(f) = f(a) - f(b).$$

в) Если $f(t)$ удовлетворяет на $[a, b]$ условию Липшица: $|f(t') - f(t'')| \leq K|t' - t''|$, $\forall t', t'' \in [a, b]$, то она имеет ограниченное изменение. В самом деле,

$$\begin{aligned} |f|_{\omega} &= \sum_{k=0}^{n-1} |f(t_{k+1}) - f(t_k)| \leq K \sum_{k=0}^{n-1} |t_{k+1} - t_k| = K(b-a) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sup_{\omega \in \Omega} |f|_{\omega} \leq K(b-a) \Rightarrow \text{var}_{[a,b]}(f) < \infty. \end{aligned}$$

г) Если $f(t)$ дифференцируема на $[a, b]$, то

$$\text{var}_{[a,b]}(f) = \int_a^b |f'(t)| dt.$$

д) Из предыдущего свойства следует, что если $f(t)$ имеет на $[a, b]$ ограниченную производную: $|f'(t)| < M, \forall t \in [a, b]$, то

$$\text{var}_{[a,b]}(f) \leq M(b-a).$$

е) Ступенчатая функция (т. е. постоянная всюду, за исключением конечного числа точек, где она претерпевает скачок) является функцией ограниченной вариации

$$\text{var}_{[a,b]}(f) = \sum_j |[f(t_j)]|,$$

где $[f(t_j)]$ — скачок функции в точке разрыва t_j .

ж) Очевидно также, что вариация постоянной равна нулю и

$$\text{var}_{[a,b]}(\alpha f) = |\alpha| \text{var}_{[a,b]}(f),$$

$$\text{var}_{[a,b]}(f_1 + f_2) \leq \text{var}_{[a,b]}(f_1) + \text{var}_{[a,b]}(f_2)$$

для любого числа α и произвольных функций ограниченной вариации f, f_1, f_2 . В самом деле

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} |f_1(t_{k+1}) + f_2(t_{k+1}) - f_1(t_k) - f_2(t_k)| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} |f_1(t_{k+1}) - f_1(t_k)| + \\ &+ \sum_{k=0}^{n-1} |f_2(t_{k+1}) - f_2(t_k)| \leq \text{var}_{[a,b]}(f_1) + \text{var}_{[a,b]}(f_2) \Rightarrow \text{var}(f_1 + f_2) \leq \\ &\leq \text{var}(f_1) + \text{var}(f_2). \end{aligned}$$

3) Если $a \leq c \leq b$, то

$$\text{var}_{[a,b]}(f) = \text{var}_{[a,c]}(f) + \text{var}_{[c,b]}(f).$$

Отметим, наконец, что всякую функцию ограниченной вариации в $[a,b]$ можно представить в виде разности двух неубывающих функций [7, 8]. Отсюда и из теоремы Лебега о существовании производной у монотонной функции следует, что всякая функция ограниченной вариации имеет почти всюду конечную производную.

Линейное пространство $BV[a,b]$ всевозможных функций ограниченной вариации с нормой

$$\|f\| = \text{var}_{[a,b]}(f)$$

превращается в линейное нормированное пространство. Правда, возникает неприятность с первой аксиомой нормы, поскольку из равенства $\|f\| = 0$ следует только то, что $f \equiv \text{const}$. Устранить это можно, например, положив

$$\|f\| = |f(a)| + \text{var}_{[a,b]}(f).$$

В этом случае говорят о пространстве BV_0 (состоящем из функций ограниченной вариации, таких что $f(a) = 0$). BV — пространства банаховы [7].

Пусть $\varphi(t) \in L^1(a,b)$ и A — линейное множество всех абсолютно непрерывных функций, т. е. таких функций $f(t)$, которые могут быть представлены в форме неопределенного интеграла

$$f(t) = f(a) + \int_0^t \varphi(\tau) d\tau,$$

где под $\varphi(t)$ понимается обобщенная производная функции f . Доказывается, что A — замкнутое линейное множество, причем [26]

$$\text{var}(f) = \|f\|_L = \int_a^b |f(t)| dt.$$

Таким образом, лебегово пространство $L^1(a,b)$ можно погрузить в пространство BV .

Конструкция интеграла Стильтьеса. Пусть на отрезке $[a, b]$ заданы функции $f(x)$ и $g(x)$. Произведем разбиение $[a, b]$ точками $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$, выберем на каждом частичном интервале (t_{k-1}, t_k) точку ξ_k и образуем сумму

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) [g(t_k) - g(t_{k-1})]. \quad (3.72)$$

Если при неограниченном измельчении разбиения отрезка $[a, b]$ на части ($n \rightarrow \infty$, $\max |t_k - t_{k-1}| \rightarrow 0$) эта сумма стремится к определенному пределу, не зависящему ни от способа разбиения отрезка, ни от выбора на частичных интервалах точек ξ_k , то этот предел называется интегралом Римана–Стильтьеса от функции $f(t)$ по функции $g(t)$. Он обозначается символом

$$\int_a^b f(t) dg(t).$$

При $g(t) = t$ интеграл Стильтьеса совпадает с интегралом Римана. Если $g(t)$ — кусочнонепрерывно дифференцируемая на $[a, b]$ функция, то

$$\int_a^b f(t) dg(t) = \int_a^b f(t) g'(t) dt,$$

что непосредственно следует из (3.72).

Имеет место теорема [7]. Если $f(t) \in C[a, b]$, а $g(t)$ имеет ограниченную вариацию на $[a, b]$, то интеграл Стильтьеса

$$\int_a^b f(t) dg(t)$$

существует.

Укажем несколько простых свойств интеграла Римана–Стильтьеса для случая, когда $f(t), \varphi(t)$ непрерывны на $[a, b]$.

a) $\int_a^b [\alpha f(t) + \beta \varphi(t)] dg(t) = \alpha \int_a^b f(t) dg(t) + \beta \int_a^b \varphi(t) dg(t).$

b) $\int_a^b f(t) d(\alpha_1 g_1(t) + \alpha_2 g_2(t)) = \alpha_1 \int_a^b f(t) dg_1(t) + \alpha_2 \int_a^b f(t) dg_2(t).$

в) Если $K = \max_{[a, b]} |f(t)|$, то

$$\left| \int_a^b f(t) dg(t) \right| \leq K \operatorname{var}_{[a, b]}(g).$$

г) Если последовательность $\{f_n(t)\} \subset C[a, b]$ сходится к $f(t) \in C[a, b]$ равномерно (т. е. по метрике этого пространства), то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) dg(t) = \int_a^b f(t) dg(t).$$

д) Формула интегрирования по частям

$$\int_a^b f(t)dg(t) = f(t)g(t) \Big|_a^b - \int_a^b g(t)df(t).$$

Отсюда следует, что интеграл Стильтьеса от функции ограниченной вариации по непрерывной функции существует.

е) Если $g(t)$ — ступенчатая функция, имеющая скачки в точках t_k ($k = 1, 2, \dots, n$) величиной $\delta_k = g(t_k + 0) - g(t_k - 0)$, то

$$\int_a^b x(t)dg(t) = \sum_{k=1}^n x(t_k) \delta_k.$$

Линейный непрерывный функционал на $C[a,b]$. В банаховом пространстве $C[a,b]$ функционалы

$$f(x) = x(t_0), \quad t_0 \in [a,b], \quad x(t) \in C[a,b],$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^n A_k x(t_k), \quad t_k \in [a,b] \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

$$f(x) = \int_a^b x(t) \varphi(t) dt, \quad \varphi(t) \in L^1[a,b].$$

линейны и непрерывны. Описать их и все другие линейные непрерывные функционалы $f : C[a,b] \rightarrow R^1$ единой формулой оказалось возможным лишь при помощи интеграла Стильтьеса. Точнее, имеет место теорема Ф. Рисса [7].

Общая форма линейного функционала в пространстве $C[a,b]$ дается интегралом Стильтьеса

$$f(x) = \int_a^b x(t) dg(t),$$

где $g(t)$ — произвольная функция ограниченной вариации. Если при этом $g(t)$ — правильная функция ($g(a) = 0$), то

$$\|f\| = \text{var}_{[a,b]}(g).$$

Ниже эта теорема будет доказана.

Таким образом, $C^*[a,b] = BV_0$.

Замечание. Так как X^* — банахово пространство, то можно построить банаховы пространства $X^{**} = (X^*)^*$, $X^{***} = (X^{**})^*$ и т. п. Из рассмотренных примеров следует, что $(R^n)^* = R^n$, $(l^2)^* = l^2$. Далее будет показано, что $H^* = H$, т. е. абстрактное гильбертово пространство является самосопряженным. Для p -пространств:

$$(l^p)^* = l^q, \quad (L^p)^* = L^q, \quad p > 1, \quad p^{-1} + q^{-1} = 1.$$

Но тогда

$$(l^p)^{**} = (l^q)^* = l^p, \quad (L^p)^{**} = (L^q)^* = L^p.$$

Банаховы пространства X , обладающие тем свойством, что $X^* = X$, называются самосопряженными. Если $(X^*)^* = X$, то такие пространства называются рефлексивными. Следовательно, гильбертовы пространства R^n, l^2, L^2 — самосопряженные, p — пространства рефлексивны.

Общий вид линейного функционала в гильбертовом пространстве. Теорема (Ф. Рисс). Пусть H — гильбертово пространство. Для любого линейного непрерывного функционала f , заданного всюду на H , существует единственный элемент $u \in H$, такой что

$$f(x) = (x, u), \quad \forall x \in H, \quad (3.73)$$

причем $\|f\| = \|u\|$.

Доказательство. Пусть $L = \ker f$ — ядро произвольного элемента $f \in H^*$. Ранее было показано, что L — замкнутое линейное многообразие, т. е. подпространство в H . Если $L = H$, то $f(x) = 0, \forall x \in H$, а это означает, что $f = 0$. Поэтому можно положить $u = 0$ и равенство (3.73) будет выполнено. Если же L — собственное подпространство в H , то найдется $x_0 \in L$. Имеем $\forall x \in H$:

$$x = y + x_0, \quad y \in L \text{ и } x_0 \perp y.$$

Обозначим $f(x_0) = \alpha \neq 0$, ибо $x_0 \notin \ker f$. Полагая $x_1 = x_0/\alpha$, получим $f(x_1) = 1$. Пусть теперь x — произвольный элемент H , обозначим $f(x) = \beta$. Мы имеем

$$f(x) - \beta f(x_1) = 0 \Rightarrow f(x - \beta x_1) = 0 \Rightarrow z = x - \beta x_1 \in L \Rightarrow x = z + \beta x_1.$$

Так как по построению $x_1 \perp z$, то

$$(x, x_1) = \beta \|x_1\|^2 \Rightarrow f(x) = (x, x_1 / \|x_1\|^2).$$

Введем вектор $u = x_1 / \|x_1\|^2$, тогда получим

$$f(x) = (x, u),$$

где $u \in H$ — некоторый элемент, который однозначно определяется функционалом $f \in H^*$. В самом деле, если найдется еще один элемент $v \in H$, такой что $f(x) = (x, v)$, то отсюда будет следовать

$$(x, u - v) = 0, \quad \forall x \in H \Rightarrow (u - v, u - v) = 0 \Rightarrow u = v.$$

Покажем теперь, что $\|f\| = \|u\|$. Так как $f \in H^*$, то

$$|f(x)| \leq \|x\| \|u\| \Rightarrow \|f\| \leq \|u\|.$$

С другой стороны, на элементе $x = u$

$$f(x) = \|x\| \|u\| \Rightarrow \|f\| \geq \|u\|.$$

Сравнение этих двух неравенств дает: $\|f\| = \|u\|$, что и требовалось.

Из теоремы Рисса следует, что всякому $f \in H^*$ соответствует единственный элемент $u \in H$, причем $\|f\| = \|u\|$. Обратно, $\forall u \in H$ можно поставить в соответствие функционал (x, u) . Очевидно, он линейный, и в силу неравенства Коши–Буняковского ограниченный на H , причем его норма равна норме элемента u . Таким образом, между элементами H и H^* можно установить взаимно-однозначное соответствие с сохранением нормы, а это означает, что $H^* = H$. По этой причине говорят, что H — самосопряженное пространство.

Замечание. Из приведенных примеров линейных непрерывных функционалов в ба-наховых пространствах видно, что все они весьма похожи на функционалы в гильбертовых пространствах. Действительно, каждый функционал $f = f_u$, определенный на X , образуется в результате выбора некоторого элемента из некоего пространства U и операции $f_u = \langle x, u \rangle$, где символ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает операцию того же типа, что и скалярное произведение, которая в каждом конкретном случае принимает вид, соответствующий рассматриваемому пространству X . Пространства X^* и U находятся во взаимно-однозначном соответствии, т. е. $\forall u \in U, \exists f_u = \langle \cdot, u \rangle$ из X^* и наоборот. Поскольку $\|f_u(x)\| = \|u\|$, то у соответствующих u и f_u — одинаковые нормы. Если переименовать все u , используя для этого соответствующие f_u , в результате чего $f(x)$ окажется равным $\langle x, f \rangle$, то исчезнет необходимость в явном упоминании пространства U . Тогда пространство X^* , будучи пространством операторов, должно состоять из элементов вида $\langle \cdot, f \rangle$. Иногда проще представлять X^* как пространство, образованное элементами f и обладающее операцией $\langle \cdot, \cdot \rangle$. В этих обозначениях утверждение об ограниченности функционала f имеет вид

$$|\langle x, f \rangle| \leq \|f\| \|x\|, \quad \forall x \in X.$$

Это соотношение напоминает неравенство Шварца для гильбертовых пространств. С другой стороны, это неравенство справедливо $\forall f \in X^*$, так что, фиксируя $x \in X$, можем записать

$$|\langle x, f \rangle| \leq \|x\| \|f\|, \quad \forall f \in X^*.$$

Эти рассуждения подытожим таблицей.

X	X^*	Вид функционала	Норма функционала
E^n	E^n	$\langle x, f \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = (x, y)$	$\ f\ = \ y\ = \left(\sum_{i=1}^n y_i ^2 \right)^{\frac{1}{2}}$
l^2	l^2	$\langle x, f \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i = (x, y)$	$\ f\ = \ y\ = \left(\sum_{i=1}^{\infty} y_i ^2 \right)^{\frac{1}{2}}$
$L^2(a, b)$	$L^2(a, b)$	$\langle x, f \rangle = \int_a^b x(t) f(t) dt = (x, f)$	$\ f\ = \left(\int_a^b f(t) ^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$
$L^p(a, b),$ $1 < p < \infty$	$L^q(a, b),$ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$	$\langle x, f \rangle = \int_a^b x(t) f(t) dt$	$\ f\ = \left(\int_a^b f(t) ^q dt \right)^{\frac{1}{q}}$
$L^1(a, b)$	$L^\infty(a, b)$	$\langle x, f \rangle = \int_a^b x(t) f(t) dt$	$\ f\ = \text{Vrai} \max_{t \in [a, b]} f(t) $
$l^p, 1 < p < \infty$	l^q	$\langle x, f \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$	$\ f\ = \left(\sum_{i=1}^{\infty} y_i ^q \right)^{\frac{1}{q}}$
l^1	l^∞	$\langle x, f \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$	$\ f\ = \sup_i y_i = \ y\ $

Продолжение линейных непрерывных функционалов. Теорема Хана–Банаха.

Пусть линейный непрерывный функционал $f(x)$ задан на линейном многообразии $L \subset X$. Линейный непрерывный функционал $F(x)$, определенный в X , называется продолжением функционала $f(x)$ (с сохранением нормы), если

$$F(x) = f(x), \quad x \in L,$$

$$\|F\|_x = \|f\|_L.$$

Ранее мы выяснили, что если L плотно в X , то линейный непрерывный оператор (функционал) можно продолжить на все пространство X (по непрерывности). Оказывается, $f(x)$ можно продолжить на X даже в том случае, когда L — любое линейное многообразие в X .

Теорема (Г. Хан–С. Банах). Всякий линейный непрерывный функционал $f(x)$, определенный на линейном многообразии L линейного нормированного пространства X можно продолжить на все пространство с сохранением нормы.

Доказательство. Очевидно, необходимо рассмотреть случай, когда L не совпадает со всем пространством. Пусть $x_0 \in X$ и не принадлежит L . Образуем линейное многообразие

$$L_1 = L \cup \gamma x_0,$$

где γ — произвольное число. Всякий вектор $y \in L_1$ однозначно представим в виде

$$y = x + \gamma x_0, \quad x \in L.$$

В самом деле, если мы имеем два представления: $y = x_1 + \gamma_1 x_0$ и $y = x_2 + \gamma_2 x_0$, то $x_1 - x_2 = (\gamma_2 - \gamma_1) x_0$. При $\gamma_1 = \gamma_2$ получаем $x_1 = x_2$, т. е. эти представления совпадают. Если же $\gamma_1 \neq \gamma_2$, то $x_0 = (x_1 - x_2)/(\gamma_2 - \gamma_1)$, т. е. $x_0 \in L$, что противоречит условию.

Определим теперь на L_1 функционал $\Phi(y)$, действующий по формуле

$$\Phi(y) = f(x) - \gamma c, \quad \forall y \in L_1, \quad (3.74)$$

где c — некоторое число. При $y = x \in L$ имеем $\gamma = 0$ и, значит, на L : $\Phi(x) = f(x)$.

Этот функционал линейный. Действительно, если

$$y_1 = x_1 + \gamma_1 x_0 \in L_1, \quad y_2 = x_2 + \gamma_2 x_0 \in L_1,$$

то

$$y_1 + y_2 = (x_1 + x_2) + (\gamma_1 + \gamma_2) x_0,$$

$$\alpha y = \alpha x + (\gamma \alpha) x_0.$$

Тогда, согласно (3.74), имеем

$$\Phi(y_1 + y_2) = f(x_1 + x_2) - (\gamma_1 + \gamma_2)c = f(x_1) - \gamma_1 c + f(x_2) - \gamma_2 c = \Phi(y_1) + \Phi(y_2),$$

$$\Phi(\alpha y) = f(\alpha x) - (\gamma \alpha)c = \alpha(f(x) - \gamma c) = \alpha\Phi(y).$$

Покажем теперь, что функционал $\Phi(y)$ ограничен на L_1 и при соответствующем выборе числа c его норма не превосходит $\|f\|$. Имеем $\forall x_1, x_2 \in L$ цепочку неравенств

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &\leq |f(x_1) - f(x_2)| = |f(x_1 - x_2)| \leq \|f\| \|x_1 - x_2\| \leq \\ &\leq \|f\| [\|x_1 + x_0\| + \|x_2 + x_0\|] \Rightarrow f(x_1) - \|f\| \|x_1 + x_0\| \leq f(x_2) + \|f\| \|x_2 + x_0\|. \end{aligned}$$

Фиксируя x_2 в правой части последнего равенства и придавая $x_1 \in L$ все возможные значения, получаем ограниченное сверху числовое множество $\{f(x_1) - \|f\| \|x_1 + x_0\|\}$, точную верхнюю грань которого обозначим через α . Когда же x_2 пробегает все свои значения из L , а x_1 — фиксированно, получим ограниченное снизу числовое множество $\{f(x_2) + \|f\| \|x_2 + x_0\|\}$. Нижнюю грань его обозначим буквой β . Теперь имеем

$$f(x_1) - \|f\| \|x_1 + x_0\| \leq \alpha \leq \beta \leq f(x_2) + \|f\| \|x_2 + x_0\|, \quad \forall x_1, x_2 \in L.$$

Отсюда следует, что между крайней левой и крайней правой частями неравенства существует «просвет», в который мы и вставим число c , фигурирующее в определении функционала $\Phi(y)$. Точнее, положим

$$\alpha \leq c \leq \beta.$$

Тогда получим два неравенства

$$f(x_*) - \|f\| \|x_* + x_0\| \leq c, \quad f(x_*) + \|f\| \|x_* + x_0\| \geq c, \quad \forall x_* \in L.$$

Вводя вектор $x = \gamma x_* \in L$, приведем эти неравенства к виду

$$f\left(\frac{x}{\gamma}\right) - \|f\| \left\| \frac{x}{\gamma} + x_0 \right\| \leq c \Rightarrow f(x) - \gamma c \leq \frac{\gamma}{|\gamma|} \|f\| \|x + \gamma x_0\| \Rightarrow \Phi(y) \leq \frac{\gamma}{|\gamma|} \|f\| \|y\|,$$

$$f\left(\frac{x}{\gamma}\right) + \|f\| \left\| \frac{x}{\gamma} + x_0 \right\| \geq c \Rightarrow f(x) - \gamma c \geq -\frac{\gamma}{|\gamma|} \|f\| \|x + \gamma x_0\| \Rightarrow \Phi(y) \geq -\frac{\gamma}{|\gamma|} \|f\| \|y\|.$$

Если $\gamma > 0$, то эти неравенства дают $|\Phi(y)| \leq \|f\| \|y\|$, $|\Phi(y)| \geq -\|f\| \|y\|$.

При $\gamma = -|\gamma| < 0$, получаем аналогичные оценки

$$\Phi(y) \geq -\|f\| \|y\|, \quad \Phi(y) \leq \|f\| \|y\| \Rightarrow |\Phi(y)| \leq \|f\| \|y\|.$$

Таким образом, во всех случаях

$$|\Phi(y)| \leq \|f\| \|y\| \Rightarrow \|\Phi\|_{L_1} \leq \|f\|_L.$$

Неравенство противоположного знака очевидно, т. е. $\|\Phi\|_{L_1} = \|f\|_L$.

Итак, по определенному на линейном многообразии $L \subset X$ линейному непрерывному функционалу $f(x)$ построен линейный непрерывный на $L_1 = L \cup \gamma x_0$ функционал $\Phi(y)$, такой что

1) $\Phi(x) = f(x)$, $x \in L$;

2) $\|\Phi\|_{L_1} = \|f\|_L$.

Иными словами, $f(x)$ продолжен на L_1 с сохранением нормы.

Дальнейший ход доказательства проведем при дополнительном предположении о сепарабельности X . В этом случае в X имеется счетное всюду плотное множество Q . Отбросив элементы Q , принадлежащие L , перенумеруем оставшиеся: $\{x_1, x_2, \dots\}$. По доказанному выше функционал $f(x)$ продолжаем с сохранением нормы на $L_1 = L \cup \gamma_1 x_1$, полученный функционал продолжаем с L_1 на $L_2 = L_1 \cup \gamma_2 x_2$ и т. д. В результате построим линейный непрерывный функционал $F(x)$, определенный на линейном многообразии X_0 всюду плотном в X , причем $F(x) = f(x)$ на исходном многообразии L и $\|F\|_{X_0} = \|f\|_L$. Далее продолжаем его по непрерывности на все X . Теорема доказана.

Следствия из теоремы Хана–Банаха. Теорема Хана–Банаха имеет многочисленные приложения благодаря следствиям, вытекающим из нее.

Следствие 1 (о существовании нетривиальных элементов в X^*).

Пусть x_0 — отличный от нуля элемент линейного нормированного пространства X .

Тогда существует линейный непрерывный функционал $F(x)$, определенный на всем X , такой что

a) $F(x_0) = \|x_0\|$;

б) $\|F\|_x = 1$.

Доказательство. На одномерном линейном многообразии $\{\gamma x_0\}$ определим линейный ограниченный функционал

$$f(x) = \gamma \|x_0\|, \quad \forall x = \gamma x_0 \in L(\{\gamma x_0\}).$$

Тогда

$$f(x_0) = \|x_0\|, \quad \|f\| = \sup \frac{|\gamma| \|x_0\|}{|\gamma| \|x_0\|} = 1.$$

Далее, по теореме Хана–Банаха продолжаем этот функционал на все X с сохранением нормы, т. е. находим линейный непрерывный функционал $F(x)$, такой что:

$$F(x) = f(x), \quad \forall x \in L(\{\gamma x_0\}),$$

$$F(x_0) = f(x_0) = \|x_0\|, \quad \|F\|_X = 1,$$

что и требовалось.

Таким образом, в сопряженном пространстве X^* существуют отличные от нуля элементы.

Следствие 2. Если для всех $f \in X^*$ имеет место равенство $f(x) = 0$, то $x = 0$.

В самом деле, если $x \neq 0$, то по следствию 1 найдется элемент $f \in X^*$, такой что $f(x) = \|x\| > 0$. Полученное противоречие доказывает следствие.

Пусть $f \in X^*$ и α — число. Говорят, что уравнение

$$f(x) = \alpha, \quad x \in X$$

определяет гиперплоскость в линейном нормированном пространстве X .

Пусть Y — выпуклое множество в X . Говорят, что гиперплоскость $f(x) = \alpha$ является опорной к Y , если $f(Y) \leq \alpha$ ($f(Y) \geq \alpha$) и по крайней мере одна точка множества Y лежит на этой гиперплоскости.

Следствие 3 (обобщение теоремы Г. Минковского). Через точку x_0 , лежащую на поверхности шара $\|x\| \leq r$, можно провести опорную к этому шару гиперплоскость.

В самом деле, в силу следствия 1 из теоремы Хана–Банаха на X существует линейный непрерывный функционал, такой что

$$f(x_0) = \|x_0\|, \quad \|f\|_X = 1.$$

Введем гиперплоскость $f(x) = r$. Точка x_0 лежит на этой гиперплоскости: $f(x_0) = \|x_0\| = r$.

Далее, если $B[x, r] = \{x \in X : \|x\| \leq r\}$, то $\forall x \in B$:

$$f(x) \leq |f(x)| \leq \|f\| \|x\| = \|x\| \leq r.$$

Остается заметить только, что шар является выпуклым множеством.

Пусть M и N — подмножества в X . Говорят, что $f \in X^*$ строго разделяет M и N , если

$$\inf\{f(M)\} > \sup\{f(N)\}.$$

Следствие 4 (теорема отделимости). Пусть X — линейное нормированное пространство, L — линейное многообразие в нем и $x_0 \in X$ не принадлежит \bar{L} . Тогда существует $f \in X^*$ такой, что

- 1) $f(L) = 0$;
- 2) $f(x_0) = 1$;
- 3) $\|f\|_X = 1/d$, $d = \inf_{x \in L} \|x - x_0\|$.

Доказательство. Рассмотрим линейное многообразие $L_1 = L \cup \gamma x_0$ ($\gamma \in R^1$). Для любого элемента $y \in L_1$ имеет место представление

$$y = x + \gamma x_0, \quad x \in L.$$

Однозначность такого представления была выяснена ранее (при доказательстве теоремы Хана–Банаха).

На L_1 определим функционал

$$\Phi(y) = \Phi(x + \gamma x_0) = \gamma.$$

Этот функционал линеен. Действительно, если $y_1 = x_1 + \gamma_1 x_0$, $y_2 = x_2 + \gamma_2 x_0$, то $y_1 + y_2 = x_1 + x_2 + (\gamma_1 + \gamma_2)x_0$ и, следовательно,

$$\Phi(y_1 + y_2) = \gamma_1 + \gamma_2 = \Phi(y_1) + \Phi(y_2).$$

Однородность $\Phi(y)$ показывается так же легко. При $y = x \in L$ число $\gamma = 0$, т. е. $\Phi(L) = 0$.

При $y = x_0$ имеем $x = 0$, $\gamma = 1$, значит, $\Phi(x_0) = 1$.

Определим теперь $\|\Phi\|$. Имеем цепочку неравенств:

$$|\Phi(y)| = |\Phi(x + \gamma x_0)| = |\gamma| = \frac{\|y\|\|\gamma\|}{\|y\|} = \frac{\|y\|\|\gamma\|}{\|x + \gamma x_0\|} = \frac{\|y\|}{\left\|x_0 - \left(-\frac{x}{\gamma}\right)\right\|} \leq \frac{\|y\|}{d}.$$

Отсюда следует:

$$\|\Phi\|_{L_1} \leq \frac{1}{d}.$$

Теперь получим неравенство противоположного знака. По определению точной нижней грани числового множества найдется последовательность $\{x_n\} \subset L$, такая что

$$\|x_n - x_0\| \leq d + \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Имеем

$$|\Phi(x_n - x_0)| = 1 \leq \|\Phi\| \|x_n - x_0\| \leq \|\Phi\| (d + 1/n) \Rightarrow \|\Phi\| \geq \frac{1}{d + 1/n}.$$

Числовое множество $\{(d + 1/n)^{-1}\}$ ограничено сверху и при увеличении n монотонно возрастает, следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{d + 1/n} = \frac{1}{d} \leq \|\Phi\|.$$

Итак, $\|\Phi\|=1/d$. По теореме Хана–Банаха функционал Φ можно продолжить с L_1 на все X с сохранением нормы. Тогда получим $f \in X^*$, обладающий требуемыми свойствами. Следствие доказано. Поскольку $f(L)=0$, а $f(x_0)=1 > \sup\{f(L)\}$, то функционал $f(x)$ строго разделяет x_0 и L .

Следствие 5 (лемма об аннуляторе). Пусть L — собственное подпространство в линейном нормированном пространстве X (или линейное многообразие, не плотное в X). Тогда существует ненулевой элемент $f \in X^*$, такой что $f(L)=0$.

В самом деле, согласно условию, существует элемент $x \in X$, отстоящий от L на положительном расстоянии d . Следовательно, найдется такой функционал $f \in X^*$, что $f(L)=0$ и $f(x)=1$ (т. е. $f \neq 0$), а это и требуется.

Можно показать, что и обратно, если $\exists f \in X^* (f \neq 0)$ такой, что $f(L)=0$, где L — линейное многообразие в X , то $\bar{L} \neq X$ (т. е. L не плотно в X).

Действительно, предположим, что $\bar{L}=X$. Тогда $\forall x \in L, \exists\{x_n\} \subset L$, сходящаяся к x . В силу непрерывности $f : f(x) = \lim f(x_n) = 0$. Учитывая, что на элементах L $f(x)=0$ по условию, заключаем, что $f(x)=0$, т. е. $f=0$. Полученное противоречие доказывает утверждение.

Замечание. Как уже было отмечено выше, во многих случаях удобно пользоваться обозначениями функционалов, содержащими наряду с $x \in X$ элемент двойственного пространства $f \in X^*$:

$$f(x) = \langle x, f \rangle.$$

Система элементов $\{x_k\} \subset X (k=1, 2, \dots, n)$ и система функционалов $\{f_i\} \subset X^* (i=1, 2, \dots, n)$ называются биортогональными, если

$$\langle x_k, f_i \rangle = \delta_{ki} = \begin{cases} 1, & i=k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

Следствие 6. Пусть $\{x_k\} (k=1, 2, \dots, n)$ — линейно независимая система элементов линейного нормированного пространства X . Тогда в X^* найдется линейно независимая система элементов $\{f_j\} (j=1, 2, \dots, n)$, такая что

$$\langle x_k, f_j \rangle = \delta_{kj} (k, j=1, 2, \dots, n).$$

Доказательство. Рассмотрим в X линейное многообразие $L_1 = L(x_2, x_3, \dots, x_n)$. Так как система $\{x_k\}$ линейно независима ($\bar{L}_1 = L_1$ как конечномерное многообразие), то расстояние элемента x_1 от L_1 равно $d_1 > 0$. Тогда по следствию 4 $\exists f_1 \in X^*$ такой, что

$$\langle x_1, f_1 \rangle = 1, \quad f_1(L_1) = 0 \Rightarrow \langle x_k, f_1 \rangle = 0 \quad (k=2, 3, \dots, n).$$

Далее образуем линейное многообразие $L_2 = L(x_1, x_3, \dots, x_n)$. Элемент x_2 отстоит от L_2 на расстоянии $d_2 > 0$. Снова применяя результат следствия 4, находим элемент $f_2 \in X^*$, такой что

$$\langle x_2, f_2 \rangle = 1, \quad f_2(L_2) = 0 \Rightarrow \langle x_k, f_2 \rangle = 0 \quad (k = 1, 3, 4, \dots, n).$$

На n -м шаге этого процесса находим $f_n \in X^*$, причем

$$\langle x_n, f_n \rangle = 1, \quad \langle x_k, f_n \rangle = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n-1).$$

Итак, мы получили систему $\{f_j\} \subset X^*$ ($j = 1, 2, \dots, n$), для которой

$$\langle x_k, f_j \rangle = \delta_{kj} \quad (k, j = 1, 2, \dots, n).$$

Эта система линейно независима. Предположим напротив, что $\{f_j\}$ — линейно зависимая система. Тогда один из элементов, например f_1 , можно представить в виде линейной комбинации остальных:

$$f_1 = \sum_{m=2}^n \alpha_m f_m.$$

Имеем

$$\langle x_1, f_1 \rangle = \left\langle x_1, \sum_{m=2}^n \alpha_m f_m \right\rangle = \sum_{m=2}^n \alpha_m \langle x_1, f_m \rangle = 0.$$

Полученное противоречие завершает доказательство.

Можно показать, что и обратно, для любой линейно независимой системы $\{f_j\} \subset X^*$ ($j = 1, 2, \dots, n$) существует система $\{x_m\} \subset X$ ($m = 1, 2, \dots, n$), биортогональная исходной:

$$\langle x_m, f_j \rangle = \delta_{mj} \quad (j, m = 1, 2, \dots, n).$$

Биортогональные системы $\{x_m\} \subset X$ и $\{f_j\} \subset X^*$ называют также двойственными (по отношению друг к другу) множествами.

Общий вид линейного непрерывного функционала в $C[0,1]$. Ранее мы уже касались этого вопроса. Здесь докажем основную теорему представления.

Теорема (Ф. Рисс). Всякий линейный непрерывный функционал, определенный на всем пространстве $C[0,1]$, может быть представлен в виде

$$f(x) = \int_0^1 x(t) dg(t),$$

где $g(t)$ — функция ограниченной вариации на $[0,1]$. При этом

$$\|f\| = \text{var}_{[0,1]}(g) = \int_0^1 g'(t)^2 dt.$$

Доказательство. Пусть $f(x)$ — линейный непрерывный функционал на $C[0,1]$. Поскольку из $x \in C[0,1] \Rightarrow x \in M[0,1]$ (пространство ограниченных на $[0,1]$ функций) и $\|x\|_M = \sup_{0 \leq t \leq 1} |x(t)|$ переходит в $\|x\|_{C[0,1]} = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t)|$ для $x \in C[0,1]$, то пространство $C[0,1]$ является подпространством линейного нормированного пространства M . По теореме Хана-Банаха $f(x)$ можно продолжить на все M с сохранением нормы. Полученный линейный непрерывный функционал $F(x)$ равен $f(x)$ на $C[0,1]$ и $\|F\|_M = \|f\|_c$.

Введем теперь семейство ступенчатых функций на $[0,1]$:

$$u_t(\xi) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \xi < t, \\ 0, & t \leq \xi \leq 1. \end{cases}$$

Очевидно, $u_t(\xi) \in M[0,1]$. Для каждого $t \in [0,1]$ функционал F на элементе $u_t(\xi)$ представляет собой некоторое число. Таким образом, $F[u_t(\xi)]$ определяет функцию от t :

$$F[u_t(\xi)] = g(t).$$

Покажем, что $g(t)$ — функция ограниченной вариации. Для этого разобьем отрезок $[0,1]$ узлами

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1$$

на n -частей и рассмотрим вариацию $g(t)$ на $[0,1]$. Имеем цепочку соотношений

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |g(t_i) - g(t_{i-1})| &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i (g(t_i) - g(t_{i-1})) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i [F(u_{t_i}) - F(u_{t_{i-1}})] = \\ &= F \sum_{i=1}^n \varepsilon_i (u_{t_i} - u_{t_{i-1}}) \leq \|F\| \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i (u_{t_i} - u_{t_{i-1}}) \right\|, \quad \varepsilon_i = \operatorname{sign}(g(t_i) - g(t_{i-1})). \end{aligned}$$

Так как $\|F\| = \|f\|$ и функция (рис. 3.13)

$$\varphi(\xi) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i (u_{t_i} - u_{t_{i-1}}) = \pm 1; 0,$$

то $\|\varphi\| = \sup_{\xi \in [0,1]} |\varphi(\xi)| = 1$.

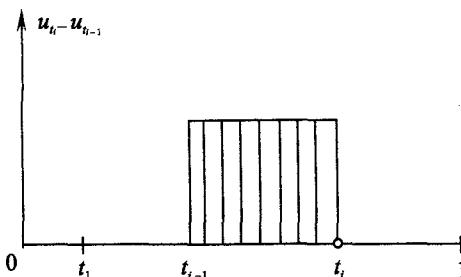


Рис. 3.13. К доказательству теоремы Ф. Рисса

Значит,

$$\text{var}_{[0,1]}(g) = \sup \sum_{i=1}^n |g(t_i) - g(t_{i-1})| \leq \|f\|, \quad (3.75)$$

что и требовалось.

Пусть теперь $x(t)$ — произвольная непрерывная на $[0,1]$ функция. Рассмотрим последовательность

$$z_n(t) = \sum_{k=1}^n x\left(\frac{k}{n}\right) \left[u_{\frac{k}{n}}(t) - u_{\frac{k-1}{n}}(t) \right].$$

Взяв любое $t \in [0,1]$, мы попадем в один из промежутков $\left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right)$. Подбирая n настолько большим, чтобы

$$\left| x(t) - x\left(\frac{k}{n}\right) \right| < \varepsilon, \quad \frac{k-1}{n} < t < \frac{k}{n}, \quad n > N(\varepsilon),$$

получим

$$\|x - z_n\| = \sup_{\frac{k-1}{n} < t \leq \frac{k}{n}} \left| x(t) - x\left(\frac{k}{n}\right) \right| < \varepsilon.$$

Следовательно, $z_n(t) \rightarrow x(t)$ (по метрике пространства C). Имеем

$$F(z_n) = \sum_{k=1}^n x\left(\frac{k}{n}\right) \left[g\left(\frac{k}{n}\right) - g\left(\frac{k-1}{n}\right) \right].$$

А это есть ни что иное, как интегральная сумма для интеграла Римана–Стильтьеса. Так как $g(t)$ — функция, имеющая ограниченную вариацию, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x\left(\frac{k}{n}\right) \left[g\left(\frac{k}{n}\right) - g\left(\frac{k-1}{n}\right) \right] = \int_0^1 x(t) dg(t).$$

С другой стороны, в силу непрерывности функционала F имеем

$$z_n \rightarrow x(t) \Rightarrow F(z_n) \rightarrow F(x) = f(x), \quad \forall x \in C[0,1].$$

Итак,

$$f(x) = \int_0^1 x(t) dg(t). \quad (3.76)$$

Из (3.76) следует, что $|f(x)| \leq \|x\| \text{var}(g)$ на $[0,1]$. Таким образом,

$$\|f\| \leq \text{var}_{[0,1]}(g).$$

Неравенство противоположного знака содержится в (3.75). Следовательно,

$$\|f\| = \text{var}_{[0,1]}(g).$$

Теорема доказана.

Очевидно и обратно, для произвольной функции ограниченной вариации $h(t)$, такой что $h(0) = 0$ функционал

$$\varphi(x) = \int_0^1 x(t) dh(t)$$

линейный и ограниченный.

Обозначим через BV_0 линейное нормированное пространство функций, ограниченной вариации на $[0,1]$, удовлетворяющих условию $h(0) = 0$ с естественными линейными операциями и нормой

$$\|h\| = \int_0^1 |h(t)| dt.$$

По сказанному выше между элементами $(C[0,1])^*$ и BV_0 можно установить взаимно-однозначное соответствие с сохранением нормы, поэтому их можно отождествить:

$$(C[0,1])^* = BV_0.$$

Отсюда следует, что BV_0 — полное пространство.

3.10. Проблема моментов и некоторые приложения

Пусть X — линейное нормированное пространство и x_1, x_2, \dots, x_n — линейно независимые элементы в нем. Задача об определении заданного на всем X линейного непрерывного функционала $f(x)$ минимальной нормы по условиям (моментным равенствам)

$$f(x_i) = C_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad \sum_{i=1}^n C_i^2 > 0 \quad (3.77)$$

сформулирована М. Г. Крейном и называется L — проблемой моментов [1, 10]. Здесь C_1, C_2, \dots, C_n — заданные числа (моменты).

Имеет место теорема (М. Г. Крейн). Существует линейный непрерывный функционал $F(x)$ минимальной нормы, заданный на всем X и выполняющий условия (3.77). При этом

$$\|F\| = \max_{\lambda} \frac{\left| \sum_{i=1}^n \lambda_i C_i \right|}{\left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right\|} = \frac{1}{\min_{\sum \lambda_i C_i = 1} \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right\|}.$$

Доказательство. Покажем прежде всего, что нижняя грань функции

$$\varphi(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right\| = \|\varphi(\lambda)\|$$

при условии

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i C_i = 1 \quad (3.78)$$

достижима.

Пусть $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_n^0$ — произвольные числа, выполняющие равенство

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^0 C_i = 1.$$

Введем вектор

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i^0 x_i.$$

Очевидно, $x \in L(\{x_i\})$. Тогда

$$\varphi(\lambda) = \left\| x + \sum_{i=1}^n \eta_i x_i \right\|, \quad \eta_i = \lambda_i - \lambda_i^0, \quad \sum_{i=1}^n \eta_i C_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Функция

$$\psi(\eta) = \left\| \sum_{i=1}^n \eta_i x_i \right\| = \psi(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$$

непрерывна по переменным $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$. Действительно,

$$|\psi(\eta) - \psi(\eta')| = \left\| \sum_{i=1}^n \eta_i x_i - \sum_{i=1}^n \eta'_i x_i \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^n (\eta_i - \eta'_i) x_i \right\| \leq \max_i |\eta_i - \eta'_i| \sum_{i=1}^n \|x_i\|.$$

Следовательно, $\psi(\eta)$ достигает своей нижней грани m на замкнутом ограниченном множестве (компакте) G в n -мерном пространстве, образованном пересечением сферы $\sum_{i=1}^n \eta_i^2 = 1$ и плоскости $\sum_{i=1}^n C_i \eta_i = 0$. Итак,

$$\inf_{\eta \in G} \left\| \sum_{i=1}^n \eta_i x_i \right\| = m > 0, \quad \eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n).$$

Выясним, на каком множестве наверняка достигается нижняя грань непрерывной функции $\varphi(\lambda)$. Для этого введем число

$$\rho = \frac{1}{m} \left\{ \|x\| + \inf_{\substack{\lambda \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i C_i = 1}} \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right\| + 1 \right\}.$$

На множестве G_1 , образованном пересечением сферы $\sum_{i=1}^n \eta_i^2 = \rho^2$ и плоскости $\sum_{i=1}^n C_i \eta_i = 0$

нижняя грань функции $\psi(\eta)$ увеличивается в ρ раз:

$$\inf_{\eta \in G_1} \left\| \sum_{i=1}^n \eta_i x_i \right\| = m\rho.$$

Значит, при $\sum_{i=1}^n C_i \eta_i = 0$ и $\sum_{i=1}^n \eta_i^2 > \rho^2$

$$\varphi(\lambda) = \left\| x + \sum_{i=1}^n \eta_i x_i \right\| \geq \left\| \sum_{i=1}^n \eta_i x_i \right\| - \|x\| > m\rho - \|x\| = \inf_{\sum_{i=1}^n \lambda_i C_i = 1} \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right\| + 1,$$

т. е. нижняя грань функции $\varphi(\lambda)$ при наличии условия (3.78) на множестве

$$\left\{ \eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) : \sum_{i=1}^n C_i \eta_i = 0, \sum_{i=1}^n \eta_i^2 > \rho^2 \right\}$$

не достигается. Но тогда она достигается на замкнутом ограниченном множестве в n -мерном пространстве

$$G_* = \left\{ \eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) : \sum_{i=1}^n C_i \eta_i = 0, \sum_{i=1}^n \eta_i^2 \leq \rho^2 \right\}.$$

Итак,

$$\varphi(x) = \left\| x + \sum_{i=1}^n \eta_i x_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right\|$$

при условии (3.78) достигает на G_* свою точную нижнюю грань.

Рассмотрим теперь n -мерное подпространство $L = L(\{x_i\}) \subset X$ и определим на нем линейный непрерывный функционал

$$f(x) = \sum_{i=1}^n C_i \lambda_i, \quad x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i.$$

Имеем

$$\|f\| = \sup_{\lambda_i} \left\| \sum_{i=1}^n C_i \lambda_i \right\| = \max_{\lambda_i} \left\| \sum_{i=1}^n C_i \lambda_i \right\| = \frac{1}{\min_{\sum C_i \lambda_i = 1} \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right\|}. \quad (3.79)$$

В силу теоремы Хана–Банаха $f(x)$ можно продолжить на все X с сохранением нормы. Тогда получим линейный непрерывный функционал $F(x)$, причем

$$\|F\|_X = \|f\|_L, \quad F(x) = f(x), \quad x \in L.$$

В частности,

$$F(x_m) = f(x_m) = C_m.$$

Докажем, наконец, что норма (3.79) является минимальной для линейного непрерывного функционала $F(x)$, выполняющего условия (3.77).

Действительно, пусть $F_*(x)$ — другой линейный непрерывный функционал, определенный на всем X и выполняющий эти условия. Тогда, для любых λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$)

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n C_i \lambda_i \right| &= \left| \sum_{i=1}^n \lambda_i F_*(x_i) \right| = \left| F_* \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right) \right| \leq \|F_*\| \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right\| \Rightarrow \\ \Rightarrow \|F_*\| &\geq \frac{\left| \sum_{i=1}^n C_i \lambda_i \right|}{\left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right\|} \Rightarrow \|F_*\| \geq \sup_{\lambda_i} \frac{\left| \sum_{i=1}^n C_i \lambda_i \right|}{\left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right\|} = \|F\|. \end{aligned}$$

Этим завершается доказательство теоремы М. Г. Крейна.

Пример. Пусть на входе некоторой динамической системы имеют место линейно независимые сигналы $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$. Поставим задачу о построении такого линейного непрерывного функционала $F(x)$ на нормированном пространстве X , который обеспечивал бы к моменту времени $t=T$ на выходе системы заранее заданные сигналы C_1, C_2, \dots, C_n и при этом имел минимальную норму. Таким образом, мы приходим к L — проблеме моментов

$$F(x_k) = C_k, \quad \|F\| \rightarrow \min, \quad \{x_k\} \subset X \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Эта задача решается достаточно просто в пространстве $L^2[0, T]$. Согласно теореме Рисса, произвольный линейный непрерывный функционал в этом пространстве имеет представление

$$F(x) = \int_0^T x(\tau) g(\tau) d\tau,$$

где $g(\tau)$ — элемент из $L^2[0, T]$ и $\|F\| = \|g\|$.

Исходя из теоремы М. Г. Крейна, имеем

$$\|F\| = \max_{\lambda_i} \frac{\left| \sum_{i=1}^n \lambda_i C_i \right|}{\left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right\|} = \frac{\left| \sum_{i=1}^n \lambda_i^* C_i \right|}{\left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i^* x_i \right\|} = \|g\|. \quad (3.80)$$

$$F(x_k) = \int_0^T x_k(\tau) g(\tau) d\tau = C_k \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Отсюда находим

$$\int_0^T g(\tau) \sum_{i=1}^n \lambda_i^* x_i(\tau) d\tau = \|g\| \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i^* x_i \right\|.$$

Очевидно, это равенство выполняется тогда и только тогда, когда

$$g(t) = \text{const} \sum_{i=1}^n \lambda_i^* x_i(t), \quad \text{const} > 0.$$

Так как $\|g\| = \|F\|$, то фигурирующая здесь константа определяется однозначно, а затем находим и сам элемент $g(t)$ при помощи цепочки вычислений

$$g(t) = \|F\| \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i^* x_i(t)}{\left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i^* x_i(t) \right\|} = \frac{\left| \sum_{i=1}^n \lambda_i^* C_i \right|}{\left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i^* x_i \right\|} \sum_{i=1}^n \lambda_i^* x_i(t) = \frac{\left| \sum_{i=1}^n \lambda_i^* C_i \right|}{\left\{ \int_0^T \left| \sum_{i=1}^n \lambda_i^* x_i(t) \right|^2 d\tau \right\}^{1/2}} \sum_{i=1}^n \lambda_i^* x_i(t).$$

Для получения окончательного решения необходимо определить набор чисел λ_i^* ($i = 1, 2, \dots, n$), минимизирующих величину $\left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right\|$ при наличии уравнения связи $\sum_i \lambda_i C_i = 1$.

Эта процедура сводится к задаче аппроксимации в $L^2[0, T]$ следующим образом. Пусть, например, $C_1 \neq 0$. Тогда можно выразить число λ_1 через остальные.

Имеем

$$\varphi(\lambda) = \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right\| = \left\| \frac{x_1}{C_1} - \sum_{i=2}^n \lambda_i \left(\frac{C_i}{C_1} x_1 - x_i \right) \right\|.$$

Вводя обозначения

$$\psi_1(t) = \frac{1}{C_1} x_1(t), \quad \psi_i(t) = \frac{C_i}{C_1} x_1(t) - x_i(t) \quad (i = 2, 3, \dots, n),$$

представим задачу минимизации нормы функционала F в виде

$$\frac{1}{\|F\|} = \min_{\sum_i \lambda_i C_i = 1} \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right\| = \min_{\lambda_i} \left\{ \int_0^T \left[\psi_1(\tau) - \sum_{i=1}^n \lambda_i \psi_i(\tau) \right]^2 d\tau \right\}^{1/2} = \min_{\lambda_i} \varphi(\lambda).$$

Условия $\partial \varphi / \partial \lambda_k = 0$ ($k = 2, 3, \dots, n$) дают

$$\sum_{i=2}^n \lambda_i (\psi_i, \psi_k) = (\psi_1, \psi_k) \quad (k = 2, 3, \dots, n), \tag{3.81}$$

где

$$(\psi_i, \psi_k) = \int_0^T \psi_i(t) \psi_k(t) dt.$$

Поскольку определитель Грама линейно независимой системы $\psi_2(t), \psi_3(t), \dots, \psi_n(t)$ отличен от нуля, получаем единственное решение системы (3.81): $\lambda_i = \lambda_i^*$ ($i = 2, 3, \dots, n$). При этом

$$\lambda_1 = \lambda_1^* = \frac{1}{C_1} - \sum_{i=2}^n \lambda_i^* \frac{C_i}{C_1}.$$

Таким образом, построенный функционал удовлетворяет всем условиям задачи. Пусть, например, $C_1 = 1$, $C_2 = C_3 = \dots = C_n = 0$. Тогда $\lambda_1 = 1$ и мы имеем

$$\frac{1}{\|F\|} = \min_{\lambda} \left\| x_1 - \sum_{i=2}^n \lambda_i x_i \right\| = \left\| x_1 - \sum_{i=2}^n \lambda_i^* x_i \right\| = \left\{ \int_0^T \left| x_1(\tau) - \sum_{i=2}^n \lambda_i^* x_i(\tau) \right|^2 d\tau \right\}^{1/2},$$

Геометрически этот факт означает, что величина $1/\|F\|$ равна расстоянию входного сигнала $x_1(t)$ до подпространства $L(\{x_i\})$, образованного сигналами x_2, x_3, \dots, x_n .

Сопряженный оператор. Пусть X, Y — линейные нормированные пространства и линейный непрерывный оператор A задан на всем X со значениями в пространстве Y . Рассмотрим произвольный элемент $\varphi \in Y^*$, определенный на элементах $y = Ax$. Имеем

$$\varphi(y) = \varphi(Ax) = f(x); \quad \forall x \in X. \quad (3.82)$$

Функционал $f(x)$ — линейный и непрерывный. Действительно,

$$\begin{aligned} f(x_1 + x_2) &= \varphi[A(x_1 + x_2)] = \varphi(Ax_1 + Ax_2) = \varphi(Ax_1) + f(Ax_2) = \\ &= f(\lambda x) = \varphi[A(\lambda x)] = \varphi(\lambda Ax) = \lambda \varphi(Ax) = \lambda f(x), \\ |f(x)| &= |\varphi(Ax)| \leq \|\varphi\| \|Ax\| \leq \|\varphi\| \|A\| \|x\|. \end{aligned}$$

Таким образом, задан оператор, переводящий любой элемент $\varphi \in Y^*$ в элемент $f \in X^*$. Этот оператор называется сопряженным к оператору A и обозначается A^* . Соответствие (3.82) записывается так:

$$f = A^* \varphi.$$

Теорема. Сопряженный оператор $A^* : Y^* \rightarrow X^*$ — линейный и непрерывный, причем $\|A^*\| = \|A\|$.

Доказательство. В самом деле, пусть φ_1, φ_2 — произвольные элементы из Y^* . Тогда

$$\varphi_1(y) = \varphi_1(Ax) = f_1(x) \Rightarrow f_1 = A^* \varphi_1,$$

$$\varphi_2(y) = \varphi_2(Ax) = f_2(x) \Rightarrow f_2 = A^* \varphi_2,$$

$$(\varphi_1 + \varphi_2)y = \varphi_1(y) + \varphi_2(y) = f_1(x) + f_2(x) = (f_1 + f_2)x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_1 + f_2 = A^*(\varphi_1 + \varphi_2) \Rightarrow A^*(\varphi_1 + \varphi_2) = A^*\varphi_1 + A^*\varphi_2,$$

т. е. A^* — аддитивный оператор. Однородность его вытекает из следующих соотношений для любого функционала $\lambda \varphi \in Y^*$

$$(\lambda \varphi)y = (\lambda \varphi)(Ax) = \lambda f(x) \Rightarrow A^*(\lambda \varphi) = \lambda f = \lambda A^* \varphi.$$

Теперь покажем, что A^* — непрерывный оператор и $\|A\| = \|A^*\|$. Имеем

$$|f(x)| = |(A^* \varphi)x| = |\varphi(Ax)| \leq \|A\| \|\varphi\| \|x\| \Rightarrow \|A^* \varphi\| \leq \|A\| \|\varphi\| \Rightarrow \|A^*\| \leq \|A\|.$$

Следовательно, A^* — линейный ограниченный оператор.

Неравенство противоположного знака получим, используя первое следствие из теоремы Хана–Банаха, согласно которому существует элемент $\Phi \in Y^*$, такой что для любого $x_0 \in X$, отличного от нуля: $\Phi(y_0) = \Phi(Ax_0) = \|Ax_0\|$ и $\|\Phi\| = 1$. Имеем отсюда

$$\Phi(y_0) = \|y_0\| = \|Ax_0\| = f(x_0) = (A^*\Phi)x_0 \Rightarrow \|Ax_0\| \leq \|A^*\| \|\Phi\| \|x_0\| = \|A^*\| \|x_0\| \Rightarrow \|A\| \leq \|A^*\|.$$

Таким образом, $\|A^*\| = \|A\|$ и теорема доказана.

Замечание 1. В проведенных выше рассуждениях было выяснено:

1. Если $\varphi \in Y^*$ и $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, то $f(x) = \varphi(Ax)$ — линейный ограниченный функционал, определенный на всем X , т. е. $f \in X^*$.
2. Если $f \in X^*$, $\varphi \in Y^*$, то $A^*: Y^* \rightarrow X^*$ — линейный ограниченный оператор ($A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$). Дело обстоит не так просто, если $A: X \rightarrow Y$ — линейный, но неограниченный оператор.

Замечание 2. Учитывая введенное выше обозначение функционала $f(x) = \langle x, f \rangle$, можно представить связь между операторами A и A^* в виде

$$\langle Ax, \varphi \rangle = \langle x, A^*\varphi \rangle, \quad (3.83)$$

особенно полезном при описании сопряженного оператора в гильбертовом пространстве H . В этом случае соотношение (3.83) записывается так:

$$(Ax, \varphi) = (x, A^*\varphi).$$

Имеют место следующие свойства сопряженных операторов:

- a) $(A+B)^* = A^* + B^*$, $\forall A, B \in \mathcal{L}(X, Y)$;
- б) $(\lambda A)^* = \lambda A^*$;
- в) $\theta^* = \theta$, $I^* = I$, ($X = Y$);
- г) $(AB)^* = B^*A^*$, ($X = Y$).

Доказательство.

а) Имеем

$$\begin{aligned} \varphi[(A+B)(x)] &= \varphi(Ax+Bx) = \varphi(Ax)+\varphi(Bx) = f_A(x)+f_B(x) = \\ &= (A^*\varphi)x+(B^*\varphi)x = [(A^*+B^*)\varphi](x) \Rightarrow (A+B)^*\varphi = \\ &= (A^*+B^*)\varphi \Rightarrow (A+B)^* = A^* + B^*. \end{aligned}$$

$$\text{б) } \varphi[(\lambda A)x] = \lambda\varphi(Ax) = \lambda f(x) = \lambda(A^*\varphi)x \Rightarrow (\lambda A)^*\varphi = (\lambda A^*)\varphi \Rightarrow (\lambda A)^* = \lambda A^*.$$

в) Пусть $A = \theta$, тогда $\langle Ax, \varphi \rangle = 0$, что означает: $\langle x, A^*\varphi \rangle = \langle x, f \rangle = 0$. Если бы $A^* \neq \theta$, то в силу произвольности $\varphi \in Y^*$ отсюда следовало бы, что $f = A^*\varphi \neq 0$. Значит, $A^* = \theta$. Итак, $\theta^* = \theta$.

Пусть теперь $A = I$, $X = Y$. Тогда $\forall x \in X$

$$\varphi(Ix) = \varphi(x) = f(x) = (I^* \varphi)x \Rightarrow \varphi = I^* \varphi \Rightarrow I^* = I.$$

г) Пусть $X = Y$ и $A, B : X \rightarrow X$. Имеем

$$\langle (AB)x, \varphi \rangle = \langle A(Bx), \varphi \rangle = \langle Bx, A^* \varphi \rangle = \langle x, (B^* A^*) \varphi \rangle.$$

С другой стороны,

$$\langle (AB)x, \varphi \rangle = \langle x, (AB)^* \varphi \rangle.$$

Сравнивая, находим

$$\langle x, (AB)^* \varphi \rangle = \langle x, (B^* A^*) \varphi \rangle \Rightarrow (AB)^* = B^* A^*.$$

Примеры ограниченных сопряженных операторов.

1. Сопряженный оператор в n -мерном нормированном пространстве X . Пусть A — линейный оператор в X . Тогда в некотором базисе он задается матрицей $\|a_{ij}\|$ размером $n \times n$. Иными словами, если $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X$ и $y = Ax = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in X$, то

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Для произвольного линейного функционала $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) \in X^*$ имеем

$$\begin{aligned} \varphi(Ax) &= \varphi(y) = \sum_{i=1}^n y_i \varphi_i = \sum_{i=1}^n \varphi_i \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = \sum_{j=1}^n x_j \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} \varphi_i \right) = \\ &= f(x) = \sum_{j=1}^n x_j f_j, \end{aligned}$$

где $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) \in X^*$.

Отсюда получаем

$$f_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} \varphi_i \quad (j=1, 2, \dots, n),$$

т. е. $f = A^* \varphi$ и матрица оператора A^* :

$$A^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = A',$$

где A' — матрица, транспонированная по отношению к A .

2. Пусть $X = E^n$, где E^n — унитарное n -мерное пространство и $A \in \mathcal{L}(X)$. В этом случае $\forall \varphi \in X^* = E^n$:

$$\begin{aligned}\varphi(Ax) &= (Ax, \varphi) = \sum_{i=1}^n \bar{\varphi}_i \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = f(x) = (x, f) = \\ &= \sum_{j=1}^n x_j \bar{f}_j \Rightarrow \bar{f}_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} \bar{\varphi}_i \Rightarrow f_j = \sum_{i=1}^n \bar{a}_{ij} \varphi_i \quad (j=1, 2, \dots, n).\end{aligned}$$

Так как $f = A^* \varphi$, то матрица оператора A^* имеет вид

$$A^* = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{21} & \dots & \bar{a}_{n1} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & \dots & \bar{a}_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{a}_{1n} & \bar{a}_{2n} & \dots & \bar{a}_{nn} \end{bmatrix} = \bar{A}'.$$

3. Пусть $X = Y = L^2[a, b]$ и оператор Фредгольма A задан формулой

$$(Ax)(t) = \int_a^b K(t, \tau) x(\tau) d\tau,$$

где $K(t, \tau)$ — функция непрерывная в квадрате $[a, b] \times [a, b]$. Произвольная функция $x(t) \in L^2[a, b]$ отображается оператором A в функцию $y(t) = (Ax)(t) \in L^2[a, b]$. Действительно,

$$\int_a^b |y(t)|^2 dt = \int_a^b dt \left| \int_a^b K(t, \tau) x(\tau) d\tau \right|^2 \leq \int_a^b |x(\tau)|^2 d\tau \int_a^b \int_a^b |K(t, \tau)|^2 dt d\tau < \infty.$$

Следовательно, $A : L^2[a, b] \rightarrow L^2[a, b]$. Для произвольного элемента $\varphi \in (L^2[a, b])^* = L^2[a, b]$ имеем

$$\begin{aligned}\varphi(Ax) &= (Ax, \varphi) = \int_a^b \overline{\varphi(t)} dt \int_a^b K(t, \tau) x(\tau) d\tau = f(x) = (x, f) = \\ &= \int_a^b x(\tau) \overline{f(\tau)} d\tau \Rightarrow \int_a^b x(\tau) d\tau \int_a^b \overline{\varphi(t)} K(t, \tau) dt = \int_a^b x(\tau) \overline{f(\tau)} d\tau \Rightarrow f(t) = \\ &= \int_a^b \overline{\varphi(\tau)} \overline{K(\tau, t)} d\tau.\end{aligned}$$

Так как $f = A^* \varphi$, получаем

$$(A^* \varphi)(t) = \int_a^b \overline{\varphi(\tau)} \overline{K(\tau, t)} d\tau.$$

Итак, переход от оператора A к сопряженному оператору A^* заключается в замене ядра $K(t, \tau)$ на транспонированное к нему, комплексно-сопряженное ядро $\overline{K(\tau, t)}$. Если $L^2[a, b]$ — действительное функциональное гильбертово пространство, то знак комплексного сопряжения можно отбросить.

3.11. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве H

Пусть A линейный ограниченный оператор $A: D_A \rightarrow H$, область определения которого D_A является всюду плотным множеством в H .

Оператор A называется самосопряженным (эрмитовым в комплексном случае), если $A^* = A$.

Согласно определению сопряженного оператора, в H имеет место (билинейное) соотношение для эрмитового оператора

$$(Ax, y) = (x, Ay), \forall x, y \in D_A.$$

Замечание. Линейный оператор A , для которого выполняется это билинейное соотношение, называется симметрическим оператором, однако из симметричности линейного оператора еще не следует его ограниченность, т. е. самосопряженность.

Из примеров сопряженных операторов, рассмотренных ранее, следует:

1. Для эрмитовости (самосопряженности) оператора $A \in \mathcal{L}(E^n)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия: $A = \overline{A}'$ ($A = A'$), где A — матрица, представляющая данный оператор. Таким образом, матрица эрмитового (самосопряженного) оператора должна быть эрмитовой (симметричной).

2. Для эрмитовости (самосопряженности) интегрального оператора Фредгольма необходимо и достаточно наличие равенств: $K(t, \tau) = \overline{K(\tau, t)}$ ($K(t, \tau) = K(\tau, t)$).

Имеют место следующие свойства самосопряженных операторов.

Теорема 1. Если A, B — самосопряженные (эрмитовы) операторы в H , то их линейная комбинация $\alpha A + \beta B$, где α, β — любые действительные (комплексные) числа, также самосопряженный оператор.

Доказательство. Согласно определению самосопряженного оператора: $(Ax, y) = (x, Ay)$ и $(Bx, y) = (x, By)$ для произвольных x и y из H . Имеем цепочку равенств

$$\begin{aligned} ((\alpha A + \beta B)x, y) &= ((\alpha A)x + (\beta B)x, y) = \alpha(Ax, y) + \beta(Bx, y) = \\ &= \alpha(x, Ay) + \beta(x, By) = (x, \alpha(Ay) + \beta(By)) = (x, (\alpha A + \beta B)y) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\alpha A + \beta B)^* = \alpha A + \beta B, \end{aligned}$$

что и требовалось.

Теорема 2. Пусть A, B — эрмитовы операторы в H . Оператор AB будет эрмитовым тогда и только тогда, когда $AB = BA$. В самом деле, из равенства $(AB)^* = B^*A^* \Rightarrow \overline{(AB)} = BA$. Поэтому для эрмитовости AB необходимо и достаточно, чтобы $BA = AB$.

Теорема 3. Для эрмитового оператора A число (Ax, x) — вещественное для любого $x \in H$. В самом деле, $\forall x \in H$:

$$(Ax, x) = (x, Ax) = \overline{(Ax, x)} \Rightarrow \operatorname{Im}(Ax, x) = 0.$$

Теорема 4. Если A — эрмитов оператор, то

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |(Ax, x)|.$$

Доказательство. Обозначим

$$C_A = \sup_{\|x\| \leq 1} |(Ax, x)|.$$

Согласно неравенству Коши–Буняковского

$$|(Ax, x)| \leq \|Ax\| \|x\| \leq \|A\| \|x\|^2.$$

При $\|x\| \leq 1$ получаем

$$|(Ax, x)| \leq \|A\| \Rightarrow C_A \leq \|A\|. \quad (3.84)$$

Установим теперь неравенство противоположного знака. Заметим, что для произвольного ненулевого $x \in H$

$$C_A = \sup \left(A \frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|} \right) \geq \left(A \frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|} \right) = \frac{1}{\|x\|^2} |(Ax, x)| \Rightarrow |(Ax, x)| \leq C_A \|x\|^2. \quad (3.85)$$

При $x = 0$ это соотношение также выполняется. Теперь рассмотрим тождества

$$\begin{aligned} (A(x+y), x+y) &= (Ax+Ay, x+y) = (Ax, x) + (Ax, y) + (Ay, x) + \\ &+ (Ay, y) = (Ax, x) + 2\operatorname{Re}(Ax, y) + (Ay, y), \\ (A(x-y), x-y) &= (Ax, x) - 2\operatorname{Re}(Ax, y) + (Ay, y). \end{aligned}$$

Вычитая почленно из первого тождества второе, получаем равенство

$$(A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y) = 4\operatorname{Re}(Ax, y). \quad (3.86)$$

Оценивая правую часть (3.86) по модулю, используя неравенство (3.85) и равенство параллелограмма, находим

$$\begin{aligned} 4|\operatorname{Re}(Ax, y)| &\leq |(A(x+y), x+y)| + |(A(x-y), x-y)| \leq C_A \|x+y\|^2 + \\ &+ C_A \|x-y\|^2 = 2C_A (\|x\|^2 + \|y\|^2). \end{aligned}$$

В частности, при $\|x\| = \|y\| = 1$ имеем

$$|\operatorname{Re}(Ax, y)| \leq C_A. \quad (3.87)$$

В неравенстве (3.87) x, y — произвольные элементы единичной сферы. Пусть x таков, что $\|x\| = 1$ и $Ax \neq 0$, а $y = Ax/\|Ax\|$, тогда

$$\left| \operatorname{Re} \left(Ax, \frac{Ax}{\|Ax\|} \right) \right| = \|Ax\|$$

и оценка (3.87) дает

$$\|Ax\| \leq C_A \Rightarrow \|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \leq C_A. \quad (3.88)$$

Из (3.84) и (3.88) следует: $C_A = \|A\|$, что и требовалось.

Самосопряженный оператор $A \in \mathcal{L}(H)$ называется положительным, если имеет место неравенство

$$(Ax, x) \geq 0, \quad \forall x \in D_A,$$

причем $(Ax, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Положительный оператор $A \in \mathcal{L}(H)$ называется положительно определенным при выполнении неравенства

$$(Ax, x) \geq \gamma^2 \|x\|^2, \quad \forall x \in D_A, \quad \gamma \neq 0.$$

Согласно определению, любой положительно определенный оператор является самосопряженным положительным оператором.

Ядро положительно определенного оператора $\ker A = \{0\}$. Это означает, что уравнение

$$Ax = y \quad (3.89)$$

имеет не более одного решения.

В самом деле, предположив, что уравнение (3.89) имеет два решения u и v мы для разности $u - v$ получим однородное уравнение

$$A(u - v) = 0.$$

Отсюда следует

$$(A(u - v), u - v) = 0 \Rightarrow u - v = 0.$$

Пример. Пусть A — дифференциальный оператор второго порядка

$$A = -\frac{d^2}{dx^2},$$

заданный на множестве D_A дважды непрерывно дифференцируемых на $[0, 1]$ функций, удовлетворяющих однородным граничным условиям

$$y(0) = y(1) = 0.$$

Множество D_A — линейное многообразие в гильбертовом пространстве $L^2[0,1]$ функций, суммируемых с квадратом на $[0,1]$, всюду плотное в $L^2[0,1]$.

Оператор A симметричен. В самом деле, пусть

$$\begin{aligned} -y_k'' &= f(x), \quad 0 < x < 1, \\ y_k(0) &= y_k(1) = 0 \quad (k = 1, 2). \end{aligned} \tag{3.90}$$

Тогда

$$(Ay_1, y_2) = - \int_0^1 y_1'' y_2 dx = -y_1' y_2 \Big|_0^1 + \int_0^1 y_1' y_2' dx = - \int_0^1 y_1 y_2'' dx = (y_1, Ay_2). \tag{3.91}$$

Далее, положив в (3.91) $y_1 = y_2 = y$, получаем

$$(Ay, y) = \int_0^1 \{y'(x)\}^2 dx \geq 0.$$

Отсюда и из граничных условий (3.90) вытекает, что A — положительно определенный оператор. В самом деле,

$$y(x) = \int_0^x y'(t) dt.$$

Неравенство Коши–Буняковского дает

$$y^2(x) = \left\{ \int_0^x y'(t) dt \right\}^2 \leq \left\{ \int_0^1 y'(t) dt \right\}^2 \leq \int_0^1 \{y'(x)\}^2 dx \int_0^1 dx = \int_0^1 \{y'(x)\}^2 dx.$$

Интегрируя последнее неравенство по x в пределах от 0 до 1, получаем

$$\int_0^1 y^2(x) dx \leq \int_0^1 dx \int_0^1 \{y'(t)\}^2 dt \Rightarrow \gamma^2 \|y\|^2 \leq (Ay, y),$$

причем постоянная $\gamma = 1$.

Таким образом, обыкновенный дифференциальный оператор

$$A = -\frac{d^2}{dx^2}$$

симметричный и положительно определенный.

Распространим теперь полученный результат на многомерное пространство R^n . Пусть S — граница области $\Omega \subset R^n$, в которой ищется решение неоднородного уравнения Лапласа при однородном краевом условии $u|_S = 0$. Область определения оператора Δ состоит из функций дважды непрерывно дифференцируемых в области $\bar{\Omega}$. В этих условиях оператор $-\Delta$ симметричный и положительно определенный.

Действительно, в силу формулы Грина и однородности краевого условия, имеем

$$\begin{aligned} (-\Delta u, u) &= - \iint_{\Omega} u \Delta u d\Omega = \iint_{\Omega} (\operatorname{grad} u)^2 d\Omega - \iint_S u \frac{du}{dn} dS = \\ &= \iint_{\Omega} (\operatorname{grad} u)^2 d\Omega = (u, -\Delta u). \end{aligned} \tag{3.92}$$

Отсюда следует симметричность и положительность оператора $-\Delta$. Наконец, положительная определенность этого оператора вытекает из равенства (3.92) и неравенства Фридрихса (3.56). Таким образом, для задачи Дирихле

$$(-\Delta u, u) \geq \gamma^2 \|u\|^2, \quad \gamma \neq 0.$$

Рассмотрим теперь задачу Неймана при однородном краевом условии $\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S = 0$. Соотношение (3.92) здесь также будет иметь место, однако из равенства

$$\int_{\Omega} (\operatorname{grad} u)^2 d\Omega = 0$$

следует только то, что $u = c = \operatorname{const}$. Значит, в этих условиях оператор $-\Delta$ будет симметрическим, но не положительным.

Известно [13, 21], что задача Неймана

$$-\Delta u = f, \quad (3.93)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S = 0,$$

вообще говоря, неразрешима. Условием ее разрешимости является равенство

$$\int_{\Omega} f(x) d\Omega = 0, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_m), \quad d\Omega = dx_1 dx_2 \dots dx_m. \quad (3.94)$$

В этом случае решение находится с точностью до произвольной постоянной, что дает возможность сужить область определения оператора $-\Delta u$, подчинив решение некоторому дополнительному условию.

Положим, например [16],

$$\int_{\Omega} u d\Omega = 0. \quad (3.95)$$

Тогда, подставляя $u = c$ в это условие, получаем $u = 0$ в Ω . Следовательно, при выполнении равенства (3.95), $-\Delta$ — симметричный оператор. Задача Неймана (3.93) однозначно разрешима при выполнении условий (3.94), (3.95). Положительная определенность оператора в задаче Неймана доказывается с помощью неравенства Пуанкаре (3.57).

Энергетическое пространство. В вариационных методах существенную роль играет понятие энергетического пространства. Пусть A — положительно определенный оператор и D_A — область его определения. Введем в D_A новое скалярное произведение по формуле

$$(u, v)_A = (Au, v), \quad \forall u, v \in D_A. \quad (3.96)$$

Легко видеть, что скалярное произведение (3.96) удовлетворяет аксиомам (3.15). Построенное таким образом гильбертово пространство на множестве D_A называется энергетическим пространством, обозначим его через H_A .

Замечание. Если построенное пространство оказалось неполным относительно метрики

$$\|u\|_A = \sqrt{(Au, u)},$$

то оно всегда может быть пополнено всеми предельными элементами. Поэтому энергетическое пространство H_A считаем полным, т. е. гильбертовым.

Из положительной определенности оператора A вытекает неравенство

$$\|u\| \leq \frac{1}{\gamma} \|u\|_A. \quad (3.97)$$

Это означает, что из сходимости последовательности в пространстве H_A (т. е. в энергетической метрике) следует сходимость этой последовательности в исходном пространстве. Здесь надо иметь в виду, что между элементами пространства H и построенного по формуле (3.96) энергетического пространства H_A имеется взаимно-однозначное соответствие.

В гильбертовом пространстве H рассмотрим операторное уравнение

$$Au = f, \quad (3.98)$$

где A — положительный оператор с областью определения D_A . Покажем, что в этих условиях уравнение (3.98) имеет не более одного решения в D_A .

Допустим, что имеется два решения u_1 и u_2 , так что

$$Au_1 = f, \quad Au_2 = f.$$

Тогда в силу положительности, а значит, и линейности оператора A , выводим

$$A(u_1 - u_2) = 0 \Rightarrow (A(u_1 - u_2), (u_1 - u_2)) = 0 \Rightarrow u_1 = u_2.$$

Под функционалом энергии понимают квадратичный функционал вида

$$I(u) = \|u\|_A^2 - 2(f, u). \quad (3.99)$$

Первое слагаемое в (3.99) представляет собой квадратичный функционал

$$\|u\|_A^2 = (Au, u),$$

второе — линейный функционал.

Имеет место утверждение. Операторное уравнение (3.98) с положительным оператором и задача о минимизации функционала (3.99) эквивалентны в том смысле, что если $u_0 \in D_A$ есть решение уравнения (3.98), то на этом элементе функционал (3.99) достигает минимума, и обратно, если $\min I(u) = I(u_0)$, то $u_0 \in D_A$ есть решение уравнения (3.98).

В самом деле, пусть u_0 — решение уравнения (3.98), т. е. $Au_0 = f$. Имеем цепочку равенств

$$\begin{aligned} I(u) &= \|u\|_A^2 - 2(f, u) = \|u\|_A^2 - 2(Au_0, u) = \|u\|_A^2 - 2(u_0, u)_A + \|u_0\|_A^2 - \|u_0\|_A^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow I(u) = \|u - u_0\|_A^2 - \|u_0\|_A^2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\min I(u) = -\|u_0\|_A^2. \quad (3.100)$$

Обратно, пусть функционал (3.99) достигает своего минимального значения на элементе $u_0 \in D_A$. Это означает, что

$$I(u_0 + tv) \geq I(u_0), \quad \forall v \in D_A, \quad \forall t \in R. \quad (3.101)$$

Тогда, используя симметричность положительного оператора и свойства скалярного произведения, запишем

$$\begin{aligned} I(u_0 + tv) &= (A(u_0 + tv), u_0 + tv) - 2(f, u_0 + tv) = \\ &= (Au_0, u_0) + 2t(Av, u_0) + t^2(Av, v) - 2(f, u_0) - 2t(f, v). \end{aligned} \quad (3.102)$$

Квадратичный трехчлен (3.102) при фиксированных u_0, v и f имеет согласно условию (3.101) минимум в точке $t = 0$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I(u_0 + tv) \Big|_{t=0} &= 2(Av, u_0) - 2(f, v) = 2(Au_0, v) - 2(f, v) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (Au_0 - f, v) = 0, \quad \forall v \in D_A. \end{aligned}$$

Таким образом, элемент $Au_0 - f$ ортогонален множеству D_A , всюду плотному в H . Но тогда в D_A существует последовательность $\{v_n\}$, сходящаяся к элементу $Au_0 - f$, и в силу непрерывности скалярного произведения получаем

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} (Au_0 - f, v_n) = (Au_0 - f, Au_0 - f) \Rightarrow Au_0 - f = 0,$$

что и требовалось.

Замечание. В задачах прикладного характера встречаются ситуации, когда функционал энергии (3.99) достигает минимума на элементе $u_* \notin D_A$ и, стало быть, решения уравнения (3.98) в обычном смысле не существует ($f \in R_A$).

На этот счет имеет место теорема. Если область определения положительно определенного оператора A (множество D_A) всюду плотно в энергетическом пространстве H_A , то функционал энергии (3.99) достигает минимума на элементе $u_* \in H_A$, однозначно определяемом равенством

$$(u_*, u)_A = (f, u), \quad u \in H_A, \quad f \in H. \quad (3.103)$$

В самом деле, в силу линейности и ограниченности в H функционала (f, u) имеем

$$|(f, u)| \leq \|f\| \|u\|, \quad \forall f \in H, \quad u \in H.$$

Если теперь сузим этот функционал на энергетическое пространство H_A и воспользуемся неравенством (3.97), то получим

$$|(f, u)| \leq \frac{1}{\gamma} \|f\| \|u\|_A, \quad u \in H_A.$$

Следовательно, функционал (f, u) — ограниченный линейный функционал в H_A , но тогда по теореме Ф. Рисса существует элемент $u_* \in H_A$, однозначно определяемый функционалом f , для которого справедливо (3.103).

Имеем в силу (3.103)

$$I(u) = \|u\|_A^2 - 2(f, u) = \|u\|_A^2 - 2(u_*, u)_A = \|u - u_*\|_A^2.$$

Отсюда следует, что функционал энергии достигает минимума при $u = u_*$ в H_A . Соответственно, u_* является обобщенным решением операторного уравнения (3.98), которое не имеет классического решения в рассматриваемой ситуации.

Пример. Следуя [3], рассмотрим дифференциальное уравнение изгиба балки переменной жесткости $EI(x)$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI(x) \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = q(x), \quad E = \text{const} > 0, \quad I(x) > 0 \quad (0 < x < l) \quad (3.104)$$

с граничными условиями жесткой заделки (рис. 3.14).

$$w(0) = w(l) = 0, \quad w'(0) = w'(l) = 0. \quad (3.105)$$

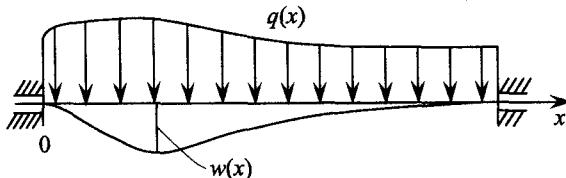


Рис. 3.14. Изгиб жестко защемленной балки поперечной нагрузкой

Ниже будем предполагать, что момент инерции $I(x) \in C^2[0, l]$. Вводя оператор

$$A = \frac{d^2}{dx^2} \left(EI(x) \frac{d^2}{dx^2} \right),$$

представим уравнение (3.104) в виде

$$(Aw)(x) = q(x). \quad (3.106)$$

Оператор A определен на множестве $D_A \subset L^2[0, l]$ функций класса $C^4[0, l]$, удовлетворяющих граничным условиям (3.105). Множество D_A — линейное многообразие, плотное в $L^2[0, l]$. Линейный оператор A симметрический. В самом деле, $\forall u, v \in D_A$ имеем цепочку равенств

$$\begin{aligned} (Au, v) &= \int_0^l (EIu'')'' v dx = (EIu'')' v \Big|_0^l - \int_0^l (EIu'')' v' dx = - \int_0^l (EIu'')' v' dx = \\ &= -EIu''v' \Big|_0^l + \int_0^l EIu''v'' dx = \int_0^l EIu''v'' dx = u'(Elv'') \Big|_0^l - \int_0^l u'(Elv'')' dx = \\ &= -u(Elv'')' \Big|_0^l + \int_0^l u(Elv'')'' dx = (u, Av). \end{aligned}$$

Положительность оператора A следует из неравенства

$$(Au, u) = \int_0^l EI(x)(u'')^2 dx \geq 0, \quad u \in D_A.$$

Из равенства $(Au, u) = 0 \Rightarrow u'' = 0$, т. е. $u(x) = Ax + B$. А из граничных условий (3.105) следует: $A = B = 0$. Значит, $(Au, u) = 0 \Leftrightarrow u \equiv 0$.

Пусть $w_0(x) \in D_A$ — решение уравнения (3.106). Тогда функция $w_0(x)$ минимизирует функционал энергии (3.99), который в нашем случае имеет вид

$$\|w\|_A^2 - 2(q, w) = \int_0^l \{EI(x)(w'')^2 - 2q(x)w(x)\} dx = Lw. \quad (3.107)$$

Согласно общей теории, минимум функционала Lw достигается на решении уравнения (3.106) $w_0(x) \in D_A$ и равен $-\|w_0\|_A^2$. Это можно показать и непосредственно. Имеем, учитывая предыдущие выкладки,

$$(Aw_0, w) = \int_0^l EI w_0'' w'' dx = \int_0^l qwdx, \quad w_0 \in D_A.$$

Тогда

$$Lw = \int_0^l EI(w'')^2 dx - 2 \int_0^l EI w_0'' w'' dx = \int_0^l EI(w'' - w_0'')^2 dx - \int_0^l EI(w_0'')^2 dx.$$

Отсюда следует, что минимум достигается при $w = w_0$ (учитываются граничные условия (3.105)), причем

$$\min Lw = - \int_0^l EI(w_0'')^2 dx = -(Aw_0, w_0) = -\|w_0\|_A^2.$$

Итак, решение уравнения (3.104) минимизирует интеграл энергии (3.107). И обратно, согласно общей теории, элемент энергетического пространства H_A , минимизирующий функционал энергии (3.107), является решением операторного уравнения (3.106).

3.12. Матричное представление сопряженного оператора в пространстве с базисом

Пусть X — банахово пространство с базисом $\{e_k\}$ и $A: X \rightarrow X$ — линейный ограниченный оператор. Произвольный элемент $x \in X$ представим в виде

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)}, \quad x^{(n)} = \sum_{k=1}^n \xi_k e_k.$$

Тогда

$$y = Ax = A \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} Ax^{(n)} = \lim \left(A \sum_{k=1}^n \xi_k e_k \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \xi_k Ae_k.$$

Поскольку $Ae_k \in X$, то этот элемент однозначно представим в виде

$$Ae_k = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ki} e_i.$$

Отсюда

$$y = Ax = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \xi_k \sum_{i=1}^{\infty} a_{ki} e_i.$$

По следствию 6 из теоремы Хана–Банаха существует линейно независимая система $\{f_i\} \subset X^*$, биортогональная базисной системе $\{e_i\} \subset X$. Так как $y \in X$, имеем цепочку соотношений

$$\begin{aligned} y &= \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i e_i \Rightarrow f_m(y) = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i f_m(e_i) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \eta_m = f_m \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \xi_k \sum_{i=1}^{\infty} a_{ki} e_i \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} f_m \left\{ \sum_{k=1}^n \xi_k \sum_{i=1}^{\infty} a_{ki} e_i \right\} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \xi_k \sum_{i=1}^{\infty} a_{ki} f_m(e_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \xi_k a_{km}. \end{aligned}$$

Итак,

$$\eta_m = \sum_{k=1}^{\infty} a_{km} \xi_k \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (3.108)$$

Последнее означает, что оператор A (в базисе e_i) однозначно представим бесконечной матрицей $\|a_{km}\|$ в том смысле, что координаты вектора $y = Ax$ в этом базисе вполне определяются равенствами (3.108).

Для построения сопряженного оператора A^* введем в банаевом пространстве X с базисом $\{e_k\}$ функционалы $f_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots$) следующим образом. Для произвольного

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i \in X$$

положим: $f_k(x) = \xi_k$.

Функционалы $f_k(x)$ — аддитивны и однородны, т. е. линейны. Далее, если

$$x' = \sum_{i=1}^{\infty} \xi'_i e_i \in X, \quad |\xi'_i - \xi_i| < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \dots),$$

то

$$|f_k(x') - f_k(x)| = |\xi'_k - \xi_k| < \varepsilon.$$

Таким образом, $f_k(x)$ — линейные непрерывные функционалы, определенные на всем X . В частности, при $x = e_m$ ($\xi_m = 1, \xi_i = 0 (i \neq m)$) имеем

$$f_k(e_m) = \delta_{km} \quad (k, m = 1, 2, \dots).$$

Построенные элементы $f_k \in X^*$ дают пример биортогональной базисной системы $\{e_k\} \subset X$. Учитывая определение функционала f_k , имеем представление для $x \in X$

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) e_i.$$

Отсюда

$$f(x) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f_i(x) e_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f_i(x) f(e_i) = \sum_{i=1}^{\infty} d_i f_i(x) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} d_i f_i\right)(x),$$

где $d_i = f(e_i)$. Поскольку элемент $x \in X$ произволен, получаем представление любого $f \in X^*$:

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} d_i f_i. \quad (3.109)$$

Система $\{f_i\} \subset X^*$ линейно независима. В самом деле, имеем

$$\sum_{i=1}^{\infty} d_i f_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} d_i f_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} d_i \xi_i = 0, \quad \forall x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i \in X.$$

Положив здесь $x = e_k$, получим: $d_k = 0$ ($k = 1, 2, \dots$). Итак, система $\{f_i\}$ образует базис в X^* .

Возвращаясь к исходной задаче о матричном представлении сопряженного оператора A^* , будем исходить из определения

$$\varphi(Ax) = f(x) = (A^* \varphi)(x), \quad A: X \rightarrow X, \quad A^*: X^* \rightarrow X^*,$$

$$\varphi, f \in X^*, \quad x \in X.$$

Представим функционалы f и φ в виде

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} d_i f_i, \quad \varphi = \sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i, \quad d_i = f(e_i), \quad c_i = \varphi(e_i).$$

Мы имеем

$$\varphi(Ax) = \varphi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \xi_k \sum_{i=1}^{\infty} a_{ki} e_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \xi_k \varphi\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ki} e_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \xi_k \sum_{i=1}^{\infty} a_{ki} c_i.$$

С другой стороны,

$$f(x) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} d_i f_i\right)x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n d_k f_k(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n d_k \xi_k = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k d_k.$$

В самом деле, в силу сходимости ряда (3.108) в X :

$$\left| \left(\sum_{k=1}^{\infty} d_k f_k \right)x - \sum_{k=1}^n d_k f_k(x) \right| \leq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} d_k f_k - \sum_{k=1}^n d_k f_k \right\| \|x\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Таким образом, для любого $x \in X$ приходим к равенству

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k d_k = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ki} c_i \right).$$

При $x = e_j (\xi_j = 1, \xi_k = 0 (k \neq j))$ находим

$$d_j = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ji} c_i \quad (j = 1, 2, \dots). \quad (3.110)$$

Преобразование (3.110) представляет собой координатную реализацию операторного равенства $f = A^* \varphi$ в базисе $\{f_i\}$. Отсюда следует, что сопряженный оператор A^* выражается в этом базисе бесконечной матрицей $\|a_{ji}\|$, транспонированной по отношению к матрице оператора A .

3.13. Уравнения

Многие физические и инженерные задачи сводятся к системам линейных алгебраических, дифференциальных, интегральных уравнений, которые можно представить в абстрактной форме

$$y = Ax,$$

где A — некоторый линейный оператор.

Если существует обратный оператор A^{-1} , то решение (формально) определяется по формуле

$$x = A^{-1}y.$$

Выясним условия, при которых обратный оператор существует.

Обратный оператор. Пусть оператор A отображает взаимно-однозначное множество $D_A \subset X$ на множество $R_A \subset Y$, где X и Y — некоторые функциональные пространства. Это означает, что $\forall x \in D_A$ найдется элемент $y \in R_A$, такой что $y = Ax$ и обратно, $\forall y \in R_A$ определен элемент $x \in D_A : x = A^{-1}y$. Оператор A^{-1} отображает множество R_A на D_A и называется обратным к A . Таким образом, имеем два взаимно обратных соотношения

$$y = Ax, \quad x = A^{-1}y \quad (AD_A = R_A, \quad A^{-1}R_A = D_A).$$

Пример 1. Линейный ограниченный оператор $A : R^n \rightarrow R^n$. Если A — невырожденный оператор, т. е. матрица A этого оператора в каком-либо базисе невырожденная (неособенная), то матрица обратного оператора A^{-1} существует и является обратной к матрице A , причем

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E,$$

где E — единичная матрица n -го порядка.

Пример 2. Пусть оператор $A:C[a,b] \rightarrow C[a,b]$ действует по правилу

$$(Af)(x) = \varphi(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad f(t) \in C[a,b]. \quad (3.111)$$

Очевидно, $\varphi(x)$ непрерывна на $[a,b]$. Таким образом, каждая непрерывная на $[a,b]$ функция переводится в некоторое множество $U \in C[a,b]$. Из (3.111) находим

$$\varphi'(x) = f(x), \quad \varphi(a) = 0.$$

Следовательно, множество U состоит из всех функций класса $C^1[a,b]$, обращающихся в нуль в точке a . Будем считать, что $A:C[a,b] \rightarrow U$. Тогда существует обратный оператор $A^{-1}:U \rightarrow C[a,b]$.

$$(Af)(x) = \varphi(x), \quad (A^{-1}\varphi)(x) = f(x),$$

причем

$$(AA^{-1})u = A(A^{-1}u) = Au' = \int_a^x u'(x) dx = Iu \Rightarrow AA^{-1} = I,$$

$$(A^{-1}A)u = A^{-1}(Au) = A^{-1} \int_a^x u(x) dx = Iu \Rightarrow A^{-1}A = I,$$

где I — тождественный (единичный) оператор.

Пример 3. Пусть $A:C[0,1] \rightarrow C[0,1]$ действует по правилу

$$(Af)(x) = \varphi(x) = \int_0^x f(t) dt + f(x), \quad x \in [0,1] \quad (3.112)$$

Покажем, что существует обратный оператор $A^{-1}:C[0,1] \rightarrow C[0,1]$. Пусть оператор A задан на множестве $U \in C^1[0,1]$, т. е. $f \in C^1[0,1]$. Тогда, в соответствии с (3.112), находим

$$\varphi'(x) = f(x) + f'(x), \quad f(0) = \varphi(0).$$

Решение этого дифференциального уравнения с учетом начального условия дает

$$f(x) = \varphi(x) - \int_0^x e^{t-x} \varphi(t) dt.$$

Итак, каждой функции $\varphi(x) \in U$ ставится в соответствие единственная функция $f(x) \in U$ по правилу

$$f(x) = (B\varphi)(x) = \varphi(x) - \int_0^x e^{t-x} \varphi(t) dt.$$

Покажем, что $B = A^{-1}$.

Имеем

$$(BA)f = B(Af) = B\left(\int_0^x f(t)dt + f(x)\right) = f(x) + \int_0^x f(t)dt -$$

$$-\int_0^{x-t} e^{t-x} f(t) dt - \int_0^{x-t} dt \int_0^t f(t_1) dt_1.$$

Меняем порядок интегрирования в повторном интеграле (рис. 3.15). Это возможно, так как функция $\exp(t-x)f(t)$ непрерывна в области интегрирования. В результате получаем

$$\int_0^x e^{t-x} dt \int_0^t f(t_1) dt_1 = \int_0^x f(t_1) dt_1 \int_{t_1}^x e^{t-x} dt = \int_0^x f(t) dt - \int_0^x e^{t-x} f(t) dt.$$

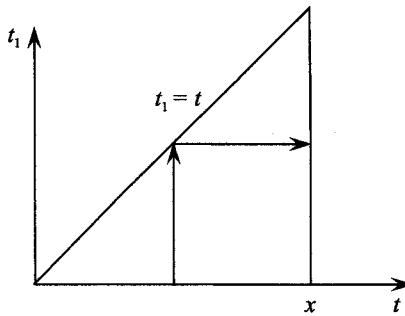


Рис. 3.15. К перемене порядка интегрирования в повторном интеграле

С учетом этого находим окончательно

$$(BA)f = If \Rightarrow BA = I.$$

Аналогичным образом выводим, что $AB = I$. Следовательно, оператор $B = A^{-1}$.

Обратные операторы в линейных и нормированных пространствах. Пусть линейный оператор $A: D_A \rightarrow R_A$, где $D_A \subset X$, $R_A \subset Y$ и X, Y — линейные пространства. Введем ядро оператора A

$$N(A) = \ker A = \{x \in D_A : Ax = 0\}.$$

Оно не пусто, по крайней мере, один элемент $x = 0$ содержится в нем (напомним, что $N(A)$ — линейное многообразие в X).

Имеет место теорема 1. Оператор A переводит D_A в R_A взаимно-однозначно тогда и только тогда, когда $N(A) = \{0\}$, т. е. содержит только элемент 0.

В самом деле, пусть ядро оператора A содержит лишь нулевой элемент из D_A . Допустим, что $y \in R_A$ имеет два прообраза x_1 и $x_2 \in D_A$. Тогда $Ax_1 = y$ и $Ax_2 = y$, откуда $A(x_1 - x_2) = 0$, т. е. $x_1 - x_2 \in N(A) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Обратно, пусть оператор A совершает взаимно-однозначное отображение $D_A \rightarrow R_A$. Необходимо показать, что $N(A) = \{0\}$. Предположим, напротив, что $N(A) \neq \{0\}$. Тог-

да $\exists z \in N(A)$ и $z \neq 0$. Пусть $y \in R_A$, тогда уравнение $Ax = y$ имеет решение $x^* \in D_A$. Очевидно, $A(x^* + z) = Ax^* = y$, причем $x^* + z \neq x^*$. Это означает, что $\forall y \in R_A$ имеет по меньшей мере два прообраза x^* и $x^* + z$. Итак, предположив, что $N(A) \neq \{0\}$, приходим к противоречию. Теорема доказана.

Пусть A линейный оператор с $D_A = X$, $R_A = Y$, где X и Y — линейные нормированные пространства. Тогда:

1) A^{-1} существует и ограничен в том и только в том случае, когда найдется такая постоянная $m > 0$, что

$$m\|x\| \leq \|Ax\|, \quad \forall x \in X. \quad (3.113)$$

2) Если справедливо утверждение 1, то

$$\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{m},$$

т. е. A^{-1} — ограниченный оператор.

3. Если A^{-1} существует, то он линейный оператор.

Доказательство предложения 3.

Пусть $y_1, y_2 \in Y$, тогда $\exists x_1, x_2 \in X$ такие, что

$$y_1 = Ax_1, y_2 = Ax_2 \Rightarrow y_1 + y_2 = A(x_1 + x_2) \Rightarrow A^{-1}(y_1 + y_2) = x_1 + x_2 = A^{-1}y_1 + A^{-1}y_2.$$

Далее,

$$\forall x \in X \text{ и } \forall \lambda \in R: y = Ax \Rightarrow \lambda y = \lambda Ax = A(\lambda x) \Rightarrow A^{-1}(\lambda y) = \lambda x = \lambda A^{-1}y.$$

Таким образом, A^{-1} — аддитивный и однородный, а значит, линейный оператор.

Доказательство предложений 1, 2.

В самом деле, пусть A^{-1} существует и ограничен на Y . Это означает: $\forall y \in Y, \exists C > 0$, такая что

$$\|A^{-1}y\| \leq C\|y\|.$$

Так как $y = Ax$, находим отсюда

$$\|x\| \leq C\|Ax\| \Rightarrow \|Ax\| \geq \frac{1}{C}\|x\|.$$

Обратно, пусть имеет место неравенство (3.113). Тогда если $Ax = 0$, то $x = 0$, т. е. ядро $N(A) = \{0\}$. По теореме 1 существует обратный оператор A^{-1} , отображающий R_A взаимно-однозначно на D_A . Полагая в (3.113): $x = A^{-1}y$, запишем

$$\|A(A^{-1}y)\| \geq m\|A^{-1}y\| \Rightarrow \|A^{-1}y\| \leq \frac{1}{m}\|y\| \Rightarrow \|A^{-1}\| \leq \frac{1}{m}.$$

Будем говорить, что линейный оператор A непрерывно обратим из $R_A = Y$ в $D_A = X$, если существует $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$, т. е. A^{-1} — ограниченный линейный оператор. Если выполняется неравенство (3.113), то оператор A непрерывно обратим из $R_A = Y$ в $D_A = X$.

Для оператора $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ имеет место следующая теорема (С. Банах).

Если A — линейный ограниченный оператор, отображающий взаимно-однозначно банахово пространство X на банахово пространство Y , то существует линейный ограниченный оператор A^{-1} , обратный к A .

Замечание. Рассмотрим уравнение

$$Ax = y, \quad (3.114)$$

где A — непрерывно обратимый оператор. Это уравнение имеет единственное решение $x = A^{-1}y$. Для другой правой части y^* получаем второе решение $x^* = A^{-1}y^*$. Норма разности

$$\|x - x^*\| = \|A^{-1}y - A^{-1}y^*\| = \|A^{-1}(y - y^*)\| \leq \|A^{-1}\| \|y - y^*\|.$$

Значит, малое изменение правой части (входных данных) в смысле метрики пространства Y влечет за собой малое изменение решения (в смысле метрики пространства X). В этом случае говорят, что задача (3.114) поставлена корректно.

Пример 1. Рассмотрим в $C[0,1]$ интегральное уравнение.

$$(Ax)(t) = x(t) + \int_0^1 t^2 s^2 x(s) ds = y(t), \quad x(t) \in C[0,1], \quad y(t) \in C[0,1].$$

Его решение имеет вид

$$(A^{-1}y)(t) = x(t) = y(t) - \frac{5}{6} \int_0^1 t^2 s^2 y(s) ds.$$

Тогда

$$\|A^{-1}y\| \leq \|y\| + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{3} \|y\| = \frac{23}{18} \|y\|.$$

Следовательно, оператор A^{-1} ограничен, т. е. оператор A непрерывно обратим. Впрочем, это сразу следовало из непрерывности ядра $t^2 s^2$ в квадрате $[0,1] \times [0,1]$.

Пример 2. Рассмотрим задачу Коши на $[0, T]$.

$$\begin{cases} (Ax)(t) = \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right) x(t) = y(t), & x(t) \in C^2[0, T], \quad y(t) \in C[0, T]; \\ x(0) = 0, \quad x'(0) = 1. \end{cases}$$

Ее решение, как нетрудно видеть, таково:

$$(A^{-1}y)(t) = x(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t y(\tau) \sin \omega(t-\tau) d\tau.$$

Отсюда вытекает непрерывная обратимость этого дифференциального оператора. Действительно,

$$\|A^{-1}y\| = \frac{1}{|\omega|} \max_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t y(\tau) \sin \omega(t-\tau) d\tau \right| \leq \frac{T}{|\omega|} \|y\|.$$

Пример 3. Неограниченный оператор. Рассмотрим вновь оператор интегрирования

$$(Ax)(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau = y(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad A : C[0, T] \rightarrow C[0, T].$$

Обратный оператор

$$(A^{-1}y)(t) = \frac{d}{dt} y(t) = x(t), \quad A^{-1} : C^1[0, T] \rightarrow C[0, T].$$

Таким образом, A^{-1} — линейный, но неограниченный оператор из $C^1[0, T]$ в $C[0, T]$. Например, последовательность

$$\left\{ \frac{1}{k} \sin \frac{k\pi t}{T} \right\} \subset C^1[0, T]$$

сходится по метрике пространства C к нулю. Однако последовательность

$$A^{-1}\left(\frac{1}{k} \sin \frac{k\pi t}{T} \right) = \frac{\pi}{T} \cos \frac{k\pi t}{T}$$

не сходится ни к какому пределу.

Отметим также, что вполне непрерывный оператор A не может иметь ограниченного обратного A^{-1} , так как единичный оператор $I = AA^{-1} = A^{-1}A$ не обладает свойством полной непрерывности.

Замечание. Проблема определения обратного оператора возникает, например, в динамических системах в связи с коррекцией искажений входного сигнала. Если входной сигнал x системы, описанной линейным оператором A , действующим в пространстве X , подвергается искажению в результате прохождения через систему A , то восстановление первоначальной формы x этого сигнала может быть достигнуто с помощью другой динамической системы, последовательно соединенной с первой и имеющей оператор A^{-1} (рис. 3.16).

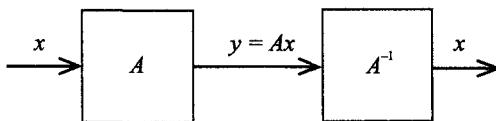


Рис. 3.16. К коррекции искажений на выходе динамической системы

Пусть $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, оператор $A_r^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$ называется правым обратным оператором к A , если $AA_r^{-1} = I_Y$. Оператор $A_l^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$ называется левым обратным к A , если $A_l^{-1}A = I_X$. Здесь через I_X и I_Y обозначены тождественные операторы в пространствах X и Y соответственно.

С точки зрения существования и единственности решения уравнения $Ax = y$ можно сказать следующее.

1. Если существует A_r^{-1} , то это уравнение имеет решение

$$x = A_r^{-1}y$$

(теорема существования).

2. Если существует A_i^{-1} , то это уравнение может иметь не более одного решения (теорема единственности).

В самом деле, заметим, что элемент вида $A_r^{-1}y$ является решением

$$A(A_r^{-1}y) = (AA_r^{-1})y = I_r y = y.$$

Далее предположим, что уравнение $Ax = y$ имеет два различных решения x и x^* . Тогда

$$Ax = y, \quad Ax^* = y \Rightarrow A(x - x^*) = 0 \Rightarrow x - x^* \in \ker A.$$

Подействовав левым обратным оператором, получим

$$A_i^{-1}A(x - x^*) = 0 \Rightarrow x - x^* = 0,$$

т. е. приходим к противоречию. Фактически это означает, что ядро оператора A содержит только нулевой элемент и, значит, оператор A совершает взаимно-однозначное отображение X в Y (в том случае, если решение существует).

Пример. Линейный оператор A в гильбертовом пространстве $H = l^2$ с ортонормированным базисом $\{e_k\}$ задается следующим образом:

$$Ae_1 = 0, \quad Ae_k = e_{k-1} \quad (k = 2, 3, \dots).$$

Пусть

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 = \|x\|^2 < \infty.$$

В этом случае $R_A = H$, $\ker A = \{\gamma e_1\}$, $\gamma \in R$. Действительно, $\forall y \in H$ найдется x , такой что

$$Ax = y;$$

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k Ae_k = \sum_{k=2}^{\infty} \xi_k e_{k-1} \Rightarrow y = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k e_k \Rightarrow x = \xi_1 e_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k e_k.$$

Следовательно, по заданному $y \in H$ определяется $x \in H$ с точностью до слагаемого $\xi_1 e_1 \in \ker A$.

Отметим, что предельный переход здесь допустим, так как $x_n = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, 0, \dots)$ при $n \rightarrow \infty$ сходится к элементу x (по норме H), а в силу непрерывности оператора A

$$Ax = \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \xi_k Ae_k = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k Ae_k.$$

Зададим теперь линейный оператор A_r^{-1} при помощи соотношений

$$A_r^{-1}e_k = e_{k+1} + \gamma_k e_1 \quad (k = 1, 2, \dots),$$

где постоянные γ_k таковы, что $\sum_{k=1}^{\infty} |\gamma_k|^2 < \infty$.

В этом случае, если

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k e_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^2 < \infty,$$

то

$$A_r^{-1} y = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k A_r^{-1} e_k = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k (e_{k+1} + \gamma_k e_1) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k e_{k+1} + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \eta_k e_1.$$

Последняя сумма здесь сходится по неравенству Шварца. Наконец, вычислим композицию AA_r^{-1} . Имеем

$$(AA_r^{-1}) y = A(A_r^{-1} y) = A \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k e_{k+1} + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \eta_k A e_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k e_k = y.$$

Отсюда $A \cdot A_r^{-1} = I_H$, т. е. оператор A_r^{-1} есть правый обратный к A .

Имеет место следующее предложение. Если для оператора $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ существуют A_r^{-1} и A_l^{-1} , то $\exists A^{-1}$, обратный к A , причем

- 1) $A^{-1} = A_r^{-1} = A_l^{-1}$;
- 2) $D_{A^{-1}} = Y$, $R_{A^{-1}} = X$ ($A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$);

3) правый, обратный к A , и левый, обратный единственные.

Отсюда вытекает, что если существует оператор U , такой что

$$UA = I_X, \quad AU = I_Y, \quad A \in \mathcal{L}(X, Y),$$

то $A^{-1} = U \in \mathcal{L}(Y, X)$ и оператор A непрерывно обратим [12].

Напомним некоторые определения. Пусть $A \in \mathcal{L}(X)$, X — банахово. Под степенью оператора понимается следующее:

$$A^1 = A, \quad A^2 = A(A) = A \cdot A, \quad A^k = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_k = A(A^{k-1}).$$

Очевидно, степени оператора A коммутативны, т. е. $A^{m+k} = A^m \cdot A^k = A^k \cdot A^m$. Далее,

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|, \quad \|A^2 x\| = \|A(Ax)\| \leq \|A\| \|A\| \|x\| = \|A\|^2 \|x\|.$$

И вообще,

$$\|A^k x\| \leq \|A\|^k \|x\| \Rightarrow \|A^k\| \leq \|A\|^k.$$

По определению ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} A^k \tag{3.115}$$

сходится равномерно (в смысле сходимости по норме в $\mathcal{L}(X)$), если равномерно сходится последовательность его частичных сумм

$$S_n = \sum_{k=1}^n A^k, \quad S_n \rightarrow S = \sum_{k=1}^{\infty} A^k \quad (n \rightarrow \infty).$$

Оператор S называется суммой ряда (3.115), очевидно $S \in \mathcal{L}(X)$.

Имеет место критерий сходимости ряда (3.115). Пусть X — банахово, тогда для его сходимости необходимо и достаточно, чтобы $\{S_n\}$ была фундаментальной, т. е. $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) > 0$ так, что

$$n > N(\varepsilon) \Rightarrow \|S_{n+p} - S_n\| < \varepsilon \Rightarrow \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} A^k \right\| < \varepsilon$$

(при всех натуральных p).

Действительно, так как X — банахово, то фундаментальная последовательность $\{S_n\}$ сходится к S . Обратно, если последовательность частичных сумм сходится в X , то она фундаментальна.

Говорят, что ряд (3.115) сходится абсолютно, если сходится числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|A^k\|.$$

Всякий абсолютно сходящийся в X ряд сходится равномерно.

Для исследования возможности обратимости оператора весьма полезны утверждения конструктивного характера. Приведем предложение, позволяющее не только гарантировать существование обратного оператора, но и аппроксимировать его.

Теорема. Пусть X — банахово пространство, $A: X \rightarrow X$ — линейный ограниченный оператор, определенный на X (т. е. $A \in \mathcal{L}(X)$), причем

$$\|A\| \leq \alpha < 1,$$

тогда $(I - A)^{-1}$ ограничен (т. е. оператор $(I - A)$ непрерывно обратим) и удовлетворяет условию

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \alpha}.$$

Более того, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ в $\mathcal{L}(X)$ равномерно сходится к оператору $(I - A)^{-1}$.

Для доказательства заметим, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k = \frac{1}{1 - \alpha}.$$

Следовательно, ряд

$$I + A + A^2 + \dots$$

равномерно сходится. Мы имеем

$$(I - A)S_n = (I - A)(I + A + A^2 + \dots + A^n) = I - A^{n+1},$$

$$S_n(I - A) = (I + A + A^2 + \dots + A^n)(I - A) = I - A^{n+1}.$$

Далее,

$$\|(I - A)S_n - I\| = \|A^{n+1}\| \leq \|A\|^{n+1} \leq \alpha^{n+1} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Следовательно, в пределе ($n \rightarrow \infty$) получаем

$$(I - A)S = I, \quad S(I - A) = I \Rightarrow S = (I - A)^{-1},$$

т. е.

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} A^k,$$

$$\|(I - A)^{-1}\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} A^k \right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|A\|^k = \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

Значит, оператор $I - A$ непрерывно обратим.

Теорема. Пусть $A \in \mathcal{L}(X)$ имеет обратный оператор A^{-1} , а оператор $B \in \mathcal{L}(X)$ таков, что

$$\|B\| \leq \|A^{-1}\|^{-1}.$$

Тогда оператор $C = A + B$ имеет обратный ограниченный оператор C^{-1} , причем

$$\|C^{-1} - A^{-1}\| \leq \frac{\|B\| \|A^{-1}\|^2}{1 - \|A^{-1}\| \|B\|}, \quad \|C^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \|B\|} \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \|B\|}. \quad (3.116)$$

Доказательство. Предположим, что $\|B\| \|A^{-1}\| \leq \alpha < 1$. Тогда, согласно предыдущей теореме, оператор $I + A^{-1}B$ имеет ограниченный обратный.

$$(I + A^{-1}B)^{-1} = I + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (A^{-1}B)^k,$$

$$\|(I + A^{-1}B)^{-1}\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|A^{-1}B\|^k = \frac{1}{1 - \|A^{-1}B\|} \leq \frac{1}{1 - \alpha}.$$

Далее, так как $(AC)^{-1} = C^{-1}A^{-1}$, запишем

$$C^{-1} = (A + B)^{-1} = (A(I + A^{-1}B))^{-1} = (I + A^{-1}B)^{-1} A^{-1},$$

$$\|(A + B)^{-1}\| \leq \|(I + A^{-1}B)^{-1}\| \|A^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}B\|} \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \|B\|}.$$

Теперь оценим норму $\|C^{-1} - A^{-1}\|$. Имеем цепочку соотношений

$$C^{-1} - A^{-1} = (A + B)^{-1} - A^{-1} = (A(I + A^{-1}B))^{-1} - A^{-1} = (I + A^{-1}B)^{-1} A^{-1} - A^{-1} =$$

$$= \left[(I + A^{-1}B)^{-1} - I \right] A^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (A^{-1}B)^k \cdot A^{-1}.$$

Отсюда

$$\|C^{-1} - A^{-1}\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|A^{-1}B\|^k \|A^{-1}\| = \frac{\|A^{-1}B\|}{1 - \|A^{-1}B\|} \|A^{-1}\| \leq \frac{\|B\| \|A^{-1}\|^2}{1 - \|A^{-1}\| \|B\|},$$

что и требовалось.

В качестве примера на применение этой теоремы рассмотрим интегральный оператор

$$Ax = x(t) - \int_0^1 K(t, \tau)x(\tau)d\tau$$

с непрерывным в квадрате $[0,1] \times [0,1]$ ядром $K(t, \tau)$, отображающий пространство $C[0,1]$ в себя. Пусть $K_0(t, \tau)$ — вырожденное ядро, близкое к ядру $K(t, \tau)$, и A_0 — интегральный оператор, действующий в $C[0,1]$ по формуле

$$A_0x = x(t) - \int_0^1 K_0(t, \tau)x(\tau)d\tau.$$

Положим

$$\omega = \max_{t, \tau} |K(t, \tau) - K_0(t, \tau)|$$

и рассмотрим операторные уравнения

$$Ax = y, \quad A_0x = y.$$

Пусть $\Delta A = A - A_0$, тогда

$$\begin{aligned} |\Delta Ax| &= \left| \int_0^1 (K(t, \tau) - K_0(t, \tau))x(\tau)d\tau \right| \leq \int_0^1 \max_{t, \tau} |K(t, \tau) - K_0(t, \tau)| \max_{\tau} |x(\tau)| d\tau = \\ &= \omega \|x\| \Rightarrow \|\Delta A\| \leq \omega. \end{aligned}$$

Для интегрального уравнения с вырожденным ядром решение сводится к системе линейных алгебраических уравнений. Предположим, что система имеет решение и представим его в виде

$$x_0(t) = Ry = A_0^{-1}y,$$

где R — известный оператор, причем $\|R\| = r$. Предположим, что $\omega r < 1$. Тогда

$$\|A_0^{-1}\Delta A\| \leq \|A_0^{-1}\| \|\Delta A\| \leq r\omega < 1$$

и в силу только что доказанной теоремы оператор $A_0 + \Delta A = A$ непрерывно обратим, т. е. уравнение с невырожденным ядром имеет решение. Обозначив его через $x(t)$, получим согласно (3.116)

$$\|x - x_0\| = \|(A_0 + \Delta A)^{-1}y - A_0^{-1}y\| \leq \|(A_0 + \Delta A)^{-1} - A_0^{-1}\| \|y\| \leq \frac{\omega r^2}{1 - \omega r} \|y\|,$$

$$\|A^{-1}\| \leq \frac{\|A_0^{-1}\|}{1 - \|\Delta A\|} < \frac{r}{1 - r\omega}.$$

Рассмотрим операторное уравнение

$$x = Ax + y, \tag{3.117}$$

где $A \in \mathcal{L}(X)$, $x \in X$, X — банахово, $y \in X$ — заданный элемент.

Если $\|A\| \leq \alpha < 1$, то оператор $I - A$ непрерывно обратим. Тогда уравнение (3.117) однозначно разрешимо, и имеем две взаимно-обратные формулы

$$(I - A)x = y \Leftrightarrow x = (I - A)^{-1}y.$$

Рассмотрим теперь операторное уравнение с параметром λ

$$\lambda x - Ax = y, \quad x, y \in X, \quad A \subset \mathcal{L}(X). \quad (3.118)$$

Очевидно, при $\|A\| < |\lambda|$ обратный оператор $(\lambda I - A)^{-1}$ существует и определяется равномерно сходящимся рядом

$$(\lambda I - A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \left(I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{\lambda^k} \right) \Rightarrow \|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{|\lambda|^k} \right) = \frac{1}{|\lambda| - \|A\|}.$$

Отсюда следует, что $(\lambda I - A)^{-1}$ — ограниченный оператор, т. е. $(\lambda I - A)$ непрерывно обратим. С учетом этого обстоятельства заключаем, что при $|\lambda| > \|A\|$ уравнение (3.118) однозначно разрешимо.

Получаем две взаимно-обратные формулы

$$y = (\lambda I - A)x, \quad x = (\lambda I - A)^{-1}y.$$

Если иметь ввиду уравнение

$$(A - \lambda I)x = y, \quad (3.119)$$

то в силу существования обратного оператора $(A - \lambda I)^{-1}$ решение определяется равенством (при $\|A\| < |\lambda|$)

$$x = (A - \lambda I)^{-1}y.$$

Значение параметра λ , при котором существует единственное решение уравнения (3.119), называется регулярным значением. Оператор

$$R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$$

называется резольвентой или резольвентным оператором. Таким образом, решение уравнения (3.119) определяется формулой

$$x = R_\lambda y.$$

Отсюда следует, что однородное уравнение $Ax - \lambda x = 0$ имеет только тривиальное решение (при $\|A\| < |\lambda|$).

Множество всех значений λ , при которых оператор $A - \lambda I$ необратим, называется спектром оператора A . Собственные значения, если они есть, принадлежат спектру. Однако, кроме собственных значений, спектр может содержать другие числа или вообще не содержать собственных значений.

Замечание. По доказанному выше, если A непрерывно обратим, то $A + \Delta A$ при достаточно малой норме $\|\Delta A\|$ также непрерывно обратим. Следовательно, если $\lambda (|\lambda| > \|A\|)$ — регулярное значение оператора A , то $\lambda + \Delta \lambda (|\lambda + \Delta \lambda| > \|A + \Delta A\|)$ также регулярное значение

ние. Отсюда следует, что множество регулярных значений открытое, а его дополнение — совокупность всех λ , не являющихся регулярными, замкнуто. Таким образом, спектр линейного оператора есть замкнутое множество.

Пример 1. Оператор умножения на t , т. е. $Ax = tx(t)$ в $C[a, b]$. Имеем

$$Ax - \lambda x = y \Rightarrow (t - \lambda)x = y \Rightarrow x = (t - \lambda)^{-1}y, \quad t \in [a, b].$$

Значит, собственных значений у оператора A нет, а резольвента

$$R_\lambda = \frac{1}{t - \lambda},$$

т. е. спектр сплошной (непрерывный) и заполняет отрезок $[a, b]$.

Пример 2. Пусть

$$A = -\frac{d^2}{dt^2}, \quad t \in [0, 1]. \quad (3.120)$$

Тогда однородное уравнение

$$Ax - \lambda x = 0 \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}x(t) + \lambda x(t) = 0 \quad (3.121)$$

с граничными условиями $x(0) = 0, x'(0) = 1$ имеет решение при $\lambda > 0$

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda}t.$$

Следовательно, спектр оператора A заполняет всю полуось $\lambda > 0$.

Пример 3. Рассмотрим вновь дифференциальный оператор (3.120) и соответствующее ему уравнение (3.121), но граничные условия примем такими: $x(0) = 0, x(1) = 0$. Очевидно, что при $\lambda \leq 0$ уравнение (3.121) имеет лишь тривиальное решение $x \equiv 0$. При $\lambda > 0$ не-тривиальные решения существуют и имеют вид

$$x_k(t) = C \sin k\pi x \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (3.122)$$

При этом числа

$$\lambda_k = (k\pi)^2$$

образуют дискретный спектр $\{\pi^2, 4\pi^2, 9\pi^2, \dots\}$, а соответствующие собственные функции имеют вид (3.122).

Линейные уравнения с вполне непрерывными операторами. Пусть A — вполне непрерывный линейный оператор, действующий в банаховом пространстве

$$X \left(A \in \sigma(X, X) = \sigma(X) \right).$$

Линейное уравнение

$$x - Ax = y. \quad (3.123)$$

с вполне непрерывным оператором A называется уравнением второго рода (по аналогии с интегральным уравнением Фредгольма второго рода в теории интегральных уравнений).

С уравнением (3.123) тесно связано сопряженное уравнение второго рода

$$f - A^* f = g \quad (3.124)$$

где оператор A^* как сопряженный с вполне непрерывным оператором A сам вполне непрерывен (теорема Шаудера [12]).

Уравнениям (3.123), (3.124) соответствует пара однородных уравнений

$$z - Az = 0 \quad (3.125)$$

и

$$h - A^*h = 0. \quad (3.126)$$

Ниже изложим основные выводы из теории таких уравнений, принадлежащей Ф. Риссу и Ю. Шаудеру. Подробное изложение теории уравнений с вполне непрерывными операторами можно найти в [11].

1. Вполне непрерывный оператор A может иметь лишь конечное число линейно независимых собственных элементов, соответствующих одному собственному числу $\lambda \neq 0$.

2. Однородные уравнения (3.125) и (3.126) имеют одинаковое число линейно независимых решений (вторая теорема Фредгольма).

3. Линейное многообразие элементов $y \in X$, таких что $x - Ax = y$ является подпространством банахова пространства X (т. е. замкнуто).

4. Третья теорема Фредгольма. Для того чтобы уравнение (3.123) имело решение при данном $y \in X$, необходимо и достаточно, чтобы $f(y) = 0$ для любого $f \in X^*$, такого что

$$f - A^*f = 0.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть уравнение (3.123) разрешимо, т. е. для данного $y \in X$, $\exists x_0 \in X$ такой, что

$$y = x_0 - Ax_0.$$

Если $f \in X^*$ произвольный линейный функционал, удовлетворяющий уравнению (3.126), то

$$\begin{aligned} f(y) &= f(x_0 - Ax_0) = f(x_0) - f(Ax_0) = f(x_0) - A^*f(x_0) = (f - A^*f)(x_0) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow f(y) = \langle f, y \rangle = 0. \end{aligned}$$

Достаточность. Пусть теперь $f(y) = 0$, причем $f - A^*f = 0$. Покажем, что $y \in L = \{(I - A)x\}$, где x пробегает все X . Предположим противное, что $y \notin L$. Так как L замкнуто, то $\rho(y, L) = d > 0$. По следствию 5 из теоремы Хана–Банаха существует линейный функционал $f_0 \in X^*$, такой что

$$f_0(y) = 1 \text{ и } f_0(L) = 0.$$

Из последнего равенства следует $\forall z \in L$

$$f_0(z) = f_0(x - Ax) = f_0(x) - A^*f_0(x) = (I - A^*)f_0(x) = 0,$$

т. е.

$$f_0(x) - A^*f_0(x) = 0.$$

Но, с другой стороны, $f_0(y) = 1$. Таким образом, предположение, что $y \notin L$ приводит к противоречию, подтвердилось, что и требовалось.

Уравнение $x - Ax = y$ называется нормально разрешимым, если оно имеет решение при $f(y) = 0$ для любого $f \in X^*$, удовлетворяющего уравнению $f - A^*f = 0$. Таким образом, для нормальной разрешимости уравнения (3.123) достаточно, чтобы линейное многообразие $L = (I - A)X$ было замкнуто.

Из теоремы Фредгольма следует, что если сопряженное однородное уравнение

$$f - A^* f = 0$$

имеет только тривиальное (нулевое) решение $f = 0$, то неоднородное уравнение

$$x - Ax = y$$

разрешимо при любой правой части.

Соответствующая теорема Фредгольма имеет место и для уравнения (3.124). Для того чтобы это уравнение при заданном $g \in X^*$ было разрешимо, необходимо и достаточно, чтобы $g(x) = 0$ для любого нетривиального решения однородного уравнения

$$x - Ax = 0.$$

Сформулируем, наконец, первую теорему Фредгольма, определяющую связь между разрешимостью однородного и неоднородного уравнений в одном и том же пространстве.

Теорема. Для однозначной разрешимости уравнения с вполне непрерывным оператором $A \in \sigma(X)$

$$x - Ax = y$$

при любом $y \in X$ необходимо и достаточно, чтобы соответствующее однородное уравнение

$$x - Ax = 0$$

имело лишь тривиальное решение $x = 0$. При этом оператор $I - A$ непрерывно обратим из банахова пространства X в X .

Таким образом, резюмируя сказанное, приходим к следующей альтернативе, обобщающей альтернативу Фредгольма из теории линейных интегральных уравнений.

Либо уравнения с вполне непрерывными операторами $A \in \sigma(X)$ и $A^* \in \sigma(X^*)$

$$x - Ax = y, \quad y \in X; \tag{3.127}$$

$$f - A^* f = g, \quad g \in X^* \tag{3.128}$$

разрешимы при любых правых частях, и тогда однородные уравнения

$$x - Ax = 0,$$

$$f - A^* f = 0$$

имеют лишь нулевые решения. Либо эти однородные уравнения имеют одинаковое конечное число линейно независимых решений

$$x_1, x_2, \dots, x_n; \quad f_1, f_2, \dots, f_n,$$

и в этом случае для разрешимости уравнения (3.127) необходимо и достаточно, чтобы $f_i(y) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Соответственно, для разрешимости уравнения (3.128) необходимо и достаточно, чтобы $g(x_i) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. При этом общее решение уравнения (3.127) имеет вид

$$x = x_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i,$$

где α_i — произвольные постоянные, а x_0 — какое-либо частное решение этого уравнения. Соответственно, общее решение уравнения (3.128) имеет вид

$$f = f_0 + \sum_{i=1}^n \beta_i f_i,$$

где β_i — произвольные постоянные, а f_0 — какое-либо частное решение этого уравнения.

В более общем случае оператор A с областью определения D_A плотной в банаховом пространстве X и со значениями в банаховом пространстве Y называется нормально разрешимым, если

$$R_A = AD_A = \{y \in Y : \langle y, \psi \rangle = 0, \forall \psi \in \ker A^*\}. \quad (3.129)$$

Если $\ker A^* = \{0\}$, т. е. содержит только нулевой элемент, то условие (3.129) нормальной разрешимости оператора A означает, что $R_A = Y$.

Пусть A — нормально разрешимый оператор. Рассмотрим уравнение

$$Ax = y \quad (3.130)$$

и сопряженное однородное уравнение

$$A^*\psi = 0. \quad (3.131)$$

Справедливы следующие утверждения.

Если уравнение (3.131) имеет лишь нулевое решение $\psi = 0$, то уравнение (3.130) имеет решение для любой правой части $y \in Y$.

Если уравнение (3.131) имеет нетривиальные решения, то уравнение (3.130) имеет по крайней мере одно решение в том и только в том случае, когда $\langle y, \psi \rangle = 0$ для любого решения ψ уравнения (3.131).

Приведем критерий нормальной разрешимости оператора [22].

Теорема (Ф. Хаусдорф). Пусть $\bar{D}_A = X$. Для нормальной разрешимости оператора A необходимо и достаточно, чтобы $\bar{R}_A = R_A$, т. е. чтобы область значений оператора A была замкнутой.

В частности, как было сказано выше, операторы $I - \lambda A$ и $I - \lambda A^*$, где A вполне непрерывен в банаховом пространстве X , нормально разрешимы, так как их области значений замкнуты.

Нормально разрешимый оператор A называется нетеровским (N -оператором), если

- 1) $N(A) = \ker A$ конечномерно,
- 2) $N(A^*) = \ker A^*$ конечномерно.

Число $n = n(A) = \dim N(A)$ называется числом нулей оператора A , число $m = m(A) = \dim N(A^*)$ называется дефектом оператора A . Индексом оператора A называется число

$$\kappa = \kappa(A) = n(A) - m(A).$$

Таким образом, нетеров оператор имеет конечное число нулей ($0 \leq n < +\infty$) и конечный дефект ($0 \leq m < +\infty$).

Нетеровы операторы нулевого индекса называются фредгольмовыми (F -операторами). Для таких операторов $n = m$, т. е. $\kappa = 0$.

Для N -операторов имеют место следующие теоремы Ф. Нетера [11].

1. Или уравнение $Ax = y$ имеет решение при любой правой части y , или уравнение $A^*y = 0$ имеет нетривиальное решение.

2. Уравнения $Ax = 0$ и $A^*y = 0$ имеют по конечному числу линейно-независимых решений.

3. Если уравнение $A^*y = 0$ имеет нетривиальное решение, то уравнение $Ax = y$ имеет (хоть одно) решение для тех и только для тех правых частей y , которые ортогональны к любым решениям уравнения $A^*y = 0$.

Для F -оператора A справедливы теоремы Фредгольма [11, 22].

1. Альтернатива Фредгольма. Или ($n = 0$) уравнение $Ax = y$ имеет единственное решение при любой правой части y , или ($n > 0$) уравнение $Ax = 0$ имеет нетривиальные решения.

2. Уравнения $Ax = 0$ и $A^*y = 0$ имеют одинаковое конечное число (n) линейно-независимых решений.

3. Если $n > 0$, то уравнение $Ax = y$ имеет решения для тех и только для тех правых частей y , которые ортогональны к любым решениям уравнения $A^*y = 0$.

В качестве примера ограниченного F оператора можно привести оператор $I - \lambda A$, где A вполне непрерывен.

Критерии фредгольмовости оператора даются следующей теоремой С. М. Никольского [22].

Для того чтобы оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ был фредгольмовым, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий:

α) $A = B + P$, где $B \in \mathcal{L}(X, Y)$ непрерывно обратим, а $P \in \mathcal{L}(X, Y)$ — конечномерный;

β) $A = C + T$, где $C \in \mathcal{L}(X, Y)$ непрерывно обратим, а $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ — вполне непрерывен.

Теорема Банаха о замкнутом графике. Под прямой суммой $Z = X + Y$ двух линейных пространств X и Y понимается совокупность пар $z = (x, y)$, $x \in X$, $y \in Y$, в которой введены линейные операции по формулам

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

$$\alpha z = (\alpha x, \alpha y).$$

Если X и Y линейные нормированные пространства, то норма в $Z = X + Y$ вводится, например, так:

$$\|z\| = \|x\|_X + \|y\|_Y.$$

Пусть X и Y банаховы и $y = Ax$. Графиком линейного оператора A с областью определения $D_A \subset X$ и областью значений в Y называется совокупность пар $\{(x, Ax); x \in D_A\}$, т. е. подмножество пространства $X + Y$.

График линейного оператора называется замкнутым, если $\{x_n\} \subset D_A$ и

$$\{x_n; Ax_n\} \rightarrow \{x; Ax\} \quad (n \rightarrow \infty) \Rightarrow x \in D_A \text{ и } y = Ax.$$

Линейный оператор $A: X \rightarrow Y$ называется замкнутым, если его график — замкнутое множество в $X + Y$. Имеют место следующие предложения.

1. Если $D_A = X$ и $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, то оператор A замкнут.

2. Если A замкнут и существует обратный оператор A^{-1} , то он также замкнут.

Доказательство 1. Пусть $x_n \rightarrow x$ и $Ax_n \rightarrow y$ при $n \rightarrow \infty$. В силу ограниченности (а значит и непрерывности A) $Ax_n \rightarrow Ax$, $n \rightarrow \infty$. Следовательно, $y = Ax$ (единственность предела).

Доказательство 2. Рассмотрим графики операторов A и A^{-1}

$$\{x, Ax\}, \quad x \in D_A,$$

$$\{y, A^{-1}y\} = \{Ax, x\}, \quad y \in R_A.$$

Если первый график — замкнутое множество в пространстве $X + Y$, то второй график тоже замкнутое множество, но в пространстве $Y + X$. В этом смысле и понимается замкнутость графика обратного оператора. Сформулируем теперь теорему Банаха (о замкнутом графике).

Пусть A — замкнутый линейный оператор, определенный всюду в банаховом пространстве X со значениями в банаховом пространстве Y . Тогда $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, т. е. ограничен. Отсюда вытекает теорема Банаха об обратном операторе.

Если A — замкнутый оператор, отображающий банахово пространство X на банахово пространство Y взаимно-однозначно ($R_A = Y$), то оператор A^{-1} ограничен, т. е. $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.

Замечание. Теорема Банаха вытекает как следствие из одной общей теоремы, которую мы здесь сформулируем.

Теорема об открытых отображениях. Пусть X и Y банаховы пространства и пусть A — линейный ограниченный оператор, отображающий X на Y . Тогда это отображение открыто, т. е. если $G \subset X$ — открытое множество, то открыто и множество $A(G) \subset Y$.

Условия теоремы требуют, чтобы преобразование $A: X \rightarrow Y$ было сюръективным и чтобы пространства X и Y были полными.

Эту теорему можно переформулировать следующим образом. Если A накрывает Y , а через U_x и U_y обозначены единичные шары в пространствах X и Y соответственно, то $\exists \alpha > 0$ такое, что $\alpha U_y \subset A(U_x)$. Иллюстрацию этого см. на рис. 3.17. С точки зрения решения уравнения $Ax = y$ эта теорема выглядит так.

Существует $\alpha > 0$, такое что если $\|y\| \leq \alpha$, $y \in Y$, то уравнение $Ax = y$ имеет по крайней мере одно решение $x \in B[0, 1]$.

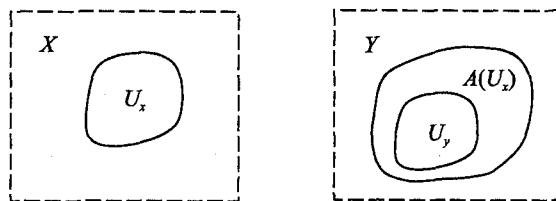


Рис. 3.17. К теореме об открытых отображениях

ПРИЛОЖЕНИЕ А

МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Определение и примеры метрических пространств. Одна из важнейших операций анализа — предельный переход — основывается на понятии «расстояние между точками», которое естественным образом определяется на прямой, плоскости, в пространстве. Для изучения этой операции в «чистом виде», т. е. исходя только из свойств «расстояния», вводится понятие метрического пространства.

Пусть X — множество элементов $x, y, z \dots$ (произвольной природы). Если каждой паре x, y его элементов поставлено в соответствие число $\rho(x, y)$ и при этом выполняются условия (аксиомы) для $\forall x, y, z \in X$:

- 1) $\rho(x, y) \geq 0$, $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (аксиома тождества),
- 2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (аксиома симметрии),
- 3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (неравенство треугольника),

то говорят, что на множестве X задано расстояние (метрика).

Множество X с введенной в нем метрикой ρ называется метрическим пространством.

Примеры метрических пространств.

1. Множество действительных чисел с расстоянием

$$\rho(x, y) = |x - y|$$

образует метрическое пространство $R^1 = R$.

2. Множество упорядоченных наборов из n действительных чисел $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \dots$ с метрикой

$$\rho(x, y) = \left\{ \sum_{k=1}^n (y_k - x_k)^2 \right\}^{1/2}$$

образует метрическое пространство.

Выполнение аксиом 1 и 2 очевидно. Проверим выполнение аксиомы треугольника. Положим

$$z_k - x_k = a_k, \quad y_k - z_k = b_k, \quad y_k - x_k = a_k + b_k,$$

тогда аксиома треугольника $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ запишется в виде

$$\left\{ \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2 \right\}^{1/2} \leq \left\{ \sum_{k=1}^n a_k^2 \right\}^{1/2} + \left\{ \sum_{k=1}^n b_k^2 \right\}^{1/2}. \quad (\text{A.1})$$

Последнее неравенство вытекает из неравенства Гельдера (формула (Б.3) при $p = q = 2$):

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n b_k^2.$$

Имеем в силу (А.1)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2 &= \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2 \sum_{k=1}^n a_k b_k + \sum_{k=1}^n b_k^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 + \\ &+ 2 \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \times \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2} + \sum_{k=1}^n b_k^2 = \left(\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2} \right)^2. \end{aligned}$$

Отсюда следует неравенство треугольника.

Определенное выше метрическое пространство называется n -мерным арифметическим евклидовым пространством $R^n (E^n)$. При $n=1, 2, 3$ метрика $\rho(x, y)$ совпадает с естественным расстоянием между точками. Метрика этого пространства называется евклидовой.

3. На этом же множестве упорядоченных наборов из n действительных чисел введем метрику следующим образом:

$$\rho(x, y) = \rho_p(x, y) = \left\{ \sum_{k=1}^n |y_k - x_k|^p \right\}^{1/p},$$

где $p \geq 1$ — любое фиксированное число.

Проверим выполнение аксиомы треугольника. При $p=1$ она выполняется:

$$\rho(x, y) = \rho_1(x, y) = \sum_{k=1}^n |y_k - x_k| \leq \sum_{k=1}^n |z_k - x_k| + \sum_{k=1}^n |y_k - z_k| = \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

При $p > 1$ аксиома треугольника сводится к неравенству Минковского (Б.7):

$$\left\{ \sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p \right\}^{1/p} \leq \left\{ \sum_{k=1}^n |a_k|^p \right\}^{1/p} + \left\{ \sum_{k=1}^n |b_k|^p \right\}^{1/p}.$$

Это метрическое пространство обозначается символом $R_p^n (p \geq 1)$.

Очевидно, R_2^n совпадает с арифметическим евклидовым пространством R^n .

4. Предельным вариантом метрического пространства R_p^n (при $p \rightarrow +\infty$) является метрическое пространство R_∞^n . Метрика в нем вводится формулой

$$\rho_\infty(x, y) = \max_{1 \leq k \leq n} |y_k - x_k|.$$

Справедливость аксиом метрики очевидна. Имеет место предельное равенство

$$\rho_\infty(x, y) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \rho_p(x, y) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n |y_k - x_k|^p \right)^{1/p},$$

которое придает смысл обозначению R_∞^n .

5. Положив для произвольного множества

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y, \end{cases}$$

получим метрическое пространство (изолированных точек).

6. Пусть множество X составлено из всех последовательностей $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$, где n — фиксировано, а ε_k равны либо 0, либо 1. Расстоянием между «словами» $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ и $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ назовем число несовпадений ε_k с η_k при $k=1, 2, \dots, n$ или

$$\rho(\varepsilon, \eta) = \sum_{k=1}^n |\eta_k - \varepsilon_k|.$$

Например, если $\varepsilon = (1001)$, $\eta = (0011)$, то $\rho(\varepsilon, \eta) = 2$. Это метрическое пространство используется в теории кодирования.

7. На множестве всевозможных последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ действительных чисел, удовлетворяющих условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty,$$

введем расстояние между точками $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ и $y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots)$ по формуле

$$\rho(x, y) = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (y_k - x_k)^2 \right\}^{1/2}.$$

Функция $\rho(x, y)$ имеет смысл, это следует из неравенств

$$(y_k \pm x_k)^2 \leq 2(x_k^2 + y_k^2) \Rightarrow \sum_{k=1}^n (y_k - x_k)^2 \leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} y_k^2 < \infty$$

с последующим переходом к пределу ($n \rightarrow \infty$) в левой сумме.

Выполнение первых двух аксиом метрики очевидно, неравенство треугольника имеет здесь вид

$$\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (y_k - x_k)^2 \right\}^{1/2} \leq \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (z_k - x_k)^2 \right\}^{1/2} + \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (y_k - z_k)^2 \right\}^{1/2}$$

и совпадает с неравенством Минковского (Б.9) при $p = q = 2$. Полученное метрическое пространство обозначается через l^2 .

8. Пространство l^p . На множестве всевозможных последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ действительных чисел, таких что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$$

вводится расстояние между элементами $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ и $y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots)$ по формуле

$$\rho(x, y) = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |y_k - x_k|^p \right\}^{1/p}, \quad p \geq 1. \quad (\text{A.2})$$

При $p=1$ это выражение очевидно имеет смысл. При $p>1$ привлечем неравенство Минковского (Б.9). Таким образом, формула (А.2) имеет смысл при всех $p \geq 1$.

9. Множество $C[a, b]$ всех действительных, непрерывных на $[a, b]$ функций с метрикой

$$\rho(x, y) = \max_{a \leq t \leq b} |y(t) - x(t)| \quad (\text{A.3})$$

представляет собой метрическое пространство. Проверим выполнение неравенства треугольника. Имеем цепочку неравенств

$$\begin{aligned} |y(t) - x(t)| &= |(z(t) - x(t)) + (y(t) - z(t))| \leq |z(t) - x(t)| + |y(t) - z(t)| \leq \\ &\leq \max_{a \leq t \leq b} |z(t) - x(t)| + \max_{a \leq t \leq b} |y(t) - z(t)| = \rho(x, z) + \rho(z, y) \Rightarrow \rho(x, y) = \\ &= \max_{a \leq t \leq b} |y(t) - x(t)| \leq \rho(x, z) + \rho(y, z). \end{aligned}$$

Метрика (А.3) называется равномерной или чебышевской. Построенное метрическое пространство обозначается через $C[a, b]$.

10. Пространство $\mathcal{L}_*^2[a, b]$. Рассмотрим вновь множество всех непрерывных на $[a, b]$ действительных функций, но расстояние определим не так, как в предыдущем примере. Положим

$$\rho(x, y) = \left(\int_a^b [x(t) - y(t)]^2 dt \right)^{1/2}.$$

Неравенство треугольника следует из интегральной формы неравенства Гельдера для любых непрерывных на $[a, b]$ действительных функций $f(t)$ и $g(t)$ (см. (Б.6)):

$$\left(\int_a^b f(t) g(t) dt \right)^2 \leq \int_a^b f^2(t) dt \cdot \int_a^b g^2(t) dt.$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} \rho^2(x, y) &= \int_a^b [x(t) - y(t)]^2 dt = \int_a^b [(z(t) - x(t)) + (y(t) - z(t))]^2 dt = \\ &= \int_a^b [z(t) - x(t)]^2 dt + 2 \int_a^b [z(t) - x(t)][y(t) - z(t)] dt + \int_a^b [y(t) - z(t)]^2 dt \leq \\ &\leq \int_a^b [z(t) - x(t)]^2 dt + 2 \left(\int_a^b [z(t) - x(t)]^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_a^b [y(t) - z(t)]^2 dt \right)^{1/2} + \\ &+ \int_a^b [y(t) - z(t)]^2 dt = [\rho(x, z) + \rho(z, y)]^2 \Rightarrow \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y). \end{aligned}$$

Введенное пространство называется пространством $\mathcal{L}_*^2[a, b]$ непрерывных функций с квадратичной метрикой.

11. Пространство m . На множестве всех ограниченных последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ введем метрику по формуле

$$\rho(x, y) = \sup_k |y_k - x_k|.$$

Справедливость аксиом метрики очевидна.

12. Пространство ограниченных вещественных функций M . На множестве всех вещественных ограниченных на отрезке $[a, b]$ функций вводится метрика

$$\rho(x, y) = \sup_{a \leq t \leq b} |y(t) - x(t)|. \quad (\text{A.4})$$

Очевидно, пространство $C[a, b]$ является подпространством метрического пространства M в том смысле, что все элементы $C[a, b]$ принадлежат M и метрика (A.4) для элементов $C[a, b]$ совпадает с определением (A.3).

13. Пространство $L^2[a, b]$. На множестве всех суммируемых с квадратом на $[a, b]$ функций вводится метрика

$$\rho(x, y) = \left[(L) \int_a^b (y(t) - x(t))^2 dt \right]^{1/2}.$$

Под элементом $x(t)$ пространства $L^2[a, b]$ понимается класс (x) функций почти везде на $[a, b]$ равных $x(t)$ и подчиняющихся условию

$$(L) \int_a^b x^2(t) dt < \infty.$$

Аксиома тождества выполняется, так как если $x(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} y(t)$, то они принадлежат одному и тому же классу (x) .

14. Пространство $L^p[a, b]$. На множестве суммируемых с p -й степенью на $[a, b]$ функций вводится метрика

$$\rho(x, y) = \left[(L) \int_a^b |y(t) - x(t)|^p dt \right]^{1/p} \quad (p \geq 1).$$

Неравенство треугольника совпадает с неравенством Минковского в интегральной форме. Элементами $L^p[a, b]$ являются (непересекающиеся между собой) классы $(x), (y), \dots$

Каждый класс составляют функции, почти везде равные между собой на $[a, b]$ и подчиняющиеся условию

$$(L) \int_a^b |x(t)|^p dt < \infty \quad (p \geq 1 — любое).$$

15. Пространство $C^m[a, b]$. На множестве непрерывных на $[a, b]$ вместе со всеми своими производными до m -го порядка включительно функций введем «расстояние» между элементами

$$\rho(x, y) = \max_{a \leq t \leq b} \{ |y(t) - x(t)|, |y'(t) - x'(t)|, \dots, |y^{(m)}(t) - x^{(m)}(t)| \}.$$

Очевидно, все аксиомы метрики выполняются.

Изометрия. Пусть между элементами метрических пространств (X, ρ) и (X', ρ') существует взаимно-однозначное соответствие

$$X \ni x \leftrightarrow x' \in X', \quad X \ni y \leftrightarrow y' \in X', \dots$$

Если при этом «расстояние» между элементами не меняется, т. е.

$$\rho(x, y) = \rho'(x', y'),$$

то пространства X и X' называются изометрическими.

Изометрические пространства неразличимы с точки зрения метрических свойств и в этом смысле их можно отождествить.

Предел. Открытые и замкнутые множества в метрических пространствах. Пусть X — метрическое пространство, $x_0 \in X$ и $r > 0$ — число. Множество $B(x_0, r) = \{x \in X : \rho(x, x_0) < r\}$ называется **открытым шаром** с центром в x_0 и радиусом r . Множество $\bar{B}[x_0, r] = \{x \in X : \rho(x, x_0) \leq r\}$ называется **замкнутым шаром**, а множество $S[x_0, r] = \{x \in X : \rho(x, x_0) = r\}$ — **сферой радиуса r** с центром в x_0 . Открытый шар $B(x_0, \varepsilon)$ называется ε — **окрестностью элемента (точки) x_0** .

Примеры.

1. В R^1 — окрестность точки x_0 определяется цепочкой неравенств

$$\rho(x, x_0) < \varepsilon \Rightarrow |x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < x - x_0 < \varepsilon \Rightarrow x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon.$$

Следовательно, ε — окрестность точки x_0 — это интервал $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

2. В R^2 аналогично имеем для $x = (x_1, x_2)$, $x_0 = (x_{10}, x_{20})$:

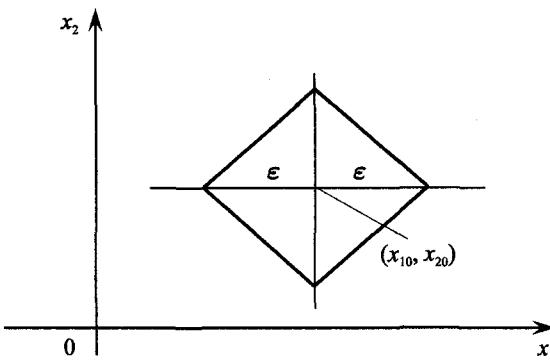
$$\rho(x, x_0) < \varepsilon \Rightarrow \rho^2(x, x_0) < \varepsilon^2 \Rightarrow (x_1 - x_{10})^2 + (x_2 - x_{20})^2 < \varepsilon^2.$$

Следовательно, ε — окрестность точки x_0 представляет собой открытый круг на плоскости x_1Ox_2 с центром в точке (x_{10}, x_{20}) и радиусом ε .

3. В R^2 выводим

$$\rho(x, x_0) < \varepsilon \Rightarrow |x_1 - x_{10}| + |x_2 - x_{20}| < \varepsilon.$$

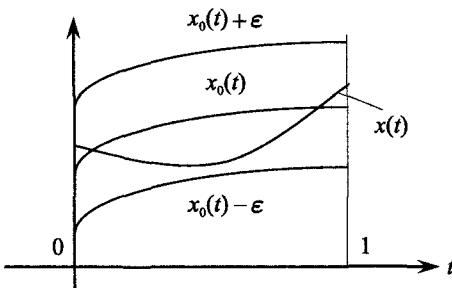
Эта область представляет собой открытый квадрат с центром в точке (x_{10}, x_{20}) , повернутый по отношению к осям Ox_1, Ox_2 на угол $\varphi = \pi/4$ (рис. А.1).

Рис. A.1. К определению ε — окрестности в пространстве R^2

4. В $C[0,1]$ ε — окрестность функции $x_0(t)$ определяется неравенствами

$$\rho(x, x_0) = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - x_0(t)| < \varepsilon \Rightarrow |x(t) - x_0(t)| < \varepsilon \Rightarrow x_0(t) - \varepsilon < x(t) < x_0(t) + \varepsilon.$$

Эта окрестность представляет собой криволинейную полоску (рис. A.2).

Рис. A.2. К определению ε — окрестности в пространстве $C[0,1]$

Множество $M \subset X$ называется ограниченным, если $\exists r > 0$ и $x_0 \in X$ такие, что $M \subset B(x_0, r)$. Иными словами, ограниченное множество всегда можно «погрузить» в некоторый шар.

Пусть $M \subset X$. Точка $x \in X$ называется внутренней точкой множества M , если она принадлежит M вместе с некоторой своей ε -окрестностью. Множество называется открытым, если оно состоит только из внутренних точек.

Примеры.

1. (a, b) — открытое множество, $[a, b]$ — не является таковым.

2. Покажем, что шар $B(x_0, r)$ — открытое множество. Пусть $x \in B(x_0, r)$, тогда $\rho(x, x_0) = r_1 < r$. Рассмотрим шар $B(x, r_2)$, где $r_2 = r - r_1$. Для произвольной точки $y \in B(x, r_2)$ имеем $\rho(x_0, y) \leq \rho(x_0, x) + \rho(x, y) < r_1 + r - r_1 = r$. Следовательно, шар $B(x, r_2) \subset B(x_0, r)$, что и требовалось.

Относительно операций объединения и пересечения открытых множеств имеет место следующее утверждение.

Объединение любой совокупности открытых множеств — открытое множество. Пересечение конечного числа открытых множеств — множество открытое.

Доказательство первой части.

Пусть M_α — открытые множества, $M = \bigcup_\alpha M_\alpha$ и $x \in M$. Тогда x принадлежит по крайней мере одному из множеств слагаемых M_α и, поскольку оно открытое, $\exists \varepsilon > 0$ такое, что $B(x, \varepsilon) \subset M_\alpha$. Отсюда следует включение $B(x, \varepsilon) \subset M$, что и требовалось.

Доказательство второй части.

Пусть M_i — открытые множества, $M = \bigcap_{i=1}^n M_i$ и $x \in M$. Имеем цепочку рассуждений: $x \in M \Rightarrow x \in M_i (i = 1, 2, \dots, n) \Rightarrow \exists \varepsilon_i > 0 : B(x, \varepsilon_i) \subset M_i \Rightarrow B(x, \varepsilon) \subset M$, где $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$.

Пусть X — метрическое пространство. Говорят, что последовательность $\{x_n\} \subset X$ имеет своим пределом точку $x \in X$, если $\rho(x, x_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Этот факт записывают так: $x_n \rightarrow x$ или $\lim x_n = x (n \rightarrow \infty)$.

Предел сходящейся последовательности определяется единственным образом. В самом деле, пусть $\lim x_n = x$ и $\lim x_n = y (n \rightarrow \infty)$. Тогда $\rho(x, y) \leq \rho(x, x_n) + \rho(x_n, y) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$. Так как левая часть неравенства вообще от n не зависит, то $\rho(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$.

Описанная выше сходимость называется сходимостью по метрике пространства X . Из ее определения следует, что $\{x_n\} \subset X$ сходится к точке $x \in X$ тогда и только тогда, когда в любой окрестности x содержатся все точки последовательности $\{x_n\}$ за исключением, быть может, конечного их числа. Стало быть, если $x_n \rightarrow x$, то и любая ее (бесконечная) подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ имеет тот же предел.

Примеры.

1. Сходимость в R^n . Если $x^{(k)} \rightarrow x (k \rightarrow \infty)$, то

$$\begin{aligned} \rho(x, x^{(k)}) \rightarrow 0 &\Rightarrow \rho^2(x, x^{(k)}) \rightarrow 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^{(k)})^2 \rightarrow 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x_i^{(k)} \rightarrow x_i, k \rightarrow \infty \quad (i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Обратное очевидно. Следовательно, сходимость в R^n равносильна покоординатной сходимости.

2. Сходимость в пространствах R_p^n , L^2 , L^p также равносильна покоординатной сходимости.

3. Сходимость в $C[a, b]$. По определению $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) > 0$ такое, что из $n > N(\varepsilon) \Rightarrow \rho(x_n, x) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - x_n(t)| < \varepsilon$.

Такая сходимость называется равномерной сходимостью.

4. В $\mathcal{L}_*^2[a, b]$ последовательность $\{x_n(t)\}$ сходится к функции $x(t)$, если

$$\rho^2(x, x_n) = \int_a^b [x(t) - x_n(t)]^2 dt \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Такая сходимость называется сходимостью в среднем.

Если $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$, то $\rho(x_n, y_n) \rightarrow \rho(x, y)$. В самом деле, по неравенству четырехугольника

$$|\rho(x, y) - \rho(x_n, y_n)| \leq \rho(x, x_n) + \rho(y, y_n) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Точка $x \in X$ называется предельной для множества $M \subset X$, если в любой окрестности точки x имеется по крайней мере одна точка из M , отличная от x .

Можно дать и другое, равносильное определение предельной точки: точка $x \in X$ есть предельная точка множества $M \subset X$, если существует последовательность $\{x_n\} \subset M$ (с различными элементами), сходящаяся к x .

Множество $F \subset X$ называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки.

Примеры.

1. Отрезок $[a, b]$ — замкнутое множество, полуинтервал $(a, b]$ не является таковым.

2. Шар $B[x_0, r]$ — замкнутое множество.

Пусть множество $M \subset X$. Совокупность всех его предельных точек M' называется производным множеством множества M . Объединение $M \cup M' = \bar{M}$ называется замыканием множества M . Имеет место теорема.

Пусть \bar{M} — замыкание множества $M \subset X$, тогда:

1. $M \subset \bar{M}$.

2. \bar{M} — замкнутое множество.

3. \bar{M} — наименьшее замкнутое множество, содержащее M .

Доказательство.

1. Вытекает из определения замыкания.

2. Пусть x_0 — произвольная предельная точка \bar{M} , тогда $\forall \varepsilon/2 > 0$, $\exists x \in \bar{M}$ такая, что $\rho(x, x_0) < \varepsilon/2$ (предполагается, что $x_0 \neq x$). Если $x \in M$, то x_0 — предельная точка M и доказательство завершено. Если $x \notin M$, то x — предельная точка множества M и, следовательно, $\forall \varepsilon/2 > 0$, $\exists y \in M$ такая, что $\rho(x, y) < \varepsilon/2$. Неравенство треугольника дает:

$$\rho(x_0, y) \leq \rho(x_0, x) + \rho(x, y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

т. е. x_0 — предельная точка M . Таким образом $x \in \bar{M}$, что и требовалось.

3. Пусть $F \subset X$ — замкнутое множество и $M \subset F$. Покажем, что $\bar{M} \subset F$. Предположим противное, что x_0 — предельная точка множества M и $x_0 \notin F$. Тогда $\exists \varepsilon$ — окрестность x_0 , в которой нет точек множества F (ибо в противном случае точка $x_0 \in F$

как предельная точка замкнутого множества). Тем более \exists окрестность точки x_0 , в которой нет ни одной точки множества M (за исключением, быть может, самой точки x_0). Полученное противоречие показывает, что $\bar{M} \subseteq F$. Так как $F \subset X$ — произвольное замкнутое множество, содержащее M , то \bar{M} — наименьшее из них.

Следующее утверждение показывает связь между открытыми и замкнутыми множествами в метрических пространствах.

Теорема. Дополнение замкнутого множества F до всего пространства X — открыто, дополнение открытого множества M до всего пространства X — замкнуто.

Доказательство первой части.

Обозначим $M = X \setminus F = CF$. Пусть $x_0 \in M$, необходимо показать, что \exists шар $B(x_0, \varepsilon) \subset M$. Предполагая противное, приходим к тому, что в любой ε — окрестности точки x_0 есть точки из F (отличные от x_0). Но тогда $x_0 \in F$ как предельная точка F . Полученное противоречие доказывает первую часть теоремы.

Доказательство второй части.

Обозначим через $F = X \setminus M = CM$. Пусть x_0 — предельная точка множества F . Необходимо доказать, что $x_0 \in F$. Предположим противное, что $x_0 \notin F$. Тогда $x_0 \in CF = M$, а так как M — открытое множество, то $\exists B(x_0, \varepsilon) \subset M$. Но тогда существует ε — окрестность точки x_0 , в которой нет точек множества F . Полученное противоречие доказывает второе утверждение.

Обычно принимается, что метрическое пространство X — замкнуто и открыто одновременно. Поэтому $\emptyset = CX$ — замкнуто и открыто. Последовательность $\{1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots\}$ является примером множества, которое ни открыто, ни замкнуто.

Расстоянием между множеством $A \subset X$ и точкой $x_0 \in X$ называется число

$$\rho(x_0, A) = \inf_{x \in A} \rho(x_0, x).$$

Очевидно, если $x_0 \in A$, то $\rho(x_0, A) = 0$. В том случае, когда $x_0 \notin A$, но является его предельной точкой, имеем снова $\rho(x_0, A) = 0$.

Расстоянием между множествами $A \subset X$ и $B \subset X$ называется число

$$\rho(A, B) = \inf_{\substack{a \in A \\ b \in B}} \rho(a, b).$$

Очевидно, если множества A и B имеют непустое пересечение, то $\rho(A, B) = 0$.

Точка $x_0 \in X$ называется точкой прикосновения множества A , если в любом шаре $B(x_0, r)$ есть точки из A .

Точка $x_0 \in X$ называется изолированной, если $\exists B(x_0, \varepsilon)$, в котором нет точек из X (отличных от x_0). Отсюда следует, что точка прикосновения множества $A \subset X$ есть либо изолированная точка множества A , либо предельная его точка.

Замечание. Любое подмножество пространства X , снабженное метрикой этого пространства также является метрическим пространством.

Примеры.

1. Отрезок $[a, b] \subset R^1$ с метрикой $\rho(x, y) = |y - x|$ — метрическое пространство.
2. Множество Q всех рациональных чисел на прямой с той же метрикой является метрическим пространством.
3. Множество всех многочленов с действительными коэффициентами, снабженное чебышевской метрикой на $[a, b]$, является метрическим пространством.

Плотные подмножества. Сепарабельность. Пусть $A \subset X$, $B \subset X$. Множество A называется плотным в B , если $\bar{A} \supset B$. Множество $A \subset X$ называется всюду плотным в X , если $\bar{A} = X$.

Пространство X называется сепарабельным, если в нем имеется счетное всюду плотное множество.

Примеры.

1. Пространство R^1 сепарабельное, т. к. множество рациональных точек на прямой всюду плотно в R^1 . Пространства R^n , R_p^n также сепарабельные.
2. Пространство $C[a, b]$ сепарабельное. В самом деле, множество всех многочленов с рациональными коэффициентами счетное, его замыкание в метрике $C[a, b]$ совпадает с множеством всех многочленов. В силу теоремы Вейерштрасса $\bar{P} = C[a, b]$. Следовательно, $C[a, b] = \bar{Q} = \bar{P}$, что и требуется.

3. Пространство l^2 сепарабельное. Пусть $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in l^2$, $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty$. Введем последовательность $x^{(n)} = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$. Очевидно, $x^{(n)} \rightarrow x$ в l^2 . В самом деле, $\rho(x, x^{(n)}) = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} x_k^2 \right)^{1/2} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Следовательно, множество всех таких последовательностей всюду плотно в l^2 . Далее, любой элемент $y = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$ является пределом по метрике l^2 последовательности $y^{(k)} = (r_1^{(k)}, r_2^{(k)}, \dots, r_n^{(k)}, 0, 0, \dots)$ с рациональными координатами, а тогда замыкание множества всех таких последовательностей с рациональными координатами совпадает со всем пространством l^2 . Но таких последовательностей счетное множество, что и требуется.

4. Пространство $\mathcal{L}_*^2[a, b]$ сепарабельное. В самом деле, из сходимости последовательности в $C[a, b] \Rightarrow$ сходимость этой же последовательности в $\mathcal{L}_*^2[a, b]$. По теореме Вейерштрасса любая непрерывная на $[a, b]$ функция есть предел равномерно сходящейся последовательности многочленов. Следовательно, элемент пространства $\mathcal{L}_*^2[a, b]$ является пределом сходящейся в $\mathcal{L}_*^2[a, b]$ последовательности многочленов. Если $P \subset \mathcal{L}_*^2[a, b]$ — пространство всех многочленов (с метрикой пространства $\mathcal{L}_*^2[a, b]$), то $\bar{P} = \mathcal{L}_*^2[a, b]$. В свою очередь пространство $P_* \subset \mathcal{L}_*^2[a, b]$ всех многочленов с рациональными коэффициентами всюду плотно в P ($\bar{P}_* = P$). Так как P_* — счетное множество и $\mathcal{L}_*^2[a, b] = \bar{P}_*$, то $\mathcal{L}_*^2[a, b]$ сепарабельно.

5. Пространства L^p , L^p сепарабельные.

6. Пространство m не сепарабельное. Рассмотрим в m множество A последовательностей вида $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$, $y = (\eta_1, \eta_2, \dots)$ состоящих из нулей и единиц. Это множество имеет мощность континуума. Предположим теперь, что в m имеется всюду плотное счетное множество $m_0 = (x_1, x_2, \dots)$. Это значит, что $\forall x \in m$ существует шар $B(x_n, 1/3) \ni x$ и, таким образом, все m должно разместиться в счетном множестве открытых шаров. Так как A имеет мощность континуума, то по крайней мере в одном из шаров будет более одной точки из A . Но это невозможно, ибо $\rho(x, y) = \sup_{k=1,2,\dots} |\eta_k - \xi_k| = 1$.

Множество $A \subset X$ называется нигде не плотным, если в любом шаре B содержится шар B' , такой что $B' \cap A = \emptyset$.

Полнота. Из анализа известно, что на числовой прямой с естественным расстоянием между точками, т. е. в R^1 , имеет место критерий сходимости Коши, согласно которому последовательность $\{x_n\} \subset R^1$ сходится к числу $x \in R^1$ тогда и только тогда, когда она фундаментальная. Этот факт вытекает из полноты R^1 .

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ элементов метрического пространства X называется фундаментальной (сходящейся в себе, последовательностью Коши), если $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) > 0$ такое, что из неравенства $n > N \Rightarrow \rho(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon$, где $p > 0$ — любое натуральное число.

Всякая сходящаяся последовательность фундаментальна. В самом деле, если $x_n \rightarrow x(n \rightarrow \infty)$, то $\forall \varepsilon/2 > 0, \exists N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon) > 0$ такие, что

$$n > N_1(\varepsilon) \Rightarrow \rho(x, x_{n+p}) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad n > N_2(\varepsilon) \Rightarrow \rho(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда

$$\rho(x_{n+p}, x_n) \leq \rho(x_{n+p}, x) + \rho(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

при $n > N = \max\{N_1, N_2\}$. Обратное, вообще говоря, не верно.

Метрическое пространство называется полным, если в нем всякая фундаментальная последовательность имеет предел.

Примеры.

1. Пространство R^n полное. Пусть $\{x^{(k)}\}$ — фундаментальная последовательность в R^n .

Тогда $\rho(x^{(k)}, x^{(m)}) < \varepsilon$ ($k, m > N$) $\Rightarrow \sum_{i=1}^n (x_i^{(k)} - x_i^{(m)})^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow |x_i^{(k)} - x_i^{(m)}| < \varepsilon$ ($k > N, m > N$)

при всех $i = 1, 2, \dots, n$. Следовательно, последовательности $\{x_i^{(k)}\}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) фундаментальны в R^1 . В силу критерия сходимости Коши, они сходятся в R^1 . Полагаем $x_i^{(k)} \rightarrow x_i$ ($k \rightarrow \infty$) для всех $i = 1, 2, \dots, n$. Вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\rho^2(x, x^{(k)}) =$

$$= \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^{(k)})^2 \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

2. Пространство l^2 полное. Пусть $\{x^{(k)}\} \subset l^2$ — фундаментальная последовательность. По определению $\rho^2(x^{(k)}, x^{(m)}) = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i^{(k)} - x_i^{(m)})^2 \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty$). Следовательно, $x_i^{(k)} \rightarrow x_i$ ($i = 1, 2, \dots, n, \dots$) при $k \rightarrow \infty$. Пусть $x = (x_1, x_2, \dots)$. Покажем, что $x^{(k)} \rightarrow x$. Имеем $\forall \varepsilon > 0$ и $k > N(\varepsilon), m > N(\varepsilon)$

$$\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (x_i^{(k)} - x_i^{(m)})^2 \right\}^{1/2} < \varepsilon.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $k \rightarrow \infty$, находим

$$\rho(x, x^{(m)}) = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - x_i^{(m)})^2 \right\}^{1/2} < \varepsilon \quad (k > N, m > N).$$

Остается проверить, что $x \in l^2$. В силу неравенства справедливого для всех n имеем

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 2 \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^{(m)})^2 + 2 \sum_{i=1}^n (x_i^{(m)})^2 \leq 2 \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - x_i^{(m)})^2 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} (x_i^{(m)})^2 < \infty.$$

Осталось перейти в этом неравенстве к пределу при $n \rightarrow \infty$.

3. Пространство $C[a, b]$ полное. Если $\{x_n(t)\}$ фундаментальная последовательность в $C[a, b]$, то $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) > 0$, что

$$n > N, m > N \Rightarrow |x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon \quad (\text{для всех } t \in [a, b]).$$

Фиксируя $t \in [a, b]$, получаем фундаментальную последовательность $\{x_n(t)\}$ в R^1 . Пусть $x(t)$ — предел этой последовательности. Поскольку $x_n(t) \rightarrow x(t)$ для любого $t \in [a, b]$, то предел есть функция $x(t)$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \rightarrow \infty$, находим

$$|x(t) - x_m(t)| < \varepsilon \text{ при } m > N \text{ для всех } t \in [a, b].$$

Следовательно, $\{x_n(t)\}$ сходится к $x(t)$ равномерно на $[a, b]$. Но тогда $x(t) \in C[a, b]$ как предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных на $[a, b]$ функций [23].

4. Пространства m, l^p, L^p — полные.

Докажем полноту пространства m ($x = (x_1, x_2, \dots) \in m$, если $\exists M > 0$ такое, что $|x_i| < M$ для всех $i = 1, 2, \dots$). Если $\{x^{(k)}\}$ — фундаментальная последовательность в m , то $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) > 0, i = 1, 2, \dots$ что

$$m > N, n > N \Rightarrow \rho(x^{(m)}, x^{(n)}) = \sup_i |x_i^{(m)} - x_i^{(n)}| < \varepsilon.$$

Фундаментальные последовательности $\{x_i^{(m)}\}$ ($i = 1, 2, \dots$) сходятся в R^1 . Пусть $x_i^{(m)} \rightarrow x_i$ ($m \rightarrow \infty$), тогда $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) > 0$, что

$$m > N \Rightarrow |x_i^{(m)} - x_i| < \varepsilon \text{ для всех } i = 1, 2, \dots$$

Отсюда $x_i^{(m)} - \varepsilon < x_i < x_i^{(m)} + \varepsilon$, что и требовалось.

5. Пространство $\mathcal{L}_*^2[a, b]$ не является полным. На отрезке $[-1, 1]$ рассмотрим последовательность непрерывных функций (см. рис. А.3)

$$x_n(t) = \begin{cases} -1, & -1 \leq t \leq -1/n, \\ tm, & -1/n \leq t \leq 1/n, \\ 1, & 1/n \leq t \leq 1. \end{cases}$$

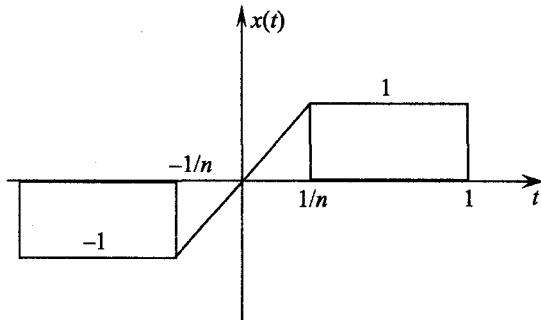


Рис. А.3. К доказательству неполноты пространства $\mathcal{L}_*^2[a, b]$

Эта последовательность фундаментальна, т. к.

$$\rho^2(x_n, x_m) = \int_{-1}^1 [x_n(t) - x_m(t)]^2 dt \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty).$$

Однако пределом ее не может быть непрерывная на $[-1, 1]$ функция. Предполагая противное, что $x_n(t) \rightarrow x(t)$ ($n \rightarrow \infty$), где $x(t)$ некоторая непрерывная на $[-1, 1]$ функция, мы получили бы

$$\begin{aligned} \rho^2(x, x_n) &= \int_{-1}^1 [x(t) - x_n(t)]^2 dt = \int_{-1}^0 [x(t) - x_n(t)]^2 dt + \int_0^1 [x(t) - x_n(t)]^2 dt \rightarrow \\ &\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \Rightarrow \int_{-1}^0 [x(t) - x_n(t)]^2 dt \rightarrow 0 \text{ и } \int_0^1 [x(t) - x_n(t)]^2 dt \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Отсюда следовало бы, что

$$\begin{aligned} |x(t) - x_n(t)| &\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \text{ на } [-1, 0], \\ |x(t) - x_n(t)| &\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \text{ на } [0, 1]. \end{aligned}$$

Но тогда

$$x(t) = \begin{cases} -1, & -1 \leq t < 0; \\ 0, & t = 0; \\ 1, & 0 < t \leq 1 \end{cases}$$

разрывная функция, что и требовалось.

В полных метрических пространствах имеет место аналог леммы Кантора о стягивающихся отрезках.

Теорема. Пусть X — полное метрическое пространство и $B[a_n, r_n] \subset X$ последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров: $B[a_n, r_n] \supseteq B[a_{n+1}, r_{n+1}]$ ($n = 1, 2, \dots$), радиусы которых $r_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Тогда существует единственная точка $a \in X$, принадлежащая всем шарам этой последовательности.

Доказательство. Последовательность центров $\{a_n\}$ фундаментальная. В самом деле, $\forall p > 0$ (натурального) шар $B[a_{n+p}, r_{n+p}] \subset B[a_n, r_n]$, значит,

$$\rho(a_{n+p}, a_n) \leq r_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Так как X — полное пространство, то $a_n \rightarrow a \in X$ ($n \rightarrow \infty$).

Рассмотрим теперь шар $B[a_m, r_m]$. Очевидно, все точки последовательности $\{a_n\}$ (за исключением, быть может, конечного их числа) лежат в этом шаре, а поскольку он замкнут, то $a \in B[a_m, r_m]$ как предельная точка множества $\{a_n\} \subset B[a_m, r_m]$. В силу произвольности m заключаем, что точка a принадлежит всем шарам нашей последовательности. Она определяется последовательностью вложенных друг в друга замкнутых шаров $B[a_n, r_n]$ единственным образом, ибо две точки, находящиеся на конечном расстоянии друг от друга, не могут лежать в шаре, диаметр которого меньше расстояния между ними.

Замечание. Замкнутое множество $M \subset X$, снабженное метрикой полного пространства X , само является полным метрическим пространством. Для доказательства рассмотрим фундаментальную последовательность $\{x_n\} \subset M$. В силу полноты X $\lim x_n = x_0 \in \in X$ ($n \rightarrow \infty$). Следовательно, $x_0 \in M$ как предельная точка M (если M — множество изолированных точек, то x_0 — точка прикосновения этого множества).

Принцип сжатых отображений. Пусть даны два метрических пространства X и Y . Будем говорить, что на X задана функция (отображение) $f(x)$ или оператор, если любому элементу $x \in X$ по определенному правилу f ставится в соответствие единственный элемент $y \in Y$.

Это соответствие может обозначаться различными способами:

$$y = f(x), \quad y = fx, \quad f : X \rightarrow Y \quad (\text{оператор } f \text{ действует из } X \text{ в } Y).$$

Если пространства X и Y совпадают ($f : X \rightarrow X$), то говорят, что оператор f действует в пространстве X .

Оператор f , действующий в метрическом пространстве X , называется сжимающим, если $\forall x_1, x_2 \in X$ имеет место неравенство

$$\rho(fx_1, fx_2) \leq \theta \rho(x_1, x_2), \quad \text{где } 0 < \theta < 1.$$

При отображении $f : X \rightarrow X$ не исключены случаи, когда некоторая точка $x_* \in X$ переходит в себя, т. е. $f(x_*) = x_*$. Такие точки называются неподвижными точками отображения $f : X \rightarrow X$.

Теорема (принцип неподвижной точки Пикара–Банаха). Сжимающее отображение f полного метрического пространства X в себя имеет неподвижную точку и притом только одну.

Доказательство. Отправляемся от произвольного элемента $x_0 \in X$ построим последовательность

$$x_1 = f(x_0), \quad x_2 = f(x_1), \dots, \quad x_n = f(x_{n-1}), \dots$$

Так как $f: X \rightarrow X$, то $\{x_n\} \subset X$. Покажем, что $\{x_n\}$ фундаментальная. Так как f сжимающий оператор, то

$$\rho(x_2, x_1) = \rho(f(x_1), f(x_0)) \leq \theta \rho(x_1, x_0),$$

$$\rho(x_3, x_2) = \rho(f(x_2), f(x_1)) \leq \theta \rho(x_2, x_1) \leq \theta^2 \rho(x_1, x_0),$$

.

И вообще,

$$\rho(x_{v+1}, x_v) \leq \theta^v \rho(x_1, x_0), \quad v = 1, 2, \dots$$

Отсюда при любом целом $p > 0$ получаем цепочку неравенств

$$\begin{aligned} \rho(x_{v+p}, x_v) &\leq \rho(x_v, x_{v+1}) + \rho(x_{v+1}, x_{v+2}) + \dots + \rho(x_{v+p-1}, x_{v+p}) \leq \\ &\leq (\theta^v + \theta^{v+1} + \dots + \theta^{v+p-1}) \rho(x_1, x_0) \leq \theta^v (1 + \theta + \theta^2 + \dots) \rho(x_1, x_0) \leq \\ &\leq \frac{\theta^v}{1-\theta} \rho(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Так как $0 < \theta < 1$, то $\rho(x_{v+p}, x_v) \rightarrow 0$ ($v \rightarrow \infty$).

В силу полноты пространства X последовательность $\{x_n\}$ сходится к элементу $x_* \in X$. Покажем, что x_* — неподвижная точка отображения $f: X \rightarrow X$. Имеем

$$\begin{aligned} \rho(f(x_*), x_*) &\leq \rho(f(x_*), x_n) + \rho(x_n, x_*) = \rho(f(x_*), f(x_{n-1})) + \rho(x_n, x_*) \leq \\ &\leq \theta \rho(x_*, x_{n-1}) + \rho(x_n, x_*) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \Rightarrow f(x_*) = x_*. \end{aligned}$$

Точка x_* — единственная неподвижная точка отображения $f: X \rightarrow X$. Если y_* — другая неподвижная точка, то

$$\rho(x_*, y_*) = \rho(Ax_*, Ay_*) \leq \theta \rho(x_*, y_*) \Rightarrow \rho(x_*, y_*) = 0 \Rightarrow x_* = y_*.$$

Теорема доказана.

Замечание. В полном метрическом пространстве X рассмотрим уравнение

$$f(x) = x, \tag{A.5}$$

где оператор $f: X \rightarrow X$ сжимающий. Тогда принцип неподвижной точки гарантирует:

1. Решение уравнения (A.5) x_* может быть найдено методом последовательных приближений: $x_{n+1} = f(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, причем оно единственное и не зависит от точки старта $x_0 \in X$.

2. Погрешность n -го приближения убывает с увеличением номера n и контролируется неравенством

$$\rho(x_*, x_n) \leq \frac{\theta^n}{1-\theta} \rho(x_1, x_0). \quad (\text{A.6})$$

Теорема Пикара–Банаха и предлагаемая в ней конструктивная процедура определения решений операторных уравнений имеет многочисленные приложения. Рассмотрим некоторые из них.

1. Решение алгебраических или трансцендентных уравнений. Рассмотрим уравнение

$$x = f(x), \quad (\text{A.7})$$

где $f(x)$ — действительная, непрерывная и дифференцируемая на $[a, b]$ функция, причем $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$. Пусть, кроме того, $|f'(x)| \leq \alpha < 1$. Тогда f осуществляет сжимающее отображение $[a, b] \rightarrow [a, b]$. В самом деле, $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$:

$$\rho(f(x_1), f(x_2)) = |f(x_1) - f(x_2)| = |f'(\xi)| |x_2 - x_1| \leq \alpha \rho(x_1, x_2).$$

Поэтому к уравнению (A.7) может быть применен метод последовательных приближений (простой итерации)

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

со стартом из произвольной точки $x_0 \in [a, b]$.

Оценка погрешности n -го приближения на основании (A.6) имеет вид

$$\rho(x_*, x_n) = |x_* - x_n| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} |x_1 - x_0|.$$

2. Решение системы линейных алгебраических уравнений. В n -мерном евклидовом пространстве R^n рассмотрим линейный невырожденный оператор A , действующий на произвольный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ по формуле

$$y_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k + b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (\text{A.8})$$

где $b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in R^n$ — некоторый фиксированный вектор. Оператор A переводит вектор $x \in R^n$ в вектор $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in R^n$, т. е. $A : R^n \rightarrow R^n$. Выясним условия, при которых он наверняка будет сжимающим. Имеем

$$\begin{aligned} \rho(Ax, Ax') &= \rho(y, y') = \left\{ \sum_{i=1}^n (y_i - y'_i)^2 \right\}^{1/2} = \left\{ \sum_{i=1}^n \left[\sum_{k=1}^n a_{ik} (x_k - x'_k) \right]^2 \right\}^{1/2} \leq \\ &\leq \left\{ \sum_{i=1}^n \left[\sum_{k=1}^n a_{ik}^2 \sum_{j=1}^n (x_j - x'_j)^2 \right] \right\}^{1/2} = \rho(x, x') \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}^2 \right\}^{1/2}. \end{aligned}$$

Таким образом, для того, чтобы отображение $A : R^n \rightarrow R^n$ было сжимающим достаточно выполнения условия

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2 \leq \theta < 1.$$

При этом можно утверждать, что система

$$x_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k + b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{A.9})$$

имеет единственное решение, которое может быть найдено (с любой степенью точности) методом последовательных приближений, исходя из произвольной точки $x^{(0)} \in R^n$:

$$x_i^{(m)} = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k^{(m-1)} + b_i \quad (m = 1, 2, \dots).$$

3. Рассмотрим систему (A.9) в пространстве R_1^n и выясним при каких условиях оператор A , заданный преобразованием (A.8) наверное будет сжимающим. Имеем в метрике пространства R_1^n

$$\begin{aligned} \rho(Ax, Ax') &= \sum_{i=1}^n |y_i - y'_i| = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} (x_k - x'_k) \right| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{ik}| |x_k - x'_k| = \\ &= \sum_{k=1}^n |x_k - x'_k| \sum_{i=1}^n |a_{ik}| \leq \rho(x, x') \max_k \sum_{i=1}^n |a_{ik}|. \end{aligned}$$

Следовательно, для сжимаемости отображения $A : R_1^n \rightarrow R_1^n$ достаточно выполнения условия

$$\max_{1 \leq k \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ik}| \leq \theta < 1.$$

4. В пространстве R_∞^n оператор A из предыдущего примера преобразует расстояние между точками x и x' по формуле

$$\begin{aligned} \rho(Ax, Ax') &= \max_{1 \leq i \leq n} |y_i - y'_i| = \max_i \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} (x_k - x'_k) \right| \leq \max_i \sum_{k=1}^n |a_{ik}| |x_k - x'_k| \leq \\ &\leq \max_{1 \leq k \leq n} |x_k - x'_k| \cdot \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{k=1}^n |a_{ik}| = \rho(x, x') \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{k=1}^n |a_{ik}|. \end{aligned}$$

Достаточное условие сжимаемости отображения $A : R_\infty^n \rightarrow R_\infty^n$

$$\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{k=1}^n |a_{ik}| \leq \theta < 1.$$

5. Существование и единственность решения задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

Здесь $f(t, x)$ — функция непрерывная в некоторой плоской области $G \supset (t_0, x_0)$.

Задача Коши (A.10) равносильна интегральному уравнению

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau.$$

Пусть $|t - t_0| \leq h$, $M = \max_{G'} |f(t, x)|$, $G' \subset G$ — некоторая замкнутая область и h таково, что прямоугольник $D = \{(t, x) : |t - t_0| \leq h, |x(t) - x_0| \leq Mh\} \subset G'$.

Рассмотрим пространство C_* всех непрерывных на $[t_0 - h, t_0 + h]$ функций $x(t) \in B[x_0, Mh]$ с чебышевской метрикой. Поскольку C_* есть замкнутое подмножество полного метрического пространства $C[t_0 - h, t_0 + h]$, то C_* — само полное пространство. Оператор Φ , действующий на $\forall x(t) \in C_*$ по формуле

$$y(t) = \Phi(x) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau,$$

переводит $x(t)$ в (непрерывный) элемент $y(t)$, причем $|y(t) - x_0| \leq Mh$ для всех $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$. Следовательно, $\Phi : C_* \rightarrow C_*$. Если дополнительно предположить, что функция $f(t, x(t))$ для всех $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ удовлетворяет условию Липшица по второму аргументу:

$$|f(t, z_1) - f(t, z_2)| \leq L |z_1 - z_2| \quad \forall z_1(t), z_2(t) \in C_*,$$

то оператор Φ будет сжимающим при $Lh < 1$. Действительно,

$$\begin{aligned} \rho(\Phi x_1, \Phi x_2) &= \max_{t_0 - h \leq t \leq t_0 + h} |y_1(t) - y_2(t)| = \max \left| \int_{t_0}^t [f(\tau, x_1(\tau)) - f(\tau, x_2(\tau))] d\tau \right| \leq \\ &\leq \int_{t_0}^t L \max |x_1(t) - x_2(t)| dt < Lh \rho(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Таким образом, при выполнении указанных выше условий решение задачи Коши (A.10) существует и единственno (теорема Пикара).

Принцип Шаудера. При отображении Φ одного множества в другое может существовать одна или несколько неподвижных точек, так что $\Phi(x) = x$, а может таких неподвижных точек и не быть. Например, отображение, совершающее поворот круга на 90° вокруг центра, имеет одну неподвижную точку — центр круга. Преобразование всестороннего сжатия также имеет неподвижную точку, а при отображении окружности в себя путем поворота на 90° неподвижных точек нет.

Достаточный признак существования и единственности неподвижной точки при отображении полного метрического пространства X в себя дает, как было выяснено, принцип сжатых отображений (теорема Пикара–Банаха). Однако он накладывает жесткое ограничение строгого сжатия на непрерывное отображение, которое далеко не всегда можно выполнить. Понятно, что этот принцип имеет место и в банаховом пространстве. Для вполне непрерывных операторов условие строгой сжимаемости можно ослабить.

Имеет место принцип Шаудера [12]. Пусть оператор Φ вполне непрерывен и отображает в себя ограниченное замкнутое выпуклое множество Q . Тогда уравнение $x = \Phi(x)$ имеет в Q по крайней мере одно решение. Если множество Q компактно, то достаточно, чтобы оператор Φ был непрерывным.

Принцип сжатых отображений и принцип Шаудера обобщаются следующим общим принципом неподвижной точки [9].

Пусть Q есть замкнутое ограниченное выпуклое множество в банаевом пространстве X , Φ и φ операторы, определенные в Q , причем

$$1) \Phi(x) + \varphi(x) \in Q, \forall x, y \in Q;$$

2) Оператор φ сжимающий;

3) Оператор Φ вполне непрерывен.

Тогда в Q имеется, по меньшей мере, одно решение уравнения

$$\Phi(x) + \varphi(x) = x.$$

В случае уравнения $x = Ax$ с линейным вполне непрерывным оператором, отображающим шар $B[\theta, r]$ в себя, имеется следующий способ определения решений [25]. Стартуя с некоторого $x_0 \in B[\theta, r]$, строят последовательные приближения $x_n = Ax_{n-1}$ ($n = 1, 2, \dots$). Последовательность элементов

$$z_n = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n$$

компактна, и все ее предельные точки являются решениями уравнения $x = Ax$.

Пополнение метрического пространства. Пусть M метрическое пространство (вообще говоря, неполное). Его пополнением называется полное метрическое пространство M^* , если:

1) M изометрично некоторой части $M_1 \subset M^*$;

2) M_1 плотно в M^* , т. е. $\bar{M}_1 = M^*$.

Имеет место теорема (Ф. Хаусдорф). Всякое (неполное) метрическое пространство M имеет пополнение. Это пополнение единственное с точностью до изометрии, оставляющей неподвижными точки из M .

Доказательство.

а) Конструкция пополнения M^* исходного метрического пространства M . Рассмотрим множество всех фундаментальных последовательностей $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}, \dots$ из элементов пространства M . Последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\} \subset M$ назовем эквивалентными, если $\rho(x_n, y_n) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Очевидно, введенное отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно. Следовательно, совокупность всех фундаментальных последовательностей в M разбивается на непересекающиеся классы x^* , y^* , z^* , \dots В класс входят все последовательности, эквивалентные данной и любые две неэквивалентные последовательности входят в различные классы. Из всех таких классов x^* , y^* , z^* , \dots строится пополнение M^* .

Расстояние в M^* для $\forall x^*, y^* \in M^*$ введем по формуле

$$\rho^*(x^*, y^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n) (n \rightarrow \infty),$$

где $\{x_n\}, \{y_n\} \subset M$ любые представители классов x^* и y^* соответственно. В силу неравенства четырехугольника

$$|\rho(x_{n+p}, y_{n+p}) - \rho(x_n, y_n)| \leq \rho(x_{n+p}, x_n) + \rho(y_{n+p}, y_n) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty, p > 0),$$

т. е. числовая последовательность $\rho(x_n, y_n)$ — фундаментальная, а значит, имеет предел в R^1 .

Этот предел не зависит от выбора представителей в классах. В самом деле, если $\{x'_n\}, \{y'_n\}$ другие представители классов x^*, y^* , то $|\rho(x'_n, y'_n) - \rho(x_n, y_n)| \leq \rho(x'_n, x_n) + \rho(y'_n, y_n) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$.

Теперь следует проверить выполнение аксиом метрического пространства. Из определения расстояния ρ^* следует, что оно не отрицательно. Далее, из равенства

$$\rho^*(x^*, y^*) = 0 \Rightarrow \lim \rho(x_n, y_n) = 0 \Rightarrow \{x_n\} \sim \{y_n\} \Rightarrow x^* = y^*.$$

Обратное очевидно. Таким образом, аксиома тождества имеет место. Выполнение аксиомы симметрии следует из симметрии расстояния в M .

Наконец, неравенство треугольника для ρ^* устанавливается из неравенства

$$\rho(x_n, z_n) \leq \rho(x_n, y_n) + \rho(y_n, z_n)$$

с последующим переходом к пределу при $n \rightarrow \infty$.

Итак, M^* — метрическое пространство.

б) Пространство M изометрично подпространству $M_1 \subset M^*$.

Введем отображение f множества M на множество $M_1 \subset M^*$ следующим образом. Каждому элементу x из M поставим в соответствие класс x^* , состоящий из фундаментальных последовательностей эквивалентных стационарной последовательности $\{x, x, \dots, x, \dots\}$. Таким образом, каждому элементу $x \in M$ отображение f ставит в соответствие единственный элемент x^* (состоящий из всех фундаментальных последовательностей, сходящихся к элементу x). И обратно, разным элементам $x, y \in M$ не может соответствовать один класс из M_1 . Отсюда следует, что f — взаимно-однозначное отображение M на M_1 и поскольку пространство M неполное (т. е. существуют фундаментальные последовательности из его элементов, которые не сходятся в M), то M_1 есть часть M^* . Далее, если $x \leftrightarrow x^*, y \leftrightarrow y^*$, то

$$\rho^*(x^*, y^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n) = \lim \rho(x, y) = \rho(x, y).$$

Следовательно, с точностью до изометрии пространство $M = M_1 \subset M^*$.

в) Пространство M_1 плотно в M^* .

Пусть класс x^* — произвольный элемент из M^* с типичным представителем $\{x_n\}$. Рассмотрим в M_1 последовательность $x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*, \dots$, каждый элемент которой x_m^* определяется стационарной последовательностью в $M : x_m, x_m, \dots, x_m, \dots$. По определению расстояния в M^* :

$$\rho^*(x^*, x_m^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x_m) = 0.$$

Следовательно, x^* есть предел последовательности элементов из M_1 . В силу произвольности $x^* \in M^*$ заключаем, что $\bar{M}_1 = M^*$.

г) M^* — полное пространство.

Пусть $\{y_n^*\}$ фундаментальная последовательность в M^* . Для каждого класса y_n^* находится в M_1 класс x_n^* , такой что $\rho^*(y_n^*, x_n^*) < \frac{1}{n}$ (M_1 плотно в M^*). Класс $x_n^* (n=1, 2, \dots)$ определяется стационарной последовательностью $(x_n, x_n, \dots, x_n, \dots)$ элементов из M . Последовательность $\{x_n\}$ фундаментальная. В самом деле,

$$\rho^*(y_n^*, y_m^*) \leq \rho^*(y_n^*, x_n^*) + \rho^*(x_n^*, x_m^*) + \rho^*(x_m^*, y_m^*) < \frac{1}{n} + \rho(x_n, x_m) + \frac{1}{m} \rightarrow 0.$$

Отсюда

$$\rho(x_n, x_m) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty).$$

Последовательность $\{x_n\}$ определяет некоторый класс z^* , который является элементом M^* . Покажем, что фундаментальная последовательность $\{y_n^*\}$ сходится в M^* к элементу z^* . Имеем

$$\rho^*(y_n^*, z^*) \leq \rho^*(y_n^*, x_n^*) + \rho^*(x_n^*, z^*) < \frac{1}{n} + \lim_{m \rightarrow \infty} \rho(x_n, x_m) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty).$$

Итак, всякая фундаментальная последовательность $\{y_n^*\}$ сходится в M^* , что и требовалось.

д) Пополнение метрического пространства M единственно (с точностью до изометрии).

Докажем, что если M^* и M^{**} два пополнения пространства M , то они изометричны. Введем соответствие f между элементами множеств M^* и M^{**} следующим образом. Пусть x^* — произвольный элемент из M^* . Поскольку M_1 изометрично пространству M и $\bar{M}_1 = M^*$, то в M_1^* найдется последовательность классов $\{x_n^*\}$, сходящаяся (по метрике ρ^*) к элементу x^* . Каждому классу x_n^* поставим в соответствие стационарную последовательность $(x_n, x_n, \dots) \subset M$.

Компактность. В анализе важную роль играет теорема Больцано–Вейерштрасса, согласно которой всякое ограниченное бесконечное множество на прямой имеет по крайней мере одну предельную точку. Это утверждение можно сформулировать и так: из всякой ограниченной последовательности точек на прямой можно выделить сходящуюся подпоследовательность (2-я теорема Больцано–Вейерштрасса). В произвольных метричес-

ских пространствах аналогичная теорема не имеет места, однако, можно выделить в отдельную группу те пространства, для которых она остается справедливой.

Определение. Множество M , лежащее в метрическом пространстве X называется компактным, если из любой бесконечной последовательности $\{x_n\}$ его элементов можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$.

Если пределы всех таких подпоследовательностей принадлежат M , то это множество называется компактным в себе (бикомпактным). Очевидно, если множество M компактно в X и замкнуто, то оно компактно в себе.

Если все метрическое пространство X — компактное множество, то поскольку оно замкнуто, оно компактно в себе. Такое метрическое пространство называется компактом.

Примеры.

1. Любое множество с конечным числом элементов является компактным, ибо любая бесконечная последовательность в нем будет содержать стационарную подпоследовательность.

2. Отрезок $[0, 1]$ является компактным в себе множеством в R^1 . Это следует из теоремы Больцано–Вейерштрасса. Если $[0, 1]$ с естественной метрикой рассматривать как метрическое пространство X , то X — компакт.

3. Интервал (a, b) компактен в $[a, b]$, но не является компактным в себе множеством.

4. Всякое ограниченное множество M в R^n компактно. Если, кроме того, M — замкнуто, то оно компактно в себе.

Пример. Гильбертов кирпич. Так называется множество

$$Q = \{x = (x_1, x_2, \dots) \in l^2 : |x_i| \leq 1/2^{i-1}\}.$$

Множество $Q \subset l^2$ — замкнуто. В самом деле, если $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots) \in l^2$ — предельная точка, то в Q найдется последовательность $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots)$ точек (отличных от x^0), сходящаяся к x_0 в l^2 . Отсюда следует, что $x_i^{(n)} \rightarrow x_i^0$ при $n \rightarrow \infty$ для всех $i = 1, 2, \dots$ и $|x_i^0| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} x_i^{(n)} \right| \leq 1/2^{i-1}$, т. е. $x_0 \in Q$.

Множество Q — ограниченное, $\forall x \in Q$ имеем

$$\rho^2(0, x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{2i-2} = 4/3.$$

Следовательно, $Q \subset B[0, 2/\sqrt{3}]$. Множество Q компактно в себе.

Множество A , лежащее в метрическом пространстве X , называется ε -сетью для множества $M \subset X$, если для некоторого числа $\varepsilon > 0$ и $\forall x \in M$ существует элемент $a \in A$, такой что $\rho(a, x) < \varepsilon$.

Примеры.

1. Само множество A является ε -сетью для себя.

2. Множество рациональных точек $r \in (0, 1)$ является ε -сетью для $(0, 1)$ при любом $\varepsilon > 0$.

Таким образом, если A есть ε -сеть множества $M \subset X$, то $\forall x \in M$ принадлежит объединению $\bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon)$, а это означает, что A содержит достаточный запас элементов, чтобы совокупность шаров $B(a, \varepsilon)$ покрыла множество M .

Множество M , лежащее в метрическом пространстве X , называется вполне ограниченным, если $\forall \varepsilon > 0$ в X имеется конечная ε -сеть для него. Очевидно, всякое вполне ограниченное множество M ограничено в X . Имеет место критерий компактности множества в метрическом пространстве X .

Теорема (Ф. Хаусдорф). Для компактности множества M метрического пространства X необходимо, а в случае полноты X и достаточно, чтобы оно было вполне ограниченным.

Доказательство необходимости.

Пусть M — компактное множество в X . Покажем, что оно вполне ограничено. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно и $x_1 \in M$. Если $M \subset B(x_1, \varepsilon)$, то конечная ε -сеть построена, это множество, состоящее из одной точки x_1 . В противном случае существует точка $x_2 \in M$, такая что $\rho(x_1, x_2) \geq \varepsilon$. Если $M \subset B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon)$, то конечная ε -сеть построена. Это — множество $\{x_1, x_2\}$. В противном случае, рассуждение необходимо продолжить. В результате получаем последовательность x_1, x_2, x_3, \dots , причем $\rho(x_n, x_m) \geq \varepsilon$ ($m \neq n$) по построению. Она не может содержать бесконечное число элементов, ибо это означало бы, что из бесконечной последовательности элементов множества M нельзя выделить сходящейся подпоследовательности. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ заключаем, что множество вполне ограничено.

Доказательство достаточности.

Пусть M — вполне ограниченное множество, покажем, что оно компактно в X . Положим $\varepsilon_n = 1/n$ ($n = 1, 2, \dots$) и построим конечные ε_n -сети для множества M и, в частности, для произвольной бесконечной последовательности $\{x_k\}$ его элементов:

$$\begin{aligned} a_1^{(1)}, \quad a_2^{(1)}, \quad \dots, \quad a_{n_1}^{(1)}, \\ a_1^{(2)}, \quad a_2^{(2)}, \quad \dots, \quad a_{n_2}^{(2)}, \\ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Поскольку шаров $B(a_i^{(1)}, \varepsilon_i)$ конечное число, а $\{x_k\}$ — бесконечная последовательность, то по крайней мере в одном из этих шаров B_1 будет содержаться бесконечно много элементов нашей последовательности. Эту (бесконечную) часть последовательности $\{x_k\}$ обозначим M_1 ($M_1 \subset B_1$). Далее возьмем точки ε_2 -сети, лежащие в шаре B_1 . Так как шаров $B(a_i^{(2)}, \varepsilon_2)$ — конечное число, а M_1 содержит бесконечное число элементов, то по крайней мере в одном шаре B_2 есть бесконечная часть M_2 множества M_1 . Продолжив это рассуждение для $n = 3, 4, \dots$, мы получим последовательность шаров $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \dots$ радиусы

которых $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Теперь построим подпоследовательность $\{y_m\}$ последовательности $\{x_k\}$ следующим образом:

$$y_1 \in M_1 \subset B_1, \text{ but } y_1 \notin B_2,$$

$$y_2 \in M_2 \subset B_2, \text{ but } y_2 \notin B_3,$$

• • • • • • • • • • • • • • •

Эта подпоследовательность фундаментальная, так как элементы y_m и y_n ($m > n$) попадут внутрь шара B_n и, следовательно, $\rho(y_n, y_m) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). В силу полноты метрического пространства X последовательность $\{y_m\}$ имеет предел в X , что и требовалось.

Из доказанной теоремы непосредственно вытекает следующее достаточное условие компактности множества: для того чтобы множество M , лежащее в полном метрическом пространстве X было компактным, достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0$ в X существовала компактная ε -сеть для него.

В самом деле, взяв произвольное $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, построим $\frac{\varepsilon}{2}$ -сеть для множества M . Пусть это будет множество N . Тогда $\forall x \in M, \exists a \in N$ такая, что $\rho(x, a) < \frac{\varepsilon}{2}$. Поскольку N — компактное множество, то существует $\frac{\varepsilon}{2}$ -сеть для N . Пусть это будет конечное множество N_0 . Тогда для элемента $a \in N$ найдется элемент $a_0 \in N_0$, такой что $\rho(a, a_0) < \frac{\varepsilon}{2}$. Теперь имеем

$$\rho(x, a_0) \leq \rho(x, a) + \rho(a, a_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом, для множества M существует в X конечная ε -сеть. Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то M — вполне ограниченное множество. В силу теоремы Хаусдорфа M — компактное множество.

Пример. Рассмотрим снова «гильбертов кирпич» $Q = \{x = (x_1, x_2, \dots) \in l^2 : |x_i| \leq 1/2^{i-1}\}$. Пусть $Q_n = \{x^{(n)} = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots) \in l^2 : |x_i| \leq 1/2^{i-1}, i = 1, 2, \dots, n\}$. При каждом фиксированном n : $Q_n \subset Q$. Очевидно Q_n (с метрикой пространства l^2) изометрично множеству $P = \{y = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n : |x_i| \leq 1/2^{i-1}, i = 1, 2, \dots, n\}$, лежащему в пространстве R^n , так как между их элементами имеется взаимно-однозначное соответствие, причем

$$\rho_{l^2}(x^{(n)}, x'^{(n)}) = \rho_{R^n}(y, y') = \left\{ \sum_{i=1}^n |x_i - x'_i|^2 \right\}^{1/2}.$$

Множество $P \subset R^n$ ограниченно, так как

$$\rho_{R^n}^2(y, 0) = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 < \frac{4}{3}.$$

Поэтому его можно погрузить в шар $B(0, 2/\sqrt{3})$. Как ограниченное множество из R^n оно компактно, следовательно, компактно и множество $Q_n \subset l^2$. Покажем, что Q_n образует компактную ε -сеть для множества Q при любом $\varepsilon > 0$. Задав $\varepsilon > 0$, выберем n таким, чтобы выполнялось неравенство $2 < 2^{n/2} \sqrt{3} \varepsilon$.

Имеем для произвольного $x \in Q$

$$\rho(x, x^{(n)}) = \left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^2 \right\}^{1/2} \leq \left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-2} \right\}^{1/2} < \frac{2}{\sqrt{3}2^{n/2}} < \varepsilon.$$

Таким образом, $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) > 0$ такое, что при $n > N(\varepsilon)$ множество Q_n является компактной ε -сетью для Q . Следовательно, Q — компактное множество, а так как Q — замкнутое множество, оно компактно в себе.

Имеет место простое утверждение: любое компактное метрическое пространство X сепарабельно.

Доказательство вытекает из того факта, что объединение $1/n$ -сетей ($n = 1, 2, \dots$) для X есть счетное множество P . С другой стороны, $\forall x \in X$ в этом множестве найдется последовательность $\{a_n\}$, сходящаяся к x . Стало быть, $\bar{P} = X$, что и требовалось.

Общий критерий компактности не всегда удобен для приложений, поэтому разработаны необходимые и достаточные условия компактности множеств для конкретных метрических пространств. Приведем критерий компактности множества в $C[a, b]$.

Семейство Φ функций $\varphi(t) \in C[a, b]$ называется равномерно ограниченным, если для всех функций этого семейства имеет место оценка на $[a, b]$

$$|\varphi(t)| < K.$$

Семейство Φ функций $\varphi(t) \in C[a, b]$ называется равностепенно непрерывным, если $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех функций $\varphi(t) \in \Phi$ и $\forall t_1, t_2 \in [a, b]$ из неравенства $|t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow |\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| < \varepsilon$. Имеет место следующий критерий компактности в пространстве $C[a, b]$.

Теорема (Ч. Арцел). Для того чтобы семейство Φ функций $\varphi(t) \in C[a, b]$ было компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было равномерно ограничено и равностепенно непрерывно.

Доказательство необходимости. Пусть Φ — компактно, тогда оно ограничено. Это означает, что множество $\Phi \subset B(0, K)$, иными словами, $\exists K > 0$ такое, что для всех функций $\varphi(t) \in \Phi$ имеет место оценка:

$$\max_{a \leq t \leq b} |\varphi(t)| < K.$$

Отсюда следует равномерная ограниченность семейства Φ .

Для доказательства равностепенной непрерывности этого семейства введем конечную $\frac{\varepsilon}{3}$ -сеть для него: $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$. Имеем для $\forall \varphi \in \Phi$ и некоторой φ_i из этой сети

$$\rho(\varphi, \varphi_i) < \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow \max_{a \leq t \leq b} |\varphi(t) - \varphi_i(t)| < \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow |\varphi(t_1) - \varphi_i(t_1)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall t_1 \in [a, b]$$

и

$$|\varphi(t_2) - \varphi_i(t_2)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall t_2 \in [a, b].$$

Далее, из непрерывности на $[a, b]$ $\varphi_i(t)$ следует их равномерная непрерывность.

Поэтому для того же $\frac{\varepsilon}{3}$ можно подобрать $\delta_i > 0$, такие что $|\varphi_i(t_1) - \varphi_i(t_2)| < \frac{\varepsilon}{3}$ при $|t_1 - t_2| < \delta_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$). Взяв $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m)$, получим для всех $\varphi_i(t)$ из нашей $\frac{\varepsilon}{3}$ -сети

$$|t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow |\varphi_i(t_1) - \varphi_i(t_2)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall t_1, t_2 \in [a, b].$$

Теперь имеем для произвольного $\varepsilon > 0$ и $|t_1 - t_2| < \delta(\varepsilon)$

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| < |\varphi(t_1) - \varphi_i(t_1)| + |\varphi_i(t_1) - \varphi_i(t_2)| + |\varphi_i(t_2) - \varphi(t_2)| < \varepsilon,$$

причем это неравенство справедливо для всех функций $\varphi(t)$ из семейства Φ .

Доказательство достаточности.

Пусть семейство Φ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно, докажем, что Φ компактно в $C[a, b]$. Возьмем $\forall \frac{\varepsilon}{5} > 0$ и подберем такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $\varphi(t) \in \Phi$ и $\forall t_1, t_2 \in [a, b]$

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| < \frac{\varepsilon}{5} \text{ при } |t_2 - t_1| < \delta.$$

Это сделать возможно в силу равностепенной непрерывности семейства Φ . Поскольку Φ равномерно ограничено, то $\exists K > 0$, одинаковая для всех $\varphi \in \Phi$, такая что

$$|\varphi(t)| < K, \quad t \in [a, b].$$

Разобьем прямоугольник $a \leq t \leq b, -K \leq \varphi \leq K$ точками (t_k, y_j) :

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b, \quad -K = y_0 < y_1 < \dots < y_m = K$$

на прямоугольные ячейки таким образом, чтобы $t_{k+1} - t_k < \delta, y_{j+1} - y_j < \frac{\varepsilon}{5}$.

Графики всех функций данного семейства Φ лежат в пределах прямоугольника $[a, b] \times [-K, K]$, причем в пределах ячейки любая функция $\varphi(t) \in \Phi$ будет изменяться менее чем на $\frac{\varepsilon}{5}$. Поставим в соответствие произвольной функции $\varphi(t) \in \Phi$ непрерыв-

ную ломаную $\psi(t)$, проходящую через некоторые узлы (t_k, y_j) таким образом, чтобы $|\varphi(t_k) - \psi(t_k)| < \frac{\varepsilon}{5}$. Имеем по построению $\forall t \in [t_k, t_{k+1}]$

$$|\varphi(t_k) - \varphi(t_{k+1})| < \frac{\varepsilon}{5}, \quad |\varphi(t_k) - \psi(t_{k+1})| < \frac{\varepsilon}{5}, \quad |\varphi(t_{k+1}) - \psi(t_{k+1})| < \frac{\varepsilon}{5}.$$

Отсюда

$$|\psi(t_k) - \psi(t_{k+1})| \leq |\psi(t_k) - \varphi(t_k)| + |\varphi(t_k) - \varphi(t_{k+1})| + |\varphi(t_{k+1}) - \psi(t_{k+1})| < \frac{3}{5}\varepsilon.$$

Так как на участке $[t_k, t_{k+1}]$, $\psi(t)$ — линейная функция, то $\forall t \in [t_k, t_{k+1}]$ имеет место то же неравенство

$$|\psi(t) - \psi(t_k)| < \frac{3}{5}\varepsilon.$$

Теперь получаем

$$\begin{aligned} |\varphi(t) - \psi(t)| &\leq |\varphi(t) - \varphi(t_k)| + |\varphi(t_k) - \psi(t_k)| + |\psi(t_k) - \psi(t)| < \\ &< \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{3\varepsilon}{5} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, множество ломаных $\{\psi\}$ образует в $C[a, b]$ ε -сеть для семейства Φ . Так как $\{\psi\}$ — конечное множество, то Φ — вполне ограничено, что и требовалось.

В некоторых случаях могут оказаться полезными критерии компактности в других пространствах. Приведем их для пространств l^p и L^p . Доказательства можно найти в [7, 12].

Критерий компактности в l^p . Множество $M \subset l^p$ компактно тогда и только тогда, когда

- а) оно ограничено,
- б) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon) > 0$, что $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_m, \dots) \in M$:

$$m > N \Rightarrow \sum_{i=m+1}^{\infty} |x_i|^p < \varepsilon^p.$$

Критерий компактности в $L^p[0, 1]$. Имеет место теорема (А. Н. Колмогоров).

Множество $M \subset L^p$ компактно тогда и только тогда, когда

- а) $\exists K > 0$, что $\forall x(t) \in M$

$$\int_0^1 |x(t)|^p dt \leq K^p;$$

- б) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ такое, что $\forall x(t) \in M$

$$h < \delta \Rightarrow \left\| x - \frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} x(\tau) d\tau \right\| < \varepsilon.$$

Непрерывные функционалы на компактных множествах в метрических пространствах. Пусть f — отображение множества M из метрического пространства X

в R^1 . Это значит, что каждому элементу $x \in M$ ставится в соответствие число $f(x)$. Напомним, что такое отображение называется числовой функцией или функционалом ($Ux, Ax, f(x)$ и т. п.).

Примеры.

1. В пространстве $C[0, 1]$

$$f(x) = \int_0^1 x^2(t) dt.$$

2. В пространстве $C^1[0, 1]$

$$f(x) = \int_0^1 [\dot{x}(t) + \dot{x}^2(t)] dt.$$

3. В пространстве $C[a, b]$

$$f(x) = x(t_0), \quad a \leq t_0 \leq b.$$

Так же как в классическом анализе вводится понятие непрерывности функционала.

Функционал $f(x)$, определенный (действующий) на множестве $M \subset X$, называется непрерывным в точке $x_0 \in M$, если $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$, что из неравенства $\rho(x, x_0) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Часто удобнее использовать другое, равносильное приведенному выше, определение непрерывности в точке функционала $f(x)$.

Функционал $f(x)$, определенный на множестве $M \subset X$ непрерывен в точке $x_0 \in M$, если $\forall \{x_n\} \subset M$ сходящейся к x_0 (по метрике X), $\lim f(x_n) = f(x_0) (n \rightarrow \infty)$.

По определению функционал $f(x)$, определенный на множестве $M \subset X$, непрерывен на нем, если он непрерывен в каждой точке $x_0 \in M$.

Функционал $f(x)$, определенный на множестве $M \subset X$, называется равномерно непрерывным на M , если $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из неравенства $\rho(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ для любых точек $x_1, x_2 \in M$.

Очевидно, из равномерной непрерывности функционала $f(x)$ на множестве M следует его непрерывность на этом множестве. Обратное — неверно.

В анализе важное место занимают теоремы Вейерштрасса, выражающие свойства функций, непрерывных на отрезке. Существенным здесь является то, что отрезок есть компакт. Аналогичные теоремы имеют место и для непрерывных функционалов.

Теорема 1. Функционал $f(x)$, определенный и непрерывный на компактном в себе множестве M , лежащем в метрическом пространстве X , ограничен на M .

Доказательство. Предположим противное, что $f(x)$ не ограничен на M , т. е., что $\exists \{x_n\} \subset M$ такая, что $|f(x_n)| > n$ ($n = 1, 2, \dots$). Так как M — компактное в себе множество

ство, то из $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\} \rightarrow x_0 \in M$. В силу непрерывности функционала $f(x)$ имеем $f\{x_{n_k}\} \rightarrow f(x_0) (k \rightarrow \infty)$. Но это невозможно. Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема 2. Функционал $f(x)$, определенный и непрерывный на компактном в себе множестве M , лежащем в метрическом пространстве X , достигает на M своих точных верхней и нижней граней.

Доказательство. Обозначим: $\sup_{x \in M} f(x) = b$. Это выражение имеет смысл, так как множество значений $f(x)$ — ограниченное числовое множество. По свойству точной верхней грани найдется последовательность $\{x_n\} \subset M$, такая что

$$b - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq b \quad (n=1, 2, \dots). \quad (\text{A.11})$$

В силу компактности в себе множества M , из последовательности $\{x_n\}$ можно выделить сходящуюся к некоторой точке $x_0 \in M$ подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, а в силу непрерывности функционала $f(x): f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_0)$. Очевидно, неравенства (A.11) имеют место и для подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$:

$$b - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) \leq b.$$

Переходя здесь к пределу при $k \rightarrow \infty (n_k \rightarrow \infty)$, получаем $f(x_0) = b$. Аналогичное доказательство легко проводится и для точной нижней грани множества значений $f(x)$.

Теорема 3. Функционал $f(x)$, определенный и непрерывный на компактном в себе множестве $M \subset X$, равномерно непрерывен на M .

Доказательство. Предположим противное, что $f(x)$ непрерывен на M , но равномерной непрерывности нет. Тогда, задав $\varepsilon_0 > 0$, мы можем найти $\delta(\varepsilon) > 0$ и построить последовательности $\{x_n\}, \{y_n\} \subset M$, такие что

$$\rho(x_n, y_n) < 1/n \Rightarrow |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0 \quad (n=1, 2, \dots).$$

Из $\{x_n\}$ выделим подпоследовательность $\{x_{n_k}\} \rightarrow x_0 \in M$. Очевидно, подпоследовательность $\{y_{n_k}\}$ (с теми же номерами) также сходится к точке x_0 . Имеем

$$|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \leq |f(x_{n_k}) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(y_{n_k})|.$$

При достаточно больших k правая часть этого неравенства может быть сделана меньше любого наперед заданного числа, в то время как левая часть ограничена снизу. Полученное противоречие доказывает теорему.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б Р-НЕРАВЕНСТВА

Неравенства Гельдера. Рассмотрим функцию $\tau = t^\alpha$ ($\alpha > 0$). Она монотонно возрастает при $t > 0$, так как $\tau'(t) = \alpha t^{\alpha-1} > 0$. Поэтому однозначно определена обратная функция $t = \tau^{1/\alpha}$. График функции $\tau = t^\alpha$ изображен на рис. Б.1.

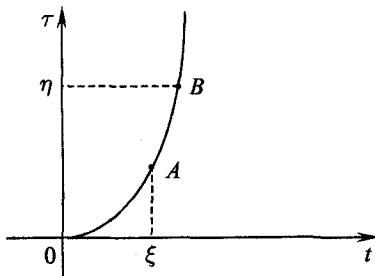


Рис. Б.1. К выводу неравенства Юнга

Пусть $\xi > 0$, $\eta > 0$ два числа. Найдем площади криволинейных треугольников $S_1 = S_{0\xi A}$ и $S_2 = S_{0\eta B}$. Имеем

$$S_1 = \int_0^\xi t^\alpha dt = \frac{\xi^{\alpha+1}}{\alpha+1},$$

$$S_2 = \int_0^\eta \tau^{1/\alpha} d\tau = \frac{\eta^{1+\frac{1}{\alpha}}}{1+\frac{1}{\alpha}}.$$

Неравенства Юнга. Очевидно, $S_1 + S_2 \geq \xi\eta$, равенство имеет место лишь в случае $\eta = \xi^\alpha$.

Пусть $\alpha+1 = p$, $1+1/\alpha = q$. Тогда получаем неравенство Юнга

$$\frac{\xi^p}{p} + \frac{\eta^q}{q} \geq \xi\eta, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \quad (\text{Б.1})$$

Неравенство (Б.1) справедливо для любых положительных величин ξ и η .

Положим

$$\xi_i = \frac{|x_i|}{\left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p}}, \quad \eta_i = \frac{|y_i|}{\left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q\right)^{1/q}} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Неравенство (Б.1) при подстановке в него чисел ξ_i, η_i дает

$$\frac{1}{p} \frac{|x_i|^p}{\sum_{k=1}^n |x_k|^p} + \frac{1}{q} \frac{|y_i|^q}{\sum_{k=1}^n |y_k|^q} \geq \frac{|x_i y_i|}{\left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q \right)^{1/q}} \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (\text{Б.2})$$

Суммируя неравенства (Б.2) по i от 1 до n , получаем

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \geq \frac{\sum_{i=1}^n |x_i y_i|}{\left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q \right)^{1/q}}.$$

Отсюда вытекает неравенство Гельдера для конечных сумм:

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q \right)^{1/q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad p > 1. \quad (\text{Б.3})$$

Пусть $x = (x_1, x_2, \dots) \in l^p$, $y = (y_1, y_2, \dots) \in l^q$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $p > 1$. По определению линейного нормированного пространства l^p, l^q :

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q < \infty.$$

Поэтому неравенство (Б.3) для конечных сумм можно усилить:

$$u_n = \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q \right)^{1/q}. \quad (\text{Б.4})$$

Последовательность u_n ($n = 1, 2, \dots$) — неубывающая и ограничена сверху, следовательно, существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i|.$$

Получаем из (Б.4) неравенство Гельдера для бесконечных сумм:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q \right)^{1/q}. \quad (\text{Б.5})$$

Пусть теперь $x(t)$ — функция, суммируемая на $[a, b]$ со степенью p , а $y(t)$ — функция, суммируемая на $[a, b]$ со степенью q . Положим

$$\xi = \frac{|x(t)|}{\left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{1/p}}, \quad \eta = \frac{|y(t)|}{\left(\int_a^b |y(t)|^q dt \right)^{1/q}}.$$

Подстановка этих выражений в неравенство (Б.1) с последующим интегрированием полученного неравенства в пределах от $t=a$ до $t=b$ дает

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \geq \frac{\int_a^b |x(t)y(t)| dt}{\left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_a^b |y(t)|^q dt \right)^{1/q}}.$$

Отсюда получаем неравенство Гельдера в интегральной форме:

$$\int_a^b |x(t)y(t)| dt \leq \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_a^b |y(t)|^q dt \right)^{1/q}. \quad (\text{Б.6})$$

При $p=q=2$ получаем отсюда неравенство Шварца (Коши–Буняковского).

Неравенства Минковского. Рассмотрим сумму

$$\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p$$

и применим к ней неравенство Гельдера (Б.3). Имеем цепочку соотношений

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p &\leq \sum_{k=1}^n |x_k| |x_k + y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^n |y_k| |x_k + y_k|^{p-1} \leq \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^{q(p-1)} \right)^{1/q} + \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^{q(p-1)} \right)^{1/q} = \\ &= \left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \right)^{1/q} \left[\left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^p \right)^{1/p} \right]. \end{aligned}$$

Отсюда получаем неравенство Минковского для конечных сумм:

$$\left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^p \right)^{1/p} \quad (p \geq 1). \quad (\text{Б.7})$$

Пусть $x = (x_1, x_2, \dots)$, $y = (y_1, y_2, \dots)$ — элементы пространства l^p ($p \geq 1$). Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p < \infty.$$

Поэтому неравенство (Б.7) можно усилить:

$$u_n = \left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p \right)^{1/p}. \quad (\text{Б.8})$$

Последовательность u_n — неубывающая и ограничена сверху. Следовательно, существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p \right)^{1/p}.$$

Переходя в (Б.8) к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем неравенство Минковского для бесконечных сумм:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p \right)^{1/p}. \quad (\text{Б.9})$$

Аналогичным образом с учетом оценки (Б.6) получаем неравенство Минковского в интегральной форме:

$$\left(\int_a^b |x(t) + y(t)|^p dt \right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{1/p} + \left(\int_a^b |y(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad p \geq 1. \quad (\text{Б.10})$$

Здесь предполагается, что функции $x(t)$, $y(t) \in L^p[a, b]$.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ 3

1. Ахиезер Н. И. О некоторых вопросах теории моментов / Н. И. Ахиезер, М. Г. Крейн. Харьков: ГОНТИ, 1938. 254 с.
2. Берлинкур Д. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях / Д. Берлинкур, Д. Керран, Г. Жаффе // Физическая акустика. Т. 1: Методы и приборы ультразвуковых исследований. Ч. А. М.: Мир, 1966. С. 204–326.
3. Власова Е. А. Приближенные методы математической физики / Е. А. Власова, В. С. Зарубин, Г. Н. Кувыркин. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2001. 700 с.
4. Ворович И. И. Неклассические смешанные задачи теории упругости / И. И. Ворович, В. М. Александров, В. А. Бабешко. М.: Наука, 1974. 416 с.
5. Ворович И. И. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей / И. И. Ворович, В. А. Бабешко. М.: Наука, 1979. 319 с.
6. Вулих Б. З. Краткий курс теории функции вещественной переменной / Б. З. Вулих. М.: Наука, 1973. 350 с.
7. Канторович Л. В. Функциональный анализ в нормированных пространствах / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. М.: Физматгиз, 1959. 684 с.
8. Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. М.: Наука, 1972. 496 с.
9. Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений / М. А. Красносельский. М.: Гостехиздат, 1956. 392 с.
10. Крейн М. Г. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи / М. Г. Крейн, А. А. Нудельман. М.: Наука, 1973. 552 с.
11. Крейн С. Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве / С. Г. Крейн. М.: Наука, 1971. 104 с.
12. Люстерник Л. А. Элементы функционального анализа / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. М.: Наука, 1965. 520 с.
13. Метьюз Дж. Математические методы физики / Дж. Метьюз, Р. Уокер. М.: Атомиздат, 1972. 397 с.
14. Михлин С. Г. Линейные уравнения в частных производных / С. Г. Михлин. М.: Высш. шк., 1977. 432 с.
15. Натансон П. И. Теория функции вещественной переменной / П. И. Натансон. М.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1957. 552 с.
16. Парトン В. З. Методы математической теории упругости / В. З. Парトン, П. И. Перлин. М.: Наука, 1981. 688 с.
17. Рид М. Методы современной математической физики / М. Рид, Б. Саймон. М.: Мир, 1977. Т. 1: Функциональный анализ. 357 с.
18. Рид М. Методы современной математической физики / М. Рид, Б. Саймон. М.: Мир, 1978. Т. 2: Гармонический анализ. Самосопряженность. 395 с.
19. Рихтмайер Р. Принципы современной математической физики / Р. Рихтмайер. М.: Мир, 1982. 486 с.
20. Соболев В. И. Лекции по дополнительным главам математического анализа / В. И. Соболев. М.: Наука, 1968. 288 с.

21. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, Л. А. Самарский. М.: Наука, 1977. 735 с.
22. Треногин В. А. Функциональный анализ / В. А. Треногин. М.: Наука, 1980. 495 с.
23. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. / Г. М. Фихтенгольц. 3-е изд., испр. М.-Л.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1951. Т. 1. 696 с.
24. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. / Г. М. Фихтенгольц. 3-е изд., испр. М.-Л.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1959. Т. 2. 807 с.
25. Функциональный анализ / под ред. С. Г. Крейна. М.: Наука, 1964. 424 с. (Справочная математическая библиотека).
26. Шварц Л. Математические методы для физических наук / Л. Шварц. М.: Мир, 1965. 412 с.
27. Шилов Г. Е. Интеграл, мера и производная / Г. Е. Шилов, Б. Л. Гуревич. М.: Наука, 1964. 212 с.

ГЛАВА 4

ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

В конце 20-х годов прошлого столетия П. Дирак в своих квантовомеханических исследованиях ввел так называемую δ -функцию, определив ее следующим образом:

$$\delta(x) = 0, \quad x \neq 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1.$$

С математической точки зрения $\delta(x)$ не есть функция, понимаемая в классическом смысле, но если интерпретировать ее как функционал, сопоставляющий каждой непрерывной функции $\varphi(x)$ ее значение в нуле по формуле

$$(\delta(x), \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \varphi(x) dx = \varphi(0),$$

то такое определение становится вполне законным.

В середине 30-х годов С. Л. Соболев заложил основы теории обобщенных функций как линейных непрерывных функционалов над пространством достаточно «хороших» функций и применил их в исследовании задачи Коши для гиперболических уравнений. С этих позиций δ -функция Дирака является (сингулярной) обобщенной функцией. Различные классы сингулярных обобщенных функций рассматривались также в работах С. Боннера и Ж. Адамара в связи с задачами регуляризации расходящихся рядов и интегралов.

Фундаментальная теория обобщенных функций (распределений) принадлежит Л. Шварцу (1950–1951 гг.). В дальнейшем теория распределений развивалась в трудах многих ученых в связи с проблемами теоретической и математической физики. В настоящее время теория обобщенных функций далеко продвинута и имеет многочисленные приложения в теоретической физике, математике, инженерных науках.

При изложении материала данной главы были использованы различные источники [6–13, 16–20, 24, 25, 31, 39, 41].

Исходные понятия, определения и обозначения. Все построения будут проводиться применительно к вещественному евклидовому пространству R^n , элементами (точками) которого являются упорядоченные наборы из n - действительных чисел: $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$... или комплексному пространству C^n с элементами $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$... Скалярные произведения и нормы векторов определяются обычным образом

$$(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k, \quad \|x\| = |x| = \left\{ \sum_{k=1}^n x_k^2 \right\}^{1/2},$$

$$(z, w) = \sum_{k=1}^n z_k \bar{w}_k, \quad \|z\| = |z| = \left\{ \sum_{k=1}^n |z_k|^2 \right\}^{1/2}.$$

Метрика (расстояние между элементами x и y) есть число $|x - y|$.

Множество точек $U(x_0; R) = \{x \in R^n : |x - x_0| < R\}$ называется открытым шаром с центром в точке $x_0 \in R^n$ и радиусом R ($R > 0$). Открытый шар радиуса R с центром в точке $x_0 = 0$ будем обозначать U_R . Для любого $\varepsilon > 0$ шар $U(x_0, \varepsilon)$ называется ε -окрестностью точки x_0 .

Последовательность $x_i = (x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ni})$, $i = 1, 2, \dots$ называется сходящейся к точке $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ в R^n при $i \rightarrow \infty$, если при этом $|x - x_i| \rightarrow 0$. Эта сходимость (по норме R^n) равносильна покоординатной сходимости:

$$x_{ki} \rightarrow x_i, \quad k = 1, 2, \dots, n; \quad i \rightarrow \infty.$$

Последовательность x_i называется фундаментальной (сходящейся в себе) в R^n , если $|x_i - x_p| \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$, $p \rightarrow \infty$. Согласно принципу сходимости Коши необходимым и достаточным условием сходимости последовательности в R^n является ее фундаментальность.

Множество называется ограниченным в R^n , если существует некоторый шар, содержащий это множество. В силу теоремы Больцано–Вейерштрасса всякое ограниченное множество $M \subset R^n$ является компактным, т. е. из любой бесконечной последовательности точек из M можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Точка x_0 называется внутренней точкой множества, если существует шар $U(x_0; R)$, принадлежащий этому множеству. Множество называется открытым, если все его точки внутренние. Множество называется связным, если любые две его точки можно соединить ломаной линией, лежащей в этом множестве. Областью называется связное открытое множество в R^n .

Точка x_0 называется предельной точкой множества M , если существует последовательность $\{x_k\} \subset M$, не содержащая точку x_0 , такая что $x_k \rightarrow x_0$ при $k \rightarrow \infty$. Если к множеству M присоединить все его предельные точки, то полученное множество называется замыканием множества M (обозначается \bar{M} или $[M]$). Очевидно, $M \subset \bar{M}$. Если множество совпадает со своим замыканием, т. е. содержит все свои предельные точки, то оно называется замкнутым. Замкнутое ограниченное множество компактно в себе, т. е. является компактом.

Окрестностью множества M называется всякое открытое множество, содержащее M ; ε -окрестностью множества M называется объединение шаров $U(x; \varepsilon)$, когда x пробегает M :

$$M_\varepsilon = \bigcup_{x \in M} U(x; \varepsilon).$$

Имеет место лемма Гейне–Бореля. Если компакт K покрыт системой открытых шаров, то из этого покрытия можно выделить конечную подсистему, покрывающую K .

Границей области Ω называется замкнутое множество $S = \bar{\Omega} \setminus \Omega$. Так, границей шара $U(x_0; R)$ является сфера $S(x_0; R)$. В частности, $S(0; R)$ обозначаем через S_R . Будем

говорить, что поверхность S принадлежит классу C^p ($p \geq 1$), если в некоторой окрестности каждой точки $x_0 \in S$ она представляется уравнением $\omega_{x_0}(x) = 0$, причем $\text{grad } \omega_{x_0} \neq 0$ и функция $\omega_{x_0}(x)$ непрерывна вместе со всеми своими производными до порядка p включительно в упомянутой окрестности. Поверхность S называется гладкой, если она принадлежит классу C^1 ; она называется кусочно-гладкой, если состоит из конечного числа гладких поверхностей. Окрестностью точки x_0 на поверхности S называется та связная часть множества $S \cap U(x_0; R)$, которая содержит точку x_0 .

Ограниченнная область Ω' называется подобластю, строго лежащей в области Ω , если $\overline{\Omega'} \subset \Omega$, при этом пишут $\Omega' \Subset \Omega$ и говорят, что множество Ω' компактно в области Ω .

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ — целочисленный вектор, причем $\alpha_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Такой вектор называется обычно мультииндексом. Через $D^\alpha f(x)$ обозначаем производную от функции $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ порядка $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$:

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad D^0 f(x) = f(x).$$

Например, если $\alpha = (0, 1, 2)$, $f(x) = f(x_1, x_2, x_3)$, то

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^3 f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2 \partial x_3^2}.$$

Полезно иметь в виду также следующие сокращенные обозначения:

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}, \quad \alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!.$$

Будем говорить, что функция $f(x)$ принадлежит классу $C^p(\Omega)$, если в области Ω она непрерывна вместе со всеми производными $D^\alpha f(x)$ при $|\alpha| \leq p$ (p — любое целое неотрицательное число). Таким образом, класс $C^0(\Omega) = C(\Omega)$ состоит из всех непрерывных в области Ω функций, класс $C^1(\Omega)$ — состоит из гладких, т. е. имеющих непрерывные первые производные в Ω функций и т. д. Если все производные $D^\alpha f(x)$ при $|\alpha| \leq p$ допускают непрерывное продолжение на замыкание области Ω , то будем говорить, что $f(x)$ принадлежит классу $C^p(\overline{\Omega})$. Класс $C^\infty(\Omega)$ представляет собой совокупность всех бесконечно-дифференцируемых в области Ω функций, класс $C^\infty(R^n)$ составляют функции, бесконечно-дифференцируемые в R^n .

Пусть $\varphi \in C(R^n)$. Носителем функции $\varphi(x)$ называется замыкание множества точек, в которых $\varphi(x) \neq 0$ (обозначается $\text{supp } \varphi(x)$). Если носитель функции $\varphi(x)$ — ограниченное множество, то эта функция называется финитной. Совокупность функций $\varphi(x) \in C^p(\Omega)$, таких что $\text{supp } \varphi \Subset \Omega$, обозначается через $C_0^p(\Omega)$.

Пусть Ω — открытое множество. Ниже используются следующие обозначения интеграла (Лебега):

$$\int_{\Omega} f(x) dx, \quad \int_{R^n} f(x) dx = \int f(x) dx = \int \int \dots \int_{R^n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Через $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$ обозначается совокупность всех (комплекснозначных) измеримых функций f , заданных на Ω , для которых конечна норма

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \begin{cases} \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \text{vrai max}_{x \in \Omega} |f(x)|, & p = \infty. \end{cases}$$

Если $f \in L^p(K)$ для любого компакта $K \subset \Omega$, то f называется p , локально суммируемой в Ω . Совокупность таких функций обозначается через $L_{loc}^p(\Omega)$. Совокупность всех финитных в Ω измеримых функций (почти везде равных нулю вне некоторого компакта $K \subset \Omega$) из $L^p(\Omega)$ обозначается через $L_o^p(\Omega)$.

Площадь поверхности единичной сферы в R^n вычисляется по формуле

$$\sigma_n = \int_{S^{n-1}} ds = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)},$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера [14].

4.1. Некоторые примеры и соображения к мотивации введения и использования обобщенных функций

1. Плотность вещества, индуцированная сосредоточенной массой. Пусть в точке $x = 0$ сосредоточена масса, равная единице. Попытаемся подсчитать плотность вещества, созданную этой массой во всем пространстве. Для этого распределим ее внутри шара U_ε . Тогда средняя плотность будет равна

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{m}{V} = \frac{3}{4\pi\varepsilon^3}, & |x| < \varepsilon, \\ 0, & |x| > \varepsilon. \end{cases}$$

Примем сначала за исковую плотность $\delta(x)$ поточечный предел $f_\varepsilon(x)$ при $\varepsilon \rightarrow +0$. Получим

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \infty & \text{при } x = 0, \\ 0 & \text{при } x \neq 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

От плотности $\delta(x)$ естественно потребовать, чтобы интеграл от нее по любому объему Ω , содержащему начало координат, равнялся массе, т. е. единице. Поэтому должно было бы выполняться равенство

$$\int_{\Omega} \delta(x) dx = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \in \Omega, \\ 0 & \text{при } 0 \notin \Omega. \end{cases} \quad (4.2)$$

Но это невозможно, так как в силу (4.1) интеграл в левой части (4.2), понимаемый как несобственный, равен нулю. Следовательно, поточечный предел $f_{\varepsilon}(x)$ при $\varepsilon \rightarrow +0$ не может быть принят в качестве плотности $\delta(x)$.

Определим теперь плотность $\delta(x)$ как слабый предел последовательности функции $f_{\varepsilon}(x)$ при $\varepsilon \rightarrow +0$, т. е. для любой непрерывной функции $\varphi(x)$ найдем предел числовой последовательности (функционалов)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int f_{\varepsilon} \varphi dx.$$

Покажем, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int f_{\varepsilon}(x) \varphi(x) dx = \varphi(0).$$

Имеем цепочку неравенств

$$\left| \int f_{\varepsilon}(x) \varphi(x) dx - \varphi(0) \right| = \left| \int_{|x|<\varepsilon} \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \varphi(x) dx - \int_{|x|<\varepsilon} \varphi(0) \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} dx \right| \leq \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \int_{|x|<\varepsilon} |\varphi(x) - \varphi(0)| dx.$$

В силу непрерывности функции $\varphi(x)$ для любого $\eta > 0$, $\exists \varepsilon_0 > 0$ такое, что $|x| < \varepsilon_0 \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(0)| < \eta$. Отсюда, на основании предыдущих неравенств, получаем оценку при $\varepsilon < \varepsilon_0$:

$$\left| \int f_{\varepsilon}(x) \varphi(x) dx - \varphi(0) \right| \leq \eta.$$

Итак, слабый предел последовательности $f_{\varepsilon}(x)$ при $\varepsilon \rightarrow +0$ существует и равен функционалу $\varphi(0)$, сопоставляющему каждой непрерывной функции $\varphi(x)$ число $\varphi(0)$ — значение этой функции в нуле. Этот функционал и принимается за определение плотности $\delta(x)$; это и есть известная δ -функция Дирака. Таким образом, $f_{\varepsilon}(x) \xrightarrow{\text{сл}} \delta(x)$ при $\varepsilon \rightarrow +0$ в том смысле, что

$$\int f_{\varepsilon}(x) \varphi(x) dx \rightarrow (\delta, \varphi) = \varphi(0) \text{ при } \varepsilon \rightarrow +0, \quad \forall \varphi(x) \in C.$$

Чтобы определить теперь полную массу, нужно подействовать функционалом (плотностью) на функцию $\varphi(x) \equiv 1$. Имеем $(\delta, 1) = 1$, что и требовалось.

Если в точке $x = 0$ сосредоточена масса m , то соответствующую плотность следует считать равной $m\delta(x)$. Если масса m сосредоточена в точке x_0 , то ее плотность следует

считать равной $m\delta(x - x_0)$. Наконец, если в точках x_k ($k = 1, 2, \dots, N$) сосредоточены массы m_k соответственно, то под плотностью будем понимать выражение

$$\sum_{k=1}^N m_k \delta(x - x_k).$$

2. Пусть $f(x)$ — некоторая физическая величина (температура, давление, плотность и т. п.). При измерении этой величины в точке x_0 на самом деле находят некоторое среднее значение $f(x)$, взятое по некоторой окрестности точки x_0 , т. е. какой-то интеграл

$$\int f(x) \varphi(x) dx,$$

где $\varphi(x)$ — функция, характеризующая измерительный прибор и имеющая смысл лишь в этой окрестности.

Если, например, $f(x) \in L^1_{loc}(\Omega)$ — плотность, то масса тела в области Ω представляется интегралом

$$M = \int_{\Omega} f(x) dx.$$

Вводя характеристическую функцию множества Ω

$$\chi_{\Omega} = \begin{cases} 1, & x \in \Omega, \\ 0, & x \notin \Omega, \end{cases}$$

представляем M в виде линейного функционала на совокупности характеристических функций измеримых множеств

$$M = \int f(x) \chi_{\Omega}(x) dx.$$

Достаточно взять $f(x) \in L^1_{loc}(\Omega)$ — т. е. функцию, интегрируемую на всяком компакте $K \subset \Omega$, чтобы это представление имело смысл.

Таким образом, сама собой напрашивается мысль, вообще не рассматривать функцию $f(x)$, а представлять ее линейным функционалом

$$(f, \varphi) = \int f(x) \varphi(x) dx,$$

определенным на множестве достаточно «хороших» функций $\varphi(x)$.

3. При вычерчивании профилей обтекаемых поверхностей самолета на специальных металлических столах (плазах) используют гибкие рейки (линейки), к которым в определенных точках подвешиваются грузы. С помощью этих грузов добиваются того, чтобы вычерчиваемый профиль проходил через заданные точки. Таким образом, в рамках сопротивления материалов, приходим к модели упругой балки, изгибаемой в одной плоскости приложенными в определенных точках x_k сосредоточенными силами p_k .

Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки имеет вид [47]

$$y''(x) = \frac{1}{EJ} q(x),$$

где $y(x)$ — прогиб балки, EJ — ее изгибная жесткость, $q(x)$ — погонная интенсивность действующей нагрузки. Очевидно, также как и в примере с сосредоточенными массами

$$q(x) = \sum_k p_k \delta(x - x_k),$$

т. е. является обобщенной функцией.

Интегрирование этого уравнения с учетом равенств $y(x_k) = y_k$ дает так называемый кубический сплайн [1]. Полиноминальные сплайны находят широкое применение в задачах аппроксимации функций, статики и динамики стержневых дискретно-континуальных систем, в расчетах напряженно-деформированного состояния многослойных пластин и оболочек [24]. Например, линейный сплайн на сетке $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} = b$ имеет вид

$$S_1(x) = \gamma_0 x + \sum_{i=1}^n \gamma_i (x - x_i) \theta(x - x_i),$$

где $\gamma_i (i = 0, 1, \dots, n)$ — параметры сплайна, $\theta(x)$ — единичная функция Хевисайда [28]

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Производные имеют вид

$$S'_1(x) = \gamma_0 + \sum_{i=1}^n \gamma_i \theta(x - x_i),$$

$$S''_1(x) = \sum_{i=1}^n \gamma_i \delta(x - x_i).$$

Отсюда видно, что при аналитическом описании сплайна и его производных используются обобщенные функции $\theta(x)$, $\delta(x)$ и производные от дельта-функции.

4. Рассмотрим неоднородное уравнение Гельмгольца в области $\Omega \subset R^n$

$$\Delta u + \gamma^2 u = f(x), \quad \gamma > 0,$$

где f может быть неклассической функцией, например $f = |x|$ или $f = \delta(x)$.

Если $u \in C^2(\Omega)$ и удовлетворяет этому уравнению с $f(x) \in C(\Omega)$, то ее считают классическим решением. Пусть $\varphi(x) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \in C^\infty$ и $\text{supp } \varphi \subset \Omega$. Тогда для всех таких функций φ получаем при помощи интегрирования по частям

$$\int (\Delta u + \gamma^2 u - f) \varphi(x) dx = \int_\Omega u (\Delta \varphi + \gamma^2 \varphi - f) dx = 0.$$

Интеграл в правой части существует и при менее ограничительных предположениях относительно u , например для $u \in C(\Omega)$ или для $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. В этом смысле решением (неклассическим) является (обобщенная) функция u , для которой выполняется интегро-дифференциальное уравнение

$$\int (\Delta u + \gamma^2 u - f) \varphi(x) dx = 0, \quad \forall \varphi \in C^\infty, \quad \text{supp } \varphi \subset \Omega.$$

5. Теория обобщенных функций дает возможность суммировать расходящиеся ряды, дифференцировать их сколько угодно раз. Например:

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2k\pi),$$

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} ke^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta'(x - 2k\pi) \text{ и т. п.}$$

Конечно, эти равенства следует понимать в смысле теории обобщенных функций.

Отметим, что обобщенные функции (распределения) эффективно применяются в теории дифференциальных уравнений с частными производными, интегральных преобразований Фурье, Лапласа и некоторых других, теории интегральных уравнений и т. п. [4, 8, 9, 11, 20, 24, 31, 32, 34, 38, 39, 53–57].

Различные классы основных (пробных) функций порождают различные классы распределений. Мы видели, что для определения δ -функции достаточно иметь запас пробных непрерывных функций $C(\Omega)$. Однако для определения производной $\delta'(x)$ непрерывности основных функций уже недостаточно, необходимо использовать функции $\varphi(x) \in C^1(\Omega)$. Вообще, для того чтобы существовали производные обобщенных функций любого порядка, необходимо в качестве исходного для выбора пространства основных функций взять пространство $C^\infty(\Omega)$.

В качестве пространств основных функций используют обычно пространства $D(\Omega)$, $E(\Omega)$, $\mathcal{L}(R^n) = \mathcal{L}$.

Пространство $E(\Omega) = C^\infty(\Omega)$ состоит из функций $\varphi(x)$, бесконечно дифференцируемых в области Ω , с произвольными носителями. Пространство $D(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$ состоит из функций $\varphi(x) \in C^\infty(\Omega)$ с компактными носителями $K \subset \Omega$ (т. е. $\exists K \subset \Omega$ такой, что $\varphi(x) = 0$ при $x \in \Omega \setminus K$). Наконец, пространство Шварца \mathcal{L} — состоит из функций $\varphi(x) \in C^\infty(R^n)$, убывающих на бесконечности вместе со всеми своими производными любого порядка быстрее любой степени $|x|^{-1}$.

4.2. Пространство основных функций D

Под основной функцией будем понимать финитную (действительную или комплекснозначную) бесконечно дифференцируемую в R^n функцию с компактным носителем. Сокупность всех таких функций обозначим через $D = D(R^n)$. В этом множестве введем естественные линейные операции сложения и умножения на число. Ясно, что множество D с введенными линейными операциями образует линейное пространство (линейное множество).

Сходимость в D определим следующим образом. Скажем, что последовательность $\{\varphi_k(x)\} \subset D$ сходится к функции $\varphi(x) \in D$ при $k \rightarrow \infty$, если выполняются два условия:

1. Существует такое число $R > 0$, что $\text{supp } \varphi_k(x) \subset U_R$ при всех $k = 1, 2, \dots$;
2. При каждом $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ имеет место равномерная сходимость

$$D^\alpha \varphi_k(x) \Rightarrow D^\alpha \varphi(x), \quad k \rightarrow \infty.$$

В этом случае будем писать $\varphi_k \rightarrow \varphi$ при $k \rightarrow \infty$ в D .

Линейное пространство D со введенной в нем сходимостью называется пространством основных функций.

Операция дифференцирования непрерывна из D в D , т. е. из сходимости последовательности $\{\varphi_k\} \subset D$ следует сходимость последовательности $\{D^\beta \varphi_k\} \subset D$ при любом мультииндексе β . Это следует из определения сходимости в D .

Совокупность основных функций, носители которых содержатся в данной области Ω , обозначим через $D(\Omega)$. Таким образом,

$$D(\Omega) \subset D(R^n) = D.$$

Замечание. Пространство $D(\Omega)$ является топологическим пространством [21, 38].

Приведем соответствующие определения.

Пусть E — линейное пространство. Говорят, что на E задана полуформа, если $\forall x \in E$ определена функция $p(x)$ и при этом выполняются следующие аксиомы:

1. $p(x) \geq 0$, конечна $\forall x \in E$.
2. $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ для каждого (комплексного) числа λ .
3. $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$, $\forall x, y \in E$.

Полуформа становится нормой, если из $p(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

Топология в $D(\Omega)$ задается счетным набором полуформ

$$p_m(f) = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_x |D^\alpha f(x)| \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

Это означает, что в качестве фундаментальной системы окрестностей нуля можно принять множества

$$V_{mn} = \left\{ f : p_m(f) < \frac{1}{n} \right\} \quad (m = 0, 1, 2, \dots; n = 1, 2, \dots).$$

Тогда для равномерной сходимости последовательности $\{\varphi_\nu(x)\} \subset D(\Omega)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} p_m(\varphi_\nu) = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

Теперь необходимо показать, что отличные от нуля основные функции существуют и их достаточно много.

Шапочка. Примером основной функции является так называемая шапочка:

$$\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} C_\varepsilon e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x|^2}}, & |x| < \varepsilon, \\ 0, & |x| \geq \varepsilon. \end{cases} \quad (4.3)$$

Нормировочная постоянная C_ε выбирается из условия

$$\int \omega_\varepsilon(x) dx = 1.$$

Вводя замену переменных $x = \varepsilon\eta = (\varepsilon\eta_1, \varepsilon\eta_2, \dots, \varepsilon\eta_n)$, получим равенство для определения C_ε

$$C_\varepsilon \varepsilon^n \int_{U_1} e^{-\frac{1}{1-\eta^2}} d\eta = 1.$$

Носителем функции $\omega_\varepsilon(x)$ является, согласно определению, замкнутый шар \bar{U}_ε . Вне этого шара сама функция и все ее производные равны нулю. Соответствующая картинка для случая $n=1$ изображена на рис. 4.1.

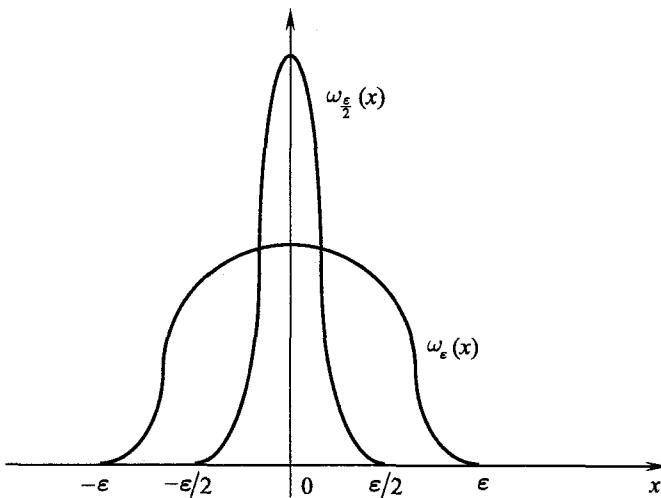


Рис. 4.1. Профиль функции $\omega_\varepsilon(x)$ в R^1

Покажем, что для заданной непрерывной функции $f(x)$ можно построить бесконечно-дифференцируемые функции $f_\varepsilon(x)$, так что $f_\varepsilon(x) \rightarrow f(x)$ при $\varepsilon \rightarrow +0$ равномерно в любой ограниченной области. Кроме того, если $f(x)$ финитна, то $f_\varepsilon(x)$ также финитные функции, причем $f_\varepsilon(x) \equiv 0$ вне ε -окрестности носителя функции $f(x)$.

Для доказательства рассмотрим конструкцию (усреднение функции $f(x)$) вида

$$f_\varepsilon(x) = \int f(y) \omega_\varepsilon(x-y) dy = \int_{|x-y|\leq \varepsilon} f(y) \omega_\varepsilon(x-y) dy.$$

Так как

$$D^\alpha f_\varepsilon(x) = \int_{|x-y|\leq \varepsilon} f(y) D_x^\alpha \omega_\varepsilon(x-y) dy,$$

то функция $f_\varepsilon(x)$ — бесконечно дифференцируема вместе с $\omega_\varepsilon(x-y)$.

Далее, в силу непрерывности $f(x)$, $\forall \eta > 0$, $\exists \varepsilon_0 > 0$ такое, что $|x-y| < \varepsilon_0 \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \eta$. Поэтому имеем для любого $\varepsilon \leq \varepsilon_0$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f_\varepsilon(x)| &= \left| \int f(x) \omega_\varepsilon(x-y) dy - \int f(y) \omega_\varepsilon(x-y) dy \right| \leq \\ &\leq \int_{|x-y|\leq \varepsilon} |f(x) - f(y)| \omega_\varepsilon(x-y) dy \leq \eta. \end{aligned}$$

Отсюда следует равномерная сходимость $f_\varepsilon(x) \rightarrow f(x)$ при $\varepsilon \rightarrow +0$ в любой ограниченной области Ω . В частности, если $f(x)$ — финитная функция, то $f_\varepsilon(x)$ также финитна, причем она равна нулю вне ε -окрестности носителя функции f (см. рис. 4.2).

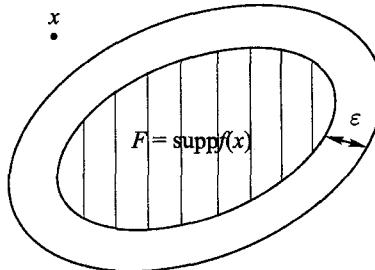


Рис. 4.2. Схема ε -окрестности носителя функции $f(x)$

Опишем некоторые локальные свойства основных функций.

Имеет место **лемма 1**. Для любой ограниченной области Ω и числа $\varepsilon > 0$ существует функция $\eta \in C^\infty(R^n)$, такая что

$$0 \leq \eta(x) \leq 1, \quad \eta(x) \equiv 1 \text{ при } x \in \Omega_\varepsilon \text{ и } \eta(x) \equiv 0 \text{ при } x \in \Omega_{3\varepsilon}.$$

Для доказательства введем характеристическую функцию множества $\Omega_{2\varepsilon}$

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_{2\varepsilon}, \\ 0, & x \notin \Omega_{2\varepsilon} \end{cases}$$

и рассмотрим конструкцию (резку)

$$\eta(x) = \int \chi(y) \omega_\varepsilon(x-y) dy = \int_{|x-y|<\varepsilon} \chi(y) \omega_\varepsilon(x-y) dy.$$

Очевидно, $\eta(x) \geq 0$, далее:

$$\eta(x) \leq \int \omega_\varepsilon(x-y) dy = \int_{y-x=\xi}^{dy=d\xi} \omega_\varepsilon(\xi) d\xi = \int \omega_\varepsilon(\xi) d\xi = 1.$$

Пусть теперь $x \in \Omega_\varepsilon$ (рис. 4.3), тогда $y \in \Omega_{2\varepsilon}$, $\chi(y) = 1$ и

$$\eta(x) = \int \chi(y) \omega_\varepsilon(x-y) dy = \int_{|x-y|<\varepsilon} \omega_\varepsilon(x-y) dy = 1.$$

Если $x \in \Omega_{3\varepsilon}$, то $y \in \Omega_{2\varepsilon}$, $\chi(y) = 0$ и $\eta(x) = 0$. Лемма доказана.

Из леммы вытекает, что если область Ω ограничена, то существует функция $\eta \in D(\Omega)$, такая что $\eta(x) = 1$, $x \in \Omega' \subset \Omega$ и $0 \leq \eta(x) \leq 1$.

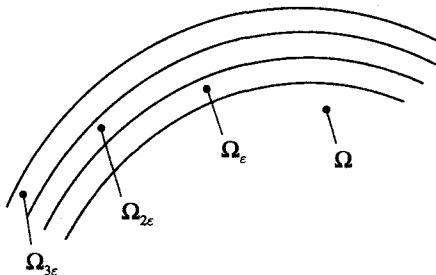


Рис. 4.3. К доказательству леммы 1

Лемма 2 (разложение единицы). Пусть носитель основной функции $\varphi(x)$ покрыт конечным числом шаров $U(x_k; r_k)$ ($k = 1, 2, \dots, N$). Тогда существуют такие функции $h_k \in D$, $\text{supp } h_k \subset U(x_k; r_k)$, что

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^N \varphi(x) h_k(x). \quad (4.4)$$

Доказательство. Возьмем уменьшенные шары $U(x_k; r'_k)$, $r'_k < r_k$, покрывающие компакт $F = \text{supp } \varphi$ (рис. 4.4). На основании леммы 1 заключаем, что существуют основные функции $e_k(x)$, такие что:

1. $e_k(x) \equiv 1$, при $x \in U(x_k; r'_k)$.
2. $e_k(x) \equiv 0$, при $x \notin U(x_k; r'_k)$, т. е. $\text{supp } e_k \subset U(x_k; r'_k)$.

Обозначим

$$h(x) = \sum_{k=1}^N e_k(x), \quad h_k(x) = \frac{e_k(x)}{h(x)}.$$

Очевидно, $h(x) \geq 1$, $\sum_{k=1}^N h_k(x) = 1$, $h_k(x) \in D$, $\text{supp } h_k \subset U(x_k; r_k)$. Поэтому равенство (4.4) справедливо, оно обычно называется разложением единицы.

Если обозначить: $\varphi(x)h_k(x) = \varphi_k(x)$, то равенство (4.4) можно переписать в виде

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^N \varphi_k(x), \quad \text{supp } \varphi_k \subset U(x_k; r_k). \quad (4.5)$$

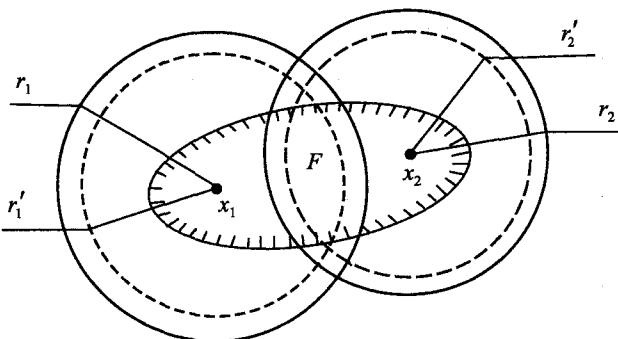


Рис. 4.4. К доказательству леммы 2

Замечание. В некоторых вопросах используются пространства основных функций K^m . Под основной функцией здесь понимается любая функция $\varphi(x)$, удовлетворяющая следующим условиям

1. $\varphi(x) \in C^\infty$.
2. $\text{supp } \varphi \subset U_R$, $R < \infty$.

Поскольку носитель — замкнутое ограниченное множество в R^n , то можно сказать, что пространство основных функций K^m состоит из непрерывных вместе со своими производными до порядка m включительно функций $\varphi(x)$ с компактными носителями. В K^m введены линейные операции и сходимость. По определению, последовательность $\{\varphi_p\} \subset K^m$ сходится к $\varphi(x) \in K^m$, если

$$\text{supp } \varphi_p \subset U_R \quad (p = 1, 2, \dots), \quad D^\alpha (\varphi_p - \varphi) \Rightarrow 0, \quad p \rightarrow \infty, \quad |\alpha| \leq m.$$

Осуществив сдвиг $\psi_p = \varphi_p - \varphi$, определяем сходимость к нулю: $\psi_p \rightarrow 0$, $p \rightarrow \infty$, если $\text{supp } \psi_p \subset U_R$, $D^\alpha \psi_p \Rightarrow 0$, $p \rightarrow \infty$, $|\alpha| \leq m$.

Введя таким образом окрестности нуля и естественные линейные операции, приходим к линейному топологическому пространству K^m . Если положить $m = \infty$, то получаем основное пространство D , образованное (комплекснозначными) бесконечно дифференцируемыми функциями с компактными носителями.

В основных пространствах можно вводить различные типы сходимостей. Наиболее сильной сходимостью является равномерная сходимость в C_0^∞ (в топологии пространства D). Наиболее слабой является среднеквадратичная сходимость в C_0^∞ , которая порождает элементы пространства L^2 .

4.3. Пространство обобщенных функций D'

Обобщенной функцией в смысле Соболева–Шварца называется всякий линейный непрерывный функционал на пространстве основных функций D . Значение функционала (обобщенной функции f) на основной функции φ обозначим через (f, φ) . Если это чис-

ло вещественное для любой вещественной основной функции φ , то приходим к вещественной обобщенной функции.

Согласно этому определению обобщенная функция f есть:

1. Функционал на D , т. е. каждой основной функции $\varphi \in D$ сопоставляется число (f, φ) .

2. Линейный функционал на D , т. е. $\forall \varphi, \psi \in D$ и $\forall \lambda, \mu \in C$

$$(f, \lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda(f, \varphi) + \mu(f, \psi).$$

3. Непрерывный функционал на D , т. е. если $\varphi_k \rightarrow \varphi$; $k \rightarrow \infty$ в (топологии D), то

$$(f, \varphi_k) \rightarrow (f, \varphi), k \rightarrow \infty.$$

Множество всех обобщенных функций обозначим через $D' = D'(R^n)$. На этом множестве введем линейные операции:

сложение

$$(f + g, \varphi) = (f, \varphi) + (g, \varphi), \quad \forall f, g \in D', \quad \forall \varphi \in D;$$

умножение на число

$$(\lambda f, \varphi) = \lambda(f, \varphi), \quad \forall f \in D', \quad \forall \varphi \in D, \quad \forall \lambda \in C.$$

Отсюда определяется линейная комбинация обобщенных функций, которая на произвольную основную функцию φ действует по формуле

$$(\lambda f + \mu g, \varphi) = \lambda(f, \varphi) + \mu(g, \varphi).$$

Покажем, что множество D' замкнуто относительно введенных линейных операций. Имеем для произвольных $\varphi, \psi \in D$ и $\alpha, \beta \in C$

$$\begin{aligned} & (\lambda f + \mu g, \alpha\varphi + \beta\psi) = \lambda(f, \alpha\varphi + \beta\psi) + \mu(g, \alpha\varphi + \beta\psi) = \\ & = \lambda[\alpha(f, \varphi) + \beta(f, \psi)] + \mu[\alpha(g, \varphi) + \beta(g, \psi)] = \alpha[\lambda(f, \varphi) + \mu(g, \varphi)] + \\ & + \beta[\lambda(f, \psi) + \mu(g, \psi)] = \alpha(\lambda f + \mu g, \varphi) + \beta(\lambda f + \mu g, \psi). \end{aligned}$$

Следовательно, $\lambda f + \mu g$ — линейный функционал. Далее, если $\varphi_k(x) \rightarrow \varphi(x)$ при $k \rightarrow \infty$, то

$$(\lambda f + \mu g, \varphi_k) = \lambda(f, \varphi_k) + \mu(g, \varphi_k) \rightarrow \lambda(f, \varphi) + \mu(g, \varphi) = (\lambda f + \mu g, \varphi).$$

Отсюда следует непрерывность функционала $\lambda f + \mu g$.

Непосредственно проверяется, что все аксиомы линейного пространства выполняются, поэтому множество D' со введенными в нем линейными операциями является линейным пространством (линейным множеством).

В D' определим сходимость следующим образом. Будем говорить, что последовательность $\{f_k\} \subset D'$ сходится к обобщенной функции $f \in D'$, если

$$(f_k, \varphi) \rightarrow (f, \varphi), \quad k \rightarrow \infty, \quad \forall \varphi \in D.$$

Такая сходимость последовательности функционалов называется слабой сходимостью. Линейное пространство D' со введенной в нем сходимостью называется пространством обобщенных функций D' . Как топологическое пространство, оно является сопряженным к топологическому пространству D .

Локальные свойства обобщенных функций. Будем говорить, что обобщенная функция f равна нулю в области Ω , если $\forall \varphi \in D(\Omega)$ имеет место равенство

$$(f, \varphi) = 0.$$

Две обобщенные функции f и g по определению считаются равными в Ω , если $f - g = 0$, т. е.

$$(f, \varphi) = (g, \varphi), \quad \forall \varphi \in D(\Omega).$$

Обобщенные функции f и g считаются равными (во всем R^n), если

$$(f, \varphi) = (g, \varphi), \quad \forall \varphi \in D.$$

Говорят, что обобщенная функция f принадлежит классу $C^p(\Omega)$, если в Ω она совпадает с функцией $f_0(x)$ класса $C^p(\Omega)$, т. е.

$$(f, \varphi) = (f_0, \varphi) = \int f_0(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in D(\Omega).$$

Лемма 3. Пусть пространство R^n покрыто счетной системой открытых шаров $U(x_k; r_k)$, $k = 1, 2, \dots$. Причем в каждом шаре $U(x_k; r_k)$ обобщенная функция f совпадает с обобщенной функцией f_k . Тогда f однозначно определяется своими локальными элементами f_k .

Доказательство. Из счетного покрытия шарами $U(x_k; r_k)$ выберем конечное покрытие компакта $\text{supp } \varphi : U(x_1; r_1), U(x_2; r_2), \dots, U(x_N; r_N)$, где $N = N(\varphi)$. На основании равенства (4.5) имеем

$$(f, \varphi) = \sum_{k=1}^N (f, \varphi_k) = \sum_{k=1}^N (f_k, \varphi_k), \quad \text{supp } \varphi_k \subset U(x_k; r_k).$$

Покажем единственность f . Пусть существует другая обобщенная функция g с теми же локальными элементами f_k , тогда

$$(g, \varphi) = \sum_{k=1}^N (g, \varphi_k) = \sum_{k=1}^N (f_k, \varphi_k) = (f, \varphi) \Rightarrow g = f.$$

Из этой леммы вытекает, что обобщенная функция f равна нулю в области Ω , если она равна нулю в окрестности каждой точки области Ω .

Говорят, что обобщенная функция $f(x)$ сосредоточена на компакте K , если она равна нулю на дополнении к этому множеству. Наименьшее замкнутое множество, на котором сосредоточена $f(x)$, называется носителем этой функции ($\text{supp } f$). Таким образом, носитель обобщенной функции есть дополнение объединения всех открытых множеств, на кото-

рых $f(x) = 0$. Если $\text{supp } f$ — ограниченное множество, то f называется финитной обобщенной функцией.

Из определения носителя обобщенной функции f следует, что в любой области вне носителя (в окрестности любой точки, не принадлежащей носителю) обобщенная функция $f = 0$.

В самом деле, если $x_0 \in \text{supp } f$, то найдется окрестность $U(x_0; \varepsilon)$, в которой $f = 0$ (в противном случае $x_0 \in \text{supp } f$).

Пример. Характеристическая функция отрезка

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq a, \\ 0, & |x| > a, \end{cases}$$

функция с компактным носителем, сосредоточенная на $[-a, a]$.

Свойство полноты пространства $D'(\Omega)$. Имеет место теорема [25]. Пусть $\{f_\nu\} \subset D'(\Omega)$ сходится $\forall \varphi \in D(\Omega)$, т. е. (f_ν, φ) сходится при $\nu \rightarrow \infty$. Тогда функционал f на $D(\Omega)$, определяемый равенством

$$(f, \varphi) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} (f_\nu, \varphi),$$

также является линейным и непрерывным на $D(\Omega)$, т. е. $f \in D'(\Omega)$.

4.4. Регулярные обобщенные функции

Функция $f(x)$ называется локально интегрируемой (локально суммируемой) в области Ω , если она интегрируема (по Лебегу) в любой подобласти $\Omega' \Subset \Omega$. Она называется локально интегрируемой в R^n , если она интегрируема в любой ограниченной области $\Omega \subset R^n$.

При помощи любой локально интегрируемой функции $f(x)$ можно определить функционал f , действующий по формуле

$$(f, \varphi) = \int f(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in D(\Omega), \quad f(x) \in L^1_{loc}. \quad (4.6)$$

В силу линейности интеграла функционал (f, φ) линейный, и по теореме о предельном переходе под знаком интеграла имеем [21]

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (f, \varphi_k) = \lim \int f(x) \varphi_k(x) dx = \int f(x) \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(x) dx = (f, \varphi).$$

Таким образом, формула (4.6) определяет линейный непрерывный функционал f на пространстве D , т. е. обобщенную функцию f .

Обобщенная функция f , порожденная локально интегрируемой в R^n функцией $f(x)$ по формуле (4.6) называется регулярной обобщенной функцией. Все остальные линей-

ные непрерывные функционалы на D называются сингулярными обобщенными функциями.

Например, обобщенная постоянная C в Ω есть регулярная обобщенная функция, действующая по формуле

$$(f, \varphi) = \int C\varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in D(\Omega).$$

Функция скачка (θ, φ) , где $\theta(x)$ — единичная функция Хевисайда, также дает пример регулярной обобщенной функции, определяемой равенством в D'

$$(\theta, \varphi) = \int_0^\infty \varphi(x) dx.$$

Имеет место лемма 4 (дю Буа–Реймонд). Для того чтобы локально интегрируемая в Ω функция $f(x)$ обращалась в нуль в области Ω в смысле равенства обобщенных функций (т. е. в $D'(\Omega)$) необходимо и достаточно, чтобы $f(x) = 0$ почти везде в Ω .

Доказательство. Достаточность очевидна, так как если $f(x) = 0$ в Ω , то интеграл

$$(f, \varphi) = \int f(x) \varphi(x) dx = 0, \quad \forall \varphi \in D(\Omega).$$

Необходимость. Пусть $f = 0$ в Ω в смысле равенства в D' и пусть $a \in \Omega$ — произвольная точка. Тогда существует замкнутый шар $\bar{U}(a, \varepsilon) \subset \Omega$, в котором $f = 0$. Система функций

$$\psi_k(x) = e^{\frac{i}{\varepsilon}(k, x)} \omega_\varepsilon(x - a)$$

при любом мультииндексе $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ принадлежит $D(\Omega)$. Отсюда

$$(f, \psi_k) = \int e^{\frac{i}{\varepsilon}(k, x)} f(x) \omega_\varepsilon(x - a) dx = 0,$$

а это означает, что все коэффициенты Фурье по тригонометрической системе $\left\{ \exp \frac{i}{\varepsilon}(k, x) \right\}$ функции $f(x) \omega_\varepsilon(x - a)$, интегрируемой на шаре $U(a; \varepsilon)$, равны нулю. Отсюда следует, что $f(x) = 0$ в этом шаре, а так как a — произвольная точка в Ω , то $f(x) = 0$ в Ω .

Из доказанной леммы вытекает, что всякая регулярная обобщенная функция определяется единственную (с точностью до значений на множестве меры нуль) локально интегрируемую функцию. В самом деле, если предположить, что регулярной обобщенной функции f соответствуют две локально интегрируемые функции $f(x)$ и $g(x)$, то согласно (4.6):

$$\begin{aligned} (f, \varphi) &= \int f(x) \varphi(x) dx = \int g(x) \varphi(x) dx \stackrel{\text{п.в.}}{=} \\ &\Rightarrow \int [f(x) - g(x)] \varphi(x) dx \stackrel{\text{п.в.}}{=} 0 \Rightarrow f(x) - g(x) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, всякой локально интегрируемой функции соответствует единственная регулярная обобщенная функция, и обратно, всякой регулярной обобщенной функции можно поставить в соответствие единственную локально интегрируемую функцию, порождающую ее. В силу этого взаимно однозначного соответствия между множествами регулярных обобщенных функций и порождающих их локально интегрируемых функций последнее можно включить в состав регулярных обобщенных функций, т. е. можно отождествить локально интегрируемую функцию $f(x)$ и порождающую ее регулярную обобщенную функцию f . В этом смысле обычные, т. е. локально интегрируемые в R^n функции являются регулярными обобщенными функциями (вложение $L_{loc}^1(\Omega) \subset D'(\Omega)$).

Отметим также, что если последовательность локально интегрируемых функций $f_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots$) сходится равномерно на каждом компакте $K \subset R^n$, то последовательность регулярных обобщенных функций f_k сходится к регулярной обобщенной функции f в D' . Действительно,

$$(f_k, \varphi) = \int f_k(x) \varphi(x) dx \rightarrow \int f(x) \varphi(x) dx = (f, \varphi), \quad \forall \varphi \in D.$$

Если $f_j \in L_{loc}^1$ и $f_j \rightarrow f(x)$ в L_{loc}^1 , т. е. на каждом компакте K

$$\left\| \int f_j(x) - f(x) dx \right\| \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty,$$

то $f_j(x) \rightarrow f(x)$ в D' .

Действительно, $\forall \varphi \in D$, $\text{supp } \varphi \subset K$, имеем

$$\left\| (f_j - f, \varphi) \right\| = \left| \int (f_j(x) - f(x)) \varphi(x) dx \right| \leq \max |\varphi(x)| \int |f_j(x) - f(x)| dx \rightarrow 0.$$

Пример. Согласно теореме Римана–Лебега [35]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \sin nx dx \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Следовательно, в топологии пространства D' : $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(nx) = 0$.

Замечание. Если обобщенная функция f — линейный непрерывный функционал (f, φ) на основных функциях $\varphi(x) \in K^m$, то говорят что f имеет конечный порядок $p \leq m$ на пространстве K^m . Обобщенные функции, определенные на пространстве D , имеют бесконечный порядок (обобщенные функции бесконечного порядка), а обобщенные функции, определенные на пространстве K° ($m = 0$), называются мерами.

4.5. Сингулярные обобщенные функции

Согласно определению дельта-функции, $\delta(x)$ — линейный непрерывный функционал, ставящий в соответствие каждой основной функции $\varphi(x)$ ее значение в нуле: $(\delta, \varphi) = \varphi(0)$.

Покажем, что $\delta(x)$ — сингулярная обобщенная функция, т. е. не существует локально интегрируемой функции, порождающей ее в соответствии с формулой (4.6). Предположим противное, что такая локально интегрируемая функция $f(x)$ существует. Тогда, должно быть,

$$(\delta, \varphi) = \int f(x) \varphi(x) dx = \varphi(0), \quad \forall \varphi \in D. \quad (4.7)$$

Очевидно, функция $x_1 \varphi(x)$, где x_1 — первая координата вектора x , также является основной, поэтому имеем

$$(f, x_1 \varphi) = \int f(x) x_1 \varphi(x) dx = x_1 \varphi(x) \Big|_{x=0} = 0 = (x_1 f, \varphi), \quad \forall \varphi \in D.$$

На основании леммы дю Буа-Реймонда функция $x_1 f(x) \xrightarrow{\text{п.в.}} 0 \Rightarrow f \xrightarrow{\text{п.в.}} 0$. Но тогда

$$\int f(x) \varphi(x) dx = 0, \quad \forall \varphi \in D,$$

что противоречит равенству (4.7).

Дельта-функцию можно рассматривать как предел в D' функций $\omega_\varepsilon(x)$ при $\varepsilon \rightarrow +0$. В самом деле, в силу непрерывности $\varphi(x) \in D$, $\forall \eta > 0$, $\exists \varepsilon_0 > 0$, что

$$|x| < \varepsilon_0 \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(0)| < \eta.$$

Отсюда

$$\left| \int \omega_\varepsilon(x) \varphi(x) dx - \varphi(0) \right| \leq \int_{|x|<\varepsilon} \omega_\varepsilon(x) |\varphi(x) - \varphi(0)| dx < \eta \text{ при } \varepsilon < \varepsilon_0,$$

т. е.

$$\int \omega_\varepsilon(x) \varphi(x) dx \rightarrow \varphi(0) \text{ при } \varepsilon \rightarrow +0.$$

Таким образом, получаем

$$(\omega_\varepsilon, \varphi) = \int \omega_\varepsilon(x) \varphi(x) dx \rightarrow \varphi(0) = (\delta, \varphi) \Rightarrow \omega_\varepsilon \rightarrow \delta \text{ при } \varepsilon \rightarrow +0 \text{ в } D'.$$

Обобщением дельта-функции является простой слой на поверхности. Пусть S — кусочно-гладкая поверхность и $\mu(x)$ — кусочно-непрерывная функция, заданная на S . Простым слоем с плотностью $\mu(x)$ называется обобщенная функция $\mu\delta_S$, действующая на произвольную основную функцию $\varphi(x)$ по формуле

$$(\mu\delta_S, \varphi) = \int_S \mu(x) \varphi(x) dS, \quad \varphi \in D.$$

Носитель обобщенной функции $\mu\delta_S$: $\text{supp } \mu\delta_S \subset S$. Обобщенная функция $\mu\delta_S$ моделирует пространственное распределение, например электрических зарядов плотности $\mu(x)$, сосредоточенных на поверхности S .

Обобщенные функции $Vp \frac{1}{x}$, $Vp \frac{1}{x^2}$, $P \frac{1}{|x|}$. Рассмотрим здесь примеры некоторых сингулярных обобщенных функций.

1. Введем линейный функционал $Vp \frac{1}{x}$, действующий на произвольную основную функцию по формуле

$$\left(Vp \frac{1}{x}, \varphi \right) = Vp \int \frac{\varphi(x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \right) \frac{\varphi(x)}{x} dx, \quad \varphi \in D. \quad (4.8)$$

Покажем, что $Vp \frac{1}{x}$ — непрерывный функционал. Пусть $\text{supp } \varphi \subset (-R, R)$. Тогда

$$\begin{aligned} \left| \left(Vp \frac{1}{x}, \varphi \right) \right| &= \left| Vp \int \frac{\varphi(x)}{x} dx \right| = \left| Vp \int_{-R}^R \frac{\varphi(0) + x\varphi'(x')}{x} dx \right| = \left| \int_{-R}^R \varphi'(x') dx \right| \leq \\ &\leq 2R \max_x |\varphi'(x)|, \quad x' \in (-R, R). \end{aligned}$$

Здесь использовалось равенство

$$Vp \int_{-R}^R \frac{dx}{x} = 0.$$

Пусть теперь $\{\varphi_n(x)\} \subset D$ сходится к $\varphi(x) \in D$ (в смысле сходимости в D). Тогда

$$\left| \left(Vp \frac{1}{x}, \varphi - \varphi_n \right) \right| \leq 2R \max_x |\varphi'(x) - \varphi'_n(x)| \rightarrow 0 \Rightarrow \left(Vp \frac{1}{x}, \varphi_n \right) \rightarrow \left(Vp \frac{1}{x}, \varphi \right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Отсюда следует непрерывность функционала $Vp \frac{1}{x}$; линейность следует из линейности конструкции (4.8).

Таким образом, функционал $Vp \frac{1}{x}$, определенный в (4.8), есть обобщенная функция.

Она называется главным значением (по Коши) сингулярного интеграла¹⁾

$$\int \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

Обобщенная функция $Vp \frac{1}{x}$ совпадает с обычной функцией $\frac{1}{x}$ в любой области, не содержащей начала координат (в смысле равенства в D'), т. е.

$$Vp \frac{1}{x} = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0 \text{ в } D'.$$

Поэтому $Vp \frac{1}{x}$ называется регуляризацией функции $\frac{1}{x}$.

Установим теперь равенства в D'

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x + i\varepsilon} &= \frac{1}{x + i0} = -i\pi\delta(x) + Vp \frac{1}{x}, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x - i\varepsilon} &= \frac{1}{x - i0} = i\pi\delta(x) + Vp \frac{1}{x}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

¹⁾ Символ Vp от французского *valeur principale* — главное значение.

Имеем цепочку равенств для основной функции $\varphi \in D(-R, R)$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{x+i\varepsilon}, \varphi \right) &= \int \frac{\varphi(x)}{x+i\varepsilon} dx = \int_{-R}^R \frac{(x-i\varepsilon)\varphi(x)}{x^2+\varepsilon^2} dx = \varphi(0) \int_{-R}^R \frac{x-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} dx + \\ &+ \int_{-R}^R [\varphi(x)-\varphi(0)] \frac{x-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} dx. \end{aligned}$$

При $\varepsilon \rightarrow +0$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{x+i\varepsilon}, \varphi \right) &\rightarrow \left(\frac{1}{x+i0}, \varphi \right) = \varphi(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-R}^R \frac{x dx}{x^2+\varepsilon^2} - i\varphi(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(2 \operatorname{arctg} \frac{R}{\varepsilon} \right) + \\ &+ Vp \int_{-R}^R \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} dx = -i\pi\varphi(0) + Vp \int_{-R}^R \frac{\varphi(x)}{x} dx = -i\pi(\delta, \varphi) + \left(Vp \frac{1}{x}, \varphi \right) = \left(-i\pi\delta + Vp \frac{1}{x}, \varphi \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует первое равенство в (4.9), второе доказывается совершенно аналогично. Равенства (4.9) называются формулами Сохоцкого.

2. Введем обобщенную функцию $Vp \frac{1}{x^2}$ при помощи формулы

$$\left(Vp \frac{1}{x^2}, \varphi \right) = Vp \int \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2} dx, \quad \forall \varphi \in D.$$

То, что эта регуляризация функции $1/x^2$ корректна, следует из равенства

$$\left(x^2 Vp \frac{1}{x^2}, \varphi \right) = \left(Vp \frac{1}{x^2}, x^2 \varphi \right) = Vp \int \frac{x^2 \varphi - 0 \cdot \varphi(0)}{x^2} dx = \int \varphi(x) dx = (1, \varphi),$$

т. е. обобщенная функция $Vp \frac{1}{x^2}$ есть решение уравнения

$$x^2 u = 1 \text{ в } D'(R^1).$$

3. Обобщенная функция $P \frac{1}{|x|}$ определяется при помощи соотношения

$$\left(P \frac{1}{|x|}, \varphi \right) = \int_{|x|<1} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{|x|} dx + \int_{|x|>1} \frac{\varphi(x)}{|x|} dx, \quad \forall \varphi \in D(R').$$

В качестве примера найдем частное решение уравнения $xu = \operatorname{sgn} x$.

Имеем $\forall \varphi \in D(R^1)$:

$$\left(x P \frac{1}{|x|}, \varphi \right) = \left(P \frac{1}{|x|}, x\varphi \right) = \int_{|x|<1} \frac{\varphi(x)x-\varphi(0)0}{|x|} dx + \int_{|x|>1} \frac{x\varphi(x)}{|x|} dx = \int \frac{x\varphi(x)}{|x|} dx = (\operatorname{sgn} x, \varphi).$$

Следовательно, обобщенная функция $P \frac{1}{|x|}$ удовлетворяет нашему уравнению в $D'(R^1)$.

4. Псевдофункция $1/x^2 \left(\text{Pf} \frac{1}{x^2} \right)$ определена Адамаром следующим образом:

$$\left(\text{Pf} \frac{1}{x^2}, \varphi \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left\{ \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - 2 \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} \right\}.$$

5. Введем, наконец, обобщенную функцию $Vp \frac{1}{x^n}$ ($n \geq 1$, целое):

$$\left(Vp \frac{1}{x^n}, \varphi \right) = Vp \int \frac{\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0) - \dots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \varphi^{(n-1)}(0)}{x^n} dx, \quad \forall \varphi \in D(R^1).$$

Эта сингулярная обобщенная функция является частным решением уравнения в $D'(R^1)$

$$ux^n = 1.$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} \left(ux^n, \varphi \right) &= \left(Vp \frac{1}{x^n}, x^n \varphi \right) = \int \frac{x^n \varphi - \left(x^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k \varphi^{(k)}(0)}{k!} \right)_{|x=0}}{x^n} dx = \\ &= \int \varphi(x) dx = (1, \varphi) \Rightarrow x^n Vp \frac{1}{x^n} = 1. \end{aligned}$$

Обобщенная функция $Vp \frac{1}{x^n}$ совпадает с обычной функцией $\frac{1}{x^n}$ в любой области в R^1 , не содержащей начала координат.

4.6. Преобразования переменных

Пусть дано линейное преобразование $x = Ay + B$, где $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ — столбцы, $A = \|a_{ik}\|$ — матрица порядка $(n \times n)$. Напомним, что преобразование называется неособенным, если $\det A \neq 0$. В этом случае существует обратное линейное преобразование $y = A^{-1}(x - B)$, где A^{-1} — матрица, обратная к матрице A .

Предположим, что $f(x)$ — локально интегрируемая в R^n функция. Тогда для любой $\varphi \in D$ получим

$$\begin{aligned} \left(f(Ay + B), \varphi(y) \right) &= \int f(Ay + B) \varphi(y) dy = \left\{ \begin{array}{l} x = Ay + B, \\ y = A^{-1}(x - B), \\ dy = \frac{dx}{|\det A|} \end{array} \right\} = \\ &= \int f(x) \varphi[A^{-1}(x - B)] \frac{dx}{|\det A|} = \int f(x) \frac{\varphi[A^{-1}(x - B)]}{|\det A|} dx. \end{aligned}$$

Полученное равенство принимается за определение обобщенной функции $f(Ay + B)$ для произвольной обобщенной функции $f(x) \in D'$:

$$(f(Ay + B), \varphi(y)) = \left(f(x), \frac{\varphi[A^{-1}(x - B)]}{|\det A|} \right), \quad \forall \varphi \in D. \quad (4.10)$$

Для унимодулярных преобразований ($|\det A| = 1$) формула (4.10) имеет особенно простой вид

$$(f(Ay + B), \varphi(y)) = (f(x), \varphi[A^{-1}(x - B)]).$$

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Сдвиг на вектор y_0 . В этом случае $A = E$, $B = y_0$, $x = y - y_0$. На основании формулы (4.10) имеем

$$(f(y + y_0), \varphi) = (f(x), \varphi(x - y_0)).$$

Например, для дельта-функции

$$(\delta(x - x_0), \varphi) = (\delta(x), \varphi(x + x_0)) = \varphi(x_0), \quad \forall x, x_0 \in R^n.$$

Обобщенная функция $f(x + x_0)$ называется сдвигом обобщенной функции $f(x)$ на вектор x_0 . Обобщенная функция $f(x)$ называется периодической с периодом $b \neq 0$, если $f(x + b) = f(x)$ в D' .

2. Отражение в начале координат. Здесь $B = 0$, $A = -E$, $x = -y$. Формула (4.10) дает

$$(f(-y), \varphi) = (f(x), \varphi(-x)) = (f, \varphi(-x)).$$

Например,

$$(\delta(-x), \varphi) = (\delta(x), \varphi(-x)) = \varphi(0) = (\delta, \varphi(x)) \Rightarrow \delta(-x) = \delta(x).$$

Обобщенная функция f называется центрально-симметричной, если $f(-x) = f(x)$ в D' .

Таким образом, дельта-функция центрально-симметрична.

3. Преобразование подобия. В этом случае $A = cE$, $B = 0$, $x = cy$. Формула (4.10) дает

$$(f(cy), \varphi(y)) = \left(f, \frac{\varphi\left(\frac{y}{c}\right)}{|c^n|} \right) = \frac{1}{|c^n|} \left(f, \varphi\left(\frac{y}{c}\right) \right).$$

Для дельта-функции имеем

$$\begin{aligned} (\delta(cx), \varphi) &= \frac{1}{|c^n|} \left(\delta(x), \varphi\left(\frac{x}{c}\right) \right) = \frac{\varphi(0)}{|c^n|} = \frac{1}{|c^n|} (\delta(x), \varphi(x)) = \left(\frac{\delta(x)}{|c^n|}, \varphi(x) \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \delta(cx) = \frac{1}{|c^n|} \delta(x) \text{ в } D'(R^n). \end{aligned}$$

Отметим также полезные равенства [20]

$$\delta(a_1x_1, a_2x_2, \dots, a_nx_n) = \frac{\delta(x_1, x_2, \dots, x_n)}{|a_1||a_2| \dots |a_n|},$$

$$\delta(\alpha x + \beta) = \frac{1}{|\alpha|^n} \delta\left(x + \frac{\beta}{\alpha}\right), \quad \alpha \neq 0.$$

Обобщенная функция $f(x)$, удовлетворяющая уравнению в D'

$$f(\alpha x) = \alpha^\lambda f(x)$$

при любом $\alpha > 0$, называется однородной функцией степени λ . Из этого определения следует, что $\delta(x)$ — однородная обобщенная функция степени $-n$ в $D'(R^n)$.

4. Вращение. Здесь $A^{-1} = A'$, $|\det A| = 1$, $B = 0$. Согласно (4.10), имеем

$$(f(Ay), \varphi(y)) = (f, \varphi[A'y]).$$

Здесь A' — матрица транспонированная к матрице A .

Умножение обобщенных функций. Пусть $f(x)$ — локально интегрируемая функция, $a(x) \in C^\infty(R^n)$. Определим функционал af по формуле

$$(af, \varphi) = \int a(x) f(x) \varphi(x) dx = (f, a\varphi), \quad \forall \varphi \in D(R^n). \quad (4.11)$$

Функционал af , определяемый правой частью формулы (4.11), линейный и непрерывный из D' в D' . Так как операция $a\varphi$ непрерывна из D в D , то $(af, \varphi_v) = (f, a\varphi_v) \rightarrow (f, a\varphi) = (af, \varphi)$. Следовательно, $af \in D'$. Равенство (4.11) принимается за определение обобщенной функции af . Функция $a(x)$ называется мультипликатором в $D(R^n)$.

В качестве примера рассмотрим обобщенную функцию $a\delta$, где $a(x) \in C^\infty(R^n)$, δ — дельта-функция. Мы имеем для любой основной функции $\varphi(x)$

$$(a\delta, \varphi) = (\delta(x), a\varphi) = a(0)\varphi(0) = a(0)(\delta(x), \varphi) = (a(0)\delta, \varphi).$$

Отсюда следует, что в смысле равенства в D' : $a(x)\delta(x) = a(0)\delta(x)$, $x^k\delta(x) = 0$ ($k \geq 1$).

Имеет место включение

$$\sup p(af) \subset \sup pa \cap \sup pf.$$

Отсюда видно, что если носители $a(x)$ и f не пересекаются, то $af = 0$ в D' .

Пусть $f \in D'(\Omega)$ и $\eta \in C^\infty$ — произвольная функция, равная 1 в окрестности носителя f . Тогда справедливо равенство

$$f = \eta f.$$

В самом деле, $\forall \varphi \in D(\Omega)$ носители $(1-\eta)\varphi$ и f имеют пустое пересечение. Имеем

$$(f - \eta f, \varphi) = ((1-\eta)f, \varphi) = (f, (1-\eta)\varphi) = 0 \Rightarrow f - \eta f = 0 \Rightarrow f = \eta f \text{ в } D'(\Omega).$$

Замечание. Перемножать две произвольные обобщенные функции f и g , в общем случае, нельзя [11]. Пусть, например, $f = |x|^{-1/2}$. Это локально интегрируемая функция, однако $f^2 = |x|^{-1}$ не является таковой в R^1 и, значит, не определяет никакого распределения. Относительно умножения в пространстве L^2 см., например, [31].

4.7. Дифференцирование и интегрирование обобщенных функций

Определение производной в $D'(\Omega)$. Пусть обобщенная функция $f \in C^p(\Omega)$. Тогда для любого мультииндекса α , $|\alpha| \leq p$ имеет место формула интегрирования по частям

$$\begin{aligned} (D^\alpha f, \varphi) &= \int D^\alpha f(x) \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int f(x) D^\alpha \varphi(x) dx = \\ &= (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha \varphi), \quad \forall \varphi \in D(\Omega). \end{aligned}$$

В самом деле, имеем цепочку равенств

$$\begin{aligned} \int D^\alpha f(x) \varphi(x) dx &= \int \frac{\partial^{|\alpha|} f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \\ &= (-1)^{\alpha_1} \int \frac{\partial^{|\alpha|-1} f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \\ &= (-1)^{\alpha_1 + \alpha_2} \int \frac{\partial^{|\alpha|-2} f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_3^{\alpha_3} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}} \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \\ &\quad \dots \dots \dots \\ &= (-1)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int f(x) D^\alpha \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Это равенство примем теперь за определение (обобщенной) производной $D^\alpha f$ от обобщенной функции $f \in D'(\Omega)$.

Таким образом, согласно определению, имеем

$$(D^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha \varphi), \quad \forall \varphi \in D(\Omega). \quad (4.12)$$

Для того чтобы убедиться в корректности определения (4.12), покажем, что $\forall f \in D'$ — обобщенная производная $D^\alpha f \in D'$.

Во-первых, $\forall \varphi \in D(\Omega)$ производная $D^\alpha \varphi$ также является основной функцией ($D^\alpha \varphi \in D(\Omega)$). Значит, правая часть в (4.12) определена на пространстве основных функций D . Далее, функционал $D^\alpha f$ линеен. Имеем, согласно (4.12), $\forall \varphi, \psi \in D$ и $\forall \lambda, \mu \in C$

$$\begin{aligned} (D^\alpha f, \lambda\varphi + \mu\psi) &= (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha (\lambda\varphi + \mu\psi)) = (-1)^{|\alpha|} (f, (\lambda D^\alpha \varphi + \mu D^\alpha \psi)) = \\ &= (-1)^{|\alpha|} [\lambda (f, D^\alpha \varphi) + \mu (f, D^\alpha \psi)] = \lambda (D^\alpha f, \varphi) + \mu (D^\alpha f, \psi). \end{aligned}$$

Наконец, он непрерывен в D . В самом деле, пусть $\{\varphi_\nu(x)\} \subset D$ сходится к $\varphi(x) \in D$. В силу определения сходимости в D последовательность производных $\{D^\alpha \varphi_\nu(x)\}$ равномерно сходится к $D^\alpha \varphi(x)$. Поэтому имеем

$$(D^\alpha f, \varphi_\nu) = (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha \varphi_\nu) \rightarrow (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha \varphi) = (D^\alpha f, \varphi), \quad \nu \rightarrow \infty.$$

Итак, производная от обобщенной функции всегда существует и сама является обобщенной функцией. Поэтому термин «обобщенная производная» представляется естественным.

Обозначим через $\{D^\alpha f(x)\}$ классическую производную (там, где она существует).

Если $f \in C^p(\Omega)$, то в области Ω

$$D^\alpha f = \{D^\alpha f(x)\}, \quad |\alpha| \leq p.$$

Можно дать и более естественное с точки зрения классического анализа определение производной от обобщенной функции. Пусть $n = 1$, тогда имеем в силу непрерывности функционала f

$$\begin{aligned} \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \varphi(x) \right) &= \left(f, \frac{\varphi(x - \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} \right) \rightarrow (f, -\varphi'(x)) = \\ &= (f', \varphi(x)), \quad \Delta x \rightarrow 0, \quad \forall \varphi \in D. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \rightarrow f', \quad \Delta x \rightarrow 0$$

в смысле сходимости в D' .

Свойства обобщенных производных. Операция дифференцирования обобщенных функций обладает рядом замечательных свойств, некоторые из них мы здесь перечислим.

1. Любая обобщенная функция бесконечно дифференцируема. Это утверждение следует из того, что $D^\alpha f$ при любом мультииндексе α существует и является обобщенной функцией.

2. Результат дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования. Действительно, согласно (4.12)

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \varphi \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right), \varphi \right) = - \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) = \left(f, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_i} \right);$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}, \varphi \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right), \varphi \right) = - \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) = \left(f, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \right).$$

В силу равенства смешанных производных от основной функции получаем

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = D^{(1,1)} f.$$

И вообще, $D^{\alpha+\beta} f = D^\alpha (D^\beta f) = D^\beta (D^\alpha f)$.

3. Если $f \in D'$ и $a(x) \in C^\infty(R^n)$, то справедлива формула Лейбница для производной от произведения af . Получим ее для первой производной. Имеем $\forall \varphi \in D$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (af), \varphi \right) &= - \left(af, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) = - \left(f, a \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) = - \left(f, \frac{\partial(a\varphi)}{\partial x_i} - \varphi \frac{\partial a}{\partial x_i} \right) = \\ &= - \left(f, \frac{\partial(a\varphi)}{\partial x_i} \right) + \left(f, \varphi \frac{\partial a}{\partial x_i} \right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}, a\varphi \right) + \left(f \frac{\partial a}{\partial x_i}, \varphi \right) = \left(a \frac{\partial f}{\partial x_i} + f \frac{\partial a}{\partial x_i}, \varphi \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} (af) = f \frac{\partial a}{\partial x_i} + a \frac{\partial f}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

4. Если обобщенная функция $f = 0$, $x \in \Omega$, то и $D^\alpha f = 0$, $x \in \Omega$. В самом деле, если $\varphi \in D(\Omega)$, то и $D^\alpha \varphi \in D(\Omega)$. Поэтому $\forall \varphi \in D(\Omega)$

$$(D^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha \varphi) = 0 \Rightarrow D^\alpha f = 0, \quad x \in \Omega.$$

5. Операция дифференцирования непрерывна из D' в D' , т. е. если $\{f_k\} \subset D'$ сходится к $f \in D'$ ($k \rightarrow \infty$), то $D^\alpha f_k \rightarrow D^\alpha f$ в D' . Действительно,

$$(D^\alpha f_k, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f_k, D^\alpha \varphi) \rightarrow (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha \varphi) = (D^\alpha f, \varphi), \quad \forall \varphi \in D.$$

Примеры ($n=1$). 1. Пусть $f(x) \in C^1(x \leq x_0)$ и $f(x) \in C^1(x \geq x_0)$. Покажем, что обобщенная производная

$$f' = \{f'(x)\} + [f]_{x_0} \delta(x - x_0), \quad (4.13)$$

где $[f]_{x_0} = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ — скачок функции $f(x)$ в точке x_0 ; $f(x)$ — классическая производная.

Имеем цепочку равенств $\forall \varphi \in D(R^1)$

$$\begin{aligned} (f', \varphi) &= -\lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{x_0 - \varepsilon_1} f(x) \varphi'(x) dx - \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \int_{x_0 + \varepsilon_2}^{\infty} f(x) \varphi'(x) dx = \\ &= -\lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0}} \left\{ f(x) \varphi(x) \Big|_{-\infty}^{x_0 - \varepsilon_1} + f(x) \varphi(x) \Big|_{x_0 + \varepsilon_2}^{\infty} - \int_{-\infty}^{x_0 - \varepsilon_1} f'(x) \varphi(x) dx - \int_{x_0 + \varepsilon_2}^{\infty} f'(x) \varphi(x) dx \right\} = \\ &= \{f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)\} \varphi(x_0) + \int_{-\infty}^{\infty} \{f'(x)\} \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Итак,

$$(f', \varphi) = ([f]_{x_0} \delta(x - x_0), \varphi) + (\{f'(x)\}, \varphi),$$

т. е. приходим к формуле (4.13). Например, если $f(x) = \theta(x)$, где $\theta(x)$ — единичная функция Хевисайда:

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

то $\theta' = \delta(x)$, так как $\{\theta'\} = 0$.

Замечание. $\theta(x)$ в нуле не определено. Дело в том, что $\theta(x)$ трактуется как регулярная обобщенная функция, а это означает, что нас интересует лишь значение интеграла от произведения $\theta(x)$ на основную функцию. Но интеграл не зависит от значений, принимаемых подынтегральной функцией на множестве меры нуль.

В том случае, когда $f(x)$ имеет точки разрыва первого рода x_k , формула (4.13) обобщается и имеет вид

$$f' = \{f'(x)\} + \sum_k [f]_{x_k} \delta(x - x_k). \quad (4.14)$$

Например, если функцию

$$f_0(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2\pi}, \quad x \in [0, 2\pi]$$

продолжить на всю ось 2π -периодическим образом, то в точках $x_k = 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) появляются разрывы первого рода, причем $[f_0]_{x_k} = 1$. Тогда обобщенная производная

$$f'_0 = -\frac{1}{2\pi} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2k\pi). \quad (4.15)$$

2. Найдем плотность зарядов, соответствующих диполю с электрическим (дипольным) моментом $+1$ в точке $x = 0$ на прямой.

Плотность зарядов, соответствующих диполю приближенно равна

$$\frac{\delta(x - \varepsilon) - \delta(x)}{\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0.$$

В пределе при $\varepsilon \rightarrow +0$ имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\delta(x-\varepsilon)}{\varepsilon} - \frac{\delta(x)}{\varepsilon}, \varphi \right) &= \frac{1}{\varepsilon} (\delta(x-\varepsilon), \varphi) - \frac{1}{\varepsilon} (\delta(x), \varphi) = \frac{\varphi(\varepsilon) - \varphi(0)}{\varepsilon} \rightarrow \varphi'(0) = \\ &= (\delta(x), \varphi'(x)) = -(\delta', \varphi). \end{aligned}$$

Значит, искомая плотность равна $-\delta'(x)$. Суммарный электрический заряд диполя равен $(-\delta'(x), 1) = (\delta(x), 0) = 0$, а момент его равен $(-\delta'(x), x) = (\delta(x), 1) = 1$.

3. Часто оказывается полезным следующее утверждение. Если ряд из локально интегрируемых функций $u_k(x)$ равномерно сходится на каждом компакте, то его можно почлененно дифференцировать сколько угодно раз и полученные ряды будут сходиться в $D'(R^1)$.

Для доказательства рассмотрим частичную сумму ряда. При любом $R > 0$ она равномерно сходится к сумме ряда $S(x)$ на компакте $|x| \leq R$:

$$S_p = \sum_{k=1}^p u_k(x) \rightarrow S(x), \quad |x| \leq R, \quad p \rightarrow \infty.$$

Из того, что локально интегрируемая функция $S_p(x)$ на каждом компакте равномерно сходится к функции $S(x)$, следует теперь сходимость $S_p(x)$ к $S(x)$ в смысле сходимости в D' (см. п. 4.4). Но тогда

$$D^\alpha S_p = \sum_{k=1}^p D^\alpha u_k(x) \rightarrow D^\alpha S, \quad p \rightarrow \infty \text{ в } D',$$

что и требовалось.

Рассмотрим ряд Фурье

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx}, \quad (4.16)$$

для коэффициентов которого имеет место оценка $|a_k| \leq A |k|^m + B$. Тогда этот ряд сходится в $D'(R^1)$. В самом деле, ряд

$$\frac{a_0 x^{m+2}}{(m+2)!} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{a_k}{(ik)^{m+2}} e^{ikx} = S(x)$$

сходится равномерно на любом отрезке $[-R, R]$. Следовательно, его можно почлененно дифференцировать сколько угодно раз, например $m+2$ раза. В результате получим ряд (4.16). Таким образом,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx} = D^{m+2} S \text{ в } D'(R^1).$$

Например, из равенства

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k} = -\ln \left| 2 \sin \frac{x}{2} \right|$$

получаем разложение котангенса в D'

$$\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sin kx.$$

4. Докажем формулу (разложение 2π -периодической дельта-функции в ряд Фурье).

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2k\pi) \text{ в } D'(R^1).$$

Для этого воспользуемся рядом Фурье для 2π -периодической функции из примера 1

$$f_0(x) = -\frac{i}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k}.$$

В силу результата, полученного в примере 3, этот ряд можно почленно дифференцировать в $D'(R^1)$. Имеем с учетом (4.15)

$$f'_0 = -\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx} = -\frac{1}{2\pi} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2k\pi).$$

Отсюда получаем требуемую формулу.

5. Покажем, что общее решение уравнения $x^m u = 0$ в $D'(R^1)$ есть

$$u = \sum_{k=0}^{m-1} c_k \delta^{(k)}(x). \quad (4.17)$$

Имеем $\forall \varphi \in D'(R^1)$

$$\begin{aligned} (x^m u, \varphi) &= \left(\sum_{k=0}^{m-1} c_k \delta^{(k)}, x^m \varphi \right) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k (\delta^{(k)}, x^m \varphi) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k (-1)^k \left(\delta, (x^m \varphi)^{(k)} \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k c_k (x^m \varphi(x))^{(k)} \Big|_{x=0} = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, обобщенная функция (4.17) действительно является решением нашего уравнения в $D'(R^1)$. Покажем теперь, что формула (4.17) определяет единственное решение уравнения $x^m u = 0$.

Пусть $\eta(x)$ — основная функция, равная единице в окрестности нуля ($\eta(x) \equiv 1, x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$). Тогда функция

$$\psi(x) = \frac{1}{x^m} \left(\varphi(x) - \eta \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^k}{k!} \varphi^{(k)}(0) \right) \in D(R^1).$$

Для всякого решения u имеем

$$(u, \varphi) = \left(u, \psi(x) x^m + \eta \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^k}{k!} \varphi^{(k)}(0) \right) = (x^m u, \psi) + \sum_{k=0}^{m-1} \left(u, \eta \frac{x^k}{k!} \right) (\delta, \varphi^{(k)}(x)).$$

Первое слагаемое в правой части равно нулю, так как u — по предположению — решение, а ψ — основная функция. Поэтому

$$(u, \varphi) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^k}{k!} (u, \eta x^k) (\delta^{(k)}, \varphi).$$

Полагая $c_k = (-1)^k (u, \eta x^k) / k!$, приходим к решению (4.17).

6. Фундаментальным решением дифференциального оператора

$$L = P\left(\frac{d}{dt}\right) = \frac{d^m}{dt^m} + a_1 \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} + \dots + a_m$$

с постоянными коэффициентами a_k называется любое решение уравнения

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)E(t) = \delta(t), \quad (4.18)$$

где $\delta(t)$ — дельта-функция.

Покажем, что функция $E_+(t) = \theta(t)Z(t)$, где $Z(t)$ — решение задачи Коши

$$LZ(t) = 0, \quad Z(0) = Z'(0) = \dots = Z^{(m-2)}(0) = 0, \quad Z^{(m-1)}(0) = 1,$$

удовлетворяет уравнению (4.18).

Имеем в силу (4.14)

$$\begin{aligned} E'_+(t) &= \theta(t)Z'(t), \quad E''_+(t) = \theta(t)Z''(t), \dots, \quad E_+^{(m-1)}(t) = \theta(t)Z^{(m-1)}(t), \\ E_+^{(m)}(t) &= \theta(t)Z^{(m)}(t) + [\theta(t)Z^{(m-1)}(t)] \delta(t) = \theta(t)Z^{(m)}(t) + \delta(t). \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения для производных в уравнение (4.18), приходим к тождеству

$$\theta(t)LZ(t) + \delta(t) = \delta(t).$$

7. Функционал порядка сингулярности $\leq p$ определяется с помощью равенства

$$(f, \varphi) = \sum_{k=0}^p (f_k(x), \varphi^{(k)}(x)).$$

Используя понятие производной, этот функционал можно представить так:

$$(f, \varphi) = \sum_{k=0}^p (-1)^k (f_k^{(k)}, \varphi) \Rightarrow f = \sum_{k=0}^p (-1)^k f_k^{(k)}.$$

Примеры при $n \geq 2$. 1. Пусть S — кусок кусочно-гладкой двухсторонней поверхности в R^3 и функция $f(x) \in C^1(\bar{\Omega})$, $\Omega = R^n/S$. Обозначим возможный скачок функции $f(x)$ при переходе через S в точке $x \in S$ символом $[f]_S$. Согласно определению

$$[f]_S(x) = f(x') - f(x''),$$

где точка x' принадлежит верхнему берегу поверхности S , а x'' — соответствующая ей точка на нижнем берегу S (рис. 4.5). В указанных условиях имеет место формула

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\} + [f]_S \cos(nx_i) \delta_s. \quad (4.19)$$

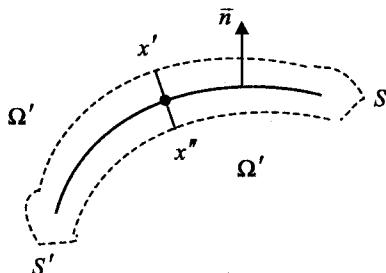


Рис. 4.5. К выводу обобщенной производной от разрывного поля

Доказательство. Имеем для любой основной функции $\varphi(x)$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi \right) &= - \left(f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) = - \int_{\Omega} f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \lim_{s' \rightarrow s} \int_{\Omega'} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} (f \varphi) - \varphi \frac{\partial f}{\partial x_i} \right] dx = \\ &= \lim_{s' \rightarrow s} \int_{s'} f(x) \varphi(x) \cos(nx_i) dS + \int_{\Omega'} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\} \varphi(x) dx = \int_S [f]_S \varphi(x) \cos(nx_i) dS + \\ &\quad + \left(\left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\}, \varphi \right) = \left(\left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\} + [f]_S \cos(nx_i) \delta_s, \varphi \right), \end{aligned}$$

что и требовалось.

Очевидно, формула (4.19) для обобщенной производной справедлива и для замкнутой поверхности S . Если $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$, то обобщенная производная совпадает с классической.

2. Двойной слой на S . Пусть S — кусочно-гладкая двухсторонняя поверхность, а $v(x)$ — кусочно-непрерывная функция на ней. Под двойным слоем $-\frac{\partial}{\partial n}(\nu \delta_s)$ будем понимать функционал, действующий на произвольную основную функцию $\varphi(x)$ по формуле

$$\left(-\frac{\partial}{\partial n}(\nu \delta_s), \varphi \right) = \int_S v(x) \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS. \quad (4.20)$$

Функционал $-\frac{\partial}{\partial n}(\nu \delta_s)$ — линейный и непрерывный и, следовательно, является обобщенной функцией. Двойной слой есть обобщение — $\delta'(x)$ на случай $n \geq 2$. Его можно интерпретировать как пространственную плотность распределения зарядов, обусловленную диполями, расположенными на S с интенсивностью момента $v(x)$ и ориентированными вдоль заданного направления нормали n на S .

3. Производные второго порядка. Пусть $f(x) \in C^2(\overline{R^n \setminus S})$. Вычислим $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$.

Имеем на основании формулы (4.19)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\} + [f]_s \cos(nx_i) \delta_s \right) = \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right\} + \left[\left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\} \right] \cos(nx_j) \delta_s + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x_j} ([f]_s \cos(nx_i) \delta_s). \end{aligned}$$

При $i = j$ получаем

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \right\} + \left[\left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\} \right] \cos(nx_i) \delta_s + \frac{\partial}{\partial x_i} ([f]_s \cos(nx_i) \delta_s). \quad (4.21)$$

Формула (4.21) позволяет вывести выражение для обобщенного оператора Лапласа. Имеем

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \right\} + \sum_{i=1}^n \left[\left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\} \right]_s \cos(nx_i) \delta_s + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} ([f]_s \cos(nx_i) \delta_s).$$

Вычислим каждое слагаемое, входящее в правую часть этого равенства

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \right\} &= \{\Delta f\}, \\ \left(\sum_{i=1}^n \left[\left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\} \right]_s \cos nx_i \delta_s, \varphi \right) &= \int_S \sum_{i=1}^n \left[\left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\} \right]_s \cos(nx_i) \varphi(x) dS = \\ &= \int_S \left[\frac{\partial f}{\partial n} \right]_s \varphi(x) dS = \left(\left[\frac{\partial f}{\partial n} \right]_s \delta_s, \varphi \right), \quad \forall \varphi \in D. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^n \left[\left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\} \right]_s \cos nx_i \delta_s = \left[\frac{\partial f}{\partial n} \right]_s \delta_s.$$

Далее, на основании определения (4.20), запишем

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} ([f]_s \cos(nx_i) \delta_s), \varphi \right) &= - \left(\sum_{i=1}^n [f]_s \cos(nx_i) \delta_s, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) = \\ &= - \int_S \sum_{i=1}^n [f]_s \cos(nx_i) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dS = - \int_S [f]_s \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = \left(\frac{\partial}{\partial n} ([f]_s \delta_s), \varphi \right). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} ([f]_s \cos(nx_i) \delta_s) = \frac{\partial}{\partial n} ([f]_s \delta_s).$$

Таким образом, получаем окончательно

$$\Delta f = \{\Delta f\} + \left[\frac{\partial f}{\partial n} \right]_S \delta_s + \frac{\partial}{\partial n} ([f]_s \delta_s). \quad (4.22)$$

4. Формула Грина. Пусть $\Omega \subset R^n$ — область с кусочно-гладкой границей S , $f \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ и $f(x) = 0, x \notin \bar{\Omega}$. Тогда (рис. 4.6)

$$[f]_s = -f|_s, \quad \left[\frac{\partial f}{\partial n} \right]_s = -\frac{\partial f}{\partial n}|_s$$

и формула (4.22) дает

$$\Delta f = \{\Delta f\} - \frac{\partial f}{\partial n} \delta_s - \frac{\partial}{\partial n} (f \delta_s). \quad (4.23)$$

Равенство (4.23) выражает вторую формулу Грина в терминах обобщенных функций. Подействовав левой и правой частью (4.23) на произвольную основную функцию, получим формулу Грина в обычной записи

$$\int_{\Omega} (f \Delta \varphi - \varphi \{\Delta f\}) dx = \int_S \left(f \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial f}{\partial n} \right) dS, \quad (4.24)$$

где

$$\{\Delta f(x)\} = \begin{cases} \Delta f(x), & x \in \Omega, \\ 0, & x \notin \bar{\Omega}, \\ \text{не определено на } S. \end{cases}$$

Формула (4.24) остается справедливой, если основную функцию заменить любой функцией класса $C^2(\bar{\Omega})$.

5. Фундаментальное решение уравнения Лапласа. Пусть $n = 2$. Покажем, что функция

$$E = \frac{1}{2\pi} \ln r = \frac{1}{2\pi} \ln |x|, \quad |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad x = (x_1, x_2)$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\Delta E = \delta(x). \quad (4.25)$$

Прежде всего отметим, что $\ln r \in C^\infty$ в любой ограниченной области, не содержащей нуля. Следовательно, в такой области $\Delta \ln r = \{\Delta \ln r\}$. Имеем

$$\Delta \ln r = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \ln r = 0 \Rightarrow \{\Delta \ln r\} = 0.$$

Далее применим формулу Грина (4.24). Пусть $\text{supp } \varphi \subset U_R$ и Ω_1 — двухсвязная область, ограниченная сферами S_R и S_ϵ (рис. 4.7).

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} (f \Delta \varphi - \varphi \{\Delta f\}) dx &= \left(\int_{S_R} + \int_{S_\varepsilon} \right) \left(f \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial f}{\partial n} \right) dS \Rightarrow \\ \Rightarrow (f, \Delta \varphi) &= (\Delta \ln r, \varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} \left(-\ln \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \varphi(x) \frac{1}{\varepsilon} \right) dS = \\ &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\varepsilon \ln \varepsilon \int_{2\pi}^0 \frac{\partial \varphi}{\partial r} d\theta \right) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} \cdot 2\pi\varepsilon + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{2\pi}^0 \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{\varepsilon} \varepsilon d\theta = \\ &= 2\pi \varphi(0) = 2\pi(\delta, \varphi) = (2\pi\delta, \varphi). \end{aligned}$$

Отсюда получаем требуемый результат

$$\Delta \ln r = 2\pi\delta.$$

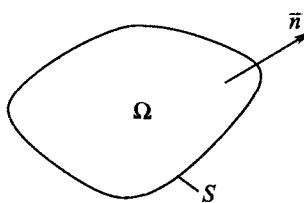


Рис. 4.6. К выводу формулы Грина

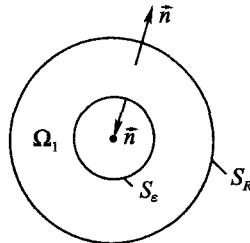


Рис. 4.7. К определению фундаментального решения оператора Лапласа в R^2

Функция E называется фундаментальным решением уравнения Лапласа (оператора Δ). Очевидно, если добавить к функции E любую гармоническую функцию, то снова получим решение уравнения (4.25).

6. Фундаментальное решение (фундаментальная функция) итерированного оператора Лапласа есть обобщенная функция — решение уравнения

$$\Delta^m E_n^{2m} = \delta(x), \quad x \in R^n,$$

$$\Delta^m = \Delta^{m-1}(\Delta).$$

Имеет место следующий результат [38, 40].

$$E_n^{2m} = \begin{cases} c_{n,2m} r^{2m-n}, & n \text{ — нечетно или } n \text{ — четно и больше чем } 2m, \\ b_{n,2m} r^{2m-n} \ln r, & n \leq 2m \text{ — четно,} \end{cases}$$

где (σ_n — площадь поверхности единичной сферы).

$$c_{n,2m} = c_n \frac{1}{[2 \dots 4 \dots (2m-2)][(2m-n)(2m-2-n) \dots (4-n)]},$$

$$b_{n,2m} = \frac{c_{n,n-2}}{(n-2)[2 \dots (2m-n)][n(n+2) \dots (2m-2)]},$$

$$c_n = -\frac{1}{(n-2)\sigma_n}, \quad r = |x| = \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{1/2}.$$

Например, фундаментальные решения бигармонического оператора в R^2 и в R^3 .

$$E_2^4 = b_{2,4} r^2 \ln r,$$

$$E_3^4 = c_{3,4} r.$$

7. Часто оказывается полезным следующее утверждение [20]. Пусть

$$f = \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\} \in C^\infty(R^n).$$

Если все эти функции имеют единственный ноль $x_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) \in R^n$ и при этом Якобиан

$$J(x_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} \end{vmatrix} = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_0} \neq 0,$$

то имеет место равенство в $D'(R^n)$

$$\delta(f) = \frac{\delta(x - x_0)}{|J(x_0)|}.$$

В самом деле, для $\forall \varphi(f) = \varphi[f(x)] \in D(R^n)$ можно записать

$$\begin{aligned} (\delta(f), \varphi(f)) &= \int_{R^n} \delta(f_1, f_2, \dots, f_n) \varphi(f_1, f_2, \dots, f_n) df_1 df_2 \dots df_n = \\ &= \int_{R^n} \delta(f) \varphi(f) |J(x)| dx = \varphi(0, 0, \dots, 0) = \varphi(0). \end{aligned}$$

Так как $\psi(x) = \varphi(f) |J(x)| \in D(R^n)$, получаем

$$(\delta(f), \psi(x)) = \frac{\psi(x_0)}{|J(x_0)|} = \left(\frac{\delta(x - x_0)}{|J(x_0)|}, \psi(x) \right).$$

Отсюда получаем требуемое равенство.

Естественным обобщением является ситуация, когда $f_i (i = 1, 2, \dots, n)$ имеют конечное или счетное число простых нулей x^j , причем $J(x^j) \neq 0$. Тогда имеем

$$\delta(f) = \sum_j \frac{1}{|J(x^j)|} \delta(x - x_j), \quad x, x_j \in R^n.$$

В R^1 это равенство приобретает вид

$$\delta(f(x)) = \sum_j \frac{1}{|f'(x^j)|} \delta(x - x_j), \quad x, x_j \in R^1.$$

Например,

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2a} [\delta(x - a) + \delta(x + a)] = \frac{1}{2x} [\delta(x - a) - \delta(x + a)], \quad a > 0,$$

$$\delta(\sin x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - k\pi).$$

Интегрирование обобщенных функций. Обыкновенные дифференциальные уравнения в D' . Непрерывная в интервале $I = (a, b)$ функция $f(x)$ имеет первообразную $f^{(-1)}(x)$, которая определяется с точностью до аддитивной постоянной

$$f^{(-1)}(x) = \int_a^x f(\xi) d\xi + C.$$

Это определение можно интерпретировать в смысле равенства в $D'(I)$

$$\left(\frac{d}{dx} f^{-1}(x), \varphi(x) \right) = (f(x), \varphi(x)), \quad \forall \varphi \in D(I).$$

Его принимают за исходное при определении первообразной от обобщенной функции.

Итак, пусть теперь $f \in D'(I)$. Запишем

$$\left(\frac{d}{dx} f^{-1}(x), \varphi(x) \right) = - (f^{(-1)}(x), \varphi'(x)) = (f(x), \varphi(x)), \quad \forall \varphi \in D(I). \quad (4.26)$$

Отсюда видно, что первообразная $f^{-1}(x)$ определена не на всем пространстве основных функций $\varphi \in D$, а только на совокупности Φ их первых производных. Поскольку $\varphi'(x) \in D$, $\forall \varphi \in D$, то $\Phi \subset D(I)$. Необходимо, стало быть, продолжить наш функционал с многообразия Φ на все $D(I)$ линейным и непрерывным образом.

Пусть

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^x [\varphi(\eta) - \omega_\varepsilon(\eta - x_0) \int \varphi(\xi) d\xi] d\eta, \quad (4.27)$$

где ω_ε — «шапочка» при $\varepsilon < \min(x_0 - a, b - x_0)$, $x_0 \in (a, b)$ — фиксировано. Функция $\psi(x) \in D(I)$, так как она бесконечно дифференцируема и $\text{supp } \psi \subset I' \Subset I$. Из (4.27) находим

$$\varphi(x) = \psi'(x) + \omega_\varepsilon(x - x_0) \int \varphi(\xi) d\xi. \quad (4.28)$$

Предположив, что f^{-1} существует, применим этот функционал к равенству (4.28). Получим

$$(f^{(-1)}, \varphi) = (f^{(-1)}, \psi') + (f^{(-1)}, \omega_\varepsilon(x - x_0)) \int \varphi(\xi) d\xi.$$

Или, учитывая определение (4.26),

$$(f^{(-1)}, \varphi) = -(f, \psi) + (C, \varphi) \int \varphi(\xi) d\xi, \quad (4.29)$$

где постоянная $C = (f^{(-1)}, \omega_\varepsilon(x - x_0))$.

Таким образом, если первообразная $f^{(-1)}$ существует, то она определяется равенством (4.29), где $\psi(x)$ задано в (4.27).

Можно показать, что функционал $f^{(-1)}$, определенный равенствами (4.27), (4.29) линейный и непрерывный на $D(I)$ [8, 11]. Остается проверить, что этот функционал действи-

тельно является первообразной обобщенной функции $f \in D'(I)$. В самом деле, заменив в (4.27) основную функцию $\varphi(x)$ на $\varphi'(x)$ и приняв во внимание, что

$$\int \varphi'(\xi) d\xi = 0,$$

получим $\psi(x) = \varphi(x)$. В результате из (4.29) приходим к равенству

$$(f^{(-1)}, \varphi') = -(f, \varphi),$$

т. е. к определению (4.26).

Таким образом, любая обобщенная функция $f \in D'(I)$ имеет первообразную $f^{(-1)} \in D'(I)$, которая определяется (с точностью до аддитивной постоянной C) формулой (4.29), где функция ψ задана в (4.27).

Другими словами, дифференциальное уравнение в $D'(I)$

$$u' = f, \quad f \in D'(I) \tag{4.30}$$

имеет решение

$$u = f^{(-1)} + C, \quad f^{(-1)} \in D'(I). \tag{4.31}$$

Если $f \in C(a, b)$, то имеем классическое решение, например, уравнение $u' = 0$ имеет общее решение в $D'(I)$: $u(x) = \text{const}$. Если f — регулярная обобщенная функция, то решение уравнения (4.30) также будет регулярной обобщенной функцией.

Вообще, дифференциальное уравнение m -го порядка

$$u^{(m)} = f, \quad f \in D'(I) \tag{4.32}$$

имеет решение

$$u = f^{(-m)} + P_{m-1}(x),$$

где $f^{(-m)} \in D'(I)$ — первообразная m -го порядка функции f , а $P_{m-1}(x)$ — произвольный полином $(m-1)$ -й степени от x .

В самом деле, с учетом (4.30), (4.31), имеем из (4.32)

$$\frac{d}{dx} u^{(m-1)} = f \Rightarrow u^{(m-1)} = f^{(-1)} + C, \quad f^{(-1)} \in D'(I),$$

$$\frac{d}{dx} u^{(m-2)} = u^{(m-1)} = f^{(-1)} + C \Rightarrow u^{(m-2)} = f^{(-2)} + P_1(x), \quad f^{(-2)} \in D'(I),$$

.....

$$\frac{d}{dx} u = u^{(1)} = f^{(-m+1)} + P_{m-1}(x),$$

где $f^{(-k)}$ — первообразная порядка k функции f : $(f^{(-k)})^{(k)} = f$.

Однородное дифференциальное уравнение m -го порядка в $D'(I)$ имеет только классическое решение $u = P_{m-1}(x)$.

Рассмотрим теперь однородную систему дифференциальных уравнений в матричной записи

$$\frac{d}{dx} u(x) = A(x)u(x) \text{ в } D', \quad (4.33)$$

где

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x), a_{12}(x), \dots, a_{1n}(x) \\ a_{21}(x), a_{22}(x), \dots, a_{2n}(x) \\ \dots \\ a_{n1}(x), a_{n2}(x), \dots, a_{nn}(x) \end{pmatrix}, \quad u(x) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

Имеет место теорема. Если коэффициенты системы (4.33) $a_{ij} \in C^\infty$, то она имеет только классическое решение [8, 40].

4.8. Дельтообразные последовательности

Последовательность локально интегрируемых функций $\{f_k(x)\}$ называется дельтообразной, если имеет место предельное равенство в $D'(R^n)$ при $k \rightarrow \infty$

$$(f_k(x), \varphi(x)) \rightarrow (\delta(x), \varphi(x)) = \varphi(0), \quad \forall \varphi \in D(R^n).$$

В этом случае говорят, что $\delta(x)$ есть слабый предел регулярных обобщенных функций f_k при $k \rightarrow \infty$.

Критерием того, что $\{f_k\}$ — дельтообразная, служит следующее утверждение. Пусть последовательность локально интегрируемых функций $f_k(x), x \in R^n$ удовлетворяет условиям:

а) $\left| \int_{\Omega} f_k(x) dx \right| \leq M; \quad k = 1, 2, \dots$

б) $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_k(x) dx = \begin{cases} 0, & 0 \notin \Omega, \\ 1, & 0 \in \Omega, \end{cases}$

где M не зависит от k и Ω — некоторый параллелепипед, грани которого параллельны координатным плоскостям и одна из вершин которого $A_0(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ такова, что $x_{10} < 0, x_{20} < 0, \dots, x_{n0} < 0$. Тогда эта последовательность является дельтообразной.

Докажем это утверждение для случая $n=1$. Введем последовательность первообразных для функций $f_k(x)$

$$F_k(x) = \int_{x_0}^x f_k(t) dt, \quad x_0 < 0.$$

В силу условия а)

$$\left| F_k(x) \right| = \left| \int_{x_0}^x f_k(x) dx \right| \leq M.$$

В силу условия б)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F_k(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Отсюда в силу равномерной ограниченности $F_k(x)$ по k получаем

$$F(x) = \theta(x) \Rightarrow f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} F'_k(x) = \theta'(x) = \delta(x).$$

Рассмотрим примеры дельтообразных последовательностей.

Последовательность Кирхгофа [8–11, 20]

$$f_k(x) = \sqrt{\frac{k}{2\pi}} e^{-\frac{kx^2}{2}}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

переходит в последовательность Кельвина, использованную последним при представлении точечных источников тепла

$$g_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon t}} e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon t}}, \quad \varepsilon > 0; \quad t > 0.$$

Имеем

$$\left| \int_{x_0}^b g_\varepsilon(x) dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon t}} e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon t}} dx = 1.$$

Здесь использовано значение интеграла Пуассона [14]

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{|a|}.$$

Далее, при $a < 0, b > 0$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^b g_\varepsilon(x) dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon t}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon t}} dx = \begin{cases} x = y\sqrt{\varepsilon t} \\ dx = dy\sqrt{\varepsilon t} \end{cases} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{a/\sqrt{\varepsilon t}}^{b/\sqrt{\varepsilon t}} e^{-\frac{y^2}{4}} dy = 1. \end{aligned}$$

Пусть $b > 0$ — произвольно, тогда

$$\begin{aligned} \int_b^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon t}} e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon t}} dx &\leq \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon t}} \int_b^{\infty} \frac{x}{2} e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon t}} dx = \begin{cases} u = \frac{x^2}{4\varepsilon t} \\ du = \frac{x}{2\varepsilon t} dx \end{cases} = \\ &= \frac{\sqrt{\varepsilon t}}{2\sqrt{\pi}} \int_{b^2/(4\varepsilon t)}^{\infty} e^{-u} du = \frac{\sqrt{\varepsilon t}}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{b^2}{4\varepsilon t}} \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow +0. \end{aligned}$$

Аналогично показывается, что для произвольного $a < 0$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^a g_\varepsilon(x) dx = 0.$$

Таким образом, первообразная $G_\varepsilon \rightarrow \theta(x)$ значит $\{g_\varepsilon\} = \{G'_\varepsilon\} \rightarrow \delta(x)$.

Функция Дирихле

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{\pi x}, \quad 0 < n < \infty$$

при $n \rightarrow \infty$ дает в пределе дельта-функцию (в смысле равенства в D'). Действительно, известно равенство [35]

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin nx}{x} dx = 1.$$

Поэтому для любых $b > a > 0$

$$\int_a^b f_n(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{\sin nx}{x} dx = \frac{1}{\pi} \int_{na}^{nb} \frac{\sin t}{t} dt \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

То же будет для произвольных $a < b < 0$. Далее,

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{\sin nx}{x} dx \right| = \left| \frac{1}{\pi} \int_{na}^{nb} \frac{\sin y}{y} dy \right| \leq M$$

для всех n равномерно по a и b . Следовательно, имеет место предельное равенство в $D'(R^1)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin nx}{\pi x} = \delta(x).$$

3. Функция Стильеса

$$f_n(x) = \frac{n}{\pi \operatorname{ch} nx}.$$

Мы имеем

$$\Phi_n(x) = \int_{-\infty}^x f_n(x) dx = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} e^{nx},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} = \theta(x).$$

Стало быть,

$$f_n(x) = \Phi'_n(x) \rightarrow \delta(x), \quad n \rightarrow \infty.$$

Ранее мы рассматривали дельтообразную последовательность

$$\omega_\varepsilon(x) \rightarrow \delta(x), \quad \varepsilon \rightarrow +0.$$

Примеры других таких последовательностей можно найти в [8, 11, 20].

4.9. Свертка обобщенных функций

Прямое (тензорное) произведение обобщенных функций. Пусть $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $g(y) = g(y_1, y_2, \dots, y_m)$ — локально интегрируемые функции в пространствах R^n и R^m соответственно. Очевидно, их произведение $f(x)g(y)$ — локально интегрируемая функция в пространстве R^{n+m} . Основную функцию $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_m) \in D(R^{n+m})$ будем записывать в виде $\varphi(x, y)$.

Функция $f(x)g(y)$ определяет регулярную обобщенную функцию, которая действует на любую основную функцию $\varphi(x, y) \in D(R^{n+m})$ по формуле (используется теорема Фубини о совпадении кратного интеграла с повторными [21])

$$\begin{aligned} (f(x)g(y), \varphi(x, y)) &= \int_{R^{n+m}} f(x)g(y)\varphi(x, y) dx dy = \\ &= \int_{R^n} f(x) \left[\int_{R^m} g(y)\varphi(x, y) dy \right] dx = (f(x), (g(y), \varphi(x, y))). \end{aligned}$$

Эту формулу примем за определение прямого произведения обобщенных функций $f(x) \in D'(R^n)$ и $g(y) \in D'(R^m)$:

$$(f(x) \cdot g(y), \varphi(x, y)) = (f(x), (g(y), \varphi(x, y))). \quad (4.34)$$

Покажем, что определение прямого произведения имеет смысл. Для этого рассмотрим функцию (при фиксированном $x \in R^n$)

$$\psi(x) = (g(y), \varphi(x, y)).$$

Поскольку $\text{supp } \varphi(x, y)$ — ограниченное множество (см. рис. 4.8), то при $x \in U_R$ основная функция $\varphi(x, y) = 0, \forall y \in R^m$. Следовательно, вне шара U_R

$$\psi(x) = (g(y), \varphi(x, y)) = (g(y), 0) = 0.$$

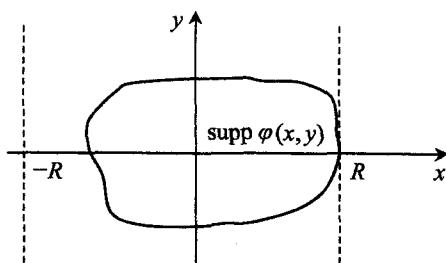


Рис. 4.8. К обоснованию формулы (4.34)

Теперь покажем, что $\psi(x) \in C^\infty(R^n)$. Имеем, фиксируя $y \in R^m$, в силу линейности функционала $g(y)$

$$\frac{\psi(x + \Delta x_j) - \psi(x)}{\Delta x_j} = \left(g(y), \frac{\varphi(x + \Delta x_j, y) - \varphi(x, y)}{\Delta x_j} \right).$$

Поскольку функционал $g(y)$ непрерывен, то (в смысле сходимости в $D'(R^n)$):

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x_j \rightarrow 0} \frac{\psi(x + \Delta x_j) - \psi(x)}{\Delta x_j} &= \frac{\partial \psi}{\partial x_j} = \\ &= \lim_{\Delta x_j \rightarrow 0} \left(g(y), \frac{\varphi(x + \Delta x_j, y) - \varphi(x, y)}{\Delta x_j} \right) = \left(g(y), \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, $\partial \psi / \partial x_j$ существует. Продолжая процесс дальше, найдем

$$D^\alpha \psi(x) = (g(y), D_x^\alpha \varphi(x, y)).$$

Из сказанного следует, что $\psi(x)$ — финитна и бесконечно дифференцируема в R^n , т. е. $\psi(x) \in D(R^n)$. Но тогда формула (4.34) имеет смысл:

$$(f(x) \cdot g(y), \varphi(x, y)) = (f(x), (g(y), \varphi(x, y))) = (f(x), \psi(x)) = (f, \psi).$$

Она определяет прямое произведение $f(x) \cdot g(y)$ как некоторый функционал на $D(R^{n+m})$. Можно показать [8], что этот функционал линейный и непрерывный, из чего следует, что $f(x) \cdot g(y) \in D'(R^{n+m})$.

Свойства прямого произведения.

а) Коммутативность. Наряду с прямым произведением $f(x) \cdot g(y)$ определяется прямое произведение $g(y) \cdot f(x)$ как функционал, действующий на произвольную основную функцию $\varphi(x, y) \in D(R^{n+m})$ по формуле

$$(g(y) \cdot f(x), \varphi(x, y)) = (g(y), (f(x), \varphi(x, y))). \quad (4.35)$$

Свойство коммутативности прямого произведения выражается равенством в $D'(R^{n+m})$

$$f(x) \cdot g(y) = g(y) \cdot f(x). \quad (4.36)$$

Покажем справедливость этого равенства на всех основных функциях вида

$$\varphi(x, y) = \sum_{k=1}^N u_k(x) v_k(y).$$

Имеем, в силу определений (4.34), (4.35)

$$\begin{aligned} (f(x) \cdot g(y), \varphi(x, y)) &= \left(f(x), \left(g(y), \sum_{k=1}^N u_k(x) v_k(y) \right) \right) = \\ &= \left(f(x), \sum_{k=1}^N u_k(x) (g(y), v_k(y)) \right) = \sum_{k=1}^N (f(x), u_k(x)) (g(y), v_k(y)), \\ (g(y) \cdot f(x), \varphi(x, y)) &= \left(g(y), \left(f(x), \sum_{k=1}^N u_k(x) v_k(y) \right) \right) = \\ &= \left(g(y), \sum_{k=1}^N v_k(y) (f(x), u_k(x)) \right) = \sum_{k=1}^N (g(y), v_k(y)) (f(x), u_k(x)), \end{aligned}$$

что и требовалось. Можно показать [8], что равенство (4.36) выполняется на всех основных функциях $\varphi(x, y) \in D(R^{n+m})$.

б) Дифференцирование прямого произведения. Имеет место формула

$$D_x^\alpha (f(x) \cdot g(y)) = D^\alpha f(x) \cdot g(y). \quad (4.37)$$

Действительно, $\forall \varphi(x, y) \in D(R^{n+m})$ выводим

$$\begin{aligned} (D_x^\alpha (f(x) \cdot g(y)), \varphi(x, y)) &= (-1)^{|\alpha|} (f(x) \cdot g(y), D_x^\alpha \varphi(x, y)) = \\ &= (-1)^{|\alpha|} (g(y) \cdot f(x), D_x^\alpha \varphi(x, y)) = (-1)^{|\alpha|} (g(y), (f(x), D_x^\alpha \varphi(x, y))) = \\ &= (g(y), (D^\alpha f(x), \varphi(x, y))) = (g(y) \cdot D^\alpha f(x), \varphi(x, y)) = (D^\alpha f(x) \cdot g(y), \varphi(x, y)). \end{aligned}$$

Отсюда получаем формулу (4.37).

в) Умножение прямого произведения. Если $a(x) \in C^\infty(R^n)$, то

$$a(x) (f(x) \cdot g(y)) = a(x) f(x) \cdot g(y). \quad (4.38)$$

В самом деле, $\forall \varphi(x, y) \in D(R^{n+m})$, имеем

$$\begin{aligned} (a(x) (f(x) \cdot g(y)), \varphi(x, y)) &= (g(y) \cdot f(x), a(x) \varphi(x, y)) = \\ &= (g(y), (f(x), a(x) \varphi(x, y))) = (g(y), (a(x) f(x), \varphi(x, y))) = \\ &= (g(y) \cdot a(x) f(x), \varphi(x, y)) = (a(x) f(x) \cdot g(y), \varphi(x, y)). \end{aligned}$$

Отсюда следует формула (4.38).

г) Прямое произведение $f(x) \cdot 1(y)$. Функционал $1(y)$ (обобщенная единица в $D'(R^m)$) действует на произвольную основную функцию $\varphi(y) \in D(R^m)$ по формуле

$$(1(y), \varphi(y)) = \int \varphi(y) dy.$$

Посмотрим, как действует прямое произведение $f(x) \cdot 1(y)$ на любую основную функцию $\varphi(x, y) \in D(R^{n+m})$. Мы имеем

$$(f(x) \cdot 1(y), \varphi(x, y)) = (f(x), (1(y), \varphi(x, y))) = \left(f(x), \int_{R^m} \varphi(x, y) dy \right).$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} (f(x) \cdot 1(y), \varphi(x, y)) &= (1(y) \cdot f(x), \varphi(x, y)) = (1(y), (f(x), \varphi(x, y))) = \\ &= \left(1(y), \int_{R^n} f(x) \varphi(x, y) dx \right) = \int_{R^m} (f(x), \varphi(x, y)) dy. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем $\forall f \in D'(R^n)$ и $\forall \varphi(x, y) \in D(R^{n+m})$

$$(f(x) \cdot 1(y), \varphi(x, y)) = \left(f(x), \int_{R^m} \varphi(x, y) dy \right) = \int_{R^m} (f(x), \varphi(x, y)) dy. \quad (4.39)$$

Говорят, что обобщенная функция $f(x) \cdot 1(y)$ инвариантна относительно сдвигов в R^m . Это иллюстрируется равенством

$$(f(x) \cdot 1(y-h), \varphi(x, y)) = (f(x) \cdot 1(y), \varphi(x, y)).$$

В самом деле, $\forall \varphi(x, y) \in D(R^{n+m})$:

$$\begin{aligned} (f(x) \cdot 1(y-h), \varphi(x, y)) &= (f(x), (1(y-h), \varphi(x, y))) = \\ &= (f(x), (1(y), \varphi(x, y+h))) = \left(f(x), \int_{R^m} 1(y) \varphi(x, y+h) dy \right) = \\ &= \left(f(x), \int_{R^m} 1(y) \varphi(x, y) dy \right) = (f(x), (1(y), \varphi(x, y))) = (f(x) \cdot 1(y), \varphi(x, y)). \end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$f(x) \cdot 1(y-h) = f(x) \cdot 1(y).$$

д) Носитель прямого произведения. Пусть $F = \text{supp } f(x)$, а $G = \text{supp } g(y)$, где $f(x) \in D'(R^n)$ и $g(y) \in D'(R^m)$ — произвольные функции. Тогда [9]

$$\text{supp}(f(x) \cdot g(y)) = F \times G = \{(x, y) : x \in F, y \in G\}.$$

Пример 1. Рассмотрим прямое произведение $\delta(x) \cdot \delta(y)$. Имеем $\forall \varphi(x, y) \in D(R^2)$ $(\delta(x) \cdot \delta(y), \varphi(x, y)) = (\delta(x), (\delta(y), \varphi(x, y))) = (\delta(x), \varphi(x, 0)) = \varphi(0, 0) = (\delta(x, y), \varphi(x, y))$, отсюда $\delta(x, y) = \delta(x) \cdot \delta(y)$.

Аналогично, если $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$, то

$$\delta(x) = \delta(x_1, x_2, \dots, x_n) = \delta(x_1) \cdot \delta(x_2) \cdot \dots \cdot \delta(x_n).$$

Пример 2. Прямое произведение

$$\begin{aligned} (\theta(x_1) \cdot \theta(x_2), \varphi(x_1, x_2)) &= (\theta(x_1), (\theta(x_2), \varphi(x_1, x_2))) = \\ &= \left(\theta(x_1), \int_0^\infty \varphi(x_1, x_2) dx_2 \right) = \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

С другой стороны, двумерная единичная функция Хевисайда $\theta(x_1, x_2)$ действует на любую основную функцию $\varphi(x_1 x_2) \in D(R^2)$ по правилу

$$(\theta(x_1, x_2), \varphi(x_1, x_2)) = \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

Сравнивая эти два выражения, находим

$$\theta(x_1, x_2) = \theta(x_1) \cdot \theta(x_2).$$

Пример 3. Производная

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \theta(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1} (\theta(x_1) \cdot \theta(x_2)) = \frac{\partial \theta(x_1)}{\partial x_1} \cdot \theta(x_2) = \delta(x_1) \cdot \theta(x_2).$$

Имеем $\forall \varphi(x_1, x_2) \in D(R^2)$

$$(\delta(x_1) \cdot \theta(x_2), \varphi(x_1 x_2)) = (\theta(x_2), (\delta(x_1), \varphi(x_1 x_2))) = (\theta(x_2), \varphi(0, x_2)) = \int_0^\infty \varphi(0, x_2) dx_2.$$

Таким образом,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \theta(x_1 x_2), \varphi(x_1, x_2) \right) = \int_0^\infty \varphi(0, x_2) dx_2.$$

Свертка обобщенных функций. Пусть $f(x), g(x) \in L_{loc}^1$, причем функция

$$h(x) = \int g(y) |f(x-y)| dy \quad (4.40)$$

также локально интегрируема в R^n . Сверткой этих функций называется выражение

$$(f * g)(x) = \int f(y) g(x-y) dy = \int g(y) f(x-y) dy = (g * f)(x). \quad (4.41)$$

Покажем, что свертка $z(x) = (f * g)(x)$ — локально интегрируемая функция. Прежде всего, имеет место оценка

$$|z(x)| = \left| \int g(y) f(x-y) dy \right| \leq h(x).$$

Так как $h(x) \in L_{loc}^1$, формула (4.41) имеет смысл. Далее,

$$\left| \int z(x) dx \right| \leq \int |z(x)| dx = \int \left| \int g(y) f(x-y) dy \right| dx \leq \iint |g(y) f(x-y)| dy dx = \int h(x) dx < \infty,$$

что и требовалось.

При помощи локально интегрируемой функции $(f * g)(x)$ образуем регулярную обобщенную функцию $(f * g)$, действующую на произвольную основную функцию $\varphi(x) \in D(R^n)$ по формуле

$$\begin{aligned} ((f * g)(x), \varphi) &= \int \left[\int f(\xi) g(x - \xi) d\xi \right] \varphi(x) dx = \int f(\xi) \left[\int g(x - \xi) \varphi(x) dx \right] d\xi = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} x - \xi = y \\ dx = dy \end{array} \right\} = \int f(\xi) \left[\int g(y) \varphi(\xi + y) dy \right] d\xi = \iint f(x) g(y) \varphi(x + y) dx dy. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$((f * g)(x), \varphi) = (f(x) \cdot g(y), \varphi(x + y)), \quad \forall \varphi \in D(R^n). \quad (4.42)$$

Проведенные выше вычисления базировались на предположении, что функция $h(x)$, определяемая формулой (4.40), локально интегрируема. Отметим три случая, когда это предположение выполняется.

1. Хотя бы одна из функций f или g финитна. Пусть, например, $\text{supp } g \subset U_R$. Тогда для произвольного шара U_R имеем

$$\begin{aligned} \int_{U_R} h(x) dx &= \int_{U_R} \left[\int |g(y)| |f(x - y)| dy \right] dx = \int_{U_{R_1}} |g(y)| dy \int_{U_R} |f(x - y)| dx \leq \\ &\leq \int_{U_{R_1}} |g(y)| dy \int_{U_{R_1+R}} |f(t)| dt < \infty. \end{aligned}$$

2. Функции f и g обращаются в нуль при $x < 0$ ($n = 1$). В этом случае (см. рис. 4.9)

$$h(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \int_0^x |f(y) g(x - y)| dy, & x > 0, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_{-R}^R h(x) dx &= \int_0^R h(x) dx = \int_0^R \left[\int_0^x |g(y)| |f(x - y)| dy \right] dx = \\ &= \int_0^R |g(y)| dy \int_y^R |f(x - y)| dx \leq \int_0^R |g(y)| dy \int_0^R |f(t)| dt < \infty. \end{aligned}$$

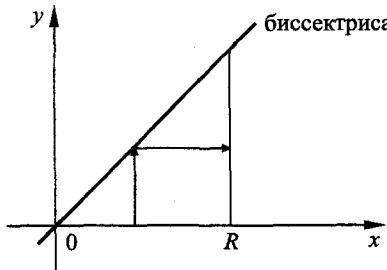


Рис. 4.9. К обоснованию существования свертки

3. Функции f и g интегрируемы на R^n . Тогда

$$\begin{aligned} \int h(x) dx &= \int \left[\int |g(y)| |f(x-y)| dy \right] dx = \int |g(y)| \left[\int |f(x-y)| dx \right] dy = \\ &= \int |g(y)| dy \int |f(t)| dt < \infty. \end{aligned}$$

Формулу (4.42) естественно принять за определение свертки обобщенных функций f и g . Однако надо иметь в виду, что эта формула имеет смысл не всегда.

Обозначим через F и G носители функций f и g соответственно. Тогда носителем прямого произведения $f \cdot g$ будет множество $F \times G = \{(x, y) : x \in F, y \in G\}$. Носитель основной функции $\varphi(x)$ — компакт K , следовательно, носителем функции $\varphi(x+y)$ является множество пар (x, y) , таких что $x+y \in K$. Это множество есть n -мерное подпространство (слой под углом 45° к осям), параллельный прямой $x_i + y_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Стало быть, правая часть в (4.42) имеет смысл, если множество $F \times G$ (носитель прямого произведения) и носитель функции $\varphi(x+y)$ имеют ограниченное пересечение. Иными словами — множество точек $(x, y), x \in F, y \in G$, таких что $x+y \in K$, должно быть ограниченным. Тогда в этом пересечении можно положить $\psi(x, y) = \eta(x, y)\varphi(x+y)$, где $\eta(x, y)$ — основная функция в R^{2n} , равная единице в окрестности носителя $\text{supp } \psi$. Очевидно, $\psi(x, y) \in C^\infty(R^{2n})$. Это пересечение должно быть ограниченным при любом K , так как соотношение (4.42) должно выполняться для любой $\varphi(x) \in D$.

Выход. Свертка $f * g$ имеет смысл, если носители F и G таковы, что при $x \in F, y \in G$ сумма $x+y$ может оставаться ограниченной лишь в том случае, если переменные x и y остаются ограниченными. В этом случае

$$\psi(x) = (g(y), \varphi(x+y)) \in D(R^n), \quad \psi_*(y) = (f(x), \varphi(x+y)) \in D(R^n),$$

т. е. являются основными, что придает смысл формуле (4.42):

$$\begin{aligned} ((f * g)(x), \varphi) &= (f(x) \cdot g(y), \varphi(x+y)) = (f(x), (g(y), \varphi(x+y))) = (f, \psi), \\ ((f * g)(x), \varphi) &= (f(x) \cdot g(y), \varphi(x+y)) = (g(y) \cdot f(x), \varphi(x+y)) = \\ &= (g(y), (f(x), \varphi(x+y))) = (g, \psi_*). \end{aligned}$$

В частности, формула (4.42) имеет смысл в следующих случаях:

- одна из обобщенных функций f или g финитна, т. е. имеет компактный носитель,
- носители обеих обобщенных функций ограничены с одной и той же стороны, например $f(x) = 0$ при $x < a$ и $g(y) = 0$ при $y < b$ ($n = 1$).

На рис. (4.10) схематически изображена ситуация, когда $g(y)$ — финитная обобщенная функция, $\text{supp } g \subset U_R$, а $\text{supp } \varphi(x) \subset U_a$. Заштрихованная область $A = U_R \cap \{(x, y) : |x+y| \leq a\}$, т. е. A — есть пересечение шара U_R с полосой $|x+y| \leq a$. Очевидно, при $|x| > a+R$ точ-

ка (x, y) не попадает в заштрихованную область, а значит, $y \in U_R$. Следовательно, $\psi(x) = (g(y), \varphi(x+y)) = 0$ при достаточно больших $|x|$, т. е. финитна. Кроме того, $\psi(x) \in C^\infty(R^n)$. Таким образом, в рассматриваемом случае $\psi(x) = (g(y), \varphi(x+y)) \in D(R^n)$, что и требовалось.

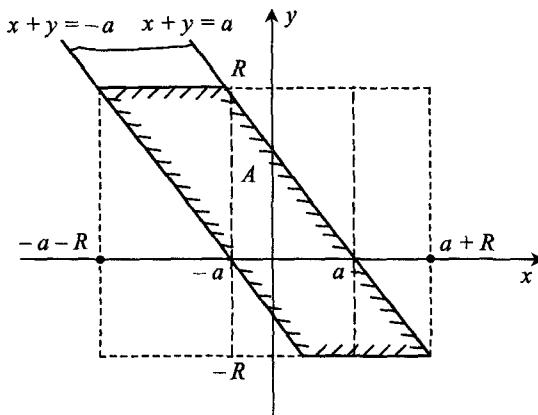


Рис. 4.10. Схема пересечения шара U_R с полосой $|x+y|=a$

Если g — финитная обобщенная функция, то формулу (4.42) можно видоизменить следующим образом. Пусть $\eta(y)$ — произвольная основная функция, равная 1 в окрестности носителя g . Тогда, как известно, $\eta g = g$ в D' , поэтому имеем $\forall \varphi(x) \in D(R^n)$

$$\begin{aligned} ((f * g)(x), \varphi) &= (f(x) \cdot g(y), \varphi(x+y)) = (f(x), (g(y), \varphi(x+y))) = \\ &= (f(x), (\eta(y)g(y), \varphi(x+y))) = (f(x), (g(y), \eta(y)\varphi(x+y))) = \\ &= (f(x) \cdot g(y), \eta(y)\varphi(x+y)). \end{aligned}$$

Итак, в случае финитной обобщенной функции g свертка определяется формулой

$$((f * g)(x), \varphi) = (f(x) \cdot g(y), \eta(y)\varphi(x+y)). \quad (4.43)$$

Можно доказать строго, что если f — произвольная, а g — финитная обобщенная функция, то свертка $f * g$ существует в D' и представляется формулой (4.43) [8].

Замечание. Имеет место предложение [39, 42]. Пусть f и g — локально суммируемые функции (определенные только почти везде) и пусть их носители F и G удовлетворяют условиям существования свертки. Тогда свертка $f * g$ будет локально суммируемой функцией, которая определяется почти везде формулой

$$h^*(x) = (f * g)(x) = \int_{R^n} f(x-y)g(y)dy = \int_{R^n} f(y)g(x-y)dy. \quad (4.44)$$

Если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны, то и свертка $(f * g)(x)$ будет непрерывной функцией. Это остается верным, если только одна из них непрерывна, а вторая — локально суммируема (локально интегрируема).

Свортка $f * g$ может иметь смысл, даже если условия на носители F и G не выполнены. Например, если одна из двух функций суммируема на R^n , а другая ограничена на R^n , то свортка $(f * g)(x)$ будет иметь смысл и при этом она будет ограниченной непрерывной функцией на R^n , а интеграл (4.44) будет иметь смысл для всех значений x . Если $f \in L^1$, а $g(x)$ — ограниченная функция, то имеет место оценка

$$|h^*(x)| \leq \int_{R^n} |f(x)| dx \cdot \sup_{x \in R^n} |g(x)|$$

или

$$\|h^*\|_{L^{\infty}} \leq \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^{\infty}}.$$

Если $f, g \in L^1$, то свортка $(f * g)$ всегда имеет смысл и также принадлежит L^1 . При этом

$$\|h^*\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^1}.$$

Свортка любой обобщенной функции f с δ -функцией существует и равна f . Действительно, $\forall \varphi \in D(R^n)$

$$\begin{aligned} ((f * \delta)(x), \varphi) &= (f(x) \cdot \delta(y), \eta(y) \varphi(x+y)) = (f(x), (\delta(y), \eta(y) \varphi(x+y))) = \\ &= (f(x), \eta(0) \varphi(x)) = (f, \varphi) \Rightarrow f * \delta = f. \end{aligned}$$

Таким образом, для операции свортки обобщенных функций δ -функция играет роль единицы.

Свойства свортки. а) Операция свортки коммутативна, т. е. если свортки обобщенных функций f и g существуют, то

$$f * g = g * f,$$

это равенство непосредственно вытекает из коммутативности прямого произведения.

б) Ассоциативность свортки. Свортка обобщенных функций не обязательно обладает свойством ассоциативности, т. е. равенство

$$(f_1 * f_2) * f_3 = f_1 * (f_2 * f_3)$$

выполняется не всегда. Для примера возьмем $f_1 = 1, f_2 = \delta', f_3 = \theta$, тогда

$$\begin{aligned} (f_1 * f_2, \varphi(x)) &= (1 * \delta', \varphi(x)) = (1, (\delta', \varphi(x+y))) = - (1, (\delta(x), \varphi'(x+y))) = \\ &= - (1, \varphi'(y)) = (1', \varphi) = (0, \varphi) = 0. \end{aligned}$$

Значит,

$$(f_1 * f_2) * f_3 = 0 * \theta = 0.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} (f_2 * f_3, \varphi) &= (\delta' * \theta, \varphi) = (\theta * \delta', \varphi) = (\theta, (\delta', \varphi(x+y))) = -(\theta, (\delta, \varphi'(x+y))) = \\ &= -(\theta, \varphi'(y)) = (\delta, \varphi) \Rightarrow f_2 * f_3 = \delta. \end{aligned}$$

Отсюда

$$f_1 * (f_2 * f_3) = 1 * \delta = 1,$$

т. е. $(f_1 * f_2) * f_3 \neq f_1 * (f_2 * f_3)$.

Однако если две из трех обобщенных функций f_1, f_2, f_3 имеют компактный носитель, то ассоциативность имеет место [40].

в) Дифференцирование свертки. Если свертка $f * g$ существует, то существуют свертки $D^\alpha f * g$ и $f * D^\alpha g$, причем имеют место формулы

$$D^\alpha (f * g) = D^\alpha f * g = f * D^\alpha g. \quad (4.45)$$

В самом деле, $\forall \varphi \in D(R^n)$

$$\begin{aligned} (D^\alpha (f * g))(x, \varphi) &= (-1)^{|\alpha|} ((f * g)(x), D^\alpha \varphi) = \\ &= (-1)^{|\alpha|} (f(x) \cdot g(y), D_x^\alpha \varphi(x+y)) = (-1)^{|\alpha|} (g(y), (f(x), D_x^\alpha \varphi(x+y))) = \\ &= (g(y), (D^\alpha f(x), \varphi(x+y))) = (g(y) \cdot D^\alpha f(x), \varphi(x+y)) = \\ &= (D^\alpha f * g, \varphi) \Rightarrow D^\alpha (f * g) = D^\alpha f * g. \end{aligned}$$

Второе равенство выводится аналогично.

Если $f * g$ не существует, а свертки $D^\alpha f * g$ и $f * D^\alpha g$ существуют, то они не обязаны должны быть равными. Например,

$$\theta' * 1 = \delta * 1 = 1, \quad \theta * 1' = \theta * 0 = 0.$$

г) Если $f \in D'(\Omega_1), g \in D'(\Omega_2)$, то $\text{supp}(f * g) \subset \overline{\Omega_1 + \Omega_2}$ — замыканию множества точек вида $x+y$, $x \in \Omega_1$, $y \in \Omega_2$.

Пример 1. Вычислим свертку $\delta(x-a) * \delta(x-b)$. Имеем $\forall \varphi(x) \in D(R^1)$

$$\begin{aligned} (\delta(x-a) * \delta(x-b), \varphi(x)) &= (\delta(x-a) \cdot \delta(y-b), \varphi(x+y)) = (\delta(x-a), \\ &(\delta(y-b), \varphi(x+y))) = (\delta(x-a), \varphi(x+b)) = \varphi(a+b) = (\delta(x-a-b), \varphi) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \delta(x-a) * \delta(x-b) = \delta(x-a-b). \end{aligned}$$

Пример 2. Если $\theta(x)$ — единичная функция Хевисайда, то при $0 \leq a \leq b$

$$\theta(x-a) * \theta(x-b) = \begin{cases} 0, & x > a, \\ \int_a^x \theta(t-a) \theta(x-t-b) dt, & \end{cases}$$

Имеем прямым вычислением

$$\begin{aligned} \int_a^x \theta(t-a) \theta(x-t-b) dt &= \int_a^x \theta(x-t-b) dt = \left\{ \begin{array}{l} u = x-t-b, \\ du = -dt \end{array} \right\} = \\ &= - \int_{x-a-b}^{-b} \theta(u) du = \int_{-b}^{x-a-b} \theta(u) du = \int_0^{x-a-b} \theta(u) du = x-a-b, \quad x \geq a+b. \end{aligned}$$

Введем обозначение

$$x_+ = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & x \geq 0 \end{cases} = x\theta(x).$$

Тогда получаем

$$\theta(x-a) * \theta(x-b) = (x-a-b)_+.$$

При $a = b = 0$ имеем

$$\theta(x) * \theta(x) = x_+ = x\theta(x).$$

Пример 3. Обозначим

$$\theta_\lambda^{(\alpha)} = \theta(x) \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{\lambda x}, \quad \alpha > 0,$$

где $\theta(x)$ — единичная функция Хевисайда, λ — произвольное комплексное число. Свертка $\theta_\lambda^{(\alpha)} * \theta_\lambda^{(\beta)} = 0$ при $x < 0$. При $x > 0$ имеем цепочку равенств

$$\begin{aligned} (\theta_\lambda^{(\alpha)} * \theta_\lambda^{(\beta)})(x) &= \int_0^x \theta_\lambda^{(\alpha)}(x-t) \theta_\lambda^{(\beta)}(t) dt = \int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{\lambda(x-t)} \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} e^{\lambda t} dt = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} t = ux \\ dt = xdu \end{array} \right\} = \frac{x^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} e^{\lambda x} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{\beta-1} du. \end{aligned}$$

С учетом формулы

$$\int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{\beta-1} du = B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

где Γ и B — гамма и бета функции Эйлера [2], получаем окончательно

$$Q_\lambda^{(\alpha)} * Q_\lambda^{(\beta)} = \theta_\lambda^{(\alpha+\beta)}.$$

Свертки такого типа используются, например, в дробном интегродифференцировании [33].

Пример 4. Преобразование Гильберта

$$u(x) \rightarrow Vp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(y)}{x-y} dy$$

представляет собой оператор свертки с обобщенной функцией $Vp \frac{1}{x}$.

4.10. Решения дифференциальных уравнений с правой частью

Уравнение с постоянными коэффициентами. Рассмотрим уравнение

$$P(D)u = f, \quad (4.46)$$

где $P(D)$ — произвольный линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, а f — финитная обобщенная функция.

Пусть E — фундаментальное решение оператора $P(D)$, т. е. обобщенная функция, удовлетворяющая уравнению

$$P(D)E = \delta. \quad (4.47)$$

Тогда обобщенная функция u (частное решение уравнения (4.46)) определяется при помощи свертки

$$u = f * E.$$

В самом деле, в силу равенства $D^\alpha(f * E) = f * D^\alpha E$ для любого мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ и линейности оператора $P(D)$ можем записать

$$P(D)u = P(D)(f * E) = f * P(D)E = f * \delta = f,$$

что и требуется.

Пример. Уравнение Пуассона в R^2

$$\Delta U = f.$$

В нашем случае $E = \frac{1}{2\pi} \ln|x|$ — регулярная обобщенная функция. Если, например, f — финитная обобщенная функция, то

$$u = \frac{1}{2\pi} (f * \ln|x|). \quad (4.48)$$

Если $f(x)$ — интегрируемая финитная функция в R^2 , то формула (4.48) дает так называемый логарифмический потенциал (с точностью до множителя $1/2\pi$). На основании определения свертки находим $\forall \varphi \in D(R^n)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} (f * \ln|x|, \varphi) &= \left(\frac{1}{2\pi} \ln|x| \cdot f(y), \varphi(x+y) \right) = \left(\frac{1}{2\pi} \ln|x|, (f(y), \varphi(x+y)) \right) = \\ &= \int_{R^2} \frac{1}{2\pi} \ln|x| \left[\int f(y) \varphi(x+y) dy \right] dx = \int f(y) \left[\int \frac{1}{2\pi} \ln|x| \varphi(x+y) dx \right] dy = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} x+y=t, \\ dx=dt \end{array} \right\} = \int f(y) \left[\int \frac{1}{2\pi} \ln|t-y| \varphi(t) dt \right] dy = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int \varphi(x) \left[\int f(y) \frac{1}{2\pi} \ln|x-y| dy \right] dx = \left(- \int f(y) \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x-y|} dy, \varphi \right) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \left(f * \frac{1}{2\pi} \ln|x| \right) = - \frac{1}{2\pi} \int f(y) \ln \frac{1}{|x-y|} dy.
 \end{aligned}$$

Таким образом, частное решение уравнения Пуассона (4.46) определяется формулой

$$u(x_1, x_2) = -\frac{1}{2\pi} \int f(y) \ln \frac{1}{|x-y|} dy = -\frac{1}{2\pi} \iint f(y_1, y_2) \ln \frac{1}{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}} dy_1 dy_2.$$

Потенциалы. Ньютона потенциал. Пусть ρ — обобщенная функция. Свертка

$$V_n = \rho * \frac{1}{|x|^{n-2}} \quad (n \geq 3) \quad (4.49)$$

называется ньютоновым потенциалом. Свертка

$$V_2 = \rho * \ln \frac{1}{|x|} \quad (n=2), \quad (4.50)$$

как было отмечено выше, называется логарифмическим потенциалом.

Если ρ — финитная обобщенная функция, то потенциалы (4.49), (4.50) существуют в D' и удовлетворяют соответствующим уравнениям Пуассона

$$\Delta V_n = -(n-2)\sigma_n \rho, \quad \Delta V_2 = -2\pi\rho,$$

где σ_n — площадь поверхности единичной сферы в R^n .

Так, например, $\Delta V_3 = -4\pi\rho$. В самом деле, функция

$$E = -\frac{1}{4\pi|x|}$$

является фундаментальным решением оператора Лапласа в R^3 . Поэтому

$$\Delta V_3 = \Delta \left(\rho * \frac{1}{|x|} \right) = \rho * \Delta \left(\frac{1}{|x|} \right) = \rho * -4\pi\delta = -4\pi(\delta * \rho) = -4\pi\rho.$$

Аналогично

$$\Delta V_2 = \Delta \left(\rho * \ln \frac{1}{|x|} \right) = \rho * \Delta \ln \frac{1}{|x|} = \rho * -2\pi\delta = -2\pi(\delta * \rho) = -2\pi\rho.$$

Если ρ — финитная интегрируемая функция в R^n , то потенциалы принимают обычный вид

$$V_2 = \int \rho(y) \ln \frac{1}{|x-y|} dy = \iint_{-\infty}^{\infty} \rho(y_1, y_2) \ln \frac{1}{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}} dy_1 dy_2,$$

$$V_3 = \int \rho(y) \frac{dy}{|x-y|} = \int_{-\infty}^{\infty} \int \int \frac{\rho(y_1, y_2, y_3)}{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}} dy_1 dy_2 dy_3.$$

Поверхностные потенциалы. Пусть S — ограниченная двухсторонняя кусочно-гладкая поверхность, а $\mu(x)$ и $\nu(x)$ — кусочно-непрерывные функции на ней. Введем простой и двойной слои на S : $\mu\delta_s$ и $-\frac{\partial}{\partial n}(\nu\delta_s)$.

Поверхностными потенциалами простого слоя с плотностью μ называются свертки

$$V_n^{(0)} = \frac{1}{|x|^{n-2}} * \mu\delta_s \quad (n \geq 3), \quad V_2^{(0)} = \ln \frac{1}{|x|} * \mu\delta_s.$$

Имеют место формулы

$$V_n^{(0)} = \int_S \frac{\mu(y)}{|x-y|^{n-2}} dS_y, \quad V_2^{(0)} = \int_S \mu(y) \ln \frac{1}{|x-y|} dS_y. \quad (4.51)$$

В самом деле, $\forall \varphi \in D$ имеем

$$\begin{aligned} (V_n^{(0)}, \varphi) &= \left(\frac{1}{|x|^{n-2}} * \mu\delta_s, \varphi \right) = \left(\mu\delta_s(y) \cdot \frac{1}{|x|^{n-2}}, \varphi(x+y) \right) = \\ &= \left(\mu\delta_s(y), \left(\frac{1}{|x|^{n-2}}, \varphi(x+y) \right) \right) = \int_S \mu(y) \left[\int \frac{\varphi(x+y)}{|x|^{n-2}} dx \right] dS_y = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} x+y=t, \\ dx=dt \end{array} \right\} = \int_S \mu(y) \left[\int \frac{\varphi(t)}{|t-y|^{n-2}} dt \right] dS_y = \\ &= [\varphi(x) \left[\int_S \frac{\mu(y)}{|x-y|^{n-2}} dS_y \right]] dx = \left(\int_S \frac{\mu(y)}{|x-y|^{n-2}} dS_y, \varphi \right). \end{aligned}$$

Отсюда вытекает первая формула в (4.51). Вторая доказывается совершенно аналогично.

Поверхностные потенциалы двойного слоя определяются при помощи сверток с двойным слоем

$$V_n^{(1)} = -\frac{1}{|x|^{n-2}} * \frac{\partial}{\partial n}(\nu\delta_s) \quad (n \geq 3); \quad V_2^{(1)} = -\ln \frac{1}{|x|} * \frac{\partial}{\partial n}(\nu\delta_s).$$

При указанных выше условиях они являются локально интегрируемыми функциями и определяются формулами

$$V_n^{(1)} = \int_S V(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} dS_y, \quad V_2^{(1)} = \int_S V(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln \frac{1}{|x-y|} dS_y. \quad (4.52)$$

Докажем, например, первую из них. Имеем $\forall \varphi \in D$

$$\begin{aligned} \left(V_n^{(1)}, \varphi \right) &= - \left(\frac{1}{|x|^{n-2}} * \frac{\partial}{\partial n} (\nu \delta_s), \varphi \right) = - \left(\frac{\partial}{\partial n} (\nu \delta_s(y)) \cdot \frac{1}{|x|^{n-2}}, \varphi(x+y) \right) = \\ &= - \left(\frac{\partial}{\partial n} (\nu \delta_s(y)), \left(\frac{1}{|x|^{n-2}}, \varphi(x+y) \right) \right) = \int_S \nu(y) \left[\frac{\partial}{\partial n_y} \int \frac{\varphi(x+y)}{|x|^{n-2}} dx \right] dS_y = \\ &= \int_S \nu(y) \left[\frac{\partial}{\partial n_y} \int \frac{\varphi(t) dt}{|t-y|^{n-2}} \right] dS_y = \int_S \nu(y) \left[\int \varphi(x) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} dx \right] dS_y = \\ &= \int \varphi(x) \left[\int_S \nu(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} dS_y \right] dx = \left(\int_S \nu(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} dS_y, \varphi \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует формула (4.52). Вторая формула в (4.52) доказывается аналогично.

Поверхностные потенциалы и различного рода их обобщения используются в задачах теории потенциала, гидродинамики, теории упругости, в других задачах для дифференциальных уравнений эллиптического типа при сведении их к интегральным уравнениям.

4.11. Обобщенные функции медленного роста

Пространство основных функций \mathcal{L} .

Под пространством $\mathcal{L} = \mathcal{L}(R^n)$ понимают пространство бесконечно дифференцируемых комплекснозначных функций $\varphi(x)$, определенных на всем пространстве R^n и быстро убывающих вместе со всеми производными при $|x| \rightarrow \infty$. Точнее, под основной функцией $\varphi(x) \in \mathcal{L}$ будем понимать любую функцию, удовлетворяющую условиям:

a) $\varphi(x) \in C^\infty(R^n)$;

б) $D^\alpha \varphi(x)$ убывает на бесконечности быстрее любой степени $|x|^{-1}$ для всех мультииндексов α , т. е. произведение $D^\alpha \varphi(x)$ на произвольный полином от $|x|$ стремится к нулю при $|x| \rightarrow \infty$. Формально это выглядит так:

$$\|\varphi\|_{\alpha, \beta} = \sup \left\{ |x|^\beta |D^\alpha \varphi(x)| \right\} < \infty, \quad \forall \alpha, \beta.$$

Если эта оценка выполняется, то $\varphi \in C^\infty$ принадлежит \mathcal{L} .

На множестве \mathcal{L} всех таких основных функций введем естественные операции сложения и умножения на число. Сходимость в \mathcal{L} введем следующим образом. Будем говорить, что $\{\varphi_k\} \subset \mathcal{L}$ сходится к функции $\varphi \in \mathcal{L}$, если для любых мультииндексов α и β в любой ограниченной области $x^\beta D^\alpha \varphi_k(x) \xrightarrow{x \in R^n} x^\beta D^\alpha \varphi(x)$, $k \rightarrow \infty$ равномерно. Это оз-

начинает сходимость по норме $(\|\varphi_j - \varphi\|_{\alpha,\beta} \rightarrow 0)$. Очевидно, \mathcal{L} — линейное топологическое пространство. Топология в $\mathcal{L}(R^n)$ определяется системой полунарм

$$P_m(\varphi) = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} \sup |x^\beta D^\alpha \varphi(x)|, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Доказывается, что \mathcal{L} — полное пространство и любое замкнутое ограниченное множество основных функций компактно в \mathcal{L} [25].

Любая основная функция $\varphi(x) \in D$ содержится в \mathcal{L} . Однако D не совпадает с \mathcal{L} . Например, функция $e^{-|x|^2} \in \mathcal{L}$, но не принадлежит D . Далее, из сходимости в D следует сходимость в \mathcal{L} , так как носители φ_k равномерно ограничены по k и

$$D^\alpha \varphi_k \rightarrow D^\alpha \varphi \Rightarrow x^\beta D^\alpha \varphi_k \rightarrow x^\beta D^\alpha \varphi \quad (k \rightarrow \infty).$$

Таким образом, $D \subset \mathcal{L}$. Можно показать, что D плотно в \mathcal{L} , т. е. для любой основной функции $\varphi(x) \in \mathcal{L}$ существует последовательность $\{\varphi_k\} \subset D$, сходящаяся к $\varphi(x)$ в \mathcal{L} .

Отметим, что операция умножения на $a(x) \in C^\infty$ может вывести за пределы \mathcal{L} . Например, $\varphi(x) = e^{-|x|^2} \in \mathcal{L}$, а $e^{|x|^2} \varphi(x) = 1 \notin \mathcal{L}$. Для того чтобы операция умножения на бесконечно-дифференцируемую функцию $a(x)$ была непрерывна из \mathcal{L} в \mathcal{L} , необходимо наложить на $a(x)$ некоторое ограничение. Потребуем, чтобы $a(x)$ росла на бесконечности вместе со всеми своими производными не быстрее полинома:

$$|D^\alpha a(x)| \leq C_\alpha (1 + |x|)^m. \quad (4.53)$$

Множество таких функций обозначается через θ_M .

Операция умножения основной функции $\varphi \in \mathcal{L}$ на $a(x) \in \theta_M$ непрерывна из \mathcal{L} в \mathcal{L} . Действительно, $\forall \varphi \in \mathcal{L}$ функция $a\varphi \in \mathcal{L}$, поскольку $a\varphi \in C^\infty$ и, в силу (4.53), произведение $a\varphi$ затухает при $|x| \rightarrow \infty$ быстрее любой степени $|x|^{-1}$. Далее, если $\{\varphi_v\} \subset \mathcal{L}$ стремится к $\varphi \in \mathcal{L}$, то по определению $x^\beta D^\alpha \varphi_v \rightarrow x^\beta D^\alpha \varphi$ ($v \rightarrow \infty$) равномерно. Следовательно, $x^\beta D^\alpha (a\varphi_v) \rightarrow x^\beta D^\alpha (a\varphi)$ равномерно. А это и означает непрерывность операции $a\varphi$ из \mathcal{L} в \mathcal{L} .

Пространство обобщенных функций медленного роста в \mathcal{L}' . Обобщенной функцией медленного роста (медленно растущим распределением) называется всякий линейный непрерывный функционал на пространстве основных функций \mathcal{L} . Множество обобщенных функций медленного роста обозначим через $\mathcal{L}' = \mathcal{L}'(R^n)$. Множество \mathcal{L}' со введенными в нем линейными операциями сложения и умножения на число есть линейное пространство.

Сходимость в \mathcal{L}' определим как слабую сходимость последовательности функционалов: $\{f_\nu\} \subset \mathcal{L}'$ сходится к $f \in \mathcal{L}'$, если $(f_\nu, \varphi) \rightarrow (f, \varphi)$, $\nu \rightarrow \infty$, $\forall \varphi \in \mathcal{L}$.

Линейное пространство \mathcal{L}' с введенной в нем сходимостью называется пространством обобщенных функций медленного (умеренного) роста. Это пространство является двойственным (сопряженным) к основному пространству \mathcal{L} .

Очевидно, если $f \in \mathcal{L}'$, т. е. f — линейный непрерывный функционал на пространстве \mathcal{L} , то $f \in D'$, т. к. $D \subset \mathcal{L}$. Кроме того, согласно определению сходимости из сходимости в \mathcal{L}' следует сходимость в D' . В самом деле, если последовательность $\{f_k\} \subset \mathcal{L}'$ сходится к $f \in \mathcal{L}'$, то $\forall \varphi \in \mathcal{L}: (f_k, \varphi) \rightarrow (f, \varphi)$ ($k \rightarrow \infty$). Так как $D \subset \mathcal{L}$, то это же предельное равенство имеет место для всех основных функций $\varphi \in D$. А это означает, что имеет место сходимость в D' :

$$\forall \varphi \in D, (f_k, \varphi) \rightarrow (f, \varphi) \Rightarrow f_k \rightarrow f \quad (k \rightarrow \infty) \text{ в } D'.$$

Таким образом, обобщенная функция медленного роста (умеренное распределение по Шварцу) — это линейный непрерывный функционал на D , продолженный до линейного непрерывного функционала на \mathcal{L} (см. свойство в) ниже)

Теорема (Л. Шварц). Для того чтобы линейный функционал f , определенный на \mathcal{L} , принадлежал \mathcal{L}' (т. е. был непрерывным в \mathcal{L}) необходимо и достаточно, чтобы существовали такие числа $C > 0$ и $p \geq 0$ — целое, что $\forall \varphi \in \mathcal{L}$

$$|(f, \varphi)| \leq C \|\varphi\|_p, \quad (4.54)$$

где

$$\|\varphi\|_p = \sup_{|\alpha| \leq p, x \in R^n} (1+|x|)^p |D^\alpha \varphi(x)|.$$

Доказательство достаточности. Пусть линейный функционал f удовлетворяет неравенству (4.54) при некоторых $C > 0$ и $p \geq 0$. Докажем, что $f \in \mathcal{L}'$. Пусть $\{\varphi_k(x)\} \subset \mathcal{L}$ сходится к $\varphi(x) \in \mathcal{L}$. Тогда согласно определению сходимости в \mathcal{L}

$$\|\varphi - \varphi_k\|_p = \sup_{|\alpha| \leq p, x \in R^n} (1+|x|)^p |D^\alpha (\varphi - \varphi_k)| \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

Следовательно,

$$|(f, \varphi) - (f, \varphi_k)| = |(f, \varphi - \varphi_k)| \leq C \|\varphi - \varphi_k\|_p \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty),$$

а это означает, что функционал f непрерывен.

Доказательство необходимости. Пусть $f \in \mathcal{L}'$. Покажем, что тогда существуют такие числа $C > 0$ и $p \geq 0$ — целое, при которых имеет место неравенство (4.54).

Предположим противное, что таких чисел не существует. Тогда можно построить последовательность $\{\varphi_k\} \subset \mathcal{L}$, такую что

$$|(f, \varphi_k)| > k \|\varphi_k\|_k \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (4.55)$$

Последовательность функций

$$\psi_k(x) = \frac{\varphi_k(x)}{\sqrt{k} \|\varphi_k\|_k} \rightarrow 0 \text{ в } \mathcal{L} \text{ при } |\alpha| \leq k \text{ и } |\beta| \leq k.$$

Действительно,

$$|x^\beta D^\alpha \psi_k(x)| = \frac{|x^\beta D^\alpha \varphi_k(x)|}{\sqrt{k} \sup_{x \in R^n, |\alpha| \leq k} (1+|x|)^k |D^\alpha \varphi_k|}.$$

Далее

$$|x^\beta| = |x_1|^{\beta_1} |x_2|^{\beta_2} \dots |x_n|^{\beta_n} \leq \|x\|^\beta.$$

Поэтому

$$|x^\beta D^\alpha \psi_k(x)| \leq \frac{|x|^\beta |D^\alpha \varphi_k(x)|}{\sqrt{k} \sup_{x \in R^n, |\alpha| \leq k, |\beta| \leq k} (1+|x|)^k |D^\alpha \varphi_k(x)|} \rightarrow 0.$$

Отсюда и из непрерывности функционала f следует

$$(f, \psi_k) \rightarrow (f, 0) = 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

С другой стороны, из неравенства (4.55) получаем оценку

$$|(f, \psi_k)| = \frac{|(f, \varphi_k)|}{\sqrt{k} \|\varphi_k\|_k} \geq \frac{k \|\varphi_k\|_k}{\sqrt{k} \|\varphi_k\|_k} = \sqrt{k}.$$

Пришли к противоречию, что и требовалось доказать.

Таким образом, обобщенная функция медленного роста является непрерывным функционалом относительно некоторой нормы $\|\cdot\|_p$.

Свойства обобщенных функций медленного роста. Примеры.

а) Любая производная от обобщенной функции медленного роста также принадлежит \mathcal{L}' . В самом деле, $\forall \varphi \in \mathcal{L}$:

$$(D^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha \varphi),$$

а так как оператор дифференцирования непрерывен из \mathcal{L} в \mathcal{L} , т. е. из $\varphi_k \rightarrow \varphi$ в \mathcal{L} следует $D^\alpha \varphi_k \rightarrow D^\alpha \varphi (k \rightarrow \infty)$ в \mathcal{L} , то $(D^\alpha f, \varphi_k) \rightarrow (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha \varphi_k) \rightarrow (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha \varphi) = (D^\alpha f, \varphi)$.

Таким образом, $D^\alpha f$ — непрерывный функционал на \mathcal{L} . Линейность доказывается обычным образом:

$$\begin{aligned} (D^\alpha f, \mu \varphi + v \psi) &= (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha (\mu \varphi + v \psi)) = (-1)^{|\alpha|} (f, (\mu D^\alpha \varphi + v D^\alpha \psi)) = \\ &= (-1)^{|\alpha|} (\mu (f, D^\alpha \varphi) + v (f, D^\alpha \psi)) = \mu (D^\alpha f, \varphi) + v (D^\alpha f, \psi), \forall \varphi, \psi \in \mathcal{L} \text{ и } \forall \mu, v \in C. \end{aligned}$$

б) Если $a(x) \in \theta_M$, $f \in \mathcal{L}'$, то $af \in \mathcal{L}'$. Действительно, так как операция умножения на $a(x) \in \theta_M$ непрерывна из \mathcal{L} в \mathcal{L} ($a\varphi \in \mathcal{L}$ и если $\{\varphi_k\} \subset \mathcal{L}$ сходится к $\varphi \in \mathcal{L}$, то $a\varphi_k \rightarrow a\varphi$ в \mathcal{L}), то

$$(af, \varphi_k) = (f, a\varphi_k) \rightarrow (f, a\varphi) = (af, \varphi) \quad (k \rightarrow \infty) \text{ на } \mathcal{L}$$

и

$$\begin{aligned} (af, \mu\varphi + v\psi) &= (f, a(\mu\varphi + v\psi)) = (f, (\mu(a\varphi) + v(a\psi))) = (f, \mu a\varphi) + (f, v a\psi) = \\ &\mu(f, a\varphi) + v(f, a\psi) = \mu(af, \varphi) + v(af, \psi), \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{L} \text{ и } \forall \mu, v \in C. \end{aligned}$$

Стало быть, af — линейный и непрерывный функционал, определенный на \mathcal{L} , т. е. $af \in \mathcal{L}'$.

в) Если f — финитная обобщенная функция из D' , т. е. линейный непрерывный функционал с компактным носителем на пространстве основных функций D , то его можно продолжить единственным образом на \mathcal{L} как элемент из \mathcal{L}' по формуле

$$(f, \varphi) = (f, \eta\varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{L}, \quad (4.56)$$

где $\eta = \eta(x) \in D$ и $\eta(x) = 1$ в окрестности носителя f .

В самом деле, $\eta\varphi \in D$, а f — определен как линейный непрерывный функционал на D . Значит, правая часть (4.56) определяет линейный функционал на \mathcal{L} :

$$\begin{aligned} (f, \mu\varphi + v\psi) &= (f, \eta(\mu\varphi + v\psi)) = (f, \eta\mu\varphi) + (f, \eta v\psi) = \\ &= \mu(f, \eta\varphi) + v(f, \eta\psi) = \mu(f, \varphi) + v(f, \psi), \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{L}, \quad \forall \mu, v \in C. \end{aligned}$$

Покажем, что правая часть равенства (4.56) определяет непрерывный функционал в \mathcal{L} . Если $\{\varphi_k\} \subset \mathcal{L}$ сходится к $\varphi \in \mathcal{L}$, т. е. $x^\beta D^\alpha \varphi_k(x) \rightarrow x^\beta D^\alpha \varphi(x)$ ($k \rightarrow \infty$) равномерно, то $\{\eta\varphi_k\} \subset D$ сходится к $\eta\varphi \in D$, т. е. носители $\eta\varphi_k$ ограничены и лежат в окрестности носителя f и $D^\alpha \eta\varphi_k \rightarrow D^\alpha \eta\varphi$ ($k \rightarrow \infty$) равномерно. Следовательно, $\forall \varphi \in \mathcal{L}$:

$$(f, \varphi_k) = (f, \eta\varphi_k) \rightarrow (f, \eta\varphi) = (f, \varphi) \quad (k \rightarrow \infty).$$

Таким образом, $(f, \varphi_k) \rightarrow (f, \varphi)$ в \mathcal{L} , что и требовалось. Единственность продолжения следует из того факта, что D плотно в \mathcal{L} .

г) Если $f \in L^1$, то она определяет обобщенную функцию медленного роста по формуле

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{L}.$$

Действительно,

$$|(f, \varphi)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| |\varphi(x)| dx \leq \max_{x \in R^n} |\varphi(x)| \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty.$$

Далее, если $\{\varphi_\nu\} \in \mathcal{L}$ стремится к $\varphi \in \mathcal{L}$, то

$$\begin{aligned} |(f, \varphi - \varphi_\nu)| &= |(f, \varphi) - (f, \varphi_\nu)| \leq \max_{x \in R^n} |\varphi - \varphi_\nu| \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \rightarrow 0 \quad (\nu \rightarrow \infty), \text{ т. е.} \\ &(f, \varphi_\nu) \rightarrow (f, \varphi). \end{aligned}$$

То же можно сказать в том случае, когда f — ограниченная функция.

Если $f \in L^p$ ($1 \leq p < +\infty$) и $\alpha(x)$ растет на бесконечности не быстрее, чем полином, то $\alpha(x)f \in \mathcal{L}'$. В самом деле,

$$|(\alpha f, \varphi)| = |(f, \alpha \varphi)| \leq \|f\|_{L^p} \|\alpha \varphi\|_{L^q}.$$

д) Пусть $f(x)$ — локально интегрируемая функция (медленного) степенного роста на бесконечности, т. е. при некотором $m \geq 0$

$$\int |f(x)| (1+|x|)^{-m} dx < \infty.$$

Она порождает регулярную обобщенную функцию медленного роста по формуле

$$(f, \varphi) = \int f(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{L}.$$

Например, регулярная обобщенная функция медленного роста x^2 действует на произвольную основную функцию $\varphi(x) \in \mathcal{L}$ по формуле

$$(x^2, \varphi) = \int x^2 \varphi(x) dx.$$

е) Обобщенная функция f с ограниченным носителем есть распределение умеренно го роста, так как (f, φ) имеет смысл для всех функций $\varphi \in C^\infty$ безотносительно к их убыванию на бесконечности.

ж) Пусть $f \in \mathcal{L}'$, а $P(x)$ — полином от x . Тогда $fP \in \mathcal{L}'$. В самом деле, $\forall \varphi \in \mathcal{L}$ имеем $(Pf, \varphi) = (f, P\varphi)$, и так как $P\varphi \in \mathcal{L}$, то правая часть равенства имеет смысл.

з) Всякую обобщенную функцию медленного роста можно представить в виде [38, 39]

$$f = \sum_{|\alpha| \leq N} D^\alpha f_\alpha(x),$$

где $f_\alpha(x)$ — непрерывные функции медленного (степенного) роста, для которых имеет место оценка

$$|f(x)| \leq C(1+|x|)^N.$$

Функция $e^x \in \mathcal{L}(R')$ не определяет обобщенную функцию медленного роста.

Свертка в \mathcal{L}' . Пусть $f \in \mathcal{L}'(R')$, g — обобщенная функция с компактным носителем (т. е. $g \in \mathbf{E}'$) и $\eta(x) \in D(R')$, причем $\eta(x) = 1$ в окрестности носителя g . Тогда свертка $f * g$ существует и определяется следующим образом:

$$(f * g, \varphi) = (f(x) \cdot g(y), \eta(y) \varphi(x+y)), \quad \varphi \in \mathcal{L}(R').$$

Все основные свойства свертки — коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность — относительно сложения сохраняются. Можно показать также, что свертка $f * g \in \mathcal{L}'$ [8, 9].

Согласно Шварцу [42], f будет распределением медленного роста тогда и только тогда, когда найдутся такие целые положительные p и k , что $f = g^{(p)}(x)$, где $g(x) \in C(R)$ и $g(x) = O(|x|^k)$ при $x \rightarrow \pm\infty$.

В общем случае пространства R^n распределение f будет медленно растущим тогда и только тогда, когда $f = D^\alpha g$, где α — некоторый мультииндекс, $g = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — некоторая непрерывная функция медленного роста.

4.12. Обобщенные функции с компактным носителем

Пространство E . Напомним, что это пространство комплекснозначных бесконечно дифференцируемых функций на R^n с произвольными носителями. Сходимость в E определяется следующим образом. Говорят, что $\{\varphi_\nu(x)\} \subset E$ сходится к нулю, если $\varphi_\nu(x) \rightarrow 0$ и все производные $D^\alpha \varphi_\nu \rightarrow 0$ при $\nu \rightarrow \infty$, равномерно на всяком компакте K .

Пространство E' . Пусть f — обобщенная функция с компактным носителем K , а $\varphi(x)$ — функция из пространства E . Если $\eta(x) \in D$ такая, что $\eta(x) = 1$ в окрестности компакта K , то $\eta\varphi \in D$ и $(f, \eta\varphi)$ — вполне определенное число, не зависящее от выбора $\eta(x)$.

В самом деле, если $\eta_* \in D$ и $\eta_* = 1$ в окрестности K , то

$$(f, \eta\varphi) - (f, \eta_*\varphi) = (f, (\eta - \eta_*)\varphi) = 0,$$

так как носители f и $\eta - \eta_*$ не пересекаются.

Таким образом, можно положить

$$(f, \varphi) = (f, \eta\varphi), \quad \forall \varphi \in E = C^\infty.$$

Имеет место предложение [39]. Всякая обобщенная функция с компактным носителем есть линейный функционал, непрерывный на E . Обратно, всякий линейный функционал, непрерывный на E , определяет некоторую обобщенную функцию с компактным носителем. Отсюда вытекает, что обобщенные функции с компактными носителями образуют векторное (линейное) пространство E' — пространство линейных функционалов, непрерывных на пространстве E .

Итак, если $f \in D'(\Omega)$, то условие $f \in E'(\Omega)$ равносильно тому, что $\text{supp } f$ — компакт, принадлежащий Ω .

Общие представления. Пусть функции $f_\alpha(x) \in C(\Omega)$, $f_\alpha(x) = 0$, $x \in \Omega \setminus K$ и компакт K есть замыкание некоторой окрестности компакта $\text{supp } f$, где φ — основная функция. Тогда всякая обобщенная функция f с носителем в K задается формулой

$$(f, \varphi) = \sum_{|\alpha| \leq N} (-1)^{|\alpha|} \int_K f_\alpha(x) D^\alpha \varphi(x) dx = \sum_{|\alpha| \leq N} (-1)^{|\alpha|} (D^\alpha f_\alpha(x), \varphi(x)) \Rightarrow f = \sum_{|\alpha| \leq N} D^\alpha f_\alpha.$$

Это равенство означает, что каждая финитная обобщенная функция является линейной комбинацией (обобщенных) производных от непрерывных финитных функций до некоторого порядка.

Если обобщенная функция сосредоточена в одной точке $x=0$, то строение такой функции определяется соотношением [8, 9]

$$f = \sum_{|\alpha| \leq N} C_\alpha D^\alpha \delta(x),$$

где C_α — некоторые постоянные и суммирование ведется до некоторого порядка $|\alpha| = N$.

Пример 1. ($n=1$). Пусть $f(x) \in C(R^1)$ такова:

$$f(x) = x \ln|x| - x.$$

Имеем

$$f'(x) = \ln|x|, \quad f''(x) = Vp \frac{1}{x}, \quad f'''(x) = -Vp \frac{1}{x^2}, \dots$$

Пример 2. Если $x^m u = 0$, то u — обобщенная функция с носителем в точке $x=0$. Тогда, согласно примеру 5 (формула (4.17)), эта обобщенная функция является линейной комбинацией делта-функции и ее производных до $(m-1)$ -го порядка.

Замечание. Эквивалентное определение обобщенных функций производится с помощью линейных дифференцированных операторов [22]. Пусть L и L^* пара взаимно сопряженных дифференциальных операторов порядка m с коэффициентами класса $C^m(\bar{\Omega}_*)$, где $\Omega_* \subset \Omega$. Тогда обобщенная функция f в $\bar{\Omega}_*$ обозначается с помощью порождающей функции $w(x) \in C^m(\bar{\Omega}_*)$ символом

$$f = Lw.$$

Смысл этому символическому обозначению придается с помощью следующего определения скалярного произведения:

$$(f, \varphi) = (Lw, \varphi) = (w, L^*\varphi), \quad \forall \varphi \in C^m(\Omega). \quad (4.57)$$

Если $Lw = D^\alpha w$, то $L^*\varphi = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \varphi$ и приходим к определению производной $f = D^\alpha w$

$$(f, \varphi) = (D^\alpha w, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (w, D^\alpha \varphi).$$

Таким образом, последовательные производные $D^\alpha w = f$ некоторой непрерывной функции (при $n=1$) являются обобщенными функциями в смысле определения (4.57).

В качестве примера рассмотрим в R^1 непрерывную функцию

$$w(x) = x\theta(x),$$

где $\theta(x)$ — единичная функция Хевисайда. Она является порождающей для $\delta(x)$ в R^1 . Действительно,

$$w'(x) = \theta(x), \quad w''(x) = \delta(x).$$

В пространстве R^n порождающую функцию возьмем в виде

$$w(x) = x_1\theta(x_1) \cdot x_2\theta(x_2) \cdot \dots \cdot x_n\theta(x_n), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Тогда

$$D^1 w = \frac{\partial^n w(x)}{\partial x_1 \partial x_2, \dots, \partial x_n} = \theta(x_1) \cdot \theta(x_2) \cdot \dots \cdot \theta(x_n),$$

$$D^2 w = \frac{\partial^{2n} w(x)}{\partial x_1^2 \partial x_2^2, \dots, \partial x_n^2} = \delta(x_1) \cdot \delta(x_2) \cdot \dots \cdot \delta(x_n) = \delta(x).$$

4.13. Конечные части. Определенные интегралы

Представление $f = D^\alpha w$ позволяет придать некоторый смысл первообразным функциям или неопределенным интегралам $D^{-\beta} f$ от обобщенной функции $f = D^\alpha w$. Мы имеем (формально) на основании этого определения

$$D^{-\beta} f = D^{-\beta} (D^\alpha w) = D^\alpha (D^{-\beta} w), \quad \alpha \geq \beta.$$

Пусть f — гладкая функция в области Ω за исключением некоторой замкнутой подобласти $K \subset \Omega$, имеющая непрерывное продолжение вплоть до границы $\partial\Omega$. Рассмотрим функции f одной переменной. Возьмем в качестве Ω интервал $(-1, 1)$ и предположим, что $f = D^m w$ непрерывна в окрестности концов $x=1$ и $x=-1$. Основную функцию φ положим равной единице в Ω (значит, все ее производные равны нулю на $\partial\Omega$). Далее, продолжим $\varphi(x)$ произвольным образом на дополнение Ω — множество Ω_1 , но с условием гладкости и финитности (рис. 4.11).

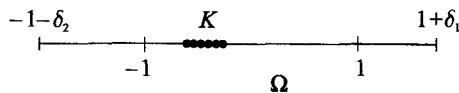


Рис. 4.11. К схеме Адамара выделения конечной части интеграла в R^1

Интегрирование по частям дает

$$\begin{aligned} (f, \varphi) &= (D^m w, \varphi) = (-1)^m \int_{\Omega \cap \Omega_1} w \varphi^{(m)}(x) dx = (-1)^m \int_{\Omega_1} w \varphi^{(m)}(x) dx = \\ &= (-1)^m \left(\int_{-1-\delta_2}^{-1} + \int_1^{1+\delta_1} \right) w \varphi^{(m)}(x) dx = \\ &= (-1)^m \left\{ Q|_{-1-\delta_2}^{-1} + Q|_1^{1+\delta_1} + (-1)^m \int_{\Omega_1} \varphi(x) w^{(m)} dx \right\}, \end{aligned}$$

где $Q = w\varphi^{(m-1)} - w^{(1)}\varphi^{(m-2)} + w^{(2)}\varphi^{(m-3)} - \dots + (-1)^{m-1} w^{(m-1)}\varphi$.

Так как $\varphi(\pm 1) = 1$, $\varphi^{(r)}(\pm 1) = 0$ ($r = 1, 2, \dots$), $\varphi^{(r)}(-1 - \delta_2) = \varphi^{(r)}(1 + \delta_1) = 0$ ($r = 0, 1, \dots$), то имеем

$$(f, \varphi) = \int_{\Omega_1} \varphi w^{(m)} dx + w^{(m-1)} \Big|_{x=-1}^{x=1}.$$

Отсюда определяем

$$Z = \int_{-1}^1 f dx = (f, \varphi) - \int_{\Omega_1} \varphi w^{(m)} dx = w^{(m-1)} \Big|_{x=-1}^{x=1}. \quad (4.58)$$

Формула (4.58) для значения Z была введена Адамаром [22] в качестве конечной части интеграла от функции f . Точно такая же формула (Ньютона–Лейбница) связывала бы определенный и неопределенный интегралы в случае обыкновенной интегрируемой функции $f(x)$.

Пример 1. Вычислим интеграл от обобщенной функции $Vp \frac{1}{x^2}$. Имеем в $D'(R^1)$.

$$Vp \frac{1}{x^2} = -\frac{d^2}{dx^2} \ln|x|, \quad \frac{d}{dx} \ln|x| = Vp \frac{1}{x}.$$

По основной формуле интегрального исчисления (4.58) находим

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = -Vp \frac{1}{x} \Big|_{-1}^1 = -\frac{1}{x} \Big|_{-1}^1 = -2.$$

Пример 2. Пусть обобщенная функция

$$f(x) = -4 \frac{d^2}{dx^2} [\theta(x) \sqrt{x}],$$

где $\theta(x)$ — единичная функция Хевисайда. Тогда

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = -4 \frac{d}{dx} [\theta(x) \sqrt{x}] \Big|_{-1}^1 = -4 \left(\frac{\theta(x)}{2\sqrt{x}} \right) \Big|_{-1}^1 = -2.$$

Итак, конечная часть нашего интеграла равна -2 .

Заметим, что в первом примере под интегралом стоит положительная функция, а результат получился отрицательный. Это можно интерпретировать в том смысле, что конечная часть по Адамару — это разность двух расходящихся интегралов $(\infty - \infty)$. Бесконечные части взаимно уничтожаются, и остается в результате конечное число.

В несколько более сложном варианте, когда подынтегральная функция имеет вид

$$f = g D^m w,$$

где $g(x)$ — регулярный r -непрерывный функционал [22], имеем

$$\int_{-1}^1 g D^m w dx = \left(g D^{m-1} w - Dg D^{m-2} w + \dots + (-1)^{m-2} D^{m-2} g D w \right) \Big|_{-1}^1 + (-1)^m \int_{-1}^1 (w D^{m-1} g) dx. \quad (4.59)$$

В этом случае интеграл от обобщенной функции сводится к граничным членам и к интегралу от непрерывной функции.

В качестве примера рассмотрим простейший гиперсингулярный интеграл

$$I(\zeta_0) = \int_{\Gamma} \frac{\omega(\zeta)}{(\zeta - \zeta_0)^2} d\zeta,$$

где Γ — достаточно гладкий разомкнутый контур с началом в точке a и концом в точке b , $\zeta_0 \in \Gamma$.

Если $\omega(\zeta) \in C^1(\Gamma)$, то положив $(\zeta - \zeta_0)^{-2} = -\frac{d}{d\zeta}(\zeta - \zeta_0)^{-1}$, получим

$$I(\zeta_0) = -\left. \frac{\omega(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} \right|_a^b - Vp \int_{\Gamma} \frac{\omega'(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta.$$

Если $\omega(\zeta) \in C^2(\Gamma)$, то положив $(\zeta - \zeta_0)^{-2} = -\frac{d^2}{d\zeta^2} \ln(\zeta - \zeta_0)$, приходим к определению

$$I(\zeta_0) = -\left(\left. \frac{\omega(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} - \omega'(\zeta) \ln(\zeta - \zeta_0) \right|_a^b - \int_{\Gamma} \omega''(\zeta) \ln(\zeta - \zeta_0) d\zeta \right).$$

По поводу техники регуляризации гиперсингулярных интегралов и применения их в задачах теории упругости см., например, [51].

В R^n можно также получить все основные интегральные формулы. Получим, например, формулу Гаусса–Остроградского. Пусть подынтегральная функция составлена из обобщенных функций типа $D^\alpha w$ непрерывных в окрестности гладкой границы $\partial\Omega$ области интегрирования Ω . Предполагается, что f всюду за исключением компакта $K \subset \Omega$ являются обычными гладкими функциями, непрерывно продолжимыми на гладкую границу $\partial\Omega$. Функцию φ возьмем тождественно равную единице в Ω и продолженную на множество Ω_1 — дополнение области Ω с сохранением гладкости и финитности (рис. 4.12). Тогда, действуя аналогично предыдущему, получим [22]

$$\int_{\Omega} f dx = \int_{\partial\Omega} (D_i^{-1} D^\alpha w) n_i ds,$$

где D_i^{-1} — первообразная функции $D^\alpha w$ по $i-1$ переменной, $\{n_i\}$ — орт нормали (внешней) к поверхности $\partial\Omega$.

Полученную интегральную формулу можно свести к обычной симметричной форме формулы Гаусса–Остроградского. Для этого введем вектор A с компонентами $D_i^{-1} D^\alpha w$.

Имеем

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} A dx = \int_{\partial\Omega} A_n dS,$$

где A_n — проекция вектора A на внешнюю нормаль к поверхности $\partial\Omega$.

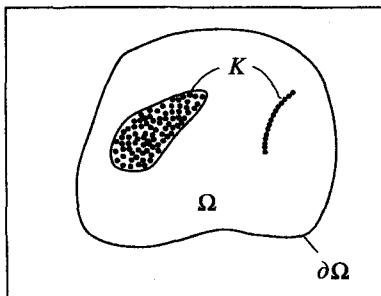


Рис. 4.12. К выводу формулы Гаусса–Остроградского

4.14. Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста

Интегральное преобразование Фурье эффективно используется в математике, физике, в инженерных науках. Преобразование Фурье обобщенных функций из \mathcal{L}' не выходит за пределы этого пространства и обладает рядом замечательных свойств.

Основными методами исследования линейных дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами вида

$$Pu(x) = P(D^\alpha)u(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} C_\alpha D^\alpha u(x) = f(x), \quad C_\alpha \in C,$$

являются интегральное преобразование Фурье и теория обобщенных функций. Дело в том, что экспоненты $e^{-i(\xi, x)}$ являются собственными функциями оператора P , т. е.

$$Pe^{-i(\xi, x)} = \tilde{P}(\xi) e^{-i(\xi, x)},$$

где

$$\tilde{P}(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} C_\alpha (-i\xi)^\alpha = P(-i\xi),$$

$\tilde{P}(\xi)$ — символ оператора P есть собственное число этого оператора, соответствующее собственной функции $e^{-i(x, \xi)}$. Следовательно, представление Фурье

$$u(x) = \int e^{-i(\xi, x)} \tilde{u}(\xi) d\xi, \quad f(x) = \int e^{-i(\xi, x)} \tilde{f}(\xi) d\xi$$

есть разложение по собственным функциям оператора P , т. е. приводит его к диагональному виду. Формально получаем решение

$$u(x) = \int e^{-i(\xi, x)} \frac{\tilde{f}(\xi)}{\tilde{P}(\xi)} d\xi.$$

Однако эти формальные операции нуждаются в обосновании с позиции обобщенных функций, так как собственные функции $\exp(-i(\xi, x))$, а также собственные числа $\tilde{u}(\xi)$ и $\tilde{f}(\xi)$ являются обобщенными функциями. Кроме этого, возникает проблема деления на многочлен $\tilde{P}(\xi)$ [8].

Преобразование Фурье основных функций из \mathcal{L} . По определению, преобразование Фурье — это интегральный оператор F , действующий на произвольную основную функцию $\varphi(x) \in \mathcal{L}$ по формуле

$$F[\varphi](\xi) = \int e^{i(\xi, x)} \varphi(x) dx = \psi(\xi). \quad (4.60)$$

При $n=1$ имеем одномерное преобразование (4.60)

$$F[\varphi](\xi) = \int e^{i\xi x} \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \varphi(x) dx.$$

При $n=2$ — двумерное преобразование Фурье

$$F[\varphi](\xi) = \int e^{i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)} \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int e^{i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)} \varphi(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

В общем случае формула (4.60) определяет n -мерное преобразование Фурье

$$F[\varphi](\xi) = \underbrace{\int \int \dots \int}_{n} e^{i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_n x_n)} \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Поскольку $\varphi(x) \in C^\infty$ и затухает при $|x| \rightarrow \infty$ быстрее любой степени $1/|x|$, то $\varphi \in L^1$ и $x^\alpha \varphi(x) \in L^1$ для любого мультииндекса α . Имеем

$$|F[\varphi](\xi)| = \left| \int e^{i(\xi, x)} \varphi(x) dx \right| \leq \int |\varphi(x)| dx = \|\varphi\|_L < \infty.$$

Функцию $F[\varphi](\xi)$ можно дифференцировать любое число раз в силу равномерной ограниченности по ξ получающихся при этом интегралов.

Имеем для всех мультииндексов β

$$D^\beta F[\varphi](\xi) = \int (ix)^\beta \varphi(x) e^{i(\xi, x)} dx = F[(ix)^\beta \varphi](\xi). \quad (4.61)$$

Отсюда следует, что $F[\varphi] \in C^\infty(R^n)$. Преобразование Фурье от производной

$$F[D^\alpha \varphi](\xi) = (-i\xi)^\alpha F[\varphi](\xi) \in C^\infty(R^n). \quad (4.62)$$

Учитывая эти соотношения, находим $\forall \alpha, \beta$

$$\xi^\beta D^\alpha F[\varphi](\xi) = i^{|\alpha|+|\beta|} F[D^\beta (x^\alpha \varphi)](\xi).$$

Отсюда получаем оценку равномерную по переменной ξ

$$|\xi^\beta D^\alpha F[\varphi](\xi)| \leq \int |D^\beta (x^\alpha \varphi)| dx = C_{\alpha, \beta}. \quad (4.63)$$

А это и означает, что $F[\varphi]$ и все производные от $F[\varphi]$ убывают при $|\xi| \rightarrow \infty$ быстрее любой степени $1/|\xi|$, т. е. $F[\varphi] \in \mathcal{L}$.

Пусть

$$\psi(\xi) = F[\varphi](\xi) = \int e^{i(\xi, x)} \varphi(x) dx, \quad \varphi \in \mathcal{L}.$$

В теории интегральных преобразований Фурье вводится обратное преобразование Фурье [35, 37]

$$\varphi(x) = F^{-1}[\psi](x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{-i(\xi, x)} \psi(\xi) d\xi, \quad \psi \in \mathcal{L}, \quad (4.64)$$

обладающее тем свойством, что

$$F[F^{-1}[\varphi]] = F^{-1}[F[\varphi]] = \varphi.$$

В силу (4.64)

$$F^{-1}[\varphi](x) = \frac{1}{(2\pi)^n} F[\varphi](-x) = \frac{1}{(2\pi)^n} F[\varphi(-\xi)] \in \mathcal{L}.$$

Таким образом, каждой основной функции $\varphi(x) \in \mathcal{L}$ согласно формуле (4.60) ставится в соответствие функция $\psi(\xi) \in \mathcal{L}$, и обратно, всякой функции $\psi(\xi) \in \mathcal{L}$ формула (4.64) ставит в соответствие некоторую функцию $\varphi(x) \in \mathcal{L}$. Отображение $F : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ взаимно однозначное. Это следует из того, что ноль переходит в ноль.

Покажем теперь, что операция преобразования Фурье F непрерывна из \mathcal{L} в \mathcal{L} , т. е. из того, что $\{\varphi_k\} \subset \mathcal{L}$ сходится к $\varphi(x) \in \mathcal{L}$ следует сходимость $F[\varphi_k] \rightarrow F[\varphi]$ ($k \rightarrow \infty$) в \mathcal{L} .

Действительно, в силу оценки (4.63) можем записать

$$\begin{aligned} |\xi^\beta D^\alpha F[\varphi - \varphi_k](\xi)| &\leq \left| \int D^\beta (x^\alpha (\varphi - \varphi_k)) dx \right| \leq \\ &\leq \sup_{x \in R^n} |D^\beta (x^\alpha (\varphi - \varphi_k))| (1+|x|)^{n+1} \int \frac{dx}{(1+|x|)^{n+1}} = \\ &= C \sup_{x \in R^n} |D^\beta (x^\alpha (\varphi - \varphi_k))| (1+|x|)^{n+1}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$|\xi^\beta D^\alpha F[\varphi] - \xi^\beta D^\alpha F[\varphi_k]| \leq C \sup_{x \in R^n} |D^\beta (x^\alpha (\varphi - \varphi_k))| (1+|x|)^{n+1} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty) \text{ в } \mathcal{L},$$

а это и означает, что в смысле сходимости в \mathcal{L} : $F[\varphi_k] \rightarrow F[\varphi]$ ($k \rightarrow \infty$).

Таким образом, операция преобразования Фурье взаимно однозначна и непрерывна из \mathcal{L} в \mathcal{L} (топологический изоморфизм $F : \mathcal{L}(R^n) \rightarrow \mathcal{L}(R^n)$).

Умножив обе части (4.60) на $\varphi(\xi) \in \mathcal{L}(R^n)$ и интегрируя по ξ , получим ($\psi(\xi) \in \mathcal{L}(R^n)$)

$$(F(\psi), \varphi) = (\psi, F[\varphi]).$$

Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста. Пусть $f(x) \in L^1(R^n)$. Тогда можно определить ее преобразование Фурье

$$F[f](\xi) = \int e^{i(\xi, x)} f(x) dx.$$

Это выражение имеет смысл, ибо

$$|F[f](\xi)| \leq \int |f(x)| dx < \infty.$$

Функция $F[f](\xi)$ — ограничена и непрерывна, поэтому она определяет регулярный функционал, который на любую основную функцию $\varphi(x) \in \mathcal{L}$ действует по формуле

$$\begin{aligned} (F[f], \varphi) &= \int \varphi(\xi) F[f](\xi) d\xi = \int \varphi(\xi) \left[\int e^{i(\xi, x)} f(x) dx \right] d\xi = \\ &= \int f(x) \left[\int e^{i(\xi, x)} \varphi(\xi) d\xi \right] dx = \int f(x) F[\varphi](x) dx = (f, F[\varphi]). \end{aligned}$$

Эту формулу (равенство Парсеваля) примем за определение преобразования Фурье произвольной обобщенной функции из \mathcal{L}' . Итак, имеем

$$(F[f], \varphi) = (f, F[\varphi]), \quad \forall \varphi \in \mathcal{L} \text{ и } f \in \mathcal{L}'. \quad (4.65)$$

Покажем, что правая часть (4.65) определяет линейный непрерывный функционал на \mathcal{L} . Так как для всех $\varphi \in \mathcal{L}$ преобразование Фурье $F[\varphi] \in \mathcal{L}$, то функционал $(f, F[\varphi])$ определен на \mathcal{L} .

Линейность:

$$\begin{aligned} (F[f], \alpha\varphi + \beta\psi) &= (f, F[\alpha\varphi + \beta\psi]) = (f, \alpha F[\varphi] + \beta F[\psi]) = \\ &= \alpha(f, F[\varphi]) + \beta(f, F[\psi]) = \alpha(F[f], \varphi) + \beta(F[f], \psi). \end{aligned}$$

Непрерывность:
пусть $\{\varphi_k\} \subset \mathcal{L}$ сходится к $\varphi \in \mathcal{L}$. Тогда в силу того, что преобразование Фурье непрерывно из \mathcal{L} в \mathcal{L} , получим

$$(F[f], \varphi_k) = (f, F[\varphi_k]) \rightarrow (f, F[\varphi]) = (F[f], \varphi), \quad (k \rightarrow \infty).$$

Таким образом, преобразование Фурье обобщенной функции из \mathcal{L}' принадлежит пространству \mathcal{L}' , т. е. является обобщенной функцией медленного роста.

Теперь покажем, что операция преобразования Фурье непрерывна из \mathcal{L}' в \mathcal{L}' . Пусть последовательность $\{f_k\} \in \mathcal{L}'$ сходится к $f \in \mathcal{L}'$. Тогда $\forall \varphi \in \mathcal{L}$

$$(F[f_k], \varphi) = (f_k, F[\varphi]) \rightarrow (f, F[\varphi]) = (F[f], \varphi) \Rightarrow F[f_k] \rightarrow F[f] \quad (k \rightarrow \infty).$$

Введем в \mathcal{L}' операцию F^{-1} по формуле

$$F^{-1}[f] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[f(-x)].$$

Покажем, что операции преобразования Фурье F и F^{-1} — взаимно обратные, т. е. что имеют место соотношения

$$F^{-1}F[f] = F[F^{-1}[f]] = f, \quad f \in \mathcal{L}'.$$

В самом деле, $\forall \varphi \in \mathcal{L}$ имеем цепочки равенств:

$$\begin{aligned} (F[F^{-1}[f]], \varphi(\xi)) &= (F^{-1}[f](x), F[\varphi](x)) = \frac{1}{(2\pi)^n} (F[f(-\xi)], F[\varphi]) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} (f(-\xi), F[F[\varphi]](\xi)) = \frac{1}{(2\pi)^n} (f(\xi), F[F[\varphi]](-\xi)) = \\ &= (f, F^{-1}F[\varphi]) = (f, \varphi) \Rightarrow F[F^{-1}[f]] = f, \\ (F^{-1}[F[f]], \varphi) &= \frac{1}{(2\pi)^n} (F[F[f]](-\xi), \varphi) = \frac{1}{(2\pi)^n} (F[f](-\xi), F[\varphi](\xi)) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} (F[f], F[\varphi](-\xi)) = (F[f], F^{-1}[\varphi]) = (f, F[F^{-1}[\varphi]]) = \\ &= (f, \varphi) \Rightarrow F^{-1}[F[f]] = f, \end{aligned}$$

что и требовалось.

Таким образом, операция $F : \mathcal{L}' \rightarrow \mathcal{L}'$, причем это отображение взаимно однозначно и непрерывно.

Свойства преобразования Фурье в \mathcal{L}' .

1. Дифференцирование преобразования Фурье. Если $f \in \mathcal{L}'$, то

$$D^\alpha F[f] = F[(ix)^\alpha f]. \quad (4.66)$$

В самом деле, имеем с учетом формулы (4.62) $\forall \varphi \in \mathcal{L}$

$$\begin{aligned} (D^\alpha F[f], \varphi) &= (-1)^{|\alpha|} (F[f], D_\xi^\alpha \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f, F[D_\xi^\alpha \varphi]) = \\ &= (-1)^{|\alpha|} (f, (-ix)^\alpha F[\varphi](x)) = ((ix)^\alpha f, F[\varphi]) = (F[(ix)^\alpha f], \varphi), \end{aligned}$$

что и требовалось.

2. Преобразование Фурье от производной. Если $f \in \mathcal{L}'$, то

$$F[D^\alpha f] = (-i\xi)^\alpha F[f]. \quad (4.67)$$

Действительно, с учетом формулы (4.61) получаем для всех $\varphi \in \mathcal{L}$

$$\begin{aligned} (F[D^\alpha f], \varphi) &= (D^\alpha f, F[\varphi](x)) = (-1)^{|\alpha|} (f, D_x^\alpha F[\varphi]) = \\ &= (-1)^{|\alpha|} (f, F[(i\xi)^\alpha \varphi]) = (-1)^{|\alpha|} (F[f], (i\xi)^\alpha \varphi) = ((-i\xi)^\alpha F[f], \varphi). \end{aligned}$$

3. Преобразование Фурье сдвига. Если $f \in \mathcal{L}'$, то

$$F[f(x-x_0)] = e^{i(\xi, x_0)} F[f]. \quad (4.68)$$

Действительно, $\forall \varphi \in \mathcal{L}$ имеем

$$(F[f(x-x_0)], \varphi(\xi)) = (f(x-x_0), F[\varphi](x)) = (f(x), F[\varphi](x+x_0)).$$

Напомним, что

$$F[\varphi](x+x_0) = \int e^{i(\xi, x+x_0)} \varphi(\xi) d\xi = F[e^{i(\xi, x_0)} \varphi].$$

Поэтому

$$(F[f(x-x_0)], \varphi) = (f, F[e^{i(\xi, x_0)} \varphi]) = (e^{i(\xi, x_0)} F[f], \varphi).$$

4. Сдвиг преобразования Фурье. Если $f \in \mathcal{L}'$, то

$$F[f](\xi + \xi_0) = F[e^{i(\xi_0, x)} f](\xi). \quad (4.69)$$

В самом деле, для основной функции $\varphi \in \mathcal{L}$:

$$F[\varphi(\xi + \xi_0)] = \int e^{i(\xi, x)} \varphi(\xi - \xi_0) d\xi = e^{i(\xi_0, x)} F[\varphi](x).$$

Поэтому $\forall \varphi \in \mathcal{L}$ имеем

$$\begin{aligned} (F[f](\xi + \xi_0), \varphi) &= (F[f](\xi), \varphi(\xi - \xi_0)) = (f, F[\varphi(\xi - \xi_0)](x)) = \\ &= (f, e^{i(\xi_0, x)} F[\varphi]) = (e^{i(\xi_0, x)} f, F[\varphi]) = (F[e^{i(\xi_0, x)} f], \varphi), \end{aligned}$$

что и требовалось.

5. Преобразование Фурье обобщенной функции с компактным носителем. Пусть f — финитная обобщенная функция, $\eta(x) \in D(R^n)$, причем $\eta(x) = 1$ в окрестности носителя функции f . Тогда $\forall \varphi \in \mathcal{L}$ имеем

$$\begin{aligned} (D^\alpha F[f], \varphi) &= (-1)^{|\alpha|} (F[f], D^\alpha \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f, F[D^\alpha \varphi]) = \\ &= (f, \eta(x)(ix)^\alpha F[\varphi]) = (f, \eta(x)(ix)^\alpha \int e^{i(\xi, x)} \varphi(\xi) d\xi) = \\ &= \int (f, \eta(x)(ix)^\alpha e^{i(\xi, x)}) \varphi(\xi) d\xi = ((f, \eta(x)(ix)^\alpha e^{i(\xi, x)}), \varphi(\xi)). \end{aligned}$$

Таким образом, получаем формулу

$$D^\alpha F[f] = (f, \eta(x)(ix)^\alpha e^{i(\xi, x)}) \quad (4.70)$$

и, как частный случай, определение преобразования Фурье обобщенной функции f с компактным носителем.

$$F[f] = (f, \eta(x) e^{i(\xi, x)}). \quad (4.71)$$

При выводе формулы (4.70) было использовано соотношение (4.39). Из формулы (4.70) следует, что $F[f] \in C^\infty(R^n)$.

Пример. Вычислим преобразование Фурье от дельта-функции. Имеем в силу (4.71)

$$F[\delta(x-x_0)] = (\delta(x-x_0), \eta(x)e^{i(\xi,x)}) = \eta(x_0)e^{i(\xi,x_0)} = e^{i(\xi,x_0)}.$$

В частности,

$$F[\delta(x)] = 1.$$

Обратное преобразование дает

$$\delta = F^{-1}[1] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[1(-x)] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[1].$$

Отсюда

$$F[1] = (2\pi)^n \delta(\xi),$$

т. е.

$$\int e^{i(\xi,x)} dx = (2\pi)^n \delta(\xi).$$

Далее, используя формулу (4.67), находим

$$F[D^\alpha \delta] = (-i\xi)^\alpha F[\delta] = (-i\xi)^\alpha.$$

Обращение этого преобразования дает

$$D^\alpha \delta = F^{-1}[(-i\xi)^\alpha] = \frac{i^{|\alpha|}}{(2\pi)^n} F[x^\alpha](\xi).$$

Отсюда

$$F[x^\alpha] = (2\pi)^n (-i)^{|\alpha|} D^\alpha \delta(\xi).$$

6. Преобразование Фурье прямого произведения. Если $f(x) \in \mathcal{L}'(R^n)$, а $g(y) \in \mathcal{L}'(R^m)$, то

$$F[f(x) \cdot g(y)] = F[f](\xi) \cdot F[g](\eta).$$

Например,

$$F[f(x) \cdot \delta(y)] = F[f](\xi) \cdot F[\delta(y)](\eta) = F[f](\xi) \cdot 1(\eta).$$

7. Преобразование Фурье свертки. Пусть $f \in \mathcal{L}'$ и g — финитная обобщенная функция. Тогда

$$F[f * g] = F[f]F[g]. \quad (4.72)$$

Действительно, если $\eta(x) \in D(R^n)$ и $\eta = 1$ в окрестности носителя обобщенной функции g , то $\forall \varphi \in \mathcal{L}$:

$$\begin{aligned} (F[f * g], \varphi) &= (f * g, F[\varphi]) = (f(x) \cdot g(y), \eta(y) F[\varphi](x+y)) = \\ &= (f(x), (g(y), \eta(y) F[\varphi](x+y))) = (f(x), (g(y), \eta(y) \int e^{i(\xi, x+y)} \varphi(\xi) d\xi)) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(f, \int (g(y), \eta(y) e^{i(\xi, y)}) e^{i(\xi, x)} \phi(\xi) d\xi \right) = \left(f, \int e^{i(\xi, x)} F[g](\xi) \phi(\xi) d\xi \right) = \\
&= \left(f, F[F[g]] \phi(\xi) \right) = (F(f), F(g)\phi) = (F[f]F[g], \phi).
\end{aligned}$$

Отсюда следует формула (4.72).

Пример 1. Вычислим преобразования Фурье от функций медленного роста $\theta(x)$ и $\theta(-x)$. Пусть $a > 0$, функция $e^{-ax}\theta(x) \rightarrow \theta(x)$ при $a \rightarrow +0$ в смысле сходимости в $\mathcal{L}'(R^1)$, т. е. $\forall \varphi \in \mathcal{L}'(R^1)$:

$$(e^{-ax}\theta(x), \varphi(x)) \rightarrow (\theta, \varphi) \text{ в } \mathcal{L}'.$$

Действительно, имеем

$$(e^{-ax}\theta - \theta, \varphi) = (\theta, (e^{-ax} - 1)\varphi) \rightarrow 0, a \rightarrow +0,$$

так как $x^\beta D^\alpha (e^{-ax} - 1) \rightarrow 0$ при $a \rightarrow +0$ равномерно по x для всех целых $\alpha, \beta \geq 0$.

Поскольку операция преобразования Фурье непрерывна из \mathcal{L}' в \mathcal{L}' , то

$$F[e^{-ax}\theta(x)] \rightarrow F[\theta(x)], a \rightarrow +0 \text{ в } \mathcal{L}'.$$

Имеем

$$F[e^{-ax}\theta] = \int_0^\infty e^{i\xi x - ax} dx = \frac{e^{i\xi x - ax}}{i\xi - a} \Big|_0^\infty = \frac{1}{a - i\xi} = \frac{i}{\xi + ia} \rightarrow \frac{i}{\xi + i0}, a \rightarrow +0.$$

Привлекая теперь формулу Сохоцкого (4.9)

$$\frac{1}{\xi + i0} = -\pi i \delta(\xi) + Vp \frac{1}{\xi},$$

получаем окончательно

$$F[\theta(x)] = \pi \delta(\xi) + Vp \frac{1}{\xi}. \quad (4.73)$$

Далее, $e^{ax}\theta(-x) \rightarrow \theta(-x)$, $a \rightarrow +0$ в $\mathcal{L}'(R^1)$ и $F[e^{ax}\theta(-x)] \rightarrow F[\theta(-x)]$ в \mathcal{L}' . Имеем

$$F[e^{ax}\theta(-x)] = \int_{-\infty}^0 e^{i\xi x + ax} dx = \frac{e^{i\xi x + ax}}{i\xi + a} \Big|_{-\infty}^0 = \frac{1}{i} \frac{1}{\xi - ia} \rightarrow \frac{-i}{\xi - i0},$$

$$F[\theta(-x)] = -i \left(\pi i \delta(\xi) + Vp \frac{1}{\xi} \right) = \pi \delta(\xi) - i Vp \frac{1}{\xi}. \quad (4.74)$$

Из этих двух формул следует

$$F[\operatorname{sgn} x] = F[\theta(x) - \theta(-x)] = F[\theta(x)] - F[\theta(-x)] = 2i Vp \frac{1}{\xi}.$$

Замечание. Интегралы

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\theta(x)| dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\operatorname{sgn} x| dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\sin x| dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\cos x| dx$$

расходятся, поэтому преобразования Фурье функций $\theta(x), \operatorname{sgn} x, \cos x, \sin x$ и некоторых других, в обычном смысле не существуют.

2. Формула суммирования Пуассона. В п. 4.7 была получена формула в $D'(R^1)$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2k\pi).$$

Учитывая то, что $F[\delta(\xi - k)] = e^{ik\xi}$ и подействовав левой, и правой частями этого равенства на произвольную $\varphi(x) \in \mathcal{L}$, получим

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} F[\delta(\xi - k)], \varphi(x) \right) &= 2\pi \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2k\pi), \varphi \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\delta(\xi - k), F[\varphi](\xi)) &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi[2k\pi] \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} F[\varphi](k) &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi[2k\pi]. \end{aligned}$$

Последнее равенство называется формулой суммирования Пуассона.

3. Преобразование Фурье функции $Vp \frac{1}{x}$. Возьмем преобразование Фурье от левых и правых частей равенств (4.73), (4.74). Получим

$$F[F[\theta(\xi)]] = \pi + iF\left[Vp \frac{1}{x}\right], \quad F[F[\theta(-\xi)]] = \pi - iF\left[Vp \frac{1}{x}\right].$$

Так как

$$F[f(-x)] = 2\pi F^{-1}[f(x)],$$

то получаем прямым вычислением

$$\begin{aligned} 2\pi F[F^{-1}[\theta(\xi)]] - 2\pi F[F^{-1}[\theta(-\xi)]] &= 2iF\left[Vp \frac{1}{x}\right] \Rightarrow \\ \Rightarrow 2\pi(\theta(\xi) - \theta(-\xi)) &= 2iF\left[Vp \frac{1}{x}\right] \Rightarrow F\left[Vp \frac{1}{x}\right] = \pi i \operatorname{sgn} \xi. \end{aligned}$$

4.15. Преобразование Фурье в пространстве обобщенных функций D' .

Преобразование Фурье основных функций. В силу финитности $\varphi(x) \in D(R^n)$, трансформанта

$$\psi(\xi) = F[\varphi] = \int e^{i(\xi, x)} \varphi(x) dx, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (4.75)$$

и все ее производные существуют. Поэтому, можно продолжить функцию $\psi(\zeta)$ в комплексную плоскость $\zeta = \xi + i\eta, \eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$. Имеем соответственно, для любой основной функции из комплексного пространства D

$$\psi(\xi + i\eta) = \psi(\zeta) = \int e^{i(\zeta, x)} \varphi(x) dx = F[\varphi](\zeta). \quad (4.76)$$

При этом, для любых мультииндексов α, β

$$\begin{aligned} F[D^\alpha \varphi](\zeta) &= (-i\zeta)^\alpha F[\varphi](\zeta), \quad \zeta^\alpha = \zeta_1^{\alpha_1} \zeta_2^{\alpha_2} \dots \zeta_n^{\alpha_n}, \\ D^\beta F[\varphi](\zeta) &= F[(ix)^\beta \varphi(x)](\zeta), \quad \zeta_k = \xi_k + i\eta_k. \end{aligned} \quad (4.77)$$

Так как функция $(ix)^\beta \varphi(x) \in D$, заключаем, что $F[\varphi](\zeta) \in C^\infty$, т. е. является аналитической по каждой из комплексных переменных ζ_k ($k = 1, 2, \dots, n$). Для функции одной переменной, носитель которой содержится в отрезке $[-a, a]$, преобразование Фурье

$$F[\varphi](\zeta) = \psi(\zeta) = \int_{-a}^a e^{i(\zeta, x)} \varphi(x) dx, \quad a > 0$$

является целой аналитической функцией [5, 7, 18].

Из первой формулы (4.77) получаем оценку $\forall k \in N$

$$|\zeta^k F[\varphi](\zeta)| = \left| \int_{-a}^a \varphi^{(k)}(x) e^{i(\zeta, x)} dx \right| \leq \int_{-a}^a |\varphi^{(k)}(x)| e^{-\eta x} dx \leq e^{a|\eta|} \int_{-a}^a |\varphi^{(k)}(x)| dx \leq C_k e^{a|\eta|}, \quad C_k > 0.$$

Итак, преобразование Фурье каждой комплекснозначной функции $\varphi(x) \in D(G)$, $G = (-a, a)$ ставит в соответствие целую аналитическую функцию $\psi(\zeta)$, удовлетворяющую при каждом $k = 0, 1, 2, \dots$ неравенствам

$$|\zeta^k \psi(\zeta)| \leq C_k e^{a|\eta|}, \quad \zeta = \xi + i\eta. \quad (4.78)$$

Справедливо и обратное утверждение: всякая целая функция $\psi(\zeta)$, подчиняющаяся неравенству (4.78) при каждом $k \in N$ есть преобразование Фурье бесконечно дифференцируемой функции $\varphi(x)$, обращающейся в нуль при $|x| \geq a$. Множество функций $\psi(\zeta)$ обозначим через $Z(a)$.

Таким образом, между элементами комплексного основного пространства $D(G)$, ($G = (-a, a)$) и множества аналитических функций $Z(a)$ существует взаимно однозначное соответствие, определяемое формулами

$$\psi(\zeta) = \int_{-a}^a e^{i\xi x} \varphi(x) dx = F[\varphi](\zeta), \quad \varphi(x) = 0, \quad |x| \geq a,$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-i\xi x} \psi(\zeta) d\zeta = F^{-1}[\psi](x), \quad |\zeta^k \psi(\zeta)| \leq C_k e^{a|\eta|}.$$

Объединение $\bigcup_a Z(a)$ образует основное комплексное пространство Z , в котором введены естественные линейные операции, согласованные с линейными операциями в D и сходимость $(\psi_\nu(\zeta) = F[\varphi_\nu] \rightarrow \psi(\zeta) = F[\varphi] \in Z$, если $\varphi_\nu \rightarrow \varphi \in D$, при $\nu \rightarrow \infty$). Между пространствами D и Z имеет место взаимно однозначное соответствие

$$F[D] = Z, \quad F^{-1}[Z] = D.$$

Пусть $f(x) \in D'(R^1)$ — обобщенная функция. Преобразование Фурье $F[f(x)]$ есть обобщенная функция $F(\zeta) \in Z'$, определенная на пространстве Z отображением

$$F[f(x)](\zeta) = \int e^{i(\zeta \cdot x)} f(x) dx, \quad \zeta = \xi + i\eta.$$

Свойства преобразования Фурье обобщенных функций из $D'(R^n)$. Основные свойства преобразования Фурье сохраняются. Перечислим их:

$$F[D^\alpha f(x)] = (-i\zeta)^\alpha F[f](\zeta), \quad \zeta = \xi + i\eta,$$

$$D^\beta F[f] = F[(ix)^\beta f(x)],$$

$$F^{-1}[F[f]] = f(x), \quad F[F[f(x)]] = 2\pi f(-x).$$

Для обобщенной функции с компактным носителем преобразование Фурье можно определять по формуле (4.71).

Пример 1. Функции В. Гейзенберга определяются следующими равенствами [8, 10, 20]

$$\delta_+(x) = \frac{1}{2} \delta(x) - \frac{1}{2\pi i} Vp \frac{1}{x},$$

$$\delta_-(x) = \frac{1}{2} \delta(x) + \frac{1}{2\pi i} Vp \frac{1}{x},$$

или, с учетом формул Сохоцкого (4.9)

$$\delta_+(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{i}{x+i0}, \quad \delta_-(x) = -\frac{1}{2\pi} \frac{i}{x-i0}.$$

Ранее мы уже определяли $F[\theta(x)]$ и $F[\theta(-x)]$ как преобразования Фурье от обобщенных функций медленного роста $\theta(x)$ и $\theta(-x)$. Выразим их через функции В. Гейзенберга. Имеем

$$F[\theta(x)] = \pi \delta(\xi) + iVp \frac{1}{\xi} = \frac{i}{\xi + i0} = 2\pi \delta_+(\xi),$$

$$F[\theta(-x)] = \pi \delta(\xi) - iVp \frac{1}{\xi} = -\frac{i}{\xi - i0} = 2\pi \delta_-(\xi).$$

Можно определить преобразование Фурье обобщенной функции $\theta(x)$ на пространстве D следующим образом

$$F[\theta'(x)] = F[\delta(x)] = -i\zeta F[\theta(x)] = 1.$$

Отсюда

$$F[\theta(x)] = \frac{i}{\zeta} = \frac{i}{\xi + i\eta}.$$

При $\eta \rightarrow +0$, получим прежний результат (сужение на L).

Пример 2. Введем функции

$$x_+ = x\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \geq 0, \end{cases}$$

$$x_- = -x\theta(-x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

Имеют место соотношения

$$x = x_+ - x_-, |x| = x_+ + x_- = x \operatorname{sign} x$$

$$x'_+ = \theta(x), \quad x'_- = -\theta(-x), \quad (x'_+)^p = px_+^{p-1}.$$

Отсюда

$$F[x'_+] = -i\zeta F[x_+] = F[\theta(x)] = \frac{i}{\zeta} \Rightarrow F[x_+] = -\frac{1}{\zeta^2}.$$

Продолжая x_+ (как обобщенную функцию медленного роста) на пространство D , запишем

$$F[x_+] = -\lim_{\eta \rightarrow +0} \frac{1}{\zeta^2} = -\lim_{\eta \rightarrow +0} \frac{1}{(\xi + i\eta)^2} = -\lim_{\eta \rightarrow +0} \frac{\xi^2 - \eta^2}{(\xi^2 + \eta^2)^2} + \lim_{\eta \rightarrow +0} \frac{2i\xi\eta}{(\xi^2 + \eta^2)^2}.$$

Имеем

$$\lim_{\eta \rightarrow +0} \frac{\xi^2 - \eta^2}{(\xi^2 + \eta^2)^2} = Vp \frac{1}{\xi^2}, \quad \lim_{\eta \rightarrow +0} \frac{2}{\pi} \frac{\xi\eta}{(\xi^2 + \eta^2)^2} = -\delta'(\xi).$$

Последняя формула нуждается в обосновании. Рассмотрим предел

$$\lim_{a \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + x^2}. \tag{4.79}$$

Так как при $x_0 > 0$

$$\left| \int_{-x_0}^{x_0} \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + x^2} dx \right| = \frac{2}{\pi} \left| \operatorname{arctg} \frac{x_0}{a} \right| \leq 1,$$

$$\lim_{a \rightarrow +0} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + x^2} dx = \begin{cases} 0, & 0 \in (x_1, x_2) \\ 1, & 0 \in (x_1, x_2), \end{cases}$$

то согласно теореме п. 4.8 последовательность (4.79) дельтообразная, т. е.

$$\lim_{a \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + x^2} = \delta(x).$$

Дифференцируя это равенство, находим

$$\lim_{a \rightarrow +0} \frac{2ax}{(a^2 + x^2)^2} = -\pi \delta'(x).$$

Таким образом, возвращаясь к нашему примеру, получим

$$F[x_+] = -i\pi \delta'(\xi) - Vp \frac{1}{\xi^2} = -\frac{1}{(\xi + i0)^2}.$$

Аналогичными рассуждениями находим

$$F[x_-] = -i\pi \delta'(\xi) - Vp \frac{1}{\xi^2} = -\frac{1}{(\xi - i0)^2}.$$

Далее можем записать

$$F[x] = F[x_+] - F[x_-] = -2i\pi \delta'(\xi),$$

$$F[|x|] = F[x_+] + F[x_-] = -2Vp \frac{1}{\xi^2}.$$

Пример 3. Вычислим преобразование Фурье от обобщенной функции $Vp \frac{1}{x}$. Имеем

$$F^{-1}[f] = \frac{1}{2\pi} F[f(-x)] \Rightarrow F[F[\theta(x)]] = F[2\pi F^{-1}[\theta(-x)]] = 2\pi \theta(-x).$$

С другой стороны

$$F[F[\theta(x)]] = F\left[\pi \delta(\xi) + iVp \frac{1}{\xi}\right] = \pi + iF\left[Vp \frac{1}{\xi}\right].$$

Сравнивая оба эти равенства, находим

$$F\left[Vp \frac{1}{x}\right] = i\pi - 2i\pi \theta(-\xi) = i\pi \operatorname{sign} \xi.$$

Пример 4. Найдем теперь преобразование Фурье обобщенной функции $\operatorname{sign} x$. Имеем

$$F[\operatorname{sign} x] = F[1 - 2\theta(-x)] = 2\pi \delta(\xi) - 2\left(\pi \delta(\xi) - iVp \frac{1}{\xi}\right) = 2iVp \frac{1}{\xi}.$$

Пример 5. Преобразование Фурье функции $f(x) = e^{-a^2 x^2} \in \mathcal{L}$. Имеем по определению

$$F[e^{-a^2 x^2}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x - a^2 x^2} dx = \psi(\xi).$$

Дифференцируя по ξ , получаем

$$\psi'(\xi) = i \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} e^{-a^2 x^2} x dx = -\frac{i}{2a^2} \left\{ e^{i\xi x - a^2 x^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} i\xi e^{i\xi x - a^2 x^2} dx \right\}.$$

Отсюда приходим к дифференциальному уравнению относительно трансформанты $\psi(\xi)$

$$\psi'(\xi) + \frac{\xi}{2a^2}\psi(\xi) = 0 \Rightarrow \psi(\xi) = Ce^{-\frac{\xi^2}{4a^2}},$$

где константа C определяется из соотношения

$$C = \psi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{|a|}.$$

Таким образом

$$F[e^{-a^2x^2}] = \frac{\sqrt{\pi}}{|a|} e^{-\frac{\xi^2}{4a^2}}.$$

4.16. Пространства распределений $L^2(R^n), L^1(R^n), L^p(R^n)$.

Пространство $L^2(R^n)$. Пусть $\{\varphi_k\} \subset C_0^\infty$ — последовательность Коши. Тогда, какова бы ни была пробная (основная) функция $\psi(x)$, числовая последовательность $\{(\psi, \varphi_k)\}$ сходится. В самом деле

$$|(\psi, \varphi_k) - (\psi, \varphi_m)| = |(\psi, \varphi_k - \varphi_m)| \leq \|\psi\| \|\varphi_k - \varphi_m\| \rightarrow 0, \quad k, m \rightarrow \infty.$$

Следовательно, $\{(\psi, \varphi_k)\}$ фундаментальна в C (или R) и в силу принципа сходимости Коши, она сходится. Ее предел определяет распределение f по формуле

$$\langle f, \psi \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} (\overline{\psi}, \varphi_k), \quad \forall \psi \in C_0^\infty,$$

где $\overline{\psi}$ — функция, комплексно сопряженная с $\psi(x)$.

Две фундаментальные последовательности $\{\varphi_k\}$ и $\{\varphi_k^*\}$ определяют одно и то же распределение тогда и только тогда, когда они эквивалентны, т. е. если $\|\varphi_k - \varphi_k^*\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Замечание. Здесь рассматривается комплексное линейное пространство C_0^∞ с введенными в нем скалярным произведением и нормой (L^2 -нормой).

$$(\varphi, \psi) = \int_{R^n} \overline{\varphi(x)} \psi(x) dx, \quad \|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)}. \quad (4.80)$$

Так как (неравенство Шварца)

$$|(\varphi, \psi)| \leq \|\varphi\| \|\psi\|,$$

то скалярное произведение (4.80) имеет смысл для любых интегрируемых с квадратом непрерывных (измеримых) функций φ и ψ .

Пространство C_0^∞ с введенным в нем скалярным произведением (4.80) и соответствующей L^2 -нормой является предгильбертовым (евклидовым) пространством.

Пусть $\{\varphi_k\}, \{\psi_k\} \subset C_0^\infty$ — последовательности Коши (фундаментальные последовательности), определяющие распределения f и g соответственно, т. е.

$$\langle f, \varphi \rangle = \lim (\bar{\varphi}, \varphi_k), \quad \langle g, \varphi \rangle = \lim (\bar{\varphi}, \psi_k) \quad (k \rightarrow \infty), \quad \forall \varphi \in C_0^\infty.$$

Под пространством $L^2(R^n)$ понимают множество всех распределений, определяемых последовательностями Коши из C_0^∞ со скалярным произведением.

$$\langle f, g \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} (\varphi_k, \psi_k) = \int_{R^n} \bar{f}(x) g(x) dx.$$

Этот предел всегда существует и обладает всеми свойствами скалярного произведения. Соответственно, определяется L^2 -норма

$$\|f\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\varphi_k\|. \quad (4.81)$$

Таким образом $L^2(R^n)$ — пространство распределений со скалярным произведением и элементы этого пространства являются распределениями медленного роста [31]. Если $f \in L^2$ и φ — пробная функция, то

$$\langle f, \varphi \rangle = (\bar{f}, \varphi).$$

Значит, если $f_j \rightarrow f$ по L^2 -норме, то $f_j \rightarrow f$ и в смысле сходимости распределений. В самом деле

$$|\langle f, \varphi \rangle - \langle f_j, \varphi \rangle| = |\langle f - f_j, \varphi \rangle| = |(\bar{f} - \bar{f}_j, \varphi)| \leq \|f - f_j\| \|\varphi\| \rightarrow 0 \quad (j \rightarrow \infty).$$

Имеют место следующие предложения [25, 31]. Теорема 1 (О полноте). Пространство $L^2 = L^2(R^n)$ полно, т. е. гильбертово.

Фундаментальная последовательность $\{\varphi_k\} \subset C_0^\infty$ имеет предел в L^2 -норме: $\lim \varphi_k = f \in L^2(R^n)$. Теорема утверждает, что и любая последовательность Коши $\{f_k\} \subset L^2$ (не обязательно из C_0^∞) также имеет предел в L^2 .

Теорема 2. Любая квадратично интегрируемая на R^n непрерывная (измеримая) функция принадлежит $L^2(R^n)$, т. е. является распределением.

Замечание. Если f определяется последовательностью Коши $\{\varphi_k\} \subset C_0^\infty$, т. е.

$$\langle f, \varphi \rangle = \lim (\bar{\varphi}, \varphi_k),$$

то распределение $f - \varphi_m$ для любого m определяется последовательностью Коши

$$\{\varphi_k - \varphi_m\} \quad (k = 1, 2, \dots), \quad \text{т. е. } \langle f - \varphi_m, \varphi \rangle = (\bar{\varphi}, \varphi_k - \varphi_m).$$

Тогда, согласно (4.81)

$$\|f - \varphi_m\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\varphi_k - \varphi_m\| = 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty.$$

Следовательно $\lim \varphi_m = f$ в L^2 .

Если последовательность непрерывных функций $\{\varphi_k\}$ сходится в L^2 к непрерывной функции f , то $\{\varphi_k\}$ — фундаментальна, так как

$$\|\varphi_k - \varphi_m\| \leq \|\varphi_k - f\| + \|f - \varphi_m\| \rightarrow 0 \quad (k, m \rightarrow \infty).$$

Класс непрерывных квадратично суммируемых функций входит в L^2 , имеем

$$C_0^\infty \subset C^2 \subset L^2,$$

причем оба вложения плотны, потому что любое распределение f из L^2 можно сколь угодно точно аппроксимировать (в L^2) пробными функциями из C_0^∞ .

Имеет место теорема 3. Для распределения f из $L^2(R^n)$ неопределенный интеграл

$$\int_x f(x) dx$$

является непрерывной функцией. Если последовательность $\{f_n\} \subset L^2$ сходится в L^2 к распределению $f \in L^2$, то

$$\int_x f_n(x) dx \rightarrow \int_x f(x) dx \quad (n \rightarrow \infty).$$

Поскольку каждый элемент $f \in L^2(R^n)$ представляет собой обобщенную функцию медленного роста (т. е. $f \in \mathcal{L}'$), то для него существует преобразование Фурье $F[f]$, которое также является обобщенной функцией медленного роста. Оказывается, что $F[f] \in L^2$, и отображение $f \rightarrow F[f]$ есть изоморфизм.

Пространства распределений L^p ($1 \leq p < \infty$). Линейное пространство, состоящее из функций $\varphi(x) \in C_0^\infty$ и наделенное нормой

$$\|\varphi\|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

не является полным нормированным пространством. Его можно пополнить добавлением определенных распределений.

Пусть $\{\varphi_j\} \subset C_0^\infty$ — последовательность Коши, $\psi(x) \in C_0^\infty(R^1)$, тогда числовая последовательность $\|\varphi_j\|_p$ фундаментальна и, значит, имеет предел. Неравенство Гельдера дает

$$|(\varphi_j, \psi)| \leq \|\varphi_j\|_p \|\psi\|_q, \quad p^{-1} + q^{-1} = 1,$$

т. е. существует

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (\varphi_j, \psi) = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_j(x) \psi(x) dx, \quad \forall \psi(x) \in C_0^\infty.$$

Этот предел порождает распределение f . Таким образом

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (\varphi_j, \psi) = \langle f, \psi \rangle, \quad \forall \psi \in C_0^\infty$$

или

$$\varphi_j \rightarrow f, \|f\|_p = \lim_{j \rightarrow \infty} \|\varphi_j\|_p.$$

Множество всех таких распределений составляет пространство $L^p(R^1)$. Запишем

$$L^p(R^1) = \left\{ f = \lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_j : \{\varphi_j\} \text{ — последовательность Коши по } L^p\text{-норме} \right\}.$$

Имеет место теорема 4. Пространство $L^p(R^1)$ с нормой $\|\cdot\|_p$ — банахово, а C_0^∞ плотно вложено в $L^p(R^1)$. Множество всех ограниченных линейных функционалов на банаховом пространстве L^p образует сопряженное (двойственное) пространство, изоморфное банахову пространству L^q .

При $p=1$ пространство $L^1(R^n)$ определяется следующим образом. Пусть $\{\varphi_j(x)\}$ — последовательность Коши пробных функций из C_0^∞ по L^1 -норме, т. е.

$$\int_{R^n} |\varphi_j(x) - \varphi_k(x)| dx \rightarrow 0 \quad (j, k \rightarrow \infty).$$

Тогда эта последовательность определяет распределение f посредством равенства

$$\langle f, \psi \rangle = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{R^n} \varphi_j(x) \psi(x) dx, \quad \forall \psi \in C_0^\infty(R^n).$$

Множество всех таких распределений f составляет пространство $L^1(R^n)$.

Поскольку элементы пространства L^1 являются распределениями умеренного роста, они имеют преобразования Фурье. Согласно лемме Римана-Лебега, если $f \in L^1(R^n)$, то преобразование Фурье $F[f](\xi)$ является непрерывной функцией, стремящейся к нулю при $|\xi| \rightarrow \infty$.

Первоначальный вариант этой леммы выглядит так: если $f(x)$ измерима на $(0, 2\pi)$ и $\int_0^{2\pi} |f(x)| dx < \infty$, то коэффициенты Фурье

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \pm\infty).$$

Замечание. Если f —распределение на R^n , принадлежит $L^1(\Omega)$ при любой ограниченной области $\Omega \subset R^n$, то говорят, что f принадлежит $L^1(R^n)$ локально. Распределение

ние, принадлежащее локально L^2 , принадлежит локально и L^1 . Действительно, неравенство Шварца дает

$$\int_{\Omega} |f| dx \leq \int_{\Omega} |f|^2 dx \cdot \int_{\Omega} dx = V \int_{\Omega} |f|^2 dx,$$

где V — объем области Ω .

Преобразование Фурье некоторых обобщенных функций. Ниже приведены формулы, заимствованные из различных источников [6, 18, 20, 38].

1. $x, \xi \in R^1$.

$$F[f](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} f(x) dx,$$

$$F[1(x)] = F[\theta(x) + \theta(-x)] = 2\pi\delta(\xi),$$

$$F[\delta(x)] = 1, \quad F[\delta(x-a)] = e^{ia\xi}, \quad F[\delta(kx)] = \frac{1}{k},$$

$$F[\delta^{(n)}(x)] = (-i\xi)^n,$$

$$F[\theta(x)] = \frac{i}{\xi + i0} = \pi\delta(\xi) + iVp \frac{1}{\xi} = 2\pi\delta_+(\xi),$$

$$F[\theta(-x)] = -\frac{i}{\xi - i0} = \pi\delta(\xi) - iVp \frac{1}{\xi} = 2\pi\delta_-(\xi),$$

$$F[\theta(a - |x|)] = \frac{2 \sin a \xi}{\xi}, \quad a > 0,$$

$$F[x_+] = -\frac{1}{(\xi + i0)^2} = -Vp \frac{1}{\xi^2} - i\pi\delta'(\xi) \quad (x_+ = x\theta(x)),$$

$$F[x_-] = -\frac{1}{(\xi - i0)^2} = -Vp \frac{1}{\xi^2} + i\pi\delta'(\xi) \quad (x_- = -x\theta(-x)),$$

$$F[x^n] = (-i)^n 2\pi\delta^{(n)}(\xi),$$

$$F[|x|] = -2Vp \frac{1}{\xi^2}, \quad F[Vp \frac{1}{x}] = i\pi \operatorname{sign} \xi,$$

$$F[\operatorname{sign} x] = 2iVp \frac{1}{\xi}, \quad F[Vp \frac{1}{x^2}] = -\pi |\xi|,$$

$$F[Vp \frac{1}{x^n}] = \frac{i^n}{(n-1)!} \pi \xi^{n-1} \operatorname{sign} \xi,$$

$$F\left[P \frac{1}{|x|}\right] = -2C - 2\ln|\xi| \quad \left(C = \int_0^1 \frac{1-\cos\alpha}{\alpha} d\alpha - \int_1^\infty \frac{\cos\alpha}{\alpha} d\alpha = 0,57721566490\dots - \right)$$

— постоянная Эйлера),

$$F[x_+]^{n+1} = i^n \frac{n!}{\xi^{n+1}} + (-i)^n \pi \delta^{(n)}(\xi), \quad F[|x|^\lambda] = \frac{C(\lambda)}{|\xi|^{\lambda+1}} \quad \left(C(\lambda) = -2 \sin \frac{\lambda\pi}{2} \Gamma(\lambda+1), \lambda \neq -1, -3, \dots\right),$$

$$F[x_-^n] = (-i)^{n+1} \frac{n!}{\xi^{n+1}} + i^n \pi \delta^{(n)}(\xi), \quad F[|x|^\lambda \operatorname{sign} x] = \frac{iD(\lambda)}{|\xi|^{\lambda+1}} \operatorname{sign} \xi \quad \left(D(\lambda) = 2 \cos \frac{\lambda\pi}{2} \Gamma(\lambda+1), \lambda \neq -2, -4, \dots\right),$$

$$F[\sin ax] = i\pi [\delta(\xi-a) - \delta(\xi+a)],$$

$$F[\cos ax] = \pi [\delta(\xi-a) + \delta(\xi+a)],$$

$$F[e^{-a|x|}] = \frac{2a}{a^2 + \xi^2},$$

$$F\left[\frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + x^2}\right] = e^{-a|\xi|}, \quad a > 0,$$

$$F\left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}\right] = 2K_0(a\xi), \quad a > 0 \quad (K_0(x) — \text{функция Макдональда нулевого порядка}),$$

$$F[e^{-a^2 x^2}] = \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{-\frac{\xi^2}{4a^2}}, \quad a > 0.$$

$$2. \quad x = (x_1, x_2) \in R^2, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2) \in R^2.$$

$$F[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2,$$

$$F\left[\ln \frac{1}{r}\right] = \frac{2\pi}{|\xi|^2} \quad \left(r^2 = x_1^2 + x_2^2, \quad |\xi|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2\right),$$

$$F\left[Vp \frac{1}{r^2}\right] = 4\pi \ln \frac{1}{|\xi|} - 2\pi C_0 \quad \left(C_0 = \int_0^1 \frac{1-J_0(\alpha)}{\alpha} d\alpha - \int_1^\infty \frac{J_0(\alpha)}{\alpha} d\alpha\right),$$

$$F\left[\frac{x_1}{x_1^2 + k^2 x_2^2}\right] = 2\pi i \frac{k\xi_1}{k^2 \xi_1^2 + \xi_2^2}, \quad k > 0,$$

$$F\left[\frac{x_1}{r^2}\right] = 2\pi i \frac{\xi_1}{|\xi|^2}, \quad F\left[\frac{x_1 x_2^2}{r^4}\right] = \pi i \frac{\xi_1 (\xi_1^2 - \xi_2^2)}{|\xi|^4},$$

$$F\left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + k^2}}\right] = \frac{2\pi}{|\xi|} e^{-k|\xi|}, \quad k > 0,$$

$$F\left[\frac{\theta(a-r)}{\sqrt{a^2-r^2}}\right] = \frac{2\pi}{|\xi|} \sin a|\xi|, \quad a > 0,$$

$$F\left[K_0(kr)\right] = \frac{2\pi}{|\xi|^2 + k^2}, \quad \operatorname{Re} k > 0.$$

3. $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in R^3$.

$$F\left[\delta(|x|-a)\right] = 4\pi \frac{a}{|\xi|} \sin a|\xi|,$$

$$F\left[\frac{1}{|x|}\right] = \frac{4\pi}{|\xi|^2}, \quad F\left[\frac{x_i}{|x|}\right] = 8\pi i \frac{\xi_i}{|\xi|^4},$$

$$F\left[\frac{1}{|x|^3}\right] = \frac{2\pi^2}{|\xi|}, \quad F\left[e^{-a^2 r^2}\right] = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{a}\right)^3 e^{-\frac{|\xi|^2}{4a^2}}, \quad a > 0.$$

4. Для обобщенных функций n переменных.

$$F\left[1(x_1, \dots, x_n)\right] = (2\pi)^n \delta(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n),$$

$$F\left[\delta(x_1, x_2, \dots, x_n)\right] = 1,$$

$$F\left[\delta(x_1 - a_1, x_2 - a_2, \dots, x_n - a_n)\right] = e^{i(a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \dots + a_n\xi_n)},$$

$$F\left[\delta(k_1 x_1, k_2 x_2, \dots, k_n x_n)\right] = \frac{1}{|k_1 k_2 \dots k_n|},$$

$$F\left[\frac{\partial}{\partial x_j} \delta(x_1, x_2, \dots, x_n)\right] = -i\xi_j \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

$$F\left[x_j\right] = -2\pi i \frac{\partial}{\partial \xi_j} \delta(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

4.17. Преобразование Лапласа обобщенных функций

Классическое преобразование Лапласа [16, 17, 19]. Преобразование Лапласа комплекснозначной функции действительного переменного $f(x)$ задается соотношением

$$L\left[f(x)\right] = \int_0^\infty f(x) e^{-px} dx = L(p) = \psi(p), \quad (4.82)$$

где $p = \sigma + i\eta$ — комплексный параметр преобразования Лапласа. Для существования интеграла в (4.82) достаточно удовлетворения следующих условий:

а) $f(x) = 0$ при $x < 0$;

б) $f(x)$ кусочно дифференцируема;

в) $|f(x)| \leq M e^{\alpha x}$, $M > 0$, ($\alpha \geq 0$ — показатель роста функции $f(x)$).

Функция $f(x)$ в этом случае называется оригиналом, а $L(p)$ — изображением по Лапласу функции $f(x)$. Очевидно, $L(p)$ — функция аналитическая в правой полуплоскости $\operatorname{Re} p > a$.

Обратное преобразование Лапласа $L^{-1}[\psi(p)]$ определяется так:

$$L^{-1}[L[f(x)]] = f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} L(p) e^{px} dp, \quad \gamma > 0. \quad (4.83)$$

В общем случае аналитическая в правой полуплоскости функция $L(p)$ и все ее производные имеют полиномиальный рост на бесконечности. Напомним некоторые простейшие свойства преобразования Лапласа.

Преобразование производной от оригинала. Если $f(x) \in C^1[0, \infty)$, то

$$L[f'(x)] = pL(p) - f(0), \quad (4.84)$$

где $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Аналогично, если $f(x) \in C^2[0, \infty)$, то

$$L[f''(x)] = \int_0^\infty f''(x) e^{-px} dx = f'(0) + pL[f'(x)] = p^2 L(p) - pf(0) + f'(0),$$

где $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$.

Дифференцирование изображения

$$L^{(n)}(p) = \int_0^\infty (-x)^n f(x) e^{-px} dx = F\left[(-x)^n f(x)\right]. \quad (4.85)$$

Преобразование Лапласа обобщенных функций. Основные свойства [5, 6, 8, 20]. Пусть $f(x)$ — обобщенная функция, $\operatorname{supp} f(x) \subset [0, \infty)$, причем $f(x)e^{-px} \in \mathcal{L}'$. Тогда определение (4.82) можно обобщить и записать

$$L[f(x)] = (f(x), e^{-px}). \quad (4.86)$$

Перечислим основные свойства преобразования (4.86).

Теорема подобия. Так как при преобразовании подобия

$$(f(\lambda x), \varphi(x)) = \frac{1}{\lambda} \left(f(x), \varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right) \right),$$

то имеем согласно определению (4.86)

$$L[f(\lambda x)] = (f(\lambda x), e^{-px}) = \frac{1}{\lambda} \left(f(x), e^{-\frac{p}{\lambda}x} \right) = \frac{1}{\lambda} L\left(\frac{p}{\lambda}\right), \quad \lambda > 0. \quad (4.87)$$

Теорема запаздывания. При сдвиге аргумента обобщенной функции имеем

$$(f(x-x_0), \varphi(x)) = (f(x), \varphi(x+x_0)).$$

Стало быть,

$$L[f(x-x_0)] = (f(x-x_0), e^{-px}) = (f(x), e^{-p(x+x_0)}) = e^{-px_0} L[f(x)] = e^{-px_0} L(p). \quad (4.88)$$

Теорема дифференцирования.

$$\begin{aligned} L[f^{(n)}(x)] &= (f^{(n)}(x), e^{-px}) = (-1)^n \left(f(x), \frac{d^n}{dx^n} e^{-px} \right) = \\ &= p^n (f, e^{-px}) = p^n L[f(x)] = p^n L(p). \end{aligned} \quad (4.89)$$

Здесь производные понимаются в обобщенном смысле.

Теорема смещения.

$$L[f(x)e^{\lambda x}] = (f(x)e^{\lambda x}, e^{-px}) = (f(x), e^{-(p-\lambda)x}) = L(p-\lambda). \quad (4.90)$$

Преобразование Лапласа свертки обобщенных функций. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — обобщенные функции с носителями в $[0, \infty)$ и пусть изображения $L[f(x)], L[g(x)]$ существуют соответственно при $\operatorname{Re} p \geq a_1$ и $\operatorname{Re} p \geq a_2$. Тогда можно записать при $\operatorname{Re} p \geq \max(a_1, a_2)$

$$L[f(x)] = (f(x), e^{-px}), \quad L[g(x)] = (g(x), e^{-px}).$$

Согласно (4.86) и определению свертки, находим

$$\begin{aligned} L[f * g] &= (f(x) * g(x), e^{-px}) = (f(x) \cdot g(y), e^{-p(x+y)}) = \\ &= (f(x), (g(y), e^{-py}) e^{-px}) = (f(x), e^{-px})(g(y), e^{-py}) = L[f]L[g]. \end{aligned} \quad (4.91)$$

Таким образом, преобразование Лапласа свертки обобщенных функций равно произведению изображений этих функций.

Замечание. Формула (4.89) при $n=1$ отличается от формулы (4.84) для обычной производной, так как является более общей. Если учесть, что обобщенная производная $f' = \{f'\} + [f]_0 \delta(x)$ и подставить это в (4.89), то придем к (4.84) для преобразования Лапласа от обычной производной.

Рассмотрим примеры. Согласно формулам (4.87), (4.88), (4.89) находим:

$$1. \quad L[\delta(x)] = (\delta(x), e^{-px}) = e^0 = 1,$$

$$L[\delta(x-a)] = e^{-ap} L[\delta] = e^{-ap},$$

$$L[\delta(\lambda x)] = \frac{1}{\lambda} L[\delta(x)] = \frac{1}{\lambda},$$

$$L[\delta^{(n)}(x)] = p^n.$$

2. Использовав соотношение $\delta(x) = \theta'(x)$ в $D'(R')$ и формулы (4.85) и (4.90), находим

$$L[\delta(x)] = L[\theta'(x)] = pL[\theta(x)] \Rightarrow L[\theta(x)] = \frac{1}{p},$$

$$L[x_+] = L[x\theta(x)] = \frac{1}{p^2},$$

$$L[\theta(x)e^{\lambda x}] = (\theta(x)e^{\lambda x}, e^{-px}) = L(p - \lambda) = \frac{1}{p - \lambda}, \quad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \lambda.$$

3. Воспользовавшись соотношением (4.91), запишем

$$L[\theta(x)e^{\lambda x} * \theta(x)] = L[\theta(x)e^{\lambda x}]L[\theta(x)] = \frac{1}{p(p - \lambda)},$$

$$L[\theta(x)e^{\lambda x} * \theta(x)e^{\nu x}] = \frac{1}{(p - \lambda)(p - \nu)}, \quad \operatorname{Re} p > \max(\operatorname{Re} \lambda, \operatorname{Re} \nu),$$

$$L[f(x) * \delta(x)] = L[f(x)],$$

$$L[f(x) * \delta^{(n)}(x)] = p^n L[f(x)].$$

4. Найдем преобразование Лапласа от функции Бесселя $J_0(t)$. Имеем

$$L[\theta(t)J_0(t)] = (\theta(t)J_0(t), e^{-pt}) = \int_0^\infty J_0(t)e^{-pt}dt = L(p). \quad (4.92)$$

Так как $J_0(t) \leq 1$ при $t > 0$, то при $\sigma = \operatorname{Re} p > 0$ этот интеграл сходится. С учетом асимптотического равенства [14]

$$J_0(t) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$

можно сделать заключение, что интеграл сходится лишь условно (не суммируем) при $\sigma = 0$.

Привлекая разложение бесселевой функции в ряд

$$J_0(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m}$$

и подставляя его под интеграл в (4.92), получим

$$\begin{aligned} L(p) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2 2^{2m}} \int_0^\infty t^{2m} e^{-pt} dt = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (2m)!}{(m!)^2 2^{2m} p^{2m+1}} = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-m+1\right)}{m! p^{2m+1}} = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}. \end{aligned}$$

Итак,

$$L[\theta(t)J_0(t)] = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}, \quad \sigma = \operatorname{Re} p > 0.$$

Определение (4.86) может быть распространено и на обобщенные функции $f(x) \in D'(R^n)$. Пусть $f(x)$, $x \in R^n$ — обобщенная функция, причем $\operatorname{supp} f(x)$ содержится

в области $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$ и $f(x)e^{-(p,x)} \in \mathcal{L}'(R^n)$. Тогда преобразование Лапласа определяется соотношением

$$L[f(x)] = (f(x), e^{-(p,x)}), \quad (4.93)$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n, \quad p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in C^n.$$

Преобразования Лапласа некоторых обобщенных функций. Формулы заимствованы из различных источников [28, 37–39].

1. $n=1$.

$$L[\theta(x)] = \frac{1}{p}, \quad L[\theta(x-a)] = \frac{1}{p}e^{-ap} \quad (\operatorname{Re} p > 0), \quad L[\theta(x)e^{i\omega x}] = \frac{1}{p-i\omega},$$

$$L[\delta(x)] = 1, \quad L[\delta(x-a)] = e^{-ap}, \quad L[\delta(kx)] = \frac{1}{|k|}, \quad L[\delta^{(n)}(x)] = p^n,$$

$$L[x_+^n] = \frac{n!}{p^{n+1}} \quad (\operatorname{Re} p > 0), \quad L[(x-a)_+] = \frac{1}{p^2}e^{-ap},$$

$$L[\delta(a^2x^2 - b^2)] = \frac{1}{|ab|} \operatorname{ch} \frac{b}{a} p,$$

$$L[\delta(\sin x)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n\pi p},$$

$$L[\theta(x)\cos \omega x] = \frac{p}{p^2 + \omega^2}, \quad L[\theta(x)\sin \omega x] = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \quad (\operatorname{Re} p > 0),$$

$$L[\theta(x)\operatorname{ch} \omega x] = \frac{p}{p^2 - \omega^2}, \quad L[\theta(x)\operatorname{sh} \omega x] = \frac{\omega}{p^2 - \omega^2} \quad (\operatorname{Re} p > |\operatorname{Re} \omega|),$$

$$L[\theta(x)J_0(x)] = \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}} \quad (\operatorname{Re} p > 0),$$

$$L[\theta(x)\theta(x-a)\ln(x + \sqrt{x^2 - a^2})] = \frac{1}{p}K_0(ap) \quad (a > 0),$$

$$L\left[\frac{\theta(x)\theta(x-a)}{\sqrt{x^2 - a^2}}\right] = K_0(ap) \quad (a > 0),$$

$$L\left[\frac{\theta(x)\theta(x-a)}{\sqrt{(x^2 - a^2)^3}}\right] = -pK_0(ap) \quad (a > 0).$$

Здесь $K_0(x)$ — цилиндрическая функция Макдональда нулевого порядка.

2. $n > 1$.

$$L\left[\frac{1}{|x|}\right] = -\frac{4\pi}{\rho^2},$$

$$\begin{aligned}
 |x| &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad \rho_3 = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}, \\
 L[\delta(a - |x|)] &= \frac{4\pi a}{\rho_3} \operatorname{sh} a\rho_3, \\
 L\left[\frac{\cos k|x|}{|x|}\right] &= -\frac{4\pi}{\rho_3^2 + k^2} \quad (\operatorname{Im} k = 0), \\
 L\left[\frac{\delta(q - |x|)}{|x|}\right] &= -\frac{4\pi}{\rho_3^2 - q^2} \quad (\operatorname{Re} q > |\operatorname{Re} \rho_3|), \\
 L[\theta(x_1, x_2, \dots, x_n)] &= \frac{1}{p_1 p_2 \dots p_n}, \quad \operatorname{Re} p_j > 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n), \\
 L[\delta(x_1 - a_1, x_2 - a_2, \dots, x_n - a_n)] &= e^{-(a_1 p_1 + a_2 p_2 + \dots + a_n p_n)}, \\
 L[\delta(k_1 x_1, k_2 x_2, \dots, k_n x_n)] &= \frac{1}{|k_1 k_2 \dots k_n|}, \\
 L\left[\frac{e^{ik|x|}}{|x|}\right] &= -\frac{1}{\rho^2 + k^2} \quad (\operatorname{Im} k > |\operatorname{Re} \rho|),
 \end{aligned}$$

где

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}, \quad \rho = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2}.$$

4.18. Приложение техники обобщенных функций к решению уравнений

Уравнения в свертках [8, 16, 17, 19]. Свертку обобщенных функций можно интерпретировать как операцию умножения обобщенных функций, однако не всегда такая операция имеет смысл. Выделим подпространства в $D'(R^n)$, в которых операция умножения элементов друг на друга справедлива.

Определение. Линейное пространство A называется алгеброй, если в нем определена операция умножения двух элементов и при этом выполняются следующие условия:

- а) $x(yz) = (xy)z, \quad \forall x, y, z \in A;$
- б) $(\alpha x)(\beta y) = (\alpha\beta)(xy), \quad \forall x, y \in A \text{ и } \forall \alpha, \beta \in R;$
- в) $x(y+z) = xy + xz, \quad (y+z)x = yx + zx, \quad \forall x, y, z \in A.$

Алгебра называется коммутативной, если:

- г) $xy = yx, \quad \forall x, y \in A.$

Если существует элемент $e \in A$ такой, что:

- д) $ex = x, \quad xe = x, \quad \forall x \in A,$

то e называется единичным элементом, а A — алгеброй с единицей.

Например. Множество функций из $C[a, b]$ с естественной операцией умножения образует коммутативную алгебру с единицей ($x(t) \equiv 1$). Множество степеней квадратной матрицы n -го порядка образует коммутативную алгебру с единицей (единичная матрица n -го порядка). Множество квадратных матриц n -го порядка образует (некоммутативную) алгебру с единицей.

Если для элемента $x \in A$ существует элемент $x^{-1} \in A$, такой что:

$$\text{e)} \quad xx^{-1} = x^{-1}x = e,$$

то по определению x^{-1} называется обратным элементом по отношению к x . Обратный элемент существует не всегда, например в алгебре квадратных матриц порядка n -обратный элемент имеет смысл только для невырожденных матриц.

Если под алгебраической операцией понимать свертку двух обобщенных функций, то она обладает свойством коммутативности и ассоциативности, причем роль единицы играет здесь дельта-функция. Поэтому необходимо рассматривать подпространства пространства D' , в которых свертка обобщенных функций существует.

Определение. Подпространство $K' \subset D'$ образует (коммутативную) алгебру со сверткой, если выполняются следующие условия:

а) свертка двух или нескольких обобщенных функций из K' существует и принадлежит K' ;

б) $\delta(x) \in K'$ — единичный элемент.

Подпространство $A' \subset D'$ обобщенных функций с компактным носителем, подпространство $D'_+ \subset D'$ обобщенных функций с носителями, лежащими в первом квадранте $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$, образуют алгебру со сверткой (сверточную алгебру). Если обобщенная функция $f(x) \in K'$ обладает обратной $f^{-1}(x)$, то $f(x)*f^{-1}(x) = f^{-1}(x)*f(x) = \delta(x)$.

Пример 1. Обобщенные функции $\theta(x), \delta'(x) \in D'_+$.

Имеем

$$\theta(x)*\delta'(x) = \frac{d}{dx}(\theta(x)*\delta(x)) = \theta'(x) = \delta(x).$$

Следовательно,

$$\theta^{-1}(x) = \delta'(x).$$

Пример 2. Обобщенные функции $f(x) = \theta(x)e^x, (\delta'(x) - \delta(x)) \in D'_+(R^1)$.

Подсчитаем свертку

$$\begin{aligned} \theta(x)e^x * (\delta'(x) - \delta(x)) &= \frac{d}{dx}(\delta(x)*\theta(x)e^x) - (\theta(x)e^x*\delta(x)) = \\ &= \frac{d}{dx}(\theta(x)e^x) - \theta(x)e^x = \theta(x)e^x + \delta(x) - \theta(x)e^x = \delta(x). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$f^{-1}(x) = \delta'(x) - \delta(x).$$

Пример 3. Фундаментальное решение уравнения

$$y''(x) + \omega^2 y(x) = 0$$

есть обобщенная функция в D'_+

$$E_+(x) = \theta(x) \frac{\sin \omega x}{\omega}, \quad \omega > 0.$$

Имеем

$$\begin{aligned} (\delta''(x) + \omega^2 \delta(x)) * E_+(x) &= \delta''(x) * E_+(x) + \omega^2 \delta(x) * E_+(x) = \\ &= \frac{d^2}{dx^2} (\delta(x) * E_+(x)) + \omega^2 E_+(x) = E_+''(x) + \omega^2 E_+(x) = \delta(x). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$E_+^{-1}(x) = \delta''(x) + \omega^2 \delta(x) \in D'_+.$$

Пример 4. Обобщенные функции $\theta(x_1, x_2)$, $\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \delta(x_1, x_2) \in D'_+(R^2)$.

Имеем

$$\begin{aligned} \theta(x_1, x_2) * \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \delta(x_1, x_2) &= \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} (\theta(x_1, x_2) * \delta(x_1, x_2)) = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \theta(x_1, x_2) = \delta(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\theta^{-1}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \delta(x_1, x_2) = \delta'(x_1) \cdot \delta'(x_2).$$

Имеет место предложение. Пусть $f(x), g(x) \in D'_+$ и существуют обратные функции $f^{-1}(x), g^{-1}(x)$. Тогда свертка $f(x) * g(x) \in D'_+$ имеет обратную функцию, определяемую формулой

$$(f(x) * g(x))^{-1} = f^{-1}(x) * g^{-1}(x). \quad (4.94)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} (f(x) * g(x) * f^{-1}(x) * g^{-1}(x)) &= (f * f^{-1}) * (g * g^{-1}) = \\ &= \delta(x) * \delta(x) = \delta(x). \end{aligned}$$

Пусть $K' \subset D'$ — алгебра со сверткой; $a(x), b(x) \in K'$, $x \in R^n$. Уравнение вида

$$a(x) * y(x) = b(x), \quad (4.95)$$

где $a(x), b(x)$ — известные обобщенные функции, y — искомая обобщенная функция, называется уравнением в свертках.

Имеет место теорема. Для однозначной разрешимости уравнения в свертках (4.95) при любой правой части $b(x) \in K'$ необходимо и достаточно существования обратного элемента $a^{-1}(x)$.

Доказательство необходимости. Положим $b(x) = \delta(x) \in K'$ и будем считать, что при этой правой части уравнение (4.95) имеет хотя бы одно решение. Тогда

$$y(x) = a^{-1}(x),$$

т. е. обратный элемент существует.

Доказательство достаточности. Пусть существует обратная обобщенная функция $a^{-1}(x)$, такая что

$$a(x) * a^{-1}(x) = a^{-1}(x) * a(x) = \delta(x).$$

Тогда, умножив уравнение (4.95) слева на $a^{-1}(x)$, получим

$$\begin{aligned} a^{-1}(x) * (a(x) * y(x)) &= a^{-1}(x) * b(x) \Rightarrow (a^{-1}(x) * a(x)) * y(x) = a^{-1}(x) * b(x) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \delta(x) * y(x) = a^{-1}(x) * b(x) \Rightarrow y(x) = a^{-1}(x) * b(x). \end{aligned}$$

Следовательно, решение уравнения (4.95) существует в алгебре K' и дается формулой

$$y(x) = a^{-1}(x) * b(x). \quad (4.96)$$

Для доказательства единственности решения предположим, что существуют два решения уравнения (4.95): $y_1(x) \in K'$ и $y_2(x) \in K'$. Тогда

$$a(x) * y_1(x) = b(x), \quad a(x) * y_2(x) = b(x) \Rightarrow a(x) * (y_1(x) - y_2(x)) = 0,$$

и так как $a^{-1}(x) \in K'$ существует, получаем

$$y_1(x) - y_2(x) = a^{-1}(x) * 0 = 0.$$

Элемент $a^{-1}(x)$, который является единственным решением уравнения в свертках

$$a(x) * y(x) = \delta(x),$$

называется фундаментальным (элементарным) решением уравнения (4.95).

Пример. Рассмотрим уравнение в свертках

$$P\left(\frac{d}{dx}\right)\delta(x) * y(x) = \delta(x), \quad (4.97)$$

где $P(d/dx)$ — линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами

$$P\left(\frac{d}{dx}\right) = \frac{d^n}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_n.$$

Имеем

$$P\left(\frac{d}{dx}\right)\delta(x) * y(x) = \delta(x) * P\left(\frac{d}{dx}\right)y(x) = P\left(\frac{d}{dx}\right)y(x) = \delta(x).$$

Следовательно, $y(x) = E_+(x) = Z(x)\theta(x)$, где $Z(x)$ — решение соответствующей задачи Коши (см. п. 4.7) — фундаментальное решение оператора $P(d/dx)$. Это решение принадлежит алгебре D'_+ .

Пусть, например,

$$P\left(\frac{d}{dx}\right) = \frac{d^2}{dx^2} + \omega^2.$$

Тогда

$$Z(x) = \frac{\sin \omega x}{\omega}, \quad E_+(x) = \theta(x) \frac{\sin \omega x}{\omega} \in D'_+, \quad \omega > 0$$

и

$$\left[\left(\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2 \right) \delta(x) \right]^{-1} = E_+(x) = \theta(x) \frac{\sin \omega x}{\omega}.$$

Пусть теперь

$$P\left(\frac{d}{dx}\right) = \frac{d^2}{dx^2} - \omega^2.$$

Фундаментальное решение этого оператора

$$E_+(x) = \theta(x) \frac{\operatorname{sh} \omega x}{\omega} \in D'_+.$$

Поэтому

$$\left[\left(\frac{d^2}{dx^2} - \omega^2 \right) \delta(x) \right]^{-1} = \theta(x) \frac{\operatorname{sh} \omega x}{\omega}, \quad \omega > 0.$$

Фундаментальное решение оператора $P(d/dx) = d^n/dx^n$ есть

$$E_+(x) = \theta(x) \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \in D'_+.$$

Следовательно, единственный обратный элемент определяется равенством

$$\left(\frac{d^n}{dx^n} \delta(x) \right)^{-1} = \theta(x) \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Отметим, что множество фундаментальных решений оператора $P(d/dx)$ содержит решение, принадлежащее D'_+ . Это — единственное решение уравнения в свертках (4.97).

Операционный метод решения уравнений в свертках. Рассмотрим вновь уравнение в свертках в алгебре D'_+

$$a(x) * y(x) = b(x). \quad (4.98)$$

Применив к (4.98) преобразование Лапласа, получим

$$L[a(x)] L[y(x)] = L[b(x)].$$

Откуда

$$L[y(x)] = \frac{L[b(x)]}{L[a(x)]} = L[p], \quad p = \sigma + i\eta. \quad (4.99)$$

Если для $L[p]$ существует оригинал, принадлежащий D'_+ , то формула (4.99) определяет единственное решение $y(x) \in D'_+$.

Пример 1. В качестве первого примера рассмотрим уравнение

$$\theta(x)\sin x * y(x) = \frac{1}{2}\theta(x)x\sin x.$$

Носители входящих сюда известных обобщенных функций содержатся в промежутке $[0, \infty)$, следовательно, они принадлежат алгебре D'_+ . Формула (4.99) дает

$$L[y(x)] = \frac{1}{2} \frac{L[\theta(x)x\sin x]}{L[\theta(x)\sin x]}.$$

Легко вычисляем

$$L[\theta\sin x] = \int_0^\infty e^{-px} \sin x dx = \frac{1}{1+p^2},$$

$$L[\theta(x)x\sin x] = \int_0^\infty e^{-px} x \sin x dx = -\frac{d}{dp} L[\theta(x)\sin x] = -\left(\frac{1}{1+p^2}\right)' = \frac{2p}{(1+p^2)^2}.$$

Отсюда

$$L[y(x)] = \frac{p}{p^2+1} \Rightarrow y(x) = \theta(x)\cos x \in D'_+.$$

Пример 2. Найдем теперь обобщенную функцию, обратную обобщенной функции

$$a(x) = \theta(x) + \delta'(x) \in D'_+.$$

Имеем уравнение в свертках в алгебре D'_+

$$(\theta(x) + \delta'(x)) * y(x) = \delta(x).$$

Отсюда находим

$$\left(p + \frac{1}{p}\right)L[y] = 1 \Rightarrow L[y] = \frac{p}{p^2+1} \Rightarrow y(x) = \theta(x)\cos x.$$

Следовательно,

$$(\theta(x) + \delta'(x))^{-1} = \theta(x)\cos x. \quad (4.100)$$

Пример 3. Рассмотрим уравнение

$$(\delta''(x) - \omega^2\delta(x)) * y(x) = \delta(x).$$

Применив к нему преобразование Лапласа, получим

$$(p^2 - \omega^2)L[y(x)] = 1 \Rightarrow L[y(x)] = \frac{1}{p^2 - \omega^2} = \frac{1}{2\omega} \left(\frac{1}{p-\omega} - \frac{1}{p+\omega} \right).$$

Отсюда

$$y(x) = \frac{1}{2\omega} (\theta(x)e^{+\omega x} - \theta(x)e^{-\omega x}) = \theta(x) \frac{\sinh \omega x}{\omega}, \quad \omega > 0.$$

Эта обобщенная функция совпадает с фундаментальным решением $E_+(x)$ оператора $P\left(\frac{d}{dx}\right) = d^2/dx^2 - \omega^2$.

Пример 4. Рассмотрим еще один пример. Пусть обобщенная функция $E(x) = y(x)*\theta(x)\sin x$. Найдем фигурирующую в этой свертке обобщенную функцию $y(x) \in D'_+$ из условия, чтобы $E(x)$ являлась фундаментальным решением оператора $P(d/dx) = d/dx - 1$. Имеем цепочку равенств

$$P\left(\frac{d}{dx}\right)E(x) = \delta(x) \Rightarrow P\left(\frac{d}{dx}\right)(y(x)*\theta(x)\sin x) = P\left(\frac{d}{dx}\right)(\theta(x)\sin x * y(x)) = \delta(x).$$

Применим преобразование Лапласа, получим

$$L\left[P\left(\frac{d}{dx}\right)\theta(x)\sin x\right]L[y(x)] = 1.$$

Элементарно находим

$$L[\theta(x)\sin x] = \frac{1}{p^2+1}, \quad L[(\theta \sin x)'] = \frac{p}{p^2+1}.$$

Отсюда

$$\frac{p-1}{p^2+1}L[y(x)] = 1 \Rightarrow L[y(x)] = \frac{p^2+1}{p-1} = p+1 + \frac{2}{p-1} \Rightarrow y(x) = \delta(x) + \delta'(x) + 2e^x\theta(x).$$

Решение интегрального уравнения Вольтерра первого рода с разностным ядром на полуоси. Такое уравнение имеет вид

$$\int_0^x K(x-t)y(t)dt = f(x), \quad x \geq 0, \quad (4.101)$$

где $K(x)$ и $f(x)$ — локально интегрируемые функции и $K(x) = 0$ при $x \leq 0$. Продолжив ядро $K(x)$ и правую часть $f(x)$ на отрицательную полуось нулем, сведем интегральное уравнение (4.101) к уравнению в свертках в алгебре D'_+

$$\theta(x)K(x)*y(x) = \theta(x)f(x). \quad (4.102)$$

Далее применим к (4.102) преобразование Лапласа. В результате получим

$$L[\theta(x)K(x)]L[y(x)] = L[\theta(x)f(x)] \Rightarrow L[y(x)] = \frac{L[\theta(x)f(x)]}{L[\theta(x)K(x)]} = L(p).$$

Пример 1. Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра 1-го рода

$$\int_0^x \cos(x-t) y(t) dt = f(x), \quad x \geq 0. \quad (4.103)$$

Продолжив ядро K и $f(x)$ на отрицательную полуось нулевыми значениями, сведем это уравнение к уравнению в свертках

$$\theta(x)K(x)*y(x) = \theta(x)f(x). \quad (4.104)$$

Очевидно, функции $\theta(x)K(x)$ и $\theta(x)f(x)$ принадлежат алгебре D'_+ . Согласно формуле (4.100)

$$(\theta(x)\cos x)^{-1} = \theta(x) + \delta'(x).$$

С учетом этого равенства находим из свертки (4.104)

$$y(x) = (\theta(x) + \delta'(x)) * \theta(x)f(x) = \theta(x) * \theta(x)f(x) + (\delta(x) * \theta(x)f(x)).$$

Имеем далее

$$\begin{aligned} \theta(x) * \theta(x)f(x) &= \int_0^\infty \theta(x-t)\theta(t)f(t)dt = \begin{cases} \int_0^x f(t)dt, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} = \theta(x) \int_0^x f(t)dt, \\ (\delta(x) * \theta(x)f(x))' &= (\theta(x)f(x))'. \end{aligned}$$

Окончательно получаем решение уравнения (4.103)

$$y(x) = \frac{d}{dx}(\theta(x)f(x)) + \theta(x) \int_0^x f(t)dt. \quad (4.105)$$

Для $f(x) = \theta(x)\sin x$, формула (4.105) дает

$$y(x) = \frac{d}{dx}(\theta(x)\sin x) + \theta(x) \int_0^x \sin t dt = \theta(x)\cos x + \theta(x)(1 - \cos x) = \theta(x).$$

Следовательно, решением уравнения

$$\int_0^x \cos(x-t) y(t) dt = \sin x, \quad x \geq 0 \quad (4.106)$$

в классе обобщенных функций D'_+ является единичная функция Хевисайда $\theta(x)$.

Замечание. К такому же результату придем, непосредственно применив к этому уравнению преобразование Лапласа. Имеем из (4.106)

$$L[y(x)] = \frac{L[\theta \sin x]}{L[\theta \cos x]} = \frac{1}{p} \Rightarrow y(x) = \theta(x).$$

Пример 2. Аналогичным образом можно показать, что $\delta(x)$ — решение интегрального уравнения Вольтерра 1-го рода в алгебре D'_+

$$\int_0^x \cos(x-t)y(t)dt = \cos x, \quad x \geq 0.$$

Пример 3. Найдем решение уравнения

$$\int_0^x (x-t)\cos(x-t)y(t)dt = f(x), \quad x \geq 0$$

в алгебре D'_+ . Имеем, применив к этому уравнению преобразование Лапласа,

$$L[y] = \frac{L[\theta(x)f]}{p^2 - 1} (p^2 + 1)^2. \quad (4.107)$$

Например, при $f(x) = \theta(x)e^x$ получим

$$L[y] = p+1 + \frac{3}{p-1} + \frac{2}{(p-1)^2}.$$

Отсюда

$$y(x) = \delta'(x) + \delta(x) + 2\theta(x)(e^x(1+x) + \operatorname{sh}x).$$

Если необходимо выразить решение в общем виде через правую часть интегрального уравнения $f(x)$, то можно поступить следующим образом: пусть $\theta(x)u(x)$ — обобщенная функция, соответствующая изображению $(p^2 + 1)^2(p^2 - 1)^{-1}$, т. е.

$$L[\theta(x)u(x)] = \frac{(p^2 + 1)^2}{p^2 - 1}.$$

Тогда согласно (4.91) и выражению $L[y]$ через преобразование $L[\theta(x)f]$, получим

$$L[y] = L[\theta(x)f]L[\theta(x)u(x)] \Rightarrow y(x) = \theta(x)f * \theta(x)u.$$

Интегральное уравнение Вольтерра второго рода. Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода с разностным ядром на положительной полуоси $x \geq 0$

$$y(x) + \int_0^x K(x-t)y(t)dt = f(x), \quad x \geq 0. \quad (4.107)$$

Продолжив $K(x)$ и $f(x)$ на отрицательную полуось нулем, запишем соответствующее (4.107) уравнение в свертках в алгебре D'_+

$$(\delta(x) + \theta(x)K(x)) * y(x) = \theta(x)f(x). \quad (4.108)$$

После применения к (4.108) преобразования Лапласа находим

$$L[y(x)] = \frac{L[\theta(x)f(x)]}{1 + L[\theta(x)K(x)]}.$$

В качестве примера найдем решение интегрального уравнения

$$y(x) + \int_0^x e^{x-t} y(t) dt = f(x), \quad x > 0.$$

Продолжив функции e^x и $f(x)$ нулями на отрицательную полуось, запишем соответствующее уравнение в свертках в алгебре D'_+

$$(\delta(x) + \theta(x)e^x) * y(x) = \theta(x)f(x).$$

Преобразование Лапласа дает

$$L[y(x)] = \frac{L[\theta(x)f(x)]}{1 + (p-1)^{-1}} = L[\theta(x)f(x)] - \frac{1}{p}L[\theta(x)f(x)].$$

Отсюда

$$y(x) = \theta(x)f(x) - \int_0^x \theta(t)\theta(x-t)f(x-t)dt = \theta(x)f(x) - \theta(x) \int_0^x f(x-t)dt.$$

Или так:

$$y(x) = f(x) - \int_0^x f(x-t)dt, \quad x \geq 0.$$

Обыкновенные дифференциальные уравнения. Задача Коши. Рассмотрим линейный дифференциальный оператор с переменными коэффициентами

$$P\left(\frac{d}{dx}\right) = \frac{d^n}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x)\frac{d}{dx} + a_n(x),$$

где $a_i(x) \in C[a, b]$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Определение. Задача о нахождении решения уравнения

$$P\left(\frac{d}{dx}\right)y(x) = f(x), \quad f(x) \in C[a, b], \quad y(x) \in C^n[a, b], \quad (4.109)$$

удовлетворяющего начальным условиям вида

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, \quad x_0 \in [a, b],$$

называется задачей Коши (одноточечной краевой задачей) для дифференциального уравнения (4.109). Сформулированная выше задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения имеет единственное решение [8, 12, 20].

Найдем решение задачи Коши для дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью $f(x) \in C[0, \infty)$. Имеем согласно определению

$$y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \dots + a_{n-1} y'(x) + a_n y(x) = f(x), \quad x \geq 0, \quad (4.110)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} y(x) = y_0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} y'(x) = y_1, \dots, \quad \lim_{x \rightarrow 0} y^{(n-1)}(x) = y_{n-1}.$$

Продолжив решение $y(x)$ и функцию $f(x)$ нулями на отрицательную полуось, рассмотрим уравнение (4.110) в пространстве D' обобщенных функций. Положим

$$\theta(x)f(x) = \tilde{f}(x), \quad \theta(x)y(x) = \tilde{y}(x).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{y}'(x) &= \{\tilde{y}'(x)\} + [\tilde{y}]_0 \delta(x), \\ \tilde{y}''(x) &= \{\tilde{y}''(x)\} + [\tilde{y}]_0 \delta'(x) + [\tilde{y}']_0 \delta(x), \end{aligned} \quad (4.111)$$

$$\tilde{y}^{(k)}(x) = \{\tilde{y}^{(k)}(x)\} + [\tilde{y}]_0 \delta^{(k-1)}(x) + [\tilde{y}']_0 \delta(x)^{(k-2)} + \dots + [\tilde{y}^{(k-1)}]_0 \delta(x),$$

где $\{\tilde{y}^{(p)}(x)\}$ — классическая производная порядка p , $[\tilde{y}^{(p)}]_0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \tilde{y}^{(p)}(x) = y_p$ — скачок p -й производной в точке $x=0$.

С учетом соотношений (4.111) представим уравнение (4.110) в обобщенных производных в виде

$$P\left(\frac{d}{dx}\right)\tilde{y}(x) = F(x),$$

$$F(x) = \tilde{f}(x) + b_{n-1}\delta(x) + b_{n-2}\delta'(x) + \dots + b_0\delta^{(n-1)}(x) = \tilde{f}(x) + \sum_{p=1}^n b_{n-p}\delta^{(p-1)}(x) \in D'_+,$$

$$b_{n-p} = \sum_{i=0}^{n-p} y_i a_{n-i-p}.$$

Рассмотрим, например, задачу Коши для уравнения второго порядка

$$y''(x) + a_1 y'(x) + a_2 y(x) = f(x), \quad x \geq 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = y_0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} y'(x) = y_1.$$

Полагая

$$\tilde{y}(x) = \theta(x)y(x), \quad \tilde{f}(x) = \theta(x)f(x)$$

и используя формулы (4.111), представим это уравнение в обобщенных производных в виде

$$\tilde{y}''(x) + a_1 \tilde{y}'(x) + a_2 \tilde{y}(x) = F(x), \quad (4.112)$$

где

$$F(x) = \tilde{f}(x) + (y_1 + a_1 y_0) \delta(x) + y_0 \delta'(x), \quad F(x) \in D'_+.$$

Отметим, что начальные условия задачи Коши здесь уже учтены.

Уравнение в свертках, соответствующее дифференциальному уравнению (4.112), таково:

$$P\left(\frac{d}{dx}\right)\delta(x) * \tilde{y}(x) = F(x),$$

где

$$P\left(\frac{d}{dx}\right) = \frac{d^2}{dx^2} + a_1 \frac{d}{dx} + a_2.$$

Пусть $E(x)$ — фундаментальное решение оператора $P(d/dx)$ и $E_+(x) = \theta(x)E(x)$ — обобщенная функция класса D'_+ . Очевидно,

$$P\left(\frac{d}{dx}\right)E_+(x) = \delta(x)$$

и

$$P\left(\frac{d}{dx}\right)\delta(x)*E_+(x) = \delta(x).$$

Следовательно, в сверточной алгебре D'_+ элемент $P(d/dx)\delta(x)$ является обратным по отношению к фундаментальному решению $E_+(x)$ и можно определить обобщенную функцию $\tilde{y}(x)$ в виде

$$\begin{aligned} \tilde{y}(x) &= E_+(x)*F(x) = E(x)*\{\tilde{f}(x) + (y_1 + a_1 y_0)\delta(x) + y_0 \delta'(x)\} = \\ &= E(x)*\tilde{f}(x) + (y_1 + a_1 y_0)E(x) + y_0 E'(x). \end{aligned} \quad (4.113)$$

Положим для упрощения записи $a_1 = 0$, $a_2 = \omega^2$. Тогда фундаментальное решение есть

$$E_+(x) = \theta(x) \frac{\sin \omega x}{\omega},$$

и соотношение (4.113) дает

$$\tilde{y}(x) = \int_0^x \theta(t) \frac{\sin \omega t}{\omega} \tilde{f}(x-t) dt + y_1 \theta(x) \frac{\sin \omega x}{\omega} + y_0 \theta(x) \cos \omega x, \quad x \in R^1$$

или

$$y(x) = \int_0^x f(x-t) \frac{\sin \omega t}{\omega} dt + y_1 \frac{\sin \omega x}{\omega} + y_0 \cos \omega x, \quad x \geq 0.$$

4.19. Регуляризация расходящихся интегралов

С помощью аппарата теории распределений можно построить алгоритм, позволяющий приписывать некоторым расходящимся интегралам определенные числовые значения. Этот алгоритм называется регуляризацией расходящегося интеграла [11, 31, 38].

Точку x_0 называют точкой локальной суммируемости функции $f(x)$, если существует шар $U(x_0, r)$, в котором $f(x)$ суммируема. Точки, не являющиеся точками локальной суммируемости, называются особыми точками. Будем предполагать, что на любом интервале $f(x)$ может иметь лишь конечное множество особых точек.

Пусть D_f — подпространство функций из D , обращающихся в нуль в каждой особой точке функции f . Сходимость в D_f следует из сходимости в D : последовательность $\{\varphi_m\} \subset D_f$ сходится к $\varphi \subset D_f$, если все $\varphi_m(x)$ сосредоточены на одном и том же шаре (не содержащем особых точек) и $D^\alpha \varphi_m(x) \rightarrow D^\alpha \varphi(x)$ при любом мультииндексе α , равномерно. Тогда определен линейный функционал f в пространстве D_f , действующий на произвольную функцию $\varphi \in D_f$ по формуле

$$(f, \varphi) = \int f(x) \varphi(x) dx.$$

Интеграл в правой части сходится, так как $\varphi(x)$ равна нулю во всех особых точках функции $f(x)$. Построенный линейный функционал можно продолжить на все пространство D [21].

Значение (f, φ) для какой-либо основной функции $\varphi(x) \in D$ называют регуляризованным значением интеграла

$$\int f(x) \varphi(x) dx,$$

а обобщенную функцию (f, φ) , получаемую при указанном продолжении с D_f на D , называют регуляризацией функции $f(x)$. Важно отметить, что регуляризация функции $f(x)$ совпадает с $f(x)$ на множестве точек, дополнительном к множеству особых точек.

Одна и та же функция может иметь различные регуляризации. Введем понятие канонической регуляризации [11, 12]. Пусть L — линейное пространство функций $f(x)$ (не обязательно локально интегрируемых), каждая из которых имеет дискретное множество особых точек и бесконечно дифференцируема на дополнении к этому множеству. Предположим, что пространство L содержит вместе с каждой функцией $f(x)$ все ее производные (на дополнении к множеству особых точек) и все функции вида $\alpha(x)f(x)$, где $\alpha(x) \in C^\infty$.

Пусть каждой функции $f(x) \in L$ сопоставлен линейный функционал (f, φ) — регуляризация этой функции. Эта регуляризация называется канонической (обозначается $k.p.f(x)$), если выполнены следующие условия:

$$1) k.p.(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 k.p.f_1 + \lambda_2 k.p.f_2,$$

$$2) k.p.\left\{ \frac{df}{dx} \right\} = \frac{d}{dx}(k.p.f(x)),$$

здесь слева стоит классическая производная, а справа — производная от обобщенной функции;

$$3) k.p.(\alpha(x)f(x)) = \alpha(x)k.p.f(x), \quad \forall \alpha(x) \in C^\infty.$$

Примером пространства функций, для которого существует каноническая регуляризация, служит класс функций со степенными особенностями. Точка x_0 называется степен-

ной особой точкой функции $f(x)$, если в окрестности этой точки $f(x)$ можно представить в виде

$$f(x) = \sum_{j=1}^m \alpha_j(x) h_j(x), \quad \alpha_j(x) \in C^\infty,$$

а $h_j(x)$ — одна из следующих функций:

$$(x-x_0)_+^\lambda, \quad (x-x_0)_-^\lambda, \quad (x-x_0)^{-n} \quad (\lambda \neq -1, -2, -\dots),$$

где

$$\begin{aligned} x_+^\lambda &= \begin{cases} x^\lambda, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \\ x_-^\lambda &= \begin{cases} 0, & x > 0, \\ |x|^\lambda, & x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Функция $f(x)$ называется функцией со степенными особенностями, если она имеет на любом интервале конечное множество степенных особых точек.

Регуляризация функций $x_+^\lambda, x_-^\lambda, x^{-n}$. Пусть $\operatorname{Re} \lambda > -1$, тогда интеграл

$$(x_+^\lambda, \varphi) = \int_0^\infty x^\lambda \varphi(x) dx$$

существует для любой $\varphi(x) \in D$ и, следовательно, задает линейный функционал в этом пространстве.

Пусть теперь $\operatorname{Re} \lambda > -n - 1$ ($\lambda \neq -1, -2, -\dots$), тогда $\operatorname{Re}(\lambda + n) > -1$ и имеет смысл функционал

$$(x_+^{\lambda+n}, \varphi) = \int_0^\infty x^{\lambda+n} \varphi(x) dx.$$

Далее, в силу условия 2 канонической регуляризации получаем

$$(x_+^{\lambda+n}, \varphi) = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+n+1)} \left[(x_+^{\lambda+n})^{(n)}, \varphi \right] = (-1)^n \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+n+1)} (x_+^{\lambda+n}, \varphi^{(n)}).$$

Таким образом, при $\operatorname{Re} \lambda > -n - 1$ — функционал (x_+^λ, φ) задается формулой

$$(x_+^\lambda, \varphi) = (-1)^n \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+n+1)} \int_0^\infty x^{\lambda+n} \varphi^{(n)}(x) dx.$$

Интегрированием по частям можно проверить, что эта формула равносильна следующей

$$\begin{aligned} (x_+^\lambda, \varphi) &= \int_0^1 x^\lambda \left[\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0) - \dots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \varphi^{(n-1)}(0) \right] dx + \\ &\quad + \int_1^\infty x^\lambda \varphi(x) dx + \sum_{k=1}^n \frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!(\lambda+k)}. \end{aligned} \tag{4.114}$$

При $-n-1 < \operatorname{Re} \lambda < -n$ имеет место более простая формула

$$(x_+^\lambda, \varphi) = \int_0^\infty x^\lambda \left[\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0) - \dots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \varphi^{(n-1)}(0) \right] dx.$$

Приведенные соотношения задают регуляризацию x_+^λ при $\operatorname{Re} \lambda < -1$. Отметим, что эта обобщенная функция не определена при $\lambda = -1, -2, \dots, -n, \dots$

Аналогично определяется регуляризация функции x_-^λ . Выпишем еще регуляризации функций [38]

$$|x|^\lambda = x_+^\lambda + x_-^\lambda, \quad |x|^\lambda \operatorname{sign} x = x_+^\lambda - x_-^\lambda.$$

При $-2m-1 < \operatorname{Re} \lambda < -2m+1$ имеем

$$(|x|^\lambda, \varphi) = \int_0^\infty x^\lambda \left\{ \varphi(x) + \varphi(-x) - 2 \left[\varphi(0) + \frac{x^2}{2!} \varphi''(0) + \dots + \frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!} \varphi^{(2m-2)}(0) \right] \right\} dx.$$

При $\lambda = -2m$

$$(x^{-2m}, \varphi) = \int_0^\infty x^{-2m} \left\{ \varphi(x) + \varphi(-x) - 2 \left[\varphi(0) + \frac{x^2}{2!} \varphi''(0) + \dots + \frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!} \varphi^{(2m-2)}(0) \right] \right\} dx.$$

Например,

$$(x^{-2}, \varphi) = \left(Vp \frac{1}{x^2}, \varphi \right) = \int_0^\infty \frac{\varphi(x) + \varphi(-x) - 2\varphi(0)}{x^2} dx. \quad (4.115)$$

При $\lambda = -2m-1$ имеем

$$(x^{-2m-1}, \varphi) = \int_0^\infty x^{-2m-1} \left\{ \varphi(x) - \varphi(-x) - 2 \left[x\varphi'(0) + \frac{x^3}{3!} \varphi^{(3)}(0) + \dots + \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} \varphi^{(2m-1)}(0) \right] \right\} dx.$$

В частности,

$$(x^{-1}, \varphi) = \left(Vp \frac{1}{x}, \varphi \right) = \int_0^\infty \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx. \quad (4.116)$$

$$(x^{-3}, \varphi) = \left(Vp \frac{1}{x^3}, \varphi \right) = \int_0^\infty \frac{\varphi(x) - \varphi(-x) - 2x\varphi'(0)}{x^3} dx.$$

Поскольку $\operatorname{ctg} \frac{x}{2}$ — нечетная функция и в окрестности нуля имеет представление (в пределах $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$)

$$\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = \frac{2}{x} + \text{регулярная функция},$$

то можно воспользоваться регуляризацией (4.116). Имеем $\forall \varphi(x) = 0$ при $x \notin [-\pi/2, \pi/2]$

$$\left(\operatorname{ctg} \frac{x}{2}, \varphi \right) = \int_0^\infty [\varphi(x) - \varphi(-x)] \operatorname{ctg} \frac{x}{2} dx.$$

Аналогично, имея в виду регуляризацию $Vp \frac{1}{x^2}$ (4.115), запишем

$$\left(\frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}}, \varphi \right) = \int_0^\infty \left[\frac{\varphi(x) + \varphi(-x)}{\sin^2 \frac{x}{2}} - \frac{8\varphi(0)}{x^2} \right] dx.$$

Дробное интегродифференцирование [33, 38]. Пусть функция $f(x)$ равна нулю на полуоси $(-\infty, 0)$ и локально интегрируема на $(0, +\infty)$. Тогда ее q — кратная первообразная функция, обращающаяся в нуль на полуоси $(-\infty, 0)$, задается формулой Коши

$$D^{-q} f = f_q(x) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^x f(t) (x-t)^{q-1} dt.$$

В терминах свертки эта формула имеет вид

$$f_q(x) = f(x) * \frac{x_+^{q-1}}{\Gamma(q)}.$$

По аналогии с этим равенством первообразная порядка λ от обобщенной функции $f(x)$, равной нулю на полуоси $(-\infty, 0)$, определяется так:

$$D^{-\lambda} f = f_\lambda(x) = f(x) * \frac{x_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} = f(x) * \Phi_\lambda(x).$$

Из формулы (4.114) для регуляризации (x_+^λ, φ) при $\operatorname{Re} \lambda > -n - 1$ имеем

$$\Phi_{-k}(x) = \lim_{\lambda \rightarrow -k} \frac{x_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} = \delta^{(k)}(x).$$

Отсюда

$$f_{-k}(x) = f(x) * \Phi_{-k}(x) = f(x) * \delta^{(k)}(x) = D^k f(x).$$

Таким образом, первообразная порядка $-k$ есть не что иное, как производная порядка k от обобщенной функции $f(x)$.

Пример. Интегральное уравнение Абеля

$$g(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^\alpha}$$

представим в виде свертки

$$g(x) = f(x) * \Phi_\lambda(x), \quad \lambda = 1 - \alpha.$$

Имеем

$$g(x) * \Phi_{-\lambda}(x) = f(x) * \Phi_\lambda(x) * \Phi_{-\lambda}(x) = f(x) * \delta(x) = f(x).$$

Отсюда при $0 < \alpha < 1$ получаем решение

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^x g(t)(x-t)^{\alpha-2} dt,$$

где интеграл понимается в смысле регуляризованного значения.

Если $g(x)$ — дифференцируемая функция, то решение записывается в виде обычного несобственного интеграла

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x g'(t)(x-t)^{\alpha-1} dt.$$

4.20. Обобщенные решения дифференциальных уравнений в частных производных

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор порядка m

$$P(x, D) = \sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha(x) D^\alpha, \quad (4.117)$$

где

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n),$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n, \quad a_\alpha(x) \in C^\infty.$$

Соответствующее оператору (4.117) линейное дифференциальное уравнение в пространстве D' запишем в виде

$$P(x, D)u = f(x), \quad f(x) \in D'. \quad (4.118)$$

Обобщенным решением уравнения (4.118) в области $\Omega \subset R^n$ называется любая обобщенная функция $u(x) \in D'$, удовлетворяющая в $D'(\Omega)$ этому уравнению. Из этого определения следует, что $\forall \varphi(x) \in D(\Omega)$ должно выполняться равенство [8, 9]

$$(P(x, D)u, \varphi(x)) = (f(x), \varphi(x)). \quad (4.119)$$

Вводя сопряженный дифференциальный оператор по формуле

$$P^*(x, D)\varphi = \sum_{|\alpha|=0}^m (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_\alpha \varphi), \quad (4.120)$$

можно представить (4.119) в виде равносильного равенства

$$(P(x, D)u, \varphi) = (u, P^*(x, D)\varphi) = (f, \varphi), \quad \varphi \in D(\Omega).$$

В самом деле, прямое вычисление дает

$$\begin{aligned} (P(x, D)u, \varphi) &= \left(\sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha(x) D^\alpha u, \varphi \right) = \sum_{|\alpha|=0}^m (a_\alpha(x) D^\alpha u, \varphi) = \\ &= \sum_{|\alpha|=0}^m (D^\alpha u, a_\alpha \varphi) = \sum_{|\alpha|=0}^m (-1)^{|\alpha|} (u, D^\alpha (a_\alpha \varphi)) = (u, P^*(x, D)\varphi). \end{aligned}$$

Если $u(x) \in C^m$, а $f(x) \in C$, то все обобщенные производные до порядка m включительно совпадают с классическими, поэтому обобщенное решение совпадает с классическим, т. е.

$$P(x, D)u - f(x) \equiv 0.$$

Значит, это равенство будет выполняться и в D' . Вообще, любое классическое решение уравнения (4.118) является и обобщенным решением. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Фундаментальное решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами [4, 8, 9, 11, 18, 22, 25]. Напомним определение. Обобщенная функция $E(x) \in D'(R^n)$ называется фундаментальным решением оператора (с постоянными коэффициентами)

$$P(D) = \sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha D^\alpha,$$

если она удовлетворяет уравнению в $D'(R^n)$

$$P(D)E(x) = \delta(x), \quad x \in R^n. \quad (4.121)$$

Фундаментальное решение определяется уравнением (4.121) не единственным образом, а с точностью до любого слагаемого, являющегося регулярным решением однородного уравнения $P(D)u = 0$. Поскольку $\mathcal{L}' \subset D'$, то можно применять преобразование Фурье для определения фундаментального решения $E(x) \in \mathcal{L}'$. Точнее, имеет место утверждение.

Для того чтобы обобщенная функция $E \in \mathcal{L}'$ была фундаментальным решением оператора $P(D)$, необходимо и достаточно, чтобы ее преобразование Фурье $F[E]$ удовлетворяло уравнению

$$P(-i\xi)F[E] = 1,$$

где символ оператора — многочлен $P(-i\xi)$ определяется равенством

$$P(\xi) = \sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha \xi^\alpha.$$

Доказательство необходимости. Пусть $E \in \mathcal{L}'$ — фундаментальное решение оператора $P(D)$. Тогда имеем цепочку равенств

$$P(D)E(x) = \delta(x) \Rightarrow F[P(D)E] = 1 \Rightarrow P(-i\xi)F[E] = 1.$$

Достаточность очевидна.

Таким образом, вопрос сводится к решению в пространстве \mathcal{L}' уравнения

$$Q(\xi)X = 1, \quad (4.122)$$

где $Q(\xi) = Q(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ — полином степени m от n -переменных. Если $N_Q = \{\xi : Q(\xi) = 0\}$ множество нулей $Q(\xi)$, то вне этого множества уравнение (4.122) имеет решение

$$X = \frac{1}{Q(\xi)}.$$

Если $N_Q = \emptyset$, то это решение единствено и фундаментальное решение $E(x) \in \mathcal{L}'$ однозначно определяется. В противном случае решения уравнения (4.122) отличаются друг от друга на обобщенную функцию с носителем в N_Q .

Например, уравнение $(\xi - 1)X = 1$ в $\mathcal{L}'(R^n)$ имеет решения

$$Vp \frac{1}{\xi - 1}, \quad Vp \frac{1}{\xi - 1} + c\delta(\xi - 1).$$

Доказано [22], что уравнение (4.122), где $Q(\xi)$ — многочлен с постоянными коэффициентами, всегда имеет решение. Отсюда следует, что фундаментальное решение дифференциального оператора $P(D)$ в классе \mathcal{L}' существует.

Замечание. Согласно теореме Мальгранжа–Эренпрейса, для любого дифференциального оператора в частных производных с постоянными коэффициентами существует фундаментальное решение $E \in D'$.

В разделе 4.10 было показано, что решение уравнения с правой частью

$$P(D)u = f(x), \quad f(x) \in D'(R^n)$$

определяется формулой

$$u = E(x) * f(x) = P(D)u * E(x),$$

если только свертка $E * f$ существует.

4.21. Уравнения гиперболического типа

Рассмотрим волновое уравнение в $R^n \times R^1$

$$\left(\Delta - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u = 0, \quad \Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}, \quad (4.123)$$

$$u = u(x; t), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n.$$

Уравнение (4.123) — гиперболического типа [30]. Найдем фундаментальное решение оператора Даламбера (волнового оператора) для случаев $n = 1, 2$ и 3.

Фундаментальное решение оператора \square_a есть обобщенная функция $E(x, t)$, удовлетворяющая уравнению в $R^n \times R^1$

$$\square_a E = \left(\Delta - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) E(x, t) = \delta(x, t). \quad (4.124)$$

Применив к уравнению (4.124) преобразование Фурье по пространственным переменным, получим

$$\begin{aligned} F_x[\Delta E] - \frac{1}{a^2} \frac{d^2}{dt^2} F_x[E] &= F_x[\delta(x, t)] = F_x[\delta(x) \cdot \delta(t)] = \\ &= F_x[\delta(x)] \cdot \delta(t) = 1(\xi) \cdot \delta(t) \Rightarrow -|\xi|^2 F_x[E] - \frac{1}{a^2} \frac{d^2}{dt^2} F_x[E] = 1(\xi) \cdot \delta(t). \end{aligned}$$

Обозначив

$$F_x[E] = F_x[E(x, t)](\xi, t) = y(\xi, t),$$

приходим к дифференциальному уравнению в $\mathcal{L}(R^n)$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + a^2 |\xi|^2 y = -a^2 (1(\xi) \cdot \delta(t)).$$

Отсюда, учитывая правило построения фундаментального решения для обыкновенного дифференциального оператора, находим

$$y(\xi, t) = -a \frac{\sin(a|\xi|t)}{|\xi|} \theta(t), \quad |\xi| = \left(\sum_{k=1}^n \xi_k^2 \right)^{1/2}. \quad (4.125)$$

Фундаментальное решение оператора Даламбера получим, обратив равенство (4.125)

$$E(x, t) = F_\xi^{-1}[y(\xi, t)] = -a F_\xi^{-1}\left[\frac{\sin(a|\xi|t)}{|\xi|} \right] \theta(t).$$

Пусть $n = 1$. Найдем преобразование Фурье от функции $\theta(at - |x|)\theta(t)$, $a > 0$

$$\begin{aligned} \theta(t) F_x[\theta(at - |x|)] &= \int e^{i\xi x} \theta(at - |x|) \theta(t) dx = \theta(t) \int_{-at}^{at} e^{i\xi x} dx = \\ &= 2\theta(t) \frac{\sin \xi at}{\xi} = 2 \cdot \theta(t) \frac{\sin |\xi| at}{|\xi|}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$E_1(x, t) = -a F_\xi^{-1}\left[\frac{\sin(|\xi| at)}{|\xi|} \right] \theta(t) = -\frac{a}{2} \theta(at - |x|) \theta(t), \quad a > 0.$$

Таким образом, фундаментальное решение одномерного волнового оператора равно нулю вне «конуса» Γ^+ , заключенного между двумя характеристиками, а внутри конуса $E(x, t) = -a/2$ (рис. 4.13).

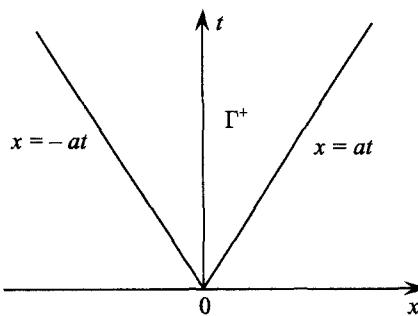


Рис. 4.13. Световой конус будущего Γ^+ для одномерного волнового оператора

При $n = 2$ имеем (см. табл. преобразований Фурье)

$$F\left[\frac{\theta(a-r)}{\sqrt{a^2-r^2}}\right] = \frac{2\pi}{|\xi|} \sin a|\xi|, \quad a > 0.$$

С учетом этого равенства соотношение (4.125) дает

$$E_2(x, t) = -\frac{a}{2\pi} \frac{\theta(at-r)}{\sqrt{a^2t^2-r^2}}, \quad r = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad a > 0.$$

Или в развернутом виде (см. рис. 4.14)

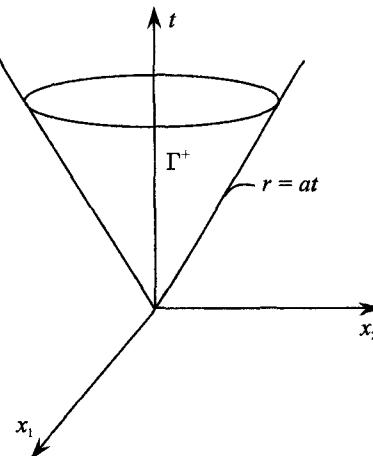


Рис. 4.14. Световой конус будущего для двумерного волнового оператора

$$E_2(x, t) = \begin{cases} -\frac{a}{2\pi\sqrt{a^2t^2-r^2}}, & at > r, \\ 0, & at < r. \end{cases}$$

Наконец, при $n = 3$ имеем

$$F[\delta(|x| - a)] = 4\pi a \frac{\sin a|\xi|}{|\xi|}.$$

Учитывая это равенство, находим из (4.125)

$$\begin{aligned} E_3(x, t) &= -\frac{1}{4\pi t} \delta(|x| - at) = \frac{a}{2\pi} \theta(t) \delta(a^2 t^2 - |x|^2) = \frac{a}{4\pi t} \theta(t) \delta_{S_a}(x), \\ |x| &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \end{aligned}$$

где S_a сфера $|x| = at$.

Отметим, что фундаментальные решения E_1, E_2, E_3 — единственные фундаментальные решения оператора Даламбера \square , имеющие носитель в полупространстве $\{(x, t) : t \geq 0\}$. На самом деле их носитель лежит не во всем полупространстве, а в световом конусе $\{(x, t) : t \geq 0, |x| \leq at\}$.

4.22. Уравнения эллиптического типа

Уравнение Гельмгольца. Фундаментальное решение оператора Гельмгольца $\Delta - k^2$ есть обобщенная функция $E \in \mathcal{L}'(R^3)$, удовлетворяющая уравнению

$$\Delta E - k^2 E = \delta(x_1, x_2, x_3) = \delta(x_1) \cdot \delta(x_2) \cdot \delta(x_3). \quad (4.126)$$

Для определения фундаментального решения применим к (4.126) интегральное преобразование Фурье по всем пространственным переменным

$$F[\Delta E - k^2 E](\xi) = F[\delta(x)](\xi), \quad (4.127)$$

где $F[f](\xi) = \int e^{i(\xi \cdot x)} f(x) dx$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$.

Учитывая равенство (см. п. 4.15)

$$F[\partial_j^2 f] = -\xi_j^2 F[f],$$

получаем из (4.127)

$$(|\xi|^2 + k^2) F[E] = -1, \quad |\xi|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2.$$

Отсюда

$$E(x) = F^{-1}\left(-\frac{1}{|\xi|^2 + k^2}\right) = -\frac{e^{-k|x|}}{4\pi|x|}, \quad |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}. \quad (4.128)$$

При $k = 0$ получаем фундаментальное решение оператора Лапласа в R^3

$$E(x) = -\frac{1}{4\pi|x|}. \quad (4.129)$$

Сопряженное фундаментальное решение оператора Гельмгольца запишем, заменив k на $-k$. Имеем

$$E^*(x) = -\frac{e^{k|x|}}{4\pi|x|}. \quad (4.130)$$

Очевидно, полусумма

$$\frac{1}{2}(E(x) + E^*(x)) = -\frac{\operatorname{ch} k|x|}{4\pi|x|}$$

снова есть фундаментальное решение оператора Гельмгольца. Разность этих решений есть регуляярное решение уравнения

$$\Delta u - k^2 u = 0.$$

Волновое уравнение в результате применения интегрального преобразования Лапласа по времени сводится к уравнению Гельмгольца вида

$$\Delta u + k^2 u = 0.$$

Заменяя k на ik , получаем из (4.128) и (4.130) фундаментальные решения оператора $\Delta + k^2$ в R^3

$$\begin{aligned} E(x) &= -\frac{e^{-ik|x|}}{4\pi|x|}, \quad k > 0, \\ E^*(x) &= -\frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}. \end{aligned}$$

Полусумма этих решений дает фундаментальное решение оператора Гельмгольца типа стоячей волны

$$E(x) = -\frac{\cos k|x|}{4\pi|x|}.$$

Это обстоятельство, как отмечалось ранее, указывает на неединственность фундаментального решения оператора $\Delta + k^2$.

В двумерном пространстве

$$F^{-1}\left(-\frac{1}{|\xi|^2 + k^2}\right) = -\frac{1}{2\pi} K_0(k|x|), \quad k > 0,$$

где $K_0(z)$ — функция Макдональда нулевого порядка.

Поэтому получаем для оператора $\Delta - k^2$

$$E(x) = -\frac{1}{2\pi} K_0(k|x|), \quad |x| = r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Для оператора Гельмгольца $\Delta + k^2$, заменив k на $-ik$, находим

$$E(x) = -\frac{1}{2\pi} K_0(-ik|x|) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x|).$$

Второе фундаментальное решение этого оператора есть

$$E^*(x) = -\frac{1}{2\pi} K_0(ik|x|) = \frac{i}{4} H_0^{(2)}(k|x|).$$

Здесь $H_0^{(1)}(z), H_0^{(2)}(z)$ — цилиндрические функции Ганкеля нулевого порядка, первого и второго рода соответственно.

При $n=2$ фундаментальное решение оператора Лапласа определяется аналогично. Имеем для преобразования Фурье

$$F[E](\xi) = -|\xi|^2 F[E] = 1, \quad |\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}. \quad (4.131)$$

Отсюда

$$F[E] = -P \frac{1}{|\xi|^2},$$

где обобщенная функция $P \frac{1}{|x|^2} \in \mathcal{L}'$ определяется равенством [9]

$$\left(P \frac{1}{|x|^2}, \varphi \right) = \int_{|x|<1} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{|x|^2} dx + \int_{|x|>1} \frac{\varphi(x)}{|x|^2} dx, \quad \varphi(x) \in \mathcal{L}.$$

Легко проверяется, что уравнение (4.131) при этом выполняется. Имеем

$$\begin{aligned} E(x) &= -F^{-1} \left[P \frac{1}{|\xi|^2} \right] = -\frac{1}{4\pi^2} F \left[\frac{1}{|\xi|^2} \right] = \frac{1}{2\pi} \ln|x| + \frac{C_0}{2\pi}, \\ C_0 &= \int_0^1 \frac{1 - J_0(u)}{u} du - \int_0^\infty \frac{J_0(u)}{u} du, \end{aligned}$$

где $J_0(u)$ — цилиндрическая функция Бесселя.

Постоянная C_0 удовлетворяет однородному уравнению Лапласа, поэтому ее можно отбросить. Окончательно получаем

$$E = \frac{1}{2\pi} \ln|x|. \quad (4.132)$$

Это выражение для фундаментального решения оператора Лапласа в R^2 согласуется с полученным ранее (см. формулу (4.25)).

Вообще, фундаментальное решение оператора Лапласа в R^n имеет вид [9, 10]

$$E(x) = -\frac{1}{(n-2)\sigma_n} |x|^{-n+2} \quad (n \geq 3),$$

где σ_n — площадь поверхности единичной сферы в R^n .

Рассмотрим теперь построение фундаментального решения бигармонического оператора в R^2 . Это обобщенная функция, удовлетворяющая уравнению

$$\Delta \Delta E = \delta(x),$$

$$\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2.$$

Введя замену $g = \Delta E$, получим

$$\Delta g = \delta(x),$$

т. е. g — фундаментальное решение оператора Лапласа. Согласно (4.132), запишем

$$g = \frac{1}{2\pi} \ln|x| = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \ln z, \quad z = x + iy.$$

Теперь имеем

$$\Delta E = 4 \frac{\partial^2 E}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \ln z.$$

Отсюда

$$E = \frac{1}{8\pi} \operatorname{Re} \iint \ln z dz d\bar{z} + \dots = \frac{1}{8\pi} r^2 \ln r + \dots,$$

где точками обозначено гармоническое слагаемое.

Таким образом, за фундаментальное решение бигармонического оператора в R^2 можно принять функцию

$$E = \frac{1}{8\pi} |x|^2 \ln|x|.$$

4.23. Уравнения параболического типа

К этому типу относятся, например, уравнения диффузии с поглощением или рождением [36]

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu + F(x, t),$$

распространения тепла [36, 52]

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + F(x, t),$$

Шредингера [9, 10, 31]

$$ih \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V\psi.$$

В этих уравнениях c, ρ, k и $F(x, t)$ — удельная теплоемкость, плотность, коэффициент теплопроводности и интенсивность источников, $V(x)$ — потенциал поля, в котором движется квантовая частица массы m , $\psi(x, t)$ — волновая функция этой частицы, h — постоянная Планка.

Если среда однородна, то уравнение теплопроводности (уравнение Фурье) имеет вид

$$\Delta u - \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{F(x, t)}{k}, \quad a^2 = \frac{k}{c\rho}.$$

При $n = 1$ фундаментальное решение оператора теплопроводности удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) E = \delta(x, t) = \delta(x) \cdot \delta(t).$$

Применяя к этому уравнению преобразование Лапласа по переменной t и преобразование Фурье по пространственной переменной, получим

$$-\left(\xi^2 + \frac{p}{a^2}\right)w(\xi, p) = 1,$$

где $W(\xi, t) = F[E]$, $w(\xi, p) = L[W(\xi, t)] = L[F[E]]$.

После обращения решения $w(\xi, p)$ по Лапласу находим

$$W(\xi, t) = L^{-1}\left(-\frac{1}{\xi^2 + \frac{p}{a^2}}\right) = -a^2\theta(t)e^{-\xi^2 a^2 t}.$$

Обращение этой функции по Фурье дает

$$F^{-1}\left(-a^2\theta(t)e^{-\xi^2 a^2 t}\right) = -\frac{\theta(t)a}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}.$$

Таким образом, фундаментальное решение одномерного уравнения Фурье определяется равенством

$$E_1(x, t) = -\frac{\theta(t)a}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}.$$

Для случаев $n=2$ и $n=3$ имеем соответственно

$$E_2(x, t) = -\frac{\theta(t)}{4\pi t}e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}}, \quad x = (x_1, x_2), \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2,$$

$$E_3(x, t) = -\frac{\theta(t)}{8a\pi t\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}}, \quad x = (x_1, x_2, x_3), \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

4.24. Задача Коши

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение в частных производных порядка m относительно переменной t

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)u(x, t) = f(x, t), \quad f \in D'(R^{n+1}), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (4.133)$$

Обобщенной задачей Коши для уравнения (4.133) называется задача об определении решения этого уравнения — обобщенной функции $u(x; t) \in D'(R^{n+1})$, подчиняющейся следующим начальным условиям [22]:

$$\begin{aligned} u(x, +0) &= u_0(x), \\ \frac{\partial}{\partial t}u(x, +0) &= u_1(x), \\ &\dots \\ \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}}u(x, +0) &= u_{m-1}(x), \end{aligned} \quad (4.134)$$

где $u_k(x) \in D'(R^n)$ ($k = 0, 1, \dots, m-1$) — заданные обобщенные функции.

Пусть $E(x, t)$ — фундаментальное решение задачи Коши, т. е. обобщенная функция, удовлетворяющая однородному уравнению (4.133) при $f = 0$ и начальным условиям.

$$E(x,+0)=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} E(x, +0) = 0, \quad (4.135)$$

$$\frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}} E(x, +0) = 0,$$

$$\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} E(x, +0) = \delta(x).$$

Тогда решение задачи Коши (4.133), (4.134) при $f = 0$, $u_0(x) = u_1(x) = \dots = u_{m-2}(x) = 0$, а $u_{m-1}(x) \neq 0$ определяется сверткой (если она существует)

$$u(x,t) = E(x,t) * u_{m-1}(x).$$

Действительно,

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)(E(x,t) * u_{m-1}(x)) = P\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)E(x,t) * u_{m-1}(x) = 0 * u_{m-1}(x) = 0.$$

Далее, в силу (4.135) заключаем

$$u(x, +0) = E(x, +0) * u_{m-1}(x) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, +0) = \frac{\partial}{\partial t} E(x, +0) * u_{m-1}(x) = 0,$$

$$\frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}} u(x, +0) = \frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}} E(x, +0) * u_{m-1}(x) = 0,$$

$$\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} u(x, +0) = \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} E(x, +0) * u_{m-1}(x) = \delta(x) * u_{m-1}(x) = u_{m-1}(x),$$

что и требовалось.

Рассмотрим теперь решение общей задачи Коши (4.133), (4.134). Для этого продолжим функцию $u(x,t)$ и $f(x,t)$ нулем в область $t < 0$ и положим

$$\tilde{u}(x,t) = \theta(t)u(x;t), \quad \tilde{f}(x,t) = \theta(t)f(x,t).$$

Тогда

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = \left\{ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} \right\} + u_0(x) \delta(t), \quad (4.136)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} = \left\{ \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} \right\} + u_1(x) \delta(t) + u_0(x) \delta^{(1)}(t)$$

$$\frac{\partial^m \tilde{u}}{\partial t^m} = \left\{ \frac{\partial^m \tilde{u}}{\partial t^m} \right\} + u_{m-1}(x)\delta(t) + u_{m-2}(x)\delta^{(1)}(t) + \dots + u_0(x)\delta^{(m-1)}(t),$$

где выражение $\left\{ \frac{\partial^k \tilde{u}}{\partial t^k} \right\}$ — обозначает классическую производную порядка k . Очевидно

$$\left\{ \frac{\partial^k \tilde{u}}{\partial t^k} \right\} = \left\{ \frac{\partial^k u}{\partial t^k} \right\} \text{ при } t > 0.$$

С учетом равенств (4.136) задача Коши для неоднородного уравнения

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)u(x, t) = f(x, t)$$

сводится к виду

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)\tilde{u}(x, t) = g(x, t), \quad (4.137)$$

где обобщенная функция $g(x, t)$ включает в себя правую часть $\tilde{f}(x, t)$ и начальные данные.

Решение задачи Коши записывается в виде свертки в R^{n+1} фундаментального решения оператора $P\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)$ с правой частью уравнения (4.137)

$$\tilde{u}(x, t) = E(x, t) * g(x, t).$$

Волновое уравнение. Рассмотрим волновое уравнение в R^{n+1}

$$\square u = \Delta u - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x, t), \quad t > 0 \quad (4.138)$$

с начальными условиями

$$u(x, +0) = u_0(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x, +0) = u_1(x), \quad (4.139)$$

где $f(x, t)$ непрерывная при $t \geq 0$ функция, $u_0(x) \in C^1(R^n)$, $u_1(x) \in C(R^n)$.

Предположим, что классическое решение $u(x, t) \in C^2(t > 0) \cap C^1(t \geq 0)$ задачи Коши (4.138), (4.139) существует.

Введя продолженные нулем функции

$$\tilde{u} = \theta(t)u(x, t), \quad \tilde{f} = \theta(t)f(x, t),$$

представим уравнение (4.138) в виде

$$\square \tilde{u} = \tilde{f}(x, t). \quad (4.140)$$

При этом начальные условия будут такими

$$\tilde{u}(x, +0) = u_0(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} \tilde{u}(x, +0) = u_1(x).$$

Имея ввиду формулы (4.136) для обобщенных производных, получаем теперь вместо (4.140) уравнение

$$\square \tilde{u} = \tilde{f}(x, t) - \frac{1}{a^2} (u_1(x)\delta(t) + u_0(x)\delta'(t)) = g(x, t), \quad t > 0. \quad (4.141)$$

Необходимым и достаточным условием однозначной разрешимости обобщенной задачи Коши для волнового уравнения является обращение в ноль функции $f(x, t)$ при $t < 0$. При этом решение обобщенной задачи Коши представляется в виде

$$u(x, t) = E * g(x, t) = E * f - \frac{1}{a^2} E * (u_1(x) \cdot \delta(t)) - \frac{1}{a^2} E * (u_0(x) \cdot \delta'(t)), \quad t > 0, \quad (4.142)$$

где $u_0(x) \in D'(R^n)$, $u_1(x) \in D'(R^n)$, $f \in D'(R^{n+1})$.

Важно отметить, что классическое решение задачи Коши (4.138), (4.139) содержится во множестве решений уравнения (4.141), обращающихся в нуль при $t < 0$.

Далее воспользуемся соотношениями в $D'(R^{n+1})$ [8, 9]

$$G * u(x) \cdot \delta^k(t) = \frac{\partial^k}{\partial t^k} [G(x, t) * u(x)] = \frac{\partial^k G(x, t)}{\partial t^k} * u(x) \quad (k = 1, 2, \dots).$$

С учетом этого равенства формула (4.142) дает

$$u = V_n + V_n^{(0)} + V_n^{(1)}, \quad (4.143)$$

где

$$V_n = E * f, \quad V_n^{(0)} = -\frac{1}{a^2} E * u_1(x), \quad V_n^{(1)} = -\frac{1}{a^2} \frac{\partial E}{\partial t} * u_0(x), \quad t > 0.$$

Таким образом, решение обобщенной задачи Коши представляет собой сумму трех запаздывающих потенциалов. Оно непрерывно зависит от f , u_0 и u_1 в D' [8].

Если $f(x, t) \in C(t \geq 0)$ и $f(x, t) = 0$ при $t < 0$, $u_0(x) \in C^1$, $u_1(x) \in C$, то конструкция этих потенциалов при $n = 1$ может быть представлена в явном виде. Имеем

$$V_1 = E * f = -\frac{a}{2} \theta(at - |x|) \theta(t) * f(x, t) = -\frac{a}{2} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

$$V_1^{(0)} = -\frac{1}{a^2} E * u_1(x) = \frac{1}{2a} \theta(at - |x|) \theta(t) * u_1(x) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi) d\xi,$$

$$V_1^{(1)} = -\frac{1}{a^2} \frac{\partial E}{\partial t} * u_0(x) = \frac{1}{2} \delta(at - |x|) * u_0(x) = \frac{1}{2} [u_0(x - at) + u_0(x + at)].$$

Можно ослабить требования на функцию $f(x, t)$, предположив что $f \in L_{loc}^1(R^{n+1})$.

Окончательно получаем следующую формулу Даламбера решения задачи Коши для одномерного волнового уравнения (4.138)

$$u(x, t) = \frac{u_0(x - at) + u_0(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi) d\xi - \frac{a}{2} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

При $n = 2$, $f(x, t) \in C^2(t \geq 0)$, $u_0 \in C^3(R^n)$, $u_1 \in C^2(R^n)$ имеем следующие явные формулы для запаздывающих потенциалов [38].

$$\begin{aligned}
V_2 &= E * f = -\frac{a}{2\pi} \frac{\theta(at-r)}{\sqrt{a^2t^2-r^2}} * f(x,t) = -\frac{a}{2\pi} \int_0^t \int f(\xi, \tau) \frac{\theta(a(t-\tau)-|x-\xi|)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-|x-\xi|^2}} d\xi d\tau = \\
&= -\frac{a}{2\pi} \int_0^t \int_{|x-\xi|\leq a(t-\tau)} \frac{f(\xi, \tau) d\xi d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-|x-\xi|^2}}, \quad |x-\xi|^2 = (x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2, \quad r=|x|. \\
V_2^{(0)} &= -\frac{1}{a^2} E * u_1(x) = \frac{1}{2\pi a} \frac{\theta(at-|x|)}{\sqrt{a^2t^2-|x|^2}} * u_1(x) = \frac{1}{2\pi a} \int_{|x-\xi|=at} \frac{u_1(\xi) d\xi}{\sqrt{a^2t^2-|x-\xi|^2}}, \\
V_2^{(1)} &= -\frac{1}{a^2} \frac{\partial E}{\partial t} * u_0(x) = -\frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial t} (E * u_0(x)) = \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \int_{|x-\xi|=at} \frac{u_0(\xi) d\xi}{\sqrt{a^2t^2-|x-\xi|^2}}.
\end{aligned}$$

В результате с учетом (4.143) получаем представление Пуассона

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \int_{|x-\xi|=at} \frac{u_0(\xi) d\xi}{\sqrt{a^2t^2-|x-\xi|^2}} + \frac{1}{2\pi a} \int_{|x-\xi|\leq at} \frac{u_1(\xi) d\xi}{\sqrt{a^2t^2-|x-\xi|^2}} - \\
&- \frac{a}{2\pi} \int_0^t \int_{|x-\xi|\leq a(t-\tau)} \frac{f(\xi, \tau) d\xi d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-|x-\xi|^2}}.
\end{aligned}$$

Наконец, при $n=3$ имеем

$$\begin{aligned}
V_3 &= -\frac{1}{4\pi t} \delta(|x|-at) * f = -\frac{1}{4\pi} \int_{|x-\xi|=at} \frac{1}{|\xi-x|} f\left(\xi, t - \frac{|x-\xi|}{a}\right) d\xi, \\
V_3^{(0)} &= -\frac{1}{4\pi t} \delta(|x|-at) * u_1(x) = \frac{1}{4\pi t} \int_{|x-\xi|=at} u_1(\xi) ds, \\
V_3^{(1)} &= -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta(|x|-at)}{t} * u_0(x) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{t} \int_{|x-\xi|=at} u_0(\xi) ds \right\}.
\end{aligned}$$

Решение задачи Коши для волнового уравнения в R^3 определяется формулой Кирхгоффа

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{t} \int_{|x-\xi|=at} u_0(\xi) ds \right\} + \frac{1}{4\pi t} \int_{|x-\xi|=at} u_1(\xi) ds - \\
&- \frac{1}{4\pi} \int_{|x-\xi|\leq at} \frac{1}{|\xi-x|} f\left(\xi, t - \frac{|x-\xi|}{a}\right) d\xi. \tag{4.144}
\end{aligned}$$

Приведем еще формулы Герглотца–Петровского, задающие в явном виде решение задачи Коши для однородного волнового уравнения в четномерном и нечетномерном пространствах [38]

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} T_{u_0} + T_{u_1}, \tag{4.145}$$

где

$$T_u(x, t) = \frac{1}{2(2\pi)^{k+1}} \sum_{j=0}^k \frac{\partial^j}{\partial t^j} \frac{P_k^{(k-j)}(1)}{t^{2k+1-j}} \int_{|\eta|=1} u(\eta) ds, \quad n = 2k+3,$$

$$T_u(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^{k+1}} \sum_{j=0}^k \frac{\partial^j}{\partial t^j} \frac{P_k^{(k-j)}(1)}{t^{2k-j}} \int_{|\eta| \leq t} \frac{u(\eta)}{\sqrt{t^2 - |\eta|^2}} d\eta, \quad n = 2k+2,$$

$$P_0(t) = 1, \quad P_k(t) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dt^k} (t^2 - 1)^k \quad (k = 1, 2, \dots),$$

$P_k(t)$ — полиномы Лежандра [2, 23].

Замечание. Из формулы Кирхгоффа (4.144) или формулы (4.145) для нечетномерного пространства видно, что если, например, начальное возмущение $u_1(x) > 0$ локализовано в некоторой ограниченной области Ω , а остальные входные данные равны нулю, то точки A , лежащей вне $\bar{\Omega}$, возмущение достигнет к моменту времени $t_1 = d_1/a$, где $d_1 = \rho(A, \bar{\Omega})$. Далее, оно будет регистрироваться в точке A до момента $t_2 = d_2/a$, где d_2 — расстояние от A до самой удаленной от A точки $\bar{\Omega}$. В промежутке $t_1 < t < t_2$ решение $u(x, t) > 0$. Если же область Ω стягивается к началу координат, то влияние начальных данных в точке A будет регистрироваться только в момент времени $t = d/a$, где d — расстояние от точки A до начала координат. Суть этого явления (принципа Гюйгенса) состоит в том, что резко локализованное начальное состояние наблюдается в каждой точке пространства через определенное время как явление, столь же резко локализованное. Иными словами, значение решения задачи Коши в точке (x, t) зависит не от всех значений начальных данных в основании светового конуса с вершиной в точке (x, t) , а только от значений начальных данных на границе этого основания.

Каждая точка x , в которой начальные данные отличны от нуля, является центром сферической волны, имеющей скорость a . Если начальные данные обращаются в нуль вне ограниченной области Ω , то в момент времени t решение равно нулю вне области Ω , с границей поверхностью S_t , которая является огибающей семейства сфер, имеющих радиусы at и центры в точках области Ω . Начиная с некоторого момента t поверхность S_t состоит из двух связных компонент. Одна из них, более удаленная от Ω , называется передним фронтом волны, вторая — задним фронтом.

В случае четного $n \geq 2$ принцип Гюйгенса не имеет места. Если область Ω отличных от нуля начальных данных ограничена, то $u(x, t) = 0$ во всех точках отстоящих от Ω на расстоянии $\geq at$, но может быть отличным от нуля в остальных точках. Это следует из формулы (4.145) для четного n , где интегралы берутся не по сфере $|x| = at$, а по шару $|x| \leq at$. Таким образом, в этом случае волна имеет передний фронт, но задний фронт отсутствует. Это явление называется диффузией или размытием заднего фронта.

Уравнение теплопроводности. Фундаментальные решения уравнения теплопроводности

$$\Delta u - \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (4.146)$$

для случаев $n = 1, 2, 3$ определяются в п. 4.23. В общем случае фундаментальное решение имеет вид

$$E_n(x, t) = -\frac{a^2}{(2a\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}}.$$

Эта обобщенная функция удовлетворяет уравнению

$$\Delta E_n - \frac{1}{a^2} \frac{\partial E_n}{\partial t} = \delta(x, t).$$

С другой стороны, можно показать, что $E_n(x, t)$ является решением задачи Коши для уравнения (4.146) с начальным условием $E(x, +0) = \delta(x)$ в $D'(R^{n+1})$.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения теплопроводности

$$\begin{aligned} \Delta u - \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} &= -f(x, t), \quad t > 0, \\ u(x, +0) &= u_0(x). \end{aligned}$$

Если $f \in C(t \geq 0)$, $u_0 \in C(R^n)$, то $u \in C^1(t > 0) \cap C(t \geq 0)$ — классическое решение задачи Коши.

Продолжим функции $u(x, t)$, $f(x, t)$ нулем при $t < 0$. Тогда продолженные функции \tilde{u} , \tilde{f} удовлетворяют в R^{n+1} следующему уравнению теплопроводности:

$$\Delta \tilde{u} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = -\tilde{f} - \frac{1}{a^2} u_0(x) \cdot \delta(t). \quad (4.147)$$

При $t < 0$ это уравнение совпадает с исходным уравнением теплопроводности, поэтому классическое решение содержится среди тех его решений, которые обращаются в нуль при $t < 0$. В соответствии с этим обобщенной задачей Коши для уравнения теплопроводности с источником $f \in D'(R^{n+1})$ и начальным распределением $u_0 \in D'(R^n)$ называют задачу об определении обобщенной функции $u \in D'(R^{n+1})$, обращающейся в нуль при $t < 0$ и удовлетворяющей уравнению

$$\Delta u - \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} = -f(x, t) - \frac{1}{a^2} u_0(x) \cdot \delta(t). \quad (4.148)$$

Отсюда следует, что для разрешимости обобщенной задачи Коши необходимо, чтобы $f(x, t) = 0$ при $t < 0$.

Уравнение (4.148) равносильно следующему равенству:

$$\left(u, \Delta \varphi + \frac{1}{a^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) + (f, \varphi) + \frac{1}{a^2} (u_0(x), \varphi(x, 0)) = 0, \quad \forall \varphi(x, t) \in D(R^{n+1}).$$

Пусть M — класс функций, обращающихся в нуль при $t < 0$ и ограниченных в каждой полосе $0 \leq t \leq T$.

Решение обобщенной задачи Коши определяется следующей теоремой [9]. Пусть $f \in M$ и u_0 — ограниченная функция в R^n . Тогда решение соответствующей обобщенной задачи Коши существует и единственno в классе M и представляется в виде

$$u(x, t) = V(x, t) + V^{(0)}(x, t),$$

где тепловой потенциал V и поверхностный тепловой потенциал V^0 таковы:

$$V = E * f = -\frac{a^2}{(2a\sqrt{\pi t})^n} e^{\frac{-|x|^2}{4a^2t}} * f(x, t) = -\int_0^t \int_{R^n} \frac{a^2 f(\xi, \tau)}{[2a\sqrt{\pi(t-\tau)}]^n} e^{\frac{-|x-\xi|^2}{4a^2(t-\tau)}} d\xi d\tau,$$

$$V^{(0)} = E * u_0(x) \cdot \delta(t) = E(x, t) * u_0(x) = -\frac{a^2 \theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \int_{R^n} u_0(\xi) e^{\frac{-|x-\xi|^2}{4a^2t}} d\xi.$$

Решение u непрерывно зависит от f и u_0 в следующем смысле: если

$$|f - f_*| < \varepsilon, \quad |u_0 - u_0^*| < \varepsilon_0,$$

то соответствующие решения u и u_* в любой полосе $0 < t \leq T$ удовлетворяют оценке

$$|u(x, t) - u_*(x, t)| \leq T\varepsilon + \varepsilon_0.$$

Если к тому же $u_0 \in C(R^n)$, то построенное решение $u(x, t)$ удовлетворяет начальному условию: при каждом $x \in R^n$

$$u(x, t) \rightarrow u_0(x), \quad t \rightarrow +0.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ К ГЛАВЕ 4

Применения обобщенных функций в упругости

Модель линейной упругости однородного изотропного тела в предположении малых (бесконечно малых) деформаций и углов поворота имеет вид [50].

Уравнения равновесия (движения)

$$\partial_j \sigma_{ij} + X_i = 0 \left(\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right), \quad \partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (\text{П.1})$$

Соотношения Коши

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i) \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (\text{П.2})$$

Закон Гука

$$\sigma_{ij} = \lambda e \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \Leftrightarrow e_{ij} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \theta \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (\text{П.3})$$

$$e = e_{ii}, \quad \theta = \sigma_{jj}, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji}.$$

Уравнения совместности деформаций Сен-Венана

$$\partial_n \partial_p e_{mq} + \partial_m \partial_q e_{np} - \partial_m \partial_p e_{nq} - \partial_n \partial_q e_{mp} = 0, \quad (\text{П.4})$$

где $mnpq : 1212, 1313, 2323, 1213, 2123, 3132$.

Границные условия:

на поверхности тела задан вектор напряжения

$$\sigma_{ij} n_j = X_{ni} \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (\text{П.5})$$

на поверхности тела задан вектор перемещения

$$u_i = f_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (\text{П.6})$$

В соотношениях (П.1)–(П.6) $u_i, \sigma_{ij}, e_{ij}, X_j$ — компоненты вектора перемещения, тензоров напряжений, деформаций и вектора объемных сил соответственно, n_j — проекции орта нормали к поверхности тела на координатные оси, X_{ni} — компоненты вектора напряжения, действующего на площадке с внешней нормалью n , f_i — компоненты вектора перемещения, заданного на поверхности тела; E и μ — модули упругости первого и второго рода, ν — коэффициент Пуассона, δ_{ij} — символ Кронекера. В изотропной среде мы имеем два независимых упругих параметра: модуль упругости первого рода (модуль Юнга) E и коэффициент Пуассона ν . Остальные параметры связаны с ними следующими соотношениями:

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}.$$

Из приведенных выше уравнений видно, что вектор перемещения, тензоры напряжений и деформаций должны быть достаточно гладкими функциями [49].

При решении задачи теории упругости в перемещениях, когда за основные неизвестные приняты три функции u_1, u_2, u_3 , из уравнений (П.1) исключают напряжения при помощи соотношений Коши (П.2) и закона Гука (П.3). При этом задача сводится к интегрированию уравнений равновесия (движения) в перемещениях Ламе [49, 50]

$$\Delta u_i + \sigma \partial_i (\partial_k u_k) + \frac{X_i}{\mu} = 0 \left(\frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right) \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (\text{П.7})$$

$$c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad \sigma = \frac{1}{1-2\nu}$$

и выполнению граничных условий на поверхности тела $\partial\Omega$:
по напряжениям

$$\left. (\lambda \partial_k u_k \delta_{ij} + \mu (\partial_i u_j + \partial_j u_i)) n_j \right|_{\partial\Omega} = X_{ni}(x), \quad x \in \partial\Omega,$$

или перемещениям

$$u_i|_{\partial\Omega} = f_i(x) \quad (i = 1, 2, 3),$$

или смещанным, когда на части поверхности $\partial\Omega$ задается граничное условие (П.5), а на оставшейся части — граничное условие (П.6). После определения вектора перемещения u_i вычисляются деформации и напряжения по формулам (П.2) и (П.3).

При решении задачи теории упругости в напряжениях, когда за основные неизвестные принимаются шесть компонент тензора напряжения, из условий совместности деформации (П.4) исключаются деформации при помощи закона Гука. В результате приходят к системе уравнений в напряжениях Бельтрами–Митчелла (по m не суммировать)

$$\Delta \sigma_{mm} + \frac{1}{1+\nu} \partial_m^2 (\sigma_{kk}) = -2 \partial_m X_m - \frac{\nu}{1-\nu} (\partial_k X_k) \quad (m = 1, 2, 3),$$

$$\Delta \sigma_{mn} + \frac{1}{1+\nu} \partial_m \partial_n (\sigma_{kk}) = -(\partial_m X_n + \partial_n X_m) \quad (m, n = 1, 2; 2, 3; 1, 3).$$

К системе из шести уравнений необходимо присоединить три уравнения равновесия (П.1).

После определения тензора напряжения из полученной системы уравнений и граничных условий (П.5) вычисляем тензор деформаций e_{ij} и вектор перемещения u_i . Последнее возможно при достаточной гладкости полевых величин, так как условия совместности деформаций выполнены.

В случае плоской деформации бесконечно длинного цилиндрического тела вдоль оси x_3 или плоского напряженного состояния тонкой плоской пластинки имеем:

уравнения равновесия (движения)

$$\partial_1 \sigma_{11} + \partial_2 \sigma_{12} + X_1 = 0 \quad \left(\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \right), \quad (\text{П.8})$$

$$\partial_1 \sigma_{12} + \partial_2 \sigma_{22} + X_2 = 0 \quad \left(\rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \right),$$

закон Гука

$$\sigma_{11} = \lambda e + 2\mu \partial_1 u_1, \quad \sigma_{22} = \lambda e + 2\mu \partial_2 u_2, \quad \sigma_{12} = \mu (\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1), \quad e = \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2,$$

условие совместности деформации

$$\partial_1^2 e_{22} + \partial_2^2 e_{11} = 2\partial_1 \partial_2 e_{12}, \quad (\text{П.9})$$

уравнения Ламе

$$\Delta u_1 + \sigma \partial_1 (\partial_k u_k) + \frac{X_1}{\mu} = 0 \left(\frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \right), \quad (\text{П.10})$$

$$\Delta u_2 + \sigma \partial_2 (\partial_k u_k) + \frac{X_2}{\mu} = 0 \left(\frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \right),$$

граничные условия в напряжениях на контуре Γ поперечного сечения цилиндра

$$\sigma_{11} \cos \alpha + \sigma_{12} \sin \alpha = X_{1n},$$

$$\sigma_{12} \cos \alpha + \sigma_{22} \sin \alpha = X_{2n},$$

где α — угол, образованный внешней нормалью к Γ и осью $0x_1$.

Деформации определяются через напряжения по закону Гука (для плоского напряженного состояния)

$$e_{11} = \frac{1}{E} (\sigma_{11} - \nu \sigma_{22}), \quad e_{22} = \frac{1}{E} (\sigma_{22} - \nu \sigma_{11}), \quad 2e_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\mu}.$$

Для плоского деформированного состояния закон Гука имеет аналогичную форму, необходимо лишь произвести замену

$$E \rightarrow E_0 (1 - \nu^2), \quad \nu \rightarrow \nu_0 (1 - \nu).$$

Уравнение (П.9) после исключения из него деформаций приобретает вид

$$\Delta(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -(1 + \nu)(\partial_1 X_1 + \partial_2 X_2).$$

К нему необходимо присоединить два уравнения равновесия в напряжениях (П.8).

1. Действие сосредоточенной силы в упругом пространстве. Отнесем пространство к декартовым прямолинейным осям $0x_1 x_2 x_3$. Пусть в начале координат приложена сосредоточенная сила $Q = (q_1, q_2, q_3)$. Для определения поля перемещений в теле построим сначала матрицу фундаментальных решений $\|u_{ij}\|$ ($i, j = 1, 2, 3$), где u_{ij} — перемещение в направлении оси x_i от единичной силы, действующей в направлении оси x_j . Учитывая то, что пространственное распределение сосредоточенной в точке силы описывается дельта-функцией, получим из (П.10) систему

$$\Delta u_{mn} + \sigma \partial_m (\partial_k u_{kn}) = -\frac{1}{\mu} \delta_{mn} \delta(x) \quad (m, n = 1, 2, 3), \quad (\text{П.11})$$

где δ_{mn} — символ Кронекера, $\delta(x) = \delta(x_1) \cdot \delta(x_2) \cdot \delta(x_3)$ — трехмерная дельта-функция.

Таким образом, компоненты матрицы фундаментальных решений — обобщенные функции, удовлетворяющие обобщенной системе Ламе (П.11) и условиям на бесконечности

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u_{mn}(x) = 0. \quad (\text{П.12})$$

Для интегрирования этой системы с учетом условия (П.12) применим преобразование Фурье по всем пространственным переменным

$$F[u_{mn}] = \int e^{i(\xi, x)} u_{mn}(x) dx = U_{mn}(\xi).$$

Тогда, вместо (П.11) будем иметь

$$|\xi|^2 U_{mn}(\xi) + \sigma \xi_m \xi_k U_{kn}(\xi) = \frac{\delta_{mn}}{\mu} \quad (m, n = 1, 2, 3). \quad (\text{П.13})$$

Умножив эти уравнения на ξ_m ($m = 1, 2, 3$) и сворачивая результат по m , запишем

$$|\xi|^2 (\xi_m U_{mn}) + \sigma \xi_m \xi_m (\xi_k U_{kn}) = \frac{1}{\mu} \xi_m \delta_{mn}.$$

Отсюда

$$\xi_m U_{mn} = \frac{\xi_n}{\mu(1+\sigma)|\xi|^2}.$$

Вставляя этот результат в (П.13), находим

$$U_{mn}(\xi) = \frac{\delta_{mn}}{\mu|\xi|^2} - \frac{\sigma \xi_m \xi_n}{(1+\sigma)\mu|\xi|^4}. \quad (\text{П.14})$$

Далее используем соотношения

$$F\left[\frac{1}{|x|}\right] = \frac{4\pi}{|\xi|^2}, \quad F\left[\frac{x_n}{|x|}\right] = 8\pi i \frac{\xi_n}{|\xi|^4}, \quad F\left[\partial_m \frac{x_n}{|x|}\right] = 8\pi \frac{\xi_n \xi_m}{|\xi|^4}.$$

С другой стороны,

$$\partial_m \frac{x_n}{|x|} = \begin{cases} \frac{1}{|x|} - \frac{x_m^2}{|x|^3}, & m = n \\ -\frac{x_m x_n}{|x|^3}, & m \neq n \end{cases} = \frac{\delta_{mn}}{|x|} - \frac{x_m x_n}{|x|^3}.$$

Обращение преобразования Фурье (П.14) дает

$$\begin{aligned} u_{mn}(x) &= F^{-1}[U_{mn}(\xi)] = \frac{\delta_{mn}}{4\pi\mu|x|} - \frac{\sigma}{8\pi\mu(1+\sigma)} \left\{ \frac{\delta_{mn}}{|x|} - \frac{x_m x_n}{|x|^3} \right\} = \\ &= \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)|x|} \left\{ (3-4\nu)\delta_{mn} + \frac{x_m x_n}{|x|^2} \right\}. \end{aligned}$$

Пусть теперь сила $Q = (q_1, q_2, q_3)$ приложена в точке $x_0 = (x_{10}, x_{20}, x_{30})$ упругого пространства. Тогда поле перемещений можно, очевидно, определить по формуле

$$u_m(x) = q_n u_{mn}(x - x_0) \quad (m, n = 1, 2, 3).$$

Если усилия $Q(x) = (q_1(x), q_2(x), q_3(x))$ распределены в некоторой области $\Omega \in R^3$, то поле перемещений в теле определяется сверткой

$$u_m(x) = q_n(x) * u_{mn}(x).$$

Для финитной обобщенной функции $q_n(x)$ можно записать

$$u_m(x) = \int q_n(\xi) u_{mn}(x - \xi) d\xi \quad (m, n = 1, 2, 3).$$

2. Сосредоточенная сила в упругой плоскости. Метод напряжений. Пусть в начале координат на плоскости $x_1 0 x_2$ приложена единичная сосредоточенная сила в направлении оси $0x_1$. Соответствующая система уравнений для этого случая имеет вид

$$\partial_1 \sigma_{11} + \partial_2 \sigma_{12} = -\delta(x), \quad x = (x_1, x_2),$$

$$\partial_1 \sigma_{12} + \partial_2 \sigma_{22} = 0,$$

$$\Delta(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -\frac{\partial_1 \delta(x)}{1-\nu}.$$

Применив к этим уравнениям интегральное преобразование Фурье, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно трансформат $S_{ij} = F[\sigma_{ij}]$

$$\xi_1 S_{11} + \xi_2 S_{12} = -i,$$

$$\xi_1 S_{12} + \xi_2 S_{22} = 0,$$

$$|\xi|^2 (S_{11} + S_{22}) = -\frac{i\xi_1}{1-\nu}.$$

Решение системы дает

$$S_{11} = -\frac{i\xi_1}{|\xi|^2} - \frac{i\xi_1 \xi_2^2}{(1-\nu)|\xi|^4}, \quad S_{22} = \frac{i\xi_1}{|\xi|^2} - \frac{i\xi_1^3}{(1-\nu)|\xi|^4},$$

$$S_{12} = -\frac{i\xi_2}{|\xi|^2} + \frac{i\xi_1^2 \xi_2}{(1-\nu)|\xi|^4}.$$

Учитывая легко выводимые соотношения

$$F\left[\frac{x_1}{|x|^2}\right] = 2\pi i \frac{\xi_1}{|\xi|^2}, \quad F\left[\frac{x_1 x_2^2}{|x|^4}\right] = \pi i \frac{\xi_1 (\xi_1^2 - \xi_2^2)}{|\xi|^4}, \quad F\left[\frac{x_1^3 + 3x_1 x_2^2}{|x|^4}\right] = 4\pi i \frac{\xi_1^3}{|\xi|^4},$$

$$F\left[\frac{x_2^3 - x_1 x_2^2}{|x|^4}\right] = 4\pi i \frac{\xi_1^2 \xi_2}{|\xi|^4}, \quad F\left[\frac{x_1^3 - x_1 x_2^2}{|x|^4}\right] = 4\pi i \frac{\xi_1 \xi_2^2}{|\xi|^4},$$

получаем окончательно выражения для напряжений

$$\sigma_{11} = -\frac{x_1}{2\pi|x|^2} - \frac{x_1^3 - x_1 x_2^2}{4\pi(1-\nu)|x|^4} = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \frac{x_1}{|x|^2} \left\{ 1 - 2\nu + 2 \frac{x_1^2}{|x|^2} \right\},$$

$$\sigma_{22} = \frac{x_1}{2\pi|x|^2} - \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \frac{x_1^3 + 3x_1 x_2^2}{|x|^4} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \frac{x_1}{|x|^2} \left\{ 1 - 2\nu - 2 \frac{x_2^2}{|x|^2} \right\},$$

$$\sigma_{12} = -\frac{x_2}{2\pi|x|^2} + \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \frac{x_2^3 - x_1 x_2^2}{|x|^4} = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \frac{x_2}{|x|^2} \left\{ 1 - 2\nu + 2 \frac{x_1^2}{|x|^2} \right\}.$$

Аналогичным путем определяются компоненты тензора напряжения при действии единичной сосредоточенной силы в направлении оси $0x_2$.

3. Воздействие упругой плоскости сосредоточенным гармоническим источником. Пусть единичное гармоническое усилие действует в точке $x=0$ в направлении оси $0x_1$. В этом случае все полевые величины имеют временной множитель $e^{-i\omega t}$, где ω — круговая частота, t — время. Исключив из уравнений движения (П.10) время, запишем основную систему относительно амплитуд соответствующих величин (для амплитуд сохраним те же обозначения u_k)

$$\Delta u_1 + \sigma \partial_1 (\partial_k u_k) + \gamma_1^2 u_1 = -\frac{1}{\mu} \delta(x), \quad x = (x_1, x_2),$$

$$\Delta u_2 + \sigma \partial_2 (\partial_k u_k) + \gamma_2^2 u_2 = 0, \quad \gamma_2 = \frac{\omega}{c_2}.$$

Применяя здесь преобразование Фурье по обеим пространственным переменным, приходим к линейным алгебраическим уравнениям относительно трансформант $U_k(\xi) = F[u_k(x)]$

$$(\gamma_1^2 - |\xi|^2 - \sigma \xi_1^2) U_1 - \sigma \xi_1 \xi_2 U_2 = -\frac{1}{\mu},$$

$$-\sigma \xi_1 \xi_2 U_1 + (\gamma_2^2 - |\xi|^2 - \sigma \xi_2^2) U_2 = 0,$$

решение которой дает

$$U_1(\xi) = -\frac{1}{\mu(1+\sigma)} \left\{ \frac{1}{\gamma_1^2 - |\xi|^2} - \frac{\sigma \xi_2^2}{(\gamma_1^2 - |\xi|^2)(\gamma_2^2 - |\xi|^2)} \right\},$$

$$U_2(\xi) = -\frac{\sigma}{\mu(1+\sigma)} \frac{\xi_1 \xi_2}{(\gamma_1^2 - |\xi|^2)(\gamma_2^2 - |\xi|^2)}.$$

Далее исходим из соотношений

$$\frac{1}{\gamma^2 - |\xi|^2} = F \left[-\frac{1}{2\pi} K_0(-i\gamma|x|) \right] = -\frac{i}{4} F \left[H_0^{(1)}(\gamma|x|) \right],$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\gamma_1^2 - |\xi|^2)(\gamma_2^2 - |\xi|^2)} &= \frac{1}{\gamma_1^2 - \gamma_2^2} \left[\frac{1}{\gamma_2^2 - |\xi|^2} - \frac{1}{\gamma_1^2 - |\xi|^2} \right] = F[\Phi(x)], \\ \frac{\xi^2}{(\gamma_1^2 - |\xi|^2)(\gamma_2^2 - |\xi|^2)} &= -F[\partial_2^2 \Phi(x)], \quad \gamma_1^2 - \gamma_2^2 = -\gamma_2^2 \frac{\sigma}{1+\sigma} = -\frac{\gamma_2^2}{2(1-\nu)}, \\ \frac{\xi_1 \xi_2}{(\gamma_1^2 - |\xi|^2)(\gamma_2^2 - |\xi|^2)} &= -F[\partial_1 \partial_2 \Phi(x)], \quad \Phi(x) = \frac{H_0^{(1)}(\gamma_2|x|) - H_0^{(1)}(\gamma_1|x|)}{\gamma_2^2 - \gamma_1^2}. \end{aligned}$$

В результате получаем волновое поле перемещений

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \frac{1}{4\mu(1+\sigma)} \operatorname{Re} \left\{ i e^{-i\alpha x} \left[H_0^{(1)}(\gamma_2|x|) - \sigma \partial_2^2 \frac{H_0^{(1)}(\gamma_2|x|) - H_0^{(1)}(\gamma_1|x|)}{\gamma_2^2 - \gamma_1^2} \right] \right\}, \\ u_2(x) &= -\frac{\sigma}{4\mu(1+\sigma)} \operatorname{Re} \left\{ i e^{-i\alpha x} \partial_1 \partial_2 \frac{H_0^{(1)}(\gamma_2|x|) - H_0^{(1)}(\gamma_1|x|)}{\gamma_2^2 - \gamma_1^2} \right\}, \quad |x|=r. \end{aligned}$$

4. Реакция упругого слоя на сосредоточенное нагружение. В декартовой прямолинейной системе координат $Ox_1 x_2 x_3$ рассмотрим упругий слой $-\infty < x_1, x_2 < \infty$, $-h \leq x_3 \leq h$, на основаниях которого $x_3 = \pm h$ имеют место смешанные граничные условия (шарнирного опирания)

$$u_3 = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0.$$

Пусть вдоль шнура $x_1 = x_2 = 0$, $-h \leq x_3 \leq h$ распределены усилия интенсивности $P_k(x_3)$ ($k = 1, 2, 3$). Имея в виду симметричное относительно срединной плоскости слоя напряженное состояние и полагая, что функции $P_k(x_3)$ представимы своими рядами Фурье (при необходимости в пространстве обобщенных функций), запишем

$$\begin{aligned} P_k(x_3) &= \sum_{n=0}^{\infty} P_{kn} \cos \gamma_n x_3 \quad (k=1,2), \\ P_3(x_3) &= \sum_{n=1}^{\infty} P_{3n} \sin \gamma_n x_3, \quad \gamma_n = \pi n/h, \quad -h \leq x_3 \leq h. \end{aligned}$$

Система уравнений Ламе для рассматриваемого случая имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta u_1 + \sigma \partial_1 e + \frac{1}{\mu} X_1 &= 0, \quad e = \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \partial_3 u_3, \\ \Delta u_2 + \sigma \partial_2 e + \frac{1}{\mu} X_2 &= 0, \quad X_k = P_k(x_3) \delta(x_1, x_2), \\ \Delta u_3 + \sigma \partial_3 e + \frac{1}{\mu} X_3 &= 0 \quad (k=1,2,3), \end{aligned} \tag{П.15}$$

где $\delta(x_1, x_2)$ — двумерная дельта-функция.

В соответствии со структурой однородных решений для рассматриваемого случая [55] будем разыскивать компоненты вектора перемещения и объемное расширение в виде

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, e) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, e_n \right\} \cos \gamma_n x_3, \\ u_3 &= \sum_{n=1}^{\infty} u_3^{(n)} \sin \gamma_n x_3, \quad e_n = \partial_1 u_1^{(n)} + \partial_2 u_2^{(n)} + \gamma_n u_3^{(n)}. \end{aligned} \quad (\text{П.16})$$

Исключая в (П.15) толщинную координату x_3 , приходим с учетом формул (П.16) к следующей системе уравнений относительно коэффициентов Фурье $u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, u_3^{(n)}$ и e_n :

$$\begin{aligned} \kappa_n u_1^{(n)} + \sigma \partial_1 e_n + \frac{1}{\mu} P_{1n} \delta(x) &= 0, \quad \kappa_n = \Delta - \gamma_n^2, \\ \kappa_n u_2^{(n)} + \sigma \partial_2 e_n + \frac{1}{\mu} P_{2n} \delta(x) &= 0, \quad x = (x_1, x_2) \in R^2, \\ \kappa_n u_3^{(n)} - \sigma \gamma_n e_n + \frac{1}{\mu} P_{3n} \delta(x) &= 0, \quad \gamma_n = \pi n / h. \end{aligned} \quad (\text{П.17})$$

Интегрирование этой системы проведем в пространстве обобщенных функций D' . Имеем для коэффициентов Фурье e_n

$$\kappa_n e_n = -\frac{1}{\mu(1+\sigma)} \sum_{k=1}^3 P_{kn} \partial_k \delta(x) = f_n, \quad \partial_3 = \gamma_n \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (\text{П.18})$$

Пусть E_n — фундаментальное решение оператора Гельмгольца κ_n . Тогда решение уравнения (П.18) представимо в виде свертки

$$e_n = f_n * E_n = -\frac{1}{\mu(1+\sigma)} \sum_{k=1}^3 P_{kn} (\partial_k \delta * E_n) = -\frac{1}{\mu(1+\sigma)} \sum_{k=1}^3 P_{kn} \partial_k E_n.$$

Поскольку $E_n = -(2\pi)^{-1} K_0(\gamma_n r)$, где $K_p(y)$ — цилиндрическая функция Макдональда порядка p , то имеем окончательно

$$e_n = \frac{1}{2\pi\mu(1+\sigma)} \sum_{k=1}^3 P_{kn} \partial_k K_0(\gamma_n r), \quad r = |x| \quad (n = 1, 2, \dots).$$

После определения функций e_n получаем разделенную систему

$$\begin{aligned} \kappa_n u_1^{(n)} &= -\frac{\sigma}{2\pi\mu(1+\sigma)} \sum_{k=1}^3 P_{kn} \partial_1 \partial_k K_0(\gamma_n r) - \frac{1}{\mu} P_{1n} \delta(x) \quad (n = 1, 2, \dots), \\ \kappa_n u_2^{(n)} &= -\frac{\sigma}{2\pi\mu(1+\sigma)} \sum_{k=1}^3 P_{kn} \partial_2 \partial_k K_0(\gamma_n r) - \frac{1}{\mu} P_{2n} \delta(x), \\ \kappa_n u_3^{(n)} &= \frac{\sigma \gamma_n}{2\pi\mu(1+\sigma)} \sum_{k=1}^3 P_{kn} \partial_k K_0(\gamma_n r) - \frac{1}{\mu} P_{3n} \delta(x). \end{aligned} \quad (\text{П.19})$$

Воспользуемся теперь легко выводимым соотношением

$$\kappa_n(rK_1(\gamma_n r)) = -2\gamma_n K_0(\gamma_n r) \quad (n=1, 2, \dots).$$

Тогда непосредственно из системы (П.19) находим

$$\begin{aligned} u_1^{(n)} &= \frac{1}{c\gamma_n} \sum_{k=1}^3 P_{kn} \partial_1 \partial_k \{rK_1(\gamma_n r)\} + \frac{P_{1n}}{2\pi\mu} K_0(\gamma_n r), \\ u_2^{(n)} &= \frac{1}{c\gamma_n} \sum_{k=1}^3 P_{kn} \partial_2 \partial_k \{rK_1(\gamma_n r)\} + \frac{P_{2n}}{2\pi\mu} K_0(\gamma_n r), \\ u_3^{(n)} &= -\frac{1}{c} \sum_{k=1}^3 P_{kn} \partial_k \{rK_1(\gamma_n r)\} + \frac{P_{3n}}{2\pi\mu} K_0(\gamma_n r) \quad (n=1, 2, \dots), \\ c &= 8\pi\mu(1-\nu). \end{aligned} \quad (\text{П.20})$$

Отдельно следует рассмотреть случай $n=0$. Уравнения (П.17) приобретают в этом случае вид

$$\Delta u_1^{(0)} + \sigma \partial_1 e_0 + \frac{1}{\mu} P_{10} \delta(x) = 0,$$

$$\Delta u_2^{(0)} + \sigma \partial_2 e_0 + \frac{1}{\mu} P_{20} \delta(x) = 0,$$

$$\Delta e_0 + \frac{1}{\mu(1+\sigma)} \sum_{k=1}^2 P_{k0} \partial_k \delta(x) = 0.$$

Интегрирование этой системы в D' дает

$$e_0 = -\frac{1}{2\pi\mu(1+\sigma)} \sum_{k=1}^2 P_{k0} \partial_k \ln r^*, \quad r^* = \frac{r}{l},$$

$$u_1^{(0)} = \frac{1}{2c} \sum_{k=1}^2 P_{k0} \partial_1 \partial_k \{r^2 (\ln r^* - 1)\} - \frac{P_{10}}{2\pi\mu} \ln r^*, \quad (\text{П.21})$$

$$u_2^{(0)} = \frac{1}{2c} \sum_{k=1}^2 P_{k0} \partial_2 \partial_k \{r^2 (\ln r^* - 1)\} - \frac{P_{20}}{2\pi\mu} \ln r^*,$$

где l — некоторый характерный линейный размер.

Окончательные результаты получим, выполнив предписанные формулами (П.20), (П.21) операции. Имеем после преобразований

$$u_1^{(0)} = \frac{P_{10}}{c} \left(\frac{1}{2} \cos 2\alpha - \kappa \ln r^* \right) + \frac{P_{20}}{2c} \sin 2\alpha,$$

$$u_2^{(0)} = \frac{P_{10}}{2c} \sin 2\alpha - \frac{P_{20}}{c} \left(\frac{1}{2} \cos 2\alpha + \kappa \ln r^* \right), \quad (\text{П.22})$$

$$\begin{aligned} u_1^{(n)} &= \frac{P_{1n}}{c} \{ \gamma_n r K_1(\gamma_n r) \cos^2 \alpha + \kappa K_0(\gamma_n r) \} + \\ &+ \frac{P_{2n}}{2c} \gamma_n r K_1(\gamma_n r) \sin 2\alpha - \frac{P_{3n}}{c} \gamma_n r K_0(\gamma_n r) \cos \alpha, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_2^{(n)} &= \frac{P_{1n}}{2c} \gamma_n r K_1(\gamma_n r) \sin 2\alpha + \frac{P_{2n}}{c} \left\{ \gamma_n r K_1(\gamma_n r) \sin^2 \alpha + \kappa K_0(\gamma_n r) \right\} - \\
 &\quad - \frac{P_{3n}}{c} \gamma_n r K_0(\gamma_n r) \sin \alpha \quad (n=1,2,\dots), \\
 u_3^{(n)} &= \frac{P_{1n}}{c} \gamma_n r K_0(\gamma_n r) \cos \alpha + \frac{P_{2n}}{c} \gamma_n r K_0(\gamma_n r) \sin \alpha - \\
 &\quad - \frac{P_{3n}}{c} \left\{ \gamma_n r K_1(\gamma_n r) - 4(1-\nu) K_0(\gamma_n r) \right\}, \\
 \kappa &= 3-4\nu, \quad z = x_1 + ix_2 = re^{i\alpha}.
 \end{aligned} \tag{П.23}$$

Интерес представляет характер поведения вектора перемещения в окрестности носителя сосредоточенного функционала. Используя асимптотические формулы для функций $K_0(z)$ и $K_1(z)$ в окрестности нуля

$$K_0(z) = -\ln z + O(1), \quad K_1(z) = \frac{1}{z} + O(1),$$

получаем в соответствии с формулами (П.23) следующую главную асимптотику вектора перемещения в нуле

$$\begin{aligned}
 u_1^{(0)} &= -\frac{\kappa P_{1n}}{c} \ln r^*, \quad u_2^{(0)} = -\frac{\kappa P_{2n}}{c} \ln r^* \quad (n=0,1,2,\dots), \\
 u_3^{(0)} &= -\frac{4(1-\nu)}{c} P_{3n} \ln r^* \quad (n=1,2,\dots).
 \end{aligned}$$

С другой стороны, из (П.20), (П.21) следует, что вектор перемещения состоит из бигармонической части, которая распространяется на всю область, занятую слоем, и имеет логарифмический рост на бесконечности и экспоненциально затухающей части, локализованной в окрестности носителя сингулярного функционала.

Для компонентов тензора напряжения, согласно представлениям (П.16), можем записать

$$\begin{aligned}
 \{\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}, \sigma_{33}\} &= \sum_{n=0}^{\infty} \{\sigma_{11}^{(n)}, \sigma_{12}^{(n)}, \sigma_{22}^{(n)}, \sigma_{33}^{(n)}\} \cos \gamma_n x_3, \\
 \{\sigma_{13}, \sigma_{23}\} &= \sum_{n=1}^{\infty} \{\sigma_{13}^{(n)}, \sigma_{23}^{(n)}\} \sin \gamma_n x_3, \quad \gamma_n = \pi n / h,
 \end{aligned}$$

где σ_{ij} и $\sigma_{ij}^{(n)}$ — компоненты тензора напряжения и их коэффициенты Фурье соответственно.

Из закона Гука (П.3) и соотношений Коши (П.2) получаем следующие выражения для коэффициентов $\sigma_{ij}^{(n)}$:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11}^{(n)} &= \lambda e_n + 2\mu \partial_1 u_1^{(n)}, \quad \sigma_{22}^{(n)} = \lambda e_n + 2\mu \partial_2 u_2^{(n)}, \quad \sigma_{33}^{(n)} = \lambda e_n + 2\mu \gamma_n u_3^{(n)}, \\
 \sigma_{12}^{(n)} &= \mu \left(\partial_1 u_2^{(n)} + \partial_2 u_1^{(n)} \right), \quad \sigma_{13}^{(n)} = \mu \left(\partial_1 u_3^{(n)} - \gamma_n u_1^{(n)} \right), \quad \sigma_{23}^{(n)} = \mu \left(\partial_2 u_3^{(n)} - \gamma_n u_2^{(n)} \right).
 \end{aligned}$$

Отсюда находим стандартные комбинации «напряжений»

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^{(n)} + \sigma_{22}^{(n)} &= 2\lambda e_n + 4\mu \operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(u_1^{(n)} + iu_2^{(n)} \right) \right\} \quad (n=1,2,\dots), \\ \sigma_{22}^{(n)} - \sigma_{11}^{(n)} + 2i\sigma_{12}^{(n)} &= -4\mu \frac{\partial}{\partial z} \left(u_1^{(n)} - iu_2^{(n)} \right), \\ \sigma_{13}^{(n)} - i\sigma_{23}^{(n)} &= \mu \left\{ 2 \frac{\partial}{\partial z} u_3^{(n)} - \gamma_n \left(u_1^{(n)} - iu_2^{(n)} \right) \right\}, \quad 2 \frac{\partial}{\partial z} = \partial_1 - i\partial_2.\end{aligned}\quad (\text{П.24})$$

Функции $u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, u_3^{(n)}$ определены в (П.23). Подстановка их в выражения (П.24) дает

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^{(0)} + \sigma_{22}^{(0)} &= -\frac{P_{10} \cos \alpha + P_{20} \sin \alpha}{2\pi(1-\nu)r}, \\ \sigma_{22}^{(0)} - \sigma_{11}^{(0)} + 2i\sigma_{12}^{(0)} &= \frac{2\mu}{c} \left\{ (P_{10} + iP_{20}) \frac{\bar{z}}{z^2} + \kappa (P_{10} - iP_{20}) \frac{1}{z} \right\}, \\ \sigma_{11}^{(n)} + \sigma_{22}^{(n)} &= \frac{\gamma_n}{4\pi(1-\nu)} \left\{ P_{3n} \left[\gamma_n r K_1(\gamma_n r) - 2(1-2\nu) K_0(\gamma_n r) \right] - \right. \\ &\quad \left. - \gamma_n (P_{1n} \cos \alpha + P_{2n} \sin \alpha) r K_2(\gamma_n r) \right\}, \quad (n=1,2,\dots) \\ \sigma_{22}^{(n)} - \sigma_{11}^{(n)} + 2i\sigma_{12}^{(n)} &= \frac{e^{-i\alpha} \gamma_n}{8\pi(1-\nu)} \left\{ P_{1n} \left[\gamma_n r (e^{-2i\alpha} K_2(\gamma_n r) + K_0(\gamma_n r)) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2\kappa K_1(\gamma_n r) \right] + iP_{2n} \left[\gamma_n r (e^{-2i\alpha} K_2(\gamma_n r) - K_0(\gamma_n r)) - 2\kappa K_1(\gamma_n r) \right] - \right. \\ &\quad \left. - 2P_{3n} \gamma_n e^{-i\alpha} r K_1(\gamma_n r) \right\}, \\ \sigma_{13}^{(n)} - i\sigma_{23}^{(n)} &= \frac{\gamma_n}{4\pi(1-\nu)} \left\{ P_{3n} e^{-i\alpha} \left[\gamma_n r K_0(\gamma_n r) - 2(1-\nu) K_1(\gamma_n r) \right] - \right. \\ &\quad \left. - P_{1n} \left[(1-2\nu) K_0(\gamma_n r) + \gamma_n r \cos \alpha e^{-i\alpha} K_1(\gamma_n r) \right] - \right. \\ &\quad \left. - P_{2n} \left[-i(1-2\nu) K_0(\gamma_n r) + \gamma_n r \sin \alpha e^{-i\alpha} K_1(\gamma_n r) \right] \right\}, \\ \sigma_{33}^{(n)} &= \frac{\gamma_n}{4\pi(1-\nu)} \left\{ P_{1n} \left[\gamma_n r K_0(\gamma_n r) - 2\nu K_1(\gamma_n r) \right] \cos \alpha + \right. \\ &\quad \left. + P_{2n} \left[\gamma_n r K_0(\gamma_n r) - 2\nu K_1(\gamma_n r) \right] \sin \alpha + P_{3n} \left[(4-2\nu) K_0(\gamma_n r) - \gamma_n r K_1(\gamma_n r) \right] \right\}, \\ z &= re^{i\alpha} = x_1 + ix_2, \quad \bar{z} = x_1 - ix_2.\end{aligned}\quad (\text{П.25})$$

Очевидно, первые две формулы в (П.25) определяют тензор напряжения (в условиях плоской деформации) при действии сосредоточенной силы (P_{10}, P_{20}). Они могут быть получены также путем прямого предельного перехода при $n \rightarrow 0$ в соответствующих комбинациях, определенных выше.

Главная асимптотика тензора напряжения находится из соотношений (П.25). Имеем в окрестности носителя сосредоточенного функционала

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^{(n)} + \sigma_{22}^{(n)} &= -\frac{1}{2\pi(1-\nu)r} (P_{1n} \cos \alpha + P_{2n} \sin \alpha) \quad (n=0,1,\dots), \\ \sigma_{22}^{(n)} - \sigma_{11}^{(n)} + 2i\sigma_{12}^{(n)} &= \frac{e^{-i\alpha}}{4\pi(1-\nu)r} [(P_{1n} + iP_{2n})e^{-2i\alpha} + \kappa(P_{1n} - iP_{2n})], \\ \sigma_{13}^{(n)} - i\sigma_{23}^{(n)} &= -\frac{P_{3n}}{2\pi r} e^{-i\alpha} \quad (n=1,2,\dots), \\ \sigma_{33}^{(n)} &= -\frac{\nu}{2\pi(1-\nu)r} (P_{1n} \cos \alpha + P_{2n} \sin \alpha).\end{aligned}$$

5. Границная задача теории упругости о гармонических колебаниях слоя с цилиндрическими сквозными полостями. В декартовой прямолинейной системе координат $Ox_1x_2x_3$ рассмотрим упругий однородный изотропный слой $-\infty < x_1, x_2 < \infty, |x_3| \leq h$, ослабленный сквозными туннельными полостями с общей границей поперечного сечения $\Gamma = \bigcup \Gamma_j (\bigcap \Gamma_j = \emptyset, j=1,2,\dots,N)$. Будем полагать, что Γ_j — простые замкнутые контуры без точек самопересечения с непрерывными по Гёльдеру кривизнами. На поверхности полостей $S = \bigcup S_\nu$ зададим вектор напряжений $(X_{1n}, X_{2n}, X_{3n})(x,t)$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in S$. На основаниях слоя примем однородные граничные условия смешанного типа

$$u_1 = u_2 = \sigma_{33} = 0, \quad x_3 = \pm h, \quad t > 0. \quad (\text{П.26})$$

Задача состоит в определении волновых полей вектора перемещения $u = (u_1, u_2, u_3)$ и тензора напряжения с компонентами σ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) при гармоническом возбуждении слоя.

Для определения волнового поля перемещений воспользуемся системой уравнений Ламе (П.7)

Рассмотрим гармоническое возбуждение слоя. В этом случае положим

$$u_j = e^{-i\omega t} U_j, \quad e = e^{-i\omega t} \partial_k U_k, \quad X_j = e^{-i\omega t} Y_j, \quad (j,k=1,2,3), \quad (\text{П.27})$$

где $U_j = U_j(x)$, $Y_j = Y_j(x)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$ — амплитуды соответствующих величин.

Исключая время в уравнениях (П.7) в соответствии с (П.27), приходим к системе дифференциальных уравнений в амплитудах

$$\Delta U_j + \mathfrak{A}_j(\partial_k U_k) + \gamma_2^2 U_j = -\frac{Y_j}{\mu} \quad (j,k=1,2,3), \quad (\text{П.28})$$

где $\gamma_2 = \omega/c_2$ — волновое число, $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$ — скорость распространения поперечной (сдвиговой) волны в упругом теле.

Имея в виду симметричное состояние относительно срединной плоскости слоя, представим амплитуды перемещений и интенсивностей объемных сил в виде рядов Фурье

$$\{U_1, U_2, e, Y_1, Y_2\} = \sum_{m=1}^{\infty} \{U_{1m}, U_{2m}, e_m Y_{1m}, Y_{2m}\} \cos \lambda_m x_3,$$

$$\{U_3, Y_3\} = \sum_{m=1}^{\infty} \{U_{3m}, Y_{3m}\} \sin \lambda_m x_3, \quad Y_{km} = Y_{km}(x_1, x_2) \quad (k=1, 2, 3), \quad (\text{П.29})$$

$$e_m = \partial_1 U_{1m} + \partial_2 U_{2m} + \lambda_m U_{3m}, \quad U_{km} = U_{km}(x_1, x_2), \quad \lambda_m = \frac{\pi(2m-1)}{2h}.$$

В этом случае граничные условия (П.26) на основаниях слоя будут выполнены.

Исключив в (П.28) толщинную координату x_3 при помощи представлений (П.29), приходим к системе дифференциальных уравнений относительно коэффициентов Фурье (моментов) U_{km}

$$\begin{cases} (\Delta + \mu_{2m}^2) U_{1m} + \sigma \partial_1 e_m = -\frac{Y_{1m}}{\mu}, \\ (\Delta + \mu_{2m}^2) U_{2m} + \sigma \partial_2 e_m = -\frac{Y_{2m}}{\mu}, \quad \mu^2 = \gamma_2^2 - \lambda_m^2, \\ (\Delta + \mu_{2m}^2) U_{3m} - \sigma \lambda_m e_m = -\frac{Y_{3m}}{\mu}, \quad (m=1, 2, \dots). \end{cases} \quad (\text{П.30})$$

Для исключения толщинной координаты из граничных условий на S воспользуемся следующими представлениями для амплитуд компонентов тензора напряжения и вектора поверхностной нагрузки, согласованными с представлениями (П.29)

$$\{S_{ij}, Y_{in}\} = \sum_{m=1}^{\infty} \{S_{ij}^{(m)}, Y_{in}^{(m)}\} \cos \lambda_m x_3, \quad (i, j=1, 2),$$

$$\{S_{j3}, Y_{3n}\} = \sum_{m=1}^{\infty} \{S_{j3}^{(m)}, Y_{3n}^{(m)}\} \sin \lambda_m x_3.$$

Тогда граничные условия на S распадутся на счетную совокупность равенств вида

$$S_{ij}^{(m)} n_i = Y_{jn}^{(m)}, \quad (i, j=1, 2, 3; \quad m=1, 2, \dots). \quad (\text{П.31})$$

Пусть теперь вдоль шнура $x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad |x_3| \leq h$ распределены усилия с погонными интенсивностями $\{P_1, P_2, P_3\}(x_3)$. Тогда фигурирующие в правых частях (П.30) коэффициенты Фурье интенсивностей объемных сил примут вид

$$Y_{km} = P_{km} \delta(x), \quad x = (x_1, x_2), \quad (k=1, 2, 3), \quad (\text{П.32})$$

где $\delta(x)$ — двумерная дельта-функция.

Под Φ -решениями для слоя, соответствующими смешанным граничным условиям (П.26) будем понимать компоненты матрицы фундаментальных решений системы (П.30) с правыми частями, определенными в (П.32).

Из (П.30) обычным приемом выводим

$$(\Delta + \mu_{1m}^2) e_m = -\frac{1}{\mu(\sigma+1)} (P_{1m} \partial_1 + P_{2m} \partial_2 + P_{3m} \lambda_m) \delta(x), \quad (\text{П.33})$$

где $\mu_{1m}^2 = \gamma_1^2 - \lambda_m^2$, $\gamma_1 = \omega/c_1$ — волновое число, $c_1 = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$ — скорость распространения продольной волны в упругом теле.

Ниже подробно рассмотрим случай $P_1 \neq 0$, $P_2 = P_3 = 0$.

Из (П.33) для рассматриваемого случая получаем неоднородное уравнение Гельмгольца

$$\Delta e_m^{(1)} + \mu_{1m}^2 e_m^{(1)} = -\frac{P_{1m}}{\mu(1+\sigma)} \partial_1 \delta(x). \quad (\text{П.34})$$

Пусть E — фундаментальное решение оператора Гельмгольца. Учитывая, что функция $\delta(x)$ финитна и свертка $E * \partial_1 f = f * \partial_1 E$ существует, получаем из (П.34)

$$e_m^{(1)} = \frac{iP_{1m}}{4\mu(1+\sigma)} \partial_1 H_0^{(1)}(\mu_{1m} r), \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}. \quad (\text{П.35})$$

Формула (П.35) дает возможность разделить уравнения в системе (П.30) и представить ее в виде

$$\begin{aligned} \Delta U_{1m}^{(1)} + \mu_{2m}^2 U_{1m}^{(1)} &= -\frac{i\sigma P_{1m}}{4\mu(1+\sigma)} \partial_1^2 H_0^{(1)}(\mu_{1m} r) - \frac{P_{1m}}{\mu} \delta(x), \quad \mu_{2m}^2 = \gamma_2^2 - \lambda_m^2, \\ \Delta U_{2m}^{(1)} + \mu_{2m}^2 U_{2m}^{(1)} &= -\frac{i\sigma P_{1m}}{4\mu(1+\sigma)} \partial_1 \partial_2 H_0^{(1)}(\mu_{1m} r), \\ \Delta U_{3m}^{(1)} + \mu_{2m}^2 U_{3m}^{(1)} &= -\frac{i\sigma P_{1m}}{4\mu(1+\sigma)} \lambda_m \partial_1 H_0^{(1)}(\mu_{1m} r). \end{aligned}$$

Интегрирование этой системы в пространстве обобщенных функций $D'(R^2)$ дает

$$\begin{aligned} U_{1m}^{(1)} &= \frac{iP_{1m}}{4\mu} \left(-\frac{1}{\gamma_2^2} \partial_1^2 H(r) + H_0^{(1)}(\mu_{2m} r) \right), \\ U_{2m}^{(1)} &= -\frac{iP_{1m}}{4\mu \gamma_2^2} \partial_1 \partial_2 H(r), \\ U_{3m}^{(1)} &= \frac{iP_{1m}}{4\mu \gamma_2^2} \partial_1 \lambda_m H(r). \end{aligned}$$

Здесь и далее использовано обозначение

$$H(r) = \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} H_0^{(1)}(\mu_{km} r).$$

Аналогичным образом рассматриваются случаи, когда $P_2 \neq 0$, $P_1 = P_3 = 0$ и $P_3 \neq 0$, $P_1 = P_2 = 0$. Выпишем окончательные результаты для вектора перемещения

$$U_{nm}^{(j)} = \frac{iP_{nm}}{4\mu} g_{nm}^{(j)}, \quad (n, j = 1, 2, 3; m = 1, 2, \dots),$$

где

$$g_{1m}^{(1)} = -\frac{1}{2\gamma_2^2} \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} \mu_{km}^2 \left(H_2^{(1)}(\mu_{km}r) \cos 2\alpha - H_0^{(1)}(\mu_{km}r) \right) + H_0^{(1)}(\mu_{km}r),$$

$$g_{2m}^{(1)} = g_{1m}^{(2)} = -\frac{1}{2\gamma_2^2} \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} \mu_{km}^2 H_2^{(1)}(\mu_{km}r) \sin 2\alpha,$$

$$g_{3m}^{(1)} = -g_{1m}^{(3)} = -\frac{\lambda_m}{\gamma_2^2} \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} \mu_{km} H_1^{(1)}(\mu_{km}r) \cos \alpha,$$

$$g_{2m}^{(2)} = \frac{1}{2\gamma_2^2} \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} \mu_{km}^2 \left(H_2^{(1)}(\mu_{km}r) \cos 2\alpha + H_0^{(1)}(\mu_{km}r) \right) + H_0^{(1)}(\mu_{km}r),$$

$$g_{3m}^{(2)} = -g_{2m}^{(3)} = -\frac{\lambda_m}{\gamma_2^2} \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} \mu_{km} H_1^{(1)}(\mu_{km}r) \sin \alpha,$$

$$g_{3m}^{(3)} = \frac{\lambda_m^2}{\gamma_2^2} \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} H_0^{(1)}(\mu_{km}r) + H_0^{(1)}(\mu_{2m}r).$$

Величины $g_{nm}^{(j)}$ — представляют собой компоненты матрицы Φ -решений для каждого фиксированного значения $m = 1, 2, \dots$

Интегральные представления решений граничной задачи (П.30), (П.31). Пусть f — физическое поле с линией разрывов Γ . Запишем формулы для обобщенных производных

$$\partial_j f = \{\partial_j f\} + n_j [f] \delta_\Gamma,$$

$$\Delta f = \{\Delta f\} + \left[\frac{\partial f}{\partial n} \right] \delta_\Gamma + \frac{\partial}{\partial n} ([f] \delta_\Gamma),$$

где $\{\cdot\}$ — обозначает соответствующую классическую производную, $[\cdot]$ — скачок указанной функции на Γ , n_j — проекция орта нормали к контуру Γ на ось x_j ; $[\cdot] \delta_\Gamma$ и $\frac{\partial}{\partial n} ([\cdot] \delta_\Gamma)$ — соответственно простой и двойной слои.

Вводя эти соотношения в систему (П.30) с учетом (П.32), представим ее в виде

$$\kappa_m U_{km} + \sigma \partial_k e_m = f_{km} \quad (k = 1, 2, 3; m = 1, 2, \dots), \quad (\text{П.36})$$

$$\kappa_m = \Delta + \mu_{2m}^2,$$

$$f_{km} = - \left[\frac{\partial U_{km}}{\partial n} \right] \delta_\Gamma - \frac{\partial}{\partial n} ([U_{km}] \delta_\Gamma) - \sigma [e_m] n_k \delta_\Gamma, \quad n_3 = 0.$$

Пусть g_m — матрица Φ -решений.

$$g_m = \|g_{km}^{(j)}\| \quad (k, j = 1, 2, 3; m = 1, 2, \dots).$$

Тогда решение системы (П.36) можно представить в виде свертки

$$U_m(x) = g_m * f_m, \quad x = (x_1, x_2),$$

$$f_m = \{f_{1m}, f_{2m}, f_{3m}\}, \quad U_m(x) = \{U_{1m}, U_{2m}, U_{3m}\}.$$

В развернутом виде получаем отсюда следующие интегральные представления волнового поля перемещений:

$$U_{km}(x) = \sum_{j=1}^3 \left\{ \int_{\Gamma} [U_{jm}](y) \frac{\partial}{\partial n_y} g_{km}^{(j)}(x-y) dS_y - \right. \\ \left. - \int_{\Gamma} \left[\left[\frac{\partial U_{jm}}{\partial n} \right] + \sigma[e_m]n_j \right](y) g_{km}^{(j)}(x-y) dS_y \right\}, \quad (k=1,2,3; m=1,2,\dots). \quad (\text{П.37})$$

Очевидно, эти представления обладают необходимой полнотой по отношению к граничной задаче (П.30) (П.31). В случае, когда контур Γ есть совокупность разомкнутых дуг (математических разрезов) и вектор напряжения непрерывно продолжим через Γ_j , достаточно оставить первое слагаемое в (П.37), т. е. разыскивать решение в виде обобщенных потенциалов двойного слоя. Для решения поставленной здесь задачи необходимо воспользоваться вторым слагаемым в соотношении (П.37). Соответствующие численные результаты представлены в [57].

6. Двумерные фундаментальные решения в связанный задаче термоупругости [56]. В системе координат x_1Ox_2 рассмотрим неограниченную упругую среду, в которой вдоль осей x_j действует гармонически изменяющаяся во времени сосредоточенная сила $P_j e^{-i\omega t}$ или сосредоточенный тепловой источник мощности $qe^{-i\omega t}$. Будем считать, что они приложены в начале координат. Опуская множитель $e^{-i\omega t}$ в полевых величинах, запишем систему уравнений связанный термоупругости [43, 46, 52, 53] относительно амплитуд компонентов вектора перемещения u_j и температуры в виде

$$\Delta u_j + \sigma \partial_j e - \alpha_0 \partial_j \theta + \gamma_2^2 u_j + \frac{1}{\mu} X_j = 0 \quad (j=1, 2), \\ \Delta \theta + i \gamma^2 \theta + i \mu \beta_0 e + \frac{F}{\lambda_T} = 0, \quad \Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2, \quad (\text{П.38})$$

где

$$e = \partial_j u_j, \quad \gamma^2 = \omega / a^2, \quad \gamma_2 = \omega / c_2, \quad a^2 = \lambda_T / c \rho,$$

$$\sigma = (1-2\nu)^{-1}, \quad \alpha_0 = 2(1+\nu)\sigma\alpha_T, \quad \beta_0 = \alpha_0 T_0 \omega / \lambda_T,$$

$$X_j = P_j \delta(x), \quad , \quad T_0 = \text{const}, \quad \partial_i = \partial / \partial x_i,$$

$$x = (x_1, x_2) \in R^2, \quad F = q \delta(x), \quad T - T_0 = e^{-i\omega t} \theta,$$

α_T , λ_T , ρ и c — коэффициенты линейного расширения, теплопроводности, плотность и удельная теплоемкость материала соответственно; μ и ν — модуль сдвига и коэффициент Пуассона; ω — круговая частота; T_0 — температура тела в естественном (ненапряженном) состоянии; δ — дельта-функция.

Рассмотрим сначала случай $P_1 \neq 0$, $P_2 = 0$, $q = 0$. Тогда из (П.38) обычным путем получим систему дифференциальных уравнений относительно объемного расширения e и функции θ

$$l_{11}e - l_{12}\theta = -\frac{P_1}{\mu(1+\sigma)}\partial_1\delta(x), \quad l_{21}e + l_{22}\theta = 0. \quad (\text{П.39})$$

При этом

$$l_{11} = \Delta + \gamma_1^2, \quad (1+\sigma)l_{12} = \alpha_0\Delta, \quad l_{21} = i\mu\beta_0, \quad l_{22} = \Delta + i\gamma^2.$$

Полагая $e = l_{22}\Phi$, $\theta = -l_{21}\Phi$, приведем равенства (П.39) к следующему уравнению четвертого порядка относительно функции $\Phi(x_1, x_2)$:

$$L(D)\Phi = -\frac{P_1}{\mu(1+\sigma)}\partial_1\delta(x). \quad (\text{П.40})$$

Здесь

$$L(D) = \Delta\Delta + d\Delta + b, \quad d = \gamma_1^2 + i\gamma^2 + i\mu\frac{\alpha_0\beta_0}{1+\sigma},$$

$$\gamma_1^2 = \frac{\gamma_2^2}{1+\sigma}, \quad b = i\gamma^2\gamma_1^2.$$

Интегрируя уравнение (П.40) в пространстве обобщенных функций D' , будем иметь

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{i(1-2\nu)P_1}{8\mu(1-\nu)(\mu_2^2 - \mu_1^2)} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \partial_1 H_0^{(1)}(\mu_j r), \\ e &= \frac{i(1-2\nu)P_1}{8\mu(1-\nu)(\mu_2^2 - \mu_1^2)} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} (i\gamma^2 - \mu_j^2) \partial_1 H_0^{(1)}(\mu_j r), \\ \theta &= \frac{E\alpha_T\omega T_0}{i(1-2\nu)\lambda_T} \Phi, \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \end{aligned} \quad (\text{П.41})$$

где E — модуль Юнга, μ_j ($j = 1, 2$) — корни характеристического уравнения

$$\mu_j^4 - d\mu_j^2 + b = 0, \quad \operatorname{Im} \mu_j > 0 \quad (j = 1, 2).$$

Возвращаясь теперь к основной системе (П.38) и учитывая формулы (П.41), запишем первые два ее уравнения в виде

$$(\Delta + \gamma_2^2) u_1 = a_0 P_1 \partial_1^2 \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} d_j H_0^{(1)}(\mu_j r) - \frac{P_1}{\mu} \delta(x),$$

$$(\Delta + \gamma_2^2) u_2 = a_0 P_1 \partial_1 \partial_2 \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} d_j H_0^{(1)}(\mu_j r), \quad (\text{П.42})$$

где

$$a_0 = \frac{1-2\nu}{8(1-\nu)(\mu_2^2 - \mu_1^2)}, \quad d_j = \alpha_0 \beta_0 + \frac{\sigma}{\mu} (\gamma^2 + i \mu_j^2).$$

Интегрируя уравнения (П.42) получим окончательно

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{iP_1}{4\mu} H_0^{(1)}(\gamma_2 r) + a_0 P_1 \sum_{j=1}^2 (-1)^j d_j \partial_1^2 H(r), \\ u_2 &= a_0 P_1 \sum_{j=1}^2 (-1)^j d_j \partial_1 \partial_2 H(r), \end{aligned} \quad (\text{П.43})$$

где

$$H(r) = \frac{H_0^{(1)}(\gamma_2 r) - H_0^{(1)}(\mu_j r)}{\gamma_2^2 - \mu_j^2}.$$

Легко проверить, что формула (П.41) для объемного расширения e и равенства (П.43) согласованы между собой.

Таким образом, амплитуды связанных полей упругих перемещений и температур в среде при действии сосредоточенной гармонической силы в направлении оси x_1 получены в замкнутом виде. Совершенно аналогично определяются две другие строки матрицы фундаментальных решений. Приведем здесь окончательные результаты.

Если сила $P_2 e^{-i\omega t}$ действует в направлении оси x_2 , то

$$\begin{aligned} u_1 &= a_0 P_2 \sum_{j=1}^2 (-1)^j d_j \partial_1 \partial_2 H(r), \\ u_2 &= \frac{iP_2}{4\mu} H_0^{(1)}(\gamma_2 r) + a_0 P_2 \sum_{j=1}^2 (-1)^j d_j \partial_2^2 H(r), \\ e &= \frac{i}{\mu} a_0 P_2 \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} (\mu_j^2 - i\gamma^2) \partial_2 H_0^{(1)}(\mu_j r), \\ \theta &= \frac{1}{\lambda_T} b_0 P_2 T_0 \alpha_T \omega \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \partial_2 H_0^{(1)}(\mu_j r), \\ b_0 &= \frac{1+\nu}{4(1-\nu)(\mu_2^2 - \mu_1^2)}. \end{aligned} \quad (\text{П.44})$$

В случае сосредоточенного гармонического теплового источника $q e^{-i\omega t}$ получаем

$$\begin{aligned} u_1 &= i b_0 q (\alpha_T / \lambda_T) \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \partial_1 H_0^{(1)}(\mu_j r), \\ u_2 &= i b_0 q (\alpha_T / \lambda_T) \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \partial_2 H_0^{(1)}(\mu_j r), \end{aligned} \quad (\text{П.45})$$

$$e = i b_0 q (\alpha_T / \lambda_T) \sum_{j=1}^2 (-1)^j \mu_j^2 H_0^{(1)}(\mu_j r),$$

$$\theta = i a_0 (q / \lambda_T) \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} (\gamma_2^2 - \mu_j^2) H_0^{(1)}(\mu_j r).$$

Формулы (П.43)–(П.45) определяют матрицу фундаментальных решений для рассматриваемой задачи.

7. Связанные термоупругие поля в слое. Учет конечной скорости распространения тепла (в рамках гиперболической модели теплопроводности). Основная система уравнений связанный термоупругости [46, 53] после исключения временного множителя $e^{-i\omega t}$ принимает вид

$$\Delta U_j + \sigma \partial_j e - \frac{3\lambda + 2\mu}{\mu} \alpha_T \partial_j U_4 + \gamma_2^2 U_j + \frac{1}{\mu} X_j^* = 0 \quad (j = 1, 2, 3), \quad (П.46)$$

$$\Delta U_4 + (\gamma_T^2 + i\gamma^2) U_4 + m\omega(i + \tau^* \omega) e + \frac{Q^*}{\lambda_T} (1 - i\omega\tau^*) = 0,$$

$$\gamma_T^2 = \frac{\omega^2}{V_T^2}, \quad \gamma^2 = \frac{\omega}{a^2}, \quad \gamma_2^2 = \frac{\omega^2}{V_2^2}, \quad m = \sigma E T_0 \frac{\alpha_T}{\lambda_T}, \quad a^2 = \frac{\lambda_T}{\rho c_e},$$

$$\sigma = \frac{1}{1 - 2\nu}, \quad \partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \Delta = \partial_j \partial_j, \quad e = \partial_k U_k \quad (k = 1, 2, 3).$$

Здесь U_j ($j = 1, 2, 3$), U_4 , X_j^* и Q^* — амплитуды перемещений u_j , температуры $\theta = T - T_0$, интенсивностей объемных сил F_j и тепловых источников Q соответственно; E, ν, ρ — модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность, α_T, λ_T, c_e — коэффициенты линейного расширения, теплопроводности и удельная теплоемкость материала; V_T и V_2 — скорости распространения тепловых и механических сдвиговых возмущений в среде; T_0 — температура тела в исходном невозмущенном состоянии, τ^* — время релаксации теплового потока, ω — круговая частота, T — температура.

Амплитуды тензора напряжения определяются равенствами

$$S_{ij} = \mu (\partial_i U_j + \partial_j U_i) + [\lambda e - (3\lambda + 2\mu) \alpha_T U_4] \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

При построении однородных решений уравнений (П.46) полагаем $X_j = 0$ ($j = 1, 2, 3$) и $Q = 0$. В декартовой системе координат $0x_1 x_2 x_3$ рассмотрим слой $-\infty < x_1, x_2 < \infty, |x_3| \leq h$ при следующих граничных условиях на его основаниях $x_3 = \pm h$:

$$u_3 = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0, \quad \partial \theta / \partial x_3 = 0.$$

Согласно установившейся в литературе терминологии решения однородной системы (П.46) при однородных граничных условиях на основаниях слоя называются однородными. Они определены в [58] и имеют вид

$$\begin{aligned} U_1 &= h^2 \partial_2 \psi_0^{(2)} + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial_1 \phi_n^{(j)}}{\zeta_j + \gamma_2^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ h^2 \left(\partial_1 \psi_n^{(1)} + \partial_2 \psi_n^{(2)} \right) + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial_1 \phi_n^{(j)}}{\zeta_j + \gamma_2^2} \right\} \cos \lambda_n x_3, \\ U_2 &= -h^2 \partial_1 \psi_0^{(2)} + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial_2 \phi_n^{(j)}}{\zeta_j + \gamma_2^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ h^2 \left(\partial_2 \psi_n^{(1)} - \partial_1 \psi_n^{(2)} \right) + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial_2 \phi_n^{(j)}}{\zeta_j + \gamma_2^2} \right\} \cos \lambda_n x_3, \\ U_3 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ h^2 \frac{\mu_n^2}{\lambda_n} \psi_n^{(1)} - \lambda_n \sum_{j=1}^2 \frac{\phi_n^{(j)}}{\zeta_j + \gamma_2^2} \right\} \sin \lambda_n x_3, \\ U_4 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{a_j} \phi_n^{(j)} \right) \cos \lambda_n x_3, \quad \lambda_n = \frac{\pi(2n+1)}{2h}. \end{aligned} \tag{П.47}$$

Пусть теперь вдоль шнура $x_1 = x_{10}, x_2 = x_{20}, |x_3| \leq h$ распределены усилия $Y_j = \operatorname{Re}(e^{-i\omega t} X_j)$ или тепловые источники $q = \operatorname{Re}(e^{-i\omega t} Q)$ с амплитудами

$$\{X_1, X_2, Q\} = \sum_{n=0}^{\infty} \{P_{1n}, P_{2n}, P_{4n}\} \cos \lambda_n x_3, \quad X_3 = \sum_{n=1}^{\infty} P_{3n} \sin \lambda_n x_3. \tag{П.48}$$

Полевые величины, исходя из структуры однородных решений (П.47), будем разыскивать в виде

$$\{U_1, U_2, U_4\} = \sum_{n=0}^{\infty} \{U_{1n}, U_{2n}, U_{4n}\} \cos \lambda_n x_3, \quad U_3 = \sum_{n=1}^{\infty} U_{3n} \sin \lambda_n x_3, \tag{П.49}$$

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} e_n \cos \lambda_n x_3, \quad e_n = \partial_1 U_{1n} + \partial_2 U_{2n} + \lambda_n U_{3n}.$$

После исключения из (П.46) времени и толщинной координаты x_3 приходим с учетом соотношений (П.48), (П.49) к системе дифференциальных уравнений относительно коэффициентов Фурье полевых величин

$$\begin{aligned} (\Delta + \mu_n^2) U_{kn} + \partial_k \left(\sigma e_n - \frac{3\lambda + 2\mu}{\mu} \alpha_T U_{4n} \right) + \frac{P_{kn}}{\mu} \delta(x) &= 0 \quad (k = 1, 2, 3), \\ (\Delta + d_n^2) U_{4n} + \omega m^* e_n + \frac{P_{4n}}{\lambda_T} (1 - i\omega \tau^*) \delta(x) &= 0, \quad x = (x_1, x_2) \in R^2, \end{aligned} \tag{П.50}$$

$$\partial_k = \partial / \partial x_k \quad (k = 1, 2), \quad \partial_3 = -\lambda_n, \quad d_n^2 = \gamma_T^2 + i\gamma^2 - \lambda_n^2,$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция.

Отсюда получаем сначала систему из двух уравнений относительно неизвестных U_{4n} и e_n

$$\begin{aligned} l_{11}e_n - l_{12}U_{4n} &= -\frac{P_{1n}\partial_1 + P_{2n}\partial_2 + P_{3n}\lambda_n}{\mu(\sigma+1)}\delta(x), \\ l_{21}e_n + l_{22}U_{4n} &= -\frac{P_{4n}}{\lambda_T}(1-i\omega\tau^*)\delta(x), \\ l_{11} &= \Delta + \gamma_1^2 - \lambda_n^2, \quad l_{12} = \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_T(\Delta - \lambda_n^2), \\ l_{21} &= \omega m^*, \quad l_{22} = \Delta + d_n^2. \end{aligned} \tag{П.51}$$

Дальнейшие рассуждения целесообразно провести для четырех различных вариантов возбуждения. Подробно рассмотрим первый случай: $X_1 \neq 0$, $X_2 = X_3 = Q = 0$.

В этом случае полагаем $e_n = l_{22}\Phi_n^{(1)}$, $U_{4n} = -l_{21}\Phi_n^{(1)}$. Тогда второе уравнение в (П.51) будет удовлетворено тождественно, а первое примет вид

$$\begin{aligned} (\Delta\Delta + A_n\Delta + B_n)\Phi_n^{(1)} &= -\frac{P_{1n}}{\mu(\sigma+1)}\partial_1\delta(x), \\ A_n &= \gamma_1^2 - \lambda_n^2 + d_n^2 + \frac{1+\nu}{1-\nu}\omega\alpha_T m^*, \\ B_n &= (\gamma_1^2 - \lambda_n^2)d_n^2 - \frac{1+\nu}{1-\nu}\lambda_n^2\omega\alpha_T m^*. \end{aligned} \tag{П.52}$$

Интегрирование уравнения (П.52) дает

$$\begin{aligned} \Phi_n^{(1)} &= \frac{P_{1n}\alpha_n}{4i\mu} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \partial_1 H_0^{(1)}(\mu_{jn}r), \quad \alpha_n = \frac{1}{(\sigma+1)(\mu_{1n}^2 - \mu_{2n}^2)}, \\ z &= x_1 + ix_2, \quad z_0 = x_{10} + ix_{20}, \quad r = |z - z_0|, \end{aligned}$$

где μ_{1n}, μ_{2n} — корни характеристического уравнения

$$Z_n^4 - A_n Z_n^2 + B_n = 0 \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Очевидно, необходимо выбрать корни с неотрицательными мнимыми частями. Далее находим

$$e_n^{(1)} = l_{22}\Phi_n^{(1)} = \frac{P_{1n}\alpha_n}{4i\mu} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} (d_n^2 - \mu_{jn}^2) \partial_1 H_0^{(1)}(\mu_{jn}r), \quad U_{4n}^{(1)} = -\omega m^* \Phi_n^{(1)}. \tag{П.53}$$

Соотношения (П.53) дают возможность свести систему (П.50) к трем независимым уравнениям вида

$$\begin{aligned} (\Delta + \mu_n^2)U_{kn} &= -\frac{P_{kn}\alpha_n}{4i\mu} \sigma \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \rho_{jn} \partial_1 \partial_k H_0^{(1)}(\mu_{jn}r) - \frac{P_{1n}}{\mu} \delta(x) \delta_{k1} \quad (k = 1, 2, 3), \\ \rho_{jn} &= d_n^2 - \mu_{jn}^2 + 2(1+\nu)\alpha_T \omega m^*, \quad \partial_3 = -\lambda_n. \end{aligned}$$

Интегрирование этой системы дает

$$U_{kn}^{(1)} = \frac{iP_{1n}}{4\mu} \delta_{kn} H_0^{(1)}(\mu_n r) - \frac{P_{1n}\alpha_n \sigma}{4i\mu} \sum_{j=0}^2 (-1)^{j-1} B_{jn} \partial_1 \partial_k H_0^{(1)}(\mu_{jn} r), \quad (\text{П.54})$$

$$B_{on} = \sum_{j=1}^2 \frac{\rho_{jn}}{\mu_n^2 - \mu_{jn}^2}, \quad B_{jn} = \frac{\rho_{jn}}{\mu_n^2 - \mu_{jn}^2}, \quad \mu_{0n} = \mu_n \quad (j=1, 2, n=0, 1, \dots).$$

Легко видеть, что соотношение $e_n = \partial_1 U_{1n} + \partial_2 U_{2n} + \lambda_n U_{3n}$ функциями (П.53), (П.54) выполняется на самом деле.

Таким образом, формулы (П.53), (П.54) полностью определяют решение системы (П.50) для рассматриваемого варианта возбуждения слоя. Три остальных случая рассматриваются совершенно аналогично. Выпишем здесь окончательные результаты

1. $X_1 \neq 0, X_2 = X_3 = Q = 0$.

$$U_{kn}^{(1)} = \frac{P_{1n}}{4i\mu} g_{kn}^{(1)} \quad (k=1, 2, 3, 4; n=0, 1, \dots),$$

$$g_{1n}^{(1)} = -H_0^{(1)}(\mu_n r) + \sigma \alpha_n \sum_{j=0}^2 (-1)^j B_{jn} \partial_1^2 H_0^{(1)}(\mu_{jn} r), \quad g_{4n}^{(1)} = -\omega \alpha_n m^* \partial_1 H_n(r),$$

$$g_{2n}^{(1)} = \sigma \alpha_n \sum_{j=0}^2 (-1)^j B_{jn} \partial_1 \partial_2 H_0^{(1)}(\mu_{jn} r), \quad g_{3n}^{(1)} = -\sigma \alpha_n \lambda_n \sum_{j=0}^2 (-1)^j B_{jn} \partial_1 H_0^{(1)}(\mu_{jn} r),$$

$$H_n(r) = H_0^{(1)}(\mu_n r) - H_0^{(1)}(\mu_{2n} r).$$

2. $X_2 \neq 0, X_1 = X_3 = Q = 0$.

$$U_{kn}^{(2)} = \frac{P_{2n}}{4i\mu} g_{kn}^{(2)},$$

$$g_{1n}^{(2)} = g_{2n}^{(1)}, \quad g_{2n}^{(2)} = -H_0^{(1)}(\mu_n r) + \sigma \alpha_n \sum_{j=0}^2 (-1)^j B_{jn} \partial_2^2 H_0^{(1)}(\mu_{jn} r),$$

$$g_{3n}^{(2)} = -\sigma \alpha_n \lambda_n \sum_{j=0}^2 (-1)^j B_{jn} \partial_2 H_0^{(1)}(\mu_{jn} r), \quad g_{4n}^{(2)} = -\omega \alpha_n m^* \partial_2 H_n(r).$$

3. $X_3 \neq 0, X_1 = X_2 = Q = 0$.

$$U_{kn}^{(3)} = \frac{P_{3n}}{4i\mu} g_{kn}^{(3)},$$

$$g_{1n}^{(3)} = -g_{3n}^{(1)}, \quad g_{2n}^{(3)} = -g_{3n}^{(2)},$$

$$g_{3n}^{(3)} = -H_0^{(1)}(\mu_n r) - \alpha_n \lambda_n^2 \sigma \sum_{j=0}^2 (-1)^j B_{jn} H_0^{(1)}(\mu_{jn} r), \quad g_{4n}^{(3)} = -\alpha_n \lambda_n \omega m^* H_n(r).$$

4. $Q \neq 0, X_1 = X_2 = X_3 = 0$.

$$U_{kn}^{(4)} = \frac{P_{4n}}{4i\mu} g_{kn}^{(4)},$$

$$\begin{aligned} g_{1n}^{(4)} &= -\frac{\beta_n E \alpha_T}{2(1-\nu)} \partial_1 H_n(r), \quad g_{3n}^{(4)} = \frac{\beta_n E \alpha_T \lambda_n}{2(1-\nu)} H_n(r), \\ g_{2n}^{(4)} &= -\frac{\beta_n E \alpha_T}{2(1-\nu)} \partial_2 H_n(r), \quad g_{4n}^{(4)} = \mu \beta_n \sum_{j=1}^2 (-1)^j (\gamma_j^2 - \lambda_n^2 - \mu_{jn}^2) H_0^{(1)}(\mu_{jn} r), \\ \beta_n &= \frac{i \omega \tau^* - 1}{\lambda_T (\mu_{1n}^2 - \mu_{2n}^2)}. \end{aligned}$$

Функции $g_{kn}^{(m)}$ определяют матрицу Φ -решений для слоя, соответствующую принятым граничным условиям на его основаниях.

8. Фундаментальные решения уравнений электроупругости для пьезокерамического слоя в R^3 [54]. В системе декартовых прямолинейных координат $Ox_1x_2x_3$ рассмотрим пьезокерамический слой $-\infty < x_1, x_2 < \infty, -h \leq x_3 \leq h$, внутри которого вдоль шнура $x_1 = 0, x_2 = 0, -h \leq x_3 \leq h$ распределены механические усилия $P_k(x_3)$ ($k = 1, 2, 3$) и электрические заряды интенсивности — $P_4(x_3)$. Ниже рассмотрим наиболее простую задачу этого класса, когда на основаниях слоя заданы граничные условия смешанного типа

$$\begin{aligned} w_3(x_1, x_2, \pm h) &= 0, \quad \sigma_{13}(x_1, x_2, \pm h) = 0, \\ \sigma_{23}(x_1, x_2, \pm h) &= 0, \quad \varphi(x_1, x_2, \pm h) = 0. \end{aligned} \quad (\text{П.55})$$

Здесь и ниже используется смешанная система обозначений: u, v, w, E_k, D_k — компоненты векторов упругого перемещения, электрической напряженности и индукции соответственно, σ_{mn} — компоненты тензора напряжения, φ — электрический потенциал. Будем разыскивать симметричное относительно срединной плоскости слоя решение.

Предполагая, что функции $P_k(x_3)$ раскладываются в ряды Фурье (при необходимости в пространстве обобщенных функций D')

$$\begin{aligned} P_k(x_3) &= \sum_{n=0}^{\infty} p_{kn} \cos \gamma_n x_3 \quad (k = 1, 2), \quad P_k(x_3) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{kn} \sin \gamma_n x_3 \quad (k = 3, 4), \\ \gamma_n &= \pi n / h, \end{aligned} \quad (\text{П.56})$$

представим компоненты вектора упругого перемещения $\{u, v, w\}$ и электрический заряд φ в виде

$$\{u, v\} = \sum_{n=0}^{\infty} \{u_n, v_n\} \cos \gamma_n x_3, \quad \{w, \varphi\} = \sum_{n=1}^{\infty} \{w_n, \varphi_n\} \sin \gamma_n x_3. \quad (\text{П.57})$$

Полная система уравнений здесь имеет вид [43–45, 59]:
уравнения равновесия и электростатики

$$\begin{aligned} \partial_m \sigma_{km} + X_k &= 0, \quad \partial_m D_m - X_4 = 0, \quad E_m = -\partial_m \varphi \quad (k, m = 1, 2, 3), \\ X_k &= P_k(x_3) \delta(x), \quad x = (x_1, x_2), \quad \partial_m = \partial / \partial x_m, \end{aligned} \quad (\text{П.58})$$

уравнения состояния для предварительно поляризованной вдоль оси x_3 пьезокерамики [47]

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \sigma_x = c_{11}\varepsilon_x + c_{12}\varepsilon_y + c_{13}\varepsilon_z - e_{31}E_z, \\ \sigma_{22} &= \sigma_y = c_{12}\varepsilon_x + c_{11}\varepsilon_y + c_{13}\varepsilon_z - e_{31}E_z, \\ \sigma_{33} &= \sigma_z = c_{13}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + c_{33}\varepsilon_z - e_{33}E_z, \\ \tau_{23} = \tau_{yz} &= c_{44}\varepsilon_{yz} - e_{15}E_y, \quad \{E_x, E_y, E_z\} = \{E_1, E_2, E_3\}, \\ \tau_{13} = \tau_{xz} &= c_{44}\varepsilon_{xz} - e_{15}E_x, \\ \tau_{12} = \tau_{xy} &= \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})\varepsilon_{xy}, \\ D_1 = D_x &= \varepsilon_{11}E_x + e_{15}\varepsilon_{xz}, \\ D_2 = D_y &= \varepsilon_{11}E_y + e_{15}\varepsilon_{yz}, \\ D_3 = D_z &= \varepsilon_{33}E_z + e_{31}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + e_{33}\varepsilon_z,\end{aligned}\tag{II.59}$$

связь между деформациями и перемещениями

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \partial_1 u, \quad \varepsilon_y = \partial_2 v, \quad \varepsilon_z = \partial_3 w, \\ \varepsilon_{xy} &= \partial_1 v + \partial_2 u, \quad \varepsilon_{xz} = \partial_1 w + \partial_3 u, \quad \varepsilon_{yz} = \partial_2 w + \partial_3 v,\end{aligned}\tag{II.60}$$

а также граничные условия (II.55).

В соотношениях (II.58)–(II.60) величины $c_{mn} = c_{mn}^E$, e_{mn} , $\varepsilon_{nn} = \varepsilon_{nn}^S$ соответственно — модули упругости, измеряемые при постоянном электрическом поле; пьезомодули и диэлектрические проницаемости, измеряемые при постоянной деформации; $\delta(x)$ — двумерная дельта-функция.

Дифференциальные уравнения равновесия относительно перемещений и электрического потенциала выводятся с использованием соотношений (II.58)–(II.60) обычным образом. Разделив в них переменные согласно представлениям (II.56) и (II.57), приходим к системе уравнений относительно коэффициентов Фурье u_n, v_n, w_n, φ_n ($n = 0, 1, \dots$) вида

$$\begin{aligned}\left(\kappa_n^{(1)} + U\partial_1^2\right)u_n + U\partial_1\partial_2 v_n + c\gamma_n\partial_1 w_n + e\gamma_n\partial_1\varphi_n &= -p_{1n}\delta(x) \quad (n = 0, 1, \dots), \\ U\partial_1\partial_2 u_n + \left(\kappa_n^{(1)} + U\partial_2^2\right)v_n + c\gamma_n\partial_2 w_n + e\gamma_n\partial_2\varphi_n &= -p_{2n}\delta(x), \\ c\gamma_n\partial_1 u_n + c\gamma_n\partial_2 v_n - \kappa_n^{(2)}w_n - \kappa_n^{(3)}\varphi_n &= p_{3n}\delta(x) \quad (n = 1, 2, \dots), \\ e\gamma_n\partial_1 u_n + e\gamma_n\partial_2 v_n - \kappa_n^{(3)}w_n + \kappa_n^{(4)}\varphi_n &= p_{4n}\delta(x),\end{aligned}\tag{II.61}$$

где

$$\begin{aligned}U &= \frac{1}{2}(c_{11} + c_{12}), \quad V = c_{66} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}), \quad c = c_{13} + c_{44}, \quad e = e_{15} + e_{31}, \\ \kappa_n^{(1)} &= V\Delta - \gamma_n^2 c_{44}, \quad \kappa_n^{(2)} = c_{44}\Delta - c_{33}\gamma_n^2, \quad \Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2, \\ \kappa_n^{(3)} &= e_{15}\Delta - e_{33}\gamma_n^2, \quad \kappa_n^{(4)} = \varepsilon_{11}\Delta - \varepsilon_{33}\gamma_n^2.\end{aligned}$$

Интегрирование системы (П.61) проведем в пространстве обобщенных функций D' . Рассмотрим сначала случай, когда $p_{1n} \neq 0$, а $p_{2n} = p_{3n} = p_{4n} = 0$. Введем представления

$$u_n = u_n^{(1)} = L_{11}\Phi_n^{(1)}, \quad v_n = v_n^{(1)} = L_{12}\Phi_n^{(1)},$$

$$w_n = w_n^{(1)} = L_{13}\Phi_n^{(1)}, \quad \varphi_n = \varphi_n^{(1)} = L_{14}\Phi_n^{(1)},$$

где L_{1k} — алгебраические дополнения соответствующих элементов первой строки матрицы дифференциальных операторов системы (П.61). Тогда последние три уравнения этой системы будут удовлетворены, а первое уравнение приведется к виду

$$L(D)\Phi_n^{(1)} = p_{1n}\delta(x), \quad (\text{П.62})$$

$$L(D) = \alpha_0(\Delta - \mu_0^2\gamma_n^2)(\Delta\Delta + \gamma_n^2A_1\Delta\Delta + \gamma_n^4A_2\Delta + \gamma_n^6A_3)\Phi_n^{(1)},$$

где

$$\alpha_0 = c_{11}c_{44}c_{66}\varepsilon_{11}(1 + \kappa_0^2), \quad \mu_0^2 = \frac{c_{44}}{c_{66}},$$

$$A_1 = 2\frac{c_{13}}{c_{11}} + 2\frac{\kappa_0^2}{1 + \kappa_0^2} \left(\frac{e_{31}c_{13}}{e_{15}c_{11}} - \frac{e_{33}}{e_{15}} \right) + \frac{\varepsilon_{33}(1 + \kappa_1^2)}{\varepsilon_{11}(1 + \kappa_0^2)} + \left(\frac{c_{13}^2}{c_{11}c_{44}} - \frac{c_{33}}{c_{44}} \right) \frac{1}{1 + \kappa_0^2},$$

$$A_2 = \frac{c_{33}}{c_{11}} + \frac{1}{1 + \kappa_0^2} \left\{ \kappa_2^2 + \frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}} \left(\frac{c_{33}}{c_{44}} - \frac{c_{13}^2}{c_{11}c_{44}} \right) - 2\frac{c_{13}}{c_{11}} \left(\frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}} + \kappa_0^2 \frac{e_{33}}{e_{15}} \right) \right\} -$$

$$-2 \left(1 + \frac{c_{13}}{c_{44}} \right) \frac{e_{31}e_{33}}{c_{11}\varepsilon_{11}} + 2\kappa_0^2 \frac{e_{31}c_{33}}{e_{15}c_{11}} + \kappa_1^2 \frac{c_{33}\varepsilon_{33}}{c_{44}\varepsilon_{11}}, \quad \kappa_0^2 = \frac{e_{15}^2}{c_{44}\varepsilon_{11}},$$

$$A_3 = -\frac{c_{33}\varepsilon_{33}(1 + \kappa_3^2)}{c_{11}\varepsilon_{11}(1 + \kappa_0^2)}, \quad \kappa_1^2 = \frac{e_{31}^2}{c_{11}\varepsilon_{33}}, \quad \kappa_2^2 = \frac{e_{33}^2}{c_{44}\varepsilon_{11}}, \quad \kappa_3^2 = \frac{e_{33}^2}{c_{33}\varepsilon_{33}}.$$

Решение уравнения (П.62) представим формулой

$$\Phi_n^{(1)} = \frac{p_{1n}}{2\pi\gamma_n^6\alpha_0} \sum_{j=0}^3 a_j K_0(\mu_j\gamma_n r), \quad r = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}. \quad (\text{П.63})$$

Здесь $K_0(z)$ — функция Макдональда нулевого порядка, постоянные a_j и характеристические числа μ_j подлежат определению.

Функция $E = -(2\pi)^{-1}K_0(\lambda r)$ есть фундаментальное решение оператора Гельмгольца $\Delta - \lambda^2$ в $D'(R^2)$. Поэтому в D' справедливо равенство

$$\Delta^k K_0(\lambda r) = \lambda^{2k} K_0(\lambda r) - 2\pi \sum_{j=0}^{k-1} \lambda^{2(k-j-1)} \Delta^j \delta(x) \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (\text{П.64})$$

где Δ^k — полигармонический оператор ($\Delta^2 = \Delta(\Delta)$, $\Delta^3 = \Delta(\Delta^2)$ и т. д.).

Подстановка функции (П.63) в разрешающее уравнение (П.62), с учетом соотношений (П.64), дает

$$(\mu_j^2 - \mu_0^2)(\mu_j^6 + A_1\mu_j^4 + A_2\mu_j^2 + A_3) = 0, \quad (\text{П.65})$$

$$\sum_{j=0}^3 \mu_j^{2m} a_j = -\delta_3^m \quad (m = 0, 1, 2, 3), \quad (\text{П.66})$$

где δ_i^m — символ Кронекера.

Характеристическое уравнение (П.65) определяет восемь корней μ_j , причем две пары из них действительные и две пары комплексно сопряженные. Из условия затухания решения на бесконечности и характера асимптотики функции $K_0(z)$ при больших z вытекает, что из восьми корней следует оставить два положительных действительных корня и два комплексных — с положительными действительными частями. Значения этих корней приведены в таблице 1.

Таблица 1

Значения корней характеристического уравнения (П.65)

для различных типов пьезокерамик

(физико-механические параметры пьезокерамик заимствованы из [45, 47])

Тип пьезокерамики	μ_0	μ_1	$\mu_2 = \bar{\mu}_3$
PZT – 4	0,915	0,446	0,780+0,982i
PZT – 5	0,961	0,463	0,787+1,011i
PXE – 5	1,054	0,481	0,832+0,989i
ЦТС – 19	1,000	0,494	0,887+0,938i

Вычислив μ_j , находим из системы линейных алгебраических уравнений (П.66) коэффициенты a_j , фигурирующие в выражении (П.63). Определитель этой системы — типа Ван-дер-Монда отличен от нуля, поэтому она однозначно разрешима. Имеем

$$a_j = \prod_{k=0}^3' (\mu_k^2 - \mu_j^2)^{-1} \quad (j = 0, 1, 2, 3), \quad (\text{П.67})$$

где штрих над символом произведения означает, что множитель, соответствующий значению $k = j$, отсутствует.

Таким образом, разрешающая функция $\Phi_n^{(1)}$ определена вполне. Из табл. 1 и формулы (П.67) следует, что величины a_0 и a_1 — действительные, a_2 и a_3 — комплексно сопряженные ($a_3 = \bar{a}_2$). Следовательно, $\Phi_n^{(1)}$ — действительная функция, что соответствует физическому содержанию задачи.

Введем обозначения

$$u_n^{(k)} = p_{kn} g_n^{(1,k)}, \quad v_n^{(k)} = p_{kn} g_n^{(2,k)}, \quad w_n^{(k)} = p_{kn} g_n^{(3,k)}, \quad \varphi_n^{(k)} = p_{kn} g_n^{(4,k)}, \quad (k = 1, 2, 3, 4; \quad n = 0, 1, \dots). \quad (\text{П.68})$$

Для определения функций $g_n^{(m,1)}$ необходимо записать в явной форме выражения дифференциальных операторов L_{lk} . Имеем, учитывая (П.61),

$$\begin{aligned} L_{11} &= \gamma_n^2 \partial_2^2 \Lambda_n - (\kappa_n^{(1)} + U \partial_2^2) \Lambda_n^*, \quad L_{12} = (U \Lambda_n^* - \gamma_n^2 \Lambda_n) \partial_1 \partial_2, \\ L_{13} &= -\gamma_n \kappa_n^{(1)} (e \kappa_n^{(3)} + c \kappa_n^{(4)}) \partial_1, \quad L_{14} = \gamma_n \kappa_n^{(1)} (e \kappa_n^{(2)} - c \kappa_n^{(3)}) \partial_1, \\ \Lambda_n &= e^2 \kappa_n^{(2)} - 2ec \kappa_n^{(3)} - c^2 \kappa_n^{(4)}, \quad \Lambda_n^* = \kappa_n^{(2)} \kappa_n^{(4)} + \kappa_n^{(3)} \kappa_n^{(3)}. \end{aligned} \quad (\text{П.69})$$

Выполняя предписанные в (П.69) операции, находим после преобразований

$$\begin{aligned} g_n^{(1,1)} &= \frac{1}{4\pi c_{11}} \sum_{j=0}^3 a_j \left\{ q_3(\mu_j^2) K_0(\mu_j \gamma_n r) + q^*(\mu_j^2) K_2(\mu_j \gamma_n r) \cos 2\alpha \right\}, \\ g_n^{(2,1)} &= \frac{1}{4\pi c_{11}} \sum_{j=0}^3 a_j q^*(\mu_j^2) K_2(\mu_j \gamma_n r) \sin 2\alpha \quad (n=1,2,\dots), \\ g_n^{(3,1)} &= \frac{1}{2\pi c_{11}} \sum_{j=0}^3 a_j \mu_j (\mu_j^2 - \mu_0^2) q_1(\mu_j^2) K_1(\mu_j \gamma_n r) \cos \alpha, \\ g_n^{(4,1)} &= -\frac{p_{1n} e_{15}}{2\pi c_{11} \epsilon_{11}} \sum_{j=0}^3 a_j \mu_j (\mu_j^2 - \mu_0^2) q_2(\mu_j^2) K_1(\mu_j \gamma_n r) \cos \alpha, \\ q(\mu^2) &= \mu^4 + b_1 \mu^2 + b_2, \quad q^*(\mu^2) = \mu^2 (b_0^* \mu^4 + b_1^* \mu^2 + b_2^*), \\ q_1(\mu^2) &= b_3 \mu^2 + b_4, \quad q_2(\mu^2) = b_5 \mu^2 + b_6, \\ q_3(\mu^2) &= 2(\mu_0^2 - \mu^2) q(\mu^2) - q^*(\mu^2), \quad z = x_1 + ix_2 = re^{i\alpha}, \\ (1 + \kappa_0^2) b_1 &= -\left(\frac{\epsilon_{33}}{\epsilon_{11}} + \frac{c_{33}}{c_{44}} + 2 \frac{e_{15} \epsilon_{33}}{c_{44} \epsilon_{11}} \right), \quad (1 + \kappa_0^2) b_2 = (1 + \kappa_3^2) \frac{c_{33} \epsilon_{33}}{c_{44} \epsilon_{11}}, \\ b_0^* &= \frac{c_{11}}{2c_{66}} \left(1 + \frac{c_{12}}{c_{11}} \right), \\ b_1^* &= \frac{c^2 \epsilon_{11} + 2ece_{15} - e^2 c_{44} - U(c_{44} \epsilon_{33} + c_{33} \epsilon_{11} + 2e_{15} \epsilon_{33})}{c_{66} c_{44} \epsilon_{11} (1 + \kappa_0^2)}, \\ b_2^* &= \frac{U c_{33} \epsilon_{33} (1 + \kappa_3^2) + c_{33} e^2 - 2ece_{33} - c^2 \epsilon_{33}}{c_{66} c_{44} \epsilon_{11} (1 + \kappa_0^2)}, \\ (1 + \kappa_0^2) b_3 &= \frac{c}{c_{44}} \left(1 + \frac{ee_{15}}{c \epsilon_{11}} \right), \quad (1 + \kappa_0^2) b_4 = -\frac{c \epsilon_{33}}{c_{44} \epsilon_{11}} \left(1 + \frac{ee_{33}}{c \epsilon_{33}} \right), \\ (1 + \kappa_0^2) b_5 &= \frac{e_{31}}{e_{15}} - \frac{c_{13}}{c_{44}}, \quad (1 + \kappa_0^2) b_6 = \frac{ec_{33} - ce_{33}}{e_{15} c_{44}}. \end{aligned} \quad (\text{П.70})$$

Следует также отдельно рассмотреть случай $n=0$. Система (П.61) приобретает здесь вид

$$\begin{aligned}\Delta u_0^{(1)} + \sigma_* \partial_1 \theta_0^{(1)} &= -\frac{p_{10}}{V} \delta(x), \quad \sigma_* = \frac{U}{V}, \\ \Delta v_0^{(1)} + \sigma_* \partial_2 \theta_0^{(1)} &= 0, \quad \theta_0^{(1)} = \partial_1 u_0^{(1)} + \partial_2 v_0^{(1)}.\end{aligned}\quad (\text{П.71})$$

В частности, отсюда имеем

$$\Delta \theta_0^{(1)} = -\frac{p_{10}}{(1+\sigma_*)V} \partial_1 \delta(x). \quad (\text{П.72})$$

Интегрирование уравнения (П.72) дает

$$\theta_0^{(1)} = -\frac{p_{10}}{2\pi c_{11}} \frac{\cos \alpha}{r}. \quad (\text{П.73})$$

Функции $g_0^{(1,1)}, g_0^{(2,1)}$ теперь легко находим из уравнений (П.71) с учетом выражения (П.73). Получаем

$$\begin{aligned}g_0^{(1,1)} &= \frac{1}{2\pi c_{66}} \left(-\kappa_* \ln r + \frac{c_{11} + c_{12}}{8c_{11}} \cos 2\alpha \right), \\ g_0^{(2,1)} &= \frac{(c_{11} + c_{12})}{16\pi c_{11} c_{66}} \sin 2\alpha, \quad \kappa_* = \frac{3c_{11} - c_{12}}{4c_{11}}.\end{aligned}\quad (\text{П.74})$$

Выражения (П.73), (П.74) очевидно соответствуют плоской деформации пьезокерамической среды, нагруженной распределенными вдоль оси x_3 усилиями постоянной интенсивности p_{10} в направлении оси $0x_1$.

Таким образом, элементы $g_n^{(m,1)}$ матрицы $\|g_n^{(m,k)}\|$ определены. Остальные три случая рассматриваются совершенно аналогично. Приведем лишь окончательные результаты.

При $p_{2n} \neq 0, p_{1n} = p_{3n} = p_{4n} = 0$ имеем

$$\begin{aligned}g_0^{(2,2)} &= \frac{1}{2\pi c_{66}} \left(-\kappa_* \ln r - \frac{c_{11} + c_{12}}{8c_{11}} \cos 2\alpha \right), \quad g_n^{(1,2)} = g_n^{(2,1)} \quad (n=0,1,\dots), \\ g_n^{(2,2)} &= \frac{1}{4\pi c_{11}} \sum_{j=1}^3 a_j \left\{ q_3(\mu_j^2) K_0(\mu_j \gamma_n r) - q_*(\mu_j^2) K_2(\mu_j \gamma_n r) \cos 2\alpha \right\} \quad (n=1,2,\dots), \\ g_n^{(3,2)} &= \frac{1}{2\pi c_{11}} \sum_{j=1}^3 a_j \mu_j (\mu_j^2 - \mu_0^2) q_1(\mu_j^2) K_1(\mu_j \gamma_n r) \sin \alpha \quad (n=1,2,\dots), \\ g_n^{(4,2)} &= -\frac{e_{15}}{2\pi c_{11} \epsilon_{11}} \sum_{j=1}^3 a_j \mu_j (\mu_j^2 - \mu_0^2) q_2(\mu_j^2) K_1(\mu_j \gamma_n r) \sin \alpha \quad (n=1,2,\dots).\end{aligned}$$

При $p_{3n} \neq 0, p_{1n} = p_{2n} = p_{4n} = 0$ находим

$$g_n^{(1,3)} = -g_n^{(3,1)}, \quad g_n^{(2,3)} = -g_n^{(3,2)},$$

$$g_n^{(3,3)} = \frac{1}{2\pi c_{44}(1+\kappa_0^2)} \sum_{j=0}^3 a_j (\mu_j^2 - \mu_0^2) q_4(\mu_j^2) K_0(\mu_j \gamma_n r),$$

$$g_n^{(4,3)} = -\frac{e_{15}}{2\pi c_{44}\epsilon_{11}(1+\kappa_0^2)} \sum_{j=0}^3 a_j (\mu_j^2 - \mu_0^2) q_5(\mu_j^2) K_0(\mu_j \gamma_n r),$$

$$q_4(\mu^2) = \frac{e^2 \mu^2}{\epsilon_{11} c_{11}} - \left(\mu^2 - \frac{c_{44}}{c_{11}} \right) \left(\mu^2 - \frac{\epsilon_{33}}{\epsilon_{11}} \right),$$

$$q_5(\mu^2) = \frac{ec}{e_{15} c_{11}} \mu^2 + \left(\mu^2 - \frac{\epsilon_{33}}{e_{15}} \right) \left(\mu^2 - \frac{c_{44}}{c_{11}} \right).$$

Наконец, в последнем случае: $p_{4n} \neq 0$, $p_{1n} = p_{2n} = p_{3n} = 0$ имеем

$$g_n^{(1,4)} = g_n^{(4,1)}, \quad g_n^{(2,4)} = -g_n^{(4,2)}, \quad g_n^{(3,4)} = g_n^{(4,3)},$$

$$g_n^{(4,4)} = \frac{c_{66}}{2\pi c_{44}\epsilon_{11}(1+\kappa_0^2)} \sum_{j=1}^3 a_j (\mu_j^2 - \mu_0^2) q_6(\mu_j^2) K_0(\mu_j \gamma_n r),$$

$$q_6(\mu^2) = \frac{c^2 \mu^2}{c_{11} c_{66}} + \left(\frac{c_{44}}{c_{66}} \mu^2 - \frac{c_{33}}{c_{66}} \right) \left(\mu^2 - \frac{c_{44}}{c_{11}} \right).$$

Представляет интерес асимптотика вектора упругого перемещения и электрического потенциала в окрестности носителя сосредоточенного функционала. Ее можно легко получить с использованием приведенных выше соотношений для величин $g_n^{(m,k)}$, уравнений (П.66) и асимптотики функций Макдональда при малых r .

Находим для всех четырех случаев при $r \rightarrow 0$

$$g_n^{(1,1)} = -\frac{\kappa_*}{2\pi c_{66}} \ln r + O(r^2 \ln r) = g_n^{(2,2)},$$

$$g_n^{(3,3)} = -\frac{1}{2\pi c_{44}(1+\kappa_0^2)} \ln r + O(r^2 \ln r), \quad g_n^{(4,3)} = \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}} g_n^{(3,3)} = g_n^{(3,4)},$$

$$g_n^{(4,4)} = \frac{1}{2\pi \epsilon_{11}(1+\kappa_0^2)} \ln r + O(r^2 \ln r).$$

Остальные элементы матрицы $\|g_n^{(m,k)}\|$ — ограниченные функции. Отметим также, что перемещение w и электрический потенциал φ экспоненциально затухают при $r \rightarrow \infty$. Компоненты u и v представляют собой суммы экспоненциально затухающих и бигармонических частей. Последние могут иметь логарифмический рост на бесконечности.

В соответствии с уравнениями состояния (П.59) компоненты тензора напряжения можно определить следующими соотношениями:

$$\{S, T, \sigma\} = \sum_{n=0}^{\infty} (S_n, T_n, \sigma_n) \cos \gamma_n x_3,$$

$$\tau = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n \sin \gamma_n x_3.$$

Причем

$$S = \sigma_x + \sigma_y, \quad T = \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy}, \quad \sigma = \sigma_z, \quad \tau = \tau_{xz} - i\tau_{yz},$$

$$S_n = 2U\theta_n + 2\gamma_n(c_{13}w_n + e_{31}\varphi_n), \quad T_n = -4c_{66}\frac{\partial}{\partial z}(u_n - iv_n),$$

$$\tau_n = 2\frac{\partial}{\partial z}(c_{44}w_n + e_{15}\varphi_n) - c_{44}\gamma_n(u_n - iv_n),$$

$$\sigma_n = c_{13}\theta_n + \gamma_n(c_{33}w_n + e_{33}\varphi_n), \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\partial_1 - i\partial_2).$$

Поскольку перемещения и электрический потенциал определены выше, то из (П.68) и (П.70) получаем расчетные формулы, например для первого типа нагружения:

$$S_n^{(1)} = \frac{P_{ln}\gamma_n}{\pi} \sum_{j=0}^3 a_j (\mu_j^2 - \mu_0^2) \mu_j Q_1(\mu_j^2) K_1(\mu_j \gamma_n r) \cos \alpha,$$

$$T_n^{(1)} = \frac{p_{ln}\gamma_n c_{66}}{2\pi c_{11}} \sum_{j=0}^3 a_j \mu_j \left\{ q_3(\mu_j^2) K_1(\mu_j \gamma_n r) - q^*(\mu_j^2) e^{-2i\alpha} K_3(\mu_j \gamma_n r) \right\} e^{-i\alpha},$$

$$\tau_n^{(1)} = \frac{p_{ln}\gamma_n}{4\pi} \sum_{j=0}^3 a_j \left\{ Q_2(\mu_j^2) K_0(\mu_j \gamma_n r) + Q_3(\mu_j^2) e^{-2i\alpha} K_2(\mu_j \gamma_n r) \right\},$$

$$\sigma_n^{(1)} = \frac{p_{ln}\gamma_n c_{33}}{2\pi c_{11}} \sum_{j=0}^3 a_j (\mu_j^2 - \mu_0^2) \mu_j Q_4(\mu_j^2) K_1(\mu_j \gamma_n r) \cos \alpha,$$

где

$$Q_1(\mu^2) = \frac{c_{13}}{c_{11}} q_1(\mu^2) + \frac{c_{11} + c_{12}}{2c_{11}} q(\mu^2) - \frac{e_{15}e_{31}}{c_{11}\epsilon_{11}} q_2(\mu^2),$$

$$Q_2(\mu^2) = Q(\mu^2) - \frac{c_{44}}{c_{11}} q_3(\mu^2), \quad Q_3(\mu^2) = Q(\mu^2) + \frac{c_{44}}{c_{11}} q^*(\mu^2),$$

$$Q(\mu^2) = \mu^2 (\mu^2 - \mu_0^2) \left[\kappa_0^2 q_2(\mu^2) - \frac{c_{44}}{c_{11}} q_1(\mu^2) \right],$$

$$Q_4(\mu^2) = q_1(\mu^2) - \frac{e_{15}e_{33}}{\epsilon_{11}c_{33}} q_2(\mu^2) + \frac{c_{13}}{c_{33}} q(\mu^2).$$

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ 4

1. Алберг Дж. Теория сплайнов и ее приложения / Дж. Алберг, Э. Нильсон, Дж. Уолчш. М.: Мир, 1972. 316 с.
2. Бейтмен Г. Таблицы интегральных преобразований. Т. I. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. М.: Наука, 1969. 344 с. (Справочная математическая библиотека).
3. Бейтмен Г. Таблицы интегральных преобразований. Т. II. Преобразования Бесселя. Интегралы от специальных функций / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. М.: Наука, 1970. 328 с. (Справочная математическая библиотека).
4. Боровиков В. А. Фундаментальные решения линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами / В. А. Боровиков // Тр. Моск. мат. об-ва. 1959. Т. 8. С. 199–257.
5. Бремерман Г. Б. Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье: пер. с англ. / Г. Б. Бремерман. М.: Мир, 1968. 276 с.
6. Брычков Ю. А. Интегральные преобразования обобщенных функций / Ю. А. Брычков, А. П. Прудников. М.: Наука, 1977. 287 с.
7. Винер Н. Преобразование Фурье в комплексной области / Н. Винер, Р. Пэли. М.: Наука, 1964. 268 с.
8. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике / В. С. Владимиров. М.: Наука, 1979. 318 с.
9. Владимиров В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. Изд. 4-е. М.: Наука, 1981. 512 с.
10. Гальперин И. Введение в теорию обобщенных функций: пер. с англ. / И. Гальперин. М.: ИЛ, 1954. 62 с.
11. Гельфанд И. М. Обобщенные функции. Вып. 1. Обобщенные функции и действия над ними / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. М.: Физматгиз, 1958. 440 с.
12. Гельфанд И. М. Обобщенные функции. Вып. 2. Пространства основных и обобщенных функций / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. М.: Физматгиз, 1958. 308 с.
13. Гельфанд И. М. Обобщенные функции. Вып. 3. Некоторые вопросы дифференциальных уравнений / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. М.: Физматгиз, 1958. 274 с.
14. Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.
15. Дирак П. Принципы квантовой механики / П. Дирак. М.: Физматгиз, 1960. 434 с.
16. Диткин В. А. Интегральные преобразования и операционное исчисление / В. А. Диткин, А. П. Прудников; под общ. ред. Л. А. Люстерника, А. Р. Янпольского. М.: Физматгиз, 1961. 524 с. (Справочная математическая библиотека).
17. Диткин В. А. Операционное исчисление / В. А. Диткин, А. П. Прудников. М.: Высш. шк., 1966. 404 с.
18. Земанян А. Г. Интегральные преобразования обобщенных функций / А. Г. Земанян. М.: Наука, 1974. 400 с.
19. Карслоу Г. С. Операционные методы в прикладной математике / Г. С. Карслоу, Д. Егер; пер. с англ. М. Горенштейна. М.: Гос. изд. иностр. лит., 1948. 292 с.

20. Кеч В. Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике: пер. с рум. / В. Кеч, П. Теодореску. М.: Мир, 1978. 518 с.
21. Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. М.: Наука, 1976. 544 с.
22. Курант Р. Уравнения с частными производными / Р. Курант. М.: Мир, 1964. 830 с.
23. Курант Р. Методы математической физики: в 2 т. / Р. Курант, Д. Гильберт. Изд. 3-е, испр. М.-Л.: Гостехиздат, 1951. Т. 1. 476 с. Т. 2. 544 с.
24. Лазарян В. А. Обобщенные функции в задачах механики / В. А. Лазарян, С. И. Конощенко. Киев: Наукова думка, 1974. 192 с.
25. Мизохата С. Теория уравнений с частными производными: пер. с яп. / С. Мизохата. М.: Мир, 1977. 504 с.
26. Микусинский Я. Элементарная теория обобщенных функций. Вып. 1 / Я. Микусинский, Р. Сикорский; пер. с англ. Ф. В. Широкова. М.: Изд. иностр. лит., 1959. 78 с.
27. Микусинский Я. Элементарная теория обобщенных функций. Вып. 2 / Я. Микусинский, Р. Сикорский; пер. с англ. Ф. В. Широкова. М.: Изд. иностр. лит., 1963. 68 с.
28. Микусинский Я. Операторное исчисление / Я. Микусинский; пер. с пол. А. И. Плесснера. М.: Изд. иностр. лит., 1956. 366 с.
29. Михлин С. Г. Линейные уравнения в частных производных / С. Г. Михлин. М.: Вышш. шк., 1977. 432 с.
30. Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными / И. Г. Петровский. М.: Физматгиз, 1961. 400 с.
31. Рихтмайер Р. Принципы современной математической физики / Р. Рихтмайер. М.: Мир, 1982. 486 с.
32. Розенфельд А. С. Переходные процессы и обобщенные функции / А. С. Розенфельд, Б. И. Яхинсон. М.: Наука, 1966. 440 с.
33. Самко С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
34. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике / С. Л. Соболев. Л.: Изд-во ЛГУ, 1950. 256 с.
35. Титчмарш Э. Введение в теорию интегралов Фурье / Э. Титчмарш; пер. с англ. Д. А. Райкова. М.: Гостехиздат., 1948. 479 с.
36. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. М.: Наука, 1977. 736 с.
37. Трантер К. Дж. Интегральные преобразования в математической физике / К. Дж. Трантер; пер. с англ. А. В. Иванова, М. С. Смирнова. М.: Гостехиздат, 1956. 204 с.
38. Функциональный анализ / под общ. ред. С. Г. Крейна. М.: Наука, 1972. 424 с. (Справочная математическая библиотека).
39. Шварц Л. Математические методы для физических наук / Л. Шварц. М.: Мир, 1965. 412 с.
40. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г. Е. Шилов. М.: Наука, 1965. 327 с.
41. Reed M. Methods of Modern Mathematical Physics: (in 4 volumes). Vol. 2. Fourier Analysis, self-Adroitness / M. Reed, B. Simon. New York; San Francisco; London: Acad. Press, 1975.
42. Schwartz L. Theorie des distributions / L. Schwartz. Paris: Hermann, 1950. Т. 1. 169 р.; 1951. Т. 2. 169 р.

ЛИТЕРАТУРА К ПРИЛОЖЕНИЮ

43. Математическое моделирование в задачах механики связанных полей. Т. 1: Введение в теорию термопьезоэлектричества / Д. И. Бардзокас [и др.]. М.: URSS, 2005. 312 с.
44. Математическое моделирование в задачах механики связанных полей. Т. 2: Статические и динамические задачи электроупругости для составных многосвязных тел / Д. И. Бардзокас [и др.]. М.: URSS, 2005. 376 с.
45. Берлинкур Д. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях / Д. Берлинкур, Д. Керран, Г. Жаффе // Физическая акустика. Т. 1. Методы и приборы ультразвуковых исследований. Ч. А. М.: Мир, 1966. С. 204–326.
46. Грибанов В. Ф. Связанные и динамические задачи термоупругости / В. Ф. Грибанов, Н. Р. Паничкин. М.: Машиностроение, 1984. 184 с.
47. Механика связанных полей в элементах конструкций: в 5 т. / АН УССР, Ин-т механики; под общ. ред. А. Н. Гузя. Киев: Наук. думка, 1987. Т. 5: Электроупругость / В. Т. Грингенко, А. Ф. Улитко, Н. А. Шульга. 1989. 276 с.
48. Купрадзе В. Д. Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения / В. Д. Купрадзе. М.–Л.: Гостехиздат, 1950. 280 с.
49. Купрадзе В. Д. Методы потенциала в теории упругости / В. Д. Купрадзе. М.: Физматгиз, 1963. 472 с.
50. Ландау Л. Д. Теоретическая физика: в 10 т. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Т. 7: Теория упругости. М.: Наука, 1987. 246 с.
51. Линьков А. М. Комплексный метод граничных интегральных уравнений теории упругости / А. М. Линьков. СПб.: Наука, 1999. 382 с.
52. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости / В. Новацкий. М.: Мир, 1970. 256 с.
53. Подстригач Я. С. Обобщенная термомеханика / Я. С. Подстригач, Ю. М. Коляно. Киев: Наук. думка, 1976. 312 с.
54. Фильшинский Л. А. Фундаментальные решения уравнений электроупругости для пьезокерамического слоя в R^3 / Л. А. Фильшинский // Механика композитных материалов. 2001. Т. 31. С. 377–388.
55. Фильшинский Л. А. О структуре однородных и фундаментальных решений для упругого слоя / Л. А. Фильшинский, А. Абидо // Вестн. ДонНУ. Сер. А. 2006. Вып. 1. С. 59–63.
56. Фильшинский Л. А. Плоская задача связанный термоупругости для пластин с отверстиями / Л. А. Фильшинский, В. Н. Кобзарь // Мат. методы и физ.-мех. поля. 2006. Т. 49. № 1. С. 174–181.
57. Фильшинский Л. А. Гармонические и импульсные возбуждения многосвязных цилиндрических тел / Л. А. Фильшинский, Д. В. Кушнир // Приклад. математика и механика. 2006. Т. 70. Вып. 2. С. 305–314.
58. Фильшинский Л. А. Связанные термоупругие поля в слое при сосредоточенных возбуждениях / Л. А. Фильшинский, Ю. В. Сиренко, Л. Л. Фильшинская // Мат. методы и физ.-мех. поля. 2005. Т. 48. № 2. С. 137–146.
59. Bardzokas D. I. Mathematical Methods in Electro-Magneto-Elasticity / D. I. Bardzokas, M. L. Filshtinsky, L. A. Filshtinsky. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2007. 530 p.

ГЛАВА 5

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

5.1. Исходные определения и обозначения

Под интегральным уравнением понимают обычно уравнение, содержащее неизвестную функцию под знаком интеграла. Пусть Ω — (конечная или бесконечная) область в вещественном евклидовом пространстве R^n . Интегральным уравнением второго рода называется уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_{\Omega} K(x, y) \varphi(y) dy = f(x), \quad (5.1)$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \Omega$, $\varphi(x)$ — неизвестная функция в Ω , ядро интегрального уравнения $K(x, y)$ и свободный член $f(x)$ — известные функции в областях $\Omega \times \Omega \in R^{2n}$ и $\Omega \in R^n$ соответственно, они могут быть одновременно вещественными или комплекснозначными функциями, λ — комплексный параметр.

Обычно уравнение (5.1) называется интегральным уравнением Фредгольма второго рода, если его ядро и свободный член подчинены одному из следующих условий:

a) $K(x, y) \in C[\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}]$, $f(x) \in C[\bar{\Omega}]$,

b) $K(x, y) \in C[\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}]$, $\iint_{\Omega \times \Omega} |K(x, y)|^2 dx dy < \infty$, $\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx < \infty$,

c) $K(x, y) \in L^2[\Omega \times \Omega]$, $f(x) \in L^2[\Omega]$.

Уравнение вида

$$\int_{\Omega} K(x, y) \varphi(y) dy = f(x) \quad (5.2)$$

называется интегральным уравнением Фредгольма первого рода, а уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_{\Omega} K(x, y) \varphi(y) dy = 0 \quad (5.3)$$

называется однородным интегральным уравнением Фредгольма второго рода.

Например, задача о поперечных колебаниях упругой балки, занимающей в нейтральном положении отрезок $[a, b]$ оси Ox и свободно опертой в точках a и b , сводится к (одномерному) интегральному уравнению

$$u(x) - \omega^2 \int_a^b G(x, y) m(y) u(y) dy = 0, \quad x \in [a, b], \quad (5.4)$$

$$G(x, y) = \begin{cases} H(x, y), & x \leq y, \\ H(y, x), & x > y, \end{cases}$$

$$H(x, y) = \frac{(x-a)(y-b)}{6EI(b-a)}(x^2 + y^2 - 2ax - 2by + 2ab),$$

где $G(x, y)$ — прогиб балки в точке x от единичной силы, приложенной в точке $y \in (a, b)$, $m(x)$ и EI — погонная масса стержня и его жесткость на изгиб соответственно, ω — частота колебаний.

Функция Грина $G(x, y)$, представляющая ядро интегрального уравнения (5.4), непрерывна в квадрате $[a, b] \times [a, b]$. Это уравнение служит для определения собственных частот и соответствующих им собственных форм колебаний стержня.

Частным случаем уравнения Фредгольма является интегральное уравнение Вольтерра. Например, положив (в одномерном случае)

$$K(x, y) = \begin{cases} H(x, y), & a < y < x < b, \\ 0, & b > y \geq x > a, \end{cases}$$

приходим к интегральному уравнению Вольтерра второго или первого рода

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \lambda \int_a^x H(x, y) \varphi(y) dy &= f(x), \\ \int_a^x H(x, y) \varphi(y) dy &= f(x). \end{aligned} \tag{5.5}$$

В приложениях встречаются также интегральные уравнения со слабой особенностью. Ядро $K(x, y)$ имеет в этом случае вид

$$K(x, y) = \frac{A(x, y)}{|x-y|^\alpha}, \quad 0 < \alpha < n, \tag{5.6}$$

где $A(x, y)$ — ограниченная функция в $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \in R^{2n}$.

Можно показать, что при $\alpha < n/2$ уравнение со слабой особенностью является уравнением Фредгольма. Например, уравнение (в одномерном случае)

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^x \frac{\sin(x+y)}{|x-y|^\alpha} \varphi(y) dy = 1, \quad 0 < \alpha < \frac{1}{2}$$

является Фредгольмовым. Если же здесь $0,5 \leq \alpha < 1$, то итерированные ядра $K_n(x, y)$ этого уравнения при достаточно большом n станут ограниченными. В таком случае уравнение с ядром, имеющим слабую особенность, можно заменить эквивалентным ему уравнением с ограниченным ядром [16, 22]. Уравнения такого вида называются квазирегулярными интегральными уравнениями.

Наконец, если в представлении (5.6) показатель α равен размерности пространства n , то имеем сингулярное, а при $\alpha > n$ — гиперсингулярное ядро. Интегральные уравнения с такими ядрами называются соответственно сингулярными и гиперсингулярными.

Область интегрирования Ω может быть неограниченной. В качестве примера приведем уравнения интегральных преобразований и соответствующих формул обращения.

а) Комплексное преобразование Фурье в пространстве $\mathcal{L}'(R^n)$ обобщенных функций медленного роста

$$\varphi(\xi) = \int e^{i(x,\xi)} f(x) dx, \quad (x, \xi) = \sum_{k=1}^n x_k \xi_k,$$

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{-i(x,\xi)} \varphi(\xi) d\xi, \quad f \in \mathcal{L}', \quad \varphi \in \mathcal{L}'.$$

Одномерный вариант ($n=1$)

$$\varphi(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} f(x) dx,$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} \varphi(\xi) d\xi.$$

б) Преобразование Лапласа обобщенных функций в $\mathcal{L}'(R^1)$

$$\varphi(p) = \int_0^{\infty} e^{-xp} f(x) dx,$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{xp} \varphi(p) dp.$$

в) Преобразование Меллина

$$\varphi(y) = \int_0^{\infty} f(x) x^{y-1} dx,$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} \varphi(y) x^{-y} dy.$$

г) Преобразование Ханкеля

$$\varphi(y) = \int_0^{\infty} f(x) J_{\nu}(xy) x dx,$$

$$f(x) = \int_0^{\infty} \varphi(y) J_{\nu}(xy) y dy.$$

Относительно условий, накладываемых на каждое из этих преобразований, см., например, в [3,11].

Наряду с уравнениями (5.1) и (5.3), вводят интегральные уравнения второго рода

$$\psi(x) - \bar{\lambda} \int_{\Omega} K^*(x, y) \psi(y) dy = g(x) \quad (5.7)$$

и

$$\psi(x) - \bar{\lambda} \int_{\Omega} K^*(x, y) \psi(y) dy = 0, \quad (5.8)$$

где ядро $K^*(x, y) = \overline{K(y, x)}$ — эрмитово сопряженное к ядру $K(x, y)$.

Интегральные уравнения (5.7) и (5.8) называются союзными (сопряженными) к уравнениям (5.1) и (5.3) соответственно.

Ядра $K(x, y)$ и $K^*(x, y)$ порождают интегральные операторы K и K^* на Ω , которые действуют по формулам

$$(Kf)(x) = \int_{\Omega} K(x, y) f(y) dy,$$

$$(K^*f)(x) = \int_{\Omega} K^*(x, y) f(y) dy.$$

Оператор K и сопряженный к нему оператор K^* удовлетворяют тождеству (см. гл. 3, п. 3.10)

$$(Ku, v) = (u, K^*v), \quad \forall u, v \in L^2(\Omega).$$

В операторной форме интегральные уравнения (5.1), (5.3) и (5.7), (5.8) принимают вид

$$(I - \lambda K)\varphi = f, \quad (I - \lambda K)\varphi = 0, \quad (5.9)$$

$$(I - \bar{\lambda} K^*)\psi = g, \quad (I - \bar{\lambda} K^*)\psi = 0, \quad (5.10)$$

где I — тождественный оператор: $I\varphi = \varphi$. Очевидно, сопряженный к оператору Фредгольма оператор K^* также является фредгольмовым.

Пример 1. Оператор K , порождаемый ядром

$$K(x, y) = x^2 + y^2, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1,$$

фредгольмов, так как $K(x, y)$ непрерывно в квадрате $[0, 1] \times [0, 1]$.

Пример 2. Пусть $K(x, y) = \ln|x - y|$. Это ядро имеет логарифмическую особенность на диагонали квадрата $x = y$, однако двойной интеграл

$$\int_0^1 \int_0^1 \ln^2|x - y| dx dy < \infty.$$

Поэтому ядро $K(x, y)$ на $[0, 1] \times [0, 1]$ и соответствующий оператор K фредгольмовы.

Пример 3. Уравнение

$$\varphi(x) - \int_1^\infty e^{-xy} \varphi(y) dy = f(x)$$

фредгольмово, так как

$$\int_1^\infty \int_1^\infty |K(x, y)|^2 dx dy = \int_1^\infty \int_1^\infty e^{-2xy} dx dy = \frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{e^{-2x}}{x} dx < \infty.$$

Пример 4. Уравнение с тем же ядром, но на полуоси $[0, \infty)$ не является фредгольмовым, так как

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-2xy} dx dy = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dx}{x} = \infty.$$

Замечание. Уравнение Фредгольма второго рода является конкретной реализацией линейного операторного уравнения с вполне непрерывным оператором (см. главу 3). Поэтому, все определения и факты, изложенные в гл. 3, п. 3.13, справедливы и здесь. Напомним их.

Уравнения с вполне непрерывными операторами (уравнения Риса–Шаудера) [17, 34, 42, 46, 49, 58]. Представим их в виде

$$(A - \mu I)\varphi = f, \quad (A - \mu I)\varphi = 0, \quad (5.11)$$

$$(A^* - \bar{\mu} I)\psi = g, \quad (A^* - \bar{\mu} I)\psi = 0, \quad (5.12)$$

где A и A^* — взаимно сопряженные операторы.

Пусть A — ограниченный линейный оператор, действующий в комплексном банаховом пространстве X .

1. Комплексное число μ называется регулярной точкой оператора A , если оператор $A - \mu I$ имеет ограниченный обратный $(A - \mu I)^{-1}$. В противном случае говорят, что μ принадлежит спектру оператора A . Оператор

$$R_\mu = (A - \mu I)^{-1}$$

называется резольвентой оператора A . Для любого μ , не принадлежащего спектру оператора A , решение неоднородного уравнения (5.11) определяется формулой

$$\varphi = R_\mu f = -\frac{1}{\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\mu^n} f, \quad \|A\| < |\mu|. \quad (5.13)$$

Все точки спектра лежат в замкнутом круге с центром в нуле и радиусом $\|A\|$ на комплексной плоскости параметра μ , регулярные точки оператора A расположены вне этого круга. Радиус наименьшего круга с центром в начале координат, содержащего спектр оператора A , называется спектральным радиусом r_A оператора A . Справедлива формула

$$r_A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}.$$

Очевидно, ряд для резольвенты сходится при $r_A < |\mu|$ и расходится при $r_A > |\mu|$.

Отмеченные факты справедливы для любого ограниченного, а значит непрерывного, линейного оператора. В частности, при $r_A = 0$ спектр ограниченного оператора A состоит из одной точки $\mu = 0$. В любом случае спектр линейного ограниченного оператора A — непустое множество.

Пусть теперь A — вполне непрерывный оператор, действующий в банаховом пространстве X .

2. Число μ называется собственным значением оператора A , если однородное уравнение (5.11) имеет нетривиальные решения. Эти решения называются собственными векторами.

торами (собственными элементами) данного оператора. Множество собственных векторов $E(\mu) = \ker(\mu I - A)$ называется собственным подпространством оператора A , соответствующим собственному значению μ . Размерность собственного подпространства называется рангом собственного значения μ . Совокупность собственных значений оператора A называется собственным спектром этого оператора.

Для операторных уравнений Риса–Шаудера справедливы следующие четыре теоремы Фредгольма.

Теорема 1. Вполне непрерывный оператор A (фигурирующий в (5.11)) имеет не более счетного множества собственных значений, расположенных в круге $|\mu| \leq \|A\|$, которые могут сгущаться только в нуле.

Теорема 2. Если μ не принадлежит спектру (регулярная точка), то неоднородное уравнение (5.11) и сопряженное с ним неоднородное уравнение (5.12) однозначно разрешимы при любом свободном члене из $L^2[\Omega]$.

Теорема 3. Если μ — собственное значение оператора A , то сопряженные однородные уравнения (5.11) и (5.12) имеют одно и то же конечное число линейно независимых собственных элементов.

Теорема 4. Для того чтобы неоднородное уравнение (5.11) было разрешимо, необходимо и достаточно, чтобы его свободный член был ортогонален к любому собственному элементу сопряженного оператора A^* .

Очевидно, для уравнений Фредгольма (5.9), (5.10) эти теоремы перефразируются следующим образом.

Теорема 1. Однородное уравнение Фредгольма (5.9) имеет не более счетного множества характеристических чисел, расположенных в области $|\lambda| > \|K\|$, которые могут иметь точку сгущения только на бесконечности.

Теорема 2. Если λ не принадлежит спектру ядра $K(x, y)$, то неоднородное уравнение (5.9) и сопряженное к нему неоднородное уравнение (5.10) однозначно разрешимы при любом свободном члене из $L^2[\Omega]$.

Теорема 3. Если λ — характеристическое число ядра $K(x, y)$, то сопряженные однородные уравнения (5.9) и (5.10) имеют одно и то же конечное число линейно независимых собственных функций.

Теорема 4. Для того чтобы неоднородное уравнение (5.9) было разрешимо, необходимо и достаточно, чтобы его свободный член был ортогонален к любой собственной функции сопряженного ядра K^* (т. е. к любому нетривиальному решению однородного уравнения (5.10)).

5.2. Решение интегральных уравнений Фредгольма второго рода методом последовательных приближений

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма

$$(I - \lambda K)\varphi = f \quad (5.14)$$

в предположении, что $\|\lambda K\| \leq \alpha < 1$ и оператор K действует в $C[\Omega]$ или в $L^2[\Omega]$.

Ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} (\lambda K)^m = I + \sum_{m=1}^{\infty} (\lambda K)^m$$

сходится абсолютно, а значит и равномерно, так как

$$\left\| \sum_{m=0}^{\infty} (\lambda K)^m \right\| \leq \sum_{m=0}^{\infty} \|\lambda K\|^m \leq \sum_{m=0}^{\infty} \alpha^m = \frac{1}{1-\alpha}.$$

Обозначим

$$R_{\lambda} = \sum_{m=0}^{\infty} (\lambda K)^m. \quad (5.15)$$

Оператор R_{λ} является обратным по отношению к оператору $I - \lambda K$. В самом деле

$$(I - \lambda K) R_{\lambda} = \sum_{m=0}^{\infty} (\lambda K)^m - \sum_{m=0}^{\infty} (\lambda K)^{m+1} = I + \sum_{m=1}^{\infty} (\lambda K)^m - \sum_{m=1}^{\infty} (\lambda K)^m = I,$$

$$R_{\lambda} (I - \lambda K) = \sum_{m=0}^{\infty} (\lambda K)^m (I - \lambda K) = I.$$

Следовательно, решение уравнения (5.14), при условии $\|\lambda K\| \leq \alpha < 1$, можно представить в виде

$$\varphi = R_{\lambda} f, \quad (5.16)$$

где R_{λ} — линейный ограниченный оператор, называемый резольвентным.

Этот результат можно интерпретировать следующим образом. Применим к уравнению (5.14) процедуру метода последовательных приближений стараясь с начального приближения $\varphi_0(x) = f(x)$. Запишем формально

$$\varphi_1(x) = f + \lambda K f,$$

$$\varphi_2(x) = f + \lambda K f + (\lambda K)^2 f,$$

.....

$$\varphi_m(x) = f + \lambda K f + (\lambda K)^2 f + \dots + (\lambda K)^m f,$$

.....

Если ядро $K(x, y)$ непрерывно в $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$ и $f(x) \in C[\bar{\Omega}]$, то

$$\|K\| = \max_x \int_{\Omega} |K(x, y)| dy \leq MV,$$

где

$$M = \max_{\substack{x \in \Omega \\ y \in \Omega}} |K(x, y)|, \quad V = \int_{\Omega} dy.$$

В соответствии с этим

$$\|(\lambda K)^m f\| \leq \|(\lambda K)^m\| \|f\|_C \leq \|\lambda K\|^m \|f\|_C \leq |\lambda|^m (MV)^m \|f\|_C.$$

Отсюда следует, что ряд (Неймана)

$$\sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m (K^m f)(x), \quad x \in \bar{\Omega} \quad (5.17)$$

мажорируется числовым рядом

$$\sum_{m=0}^{\infty} |\lambda M V|^m \|f\|_c \leq \frac{\|f\|_c}{1 - |\lambda| M V},$$

сходящимся в круге $|\lambda| < (M V)^{-1}$ на плоскости комплексного параметра λ . Так как каждая итерация $(K^p f)(x)$ — непрерывная функция в $\bar{\Omega}$ и ряд (5.16) сходится равномерно, то последовательные приближения $\varphi_m(x)$ равномерно сходятся при $m \rightarrow \infty$ к единственному решению интегрального уравнения (5.14). Это решение непрерывно. Учитывая определение резольвентного оператора (5.15), запишем

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_m(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m (K^m f)(x) = R_{\lambda} f, \\ \|\varphi\| &\leq \frac{\|f\|_c}{1 - |\lambda| M V}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

В одномерном варианте: $\Omega = (a, b)$ — конечный интервал, метод последовательных приближений сходится при

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}.$$

Если ядро $K(x, y)$ квадратично суммируемо в $\Omega \times \Omega$, то оператор K , задаваемый формулой

$$K\varphi = \int_{\Omega} K(x, y) \varphi(y) dy = F(x),$$

переводит любую квадратично суммируемую на Ω функцию $\varphi(x)$ в квадратично суммируемую на том же множестве функцию $F(x)$.

Имеет место теорема [33, 45]. Если ядро интегрального уравнения (5.14) квадратично суммируемо и $|\lambda| < \frac{1}{B}$, где

$$B^2 = \iint_{\Omega \times \Omega} |K(x, y)|^2 dx dy = \|K\|^2,$$

то ряд Неймана (5.17) для этого уравнения сходится в среднем (по норме $L^2[\Omega]$) к квадратично суммируемому решению уравнения (5.14). Это решение единственno (в том смысле, что L^2 — норма разности любых двух решений равна нулю).

Оценим погрешность n -го приближения $\varphi_n(x)$. Имеем согласно (5.18)

$$\|\varphi(x) - \varphi_n(x)\| = \left\| \sum_{m=n+1}^{\infty} \lambda^m (K^m f)(x) \right\| \leq \sum_{m=n+1}^{\infty} |\lambda^m| \|K^m\| \|f\| \leq \frac{|\lambda|^{n+1} \|K\|^{n+1}}{1 - |\lambda| \|K\|} \|f\|, \quad (5.19)$$

где $\varphi(x)$ — точное решение; $\|K\| = B$ в случае квадратично суммируемого ядра и вместо $\|K\|$ можно взять MV , если ядро непрерывно или ограничено: $|K(x, y)| \leq M$ в $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$.

Вычислим теперь ядро резольвентного оператора R_λ . Для этого введем ядра степеней оператора Фредгольма

$$(K\varphi)(x) = \int_{\Omega} K_1(x, y)\varphi(y)dy, \quad K_1(x, y) = K(x, y),$$

$$(K^2\varphi)(x) = \int_{\Omega} K_2(x, y)\varphi(y)dy$$

и вообще

$$(K^m\varphi)(x) = \int_{\Omega} K_m(x, y)\varphi(y)dy \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Функции $K_m(x, y)$ ($m = 1, 2, \dots$) называются повторными (итерированными) ядрами. Из свойства ассоциативности: $K^{m+p} = K^m K^p = K^p K^m$ вытекает равенство

$$(K^{m+p}\varphi)(x) = \int_{\Omega} K_{m+p}(x, y)\varphi(y)dy = \int_{\Omega} \varphi(y) \left(\int_{\Omega} K_m(x, y_1) K_p(y_1, y) dy_1 \right) dy,$$

т. е.

$$K_{m+p}(x, y) = \int_{\Omega} K_m(x, y_1) K_p(y_1, y) dy_1$$

или

$$K_m(x, y) = \int_{\Omega} K_{m-1}(x, y_1) K(y_1, y) dy_1 \quad (m = 2, 3, \dots). \quad (5.20)$$

Заменяя здесь ядро K_{m-1} через ядро K_{m-2} по той же формуле (5.20), ядро K_{m-2} через K_{m-3} и т. д., получим выражение m -го итерированного ядра через исходное ядро

$$K_m(x, y) = \int_{\Omega} \int_{\Omega} \dots \int_{\Omega} K(x, y_1) K(y_1, y_2) \dots K(y_{m-1}, y) dy_1 dy_2 \dots dy_{m-1}. \quad (5.21)$$

Пусть ядро $K(x, y) \in C[\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}]$ или, по крайней мере, ограничено: $|K(x, y)| \leq M$. Тогда, в силу (5.21) имеет место оценка

$$|K_m(x, y)| \leq M^m V^{m-1}.$$

И, следовательно, при $MV < 1$ ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m K_{m+1}(x, y)$$

сходится абсолютно и равномерно при $x \in \bar{\Omega}, y \in \bar{\Omega}$. Формула (5.18) в этом случае дает

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m \int_{\Omega} K_m(x, y) f(y) dy = f(x) + \lambda \int_{\Omega} f(y) \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m K_{m+1}(x, y) dy.$$

Фигурирующая под интегралом голоморфная, по крайней мере в круге $|\lambda| < (MV)^{-1}$, функция

$$R(x, y; \lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m K_{m+1}(x, y) \quad (5.22)$$

называется резольвентой ядра $K(x, y)$.

Таким образом, при $|\lambda| < (MV)^{-1}$ имеем формулу обращения интегрального уравнения второго рода (5.1), определяющую единственное непрерывное его решение для любой правой части $f \in C[\bar{\Omega}]$

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{\Omega} R(x, y; \lambda) f(y) dy. \quad (5.23)$$

Резольвента ядра удовлетворяет интегральным уравнениям

$$\begin{aligned} R(x, y; \lambda) - \lambda \int_{\Omega} K(x, y_1) R(y_1, y; \lambda) dy_1 &= K(x, y), \\ R(x, y; \lambda) - \lambda \int_{\Omega} K(y_1, y) R(x, y_1; \lambda) dy_1 &= K(x, y). \end{aligned} \quad (5.24)$$

Получим, например, второе из них. Имеем из (5.22) и (5.20)

$$\begin{aligned} R(x, y; \lambda) - K(x, y) &= \lambda K_2(x, y) + \lambda^2 K_3(x, y) + \dots = \\ &= \lambda \int_{\Omega} \{K_1(x, y_1) K_1(y_1, y) + \lambda K_2(x, y_1) K(y_1, y) + \dots\} dy_1 = \lambda \int_{\Omega} R(x, y_1; \lambda) K(y_1, y) dy_1. \end{aligned}$$

Аналогично выводится первое уравнение для резольвенты.

Замечание. Резольвента $R(x, y; \lambda)$, определяемая рядом (5.22) в круге $|\lambda| < (MV)^{-1}$, если ядро $K(x, y) \in C[\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}]$, или в круге $|\lambda| < B^{-1}$ в случае $K(x, y) \in L^2[\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}]$, регулярная функция комплексного переменного λ в этом круге. По принципу аналитического продолжения она продолжается на всю (конечную) λ -плоскость за исключением не более чем счетного множества изолированных особых точек (полюсов). Оказывается, что полюсы резольвенты ядра являются его характеристическими числами, а ряд (5.22) представляет резольвенту в круге $|\lambda| < |\lambda_1|$, где λ_1 — наименьшее по модулю характеристическое число ядра $K(x, y)$. Аналитическое продолжение функции (5.22) существует в любой конечной части λ -плоскости за исключением (конечного) числа полюсов и удовлетворяет интегральным уравнениям (5.24). В области существования резольвенты решение интегрального уравнения (5.14) определяется по формуле (5.23).

Пример 1. Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма на $[0, 1]$

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 e^{x-y} \varphi(y) dy = f(x).$$

Здесь

$$K(x, y) = e^{x-y} = K_1(x, y),$$

$$K_2(x, y) = \int_0^1 e^{x-y_1} e^{y_1-y} dy_1 = e^{x-y},$$

т. е. все повторные ядра совпадают с исходным. Согласно формуле (5.22)

$$R(x, y; \lambda) = e^{x-y} (1 + \lambda + \lambda^2 + \dots) = \frac{e^{x-y}}{1-\lambda}.$$

Следовательно, резольвента представляет собой мероморфную функцию с полюсом в точке $\lambda = 1$. Во всех остальных точках (при $\lambda \neq 1$) единственное решение нашего интегрального уравнения дается формулой

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{\lambda}{\lambda-1} e^x \int_0^x e^{-y} f(y) dy.$$

Пример 2. Рассмотрим интегральное уравнение

$$\varphi(x) - 0,1 \int_0^1 K(x, y) \varphi(y) dy = 1, \quad K(x, y) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq y, \\ y, & y \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Применив к нему метод последовательных приближений, получим первые три приближения:

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= f(x) = 1, \\ \varphi_1(x) &= 1 + 0,1 \int_0^x y dy + 0,1 \int_x^1 x dy = 0,1 \left(1 + x - \frac{x^2}{2} \right), \\ \varphi_2(x) &= 1 + 0,01 \int_0^x y \left(1 + y - \frac{y^2}{2} \right) dy + 0,01 \int_x^1 x \left(1 + y - \frac{y^2}{2} \right) dy = \\ &= 1 + \frac{x}{75} - \frac{x^2}{200} - \frac{x^3}{600} + \frac{x^4}{2400}. \end{aligned}$$

При этом оценка (5.19) дает (при $0 \leq x \leq 1$)

$$|\varphi(x) - \varphi_2(x)| \leq \frac{0,1^3 \cdot 1}{1-0,1} \cdot 1 \approx 0,0011.$$

Замечание. В большинстве случаев при вычислении последовательных приближений интегрирование вылиивается в весьма громоздкие процедуры либо вообще невозможно в элементарных функциях. В таких случаях целесообразно применять различные приближенные схемы [18, 24].

5.3. Интегральные уравнения Фредгольма второго рода с вырожденными ядрами

Ядро $K(x, y)$ называется вырожденным, если справедливо представление

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^N f_i(x) g_i(y), \quad (5.25)$$

где $f_i(x)$, $g_i(y)$ — непрерывные функции своих переменных, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Предполагается, что системы $f_i(x)$, $g_i(y)$ ($i = 1, 2, \dots, N$) состоят из линейно-независимых функций.

Интегральное уравнение Фредгольма второго рода с вырожденным ядром сводится к равносильной системе линейных алгебраических уравнений следующим образом. Вводим представление (5.25) в интегральное уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_{\Omega}^N f_i(x) g_i(y) \varphi(y) dy = f(x), \quad f(x) \in C[\bar{\Omega}].$$

Обозначив (черта сверху — знак комплексного сопряжения)

$$c_i = \int_{\Omega} g_i(y) \varphi(y) dy = (\varphi, \bar{g}_i), \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

получаем структурную формулу для решения

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^N c_i f_i(x), \quad \varphi(x) \in C[\bar{\Omega}]. \quad (5.26)$$

Умножив теперь скалярно выражение (5.26) на $\bar{g}_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, N$), приходим к алгебраической системе для определения неизвестных постоянных c_k

$$c_k = \lambda \sum_{i=1}^N c_i \alpha_{ki} + a_k \quad (k = 1, 2, \dots, N), \quad (5.27)$$

где

$$\alpha_{ki} = (f_i, \bar{g}_k) = \int_{\Omega} g_k(x) f_i(x) dx, \quad a_k = (f, \bar{g}_k) = \int_{\Omega} g_k(x) f(x) dx.$$

В матричной форме система (5.27) имеет вид

$$(E - \lambda A)c = a, \quad (5.28)$$

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_N \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12}, \dots, \alpha_{1N} \\ \alpha_{21}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{2N} \\ \dots \\ \alpha_{N1}, \alpha_{N2}, \dots, \alpha_{NN} \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_N \end{bmatrix}, \quad Ec = c.$$

Система (5.27) получена непосредственно из интегрального уравнения с вырожденным ядром. Идя обратным путем легко показать, что функция (5.26) с постоянными c_1, c_2, \dots, c_N удовлетворяющими системе (5.27), обращает интегральное уравнение в тождество. Значит, интегральное уравнение и соответствующая ему система линейных алгебраических уравнений (5.27) равносильны.

Для союзного интегрального уравнения

$$\psi(x) - \bar{\lambda} \int_{\Omega} K^*(x, y) \psi(y) dy = g(x), \quad g(x) \in C[\bar{\Omega}]$$

с ядром

$$K^*(x, y) = \overline{K(y, x)} = \sum_{i=1}^N \overline{g_i(x) f_i(y)},$$

действуя аналогично предыдущему, приходим к представлению непрерывного решения и соответствующей линейной системе

$$\psi(x) = \bar{\lambda} \sum_{i=1}^N d_i \overline{g_i(x)} + g(x), \quad (5.29)$$

$$d_k = \bar{\lambda} \sum_{i=1}^N \beta_{ki} d_i + b_k \quad (k = 1, 2, \dots, N),$$

где

$$\beta_{ki} = \int_{\Omega} f_k(x) \overline{g_i(x)} dx = \overline{\alpha_{ik}}, \quad b_k = \int_{\Omega} g(x) \overline{f_k(x)} dx.$$

В матричной форме система (5.29) имеет вид

$$(E - \bar{\lambda} A^*) d = b,$$

где A^* — матрица эрмитово сопряженная к A , т. е.

$$A^* = \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_{11}, \bar{\alpha}_{21}, \dots, \bar{\alpha}_{N1} \\ \bar{\alpha}_{12}, \bar{\alpha}_{22}, \dots, \bar{\alpha}_{N2} \\ \dots \\ \bar{\alpha}_{1N}, \bar{\alpha}_{2N}, \dots, \bar{\alpha}_{NN} \end{bmatrix} = \bar{A}',$$

где A' — матрица, транспонированная к A .

Обозначим: $\det(E - \lambda A) = D(\lambda)$, соответственно $\det(E - \bar{\lambda} A^*) = \overline{D(\lambda)}$. Определитель системы (5.27) есть многочлен от λ степени не выше N и, следовательно, $D(\lambda)$ имеет не более чем N нулей $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ ($p \leq N$), а $\overline{D(\lambda)}$ имеет нули $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_p$.

1. Пусть $\lambda \neq \lambda_i$ ($i = 1, 2, \dots, p$), тогда системы (5.27), (5.29) однозначно разрешимы и по правилу Крамера находим

$$c_k = \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{i=1}^N a_i D_{ik}(\lambda), \quad d_k = \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{i=1}^N b_i \overline{D_{ki}(\lambda)}, \quad D(0) = \det E = 1, \quad (5.30)$$

где $D_{ik}(\lambda)$ и $\overline{D_{ki}(\lambda)}$ — алгебраические дополнения i - x элементов k - x столбцов определителей $\det(E - \lambda A)$ и $\det(E - \bar{\lambda} A^*)$ соответственно. Определитель $D(\lambda)$, очевидно, тождественно не равен нулю.

С учетом соотношений (5.30) решения (5.26) и (5.29) исходного и союзного к нему уравнения приобретают вид при $D(\lambda) \neq 0$

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{\lambda}{D(\lambda)} \int_{\Omega} f(y) \sum_{k,i=1}^N D_{ki}(\lambda) f_i(x) g_k(y) dy, \quad (5.31)$$

$$\psi(x) = g(x) + \frac{\bar{\lambda}}{\overline{D(\lambda)}} \int_{\Omega} g(y) \sum_{k,i=1}^N \overline{D_{ki}(\lambda)} f_i(y) \overline{g_k(y)} dy.$$

Сравнивая выражение для $\varphi(x)$ из (5.31) с определением решения (5.23) при достаточно малых λ , находим

$$R(x, y; \lambda) = \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{k,i=1}^N D_{ki}(\lambda) f_i(x) g_k(y). \quad (5.32)$$

Таким образом, резольвента вырожденного ядра в круге достаточно малого радиуса на плоскости комплексного переменного λ представляет собой рациональную функцию и, следовательно, допускает мероморфное продолжение на всю λ -плоскость [8, 33, 50].

Из сказанного вытекает **вторая теорема Фредгольма**.

Если $D(\lambda) \neq 0$, то неоднородное уравнение (5.14) с вырожденным ядром и сопряженное к нему уравнение однозначно разрешимы при любых непрерывных правых частях $f(x)$ и $g(x)$.

2. Пусть теперь $D(\lambda) = 0$, тогда

$$\text{rang}(E - \bar{\lambda}A^*) = \text{rang}(E - \bar{\lambda}A') = \text{rang}(E - \lambda A) = r < N.$$

Следовательно, взаимно сопряженные однородные системы

$$(E - \lambda A)c = 0, \quad (E - \bar{\lambda}A^*)d = 0$$

имеют ровно по $s = N - r$ линейно независимых решений

$$c^{(s)} = \{c_1^{(s)}, c_2^{(s)}, \dots, c_N^{(s)}\}, \quad d^{(s)} = \{d_1^{(s)}, d_2^{(s)}, \dots, d_N^{(s)}\}, \quad s = 1, 2, \dots, N - r.$$

Ровно столько же линейно независимых нетривиальных решений (собственных функций) имеют, очевидно, однородные интегральные уравнения

$$(E - \lambda K)\varphi = 0, \quad (E - \bar{\lambda}K^*)\psi = 0.$$

Формулы (5.26), (5.29) в этом случае дают

$$\begin{aligned} \varphi_s(x) &= \lambda \sum_{i=1}^N c_i^{(s)} f_i(x), \\ \psi_s(x) &= \bar{\lambda} \sum_{i=1}^N d_i^{(s)} \overline{g_i(x)}, \quad s = 1, 2, \dots, N - r. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Из соотношений (5.32) видно, что числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ ($p \leq N$), представляющие нули многочлена $D(\lambda)$, являются характеристическими числами ядра $K(x, y)$. Других характеристических чисел у этого ядра нет. Каждому характеристическому числу λ_0 ранга r соответствует $s = N - r$ собственных функций (5.33).

Таким образом, мы приходим к **третьей теореме Фредгольма**.

Если $D(\lambda) = 0$, то однородное уравнение Фредгольма второго рода с вырожденным ядром и союзное с ним имеют одинаковое число линейно-независимых решений, равное $N - r$, где $r = \text{rang}(E - \lambda A)$.

Напротив, неоднородное уравнение, вообще говоря, решения не имеет. Выясним, при каких условиях уравнение (5.14) разрешимо. Пусть λ_0 — характеристическое число ядра K ранга r . Предположим, что интегральное уравнение $(I - \lambda_0 K)\varphi = f$ разрешимо. Сопряженное однородное уравнение $(I - \bar{\lambda}_0 K^*)\psi = 0$ имеет, согласно второй теореме Фредгольма, $s = N - r$ собственных функций $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_s(x)$. Умножив скалярно наше неоднородное уравнение на любую из этих собственных функций, получим

$$\begin{aligned} (f, \psi_j) &= \int_{\Omega} f(x) \overline{\psi_j(x)} dx = \int_{\Omega} \varphi(x) \overline{\psi_j(x)} dx - \lambda_0 \int_{\Omega} \int_{\Omega} K(x, y) \varphi(y) \overline{\psi_j(x)} dy dx = \\ &= \int_{\Omega} \varphi(x) \left\{ \overline{\psi_j(x)} - \lambda_0 \int_{\Omega} K(y, x) \overline{\psi_j(y)} dy \right\} dx = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s). \end{aligned}$$

Выражение в фигурных скобках равно нулю, так как из $(I - \bar{\lambda}_0 K^*)\psi = 0$ следует, что $(I - \lambda_0 \bar{K}^*)\overline{\psi} = 0$.

Таким образом, равенства

$$(f, \psi_j) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s) \quad (5.34)$$

являются необходимыми условиями разрешимости неоднородного уравнения при $D(\lambda_0) = 0$. Можно показать также, что и обратно, наличие равенств (5.34) обеспечивает существование решений интегрального уравнения $(I - \lambda_0 K)\varphi = f$ [13, 50]. При этом общее решение имеет вид

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^s c_j \varphi_j(x) + \varphi_*(x),$$

где φ_j ($j = 1, 2, \dots, N - r$) — собственные функции ядра, соответствующие характеристическому числу λ_0 ранга r , $\varphi_*(x)$ — частное решение, соответствующее свободному члену $f(x)$.

Таким образом, приходим к **четвертой теореме Фредгольма**.

Если $D(\lambda) = 0$, то для разрешимости неоднородного уравнения Фредгольма второго рода необходимо и достаточно, чтобы свободный член f был ортогонален ко всем собственным функциям сопряженного ядра (т. е. чтобы выполнялись равенства (5.34)).

Пример. Рассмотрим уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 (x - y) \varphi(y) dy = f(x).$$

Его решение имеет вид

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda(c_1 x - c_2),$$

$$c_1 = \int_0^1 \varphi(y) dy, \quad c_2 = \int_0^1 y \varphi(y) dy.$$

Для определения постоянных c_1 и c_2 получаем систему

$$\begin{aligned} c_1 \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) + c_2 \lambda &= \int_0^1 f(x) dx = a_1, \\ -\frac{1}{3}c_1 \lambda + c_2 \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) &= \int_0^1 xf(x) dx = a_2. \end{aligned}$$

Определитель системы

$$D(\lambda) = \frac{\lambda^2}{12} + 1.$$

При $D(\lambda) \neq 0$ получаем решение

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{\lambda}{D(\lambda)} \int_0^1 f(y) \left[(1+0,5\lambda)x - (1-0,5\lambda)y - \lambda xy - \frac{1}{3}\lambda \right] dy.$$

При $\lambda = \lambda_1 = -2i\sqrt{3}$ и $\lambda = \lambda_2 = 2i\sqrt{3}$ собственные векторы системы имеют соответственно вид

$$c^{(1)} = \left\{ 1, \frac{\sqrt{3}-i}{2\sqrt{3}} \right\}, \quad c^{(2)} = \left\{ 1, \frac{\sqrt{3}+i}{2\sqrt{3}} \right\}.$$

Следовательно, собственные функции при $\lambda = \lambda_1$ и $\lambda = \lambda_2$ таковы:

$$\varphi^{(1)}(x) = (1+i\sqrt{3}-2ix\sqrt{3}) \text{const}, \quad \varphi^{(2)}(x) = (1-i\sqrt{3}+2ix\sqrt{3}) \text{const}.$$

5.4. Уравнения Фредгольма. Общий случай

Уравнение Фредгольма

$$\varphi(x) - \lambda \int_{\Omega} K(x, y) \varphi(y) dy = f(x) \quad (5.35)$$

с ядром общего вида (непрерывным или квадратично-суммируемым) может быть сведено к равносильному интегральному уравнению с вырожденным ядром по схеме Э. Шмидта [8, 16]. Идея этого преобразования заключается в представлении ядра в виде суммы вырожденного ядра и достаточно малого ядра, допускающего обращение уравнения.

Если ядро непрерывно на произведении $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$, то его можно по теореме Вейерштрасса приблизить с любой степенью точности полиномами [11]

$$\forall \varepsilon > 0, \exists P(x, y) = \sum_{|\alpha+\beta| \leq N} a_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta : |K(x, y) - P(x, y)| < \varepsilon, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad y \in \bar{\Omega}.$$

Тогда ядро представляется в виде

$$K(x, y) = P(x, y) + \eta(x, y), \quad (5.36)$$

где $P(x, y)$ — вырожденное, а $\eta(x, y)$ — малое непрерывное ядро: $|\eta(x, y)| < \varepsilon$ в $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$.

Если $K(x, y) \in L^2$ ядро, т. е.

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} |K(x, y)|^2 dx dy = B^2 < \infty,$$

то его можно представить в виде ряда Фурье по полной на $\Omega \times \Omega$, ортонормированной системе функций $\varphi_k(x) \in L^2[\Omega]$, $\psi_k(y) \in L^2[\Omega]$ ($k = 1, 2, \dots$) [50]. Иными словами, имеет место равенство

$$K(x, y) = \sum_{m, k=1}^{\infty} A_{mk} \varphi_m(x) \psi_k(y) \quad (5.37)$$

в смысле нормы в L^2 , т. е.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \left| K(x, y) - \sum_{m, k=1}^N A_{mk} \varphi_m(x) \psi_k(y) \right|^2 dx dy = 0.$$

Коэффициенты Фурье A_{mk} определяются по формулам

$$A_{mk} = \int_{\Omega} \int_{\Omega} K(x, y) \overline{\varphi_m(x)} \overline{\psi_k(y)} dx dy \quad (m, k = 1, 2, \dots).$$

Но тогда ядро можно представить в виде суммы

$$K(x, y) = S(x, y) + T(x, y), \quad (5.38)$$

$$S(x, y) = \sum_{m, k=1}^N A_{mk} \varphi_m(x) \psi_k(y),$$

$$T(x, y) = K(x, y) - \sum_{m, k=1}^N A_{mk} \varphi_m(x) \psi_k(y),$$

где $S(x, y)$ — вырожденное ядро (Ринкерле–Гурса, PG — ядро), $T(x, y)$ — малое ядро.

Замечание. При аппроксимации L^2 -ядра общего вида PG -ядрами можно воспользоваться следующей теоремой [50].

Любое L^2 — ядро $K(x, y)$, т. е. любое ядро, для которого обе функции

$$A(x) = \left[\int K^2(x, y) dy \right]^{\frac{1}{2}}, \quad B(y) = \left[\int K^2(x, y) dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

существуют почти всюду на Ω и принадлежат классу L^2 , может быть разложено (и при этом бесконечным множеством способов) в сумму некоторого PG -ядра

$$S(x, y) = \sum_{k=1}^m X_k(x) Y_k(y)$$

и другого L^2 -ядра $T(x, y)$, норма которого может быть сделана меньше любого наперед заданного положительного числа ε :

$$\|T\|^2 = \int_{\Omega} \int_{\Omega} T^2(x, y) dx dy < \varepsilon^2.$$

Таким образом, в обоих случаях ядро $K(x, y)$ представляется в виде суммы вырожденного ядра и «достаточно малого» ядра. Но тогда согласно п. 3.13 оператор $I - \lambda K$ непрерывно обратим при $|\lambda| < \|K\|^{-1}$. Ниже проделаем необходимые выкладки для интегрального уравнения (5.35) с L^2 -ядром. С учетом разложения (5.38) представим его в виде

$$\varphi(x) - \lambda \int_{\Omega} T(x, y) \varphi(y) dy = f + \lambda \int_{\Omega} S(x, y) \varphi(y) dy = \Phi(x), \quad (5.39)$$

где функцию $\Phi(x)$ считаем пока известной.

Пусть $R > 0$ — произвольное число, уравнение (5.35) рассмотрим при $|\lambda| \leq R$. Так как при достаточно большом N норма оператора T , порожденного ядром $T(x, y)$, достаточно мала, то можно взять N таким, чтобы $\|T\| < (2R)^{-1}$. Тогда резольвента ядра $T(x, y)$ регулярна в круге $|\lambda| < 2R$ и тем более в замкнутом круге $|\lambda| \leq R$. При этом условии (λ — правильное) уравнение (5.39) однозначно разрешимо (в $L^2[\Omega]$) и уравнение (5.35) заменяется эквивалентным уравнением

$$\varphi(x) = \Phi(x) + \lambda \int_{\Omega} R_T(x, y; \lambda) \Phi(y) dy,$$

где $R_T(x, y; \lambda)$ — резольвента ядра $T(x, y)$, квадратично суммируема на $\Omega \times \Omega$ и регулярна в замкнутом круге $|\lambda| \leq R$.

Далее вместо $\Phi(y)$ подставляем сюда его выражение из (5.39). Получаем

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= f(x) + \lambda \int_{\Omega} S(x, y) \varphi(y) dy + \lambda \int_{\Omega} R_T(x, y; \lambda) \left[f(y) + \lambda \int_{\Omega} S(y, y_1) \varphi(y_1) dy_1 \right] dy = \\ &= f(x) + \lambda \int_{\Omega} \left[S(x, y) + \lambda \int_{\Omega} S(y, y_1) R_T(x, y_1; \lambda) dy_1 \right] \varphi(y) dy + \\ &\quad + \lambda \int_{\Omega} R_T(x, y; \lambda) f(y) dy = f(x, \lambda) + \lambda \int_{\Omega} H(x, y; \lambda) \varphi(y) dy. \end{aligned}$$

Ядро полученного интегрального уравнения относительно $\varphi(x)$

$$\begin{aligned} H(x, y; \lambda) &= S(x, y) + \lambda \int_{\Omega} S(y, y_1) R_T(x, y_1; \lambda) dy_1 = \sum_{m,k=1}^N A_{mk} \psi_k(y) [\varphi_m(x) + \\ &\quad + \lambda \int_{\Omega} \varphi_m(y_1) R_T(x, y_1; \lambda) dy_1] = \sum_{m,k=1}^N A_{mk} \psi_k(y) \varphi_m(x, \lambda), \end{aligned} \quad (5.40)$$

где

$$\varphi_m(x, \lambda) = \varphi_m(x) + \lambda \int_{\Omega} \varphi_m(y_1) R_T(x, y_1; \lambda) dy_1.$$

Таким образом, уравнение Фредгольма второго рода с произвольным L^2 -ядром может быть сведено к равносильному уравнению с ядром вида (5.40). По построению, резольвента $R_T(x, y; \lambda)$ голоморфна по λ в круге $|\lambda| \leq R$, ядро $H(x, y; \lambda)$ и свободный член $f(x, \lambda)$ также аналитически зависят от λ в этом круге (в смысле [33], стр. 54 и далее). Результаты, полученные для уравнений с вырожденными ядрами остаются в силе и здесь.

Так как в любом круге $|\lambda| < m$ ($m = 1, 2, \dots$) ядро Фредгольма может иметь лишь конечное число характеристических чисел, то справедлива **первая теорема Фредгольма**: уравнение Фредгольма имеет не более счетного множества характеристических чисел, которые могут сгущаться только на бесконечности.

Аналогичные результаты имеют место относительно решений в классе $C[\bar{\Omega}]$. Как следствие из теорем Фредгольма, сформулированных в п. 5.3, вытекает

Альтернатива Фредгольма. Либо неоднородное уравнение разрешимо, каков бы ни был свободный член, либо соответствующее однородное уравнение имеет нетривиальные решения.

В некоторых случаях для приближенной оценки решения интегрального уравнения ядро $K(x, y)$ заменяют близким к нему вырожденным ядром. Сделать это можно различными способами например взяв вместо ядра отрезок его ряда Тейлора. Приведем пример, заимствованный из [21].

Найти приближенное решение интегрального уравнения

$$\varphi(x) - \int_0^1 (1 - e^{xy}) \varphi(y) dy = e^x - x.$$

Ядро интегрального уравнения $x(1 - e^{xy})$ аппроксимируем отрезком ряда Маклорена

$$K(x, y) \approx H(x, y) = -x^2 y - \frac{x^3 y^2}{2} - \frac{x^4 y^3}{6}.$$

Получим интегральное уравнение с вырожденным ядром

$$\psi(x) + \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{x^3 y^2}{2} + \frac{x^4 y^3}{6} \right) \psi(y) dy = e^x - x.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\psi(x) = e^x - x - c_1 x^2 - c_2 x^3 - c_3 x^4,$$

где постоянные c_i ($i = 1, 2, 3$) определяются из системы уравнений

$$\frac{5}{4}c_1 + \frac{1}{5}c_2 + \frac{1}{6}c_3 = \frac{2}{3},$$

$$\frac{1}{5}c_1 + \frac{13}{6}c_2 + \frac{1}{7}c_3 = e - \frac{9}{4},$$

$$\frac{1}{6}c_1 + \frac{1}{7}c_2 + \frac{49}{8}c_3 = \frac{29}{5} - 2e.$$

Решение этой системы дает

$$c_1 = 0,5010, \quad c_2 = 0,1671, \quad c_3 = 0,0422.$$

Соответственно,

$$\psi(x) = e^x - x - 0,5010x^2 - 0,1671x^3 - 0,0422x^4.$$

Точное решение $\phi(x) \equiv 1$. Имеем $\psi(0) = 1,0000$; $\psi(0,5) = 1,0000$; $\psi(1) = 1,0080$, т. е. расхождение с точным решением всего 0,008.

Отметим некоторые свойства резольвенты.

Резольвента мероморфна на всей λ -плоскости. Это следует из того, что в круге произвольного радиуса R знаменатель резольвенты $D_R(\lambda)$ может иметь лишь конечное число нулей. Нуль знаменателя $D_R(\lambda)$ является полюсом резольвенты, полюсы резольвенты совпадают с характеристическими числами ядра. По Фредгольму, резольвента ядра есть отношение двух целых функций от λ [13, 29]

$$R(x, y; \lambda) = \frac{D(x, y; \lambda)}{D(\lambda)},$$

где

$$D(x, y; \lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} B_m(x, y) \lambda^m,$$

$$D(\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} C_m \lambda^m, \quad C_0 = 1, \quad C_m = \int_{\Omega} B_{m-1}(x, x) dx, \quad m > 1,$$

$$B_0(x, y) = K(x, y),$$

$$B_m(x, y) = \int_{\Omega} \dots \int_{\Omega} K \begin{pmatrix} x, y_1, y_2, \dots, y_m \\ y, y_1, y_2, \dots, y_m \end{pmatrix} dy_1 dy_2 \dots dy_m,$$

$$K \begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_p \\ y_1, y_2, \dots, y_p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} K(x_1, y_1), K(x_1, y_2), \dots, K(x_1, y_p) \\ K(x_2, y_1), K(x_2, y_2), \dots, K(x_2, y_p) \\ \dots \\ K(x_p, y_1), K(x_p, y_2), \dots, K(x_p, y_p) \end{vmatrix}.$$

Если Ω — ограниченное замкнутое множество и ядро на $\Omega \times \Omega$ непрерывно, то резольвента также непрерывна на $\Omega \times \Omega$ при любом правильном (т. е. отличном от характеристического) значении λ .

Аналогичное предложение имеет место относительно ограниченности и непрерывности решения интегрального уравнения. Пусть ядро интегрального уравнения

$$\varphi(x) - \lambda \int_{\Omega} K(x, y) \varphi(y) dy = f(x)$$

квадратично суммируемо в $\Omega \times \Omega$ и, кроме того,

$$\int_{\Omega} |K(x, y)|^2 dy \leq A.$$

Тогда если свободный член $f(x)$ ограничен, а уравнение разрешимо, то любое его решение $\varphi \in L^2[\Omega]$ ограничено.

В самом деле, из неравенства Шварца–Буняковского получаем

$$\begin{aligned} |\varphi(x)| &\leq |f(x)| + \left| \lambda \int_{\Omega} K(x, y) \varphi(y) dy \right| \leq |f(x)| + |\lambda| \left\{ \int_{\Omega} |K(x, y)|^2 dy \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{\Omega} |\varphi(y)|^2 dy \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq |f(x)| + |\lambda| \sqrt{A} \|\varphi\|. \end{aligned}$$

Отсюда следует также ограниченность собственных функций ядра $K(x, y)$.

Пусть теперь свободный член $f(x)$ и ядро $K(x, y)$ непрерывны соответственно на $\overline{\Omega}$ и $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$. Тогда любое решение этого уравнения непрерывно на $\overline{\Omega}$.

Действительно, из непрерывности $f(x)$ следует его ограниченность на $\overline{\Omega}$, но тогда, по предыдущему, любое квадратично суммируемое решение $\varphi(x)$ ограничено: $|\varphi(x)| \leq N$. Имеем оценку

$$\int_{\Omega} |K(x_1, y) - K(x_2, y)| dy < \frac{\varepsilon}{N}, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Следовательно,

$$|(\varphi(x_1) - f(x_1)) - (\varphi(x_2) - f(x_2))| = \left| \int_{\Omega} (K(x_1, y) - K(x_2, y)) \varphi(y) dy \right| < \varepsilon.$$

Рассмотрим теперь уравнение со слабой особенностью (с полярным ядром)

$$\varphi(x) - \lambda \int_{\Omega} K(x, y) \varphi(y) dy = f(x),$$

$$K(x, y) = \frac{H(x, y)}{|x - y|^{\alpha}}, \quad 0 \leq \alpha < n, \quad |H(x, y)| \leq C,$$

где Ω — замкнутая ограниченная область в R^n .

Имеют место теоремы [16, 33, 34].

1. Если свободный член уравнения со слабой особенностью ограничен, то любое решение этого уравнения ограничено.

2. Если свободный член уравнения со слабой особенностью и функция $H(x, y)$ непрерывны в Ω , то любое его решение непрерывно в Ω .

В приложениях различного рода граничные задачи часто сводятся к системам интегральных уравнений вида

$$\varphi_m(x) - \lambda \sum_{p=1}^k \int_{\Omega} K_{mp}(x, y) \varphi_p(y) dy = f_m(x) \quad (m = 1, 2, \dots, k). \quad (5.41)$$

Очевидно, вводя вектор-столбцы искомых функций и свободных членов и квадратную матрицу ядер, можно записать систему (5.41) в виде одного матричного уравнения.

Если ядра $K_{mp}(x, y)$ фредгольмовские или имеют слабую особенность, а $f_m \in L^2[\Omega]$, то для этой системы верны все теоремы Фредгольма.

Для сходимости метода последовательных приближений достаточно, чтобы

$$|\lambda| \leq \left\{ \sum_{m,p=1}^k \int_{\Omega} \int_{\Omega} |K_{mp}(x, y)|^2 dx dy \right\}^{-\frac{1}{2}}.$$

Если ядра удовлетворяют еще условиям

$$\int_{\Omega} |K_{mp}(x, y)|^2 dy \leq A_{mp} = \text{const}, \quad \forall x \in \Omega,$$

то последовательные приближения сходятся абсолютно и равномерно на $\bar{\Omega}$.

Пусть матрицы $B = \|B_{mp}\|$, $B^* = \|B_{pm}\|$, где

$$B_{mp}^2 = \int_{\Omega} \int_{\Omega} |K_{mp}(x, y)|^2 dx dy.$$

Обозначим через σ^2 наибольшее характеристическое число матрицы B^*B . Последовательные приближения для системы (5.41) сходятся в круге

$$|\lambda| < \frac{1}{\sigma}.$$

Укажем еще сопряженную систему с (5.41). Она имеет вид

$$\psi_m(x) - \bar{\lambda} \sum_{p=1}^k \int_{\Omega} K_{pm}(y, x) \psi_p(y) dy = g_m(x) \quad (m = 1, 2, \dots, k). \quad (5.42)$$

Если все ядра $K_{mp}(x, y)$, а следовательно, и сопряженные ядра $\bar{K}_{pm}(y, x)$ вырожденные, то система (5.41) и сопряженная с ней (5.42) сводятся к равносильным линейным алгебраическим системам. В общем случае можно также осуществить такое преобразование представив каждое ядро $K_{mp}(x, y)$ в виде суммы вырожденного и достаточно малого ядра [16, 33].

5.5. Симметричные интегральные уравнения

Ядро Фредгольма $K(x, y)$ называется симметричным (эрмитовым), если оно совпадает со своим эрмитово сопряженным ядром $K^*(x, y)$, т. е.

$$K(x, y) = K^*(x, y) = \overline{K(y, x)}. \quad (5.43)$$

Для вещественного симметричного ядра

$$K(x, y) = K(y, x).$$

Операторы, порожденные ядрами $K(x, y)$ и $K^*(x, y)$

$$(K\varphi)(x) = \int_{\Omega} K(x, y)\varphi(y)dy, \quad (5.44)$$

$$(K^*\psi)(x) = \int_{\Omega} K^*(x, y)\psi(y)dy = \int_{\Omega} \overline{K(y, x)}\psi(y)dy$$

называются сопряженными. Напомним билинейное соотношение между ними (см. гл. 3, пп. 3.10 и 3.11)

$$(K\varphi, \psi) = (\varphi, K^*\psi). \quad (5.45)$$

Из соотношений (5.44) и (5.45) видно, что оператор K , порожденный симметричным ядром, является самосопряженным, т. е. равен своему сопряженному. Соотношение (5.45) в этом случае имеет вид

$$(K\varphi, \psi) = (\varphi, K\psi), \forall \varphi, \psi \in L^2[\Omega].$$

Интегральное уравнение с симметричным (эрмитовым) ядром называется симметричным интегральным уравнением. Оператор Фредгольма с симметричным ядром в L^2 обычно именуют оператором Гильберта–Шмидта.

Пример 1. Ядра $K(x, y) = x + y$, $K(x, y) = i(x - y)$, $K(x, y) = x^2 + y^2 + xy$, определенные на отрезке $[a, b]$ вещественной оси, симметричны. Ядро $K(x, y) = \exp\{i(x + y)\}$ — несимметрично.

Пример 2. Пусть $\Omega \in R^n$ — конечная область, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \Omega$ и $r = |x - y|$. Ядра $K(x, y) = \ln \frac{1}{r}$, $K(x, y) = r^{-\lambda}$ ($0 \leq \lambda < n/2$) — симметричные.

Интегральное уравнение с эрмитовым ядром и действительным λ

$$\varphi(x) - \lambda \int_{\Omega} K(x, y)\varphi(y)dy = f(x)$$

совпадает со своим союзным, так как в этом случае $K = K^*$.

Напомним определения собственного вектора и собственного значения линейного оператора A . Рассмотрим однородное операторное уравнение

$$Ax = \mu x. \quad (5.46)$$

Если при данном $\mu \neq 0$ это уравнение имеет нетривиальное решение, то такое значение μ называется собственным значением оператора A , а нетривиальное решение x называется собственным элементом (собственным вектором) оператора A , соответствующим собственному значению μ .

В конечномерном линейном пространстве линейный оператор A переводит любой собственный вектор x в коллинеарный ему вектор μx . Для оператора подобия с коэффициентом подобия α любой вектор x есть собственный, соответствующий собственному значению $\mu = \alpha$, так как

$$Ax = \alpha x.$$

Из сопоставления уравнения (5.46) при $A = K$ с интегральным уравнением

$$\varphi - \lambda K\varphi = 0$$

видно, что собственные значения оператора, если они существуют, совпадают с обратными величинами соответствующих характеристических чисел ядра $K(x, y)$, т. е. $\lambda = 1/\mu$.

Заметим, что не всякий вполне непрерывный оператор имеет ненулевые собственные элементы. Например, их не имеет оператор Вольтерра

$$(Hx)(t) = \int_0^t x(\tau) H(t, \tau) d\tau.$$

Однако имеет место теорема 1.

Всякий отличный от нулевого вполне непрерывный эрмитов оператор A , действующий в гильбертовом пространстве H , имеет по крайней мере одно ненулевое собственное значение μ .

Для доказательства воспользуемся теоремой 4 из п. 3.11, в которой утверждается, что

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|.$$

По определению верхней грани найдется последовательность элементов $\{x_n\} \subset H$, $\|x_n\|=1$, такая что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (Ax_n, x_n) = \|A\| \text{ или } -\|A\|.$$

Обозначим этот предел через μ_1 ($\lim (Ax_n, x_n) = \mu_1$), понятно, что при больших n $\mu_1 \neq 0$. Далее, поскольку оператор A вполне непрерывен, то он ограниченную последовательность $\{x_n\}$ переводит в компактную $\{Ax_n\}$, из которой можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{Ax_{n_i}\}$. Обозначим

$$\lim_{i \rightarrow \infty} Ax_{n_i} = h.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \|Ax_{n_i} - \mu_1 x_{n_i}\|^2 &= (Ax_{n_i} - \mu_1 x_{n_i}, Ax_{n_i} - \mu_1 x_{n_i}) = \|Ax_{n_i}\|^2 - 2\mu_1 (Ax_{n_i}, x_{n_i}) + \mu_1^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|Ax_{n_i} - \mu_1 x_{n_i}\|^2 = \|h\|^2 - \mu_1^2 \geq 0. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\|Ax_{n_i}\| \leq \|A\| \|x_{n_i}\| = \|A\| = |\mu_1| \Rightarrow \|h\|^2 - \mu_1^2 \leq 0.$$

Значит,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|Ax_{n_i} - \mu_1 x_{n_i}\| = 0. \quad (5.48)$$

Так как $\lim Ax_{n_i}$ существует, то отсюда следует сходимость последовательности нормированных элементов x_{n_i} , причем

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x_{n_i} = \frac{h}{\mu_1}, \quad \left\| \frac{h}{\mu_1} \right\| = 1.$$

Положив $x_1 = h/\mu_1$, получаем из (5.48)

$$Ax_1 - \mu_1 x_1 = 0, \|x_1\| = 1.$$

Таким образом, существует нетривиальный собственный элемент x_1 соответствующий собственному значению $\mu_1 \neq 0$. При этом

$$|\mu_1| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)| = \|A\|. \quad (5.49)$$

Из доказанной теоремы следует, что однородное интегральное уравнение Фредгольма

$$\varphi - \lambda K\varphi = 0$$

с эрмитовым ядром $K(x, y) \neq 0$, имеет, по крайней мере, одно отличное от нуля характеристическое число λ_1 , причем наименьшее по модулю характеристическое число удовлетворяет экстремальному соотношению

$$\frac{1}{|\lambda_1|} = \sup_{\|\varphi\|=1} |(K\varphi, \varphi)| = \sup_{f \in L^2[\Omega]} \frac{\|Kf\|}{\|f\|} = \|K\|. \quad (5.50)$$

В самом деле, пусть λ_0 и φ_0 — другое характеристическое число и соответствующая ему собственная функция: $\varphi_0 - \lambda_0 K\varphi_0 = 0$. Тогда

$$\frac{1}{|\lambda_1|} = \sup_{f \in L^2[\Omega]} \frac{\|Kf\|}{\|f\|} \geq \frac{\|K\varphi_0\|}{\|\varphi_0\|} = \frac{1}{|\lambda_0|} \Rightarrow |\lambda_0| \geq |\lambda_1|. \quad (5.50)$$

Имеют место следующие утверждения.

1. Все собственные значения вполне непрерывного эрмитового оператора A , действующего в гильбертовом пространстве H , действительны.

В самом деле, пусть

$$Ax = \mu x, \|x\| \neq 0.$$

Умножив это уравнение скалярно на x , получим

$$(Ax, x) = \mu \|x\|^2,$$

но

$$(Ax, x) = (x, Ax) = \overline{(Ax, x)} \Rightarrow \operatorname{Im}(Ax, x) = 0,$$

значит,

$$\mu = \frac{(Ax, x)}{\|x\|^2} \Rightarrow \operatorname{Im} \mu = 0.$$

2. Собственные векторы вполне непрерывного эрмитового оператора, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.

Пусть μ и μ_* , $\mu \neq \mu_*$ — собственные значения оператора A , а x и x_* — соответствующие собственные элементы, т. е.

$$Ax = \mu x, Ax_* = \mu_* x_*.$$

Имеем

$$\mu(x, x_*) = (Ax, x_*) = (x, Ax_*) = \mu_*(x, x_*).$$

Отсюда $(x, x_*) = 0$, а это означает, что векторы x и x_* ортогональны.

3. Последовательность собственных векторов вполне непрерывного эрмитового оператора можно сделать ортонормированной.

В самом деле, каждому собственному значению оператора A соответствует конечное число линейно независимых собственных векторов, из которых можно построить ортонормированную систему. Учитывая то, что собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям ортогональны, отличны от нуля и, значит, их можно нормировать, приходим к требуемому выводу.

В приложении к симметричным интегральным уравнениям с эрмитовым L^2 -ядром $K(x, y)$

$$\phi - \lambda K\phi = 0$$

эти теоремы звучат так:

1. Все характеристические числа ядра $K(x, y)$ действительные.
2. Собственные функции ядра, соответствующие различным характеристическим числам, ортогональны.
3. Последовательность собственных функций ядра $K(x, y)$ можно сделать ортонормированной.

Под последовательностью характеристических чисел и соответствующих им собственных функций ядра понимают следующее. В последовательности характеристических чисел каждое такое число повторяется столько раз, сколько линейно независимых собственных функций ему соответствует (при этом среди характеристических чисел могут оказаться равные). Поскольку множество характеристических чисел не более чем счетно, их можно перенумеровать и расположить в порядке возрастания абсолютных величин

$$|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_n| \leq \dots$$

Соответствующая ортонормированная последовательность собственных функций

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots,$$

причем каждому члену последовательности $\{\lambda_n\}$ отвечает единственная функция из последовательности $\{\varphi_n\}$.

Таким образом,

$$\varphi_n(x) - \lambda_n K\varphi_n = 0,$$

$$(\varphi_m, \varphi_n) = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n. \end{cases}$$

Если ядро вырожденное, то характеристических чисел конечное число, в противном случае последовательность $\{\lambda_n\}$ имеет точку сгущения на бесконечности. Это означает, что в любом круге $|\lambda| < R$ содержится лишь конечное число характеристических чисел ядра.

Все повторные ядра эрмитового ядра также эрмитовы. В самом деле, если K, H — операторы Фредгольма

$$(K\varphi)(x) = \int_{\Omega} K(x, y)\varphi(y)dy, \quad (H\varphi)(x) = \int_{\Omega} H(x, y)\varphi(y)dy,$$

K^* и H^* — сопряженные операторы

$$(K^*\psi)(x) = \int_{\Omega} \overline{K(y, x)}\psi(y)dy, \quad (H^*\psi)(x) = \int_{\Omega} \overline{H(y, x)}\psi(y)dy,$$

то справедливы равенства $(KH)^* = H^*K^*$. Отсюда при $K = H$ получаем

$$(K^2)^* = (K^*)^2, \quad (K^3)^* = (KK^2)^* = (K^2)^*K^* = (K^*)^3$$

и вообще

$$(K^m)^* = (K^*)^m \quad (m = 2, 3, \dots).$$

Для самосопряженного оператора K это равенство дает

$$(K^m)^* = K^m,$$

следовательно, ядра этих операторов $K_m(x, y)$ и $\overline{K_m(y, x)} = K_m^*(x, y)$ совпадают.

Из приведенных рассуждений видно, что любая целая положительная степень эрмитового оператора есть снова эрмитов оператор и, следовательно, имеет место соотношение

$$(K^m\varphi, \psi) = (\varphi, K^m\psi), \quad \forall \varphi, \psi \in L^2[\Omega].$$

Имеет место предложение. Совокупность характеристических чисел m -го итерированного ядра совпадает с совокупностью m -х степеней характеристических чисел исходного ядра $K(x, y)$. Покажем это для второго итерированного ядра $K_2(x, y)$.

Пусть λ_0 и φ_0 — характеристическое число и соответствующая ему собственная функция ядра $K(x, y)$, не обязательно эрмитового. Имеем

$$\varphi_0 = \lambda_0 K\varphi_0 \Rightarrow \varphi_0 - \lambda_0^2 K^2\varphi_0 = 0 \Rightarrow (I - \lambda_0^2 K^2)\varphi_0 = 0.$$

Отсюда следует, что λ_0^2 и φ_0 — характеристическое число и соответствующая собственная функция второго итерированного ядра $K_2(x, y)$.

Обратно, если μ_0 и $\varphi_0(x)$ — характеристическое число и соответствующая собственная функция второго итерированного ядра, то

$$(I - \mu_0 K^2)\varphi_0 = 0 \Rightarrow (I - \sqrt{\mu_0}K)(I + \sqrt{\mu_0}K)\varphi_0 = 0.$$

Обозначим $(I + \sqrt{\mu_0}K)\varphi_0 = \psi(x)$. Тогда имеем $(I - \sqrt{\mu_0}K)\psi = 0$. Если $\psi \neq 0$, то заключаем, что $\sqrt{\mu_0}$ — характеристическое число ядра $K(x, y)$. Если же $\psi(x) \equiv 0$, то характеристическим числом ядра $K(x, y)$ является $-\sqrt{\mu_0}$. Таким образом, в любом случае со-

вокупность квадратов характеристических чисел ядра $K(x, y)$ совпадает с совокупностью характеристических чисел второго итерированного ядра $K_2(x, y)$.

Если ядро $K(x, y)$ эрмитово, то характеристические числа второго итерированного ядра положительны.

Теорема Гильберта–Шмидта. Пусть $K(x, y)$ — эрмитово ядро и $h(x) \in L^2[\Omega]$. Тогда всякая функция вида

$$f(x) = (Kh)(x) = \int_{\Omega} K(x, y) h(y) dy \quad (5.51)$$

разлагается в сходящийся (по норме $L^2[\Omega]$) ряд Фурье по ортонормированной системе собственных функций ядра $K(x, y)$.

$$(Kh)(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{h_m}{\lambda_m} \varphi_m(x), \quad h_m = (h, \varphi_m).$$

Наметим контуры доказательства этой фундаментальной теоремы. Вычислим коэффициенты Фурье функции $f(x)$. Имеем

$$f_m = \int_{\Omega} f(x) \overline{\varphi_m(x)} dx = (f, \varphi_m) = (Kh, \varphi_m) = (h, K\varphi_m) = \left(h, \frac{\varphi_m}{\lambda_m} \right) = \frac{1}{\lambda_m} h_m,$$

где $h_m = (h, \varphi_m)$ — коэффициент Фурье функции $h(x)$.

Таким образом, ряд Фурье функции $f(x)$ имеет вид

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{h_m}{\lambda_m} \varphi_m(x). \quad (5.52)$$

В силу квадратичной суммируемости функции $h(x)$, $f(x) \in L^2[\Omega]$ ряд (5.52) сходится по норме L^2 . Обозначим частичную сумму этого ряда через $S_n(x)$:

$$S_n(x) = \sum_{m=1}^n \frac{h_m}{\lambda_m} \varphi_m(x).$$

Покажем, что $S_n(x) \rightarrow f(x)$ при $n \rightarrow \infty$ по L^2 -норме.

Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} f(x) - S_n(x) &= \int_{\Omega} K(x, y) h(y) dy - \sum_{m=1}^n \frac{\varphi_m(x)}{\lambda_m} \int_{\Omega} h(y) \overline{\varphi_m(y)} dy = \\ &= \int_{\Omega} h(y) \left\{ K(x, y) - \sum_{m=1}^n \frac{\varphi_m(x) \overline{\varphi_m(y)}}{\lambda_m} \right\} dy. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Ядро в правой части этого равенства

$$K^{(n)}(x, y) = K(x, y) - \sum_{m=1}^n \frac{\varphi_m(x) \overline{\varphi_m(y)}}{\lambda_m}$$

имеет характеристические числа $\lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}, \dots$ и соответствующие им собственные функции $\varphi_{n+1}(x), \varphi_{n+2}(x), \dots$

Действительно, выражение (при $p > n$)

$$\begin{aligned}\alpha(x) = \varphi_p(x) - \lambda_p \int_{\Omega} K^{(n)}(x, y) \varphi_p(y) dy &= \varphi_p(x) - \lambda_p K^{(n)} \varphi_p = \\ &= (\varphi_p - \lambda_p K \varphi_p) + \lambda_p \sum_{m=1}^n \frac{\varphi_m(x)}{\lambda_m} (\varphi_m, \varphi_p) \equiv 0,\end{aligned}$$

так как λ_p и φ_p — характеристическое число и соответствующая ему собственная функция ядра $K(x, y)$, а $(\varphi_m, \varphi_p) = 0$ при $p > n$.

Следовательно,

$$\varphi_p(x) - \lambda_p \int_{\Omega} K^{(n)}(x, y) \varphi_p(y) dy = 0 \quad (p = n+1, n+2, \dots).$$

Вернемся теперь к соотношению (5.53). Перепишем его в виде

$$f(x) - S_n(x) = \int_{\Omega} K^{(n)}(x, y) h(y) dy.$$

Отсюда, с учетом (5.50)

$$\|f - S_n\| = \|K^{(n)} h\| \leq \frac{1}{\lambda_{n+1}} \|h\|,$$

где λ_{n+1} — наименьшее характеристическое число ядра $K^{(n)}(x, y)$.

Так как h — квадратично суммируемая функция: $\|h\|_{L^2[\Omega]} < \infty$, а $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{n+1} = \infty$, то

$$\|f - S_n\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

т. е. частичная сумма ряда Фурье функции $f(x)$ сходится в среднем к $f(x)$. Значит,

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{h_m}{\lambda_m} \varphi_m(x). \quad (5.54)$$

Ряд (5.54) называется рядом Гильберта–Шмидта.

Заметим, что полнота системы собственных функций ядра $K(x, y)$ здесь не предполагалась. Согласно определению (5.51), (истокообразная) функция $f(x)$ принадлежит области значений оператора Гильберта–Шмидта K . Поэтому теорему Гильберта–Шмидта можно сформулировать так:

система собственных элементов оператора Гильберта–Шмидта полна в области значений этого оператора. Если область значений некоторого оператора Гильберта–Шмидта совпадает с $L^2[\Omega]$, то система его собственных элементов полна в $L^2[\Omega]$.

Представляет интерес выяснить при каких условиях ряд Гильберта–Шмидта сходится абсолютно и равномерно. Имеет место теорема.

Если эрмитово ядро $K(x, y)$ удовлетворяет условию

$$\int_{\Omega} |K(x, y)|^2 dy \leq A < \infty, \quad \forall x \in \Omega,$$

то ряд Гильберта–Шмидта (5.54) сходится регулярно на $\bar{\Omega}$. Доказательство можно найти в [34]. Напомним определение: ряд называется регулярно сходящимся, если ряд из его абсолютных величин сходится равномерно. Такой ряд, очевидно, сходится абсолютно и равномерно.

Замечание. Для эрмитового непрерывного на $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$ ядра $K(x, y)$ теорема Гильберта–Шмидта звучит так [11]. Если функция $f(x)$ истокообразно представима через отличное от нуля эрмитово непрерывное ядро $K(x, y)$, $f = Kh$, то ее ряд Фурье по собственным функциям ядра $K(x, y)$ сходится регулярно на $\bar{\Omega}$ к этой функции.

Решение симметричных интегральных уравнений. Рассмотрим симметричное интегральное уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_{\Omega} K(x, y) \varphi(y) dy = f(x), \quad f(x) \in L^2[\Omega].$$

Если известны системы его характеристических чисел и собственных функций $\{\lambda_k\}$ и $\{\varphi_k\}$, то решение этого уравнения в классе квадратично суммируемых функций находится просто. Для этого истокообразную функцию

$$F(x) = \int_{\Omega} K(x, y) \varphi(y) dy$$

разложим согласно теореме Гильберта–Шмидта в ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{\lambda_n} \varphi_n(x), \quad C_n = (\varphi, \varphi_n)$$

и подставим его в исходное уравнение. Получим структурную формулу для $\varphi(x)$

$$\varphi(x) - \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{\lambda_n} \varphi_n(x) = f(x). \quad (5.55)$$

Для определения неизвестных пока коэффициентов Фурье C_n умножим уравнение (5.55) скалярно на $\varphi_m(x)$ ($m = 1, 2, \dots$). Так как система собственных функций эрмитового ядра ортонормированная, получаем

$$C_m - \frac{\lambda}{\lambda_m} C_m = (f, \varphi_m) = f_m \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (5.56)$$

Если λ — правильное число (т. е. λ не совпадает ни с одним из характеристических чисел ядра), то $\lambda/\lambda_m \neq 1$ и из этого уравнения находим коэффициенты C_n , а затем и решение

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\lambda_n - \lambda} \varphi_n(x), \quad f_n = (f, \varphi_n). \quad (5.57)$$

Рассмотрим теперь случай, когда уравнение «сидит на спектре», т. е. когда λ — характеристическое число ядра. В последовательности характеристических чисел это значение λ может повторяться несколько раз. Пусть

$$\lambda = \lambda_p = \lambda_{p+1} = \dots = \lambda_q.$$

Тогда, допустив, что решение и в этом случае существует, приходим к уравнениям (5.56), причем при $m = p, p+1, \dots, q$ скалярные произведения (f, φ_m) необходимо равны нулю, а коэффициенты C_m — произвольны. В результате, получим

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\lambda_n - \lambda} \varphi_n(x) + \sum_{n=p}^q C_n \varphi_n(x), \quad (5.58)$$

где штрих над суммой означает, что члены с номерами $n = p, p+1, \dots, q$ должны быть опущены, а C_n — произвольные числа.

Таким образом, если λ — характеристическое число, то для разрешимости интегрального уравнения необходимо (и достаточно), чтобы свободный член был ортогонален ко всем собственным функциям, соответствующим данному λ . Поскольку союзное интегральное уравнение совпадает с исходным, то этот вывод полностью согласуется с четвертой теоремой Фредгольма.

Заметим, что характеристическому числу может соответствовать лишь конечное число собственных функций симметричного ядра $K(x, y)$. Действительно, пусть характеристическому числу λ_0 соответствуют собственные функции $\varphi_0^{(1)}, \varphi_0^{(2)}, \dots, \varphi_0^{(q)}$. Считая, что эта система ортонормирована, запишем

$$\frac{\varphi_0^{(i)}(x)}{\lambda_0} = (K\varphi_0^{(i)})(x) = \int_{\Omega} K(x, y) \varphi_0^{(i)}(y) dy \quad (i = 1, 2, \dots, q).$$

Правая часть этого равенства представляет собой коэффициент Фурье ядра $K(x, y)$ как функции от y . Поэтому можно воспользоваться неравенством Бесселя

$$\sum_{i=1}^q \left(\frac{\varphi_0^{(i)}(x)}{\lambda_0} \right)^2 \leq \int_{\Omega} K^2(x, y) dy.$$

Интегрируя по x , получаем

$$\frac{q}{\lambda_0^2} \leq \iint_{\Omega \Omega} K^2(x, y) dx dy < \infty,$$

следовательно, q не превосходит некоторого числа.

Из формулы Шмидта (5.57) для решения симметричного интегрального уравнения можно получить представление резольвенты эрмитового L^2 -ядра. Вставляя в (5.57) вместо f_n его выражение в виде скалярного произведения из (5.56), запишем

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{m=1}^{\infty} \int_{\Omega} \frac{f(y) \overline{\varphi_m(y)} \varphi_m(x)}{\lambda_m - \lambda} dy = f(x) + \lambda \int_{\Omega} R(x, y; \lambda) f(y) dy,$$

где

$$R(x, y; \lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varphi_m(x) \overline{\varphi_m(y)}}{\lambda_m - \lambda}. \quad (5.59)$$

Ряд (5.59) для резольвенты L^2 -ядра сходится в среднем по обеим переменным x и y при $\lambda \neq \lambda_m$ ($m = 1, 2, \dots$). Видно, что резольвента симметричного ядра имеет только простые полюсы на λ -плоскости.

Билинейные ряды для симметричного ядра и его итераций. Из интегральных уравнений для резольвенты (5.24) следуют равенства

$$R(x, y; 0) = K(x, y) = K(y, x).$$

Учитывая выражение для резольвенты (5.59), получаем билинейный ряд для симметричного (ненулевого) ядра

$$K(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varphi_m(x) \overline{\varphi_m(y)}}{\lambda_m} = K_1(x, y), \quad (5.60)$$

где $\{\lambda_m\}$ и $\{\varphi_m\}$ — упорядоченные наборы характеристических чисел и соответствующих им собственных функций ядра $K(x, y)$.

Можно показать, что этот ряд сходится в среднем к L^2 -ядру $K(x, y)$ по обеим переменным [38, 50].

Умножим теперь левую и правую части равенства (5.60) на $\overline{K(x, y)}$ и проинтегрируем по области $\Omega \times \Omega$. Будем иметь

$$\iint_{\Omega \times \Omega} K(x, y) \overline{K(x, y)} dx dy = \iint_{\Omega \times \Omega} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varphi_m(x) \overline{\varphi_m(y)}}{\lambda_m} \overline{K(x, y)} dx dy.$$

Так как ряд (5.60) сходится в среднем, а $K(x, y)$ — квадратично суммируемое ядро, то в правой части этого равенства можно интегрировать почленно. Действительно, $\forall \varepsilon > 0$ найдется такое натуральное N , что

$$\left\| \sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{\varphi_m(x) \overline{\varphi_m(y)}}{\lambda_m} \right\| < \frac{\varepsilon}{\|K\|}.$$

Теперь оценим разность.

$$\begin{aligned} & \left| \iint_{\Omega \times \Omega} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varphi_m(x) \overline{\varphi_m(y)}}{\lambda_m} \overline{K(x, y)} dx dy - \sum_{m=1}^N \iint_{\Omega \times \Omega} \frac{\varphi_m(x) \overline{\varphi_m(y)}}{\lambda_m} \overline{K(x, y)} dx dy \right| = \\ & = \left| \iint_{\Omega \times \Omega} \sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{\varphi_m(x) \overline{\varphi_m(y)}}{\lambda_m} \overline{K(x, y)} dx dy \right| \leq \|K\| \left\| \sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{\varphi_m(x) \overline{\varphi_m(y)}}{\lambda_m} \right\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\iint_{\Omega \times \Omega} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varphi_m(x) \overline{\varphi_m(y)}}{\lambda_m} \overline{K(x, y)} dx dy = \sum_{m=1}^{\infty} \iint_{\Omega \times \Omega} \frac{\varphi_m(x) \overline{\varphi_m(y)}}{\lambda_m} \overline{K(x, y)} dx dy.$$

С учетом этого равенства выводим

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varphi_m(x) \overline{\varphi_m(y)}}{\lambda_m} K(x, y) dx dy = \sum_{m=1}^{\infty} \int_{\Omega} \frac{\varphi_m(x) \overline{\varphi_m(y)}}{\lambda_m^2} dx = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_m^2}.$$

Таким образом,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_m^2} = \int_{\Omega} \int_{\Omega} |K(x, y)|^2 dx dy = B^2. \quad (5.61)$$

Для несимметричного ядра вместо равенства (5.61) справедливо неравенство (теорема И. Шура) [10, 16]

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_m|^2} \leq \int_{\Omega} \int_{\Omega} |K(x, y)|^2 dx dy.$$

Получим билинейный ряд для второго итерированного ядра $K_2(x, y)$. Для этого в формуле Гильберта–Шмидта (5.51) положим $h(y) = K(y, t)$. Имеем

$$\int_{\Omega} K(x, y) K(y, t) dy = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{h_m}{\lambda_m} \varphi_m(x),$$

где

$$h_m = (h, \varphi_m) = \int_{\Omega} K(y, t) \overline{\varphi_m(y)} dy = \int_{\Omega} K(t, y) \overline{\varphi_m(y)} dy = \frac{\overline{\varphi_m(t)}}{\lambda_m}.$$

В результате получается билинейная формула

$$K_2(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varphi_m(x) \overline{\varphi_m(t)}}{\lambda_m^2}. \quad (5.62)$$

Ряд в правой части (5.62) сходится в среднем по обеим переменным, а также по переменной x при почти всех t и по переменной t при почти всех значениях x [34].

Можно показать, что имеет место общая билинейная формула

$$K_p(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varphi_m(x) \overline{\varphi_m(t)}}{\lambda_m^p} \quad (p = 1, 2, \dots). \quad (5.63)$$

Отсюда следует, что (упорядоченная) система характеристических чисел p -го итерированного ядра образует последовательность $\lambda_1^p, \lambda_2^p, \dots, \lambda_n^p, \dots$, которой соответствует последовательность собственных функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$

Умножив скалярно обе части равенства (5.63) на $K_p(x, t)$ и проделав выкладки аналогично тем, что привели к формуле (5.61), получим

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_m^{2p}} = \int_{\Omega} \int_{\Omega} |K_p(x, t)|^2 dx dt. \quad (5.64)$$

Положив в (5.63) $x = t$ и интегрируя по Ω , запишем еще одну формулу

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_m^p} = \int_{\Omega} K_p(x, x) dx = A_p, \quad (5.65)$$

где A_p — p -й след ядра $K(x, y)$.

Экстремальные свойства характеристических чисел и собственных функций симметричного ядра. Пусть функция $h(x) \in L^2[\Omega]$. По теореме Гильберта–Шмидта истокообразно представимая через h функция

$$(Kh)(x) = \int_{\Omega} K(x, y)h(y)dy = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{h_m}{\lambda_m} \varphi_m(x), \quad h_m = (h, \varphi_m).$$

Умножим это равенство скалярно на $h(x)$. Так как ряд в правой части сходится в среднем, то операции интегрирования и суммирования можно поменять местами. В результате получим формулу Гильберта (аналог приведения квадратичной формы к каноническому виду)

$$(Kh, h) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|(h, \varphi_m)|^2}{\lambda_m}, \quad |\lambda_1| < |\lambda_2| < \dots < |\lambda_m| < \dots \quad (5.66)$$

Отсюда имеем оценку

$$|(Kh, h)| \leq \frac{1}{|\lambda_1|} \sum_{m=1}^{\infty} |(h, \varphi_m)|^2.$$

А в силу неравенства Бесселя для коэффициентов Фурье

$$\sum_{m=1}^{\infty} |h_m|^2 \leq \|h\|^2$$

находим

$$|(Kh, h)| \leq \frac{\|h\|^2}{|\lambda_1|}.$$

Если брать только нормированные функции, для которых $\|h\|=1$, то из последней оценки вытекает

$$|(Kh, h)| \leq \frac{1}{|\lambda_1|}. \quad (5.67)$$

В оценке (5.67) равенство достигается на первой собственной функции $\varphi_1(x)$. Действительно, умножив скалярно равенство $\varphi_1 = \lambda_1 K \varphi_1$ на $\varphi_1(x)$ и учитывая нормированность этой функции, найдем

$$(K\varphi_1, \varphi_1) = \frac{1}{\lambda_1} \Rightarrow |(K\varphi_1, \varphi_1)| = \frac{1}{|\lambda_1|}.$$

Таким образом, приходим к теореме. Величина $|(Kh, h)|$ имеет максимум на единичной сфере в $L^2[\Omega]$. Этот максимум равен $|\lambda_1|^{-1}$ и достигается при $h = \varphi_1(x)$.

Рассмотрим теперь множество нормированных функций, ортогональных первым $n-1$ собственным функциям: $(h, \varphi_1) = (h, \varphi_2) = \dots = (h, \varphi_{n-1}) = 0$. Тогда квадратичный функционал Гильберта

$$(Kh, h) = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{|(h, \varphi_m)|^2}{\lambda_m}.$$

Повторяя рассуждения, проведенные выше, приходим к следующему утверждению.

На множестве элементов единичной сферы $S_1 \subset L^2[\Omega]$, ортогональных к первым $n-1$ собственным функциям ядра $K(x, y)$, величина $\|(Kh, h)\|$ имеет максимум, равный $|\lambda_n|^{-1}$. Этот максимум достигается при $h = \varphi_n(x)$.

Заметим, что во всех рассуждениях ядро $K(x, y)$ предполагалось невырожденным. В противном случае ряды заменяются конечными суммами.

Для непрерывного эрмитового ядра все элементы теории сохраняются. Имеют место утверждения [11].

Всякое эрмитово непрерывное ядро $K(x, y) \neq 0$ имеет по крайней мере одно характеристическое число, и наименьшее по модулю характеристическое число λ_1 удовлетворяет вариационному принципу

$$\frac{1}{|\lambda_1|} = \max_{f \in L^2[\Omega]} \frac{\|Kf\|}{\|f\|}.$$

Множество характеристических чисел $\{\lambda_m\}$ не пусто, расположено на вещественной оси, не более чем счетно и не имеет конечных предельных точек; каждое характеристическое число имеет конечную кратность; система собственных функций $\{\varphi_m\}$ может быть выбрана ортонормированной

$$(\varphi_m, \varphi_p) = \delta_{mp}.$$

Если $\lambda \neq \lambda_m$ ($m = 1, 2, \dots$), то уравнение

$$\varphi - \lambda K\varphi = f$$

однозначно разрешимо при любом свободном члене $f \in C[\bar{\Omega}]$ и представляется в виде равномерно сходящегося на $\bar{\Omega}$ ряда по формуле Шмидта (5.57).

Если $\lambda = \lambda_m$, то для разрешимости этого уравнения необходимо и достаточно, чтобы

$$(f, \varphi_{m+j}) = 0 \quad (j = 0, 1, \dots, r_{m-1}),$$

где $\varphi_m, \varphi_{m+1}, \dots, \varphi_{m+r_m-1}$ — собственные функции, соответствующие характеристическому числу λ_m и r_m — его кратность.

Положительные ядра. Линейный оператор A с областью определения D_A называется положительным, если порожденная им квадратичная форма

$$(Af, f) \geq 0, \quad \forall f \in D_A.$$

Из этого определения следует, что положительный оператор эрмитов. В самом деле, если квадратичная форма (Af, f) — принимает действительные значения, то

$$\operatorname{Re}[(Ag, f) - (Af, g)] = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{i} [(A(f + ig), f + ig) - (Af, f) - (Ag, g)] \right\} = 0,$$

$$\operatorname{Im}[(Ag, f) + (Af, g)] = \operatorname{Im} \{ (A(f + g), f + g) - (Af, f) - (Ag, g) \} = 0.$$

Отсюда

$$(Af, g) = \operatorname{Re}(Af, g) + i\operatorname{Im}(Af, g) = \operatorname{Re}(Ag, f) - i\operatorname{Im}(Ag, f) = (\overline{Ag, f}) = (f, Ag).$$

А это и означает, что оператор A эрмитов. Итак, всякий положительный оператор эрмитов.

Если K интегральный положительный оператор, то гильбертова квадратичная форма

$$(Kf, f) = \iint_{\Omega \times \Omega} K(x, y) \overline{f(x)} f(y) dx dy \geq 0, \quad \forall f \in L^2[\Omega].$$

Ядро $K(x, y)$, соответствующее положительному оператору K , называется положительным. Оно эрмитово: $K(x, y) = \overline{K(y, x)}$.

Из формулы Гильберта

$$(Kh, h) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|(h, \varphi_m)|^2}{\lambda_m}, \quad h \in L^2[\Omega]$$

следует, что если h не совпадает с какой-либо собственной функцией положительного ядра $K(x, y)$, то все $\lambda_m > 0$, если же h есть собственная функция: $h = \varphi_p$, то

$$(K\varphi_p, \varphi_p) = \frac{1}{\lambda_p},$$

и в этом случае $\lambda_p > 0$.

Таким образом, приходим к заключению, что для положительности эрмитового ядра $K(x, y)$ необходимо и достаточно, чтобы все его характеристические числа были положительными

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$$

Ядро $K(x, y)$ называется положительно (отрицательно) определенным, если $(Kh, h) > 0$, $((Kh, h) < 0)$ для любой $h \in L^2[\Omega]$, отличной от тождественного нуля.

Отметим, что положительное ядро может принимать и отрицательные значения. Например, ядро $K(x, y) = \varphi(x)\varphi(y)$ симметрично и может быть как положительным, так и отрицательным, но оно положительное по определению, так как

$$(Kh, h) = \iint_{\Omega \times \Omega} \varphi(x)\varphi(y)h(x)h(y) dx dy = \left\{ \int_{\Omega} \varphi(x)h(x) dx \right\}^2 \geq 0.$$

Имеет место следующая теорема Мерсера. Если симметричное L^2 -ядро $K(x, y)$ непрерывно и имеет лишь положительные характеристические числа (или даже конечное число отрицательных характеристических чисел), то ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varphi_m(x)\varphi_m(y)}{\lambda_m} \tag{5.68}$$

сходится абсолютно и равномерно (по переменным x и y) и справедлива билинейная формула (5.60), т. е.

$$K(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varphi_m(x)\varphi_m(y)}{\lambda_m}. \tag{5.69}$$

На самом деле эта билинейная формула была установлена ранее для эрмитового ядра в условиях среднеквадратичной сходимости билинейного ряда к ядру $K(x, y)$. Сформулированная выше теорема Мерсера утверждает, что в условиях теоремы ряд (5.68) сходит к непрерывному ядру $K(x, y)$ абсолютно и равномерно.

Замечание. Во многих задачах физики, приводящихся к симметричным интегральным уравнениям Фредгольма, положительность ядра является следствием физического смысла квадратичной формы Гильберта (см. п. 3.11). В таких случаях для разложения ядра можно с полным основанием применять формулу (5.69).

Для положительного непрерывного ядра $K(x, y)$ справедлив следующий вариационный принцип [11]

$$\frac{1}{\lambda_k} = \sup_{h \in L^2[\Omega]} \frac{(Kh, h)}{\|h\|^2} \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (5.70)$$

$$(h, \varphi_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k-1,$$

причем supremum достигается на любой собственной функции, соответствующей характеристическому числу λ_k .

Действительно, из формулы Гильберта (5.66) с учетом неравенств $\lambda_i \geq \lambda_k > 0$ при $i \geq k$ получаем для всех $h \in L^2[\Omega]$, таких что $(h, \varphi_i) = 0, i = 1, 2, \dots, k-1$

$$\frac{(Kh, h)}{\|h\|^2} = \frac{1}{\|h\|^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|(h, \varphi_m)|^2}{\lambda_m} = \frac{1}{\|h\|^2} \sum_{m=k}^{\infty} \frac{|(h, \varphi_m)|^2}{\lambda_m} \leq \frac{1}{\lambda_k \|h\|^2} \sum_{m=k}^{\infty} |(h, \varphi_m)|^2.$$

Привлекая теперь неравенство Бесселя

$$\sum_{m=k}^{\infty} |(h, \varphi_m)|^2 \leq \|h\|^2,$$

приходим к оценке

$$\frac{(Kh, h)}{\|h\|^2} \leq \frac{1}{\lambda_k}.$$

Равенство здесь достигается при $h = \varphi_k(x)$, где $\varphi_k(x)$ — собственная функция ядра $K(x, y)$, соответствующая характеристическому числу λ_k

$$\frac{(K\varphi_k, \varphi_k)}{\|\varphi_k\|^2} = \frac{\left(\frac{1}{\lambda_k} \varphi_k, \varphi_k \right)}{\|\varphi_k\|^2} = \frac{1}{\lambda_k}.$$

Этим завершается доказательство вариационного принципа (5.70).

Если эрмитово ядро вещественное $K(x, y) = K(y, x)$, то его собственные функции можно считать вещественными. В самом деле, пусть $\varphi_0(x)$ собственная функция, соответствующая характеристическому числу λ_0 . Имеем

$$\varphi_0(x) = \varphi_1(x) + i\varphi_2(x) = \lambda_0 K\varphi_0(x) = \lambda_0 K\varphi_1 + i\lambda_0 K\varphi_2.$$

Разделяя здесь действительную и мнимую части, с учетом того, что ядро $K(x, y)$ и λ_0 действительные, получаем

$$\varphi_1 = \lambda_0 K \varphi_1, \quad \varphi_2 = \lambda_0 K \varphi_2.$$

Так что ненулевые $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ являются действительными собственными функциями ядра $K(x, y)$, соответствующими характеристическому числу λ_0 .

Замечание. В случае если несимметричное ядро имеет вид

$$H(x, y) = \rho(y)K(x, y), \quad (5.71)$$

где $K(x, y)$ — симметричное (эрмитово): $K(x, y) = \overline{K(y, x)}$, а вес $\rho(y)$ — положительная непрерывная функция на $\bar{\Omega}$, то уравнение с ядром $H(x, y)$ легко приводится к интегральному уравнению с эрмитовым ядром. Делается это так. Исходное уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_{\Omega} H(x, y) \varphi(y) dy = f(x)$$

умножается на $\sqrt{\rho(x)}$ и вводится замена $\psi(x) = \varphi(x)\sqrt{\rho(x)}$. В результате приходим к симметричному интегральному уравнению относительно функции $\psi(x)$

$$\psi(x) - \lambda \int_{\Omega} \sqrt{\rho(x)\rho(y)} K(x, y) \psi(y) dy = f(x)\sqrt{\rho(x)}.$$

Таким образом, теория Гильберта–Шмидта переносится на уравнения с ядром (5.71), если его рассматривать в пространстве $L^2[\Omega; \rho]$, в котором скалярное произведение определяется формулой

$$(u, v) = \int_{\Omega} \rho(x) u(x) \overline{v(x)} dx.$$

Приближенное определение характеристических чисел и собственных функций симметричного ядра. В задачах физики и механики, в различных инженерных задачах, связанных с колебаниями упругих континуумов (колебания струн, мембран, пластин и оболочек), а также с устойчивостью упругого равновесия возникает необходимость в определении характеристических чисел и собственных функций симметричных интегральных уравнений. Точные решения указанных проблем находятся крайне редко, поэтому большое внимание уделяется разработке приближенных подходов [2, 9, 12, 17, 19, 36, 44]. Опишем некоторые из них.

Метод Ритца. Определение первого характеристического числа λ_1 . Согласно теории Гильберта–Шмидта, имеет место доказанный выше вариационный принцип

$$\frac{1}{|\lambda_1|} = \max_{\|\varphi\|=1} |(K\varphi, \varphi)| = \max_{\|\varphi\|=1} \left| \iint_{\Omega \times \Omega} K(x, y) \varphi(y) \overline{\varphi(x)} dx dy \right|.$$

В одномерном варианте $\Omega = (a, b)$ — конечный интервал, задача ставится так:

$$\left| \int_a^b \int_a^b K(x, y) \overline{\varphi(x)} \varphi(y) dx dy \right| \rightarrow \max \quad (5.72)$$

при наличии ограничения

$$\|\varphi\|^2 = \int_a^b |\varphi(x)|^2 dx = 1. \quad (5.73)$$

Задача (5.72), (5.73) может быть решена прямymi методами вариационного исчисления [33, 36, 37, 53]. В частности, можно воспользоваться методом Ритца.

Возьмем последовательность линейно независимых функций

$$\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x), \dots,$$

полную в L^2 -норме, т. е. такую, что для любой функции $f(x) \in L^2$ и $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$ и числа α_k , при которых

$$\left\| f(x) - \sum_{k=1}^m \alpha_k \psi_k(x) \right\| < \varepsilon \text{ при } m > N.$$

Очевидно, эту последовательность можно считать полной ортонормированной. Положим

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^m a_k \psi_k(x), \quad (5.74)$$

где a_k — произвольные коэффициенты, подчиненные условию

$$\|\varphi\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^m a_k \psi_k(x) \right\|^2 = 1.$$

В силу ортонормированности системы $\{\psi_k(x)\}$ это условие приводит к равенству

$$\sum_{k=1}^m |a_k|^2 = 1.$$

Подстановка вместо $\varphi(x)$ его выражения из (5.74) в квадратичный функционал Гильберта (5.72) дает

$$(K\varphi, \varphi) = \sum_{k,p=1}^m A_{kp} a_k \bar{a}_p,$$

где

$$A_{kp} = \int_a^b \int_a^b K(x, y) \psi_k(x) \overline{\psi_p(y)} dx dy, \quad A_{kp} = \overline{A}_{pk}.$$

Таким образом, приходим к задаче на условный экстремум функции многих переменных

$$\left| \sum_{k,p=1}^m A_{kp} a_k \bar{a}_p \right| \rightarrow \max, \quad (5.75)$$

$$\sum_{k=1}^m |a_k|^2 = 1.$$

Доказательство сходимости процесса Ритца к первому характеристическому числу ядра можно найти, например, в [33].

В приложениях наиболее часто встречается случай, когда ядро $K(x, y)$ действительное. Тогда можно взять базисные функции ψ_k и коэффициенты a_k действительными и задача (5.75) упрощается:

$$\left| \sum_{k,p=1}^m A_{kp} a_k a_p \right| \rightarrow \max,$$

$$\sum_{k=1}^m a_k^2 = 1.$$

Наиболее просто решается эта задача для положительно определенного ядра $K(x, y)$.

В этом случае квадратичная форма $(K\varphi, \varphi) > 0, \forall \varphi \neq 0$ и

$$\max_{\|a\|=1} \sum_{k,p=1}^m A_{kp} a_k a_p = \frac{1}{\lambda_1^{(m)}}, \quad a = (a_1, a_2, \dots, a_m),$$

где $\lambda_1^{(m)}$ — приближенное значение первого характеристического числа.

Решение этой задачи проводится по методу Лагранжа. Составляем функцию

$$L = \sum_{k,p=1}^m A_{kp} a_k a_p - \sigma \sum_{k=1}^m a_k^2, \quad A_{kp} = A_{pk},$$

где σ — неопределенный множитель. Значения коэффициентов a_k^* , доставляющих квадратичной форме максимальное значение, определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial a_k} = \sum_{p=1}^m A_{kp} a_p - \sigma a_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m).$$

Поскольку $\|a\| \neq 0$, то нас интересует нетривиальное решение этой системы, необходимым и достаточным условием существования которого является равенство

$$\begin{vmatrix} A_{11} - \sigma, A_{12}, \dots, A_{1m} \\ A_{21}, A_{22} - \sigma, \dots, A_{2m} \\ \dots \\ A_{m1}, A_{m2}, \dots, A_{mm} - \sigma \end{vmatrix} = 0. \quad (5.76)$$

Умножая k -е уравнение системы на решение a_k^* и сворачивая результаты по k , находим

$$\sigma_* = \max_{\|a\|=1} \sum_{k,p=1}^m A_k a_k^* a_p^* = \frac{1}{\lambda_1^{(m)}},$$

где σ_* — максимальный корень уравнения (5.76).

Если из каких-либо соображений известно, что характеристическому числу λ_1 соответствует одна собственная функция $\varphi_1(x)$, то согласно (5.74) можно положить

$$\varphi_1(x) = \sum_{k=1}^n a_k^* \psi_k(x).$$

В противном случае процесс определения собственных функций усложняется.

Определение первого характеристического числа через следы ядра. Формулы (5.64), (5.65) дают возможность получить приближенные выражения для первого характеристического числа λ_1 . Выпишем их здесь для удобства

$$\begin{aligned} A_p &= \int_{\Omega} K_p(x, x) dx = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_m^p}, \\ A_{2p} &= \int_{\Omega} \int_{\Omega} |K_p(x, t)|^2 dx dt = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_m^{2p}}. \end{aligned} \quad (5.77)$$

Может оказаться, что в ряду $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ имеется b положительных характеристических чисел λ_i и d отрицательных чисел $-\lambda_j$. Обозначим: $r_1 = b + d$ и $r_2 = b - d$. При достаточно большом номере p основной вклад в суммы, фигурирующие в (5.77) дадут члены, содержащие λ_1 . Поэтому имеем приближенные формулы (при достаточно большом p)

$$A_{2p} \approx \frac{r_1}{\lambda_1^{2p}}, \quad A_{2p+1} \approx \frac{r_2}{\lambda_1^{2p+1}}, \quad r_2 = b - d \neq 0.$$

Отсюда и из первой формулы (5.77) получаем

$$|\lambda_1| \approx \sqrt{\frac{A_{2p}}{A_{2p+2}}}, \quad |\lambda_1| \approx \sqrt[2p]{\frac{r_1}{A_{2p}}}, \quad \lambda_1 \approx \sqrt[2p+1]{\frac{r_2}{A_{2p+1}}}, \quad r_2 \neq 0. \quad (5.78)$$

Можно показать [10, 33, 50], что первая формула в (5.78) дает значение $|\lambda_1|$ с избытком, вторая — с недостатком, третья дает значение λ_1 вместе со знаком. Там же показано, что в пределе при $p \rightarrow \infty$ приближенные формулы (5.78) становятся точными.

Метод Келлога. Пусть $K(x, y)$ — симметричное ядро и произвольная ненулевая функция $\omega_0(x) \in L^2[\Omega]$. Образуем последовательность истокообразно представимых функций

$$\omega_1(x) = \int_{\Omega} K(x, y) \omega_0(y) dy,$$

$$\omega_2(x) = \int_{\Omega} K(x, y) \omega_1(y) dy,$$

$$\omega_n(x) = \int_{\Omega} K(x, y) \omega_{n-1}(y) dy,$$

По теореме Гильберта–Шмидта

$$\omega_1(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{h_m}{\lambda_m} \varphi_m(x), \quad h_m = (\omega_0, \varphi_m).$$

Будем предполагать, что $\omega_1(x) \neq 0$, т. е. что $\omega_0(x)$ не ортогональна всем собственным функциям ядра $K(x, y)$, соответствующим характеристическому числу λ_1 . Имеем по той же теореме Гильберта–Шмидта

$$\omega_2(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\omega_1, \varphi_m)}{\lambda_m} \varphi_m(x),$$

где

$$(\omega_1, \varphi_m) = (K\omega_0, \varphi_m) = (\omega_0, K\varphi_m) = \left(\omega_0, \frac{\varphi_m}{\lambda_m} \right) = \frac{h_m}{\lambda_m}.$$

С учетом этого

$$\omega_2(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{h_m}{\lambda_m^2} \varphi_m(x).$$

И вообще,

$$\omega_n(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{h_m}{\lambda_m^n} \varphi_m(x) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

При достаточно больших n в разложении $\omega_n(x)$ преобладает первое слагаемое, поэтому можно воспользоваться приближенными формулами

$$|\lambda_1| \approx \frac{\|\omega_{n-1}\|}{\|\omega_n\|}, \quad \varphi_1(x) \approx \frac{\omega_n(x)}{\|\omega_n\|},$$

причем получаем значение $|\lambda_1|$ с избытком.

Можно доказать [33, 36], что если $\omega_0(x)$ не ортогональна к собственной функции $\varphi_1(x)$, то по этому способу определится абсолютная величина наименьшего характеристического числа $|\lambda_1|$. Если же $\omega_0(x)$ ортогональна к собственным функциям $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{r-1}$, а $\varphi_r(x)$ — первая собственная функция, к которой $\omega_0(x)$ не ортогональна, то имеет место предельное равенство

$$\frac{1}{|\lambda_r|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|\omega_n\|}.$$

Пример. Вычислим по схеме Келлога первое характеристическое число интегрального уравнения

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{e^{-r}} \frac{dy}{\sqrt[4]{r}} \varphi(y) dy = 0, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Стартуем с функции $\omega_0(x) = x$. Вычисляем

$$\omega_n(x) = \int_0^x \frac{e^{-r}}{\sqrt[4]{r}} \omega_{n-1}(y) dy \quad (n=1, 2, \dots).$$

Далее находим

$$\lambda_1 \approx \frac{\|\omega_{n-1}\|}{\|\omega_n\|}.$$

Результаты расчетов на ЭВМ сведены в таблицу

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
λ_1	2,6035	0,6648	1,3538	1,1621	1,1201	1,2213	1,1524	1,1750	1,1812	1,1677
n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
λ_1	1,1771	1,1740	1,1731	1,1751	1,1737	1,1742	1,1743	1,1740	1,1740	

Вещественное симметрическое ядро $K(x, y)$ называется ядром положительного типа [11], если $K(x, y) > 0$, $x \in \Omega$, $y \in \Omega$. Для таких ядер имеет место теорема Ентча.

Если симметрическое полярное ядро $K(x, y)$ положительного типа, то его наименьшее по модулю характеристическое число λ_1 — положительное и простое; соответствующая собственная функция $\varphi_1(x)$ положительна в Ω .

Полярное ядро (ядро со слабой особенностью) $K(x, y)$ определяется формулой (5.6). Если $\alpha < n/2$, то ядро $K(x, y)$ называется слабо полярным. Обозначим

$$\varphi_{(p)}(x) = \frac{\varphi^{(p)}(x)}{\|\varphi^{(p)}\|}, \quad \lambda_{(p)} = \frac{\|\varphi^{(p-1)}\|}{\|\varphi^{(p)}\|}, \quad p = 1, 2, \dots,$$

где

$$\varphi^{(p)} = K^p \varphi^{(0)} = \lambda \int_{\Omega} K(x, y) \varphi^{(p-1)}(y) dy + f(x) = \lambda K \varphi^{(p-1)} + f.$$

По методу Келлога члены $\lambda_{(p)}$ и $\varphi_{(p)}(x)$ этих последовательностей принимаются за приближения к $|\lambda_1|$ и соответствующей собственной функции $\varphi_1(x)$. Имеет место теорема.

Пусть $K(x, y)$ — симметрическое слабо полярное ядро положительного типа. Тогда для любой функции $\varphi^{(0)}(x) \geq 0$, $\|\varphi^{(0)}\| = 1$ последовательность $\{\lambda_{(p)}\}$ сходится, монотонно убывая к λ_1 , а последовательность $\{\varphi_{(p)}\}$ сходится к φ_1 в $L^2[\Omega]$ и в $C[\bar{\Omega}]$, причем справедливы оценки

$$0 \leq \lambda_{(p)} - \lambda_1 \leq \frac{\lambda_1}{2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{2^{p-2}} \frac{1 - c_1^2}{c_1^2}, \quad p = 2, 3, \dots,$$

$$\left\| \varphi_{(p)} - \varphi_1 \right\| \leq \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^p \frac{\sqrt{1-c_1^2}}{c_1}, \quad p = 1, 2, \dots,$$

$$\left\| \varphi_{(p)} - \varphi_1 \right\|_C \leq L \lambda_2 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^p \frac{\sqrt{1-c_1^2}}{c_1}, \quad p = 2, 3, \dots,$$

где

$$c_1 = (\varphi^{(0)}, \varphi_1), \quad L^2 = \max_{x \in \Omega} \iint_{\Omega} |K(x, y)|^2 dy.$$

В заключение приведем некоторые сведения об асимптотике роста характеристических чисел ядра Фредгольма λ_n при $n \rightarrow \infty$. Пусть $\Omega = [0, 1]$, ядро $K(x, y)$ — функция двух вещественных переменных, определенная в квадрате $[0, 1] \times [0, 1]$, $K(x, y)$ имеет ограниченные производные по y до порядка m включительно. Если $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ — характеристические числа ядра $K(x, y)$, то сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_k|^{\rho+\varepsilon}}, \quad \rho = \frac{2}{2m+1},$$

где ε — любое положительное число. При этом определитель Фредгольма $D(\lambda)$ есть целая функция порядка не выше ρ .

Дальнейшие сведения по этому кругу вопросов можно найти в приложении к книге [29]: А. О. Гельфонд. О росте собственных значений однородных интегральных уравнений.

5.6. Уравнения Фредгольма 1-го рода

Такие уравнения имеют вид

$$(K\varphi)(x) = \iint_{\Omega} K(x, y) \varphi(y) dy = f(x), \quad (5.79)$$

где $K(x, y)$ и $f(x)$ — известные функции на $\Omega \times \Omega$ и Ω соответственно.

Если $f(x)$ — произвольная непрерывная функция на $\bar{\Omega}$, а ядро $K(x, y)$ — непрерывно на $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$, то решение уравнения (5.79), вообще говоря, не существует. В самом деле, пусть, например, $K(x, y)$ есть многочлен относительно x и y . Тогда $f(x)$ должна быть многочленом относительно x , т. е. структура ядра определяет вид правой части $f(x)$.

Вообще, если ядро $K(x, y)$ фредгольмово, то оператор (5.79) вполне непрерывен и, следовательно, обратный оператор K^{-1} не ограничен.

Имеет место теорема. Пусть A — вполне непрерывный оператор $A: X \rightarrow Y$, где X и Y — бесконечномерные банаховы пространства, причем на области значений R_A оператора A существует обратный оператор A^{-1} . Тогда A^{-1} неограничен на R_A .

Действительно, предположим напротив, что A^{-1} ограничен на R_A . В этом случае тождественный оператор $I = A^{-1}A$ вполне непрерывен, как произведение вполне непрерывного A и ограниченного A^{-1} операторов [49, 58]. Но это возможно только, если X конечномерно. Значит A^{-1} неограничен, что и требовалось.

Оператор K , определенный формулой (5.79), не является нормально разрешимым, область его значений не является замкнутым множеством. Таким образом, задача (5.79) неустойчива относительно малых (по норме) возмущений оператора K и правой части f , т. е., как принято говорить, некорректна.

Методы регуляризации уравнения первого рода

$$Ax = y, \quad \ker A = \{0\}$$

с вполне непрерывным оператором $A \in \mathcal{L}(X)$, где X — банахово пространство, изложены в работах [8, 9, 16]. Опишем здесь метод М. М. Лаврентьева сведения уравнения (5.80) к уравнению второго рода [8].

Пусть \tilde{A} и $\tilde{y} - \varepsilon$ приближения A и y соответственно, т. е.

$$\|\tilde{A} - A\| \leq \varepsilon, \quad \|y - \tilde{y}\| \leq \varepsilon.$$

Рассмотрим приближенное уравнение

$$\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{y}$$

Это уравнение может не иметь решения, например, при $\tilde{A} = A$ и $\tilde{y} \notin R_A$. Для его регуляризации вводится вспомогательное уравнение второго рода

$$(\tilde{A} + \alpha I)x_\alpha = \tilde{y},$$

где параметр регуляризации $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ подбирается в зависимости от ε так, чтобы $x_\alpha \rightarrow x$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Имеет место теорема.

Пусть оператор A удовлетворяет следующему условию при всех $\alpha > 0$:

$$\|(A + \alpha I)^{-1}\| \leq \frac{c}{\alpha}.$$

Пусть далее y принадлежит области определения оператора A^{-2} . Если параметр регуляризации $\alpha > 0$ согласован с ε так, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ также $\alpha \rightarrow 0$ и $\varepsilon\alpha^{-2} \rightarrow 0$, то $x_\alpha \rightarrow x$

при $\varepsilon \rightarrow 0$. Если $\alpha = 0\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, то $\|x_\alpha - x\| = 0\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right)$.

Для доказательства предположим, что

$$\frac{\varepsilon c}{\alpha} \leq \frac{1}{2},$$

и воспользуемся теоремой об обратном операторе (гл. 3, п. 3.13). Имеем оценку

$$\|[(\tilde{A} + \alpha I) - (A + \alpha I)](A + \alpha I)^{-1}\| \leq \frac{\varepsilon c}{\alpha} \leq \frac{1}{2}.$$

Следовательно, $\tilde{A} + \alpha I$ непрерывно обратим, причем

$$\left\| (\tilde{A} + \alpha I)^{-1} - (A + \alpha I)^{-1} \right\| \leq \frac{\|(A + \alpha I)^{-1}\| \varepsilon c}{0,5} \leq \frac{2\varepsilon c^2}{\alpha}.$$

Оценим теперь абсолютную погрешность решения. Имеем

$$\begin{aligned} x_\alpha - x &= (\tilde{A} + \alpha I)^{-1} \tilde{y} - A^{-1} y = \left[(\tilde{A} + \alpha I)^{-1} - (A + \alpha I)^{-1} \right] \tilde{y} + \\ &\quad + (A + \alpha I)^{-1} (\tilde{y} - y) + \left[(A + \alpha I)^{-1} y - A^{-1} y \right]. \end{aligned}$$

Отсюда по неравенству треугольника

$$\|x_\alpha - x\| \leq \|(\tilde{A} + \alpha I)^{-1} - (A + \alpha I)^{-1}\| \|\tilde{y}\| + \|(A + \alpha I)^{-1}\| \|\tilde{y} - y\| + \|(A + \alpha I)^{-1} y - A^{-1} y\|.$$

Оценки первых двух членов в правой части этого неравенства у нас есть. Для оценки третьего члена рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} (A + \alpha I)^{-1} - A^{-1} + (A + \alpha I)^{-1} \alpha A^{-1} &= (A + \alpha I)^{-1} (I + \alpha A^{-1}) - A^{-1} = \\ &= \left[(A + \alpha I)^{-1} (A + \alpha I) - I \right] A^{-1} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда получаем тождество (по условию $y \in D_{A^{-2}}$)

$$(A + \alpha I)^{-1} y - A^{-1} y = -(A + \alpha I)^{-1} \alpha A^{-1} y = \alpha^2 (A + \alpha I)^{-1} A^{-2} y - \alpha A^{-2} y.$$

Следовательно, оценка третьего члена имеет вид

$$\|(A + \alpha I)^{-1} y - A^{-1} y\| \leq c \alpha \|A^{-2} y\| + \alpha \|A^{-2} y\|.$$

Собирая все результаты, получим

$$\|x_\alpha - x\| \leq \frac{2\varepsilon c^2}{\alpha^2} \|\tilde{y}\| + \frac{c}{\alpha} \varepsilon + \alpha(c+1) \|A^{-2} y\|,$$

что и требовалось.

Возвращаясь к вопросу о существовании решения уравнения Фредгольма первого рода (5.79), сформулируем следующее предложение [13, 45].

Теорема Пикара. Пусть $K(x, y)$ — симметричное квадратично суммируемое ядро, $f(x) \in L^2[\Omega]$. Тогда для существования квадратично суммируемого на Ω решения уравнения (5.79) необходимо и достаточно сходимости ряда

$$\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 f_m, \tag{5.80}$$

где λ_m — характеристические числа ядра $K(x, y)$, f_m — коэффициенты Фурье функции $f(x)$ по системе собственных функций ядра. Ядро предполагается замкнутым.

Напомним соответствующее определение. Ядро $K(x, y)$ называется замкнутым, если $\forall \omega(x) \in L^2[\Omega]$

$$\int_{\Omega} K(x, y) \omega(y) dy = 0 \Rightarrow \|\omega\| = 0.$$

Иными словами, из этого равенства следует, что $\omega(x) \stackrel{n.o.}{=} 0$ в Ω .

Доказательство. Предположим, что решение $\varphi(x) \in L^2[\Omega]$ уравнения (5.79) существует. Вычислим коэффициенты Фурье f_m . Имеем, учитывая симметричность ядра

$$f_m = (f, \varphi_m) = (K\varphi, \varphi_m) = (\varphi, K\varphi_m) = \frac{1}{\lambda_m} (\varphi, \varphi_m),$$

где $\varphi_m(x)$, $m = 1, 2, \dots$, полная (замкнутая) система собственных функций ядра $K(x, y)$.

Таким образом, коэффициенты Фурье (φ, φ_m) квадратично суммируемой функции $\varphi(x)$ связаны с коэффициентами Фурье функции $f(x)$ соотношениями

$$(\varphi, \varphi_m) = \lambda_m f_m.$$

Так как ряд из квадратов коэффициентов Фурье функции $\varphi(x) \in L^2[\Omega]$ сходится, то сходится ряд (5.80).

Обратно, пусть ряд (5.80) сходится. В силу теоремы Рисса–Фишера (гл. 3, п. 3.4) существует единственная функция $\varphi(x) \in L^2[\Omega]$, такая что ее коэффициенты Фурье

$$(\varphi, \varphi_m) = \lambda_m (f, \varphi_m).$$

Отсюда

$$(\varphi, \lambda_m K\varphi_m) = \lambda_m (K\varphi, \varphi_m) = \lambda_m (f, \varphi_m) \Rightarrow (K\varphi, \varphi_m) = (f, \varphi_m).$$

Итак, коэффициенты Фурье функций $(K\varphi)(x)$ и $f(x)$ по полной ортонормированной системе собственных функций $\{\varphi_m(x)\}$ совпадают. Отсюда следует, что существует единственная функция $\varphi(x)$, такая что

$$\int_{\Omega} K(x, y) \varphi(y) dy = f(x).$$

Замечание. Если ядро $K(x, y)$ незамкнутое, то существует по крайней мере одна функция $\omega(x)$, такая что

$$\int_{\Omega} K(x, y) \omega(y) dy = 0.$$

Следовательно, функция $\varphi(x) + c\omega(x)$ также является решением уравнения (5.79). В этом случае единственности решения нет.

Решение уравнения Фредгольма первого рода методом последовательных приближений. Пусть $K(x, y)$ — симметричное квадратично суммируемое положительно определенное ядро и пусть уравнение

$$\int_{\Omega} K(x, y) \omega(y) dy = f(x), \quad f(x) \in L^2[\Omega], \quad \Omega = (a, b)$$

имеет решение. Тогда последовательность $\{\omega_m(x)\}$, определяемая рекуррентным соотношением

$$\omega_m(x) = \omega_{m-1}(x) + \lambda [f(x) - f_{m-1}(x)] \quad (m=1,2,\dots),$$

где

$$\omega_0(x) \in L^2[\Omega], \quad f_{m-1}(x) = \int\limits_{\Omega} K(x,y) \omega_{m-1}(y) dy, \quad 0 < \lambda < 2\lambda_1$$

и λ_1 — наименьшее характеристическое число ядра $K(x,y)$, сходится (по норме $L^2[\Omega]$) к решению уравнения (5.79). (Теорема Фридмана [16]).

5.7. Применение симметричных интегральных уравнений в задачах на собственные значения

В ограниченной области $\Omega \in R^n$ с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$ рассмотрим однородную граничную задачу теории потенциала

$$Lu = \lambda u, \quad L = q - \operatorname{div}(p \operatorname{grad}), \quad x \in \Omega, \quad (5.81)$$

$$\left. \left(\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha_2 u \right) \right|_{\partial\Omega} = 0.$$

Эта задача на собственные значения для оператора

$$L = -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + q$$

звучит следующим образом: найти нетривиальные решения граничной задачи (5.81) в классе $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ при условиях $p \in C^1(\bar{\Omega})$, $q \in C(\bar{\Omega})$, $p(x) > 0$, $x \in \bar{\Omega}$, $\alpha_1 \in C(\partial\Omega)$, $\alpha_2 \in C(\partial\Omega)$, $\alpha_1(x) \geq 0$, $\alpha_2(x) \geq 0$, $\alpha_1(x) + \alpha_2(x) > 0$, $x \in \partial\Omega$.

Задача (5.81) называется задачей Штурма–Лиувилля, она имеет решения не при всех λ . Те значения λ , при которых задача (5.81) имеет нетривиальные решения, называются собственными значениями (фундаментальными числами) граничной задачи (5.81), а соответствующие им нетривиальные решения задачи (5.81) — собственными функциями этой задачи.

Уравнение типа (5.81) получается при разделении переменных в уравнении $\Delta\psi + k^2\psi$. Параметр λ представляет собой константу разделения. Функции p, q характеризуют координаты, примененные при разделении, функция $p(x)$ нигде в области изменения x не меняет знака и ее можно считать положительной. Функция $q(x)$ не имеет особенностей, ее можно считать непрерывной. Таким образом, условия, накладываемые выше на входные данные задачи Штурма–Лиувилля, представляются корректными с точки зрения физического содержания большинства рассматриваемых задач.

Покажем, что оператор L — эрмитов, т. е.

$$(Lf, g) = (f, Lg), \quad f, g \in D_L,$$

где под областью определения D_L оператора L понимается совокупность всех функций $f(x)$ класса $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, удовлетворяющих граничному условию (5.81) и условию $Lf \in L^2[\Omega]$.

Полагая во второй формуле Грина (2.50): $u = f \in D_L$ и $v = \bar{g} \in D_L$, запишем

$$\int_{\Omega} (\bar{g}Lf - fL\bar{g}) dx = \int_{\Omega} (\bar{g}Lf - f\bar{Lg}) dx = \int_{\partial\Omega} \left(f \frac{\partial \bar{g}}{\partial n} - \bar{g} \frac{\partial f}{\partial n} \right) ds + (Lf, g) - (f, Lg). \quad (5.82)$$

Так как функции f и \bar{g} удовлетворяют граничному условию (5.81) на $\partial\Omega$

$$\alpha_1 \frac{\partial f}{\partial n} + \alpha_2 f \Big|_{\partial\Omega} = 0,$$

$$\alpha_1 \frac{\partial \bar{g}}{\partial n} + \alpha_2 \bar{g} \Big|_{\partial\Omega} = 0$$

и $\alpha_1(x), \alpha_2(x)$ одновременно не равны нулю, то определитель этой системы равен нулю, т. е.

$$-\bar{g} \frac{\partial f}{\partial n} - f \frac{\partial \bar{g}}{\partial n} = 0.$$

Таким образом, из (5.82) получаем требуемое равенство.

Оператор L положительный, т. е. квадратичная форма $(Lf, f) \geq 0$, $f \in D_L$. Действительно, пусть $f \in D_L$. В первой формуле Грина (2.49) положим $u = f$, $v = \bar{f}$. Учитывая тот факт, что $Lf \in L^2[\Omega]$, запишем

$$(Lf, f) = \int_{\Omega} \bar{f} Lf dx = \int_{\Omega} p |\operatorname{grad} f|^2 dx + \int_{\Omega} q |f|^2 dx - \int_{\partial\Omega} p \bar{f} \frac{\partial f}{\partial n} ds.$$

Функция $f \in D_L$, стало быть, на границе $\partial\Omega$

$$\alpha_1 \frac{\partial f}{\partial n} + \alpha_2 f = 0,$$

причем

$$\frac{\partial f}{\partial n} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} f$$

на той части $\partial\Omega_0$, где $\alpha_1(x) > 0$ и $\alpha_2(x) > 0$ одновременно. Учитывая это соотношение, получаем окончательно

$$(Lf, f) = \int_{\Omega} (p |\operatorname{grad} f|^2 + q |f|^2) dx + \int_{\partial\Omega_0} p \frac{\alpha_2}{\alpha_1} |f|^2 ds \geq 0,$$

что и требовалось.

Из положительности оператора

$$L = -\operatorname{div}(p \operatorname{grad}) + q$$

вытекают следующие спектральные свойства однородной граничной задачи

$$Lu = \lambda u,$$

$$\left(\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha_2 u \right) \Big|_{\partial\Omega} = 0. \quad (5.83)$$

1. Все собственные значения оператора L неотрицательны. Это утверждение следует из положительности оператора. В самом деле, умножив скалярно (5.83) на u , получим

$$(Lu, u) = \lambda \|u\|^2 \Rightarrow \lambda = \frac{(Lu, u)}{\|u\|^2} \geq 0.$$

2. Собственные функции оператора L , соответствующие различным собственным значениям, ортогональны. Это утверждение вытекает из эрмитовости оператора L .

3. Собственные функции оператора L можно считать вещественными. Это следует из вещественности собственных чисел и вещественности оператора L . Действительно, если λ_0, u_0 — собственное значение и соответствующая ему собственная функция оператора L и $u_0 = u_1 + iu_2$, то

$$Lu_0 = \lambda_0 u_0 \Rightarrow L(u_1 + iu_2) = \lambda_0(u_1 + iu_2) \Rightarrow Lu_1 = \lambda_0 u_1, \quad Lu_2 = \lambda_0 u_2.$$

Таким образом, собственному значению λ_0 соответствуют две действительные собственные функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$.

4. $\lambda = 0$ может быть собственным значением оператора L тогда и только тогда, когда $q = 0$ и $\alpha_1 = 0$. При этом $\lambda = 0$ — простое собственное значение и $u_0 = \text{const}$ — соответствующая собственная функция [11, 31].

Имеет место теорема. Система собственных функций оператора L полна в $L^2[\Omega]$, т. е. всякая функция $f(x) \in L^2[\Omega]$ разлагается в регулярно сходящийся ряд Фурье по ортонормированной системе собственных функций $\{u_k\}$ оператора L

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (f, u_k) u_k(x).$$

Оказывается, что этот ряд можно дифференцировать почленно по x_i один раз, т. е.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{\infty} (f, u_k) \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Замечание. Эти результаты распространяются и на однородную граничную задачу

$$Lu = \lambda \rho u, \quad \left(\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha_2 u \right) \Big|_{\partial\Omega} = 0,$$

где вес $\rho(x) > 0$ и $\rho(x) \in C[\overline{\Omega}]$, если эту задачу рассматривать в пространстве $L^2[\Omega; \rho]$ со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_{\Omega} \rho u(x) \overline{v(x)} dx.$$

Задача Штурма–Лиувилля для обыкновенного дифференциального уравнения. В одномерном варианте эта задача формулируется так. Необходимо найти нетривиальные решения однородной граничной задачи

$$\begin{aligned} Lu &= -\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x)u = \lambda u, \quad x \in [0, l], \\ h_1 u(0) - h_2 u'(0) &= 0, \quad H_1 u(l) + H_2 u'(l) = 0 \end{aligned} \quad (5.84)$$

в классе $C^2(0, l) \cap C^1([0, l])$, $u''(x) \in L^2[0, l]$. Будем предполагать также, что единственное решение уравнения $Lu = 0$ при этих граничных условиях есть тождественный нуль.

Вычислим выражение $(Lu, v) - (u, Lv)$ для функции u, v класса $C^2(0, l) \cap C^1([0, l])$, удовлетворяющих граничным условиям (5.84). Имеем

$$\begin{aligned} (Lu, v) - (u, Lv) &= \int_0^l \left\{ qu\bar{v} - v\frac{d}{dx} \left(p \frac{du}{dx} \right) - qu\bar{v} + u\frac{d}{dx} \left(p \frac{d\bar{v}}{dx} \right) \right\} dx = \\ &= p(x) \left(u \frac{d\bar{v}}{dx} - \bar{v} \frac{du}{dx} \right) \Big|_0^l, \quad p(x) > 0, \quad x \in [0, l]. \end{aligned} \quad (5.85)$$

В большинстве практически важных задач правая часть этого равенства равна нулю. Перечислим некоторые из них: задача Дирихле ($h_2 = H_2 = 0, h_1 \neq 0, H_1 \neq 0$); задача Неймана ($h_1 = H_1 = 0, h_2 \neq 0, H_2 \neq 0$); задача о наклонной производной (ни одна из величин h_1, h_2, H_1, H_2 не равна нулю); различные комбинации этих граничных условий на концах отрезка (например $u(0) = 0, u'(l) = 0$). Во всех этих случаях $(Lu, v) - (u, Lv) = 0$ и задача Штурма–Лиувилля является самосопряженной граничной задачей.

Для сведения задачи Штурма–Лиувилля к интегральному уравнению введем функцию Грина $G(x, x_0)$, удовлетворяющую уравнению

$$-LG = \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dG}{dx} \right) - qG = -\delta(x - x_0),$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция.

Полагая в (5.85) $Lu = -\lambda u$, $v = G(x, x_0)$, приходим к интегральному уравнению

$$u(x_0) - \lambda \int_0^l G(x, x_0)u(x)dx = 0.$$

Меняя обозначения x_0 на x , x на y и учитывая симметрию функции Грина (см. п. 2.2), представим это интегральное уравнение в виде

$$u(x) - \lambda \int_0^l G(x, y)u(y)dy = 0. \quad (5.86)$$

При $\lambda = 0$ получаем тривиальное решение, поэтому предыдущие рассуждения справедливы в предположении, что $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи (5.84).

Если при $\lambda = 0$ уравнение $Lu = 0$ имеет ненулевые решения, то задача Штурма–Лиувилля сводится к интегральному уравнению [11]

$$u(x) = (\lambda + 1) \int_0^l G_*(x, y) u(y) dy,$$

где $G_*(x, y)$ — функция Грина граничной задачи

$$L_* u = Lu + u = (\lambda + 1) u,$$

$$h_1 u(0) - h_2 u'(0) = 0, \quad H_1 u(l) + H_2 u'(l) = 0.$$

Замечание. Если рассматривается задача Штурма–Лиувилля с весом

$$Lu = \lambda \rho u, \quad \rho(x) > 0, \quad \rho(x) \in C[0, l]$$

при тех же граничных условиях (5.84), то вместо интегрального уравнения с симметричным ядром $G(x, y)$, получаем уравнение

$$u(x) - \lambda \int_0^l G(x, y) \rho(y) u(y) dy = 0.$$

Это уравнение симметризуется введением функции

$$\varphi(x) = u(x) \sqrt{\rho(x)}.$$

В результате получаем интегральное уравнение с симметричным ядром

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^l \sqrt{\rho(x) \rho(y)} G(x, y) \varphi(y) dy = 0.$$

Функция Грина. Процедура построения функции $G(x, y)$ подробно изложена в [11, 21, 33, 37, 45]. Приведем лишь окончательные результаты. Пусть $v_1(x)$ и $v_2(x)$ — линейно-независимые решения однородного уравнения $Lv = -(pv')' + qv = 0$ класса $C^2(0, l) \cap \cap C^1([0, l])$, удовлетворяющие однородным краевым условиям: $h_1 v_1(0) - h_2 v_1'(0) = 0$, $H_1 v_2(l) + H_2 v_2'(l) = 0$. Тогда функция Грина этой задачи определяется формулой

$$G(x, y) = -\frac{1}{p(0) w(0)} \begin{cases} v_1(x) v_2(y), & 0 \leq x \leq y, \\ v_2(x) v_1(y), & y \leq x \leq l, \end{cases}$$

где определитель Вронского

$$w(x) = \begin{vmatrix} v_1(x), v_2(y) \\ v_1'(x), v_2'(y) \end{vmatrix} \neq 0, \quad x \in [0, l].$$

Основные свойства функции Грина.

1. $G(x, y)$ вещественна и непрерывна в замкнутом квадрате $\bar{D} = [0, l] \times [0, l]$ и непрерывна вместе со своей первой и второй производными в замкнутых треугольниках $0 \leq x \leq y \leq l$ и $0 \leq y \leq x \leq l$.

2. $G(x, y)$ симметрична: $G(x, y) = G(y, x)$, $(x, y) \in \bar{D}$.

3. На диагонали $x = y$

$$\frac{\partial}{\partial x} G(y+0, y) - \frac{\partial}{\partial x} G(y-0, y) = -\frac{1}{p(y)}, \quad y \in (0, l).$$

4. Вне диагонали $x = y$ функция Грина удовлетворяет однородному уравнению

$$L_x G(x, y) = 0, \quad x \neq y, \quad (x, y) \in \bar{D}.$$

5. На боковых сторонах квадрата D удовлетворяет граничным условиям

$$h_1 G(0, y) - h_2 \frac{\partial G(0, y)}{\partial x} = 0, \quad H_1 G(l, y) + H_2 \frac{\partial G(l, y)}{\partial x} = 0, \quad y \in [0, l].$$

Спектральные свойства задачи Штурма–Лиувилля. Собственные значения λ_k не отрицательны. Множество собственных значений счетно. Каждое собственное значение простое. Имеет место теорема (В. А. Стеклов). Всякая функция $f \in D_l$ разлагается в регулярно сходящийся ряд Фурье по собственным функциям $\{u_k\}$ задачи Штурма–Лиувилля

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (f, u_k) u_k(x).$$

Более того, имеет место теорема о полноте. Система собственных функций задачи Штурма–Лиувилля полна во всем пространстве L^2 . Доказательства всех этих предложений можно найти в [11, 22, 27, 46].

Асимптотические свойства собственных значений и собственных функций. В упрощенном виде представим задачу Штурма–Лиувилля следующим образом [42, 50].

Введем замены

$$\Phi = u \sqrt[4]{pr}, \quad x = \int \sqrt{\frac{p}{r}} dz,$$

$$-V(x) = \frac{q}{r} + \frac{3}{16} \left[\left(\frac{p'}{p} \right)^2 + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \right] - \frac{1}{8} \frac{p'r'}{pr} - \frac{1}{4} \left(\frac{p''}{p} + \frac{r''}{r} \right).$$

Тогда уравнение Лиувилля

$$\frac{d}{dz} \left(p \frac{d\psi}{dz} \right) + (q + \lambda r) \psi = 0 \tag{5.87}$$

приобретает вид одномерного уравнения Шредингера с потенциалом V

$$\frac{d^2 \Phi}{dx^2} + [\lambda - V(x)] \Phi = 0.$$

Границные условия представим в виде

$$a_{00}\Phi(0) + a_{01}\Phi'(0) = b_{10}\Phi(1) + b_{11}\Phi'(1) = 0.$$

Имеем [50]

$$\sqrt{\lambda_n} = \begin{cases} n\pi - \frac{\pi}{n} \left(\frac{a_{00}}{a_{01}} - \frac{b_{10}}{b_{11}} + \frac{1}{2}Q \right) + O(n^{-2}) & (a_{01}, b_{11} \neq 0), \\ \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi - \frac{\pi}{n} \left(-\frac{b_{10}}{b_{11}} + \frac{1}{2}Q \right) + O(n^{-2}) & (a_{01} = 0, b_{11} \neq 0), \\ \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi - \frac{\pi}{n} \left(-\frac{a_{00}}{a_{01}} + \frac{1}{2}Q \right) + O(n^{-2}) & (a_{01} \neq 0, b_{11} = 0), \\ (n+1)\pi - \frac{\pi}{2n}Q + O(n^{-2}) & (a_{01} = b_{11} = 0), \end{cases}$$

$$Q = \int_0^1 -V(x) dx,$$

$$u_n(x) = \begin{cases} \sqrt{2} \cos(n\pi x) + O(n^{-1}) & (a_{01}, b_{11} \neq 0), \\ \sqrt{2} \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi x + O(n^{-1}) & (a_{01} = 0, b_{11} \neq 0), \\ \sqrt{2} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi x + O(n^{-1}) & (a_{01} \neq 0, b_{11} = 0), \\ \sqrt{2} \sin(n+1)\pi x + O(n^{-1}) & (a_{01} = b_{11} = 0). \end{cases}$$

Пример 1. Задача Штурма–Лиувилля

$$Lu = \lambda u, \quad L = -\frac{d^2}{dx^2},$$

$$u(0) = u(1) = 0.$$

Здесь функция Грина

$$G(x, y) = \begin{cases} (1-y)x, & x \leq y, \\ (1-x)y, & y \leq x. \end{cases}$$

Собственные значения и собственные функции имеют вид

$$\lambda_n = \pi^2 n^2, \quad u_n(x) = \sqrt{2} \sin(n\pi x).$$

Пример 2. Для того же дифференциального уравнения возьмем новые граничные условия: $u(0) = u'(1) = 0$. В данном случае

$$G(x, y) = \begin{cases} x, & x \leq y, \\ y, & y \leq x. \end{cases}$$

Соответственно,

$$\lambda_n = \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \pi^2, \quad u_n(x) = \sqrt{2} \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \pi x \right].$$

Пример 3. Пусть теперь граничные условия таковы: $y(0) = 0, y(1) + hy'(1) = 0$. Оператор L тот же, что в примере 1. В этом случае собственные значения задачи Штурма–Лиувилля $\lambda_n = \mu_n^2$, где μ_n — корни трансцендентного уравнения

$$\operatorname{tg} \mu + h\mu = 0.$$

Пример 4. Рассмотрим задачу о минимуме функционала [50]

$$I\{\psi\} = \int_a^b p(z) \left(\frac{d\psi}{dz} \right)^2 - q(z) \psi^2 dz$$

при дополнительном условии

$$\int_a^b \psi^2(z) r(z) dz = \|\psi\| = 1. \quad (5.88)$$

Уравнение Эйлера этой вариационной задачи совпадает с уравнением Лиувилля (5.87). Найдем $\min I\{\psi\}$. Допустимыми будем считать функции $\psi(z)$, удовлетворяющие условию нормировки (5.88) и граничным условиям на концах a и b . Очевидно, любая собственная функция, т. е. любое ненулевое решение уравнения (5.87), удовлетворяет уравнению Эйлера для функционала $I\{\psi\}$, а низшая собственная функция ψ_0 доставляет $\min I\{\psi\}$. Подсчитаем $I\{\psi_0\}$. Имеем, интегрируя по частям,

$$I\{\psi_0\} = \int_a^b p(z) \left(\frac{d\psi_0}{dz} \right)^2 - q(z) \psi_0^2 dz = \left(p\psi_0 \frac{d\psi_0}{dz} \right)_a^b - \int_a^b \psi_0 \left[\frac{d}{dz} \left(\frac{d\psi_0}{dz} \right) + q\psi_0 \right] dz.$$

Так как согласно (5.87)

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{d\psi_0}{dz} \right) + q\psi_0 = -\lambda_0 r\psi_0,$$

получаем окончательно (с учетом нормировки (5.88))

$$\min I\{\psi\} = I\{\psi_0\} = \lambda_0 \int_a^b r(z) \psi_0^2(z) dz = \lambda_0,$$

где λ_0 — наименьшее собственное значение.

5.8. Интегральные уравнения теории потенциала

Ниже кратко рассмотрим граничные задачи Дирихле, Неймана и задачу о наклонной производной (смешанную) для уравнений Лапласа и Пуассона. Постановки этих задач сформулированы в гл. 2, п. 2.2.

Будем считать, что конечная или бесконечная область, в которой ищется решение, при надлежит R^3 и ограничена замкнутой односвязной поверхностью Ляпунова S . Под поверхностью Ляпунова понимают следующее [11, 14]:

1. В каждой точке существует определенная касательная плоскость и соответственно нормаль.

2. Если θ — угол между нормалями в точках поверхности P , Q и r — расстояние между этими точками, то найдутся такие два числа $A > 0$ и $0 < \alpha \leq 1$, что выполняется неравенство

$$|\theta| \leq Ar^\alpha.$$

3. Существует число a , одинаковое для всех точек S , такое что параллели к нормали в любой точке P поверхности пересекаются с частью поверхности, находящейся внутри сферы радиуса a с центром в точке P , только один раз.

Конечную односвязную область, находящуюся внутри S обозначим через Ω , а ее дополнение $R^3 \setminus \bar{\Omega}$ — через Ω_1 .

4. Будем предполагать также, что телесный угол, под которым из произвольной точки пространства видна любая часть поверхности S , ограничен. Это свойство выражается неравенством

$$\int_S \left| \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|x-y|} \right| dS_y \leq K = \text{const.} \quad (5.89)$$

Граничные задачи теории потенциала для уравнения Лапласа и Пуассона сводятся к интегральным уравнениям при помощи объемного и поверхностных потенциалов простого и двойного слоя (см. гл. 4, п. 4.10). Напомним соответствующие определения.

Объемный потенциал определяется в виде свертки (предполагается, что $\rho(x)$ — финитная интегрируемая функция)

$$V_3 = \rho * \frac{1}{|x|} = \int \rho(y) \frac{dy}{|x-y|}. \quad (5.90)$$

Поверхностные потенциалы простого $V^{(0)}$ и двойного слоя $V^{(1)}$ определяются следующими свертками

$$V^{(0)}(x) = \frac{1}{|x|} * \mu \delta_S = \int_S \frac{\mu(y)}{|x-y|} dS_y, \quad \Delta V^{(0)} = -4\pi\mu\delta,$$

$$V^{(1)}(x) = -\frac{1}{|x|} * \frac{\partial}{\partial n} (\nu \delta_S) = \int_S \nu(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) dS_y, \quad \Delta V^{(1)} = 4\pi \frac{\partial}{\partial n} (\nu \delta_S). \quad (5.91)$$

Здесь μ и ν — непрерывные функции на S , S — ограниченная двусторонняя кусочно-гладкая поверхность, нормаль направлена во внешность. Потенциалы (5.90), (5.91) представляют собой локально интегрируемые функции в R^3 . Вычислим производную по на-

правлению вектора n_0 — нормали к S в фиксированной точке $x_0 \in S$ от потенциала простого слоя. Имеем (рис. 5.1)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n_0} \frac{1}{|x-y|} &= \sum_{j=1}^3 \cos(n_0, x_j) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) = \sum_{j=1}^3 \frac{y_j - x_j}{|x-y|^3} \cos(n_0, x_j) = \\ &= \sum_{j=1}^3 \frac{\cos \alpha_j \cos(n_0, x_j)}{r^2} = \frac{\cos \psi_{xy}}{|x-y|^2}, \end{aligned}$$

где α_j — угол между вектором $y-x$ и осью x_j , а ψ_{xy} — угол между вектором $y-x$ и нормалью n_0 (в точке $x_0 \in S$).

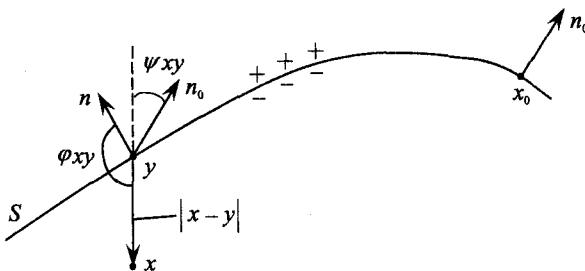


Рис. 5.1. К выводу формул (5.92)

Аналогично

$$\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|x-y|} = \sum_{j=1}^3 \frac{\cos \alpha_j \cos(n, x_j)}{r^2} = \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x-y|^2},$$

где φ_{xy} — угол между (внешней) нормалью к поверхности S в текущей точке y и вектором $x-y$.

С учетом этих соотношений запишем

$$\begin{aligned} \frac{\partial V^{(0)}(x)}{\partial n_0} &= \int_S \mu(y) \frac{\partial}{\partial n_0} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) dS_y = \int_S \mu(y) \frac{\cos \psi_{xy}}{|x-y|^2} dS_y, \quad x \in S, \\ V^{(0)}(x) &= \int_S \nu(y) \frac{\partial}{\partial n_0} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) dS_y = \int_S \nu(y) \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x-y|^2} dS_y. \end{aligned} \quad (5.92)$$

В качестве примера физического объекта, описываемого потенциалом двойного слоя, можно привести «лейденскую банку», которая представляет собой трехслойную поверхность S , средний слой которой не электропроводен, а два крайних — проводники. На них нанесены равные по абсолютной величине и противоположные по знаку электрические заряды (рис. 5.2). Отдельная пара таких зарядов образует диполь, $\nu(x)$ — плотность распределения диполей на поверхности S .

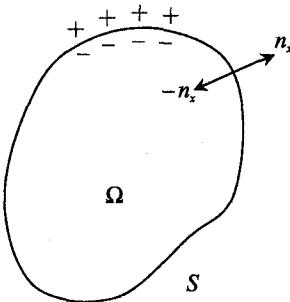


Рис. 5.2. Конденсатор «Лейденская банка»

Перечислим здесь основные свойства потенциалов, подробное изложение и доказательства можно найти в [11, 14, 31, 41]. Плотность $\rho(x)$ объемного потенциала V_3 предполагается финитной, распределенной в области Ω (плотность распределения масс, зарядов и т. п.).

1. Объемный потенциал определен и непрерывен во всем пространстве, имеет непрерывные частные производные первого порядка по x_i ($i = 1, 2, 3$); является гармонической функцией вне области Ω ; при $|x| \rightarrow \infty$, объемный потенциал $V_3(x) \rightarrow 0$ (Ω — ограниченная область). В точках области Ω

$$\Delta V_3 = -4\pi\rho(x).$$

2. Потенциал простого слоя $V^{(0)}(x)$ определен и непрерывен во всем пространстве, является гармонической функцией вне S и стремится к нулю при $|x| \rightarrow \infty$ (если S — ограниченная поверхность). Нормальная производная потенциала простого слоя имеет разрыв первого рода в точках поверхности S , причем ее предельные значения на S из области Ω_1 (извне) и из области Ω (изнутри S) определяются соответственно соотношениями

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial n} \right)^+ (x) &= -2\pi\mu(x) + \frac{\partial V^{(0)}(x)}{\partial n}, \\ \left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial n} \right)^- (x) &= 2\pi\mu(x) + \frac{\partial V^{(0)}(x)}{\partial n}, \end{aligned} \quad (5.93)$$

где прямое значение нормальной производной потенциала простого слоя

$$\frac{\partial V^{(0)}(x)}{\partial n} = \int_S \mu(y) \frac{\cos \psi_{xy}}{|x-y|^2} dy, \quad x \in S$$

непрерывно на S . Здесь предполагается, что $\mu \in C(S)$, S — поверхность Ляпунова, удовлетворяющая условию (5.89), под нормальной производной понимается правильная нормальная производная. Напомним соответствующее определение (см. рис. 5.3).

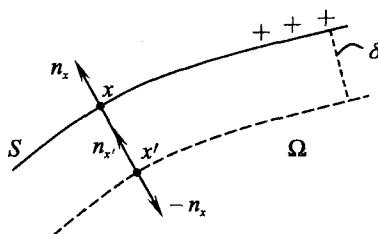


Рис. 5.3. К определению правильной нормальной производной

Функция $u \in C^1(\Omega)$ имеет правильную нормальную производную $\frac{\partial u}{\partial n}$ на S , если равномерно по всем $x \in S$ существует предел

$$\lim_{x' \rightarrow x} \frac{\partial u(x')}{\partial n_x}, \quad x' \in \Omega, \quad x' \in -n_x.$$

Этот предел обозначается обычным символом

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u(x)}{\partial n_x}.$$

3. Потенциал двойного слоя $V^{(1)}(x)$ определен во всем R^3 , вне несущей поверхности S является гармонической функцией, при $|x| \rightarrow \infty$ потенциал $V^{(1)}(x) \rightarrow 0$. Если плотность моментов v постоянна и равна единице, то имеют место формулы

$$\int_S \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x-y|^2} dS_y = \begin{cases} -4\pi, & x \in \Omega, \\ -2\pi, & x \in S, \\ 0, & x \in \Omega_1. \end{cases} \quad (5.94)$$

Если $v(x) \in C(S)$, то потенциал двойного слоя $V^{(1)}(x)$ непрерывен на $\bar{\Omega}$ и $\bar{\Omega}_1$, терпит разрыв первого рода при переходе через S , причем предельные значения потенциала из Ω_1 и из Ω определяются соответственно формулами

$$\begin{aligned} \{V^{(1)}(x)\}^+ &= 2\pi v(x) + V^{(1)}(x), \\ \{V^{(1)}(x)\}^- &= -2\pi v(x) + V^{(1)}(x), \end{aligned} \quad (5.95)$$

где прямое значение потенциала двойного слоя

$$V^{(1)}(x) = \int_S v(y) \frac{\cos \varphi_{xy}}{|y-x|^2} dy, \quad x \in S$$

есть функция, непрерывная на S .

Замечание. При $v(x) \equiv 1$ потенциал двойного слоя — так называемый интеграл Гаусса. Он представляет собой телесный угол, под которым поверхность S видна из точки x , взятый со знаком минус, если $\cos \varphi_{xy} \geq 0$, и со знаком плюс в противном случае.

Граничные задачи теории потенциала для уравнения Лапласа в R^3 . Соответствующие определения приведены в гл. 2, п. 2.2. Уточним их здесь [11, 31]. Границу области S считаем односвязной.

Внутренняя задача Дирихле: найти гармоническую в области Ω функцию $u \in C(\bar{\Omega})$, принимающую на границе S заданные (непрерывные) значения u_0^- .

Внешняя задача Дирихле: найти гармоническую в области Ω_1 функцию $u \in C(\bar{\Omega}_1)$, принимающую на границе S заданные (непрерывные) значения u_0^+ и стремящуюся к нулю на бесконечности.

Внутренняя задача Неймана: найти гармоническую в области Ω функцию $u \in C(\bar{\Omega})$, имеющую на S заданную (непрерывную) правильную нормальную производную u_1^- .

Внешняя задача Неймана: найти гармоническую в области Ω_1 функцию $u \in C(\bar{\Omega}_1)$, имеющую на S заданную (непрерывную) правильную нормальную производную u_1^+ и стремящуюся к нулю на бесконечности.

Смешанная задача: найти гармоническую в области Ω функцию $u \in C(\bar{\Omega})$, удовлетворяющую на границе S краевому условию

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + p(x)u \right) \Big|_S = F(x), \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in S,$$

где $p(x)$ и $F(x)$ — заданные непрерывные функции на S и $p(x) > 0$.

Перечисленные граничные задачи сводятся к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода следующим образом. Решения внутренней и внешней задач Дирихле представляем в виде потенциала двойного слоя

$$u(x) = \int_S v(y) \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x-y|^2} dS_y, \quad (5.96)$$

где v — искомая непрерывная плотность на S . Подстановка предельных значений потенциала (5.96) в граничные условия Дирихле внутренней и внешней задач, приводит к интегральным уравнениям

$$\mp 2\pi v(x) + V^{(1)}(x) = u_0^\mp(x), \quad x \in S.$$

Эти уравнения удобно записать в единой форме

$$v(x) = \lambda \int_S K(x, y) v(y) dS_y + f(x), \quad x \in S, \quad (5.97)$$

$$K(x, y) = \frac{1}{2\pi} \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x-y|^2},$$

где для внутренней задачи Дирихле $\lambda = 1$ и $f = -\frac{u_0^-}{2\pi}$, а для внешней задачи $\lambda = -1$

$$\text{и } f = -\frac{u_0^+}{2\pi}.$$

Решения внутренней и внешней задач Неймана представим в виде потенциала простого слоя

$$u(x) = \int_S \frac{\mu(y)}{|x-y|} dS_y, \quad (5.98)$$

где μ — искомая непрерывная плотность на S . Используя выражения для предельных значений нормальной производной потенциала простого слоя (5.93), сводим эти граничные задачи к интегральным уравнениям

$$\pm 2\pi\mu(x) + \int_S \mu(y) \frac{\cos \psi_{xy}}{|x-y|^2} dS_y = u_1^\mp(x).$$

В единой форме представим их так

$$\mu(x) = \lambda \int_S \mu(y) K^*(x, y) dS_y + g(x), \quad x \in S, \quad (5.99)$$

$$K^*(x, y) = \frac{1}{2\pi} \frac{\cos \psi_{xy}}{|x-y|^2},$$

где для внутренней задачи Неймана $\lambda = -1$, $g = \frac{u_1^-}{2\pi}$, а для внешней задачи Неймана $\lambda = 1$, $g = -\frac{u_1^+}{2\pi}$.

Так как

$$\frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) = \Phi(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial n_x} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) = \Phi(y, x),$$

то ядро $K^*(x, y) = K(y, x)$ сопряжено с ядром $K(x, y)$. Справедлива оценка [11]

$$|K(x, y)| \leq \frac{a}{2\pi|x-y|^{2-\alpha}}, \quad a > 0,$$

где $\alpha > 0$ — постоянная в условиях Ляпунова, $x \in S, y \in S$.

Таким образом, ядра уравнения (5.97) и сопряженного к нему уравнения (5.99) имеют слабые особенности полярного типа, следовательно, к этим уравнениям применима теория Фредгольма.

Из (5.97) и (5.99) следует, что внешняя задача Неймана и внутренняя задача Дирихле описываются при помощи сопряженных интегральных уравнений Фредгольма второго рода. То же можно сказать относительно внутренней задачи Неймана и внешней задачи Дирихле.

Доказывается, что $\lambda = 1$ не является характеристическим числом уравнений (5.97) и (5.99), т. е. однородные (сопряженные) интегральные уравнения

$$v(x) - \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\cos \phi_{xy}}{|x-y|^2} v(y) dS_y = 0,$$

$$\mu(x) - \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\cos \psi_{xy}}{|x-y|^2} \mu(y) dS_y = 0$$

имеют только нулевые решения. Следовательно, согласно теории Фредгольма уравнения второго рода (5.97) и (5.99) при $\lambda = 1$ однозначно разрешимы при любых правых частях u_0^-, u_1^- класса $C(S)$. Это означает, что решения внутренней задачи Дирихле и внешней задачи Неймана существуют и определяются соответственно потенциалами (5.96) и (5.98).

При $\lambda = -1$ однородные уравнения

$$v(x) + \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x-y|^2} v(y) dS_y = 0, \quad (5.100)$$

и

$$\mu(x) + \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\cos \psi_{xy}}{|x-y|^2} \mu(y) dS_y = 0 \quad (5.101)$$

имеют нетривиальные решения, т. е. значение $\lambda = -1$ является характеристическим числом для уравнений (5.97), (5.99).

Уравнение (5.100) имеет ненулевое решение $v(x) = \text{const}$ (следует из (5.94)). Значит, решение внутренней задачи Неймана существует при любой непрерывной функции $u_1^-(x)$, удовлетворяющей условию ортогональности

$$\int_S u_1^-(x) dS = 0.$$

Однородное уравнение (5.101) имеет одно линейно независимое решение $\mu_0(x)$ [34]. Поэтому для разрешимости интегрального уравнения (5.97) при $\lambda = -1$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие ортогональности

$$\int_S \mu_0(x) u_0^+(x) dS = 0. \quad (5.102)$$

Значит, при выполнении этого условия единственное решение внешней задачи Дирихле, убывающее на бесконечности, существует для любой непрерывной граничной функции $u_0^+(x)$.

Условие (5.102) возникает из-за того, что, разыскивая решение внешней задачи Дирихле в виде потенциала двойного слоя (5.96), мы навязываем решению (гармонической функции) убывание на бесконечности $O(|x|^{-2})$. Однако этого при постановке не требуется. Известно, что произвольная гармоническая функция имеет порядок убывания на бесконечности $O(|x|^{-1})$. Для того чтобы избавиться от условия (5.102) и учесть возможные варианты убывания решения внешней задачи Дирихле, представим его в виде суммы

$$u(x) = \int_S v(y) \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x-y|^2} dS_y + \frac{A}{|x|} = V^{(1)}(x) + \frac{A}{|x|}, \quad 0 \in \Omega,$$

где A — неизвестная пока постоянная.

Тогда получим видоизмененное интегральное уравнение

$$v(x) = - \int_S K(x, y) v(y) dS_y + \frac{1}{2\pi} \left(u_0^+(x) - \frac{A}{|x|} \right).$$

Необходимое и достаточное условие разрешимости этого уравнения, согласно (5.101), таково:

$$\int_S \mu_0(x) \left(u_0^+(x) - \frac{A}{|x|} \right) dS = 0.$$

Отсюда определяется константа A . Можно проанормировать собственную функцию $\mu_0(x)$ таким образом, чтобы

$$\int_S \frac{\mu_0(x)}{|x|} dS = 1.$$

Тогда

$$A = \int_S \mu_0(x) u_0^+(x) dS.$$

Таким образом, внешняя задача Дирихле разрешима при любой непрерывной функции u_0^+ и ее решение представляется в виде суммы

$$u(x) = V^{(1)}(x) + \frac{1}{|x|} \int_S \mu_0(x) u_0^+(x) dS.$$

В описанной выше конструкции присутствует собственная функция $\mu_0(x)$ интегрального уравнения (5.101).

Задача об отыскании нетривиальных решений этого уравнения носит название задачи Робена. Если область ограничена одной замкнутой поверхностью, то задача Робена имеет одно нормированное решение $\mu_0(x)$. Его можно определить методом последовательных приближений по обычной схеме.

Пусть $g(x) \in C(S)$ — произвольная функция. Стартуя с нулевого приближения $\mu_0^{(0)}(x) = g(x)$, определим первое приближение $\mu_0^{(1)}(x)$ по формуле

$$\mu_0^{(1)}(x) = - \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\cos \psi_{xy}}{|x-y|^2} \mu_0^{(0)}(y) dS_y.$$

И вообще,

$$\mu_0^{(n)}(x) = - \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\cos \psi_{xy}}{|x-y|^2} \mu_0^{(n-1)}(y) dS_y \quad (n=1, 2, \dots).$$

Последовательность $\{\mu_0^{(n)}(x)\}$ равномерно сходится к непрерывному решению $\mu_0(x)$.

Потенциал простого слоя $V^{(0)}$ с плотностью $\mu_0(x)$ называется потенциалом Робена. Физический смысл его — это потенциал, создаваемый зарядами на проводящей поверхности S , а его плотность

$$\mu_0(x) = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial n} \right)^+(x)$$

есть плотность зарядов, которая устанавливается на этой поверхности [11].

Если граница области состоит из нескольких замкнутых поверхностей Ляпунова, то процедура решения граничных задач очевидным образом изменится. Так, если область Ω конечна и ограничена извне поверхностью S_0 , а изнутри поверхностями S_1, S_2, \dots, S_m , то внешние задачи Дирихле и Неймана сводятся к m внутренним задачам для областей $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m$, ограниченных поверхностями S_1, S_2, \dots, S_m , и одной внешней задаче для бесконечной области, ограниченной поверхностью S_0 . Решение внутренней задачи Неймана разыскивается в виде потенциала простого слоя (5.98), где под S понимается полная граница области. Интегральное уравнение (5.99) при $\lambda = 1$ остается без изменения. Для разрешимости этого уравнения необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (5.101), где $S = S_0 + S_1 + \dots + S_m$.

Решение внутренней задачи Дирихле $u|_{S_k} = u_k^-(x)$, $x \in S_k$ можно также разыскивать в виде потенциала двойного слоя (5.96). Интегральное уравнение (5.97) при $\lambda = 1$ остается в силе. Условия его разрешимости заключаются в ортогональности собственных функций сопряженного уравнения (5.99) при $\lambda = 1$ свободному члену уравнения (5.97). Однако, задача Робена в данном случае имеет решение $u_k(x)$ для каждой поверхности S_k ($k = 1, 2, \dots, m$) и условие разрешимости принимает вид

$$\int_{S_k} u_k^-(x) u_k(x) dS = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m).$$

Если внешняя граница S_0 отсутствует, то эти условия остаются в силе.

Наконец, рассмотрим смешанную задачу теории потенциала для гармонической в Ω функции $u(x)$

$$\left. \left(\frac{\partial u}{\partial n} + p(x)u \right) \right|_S = F(x), \quad p(x) > 0, \quad x \in S.$$

Решение этой задачи разыскивается в виде потенциала простого слоя (5.98). Подстановка предельного значения нормальной производной (5.93) в граничное условие смешанной задачи приводит к интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$\mu(x) + \frac{1}{2\pi} \int_S \mu(y) \left(\frac{\cos \psi_{xy}}{|x-y|^2} + \frac{p(x)}{|x-y|} \right) dS_y = \frac{1}{2\pi} F(x), \quad x \in S.$$

Это уравнение разрешимо при любой правой части $F(x) \in C(S)$ и любой положительной функции $p(x) \in C(S)$.

Замечание 1. Решение уравнения Пуассона

$$\Delta u = -f, \quad f \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$$

можно свести к решению уравнения Лапласа, введя подстановку

$$u = v + \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{f(y)}{|x-y|} dy.$$

Действительно,

$$\Delta u = \Delta v + \frac{1}{4\pi} \Delta \left(\frac{1}{|x|} * f \right) = \Delta v + \frac{1}{4\pi} (-4\pi \delta * f) = \Delta v - f.$$

Замечание 2. Теоремы единственности для граничных задач теории потенциала можно доказать и без привлечения соответствующих интегральных уравнений. По этому поводу см. [11, 37], а также гл. 2 данной книги. Здесь же сформулируем окончательные результаты.

Решение внутренней или внешней задачи Дирихле единственно и непрерывно зависит от граничного условия u_0^- или u_0^+ . Решение внешней задачи Неймана единственно (для области ограниченной поверхностью класса $C^2(S)$). Решение внутренней задачи Неймана определено с точностью до произвольной постоянной.

Замечание 3. Двумерные граничные задачи теории потенциала эффективно решаются с привлечением аппарата аналитических функций комплексного переменного. Соответствующие результаты изложены в [28, 32, 33, 37, 41, 45, 46, 49, 51]. См. также гл. 2 настоящей книги.

5.9. Интегральные уравнения граничных задач теплопроводности

Рассмотрим дифференциальное уравнение теплопроводности

$$\Delta u - \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{k} f(x, t), \quad a^2 = \frac{k}{c\rho}, \quad (5.103)$$

где Δ — оператор Лапласа в R^n , $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, t — время, k — коэффициент теплопроводности; c, ρ — удельная теплоемкость и плотность вещества соответственно; $f(x, t)$ — заданная непрерывная функция своих переменных в цилиндре $\Omega = D \times [0, T]$, D — область в R^n , занятая телом и ограниченная кусочно-гладкой поверхностью S .

Для уравнения (5.103) поставим следующие начально-краевые задачи. Определить в $n+1$ — мерной области Ω дважды непрерывно дифференцируемое по пространственным переменным и непрерывно дифференцируемое по времени решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \varphi(x) \in C(D), \quad x \in D$$

и одному из трех возможных граничных условий на боковой поверхности σ цилиндра Ω

$$1) \quad u|_{\sigma} = \varphi_1(x, t), \quad \varphi_1(x, t) \in C(\bar{\sigma}), \quad x \in \sigma, \quad t > 0 \quad (\text{краевая задача первого рода});$$

2) $\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\sigma} = \varphi_2(x, t), \quad \varphi_2(x, t) \in C(\bar{\sigma}), \quad x \in \sigma, \quad t \geq 0$ (краевая задача второго рода);

3) $\left(\frac{\partial u}{\partial n} + hu \right) \Big|_{\sigma} = \varphi_3(x, t), \quad \varphi_3(x, t) \in C(\bar{\sigma}), \quad h \in C(S), \quad t \geq 0, \quad h > 0$ (смешанная задача).

Первое граничное условие требует, чтобы температура на цилиндрической поверхности σ совпадала с заданным распределением $\varphi_1(x, t)$ в любой момент времени $t > 0$. Если $\varphi_1(x, 0) = \varphi(x)$, то начальное и граничное условия первой задачи согласованы между собой. В этом случае можно требовать, чтобы начальные условия выполнялись в \bar{D} , а граничные условия при $t \geq 0$.

Второе граничное условие требует, чтобы тепловой поток на σ совпадал с заданным распределением $-k\varphi_2(x, t)$.

Третье граничное условие (условие теплообмена с внешней средой по закону Ньютона) определяет тепловой режим в теле при заданной температуре внешней среды u^e у поверхности тела S в любой момент времени $t > 0$ и заданном коэффициенте теплоотдачи α , т. е.

$$\left. -\frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\sigma} = h(u - u^e) \Big|_{\sigma}, \quad h = \frac{\alpha}{k}.$$

Заметим также, что здесь и ниже под положительной нормалью понимается внешняя, т. е. направленная во внешность, нормаль к поверхности тела S .

Тепловые потенциалы. Граничные задачи теплопроводности можно свести к интегральным уравнениям при помощи тепловых потенциалов [11, 14, 37, 46].

В гл. 4, п. 4.23 были получены фундаментальные решения уравнения теплопроводности для случаев $n = 1, 2, 3$. Это обобщенные функции, удовлетворяющие уравнению

$$\Delta E - \frac{1}{a^2} \frac{\partial E}{\partial t} = \delta(x, t) = \delta(x) \cdot \delta(t).$$

Для удобства выпишем их здесь

$$E_1(x, t) = -\frac{a\theta(t)}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}},$$

$$E_2(x, t) = -\frac{\theta(t)}{4\pi t} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}}, \quad x = (x_1, x_2),$$

$$E_3(x, t) = -\frac{\theta(t)}{8a\pi t\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}}, \quad x = (x_1, x_2, x_3),$$

где $\theta(t)$ — единичная функция Хевисайда.

В n -мерном пространстве фундаментальное решение уравнения теплопроводности имеет вид

$$E_n(x, t) = -\frac{a^2\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}}, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Тепловой потенциал для уравнения (5.103) определяется в виде свертки

$$U = -\frac{1}{k} f * E_n.$$

Если f — финитная обобщенная функция и $f = 0$ при $t < 0$, то тепловой потенциал V существует в $D'(R^{n+1})$. Если $f = 0$ при $t < 0$ и ограничена в каждой полосе $0 \leq t \leq T$, то потенциал U выражается формулой [11]

$$U = -\frac{1}{k} \int_0^t \int_{R^n} f(y, \tau) E_n(x - y, t - \tau) dy d\tau = \frac{a^2}{k} \int_0^t \int_{R^n} \frac{f(y, \tau)}{\left[2a\sqrt{\pi(t-\tau)}\right]^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2(t-\tau)}} dy d\tau. \quad (5.104)$$

В указанных выше условиях потенциал U удовлетворяет уравнению (5.103) и начальному условию $U|_{t=+0} = 0$, иными словами, это есть решение задачи Коши

$$\Delta U - \frac{1}{a^2} \frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{1}{k} f(x, t),$$

$$U|_{t=+0} = 0.$$

Решение задачи Коши для однородного уравнения теплопроводности

$$\Delta u - \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

$$u|_{t=+0} = \varphi(x), \quad x \in R^n$$

выражается интегралом Пуассона

$$V^{(0)}(x, t) = \frac{1}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n} \int_{R^n} \varphi(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}} dy = E(x, t) * \varphi(x). \quad (5.105)$$

Поэтому решение задачи Коши для неоднородного уравнения (5.103) можно представить в виде суммы теплового потенциала (5.104) и интеграла Пуассона $V^{(0)}$ (5.105)

$$u(x, t) = U(x, t) + V^{(0)}(x, t).$$

При рассмотрении начально-краевой задачи теплопроводности первого рода

$$\Delta u - \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{k} f(x, t),$$

$$u|_{t=+0} = \varphi(x),$$

$$u|_S = \varphi_1(x, t), \quad t > 0$$

целесообразно использовать поверхностный тепловой потенциал двойного слоя

$$W(x, t) = \int_0^t \int_S v(y, \tau) \frac{\partial}{\partial n_y} E(x - y, t - \tau) dS_y, \quad x \in S, \quad (5.106)$$

где $v(y, t)$ — непрерывная плотность, определенная при $t \geq 0$, $v(y, 0) = 0$, y — текущая точка на S ; n_y — внешняя нормаль к S в точке y ; x — точка наблюдения; dS_y — элемент площади поверхности S .

Перечислим основные свойства поверхностного потенциала двойного слоя. Соответствующее обоснование можно найти в [11].

1. При всех $x \notin S$ функция $W(x, t)$ бесконечно дифференцируема и удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности ($f(x, t) \equiv 0$).

$$2. W(x, t) \Big|_{t=+0} = 0.$$

3. Предельные значения на поверхности $\sigma = S \times [0, T]$ потенциала (5.106) W^+ и W^- , полученные соответственно при стремлении к точке $x \in S$ изнутри и извне, определяются равенствами

$$W^\pm(x, t) = \mp \frac{1}{2} v(x, t) + W_0(x, t), \quad x \in S, \quad (5.107)$$

где прямое значение потенциала двойного слоя определяется выражением

$$W_0(x, t) = \int_0^t d\tau \int_S \frac{v(y, \tau)}{\left[2a\sqrt{\pi(t-\tau)} \right]^n} \frac{\partial}{\partial n_y} \left\{ e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2(t-\tau)}} \right\} dS_y, \quad x \in S, \quad t > 0.$$

4. Нормальная производная от теплового потенциала двойного слоя непрерывна при переходе через S .

Решение первой начально-краевой задачи (внутренней и внешней) ищется в виде суммы

$$u(x, t) = V^{(0)}(x, t) + U(x, t) + W(x, t), \quad (5.108)$$

где $V^{(0)}, U$ и W — соответственно интеграл Пуассона (5.105), объемный тепловой потенциал (5.104) и поверхностный тепловой потенциал двойного слоя (5.106). Согласно свойствам входящих сюда потенциалов, выражение (5.108) удовлетворяет уравнению (5.103) и начальному условию $u|_{t=+0} = \varphi(x)$. Для определения неизвестной плотности $v(x, t)$ воспользуемся граничным условием. Снося на границу предельные значения потенциалов с учетом (5.107), приходим к следующим интегральным уравнениям (типа Вольтерра):

$$\mp \frac{1}{2} v(x, t) + W_0(x, t) = N(x, t), \quad x \in S, \quad t > 0, \quad (5.109)$$

$$N(x, t) = \varphi_i(x, t) - U(x, t) - V^{(0)}(x, t).$$

Здесь верхний знак относится к внутренней задаче (для конечной односвязной области D^+ , ограниченной поверхностью S), нижний — к внешней задаче (для области $D^- = R^n \setminus \overline{D}^+$).

Для сведения второй начально-краевой задачи

$$\Delta u - \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{k} f(x, t),$$

$$u|_{t=+0} = \varphi(x), \quad x \in D,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\sigma} = \varphi_2(x, t), \quad \sigma = S \times [0, T]$$

к интегральному уравнению привлечем поверхностный тепловой потенциал простого слоя (μ — финитная обобщенная функция)

$$V(x, t) = \mu * E(x, t) = \int_0^t d\tau \int_S \mu(y, \tau) E(x - y, t - \tau) dS_y. \quad (5.110)$$

Перечислим здесь свойства потенциала $V(x, t)$.

1. При $t > 0$, $V(x, t)$ есть непрерывно дифференцируемая вне $\sigma = S \times [0, T]$ функция своих переменных, удовлетворяющая однородному ($f(x, t) = 0$) уравнению теплопроводности.

2. Потенциал (5.110) непрерывно продолжим через поверхность S при любом $t > 0$.

3. Правильная нормальная производная теплового потенциала простого слоя терпит разрыв первого рода при переходе через σ . Предельные значения нормальной производной в точке $x \in S$ изнутри и снаружи существуют и имеют вид

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)^{\pm} = \pm \frac{1}{2} \mu(x, t) + \frac{\partial V(x, t)}{\partial n_x}, \quad x \in S, \quad (5.111)$$

где второе слагаемое есть прямое значение нормальной производной потенциала простого слоя, верхний знак соответствует предельному переходу изнутри, нижний — извне σ .

Решение второй начально-краевой задачи разыскиваем в виде суммы

$$u(x, t) = V^{(0)}(x, t) + U(x, t) + V(x, t). \quad (5.112)$$

Подстановка предельных значений выражения (5.112) с учетом (5.111) в граничное условие второй начально-краевой задачи приводит к интегральным уравнениям

$$\pm \frac{1}{2} \mu(x, t) + \frac{\partial}{\partial n_x} V(x, t) = M(x, t), \quad (5.113)$$

$$M(x, t) = \varphi_2(x, t) - \frac{\partial}{\partial n_x} (V^{(0)}(x, t) + U(x, t)).$$

Причем верхний знак соответствует внутренней, а нижний — внешней задачам. Так же как в теории потенциала для уравнения Лапласа, интегральные уравнения (5.113) являются сопряженными по отношению к соответствующим уравнениям (5.109).

Смешанная начально-краевая задача аналогичным образом сводится к интегральному уравнению при помощи поверхностного потенциала простого слоя (5.110).

Полученные интегральные уравнения решаются методом последовательных приближений, причем ряды Неймана равномерно сходятся к непрерывному решению (S — поверхность Ляпунова, $N(x, t) \in C(\bar{\sigma})$).

5.10. Интегральные уравнения теории упругости

Повторим здесь для удобства некоторые соотношения из п. 4.25. Модель линейной упругости включает в себя вектор бесконечно малых перемещений точек упругой среды $u = (u_1, u_2, u_3)$, тензор малых деформаций e_{ij} , связанных со смещениями соотношениями Коши

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i) \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

тензор напряжений σ_{ij} , связанный с тензором деформаций при помощи закона Гука (суммирование по повторяющемуся индексу)

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} e_{kk} + 2\mu e_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, λ и μ — физические постоянные материала (константы Ламе). Они подчинены условиям: $\mu > 0, \lambda > -2\mu/3$. Вводя в закон Гука соотношения для тензора деформации, можно представить его в виде

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} e + \mu (\partial_i u_j + \partial_j u_i), \quad e = e_{kk} \quad (i, j, k = 1, 2, 3).$$

Из условий равновесия произвольной внутренней части тела вытекают условия парности касательных напряжений $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ ($i \neq j$) и дифференциальные уравнения

$$\partial_j \sigma_{ij} + F_i = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

где F_i — интенсивность объемных сил, действующих в теле.

Полагая в дальнейшем $F = (F_1, F_2, F_3) = 0$ и вставляя в уравнения равновесия вместо σ_{ij} их выражения через деформации e_{ij} , приходим к однородной системе уравнений Ламе относительно перемещений

$$\mu \Delta u_j + (\lambda + \mu) \partial_j (\partial_k u_k) = 0, \quad \Delta = \partial_k \partial_k \quad (k, j = 1, 2, 3).$$

Или в векторной форме

$$\Delta^* u = \mu \Delta u + (\lambda + \mu) \operatorname{grad}(\operatorname{div} u) = 0.$$

Эта система эллиптического типа представляет собой аналог уравнения Лапласа. В теории упругости рассматривают три основные граничные задачи для нее.

Первая граничная задача заключается в определении решения u системы Ламе в области Ω , занятой телом, удовлетворяющего на границе тела $\partial\Omega = S$ краевому условию

$$u|_S = \varphi(x), \quad x \in S.$$

Вторая граничная задача теории упругости заключается в определении такого решения системы Ламе, которое бы обеспечило заданное на S распределение вектора напряжения $X^{(n)} = (X_{1n}, X_{2n}, X_{3n})$, т. е.

$$X_{in}|_S = \sigma_{ij} n_j|_S = \psi_i(x), \quad x \in S.$$

Третья граничная задача для системы Ламе заключается в задании на одной части поверхности вектора перемещения, а на ее дополнении до полной границы области вектора напряжения.

При постановке этих задач под Ω понимается либо конечная односвязная область Ω^+ (внутренняя граничная задача), либо ее дополнение — область $\Omega^- = R^3 \setminus \overline{\Omega}^+$ (внешняя граничная задача). Принимается, что $\partial\Omega = S$ — поверхность Ляпунова. Под регулярным решением $u = (u_1, u_2, u_3)$ системы Ламе понимаем решения $u_k \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, причем в области Ω^- имеют место оценки при $|x| \rightarrow \infty$

$$|u_k(x)| = O(|x|^{-1}), \quad |\partial_k u_j| = O(|x|^{-2}) \quad (k, j = 1, 2, 3). \quad (5.114)$$

Граничное условие по напряжениям с учетом закона Гука можно представить непосредственно через перемещения в векторном виде [25, 39]

$$(T_n u)(x) = 2\mu \frac{\partial u}{\partial n} + \lambda n \operatorname{div} u + \mu (n \times \operatorname{rot} u),$$

где T_n — так называемый оператор напряжений, а выражение $(T_n u)(x)$ определяется при помощи такого же предельного перехода на граничную поверхность S , как и правильная нормальная производная.

Оператор напряжения удобно представить в матричной форме [31]

$$T_n = F(\partial_x, n_x) = \|F_{ij}(\partial_x, n_x)\|,$$

где

$$F_{ij} = \lambda n_i \frac{\partial}{\partial x_j} + \mu n_j \frac{\partial}{\partial x_i} + \mu \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial n_x} \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Тогда вектор напряжения $X^{(n)}$ на границе тела представляется через перемещения в компактном виде

$$X^{(n)} = F(\partial_x, n_x) u.$$

Наряду с физическими компонентами тензора напряжений σ_{ij} вводят обобщенные напряжения σ_{ij}^* при помощи соотношений

$$\sigma_{jk}^* = \alpha \partial_j u_k + \mu \partial_k u_j \quad (j \neq k),$$

$$\sigma_{jj}^* = (\lambda + \mu - \alpha) \operatorname{div} u + (\alpha + \mu) \partial_j u_j,$$

где $\alpha > 0$ — произвольная постоянная. Очевидно, при $\alpha = \mu$ тензоры σ_{ij} и σ_{ij}^* совпадают.

Тензор обобщенных напряжений порождает оператор обобщенных напряжений, действующих в плоскости с нормалью n

$$(P_n u)(x) = F_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x}, n_x \right) u = (\alpha + \mu) \frac{\partial u}{\partial n} + (\lambda + \mu - \alpha) n \operatorname{div} u + \alpha (n \times \operatorname{rot} u).$$

Компоненты этого оператора определяются соотношениями

$$(F_\alpha)_{ij} = \mu \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial n} + (\lambda + \mu) n_i \frac{\partial}{\partial x_j} + \alpha (n_j \partial_i - n_i \partial_j),$$

где $n_j = \cos(n, x_j)$.

Если

$$\alpha = \frac{\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 3\mu} = \frac{\mu}{\kappa}, \quad \kappa = 3 - 4\nu,$$

то оператор P_n называется оператором псевдонапряжения и имеет специальное обозначение N_n .

Сформулируем теперь основные соотношения теории упругости в R^3 , обобщающие формулы Грина теории потенциала. Вывод всех этих соотношений можно найти в [1, 25, 26, 35, 39, 41].

Первая обобщенная формула Бетти. Пусть $u(x)$ — функция класса $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ и $v \in C^1(\bar{\Omega}^+)$, P_n — оператор обобщенных напряжений. Имеет место формула

$$\int_{\Omega^+} v \cdot \Delta^* u \, dx = \int_S v \cdot P_n u \, dS - \int_{\Omega^+} E(u, v) \, dx, \quad (5.115)$$

где симметричная билинейная форма $E(u, v)$ определяется равенством

$$\begin{aligned} E(u, v) = & (\lambda + 2\mu) \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \mu \sum_{i \neq k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \\ & + (\lambda + \mu - \alpha) \sum_{i \neq k} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \alpha \sum_{i \neq k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Приняв в формуле (5.115) $u = v$, получим вторую обобщенную формулу Бетти

$$\int_{\Omega^+} u \cdot \Delta^* u \, dx = \int_S u \cdot P_n u \, dS - \int_{\Omega^+} E(u, u) \, dx. \quad (5.116)$$

Наконец, меняя местами u и v и учитывая симметричность билинейной формы $E(u, v)$, придем к третьей обобщенной формуле Бетти

$$\int_{\Omega^+} (u \cdot \Delta^* v - v \cdot \Delta^* u) \, dx = \int_S (u \cdot P_n v - v \cdot P_n u) \, dS. \quad (5.117)$$

При $\alpha = \mu$ получаем классические формулы Бетти [39, 41].

Квадратичная форма $E(u, u)$, входящая в (5.116), положительно определенная

$$E(u, u) = 2\mu \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2 \right] + \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2 \right\} + \lambda (\operatorname{div} u)^2.$$

Отсюда вытекают теоремы единственности для основных задач. Пусть, например, u_0 — решение первой основной задачи в Ω^+ , соответствующее нулевым смещениям на S , т. е.

$$\Delta^* u_0 = 0, \quad u_0|_S = 0.$$

В этом случае первые два интеграла в (5.116) пропадают. Получаем

$$\int_{\Omega^+} E(u, u) \, dx = 0 \Rightarrow E(u, u) = 0 \Rightarrow u_k = \text{const} \quad (k = 1, 2, 3).$$

Но на границе $u_k = 0$. Отсюда следует, что $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ в $\bar{\Omega}^+$.

Аналогичные рассуждения проходят и для второй основной задачи с той лишь разницей, что если

$$\Delta^* u_0 = 0, \quad T_n u_0|_S = 0,$$

то перемещения $u_0 = (u_1, u_2, u_3)$, вообще говоря, в нуль не обращаются, а соответствуют смещению тела как жесткого целого

$$u_1 = a_1 + qx_3 - rx_2, \quad u_2 = a_2 + rx_1 - px_3, \quad u_3 = a_3 + px_2 - qx_1.$$

Напряжения в теле остаются равными нулю.

Интегральные представления. Потенциалы. В п. 4.25 главы 4 была построена матрица фундаментальных решений системы Ламе (матрица Кельвина–Сомильяны). Выпишем ее здесь

$$\Gamma_{mn}(x, y) = u_{mn} = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)|x-y|} \left\{ \kappa\delta_{mn} + \frac{(x_m - y_m)(x_n - y_n)}{|x-y|^3} \right\} \quad (m, n = 1, 2, 3),$$

где

$$\kappa = 3 - 4\nu = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}, \quad \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} = \frac{\lambda + \mu}{8\pi\mu(\lambda + 2\mu)}.$$

Элементы $\Gamma_{mn}(x, y)$ представляют собой перемещения в точке x в направлении оси x_m от действия единичной, сосредоточенной в точке y силы в направлении оси x_n . Элементы матрицы $\Gamma_{mn}(x, y)$ — есть обобщенные функции, удовлетворяющие системе

$$\mu\Delta_x\Gamma_{mn} + (\lambda + \mu)\frac{\partial}{\partial x_m}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\Gamma_{kn}\right) = -\delta_{mn}\delta(x-y) \quad (m, n = 1, 2, 3). \quad (5.118)$$

При действии в точке $y = (y_1, y_2, y_3)$ сосредоточенной силы $F(y) = (F_1, F_2, F_3)$ перемещения в точке $x = (x_1, x_2, x_3)$ определяются при помощи матрицы Кельвина–Сомильяны

$$\begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ u_3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_{11}, \Gamma_{12}, \Gamma_{13} \\ \Gamma_{21}, \Gamma_{22}, \Gamma_{23} \\ \Gamma_{31}, \Gamma_{32}, \Gamma_{33} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma^1, \Gamma^2, \Gamma^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}.$$

Или так:

$$u(x) = \Gamma(x, y)F(y).$$

Полагая в (5.117): $v = (\Gamma^1, \Gamma^2, \Gamma^3)$, $\Delta^*u = 0$ и учитывая (5.118), получаем интегральное представление регулярного решения системы Ламе

$$u(x) = u^+(x) = \int_S \Gamma(x, y) \left[\mathbf{F}_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial y}, n_y \right) u^+(y) \right] dS_y - \int_S \left[\mathbf{F}_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial y}, n_y \right) \Gamma(x, y) \right] u^+(y) dS_y, \quad x \in \Omega^+. \quad (5.119)$$

Здесь штрихом обозначена операция транспонирования матрицы, второй интеграл сингулярный и понимается в смысле главного значения. Аналогичным образом получается интегральное представление для регулярного решения системы Ламе в Ω^- .

$$u(x) = u^-(x) = - \int_S \Gamma(x, y) \left[\mathbf{F}_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial y}, n_y \right) u^-(y) \right] dS_y + \int_S \left[\mathbf{F}_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial y}, n_y \right) \Gamma(x, y) \right] u^-(y) dS_y, \quad x \in \Omega^-. \quad (5.120)$$

Решение системы Ламе не может, вообще говоря, удовлетворять одновременно граничным условиям по перемещениям и напряжениям, поэтому представления (5.119), (5.120) не дают решения ни одной из этих граничных задач. Эти представления используются в так называемом прямом варианте метода граничных интегральных уравнений [5, 25, 26, 28, 35].

Каждый из интегралов, входящих в (5.119), (5.120) представляет собой решение системы Ламе вне поверхности S . Выражение

$$(W^{(\alpha)}\chi)(x) = - \int_S \left[\mathbf{F}_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial y}, n_y \right) \Gamma(x, y) \right] \chi(y) dS_y, \quad x \in \Omega^\pm \quad (5.121)$$

называется обобщенным упругим потенциалом двойного слоя. Его векторная запись имеет вид [31]

$$\begin{aligned} (W^{(\alpha)}\chi)(x) &= \frac{\alpha(\lambda+3\mu)-\mu(\lambda+\mu)}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)} \int_S \frac{(\mathbf{r} \times \mathbf{n}_y) \times \boldsymbol{\chi}(y)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2} dS_y - \\ &- \frac{\alpha(\lambda+\mu)-\mu(\lambda+3\mu)}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)} \int_S \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}_y) \boldsymbol{\chi}(y)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^3} dS_y + \\ &+ \frac{3(\lambda+\mu)(\alpha+\mu)}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)} \int_S \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}_y)(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\chi})\mathbf{r}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^5} dS_y, \end{aligned}$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$, т. е. вектор с началом в точке x и концом в точке y , $\boldsymbol{\chi}(y) = (\chi_1(y), \chi_2(y), \chi_3(y)) \in C^{0,\beta}(S)$, $0 < \beta < \delta$, δ — постоянная в условиях Ляпунова (функции $\chi_k(y)$ удовлетворяют условию Гельдера с показателем β). Перечислим некоторые основные свойства потенциала двойного слоя $W^{(\alpha)}\chi$.

Существует прямое значение $(W_0^{(\alpha)}\chi)(x)$, $x \in S$ потенциала двойного слоя. При вычислении прямого значения по формуле (5.121) интеграл следует понимать в смысле главного значения [41] (см. также гл. 6 данного пособия). Сказанное относится ко всем значениям параметра α , кроме случая

$$\alpha = \frac{\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+3\mu}.$$

В этом случае $W_0^{(\alpha)}\chi$ представляет собой обычный несобственный интеграл, сходящийся при $\chi_k \in C(S)$, где S — поверхность Ляпунова.

Если χ_k ($k = 1, 2, 3$) — функции класса $C^{0,\beta}(S)$, то компоненты потенциала $W^{(\alpha)}\chi$ являются функциями класса $C^{0,\beta}(\overline{\Omega}^\pm)$ после доопределения потенциала на S его предельными значениями

$$(W^{(\alpha)}\chi)^\pm(x) = \pm \frac{1}{2} \chi(x) + (W_0^{(\alpha)}\chi)(x), \quad x \in S. \quad (5.122)$$

Потенциалом простого слоя с плотностью ρ называется вектор-функция

$$(V\rho)(x) = - \int_S \Gamma(x, y) \rho(y) dS_y, \quad (5.123)$$

где $\rho = (\rho_1, \rho_2, \rho_3)$ и ρ_k — функции класса $C(S)$, S — поверхность Ляпунова. В этих условиях потенциал $(V\rho)(x)$ непрерывен в R^3 (т. е. непрерывно продолжим через S).

Если $\rho_k \in C^{0,\beta}(S)$, $0 < \beta < \delta$ (δ — показатель Ляпунова поверхности S), то первые производные компонент потенциала (5.123) принадлежат классу $C^{0,\beta}(\overline{\Omega}^\pm)$, если доопределить их на S предельными значениями

$$\left[\frac{\partial(V\rho)_k}{\partial x_j} \right]^\pm = \mp \frac{1}{2} \left\{ \frac{\rho_k}{\mu} - \frac{\lambda + \mu}{\mu(\lambda + 2\mu)} n_k (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\rho}) \right\} n_j + \left[\frac{\partial(V\rho)_k}{\partial x_j} \right]_0,$$

где прямое значение $[\partial_j(V\rho)_k]_0$ понимается в смысле главного значения.

Отсюда следуют предельные соотношения

$$[\mathbf{F}_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x}, \mathbf{n}_x \right) (V\boldsymbol{\rho})]^\pm = \mp \frac{1}{2} \rho(x) + \left[\left(\frac{\partial}{\partial x}, \mathbf{n}_x \right) (V\boldsymbol{\rho}) \right]_0. \quad (5.124)$$

Таким образом, имеем аналогию с нормальной производной от гармонического потенциала простого слоя. Прямое значение является сингулярным интегральным оператором при всех α за исключением $\alpha = \mu(\lambda + \mu)(\lambda + 3\mu)^{-1}$. Операторы $W_0^{(\alpha)}$ и $[\mathbf{F}_\alpha V]_0$ являются сопряженными друг к другу.

Границочные интегральные уравнения основных задач. Решение первой основной задачи $u^\pm = \boldsymbol{\phi}^\pm$ на S (задачи I^\pm) будем разыскивать в виде обобщенного потенциала двойного слоя $W_0^{(\alpha)} \boldsymbol{\chi}$ с неизвестной плотностью $\boldsymbol{\chi}^\pm$. При этом потребуем, чтобы $\boldsymbol{\phi}_i(x) \in C^{0,\beta}(S)$, $0 < \beta < \delta$ ($i = 1, 2, 3$) и, кроме того, для внешней задачи (в Ω^-) выполнялись оценки (5.114) при $|x| \rightarrow \infty$. Подстановка предельных значений (5.122) в граничное условие дает

$$\pm \frac{1}{2} \boldsymbol{\chi}^\pm(x) + (W_0^{(\alpha)} \boldsymbol{\chi})(x) = \boldsymbol{\phi}^\pm(x), \quad x \in S, \quad (5.125)$$

где верхний знак соответствует задаче I^+ , нижний — задаче I^- .

Решение семейства обобщенных вторых граничных задач II^\pm

$$\mathbf{F}_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x}, \mathbf{n}_x \right) u^\pm = \boldsymbol{\psi}^\pm(x), \quad x \in S, \quad \boldsymbol{\psi}_i^\pm \in C^{0,\beta}(S), \quad 0 < \beta < \delta \quad (5.126)$$

разыскиваем в виде обобщенного потенциала простого слоя

$$u^\pm(x) = V\rho^\pm, \quad x \in \Omega^\pm.$$

Подстановка предельных значений (5.124) в граничное условие (5.126) приводит граничную задачу к интегральному уравнению, сопряженному с (5.125).

$$\mp \frac{1}{2} \boldsymbol{\rho}^\pm(x) + [\mathbf{F}_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x}, \mathbf{n}_x \right) V\rho^\pm(x)]_0 = \boldsymbol{\psi}^\pm(x), \quad x \in S. \quad (5.127)$$

При $\alpha = \mu$ уравнения (5.127) имеют физический смысл и соответствуют задаче теории упругости при заданном на границе S векторе напряжения. При $\alpha = \alpha^* = \mu(\lambda + \mu)(\lambda + 3\mu)^{-1}$ уравнения (5.125), (5.127) имеют слабую особенность, т. е. являются фредгольмовыми. При $\alpha \neq \alpha^*$ эти уравнения оказываются сингулярными. Однако, как показано в [26, 31],

индекс этих уравнений (разность между числом линейно-независимых собственных функций исходного уравнения и сопряженного к нему) равен нулю. Таким образом, интегральные операторы в (5.125), (5.127) — фредгольмовы и для них справедливы теоремы Фредгольма (см. также гл. 3, п. 3.13).

Напомним некоторые определения. Под $C^{k,\beta}(\bar{\Omega})$ понимают класс функций $\varphi(x)$, не-прерывных вместе со всеми своими производными до порядка k включительно в $\bar{\Omega}$, причем производные порядка k удовлетворяют условию Гельдера с показателем β . Например, запись $\varphi \in C^{0,\beta}$ означает, что φ удовлетворяет условию Гельдера с показателем β .

Говорят, что поверхность S есть поверхность класса $L_k(\delta)$, если ее уравнение $\xi_3 = \gamma(\xi_1, \xi_2)$ в локальной системе координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 (плоскость ξ_1, ξ_2 — касательная, а ось ξ_3 направлена по нормали) таково, что функция $\gamma(\xi_1, \xi_2)$ принадлежит классу $C^{k,\delta}$. В этих обозначениях принадлежность S классу поверхностей Ляпунова выглядит так: $S \in L_1(\delta)$.

Сформулируем теперь предложения о разрешимости интегральных уравнений основных задач теории упругости. Более подробно с соответствующими доказательствами см. в [25, 26, 35, 39].

1. Однородное уравнение $\chi^+ + 2W_0^{(\mu)} \chi^+ = 0$ и ему сопряженное имеют лишь тривиальные решения в пространстве $C^{0,\beta}(S)$. Следовательно, уравнения $\chi^+ + 2W_0^{(\mu)} \chi^+ = 2\phi^+$ и сопряженное к нему однозначно разрешимы. Это означает, что решение внешней второй и внутренней первой основных задач существуют и их можно получить в виде обобщенных потенциалов простого и двойного слоя соответственно. Относительно условий, накладываемых на S и $\varphi(x)$, см. [25, 41], а также замечание в конце этого пункта.

2. Однородное уравнение $\chi^- - 2W_0^{(\mu)} \chi^- = 0$, соответствующее задаче I^- , имеет шесть линейно-независимых решений

$$\chi_{0k}^- = e_k \quad (k = 1, 2, 3),$$

$$\chi_{0,4}^- = (0, x_3, -x_2), \quad \chi_{0,5}^- = (-x_3, 0, x_1), \quad \chi_{0,6}^- = (x_2, -x_1, 0),$$

где e_k — орт оси x_k .

Согласно теории Фредгольма, сопряженное однородное уравнение (соответствующее задаче II^+) имеет также шесть линейно-независимых решений $\rho_{0,k}^+$ ($k = 1, 2, \dots, 6$), с помощью которых можно видоизменить интегральное уравнение первой внешней основной задачи так, чтобы оно стало разрешимым для любой правой части подобно тому, как это было сделано в теории гармонического потенциала (см. п. 5.8).

Будем разыскивать решение первой внешней основной задачи в Ω^- в виде

$$u^-(x) = W^{(a)} \chi^- + \sum_{k=1}^6 c_k V_0 \rho_{0,k}^+. \quad (5.128)$$

При этом получим интегральное уравнение

$$\chi^- - 2W_0^{(\mu)} \chi^- = -2\left(\phi^- + \sum_{k=1}^6 c_k V_0 \rho_{0,k}^+\right), \quad (5.129)$$

где постоянные c_k определяются однозначно из условий ортогональности

$$\sum_{k=1}^6 c_k \int_S \boldsymbol{\rho}_{0i}^+ \cdot V_0 \boldsymbol{\rho}_{0k}^+ dS = - \int_S \boldsymbol{\varphi}^- \cdot \boldsymbol{\rho}_{0i}^+ dS \quad (i = 1, 2, \dots, 6). \quad (5.130)$$

Таким образом, приходим к следующему утверждению. Если c_k ($k = 1, 2, \dots, 6$) — решения однозначно разрешимой системы (5.130), то для любой функции $\varphi^-(x)$ класса $C^{0,\beta}(S)$ уравнение (5.129) разрешимо. Решение $\boldsymbol{\chi}^-$ определено с точностью до произвольной линейной комбинации функций $\chi_{01}^-, \chi_{02}^-, \dots, \chi_{06}^-$.

При условии, что $S \in L_2(\delta)$ и $\varphi^- \in C^{1,\beta}(S)$, $0 < \beta < \delta$ первая основная внешняя задача имеет регулярное решение, которое представляется в виде (5.128).

3. Необходимым и достаточным условием разрешимости уравнения

$$\rho^+(x) - 2 \left[F_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x}, n_x \right) V \rho^+(x) \right]_0 = -2\psi^+(x),$$

соответствующего второй внутренней основной задаче, является равенство нулю главного вектора и главного момента внешних усилий. Решение представляется обобщенным потенциалом простого слоя и определено с точностью до аддитивного вектора жесткого смещения.

Спектральные свойства операторов $2W_0^{(\mu)}$ и $2[F_\mu(\partial/\partial x, n_x)V]$ аналогичны спектральным свойствам соответствующих операторов теории гармонического потенциала. Имеет место предложение.

Все характеристические значения операторов $2W_0^{(\mu)}$ и его сопряженного вещественны и их абсолютные величины не меньше единицы. Значение $\lambda = -1$ — не характеристическое для операторов $2W_0^{(\mu)}$ и его сопряженного, а $\lambda = 1$ — характеристическое и ему соответствуют шесть линейно-независимых собственных функций.

Замечание. При постановке граничных задач теории упругости требовалось, чтобы решение было регулярным, т. е. чтобы $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$. Однако если требовать, чтобы граничная поверхность S принадлежала классу поверхностей Ляпунова, а граничные функции принадлежали классу функций непрерывных по Гельдеру, то решения полученных выше интегральных уравнений будут принадлежать классу L^2 . Таким образом, при сформулированных требованиях на поверхность S и граничные данные φ^\pm, ψ^\pm , потенциалы (5.121) и (5.123), построенные на решениях соответствующих интегральных уравнений, дают обобщенные решения основных пространственных задач теории упругости.

Сформулируем теперь условия, при которых решение интегральных уравнений приведет к построению регулярных смещений (т. е. обеспечит решение задачи в классической постановке) [25, 41]. Имеют место утверждения.

1. Если $S \in L_{n+1}(\delta)$, $\varphi \in C^{n,\beta}(S)$, $0 < \beta < \delta$, то потенциал двойного слоя $W\chi \in C^{n,\beta}(\bar{\Omega})$.
2. Если $S \in L_{n+1}(\delta)$, $\varphi \in C^{n,\beta}(S)$, $0 < \beta < \delta$, то потенциал простого слоя $V\rho \in C^{n+1,\beta}(\bar{\Omega})$.

Отсюда следует, что если $S \in L_2(\delta)$, а граничные функции $\varphi^\pm, \psi^\pm \in C^{1,\beta}$ ($0 < \beta < \delta$), то решение интегральных уравнений приводит к классическим решениям граничных задач.

5.11. Некоторые типы нелинейных интегральных уравнений

Наиболее часто встречается нелинейное уравнение Гаммерштейна

$$u(x) + \int_{\Omega} K(x, y) f(y, u(y)) dy = 0,$$

где $K(x, y)$ — фредгольмовское ядро, $x \in \Omega$, $\Omega \subset R^n$.

Более общим является уравнение Урысона

$$u(x) + \int_{\Omega} K(x, y, u(y)) dy = 0,$$

где функция $K(x, y, u)$ непрерывна при $x \in \bar{\Omega}$, $y \in \bar{\Omega}$ и $|u| \leq \rho$, $\rho > 0$ — достаточно большое число. Рассматриваются также нелинейные операторные уравнения Ляпунова–Лихтенштейна [30] и некоторые другие [16].

Пример. Рассмотрим граничную задачу для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$\begin{aligned} -u''(x) + \omega u(x) &= f[x, u(x)], \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0) &= u(1) = 0, \end{aligned}$$

где $f : [0, 1] \times C \rightarrow C$ непрерывна, а от решения требуется принадлежность к $C^2([0, 1])$.

Если $\omega > -\pi^2$, то эту задачу можно свести к интегральному уравнению типа Гаммерштейна

$$u(x) = \int_0^1 K(x, y) f[y, u(y)] dy,$$

где $K(x, y)$ — функция Грина, которую можно найти в явном виде. Например, при $\omega = 0$ имеем так называемое треугольное ядро

$$K(x, y) = \begin{cases} y(1-x), & 0 \leq y \leq x \leq 1, \\ x(1-y), & 0 \leq x \leq y \leq 1. \end{cases}$$

Остановимся более подробно на нелинейных уравнениях типа Гаммерштейна [17, 21, 47, 50, 58]. Заметим сразу, что если $f(y, 0) = 0$, то уравнение имеет тривиальное решение $u(x) = 0$. Поэтому будем считать, что $f(y, 0) \neq 0$. Одним из эффективных методов решения и исследования уравнения типа Гаммерштейна является метод последовательных приближений.

Рассмотрим уравнение ($\Omega = (0, 1) \subset R^1$)

$$u(x) + \int_0^1 K(x, y) f(y, u(y)) dy = 0, \quad x \in (0, 1). \quad (5.131)$$

Применим для его решения метод последовательных приближений

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x) &= - \int_0^1 K(x, y) f(y, u_n(y)) dy \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \\ u_0(x) &= 0. \end{aligned} \quad (5.132)$$

Имеет место теорема [50]. Пусть

1) ядро $K(x, y) \in L^2[0, 1]$ или по крайней мере функция

$$A^2(x) = \int_0^1 K^2(x, y) dy$$

существует почти всюду на $(0, 1)$ и интегрируема на этом интервале;

2) функция $f(y, u)$ равномерно удовлетворяет условию Липшица вида

$$|f(y, u_1) - f(y, u_2)| < C(y)|u_1 - u_2|$$

при $u=0, f(y, 0) \in L^2[0, 1]$;

$$3) \int_0^1 A^2(x) C^2(x) dx = M^2 < 1.$$

Тогда последовательность приближений

$$u_0(x), u_1(x), u_2(x), \dots$$

сходится почти всюду к решению уравнения (5.131), причем эта сходимость почти равномерна (в том смысле, что после исключения множества нулевой меры, на котором эти функции не ограничены, сходимость становится равномерной).

В самом деле, из (5.132) и условия 2 имеем оценку

$$\begin{aligned} |u_{n+1}(x) - u_n(x)| &\leq \int_0^1 |K(x, y)| |f[y, u_n(y)] - f[y, u_{n-1}(y)]| dy < \\ &< \int_0^1 |K(x, y)| |C(y)| |u_n(y) - u_{n-1}(y)| dy. \end{aligned}$$

Отсюда, применяя неравенство Буняковского–Шварца, получаем с учетом условия 1

$$\begin{aligned} |u_{n+1}(x) - u_n(x)|^2 &\leq \int_0^1 K^2(x, y) dy \int_0^1 C^2(y) [u_n(y) - u_{n-1}(y)]^2 dy = \\ &= A^2(x) \int_0^1 C^2(y) [u_n(y) - u_{n-1}(y)]^2 dy \quad (n=1, 2, \dots). \end{aligned}$$

А при $n=0$

$$u_1^2(x) \leq A^2(x) \int_0^1 f^2(y, 0) dy = A^2(x) c^2, \quad c = \|f(y, 0)\|.$$

Теперь получаем последовательно

$$|u_2(x) - u_1(x)|^2 < A^2(x) \int_0^1 C^2(y) u_1^2(y) dy < A^2(x) c^2 \int_0^1 C^2(y) A^2(y) dy = c^2 A^2(x) M^2,$$

$$|u_3(x) - u_2(x)|^2 < A^2(x) \int_0^1 C^2(y) [u_2(y) - u_1(y)] dy < c^2 A^2(x) M^4,$$

и вообще

$$|u_{n+1}(x) - u_n(x)|^2 < c^2 A^2 M^{2n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Следовательно, ряд

$$u_1(x) + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + \dots$$

мажорируется рядом

$$cA(x)(1 + M + M^2 + \dots),$$

который сходится при $M < 1$.

Итак, при выполнении указанных выше трех условий последовательность $\{u_n(x)\}$ сходится (почти равномерно). Переходя в (5.132) к пределу при $n \rightarrow \infty$ убеждаемся, что $\lim u_n(x)$ является решением уравнения (5.131). Если условия теоремы не выполнены, то итерационный процесс может не дать решения.

Приведем пример нелинейного интегрального уравнения, которое вообще не имеет решений. Пусть

$$K(x, y) = \alpha(x)\alpha(y),$$

так что из (5.131) получаем

$$u(x) = \xi\alpha(x), \quad \xi = \text{const.}$$

Подстановка этой функции в исходное уравнение приводит к равносильному уравнению относительно константы ξ

$$\xi + \int_0^1 \alpha(y) f[y, \xi\alpha(y)] dy = 0.$$

Если, например,

$$f(y, u) = \frac{1+u^2}{2},$$

то получаем квадратное уравнение относительно ξ

$$\xi^2 \int_0^1 \alpha^3(y) dy + 2\xi + \int_0^1 \alpha(y) dy = 0,$$

дискриминант которого

$$\Delta = 1 - \int_0^1 \alpha^3(y) dy \int_0^1 \alpha(y) dy \leq 1 - \left(\int_0^1 \alpha^2(y) dy \right)^2 < 0$$

при

$$\int_0^1 \alpha^2(y) dy > 1. \tag{5.133}$$

Значит, наше уравнение не имеет действительных решений. Это случилось из-за того, что не выполняется условие 2 теоремы (ему противоречит неравенство (5.133)).

С другой стороны, если $\alpha(y) > 0$ и

$$f(y, u) = u \sin \frac{u}{\alpha(y)},$$

то уравнение (5.131) приобретает вид

$$1 + \sin \xi \int_0^1 \alpha^2(y) dy = 0.$$

Очевидно, при выполнении условия (5.133) оно имеет бесконечное число вещественных решений.

Рассмотрим теперь два интегральных уравнения.

Линейное однородное

$$u(x) = \lambda \int_0^1 x^2 y u(y) dy$$

и нелинейное типа Гаммерштейна с тем же ядром

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 x^2 y \varphi^2(y) dy.$$

Первое уравнение имеет характеристическое значение $\lambda = 4$ и соответствующее ему нетривиальное решение $u = x^2 C$. Для решения второго уравнения обозначим

$$C_1 = \int_0^1 y \varphi^2(y) dy.$$

Тогда получим структурную формулу

$$\varphi(x) = \lambda x^2 C_1.$$

Отсюда $C_1(6 - C_1 \lambda^2) = 0$. При $C_1 = 0$ и любом λ получаем $\varphi(x) = 0$. Если же $C_1 = 6/\lambda^2$ ($\lambda \neq 0$), то получаем $\varphi(x) = 6x^2/\lambda$. Следовательно, спектр этого уравнения непрерывный и заполняет всю ось $\operatorname{Im} \lambda = 0$ с выколотой точкой $\lambda = 0$.

Рассмотрим, наконец, неоднородное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 \varphi^2(y) dy + 1.$$

Полагая

$$C = \int_0^1 \varphi^2(y) dy,$$

получаем структурную формулу

$$\varphi(x) = \lambda C + 1.$$

Отсюда приходим к квадратному уравнению относительно C

$$\lambda^2 C^2 + (2\lambda - 1)C + 1 = 0.$$

Имеем

$$C = \frac{1 - 2\lambda \pm \sqrt{1 - 4\lambda}}{2\lambda^2}, \quad \varphi(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\lambda}}{2\lambda}.$$

Таким образом, при $\lambda > \frac{1}{4}$ действительных решений нет. При $\lambda = \frac{1}{4}$ имеем одно решение

$\varphi(x) = 2$. При $\lambda < \frac{1}{4}$ имеем два решения

$$\varphi_1(x) = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\lambda}}{2\lambda}, \quad \varphi_2(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\lambda}}{2\lambda}.$$

Здесь мы встречаемся с таким явлением, присущим нелинейным уравнениям, как бифуркация решений. Значения λ , при переходе через которые количество решений уравнения меняется, оставаясь конечным, называются точками бифуркации.

Имеют место следующие теоремы существования [50, 55]. Пусть ядро $K(x, y)$, фигурирующее в уравнении (5.131), удовлетворяет условиям:

1. $K \in L^2[0, 1]$ или по крайней мере второе итерированное ядро $K_2(x, y)$ непрерывно в квадрате $[0, 1] \times [0, 1]$.

2. Ядро K симметрично, т. е. $K(x, y) = K(y, x)$.

3. Ядро K положительно, т. е. все его характеристические числа положительны.

И, кроме этого, непрерывная функция $f(y, u)$ удовлетворяет условию вида

$$|f(y, u)| \leq C_1 |u| + C_2, \quad (5.134)$$

где C_1 и C_2 — положительные постоянные, причем $C_1 < \lambda_1$, т. е. меньше первого характеристического числа положительного ядра $K(x, y)$. Тогда нелинейное интегральное уравнение (5.131) имеет по крайней мере одно непрерывное решение.

Условие (5.134) можно ослабить или изменить многими способами. В табл. 5.1 приведены соответствующие варианты, в которых можно гарантировать существование по крайней мере одного (непрерывного) решения уравнения (5.131).

Таблица 5.1

Различные случаи существования решений уравнения Гаммерштейна [50]

Случай	Предположение относительно $K(x, y)$ (в дополнение к основным предположениям (1), (2), (3))	Предположение относительно $f(y, u)$ (в дополнение к непрерывности). Кроме того, предположение, что $0 < C_1 < \lambda_1$		Примеры функций $f(y, u)$
		если $u \leq 0$	если $u \geq 0$	
а	—	$f(y, u)$ ограничена или удовлетворяет условию (5.134)		$\sin u$
б	непрерывность	$F(y, u) = \int_0^u f(y, v) dv$ ограничена снизу или $F(y, u) \geq -\frac{1}{2}ku^2 - C, k = \text{const} < \lambda_1, C > 0$		e^u

Продолжение таблицы

v	$K \geq 0$	$0 \leq f \leq C_1 u + C_2$	$f \geq 0$	$1 + e^u \sin^2 y$
Γ		$f \leq 0$	$-(C_1 u + C_2) \leq f \leq 0$	$-\left(1 + \frac{\sin^2 y}{e^u}\right)$
Δ		$-C_3 \leq f \leq C_1 u + C_2$	$f \geq -C_3$	$p(y)e^u + q(y)$ $p \geq 0; p, q —$ непрерывны
ϵ		$f \leq C_3$	$-(C_1 u + C_2) \leq f \leq C_3$	$\frac{p(y)}{e^u} + q(y)$ $p \geq 0; p, q —$ непрерывны

В нашем распоряжении имеются также теоремы единственности решений для уравнений типа Гаммерштейна [50]. Сформулируем их.

Теорема единственности I. Если для любого фиксированного y из $(0,1)$ функция $f(y, u)$ является неубывающей функцией u , то нелинейное интегральное уравнение (5.131) имеет, самое большое, одно решение.

Теорема единственности II. Нелинейное интегральное уравнение (5.131) имеет, самое большое, одно решение, если

$$|g(y, u)| = |f[y, u + \Psi(y)] - f[y, \Psi(y)]| \leq \alpha|u| \quad (0 < \alpha < \lambda_1),$$

где

$$\Psi(x) + \int_0^1 K(x, y) g(y, \Psi(y)) dy = 0.$$

Теорема единственности III. Интегральное уравнение (5.131) имеет, самое большое, одно решение, если функция $f(y, u)$ равномерно удовлетворяет условию Липшица

$$|f(y, u_1) - f(y, u_2)| < \alpha|u_1 - u_2| \quad (0 < \alpha < \lambda_1).$$

Более общие нелинейные уравнения типа Урысона имеют вид

$$u(x) = \lambda \int_{\Omega} K[x, y, u(y)] dy + f(x), \quad x \in \Omega, \quad (5.135)$$

где Ω — ограниченное замкнутое множество в R^n ; $K[x, y, u]$, $f(x)$ — заданные функции, λ — параметр, $u(x)$ — искомая функция.

Уравнение (5.135) рассматривают как операторное уравнение

$$u = \lambda A u + f, \quad (5.136)$$

где

$$A u(x) = \int_{\Omega} K[x, y, u(y)] dy,$$

$A : E \rightarrow E$, $f \in E$ и E — некоторое банахово пространство измеримых на Ω функций.

Решения уравнения (5.136) — это неподвижные точки оператора

$$A_u = \lambda A u + f. \quad (5.137)$$

Поэтому основным методом доказательства существования решений (и их приближенного вычисления) у уравнения (5.137) и, значит, у уравнения (5.135) является применение принципов неподвижных точек. Наиболее часто применяются принцип Банаха сжатых отображений и принцип Шаудера (см. [17, 49, 58, 62], а также приложение А к гл. 3).

Напомним здесь некоторые определения. Говорят, что оператор A , действующий в банаховом пространстве X , удовлетворяет на множестве $M \subset X$ условию Липшица с постоянной α , если

$$\|Au - Av\| \leq \alpha \|u - v\|, \quad \forall u, v \in M.$$

Если при этом $\alpha < 1$, то оператор A называется оператором сжатия, α — коэффициентом сжатия. Если A — линейный непрерывный оператор, то $\alpha = \|A\|$.

Принцип сжатых отображений звучит так. Если оператор сжатия A преобразует в себя замкнутое множество $M \subset X$ ($AM \subset M$), то он имеет в M единственную неподвижную точку u^* . Эта неподвижная точка может быть получена как предел последовательных приближений

$$u_n = Au_{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

где $u_0 \in M$ — произвольный элемент. Быстрота сходимости последовательности $\{u_n\}$ к точному решению характеризуется неравенством

$$\|u_n - u^*\| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \|u_1 - u_0\| \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Доказательство принципа (теоремы С. Банаха) можно найти, например, в [50, 56, 58] (см. также приложение А к гл. 3).

С использованием принципа сжатых отображений можно получить следующие признаки существования и единственности решений нелинейного интегрального уравнения типа Урысона [47, 54, 58, 60, 63].

1. Пусть функция $K(x, y, u)$ непрерывна по совокупности переменных $x, y \in \Omega$, $|u| \leq \rho$ и пусть

$$\left| \frac{\partial K(x, y, u)}{\partial u} \right| \leq C \quad (x, y \in \Omega, |u| \leq \rho).$$

Тогда уравнение

$$u(x) = \lambda \int_{\Omega} K(x, y, u(y)) dy \quad (5.138)$$

имеет единственное непрерывное решение $u^*(x)$ в Ω , удовлетворяющее неравенству $|u(x)| \leq \rho$, если

$$|\lambda| C \operatorname{mes} \Omega < 1,$$

$$|\lambda| \max_{x \in \Omega} \int_{\Omega} \max_{|u| \leq \rho} |K(x, y, u)| dy \leq \rho.$$

Если $u_0(x)$ — произвольная непрерывная функция, удовлетворяющая неравенству $|u_0(x)| \leq \rho(x)$ в Ω , то последовательные приближения

$$u_n(x) = \lambda \int_{\Omega} K(x, y, u_{n-1}(y)) dy \quad (n=1, 2, \dots)$$

равномерно на Ω сходятся к $u^*(x)$.

2. Пусть оператор

$$Au(x) = \int_{\Omega} K(x, y, u(y)) dy$$

действует в пространстве $L^p(\Omega)$, $p > 1$. Пусть далее для всех u_1, u_2 и $x, y \in \Omega$ выполняется неравенство

$$|K(x, y, u_1) - K(x, y, u_2)| \leq K_1(x, y)|u_1 - u_2|,$$

где $K_1(x, y)$ измерима и

$$\Lambda^p = \left(\int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} K_1^{p_1}(x, y) dy \right)^{\frac{p}{p_1}} dx \right)^{\frac{p}{p_1}} < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p_1} = 1.$$

Тогда при $|\lambda| < \frac{1}{\Lambda}$ и при $f \in L^p$ уравнение (5.135) имеет в L^p единственное решение.

В некоторых случаях полезным оказывается следующее обобщение принципа сжимающих отображений.

Теорема Каччополи. Пусть X — банахово пространство, $u_0 \in X$ — заданный элемент и $B = B[u_0, r]$ — закрытый шар в X . Пусть далее нелинейный оператор $A: X \rightarrow X$.

Положим

$$q_0 = 1, \quad q_n = \sup_{\substack{u, v \in B \\ u \neq v}} \frac{\|A^n u - A^n v\|}{\|u - v\|}, \quad n \geq 1.$$

Предположим, что ряд $\sum_0^\infty q_n$ сходится, и пусть ρ — его сумма. Тогда если $r \geq \rho \|Au_0 - u_0\|$, то A имеет в B единственную неподвижную точку u^* и $u^* = \lim u_n$, где $u_n = Au_{n-1}$ при $n \geq 1$. Кроме того,

$$\|u_n - u^*\| \leq \left(\rho - \sum_0^{n-1} q_k \right) \|Au_0 - u_0\|. \quad (5.139)$$

В самом деле,

$$\|u_{n+1} - u_n\| = \|A^n u_1 - A^n u_0\| \leq q_n \|u_1 - u_0\| = q_n \|Au_0 - u_0\|.$$

Прямое вычисление с использованием этой оценки дает при $m < n$

$$\begin{aligned} \|u_n - u_m\| &\leq \|u_n - u_{n-1}\| + \|u_{n-1} - u_{n-2}\| + \dots + \|u_{n-m+1} - u_m\| \leq \\ &\leq q_{n-1} \|u_1 - u_0\| + q_{n-2} \|u_1 - u_0\| + \dots + q_m \|u_1 - u_0\| = \|u_1 - u_0\| \sum_{m}^{n-1} q_k. \end{aligned} \quad (5.140)$$

Поскольку ряд $\sum_0^{\infty} q_k$ сходится, то $\{u_n\}$ — фундаментальна и в силу полноты банахова пространства X она сходится к некоторому пределу u^* . Полагая $m=0$, получаем из (5.140)

$$\|u_n - u_0\| \leq \|u_1 - u_0\| \sum_0^{n-1} q_k \leq \|u_1 - u_0\| \sum_0^{\infty} q_k = \|u_1 - u_0\| \rho \leq r.$$

Следовательно, $\{u_n\} \subset B[u_0, r]$, и так как B — замкнутое множество, то предел $u^* \in B$. В силу непрерывности оператора A имеем цепочку соотношений

$$u_n = Au_{n-1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Au_{n-1} = A \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n-1} \Rightarrow u^* = Au^*,$$

т. е. u^* — неподвижная точка.

Оценка сходимости получается из (5.140) при $n \rightarrow \infty$. Имеем

$$\|u^* - u_m\| \leq \|u_1 - u_0\| \sum_m^{\infty} q_k = \|u_1 - u_0\| \left(\rho - \sum_0^{m-1} q_k \right).$$

Для доказательства единственности неподвижной точки предположим, что их две: u^* и v^* , так что

$$Au^* = u^*, \quad Av^* = v^*.$$

Имеем

$$\|u^* - v^*\| = \|A^n u^* - A^n v^*\| \leq q_n \|u^* - v^*\| \quad (n=1,2,\dots).$$

И так как $q_n > 0$ при любом натуральном $n=1,2,\dots$, выводим отсюда, что $u^* = v^*$.

Приведенные выше признаки существования решений относятся к уравнениям типа Урысона с операторами, удовлетворяющими условию Липшица.

Для доказательства существования решений уравнений с вполне непрерывными операторами используется принцип Шаудера. Напомним соответствующие определения.

Пусть Ω — подмножество банахового пространства X . Нелинейный оператор $A: \Omega \rightarrow X$ называется вполне непрерывным (компактным), если он непрерывен и переводит каждое ограниченное подмножество множества Ω в компактное множество.

Теорема Шаудера о неподвижной точке предшествует теорема Брауэра [58]. Пусть D — ограниченное замкнутое выпуклое подмножество конечномерного нормированного линейного пространства, например единичный шар $B = \{x \in R^n : \|x\| \leq 1\}$. Если A — непрерывное отображение D в себя, то A имеет неподвижную точку в D .

Пример. Пусть $f(x)$ — непрерывная на $[0,1]$ функция, отображающая $[0,1]$ в себя, т. е. $0 \leq f(x) \leq 1$. Покажем, что уравнение $f(x) = x$ имеет решение на $[0,1]$. Иными словами, отображение f имеет на $[0,1]$ неподвижную точку $x_0 : f(x_0) = x_0$. Для этого рассмотрим на $[0,1]$ функцию $\varphi(x) = x - f(x)$. Имеем $\varphi(0) = -f(0) \leq 0$. Если $f(0) = 0$ или $f(1) = 1$, то неподвижной точкой будет соответственно точка $x_0 = 0$ или $x_0 = 1$. Если же $f(0) > 0$ и $f(1) < 1$, то $\varphi(0) < 0$, а $\varphi(1) > 0$, т. е. существует точка $0 < x_0 < 1$, в которой

$\varphi(x_0) = 0$. Таким образом, на $[0,1]$ существует по крайней мере одна неподвижная точка отображения f .

Принцип неподвижной точки Шаудера. Пусть оператор A отображает замкнутое ограниченное выпуклое множество Ω банахового пространства X в себя. Тогда если A — вполне непрерывен на Ω , то он имеет на Ω неподвижную точку.

Из принципа Шаудера вытекают следующие признаки существования решений уравнения (5.135).

1. Пусть функция $K(x, y, u)$ ($x, y \in \Omega, |u| < \infty$) непрерывна по u и удовлетворяет неравенству

$$|K(x, y, u)| \leq K_1(x, y)(a + b|u|^\alpha),$$

где $a, b, \alpha > 0$ и

$$\int \int_{\Omega \times \Omega} K_1(x, y)^{\alpha+1} dx dy < \infty.$$

Тогда уравнение (5.135) имеет при всех достаточно малых $|\lambda|$ и $f(x) \in L^{\alpha+1}$ по крайней мере одно решение $u_\lambda^*(x) \in L^{\alpha+1}$. Если $\alpha < 1$, то решения существуют при всех λ .

2. Пусть функция $K(x, y, u)$ непрерывна по совокупности переменных $x, y \in \Omega, |u| \leq a$. Тогда при

$$|\lambda| \leq \frac{a}{\operatorname{mes} \Omega \cdot \max_{\substack{x, y \in \Omega \\ |u| \leq a}} |K(x, y, u)|}$$

интегральное уравнение (5.138) имеет по крайней мере одно непрерывное решение $u_\lambda^*(x)$, удовлетворяющее неравенству $|u_\lambda^*(x)| \leq a$.

3. Пусть функция $K(x, y, u)$ непрерывна по совокупности переменных $x, y \in \Omega, |u| < \infty$. Положим

$$\Lambda = \sup_{0 < r < \infty} \frac{r}{\varphi(r) \operatorname{mes} \Omega},$$

где

$$\varphi(r) = \max_{\substack{x, y \in \Omega \\ u \leq r}} |K(x, y, u)|.$$

Тогда при $|\lambda| < \Lambda$ интегральное уравнение (5.138) имеет по крайней мере одно непрерывное решение $u_\lambda^*(x)$. В частности, если

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\varphi(r)}{r} = 0,$$

то интегральное уравнение (5.138) разрешимо при любом λ . В этом случае разрешимо при любом λ и уравнение (5.135) при любой непрерывной $f(x)$.

5.12. Метод Ньютона для нелинейных операторов

Метод Ньютона является надежным средством решения нелинейных дифференциальных и интегральных уравнений. В одномерном варианте решение уравнения

$$F(x) = 0$$

путем последовательных линеаризаций сводится к последовательности $\{x_n\}$, где

$$x_{n+1} = x_n - [F'(x_n)]^{-1} F(x_n). \quad (5.141)$$

Обобщение метода на высшие размерности подсказываетя этой формулой, нужно только под $F'(x_n)$ понимать производную Фреше, а под $[F'(x_n)]^{-1}$ — обратный оператор.

Напомним теперь соответствующие определения [16, 17, 21, 46, 47, 55, 58, 61]. Рассмотрим нелинейный оператор $F(x)$ с областью определения $D(F)$ в банаховом пространстве X и со значениями в банаховом пространстве Y , и пусть $x_0 \in D(F)$.

Оператор $F(x)$ называется дифференцируемым в точке x_0 в смысле Фреше, если существует линейный ограниченный оператор $A (A \in \mathcal{L}(X, Y))$, такой что

$$F(x) - F(x_0) = A(x - x_0) + \omega(x - x_0), \quad (5.142)$$

причем $\|\omega(x - x_0)\| = o(\|x - x_0\|)$ при $x \rightarrow x_0$. Предполагается, что $x \in S \subset D(F)$, где S — окрестность точки x_0 .

Оператор A , фигурирующий в (5.142), называется производной Фреше (сильной производной) оператора F в точке x_0 и обозначается $F'(x_0)$ или $\frac{dF(x_0)}{dx}$. Формулу (5.142) можно записать в виде (оператор $F'(x_0)$ действует на элемент $h \in D(F)$)

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = F'(x_0)h + \omega(h),$$

где $\|\omega(h)\| = o(\|h\|)$ при $h \rightarrow 0$.

Если оператор $F(x)$ дифференцируем в точке x_0 , то выражение

$$dF(x_0; h) = F'(x_0)h$$

называется дифференциалом Фреше (сильным дифференциалом) оператора F в точке x_0 при приращении h .

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Если $F(x) = Ax$, где $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, то $F'(x) = A, \forall x \in X$. Действительно,

$$F(x+h) - F(x) = A(x+h) - Ax = Ah \Rightarrow F'(x) = A.$$

Пример 2. Пусть $F : R^k \rightarrow R^m$, тогда равенство $y = F(x)$ равносильно системе

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_k),$$

$$y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_k),$$

.....

$$y_m = f_m(x_1, x_2, \dots, x_k).$$

Если оператор F определен в окрестности точки $x_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{k0})$, то функции f_i также определены в окрестности этой точки.

Пусть оператор F дифференцируем в окрестности точки x_0 . Тогда

$$\begin{aligned} f_i(x_0 + h) - f_i(x_0) &= f_i(x_{10} + h_1, x_{20} + h_2, \dots, x_{k0} + h_k) - f_i(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{k0}) = \\ &= \sum_{j=1}^k a_{ij} h_j + \omega_i(h_1, h_2, \dots, h_k), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \|\omega\| &= o(\|h\|), \quad \|\omega\|^2 = \sum_{i=1}^m \omega_i^2, \quad \|h\|^2 = \sum_{j=1}^k h_j^2, \\ A = \left\| a_{ij} \right\| &= \left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right\| (x_0) \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, k). \end{aligned}$$

Матрица A (функциональный определитель, якобиан) и есть линейный оператор A , равный производной Фреше оператора F в точке x_0 , т. е. $A = F'(x_0)$. Из дифференцируемости оператора F в точке $x_0 \in R^k$ следует существование в этой точке частных производных и равенства $a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$.

Пример 3. Пусть оператор $\varphi: R^2 \rightarrow R^1$ задан формулой

$$\varphi(y) = y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2, \quad y = (y_1, y_2).$$

Тогда

$$\varphi(y + h) - \varphi(y) = \varphi(y_1 + h_1, y_2 + h_2) - \varphi(y_1, y_2) = (2y_1 + y_2)h_1 + (y_1 + 2y_2)h_2 + r,$$

где

$$\|r\| = h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2 = o(\|h\|) \text{ при } h \rightarrow 0.$$

Таким образом, производная Фреше в точке y задается здесь матрицей-строкой

$$A = [2y_1 + y_2, 2y_2 + y_1] = \varphi'(y).$$

Пример 4. Рассмотрим теперь оператор Урысона

$$(Fu)(x) = \int_0^1 K[x, y, u(y)] dy.$$

Предположим, что функция $K(x, y, u)$ — непрерывна по совокупности переменных x и y в квадрате $[0, 1] \times [0, 1]$ и непрерывно дифференцируема по переменной u . Вычислим производную Фреше $F'(u_0)$, $\forall u_0 \in C[0, 1]$. Имеем

$$K(x, y, u_0 + h) - K(x, y, u_0) = \frac{\partial}{\partial u} K(x, y, u_0) h(y) + \omega(x, y, h).$$

Соответственно,

$$F(u_0 + h) - F(u_0) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial u} K(x, y, u_0) h(y) dy + o(\|h\|).$$

Значит производная Фреше $F'(u)$ в точке $u_0 \in C[0,1]$ — есть линейный ограниченный оператор, определенный формулой (детальный вывод этой формулы можно посмотреть, например, в [21])

$$[F'(u_0)h](x) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial u} K(x, y, u_0) h(y) dy.$$

Пример 5. Дифференциальный оператор $A : C^1[0,1] \rightarrow C^1[0,1]$, определенный формулой

$$(Au)(x) = u'(x) + u^2(x),$$

имеет в каждой точке $u \in C[0,1]$ дифференциал Фреше

$$[A'(u)h](x) = h'(x) + 2hu(x).$$

В отличие от случая пространства $C[0,1]$ дифференцируемость оператора Урысона в пространстве $L^p[0,1]$ не вытекает из непрерывной дифференцируемости по переменной u функции $K(x, y, u)$. Приведем одно из достаточных условий дифференцируемости по Фреше оператора Урысона [21].

Пусть оператор Урысона действует в пространстве $L^2[0,1]$. Достаточным условием его (сильной) дифференцируемости по Фреше в любой точке $u_0(x) \in L^2[0,1]$ является непрерывность по u производной $K'_u(x, y, u)$ и выполнение неравенства

$$|K'_u(x, y, u)| \leq \alpha + \beta|u|$$

при $0 \leq x, y \leq 1, -\infty < u < \infty$ и $\alpha, \beta - \text{const}$. При этом производная Фреше определяется равенством

$$(F'(u_0)h) = \int_0^1 K'_u[x, y, u_0(y)] h(y) dy.$$

Рассмотрим теперь уравнение Урысона с параметром λ

$$u(x) = \int_0^1 K[x, y, u(y); \lambda] dy.$$

Это уравнение можно представить в виде

$$F(u, \lambda) = \theta, \quad (5.143)$$

где u — элемент банахова пространства X_1 , λ — числовой параметр, θ — ноль-оператор в X_2 , а $F(u, \lambda)$ — оператор со значениями в банаховом пространстве X_2 .

Пусть $F(u_0, \lambda_0) = \theta$, т. е. u_0 является решением уравнения (5.143) при $\lambda = \lambda_0$. Возникает вопрос, при каких условиях существуют близкие к u_0 решения уравнения (5.143) при близких к λ_0 значениях λ . Такие решения называют (абстрактными) неявными функциями, определяемыми уравнением (5.143). Имеет место следующая теорема существования (абстрактной) неявной функции [17, 21, 47, 49, 56, 58, 61].

Пусть выполнены условия.

1. Оператор $F(u, \lambda)$ определен в некоторой окрестности точки (u_0, λ_0)

$$\|u - u_0\|_{X_1} < \delta_1, |\lambda - \lambda_0| < \delta_2$$

и непрерывен по совокупности аргументов вместе со своей производной Фреше $F'_u(u, \lambda)$ в указанной окрестности.

2. $F(u_0, \lambda_0) = 0$.

3. Существует определенный на всем X_2 непрерывный оператор $R = [F'_u(u_0, \lambda_0)]^{-1}$.

Тогда уравнение $F(u, \lambda) = \theta$ определяет в некоторой окрестности $|\lambda - \lambda_0| < \delta_0$ точки λ_0 единственную непрерывную неявную функцию $u(\lambda)$.

Для доказательства этой теоремы рассмотрим оператор

$$A(u, \lambda) = u - [F'_u(u_0, \lambda_0)]^{-1} F(u, \lambda)$$

и покажем, что при некоторых δ_0 и β он является равномерно (по λ) сжимающим оператором для $\|u - u_0\| < \beta, |\lambda - \lambda_0| < \delta_0$. Тогда он будет иметь единственную неподвижную точку $u^* : u^* = Au^*$.

Так как по условию оператор $F(u, \lambda)$ имеет непрерывную производную, то оператор $A(u, \lambda)$ дифференцируем по Фреше

$$A'_u = I - [F'_u(u_0, \lambda_0)]^{-1} F'_u(u, \lambda),$$

причем оператор A'_u непрерывен по совокупности переменных и $A'_u(u_0, \lambda_0) = \theta$. В таком случае найдется $\beta > 0$, такое что при $\|u - u_0\| \leq \beta, |\lambda - \lambda_0| < \delta_0$ будет выполнено неравенство

$$\|A'_u(u, \lambda)\| = \|A'_u(u, \lambda) - A'_u(u_0, \lambda_0)\| \leq \alpha < 1. \quad (5.144)$$

Далее, так как $A(u_0, \lambda_0) = u_0$, то найдется такое $\delta_0 < \beta$, что $\|A(u_0, \lambda) - u_0\| < (1 - \alpha)\beta$ при $|\lambda - \lambda_0| < \delta_0$. Отсюда следует, что оператор $A(u, \lambda)$ преобразует шар $\|u - u_0\| < \beta$ в себя. Наконец, учитывая оценку (5.144) и теорему Лагранжа для абстрактных функций [49], получаем

$$\|A(u_2, \lambda) - A(u_1, \lambda)\| \leq \alpha \|u_2 - u_1\|, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Следовательно, при $\|u - u_0\| < \beta, |\lambda - \lambda_0| < \delta_0$ оператор A — сжимающий и уравнение $Au = u$ имеет единственную неподвижную точку u^* . Очевидно, уравнение $Au = u$ равно-

сильно уравнению (5.143). Таким образом, существует единственная неявная функция $u^* = u^*(\lambda)$, определяемая уравнением (5.143).

Вернемся теперь к уравнению Урысона с параметром

$$u(x) = \int_0^1 K[x, y, u(y); \lambda] dy. \quad (5.145)$$

Рассмотрим его в пространстве $C[0,1]$. Будем считать, что функция $K[x, y, u(y); \lambda]$ непрерывна по совокупности аргументов вместе со своей производной $K'_u[x, y, u(y); \lambda]$.

Пусть $u_0(x) \in C[0,1]$ является решением уравнения (5.145) при $\lambda = \lambda_0$, т. е.

$$u_0(x) = \int_0^1 K[x, y, u_0(y); \lambda_0] dy.$$

Уравнение (5.145) представим в виде $(X_1 = X_2 = C[0,1])$

$$F(u, \lambda) = u(x) - \int_0^1 K[x, y, u(y); \lambda] dy = 0.$$

Дифференциал Фреше вычисляется по изложенным выше правилам. Имеем

$$F'_u(u_0, \lambda_0)h = h(x) - \int_0^1 K'_u[x, y, u_0(y); \lambda_0]h(y) dy.$$

Или

$$F'_u(u_0, \lambda_0)h = (I - H)h, \quad (5.146)$$

где

$$Hv = \int_0^1 K'_u[x, y, u_0(y); \lambda_0]v(y) dy$$

линейный интегральный оператор с непрерывным ядром $K'_u(x, y, u_0(y); \lambda_0)$.

Из (5.146) видно, что оператор $F'_u(u_0; \lambda_0)$ будет иметь обратный, если существует $(I - H)^{-1}$, т. е. в том случае, если единица не есть характеристическое число ядра $K'_u(x, y, u_0(y); \lambda_0)$. В этом случае оператор

$$R = [F'_u(u_0, \lambda_0)]^{-1}$$

является резольвентой ядра K'_u . Тогда все условия теоремы о неявной функции будут выполнены и уравнение (5.145) будет иметь единственное непрерывное решение $u(x, \lambda)$, близкое к $u_0(x)$ при значениях λ , близких к λ_0 .

Неявная функция может быть получена как предел последовательных приближений

$$u_{n+1}(\lambda) = u_n(\lambda) - RF[u_n(\lambda), \lambda] \quad (n = 0, 1, \dots),$$

$$u_0(\lambda) = u_0(x),$$

причем в достаточно малой окрестности λ_0 итерационный процесс сходится со скоростью геометрической прогрессии.

Метод Ньютона был обобщен на уравнения в банаховых пространствах в работах Л. В. Канторовича [17, 19]. В [17, 59, 63] содержится общирная теория и приложения итерационного процесса (5.141) и близких к нему. Главное достоинство метода Ньютона — это его быстрая сходимость (если начальное приближение u_0 выбрано достаточно близко к решению u^*).

Рассмотрим итерационный процесс Ньютона

$$u_{n+1} = u_n - [F'(u_n)]^{-1} F(u_n) \quad (n = 0, 1, \dots), \quad (5.147)$$

где $F(u)$ — нелинейный оператор, определенный в окрестности S решения u^* уравнения $F(u) = 0$, непрерывно дифференцируемый в S в смысле Фреше, $F'(u)$ — производная Фреше, причем оператор $F'(u)$ непрерывно обратим в S ; $u_0 \in S$.

Имеет место теорема. Пусть X — банахово пространство и заданы $r > 0$ и $u_0 \in X$. Предположим, что оператор $F : B[u_0, r] \rightarrow X$ дифференцируем по Фреше и $[F'(u_0)]^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ (т. е. оператор F' непрерывно обратим в $B[u_0, r]$). Предположим, кроме того, что F' удовлетворяет условию Липшица в $B[u_0, r]$

$$\|F'(u_1) - F'(u_2)\| \leq p \|u_1 - u_2\|, \quad \forall u_1, u_2 \in B[u_0, r].$$

Допустим, что

$$b_0 \geq \|F'(u_0)\|^{-1}, \quad \eta_0 \geq \|u_1 - u_0\| = \|F'(u_0)^{-1} F(u_0)\|,$$

и положим, $h_0 = b_0 p \eta_0$. Если

$$h_0 \leq \frac{1}{2}, \quad \left[1 - \sqrt{1 - 2h_0}\right] \frac{\eta_0}{h_0} \leq r,$$

то последовательность Ньютона (5.147) с начальным приближением u_0 сходится к решению u^* уравнения $F(u) = 0$ в $B[u_0, r]$.

Рассмотрим примеры на применение метода Ньютона.

Пример 1. Применим метод Ньютона с начальным приближением $u_0 = (u_1^0, u_2^0) = 0$ к следующей нелинейной системе:

$$u_1^2 + u_2^2 + 30u_2 - 31 = 0,$$

$$u_2^2 - 2u_2 - 16u_1 + 1 = 0.$$

В операторном виде

$$F(u) = \begin{bmatrix} u_1^2 + u_2^2 + 30u_2 - 31 \\ u_2^2 - 2u_2 - 16u_1 + 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Далее будем пользоваться l^∞ -нормой, т. е. $\|u\| = \max(|u_1|, |u_2|)$.

Находим

$$F(u+h) - F(u) = 2 \begin{bmatrix} u_1, u_2 + 15 \\ -8, u_2 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1^2 + h_2^2 \\ h_2^2 \end{bmatrix} = F'(u)h + o(\|h\|),$$

где

$$F'(u) = 2 \begin{bmatrix} u_1, u_2 + 15 \\ -8, u_2 - 1 \end{bmatrix},$$

$$[F'(u)]^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} u_2 - 1, -u_2 - 15 \\ 8, u_1 \end{bmatrix}}{2\{u_1(u_2 - 1) + 8(u_2 + 15)\}}.$$

В этом простом примере последовательность Ньютона записывается явно. Например, (стартуя с $u_0 = (u_1^0, u_2^0) = 0$), вычисляем

$$u^{(1)} = u_0 - [F'(u_0)]^{-1} F(u_0) = \frac{1}{240} \begin{bmatrix} -1, -15 \\ 8, 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -31 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/15 \\ -31/30 \end{bmatrix}.$$

Выражение для операторной нормы матрицы ($n \times n$) в пространстве R_∞^n таково:

$$\|a_{ij}\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

Значит,

$$\|[F'(x_0)]^{-1}\| \leq \frac{1}{15 \cdot 16} \max \{(1+15), 8\} = \frac{1}{15} = b_0.$$

Далее

$$F'(u) - F'(v) = 2 \begin{bmatrix} u_1 - v_1, u_2 - v_2 \\ 0, u_2 - v_2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 - v_1 \\ u_2 - v_2 \end{bmatrix} = 2A(u - v).$$

Соответственно, получаем оценку

$$\|F'(u) - F'(v)\| \leq 2\|A\|\|u - v\| = 2 \max \{2; 1\} \|u - v\| \leq 4|u - v|.$$

Поэтому константа Липшица $p = 4$. Наконец, $\eta_0 = \|u^{(1)} - u_0\| = 31/30$, значит, $h_0 = b_0 p \eta_0 = \frac{62}{225} < \frac{1}{2}$, как и требуется по условию теоремы. Окончательно вычисляем

$$(1 - \sqrt{1 - 2h_0}) \frac{\eta_0}{h_0} = \frac{15 - \sqrt{101}}{4} < 1,25 \leq r.$$

Таким образом, система имеет решение в шаре $B(0; 1,25)$. Именно к этому решению сходится последовательность Ньютона. Очевидно, $u^* = (0, 1)$.

Пример 2. Рассмотрим нелинейную граничную задачу

$$u''(x) - u^2(x) = g(x), \quad g(x) \in C[0,1],$$

$$u(0) = u(1) = 0.$$

Будем искать решение в классе $C^2[0,1]$. Эта задача равносильна операторному уравнению $Fu = 0$ в классе $C[0,1]$, где

$$(Fu)(x) = u(x) + \int_0^1 K(x,y) \{u^2(y) + g(y)\} dy$$

и функция Грина

$$K(x,y) = \begin{cases} y(1-x), & 0 \leq y \leq x \leq 1, \\ x(1-y), & 0 \leq x \leq y \leq 1. \end{cases}$$

Применим к оператору F метод Ньютона. Воспользуемся сформулированной выше теоремой для доказательства сходимости. Пусть начальное приближение $u_0 = 0$. Имеем, используя определение производной Фреше,

$$F'(u)h(x) = h(x) + 2 \int_0^1 K(x,y)u(y)h(y) dy.$$

Так как $F'(u_0) = F'(0) = I$, то $[F'(0)]^{-1} = I$ и можно положить $b_0 = 1$.

Пусть K — линейный интегральный оператор, задаваемый формулой

$$(Kh)(x) = \int_0^1 K(x,y)h(y) dy.$$

Имеем $\|K\| = \|K\|_{\infty} = 1/8$, поэтому

$$\eta_0 \geq \left\| [F'(0)]^{-1} Fu_0 \right\| = \left\| \int_0^1 K(x,y)g(y) dy \right\| \Rightarrow \eta_0 = \frac{\|g\|}{8}.$$

Кроме того,

$$\|F'(u_1)h - F'(u_2)h\| \leq 2\|h\|\|K\|\|u_1 - u_2\| \leq \frac{1}{4}\|h\|\|u_1 - u_2\|.$$

Поэтому можно взять $r = 1/4$. Значит, $h_0 = b_0 p \eta_0 = \|g\|/32$. Таким образом, согласно теореме, если $\|g\| < 16$, то наша нелинейная граничная задача имеет решение, к которому сходится последовательность Ньютона, и это решение лежит в шаре с центром в нуле и радиусом

$$r = 4 \left[1 - \sqrt{1 - \frac{\|g\|}{16}} \right].$$

Замечание. Основная привлекательность метода Ньютона заключается в весьма быстрой сходимости итерационного процесса (5.147). Однако метод сильно чувствителен к выбору начального приближения, он может расходиться, если u_0 недостаточно близко к решению. Поэтому, помимо основной процедуры, необходимо еще изыскивать способы выбора начального приближения. Второй недостаток проявляется в самой процедуре вычисления последовательности Ньютона. На каждом шаге необходимо вычислять производную Фреше, а затем решать линейное уравнение для ее обращения. Все это выливается иногда в весьма громоздкие и утомительные процедуры и занимает много времени. Для того чтобы обойти эту трудность, были разработаны модификации метода Ньютона. В наиболее простой из них используется последовательность

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} - [F'(u_0)]^{-1} F(u^{(n)}) \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Здесь требуется только одно вычисление производной Фреше и ее обращение.

Дальнейшие сведения теоретического и вычислительного характера по решению нелинейных интегральных уравнений можно найти в [4, 6, 7, 15, 17, 20, 23, 36, 40, 44, 59, 63].

5.13. Бифуркация решений

Рассмотрим операторное уравнение

$$u = A(u, \lambda). \quad (5.148)$$

Пусть для определенности $A(\theta, \lambda) = \theta$, тогда уравнение (5.148) имеет нулевое решение $u = \theta$ при всех значениях параметра λ .

Под точкой бифуркации оператора $A(u, \lambda)$ или уравнения (5.148) понимают число λ_0 , обладающее следующим свойством: для любого $\varepsilon > 0$ в интервале $(\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon)$ имеется такое значение λ , при котором уравнение имеет по крайней мере одно ненулевое решение $u(\lambda)$, удовлетворяющее условию $\|u(\lambda)\| < \varepsilon$.

Таким образом, в определении точки бифуркации заранее предполагается известным решение, определенное при всех значениях параметра; речь идет об «ответвлении» решений от заданного.

Рассмотрим однородное интегральное уравнение Фредгольма с непрерывным ядром

$$u(x) = \lambda \int_0^1 K(x, y) u(y) dy.$$

Оно имеет нулевое решение при любом λ . Пусть $\lambda = \lambda_0$ — характеристическое число ядра, которому соответствует ненулевое решение $u_{\lambda_0}(x)$. Это решение определяется с точностью до постоянного множителя и, значит, можно записать

$$\|u_{\lambda_0}\| = \max_{0 \leq x \leq 1} |u_{\lambda_0}(x)| < \varepsilon.$$

Таким образом, если интервал $(\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon)$ не содержит других характеристических чисел ядра K , то при изменении λ в этом интервале мы имеем сначала одно решение

$u(x) = 0$, а при $\lambda = \lambda_0$ решений будет уже два: от нулевого решения отвествляется еще не-нулевое. Характеристическое число λ_0 есть точка бифуркации.

Если оператор $A(u, \lambda)$ непрерывно дифференцируем по Фреше, то в силу теоремы о неявной функции его точками бифуркации могут быть лишь те значения λ , при которых единица является точкой спектра оператора $A'_u(\theta, \lambda)$. Пусть $A'_u(\theta, \lambda) = \lambda B$, где B — вполне непрерывный линейный оператор, не зависящий от λ . В этом случае точки бифуркации являются характеристическими значениями оператора B (т. е. значениями, обратными собственным).

Пример [21]. Рассмотрим уравнение Гаммерштейна с вырожденным ядром

$$u(x) = \lambda \int_0^1 xy[u(y) + u^2(y)] dy. \quad (5.149)$$

Очевидно, $u(x) = 0$ есть решение этого уравнения при любом λ . Вводя

$$C_1 = \int_0^1 yu(y) dy, \quad C_2 = \int_0^1 yu^2(y) dy,$$

получаем структурную формулу для решения

$$u(x) = \lambda x(C_1 + C_2)$$

и систему (нелинейных) уравнений относительно коэффициентов

$$\begin{cases} \lambda(C_1 + C_2) = 3C_1, \\ \lambda^2(C_1 + C_2)^2 = 4C_2. \end{cases}$$

Первое решение этой системы дает

$$C_1 = C_2 = 0 \Rightarrow u(x) = 0.$$

Второе, отличное от нуля, решение таково:

$$u(x) = \frac{4(3-\lambda)}{3\lambda}x.$$

Согласно определению точки бифуркации в ε окрестности точки $\lambda = 3$, существует отличное от нуля решение $u_\lambda(x)$, такое что

$$\|u_\lambda\| = \max_{0 \leq x \leq 1} \left| \frac{4(3-\lambda)x}{3\lambda} \right| < \varepsilon.$$

Таким образом, при $\lambda = 3$ имеем нулевое решение, а в малой окрестности $(3-\varepsilon, 3+\varepsilon)$ этой точки появляется «малое» ненулевое решение $u_\lambda(x)$. Значит, $\lambda = 3$ есть точка бифуркации уравнения (5.149).

Оператор Гаммерштейна (5.149) дифференцируем по Фреше в любой точке $u_0(x) \in C[0, 1]$, и его дифференциал в точке $u = 0$ равен

$$A'_u(0, \lambda)h = \lambda \int_0^1 xy(u + u^2)' \Big|_{u=0} h(y) dy = \lambda \int_0^1 xyh(y) dy = \lambda(Bh)(x).$$

После вычисления производной Фреше в точке $u = \theta$ из уравнения $u = A(u, \lambda)$ получаем линейное интегральное уравнение

$$h(x) = \lambda \int_0^1 xyh(y) dy = \lambda Bh,$$

для которого значение $\lambda = 3$ является характеристическим. Таким образом, точка бифуркации $\lambda = 3$ есть характеристическое значение оператора B .

Оказывается, что не каждое характеристическое значение оператора B является точкой бифуркации оператора $A(u, \lambda)$. На этот счет имеется теорема (М. А. Красносельский).

Если вполне непрерывный оператор $A(u, \lambda)$ ($A(\theta, \lambda) = 0$) имеет в точке θ производную Фреше $A'_u(\theta, \lambda) = \lambda B$, то каждое нечетно-кратное (в частности простое) характеристическое значение оператора B является точкой бифуркации оператора $A(u, \lambda)$.

Если характеристическое значение оператора B имеет четную кратность, то требуется дополнительный анализ.

Интегральные операторы Урысона и Гаммерштейна при достаточно широких предположениях имеют в нуле θ (пространств C или L^p) дифференциал Фреше B , который является линейным интегральным оператором

$$Bu = \int_0^1 H(x, y)u(y) dy.$$

Из теоремы М. А. Красносельского следует, что каждое характеристическое число нечетной кратности ядра $H(x, y)$ является точкой бифуркации соответствующего нелинейного интегрального оператора Урысона или Гаммерштейна.

Замечание. Выше мы рассматривали уравнение $u = A(u, \lambda)$ в предположении, что $A(\theta, \lambda) = \theta$, тогда уравнение имеет нулевое решение при любом λ . К этой ситуации сводится и более общий случай, когда известно, что уравнение $u = A(u, \lambda)$ имеет решение $u(\lambda) \neq \theta$, а интерес представляют решения, отличные от $u(\lambda)$. Эти решения разыскивают в форме

$$u = u(\lambda) + v.$$

Тогда v определяется уравнением

$$v = T(v, \lambda),$$

где

$$T(v, \lambda) = A[u(\lambda) + v; \lambda] - A[u(\lambda), \lambda].$$

Это последнее уравнение уже имеет нулевое решение при всех λ .

Задачи бифуркационного типа возникают в механике при исследовании смены форм упругого равновесия, при рассмотрении конечных колебаний тел и. т. п. Так, задача об изгибе прямолинейного стержня единичной длины и переменной жесткости $\rho(x)$ под воз-

действием продольной силы P приводит к следующему нелинейному интегральному уравнению:

$$u(x) = P\rho(x) \int_0^1 K(x, y) u(y) \sqrt{1 - \left(\int_0^1 K'_x(x, y) u(y) dy \right)^2} dy,$$

где $u(x)$ — искомая функция.

Это уравнение имеет нулевое решение при всех значениях параметра P . При малых P оно имеет единственное нулевое решение в пространстве $C[0,1]$. Это означает, что стержень сохраняет прямолинейную форму равновесия, т. е. не изгибаются. После достижения силой P критического значения (критической силы Эйлера) наступает смена формы равновесия; стержень изгибаются. Критическая сила Эйлера P_{kp} и является точкой бифуркации. Процедура здесь такова: вместо оператора A рассматривают линейный оператор B — производную Фреше оператора A в точке θ , находят характеристические числа оператора B , которые и считают точками бифуркации оператора A . Однако, как это следует из теоремы Красносельского, такая процедура может оказаться законной не всегда.

Другая физическая задача о колебаниях конечной амплитуды, совершаемых маятником, описывается (при отсутствии диссипативных сил) дифференциальным уравнением [50]

$$\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} + \alpha^2 \sin \varphi(t) = F(t), \quad (5.150)$$

где $F(t)$ — нечетная 2ω — периодическая возмущающая сила, $\varphi(t)$ — амплитуда колебаний. При помощи функции Грина

$$T(x, y) = \begin{cases} x(1-y), & 0 \leq x \leq y, \\ y(1-x), & y \leq x \leq 1 \end{cases}$$

дифференциальное уравнение (5.150) в совокупности с граничными условиями (при $\omega = 1$) $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ сводится к интегральному уравнению

$$\varphi(x) = - \int_0^1 T(x, y) [F(y) - \alpha^2 \sin \varphi(y)] dy.$$

После подстановки

$$\int_0^1 T(x, y) F(y) dy = g(x), \quad \varphi(x) + g(x) = \psi(x)$$

это уравнение принимает форму уравнения Гаммерштейна

$$\psi(x) + \int_0^1 T(x, y) f[y, \psi(y)] dy = 0, \quad (5.151)$$

где

$$f(y, u) = \alpha^2 \sin[u - g(y)].$$

Пусть $\psi_0(x)$ — ненулевое решение уравнения (5.151), соответствующее $\lambda_0 = \alpha_0^2$,

$$A(\psi, \lambda) = - \int_0^1 T(x, y) f[y, \psi(y)] dy,$$

т. е. имеем уравнение $\psi = A(\psi, \lambda)$. Производная Фреше в точке $\psi = \psi_0$ дает

$$A'(\psi_0, \lambda) = -\lambda_0 \int_0^1 T(x, y) \cos[\psi_0(y) - g(y)] dy.$$

Таким образом, приходим к следующему выводу. Необходимым условием того, чтобы точка $\alpha^2 = \lambda = \lambda_0$ была точкой бифуркации для решения $\psi_0(x)$ уравнения

$$\psi(x) + \lambda \int_0^1 T(x, y) \sin[\psi(y) - g(y)] dy = 0,$$

является существование нетривиального решения у однородного уравнения Фредгольма

$$\varphi(x) - \lambda_0 \int_0^1 T(x, y) \cos[\psi_0(y) - g(y)] \varphi(y) dy = 0. \quad (5.152)$$

Иными словами, λ_0 должно быть характеристическим значением ядра

$$H(x, y) = T(x, y) \cos[\psi_0(y) - g(y)].$$

При $\psi_0(x) = g(x)$ уравнение (5.152) имеет тривиальное решение $\varphi(x) = 0$. Таким образом, единственными возможными точками бифуркации для равновесного положения маятника, т. е. для решения $\psi_0(x) = g(x)$ являются корни квадратные из собственных значений треугольного ядра, т. е. точки

$$\alpha = \pi, \alpha = 2\pi, \alpha = 3\pi, \dots \quad (5.153)$$

Так как собственные значения треугольного ядра все простые, то в силу теоремы Красносельского точки (5.153) действительно являются точками бифуркации. Различные бифуркационные проблемы нелинейной упругости рассматриваются в книге [57].

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ 5

1. Аржаных И. С. Интегральные уравнения теории упругости / И. С. Аржаных // Успехи мат. наук. 1949. Т. 4, вып. 5. С. 5–121.
2. Биргер И. А. Некоторые математические методы решения инженерных задач / И. А. Биргер. М.: Оборонгиз, 1956. 149 с.
3. Бремерман Г. Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье / Г. Бремерман. М.: Мир, 1968. 276 с.
4. Бурдаков О. П. Некоторые глобально сходящиеся модификации метода Ньютона для решения систем нелинейных уравнений / О. П. Бурдаков // Докл. АН СССР. 1980. Т. 254, № 3. С. 521–523.
5. Бурчуладзе Т. В. Развитие метода потенциала в теории упругости / Т. В. Бурчуладзе, Т. Г. Гегелия. Тбилиси: Мецниереба, 1985. 226 с.
6. Вайнберг М. М. Вариационные методы исследования нелинейных операторов / М. М. Вайнберг. М.: Гостехиздат, 1956. 344 с.
7. Вайнберг М. М. Интегро-дифференциальные уравнения / М. М. Вайнберг // Итоги науки. Сер. Мат. анализ. Теория вероятностей. Регулирование. М.: ВИНТИ, 1962. С. 3–24.
8. Васильева А. Б. Интегральные уравнения / А. Б. Васильева, Н. А. Тихонов. М.: Издво Моск. ун-та, 1989. 156 с.
9. Верлань А. Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы: справоч. пособие / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков. Киев: Наук. думка, 1986. 544 с.
10. Виарда Г. Интегральные уравнения / Г. Виарда. М.–Л.: Гостеоретиздат, 1933. 224 с.
11. Владимиров В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. М.: Наука, 1981. 527 с.
12. Галахов М. А. Дифференциальные и интегральные уравнения математической теории трения / М. А. Галахов, П. П. Усов. М.: Наука, 1990. 280 с.
13. Гурса Э. Курс математического анализа: в 3-х т. / Э. Гурса. М.: ОНТИ, 1934. Т. 3. Ч. 2. 256 с.
14. Гюнтер Н. М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики / Н. М. Гюнтер. М.: Гостехиздат, 1953. 416 с.
15. Дзядык В. К. О применении линейных методов к приближению полиномами решений обыкновенных дифференциальных уравнений и интегральных уравнений Гаммерштейна / В. К. Дзядык // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1970. № 34. С. 827–848.
16. Интегральные уравнения / П. П. Забрейко [и др.]. М.: Наука, 1968. 448 с. (Справочная математическая библиотека).
17. Канторович Л. В. Функциональный анализ в нормированных пространствах / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. М.: Физматгиз, 1959. 684 с.
18. Канторович Л. В. О приближенном вычислении некоторых типов определенных интегралов и других применениях метода выделения особенностей / Л. В. Канторович // Мат. сб. 1934. Т. 41, вып. 2. С. 235–245.
19. Канторович Л. В. Функциональный анализ и прикладная математика / Л. В. Канторович // Успехи мат. наук. 1948. Т. 3, № 6. С. 89–185.

20. Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения / под ред. Дж. Б. Келлера, С. Антмана. М.: Мир, 1974. 254 с.
21. Краснов М. Л. Интегральные уравнения / М. Л. Краснов. М.: Наука, 1975. 304 с.
22. Краснов М. Л. Интегральные уравнения / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. 2-е изд. М.: Наука, 1976. 216 с.
23. Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений / М. А. Красносельский. М.: Физматгиз, 1962. 394 с.
24. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов / В. И. Крылов. 2-е изд. М.: Наука, 1967. 270 с.
25. Купрадзе В. Д. Методы потенциала в теории упругости / В. Д. Купрадзе. М.: Физматгиз, 1963. 427 с.
26. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости / В. Д. Купрадзе [и др.]. М.: Наука, 1976. 664 с.
27. Лизоркин П. И. Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа / П. И. Лизоркин. М.: Наука, 1981. 384 с.
28. Линьков А. М. Комплексный метод граничных интегральных уравнений теории упругости / А. М. Линьков. СПб.: Наука, 1999. 382 с.
29. Ловитт У. В. Линейные интегральные уравнения / У. В. Ловитт. М.: Гостехиздат, 1957. 226 с.
30. Лучка А. Ю. Теория и применение методов осреднения функциональных поправок / А. Ю. Лучка. Киев: Наук. думка, 1969. 315 с.
31. Ляпунов А. М. Работы по теории потенциала / А. М. Ляпунов. М.-Л.: Гостехиздат, 1949. 180 с.
32. Мазья В. Г. Граничные интегральные уравнения / В. Г. Мазья // Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1988. Т. 27. С. 131–228.
33. Метод граничных интегральных уравнений / под ред. А. Ю. Ишлинского, Г. Г. Чертного. М.: Мир, 1978. 212 с. (Новое в зарубежной науке. Механика. Серия 15).
34. Михлин С. Г. Интегральные уравнения и их приложения к некоторым проблемам механики, математической физики и техники / С. Г. Михлин. М.-Л.: Гостехиздат, 1949. 304 с.
35. Михлин С. Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям / С. Г. Михлин. М.: Физматгиз, 1959. 232 с.
36. Михлин С. Г. Граничные интегральные уравнения и задачи теории упругости / С. Г. Михлин, Н. Ф. Морозов, М. В. Паукшто. Л.: Изд-во ЛГУ, 1986. 87 с.
37. Михлин С. Г. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений / С. Г. Михлин, Х. Л. Смолицкий. М.: Наука, 1965. 250 с.
38. Морс Ф. М. Методы теоретической физики: в 2-х т. / Ф. М. Морс, Г. М. Фешбах. М.: Изд-во ИЛ, 1960. Т. 2. 886 с.
39. Мюнц Г. М. Интегральные уравнения: в 3-х т. / Г. М. Мюнц. М.-Л.: Гостехиздат, 1934. 330 с.
40. Новацкий В. Теория упругости / В. Новацкий. М.: Мир, 1975. 872 с.
41. Ортега Дж. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными / Дж. Ортега, В. Рейнболдт. М.: Мир, 1975. 558 с.
42. Парсон В. З. Интегральные уравнения теории упругости / В. З. Парсон, П. И. Перлин. М.: Наука, 1977. 312 с.

43. Петровский И. Г. Лекции по теории интегральных уравнений / И. Г. Петровский. 3-е изд. М.: Наука, 1965. 128 с.
44. Положий Г. Н. Об одном методе решения интегральных уравнений / Г. Н. Положий // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1959. Т. 23, № 2. С. 295–312.
45. Приближенное решение операторных уравнений / М. А. Красносельский [и др.]. М.: Наука, 1969. 455 с.
46. Привалов И. И. Интегральные уравнения / И. И. Привалов. М.: ОНТИ, 1935. 237 с.
47. Смирнов В. И. Курс высшей математики: в 5 т. / В. И. Смирнов. М.: Физматгиз, 1958. Т. 4. 470 с.
48. Смирнов Н. С. Введение в теорию нелинейных интегральных уравнений / Н. С. Смирнов. М.–Л.: ОНТИ, 1936. 124 с.
49. Соболев С. Л. Уравнения математической физики / С. Л. Соболев. М.: Гостехиздат, 1954. 444 с.
50. Треногин В. А. Функциональный анализ / В. А. Треногин. М.: Наука, 1980. 496 с.
51. Трикоми Ф. Интегральные уравнения / Ф. Трикоми. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 299 с.
52. Франк Ф. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. Ч. 2. / Ф. Франк, Р. М. Мизес. М.: Мир, 1937. 998 с.
53. Хведелидзе Б. В. Интегральные уравнения / Б. В. Хведелидзе // Очерки развития математики в СССР. Киев: Наук. думка, 1983. С. 444–460.
54. Цлаф Л. Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения / Л. Я. Цлаф. М.: Наука, 1966. 176 с.
55. Amann H. Fixed point theorems and nonlinear eigenvalue problems / H. Amann // SIAM Rev. 1976. Vol. 18, № 4. P. 620–709.
56. Anselone P. M. Nonlinear integral equations / P. M. Anselone. Madison: University of Wisconsin Press, 1964. 378 p.
57. Berger M. Nonlinearity and functional analysis / M. Berger. New York: Academic Press, 1977.
58. Dickey R. W. Bifurcation problems in nonlinear elasticity / R. W. Dickey. London: Pitman, 1976.
59. Hutson V. Applications of Functional Analysis and Operator Theory / V. Hutson, J. S. Pym. London [etc.]: Academic Press, 1980. Рус. пер.: Хатсон В. Приложения функционального анализа и теории операторов / В. Хатсон, Дж. Пим. М.: Мир, 1980. 432 с.
60. Rall L. B. Computational solution of nonlinear operator equations / L. B. Rall. New York: Wiley, 1969. 225 с.
61. Saaty T. L. Modern nonlinear equations / T. L. Saaty. New York: McGraw-ill, 1967.
62. Schwartz J. T. Nonlinear functional analysis / J. T. Schwartz. New York: Gordon and Breach, 1969.
63. Smart D. R. Fixed point theorems / D. R. Smart. Cambridge: Cambridge University Press, 1974.
64. Todd M. J. The computation of fixed points and applications / M. J. Todd. Berlin: Springer-Verlag, 1976.

ГЛАВА 6

СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

6.1. Предварительные сведения

Напомним некоторые определения и факты [11, 26, 32, 38] (см. также гл. 1). Пусть Γ — гладкий замкнутый или разомкнутый контур на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, $f(\zeta)$ — комплекснозначная функция точки контура ζ . Будем говорить, что функция $f(\zeta)$ удовлетворяет на Γ условию Гельдера с постоянными A и λ , если $\forall \zeta_1, \zeta_2 \in \Gamma$ имеет место неравенство

$$|f(\zeta_2) - f(\zeta_1)| < A|\zeta_2 - \zeta_1|^\lambda, \quad A > 0, \quad 0 < \lambda \leq 1. \quad (6.1)$$

Принадлежность $f(\zeta)$ к классу функций, удовлетворяющих условию Гельдера, обозначается так: $f(\zeta) \in H(A, \lambda)$, или $f(\zeta) \in H(\lambda)$, или еще проще — $f(\zeta) \in H$. При $\lambda = 1$ получаем условие Липшица, поэтому условие Гельдера часто называют условием Гельдера–Липшица (Γ –Л.) или условием Липшица порядка λ ($f(\zeta) \in \text{Lip}_\lambda(\Gamma)$).

Замкнутый контур Γ разбивает z -плоскость на две области: внутреннюю (ограниченную) — обозначим ее D^+ — и внешнюю $D^- = \overline{CD}^+$ (дополнение замыкания \overline{D}^+ до полной z -плоскости).

Пусть $f(z)$ аналитична в области D^+ и непрерывно продолжима на Γ , тогда интеграл Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} f(z), & z \in D^+, \\ 0, & z \in D^-. \end{cases}$$

Если $f(z)$ аналитична в области D^- , непрерывно продолжима на Γ и $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$, то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} 0, & z \in D^+, \\ -f(z), & z \in D^-. \end{cases}$$

Заметим, что направление интегрирования в обеих этих формулах — против хода часовой стрелки (так, чтобы область D^+ оставалась слева). В том случае, когда Γ — разомкнутый контур с началом в точке a и концом в точке b , область D^+ расположена слева от Γ при движении от a к b .

Пусть произвольная функция $\omega(\zeta) \in H(\lambda)$ на Γ , конструкция

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\omega(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} F^+(z), & z \in D^+, \\ F^-(z), & z \in D^-. \end{cases} \quad (6.2)$$

называется интегралом типа Коши. Интеграл в (6.2) определяет кусочно-аналитическую (кусочно-голоморфную) функцию $F(z)$, равную $F^+(z)$ в области D^+ и затухающую на

бесконечности функцию $F^-(z)$ в области D^- . Контур Γ является линией скачков функции $F(z)$. Точнее, имеют место предельные соотношения (формулы Сохоцкого–Племеля)

$$\begin{aligned} F^+(\zeta_0) &= \lim_{z \rightarrow \zeta_0 \in \Gamma} F^+(z) = \frac{1}{2} \omega(\zeta_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\omega(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta \quad (z \in D^+), \\ F^-(\zeta_0) &= \lim_{z \rightarrow \zeta_0 \in \Gamma} F^-(z) = -\frac{1}{2} \omega(\zeta_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\omega(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta \quad (z \in D^-), \end{aligned} \quad (6.3)$$

где интеграл в правой части (сингулярный интеграл типа Коши) понимается в смысле главного значения по Коши.

Таким образом, скачок кусочно-аналитической функции $F(z)$ на Γ

$$F^+(\zeta_0) - F^-(\zeta_0) = \omega(\zeta_0), \quad \forall \zeta_0 \in \Gamma. \quad (6.4)$$

Из (6.3) получаем также соотношение для прямого значения сингулярного интеграла

$$F^+(\zeta_0) + F^-(\zeta_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\omega(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta. \quad (6.5)$$

Если Γ — разомкнутый контур, то формулы (6.3) справедливы в любой точке $\zeta \in \Gamma$, отличной от концов дуги.

В силу теоремы Племеля–Привалова предельные значения $F^\pm(\zeta) \in H(\lambda)$, если $\lambda < 1$ и $F^\pm(\zeta) \in H(1-\varepsilon)$ при $\lambda = 1$ ($\varepsilon > 0$ — сколько угодно малое). Это утверждение справедливо и по отношению к сингулярному интегралу, фигурирующему в (6.5).

Приведем регулярные представления сингулярного интеграла. Если Γ — замкнутый контур, то

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - \zeta_0} d\zeta &= 1, \quad \zeta_0 \in \Gamma, \\ \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\omega(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta &= \omega(\zeta_0) + \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\omega(\zeta) - \omega(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Если Γ — разомкнутый контур с началом в точке a и концом в точке b , то

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - \zeta_0} d\zeta &= \frac{1}{\pi i} \ln \frac{b - \zeta_0}{a - \zeta_0} + 1, \\ \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\omega(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta &= \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\omega(\zeta) - \omega(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta + \omega(\zeta_0) \left(\frac{1}{\pi i} \ln \frac{b - \zeta_0}{a - \zeta_0} + 1 \right). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Относительно выделения однозначной ветви логарифма см., например, в [11].

В различного рода физических задачах приходится рассматривать интегралы типа Коши по действительной оси

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega(x)}{x - z} dx. \quad (6.8)$$

Так как линия интегрирования простирается в бесконечность, необходимо наложить условия затухания на плотность $\omega(x)$ в бесконечно удаленной точке. Пусть, как обычно, $\omega(x) \in H(A, \lambda)$ на любом конечном интервале в R^1 , и кроме того, на бесконечности выполняется условие

$$|\omega(x) - \omega(\infty)| < \frac{A}{|x|^\mu}, \quad \mu > 0.$$

В этих условиях справедливо следующее регулярное представление интеграла (6.8)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega(x) dx}{x-z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega(x) - \omega(\infty)}{x-z} dx \pm \frac{1}{2} \omega(\infty),$$

где верхний знак берется при $\operatorname{Im} z > 0$, нижний — при $\operatorname{Im} z < 0$.

Для предельных значений интеграла (6.8) при выполнении указанных выше условий, справедливы формулы Сохоцкого–Племеля (6.3), где верхний знак берется для верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, нижний знак — при $\operatorname{Im} z < 0$.

Приведем еще формулы перестановки порядка интегрирования в повторных сингулярных интегралах. Для более простой ситуации, когда один интеграл обыкновенный, перестановка порядка интегрирования законна. Точнее, имеет место следующее предложение [11, 38].

Пусть в повторном интеграле

$$I = \int_{\Gamma} \omega(\zeta, z) d\zeta \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta, \zeta_1)}{\zeta_1 - \zeta} d\zeta_1$$

функция $\varphi(\zeta, \zeta_1)$ удовлетворяет условию Гельдера по обеим переменным, а $\omega(\zeta, z)$ интегрируема по ζ для всех z из некоторого множества; Γ — гладкий замкнутый контур. Тогда

$$\int_{\Gamma} \omega(\zeta, z) d\zeta \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta, \zeta_1)}{\zeta_1 - \zeta} d\zeta_1 = \int_{\Gamma} d\zeta_1 \int_{\Gamma} \frac{\omega(\zeta, z) \varphi(\zeta, \zeta_1)}{\zeta_1 - \zeta} d\zeta. \quad (6.9)$$

В общем случае, когда оба интеграла в повторном интеграле сингулярные, справедлива следующая формула Пуанкаре–Бертрана перестановки порядка интегрирования:

$$\int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - \sigma} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta, \zeta_1)}{\zeta_1 - \zeta} d\zeta_1 = -\pi^2 \varphi(\sigma, \sigma) + \int_{\Gamma} d\zeta_1 \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta, \zeta_1) d\zeta}{(\zeta - \sigma)(\zeta_1 - \zeta)}, \quad \sigma \in \Gamma. \quad (6.10)$$

Наметим контуры доказательства этой формулы. Строгое доказательство см. в [38]. Введем функции

$$I_1(z) = \int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta, \zeta_1)}{\zeta_1 - \zeta} d\zeta_1, \quad I_2(z) = \int_{\Gamma} d\zeta_1 \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta, \zeta_1) d\zeta}{(\zeta - z)(\zeta_1 - \zeta)}.$$

При $z \in \overline{\Gamma}$ перестановка порядка интегрирования законна, поэтому $I_1(z) = I_2(z)$ или

$$I_1^+(\sigma) = I_2^+(\sigma), \quad I_1^-(\sigma) = I_2^-(\sigma)$$

при $z \rightarrow \sigma \in \Gamma$ соответственно из области D^+ и из области D^- . В соответствии с (6.5) имеем

$$I_1(\sigma) = \int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - \sigma} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta, \zeta_1)}{\zeta_1 - \zeta} d\zeta_1 = \frac{1}{2} [I_1^+(\sigma) + I_1^-(\sigma)] = \frac{1}{2} [I_2^+(\sigma) + I_2^-(\sigma)].$$

Интеграл $I_2(z)$, используя разложение подынтегрального выражения на простые дроби, представим в виде

$$I_2(z) = \int_{\Gamma} \frac{d\zeta_1}{\zeta_1 - z} \left\{ \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta, \zeta_1)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta, \zeta_1)}{\zeta - \zeta_1} d\zeta \right\} = \int_{\Gamma} \frac{\psi(z, \zeta_1)}{\zeta_1 - z} d\zeta_1,$$

где

$$\psi(z, \zeta_1) = \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta, \zeta_1)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta, \zeta_1)}{\zeta - \zeta_1} d\zeta.$$

Отсюда видно, что $I_2(z)$ есть интеграл типа Коши с плотностью $\psi(z, \zeta_1)$, зависящей от параметра z . К этому интегралу типа Коши применим формулы (6.3) и учтем, что предельные значения $\psi(z, \zeta_1)$ различны с различных сторон контура Γ . Складывая их, получаем

$$I_2^+(\sigma) + I_2^-(\sigma) = \pi i [\psi^+(\sigma, \sigma) - \psi^-(\sigma, \sigma)] + \int_{\Gamma} \frac{\psi^+(\sigma, \zeta_1) + \psi^-(\sigma, \zeta_1)}{\zeta_1 - \sigma} d\zeta_1.$$

Здесь $\psi^+(\sigma, \sigma) = \lim_{z \rightarrow \sigma} \psi(z, \sigma)$ при $z \rightarrow \sigma \in \Gamma$, оставаясь слева от Γ и $\psi^-(\sigma, \sigma) = \lim_{z \rightarrow \sigma} \psi(z, \sigma)$ при $z \rightarrow \sigma$, оставаясь справа от Γ . Но согласно формулам (6.4), (6.5)

$$\psi^+(\sigma, \sigma) - \psi^-(\sigma, \sigma) = 2\pi i \varphi(\sigma, \sigma),$$

$$\psi^+(\sigma, \zeta_1) + \psi^-(\sigma, \zeta_1) = 2(\sigma - \zeta_1) \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta, \zeta_1)}{(\zeta - \sigma)(\zeta - \zeta_1)} d\zeta.$$

Наконец, используя полученные соотношения и определение $I_1(\sigma)$, приходим к формуле Пуанкаре–Бертрана (6.10).

Отметим частный случай формулы перестановки (6.10)

$$\int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - \sigma} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta_1)}{\zeta_1 - \zeta} d\zeta_1 = -\pi^2 \varphi(\sigma). \quad (6.11)$$

Формула (6.11) вытекает из (6.10) при замене $\varphi(\zeta, \zeta_1)$ на $\varphi(\zeta_1)$. В этом случае в силу (6.6) внутренний интеграл в правой части (6.10)

$$\int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{(\zeta - \sigma)(\zeta_1 - \zeta)} = \frac{1}{\zeta_1 - \sigma} \left\{ \int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - \sigma} + \int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta_1 - \zeta} \right\} = \frac{1}{\zeta_1 - \sigma} (\pi i - \pi i) = 0.$$

Рассмотрим теперь сингулярный интеграл (по замкнутому контуру) с ядром Коши

$$\frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta_1)}{\zeta_1 - \zeta} d\zeta_1 = \psi(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma. \quad (6.12)$$

Если $\psi(\zeta)$ известная, непрерывная по Гельдеру функция на Γ , а необходимо определить функцию $\varphi(\zeta)$, то приходим к задаче об обращении сингулярного интеграла в (6.12). С использованием формулы перестановки (6.11) эта задача решается сразу. Умножим левую и правую части (6.12) на выражение

$$\frac{d\zeta}{\zeta - \sigma}$$

и проинтегрируем по Γ . Тогда получим

$$\int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - \sigma} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta_1)}{\zeta_1 - \zeta} d\zeta_1 = \pi i \int_{\Gamma} \frac{\psi(\zeta)}{\zeta - \sigma} d\zeta = (i\pi)^2 \varphi(\sigma).$$

Отсюда

$$\varphi(\sigma) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\psi(\zeta)}{\zeta - \sigma} d\zeta, \quad \sigma \in \Gamma. \quad (6.13)$$

Соотношения (6.12) и (6.13) представляют собой две взаимно обратные формулы. Если, например, рассматривать соотношение (6.12) как простейшее сингулярное интегральное уравнение на замкнутом контуре относительно функции φ , то его решение дается формулой (6.13).

В заключение этого пункта отметим некоторые более общие результаты относительно сингулярных интегралов с ядром Коши. Если требовать существования такого интеграла не всюду, а почти всюду на Γ , то можно сформулировать значительно более общие результаты [43], см. также [15].

Теорема 1 (И. И. Привалов). Если на контуре Γ (имеющем непрерывную кривизну) направление выпуклости меняется только конечное число раз, а плотность $\omega(\zeta)$ суммируема на Γ , то сингулярный интеграл

$$\frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\omega(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta, \quad \zeta_0 \in \Gamma$$

существует почти при всех $\zeta_0 \in \Gamma$.

Теорема 2 (И. И. Привалов). Если контур Γ и плотность $\omega(\zeta)$ удовлетворяют условиям теоремы 1, а $z \rightarrow \zeta_0$ по пути, не касательному к Γ , то почти для всех $\zeta_0 \in \Gamma$ существуют пределы

$$\Phi^+(\zeta_0) = \lim_{z \rightarrow \zeta_0} \Phi^+(z), \quad \Phi^-(\zeta_0) = \lim_{z \rightarrow \zeta_0} \Phi^-(z),$$

где

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\omega(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

При этом почти всюду на Γ справедливы формулы Сохоцкого–Племеля

$$\Phi^+(\zeta_0) = \frac{1}{2} \omega(\zeta_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\omega(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta,$$

$$\Phi^-(\zeta_0) = -\frac{1}{2} \omega(\zeta_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\omega(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta.$$

Если $\omega \in H(\lambda)$, $\lambda > 0$ на Γ и Γ — ляпуновский контур [33, 43], то всюду на Γ существуют пределы $\Phi^+(\zeta)$, $\Phi^-(\zeta)$ и верны предельные формулы Сохоцкого–Племеля.

Из теоремы 1 следует, что сингулярный интеграл с ядром Коши можно рассматривать как оператор, который любой суммируемой вдоль Γ функции $\omega(\zeta)$ ставит в соответствие некоторую новую функцию

$$\Omega(\sigma) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\omega(\zeta)}{\zeta - \sigma} d\zeta,$$

определенную почти всюду на Γ . Этот оператор принято обозначать буквой S , так что

$$(S\omega)(\sigma) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\omega(\zeta)}{\zeta - \sigma} d\zeta.$$

Если оператор S переводит некоторое функциональное пространство в себя, то такое пространство называется инвариантным для этого оператора. Напомним определения некоторых функциональных пространств.

Пространство $L^p(\Gamma)$ состоит из всех суммируемых с p -й степенью функций $f(\zeta)$ на Γ , для которых конечен интеграл

$$\|f\|^p = \int_{\Gamma} |f(\zeta)|^p |d\zeta|, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Пространство с весом $L^p(\Gamma; |\zeta - \zeta_0|^\beta)$ состоит из всех функций $f(\zeta)$, для которых конечен интеграл

$$\|f\|^p = \int_{\Gamma} |f(\zeta)|^p |\zeta - \zeta_0|^\beta |d\zeta|, \quad \zeta_0 \in \Gamma, -1 < \beta < p - 1.$$

Пространство Гельдера $\text{Lip}_\alpha(\Gamma)$ или $H(\alpha)$ — множество всех функций, заданных на Γ и удовлетворяющих на Γ условию Гельдера с показателем $\alpha > 0$, норма $f(\zeta) \in \text{Lip}_\alpha(\Gamma)$ определяется по формуле

$$\|f\| = \max |f| + \max \frac{|f(\zeta_2) - f(\zeta_1)|}{|\zeta_2 - \zeta_1|^\alpha}.$$

Имеют место следующие предложения [38, 15].

Теорема 3. Пространство $L^p(\Gamma)$ — инвариантное для оператора S ; этот оператор ограничен в $L^p(\Gamma)$ при $1 < p < \infty$ (для $p = 1$ и $p = \infty$ теорема неверна).

Теорема 4. Пространство $L^p(\Gamma; |\zeta - \zeta_0|^\beta)$ — инвариантное для оператора S ; в этом пространстве оператор S ограничен.

Теорема 5. Если Γ — замкнутый ляпуновский контур, то пространство $\text{Lip}_\alpha(\Gamma)$ функций, удовлетворяющих на Γ условию Липшица с показателем $0 < \alpha < 1$ — инвариантное для оператора S . Оператор S в этом пространстве ограничен.

Если Γ — незамкнутый ляпуновский контур, то при любом α пространство $\text{Lip}_\alpha(\Gamma)$ не является инвариантным для оператора S ; если же $\omega \in \text{Lip}_\alpha(\Gamma)$, $0 < \alpha < 1$ и $\Omega = S(\omega)$, то можно только утверждать, что $\Omega \in \text{Lip}_\alpha(\Gamma')$, где Γ' — любая внутренняя часть Γ .

Формулы дифференцирования и интегрирования. Ниже будем предполагать, что Γ — замкнутый (разомкнутый) контур, обладающий непрерывной кривизной, или конечная система таких контуров $\Gamma_k (\cap \Gamma_k = \emptyset)$, т. е. $\Gamma = \bigcup \Gamma_k$.

Формулы дифференцирования:

1. При $\omega \in L^p(\Gamma)$ $1 < p < \infty$

$$\frac{d}{d\sigma} \int_{\Gamma} \omega(\zeta) \ln \frac{1}{\zeta - \sigma} d\zeta = \pi i \omega(\sigma) + \int_{\Gamma} \frac{\omega'(\zeta)}{\zeta - \sigma} d\zeta.$$

2. Если $\omega(\zeta)$ абсолютно непрерывна на Γ (т. е. почти всюду на Γ имеет конечную производную) и $\omega'(\zeta) \in L^p(\Gamma)$, то

$$\frac{d}{d\sigma} \int_{\Gamma} \frac{\omega(\zeta)}{\zeta - \sigma} d\zeta = \int_{\Gamma} \frac{\omega'(\zeta)}{\zeta - \sigma} d\zeta.$$

Формулы интегрирования.

1. Если $u \in L^p(\Gamma)$, $v \in L^{p'}(\Gamma)$, то

$$\int_{\Gamma} v(\zeta) d\zeta \int_{\Gamma} \frac{u(\zeta_1)}{\zeta_1 - \zeta} d\zeta_1 = \int_{\Gamma} u(\zeta_1) d\zeta_1 \int_{\Gamma} \frac{v(\zeta)}{\zeta_1 - \zeta} d\zeta, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

2. Если при некотором p $0 < p < 1$

$$\int_{\Gamma} \int_{\Gamma} |\phi(\zeta, \zeta_1)|^p |d\zeta| |d\zeta_1| < \infty,$$

то

$$\int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - \zeta_1} \int_{\Gamma} \phi(\zeta, \zeta_1) d\zeta_1 = \int_{\Gamma} d\zeta_1 \int_{\Gamma} \frac{\phi(\zeta, \zeta_1)}{\zeta - \zeta_1} d\zeta.$$

3. Формулы перестановки порядка интегрирования. Если $u \in L^p(\Gamma)$, то

$$\frac{1}{(\pi i)^2} \int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - \sigma} \int_{\Gamma} \frac{u(\zeta_1)}{\zeta_1 - \zeta} d\zeta_1 = u(\sigma).$$

В операторном виде эта формула (Пуанкаре–Бергмана) приобретает вид

$$S^2 = I,$$

где I — тождественный оператор.

6.2. Краевая задача Римана

Пусть L — гладкий замкнутый контур, $G(\zeta)$ и $g(\zeta)$ ($G(\zeta) \neq 0$) — заданные на нем функции класса $H(\lambda)$. Задача Римана (задача сопряжения) заключается в определении кусочно-аналитической функции $\Phi(z)$, удовлетворяющей (линейному) граничному соотношению

$$\Phi^+(\zeta) = G(\zeta)\Phi^-(\zeta) + g(\zeta). \quad (6.14)$$

Функцию $G(\zeta)$ называют коэффициентом, а $g(\zeta)$ — свободным членом задачи Римана. Для уточнения формулировки задачи Римана введем область D^+ (конечную область с границей L) и область $D^- = C\bar{D}^+$ (дополнение замыкания \bar{D}^+ до полной z -плоскости). По определению $\Phi^+(\zeta), \zeta \in L$ является граничным значением аналитической в D^+ функции $\Phi^+(z)$, а $\Phi^-(\zeta)$ есть граничное значение аналитической в D^- функции $\Phi^-(z)$. Можно говорить и об одной кусочно-аналитической функции $\Phi(z)$ с линией скачков L .

Рассмотрим сначала задачу (6.14) при $G(\zeta) \equiv 1$, т. е.

$$\Phi^+(\zeta) - \Phi^-(\zeta) = g(\zeta). \quad (6.15)$$

Это так называемая задача о скачке. Решение ее в силу формулы (6.4) записывается в виде интеграла типа Коши (при дополнительном условии $\Phi^-(\infty) = 0$)

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

При дальнейшем рассмотрении задачи Римана весьма удобно воспользоваться понятием индекса [11, 32, 35, 41, 51].

Пусть L — гладкий замкнутый контур и $G(\zeta) \neq 0$ — заданная на нем непрерывная функция. Под индексом функции $G(\zeta)$ на контуре L понимается разделенное на 2π приращение ее аргумента при полном обходе L в положительном направлении (против хода часовой стрелки). Согласно этому определению

$$\kappa = \text{Ind } G(\zeta) = \frac{1}{2\pi} [\arg G(\zeta)]_L = \frac{1}{2\pi i} [\ln G(\zeta)]_L = \frac{1}{2\pi} \int_L d[\arg G(\zeta)] = \frac{1}{2\pi i} \int_L d \ln G(\zeta), \quad (6.16)$$

где символ $[\cdot]_L$ обозначает приращение соответствующей величины при обходе контура L .

В соответствии с определением индекс κ может быть либо целым числом, либо нулем. Так как логарифм произведения равен сумме, а логарифм частного — разности логарифмов, то соответствующим правилам в силу (6.16) подчиняется и индекс: а именно — индекс произведения равен сумме индексов сомножителей, индекс частного равен разности индексов делимого и делителя. Индексы комплексно сопряженных функций обратны по знаку.

Пусть теперь $G(\zeta)$ дифференцируема и представляет собой краевое значение аналитической в D^+ или в D^- функции. Тогда в соответствии с (6.16)

$$\kappa = \frac{1}{2\pi i} \int_L d(\ln G(\zeta)) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{G'(\zeta)}{G(\zeta)} d\zeta,$$

т. е. индекс равен логарифмическому вычету функции $G(\zeta)$. В силу принципа аргумента [26] индекс функции $G(\zeta)$ равен разности между числом нулей и числом полюсов аналитической в D^+ (за исключением конечного числа полюсов) функции. Если $G(\zeta)$ — краевое значение функции $\Phi^-(z)$, аналитической в области D^- (возможно, за исключением конечного числа полюсов), то индекс равен разности между числом полюсов и числом нулей.

Пример. Пусть $G(\zeta) = \zeta^n$. Очевидно, индекс этой функции по любому гладкому контуру L , содержащему внутри себя начало $\zeta = 0$, равен n .

Возвращаясь к задаче Римана (6.14), рассмотрим сначала случай $g(\zeta) = 0$ (однородная задача). Допустим, что она разрешима, и пусть функции $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ — ее решение. Число нулей функций $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ в областях их определения обозначим соответственно через N^+ и N^- . Тогда из (6.14) заключаем

$$\text{Ind } G(\zeta) = \kappa = N^+ + N^- \geq 0.$$

Таким образом, если $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ не имеют полюсов в своих областях определения, то из разрешимости однородной задачи Римана вытекает неотрицательность индекса κ . При $\kappa = 0$ функции $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ не имеют нулей, при $\kappa > 0$ $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ имеют в совокупности κ нулей.

Рассмотрим вначале случай $\kappa = 0$. В этом случае $\ln G(\zeta)$ есть функция однозначная. Логарифмируя граничное равенство $\Phi^+(\zeta) = G(\zeta)\Phi^-(\zeta)$, приходим к задаче о скачке

$$\ln \Phi^+(\zeta) - \ln \Phi^-(\zeta) = \ln G(\zeta),$$

где $\ln \Phi^+(\zeta)$ и $\ln \Phi^-(\zeta)$ есть граничные значения однозначных аналитических функций $\ln \Phi^+(z)$ и $\ln \Phi^-(z)$. Решение этой задачи, удовлетворяющее условию $\ln \Phi^-(\infty) = 0$, имеет, очевидно, вид

$$\ln \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln G(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \Gamma(z), \quad \Gamma^-(\infty) = 0.$$

Если наложить условие $\Phi^-(\infty) = A$, то предыдущее соотношение дает

$$\Phi^+(z) = Ae^{\Gamma^+(z)}, \quad \Phi^-(z) = Ae^{\Gamma^-(z)}. \quad (6.17)$$

При $A = \Phi^-(\infty) = 0$ получаем тривиальное решение $\Phi(z) \equiv 0$.

Таким образом, если индекс функции $G(\zeta) \in H$, не обращающейся в ноль на L , равен нулю, то $G(\zeta)$ есть отношение граничного значения аналитической в D^+ функции $\Phi^+(z)$ к граничному значению аналитической в D^- функции $\Phi^-(z)$ при условии, что

$\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ не имеют нулей в D^+ и D^- соответственно. Это означает, что имеет место равенство

$$G(\zeta) = \frac{\Phi^+(\zeta)}{\Phi^-(\zeta)},$$

где $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ определяются с точностью до постоянного множителя формулами (6.17).

Рассмотрим теперь случай $\kappa > 0$. Если начало координат лежит в области D^+ , то функция z^κ имеет индекс κ , поэтому можно свести задачу к нулевому индексу следующим образом. Краевое условие задачи Римана представим так:

$$\Phi^+(\zeta) = \zeta^\kappa [\zeta^{-\kappa} G(\zeta)] \Phi^-(\zeta). \quad (6.18)$$

Тогда функция $G_1(\zeta) = \zeta^{-\kappa} G(\zeta)$ будет иметь индекс ноль. На основании решения предыдущей задачи (при $\kappa = 0$) можем записать

$$G_1(\zeta) = \frac{e^{\Gamma^+(\zeta)}}{e^{\Gamma^-(\zeta)}},$$

где

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln G_1(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln [\zeta^{-\kappa} G(\zeta)]}{\zeta - z} d\zeta.$$

С учетом этих соотношений граничное равенство (6.18) представим так:

$$\frac{\Phi^+(\zeta)}{e^{\Gamma^+(\zeta)}} = \zeta^\kappa \frac{\Phi^-(\zeta)}{e^{\Gamma^-(\zeta)}}.$$

В этом равенстве слева стоит краевое значение функции аналитической в области D^+ , а справа — краевое значение функции аналитической в D^- , за исключением бесконечности, где она имеет полюс порядка не выше κ . На основании обобщенной теоремы Лиувилля [26] заключаем, что определена единная аналитическая функция на всей плоскости комплексного переменного z , имеющая в бесконечно удаленной точке полюс порядка не выше κ , т. е. полином $P_\kappa(z)$ степени не выше κ . Следовательно, можем записать

$$\Phi^+(z) = e^{\Gamma^+(z)} P_\kappa(z), \quad \Phi^-(z) = z^{-\kappa} P_\kappa(z) e^{\Gamma^-(z)}.$$

Так как коэффициенты полинома $P_\kappa(z)$ произвольные комплексные числа, то получаем $\kappa+1$ линейно независимых частных решения однородной задачи Римана. Если потребовать, чтобы $\Phi^-(\infty) = 0$, то решения будут содержать полином $P_{\kappa-1}(z)$, т. е.

$$\Phi^+(z) = P_{\kappa-1}(z) e^{\Gamma^+(z)}, \quad \Phi^-(z) = z^{-\kappa} P_{\kappa-1}(z) e^{\Gamma^-(z)}.$$

В этом случае имеем, очевидно, κ линейно независимых решений однородной задачи.

Переходим теперь к решению неоднородной задачи Римана. Здесь оказывается полезным понятие канонического решения. Назовем кусочно-аналитическую функцию $X(z)$, представимую в виде

$$X^+(z) = e^{\Gamma^+(z)}, \quad X^-(z) = z^{-\kappa} e^{\Gamma^-(z)}, \quad (6.19)$$

канонической функцией (каноническим решением) задачи Римана. При $\kappa \geq 0$ каноническая функция является частным решением однородной задачи и общее решение может быть представлено в виде

$$\Phi(z) = X(z)P_\kappa(z).$$

При $\kappa < 0$ каноническая функция имеет на бесконечности полюс порядка $-\kappa$. Записав однородную задачу в форме (6.18), получим, что при любом κ каноническая функция $X(z)$ определяется формулами (6.19).

Учитывая равенство

$$G(\zeta) = \frac{X^+(\zeta)}{X^-(\zeta)},$$

представим неоднородную задачу (6.14) в форме

$$\frac{\Phi^+(\zeta)}{X^+(\zeta)} - \frac{\Phi^-(\zeta)}{X^-(\zeta)} = \frac{g(\zeta)}{X^+(\zeta)}. \quad (6.20)$$

Рассмотрим также вспомогательную задачу

$$\Psi^+(\zeta) - \Psi^-(\zeta) = \frac{g(\zeta)}{X^+(\zeta)},$$

решение которой имеет вид

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g(\zeta) d\zeta}{X^+(\zeta)(\zeta - z)}.$$

Тогда соотношение (6.20) на L можно записать следующим образом:

$$\frac{\Phi^+(\zeta)}{X^+(\zeta)} - \Psi^+(\zeta) = \frac{\Phi^-(\zeta)}{X^-(\zeta)} - \Psi^-(\zeta). \quad (6.21)$$

Здесь слева стоит граничное значение функции аналитической в D^+ , справа — граничное значение функции аналитической в D^- (кроме, быть может, бесконечно удаленной точки). Точнее, если $\kappa < 0$, то $X^-(z)$ на бесконечности имеет полюс, а $\Psi^-(\infty) = 0$. Стало быть,

$$\frac{\Phi^+(z)}{X^+(z)} - \Psi^+(z) = \frac{\Phi^-(z)}{X^-(z)} - \Psi^-(z) = 0$$

при любом z , т. е.

$$\Phi(z) = X(z)\Psi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_L \frac{g(\zeta) d\zeta}{X^+(\zeta)(\zeta - z)}. \quad (6.22)$$

При $\kappa \geq 0$ отношение $\Phi^-(\zeta)/X^-(\zeta)$ является граничным значением функции $\Phi^-(z)/X^-(z)$, аналитической в области D^- за исключением бесконечно удаленной точки, где она имеет полюс порядка κ . На основании обобщенной теоремы Лиувилля получаем из равенств (6.21)

$$\Phi(z) = X(z)[\Psi(z) + P_\kappa(z)]. \quad (6.23)$$

Это решение представляет собой сумму общего решения однородной задачи $X(z)P_k(z)$ и частного решения неоднородной задачи $X(z)\Psi(z)$.

Если наложить на решение дополнительное ограничение $\Phi^-(\infty)=0$, то в формуле (6.23) многочлен $P_k(z)$ заменится на многочлен $P_{k-1}(z)$, т. е. при $k \geq 0$

$$\Phi(z) = X(z)[\Psi(z) + P_{k-1}(z)], \quad (6.24)$$

причем при $k=0$ многочлен $P_{k-1}(z)$ следует положить равным нулю.

При $k < 0$ решение в форме (6.24) существует не всегда. Для того чтобы $\Phi^-(\infty)=0$, необходимо и достаточно, чтобы $\Psi(z)$ на бесконечности имела ноль порядка $-k+1$, а $P_{k-1}(z) \equiv 0$. Выпишем представление интеграла (6.22) в окрестности бесконечно удаленной точки. Имеем

$$\frac{1}{\zeta - z} = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta^{k-1}}{z^k},$$

$$\Psi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{z^k}, \quad C_k = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g(\zeta) \zeta^{k-1}}{X^+(\zeta)} d\zeta.$$

Следовательно, функция $\Psi(z)$ будет иметь на бесконечности ноль порядка $-k+1$, если коэффициенты $C_k = 0$ при $k = 1, 2, \dots, -k$.

Суммируя сказанное, сформулируем следующую теорему [11]. В случае $k \geq 0$ неоднородная задача Римана разрешима при любом свободном члене $g(\zeta)$ и ее общее решение дается формулой (при условии $\Phi^-(\infty)=0$)

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_L \frac{g(\zeta) d\zeta}{X^+(\zeta)(\zeta - z)} + X(z)P_{k-1}(z), \quad (6.25)$$

где каноническая функция $X(z)$ определена в (6.19), а $P_{k-1}(z)$ — полином степени не выше $k-1$ с произвольными комплексными коэффициентами. При $k=0$ полином следует положить равным нулю. Если $k < 0$, то решение по-прежнему будет выражаться формулой (6.25), где $P(z) \equiv 0$, при соблюдении $-k$ условий разрешимости

$$\int_L \frac{g(\zeta) \zeta^{k-1}}{X^+(\zeta)} d\zeta = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, -k) \quad (6.26).$$

Мы рассмотрели задачу Римана для одного замкнутого гладкого контура L при условии, что коэффициент $G(\zeta) \in H$ и нигде на L в нуль не обращается. Различного рода обобщения задачи Римана, например, когда G в конечном числе точек L обращается в нуль или в бесконечность, область в которой ищется решение многосвязна и некоторые другие содержатся в [6, 38].

6.3. Одномерные сингулярные интегральные уравнения с ядром Коши на замкнутом контуре

Под сингулярным интегральным уравнением (СИУ) понимают уравнение вида

$$K\varphi = a(\zeta)\varphi(\zeta) + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{M(\zeta, \sigma)}{\sigma - \zeta} \varphi(\sigma) d\sigma = f(\zeta), \quad \zeta \in L, \quad (6.27)$$

где L гладкий замкнутый контур, а функции $a(\zeta), f(\zeta), M(\zeta, \sigma)$ непрерывны по Гельдеру (функции класса H), причем $M(\zeta, \sigma)$ удовлетворяет условию H по обеим переменным. Будем предполагать, для определенности, что ноль содержится внутри L .

Представим уравнение (6.27) в стандартной форме. Для этого обозначим

$$b(\zeta) = M(\zeta, \zeta), \quad \frac{1}{\pi i} \frac{M(\zeta, \sigma) - M(\zeta, \zeta)}{\sigma - \zeta} = k(\zeta, \sigma). \quad (6.28)$$

Тогда запишем

$$K\varphi = a(\zeta)\varphi(\zeta) + \frac{b(\zeta)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma + \int_L k(\zeta, \sigma) \varphi(\sigma) d\sigma = f(\zeta). \quad (6.29)$$

Здесь $b(\zeta) \in H$, первый интеграл сингулярный с ядром Коши, второй — регулярный (несобственный), так как в силу (6.28)

$$|k(\zeta, \sigma)| < \frac{A}{|\sigma - \zeta|^{1-\lambda}}, \quad 0 < \lambda < 1, \quad A > 0.$$

Уравнение вида (6.29), где $k(\zeta, \sigma)$ — регулярное ядро, называется полным сингулярым (особым) интегральным уравнением. В операторной форме оно выглядит так:

$$K\varphi = a(\zeta)\varphi(\zeta) + b(\zeta)(S\varphi)(\zeta) + (T\varphi)(\zeta) = f(\zeta),$$

где S — сингулярный оператор Коши, T — вполне непрерывный (здесь фредгольмов) оператор в $\text{Lip}_\lambda(L)$. Из него можно выделить так называемую характеристическую часть СИУ

$$K^0\varphi = a(\zeta)\varphi(\zeta) + \frac{b(\zeta)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma = a(\zeta)\varphi(\zeta) + b(\zeta)S(\varphi). \quad (6.30)$$

Оставшаяся часть

$$k\varphi = \int_L k(\zeta, \sigma) \varphi(\sigma) d\sigma$$

называется регулярной частью СИУ.

Таким образом, полное СИУ можно записать в виде

$$K\varphi = K^0\varphi + k\varphi = f.$$

Соответствующее однородное уравнение

$$K\varphi = K^0\varphi + k\varphi = 0.$$

Отметим, что пространство Гельдера $\text{Lip}_\lambda(L)$, ($\lambda > 0$) инвариантно для оператора K^0 , т. е. этот оператор любую функцию $\varphi \in \text{Lip}_\lambda(L)$ переводит в функцию $\psi \in \text{Lip}(L)$.

Решение характеристического уравнения по методу Карлемана. Это уравнение имеет вид

$$K^0\varphi = a(\zeta)\varphi(\zeta) + \frac{b(\zeta)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma = f(\zeta), \quad \zeta \in L. \quad (6.31)$$

Введя кусочно-аналитическую функцию

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma - z} d\sigma \quad (6.32)$$

и воспользовавшись формулами (6.4) и (6.5) для предельных значений функции $\Phi(z)$, придем к следующему граничному равенству:

$$[a(\zeta) + b(\zeta)]\Phi^+(\zeta) = [a(\zeta) - b(\zeta)]\Phi^-(\zeta) + f(\zeta).$$

Далее предположим, что $a^2(\zeta) - b^2(\zeta) \neq 0$ на L (т. е. оператор $K\varphi$ — нормального типа). Тогда, обозначив

$$G(\zeta) = \frac{a(\zeta) - b(\zeta)}{a(\zeta) + b(\zeta)}, \quad g(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{a(\zeta) + b(\zeta)}, \quad (6.33)$$

получим стандартную форму задачи Римана (6.14). Очевидно, $G(\zeta) \in H$ и не обращается в ноль на L , свободный член $g(\zeta)$ также функция класса H . В силу (6.32) решение должно удовлетворять дополнительному условию $\Phi^-(\infty) = 0$. Назовем, следуя [11], индекс κ коэффициента G индексом интегрального уравнения (6.31).

Если $\kappa \geq 0$, то согласно (6.22), (6.24) имеем

$$\begin{aligned} \Phi^+(\sigma) &= \left[X^+(\sigma) - \frac{1}{2} P_{\kappa-1}(\sigma) \right] \Psi^+(\sigma) = \left[X^+(\sigma) - \frac{1}{2} P_{\kappa-1}(\sigma) \right] \left\{ \frac{g(\sigma)}{2X^+(\sigma)} + \Psi(\sigma) \right\}, \\ \Phi^-(\sigma) &= \left[X^-(\sigma) - \frac{1}{2} P_{\kappa-1}(\sigma) \right] \Psi^-(\sigma) = \left[X^-(\sigma) - \frac{1}{2} P_{\kappa-1}(\sigma) \right] \left\{ -\frac{g(\sigma)}{2X^-(\sigma)} + \Psi(\sigma) \right\}, \end{aligned}$$

где $\Psi(\sigma)$ — прямое значение интеграла в (6.22) на L , произвольный полином $P_{\kappa-1}$ заменен на $-0,5P_{\kappa-1}$. Далее, согласно (6.32), (6.33) находим

$$\begin{aligned} \varphi(\sigma) &= \Phi^+(\sigma) - \Phi^-(\sigma) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{G} \right) g(\sigma) + X^+ \left(1 - \frac{1}{G} \right) \Psi(\sigma) - \frac{1}{2} X^+ \left(1 - \frac{1}{G} \right) P_{\kappa-1}(\sigma) = \\ &= \frac{a(\sigma)f(\sigma)}{a^2(\sigma) - b^2(\sigma)} - \frac{b(\sigma)[a(\sigma) + b(\sigma)]}{a^2(\sigma) - b^2(\sigma)} X^+(\sigma) \Psi(\sigma) + \frac{b(\sigma)[a(\sigma) + b(\sigma)]}{a^2(\sigma) - b^2(\sigma)} X^+(\sigma) P_{\kappa-1}(\sigma). \end{aligned}$$

Окончательно запишем

$$[a^2(\sigma) - b^2(\sigma)]\varphi(\sigma) = a(\sigma)f(\sigma) - \frac{b(\sigma)Z(\sigma)}{\pi i} \int_L \frac{f(\zeta)d\zeta}{Z(\zeta)(\zeta - \sigma)} + b(\sigma)Z(\sigma)P_{\kappa-1}(\sigma), \quad (6.34)$$

где

$$\begin{aligned} Z(\sigma) &= [a(\sigma) + b(\sigma)] X^+(\sigma) = [a(\sigma) - b(\sigma)] X^-(\sigma), \\ \Gamma(\sigma) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln [\zeta^{-\kappa} G(\zeta)]}{\zeta - \sigma} d\zeta, \quad G(\zeta) = \frac{a(\zeta) - b(\zeta)}{a(\zeta) + b(\zeta)} = \frac{X^+(\zeta)}{X^-(\zeta)}, \\ X^+(\sigma) &= e^{\Gamma^+(\sigma)}, \quad X^-(\sigma) = \sigma^{-\kappa} \Gamma^-(\sigma). \end{aligned}$$

Учитывая предельное равенство

$$\Gamma^+(\sigma) = \frac{1}{2} \ln \left[\sigma^{-\kappa} \frac{a(\sigma) - b(\sigma)}{a(\sigma) + b(\sigma)} \right] + \Gamma(\sigma),$$

перепишем функцию $Z(\sigma)$ в более удобном виде

$$Z(\sigma) = [a(\sigma) + b(\sigma)] \Gamma^+(\sigma) = [a(\sigma) + b(\sigma)] e^{\Gamma(\sigma)} \sigma^{-\frac{\kappa}{2}} \sqrt{\frac{a(\sigma) - b(\sigma)}{a(\sigma) + b(\sigma)}} = \sqrt{\frac{a^2(\sigma) - b^2(\sigma)}{\sigma^\kappa}} e^{\Gamma(\sigma)}.$$

Таким образом, имеем две взаимно-обратные формулы

$$\begin{aligned} K^0 \varphi &= a(\zeta) \varphi(\zeta) + \frac{b(\zeta)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma = f(\zeta), \\ \varphi(\sigma) &= Rf + b_*(\sigma) Z(\sigma) P_{\kappa-1}(\sigma), \\ Rf &= \left\{ a_*(\sigma) f(\sigma) - \frac{b_*(\sigma) Z(\sigma)}{\pi i} \int_L \frac{f(\zeta) d\zeta}{Z(\zeta)(\zeta - \sigma)} \right\}, \\ a_*(\sigma) &= \frac{a(\sigma)}{a^2(\sigma) - b^2(\sigma)}, \quad b_*(\sigma) = \frac{b(\sigma)}{a^2(\sigma) - b^2(\sigma)}, \end{aligned} \tag{6.35}$$

где Rf — частное решение характеристического СИУ (6.31). Легко видеть, что $\varphi(\sigma) \in H$. Так как $P_{\kappa-1}(\sigma)$ — произвольный полином порядка не выше $\kappa-1$, то согласно формуле (6.34) однородное уравнение имеет нетривиальные решения (собственные функции) $\varphi_k = b_*(\sigma) Z(\sigma) \sigma^{k-1}$ ($k = 1, 2, \dots, \kappa$). Общее решение характеристического СИУ (6.31) можно теперь представить так:

$$\varphi(\sigma) = (Rf)(\sigma) + \sum_{k=1}^{\kappa} c_k \varphi_k(\sigma), \tag{6.36}$$

где c_k — произвольные постоянные.

При $\kappa = 0$ формула (6.34) остается справедливой, необходимо только полином $P_{\kappa-1}$ положить равным нулю. Это означает, что однородное уравнение не имеет собственных функций и формула (6.36) приобретает вид

$$\varphi(\sigma) = (Rf)(\sigma). \tag{6.37}$$

Наконец, при $\kappa < 0$ уравнение (6.31) однозначно разрешимо тогда и только тогда, когда его правая часть f удовлетворяет $-\kappa$ условиям

$$\int_L \frac{g(\zeta) \zeta^{k-1}}{X^+(\zeta)} d\zeta = \int_L \frac{f(\zeta) \zeta^{k-1} d\zeta}{[a(\zeta) + b(\zeta)] X^+(\zeta)} = \int_L \frac{\zeta^{k-1}}{Z(\zeta)} f(\zeta) d\zeta = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, -\kappa), \quad (6.38)$$

решение определяется формулой (6.37).

Союзное СИУ. Союзным уравнением к сингулярному уравнению (6.29) называется уравнение

$$K' \psi = a(\zeta) \psi(\zeta) - \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{b(\sigma) \psi(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma + \int_L k(\sigma, \zeta) \psi(\sigma) d\sigma = g(\zeta). \quad (6.39)$$

Оператор K' называется союзным к оператору K , прямое вычисление с учетом формулы перестановки порядка интегрирования типа (6.9) дает

$$\int_L \psi K \phi d\zeta = \int_L \phi K' \psi d\zeta.$$

Рассмотрим уравнение, союзное к характеристическому $K^0 \phi = f$

$$K^{0'} = a(\zeta) \psi(\zeta) - \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{b(\sigma) \psi(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma = g(\zeta), \quad \zeta \in L. \quad (6.40)$$

Это уравнение не является характеристическим СИУ, однако при помощи подстановки

$$\omega(\zeta) = b(\zeta) \psi(\zeta)$$

оно сводится к характеристическому уравнению относительно функции ω

$$a(\zeta) \omega(\zeta) - \frac{b(\zeta)}{\pi i} \int_L \frac{\omega(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma = g(\zeta) b(\zeta). \quad (6.41)$$

Вводя кусочно-аналитическую функцию

$$\Omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega(\sigma)}{\sigma - z} d\sigma$$

и повторяя процедуру сведения характеристического СИУ к задаче Римана, получим

$$\Omega^+(\zeta) = G'(\zeta) \Omega^-(\zeta) + g'(\zeta), \quad (6.42)$$

где

$$G'(\zeta) = \frac{a(\zeta) + b(\zeta)}{a(\zeta) - b(\zeta)} = \frac{1}{G(\zeta)}, \quad g'(\zeta) = \frac{b(\zeta) g(\zeta)}{a(\zeta) - b(\zeta)}, \quad X'(z) = \frac{1}{X(z)},$$

$$\kappa' = \text{Ind } G'(\zeta) = -\text{Ind } G(\zeta) = -\kappa.$$

Соответственно (6.42) получаем решение союзного уравнения (6.40).

При $\kappa' = -\kappa > 0$

$$\psi(\sigma) = (R'g)(\sigma) + [Z(\sigma)]^{-1} Q_{\kappa'-1}(\sigma), \quad (6.43)$$

$$(R'g)(\sigma) = a_*(\sigma) g(\sigma) + \frac{[Z(\sigma)]^{-1}}{\pi i} \int_L \frac{b_*(\zeta) g(\zeta)}{\zeta - \sigma} Z(\zeta) d\zeta.$$

Здесь $Q_{\kappa'-1}$ — произвольный полином степени не выше $\kappa'-1$, функции a_*, b_*, Z определены в (6.35), (6.34). Общее решение однородного уравнения ($g \equiv 0$) при $\kappa' > 0$ определяется выражением

$$\psi_0(\sigma) = \frac{Q_{\kappa'-1}(\sigma)}{Z(\sigma)} = \sum_{k=1}^{\kappa'} c'_k \psi_k(\sigma), \quad \psi_k(\sigma) = \frac{\sigma^{k-1}}{Z(\sigma)} \quad (k = 1, 2, \dots, \kappa'),$$

где c'_k — произвольные постоянные, $\psi_k(\sigma)$ — собственные функции уравнения (6.41).

При $\kappa' = 0$ решение имеет вид

$$\psi(\sigma) = (R'g)(\sigma), \quad (6.44)$$

т. е. однородное уравнение не имеет отличных от нуля решений.

Если $\kappa' < 0$, то для существования решения необходимо и достаточно выполнения $-\kappa' = \kappa$ условий разрешимости

$$\int_L \zeta^{\kappa'-1} Z(\zeta) b^*(\zeta) g(\zeta) d\zeta = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, -\kappa'). \quad (6.45)$$

При этом решение определяется формулой (6.44).

Таким образом, условия разрешимости (6.38) и (6.45) имеют вид, который требуется четвертой теоремой Фредгольма, а именно: для разрешимости уравнения (6.31) при $\kappa < 0$ необходимо и достаточно, чтобы его правая часть $f(\zeta)$ была ортогональна¹⁾ всем линейно-независимым собственным функциям союзного уравнения (6.40), т. е.

$$\int_L f(\zeta) \psi_k(\zeta) d\zeta = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, \kappa').$$

Для разрешимости союзного уравнения (6.40) при $\kappa' < 0$ необходимо и достаточно, чтобы его правая часть $g(\zeta)$ была ортогональна всем (линейно независимым) собственным функциям уравнения (6.31), т. е.

$$\int_L g(\zeta) \varphi_k(\zeta) d\zeta = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, \kappa).$$

6.4. Регуляризация полного СИУ. Теоремы Ф. Нетера

Процесс приведения сингулярного интегрального уравнения к уравнению типа Фредгольма называется регуляризацией. Идея здесь заключается в том, чтобы на данный сингулярный оператор воздействовать специально подобранным другим сингулярным оператором так, чтобы в результате получился оператор вида $T + I$, где T — вполне непрерывный, а I — тождественный оператор.

Композиция сингулярных операторов. Рассмотрим композицию $K_2 K_1$ сингулярных операторов, где

$$K_1 \varphi = a_1(\zeta) \varphi(\zeta) + \frac{b_1(\zeta)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma + \int_L K_1(\zeta, \sigma) \varphi(\sigma) d\sigma,$$

¹⁾ Строго говоря, выписанные ниже условия не есть условия ортогональности, так как фигурирующие в них функции комплексные.

$$K_2\varphi = a_2(\zeta)\varphi(\zeta) + \frac{b_2(\zeta)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma + \int_L K_2(\zeta, \sigma)\varphi(\sigma) d\sigma.$$

Легко видеть, учитывая (6.11), что характеристическая часть композиции операторов K_2K_1 такова:

$$K^0\varphi = (K_2K_1)^0\varphi = a(\zeta)\varphi(\zeta) + \frac{b(\zeta)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma,$$

причем

$$a(\zeta) = a_2(\zeta)a_1(\zeta) + b_2(\zeta)b_1(\zeta), \quad b(\zeta) = a_2(\zeta)b_1(\zeta) + b_2(\zeta)a_1(\zeta). \quad (6.46)$$

Таким образом, характеристическая часть композиции K_2K_1 (впрочем, также как и K_1K_2) не зависит от регулярных частей этих операторов и от порядка следования их в произведении. Коэффициент задачи Римана, соответствующей характеристическому оператору $(K_2K_1)^0$ определяется формулой

$$G(\zeta) = \frac{a(\zeta) - b(\zeta)}{a(\zeta) + b(\zeta)} = \frac{[a_2(\zeta) - b_2(\zeta)][a_1(\zeta) - b_1(\zeta)]}{[a_2(\zeta) + b_2(\zeta)][a_1(\zeta) + b_1(\zeta)]} = G_2(\zeta)G_1(\zeta), \quad (6.47)$$

где через G_1 и G_2 обозначены коэффициенты задач Римана, соответствующих операторам K_1^0 и K_2^0 . Следовательно, индекс композиции $(K_2K_1)^0$ равен сумме индексов перемножаемых операторов

$$\kappa = \kappa_1 + \kappa_2. \quad (6.48)$$

Результат композиции полных операторов K_2 и K_1 имеет вид [11, 38]

$$K_2K_1\varphi = a(\zeta)\varphi(\zeta) + \frac{b(\zeta)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma + \int_L k(\zeta, \sigma)\varphi(\sigma) d\sigma, \quad (6.49)$$

где $a(\zeta)$ и $b(\zeta)$ определены формулами (6.46), а $k(\zeta, \sigma)$ — регулярное ядро.

Регуляризирующий оператор. Сингулярный оператор K_2 называется регуляризирующим по отношению к сингулярному оператору K_1 , если оператор K_2K_1 фредгольмов, т. е. в (6.49) коэффициент $b(\zeta) \equiv 0$. Очевидно, при этом и оператор K_1K_2 будет регулярным.

Исходя из (6.46) и (6.49) можно получить общее представление регуляризатора \tilde{K} для сингулярного оператора

$$K\varphi = a(\zeta)\varphi(\zeta) + \frac{b(\zeta)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma + \int_L k(\zeta, \sigma)\varphi(\sigma) d\sigma.$$

Имеем

$$\tilde{K}\omega = u(\zeta) \left\{ a(\zeta)\omega(\zeta) - \frac{b(\zeta)}{\pi i} \int_L \frac{\omega(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma \right\} + \int_L \tilde{k}(\zeta, \sigma)\omega(\sigma) d\sigma, \quad (6.50)$$

где $u(\zeta)$ — произвольная функция класса H , $\tilde{k}(\zeta, \sigma)$ — произвольное регулярное ядро. Например, при $u(\zeta) \equiv 1$ и $\tilde{k}(\zeta, \sigma) \equiv 0$ получаем из (6.50)

$$\tilde{K}\omega = a(\zeta)\omega(\zeta) - \frac{b(\zeta)}{\pi i} \int_{\sigma-\zeta}^{\omega(\sigma)} d\sigma = K^0(\omega),$$

где K^0 — характеристическая часть союзного оператора K' .

Положим

$$u(\zeta) \equiv 1, \quad \tilde{k}(\zeta, \sigma) = -\frac{1}{\pi i} \frac{b(\sigma) - b(\zeta)}{\sigma - \zeta}.$$

Тогда $\tilde{K}\omega = K^0(\omega)$, где оператор K^0 — союзный к характеристическому K^0 , определен в (6.40).

Различают регуляризацию слева ($\tilde{K}K$) и регуляризацию справа ($K\tilde{K}$). Операция композиции операторов не обладает коммутативностью, однако если \tilde{K} регуляризатор, то оба оператора $\tilde{K}K$ и $K\tilde{K}$ — регулярны, т. е. операция регуляризации коммутативна. Значит, если \tilde{K} — регуляризатор для оператора K , то и K является регуляризатором для оператора \tilde{K} . Иными словами,

$$\tilde{K}K - K\tilde{K} = T,$$

где T — вполне непрерывный оператор (в данной ситуации фредгольмов).

Регуляризация слева. Рассмотрим полное уравнение (6.29) $K\varphi = f$ и подействуем на обе части этого уравнения оператором \tilde{K} . В результате получим новое уравнение, которое будет регулярным

$$\tilde{K}K\varphi = \tilde{K}f.$$

Таким образом, функция $\varphi(\zeta)$ удовлетворяет как сингулярному, так и регулярному уравнению.

Регуляризация справа. Если в уравнении (6.29) сделать подстановку $\varphi = \tilde{K}\omega$, то получим регулярное уравнение

$$K\tilde{K}\omega = f.$$

Решив его и найдя ω , вычисляем решение исходного уравнения по формуле $\varphi = \tilde{K}\omega$.

В результате регуляризации исходного СИУ можно потерять или, наоборот, внести посторонние решения, не удовлетворяющие ему. В связи с этим возникает принципиальный вопрос о построении равносильной регуляризации уравнения (6.29).

Под равносильной регуляризацией слева понимается следующее. Уравнения $K\varphi = f$ и $\tilde{K}K\varphi = \tilde{K}f$ эквивалентны (т. е. оба разрешимы или оба неразрешимы и если разрешимы, то имеют одинаковые решения). Представим регуляризованное уравнение (6.29) в виде

$$\tilde{K}(K\varphi - f) = 0. \tag{6.51}$$

Отсюда следует, что любое решение уравнения (6.29) является решением уравнения (6.51), т. е. потери решений при регуляризации слева нет. С другой стороны, так как уравнение

(6.51) однородное, могут существовать собственные функции оператора \tilde{K} . Обозначим их через ω_j . Тогда из (6.51) получаем уравнение

$$K\varphi - f = \sum_j C_j \omega_j(\zeta). \quad (6.52)$$

Пусть, для определенности, $\tilde{K} = K^0$ — союзный к характеристическому оператору K^0 . Если \tilde{K} не имеет собственных функций (для оператора K^0 это означает, что $\kappa' = -\kappa \leq 0$), регуляризация слева является равносильной. При $\kappa' = -\kappa > 0$ собственные функции оператора \tilde{K} существуют, следовательно, регуляризация слева может привести в этом случае к дополнительным решениям согласно (6.52).

При регуляризации справа $K\tilde{K}\omega = f$, $\varphi = \tilde{K}\omega$ возможна ситуация, когда для некоторого решения $\varphi_0(\zeta)$ уравнения (6.29), решения ω_0 уравнения $\varphi_0 = \tilde{K}\omega_0$ не существует (т. е. это уравнение не имеет решения). В этом случае произойдет потеря решений. Для того чтобы регуляризация справа была равносильной, необходимо и достаточно, чтобы уравнение $\tilde{K}\omega = \varphi$ имело решение при любой правой части, что имеет место при $\kappa' = -\kappa \geq 0$.

Сформулируем теперь основные теоремы теории СИУ, впервые установленные Ф. Нетером (см. [13, 15, 18, 45, 46, 53]).

Теорема 1. Число решений СИУ (6.29) конечно.

В самом деле, регуляризация полного СИУ слева не дает потери решений, значит, число решений этого уравнения не больше числа решений уравнения Фредгольма $\tilde{K}K\varphi = \tilde{K}f$. Но согласно третьей теореме Фредгольма, число линейно-независимых решений, соответствующих характеристическому числу, конечно (см. гл. 5, пп. 5.1, 5.3 и 5.4).

Теорема 2. Для разрешимости сингулярного интегрального уравнения (6.29) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$\int_L f(\zeta) \psi_j(\zeta) d\zeta = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, \kappa'), \quad (6.53)$$

где $\psi_1(\zeta), \psi_2(\zeta), \dots, \psi_{\kappa'}(\zeta)$ — полная система линейно-независимых решений союзного однородного уравнения $K'\psi = 0$.

Необходимость следует из тождества

$$\int_L \psi K\varphi d\zeta = \int_L \varphi K'\psi d\zeta.$$

Действительно, пусть φ является решением уравнения (6.29), т. е. $K\varphi = f$. Тогда

$$\int_L f \psi_j d\zeta = \int_L \psi_j K\varphi d\zeta = \int_L \varphi K'\psi_j d\zeta = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, \kappa').$$

Доказательство достаточности несколько громоздко, оно содержится, например, в [38].

Теорема 3. Разность числа n линейно-независимых решений сингулярного интегрального уравнения $K\varphi = 0$ и числа n' линейно-независимых решений союзного уравнения $K'\psi = 0$ зависит лишь от характеристической части K и равна его индексу, т. е.

$$n - n' = \kappa. \quad (6.54)$$

Эта теорема вскрывает принципиальные отличия между теориями сингулярных и регулярных интегральных уравнений. Докажем ее.

Пусть $\kappa \geq 0$ и положим $\tilde{K} = K^0$. Тогда фредгольмово уравнение $K^0 K \varphi = 0$ будет равносильно исходному СИУ $K \varphi = 0$ (так как $\kappa' < 0$ и однородное уравнение $K^0 \psi = 0$ не имеет ненулевых решений). Значит, если уравнение $K \varphi = 0$ имеет n линейно-независимых решений, то столько же решений имеет уравнение $K^0 K \varphi = 0$. В силу третьей теоремы Фредгольма союзное уравнение $(K^0 K)^\psi = K' K^0 \psi = 0$ также имеет n решений. Полученное уравнение равносильно уравнению с правой частью

$$K^0 \psi = \alpha_1 \psi_1 + \alpha_2 \psi_2 + \dots + \alpha_n \psi_n,$$

где ψ_j ($j = 1, 2, \dots, n'$) — собственные функции оператора K' , а α_j — произвольные постоянные. Так как $\kappa \geq 0$, решение этого последнего уравнения определяется согласно (6.36) равенством

$$\psi = R \sum_{j=1}^{n'} \alpha_j \psi_j + \sum_{k=1}^{\kappa} c_k \varphi_k = \sum_{j=1}^{n'} \alpha_j R \psi_j + \sum_{k=1}^{\kappa} c_k \varphi_k.$$

Теперь покажем, что все $n' + \kappa$ функций, стоящих в правой части этого равенства линейно-независимы.

Пусть, напротив, они линейно зависимы, т. е.

$$\sum_{j=1}^{n'} \alpha_j R \psi_j + \sum_{k=1}^{\kappa} c_k \varphi_k = 0,$$

причем хотя бы один из коэффициентов α_j отличен от нуля. В этом случае

$$K^0 \psi = \sum_{j=1}^{n'} \alpha_j \psi_j \neq 0,$$

что невозможно, ибо мы предположили, что функции ψ_j линейно-зависимы. Равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k = 0$$

возможно только при всех c_k равных нулю в силу линейной независимости собственных функций φ_k .

Следовательно, уравнение $K' K^0 \psi = 0$ имеет $\kappa + n'$ решений, откуда следует равенство $n = \kappa + n'$.

Для случая $\kappa < 0$ используется свойство взаимности союзных операторов. В качестве исходного возьмем союзный оператор K' , имеющий индекс $\kappa' = -\kappa > 0$. На основании доказанного имеем $n' - n = -\kappa$, откуда снова приходим к формуле (6.54).

Особо следует отметить важный частный случай нулевого индекса ($\kappa = 0$). В этом случае для сингулярного интегрального уравнения оказываются справедливыми все теоремы Фредгольма. Поэтому их называют квазифредгольмовыми (фредгольмовыми) [35].

6.5. Регуляризация СИУ по Карлеману–Векуа

Рассмотрим полное сингулярное интегральное уравнение

$$K\varphi = a(\zeta)\varphi(\zeta) + \frac{b(\zeta)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma + \int_L k(\zeta, \sigma)\varphi(\sigma) d\sigma = f(\zeta), \quad (6.55)$$

где ядро $k(\zeta, \sigma)$ имеет слабую особенность

$$k(\zeta, \sigma) = \frac{k^*(\zeta, \sigma)}{|\zeta - \sigma|^\lambda}, \quad 0 \leq \lambda < 1, \quad k^*(\zeta, \sigma) \in H.$$

Перенося регулярный интеграл в правую часть, представим это уравнение в форме характеристического

$$a(\zeta)\varphi(\zeta) + \frac{b(\zeta)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma = f(\zeta) - \int_L k(\zeta, \sigma)\varphi(\sigma) d\sigma.$$

Считая правую часть известной, решим это характеристическое уравнение. По формуле (6.35) запишем

$$\varphi(\sigma) = [R(f - k\varphi)(\zeta)](\sigma) + b_*(\sigma)Z(\sigma)P_{\kappa-1}(\sigma).$$

Композиция

$$\begin{aligned} (Rk)\varphi &= a_*(\sigma) \int_L k(\sigma, \zeta)\varphi(\zeta) d\zeta - \frac{b_*(\sigma)Z(\sigma)}{\pi i} \int_L \frac{d\zeta}{Z(\zeta)(\zeta - \sigma)} \int_L k(\zeta, \sigma)\varphi(\sigma) d\sigma = \\ &= \int_L H(\sigma, \zeta)\varphi(\zeta) d\zeta, \end{aligned}$$

где ядро

$$H(\sigma, \zeta) = a_*(\sigma)k(\sigma, \zeta) - \frac{b^*(\sigma)Z(\sigma)}{\pi i} \int_L \frac{k(\tau, \zeta)d\tau}{Z(\tau)(\tau - \zeta)}$$

имеет ту же оценку, что и ядро k , т. е. фредгольмово.

Таким образом, при $\kappa \geq 0$ полное СИУ (6.55) свелось к регулярному (фредгольмову) интегральному уравнению

$$\varphi(\sigma) + \int_L H(\sigma, \zeta)\varphi(\zeta) d\zeta = f_1(\sigma), \quad (6.56)$$

где ядро $H(\sigma, \zeta)$ определено выше, а правая часть имеет вид

$$f_1(\sigma) = (Rf)(\sigma) + b_*(\sigma)Z(\sigma)P_{\kappa-1}(\sigma),$$

$$(Rf)(\sigma) = a_*(\sigma)f(\sigma) - \frac{b_*(\sigma)}{\pi i} Z(\sigma) \int_L \frac{f(\zeta)d\zeta}{Z(\zeta)(\zeta - \sigma)}.$$

Если $\kappa < 0$, то необходимо здесь положить многочлен $P_{\kappa-1}(\sigma) \equiv 0$ и учесть, что формула (6.35) имеет место только при выполнении условий (6.38), которые в нашем случае принимают вид

$$\int_L \frac{f(\zeta) - (k\varphi)(\zeta)}{Z(\zeta)} \zeta^{m-1} d\zeta = 0 \quad (m = 1, 2, \dots, -\kappa), \quad (6.57)$$

где

$$(k\varphi)(\zeta) = \int_L k(\zeta, \sigma) \varphi(\sigma) d\sigma.$$

Стало быть, вопрос сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода (6.56) при выполнении $-\kappa$ условий (6.57). Исходному СИУ (6.55) удовлетворяют те решения уравнения (6.56), для которых выполняются функциональные уравнения (6.57). Если условия (6.57) не выполняются ни для одного из решений регуляризованного уравнения (6.56), то это означает неразрешимость исходного СИУ.

При $\kappa > 0$ уравнения (6.55) и (6.56) равносильны. При $\kappa < 0$ СИУ (6.55) равносильно уравнению (6.56) совместно с дополнительными уравнениями (6.57) (в указанном выше смысле). Более подробно см. в [38].

Пример. Пусть L — окружность $|\zeta| = 1$. Рассмотрим уравнение

$$u(t) \cos \theta + \frac{\sin \theta}{\pi} \int_L \frac{u(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta = f(t), \quad t = e^{i\theta}.$$

Здесь

$$a(t) = \cos \theta = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right), \quad b(t) = i \sin \theta = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right), \quad a^2(t) - b^2(t) = 1.$$

Вводя функцию $\Phi(z)$ по формуле

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{u(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

получим

$$u(\zeta) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t),$$

$$(Su)(t) = \Phi^+(t) + \Phi^-(t) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{u(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta.$$

Соответствующая задача Римана принимает вид

$$\frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) (\Phi^+ - \Phi^-) + \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) (\Phi^+ + \Phi^-) = f(t)$$

или

$$\Phi^+(t) = \frac{1}{t^2} \Phi^-(t) + \frac{1}{t} f(t). \quad (6.58)$$

Индекс данной задачи Римана

$$\kappa = \left[\frac{1}{2\pi i} \ln G \right]_L = \left[\frac{1}{2\pi i} \ln \frac{1}{t^2} \right]_L = -\frac{2}{2\pi i} [\ln t]_L = -2.$$

Согласно формулам (6.35), (6.37) запишем

$$u(t) = (Rf)(t) = a_*(t) f(t) - \frac{b_*(t)}{\pi i} Z(t) \int_L \frac{f(\zeta) d\zeta}{Z(\zeta)(\zeta-t)},$$

где

$$a_*(t) = \frac{a(t)}{a^2(t) - b^2(t)} = \cos \theta, \quad b_*(t) = \frac{b(t)}{a^2(t) - b^2(t)} = i \sin \theta, \quad Z(t) = t.$$

Пусть кусочно-аналитическая функция $\Phi_1(z)$ определяется равенствами

$$\Phi_1^+(z) = \Phi^+(z), \quad |z| < 1,$$

$$\Phi_1^-(z) = \frac{1}{z^2} \Phi^-(z), \quad |z| > 1.$$

Тогда задача Римана (6.56) относительно функции $\Phi_1(z)$ дает

$$\Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t) = \frac{f(t)}{t}.$$

Отсюда

$$\Phi^+(z) = \Phi_1^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta-z)\zeta}, \quad |z| < 1,$$

$$\Phi^-(z) = z^2 \Phi_1^-(z) = \frac{z^2}{2\pi i} \int_L \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta-z)\zeta}, \quad |z| > 1. \quad (6.59)$$

Так как, согласно определению $\Phi(z)$, на бесконечности $\Phi^-(z)$ исчезает, то необходимо потребовать, чтобы

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^2}{2\pi i} \int_L \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta-z)\zeta} = 0.$$

Это приводит к дополнительным условиям

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta = 0, \quad \frac{1}{2\pi i} \int_L f(\zeta) d\zeta = 0.$$

Эти условия, как легко видеть, совпадают с условиями разрешимости (6.38).

Приведем теперь общую постановку задачи о регуляризации операторного уравнения в рамках функционального анализа [18]. Пусть X, X_1 — пара банаевых пространств и $A: X \rightarrow X_1$ — линейный замкнутый оператор (область его значений замкнута в X_1).

Будем говорить, что оператор A допускает левую регуляризацию, если существует такой ограниченный оператор $B: X_1 \rightarrow X$, что

$$BA = I + T,$$

где I — тождественный, а T — вполне непрерывный оператор в X .

Аналогично оператор A допускает правую регуляризацию, если существует такой ограниченный оператор $C: X \rightarrow X_1$, что

$$AC = I_1 + T_1,$$

где I_1 — тождественный, а T_1 — вполне непрерывный операторы в пространстве X_1 .

Операторы B и C называются соответственно левым и правым регуляризатором.

Оператор A допускает левую эквивалентную регуляризацию, если существует такой левый регуляризатор B , что уравнения $Au = f$ и $BAu = Bf$ эквивалентны, каков бы ни был элемент $f \in X_1$.

Оператор A допускает правую эквивалентную регуляризацию, если существует такой правый регуляризатор C , что при любом $f \in X_1$ уравнения $Au = f$ и $ACv = f$ эквивалентны в следующем смысле: эти два уравнения одновременно разрешимы или неразрешимы; любому решению u уравнения $Au = f$ соответствует решение v уравнения $ACv = f$ такое, что $Cv = u$.

Очевидно, если оператор A допускает левую регуляризацию, то сопряженный оператор A^* допускает правую регуляризацию и наоборот. Покажем, что уравнения $Au = f$ и $A^*Au = A^*f$ равносильны, если исходное уравнение разрешимо. В противном случае наряду с решением u_0 ($Au_0 = f$) существует еще и функция u_1 ($A^*Au_1 = A^*f$ и $Au_1 = f$). Рассмотрим разность $A^*A(u_1 - u_0) = 0$ и умножим ее скалярно на $u_1 - u_0$. Тогда получим

$$0 = \langle A^*A(u_1 - u_0), u_1 - u_0 \rangle = \langle A(u_1 - u_0), A(u_1 - u_0) \rangle \Rightarrow A(u_1 - u_0) = 0,$$

т. е. $Au_1 = Au_0$, что привело к противоречию.

Напомним некоторые определения и факты [18, 55, 56] (см. также гл. 3, п. 3.13). Решения однородного операторного уравнения $Au = 0$ называются нулями оператора A . Если A — замкнутый линейный оператор, то его нули образуют подпространство $N(A) = \ker A$ (ядро оператора A), размерность которого $n(A) = \dim N(A)$ равна числу нулей (нетривиальных решений) данного однородного уравнения. Число $m(A) = \dim N(A^*)$ называется дефектом оператора A . Индексом оператора ($\text{Ind } A$) называется число

$$\kappa = \kappa(A) = n(A) - m(A) = n(A) - n(A^*) = -\kappa(A^*).$$

Оператор A с областью определения D_A , плотной в банаховом пространстве X и со значениями в банаховом пространстве X_1 , называется нормально разрешимым, если

$$R_A = AD_A = \{y \in X_1 : \langle y, \psi \rangle = 0, \forall \psi \in \ker A^*\}.$$

Необходимые условия разрешимости уравнения $Ax = u$ записываются сразу с использованием сопряженного оператора A^* . Имеем $\langle y, \psi_j \rangle = \langle Ax, \psi_j \rangle = \langle x, A^*\psi_j \rangle = 0, \forall \psi_j \in \ker A^*$. Если $\ker A^* = \{0\}$, т. е. содержит только нулевой элемент, то это условие нормальной разрешимости оператора A означает, что $R_A = X_1$ т. е. область его значения совпадает со всем пространством X_1 (уравнение $Ax = u$ разрешимо при любом $u \in X_1$).

Нормально разрешимый оператор A называется нетеровым (N -оператором), если:

1. $N(A) = \ker A$ конечномерно,
2. $N(A^*) = \ker A^*$ конечномерно.

Таким образом, нетеров оператор имеет конечное число нулей ($0 \leq n(A) < +\infty$) и конечный дефект ($0 \leq m(A) < +\infty$). Нетеровы операторы с нулевым индексом ($\kappa = 0$) называются фредгольмовыми (F -операторами). Имеют место следующие предложения.

1. Если оператор A допускает левую регуляризацию, то число $n(A)$ конечно. Если оператор A допускает правую регуляризацию, то конечно число $n(A^*)$. Если оператор A допускает двустороннюю (левую и правую) регуляризацию, то индекс A конечен.

2. Если замкнутый оператор допускает левую регуляризацию, то он нормально разрешим.

3. Пусть ограниченный оператор A , действующий из X в X_1 , допускает левую регуляризацию. Тогда для любого вполне непрерывного оператора: $T: X \rightarrow X_1$, справедливо тождество

$$\text{Ind}(A + T) = \text{Ind } A.$$

4. Пусть оператор A допускает левую регуляризацию и B — левый регуляризатор оператора A . Пусть K — оператор, действующий из X в X_1 , такой что $\|B\|\|K\| < 1$. Тогда

$$\text{Ind}(A + K) = \text{Ind } A.$$

Символ сингулярного оператора. Рассмотрим одномерное (полное) СИУ.

$$Au = a(\zeta)u(\zeta) + b(\zeta)(Su)(\zeta) + (Tu)(\zeta) = f(\zeta) \quad (6.60)$$

в пространстве $L^p(\Gamma)$, где Γ — замкнутый контур с непрерывной кривизной, T — оператор вполне непрерывный в $L^p(\Gamma)$; $a(\zeta)$ и $b(\zeta) \in C(\Gamma)$, $f(\zeta) \in L^p(\Gamma)$. Искомая функция $u(\zeta)$ разыскивается в классе $L^p(\Gamma)$.

Символом сингулярного оператора A , определяемого левой частью уравнения (6.60), называется функция двух переменных ζ и θ

$$\Phi_A(\zeta, \theta) = a(\zeta) + \theta b(\zeta),$$

где независимая переменная θ может принимать только два значения: $+1$ и -1 . Из определения символа вытекает, что:

- 1) символ тождественного оператора $Au = u$ равен единице;
- 2) символ любого вполне непрерывного оператора равен нулю;

3) символ суммы двух сингулярных операторов равен сумме их символов;

4) по данному символу сингулярный оператор восстанавливается с точностью до вполне непрерывного слагаемого;

5) символ произведения двух сингулярных операторов равен произведению символов этих операторов. Это свойство вытекает из формулы перестановки Пуанкаре–Бертрана $S^2 = I$ и следующего факта.

Если функция $C(\zeta)$ непрерывна на Γ , то оператор

$$S(Cu) - CSu = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{C(\zeta) - C(\sigma)}{\zeta - \sigma} u(\zeta) d\zeta$$

вполне непрерывен в $L^p(\Gamma)$ [58].

Из свойств 4) и 5) вытекает, что умножение сингулярных операторов коммутативно с точностью до вполне непрерывного оператора, т. е. если A_1 и A_2 — сингулярные операторы, то разность $A_1 A_2 - A_2 A_1$ вполне непрерывна.

По определению, символ вырождается, если хотя бы для одного $\zeta \in \Gamma$ выражение $a^2(\zeta) - b^2(\zeta) = 0$. В противном случае, когда $a^2(\zeta) - b^2(\zeta) \neq 0$, $\forall \zeta \in \Gamma$, говорят, что символ оператора (6.60) не вырождается.

Имеет место теорема. Если символ оператора (6.60) не вырождается, то этот оператор допускает двустороннюю регуляризацию. Регуляризатором, как левым, так и правым, является оператор B , определяемый формулой

$$Bu = \frac{1}{a^2(\zeta) - b^2(\zeta)} [a(\zeta)u(\zeta) - b(\zeta)Su]. \quad (6.61)$$

В терминах символа теоремы Ф. Нетера можно сформулировать в виде одной теоремы [15, 53].

Пусть контур Γ замкнутый, с непрерывной кривизной, и символ сингулярного оператора непрерывен и не вырождается. Тогда этот оператор нормально разрешим и имеет конечный индекс, который не зависит от вполне непрерывного слагаемого в операторе. Индекс оператора (6.60) определяется по формуле

$$\text{Ind } A = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} d \left\{ \arg \frac{a(\zeta) - b(\zeta)}{a(\zeta) + b(\zeta)} \right\}.$$

Если $\text{Ind } A \geq 0$, то оператор A допускает левую эквивалентную регуляризацию, причем эквивалентным регуляризатором служит оператор (6.61).

В частном случае, когда a и b постоянные коэффициенты, $a^2 - b^2 \neq 0$ и вполне непрерывный оператор T отсутствует, левая регуляризация оператором B из (6.61) сразу приводит к решению. Действительно, уравнение (6.60) в этом случае имеет вид

$$Au = au + bSu = f.$$

Подействовав на него оператором

$$B = \frac{aI - bS}{a^2 - b^2},$$

получим с учетом того, что $S^2 = I$,

$$BAU = \frac{1}{a^2 - b^2} (aI - bS)(au + bSu) = u(\zeta) = Bf.$$

Отсюда

$$u(\zeta) = \frac{1}{a^2 - b^2} \left\{ af(\zeta) - \frac{b}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma \right\}. \quad (6.62)$$

6.6. Системы сингулярных интегральных уравнений

Рассмотрим систему СИУ на замкнутом контуре Γ

$$\sum_{k=1}^n \left\{ a_{jk}(\zeta)u_k(\zeta) + b_{jk}(\zeta)(Su_k)(\zeta) + (T_{jk}u_k)(\zeta) \right\} = f_j(\zeta) \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (6.63)$$

где $a_{jk}(\zeta), b_{jk}(\zeta)$ и кривизна — функции, непрерывные на Γ . Решение системы разыскивается в пространстве $L^p(\Gamma)$, этому же классу принадлежат заданные функции $f_j(\zeta)$. Операторы T_{jk} — вполне непрерывны в $L^p(\Gamma)$.

В матричной форме систему (6.63) можно представить так:

$$Au = a(\zeta)u(\zeta) + b(\zeta)Su + (Tu)(\zeta) = f(\zeta), \quad (6.64)$$

где

$$u(\zeta) = \begin{pmatrix} u_1(\zeta) \\ u_2(\zeta) \\ \dots \\ u_n(\zeta) \end{pmatrix}, \quad f(\zeta) = \begin{pmatrix} f_1(\zeta) \\ f_2(\zeta) \\ \dots \\ f_n(\zeta) \end{pmatrix}, \quad a(\zeta) = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n} \\ \dots \\ a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$b(\zeta) = \begin{pmatrix} b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1n} \\ b_{21}, b_{22}, \dots, b_{2n} \\ \dots \\ b_{n1}, b_{n2}, \dots, b_{nn} \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} T_{11}, T_{12}, \dots, T_{1n} \\ T_{21}, T_{22}, \dots, T_{2n} \\ \dots \\ T_{n1}, T_{n2}, \dots, T_{nn} \end{pmatrix}.$$

Векторы $u(\zeta), f(\zeta)$ рассматриваются как элементы банахова пространства $L^p(\Gamma)$, состоящего из n -компонентных векторов, заданных почти всюду на Γ и имеющих суммируемые с p -й степенью компоненты. Норму в $L^p(\Gamma)$ можно определить формулой

$$\|u\| = \sum_{k=1}^n \|u_k\|_{L^p(\Gamma)}.$$

В этом пространстве оператор S ограничен, а оператор T вполне непрерывен.

Символической матрицей или просто символом оператора A , определенного левой частью равенства (6.64), называется матрица

$$\Phi_A(\zeta, \theta) = a(\zeta) + b(\zeta)\theta, \quad (6.65)$$

где, как и прежде, переменная θ принимает только два значения: +1 и -1. Символ (6.65) обладает всеми свойствами символа скалярного оператора (6.60), только теперь под нулем и единицей следует понимать нулевую и единичную матрицу соответственно.

Говорят, что символ $\Phi_A(\zeta, \theta)$ не вырождается, если $\forall \zeta \in \Gamma$ и $\theta = \pm 1$ матрица $\Phi_A(\zeta, \theta)$ невырожденная, т. е. $\det \Phi_A(\zeta, \theta) \neq 0$. В противном случае символ вырождается. Если символ (6.65) не вырождается (уравнение (6.64) нормального типа), то оператор (6.64) допускает двустороннюю регуляризацию. Регуляризатором, одновременно и левым и правым, является сингулярный оператор, символьическая матрица которого равна $[\Phi_A(\zeta, \theta)]^{-1}$. Таким образом, для системы (6.64) с непрерывной и не вырождающейся символьической матрицей справедлива теорема Нетера, которая формулируется также, как и для скалярного оператора (6.60). При этом индекс системы (6.63) или оператора (6.64), вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} \text{Ind } A &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} d\arg \det \left\{ [\Phi(\zeta, +1)]^{-1} [\Phi(\zeta, -1)] \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} d\arg \left\{ \det [a(\zeta) + b(\zeta)]^{-1} \det [a(\zeta) - b(\zeta)] \right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} d\arg [\det (S^{-1}D)], \end{aligned} \quad (6.66)$$

где $S = a(\zeta) + b(\zeta)$, $D = a(\zeta) - b(\zeta)$. Отсюда следует, что индекс оператора A не зависит от его регулярной части, а однозначно определяется его характеристической частью.

Справедливо следующее утверждение. Пусть $a_{jk}(\zeta), b_{jk}(\zeta), f_j(\zeta)$ — функции класса $H(\alpha)$ при $0 < \alpha < 1$ и пусть T_{jk} — интегральные операторы вида

$$(T_{jk}u)(\zeta) = \int_{\Gamma} H_{jk}(\zeta, \sigma) u(\sigma) d\sigma,$$

ядра которых $H_{jk}(\zeta, \sigma)$ ограничены и удовлетворяют неравенству

$$|H_{jk}(\zeta_1, \sigma) - H_{jk}(\zeta_2, \sigma)| \leq N |\zeta_1 - \zeta_2|^{\alpha},$$

где N не зависит от ζ_1, ζ_2 и σ . Тогда любое решение системы (6.63), суммируемое на Γ со степенью, большей единицы, принадлежит классу $H(\alpha)$.

Обозначим, как обычно, через $a'(\zeta)$ — матрицу, транспонированную к $a(\zeta)$, а через $K'(\sigma, \zeta)$ — матрицу, транспонированную к $K(\zeta, \sigma)$ с одновременным транспонированием переменных ζ, σ .

Операторы K и K' , определяемые формулами

$$\begin{aligned} Ku &= a(\zeta)u(\zeta) + \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{K(\zeta, \sigma)}{\sigma - \zeta} u(\sigma) d\sigma, \\ K'v &= a'(\zeta)v(\zeta) - \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{K'(\sigma, \zeta)}{\sigma - \zeta} v(\sigma) d\sigma, \end{aligned} \quad (6.67)$$

называются союзными. Для характеристического оператора K^0 , определяемого формулой

$$K^0 u = a(\zeta)u(\zeta) + b(\zeta)Su,$$

союзным является оператор $K^{0'}$, который действует по формуле

$$K^{0'} v = a'(\zeta)v(\zeta) - S(b'v).$$

Учитывая эти равенства, полное уравнение (6.64) и союзное ему можно представить в виде

$$Au = K^0 u + Tu = f(\zeta),$$

$$A'v = K^{0'} v + T'v = g(\zeta),$$

где T и T' — вполне непрерывный оператор и союзный с ним (также вполне непрерывный).

Ниже будем предполагать, что все коэффициенты, свободные члены и ядра, входящие в наши уравнения — функции класса H на Γ . В этих условиях операторы A и A' переводят пространство $Lip_\alpha(\Gamma)$ в себя. Следовательно, решение уравнения $Au = f$ необходимо разыскивать в классе H .

Отметим также соотношение между союзовыми матричными операторами

$$\int_{\Gamma} v K u d\zeta = \int_{\Gamma} u K' v d\zeta,$$

где $u(\zeta), v(\zeta)$ — произвольные вектор — функции класса H , а произведение v на $w = Ku$ равно $v_1 w_1 + v_2 w_2 + \dots + v_n w_n$.

Пусть K_1 и K_2 сингулярные операторы, определенные формулами

$$K_1 u = a_1(\zeta)u(\zeta) + \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{K_1(\zeta, \sigma)}{\sigma - \zeta} u(\sigma) d\sigma,$$

$$K_2 v = a_2(\zeta)v(\zeta) + \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{K_2(\zeta, \sigma)}{\sigma - \zeta} v(\sigma) d\sigma.$$

Рассмотрим композицию $K_1(K_2 v) = K^*(v)$. Также как и в случае одного уравнения, получим

$$\begin{aligned} K^*(v) &= [a_1(\zeta)a_2(\zeta) + b_1(\zeta)b_2(\zeta)]v(\zeta) + \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{a_1(\zeta)K_2(\zeta, \sigma) + K_1(\zeta, \sigma)a_2(\sigma)}{\sigma - \zeta} v(\sigma) d\sigma + \\ &\quad + \frac{1}{(\pi i)^2} \int_{\Gamma} \left[\int_{\Gamma} \frac{K_1(\zeta, \sigma_1)K_2(\sigma_1, \sigma)}{(\sigma_1 - \zeta)(\sigma - \sigma_1)} d\sigma_1 \right] v(\sigma) d\sigma, \end{aligned}$$

где $b_1(\zeta) = K_1(\zeta, \zeta)$, $b_2(\zeta) = K_2(\zeta, \zeta)$, повторный интеграл в правой части регулярный (точнее обладает слабой особенностью). Выделяя отсюда характеристическую часть оператора K^* , получим

$$K^{*0}(v) = A^*v + B^*Sv,$$

где основные матрицы имеют вид

$$A^* = a_1(\zeta) a_2(\zeta) + b_1(\zeta) b_2(\zeta), \quad B^* = a_1(\zeta) b_2(\zeta) + b_1(\zeta) a_2(\zeta).$$

Таким образом, если оператор K_1 регуляризующий для оператора K_2 , то должно выполняться равенство на $\Gamma: B^* = 0$. Наиболее просто подобрать регуляризующий оператор, положив

$$S^* = D^* = E,$$

где E — единичная матрица, $S^* = A^* + B^*$, $D^* = A^* - B^*$.

В этом случае оба оператора $K_1 K_2$ и $K_2 K_1$ будут фредгольмовыми. В соответствии с формулой (6.66) индекс оператора $K^* = K_1 K_2$ равен сумме индексов операторов K_1 и K_2

$$\kappa^* = \text{Ind } K^* = \text{Ind } K_1 + \text{Ind } K_2 \quad (\kappa^* = \kappa_1 + \kappa_2).$$

Если оператор K^* фредгольмов, то его индекс равен нулю, т. е. $\kappa_1 = -\kappa_2$.

Сформулируем теперь теоремы Нетера для матричного СИУ [6, 38]

$$Ku = a(\zeta)u(\zeta) + \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{K(\zeta, \sigma)}{\sigma - \zeta} u(\sigma) d\sigma = f(\zeta) \quad (6.68)$$

в пространстве $\text{Lip}_\lambda(\Gamma)$, $0 < \lambda \leq 1$.

Теорема 1. Число решений СИУ (6.68) конечно.

Теорема 2. Разность числа k линейно-независимых решений однородного уравнения $Ku = 0$ и числа k' линейно-независимых решений союзного однородного уравнения $K'v = 0$ зависит лишь от характеристической части оператора K и равна индексу κ оператора K , т. е.

$$k - k' = \kappa = \text{Ind } K.$$

Теорема 3. Пусть $v^\alpha(\zeta)$ ($\alpha = 1, 2, \dots, k'$) — полная система линейно независимых решений однородного уравнения $K'v = 0$, союзного с уравнением (6.68). Для разрешимости уравнения (6.68) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$\int_{\Gamma} f(\zeta) v^\alpha(\zeta) d\zeta = \sum_{k=1}^n f_k(\zeta) v_k^\alpha(\zeta) d\zeta = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k').$$

Пример. Применим метод Карлемана к решению системы СИУ. Пусть Γ — окружность $|\zeta| = 1$, рассмотрим систему

$$\begin{cases} \frac{1+\cos\theta}{2} u_1(t) + \left(\frac{1}{2} \sin\theta \right) u_2(t) + \frac{1-\cos\theta}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{u_1(\zeta)}{\zeta-t} d\zeta - \frac{\sin\theta}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{u_2(\zeta)}{\zeta-t} d\zeta = f_1(t), \\ -\frac{\sin\theta}{2} u_1(t) + \frac{1+\cos\theta}{2} u_2(t) + \frac{\sin\theta}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{u_1(\zeta)}{\zeta-t} d\zeta + \frac{1-\cos\theta}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{u_2(\zeta)}{\zeta-t} d\zeta = f_2(t), \end{cases} \quad (6.69)$$

$$t \in \Gamma, \quad t = e^{i\theta}.$$

Представим эту систему в матричном виде

$$Au = a(t)u(t) + b(t)Su(t) = f(t), \quad (6.70)$$

$$a(t) = \begin{pmatrix} \frac{1+\cos\theta}{2}, & \frac{\sin\theta}{2} \\ -\frac{\sin\theta}{2}, & \frac{1+\cos\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} \frac{1-\cos\theta}{2}, & -\frac{\sin\theta}{2} \\ \frac{\sin\theta}{2}, & \frac{1-\cos\theta}{2} \end{pmatrix},$$

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда находим

$$a(t) + b(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I, \quad a(t) - b(t) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \det(a-b) = 1.$$

Следовательно, символьическая матрица $\Phi_A(t, \theta)$ — невырожденная и для системы (6.70) верна теорема Нетера. Из формулы (6.66) для индекса следует, что $\text{Ind } A = 0$, т. е. для этой системы справедливы теоремы Фредгольма.

Для решения системы (6.69) введем, следуя Карлеману, кусочно-аналитическую вектор-функцию

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{u(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

По формулам Сохоцкого–Племеля находим

$$\Phi^+(t) + \Phi^-(t) = (Su)(t),$$

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = u(t).$$

С учетом этих соотношений уравнение (6.70) сводим к матричной задаче Римана

$$\Phi^+(t) - G(t)\Phi^-(t) = f(t), \quad t \in \Gamma,$$

где

$$G(t) = (a+b)^{-1}(a-b) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t^2+1}{2t} & \frac{t^2-1}{2it} \\ \frac{1-t^2}{2it} & \frac{t^2+1}{2t} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим сперва однородную задачу ($f \equiv 0$). Введем вектор-функцию $\Phi_1(z)$ по формулам

$$\Phi_1^+(t) = \Phi^+(t), \quad \Phi_1^-(t) = G(t)\Phi^-(t), \quad t \in \Gamma,$$

где $\Phi_1^-(t)$ — предельное значение аналитической функции в области $|z| > 1$.

$$\Phi_1(z) = G(z)\Phi^-(z) = \begin{pmatrix} \frac{z^2+1}{2z} & \frac{z^2-1}{2iz} \\ \frac{1-z^2}{2iz} & \frac{z^2+1}{2z} \end{pmatrix} \Phi^-(z).$$

По построению $\Phi^-(z)$ на бесконечности имеет нуль первого порядка, а функция $G(z)$ — полюс первого порядка. Поэтому равенство

$$\Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t) = 0$$

определяет единую аналитическую на всей плоскости функцию $\Phi_1(z) = \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) = \text{const}$. Имеем $\Phi^+(z) = \Phi_1^+(z) = \alpha$, $\Phi^-(z) = G^{-1}(z)\alpha$.

Матрица $G^{-1}(z)$, обратная к $G(z)$, вычисляется по обычным правилам и имеет вид

$$G^{-1}(z) = \begin{pmatrix} \frac{z^2+1}{2z}, & -\frac{z^2-1}{2iz} \\ \frac{z^2-1}{2iz}, & \frac{z^2+1}{2z} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, в развернутом виде можем записать

$$\Phi^+(z) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad \Phi^-(z) = \begin{pmatrix} \frac{z^2+1}{2z}\alpha_1 - \frac{z^2-1}{2iz}\alpha_2 \\ \frac{z^2-1}{2iz}\alpha_1 + \frac{z^2+1}{2z}\alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Из равенства $\Phi^-(\infty) = 0$ следует связь: $\alpha_1 + i\alpha_2 = 0$. Таким образом, однородная система имеет одно нетривиальное решение, определяемое аналитическими вектор-функциями

$$\Phi^+(z) = (1, i), \quad \Phi^-(z) = \frac{1}{z}(1, i).$$

Рассмотрим теперь союзную с (6.69) систему.

$$A'v = a'(t)v(t) - S(b'v) = 0, \quad (6.71)$$

где

$$a' = \begin{pmatrix} \frac{1+\cos\theta}{2}, & -\frac{\sin\theta}{2} \\ \frac{\sin\theta}{2}, & \frac{1+\cos\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad b' = \begin{pmatrix} \frac{1-\cos\theta}{2}, & \frac{\sin\theta}{2} \\ -\frac{\sin\theta}{2}, & \frac{1-\cos\theta}{2} \end{pmatrix}.$$

Вводя кусочно-аналитический вектор

$$\Psi(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{b'(\zeta)v(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

сводим (6.71) к матричной задаче Римана (однородной)

$$\Psi^+(t) = [G'(t)]^{-1} \Psi(t), \quad [G'(t)]^{-1} = G(t) = \begin{pmatrix} \cos\theta, & \sin\theta \\ -\sin\theta, & \cos\theta \end{pmatrix},$$

которая, как видно, совпала с исходной задачей Римана для уравнения (6.70). Следовательно,

$$\Psi^+(z) = (1, i), \quad \Psi^-(z) = (1, i) \frac{1}{z}.$$

Теперь получаем

$$b'(t)v(t) = \Psi^+(t) - \Psi^-(t) = \left(1 - \frac{1}{t}\right)(1, i).$$

Отсюда

$$v(t) = [b'(t)]^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \left(1 - \frac{1}{t}\right) = \frac{2}{1 - \cos \theta} \begin{pmatrix} \frac{1 - \cos \theta}{2}, & -\frac{\sin \theta}{2} \\ \frac{\sin \theta}{2}, & \frac{1 - \cos \theta}{2} \end{pmatrix} \frac{t - 1}{t} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Таким образом, союзная однородная система (6.71) имеет одно нетривиальное решение. Согласно теореме Нетера для разрешимости исходной системы (6.70) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\int_{\Gamma} [f_1(t) + if_2(t)] dt = 0.$$

6.7. Случай разомкнутых контуров

Пусть Γ представляет собой совокупность конечного числа n простых разомкнутых ляпуновских дуг Γ_k с концами c_1, c_2, \dots, c_{2n} . Рассмотрим уравнение на Γ

$$a(t)u(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{u(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta = f(t), \quad t \in \Gamma. \quad (6.72)$$

Ниже будем предполагать, что $a(t), b(t), f(t)$ — функции класса $H(\alpha)$ с показателем $0 < \alpha \leq 1$ и, кроме того, $a^2(t) - b^2(t) \neq 0$ на Γ . Относительно искомой функции $u(t)$ потребуем, чтобы она удовлетворяла условию Гельдера на любой внутренней замкнутой части контура Γ , а вблизи любого из концов c_k имела место оценка

$$|u(t)| \leq \frac{\text{const}}{|t - c_k|^{\beta_k}}, \quad 0 \leq \beta_k < 1.$$

Применяя схему Карлемана, введем функцию

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{u(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

В результате уравнение (6.72) сводится к задаче Римана

$$\Phi^+(t) - G(t)\Phi^-(t) = g(t), \quad (6.73)$$

где

$$G(t) = \frac{a(t) - b(t)}{a(t) + b(t)}, \quad g(t) = \frac{f(t)}{a(t) + b(t)}, \quad G(t) \neq 0, \quad t \in \Gamma.$$

Теперь введем классификацию концов c_k следующим образом. Выберем на Γ некоторую непрерывную однозначную ветвь $\ln G(t)$ и положим

$$\gamma_k = \pm \frac{1}{2\pi i} \ln G(c_k),$$

причем знак «+» берется, если c_k конец соответствующей дуги, знак «-» — если c_k есть начало дуги. Подберем целые числа μ_k , так чтобы

$$-1 < \operatorname{Re} \gamma_k + \mu_k < 1.$$

Если $\operatorname{Re} \gamma_k$ — целое число, то полагаем $\mu_k = -\operatorname{Re} \gamma_k$. В этом случае конец c_k назовем особенным. Остальные концы назовем неособенными. В каждом из неособенных концов можно выбрать μ_k двумя способами, так что либо $-1 < \operatorname{Re} \gamma_k + \mu_k < 0$, либо $0 < \operatorname{Re} \gamma_k + \mu_k < 1$. Нумерацию концов c_k выберем так, чтобы концы c_1, c_2, \dots, c_m были неособенными, а концы $c_{m+1}, c_{m+2}, \dots, c_{2n}$ — особенными.

На искомое решение наложим следующее требование: оно должно быть ограниченным в заранее заданных неособенных концах c_1, c_2, \dots, c_q ($q \leq m$).

Для поставленной таким образом задачи справедливы следующие утверждения [38].

1. Любое решение задачи (6.73), а значит и уравнения (6.72), ограничено во всех особенных концах.

2. При решении задачи сопряжения (6.73) следует выбирать числа μ_k таким образом, чтобы

$$0 < \operatorname{Re} \gamma_k + \mu_k < 1 \quad (k = 1, 2, \dots, q),$$

$$-1 < \operatorname{Re} \gamma_k + \mu_k < 0 \quad (k = q+1, q+2, \dots, m), \quad (6.74)$$

$$\operatorname{Re} \gamma_k + \mu_k = 0 \quad (k = m+1, m+2, \dots, 2n).$$

Решения $\Phi(z)$, ограниченные вблизи некоторых неособенных узлов c_1, c_2, \dots, c_q , называют решениями класса $h(c_1, c_2, \dots, c_q)$. Целое число

$$\kappa = -\sum_{k=1}^{2n} \mu_k$$

называется индексом класса $h(c_1, c_2, \dots, c_q)$.

Однородное уравнение

$$a(t)u(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{u(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta = 0$$

имеет κ линейно-независимых решений, если $\kappa > 0$, и только тривиальное решение при $\kappa \leq 0$.

3. Неоднородное уравнение (6.72) разрешимо тогда и только тогда, когда свободный член удовлетворяет следующим условиям:

$$\int_{\Gamma} f(t)v_j(t) dt = 0,$$

где $v_j(t)$ — линейно-независимые решения однородного уравнения

$$a(t)v(t) - \frac{b(t)}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{v(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta = 0,$$

ограниченные в неособенных концах $c_{q+1}, c_{q+2}, \dots, c_m$.

4. Индекс задачи равен κ .

Введем каноническую функцию задачи (6.73)

$$X(z) = \prod_{k=1}^{2n} (z - c_k)^{\mu_k} \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\ln G(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right\}.$$

По построению (6.74) она ограничена в концах c_1, c_2, \dots, c_q ($0 < \operatorname{Re} \gamma_k + \mu_k < 1$), а также в особенных концах, и ее предельные значения, а также предельные значения $X^{-1}(z)$ суммируемы на Γ . Каноническая функция удовлетворяет однородной задаче

$$X^+(t) = G(t) X^-(t), \quad t \in \Gamma. \quad (6.76)$$

В самом деле,

$$X^\pm(t) = \prod_{k=1}^{2n} (t - c_k)^{\mu_k} \exp \left\{ \pm \frac{1}{2} \ln G(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\ln G(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta \right\},$$

откуда

$$\frac{X^+(t)}{X^-(t)} = \frac{\exp(\ln \sqrt{G})}{\exp(-\ln \sqrt{G})} = G(t).$$

Разделив равенство (6.73) на $X^+(t)$ и учитывая соотношение (6.76), приходим к задаче о скачке

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} - \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} = \frac{g(t)}{X^+(t)}.$$

Решение этой задачи имеет вид

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(\zeta) d\zeta}{X^+(\zeta)(\zeta - z)} + X(z)Q(z), \quad (6.77)$$

где $Q(z)$ — функция, регулярная в любой конечной части плоскости. Так как каноническая функция $X(z)$ согласно (6.75) имеет на бесконечности порядок $-\kappa$, а $\Phi(\infty) = 0$, то при $\kappa > 0$ под $Q(z)$ следует понимать многочлен степени $\leq \kappa - 1$. Если $\kappa \leq 0$, необходимо $Q(z) \equiv 0$. При таком определении функции $Q(z)$ формула (6.77) решает задачу (6.73) при $\kappa \geq 0$. Если $\kappa < 0$, формула (6.77) решает задачу тогда и только тогда, когда

$$\int_{\Gamma} \frac{g(\zeta) \zeta^k}{X^+(\zeta)} d\zeta = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, -\kappa - 1). \quad (6.78)$$

Союзная задача сопряжения. Задачу

$$\Psi^+(t) = [G(t)]^{-1} \Psi^-(t), \quad t \in \Gamma \quad (6.79)$$

называют союзной с задачей (6.73). Союзовыми называют классы

$$h = h(c_1, c_2, \dots, c_q) \text{ и } h' = h(c_{q+1}, \dots, c_m),$$

где c_1, c_2, \dots, c_q — некоторые неособенные узлы, а c_{q+1}, \dots, c_m — все остальные неособенные узлы. Канонические решения союзных классов связаны соотношением

$$X'(z) = [X(z)]^{-1},$$

а их индексы κ и κ' — соотношением

$$\kappa + \kappa' = 0.$$

Из сказанного выше относительно формулы (6.77) следует, что при $\kappa > 0$ однородная задача (6.73) имеет κ линейно-независимых решений данного класса h , исчезающих на бесконечности

$$X(z), zX(z), \dots, z^{\kappa-1}X(z).$$

При $\kappa \leq 0$ эта задача не имеет отличных от нуля решений данного класса, исчезающих на бесконечности. Союзная однородная задача (6.79) имеет при $\kappa < 0$ ровно $(-\kappa)$ линейно-независимых решений класса h' (союзного с h), исчезающих на бесконечности

$$\frac{1}{X(z)}, \frac{z}{X(z)}, \dots, \frac{z^{-\kappa-1}}{X(z)}.$$

Таким образом, необходимые и достаточные условия (6.78) разрешимости задачи (6.73) при $\kappa < 0$ приобретают стандартную форму

$$\int_{\Gamma} \psi_k^+(t) g(t) dt = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, -\kappa),$$

где $\psi_k^+(t)$ — предельные значения на Γ (слева) функции $z^{k-1} X^{-1}(z)$.

По отношению к полному СИУ

$$Ku = a(t)u(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{u(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta + \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} K(t, \zeta) u(\zeta) d\zeta = f(t).$$

Союзное к нему уравнение имеет вид

$$K'v = a(t)v(t) - \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{b(\zeta)v(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta + \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} K(\zeta, t)v(\zeta) d\zeta = g(t).$$

В более компактном виде можно записать

$$Ku = K^0 u + ku = f(t), \quad K'v = K^{0'} v + k'v = g(t),$$

$$K^0 u = a(t)u(t) + b(t)Su, \quad K^{0'} v = a(t)v(t) - S(bv).$$

Здесь $K^0, K^{0'}$ — характеристический оператор и союзный к нему.

Решение характеристического уравнения

$$K^0 u = f, \quad a^2(t) - b^2(t) \neq 0, \quad t \in \Gamma$$

можно получить сведя его к задаче сопряжения. Вводя кусочно-голоморфную функцию

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{u(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta, \quad t \in \Gamma,$$

приходим к задаче сопряжения (задаче Римана)

$$\begin{aligned} \Phi^+(t) &= G(t)\Phi^-(t) + \frac{f(t)}{a(t)+b(t)}, \\ G(t) &= \frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}. \end{aligned} \quad (6.80)$$

Общее решение задачи (6.80) класса H^* , имеющее конечный порядок на бесконечности, можно представить в виде [11, 32, 38]

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{[a(\zeta)+b(\zeta)] X^+(\zeta)(\zeta-z)} + X_0(z)Q(z), \quad (6.81)$$

где $X(z)$, определенная в (6.75) — каноническая функция какого-либо класса $h(c_1, c_2, \dots, c_q)$, соответствующая задаче (6.80), $X_0(z)$ — каноническая функция той же задачи класса h_0 , а $Q(z)$ — некоторый полином. Напомним, что концы c_1, c_2, \dots, c_q — не особенные и класс $h(c_1, c_2, \dots, c_q)$ содержит решения, ограниченные вблизи этих точек. Класс h_0 соответствует $q=0$, т. е. это наиболее широкий класс, определяющий неограниченные решения вблизи всех концов c_k . Каноническую функцию $X_0(z)$ класса h_0 получим из (6.75), взяв для всех неособенных концов $\operatorname{Re} \gamma_k + \mu_k < 0$. Очевидно, что каноническое решение $X(z)$ и индекс κ всякого класса $h(c_1, c_2, \dots, c_q)$ связаны с $X_0(z)$ и индексом κ_0 класса h_0 соотношением

$$X(z) = c(z - c_1)(z - c_2) \dots (z - c_q) X_0(z), \quad c = \text{const} \neq 0,$$

$$\kappa = \kappa_0 - q.$$

Говорят, что функция $u(t)$, однозначно определенная на Γ , включая концы c_k , принадлежит классу $H(\lambda)$ на Γ , если она удовлетворяет условию $H(\lambda)$ на каждой из закрытых дуг Γ_k , составляющих Γ . Если $u(t) = \{u_k(t), t \in \Gamma_k (k=1, 2, \dots, n)\}$ и если $u_k(t)$ удовлетворяет условию H на соответствующих закрытых дугах Γ_k , то говорят, что $u_k(t)$ принадлежит классу H_0 на Γ . Если $u(t)$ удовлетворяет условию H на каждой закрытой части Γ , не содержащей концов, а вблизи любого конца c представима в виде

$$u(t) = \frac{u^*(t)}{|t-c|^\alpha}, \quad 0 \leq \alpha < 1,$$

причем $u^*(t)$ принадлежит классу H_0 в окрестности c , то говорят, что функция $u(t) \in H^*(\Gamma)$.

Построим теперь решение нашего характеристического уравнения. Привлекая формулу (6.81), находим (заменив $Q(z)$ на $-0,5Q(z)$)

$$\Phi^+(t) = X^+(t) \left\{ \frac{f(t)}{2[a(t)+b(t)]X^+(t)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)d\zeta}{[a(\zeta)+b(\zeta)]X^+(\zeta)(\zeta-t)} + \frac{1}{2} Q(t) \right\},$$

$$\Phi^-(t) = X^-(t) \left\{ -\frac{f(t)}{2[a(t)+b(t)]X^+(t)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)d\zeta}{[a(\zeta)+b(\zeta)]X^+(\zeta)(\zeta-t)} + \frac{1}{2} Q(t) \right\}.$$

Отсюда

$$u(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t) =$$

$$= \frac{a(t)f(t)}{a^2(t)-b^2(t)} - \frac{b(t)[a(t)+b(t)]}{a^2(t)-b^2(t)} \frac{X^+(t)}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)d\zeta}{[a(\zeta)+b(\zeta)]X^+(\zeta)(\zeta-t)} +$$

$$+ \frac{b(t)[a(t)+b(t)]}{a^2(t)-b^2(t)} X^+(t) Q.$$

Вводя канонические функции $Z(z)$ и $Z_0(z)$ классов $h(c_1, c_2, \dots, c_q)$ и h_0

$$Z(t) = [a(t)+b(t)]X^+(t) = [a(t)-b(t)]X^-(t),$$

$$Z_0(t) = [a(t)+b(t)]X_0^+(t) = [a(t)-b(t)]X_0^-(t) \quad (6.82)$$

и функции

$$a_*(t) = \frac{a(t)}{[a^2(t)-b^2(t)]}, \quad b_*(t) = \frac{b(t)}{[a^2(t)-b^2(t)]},$$

представим решение класса $h(c_1, c_2, \dots, c_q)$ в виде

$$u(t) = K^* f + b_*(t) Z_0(t) P(t), \quad (6.83)$$

где

$$K^* f = a_*(t) f(t) - \frac{b_*(t) Z(t)}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)d\zeta}{Z(\zeta)(\zeta-t)},$$

$P(t)$ — некоторый полином.

С учетом равенств (6.75), (6.76) и определения канонической функции в (6.82) получаем

$$Z(t) = [a(t)+b(t)] \sqrt{G(t)} e^{\gamma(t)} \prod_{k=1}^{2n} (z-c_k)^{\gamma_k} = \omega(t) \prod_{k=1}^{2n} (z-c_k)^{\gamma_k},$$

$$\gamma(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\ln G(\zeta)}{\zeta-t} dt,$$

где $\omega(t)$ — функция класса H_0 , не обращающаяся в ноль на Γ , а $0 < \operatorname{Re} \mu_k < 1$ ($k = 1, 2, \dots, q$); $-1 < \operatorname{Re} \mu_k < 0$ ($k = q+1, \dots, m$), $\operatorname{Re} \gamma_k = 0$ ($k = m+1, \dots, 2n$). Эти же формулы имеют место для функции $Z_0(t)$, следует только положить $q = 0$.

Таким образом, при $\kappa \geq 0$ все решения класса $h(c_1, c_2, \dots, c_q)$ уравнения $K^0 u = f$ определяются формулой (6.83), где под $Z(t)$ следует понимать каноническую функцию класса $h(c_1, c_2, \dots, c_q)$, а под $P(t)$ — произвольный полином $P_{\kappa-1}(t)$ степени не выше $\kappa-1$ (при $\kappa=0$ следует положить $P_{\kappa-1}(t)=0$).

При $\kappa < 0$ решение (единственное) существует при соблюдении необходимых и достаточных условий

$$\int_{\Gamma} \frac{t^k f(t)}{Z(t)} dt = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, -\kappa-1)$$

и определяется также формулой (6.83) при $P_{\kappa-1}(t)=0$.

При $\kappa \leq 0$ однородное уравнение не имеет решений класса h , отличных от нуля.

Обращение интеграла типа Коши. Рассмотрим простейшее интегральное уравнение

$$\frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{u(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta = f(t), \quad t \in \Gamma = \bigcup_{k=1}^n \Gamma_k, \quad \Gamma_k \cap \Gamma_m = \emptyset \quad (k \neq m), \quad (6.84)$$

где $\Gamma_k = a_k b_k$ — гладкие разомкнутые дуги (рис. 6.1), $f(t)$ — функция класса H .

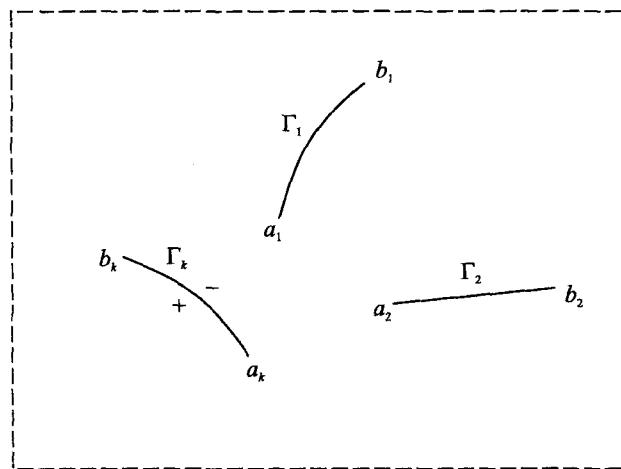


Рис. 6.1. Конфигурация области, ограниченной дугами Γ_k

Вводя кусочно-голоморфную функцию

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{u(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

сводим уравнение (6.84) к задаче Римана

$$\Phi^+(t) + \Phi^-(t) = f(t). \quad (6.85)$$

Каноническая функция класса $h(c_1, c_2, \dots, c_q)$ имеет вид

$$X(z) = c \sqrt{\frac{R_1(z)}{R_2(z)}},$$

где

$$R_1(z) = \prod_{k=1}^q (z - c_k), \quad R_2(z) = \prod_{k=q+1}^{2n} (z - c_k), \quad c = \text{const},$$

а под радикалом $\sqrt{\frac{R_1}{R_2}}$ понимается ветвь, однозначная в плоскости, разрезанной вдоль Γ

и имеющая в бесконечно удаленной точке разложение

$$\sqrt{\frac{R_1(z)}{R_2(z)}} = z^{q-n} + A_1 z^{q-n-1} + A_2 z^{q-n-2} + \dots$$

Каноническая функция класса h_0 имеет, очевидно, вид

$$X_0(z) = \frac{c}{\sqrt{R(z)}}, \quad R(z) = \prod_{k=1}^{2n} (z - c_k) = \sum_{m=1}^n (z - a_m)(z - b_m).$$

Каноническая функция самого узкого класса $h_{2n} = h(c_1, c_2, \dots, c_{2n})$ определяется формулой

$$X_{2n}(z) = c \sqrt{R(z)}.$$

Индексы этих классов соответственно таковы:

$$\kappa_q = n - q, \quad \kappa_0 = n, \quad \kappa_{2n} = -n.$$

При $n = q$ имеем класс $h(c_1, c_2, \dots, c_n)$, индекс которого $\kappa_n = 0$. Например, каноническая функция класса $h(a_1, a_2, \dots, a_n)$

$$X_a = c \sqrt{\frac{R_a(z)}{R_b(z)}},$$

где

$$R_a = \prod_{k=1}^n (z - a_k), \quad R_b = \prod_{k=1}^n (z - b_k).$$

Положим

$$\Phi(z) = F(z) X(z),$$

причем $X(z)$ — каноническое решение какого-либо класса. Имеем

$$\Phi^+(t) = F^+(t)X^+(t),$$

$$\Phi^-(t) = -F^-(t)X^+(t),$$

где $\Phi^+(t)$ — предельное значение функции $\Phi(z)$ слева на дуге Γ_k , а $\Phi^-(t)$ — соответствующее предельное значение справа на этой же дуге. С учетом этих формул неоднородная задача (6.85) приводится к задаче о скачке для функции $F(z)$

$$F^+(t) - F^-(t) = \frac{f(t)}{X^+(t)},$$

решение которой, имеющее конечный порядок на бесконечности, таково:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{X^+(\zeta)(\zeta - z)} + Q(z),$$

где $Q(z)$ — полином.

В соответствии с этим выпишем решения задачи (6.85) в различных классах.

1. Решение класса h_0 , исчезающее на бесконечности ($\kappa = n$)

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\sqrt{R(\zeta)} f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{P_{n-1}(z)}{2\sqrt{R(z)}}, \quad (6.86)$$

где $P_{n-1}(z)$ — произвольный полином степени не выше $n-1$.

2. Решение класса $h_q = h(c_1, c_2, \dots, c_q)$ исчезающее на бесконечности при $\kappa_q = n-q \geq 0$

$$\Phi(z) = \frac{\sqrt{R_1(z)}}{\sqrt{R_2(z)}} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\sqrt{R_2(\zeta)} f(\zeta) d\zeta}{\sqrt{R_1(\zeta)} (\zeta - z)} + \frac{\sqrt{R_1(z)}}{2\sqrt{R_2(z)}} P_{n-q-1}(z), \quad (6.87)$$

где P_{n-q-1} — произвольный полином степени не выше $n-q-1$ ($P_{n-q-1} \equiv 0$ при $n=q$).

При $\kappa_q = n-q < 0$ решение класса $h(c_1, c_2, \dots, c_q)$, исчезающее на бесконечности, существует тогда и только тогда, когда $f(t)$ удовлетворяет условиям

$$\int_{\Gamma} \frac{\sqrt{R_2(t)} t^k f(t)}{\sqrt{R_1(t)}} dt = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, q-n-1).$$

Это решение единствено и определяется формулой (6.87) при $P_{n-q-1}(z) \equiv 0$.

3. Решение (единственное) класса $h_{2n} = h(c_1, c_2, \dots, c_{2n})$, исчезающее на бесконечности ($\kappa_{2n} = -n$), определяется формулой

$$\Phi(z) = \frac{\sqrt{R(z)}}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\sqrt{R(\zeta)} (\zeta - z)} \quad (6.88)$$

тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$\int \frac{t^k f(t)}{\sqrt{R(t)}} dt = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n). \quad (6.89)$$

После решения задачи сопряжения (6.85) находим решение исходного сингулярного интегрального уравнения (6.84).

Решение неограниченное на всех концах дуг Γ_k (класса h_0). Имеем согласно (6.86)

$$u(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \frac{1}{\pi i \sqrt{R(t)}} \int \frac{\sqrt{R(\zeta)} f(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta + \frac{P_{n-1}(t)}{\sqrt{R(t)}}. \quad (6.90)$$

Здесь

$$X_0^+(t) = \frac{c}{\sqrt{R(t)}}.$$

Например, для интегрального уравнения (6.84) на отрезке $[-a, a]$ решение, неограниченное на концах $c_1 = -a, c_2 = a$, имеет вид

$$u(x) = \frac{1}{\pi i \sqrt{a^2 - x^2}} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y - x} f(y) dy + \frac{c}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Таким образом, преобразование Гильберта на конечном интервале определяется соотношениями (f заменено на $-if$)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{u(y)}{y - x} dy &= f(x), \\ u(x) &= -\frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y - x} f(y) dy + \frac{c}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad \operatorname{Im} c = 0. \end{aligned}$$

Это преобразование применялось при изучении обтекания тонкого прямолинейного профиля плоско-параллельным потоком несжимаемой идеальной жидкости [27].

Решение, ограниченное в концах a_k и неограниченное в b_k ($k = 1, 2, \dots, n$), таково:

$$u(t) = \frac{\sqrt{R_a(t)}}{\pi i \sqrt{R_b(t)}} \int \frac{\sqrt{R_b(\zeta)} f(\zeta)}{\sqrt{R_a(\zeta)} (\zeta - t)} d\zeta. \quad (6.91)$$

Например, для уравнения (6.84) на отрезке $[-a, a]$ решение, ограниченное в начале $c_1 = -a$ и неограниченное в $c_2 = a$, определяется формулой

$$u(x) = \frac{1}{\pi i} \frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x}} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a-y} f(y)}{\sqrt{a+y} (y-x)} dy.$$

Решение класса $h_{2n} = h(c_1, c_2, \dots, c_{2n})$, ограниченное на Γ , существует и единственno тогда и только тогда, когда выполняются условия (6.89). При этом решение определяется формулой

$$u(t) = \frac{\sqrt{R(t)}}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\sqrt{R(\zeta)(\zeta-t)}}. \quad (6.92)$$

Для уравнения на отрезке $[-a, a]$ решение, ограниченное на концах, имеет соответственно вид

$$u(x) = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\pi i} \int_{-a}^a \frac{f(y)}{\sqrt{a^2 - y^2}(y-x)} dy,$$

а необходимое и достаточное условие однозначной разрешимости уравнения таково:

$$\int_{-a}^a \frac{f(x)}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = 0. \quad (6.93)$$

Формулы (6.90)–(6.93) дают решение задачи обращения интеграла типа Коши, фигурирующего в СИУ (6.84) в различных классах решений.

6.8. Применение метода ортогональных многочленов к решению интегральных уравнений

Классические ортогональные многочлены порождаются интегральными операторами, являясь собственными функциями соответствующих задач Штурма–Лиувилля. Это обстоятельство приводит к существованию различного рода спектральных соотношений, связывающих ортогональные многочлены между собой [2, 17, 31, 42]. Используя эти спектральные соотношения, можно находить решения некоторых интегральных уравнений.

Сингулярное интегральное уравнение на отрезке $[-1, 1]$. Рассмотрим уравнение

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u(x)}{x-y} dx = v(y), \quad y \in (-1, 1), \quad v(y) \in \text{Lip}_\alpha(-1, 1), \quad 0 < \alpha \leq 1. \quad (6.94)$$

Решение этого уравнения будем разыскивать в классе h_0 , т. е. неограниченное на концах ± 1 . Следовательно, можно положить

$$u(x) = \frac{u_0(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad u_0(x) \in \text{Lip}_\alpha[-1, 1], \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

Функцию $u_0(x)$ представим в виде ряда по многочленам Чебышева 1-го рода

$$u_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n T_n(x), \quad (6.95)$$

где коэффициенты c_n подлежат определению. Далее используем спектральные соотношения между многочленами Чебышева 1-го и 2-го рода [12], см. также гл. 1, п. 1.9.

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(x) dx}{(x-y)\sqrt{1-x^2}} = \pi U_{n-1}(y), \quad (n=1,2,\dots), \quad (6.96)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{(x-y)\sqrt{1-x^2}} = 0, \quad y \in (-1,1).$$

Подстановка (6.95) в уравнение (6.94) с использованием соотношений (6.96) приводит (формально) к разложению известной функции $v(y)$ в ряд по многочленам Чебышева 2-го рода

$$v(y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n U_{n-1}(y).$$

Отсюда определяются коэффициенты разложения (6.95)

$$c_{n+1} = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 v(y) \sqrt{1-y^2} U_n(y) dy \quad (n=0,1,\dots).$$

Коэффициент c_0 , как и следовало ожидать, остается неопределенным. Решение имеет вид

$$u(x) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} c_n T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{c_0}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Решение уравнения (6.94), ограниченное на обоих концах отрезка, существует и единственно при выполнении условия

$$\int_{-1}^1 \frac{v(y)}{\sqrt{1-y^2}} dy = 0. \quad (6.97)$$

В этом случае представим искомое решение в виде разложения по полиномам Чебышева 2-го рода

$$u(x) = \sqrt{1-x^2} u_0(x) = \sqrt{1-x^2} \sum_{n=0}^{\infty} d_n U_n(x).$$

Воспользовавшись спектральным соотношением (см. гл. 1, п. 1.9)

$$\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x^2} U_{n-1}(x)}{x-y} dx = -\pi T_n(y) \quad (n=1,2,\dots), \quad y \in (-1,1),$$

получаем разложение (неполное) правой части по полиномам Чебышева 1-го рода

$$v(y) = -\sum_{n=0}^{\infty} d_n T_{n+1}(y).$$

Очевидно, дополнительное условие (6.97) выполняется здесь автоматически. Коэффициенты определяются по формулам

$$d_{n-1} = -\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{v(y) T_n(y)}{\sqrt{1-y^2}} dy \quad (n=1,2,\dots).$$

При определении коэффициентов c_n, d_n использовались соотношения ортогональности полиномов Чебышева [12]

$$\int_{-1}^1 T_n(x) T_m(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \pi, & m = n = 0, \\ \frac{\pi}{2}, & m = n \neq 0, \end{cases} \quad (6.98)$$

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} U_n(x) U_m(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \pi, & m = n = 0, \\ \frac{\pi}{2}, & m = n \neq 0. \end{cases}$$

Приведем теперь второй пример, заимствованный нами из книги [42]. Рассмотрим интегральное уравнение первого рода на отрезке $[-1, 1]$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|x-y|} u(x) dx = f(y), \quad y \in (-1, 1). \quad (6.99)$$

При определении решения воспользуемся следующим спектральным соотношением

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|x-y|} \frac{T_n(y)}{\sqrt{1-y^2}} dy = \mu_n^0 T_n(x) \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$\mu_0^0 = \ln 2, \quad \mu_n^0 = \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad |x| \leq 1.$$

Полагая

$$u(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \frac{T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} \quad (6.100)$$

и подставляя $u(x)$ в исходное интегральное уравнение, приходим к следующему разложению правой части:

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \mu_m^0 T_m(x).$$

Коэффициенты c_m вычисляем, используя соотношения ортогональности полиномов Чебышева 1-го рода (6.98). Имеем

$$c_n = \frac{f_n}{\mu_n^0 \|T_n\|^2}, \quad f_n = \int_{-1}^1 \frac{f(x) T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad \|T_n\|^2 = \begin{cases} \pi, & n = 0, \\ \frac{\pi}{2}, & n \neq 0. \end{cases} \quad (6.101)$$

Решение интегрального уравнения (6.99) определяется формулами (6.100), (6.101).

Методом ортогональных многочленов удобно решать некоторые интегральные уравнения второго рода. Рассмотрим уравнение

$$u(y) - \frac{\lambda}{\pi} \int_{-1}^1 \left(\ln \frac{1}{|y-x|} \right) \frac{u(x)}{\rho(x)} dx = f(y), \quad y \in (-1, 1),$$

где $\rho(x)$ — заданная функция на $(-1,1)$. Спектральное соотношение, следуя [42], представим в виде

$$\int_{-1}^1 K(y, x) u_n(x) dx = \mu_n^0 u_n(y),$$

где

$$K(y, x) = \frac{1}{\pi} \left(\ln \frac{1}{|y-x|} \right) \left[\frac{1}{(1-y^2)(1-x^2)} \right]^{\frac{1}{4}}, \quad u_n(y) = \frac{T_n(y)}{\|T_n\|(1-y^2)^{\frac{1}{4}}}.$$

В силу симметрии ядра имеет место (сходящееся в среднем) билинейное разложение (см. гл. 5, п. 5.5)

$$K(y, x) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu_m^0 u_m(x) u_m(y).$$

Вставляя сюда выражение для ядра

$$\frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{|y-x|} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mu_m^0}{\|T_m\|} T_m(x) T_m(y),$$

получаем формулу, определяющую структуру решения рассматриваемого интегрального уравнения

$$u(y) = f(y) + \frac{\lambda}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \mu_m^0 c_m T_m(y), \quad (6.102)$$

где

$$c_m = \int_{-1}^1 u(x) T_m(x) \rho^{-1}(x) dx.$$

Для определения коэффициентов c_m , фигурирующих в представлении (6.102), необходимо обе части равенства (6.102) умножить на $T_n(y) \rho^{-1}(y)$ и проинтегрировать на отрезке $[-1,1]$. В результате придем к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений

$$c_m - \frac{\lambda}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \mu_m^0 a_{nm} c_m = f_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$a_{nm} = \int_{-1}^1 \frac{T_n(y) T_m(y)}{\rho(y)} dy, \quad f_n = \int_{-1}^1 \frac{f(y) T_n(y)}{\rho(y)} dy.$$

В этом подходе к решению интегральных уравнений существенно используются специально определенные полиномиальные ядра, процедуры построения которых и ряд других вопросов теории разработаны в [42]. Здесь же полученные результаты применяются к решению различных классов контактных и смешанных задач теории упругости.

6.9. Интегральные уравнения с ядром Гильберта

Под сингулярным оператором с ядром Гильберта, понимается оператор H , действующий по формуле

$$(Hu)(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma-s}{2} d\sigma, \quad s \in [0, 2\pi]. \quad (6.103)$$

Если $u(\sigma) - 2\pi$ — периодическая функция, удовлетворяющая условию Гельдера, то сингулярный интеграл в (6.103) существует в смысле главного значения и может быть представлен абсолютно сходящимся интегралом

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma-s}{2} d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [u(\sigma) - u(s)] \operatorname{ctg} \frac{\sigma-s}{2} d\sigma.$$

Оператор Гильберта ограничен в $L^2[0, 2\pi]$, а также в липшицевых пространствах $\operatorname{Lip}_\alpha[0, 2\pi]$, $0 < \alpha \leq 1$. В силу равенства

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\sigma-s}{2} d\sigma = 0, \quad s \in [0, 2\pi] \quad (6.104)$$

он переводит ортогональный базис гильбертова пространства $L^2[0, 2\pi]$

$$1; \cos s, \cos 2s, \sin s, \sin 2s; \dots; \cos ns, \sin ns; \dots$$

в систему

$$-\sin s, \cos s; -\sin 2s, \cos 2s; \dots; -\sin ns, \cos ns; \dots,$$

т. е. отображает пространство $L^2[0, 2\pi]$ в свое подпространство $L_0^2[0, 2\pi]$ — совокупность элементов, ортогональных единице [10]. Можно, очевидно, и так сказать:

$$L_0^2[0, 2\pi] = \left\{ u(s) \in L^2[0, 2\pi] : \int_0^{2\pi} u(s) ds = 0 \right\}.$$

Рассмотрим теперь характеристическое СИУ с ядром Гильберта

$$(Hu)(s) = f(s). \quad (6.105)$$

Из сказанного выше следует, что для разрешимости уравнения (6.105) в классе $L^2[0, 2\pi]$ необходимо, чтобы $f(s) \in L_0^2[0, 2\pi]$, т. е. чтобы

$$\int_0^{2\pi} f(\sigma) d\sigma = 0. \quad (6.106)$$

Кроме того, если искать решение уравнения (6.105) в классе 2π — периодических функций в виде ряда

$$u(\sigma) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\sigma + b_n \sin n\sigma), \quad (6.107)$$

то коэффициент a_0 по известной правой части f восстановить нельзя. Следовательно, решение необходимо фиксировать каким-либо дополнительным условием, например положить

$$\int_0^{2\pi} u(\sigma) d\sigma = 0. \quad (6.108)$$

Кроме того, предполагаем, что f и u — функции класса H с показателем $0 < \alpha \leq 1$.

Формулу обращения Гильберта можно получить из формул обращения сингулярного интеграла с ядром Коши (6.12), (6.13)

$$\frac{1}{\pi i} \int \frac{\phi(\zeta_1)}{\zeta_1 - \zeta} d\zeta_1 = \psi(\zeta), \quad \frac{1}{\pi i} \int \frac{\psi(\zeta)}{\zeta - \zeta_1} d\zeta = \phi(\zeta_1). \quad (6.109)$$

Пусть Γ — единичная окружность, $\zeta = e^{i\sigma}$, $\zeta_1 = e^{is}$, $0 \leq \sigma, s < 2\pi$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta_1}{\zeta_1 - \zeta} &= \frac{ie^{is} ds}{e^{is} - e^{i\sigma}} = \frac{e^{\frac{i(s-\sigma)}{2}} ds}{2 \sin \frac{s-\sigma}{2}} = \frac{1}{2} \left(\operatorname{ctg} \frac{s-\sigma}{2} + i \right) ds, \\ \frac{d\zeta}{\zeta - \zeta_1} &= \frac{1}{2} \left(\operatorname{ctg} \frac{\sigma-s}{2} + i \right) d\sigma. \end{aligned}$$

Обозначим: $\phi(\zeta_1) = \phi(e^{is}) = \frac{1}{i} f(s)$, $\psi(\zeta) = \psi(e^{i\sigma}) = u(\sigma)$. Тогда формулы обращения (6.109) дают

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma-s}{2} d\sigma &= f(s) - \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\sigma) d\sigma, \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) \operatorname{ctg} \frac{s-\sigma}{2} ds + \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) ds &= -u(s). \end{aligned} \quad (6.110)$$

Учитывая равенства (6.106), (6.108), получаем отсюда

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma-s}{2} d\sigma = f(s), \quad (6.111)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) \operatorname{ctg} \frac{s-\sigma}{2} ds = -u(s).$$

Вторая формула обращения Гильберта (6.111) определяет (с точностью до аддитивной постоянной) решение уравнения (6.105).

В частности, воспользовавшись формулой Гаусса (6.6), выводим формулу (6.104). Имеем

$$\int \frac{d\zeta_1}{\zeta_1 - \zeta} = \pi i = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{s-\sigma}{2} ds + \frac{i}{2} \int_0^{2\pi} ds \Rightarrow \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{s-\sigma}{2} ds = 0.$$

Замечание. Решение характеристического СИУ (6.106) можно получить еще следующим образом. Разыскивая решение в виде ряда (6.107), приходим к разложению правой части $f(s)$

$$f(s) - c_0 = \sum_{n=1}^{\infty} (-a_n \sin ns + b_n \cos ns),$$

где c_0 — произвольная константа.

Отсюда находим коэффициенты

$$a_n = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [f(s) - c_0] \sin ns ds, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [f(s) - c_0] \cos ns ds \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Вставляя их в разложение (6.107), можем записать

$$u(\sigma) = a_0 + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} [f(s) - c_0] (-\sin ns \cos n\sigma + \cos ns \sin n\sigma) ds.$$

Учитывая равенство в пространстве обобщенных функций D' [44, 45]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2}, \quad x \in (0, 2\pi),$$

а также соотношения (6.106) и (6.108), приходим к требуемому результату.

Получим теперь формулу перестановки порядка интегрирования для интегралов Гильберта, аналогичную формуле Пуанкаре–Бергтрана для сингулярных интегралов с ядром Коши. Для этого первое равенство в (6.111) умножим на

$$\frac{1}{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{s-t}{2} ds$$

и проинтегрируем в пределах от 0 до 2π . Получим, учитывая (6.105) и второе равенство (6.111),

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{s-\sigma}{2} \left\{ \int_0^{2\pi} u(\omega) \operatorname{ctg} \frac{\omega-s}{2} d\omega \right\} ds &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) \operatorname{ctg} \frac{s-\sigma}{2} ds = -u(\sigma) - \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) ds = \\ &= -u(\sigma) - \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma-s}{2} d\sigma \right\} ds - \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\sigma) d\sigma \right\} ds = \\ &= -u(\sigma) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\sigma) d\sigma. \end{aligned}$$

Таким образом, формула перестановки выглядит так:

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{s-\sigma}{2} \left\{ \int_0^{2\pi} u(\omega) \operatorname{ctg} \frac{\omega-s}{2} d\omega \right\} ds = -u(\sigma) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\sigma) d\sigma. \quad (6.112)$$

Формулу (6.112) удобно представить в операторной форме

$$(H^2 u)(\sigma) = -I(u - m),$$

$$m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\sigma) d\sigma. \quad (6.113)$$

Рассмотрим теперь характеристическое СИУ с ядром Гильберта

$$au(s) + \frac{b}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma-s}{2} d\sigma = f(s), \quad (6.114)$$

причем будем предполагать, что коэффициенты a и b — константы и $a^2 + b^2 \neq 0$. Вводя двухсторонний регуляризатор, действующий по формуле

$$(B_0 v)(s) = \frac{1}{a^2 + b^2} (av(s) - b(Hv)(s)),$$

произведем, например, левостороннюю регуляризацию. Имеем

$$\frac{1}{a^2 + b^2} (al - bH)(au + bHu) = u - \frac{b^2}{2\pi(a^2 + b^2)} \int_0^{2\pi} u(\sigma) d\sigma = \frac{af}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} (Hf)(s).$$

Это уравнение Фредгольма с вырожденным ядром.

Умножим далее уравнение (6.113) на ds и проинтегрируем на $[0, 2\pi]$. С учетом (6.104), получим

$$a \int_0^{2\pi} u(s) ds = \int_0^{2\pi} f(s) ds.$$

Вводя значение этого функционала в предыдущее равенство, определяем решение уравнения (6.113)

$$u(s) = \frac{1}{a^2 + b^2} \left\{ af(s) + \frac{b^2}{2\pi a} \int_0^{2\pi} f(\sigma) d\sigma - \frac{b}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma-s}{2} d\sigma \right\}.$$

В общем случае полное СИУ с ядром Гильберта имеет вид

$$(A_0 u)(s) = a(s)u(s) + b(s)(Hu)(s) + (Tu)(s) = f(s), \quad s \in [0, 2\pi], \quad (6.115)$$

где H — гильбертов, а T — вполне непрерывный оператор в $L^2[0, 2\pi]$. При выполнении условия

$$a^2(s) + b^2(s) \neq 0, \quad s \in [0, 2\pi]$$

двусторонний регуляризатор для уравнения (6.115) существует и определяется выражением

$$(B_0 v)(s) = \frac{1}{a^2(s) + b^2(s)} \{a(s)v(s) - b(s)(Hv)(s)\}.$$

Индекс оператора A_0 определяется формулой

$$\operatorname{Ind} A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d \left\{ \arg \frac{a(s) - ib(s)}{a(s) + ib(s)} \right\}.$$

Заметим, что если ядро интегрального оператора T удовлетворяет условию H по обеим переменным, то он вполне непрерывен в пространстве Гельдера ($\operatorname{Lip}_\alpha[0, 2\pi]$, $0 < \alpha \leq 1$). Если к тому же потребовать, чтобы функции $a(s), b(s), f(s) \in \operatorname{Lip}_\alpha[0, 2\pi]$, то результат сохраняется.

Преобразование Гильберта–М. Рисса на оси имеет вид

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(t)}{t-x} dt = (Hv)(x), \\ v(x) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t)}{t-x} dt = -(Hu)(x), \end{aligned} \quad (6.116)$$

где $v(x)$ и $u(x) \in \text{Lip}_\alpha(-\infty, \infty)$ при $0 < \alpha < 1$, квадратично-суммируемые на $(-\infty, \infty)$ и интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Если одно из соотношений (6.116) рассматривать как сингулярное интегральное уравнение, то другое соотношение определяет его решение. Из (6.116) получаем следующую формулу (I — тождественный оператор):

$$H^2 u = -Iu. \quad (6.117)$$

Рассмотрим характеристическое СИУ на оси

$$u(x) - \frac{\lambda}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(y)}{y-x} dy = f(x), \quad f(x) \in L^2(-\infty, \infty).$$

Будем предполагать также, что $1 + \lambda^2 \neq 0$. Введем регуляризирующий оператор

$$H_1 = I + \lambda H.$$

Тогда регуляризация, например слева, дает

$$(I + \lambda H)(I - \lambda H)u = (I - \lambda^2 H^2)u = (I + \lambda H)f.$$

С учетом соотношения (6.117) получаем окончательно

$$u(x) = \frac{1}{1 + \lambda^2} \left(f(x) + \frac{\lambda}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{y-x} dy \right).$$

Решение $u(x)$ также принадлежит пространству $L^2(-\infty, \infty)$.

6.10. Интегральные уравнения с неподвижными особенностями

Такие уравнения имеют приложения в различных задачах механики и математической физики (задачи о линейных дефектах типа трещин, либо стрингеров, выходящих на границу тела, о пересекающихся дефектах, задача Трикоми для уравнения смешанного типа и др.) [7, 40, 42, 46]. Теория сингулярных интегральных уравнений с неподвижными особенностями разрабатывалась многими авторами [14, 35, 45]. Ниже проиллюстрируем метод Карлемана сведения к краевой задаче Римана на примере уравнения Трикоми.

$$u(x) - \lambda \int_0^1 \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t+x-2tx} \right) u(t) dt = f(x). \quad (6.118)$$

Здесь второе слагаемое в ядре непрерывно, если хотя бы одна из переменных x или t меняется строго внутри $(0, 1)$. Если же $x=t=0$ или $x=t=1$, то эта часть ядра делается бесконечной, причем она и несуммируема в квадрате $[0, 1] \times [0, 1]$. Ниже будем счи-

тать, что $f(x) \in \text{Lip}_\alpha[0,1]$, $\alpha > 0$. На искомую функцию налагаются следующие условия: а) $u(x) \in \text{Lip}_\alpha[a,b]$, где $0 < a < b < 1$, б) произведения $u(x) \ln x$ и $u(x) \ln(1-x)$ суммируемы на $[0,1]$.

Введем функцию комплексного переменного $z = x + iy$

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t+z-2zt} \right) u(t) dt, \quad (6.119)$$

где z — произвольная точка комплексной плоскости, не лежащая на оси. Эта функция аналитична как в верхней, так и в нижней полуплоскости.

Пусть $\Phi^+(x)$ и $\Phi^-(x)$ — предельные значения функции $\Phi(z)$ при стремлении z к точке $0 < x < 1$ соответственно из верхней и нижней полуплоскости. Тогда, используя формулы Сохоцкого–Племеля (1.23), получаем из (6.118), (6.119)

$$(1-i\pi\lambda)\Phi^+(x) - (1+i\pi\lambda)\Phi^-(x) = f(x), \quad 0 < x < 1. \quad (6.120)$$

Для того чтобы прийти к задаче Римана, т. е. связать граничные значения на всей оси, введем дробно-линейное преобразование

$$z \rightarrow \frac{z}{2z-1}.$$

С учетом (6.119) находим

$$\Phi\left(\frac{z}{2z-1}\right) = (2z-1)\Phi(z).$$

Заменяя в равенстве (6.120) x на $x(2z-1)^{-1}$, приводим его к виду

$$(1-i\pi\lambda)\Phi^-(x) + (1+i\pi\lambda)\Phi^+(x) = \frac{1}{2z-1} f\left(\frac{x}{2z-1}\right), \quad 0 < x < 1. \quad (6.121)$$

Причем так как дробно-линейное преобразование

$$\zeta = \frac{z}{2z-1}$$

переводит верхнюю полуплоскость в нижнюю и наоборот; отрезок $[0,1]$ в два луча $(0, -\infty)$ и $(\infty, 1)$, то соотношение (6.121) выполняется на этих лучах. Теперь соотношения (6.120) и (6.121) можно объединить в одно

$$\Phi^+(x) - G(x)\Phi^-(x) = h(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad x \neq 0, \quad x \neq 1, \quad (6.122)$$

где

$$G(x) = \begin{cases} \frac{1+i\pi\lambda}{1-i\pi\lambda}, & 0 < x < 1, \\ \frac{1-i\pi\lambda}{1+i\pi\lambda}, & x < 0 \text{ или } x > 1, \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{1-i\pi\lambda}, & 0 < x < 1 \\ \frac{f(x(2x-1)^{-1})}{(1+i\pi\lambda)(2x-1)}, & x < 0 \text{ или } x > 1. \end{cases}$$

Рассмотрим сперва однородную задачу Римана об определении аналитической как в верхней, так и в нижней полуплоскости функции $\chi(z)$, ограниченной на бесконечности и удовлетворяющей на действительной оси уравнению

$$\chi^+(x) = G(x)\chi^-(x).$$

Логарифмируя это равенство, приходим к задаче о скачке на оси

$$\ln \chi^+(x) - \ln \chi^-(x) = \ln G(x),$$

решение которой определяется несобственным интегралом

$$\ln \chi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln G(x)}{x-z} dx + \ln Q(z), \quad Q(\infty) = \text{const}. \quad (6.123)$$

Введем переменную $\theta: \lambda\pi = \operatorname{tg} \pi\theta, -\pi/2 < \pi\theta < \pi/2$. Тогда

$$\ln G(x) = \begin{cases} 2i\pi\theta, & x \in (0, 1), \\ -2i\pi\theta, & x \in R \setminus [0, 1]. \end{cases}$$

Вычисляя теперь несобственный интеграл в (6.123), находим

$$\ln \chi^+(z) = 2\theta \ln \frac{1-z}{z} + \pi i\theta, \quad \ln \chi^-(z) = 2\theta \ln \frac{1-z}{z} - \pi i\theta,$$

причем под $\ln \frac{1-z}{z}$ понимается однозначная ветвь, регулярная в плоскости, разрезанной вдоль лучей $(-\infty, 0)$ и $(1, \infty)$ и принимающая действительные значения на интервале $(0, 1)$. Отсюда находим решение однородной задачи

$$\chi^+(z) = e^{\pi i\theta} \left(\frac{1-z}{z} \right)^{2\theta}, \quad \chi^-(z) = e^{-\pi i\theta} \left(\frac{1-z}{z} \right)^{2\theta}.$$

Для решения неоднородной задачи введем в предельное равенство (6.122) вместо $G(x)$ его выражение в виде дроби $\chi^+(x)/\chi^-(x)$ и разделим результат на $\chi^+(x)$. Получим вновь задачу о скачке

$$\frac{\Phi^+(x)}{\chi^+(x)} - \frac{\Phi^-(x)}{\chi^-(x)} = \frac{h(x)}{X^+(x)}. \quad (6.124)$$

Частное решение этой задачи имеет вид

$$\Phi(z) = \frac{\chi(z)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(t) dt}{\chi(t)(t-z)}.$$

Для определения общего решения $\Phi_0(z)$ однородного уравнения (6.124) заметим, что функция $F(z) = \Phi_0(z)/\chi(z)$ удовлетворяет уравнению

$$F^+(x) - F^-(x) = 0$$

и, следовательно, голоморфна на всей плоскости комплексного переменного z , за исключением, быть может, точек $z=0$ и $z=1$. Поэтому при $0 < 2\theta < 1$ с учетом интегрируемости $u(x)\ln(1-x)$ и структуры функций $\chi^+(z)$ и $\chi^-(z)$ находим

$$F(z) = \frac{\text{const}}{1-z}.$$

При $-1 < 2\theta < 0$ с учетом интегрируемости $u(x)\ln x$ находим

$$F(z) = \frac{\text{const}}{z}.$$

Окончательно общее решение краевой задачи (6.122) принимает вид

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= \chi(z) \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(t) dt}{\chi^+(t)(t-z)} + \frac{\text{const}}{z} \right\}, \quad \theta < 0, \\ \Phi(z) &= \chi(z) \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(t) dt}{\chi^+(t)(t-z)} + \frac{\text{const}}{1-z} \right\}, \quad \theta > 0.\end{aligned}\quad (6.125)$$

Решение интегрального уравнения (6.118) определяем по формуле

$$u(x) = \Phi^+(x) - \Phi^-(x), \quad x \in (0,1).$$

Интеграл в (6.125) разбиваем на три интеграла по промежуткам $(-\infty, 0)$, $(1, \infty)$ и $(0, 1)$ и в первых двух заменяем t на $t(2t-1)^{-1}$. После соответствующих вычислений получим решение Трикоми

$$u(x) = \frac{1}{1+\lambda^2\pi^2} \left\{ f(x) + \lambda \left(\frac{1-x}{x} \right)^{2\theta} \int_0^1 \left(\frac{t}{1-t} \right)^{2\theta} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{x+t-2xt} \right) f(t) dt \right\} + \frac{A}{x^{1+2\theta^*} (1-x)^{-2\theta^*}},$$

где $\operatorname{tg} \pi\theta^* = \lambda\pi$, $-1 < \theta^* < 0$ и A — произвольная постоянная.

6.11. Многомерные сингулярные интегралы и сингулярные интегральные уравнения

В отличие от уравнений Фредгольма теория многомерных сингулярных интегральных уравнений не может быть получена как прямое обобщение теории одномерных СИУ.

Сингулярный интеграл. Пусть R^m — m -мерное евклидово пространство и область $D \subset R^m$. Выражение вида

$$\int_D u(y) \frac{f(x, \theta)}{|x-y|^m} dy, \quad \theta = \frac{y-x}{|x-y|}, \quad x, y \in R^m \quad (6.126)$$

называется сингулярным интегралом. Точка $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ называется полюсом, функция $f(x, \theta)$ — характеристикой сингулярного интеграла (6.126), а $u(y)$ — его плотностью. Регуляризация этого интеграла осуществляется следующим образом. Особая точка x вырезается шаром $B(x, \varepsilon)$ и интегрирование производится по оставшейся части.

$$\int_D u(y) \frac{f(x, \theta)}{|x-y|^m} dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{D \setminus B(x, \varepsilon)} u(y) \frac{f(x, \theta)}{|x-y|^m} dy.$$

Если этот предел существует, то он и принимается за главное значение (по Коши) сингулярного интеграла (6.126). В таком случае говорят, что интеграл (6.126) существует в смысле главного значения [34].

Выясним условия, при которых сингулярный интеграл (6.126) существует. Для простоты рассмотрим случай $m = 2$. Имеем

$$\begin{aligned} \int_{R^2} u(y) \frac{f(x, \theta)}{r^2} dy &= \int_{r>1} u(y) \frac{f(x, \theta)}{r^2} dy + \int_{r<1} [u(y) - u(x)] \frac{f(x, \theta)}{r^2} dy + \\ &+ u(x) \int_{r<1} \frac{f(x, \theta)}{r^2} dy, \quad r = |x-y|. \end{aligned} \quad (6.127)$$

Для вычисления последнего интеграла введем полярные координаты с центром в точке x . Тогда получим

$$\int_{r<1} \frac{f(x, \theta)}{r^2} dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon < r < 1} \frac{f(x, \theta)}{r^2} r dr d\theta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma} f(x, \theta) ds, \quad (6.128)$$

где Γ — окружность радиуса ε с центром в точке x .

Ниже будем предполагать, что характеристика $f(x, \theta)$ ограничена и непрерывна по θ и x , плотность $u(y) \in \text{Lip}_\alpha(\overline{D})$, $\alpha > 0$, т. е.

$$|u(y) - u(x)| \leq cr^\alpha, \quad \alpha > 0, \quad c = \text{const},$$

а на бесконечности (если область D бесконечная) $u(y) = O(|y|^{-k})$, $k > 0$. В этих условиях первые два интеграла в правой части (6.127) абсолютно сходятся, а из (6.128) следует, что сингулярный интеграл

$$\int_{R^2} u(y) \frac{f(x, \theta)}{r^2} dy \text{ или } \int_D u(y) \frac{f(x, \theta)}{r^2} dy$$

существует тогда и только тогда, когда

$$\int_{\Gamma} f(x, \theta) ds = 0.$$

В общем случае евклидова пространства R^m необходимым и достаточным условием существования интеграла (6.126) по области $D \subset R^m$ или по всему пространству R^m является равенство (теорема 1). [34, 36, 46]

$$\int_S f(x, \theta) ds = 0, \quad (6.129)$$

где S — сфера с центром в точке x и радиусом ε ($\varepsilon > 0$ — мало).

Из сказанного следует регулярное представление сингулярного интеграла (6.126)

$$\int_D \frac{f(x, \theta)}{r^m} u(y) dy = \int_{r>1} \frac{f(x, \theta)}{r^m} u(y) dy + \int_{r<1} \frac{f(x, \theta)}{r^m} [u(y) - u(x)] dy, \quad (6.130)$$

причем интеграл в левой части равенства (6.130) — функция, непрерывная по x в области $D \subset R^m$.

Имеет место теорема 2 (Ж. Жиро, см. [34]). Пусть плотность удовлетворяет условиям оговоренным выше, а характеристика $f(x, \theta)$ ограничена и непрерывно дифференцируема по декартовым координатам точек x и θ . Тогда интеграл (6.126) удовлетворяет условию Липшица с тем же показателем α в любой конечной подобласти $D' \subset D$.

Теорема 3 (А. Кальдерон и А. Зигмунд, С. Г. Михлин, см. [34]). Если

$$\int_S |f(x, \theta)|^{p'} ds \leq c = \text{const}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

то сингулярный интегральный оператор (6.126) ограничен в $L^p(R^m)$, $1 < p < \infty$. Формула дифференцирования интеграла со слабой особенностью в пространстве R^m определяется следующим предложением.

Теорема 4. Пусть функция $\varphi(x, \theta)$ имеет в замкнутой конечной области $\bar{D} \subset R^m$ непрерывные первые производные по декартовым координатам точек x и θ , а $u \in L^p(D)$, $1 < p < \infty$. Тогда интеграл

$$w(x) = \int_D \frac{\varphi(x, \theta)}{r^{m-1}} u(y) dy, \quad r = |x - y|$$

имеет обобщенные производные $\frac{\partial w}{\partial x_k} \in L^p(D)$; эти производные определяются формулой (вектор r направлен от точки x к точке y)

$$\frac{\partial w}{\partial x_k} = \int_D \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\varphi(x, \theta)}{r^{m-1}} \right] u(y) dy - u(x) \int_S \varphi(x, \theta) \cos(r, x_k) ds,$$

где S — единичная сфера.

Если $u(y) \in \text{Lip}_\alpha(\bar{D})$, $0 < \alpha < 1$, то производные $\frac{\partial w}{\partial x_k}$ непрерывны в D .

Композиция сингулярных операторов [24, 25, 34, 41]. Сингулярным оператором в банаховом пространстве $L^p(R^m)$ называют оператор A , определяемый формулой вида

$$(Au)(x) = a_0(x)u(x) + \int_{R^m} \frac{f(x, \theta)}{r^m} u(y) dy + (Tu)(x),$$

где T — вполне непрерывный оператор в L^p .

Рассмотрим несколько подробнее (простейший) сингулярный оператор при $m = 2$

$$Au = a_0(x)u(x) + \int_{R^2} \frac{f(x, \theta)}{r^2} u(y) dy + Tu. \quad (6.131)$$

Будем предполагать, что коэффициент $a_0(x)$ ограничен и принадлежит классу Lip_α , а характеристика удовлетворяет условию

$$\int_0^{2\pi} |f(x, \theta)|^2 d\theta < c.$$

Тогда $f(x, \theta)$ можно разложить в сходящийся (в среднем) ряд Фурье

$$f(x, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(x) e^{inx}. \quad (6.132)$$

Нулевой член в сумме отсутствует в силу (6.129).

Согласно формулам С. Г. Михлина для двойных сингулярных интегралов

$$A_n u = \int_{R^2} \frac{e^{inx}}{r^2} u(y) dy = \frac{2\pi i^n}{|n|} h^n u, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (6.133)$$

где

$$h u = \frac{1}{2\pi i} A_1 u = \frac{1}{2\pi i} \int_{R^2} \frac{e^{i\theta}}{r^2} u(y) dy,$$

$$h^{-1} u = \frac{1}{2\pi i} A_{-1} u = \frac{1}{2\pi i} \int_{R^2} \frac{e^{-i\theta}}{r^2} u(y) dy.$$

В соответствии с (6.132) и (6.133) сингулярный оператор в (6.131) можно представить операторным рядом

$$\int \frac{f(x, \theta)}{r^2} u(y) dy = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(x) h^n u, \quad (6.134)$$

$$a_n(x) = \frac{2\pi i^n}{n} b_n(x), \quad a_{-n} = (-1)^n \frac{2\pi i^{-n}}{n} b_{-n}(x), \quad n > 0.$$

Включив в (6.134) внеинтегральный член, присутствующий в (6.131), получим разложение

$$Au = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(x) h^n u, \quad h^0 u = u. \quad (6.135)$$

Рассмотрим теперь композицию сингулярных операторов. Пусть согласно (6.135)

$$A_1 u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{(1)}(x) h^n u, \quad A_2 u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{(2)}(x) h^n u.$$

В силу равенства [34]

$$h^n (Qu) = Qh^n u + Tu,$$

где Q — некоторая ограниченная непрерывная по Гельдеру функция, а T — вполне непрерывный оператор в $L^p(R^m)$, можно записать с учетом (6.135)

$$A_2 A_1 u - T_* u = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{k-n}^{(1)}(x) a_n^{(2)}(x) \right\} h^k u = A_1 A_2 u - T_{**} u, \quad (6.136)$$

где T_*, T_{**} — некоторые вполне непрерывные операторы. Если в операторах A_1 и A_2 присутствуют еще вполне непрерывные операторы T_1 и T_2 соответственно, то это повлечет за собой лишь надлежащее изменение операторов T_* и T_{**} в (6.136).

Таким образом, умножение сингулярных операторов коммутативно с точностью до вполне непрерывного слагаемого.

Символ сингулярного оператора [34]. Под символом двумерного сингулярного оператора (6.131) понимается функция $\Phi(x, \theta)$, определяемая рядом

$$\Phi(x, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(x) e^{in\theta}, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi, \quad (6.137)$$

где коэффициенты $a_n(x)$ определены в (6.134). Всякому вполне непрерывному оператору в рассматриваемом пространстве $L^p(R^m)$ приписывается нулевой символ. По данному символу сингулярный оператор восстанавливается с точностью до вполне непрерывного слагаемого. Из равенств (6.135) и (6.136) вытекает следующее предложение.

Теорема [34, 41]. Сумме и произведению простейших сингулярных операторов соответствует сумма и произведение их символов.

Пусть характеристика сингулярного интеграла не зависит от полюса, т. е.

$$Au = a_0 u(x) + \int_{R^m} k(x-y) u(y) dy, \quad (6.138)$$

где

$$k(x-y) = \frac{f(\theta)}{|y-x|^m} = |y-x|^{-m} f\left(\frac{y-x}{|y-x|}\right).$$

Рассмотрим преобразование Фурье ядра $k(z)$

$$F[k(z)](x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{m}{2}} \int_{R^m} k(z) e^{-i(x,z)} dz.$$

Так как функция $k(z)$ не суммируема в окрестности каждой из точек $z=0$ и $z=\infty$, то этот интеграл расходится. Однако если определить преобразование Фурье ядра $k(z)$ предельным соотношением

$$F[k](x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{m}{2}} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\epsilon < |z| < N} k(z) e^{-i(x,z)} dz,$$

то можно доказать, что предел в правой части этого равенства существует и окончательная формула для преобразования Фурье сингулярного ядра имеет вид [34]

$$F[k](\Lambda) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{m}{2}} \int_{S_1} \left(\ln \frac{1}{|\cos \gamma|} - \frac{i\pi}{2} \operatorname{sign} n \cos \gamma \right) f(-\Psi) dS_1,$$

где

$$|z| = \rho, |x| = R, \Psi = \frac{z}{\rho}, \Lambda = \frac{x}{R}, (x, z) = |x||z| \cos \gamma.$$

Преобразование Фурье сингулярного интеграла в L^2

$$v(x) = \int_{R^m} k(x-y)u(y)dy = \int_{R^m} \frac{f(\theta)}{r^m} u(y)dy,$$

где $f(\theta)$ ограничена на единичной сфере S_1 , а плотность $u \in \text{Lip}_\alpha(R^m)$, таково:

$$F[v](x) = (2\pi)^{\frac{m}{2}} F[k](\Lambda) F[u](x). \quad (6.139)$$

Если $v(x)$ финитна, то из (6.139) получается представление

$$\begin{aligned} v(x) &= \int_{R^m} k(x-y)u(y)dy = (F^{-1}\Phi F u)(x), \\ \Phi &= (2\pi)^{\frac{m}{2}} F[k]. \end{aligned}$$

Вернемся теперь к оператору (6.138), где $a_0 = \text{const}$. В силу (6.139) его можно записать в виде

$$A = F^{-1}\Phi_A F, \quad (6.140)$$

где

$$\Phi_A(\Lambda) = a_0 + (2\pi)^{\frac{m}{2}} F[k](\Lambda).$$

Отсюда следует, что $\|A\|_{L^2(R^m)} = \text{vrai} \max_\theta |\Phi_A(\theta)|$.

Величина $\Phi_A(\Lambda)$, определенная в (6.140), обладает всеми свойствами символа. Действительно, если

$$(Bu)(x) = b_0 u(x) + \int l(x-y)u(y)dy, \quad l(x-y) = r^{-m}g(\theta),$$

то

$$(A+B)(x) = (a_0 + b_0)u(x) + \int [k(x-y) + l(x-y)]u(y)dy,$$

$$\Phi_{A+B}(\Lambda) = a_0 + b_0 + (2\pi)^{\frac{m}{2}} F[k+l](\Lambda) = \Phi_A(\Lambda) + \Phi_B(\Lambda).$$

Далее, в соответствии с (6.140) $B = F^{-1}\Phi_B F$, но тогда

$$AB = (F^{-1}\Phi_A F)(F^{-1}\Phi_B F) = F^{-1}\Phi_A \Phi_B F, \quad \text{т. е. } \Phi_{AB} = \Phi_A \Phi_B.$$

Легко видеть, что операторы вида (6.138) коммутируют. В самом деле,

$$BA = (F^{-1}\Phi_B F)(F^{-1}\Phi_A F) = F^{-1}\Phi_B \Phi_A F = AB.$$

Имеет место теорема (С. Г. Михлин [34]). Пусть характеристика сингулярного интеграла не зависит от полюса и квадратично суммируема на единичной сфере S_1 . Тогда символ этого интеграла равен преобразованию Фурье его ядра.

Рассмотрим теперь простейшее сингулярное интегральное уравнение

$$Au = a_0 u(x) + \frac{1}{2\pi} \int \frac{f(\theta)}{r^2} u(y)dy = g(x). \quad (6.141)$$

Примем, что $g(x) \in L^2(R^2)$, символ $\Phi(\theta)$ почти всюду конечен и $\inf_{\theta} |\Phi(\theta)| > 0$. Тогда уравнение (6.141) имеет единственное решение, определяемое формулой

$$u(x) = F^{-1}[\Phi_A(\theta)]^{-1} F[g],$$

которая непосредственно следует из (6.140).

Сопряженный сингулярный оператор к простейшему вводится следующим образом. Если характеристика не зависит от полюса, то на основании (6.140) $A = F^{-1}\Phi(\theta)F$, где F — оператор преобразования Фурье. Так как $F^* = F^{-1}$, то

$$(Au, v) = (u, A^*v) \Rightarrow (F^{-1}\Phi(\theta)Fu, v) = (u, F^{-1}\overline{\Phi(\theta)}Fv).$$

Отсюда следует, что $A^* = F^{-1}\overline{\Phi(\theta)}F$.

Таким образом, имеет место теорема [34]. Пусть A — простейший сингулярный оператор, символ которого $\Phi(\theta)$ не зависит от полюса. Тогда A^* также есть простейший сингулярный оператор с символом $\overline{\Phi(\theta)}$.

Если A — общий сингулярный оператор, ограниченный в $L^p(R^m)$

$$Au = a(x)u(x) + \int_{R^m} \frac{f(x, \theta)}{r^m} u(y) dy,$$

то при определенных условиях, указанных в [34], существует сопряженный оператор A^* , также ограниченный и действующий по формуле

$$A^*v = \overline{a(x)}v(x) + \int_{R^m} \frac{\overline{f(y, -\theta)}}{r^m} v(y) dy.$$

Общий сингулярный оператор A с невырождающимся символом $\inf |\Phi_A(x, \theta)| > 0$ допускает регуляризацию при помощи сингулярного оператора B с символом $\Phi_B = \Phi_A^{-1}(x, \theta)$. Так как символ оператора BA равен единице, то $BA = I + T'$, где I — тождественный, а T' — вполне непрерывный оператор в $L^p(R^m)$. Композиция $AB = I + T''$, значит, B есть двусторонний регуляризатор для A и для сингулярного уравнения

$$Au = g(x), \quad g \in L^p(R^m) \tag{6.142}$$

справедливы теоремы Нетера (см. гл. 3, п. 3.13). Однако если символ $\Phi_A(x, \theta)$ удовлетворяет неравенству $\inf |\Phi(x, \theta)| > 0$ и условиям, указанным в [34] (теорема 2.34), то уравнение (6.142) допускает эквивалентную регуляризацию и его индекс равен нулю. Следовательно, для уравнения (6.142) справедливы теоремы Фредгольма, которые в рассматриваемом случае сводятся к следующему.

Уравнения $Au = 0$ и $A^*v = 0$ имеют одно и то же конечное число линейно независимых решений; неоднородное уравнение (6.142) разрешимо тогда и только тогда, когда $g(x)$ ортогональна ко всем решениям уравнения $A^*v = 0$ (т. е. оператор A нормально

разрешим). Отсюда, в частности, следует, что уравнение (6.142) разрешимо, и притом единственным образом, при всяком $g \in L^p(R^m)$, если соответствующее однородное уравнение $Au = 0$ не имеет нетривиальных решений.

Системы сингулярных интегральных уравнений [24, 25, 34, 29]. Рассмотрим систему

$$\sum_{k=1}^m A_{jk} u_k = g_j(x) \quad (j=1, 2, \dots, n), \quad (6.143)$$

где A_{jk} — общий сингулярный оператор, символ которого обозначим через $\Phi_{jk}(x, \theta)$. Эту систему можно представить в виде одного матричного уравнения

$$Au = g, \quad (6.144)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1n} \\ A_{21}, A_{22}, \dots, A_{2n} \\ \dots \\ A_{n1}, A_{n2}, \dots, A_{nn} \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \dots \\ g_n \end{pmatrix}.$$

Введем символическую матрицу сингулярного оператора A

$$\Phi(x, \theta) = \begin{pmatrix} \Phi_{11}, \Phi_{12}, \dots, \Phi_{1n} \\ \Phi_{21}, \Phi_{22}, \dots, \Phi_{2n} \\ \dots \\ \Phi_{n1}, \Phi_{n2}, \dots, \Phi_{nn} \end{pmatrix}. \quad (6.145)$$

Определитель $\delta = \det \Phi(x, \theta)$ называется символическим определителем. Примем, что символы $\Phi_{jk}(x, \theta)$ удовлетворяют условиям теоремы 2.34 из [34]. Имеет место теорема.

Если символический определитель системы (6.143) не принимает значения нуль, так что

$$\inf |\delta| > 0,$$

то в соответствующем пространстве $L^p(E^m)$ система (6.143) нормально разрешима и имеет конечный индекс (разность между числом линейно независимых решений исходного уравнения и сопряженного к нему). Однако этого условия недостаточно для того, чтобы индекс системы равнялся нулю. Приведем некоторые достаточные признаки равенства нулю индекса системы [15, 41].

1. Символическая матрица системы не зависит от x , в этом случае $\text{Ind } A = 0$.
2. Пусть символическая матрица (6.145) имеет вид $\Phi(x, \theta) = E - \Psi(x, \theta)$, где E — единичная матрица. Если характеристические числа матрицы Ψ при любых значениях x и θ строго меньше единицы по модулю, то индекс системы (6.143) равен нулю.

3. Если нижние грани модулей миноров

$$\delta_1 = \Phi_{11}, \quad \delta_2 = \begin{vmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{vmatrix}, \dots, \delta_n = \delta = \begin{vmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \dots & \Phi_{1n} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & \dots & \Phi_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Phi_{n1} & \Phi_{n2} & \dots & \Phi_{nn} \end{vmatrix} \quad (6.146)$$

положительны, то индекс системы (6.143) равен нулю.

4. Пусть в комплексной ζ — плоскости существует гладкая кривая L , соединяющая точки $\zeta = 0$ и $\zeta = \infty$ и не имеющая общих точек с множеством характеристических чисел символической матрицы $\Phi(x, \theta)$, соответствующей некоторому матричному сингулярному оператору A . Тогда $\text{Ind } A = 0$.

5. Если $\delta \neq 0$, а символическая матрица эрмитова или кососимметрична, то индекс системы (6.143) равен нулю.

За строгими определениями и подробными доказательствами отсылаем читателя к книге С. Г. Михлина [34].

Приложения в теории упругости. Модель линейной упругости изложена в приложении к главе 4. Там же построен тензор фундаментальных решений системы уравнений Ламе. В новых обозначениях он имеет вид

$$V = \|v_{ik}(x, y)\|,$$

$$v_{ik}(x, y) = \frac{1}{1\sigma\mu(1-\nu)} \left\{ \frac{3-4\nu}{r} \delta_{ik} + \frac{(y_i - x_i)(y_k - x_k)}{r^3} \right\}, \quad r = |x - y| \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

Здесь каждый столбец $v_i = \{v_{1i}, v_{2i}, v_{3i}\}$ удовлетворяет системе Ламе. Исходя из формулы Бетти [36, 40, 48], можно ввести объемный потенциал

$$\int_{\Omega} V(x, y) \psi(y) dy = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 v_i \psi_i dy$$

и два поверхностных потенциала, двойного и простого слоя соответственно

$$\int_s P(x, y) \mathbf{z}(y) ds_y, \quad \int_s V(x, y) \boldsymbol{\rho}(y) ds_y.$$

Здесь $\mathbf{z}(y)$, $\boldsymbol{\rho}(y)$ — трехмерные векторы, $P(x, y)$ — тензор, i -й столбец которого совпадает с $p(v_i)$, причем $p(u)$ — вектор поверхностных напряжений. Составляющие тензора $P(x, y)$ имеют вид [34]

$$P_{ij} = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \left[\frac{1-2\nu}{r^3} (\xi_i \delta_{jk} - \xi_j \delta_{ik} - \xi_k \delta_{ij}) - \frac{3}{r^5} \xi_i \xi_j \xi_k \right] \alpha_k,$$

где $\xi_i = y_i - x_i$, α_k — направляющие косинусы внешней нормали n к поверхности s . Пусть A — оператор (Ламе), действующий по формуле

$$A\mathbf{u} = -\mu \Delta \mathbf{u} - (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}.$$

Тогда

$$Au = \psi(x), \quad x \in \Omega \text{ и } Au = 0, \quad x \in R^3 \setminus \bar{\Omega}.$$

Поверхностные потенциалы простого и двойного слоя удовлетворяют однородной системе Ламе $Au = 0$ как в Ω , так и в $R^3 \setminus \bar{\Omega}$. Потенциал простого слоя непрерывно продолжим через границу тела S , т. е. непрерывен во всем пространстве.

Исходя из соотношения, аналогичного известной формуле Гаусса в теории потенциала (χ — постоянный вектор)

$$\int_S P(x, y) \cdot \chi ds_y = \begin{cases} -\chi, & x \in \Omega, \\ -\frac{1}{2}\chi, & x \in S, \\ 0, & x \notin \bar{\Omega} \end{cases} \quad (6.147)$$

для потенциала двойного слоя в точке $x_0 \in S$ можно получить следующее регулярное представление:

$$u(x) = \int_S P(x, y) \cdot [\chi(y) - \chi(x_0)] ds_y + \int_S P(x, y) \cdot \chi(x_0) ds_y.$$

Если $\chi(y) \in \text{Lip}_\alpha(S)$ с $\alpha > 0$, то первый интеграл здесь непрерывен когда точка y проходит через x_0 , а второй интеграл имеет значения согласно (6.147). Теперь получаем

$$u^+(x_0) - u^-(x_0) = -\chi(x_0),$$

$$u^+(x_0) + u^-(x_0) = u(x_0) = \int_S P(x_0, y) \cdot \chi(y) ds_y,$$

где $u^+(x_0)$ обозначает предельное значение потенциала двойного слоя при стремлении точки x к точке $x_0 \in S$ из области Ω , а $u^-(x_0)$ — предельное значение при стремлении x к x_0 из области $R^3 \setminus \bar{\Omega}$. Отсюда [34]

$$\begin{aligned} u^+(x_0) &= -\frac{1}{2}\chi(x_0) + \int_S P(x_0, y) \cdot \chi(y) ds_y, \\ u^-(x_0) &= \frac{1}{2}\chi(x_0) + \int_S P(x_0, y) \cdot \chi(y) ds_y. \end{aligned} \quad (6.148)$$

Пусть $\rho(y) \in \text{Lip}_\alpha(S), \alpha > 0$. Если вектор перемещения задается потенциалом простого слоя

$$u(x) = \int_S V(x, y) \cdot \rho(y) dS_y, \quad (6.149)$$

то предельные значения вектора напряжения $\mathbf{p}(u)$ (напряжения на границе тела), вызванные вектором перемещения (6.149), таковы [29, 40]:

$$\begin{aligned}\{\mathbf{p}(u)\}^+ &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\rho}(x_0) + \int_S \mathbf{P}^*(y, x_0) \cdot \boldsymbol{\rho}(y) dS_y, \\ \{\mathbf{p}(u)\}^- &= -\frac{1}{2} \boldsymbol{\rho}(x_0) + \int_S \mathbf{P}^*(y, x_0) \cdot \boldsymbol{\rho}(y) dS_y,\end{aligned}\quad (6.150)$$

где $\mathbf{P}^*(y, x)$ — сопряженный тензор к $\mathbf{P}(x, y)$.

Будем искать решение задачи 1 (на поверхности тела S задан вектор перемещений)

$$\mathbf{u}|_S = \mathbf{g}(x), \quad x \in S \quad (6.151)$$

в виде потенциала двойного слоя

$$\mathbf{u}(x) = \int_S \mathbf{P}(x, y) \cdot \boldsymbol{\chi}(y) dS_y.$$

Для решения задачи 2 (на S задан вектор напряжения)

$$\mathbf{p}(u)|_S = \boldsymbol{\sigma}_{jk}(u) \alpha_k n_j^{(0)} = \mathbf{h}(x), \quad x \in S, \quad (6.152)$$

где α_k — направляющие косинусы внешней нормали к поверхности S , $n_j^{(0)}$ — орт оси x_j , $\mathbf{g}(x)$ и $\mathbf{h}(x)$ — заданные на S векторы, используем потенциал простого слоя (6.149).

Привлекая теперь формулы для предельных значений (6.148) и (6.150), сводим граничные задачи (6.151), (6.152) к следующим векторным интегральным уравнениям:

$$\boldsymbol{\chi}(x) - 2 \int_S \mathbf{P}(x, y) \cdot \boldsymbol{\chi}(y) dS_y = -2\mathbf{g}(x), \quad (6.153)$$

$$\boldsymbol{\chi}(x) + 2 \int_S \mathbf{P}(x, y) \cdot \boldsymbol{\chi}(y) dS_y = 2\mathbf{g}(x), \quad (6.154)$$

$$\boldsymbol{\rho}(x) + 2 \int_S \mathbf{P}^*(y, x) \cdot \boldsymbol{\rho}(y) dS_y = 2\mathbf{h}(x), \quad (6.155)$$

$$\boldsymbol{\rho}(x) - 2 \int_S \mathbf{P}^*(y, x) \cdot \boldsymbol{\rho}(y) dS_y = -2\mathbf{h}(x). \quad (6.156)$$

Здесь первые два уравнения относятся к задаче 1, причем уравнение (6.153) соответствует внутренней, а уравнение (6.154) — внешней задаче. Последние два уравнения относятся к задаче 2; (6.155) — к внутренней, а (6.156) — к внешней задаче. Уравнения (6.153) и (6.156), а также уравнения (6.154) и (6.155) сопряжены между собой. Учитывая соотношения (6.146) для составляющих тензора $\mathbf{P}(x, y)$, заключаем, что уравнения (6.153)–(6.156) сингулярные.

Введем в каждой точке $x \in S$ местные координаты так, что оси x_1 и x_2 лежат в касательной плоскости к поверхности S , а ось x_3 направлена по внешней нормали к S . В качестве неизвестных возьмем составляющие векторов $\boldsymbol{\chi}$ и $\boldsymbol{\rho}$ в местных координатах. Индекс сингулярной системы при этом не изменится [34]. Тензор \mathbf{P} можно представить в виде

$$P_{ij}(x, y) = \frac{1-2\nu}{8\pi(1-\nu)} \frac{\xi_i \alpha_j - \xi_j \alpha_i}{|x-y|^\gamma} + O(r^{\gamma-2}),$$

где γ — показатель Ляпунова поверхности S .

Учитывая соотношения (в этой системе координат) $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 1$ и тот факт, что множество значений символа инвариантно относительно замены переменных [34], можно представить систему (6.153) в виде

$$\chi_1(x) + \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)} \int_s^{\xi_1} \chi_3(y) dS_y + T_1(\chi) = 2g_1(x),$$

$$\chi_2(x) + \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)} \int_s^{\xi_2} \chi_3(y) dS_y + T_2(\chi) = 2g_2(x),$$

$$\chi_3(x) - \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)} \int_s^{\xi_1 \chi_1(y) + \xi_2 \chi_2(y)} \frac{dS_y}{r^3} + T_3(\chi) = 2g_3(x),$$

где T_k — некоторые интегральные операторы со слабой особенностью.

Характеристики этих сингулярных интегралов

$$\frac{\xi_1}{r} = \cos \theta, \quad \frac{\xi_2}{r} = \sin \theta.$$

Согласно формуле (6.134) символы интегралов с такими характеристиками получаются умножением характеристик на $2\pi i$. Теперь получаем символьический определитель этой системы $(2\delta = (1-2\nu)(1-\nu)^{-1})$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & i\delta \cos \theta \\ 0 & 1 & i\delta \sin \theta \\ -i\delta \cos \theta & -i\delta \sin \theta & 1 \end{vmatrix} = \frac{3-4\nu}{4(1-\nu)^2} \neq 0, \quad \nu \neq 0,75.$$

Так как символьическая матрица эрмитова и символьический определитель отличен от нуля, то индекс системы (6.153) равен нулю и для нее верны теоремы Фредгольма [34, 35]. То же самое можно сказать и о системах (6.154)–(6.156).

Относительно приближенных методов решения одномерных и многомерных сингулярных интегральных уравнений, а также вычисления сингулярных интегралов имеется многочисленная литература. См., например, [1, 3–5, 7–10, 16, 17–23, 28, 30, 37, 39, 41, 42, 52, 54, 57].

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ 6

1. Александров А. Я. Решение основных трехмерных задач теории упругости для тел произвольной формы путем численной реализации метода интегральных уравнений / А. Я. Александров // Докл. АН СССР. 1973. Т. 208. № 2. С. 291–294.
2. Линейные уравнения математической физики / под ред. С. Г. Михлин. М.: Наука, 1964. 368 с.
3. Белоцерковский С. М. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях / С. М. Белоцерковский, И. К. Либанов. М.: Наука, 1985. 256 с.
4. Бойков И. А. Асимптотически оптимальные квадратурные формулы вычисления интегралов Адамара с фиксированной особенностью / И. А. Бойков, И. Ф. Добрынина // Применение вычислительных методов в научно-технических исследованиях: межвуз. сб. науч. тр. Пенза: Пенз. политехн. ин-т, 1984. Вып. 6. С. 12–24.
5. Бреббия К. Методы граничных элементов / К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Вроубел. М.: Мир, 1987. 524 с.
6. Векуа Н. П. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи / Н. П. Векуа. М.: Наука, 1970. 380 с.
7. Верлань А. Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков. Киев: Наук. думка, 1986. 544 с.
8. Габдулхаев Б. Г. Конечномерные аппроксимации сингулярных интегралов и прямые методы решения особых интегральных и интегродифференциальных уравнений / Б. Г. Габдулхаев. М.: ВИНИТИ, 1980. С. 251–307 (Итоги науки и техники. Сер. мат. анализ / ВИНИТИ; т. 18).
9. Гандель Ю. В. Математические вопросы метода дискретных токов: учеб. пособие. Ч. II / Ю. В. Гандель, С. В. Еременко, Т. С. Полянская. Харьков: ХГУ, 1992. 145 с.
10. Гандель Ю. В. Математические вопросы метода дискретных зарядов: учеб. пособие. Ч. I / Ю. В. Гандель, Т. С. Полянская. Харьков: ХГУ, 1991. 66 с.
11. Гахов Ф. Д. Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. М.: Наука, 1977. 640 с.
12. Градштейн Н. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / Н. С. Градштейн, И. М. Рыжик. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.
13. Джураев А. Д. Метод сингулярных интегральных уравнений / А. Д. Джураев. М.: Наука, 1987. 416 с.
14. Дудучава Р. В. Интегральные уравнения свертки с разрывными предсимволами, сингулярные интегральные уравнения с неподвижными особенностями и их приложения к задачам механики / Р. В. Дудучава. Тбилиси: Мецниереба, 1979. 135 с.
15. Интегральные уравнения / П. П. Забрейко [и др.]. М.: Наука, 1968. 448 с.
16. Золотаревский В. А. Конечномерные методы решения сингулярных интегральных уравнений на замкнутых контурах интегрирования / В. А. Золотаревский. Кишинев: Штиница, 1991. 134 с.
17. Иванов В. В. Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений / В. В. Иванов. Киев. Наук. думка. 1968. 288 с.
18. Канторович Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. М.: Наука, 1977. 744 с.

19. Корнейчук А. А. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов / А. А. Корнейчук // Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы. М.: Наука, 1964. С. 64–74.
20. Приближенное решение операторных уравнений / М. А. Красносельский [и др.]. М.: Наука, 1969. 456 с.
21. Краут С. Методы граничных элементов в механике твердого тела / С. Краут, А. Стар菲尔д. М.: Мир, 1987. 328 с.
22. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов / В. И. Крылов. М.: Наука, 1967. 500 с.
23. Крылов В. И. Справочная книга по численному интегрированию / В. И. Крылов, Л. Т. Шулькина. М.: Наука, 1966. 372 с.
24. Купрадзе В. Д. Методы потенциала в теории упругости / В. Д. Купрадзе. М.: Физматгиз, 1963. 472 с.
25. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости / В. Д. Купрадзе [и др.]. М.: Наука, 1976. 664 с.
26. Лаврентьев М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. М.: Наука, 1973. 736 с.
27. Лаврентьев М. А. О построении потока, обтекающего дугу заданной формы / М. А. Лаврентьев. М.: Гос. авиац. и автотрактор. изд-во, 1932. 55 с. (Труды / Центр. аэро-гидродинам. ин-т; вып. 118).
28. Линьков А. М. Конечночастные интегралы в задачах о пространственных трещинах / А. М. Линьков, С. Г. Могилевская // Приклад. математика и механика. 1986. Т. 50, вып. 5. С. 844–850.
29. Мазья В. Г. Граничные интегральные уравнения / В. Г. Мазья // Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1988. Т. 27. С. 131–228.
30. Метод граничных интегральных уравнений. Вычислительные аспекты и приложения к механике. М.: Наука, 1978. 212 с. (серия «Новое в зарубежной науке. Механика»; вып. 15).
31. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа / К. Миранда. М.: Изд-во иностр. лит., 1957. 256 с.
32. Михлин С. Г. Интегральные уравнения и их приложения к некоторым проблемам механики, математической физики и техники / С. Г. Михлин. Изд. 2-е, испр. и доп. М.–Л.: Гостехиздат, 1949. 380 с.
33. Михлин С. Г. Линейные уравнения в частных производных / С. Г. Михлин. М.: Высш. шк., 1977. 431 с.
34. Михлин С. Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения / С. Г. Михлин. М.: Физматгиз, 1962. 256 с.
35. Михлин С. Г. Сингулярные интегральные уравнения / С. Г. Михлин // Успехи мат. наук. 1943. Т. 3, № 3. С. 29–112.
36. Михлин С. Г. Интегральные уравнения в теории упругости / С. Г. Михлин, Н. Ф. Морозов, М. В. Паукшто. СПб.: Изд-во СПБУ, 1994. 271 с.
37. Михлин С. Г. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений / С. Г. Михлин, Х. Л. Смолицкий. М.: Наука, 1965. 384 с.
38. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения / Н. И. Мусхелишвили. М.: Наука, 1968. 511 с.

39. Никольский С. М. Квадратурные формулы / С. М. Никольский. М.: Наука, 1974. 233 с.
40. Новацкий В. Теория упругости / В. Новацкий. М.: Мир, 1975. 872 с.
41. Парсон В. З. Интегральные уравнения теории упругости / В. З. Парсон, П. И. Перлин. М.: Наука, 1977. 312 с.
42. Попов Г. Я. Контактные задачи для линейно-деформируемого основания / Г. Я. Попов. Киев; Одесса: Вища шк., 1982. 168 с.
43. Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций / И. И. Привалов. М.: Гос. изд. техн.-теорет. лит., 1950. 336 с.
44. Смирнов В. И. Курс высшей математики: в 5 т. / В. И. Смирнов. М.–Л.: Гостехиздат, 1951. Т. 4. 804 с.
45. Трикоми Ф. О линейных уравнениях смешанного типа / Ф. Трикоми. М.–Л.: Гостехиздат, 1947. 192 с.
46. Трикоми Ф. Интегральные уравнения / Ф. Трикоми. М.: Изд. иностр. лит., 1960. 299 с.
47. Хермандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными / Л. Хермандер. М.: Мир, 1965. 380 с.
48. Чудинович И. Ю. Метод граничных уравнений в задачах динамики упругих сред: учеб. пособие / И. Ю. Чудинович. Харьков: ХГУ, 1991. 132 с.
49. Шерман Д. И. О приемах решений некоторых сингулярных интегральных уравнений / Д. И. Шерман // Приклад. математика и механика. 1948. Т. XII, № 4. С. 423–352.
50. Шерман Д. И. Об одном случае регуляризации сингулярных уравнений / Д. И. Шерман // Приклад. математика и механика. 1951. Т. 15. С. 75–82.
51. Carleman T. Sur la resolution de certaines equations intégrales / T. Carleman // Archive for Mathematic, Astronomi och Physic. 1922. Vol. 16. P. 326.
52. Erdogan F. On the numerical solution of singular integral equations / F. Erdogan, G. D. Gupta // Quart Appl. Math. 1972. Vol. 29, № 4. P. 525–534.
53. Kanwal R. P. Singular Integral Equations / R. P. Kanwal, R. Estrada. Birkhauser Verlag AG, 2000. 456 p.
54. Ladopoulos E. G. Singular Integral Equations: Linear and Non-linear Theory and its Applications in Science and Engineering / E. G. Ladopoulos. Springer; 1 edition, 2000. 584 p.
55. Lu S. Singular Integrals and Related Topics / S. Lu, Y. Ding, D. Yan. World Scientific Publishing Company, 2007. 280 p.
56. Nickelson L. Singular Integral Equation's Methods For The Analysis of Microwave Structures / L. Nickelson, V. Shugurov, T. E. Nickelson. Walter de Gruyter, 2005. 330 p.
57. Theocaris P. S. Numerical solution of singular integral equations: methods / P. S. Theocaris // I. Eng. Mech. Div. Pros. ASCE. 1981. Vol. 107, № 5. P. 733–752.
58. Widom H. Singular Integral Equations in L^p . Trans / H. Widom // Amer. Math. Soc. 1960. Vol. 97, № 1. P. 131–160.

ГЛАВА 7

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТИПА СВЕРТКИ

7.1. Типы уравнений с ядрами, зависящими от разности аргументов

В общей форме уравнения этого типа можно представить так [12, 14, 15]:

$$\mu\varphi(x) - \sum_{j=1}^n b_j(x) \int_{-\infty}^{\infty} K_j(x-t)\varphi(t)dt = f(x), \quad -\infty < x < \infty,$$

где $\mu = \text{const}$, $b_j(x)$ — ограниченные измеримые функции, $b_j(\pm\infty)$ — конечные числа. Выпишем наиболее важные частные случаи этого уравнения.

1. Уравнение на оси

$$\mu\varphi(x) - \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)\varphi(t)dt = f(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

2. Уравнение Винера–Хопфа

$$\mu\varphi(x) - \int_0^{\infty} K(x-t)\varphi(t)dt = f(x), \quad 0 < x < \infty.$$

3. Парное уравнение

$$\mu\varphi(x) - \int_{-\infty}^{\infty} K_1(x-t)\varphi(t)dt = f(x), \quad x < 0,$$

$$\mu\varphi(x) - \int_{-\infty}^{\infty} K_2(x-t)\varphi(t)dt = f(x), \quad x > 0.$$

4. Уравнение на конечном промежутке

$$\mu\varphi(x) - \int_0^T K(x-t)\varphi(t)dt = f(x), \quad 0 \leq x \leq T.$$

Уравнения типа Вольтера в свертках рассматривались в гл. 4, п. 4.18.

Уравнения указанных типов возникают при решении контактных и смешанных, а также динамических задач теории упругости [1, 2, 11, 17, 18], в теории излучения и дифракции [5, 22, 25, 27, 28], при передаче информации [10], в задачах теории наследственной упругости [19] и многих других.

Обязательным шагом на пути решения этих уравнений является применение одного из интегральных преобразований (Фурье, Лапласа, Меллина). Поэтому напомним некоторые основные определения и факты теории.

7.2. Интегральное преобразование Фурье

Для любой функции $f(x)$, принадлежащей пространству $L^1(-\infty, \infty)$ или $L^2(-\infty, \infty)$, преобразование Фурье определяется формулой [13, 14, 15, 21, 23, 24]

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} f(x) dx. \quad (7.1)$$

При этом, если $f \in L^2(-\infty, \infty)$, то и $F \in L^2(-\infty, \infty)$. Если же $f \in L^1(-\infty, \infty)$, то $F \in W(-\infty, \infty)$, т. е. $F(\lambda)$ непрерывна, обращается в нуль при $|\lambda| \rightarrow \infty$ и, кроме того, функции

$$F^+(\lambda) = \int_{-\infty}^0 f(x) e^{i\lambda x} dx, \quad F^-(\lambda) = \int_{-\infty}^0 f(x) e^{i\lambda x} dx$$

аналитичны соответственно в верхней и нижней полуплоскости, а также непрерывны на вещественной оси.

В теории преобразования Фурье в $L^2(-\infty, \infty)$, также как и в теории рядов Фурье, важное значение имеет равенство Парсеваля

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda)|^2 d\lambda. \quad (7.2)$$

Предварительно рассмотрим интеграл

$$A(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2 \lambda^2}{2} + i\lambda x\right) d\lambda.$$

Дифференцируя это соотношение (результат сходится равномерно по x), получим

$$\begin{aligned} A'(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} i\lambda \exp\left(-\frac{\varepsilon^2 \lambda^2}{2} + i\lambda x\right) d\lambda = -\frac{i}{\varepsilon^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} d\left[\exp\left(-\frac{\varepsilon^2 \lambda^2}{2}\right)\right] = \\ &= -\frac{i}{\varepsilon^2} \left\{ \exp\left(-\frac{\varepsilon^2 \lambda^2}{2} + i\lambda x\right) \Big|_{-\infty}^{\infty} - ix A(x) \right\} = -\frac{x}{\varepsilon^2} A(x). \end{aligned}$$

Решение дифференциального уравнения $A'(x) + \frac{x}{\varepsilon^2} A(x) = 0$ таково:

$$A(x) = C \exp\left(-\frac{x^2}{2\varepsilon^2}\right),$$

причем

$$C = A(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2 \lambda^2}{2}\right) d\lambda = \frac{\sqrt{2\pi}}{\varepsilon}.$$

Таким образом,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2 \lambda^2}{2} + i\lambda(x - \xi)\right) d\lambda = \frac{\sqrt{2\pi}}{\varepsilon} \exp\left\{-\frac{(x - \xi)^2}{2\varepsilon^2}\right\}. \quad (7.3)$$

Отметим сразу, что последовательность Кельвина

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi\eta t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\eta t}\right), \quad \eta > 0, \quad t > 0$$

дельтообразная (см. гл. 4, п. 4.8). Положив $\varepsilon^2 = 2\eta t$, заключаем, что последовательность

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{\varepsilon} \exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{2\varepsilon^2}\right\} \rightarrow 2\pi\delta(x-\xi), \quad \varepsilon \rightarrow +0. \quad (7.4)$$

Возвращаясь к доказательству равенства Парсеваля, рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\varepsilon^2 \lambda^2}{2}} |F(\lambda)|^2 d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\varepsilon^2 \lambda^2}{2}} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\lambda} f(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi\lambda} \overline{f(\xi)} d\xi = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(\xi)} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2 \lambda^2}{2} + i(x-\xi)\lambda\right\} d\lambda. \end{aligned}$$

Учитывая (7.3), можем записать

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(\xi)} \frac{\sqrt{2\pi}}{\varepsilon} \exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{2\varepsilon^2}\right\} d\xi.$$

Далее введем замену $\xi = x + y$ и совершим предельный переход при $\varepsilon \rightarrow +0$. Получим с учетом (7.4)

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{\varepsilon} e^{-\frac{y^2}{2\varepsilon^2}}, \overline{f(x+y)} \right) dx \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (2\pi\delta(y), \overline{f(x+y)}) dx = \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{f(x)} dx = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

С другой стороны, при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\varepsilon^2 \lambda^2}{2}} |F(\lambda)|^2 d\lambda \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda)|^2 d\lambda.$$

Таким образом, равенство (7.2) имеет место. Из него, кстати, следует, что преобразование Фурье функции $f(x) \in L^2(-\infty, \infty)$ также принадлежит $L^2(-\infty, \infty)$.

Получим теперь равенство Парсеваля относительно двух функций $f(x)$ и $g(x)$ класса $L^2(-\infty, \infty)$ и их преобразований Фурье $F(\lambda)$ и $G(\lambda)$. Для этого равенство (7.2) запишем сначала относительно суммы $f(x) + g(x)$. Будем иметь

$$\begin{aligned} 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f+g|^2 dx &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} (|f|^2 + 2\operatorname{Re}(fg) + |g|^2) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (|F|^2 + 2\operatorname{Re}(F\bar{G}) + |G|^2) d\lambda \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re}(fg) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re}(F\bar{G}) d\lambda. \end{aligned}$$

Повторим теперь эти выкладки, заменив в (7.2) функции f на $f+ig$ и F на $F+iG$. В результате получим

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Im}(f\bar{g}) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Im}(F\bar{G}) d\lambda.$$

Из этих двух формул вытекает следующее равенство Парсеваля:

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f\bar{g} dx = \int_{-\infty}^{\infty} F\bar{G} d\lambda. \quad (7.5)$$

Из (7.5) можно получить формулу обращения интегрального преобразования Фурье (7.1) следующим образом. Пусть [14]

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, \xi), \\ 0, & x \in R \setminus [0, \xi]. \end{cases}$$

Тогда

$$G(\lambda) = \int_0^{\xi} e^{ix\lambda} dx = \frac{e^{i\xi\lambda} - 1}{i\lambda}.$$

Вставляя эту функцию в (7.5), получаем

$$2\pi \int_0^{\xi} f dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) \frac{1 - e^{-i\xi\lambda}}{i\lambda} d\lambda.$$

Дифференцируя это равенство по ξ , приходим к формуле обращения

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi\lambda} F(\lambda) d\lambda \quad (7.6)$$

Покажем теперь, что $F(\lambda)$ действительно существует в $L^2(-\infty, \infty)$, т. е. что

$$F(\lambda, a) = \int_{-a}^a f(x) e^{i\lambda x} dx$$

сходится в среднем к $F(\lambda)$ при $a \rightarrow \infty$.

Так как $F(\lambda, a)$ является преобразованием Фурье функции, равной $f(x)$ при $|x| < a$ и тождественно равной нулю при $|x| > a$, то разность $H(\lambda, a) = F(\lambda, a) - F(\lambda)$ есть преобразование Фурье функции, равной нулю при $|x| < a$ и совпадающей с $f(x)$ при $|x| > a$. Применяя формулу Парсеваля (7.2), запишем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H(\lambda, a)|^2 d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda, a) - F(\lambda)|^2 d\lambda = 2\pi \int_{-\infty}^{-a} |f(x)|^2 dx + 2\pi \int_a^{\infty} |f(x)|^2 dx.$$

А это и означает, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda, a) - F(\lambda)|^2 d\lambda \rightarrow 0, \quad a \rightarrow \infty.$$

Таким образом, мы пришли к фундаментальной теореме в теории интегрального преобразования Фурье.

Теорема Планшереля. Пусть $f(x) \in L^2(-\infty, \infty)$ и

$$F(\lambda, a) = \int_{-a}^a f(x) e^{i\lambda x} dx.$$

Тогда при $a \rightarrow \infty$ функции $F(\lambda, a)$ сходятся в среднем к $F(\lambda)$ на интервале $(-\infty, \infty)$, и если

$$f(x, a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a F(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda,$$

то $f(x, a)$ сходятся в среднем к $f(x)$.

Преобразование Фурье экспоненциально убывающей функции [14–16, 32]. Предположим, что $f(x)$ измерима и интегрируема с квадратом на любом конечном интервале. Пусть

$$f(x) < \begin{cases} C_1 e^{-\mu x}, & x \rightarrow +\infty, \\ C_2 e^{\gamma x}, & x \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (7.7)$$

Если $-\gamma < \sigma < \mu$, то преобразованием Фурье функции $f(x) e^{\sigma x}$ будет

$$F(\sigma, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{(\sigma+i\lambda)x} dx. \quad (7.8)$$

В силу асимптотики (7.7) этот интеграл сходится абсолютно и равномерно во всякой полосе $-\gamma + \varepsilon < \sigma < \mu - \varepsilon$. Его можно дифференцировать по комплексной переменной $\sigma + i\lambda$ сколько угодно раз внутри полосы $-\gamma < \sigma < \mu$. Следовательно, внутри этой полосы интеграл (7.8) определяет аналитическую функцию

$$F(\sigma, \lambda) = F(\sigma + i\lambda).$$

Далее, во всякой полосе $-\gamma + \varepsilon < \sigma < \mu - \varepsilon$ в силу равенства Парсеваля и (7.7) имеет место оценка

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\sigma, \lambda)|^2 d\lambda &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 e^{2\sigma x} dx < \int_{-\infty}^0 C_1 e^{2\gamma x + 2\sigma x} dx + \int_0^{\infty} C_2 e^{-2\mu x + 2\sigma x} dx = \\ &= C_2 \int_{-\infty}^0 e^{2\gamma x} dx + C_1 \int_0^{\infty} e^{-2\mu x} dx < \text{const}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы пришли к следующему утверждению [32].

Теорема. Если функция $f(x)$ измерима, имеет интегрируемый квадрат на любом конечном интервале и удовлетворяет условию (7.7) при $-\gamma < \mu$, то формула (7.8) определяет функцию $F(\sigma + i\lambda)$, аналитическую внутри полосы $-\gamma < \sigma < \mu$. В любой внутренней полосе $-\gamma + \varepsilon < \sigma < \mu - \varepsilon$ интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\sigma + i\lambda)|^2 d\lambda < \text{const}. \quad (7.9)$$

Аналитическое продолжение преобразования Фурье. Рассмотрим преобразование

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\tau x} e^{i\alpha x} dx \quad (7.10)$$

для комплексных $\lambda = \omega + i\tau$. Интеграл (7.10) осуществляет аналитическое продолжение преобразования Фурье в комплексную область переменной λ . Множитель $\exp(-\tau x)$ может привести к расходимости интеграла на $(-\infty, \infty)$. Сходимость, если она есть, имеет место для некоторого интервала $\operatorname{Im} \lambda$, который зависит от асимптотики функции $f(x)$ на $\pm\infty$. Так, если

$$f(x) < \begin{cases} Be^{-\beta x}, & x \rightarrow +\infty \ (\beta > 0), \ B > 0, \\ Ae^{\alpha x}, & x \rightarrow -\infty \ (\alpha > 0), \ A > 0, \end{cases}$$

то, поскольку $f(x)$ интегрируема на каждом конечном интервале, а «хвосты»

$$\int_{-\infty}^{-N} f(x) e^{-\tau x} e^{i\alpha x} dx, \quad \int_N^{\infty} f(x) e^{-\tau x} e^{i\alpha x} dx$$

сходятся при $\tau < \alpha$ и $\tau > -\beta$ соответственно, получаем полосу сходимости

$$-\beta < \operatorname{Im} \lambda < \alpha.$$

Пусть функция $F(\lambda)$ аналитична в полосе $-\beta < \operatorname{Im} \lambda < \alpha$, удовлетворяет (7.9) и стремится к нулю на концах полосы $\operatorname{Re} \lambda \rightarrow \pm\infty$. Тогда $F(\lambda)$ можно представить в виде суммы

$$F(\lambda) = F_+(\lambda) + F_-(\lambda),$$

где $F_+(\lambda)$ аналитична в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} \lambda > -\beta$ и $F_+(\lambda) \rightarrow 0$ при $\operatorname{Im} \lambda \rightarrow +\infty$, а $F_-(\lambda)$ аналитична в нижней полуплоскости $\operatorname{Im} \lambda < \alpha$ и стремится к нулю при $\operatorname{Im} \lambda \rightarrow -\infty$. В самом деле, внутри полосы формула Коши дает (интегралы по вертикальным границам на $\pm\infty$ равны нулю)

$$F(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty-i\beta}^{\infty-i\beta} \frac{F(\xi)}{\xi - \lambda} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int_{\infty+i\alpha}^{-\infty+i\alpha} \frac{F(t)}{t - \lambda} dt = F_+(\lambda) + F_-(\lambda). \quad (7.11)$$

В простых случаях такое разложение можно получить элементарными средствами.

Пример 1 [30]. Пусть

$$F(\lambda) = \frac{1}{(\lambda + i)\sqrt{\lambda - i}}.$$

Эта функция имеет полюс в точке $\lambda = -i$ и точку ветвления $\lambda = i$, она аналитична в полосе $-1 < \operatorname{Im} \lambda < 1$. Ветвь квадратного корня фиксируем условием

$$\sqrt{-i} = \exp\left(-\frac{i\pi}{4}\right) = \frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

Теперь запишем

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \frac{1}{\lambda+i} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda-i}} - \frac{1}{\sqrt{-i-i}} \right) + \frac{1}{(\lambda+i)\sqrt{-i-i}} = \\ &= \frac{1}{\lambda+i} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda-i}} - \frac{1+i}{2} \right) + \frac{1+i}{2(\lambda+i)} = F_-(\lambda) + F_+(\lambda). \end{aligned}$$

Легко видеть, что $F_-(\lambda)$ определена так, что точка $\lambda = -i$ не является полюсом.

Пример 2. Пусть $f(x) = e^{-|x|}$. Тогда

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} e^{i\lambda x} dx = \int_{-\infty}^0 e^{x(1+i\lambda)} dx + \int_0^{\infty} e^{x(i\lambda-1)} dx.$$

Очевидно, первый интеграл существует в нижней полуплоскости $\operatorname{Im} \lambda < 1$, второй — в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} \lambda > -1$. Получаем

$$F(\lambda) = -\frac{i}{\lambda-i} + \frac{i}{\lambda+i}.$$

Общая полоса аналитичности: $-1 < \operatorname{Im} \lambda < 1$.

Преобразование Фурье свертки. Пусть $f(x)$ и $h(x) \in L^2(-\infty, \infty)$. Рассмотрим преобразование Фурье свертки

$$(f * h)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) h(x-y) dy.$$

Обозначим, как обычно, преобразования Фурье функций f и h через F и H соответственно, а функцию $h(x-y)$ через $\overline{g(y)}$. Имеем цепочку соотношений

$$G(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda y} g(y) dy,$$

$$\overline{G(\lambda)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda y} h(x-y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-y=\xi}{dy=-d\xi} e^{-i\lambda(x-\xi)} h(\xi) d\xi = e^{-i\lambda x} H(\lambda).$$

Теперь воспользуемся равенством Парсеваля (7.5). Получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y) h(x-y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \overline{g(y)} dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) H(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda.$$

Это означает, что

$$F[f * h] = F(\lambda) H(\lambda). \quad (7.12)$$

7.3. Связь между интегральными преобразованиями Меллина, Лапласа и Фурье

Рассмотрим преобразование Фурье функции $\theta(x)f(x)$, где $\theta(x)$ — единичная функция Хевисайда

$$F[\theta f] = \int_0^{\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx = F_+(\lambda).$$

Положив теперь $\lambda = ip$, приходим к преобразованию Лапласа

$$F_l(p) = F(ip) = \int_0^\infty f(x) e^{-px} dx. \quad (7.13)$$

Исходя из соотношения связи (7.13) и свойств преобразования Фурье, можно выяснить все основные свойства преобразования Лапласа. Пусть $f(x)$ недостаточно быстро убывает на $+\infty$, а функция

$$g(x) = f(x) e^{-\tau_0 x}, \quad \tau_0 > 0, \quad x > 0$$

уже принадлежит классу $L^2(-\infty, \infty)$. По формуле обращения (7.6) находим

$$g(x) = f(x) e^{-\tau_0 x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty G(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda, \quad G(\lambda) = \int_{-\infty}^\infty f(x) e^{-\tau_0 x} e^{i\lambda x} dx.$$

Отсюда

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty G(\lambda) e^{x(\tau_0 - i\lambda)} d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty + i\tau_0}^{\infty + i\tau_0} G(\zeta - i\tau_0) e^{-i\zeta x} d\zeta, \quad \zeta = \lambda + i\tau_0.$$

т. е.

$$G(\zeta - i\tau_0) = \int_{-\infty}^\infty f(x) e^{i\zeta x} dx = F(\zeta).$$

Теперь получаем такую формулу обращения:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty + i\tau_0}^{\infty + i\tau_0} F(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda. \quad (7.14)$$

Заменив в (7.14) переменную λ на ip , приходим к формуле обращения преобразования Лапласа [4]

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau_0 - i\infty}^{\tau_0 + i\infty} F_l(p) e^{px} dp.$$

Теорема о свертке получается из (7.12). Имеем

$$\int_0^x f(y) h(x-y) dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty + i\tau_0}^{\infty + i\tau_0} F(\lambda) H(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau_0 - i\infty}^{\tau_0 + i\infty} F_l(p) H_l(p) e^{px} dp,$$

т. е.

$$F_l(f * h) = F_l(p) H_l(p).$$

Преобразование Меллина [24]

$$F_m(s) = \int_0^\infty f(x) x^{s-1} dx$$

также тесно связано с преобразованием Фурье. Положим $x = e^z$, тогда

$$F_m(s) = \int_{-\infty}^\infty f(e^z) e^{sz} dz = \int_{-\infty}^\infty g(z) e^{sz} dz,$$

где $g(z) = f(e^z)$. Сравнивая это выражение с преобразованием Фурье функции $g(z)$

$$G(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} g(z) e^{iz\lambda} dz,$$

заключаем, что

$$F_m(s) = G(-is).$$

Из условия $g(z) \in L^2(-\infty, \infty)$ вытекает условие существования преобразования Меллина

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(z)|^2 dz = \int_0^{\infty} |f(e^z)|^2 dz = \int_0^{\infty} |f(x)|^2 \frac{dx}{x} < \infty.$$

Формула обращения также получается из соответствующей формулы обращения преобразования Фурье. Имеем, полагая $\lambda = -is$,

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iz\lambda} G(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-i\infty}^{i\infty} G(-is) e^{-sz} \frac{ds}{i} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} F_m(s) e^{-sz} ds, \operatorname{Re} s > \sigma_0.$$

Отсюда

$$f(x) = g(z) = \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{F_m(s)}{x^s} ds.$$

Или

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma'_0 - i\infty}^{\sigma'_0 + i\infty} \frac{F_m(\xi)}{x^\xi} d\xi, \sigma'_0 > \sigma_0.$$

Получим теорему о свертке. Положим в (7.12)

$$\eta = e^y, f(y) = v(\eta),$$

$$\xi = e^x, h(x-y) = h\left(\ln \frac{\xi}{\eta}\right) = w\left(\frac{\xi}{\eta}\right).$$

Будем иметь

$$\int_0^{\infty} v(\eta) w\left(\frac{\xi}{\eta}\right) \frac{d\eta}{\eta} = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma'_0 - i\infty}^{\sigma'_0 + i\infty} V_m(s) W_m(s) \frac{ds}{\xi^s}, \sigma'_0 > \sigma_0.$$

7.4. Интегродифференциальное уравнение на оси

Рассмотрим уравнение

$$\alpha \varphi(x) + P_m \left(\frac{d}{dx} \right) \int_{-\infty}^{\infty} k(x-y) \varphi(y) dy = f(x), -\infty < x < \infty, \quad (7.15)$$

где $P_m \left(\frac{d}{dx} \right)$ — дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, порядка m и старшим коэффициентом равным единице. Полагаем, что ядерная функция $k(x)$ представима интегралом Фурье

$$k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\lambda) e^{-ix\lambda} d\lambda,$$

$$K(\lambda) = \lambda^{\nu-1} [1 + O(\lambda^{-\delta})], |\lambda| \rightarrow \infty, 0 \leq \nu < 1, \delta > \nu.$$

Для решения уравнения (7.15) воспользуемся преобразованием Фурье

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda, \quad \Phi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{i\lambda x} dx,$$

а также теоремой о свертке (7.12)

$$F(k * \varphi) = \Phi(\lambda) K(\lambda).$$

С учетом того, что $F[D^\alpha f] = (-i\lambda)^\alpha F[f]$ (гл. 4, п. 4.14), получаем алгебраическое уравнение относительно трансформанты $\Phi(\lambda)$

$$\alpha\Phi(\lambda) + P_m(-i\lambda)\Phi(\lambda)K(\lambda) = F(\lambda).$$

Решение его

$$\Phi(\lambda) = \frac{F(\lambda)}{\alpha + P_m(-i\lambda)K(\lambda)}.$$

Применяя формулу обращения, находим

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\lambda) e^{-i\lambda x}}{\alpha + P_m(-i\lambda)K(\lambda)} d\lambda.$$

Рекомендации и различные аналитические и приближенные способы вычисления интегралов Фурье содержатся в [13, 17, 18].

7.5. Интегральное уравнение типа Винера–Хопфа

Рассмотрим уравнение

$$\alpha\varphi(x) + \int_0^{\infty} k(x-y)\varphi(y)dy = f(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (7.16)$$

Обозначим

$$g^+(x) = \begin{cases} g(x), & x \geq 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \quad g^-(x) = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ g(x), & x \leq 0. \end{cases}$$

Тогда уравнение (7.16) можно представить так:

$$\alpha\varphi^+(x) + \alpha\varphi^-(x) + \int_{-\infty}^{\infty} k(x-y)\varphi^+(y)dy = f^+(x) + f^-(x), \quad -\infty < x < +\infty, \quad (7.17)$$

т. е. функции φ^+ и φ^- выражаются через функцию $\varphi^+(x)$ по формулам

$$\alpha\varphi^+(x) + \int_0^{\infty} k(x-y)\varphi^+(y)dy = f^+(x), \quad x \geq 0,$$

$$\alpha\varphi^-(x) + \int_0^{\infty} k(x-y)\varphi^+(y)dy = f^-(x), \quad x < 0. \quad (7.18)$$

Уравнение вида (7.18) относительно $\varphi^+(x)$ обычно называют интегральным уравнением типа Винера–Хопфа [7, 14, 16, 26, 29, 31].

Применим к уравнению (7.17), которое равносильно двум соотношениям (7.18), интегральное преобразование Фурье. Получим

$$[\alpha + K(\lambda)]\Phi^+(\lambda) + \alpha\Phi^-(\lambda) = F(\lambda), \quad (7.19)$$

где

$$\begin{aligned}\Phi^+(\lambda) &= \int_0^\infty \varphi^+(x) e^{i\lambda x} dx, \quad \Phi^-(\lambda) = \int_0^\infty \varphi^-(x) e^{-i\lambda x} dx, \\ F(\lambda) &= \int_{-\infty}^\infty f(x) e^{i\lambda x} dx.\end{aligned}$$

Будем считать, что $K(\lambda)$ регулярна в полосе $-\tau_1 < \operatorname{Im} \lambda < \tau_0$. При этом $k(x)$ имеет асимптотику

$$k(x) \approx e^{-\tau_1 x}, \quad x \rightarrow \infty \text{ и } k(x) \approx e^{\tau_0 x}, \quad x \rightarrow -\infty.$$

На решение $\varphi^+(x)$ накладываем требование, чтобы $\varphi^+(x) \approx e^{\mu x}$ ($\mu < -\tau_1$) при $x \rightarrow +\infty$.

Тогда асимптотику $\varphi^-(x)$ можно определить из второго соотношения (7.18). Имеем

$$\alpha\varphi^-(x) \approx -e^{\tau_0 x} \int_0^\infty e^{-\tau_0 y} \varphi^+(y) dy, \quad x \rightarrow -\infty.$$

Следовательно, для сходимости этого интеграла достаточно, чтобы $\mu < \tau_0$ и при этом $\varphi^-(x) \approx ce^{\tau_0 x}$ при $x \rightarrow -\infty$. Итак, $\Phi^+(\lambda)$ регулярна в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} \lambda > \mu$, а $\Phi^-(\lambda)$ регулярна в нижней полуплоскости $\operatorname{Im} \lambda < \tau_0$ (рис. 7.1). Учитывая, что полоса регулярности $K(\lambda)$ есть $-\tau_1 < \operatorname{Im} \lambda < \tau_0$, получаем общую полосу регулярности левой части (7.19). Решение задачи (7.19) проводится при помощи метода факторизации.

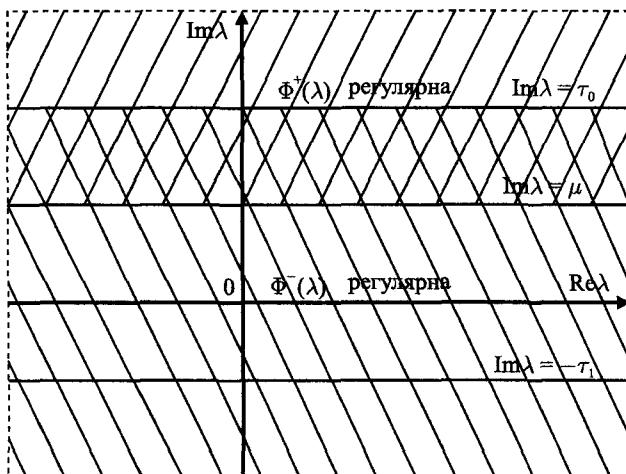


Рис. 7.1. Области регулярности Φ^+ и Φ^- в плоскости λ

Факторизация. Пусть функция $K(z)$ регулярна в полосе $a \leq \operatorname{Im} z < b$. Под факторизацией $K(z)$ в этой полосе понимается ее представление в виде

$$K(z) = K^+(z)K^-(z), \quad (7.20)$$

где $K^+(z)$ — функция, регулярная в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > a$, а $K^-(z)$ — функция регулярная в нижней полуплоскости $\operatorname{Im} z < b$. Если $K(z)$ в указанной полосе, в частности на прямой $b = a$, отлична от нуля, то от функций $K^\pm(z)$ требуется необращение в поль в соответствующих полуплоскостях.

Если $a < b$, то говорят, что факторизация (7.20) осуществлена в полосе $a < \operatorname{Im} z < b$, если же $a = b$, то — на прямой $\operatorname{Im} z = a$. В последнем случае достаточно потребовать непрерывности функции на прямой [12].

Некоторые функции факторизуются на вещественной оси элементарно.

Пример 1.

$$K(z) = \frac{z^2 + k_1^2}{z^2 + k_2^2} = \frac{(z + ik_1)(z - ik_1)}{(z + ik_2)(z - ik_2)}, \quad k_j > 0 \quad (j = 1, 2).$$

Очевидно,

$$K^+(z) = \frac{z + ik_1}{z + ik_2}, \quad \operatorname{Im} z \geq 0, \quad K^-(z) = \frac{z - ik_1}{z - ik_2}, \quad \operatorname{Im} z \leq 0.$$

Пример 2. Функция

$$K(z) = \pi z \operatorname{ct} h\pi z.$$

Имеют место формулы [9]

$$\frac{\pi}{\operatorname{ch} \pi z} = \Gamma\left(\frac{1}{2} + iz\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - iz\right), \quad \frac{\pi z}{\operatorname{sh} \pi z} = \Gamma(1 - iz)\Gamma(1 + iz),$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера.

С учетом этих соотношений, находим

$$K(z) = \pi z \operatorname{ct} h\pi z = K^+(z)K^-(z),$$

$$K^+(z) = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(1 - iz)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - iz\right)}, \quad K^-(z) = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(1 + iz)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + iz\right)} = K^+(-z).$$

Причем $K^+(z)$ регулярна и не имеет нулей в полуплоскости $\operatorname{Im} z > -\frac{1}{2}$.

Элементарно производится факторизация рациональных функций. Так, если

$$K(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

где $P(z)$ и $Q(z)$ — полиномы, не имеющие нулей на оси $\operatorname{Im} z = 0$, то необходимо найти корни и представить

$$P(z) = P^+(z)P^-(z), \quad Q(z) = Q^+(z)Q^-(z).$$

В P^+, Q^+ входят только нули, лежащие в нижней полуплоскости, а в P^-, Q^- — нули, лежащие в верхней полуплоскости. Теперь можно записать

$$K(z) = K^+(z)K^-(z) = \frac{P^+(z)}{Q^+(z)} \cdot \frac{P^-(z)}{Q^-(z)}.$$

В [18] предложен метод приближенной факторизации, основанный на аппроксимации функции $K(x)$, подлежащей факторизации на оси, рациональной функцией. В работе [2] развивается идея приближенной факторизации на линии, отклоняющейся от оси. В общем случае факторизации необходимо опираться на следующие предложения [16, 31, 32].

Теорема 1. Всякая функция $f(z)$, регулярная в полосе $a < \operatorname{Im} z < b$ и такая, что на бесконечности имеет место оценка $|f(x+iy)| < C|x|^{-p}$ ($p > 0$), равномерная по y при $a+\varepsilon \leq y \leq b-\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ и мало), представима в полосе $c < \operatorname{Im} z < d$ ($c > a, d < b$) в виде

$$f(z) = f^+(z) - f^-(z),$$

$$f^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{ic-\infty}^{ic+\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad f^-(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{id-\infty}^{id+\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

где $f^+(z)$ регулярна в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > a$, а $f^-(z)$ регулярна в нижней полуплоскости $\operatorname{Im} z < b$.

Замечание. Теорему 1 можно интерпретировать следующим образом. Пусть $f(z)$ аналитична в полосе $|\operatorname{Im} z| < a$. Указанная полоса является частным случаем кругового кольца с центром, расположенным в бесконечности. Поэтому если центр поместить в точке $z = +i\infty$, то функцию аналитическую в этом кольце можно представить по формуле Коши в виде разности интегралов по внешней ($\operatorname{Im} z = -a + \varepsilon$) и внутренней ($\operatorname{Im} z = a - \varepsilon$) «окружностям». Причем

$$f^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+ic}^{\infty+ic} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad c = -a + \varepsilon$$

аналитична в круге, ограниченном внешней «окружностью» $(-\infty+ic, \infty+ic)$, в то время как функция

$$f^-(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+id}^{\infty+id} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad d = a - \varepsilon$$

аналитична вне круга с границей $(-\infty+id, \infty+id)$.

Теорема 2. Если функция $G(z)$ регулярна, не имеет нулей в полосе $a < \operatorname{Im} z < b$ и стремится там к единице на бесконечности так, что $|G(z)-1| \leq C|z|^{-\mu}$ ($|z| \rightarrow \infty, \mu > 0$), то ее факторизация

$$G(z) = G^+(z)G^-(z) \tag{7.21}$$

в указанной полосе определяются функциями

$$G^+(z) = \exp\{f^+(z)\}, \quad G^-(z) = \exp\{-f^-(z)\}, \quad (7.22)$$

$$f^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{ic-\infty}^{ic+\infty} \frac{\ln G(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad f^-(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{id-\infty}^{id+\infty} \frac{\ln G(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

где $c = a + \varepsilon, d = b - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$, мало) а $G^\pm(z)$ ограничены на бесконечности.

Для доказательства применим теорему 1 к функции $f(z) = \ln G(z)$. Имеем

$$\ln G(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{ic-\infty}^{ic+\infty} \frac{\ln G(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{id-\infty}^{id+\infty} \frac{\ln G(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f^+(z) + f^-(z). \quad (7.23)$$

Для того чтобы применение теоремы было обосновано, надо выбрать главную ветвь $\ln G(z)$ так, чтобы при $|z| \rightarrow \infty$, $\ln G(z) \rightarrow 0$. Так как $\ln(1 + \varepsilon) = \varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \dots$ получаем

$$|\ln[1 + (G(z) - 1)]| \leq |G(z) - 1| \leq C|z|^{-\mu}.$$

Следовательно, условие теоремы 1 соблюдено и представление (7.23) имеет место. При этом получаем, что $\ln G(z) = f^+(z) - f^-(z)$, где $f^\pm(z)$ определяются формулами (7.22). С другой стороны, логарифмируя (7.21), получаем $\ln G(z) = \ln G^+(z) + \ln G^-(z)$, следовательно, $\ln G^\pm(z) = \pm f^\pm(z)$, т. е. приходим к формулам (7.22).

Эта теорема обобщена на ситуацию, когда у факторизуемой функции G отсутствует полоса регулярности. Она задана только на вещественной оси, непрерывна и отлична от нуля. При этом $|G(x)| \rightarrow 1$, когда $|x| \rightarrow \infty$. Тогда факторизация (7.21) на вещественной оси осуществляется с помощью формул [12]

$$G = G^+ G^-,$$

$$\ln G^\pm(\pm z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln G(\pm t)}{t - z} dt, \quad \text{Im } z < 0. \quad (7.24)$$

Если индекс факторизуемой на оси функции $G(z)$

$$[\text{Ind } G]_i = \frac{1}{2\pi} [\arg G(z)]_{-\infty}^{+\infty} = 0,$$

то формулы (7.24) дают единственное решение проблемы факторизации, обладающее свойством $G^\pm(\infty) = 1$.

Отметим, что проблема факторизации на оси тесно связана с граничной задачей Римана для полуплоскости [12]. Однородная задача Римана для полуплоскости записывается в стандартном виде

$$\Phi^+(x) = G(x) \Phi^-(x),$$

где $\Phi^+(x), \Phi^-(x)$ — граничные значения на оси функций, регулярных и отличных от нуля соответственно в верхней и нижней полуплоскостях. Отсюда, определив $\Phi^+(z), \Phi^-(z)$ и их предельные значения на оси, получаем решение проблемы факторизации

$$G(x) = \Phi^+(x) [\Phi^-(x)]^{-1}.$$

После того как факторизация уравнения (7.18) проведена, определяется трансформанта Фурье $\Phi^+(\lambda)$, а по ней с использованием формулы обращения и решение $\varphi(x)$.

Представим уравнение (7.19) в виде

$$A(z)\Phi^+(z)+B(z)\Phi^-(z)+C(z)=0, \quad (7.25)$$

где $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ — функции, регулярные в полуплоскостях $\operatorname{Im} z > a$ и $\operatorname{Im} z < b$ соответственно, а соотношение (7.25) имеет место в общей полосе регулярности $a < \operatorname{Im} z < b$. Можно даже допустить, что отношение

$$\frac{A(z)}{B(z)} = \frac{X^+(z)}{X^-(z)} \prod_{j=1}^k (z - a_j), \quad (7.26)$$

где a_j — все нули этой функции в полосе $a < \operatorname{Im} z < b$; $X^+(z)$ и $X^-(z)$ — функции, регулярные в полуплоскостях $\operatorname{Im} z > a$ и $\operatorname{Im} z < b$ соответственно и не имеющие там нулей.

Подставив это представление в (7.25), получим

$$X^+(z) \prod_{j=1}^k (z - a_j) \Phi^+(z) + X^-(z) \Phi^-(z) + \frac{C(z) X^-(z)}{B(z)} = 0.$$

Если свободный член

$$F(z) = \frac{C(z) X^-(z)}{B(z)}$$

удовлетворяет условию теоремы 1, то его можно представить в виде разности

$$F(z) = \Omega^+(z) - \Omega^-(z),$$

где $\Omega^\pm(z)$ регулярны в соответствующих полуплоскостях.

Теперь получаем связь

$$X^+(z) \prod_{j=1}^k (z - a_j) \Phi^+(z) + \Omega^+(z) = -X^-(z) \Phi^-(z) + \Omega^-(z).$$

Левая и правая части здесь регулярны соответственно при $\operatorname{Im} z > a$ и $\operatorname{Im} z < b$ ($a < 0, b > 0$).

В частности, они совпадают на оси $\operatorname{Im} z = 0$. Если известно, что обе части этого равенства имеют степенной рост на бесконечности порядков m и n , то по теореме Лиувилля они представляют собой единую целую аналитическую функцию, а именно произвольный многочлен $P(z)$ степени $\chi = \min(m, n)$. Отсюда

$$\Phi^+(z) = \frac{P(z) - \Omega^+(z)}{X^+(z) \prod_{j=1}^k (z - a_j)},$$

$$\Phi^-(z) = \frac{\Omega^-(z) - P(z)}{X^-(z)}.$$

Отметим, что представление (7.26) имеет место, если функция

$$F_*(z) = \ln \frac{A(z)}{B(z) \prod_{j=1}^k (z - a_j)} = \ln \frac{X^+(z)}{X^-(z)}$$

непрерывна в полосе $a < \operatorname{Im} z < b$, регулярна внутри этой полосы, не имеет там нулей и если при $\operatorname{Re} z \rightarrow \infty$, функция $F_*(z) = 0(|z|^{-\mu})$, $\mu > 0$.

Однако вовсе не следует, что $F_*(z)$ при $|z| \rightarrow \infty$ имеет асимптотику $0(|z|^{-\mu})$. Другими словами, функция

$$D(z) = \frac{A(z)}{B(z) \prod_{j=1}^k (z - a_j)}$$

не обязана стремиться к единице. Эту трудность можно обойти следующим образом. Пусть, например, $\left| D(z) - \frac{1}{c} z^{-\nu} \right| \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow \infty$. Тогда, умножив $D(z)$ на функцию $c(z^2 + a^2)^{\nu/2}$, получим

$$f(z) = \ln \left\{ \frac{c A(z) (z^2 + a^2)^{\nu/2}}{B(z) \prod_{j=1}^k (z - a_j)} \right\} \approx 0(|z|^{-\mu}), \quad |z| \rightarrow \infty, \quad \mu > 0.$$

Множитель $(z^2 + a^2)^{\nu/2}$ не имеет нулей в полосе регулярности $|\operatorname{Im} z| < a(|a| \leq |b|)$, поэтому все требования теорем 1 и 2 выполнены. Так как $f(z) = f^+(z) - f^-(z)$, запишем

$$\frac{A(z)}{B(z)} = \frac{1}{c(z^2 + a^2)^{\nu/2}} \prod_{j=1}^k (z - a_j) \exp\{f^+(z) - f^-(z)\}.$$

Теперь получаем разложение уравнения (7.25)

$$\frac{1}{c} \prod_{j=1}^k (z - a_j) \frac{e^{f^+(z)}}{(z + ia)^{\nu/2}} \Phi^+(z) + (z - ia)^{\nu/2} e^{f^-(z)} \Phi^-(z) + \frac{C(z)}{B(z)} (z - ia)^{\nu/2} e^{f^-(z)} = 0.$$

Дальнейшие рассуждения повторяют уже сказанное выше, и мы можем прийти к цели, если определим достаточно аккуратно функции $f^\pm(z)$.

Пример. Рассмотрим уравнение Винера–Хопфа второго рода

$$\varphi(x) - \frac{1}{2} \int_0^\infty k(x-y) \varphi(y) dy = f(x), \quad x > 0,$$

где

$$k(x) = e^{-|x|} = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ e^x, & x < 0, \end{cases} \quad f(x) = A e^{\alpha x} \quad (0 < \alpha < 1).$$

Однородное уравнение с таким ядром рассматривал Лалеско (см. [30]). Представим его в виде

$$\varphi^+(x) - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y) \varphi^+(y) dy = f^+(x) - \varphi^-(x),$$

где $\varphi^-(x)$ — дополнительная неизвестная.

Преобразование Фурье дает

$$\Phi^+(\lambda) - \frac{1}{2} K(\lambda) \Phi^+(\lambda) = F^+(\lambda) - \Phi^-(\lambda),$$

где

$$K(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|+i\lambda x} dx = \int_{-\infty}^0 e^{x(i\lambda+1)} dx + \int_0^{\infty} e^{x(i\lambda-1)} dx = \frac{2}{\lambda^2 + 1},$$

$$F^+(\lambda) = \int_0^{\infty} A e^{x(\alpha+i\lambda)} dx = -\frac{A}{\alpha+i\lambda} = \frac{Ai}{\lambda-i\alpha}, \quad 0 < \alpha < \operatorname{Im} \lambda < 1.$$

С учетом этих формул приходим к задаче (7.25). Полагая $\lambda = z$, запишем

$$\frac{z^2}{z^2+1} \Phi^+(z) + \Phi^-(z) = \frac{Ai}{z-i\alpha}.$$

Это соотношение справедливо в полосе $0 < \alpha < \operatorname{Im} z < h < 1$, представим его в виде

$$\frac{z^2}{z+i} \Phi^+(z) + (z-i) \Phi^-(z) = \frac{Ai(z-i)}{z-\alpha i} = A \left(i - \frac{\alpha-1}{z-i\alpha} \right).$$

В полосе $0 < \alpha < \operatorname{Im} z < h < 1$ (рис. 7.2) имеем

$$\frac{z^2}{z+i} \Phi^+(z) + \frac{A(\alpha-1)}{z-i\alpha} = -(z-i) \Phi^-(z) + Ai.$$

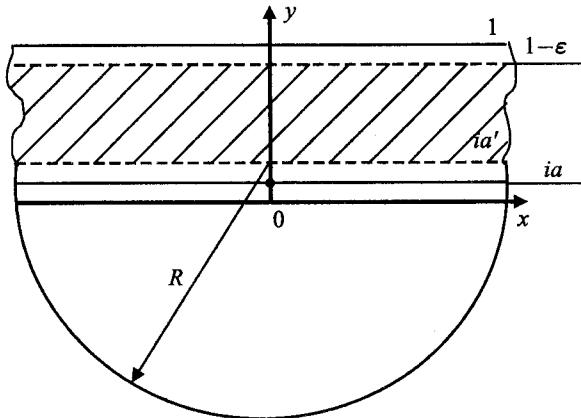


Рис. 7.2. К определению решения $\varphi(x)$

Имея в виду дополнительное условие $|\Phi^+(z)| \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow \infty$, заключаем, что левая часть этого равенства растет на бесконечности медленнее, чем z . Следовательно, определена единственная целая функция (постоянная c)

$$\frac{z^2}{z+i} \Phi^+(z) + \frac{A(\alpha-1)}{z-i\alpha} = c$$

или

$$\Phi^+(z) = c \frac{z+i}{z^2} - A \frac{(\alpha-1)(z+i)}{z^2(z-i\alpha)}.$$

Решение $\varphi(x)$ находится по формуле обращения

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_L e^{-ix} \Phi^+(z) dz, \quad x > 0,$$

где путь $L = (-\infty + i\alpha', \infty + i\alpha')$, $\alpha' = \alpha + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ — мало.

Для вычисления этого интеграла замкнем прямую $(-\infty + i\alpha', \infty + i\alpha')$ нижней полуокружностью радиуса R (лемма Жордана применима), воспользуемся теоремой о вычетах и устремим R к бесконечности (см. рис. 7.2.). Будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{z+i}{z^2} e^{-iz} dz &= ic \frac{d}{dz} \left[(z+i) e^{-iz} \right]_{z=0} = ic(1+x), \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^L -A \frac{(\alpha-1)(z+i)}{z^2(z-i\alpha)} e^{-iz} dz &= \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^L -A(\alpha-1) \left\{ \frac{\alpha+1}{i\alpha^2(z-i\alpha)} + \frac{i(\alpha+1)}{\alpha^2 z} - \frac{1}{\alpha z^2} \right\} e^{-iz} dz = \\ &= A(\alpha-1) \left\{ \frac{\alpha+1}{\alpha^2} (1 - e^{\alpha x}) + \frac{x}{\alpha} \right\}. \end{aligned}$$

Окончательно получаем решение

$$\varphi(x) = ic(1+x) + A(\alpha-1) \left\{ \frac{\alpha+1}{\alpha^2} (1 - e^{\alpha x}) + \frac{x}{\alpha} \right\}, \quad x > 0.$$

Здесь c — произвольная константа, определяемая физическим содержанием задачи.

Изложим ниже некоторые теоретические сведения относительно уравнений в свертках вида [12]

$$(\mu I - K)\varphi = \mu\varphi(x) - \sum_{j=1}^n b_j(x) \int_{-\infty}^{\infty} k_j(x-y) \varphi(y) dy = f(x), \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad (7.27)$$

где $\mu = \text{const}$, b_j — ограниченные измеримые функции, имеющие конечные пределы при $x \rightarrow \pm\infty$. Уравнение, транспонированное к (7.27), имеет вид

$$(\mu I - K)^* \psi = \mu\psi(x) - \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} b_j(y) k_j(y-x) \psi(y) dy = g(x), \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

Важной характеристикой уравнения (7.27) является его символ

$$\sigma(x, \lambda) = \mu - \sum_{j=1}^n b_j(x) K_j(\lambda),$$

где

$$K_j(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} k_j(x) e^{i\lambda x} dx$$

преобразования Фурье от ядерных функций $k_j(x)$.

Теорема. Если ядра $k_j(x)$ уравнения (7.27) суммируемы на всей оси, то:

а) для того чтобы уравнение (7.27) было нормально разрешимым в пространстве $L^p(-\infty, \infty)$, $1 < p < \infty$ и имело конечный индекс, необходимо и достаточно, чтобы предельные значения символа при $x \rightarrow \pm\infty$ нигде не обращались в нуль:

$$\sigma(\pm\infty, \lambda) = \mu - \sum_{j=1}^n b_j(\pm\infty) K_j(\lambda) \neq 0, \quad -\infty < \lambda < \infty; \quad (7.28)$$

б) при выполнении указанного условия индекс уравнения в любом из этих пространств определяется формулой

$$\chi_\mu = \frac{1}{2\pi} \arg \left. \frac{\sigma(-\infty, \lambda)}{\sigma(+\infty, \lambda)} \right|_{-\infty}^{\infty};$$

в) если μ совпадает с каким-либо из значений функций $\sigma(\pm\infty, \lambda)$ при $\lambda \in (-\infty, \infty)$, то либо оператор $\mu I - K$ (I — тождественный оператор) не является нормально разрешимым, либо пространства нулей операторов $\mu I - K$ и $(\mu I - K)^*$ бесконечномерны;

г) одним из регуляризаторов оператора $\mu I - K$ при выполнении условия (7.28) является оператор

$$R\varphi = \begin{cases} \frac{1}{\mu} \varphi(x) + \int_{-\infty}^{\infty} q^-(x-y) \varphi(y) dy, & x < 0, \\ \frac{1}{\mu} \varphi(x) + \int_{-\infty}^{\infty} q^+(x-y) \varphi(y) dy, & x > 0, \end{cases}$$

где функции $q^\pm(x) \in L^1(-\infty, \infty)$ и определяются своими преобразованиями Фурье

$$Q^\pm(\lambda) = \frac{\frac{1}{\mu} \sum_{j=1}^n b_j(\pm\infty) K_j(\lambda)}{\mu - \sum_{j=1}^n b_j(\pm\infty) K_j(\lambda)}.$$

Все сформулированные свойства остаются без существенных изменений, если для некоторого h

а) $e^{-hx} K_j(x) \in L^1(-\infty, \infty)$,

б) $e^{-hx} f(x), e^{-hx} \varphi(x) \in L^p(-\infty, \infty)$.

Отметим в заключение работы [8, 17, 18, 29] и др., в которых предлагаются различные приближенные подходы к решению уравнений в свертках. Уравнения этого типа с ядрами, суммируемыми с весом, изучены в [3, 26]. Системы интегральных уравнений типа свертки рассматривались в [20]. Теория интегральных уравнений на конечном интервале с ядрами, зависящими от разности аргументов, содержится в [33].

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ 7

1. Александров В. М. Асимптотические решения одного класса интегральных уравнений и его применение к контактным задачам для цилиндрических упругих тел / В. М. Александров, А. В. Белоконь // Приклад. математика и механика. 1967. Т. 31, вып. 4. С. 704–710.
2. Бабешко В. А. Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости / В. А. Бабешко. М.: Наука, 1984. 256 с.
3. Беркович Ф. Д. Об одном интегральном уравнении на полуоси / Ф. Д. Беркович // Изв. вузов. Математика. 1966. № 1. С. 13–14.
4. Брычков Ю. А. Интегральные преобразования обобщенных функций / Ю. А. Брычков, А. П. Прудников. М.: Наука, 1977. 287 с.
5. Вайнштейн Л. А. Теория дифракции и метод факторизации / Л. А. Вайнштейн. М.: Сов. Радио, 1966. 430 с.
6. Гохберг И. Ц. О методе редукции для систем уравнений типа Винера–Хопфа / И. Ц. Гохберг, И. А. Фельдман // Докл. АН СССР. 1965. № 2. С. 268–271.
7. Гохберг И. Ц. Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов / И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн // Успехи мат. наук. 1958. Т. XIII, вып. 2. С. 3–72.
8. Гохберг И. Ц. Уравнения в свертках и проекционные методы их решения / И. Ц. Гохберг, И. А. Фельдман. М.: Наука, 1971. 352 с.
9. Градштейн Н. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / Н. С. Градштейн, И. М. Рыжик. М.: Физматтиз, 1963. 1100 с.
10. Давенпорт В. В. Введение в теорию случайных сигналов и шумов / В. В. Давенпорт, В. Л. Рут. М.: Иностр. лит., 1960. 468 с.
11. Израилов М. Ш. Динамическая теория упругости и дифракция волн / М. Ш. Израилов. М.: Изд-во МГУ, 1992. 205 с.
12. Крейн М. Г. Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов / М. Г. Крейн // Успехи мат. наук. 1958. Т. 13, вып. 5. С. 3–120.
13. Крылов В. И. Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа / В. И. Крылов, Н. С. Скобля. М: Наука, 1974. 224 с.
14. Морс Ф. М. Методы теоретической физики: в 2-х т. / Ф. М. Морс, Г. Фешбах. М.: Иностр. лит., 1958. Т. 1. 931 с.
15. Морс Ф. М. Методы теоретической физики: в 2-х т. / Ф. М. Морс, Г. Фешбах. М.: Иностр. лит., 1960. Т. 2. 886 с.
16. Нобл Б. Метод Винера–Хопфа / Б. Нобл. М.: Иностр. лит., 1962. 280 с.
17. Попов Г. Я. Контактные задачи для линейно–деформируемого основания / Г. Я. Попов. Киев: Вища шк., 1982. 168 с.
18. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений / Г. Я. Попов. М.: Наука, 1982. 342 с.
19. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела / Ю. Н. Работнов. М.: Наука, 1979. 744 с.
20. Симоненко И. Б. О некоторых системах интегральных уравнений типа свертки / И. Б. Симоненко // Изв. вузов. Математика. 1962 № 6. С. 119–130.

21. Снеддон И. Преобразования Фурье / И. Снеддон. М.: Иностр. лит., 1955. 668 с.
22. Соболев В. В. Перенос лучистой энергии в атмосфере звезд и планет / В. В. Соболев. М.: Гостехиздат, 1956. 391 с.
23. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье / Е. Титчмарш. М.-Л.: Гостехиздат, 1948. 480 с.
24. Трантер К. Дж. Интегральные преобразования в математической физике / К. Дж. Трантер. М.: Иностр. лит., 1956. 204 с.
25. Фок В. А. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн / В. А. Фок. М.: Сов. радио, 1970. 518 с.
26. Черский Ю. И. Уравнения типа свертки / Ю. И. Черский // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1958. Т. 22, № 3. С. 361–378.
27. Шестопалов В. П. Метод задачи Римана–Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн / В. П. Шестопалов. Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1971. 400 с.
28. Шестопалов В. П. Сумматорные уравнения в современной теории дифракции / В. П. Шестопалов. Киев: Наук. думка, 1983. 252 с.
29. Koiter W. T. Approximate solution of Wiener–Hopf type integral equations with applications. I. General theory. II. A. B. Some plate bending problems and an example from hidrodynamics // Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wetensch. 1954. Vol. 57, № 5. S. 568–579.
30. Mathews I. Mathematical Methods of Phisics / I. Mathews, R. L. Walker. New York; Amsterdam, 1964. Русский перевод: Мэтьюз Дж. Математические методы физики / Дж. Мэтьюз, Р. Уокер М.: Атомиздат, 1972. 397 с.
31. Noble B. Methods Based on the Wiener–Hopf Technique for the Solution of Partial Differential Equations / B. Noble. Chelsea Publishing C., 1988. 246 с.
32. Paley R. Fourier Transforms in the complex Domain / R. Paley, N. Wiener. New York, 1934 // Русский перевод: Винер Н. Преобразование Фурье в комплексной области. Н. Винер, Р. Пэли. М.: Наука, 1964. 268 с.
33. Sakhnovich L. Integral Equations with Difference Kernels on Finite Intervals. Operator Theory. Advances and Applications / L. Sakhnovich. Birkhauser, 1995. 175 p.

ГЛАВА 8

ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Имеется обширный класс краевых задач механики и математической физики, которые с помощью методов теории потенциала сводятся к граничным интегральным уравнениям специального вида. Ядра интегральных операторов в этих уравнениях имеют особенности, порядок которых больше размерности области интегрирования.

К таким задачам относятся плоские и пространственные задачи теории трещин, задачи теплопроводности для тел с трещинами, задачи обтекания тонких несущих поверхностей и профилей потоком идеальной несжимаемой жидкости, некоторые задачи дифракции. Интегральными операторами в сингулярных уравнениях для указанных задач являются нормальные производные гармонических либо обобщенных потенциалов двойного слоя. Эти операторы, как отмечалось выше, имеют так называемые сильные особенности в ядрах. Это означает, что рассматриваемые интегралы не существуют ни как обычные несобственные, ни в смысле главного значения по Коши. В научной литературе их называют конечночастными, гиперсингулярными, интегралами по Адамару либо интегралами с сильной особенностью.

Численная реализация подобных сингулярных интегральных уравнений сопряжена со значительными трудностями. Так, при вычислении нормальной производной (оператора напряжений) от потенциала двойного слоя (обобщенного потенциала двойного слоя) невозможна формальная перестановка порядка дифференцирования и интегрирования. Речь может идти лишь об определении соответствующих предельных значений. Поэтому формулы, которые используются для численной реализации, нужно получать с использованием корректно выполненных предельных переходов.

Отметим, что аналитически вычислить полученные интегралы удается лишь в частных случаях. При численном определении этих интегралов область интегрирования разбивают на конечное число подобластей (граничных элементов). При этом осуществляют аппроксимацию как поверхности (либо контура) интегрирования, так и плотности вычисляемого интеграла, что приводит к погрешностям вычислений.

Тем не менее применение интегральных представлений в виде потенциала двойного слоя с неизвестной плотностью на разрезе целесообразно при решении ряда практически важных задач. Как известно, потенциал двойного слоя в пространстве с разрезом всюду вне разреза удовлетворяет уравнению Лапласа, на бесконечности — условию Зоммерфельда. При переходе через поверхность разреза потенциал двойного слоя терпит разрыв (это обеспечивает возможность получения перепада давлений на несущей поверхности) и имеет непрерывную нормальную производную при весьма общих предположениях относительно неизвестной плотности (это позволяет удовлетворить условиям непротекания). Таким образом, если в качестве интегрального представления решения задачи обтекания несущей поверхности выбрать потенциал двойного слоя, то для решения краевой задачи остается лишь удовлетворить условиям на разрезе, что приводит к необходимости решения гиперсингулярного уравнения.

В этой главе рассматриваются гиперсингулярные интегралы, возникающие при решении плоских и пространственных задач механики и математической физики с использова-

нием гармонических и обобщенных потенциалов двойного слоя. Получены формулы, позволяющие корректно вычислить конечную часть по Адамару для рассматриваемых интегралов. Исследована погрешность численного определения сингулярных и гиперсингулярных интегралов.

8.1. Интеграл в смысле конечной части по Адамару в плоских задачах

8.1.1. Интеграл в смысле конечной части по Адамару для функций, определенных на отрезке прямой

Существует несколько способов интерпретации гиперсингулярных интегралов. Один из них основан на введении специального определения расходящегося интеграла в смысле конечной части, что позволяет вычислить прямое значение расходящегося интеграла. В других подходах понятие расходящегося интеграла не вводится, а сингулярные интегралы при этом рассматриваются как предельные значения нормальной производной гармонического потенциала двойного слоя (оператора напряжений от обобщенного потенциала двойного слоя в теории упругости).

Определение конечной части гиперсингулярного интеграла по Адамару. Пусть $L = [-l, l]; x_0 \in L$. Рассмотрим интеграл вида

$$I_l(x_0) = \int_L \frac{\Theta(x)}{(x - x_0)^2} dx,$$

который определим в смысле конечного значения по Адамару, а именно [1, 2]:

$$I_l(x_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{L^*} \frac{\Theta(x)}{(x - x_0)^2} dx - \frac{2\Theta(x_0)}{\varepsilon} \right), \quad (8.1)$$

где $L^* = L \setminus Q(x_0, \varepsilon); Q(x_0, \varepsilon) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

Сведение гиперсингулярного интеграла к интегралу типа Коши. Получим формулу, позволяющую свести вычисление рассматриваемого гиперсингулярного интеграла к интегралу, существующему в смысле главного значения по Коши. В работе [2] показано, что

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l \frac{\Theta'(x)}{x - x_0} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-l}^{x_0 - \varepsilon} \frac{\Theta'(x)}{x - x_0} dx + \int_{x_0 + \varepsilon}^l \frac{\Theta'(x)}{x - x_0} dx \right] = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-l}^{x_0 - \varepsilon} \frac{\Theta(x)}{(x - x_0)^2} dx + \int_{x_0 + \varepsilon}^l \frac{\Theta(x)}{(x - x_0)^2} dx - \frac{2\Theta(x_0)}{\varepsilon} \right] + \frac{\Theta(-l)}{x_0 + l} + \frac{\Theta(l)}{l - x_0}. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Таким образом, получаем формулу

$$\int_L \frac{\Theta(x)}{(x - x_0)^2} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-l}^{x_0 - \varepsilon} \frac{\Theta'(x)}{x - x_0} dx + \int_{x_0 + \varepsilon}^l \frac{\Theta'(x)}{x - x_0} dx \right] - \frac{\Theta(-l)}{l + x_0} - \frac{\Theta(l)}{l - x_0}. \quad (8.3)$$

Заметим, что после вычитания бесконечной части из гиперсингулярного интеграла получаются величины, которые уже не обладают свойствами регулярных интегралов. Из (8.3) ви-

дим, что интеграл от положительной функции ($\Theta(x) = 1; x_0 = 0$) будет равен отрицательному числу (см. также гл. 4, пп. 4.13 и 4.19).

Определения (8.1), (8.3) считались нестрогими и не имеющими физического смысла. Однако сейчас мы покажем, что имеются реальные физические задачи, в которых появляются такие экзотические интегралы и дадим их определение.

Гиперсингулярный интеграл как предельное значение нормальной производной потенциала двойного слоя. Рассмотрим краевую задачу Неймана для уравнения Лапласа в R^2 с прямолинейным разрезом $L = [-l, l]$ (рис. 8.1).

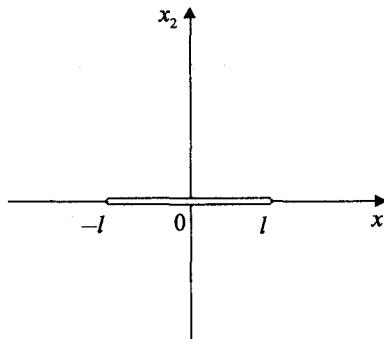


Рис. 8.1. Плоскость с прямолинейным разрезом

К этой задаче сводится изучение циркуляционного и бесциркуляционного обтекания аэродинамических профилей, нахождение поля температур в теле, ослабленном прямолинейными разрезами. Определяющие уравнения, описывающие такие задачи, имеют следующую структуру:

$$\Delta \Phi = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi^+}{\partial y} = \frac{\partial \Phi^-}{\partial y} = f(x), \quad x \in L,$$

$$\text{grad } \Phi|_{\infty} = 0. \quad (8.4)$$

Будем искать функцию $\Phi(x, y)$, являющуюся решением краевой задачи (8.4), в виде потенциала двойного слоя, распространенного по отрезку $[-l, l]$

$$\Phi(x_0; y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l \Theta(x) \frac{\partial}{\partial y} \ln \frac{1}{r} \Big|_{y=0} dx, \quad r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Предположим, что плотность $\Theta(x)$ дифференцируема, и ее производная удовлетворяет условию Гельдера [3] с показателем λ ($0 < \lambda \leq 1$).

Тогда решение задачи (8.4) сводится к интегро-дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{y_0 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial y_0} \int_{-l}^l \Theta(x) \frac{\partial}{\partial y} \ln \frac{1}{r} \Big|_{y=0} dx = f(x_0), \quad x_0 \in [-l, l]. \quad (8.5)$$

Точка $x = x_0 \in [-l, l]$ называется особой или точкой наблюдения. При численном определении интеграла область интегрирования $[-l, l]$ разбивается на конечное число подобластей (граничных элементов). Элемент, содержащий точку $x = x_0$, также называется особым или сингулярным.

Имеем

$$\frac{\partial}{\partial y} \ln \frac{1}{r} = -\frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

В (8.5) при $y_0 \neq 0$ под знаком предела можно поменять местами операции интегрирования и дифференцирования. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial y_0} \int_{-l}^l \Theta(x) \frac{\partial}{\partial y} \ln \frac{1}{r} dx = \int_{-l}^l \Theta(x) \left[\frac{1}{(x - x_0)^2 + y_0^2} - \frac{2y_0^2}{[(x - x_0)^2 + y_0^2]^2} \right] dx. \quad (8.6)$$

Отметим, что прямого значения интеграла в (8.6), т. е. интеграла, вычисленного при $y_0 = 0$, не существует даже в смысле главного значения по Коши. Переходим к пределу при $y_0 \rightarrow 0$ в выражении (8.6). Покажем, что это предельное значение можно представить в виде суммы некоторых конечных величин и интеграла, существующего в обычном смысле, если $x_0 \neq \pm l$.

Обозначим

$$L(x - x_0, y_0) = \frac{1}{(x - x_0)^2 + y_0^2} - \frac{2y_0^2}{[(x - x_0)^2 + y_0^2]^2}.$$

Получим

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l \Theta(x) L(x - x_0, y_0) dx &= \int_{-l}^l [\Theta(x) - \Theta(x_0) - \Theta'(x_0)(x - x_0)] L(x - x_0, y_0) dx + \\ &+ \Theta(x_0) \int_{-l}^l L(x - x_0, y_0) dx + \Theta'(x_0) \int_{-l}^l (x - x_0) L(x - x_0, y_0) dx. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Второе и третье слагаемые в правой части (8.7) вычисляются аналитически и при $y_0 \rightarrow 0$ имеют конечный предел. Рассмотрим первое слагаемое в (8.7). Применим теорему Лагранжа о конечном приращении. Получим $\Theta(x) - \Theta(x_0) = \Theta'(\xi)(x - x_0)$. Тогда первое слагаемое в правой части (8.6) можно записать следующим образом:

$$R(x_0, y_0) = \int_{-l}^l [\Theta'(\xi) - \Theta'(x_0)] (x - x_0) L(x - x_0, y_0) dx.$$

Поскольку $\Theta'(x)$ удовлетворяет условию Гельдера и ξ находится внутри промежутка $[x, x_0]$, то

$$|\Theta'(\xi) - \Theta'(x_0)| \leq A |\xi - x_0|^\lambda \leq A |x - x_0|^\lambda,$$

где A — ограниченная величина.

Вследствие полученной оценки и неравенств

$$y_0^2 \leq |x - x_0|^2 + y_0^2; \quad |x - x_0|^2 + y_0^2 \geq |x - x_0|^2$$

будем иметь

$$|R(x_0, y_0)| \leq 3A \int_{-l}^l |x - x_0|^{-1+\lambda} dx.$$

Отсюда следует, что при $y_0 \rightarrow 0$ в (8.5) существует конечный предел

$$\begin{aligned} I(x_0) &= \frac{1}{2\pi} \lim_{y_0 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial y_0} \left. \int_{-l}^l \Theta(x) \frac{\partial}{\partial y} \ln \frac{1}{r} \right|_{y=0} dx = \\ &= R(x_0, 0) + \Theta(x_0) P(x_0) + \Theta'(x_0) Q(x_0), \\ R(x_0, 0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l \frac{\Theta(x) - \Theta(x_0) - \Theta'(x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)^2} dx; \\ P(x_0) &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{x_0 + l} + \frac{1}{x_0 - l} \right]; \quad Q(x_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{l - x_0}{l + x_0} \right|. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Представив интеграл в (8.1) в виде

$$\begin{aligned} \int_L^l \frac{\Theta(x)}{(x - x_0)^2} dx &= \int_L^l \frac{\Theta(x) - \Theta(x_0) - \Theta'(x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)^2} dx + \\ &+ \Theta(x_0) \int_L^l \frac{1}{(x - x_0)^2} dx + \Theta'(x_0) \int_L^l \frac{1}{x - x_0} dx, \end{aligned}$$

установим, что предельное значение интеграла в (8.5) равно конечной части по Адамару ([2], с. 66) интеграла (8.1)

$$\int_{-l}^l \frac{\Theta(x)}{(x - x_0)^2} dx = \int_{-l}^l \Theta(x) \left. \frac{\partial^2}{\partial y \partial y_0} \ln \frac{1}{r} \right|_{y=0, y_0=0} dx.$$

Рассмотрим еще раз формулу (8.2). Прибавляя и вычитая в числителях подынтегральных выражений во второй строке величину $\Theta(x_0)$, придадим формуле (8.2) следующий вид:

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l \frac{\Theta'(x)}{x - x_0} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-l}^{x_0 - \varepsilon} \frac{\Theta'(x)}{x - x_0} dx + \int_{x_0 + \varepsilon}^l \frac{\Theta'(x)}{x - x_0} dx \right] = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-l}^{x_0 - \varepsilon} \frac{\Theta(x) - \Theta(x_0)}{(x - x_0)^2} dx + \int_{x_0 + \varepsilon}^l \frac{\Theta(x) - \Theta(x_0)}{(x - x_0)^2} dx - \frac{2\Theta(x_0)}{\varepsilon} \right] + \frac{\Theta(l)}{l - x_0} + \frac{\Theta(-l)}{l + x_0} = \\ &= \int_{-l}^l \frac{\Theta(x) - \Theta(x_0)}{(x - x_0)^2} dx - \Theta(x_0) \left[\frac{1}{l - x_0} + \frac{1}{l + x_0} \right] + \frac{\Theta(l)}{l - x_0} + \frac{\Theta(-l)}{l + x_0}. \end{aligned}$$

Здесь интегралы понимаются в смысле главного значения по Коши.

Из (8.2) получаем формулы для вычисления конечной части интеграла по Адамару

$$\left. \int_{-l}^l \Theta(x) \frac{\partial^2}{\partial y \partial y_0} \ln \frac{1}{r} dx \right|_{y=0, y_0=0} = \int_{-l}^l \frac{\Theta'(x)}{x - x_0} dx - \frac{\Theta(-l)}{x_0 + l} - \frac{\Theta(l)}{l - x_0} \quad (8.9)$$

либо

$$\left. \int_{-l}^l \Theta(x) \frac{\partial^2}{\partial y \partial y_0} \ln \frac{1}{r} dx \right|_{y=0, y_0=0} = \int_{-l}^l \frac{\Theta(x) - \Theta(x_0)}{(x - x_0)^2} dx - \Theta(x_0) \left[\frac{1}{l - x_0} + \frac{1}{l + x_0} \right]. \quad (8.10)$$

Таким образом, доказано, что для функций, определенных на отрезке, предельное значение нормальной производной потенциала двойного слоя равно конечной части интеграла по Адамару от прямого значения этой нормальной производной. Полученные формулы позволяют определить конечное значение интегралов по Адамару для $x_0 \neq \pm l$. С помощью формулы (8.8) можно вычислить конечное значение по Адамару как суммы некоторых конечных величин и интеграла, существующего в обычном смысле. Формулы (8.9), (8.10) позволяют вычислить конечное значение интеграла по Адамару посредством интеграла, существующего в смысле главного значения по Коши.

Формула, аналогичная (8.9), была введена Ж. Адамаром [1] в качестве определения конечной части гиперсингулярного интеграла.

Гиперсингулярный интеграл как обобщенная функция. Заметим, что функция $\ln(1/r)$ является фундаментальным решением уравнения Лапласа. Вследствие равенства

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial y_0} \ln \frac{1}{r} = -\frac{\partial^2}{\partial y^2} \ln \frac{1}{r}$$

имеем

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial y_0} \ln \frac{1}{r} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \frac{1}{r}.$$

В монографии [4] вводится сингулярная обобщенная функция $P \frac{1}{x}$ (в гл. 4: $Vp \frac{1}{x}$), совпадающая с функцией $\frac{1}{x}$ всюду при $x \neq 0$. Эта обобщенная функция представляет собой функционал, равный конечной части интеграла (интегралу в смысле главного значения по Коши)

$$\left(P \frac{1}{x}, \Theta \right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{\infty} \right) \frac{\Theta}{x} dx$$

для функций Θ , таких что $\Theta(x) = 0$ при $|x| > R$.

Для функции $P \frac{1}{x}$ справедливы равенства [4]

$$\frac{d}{dx} \ln|x| = P \frac{1}{x}; \quad \frac{d}{dx} P \frac{1}{x} = -P \frac{1}{x^2}; \quad P \frac{1}{x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Theta(x) - \Theta(x_0)}{x^2} dx.$$

Рассмотрим множество функций Θ , таких что $\Theta(x) = 0$ при $|x| > l$, $\Theta(-l) = \Theta(l) = 0$.

Тогда линейный функционал $P \frac{1}{x}$, определенный формулой

$$\left(P \frac{1}{x}, \Theta \right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-l}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^l \right) \frac{\Theta}{x} dx,$$

равен интегралу в смысле главного значения по Коши для функций, заданных на отрезке $[-l, l]$.

Для $P \frac{1}{(x - x_0)^2}$, согласно вышеизложенному, получим

$$\left(P \frac{1}{(x - x_0)^2}, \Theta \right) = \int_{-l}^l \frac{\Theta(x)}{(x - x_0)^2} dx = \int_{-l}^l \frac{\Theta(x) - \Theta(x_0)}{(x - x_0)^2} dx - \Theta(x_0) \left[\frac{1}{x_0 + l} + \frac{1}{l - x_0} \right].$$

С позиций обобщенных функций правая часть равенства (8.6) представляет собой регуляризацию обобщенной функции $P \frac{1}{(x - x_0)^2}$. В этой связи доказанное выше утверждение

о равенстве предельного значения нормальной производной потенциала двойного слоя и конечной части интеграла по Адамару прямого значения этой нормальной производной является следствием того факта, что каждая обобщенная функция является слабым пределом своих регуляризаций [4].

Гиперсингулярный интеграл как предельное значение производной комплексного потенциала. Приведем еще одно определение интеграла по Адамару на отрезке прямой, основывающееся на идеях В. С. Владимира [4] и М. А. Лаврентьева [5]. Представим интеграл в (8.1) в виде следующего предела:

$$I_1(x_0) = \int_L \frac{\Theta(x)}{(x - x_0)^2} dx = \operatorname{Re} \left[\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_L \frac{\Theta(x)}{(x - x_0 - i\epsilon)^2} dx \right].$$

Имеем

$$\begin{aligned} I_1(x_0) &= \operatorname{Re} \left[\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_L \frac{\Theta(x) \left[(x - x_0 + i\epsilon)^2 \right]}{\left[(x - x_0)^2 + \epsilon^2 \right]^2} dx \right] = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_L \Theta(x) \left\{ \frac{1}{(x - x_0)^2 + \epsilon^2} - \frac{2\epsilon^2}{\left[(x - x_0)^2 + \epsilon^2 \right]^2} \right\} dx. \end{aligned}$$

Полученное выражение с точностью до обозначения ($y_0 \leftrightarrow \epsilon$) совпадает с формулой (8.6).

8.1.2. Интеграл в смысле конечной части по Адамару для функций, определенных на гладком разомкнутом контуре

Пусть L — простая разомкнутая дуга Ляпунова (рис. 8.2).

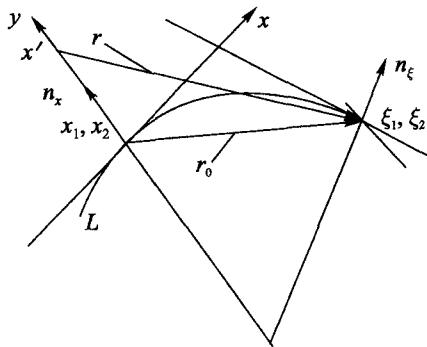


Рис. 8.2. Элемент дуги L

Предположим, что уравнение кривой L задается следующим образом: $\xi_1 = \xi_1(s)$, $\xi_2 = \xi_2(s)$, $\alpha \leq s \leq \beta$. Будем считать, что функции $\xi_1(s)$, $\xi_2(s)$ дважды непрерывно дифференцируемы. Кроме того, предположим, что

$$\alpha(n_1, n_2) < E\rho.$$

Здесь ρ — расстояние между двумя точками m_1 и m_2 на кривой L ; n_1 и n_2 — нормали к кривой в этих точках, α — угол между этими нормальными; E — ограниченная величина.

Рассмотрим вторую краевую задачу для уравнения Лапласа в R^2 с разрезом по дуге L . Представим неизвестную функцию Φ в виде потенциала двойного слоя:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_L \Theta(\xi) \frac{\partial}{\partial n_\xi} \ln \frac{1}{|x - \xi|} dl,$$

где $|x - \xi| = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2}$; $\Theta(\xi)$ — неизвестная плотность; ее производная вдоль контура удовлетворяет условию Гельдера.

Введем оси координат (Ox , Oy), связанные с точкой «наблюдения» $x = (x_1, x_2)$ так, чтобы ось Oy была направлена по нормали к линии L в точке (x_1, x_2) . Начало координат поместим в точку (x_1, x_2) . Необходимо вычислить $\frac{\partial \Phi}{\partial n_x}$. Вследствие выбора системы координат

имеем $\frac{\partial}{\partial n_x} = \frac{\partial}{\partial y}$. Будем рассматривать вспомогательную точку наблюдения $x' = (0, y)$,

находящуюся на нормали к L в точке x . Пусть $r = |x' - \xi|$, $r = |x' - \xi|$ — расстояние между точками $x' = (0, y)$ и $\xi = (\xi_1, \xi_2)$. Через r_0 обозначим расстояние между точками $x = (0, 0)$ и $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ (рис. 8.2). Пусть L_0 — часть контура L , полученная пересечением L и круга радиуса δ с центром в точке x . Считаем, что на L_0 параллели к нормали в точке x лишь в одной точке пересекают часть контура, находящегося внутри круга радиуса δ с центром в точке x .

Представим нормальную производную потенциала двойного слоя в виде

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n_x} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{L \setminus L_0} \Theta(\xi) \frac{\partial}{\partial n_\xi} \ln \frac{1}{|x' - \xi|} dl + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{L_0} \Theta(\xi) \frac{\partial}{\partial n_\xi} \ln \frac{1}{|x' - \xi|} dl.$$

Нормальная производная первого слагаемого в этом выражении существует при $x' \rightarrow x = (0, 0)$. Рассмотрим второе слагаемое. Имеем в точке $x' = (0, y)$

$$\frac{\partial}{\partial n_\xi} \ln \frac{1}{|x' - \xi|} = \frac{1}{r^2} [\xi_1 \cos(n_\xi, x) + (\xi_2 - y) \cos(n_\xi, y)].$$

Дифференцируя полученное равенство по y с учетом соотношений

$$\xi_1 \cos(n_\xi, x) + (\xi_2 - y) \cos(n_\xi, y) = r \cos(n_\xi, r); \quad \xi_2 - y = r \cos(y, r),$$

находим, что

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial n_\xi} \ln \frac{1}{|x' - \xi|} = \frac{2 \cos(n_\xi, r) \cos(y, r) - \cos(n_\xi, y)}{r^2}.$$

На контуре L_0 , который окружает точку x , введем следующую параметризацию $\xi_2 = \eta(x)$, $\xi_1 = x$. Отметим, что $\xi_2 = 0$, $\xi_1 = x$ представляют собой уравнения касательной к линии L в точке x . В силу сделанных предположений функция $\eta(x)$ имеет вторую непрерывную производную. Для точек контура L_0 выполняется неравенство $x^2 + \eta^2(x) \leq \delta^2$ ($0 < \delta < 1$). В начале выбранной системы координат функция $\eta(x)$ обращается в нуль вместе со своей первой производной, а следовательно, в окрестности начала координат $\eta(x)$ может быть представлена в виде

$$\eta(x) = ax^2.$$

Здесь a — ограниченная величина. Кроме того, имеют место соотношения

$$dl = \frac{1}{\cos(n_\xi, y)} dx,$$

$$r = \sqrt{x^2 + (\eta(x) - y)^2}.$$

Отсюда на контуре L_0 имеем

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_{L_0} \Theta(\xi) \frac{\partial}{\partial n_\xi} \ln \frac{1}{|x' - \xi|} dl = \int_{-\delta}^{\delta} \Theta(\xi) L(x' - \xi) dx,$$

Ядро интегрального оператора здесь запишем следующим образом:

$$L(x' - \xi) = -\frac{1}{r^2} + \frac{2r \cos(n_\xi, r) \cos(y, r)}{r^3 \cos(n_\xi, y)}.$$

Поскольку $xx' + \vec{r} = \vec{r}_0$, то $r \cos(n_\xi, r) = r_0 \cos(n_\xi, r_0) - y \cos(n_\xi, y)$. Поэтому выражению $L(x' - \xi)$ можно придать вид

$$L(x' - \xi) = -\frac{1}{r^2} + \frac{2y^2}{r^4} + \frac{2r_0 \cos(n_\xi, r_0) \cos(y, r)}{r^3 \cos(n_\xi, y)} - \frac{2y\xi_2}{r^4}.$$

Положим $r_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$. Так как $r^2 - r_1^2 = \eta(x)[\eta(x) - 2y]$, получим

$$r^2 = r_1^2 + a^2 x^4 + 2yax^2.$$

Отсюда следует, что

$$r = r_1 \sqrt{1 + (ax^2 + 2y)a\theta},$$

где $|\theta| < 1$. Тогда

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{r_1^2} - g_1 \frac{h_1}{r_1^2}; \quad \frac{1}{r^2} = \frac{g_1}{r_1^2}; \quad \frac{1}{r^4} = \frac{1}{r_1^4} + g_2 \frac{h_1}{r_1^4}; \quad \frac{1}{r^4} = \frac{g_1^2}{r_1^4},$$

где $h_1 = (ax^2 + 2y)a\theta$; $g_1 = \frac{1}{1 + h_1}$; $g_2 = g_1^2(2 + h_1)$. Из приведенных соотношений следует,

что рассматриваемый интеграл по контуру L_0 примет вид

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \Theta(x) \left(-\frac{1}{r_1^2} + \frac{2y^2}{r_1^4} \right) dx + \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \Theta(x) \frac{Q}{r_1^4} dx,$$

где

$$Q = g_1 a\theta (ax^2 + 2y)(-r_1^2 + 2y^2) + \frac{2g_1^2 r_0 \cos(\mathbf{n}_\xi, \mathbf{r}_0)(ax^2 - y)}{\cos(\mathbf{n}_\xi, y)} - 2g_1^2 ax^2 y.$$

Считаем, что плотность $\Theta(x)$ задана на отрезке, хотя первоначально эта функция была задана на кривой. Ее значение на отрезке определяем следующим образом. В каждой точке отрезка построим линии, параллельные нормали к кривой в точке x . Согласно свойствам кривой Ляпунова и выбору контура L_0 эти линии лишь в одной точке пересекают контур L . Значение плотности на отрезке будем считать равным значению плотности в той точке криволинейного контура, в которой пересекается с контуром L параллель к нормали в точке x .

Слагаемое

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \Theta(x) \left(-\frac{1}{r_1^2} + \frac{2y^2}{r_1^4} \right) dx,$$

как показано выше, имеет конечный предел при $y \rightarrow 0$, и это предельное значение равно конечной части по Адамару для интеграла

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{\Theta(x)}{x^2} dx.$$

Это слагаемое представляет собой интеграл по касательной к кривой L . Для оценки второго слагаемого в I_2 заметим, что имеют место соотношения

$$\cos(\mathbf{n}_\xi, \mathbf{r}_0) < Er_0; \quad r_0^2 = x^2 + a^2 x^4.$$

Вычислим следующий интеграл

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{|y|}{x^2 + y^2} dx = 2 \operatorname{arctg} \frac{\delta}{|y|}.$$

Поэтому второе слагаемое в I_2 ограничено и имеет конечный предел при $y \rightarrow 0$ и фиксированном δ .

Таким образом, конечное значение по Адамару интеграла по криволинейному элементу существует тогда и только тогда, когда существует конечное значение по Адамару для интеграла по прямолинейному элементу, представляющему собой отрезок касательной к кривой в рассматриваемой особой точке.

Будем рассматривать гиперсингулярный интеграл как предельное значение производной гармонического потенциала двойного слоя. Представим нормальную производную потенциала двойного слоя в различных формах, удобных для численной реализации

$$\frac{\partial W}{\partial n_x} = \frac{1}{2\pi} \int_L \Theta(\xi) \frac{\partial^2}{\partial n_x \partial n_\xi} \ln \frac{1}{|x - \xi|} dL = f(x), \quad x \in L. \quad (8.11)$$

Пусть векторы единичных нормалей n_x, n_ξ к контуру L в точках x и ξ имеют компоненты $n_x = (n_{x1}, n_{x2})$; $n_\xi = (n_{\xi1}, n_{\xi2})$. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial n_\xi} \ln \frac{1}{|x - \xi|} = n_{\xi1} \frac{x_1 - \xi_1}{|x - \xi|^2} + n_{\xi2} \frac{x_2 - \xi_2}{|x - \xi|^2}. \quad (8.12)$$

Отсюда получаем

$$L(x - \xi) = \frac{\partial^2}{\partial n_x \partial n_\xi} \ln \frac{1}{r} = \frac{2(\operatorname{grad} r, n_x)(\operatorname{grad} r, n_\xi) - (n_x, n_\xi)}{r^2}. \quad (8.13)$$

В [6] установлено, что интеграл в (8.11) существует в смысле Адамара. Если L — прямолинейный контур (рис. 8.1), то выражение (8.13) принимает вид

$$L(x - \xi) = \frac{2x_2^2}{r^4} - \frac{1}{r^2}.$$

Рассмотрим теперь следующее предельное значение:

$$\lim_{x_2 \rightarrow 0} \int_{-l}^l \left(\frac{2x_2^2}{r^4} - \frac{1}{r^2} \right) d\xi_1 = \lim_{x_2 \rightarrow 0} \left(\frac{\xi_1 - x_1}{r^2} - \frac{1}{x_2} \arctg \frac{\xi_1 - x_1}{x_2} + \frac{1}{x_2} \arctg \frac{\xi_1 - x_1}{x_2} \right) = \frac{1}{|\xi_1 - x_1|}_{-l}^l. \quad (8.14)$$

Если $x_1 \neq \pm l$, то в (8.11) существует конечное предельное значение интеграла, которое для постоянной плотности может быть вычислено с использованием формулы (8.14).

Пусть теперь L — криволинейный разомкнутый гладкий контур. Предположим, что уравнение кривой L задается следующим образом: $\xi_1 = \xi_1(s)$, $\xi_2 = \xi_2(s)$, $\alpha \leq s \leq \beta$. Для компонент нормали к L в точке ξ имеем $n_{\xi1} = \xi_2'(s)/D$; $n_{\xi2} = -\xi_1'(s)/D$; $D = D(s) = \sqrt{\xi_1'(s)^2 + \xi_2'(s)^2}$, $D \neq 0 \forall s$. Поместим начало координат в точку x и выберем в качестве оси Ox_2 нормаль n_x к кривой L в точке x . Предположим, что $x \notin L$. Запишем (8.12) в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial n_\xi} \ln \frac{1}{|x - \xi|} = n_{\xi1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \ln \frac{1}{|x - \xi|^2} + n_{\xi2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \ln \frac{1}{|x - \xi|^2}. \quad (8.15)$$

Компоненты нормали к L в точке ξ равны $n_{\xi1} = \xi_2'(s)/D$; $n_{\xi2} = -\xi_1'(s)/D$. Вычислим частные производные от (8.15) по x_1, x_2 . Воспользовавшись тем, что $\ln r$ является фундаменталь-

ным решением уравнения Лапласа и заменив дифференцирование по x_j дифференцированием по ξ_j ($j = 1, 2$) для производной по x_1 , получим

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial n_\xi} \ln \frac{1}{|x - \xi|} = \frac{\xi'_2(s)}{D} \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} \ln \frac{1}{|\xi - \xi'|^2} + \frac{\xi'_1(s)}{D} \frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \ln \frac{1}{|\xi - \xi'|^2}. \quad (8.16)$$

Аналогичное равенство получим для частной производной по x_2

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial n_\xi} \ln \frac{1}{|x - \xi|} = -\frac{\xi'_2(s)}{D} \frac{\partial^2}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} \ln \frac{1}{|\xi - \xi'|^2} - \frac{\xi'_1(s)}{D} \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} \ln \frac{1}{|\xi - \xi'|^2}. \quad (8.17)$$

Из (8.16) и (8.17) устанавливаем, что

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial n_\xi} \ln \frac{1}{r} = \frac{1}{D} \frac{d}{ds} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \ln \frac{1}{r}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial n_\xi} \ln \frac{1}{r} = -\frac{1}{D} \frac{d}{ds} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \ln \frac{1}{r}.$$

Если плотность потенциала двойного слоя дифференцируема и в концах дуги L обращается в нуль, то с учетом предыдущих равенств уравнению (8.11) можно придать следующую форму:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \Theta'(s) \left[n_{x1} \frac{\partial}{\partial x_2} \ln \frac{1}{|x - \xi|} - n_{x2} \frac{\partial}{\partial x_1} \ln \frac{1}{|x - \xi|} \right] ds = f(x). \quad (8.18)$$

При выводе уравнения (8.18) была осуществлена замена порядка дифференцирования и интегрирования; ее правомерность вытекает из условия $x \notin L$. В силу того, что сингулярные интегралы в (8.18) существуют в смысле Коши, то при $x \rightarrow x' \in L$ можно говорить о предельном значении интеграла.

Отметим еще одну возможность понижения порядка особенности в рассматриваемых гиперсингулярных интегралах. Предположим, что для численной реализации уравнения (8.11) используется разложение плотности в некоторый ряд, т. е. пусть

$$\Theta(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \Theta_i(s).$$

Вопросы сходимости решения обсуждены в работе В. А. Щербины [7]. Применим проекционный метод решения уравнения (8.11). При этом возникает необходимость вычисления двукратных интегралов

$$I_{km} = \int_{\alpha}^{\beta} \Theta_k(s_0) D(s_0) \left[\int_{\alpha}^{\beta} \Theta_m(s) \frac{\partial^2}{\partial n_x \partial n_\xi} \ln \frac{1}{|x - \xi|} D(s) ds \right] ds_0. \quad (8.19)$$

Предположим, что функции $\Theta_k(s)$ ($k = 1, 2, \dots$) при $s = \alpha$, $s = \beta$ обращаются в нуль. Преобразуем внутренний интеграл в (8.19) к форме (8.18). Получим

$$I_{km} = \int_{\alpha}^{\beta} \Theta_k(s_0) D(s_0) \left\{ \int_{\alpha}^{\beta} \Theta'_m(s) \left[n_{x1} \frac{\partial}{\partial x_2} \ln \frac{1}{|x - \xi|} - n_{x2} \frac{\partial}{\partial x_1} \ln \frac{1}{|x - \xi|} \right] ds \right\} ds_0. \quad (8.20)$$

Если рассмотреть I_{km} как двукратный несобственный интеграл, то он является сходящимся (для любой стягивающейся к особой точке последовательности подобластей). Внутренний интеграл в (8.20) сходится в смысле главного значения по Коши, следовательно, в I_{km} до-

пустима перемена порядка интегрирования. Заметим также, что ядру в интеграле (8.20) можно придать следующую форму:

$$S(x - \xi) = \frac{1}{D(s_0)} \frac{d}{ds_0} \ln \frac{1}{|x - \xi|}.$$

Осуществив интегрирование по частям, получим

$$I_{km} = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \int\limits_{\alpha}^{\beta} \Theta'_k(s_0) \Theta'_m(s) \ln \frac{1}{|x - \xi|} ds ds_0. \quad (8.21)$$

Подынтегральная функция в (8.21) имеет слабую особенность.

Таким образом, гиперсингулярный интеграл в (8.11) представлен в различных формах, которые могут быть использованы при численной реализации.

При численном определении интегралов типа Адамара криволинейный контур заменяют аппроксимирующими прямолинейными сегментами. Интеграл по прямолинейному сегменту может быть вычислен аналитически. Для повышения точности используют аппроксимацию контура элементами кривых второго порядка. Если использовать такую замену в уравнении с ядром, записанным в виде (8.13), то приходим к необходимости определения интегралов типа Коши на криволинейном контуре, что требует дополнительных аналитических преобразований. Если гиперсингулярное уравнение записано в форме (8.18), то такая аппроксимация контура позволит аналитически вычислить интегралы с сильной особенностью (интегралы по Адамару). Численно же будут определяться лишь интегралы от функций, имеющих слабую особенность.

Таким образом, показано, что рассматриваемое гиперсингулярное уравнение может быть представлено в эквивалентных формах

$$\frac{\partial W}{\partial n_x} = \frac{1}{2\pi} \int_L \Theta(\xi) \frac{\partial^2}{\partial n_x \partial n_\xi} \ln \frac{1}{|x - \xi|} dL = f(x), \quad x \in L;$$

$$\frac{\partial W}{\partial n_x} = \frac{1}{2\pi D(s_0)} \int_{\alpha}^{\beta} \Theta(\xi) \frac{d^2}{ds ds_0} \ln \frac{1}{|x - \xi|} ds = f(x), \quad x \in L;$$

$$\frac{\partial W}{\partial n_x} = \frac{1}{2\pi D(s_0)} \int_{\alpha}^{\beta} \Theta'(\xi) \frac{d}{ds_0} \ln \frac{1}{|x - \xi|} ds = f(x), \quad x \in L.$$

Здесь гиперсингулярные интегралы понимаются как соответствующие предельные значения. Последняя формула справедлива в предположении, что плотность потенциала двойного слоя дифференцируема и обращается в нуль в концах дуги L .

8.1.3. Вычисление конечной части интегралов по Адамару с постоянной плотностью

Наиболее важным для получения приемлемой точности при вычислении интегралов типа Адамара, как показано в [8], является вычисление конечной части таких интегралов. Здесь получены аналитические выражения конечной части по Адамару гиперсингулярных интегралов на произвольном гладком криволинейном контуре для постоянной плотности.

Общепринятой при применении метода граничных элементов в двумерных задачах является аппроксимация контура интегрирования ломаными линиями. Здесь также получено

строгое теоретическое подтверждение того факта, что такая аппроксимация дает линейную погрешность при вычислении интеграла по криволинейному контуру независимо от степени аппроксимации плотности. Предложены различные варианты квадратичной аппроксимации контура и аналитические выражения для интегралов по соответствующим кривым для различных степеней полиномов, аппроксимирующих плотности. Аналитические оценки подтверждают квадратичную сходимость при такой аппроксимации.

Пусть плотность $\Theta(s)$ на концах дуги L не обращается в нуль. В предположении, что $x' \notin L$, запишем интегральный оператор в (8.1) в виде

$$\frac{\partial W}{\partial n_x} = \int_{\alpha}^{\beta} \Theta(s) \frac{d}{ds} S(x' - \xi) ds. \quad (8.22)$$

где $\xi = \xi(s)$ ($\alpha \leq s \leq \beta$) — уравнение кривой L в параметрической форме.

Ядро интегрального оператора определено как

$$S(x' - \xi) = n_{x1} \frac{\partial}{\partial x_2} \ln \frac{1}{|x' - \xi|} + n_{x2} \frac{\partial}{\partial x_1} \ln \frac{1}{|x' - \xi|}.$$

Предположим, что функция $\Theta(s)$ дифференцируема на L . Осуществляя в (8.22) интегрирование по частям, получим

$$\frac{\partial W}{\partial n_x} = \Theta(s) S(x' - \xi)|_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} \Theta'(s) S(x' - \xi) ds. \quad (8.23)$$

Переходя в (8.23) к пределу при $x' \rightarrow x$, приходим к определению интеграла (8.22) в смысле Адамара [6]. Отметим, что формула (8.23) дает выражение конечной части гиперсингулярного интеграла по произвольному гладкому контуру.

Пусть $\Theta(s) = \Theta_0 = \text{const}$ на L . Из формулы (8.23) следует, что

$$\frac{\partial W}{\partial n_x} = \Theta_0 S(x - \xi)|_{\alpha}^{\beta}. \quad (8.24)$$

Формула (8.24) справедлива для любого контура интегрирования, представляющего собой простую разомкнутую дугу Ляпунова. В случае замкнутого контура из (8.24) получаем, что $\frac{\partial W}{\partial n_x} = 0$.

8.1.4. Вычисление конечной части интегралов по Адамару для различных аппроксимаций плотности

Пусть контур интегрирования представляет собой отрезок прямой, уравнение которой имеет вид $\xi_1 = \xi_1(s) = s$, $\xi_2 = \xi_2(s) = 0$, $\alpha \leq s \leq \beta$. Рассмотрим постоянную, линейную и квадратичную функции в качестве плотности гиперсингулярного интеграла по прямолинейному контуру:

$$\Theta_0(s) = \Theta_0; \quad \Theta_1(s) = s; \quad \Theta_2(s) = s^2. \quad (8.25)$$

Соответствующие этим плотностям гиперсингулярные интегралы обозначим через $\frac{\partial W_{li}}{\partial n_x}$ ($i = 0, 1, 2$). Получены аналитические формулы, справедливые для произвольных по-

стационарных x_1, x_2, n_{x1}, n_{x2} (т. е. можно рассматривать контур, состоящий из набора прямолинейных отрезков):

$$\frac{\partial W_{10}}{\partial \mathbf{n}_x} = -\Theta_0 \Xi(r, \mathbf{n}_x) \Big|_\alpha^\beta; \quad \frac{\partial W_{11}}{\partial \mathbf{n}_x} = \left[-s \Xi(r, \mathbf{n}_x) + V_{11}(r, \mathbf{n}_x) \right] \Big|_\alpha^\beta;$$

$$\frac{\partial W_{12}}{\partial \mathbf{n}_x} = \left[-s \Xi(r, \mathbf{n}_x) + V_{21}(r, \mathbf{n}_x) + 2x_0 V_{11}(r, \mathbf{n}_x) \right] \Big|_\alpha^\beta,$$

где

$$\Xi_1(r, \mathbf{n}_x) = \frac{1}{2\pi} \frac{n_{x1}x_2 + n_{x2}(s-x_1)}{r^2}; \quad V_{11}(r, \mathbf{n}_x) = \frac{1}{2\pi} \left[-n_{x1} \operatorname{arctg} \frac{s-x_1}{x_2} + n_{x2} \ln r \right];$$

$$V_{21}(r, \mathbf{n}_x) = -\frac{x_2}{\pi} \left[n_{x2} \operatorname{arctg} \frac{s-x_1}{x_2} + n_{x1} \ln r \right] + \frac{1}{\pi} n_{x2}(s-x_1); \quad r^2 = (s-x_1)^2 + x_2^2.$$

В особой области ($x_1 \in (\alpha, \beta)$; $x_2 \rightarrow 0$, $n_{x1} = 0$; $n_{x2} = 1$) имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial W_{10}}{\partial \mathbf{n}_x} \right)_0 &= \frac{1}{2\pi} \mu_0 \frac{1}{s-x_1} \Big|_\alpha^\beta; & \left(\frac{\partial W_{11}}{\partial \mathbf{n}_x} \right)_0 &= \frac{1}{2\pi} s \frac{1}{s-x_1} \Big|_\alpha^\beta + \frac{1}{2\pi} \ln |s-x_1| \Big|_\alpha^\beta; \\ \left(\frac{\partial W_{12}}{\partial \mathbf{n}_x} \right)_0 &= \frac{1}{2\pi} s^2 \frac{1}{s-x_1} \Big|_\alpha^\beta + \frac{x_1}{\pi} \ln |s-x_1| \Big|_\alpha^\beta + \frac{1}{\pi} (\beta-\alpha). \end{aligned}$$

Если плотность представляет собой линейную функцию, то при приближении контрольной точки x_1 к концу граничного элемента имеет место логарифмическая особенность. Если плотность — квадратичная функция, то соответствующее предельное значение будет конечным. Отсюда можно сделать вывод о неэффективности использования линейной аппроксимации плотности. Приемлемые результаты, тем не менее, могут быть получены, если плотность предполагается постоянной на каждом граничном элементе, что соответствует идеологии метода дискретных особенностей [9]. Дальнейшее повышение точности возможно лишь при применении квадратичных или кубических элементов. При этом для получения устойчивых схем следует предполагать, что плотность имеет непрерывную первую производную внутри области интегрирования.

Пусть L — парабола, определяемая уравнениями: $\xi_1 = \xi_1(s) = s$, $\xi_2 = \xi_2(s) = as^2$, $\alpha \leq s \leq \beta$ (рис. 8.3).

Гиперсингулярные интегралы, вычисленные по формуле (8.23) для плотностей (8.25), обозначим через $\frac{\partial W_{2i}}{\partial \mathbf{n}_x}$ ($i = 0, 1, 2$). Учитывая, что вектор нормали к параболе имеет компоненты

$$\mathbf{n}_x = (2as, -1) \frac{1}{\sqrt{1+4a^2s^2}},$$

и предполагая, что $x_2 = ax_1^2$, получим следующие аналитические выражения:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial W_{20}}{\partial n_x} \right)_0 &= Q \Theta_0 \Xi_2(r, n_x) \Big|_{\alpha}^{\beta}; \\ \left(\frac{\partial W_{21}}{\partial n_x} \right)_0 &= Q \left[s \Xi_2(r, n_x) - \ln |s - x_1| + \frac{1}{2} \ln \left| 1 + a^2 (s + x_1)^2 \right| \right] \Big|_{\alpha}^{\beta}; \\ \left(\frac{\partial W_{22}}{\partial n_x} \right)_0 &= Q \left[s^2 \Xi_2(r, n_x) - x_1 \left(2 \ln |s - x_1| + \ln \left| 1 + a^2 (s + x_1)^2 \right| \right) + \frac{2}{a} \operatorname{arctg} a(s + x_1) \right] \Big|_{\alpha}^{\beta}; \\ Q &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1+4a^2x_1^2}}; \quad \Xi_2(r, n_x) = \frac{1+2ax_1(s+x_1)}{(s-x_1)\left[1+a^2(s+x_1)^2\right]}. \end{aligned} \quad (8.26)$$

Проведем оценку погрешности, возникающей при аппроксимации параболы линейными элементами. Заменим на отрезке $[\alpha, \beta]$ параболу $y = ax^2$ линейным элементом, представляющим собой отрезок касательной $y = y_0 + 2ax_0(x - x_0)$ в точке $(x_0, y_0 = ax_0^2)$. Отметим, что единичные положительные нормали к параболе и прямой в этой точке совпадают (см. рис. 8.3).

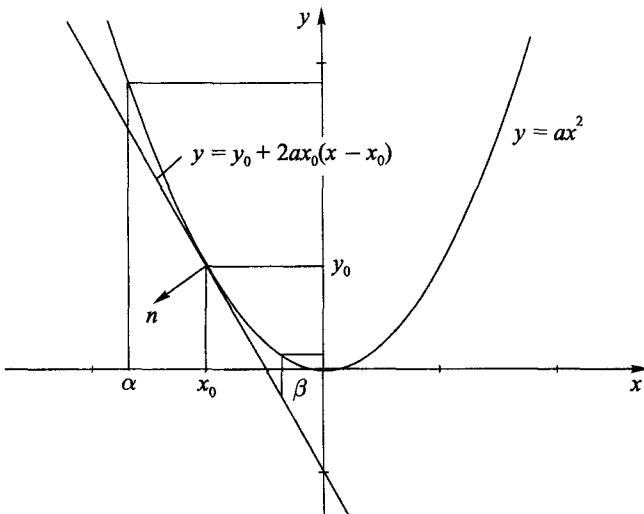


Рис. 8.3. Аппроксимация параболического контура

Вычислим по формуле (8.23) аналитическое выражение конечной части по Адамару гиперсингулярного интеграла по линейному элементу

$$H_1 = \frac{\Theta(x)}{2\pi\sqrt{1+4a^2x_0^2}} \frac{1}{x - x_0} \Big|_{\alpha}^{\beta}.$$

Как следует из формул (8.26), соответствующее значение для параболического элемента будет

$$H_2 = \frac{\Theta(x)}{2\pi\sqrt{1+4a^2x_0^2}} \left[\frac{1}{x-x_0} - \frac{a^2(x+x_0)}{1+a^2(x+x_0)^2} \right]_{\alpha}^{\beta}.$$

Оценим разность $\Delta H = H_2 - H_1$. Получим

$$H_2 - H_1 = \frac{\Theta(x)}{2\pi\sqrt{1+4a^2x_0^2}} \left[\frac{a^2(x+x_0)}{1+a^2(x+x_0)^2} \right]_{\alpha}^{\beta} = (\beta - \alpha) g(\alpha, \beta, x_0) + O(\beta - \alpha)^2,$$

где функция

$$g(\alpha, \beta, x_0) = C \frac{1+a^2(\beta+x_0)(\alpha+x_0)}{\left[1+a^2(\beta+x_0)^2\right]\left[1+a^2(\alpha+x_0)^2\right]}, \quad C = \frac{a^2\Theta(\beta)}{2\pi\sqrt{1+4a^2x_0^2}}$$

является ограниченной.

Видно, что рассматриваемая разность ΔH линейно зависит от $\Delta l = \beta - \alpha$. Аналогичная оценка может быть получена для сингулярных составляющих в (8.23), если плотности определяются по формулам (8.25). Следовательно, замена параболического элемента линейным при вычислении гиперсингулярных интегралов приводит к линейной погрешности. Таким образом, повышение лишь степени аппроксимации плотности не приводит к увеличению точности вычисления гиперсингулярных интегралов, если не повышать степень аппроксимации контура.

В монографии С. М. Белоцерковского, И. К. Либанова [9] при вычислении гиперсингулярных интегралов область интегрирования разбивается на малые подобласти (граничные элементы), внутри которых предполагается, что плотность $\Theta(s)$ постоянна. Возникающая при такой замене погрешность при специальном выборе контрольных точек [9, с. 32] может быть оценена как $O(\Delta l \ln \Delta l)$, где Δl — длина граничного элемента. Рассмотрим случай, когда плотность линейно изменяется внутри элемента. С помощью формул, полученных выше, устанавливаем, что погрешность вычислений будет равна $O(\Delta l)$ на произвольном гладком контуре интегрирования. Таким образом, введение линейных элементов не позволяет существенно повысить точность вычисления гиперсингулярных интегралов.

Пусть теперь плотность $\Theta(s)$ является квадратичной функцией на элементе, а контур интегрирования представляет собой отрезок прямой линии. Обозначим через $\vartheta(x) = \vartheta(x_1, x_2)$ разность между точным и приближенным значениями $\frac{\partial W}{\partial \eta_x}$. Предположим, что функция $\Theta(s)$ на i -м элементе представима в следующем виде:

$$\Theta(s) = \Theta_o^i + \Theta_1^i(s-s_0^i) + \Theta_2^i(s-s_0^i)^2 + \Theta_3^i(s-s_0^i)^3. \quad (8.27)$$

Обозначим $\alpha_0 = \alpha$, $\alpha_N = \beta$. Пусть $x_1 \in [\alpha_{j-1}, \alpha_j]$. Тогда

$$\vartheta(x_1, 0) = \sum_{i=1, i \neq j}^N \Theta_3^i \int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} \frac{(s-s_0^i)^3}{s-x_1} ds + \Theta_3^j \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} (s-x_1)^2 ds = O(\Delta l^2).$$

Такая оценка справедлива, если функция $\Theta(s)$ представима в виде (8.27).

Пусть теперь контур интегрирования представляет собой гладкую разомкнутую дугу, аппроксимированную линейными отрезками. Выше установлено, что разность гиперсингулярных интегралов, вычисленных по параболическому и линейному элементам, будет линейно зависеть от Δl . Таким образом, если контур интегрирования аппроксимирован на каждом элементе линейными элементами, а плотность — квадратичными функциями, то точность вычисления гиперсингулярных интегралов остается линейной функцией Δl .

8.2. Интегралы в смысле конечной части по Адамару в пространственных задачах

8.2.1. Вычисление нормальной производной гармонического потенциала двойного слоя по плоской области

Рассмотрим потенциал двойного слоя

$$w = \iint_S \Theta(\xi) \frac{\partial}{\partial N} \left(\frac{1}{|x - \xi|} \right) dS_\xi.$$

Через n и N будем обозначать единичные нормали к S в точках x и ξ .

Пусть область интегрирования S представляет собой плоский прямоугольник $S = \{[-b, b] \times [-l, l]\}$. Предположим, что функция $\Theta(\xi)$ имеет непрерывные частные производные, удовлетворяющие условию Гельдера всюду внутри S . Пусть $x \notin S, x \notin l$. Тогда нормальную производную потенциала двойного слоя можно представить в виде

$$I(x) = \frac{\partial w}{\partial n} = \iint_S \Theta(\xi) \frac{\partial^2}{\partial n \partial N} \frac{1}{|x - \xi|} dS_\xi = \int_{-b}^b \int_{-l}^l \Theta(\xi) \left[\frac{1}{r^3} - \frac{3x_3^2}{r^5} \right] d\xi_1 d\xi_2, \quad (8.28)$$

$$r = \sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + x_3^2}.$$

Интеграл в правой части (8.28) существует в обычном смысле при $x \notin S$ ($x_3 \neq 0$).

Пусть $\Theta(\xi) = \Theta_0 = \text{const}$ на $S, x \notin S$. Тогда из (8.28) получим

$$I(x) = \Theta_0 \int_{-b}^b \int_{-l}^l \left[\frac{1}{r^3} - \frac{3x_3^2}{r^5} \right] d\xi_1 d\xi_2.$$

Вычисляя этот интеграл аналитически и переходя к пределу при $x_3 \rightarrow 0$, приходим к следующей формуле:

$$I(x) = \Theta_0 L(x),$$

$$L(x) = \left[-\frac{\sqrt{(x_1 - b)^2 + (x_2 - l)^2}}{(x_1 - b)(x_2 - l)} + \frac{\sqrt{(x_1 - b)^2 + (x_2 + l)^2}}{(x_1 - b)(x_2 + l)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{(x_1 + b)^2 + (x_2 - l)^2}}{(x_1 + b)(x_2 - l)} - \frac{\sqrt{(x_1 + b)^2 + (x_2 + l)^2}}{(x_1 + b)(x_2 + l)} \right]. \quad (8.29)$$

Выражение (8.29) совпадает с приведенной в [9] формулой (6.4.16), которая получена формальным сведением двойного интеграла в (8.28) при $x_3 = 0$ к повторному.

Конечной частью по Адамару при $x \in S$ интеграла (8.28) будем называть следующий предел:

$$I(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2\pi} \iint_S \Theta(\xi) \frac{\partial^2}{\partial n \partial N} \frac{1}{|x - \xi|} dS_\xi - \frac{2\Theta(x)}{\varepsilon} \right], \quad (8.30)$$

где $S^* = S \setminus S^0$, а S^0 представляет собой окружность радиуса ε с центром в точке x .

Если $\Theta(\xi) = \Theta_0 = \text{const}$ на S , то, вычисляя аналитически интеграл в (8.30) по области $S^* = S \setminus S^0$, получим

$$I(x) = \Theta_0 L(x) + \frac{2\Theta_0}{\varepsilon}.$$

Из вышеизложенного ясно, что при $\Theta(\xi) = \Theta_0 = \text{const}$ предельные значения, полученные по формулам (8.28) при $x_3 \rightarrow 0$ и (8.30) — при $\varepsilon \rightarrow 0$, совпадают. Пусть $\Theta(\xi) \neq \text{const}$. Преобразуем интегралы в (8.28) и (8.30) следующим образом:

$$I(x, \delta) = \Theta_0 L(x, \delta) + \Theta'_{x_1}(x) A(x, \delta) + \Theta'_{x_2}(x) B(x, \delta) + R(x, \delta).$$

Здесь $\delta = x_3$, если рассматривается предел в выражении (8.28), и $\delta = \varepsilon$, если рассматривается предел в выражении (8.30). Выше было показано, что предельные значения величины $L(x, \delta)$ при $x_3 \rightarrow 0$ и при $\varepsilon \rightarrow 0$ совпадают. Аналогично доказывается, что предельные значения величин $A(x, \delta)$, $B(x, \delta)$, и $R(x, \delta)$ также совпадают, если производные функции $\Theta(\xi)$ удовлетворяют условию Гельдера.

8.2.2. Вычисление нормальной производной потенциала двойного слоя на разомкнутой поверхности Ляпунова

При численной реализации гиперсингулярных уравнений методом граничных элементов возникает необходимость аппроксимации поверхности интегрирования. При этом остается неисследованным: будут ли существовать рассматриваемые интегралы на аппроксимированной поверхности и какая при этом возникнет погрешность. Здесь рассмотрена аппроксимация поверхности интегрирования плоскими касательными элементами. Установлено, что существуют конечные предельные значения рассматриваемых гиперсингулярных интегралов на аппроксимирующих элементах. Кроме того, установлено, что из сингулярного интеграла, представляющего собой нормальную производную потенциала двойного слоя по элементу поверхности, можно выделить слагаемое с наиболее сильной сингулярностью (гиперсингулярное), и это слагаемое является нормальной производной потенциала двойного слоя, которая вычисляется именно по соответствующему элементу касательной плоскости.

В [8] доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $S \in \Lambda_1(1)$; Θ — непрерывная на S функция; R — величина, меньшая или равная радиусу сферы Ляпунова для поверхности S ; $\sigma_0(x, R)$ — круг радиуса R , лежащий на касательной в точке x к поверхности S плоскости; n и N — единичные нормали

к S в точках x и ξ , $x' = x + \varepsilon_1 n$. Для того чтобы существовало конечное предельное значение нормальной производной потенциала двойного слоя на поверхности S

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \iint_S \Theta(\xi) \frac{\partial^2}{\partial n \partial N} \frac{1}{|x' - \xi|} dS_\xi,$$

необходимо и достаточно, чтобы существовало конечное предельное значение нормальной производной потенциала двойного слоя на касательной к S плоскости

$$\frac{\partial w_0}{\partial n} = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \iint_{\sigma_0(x, R)} \Theta(\xi) \frac{\partial^2}{\partial n \partial N} \frac{1}{|x' - \xi|} dS_\xi.$$

В ходе доказательства установлено, что наиболее сильная сингулярность, присутствующая в интеграле с ядром типа нормальной производной потенциала двойного слоя, представляет собой нормальную производную потенциала двойного слоя, вычисленную по элементу касательной плоскости, содержащему точку наблюдения x .

Отметим, что предельное значение нормальной производной потенциала двойного слоя по элементу касательной плоскости в точке x равно прямому значению нормальной производной потенциала двойного слоя, понимаемому в смысле конечной части по Адамару (8.30), где S^0 представляет собой окружность радиуса δ с центром в точке x .

Установим, при каких условиях предельное значение нормальной производной потенциала двойного слоя $\partial w_0 / \partial n$ при $x_3 \rightarrow 0$ конечно на касательной плоскости. Необходимость такого исследования диктуется требованиями конечности и непрерывности рассматриваемой нормальной производной в точках коллокации при применении метода граничных элементов. Чтобы удовлетворить этим требованиям, применяются различные стратегии [10, 11]. Здесь исследован случай внутренней точки коллокации и установлено, каким требованиям должна удовлетворять плотность.

В [10] доказана теорема.

Теорема 2. Пусть Θ , S , $\sigma_0(x, R)$ определяются так же, как в теореме 1. Если условие Ляпунова

$$\left| \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (\Theta - \Theta_0) d\phi \right| < a\rho^{1+\nu}; \quad 0 < \nu$$

удовлетворено, то предельное значение нормальной производной потенциала двойного слоя

$$w_0 = \iint_{\sigma_0} \Theta(\xi) \frac{\cos(rN)}{r^2} d\sigma$$

в точке x конечно, если $R > \delta \geq 0$.

Отсюда следует, что если используются граничные элементы с постоянной плотностью, то рассматриваемые предельные значения нормальной производной потенциала двойного слоя ограничены всюду внутри граничного элемента и неограниченно возрастают при приближении к границе элемента.

8.2.3. Эквивалентность интегральных представлений нормальной производной потенциала двойного слоя

При некоторых предположениях относительно плотности потенциала двойного слоя можно получить представление для его нормальной производной в виде интеграла, существующего в смысле главного значения по Коши.

Воспользуемся здесь гидродинамическими аналогиями. Пусть S — разомкнутая поверхность Ляпунова, l — контур, ее ограничивающий. Допустим, что на S задана непрерывная вектор-функция Ω , характеризующая распределение завихренности. Тогда всюду вне S поле скоростей, индуцированное Ω , является безвихревым и, следовательно, обладает потенциалом. Получим выражение для этого потенциала в явном виде.

Рассмотрим потенциал двойного слоя

$$\varphi(x) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \Theta(\xi) \frac{\partial}{\partial N} \left(\frac{1}{|x - \xi|} \right) d\sigma. \quad (8.31)$$

В работе [13] доказано, что

$$\begin{aligned} \varphi_i(x) &= \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot}_i \iint_S \frac{D\Theta \times N}{r} d\sigma, \\ \varphi_{,i}(x) &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \iint_S [\cos(N, x_j) D_{,j} \Theta - \cos(N, x_i) D_{,i} \Theta] r^{-1} d\sigma - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial x_k} \iint_S [\cos(N, x_i) D_{,k} \Theta - \cos(N, x_k) D_{,i} \Theta] r^{-1} d\sigma + \int_l \Theta [(1/r), \xi_k] d\xi_j - (1/r), \xi_j d\xi_k \right]. \end{aligned} \quad (8.32)$$

Если считать, что функция Θ вне S доопределена постоянной вдоль нормали к S , то $D\Theta = \operatorname{grad}\Theta$. Таким образом, если $\Omega = D\Theta \times N$, то

$$\operatorname{grad}\varphi(x) = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \iint_S \frac{\Omega}{r} d\sigma,$$

т. е. поле скоростей V , индуцированное распределенной по поверхности S завихренностью Ω , являясь всюду вне S безвихревым, обладает потенциалом в виде (8.31). Отсюда также следует, что скорость V может быть представлена в одной из следующих эквивалентных форм [12]:

$$V = \frac{1}{4\pi} \iint_S \Theta(\xi) \frac{\partial}{\partial N} \left(\frac{1}{|x - \xi|} \right) d\sigma, \quad (8.33)$$

$$V = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \iint_S \frac{\Omega}{r} d\sigma = \frac{1}{4\pi} \iint_S [\operatorname{grad}(1/r) \times \Omega] d\sigma = \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\Omega \times r}{r^3} d\sigma,$$

$$V = \frac{1}{4\pi} \iint_S D\Theta \frac{\partial}{\partial N} \left(\frac{1}{r} \right) d\sigma - \frac{1}{4\pi} \iint_S N(D\Theta, \operatorname{grad}(1/r)) d\sigma.$$

Третье уравнение (8.33) получается из второго применением известной формулы для двойного векторного произведения.

Если плотность Θ обращается в нуль на контуре l , ограничивающем поверхность S , то нормальная производная потенциала двойного слоя может быть представлена как

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{1}{4\pi} \iint_S \Theta \frac{\partial^2}{\partial N \partial n} \left(\frac{1}{r} \right) d\sigma = \frac{1}{4\pi} \iint_S \Theta \frac{3 \cos(r, n) \cos(r, N) - \cos(n, N)}{r^3} d\sigma, \quad (8.34)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{(\Omega \times r, n)}{r^3} d\sigma, \quad \Omega = \operatorname{grad} \Theta \times N, \quad (8.35)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{1}{4\pi} \iint_S (\operatorname{grad} \Theta, n) \frac{\partial}{\partial N} \left(\frac{1}{r} \right) d\sigma - \frac{1}{4\pi} \iint_S (n, N) (\operatorname{grad} \Theta, \operatorname{grad}(1/r)) d\sigma. \quad (8.36)$$

Далее будет показано, что одна из дискретных форм уравнения (8.34) представляет собой систему алгебраических уравнений, используемую при решении задач аэродинамики методом дискретных вихрей. Отметим, что при выводе уравнений (8.35), (8.36) предполагалось, что плотность Θ обращается в нуль на контуре, ограничивающем S , и является дифференцируемой.

В случае, когда область S является плоской, нормальную производную потенциала двойного слоя можно формально представить в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{1}{4\pi} \Delta_x \iint_S \Theta \left(\frac{1}{|x - \xi|} \right) d\sigma_\xi.$$

В работах [10, 13, 14] эти уравнения названы интегральными уравнениями типа ньютоновского потенциала.

8.2.4. Вычисление интегралов в смысле конечного значения по Адамару по плоскому многоугольнику.

Для численного решения сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений область интегрирования разбивают на малые подобласти. Предполагается, что плотность соответствующего интеграла в них является известной функцией. Подобласть, содержащая «точку наблюдения», называют особой. При вычислении интегралов по неособым подобластям можно применять известные квадратурные формулы. Однако их использование в особых подобластях невозможно либо приводит к значительным вычислительным погрешностям. Поэтому необходимо иметь аналитические формулы для вычисления рассматриваемых интегралов с заданной плотностью по определенным областям. Ниже получены аналитические формулы для вычисления этих интегралов в трехмерных задачах.

Вычислим нормальную производную гармонического потенциала двойного слоя, понимаемую в смысле конечной части по Адамару. Воспользовавшись формулами (8.32), (8.35), запишем

$$\iint_S \Theta(\xi) \frac{\partial^2}{\partial n \partial N} \left(\frac{1}{r} \right) dS_\xi = \iint_S \frac{((\operatorname{grad} \Theta \times N) \times r, n)}{r^3} dS_\xi - \int_l \Theta \left(\operatorname{grad} \frac{1}{r} \times n, dl \right). \quad (8.37)$$

В [12] показано, что интегралы в правой части (8.37) существуют в обычном смысле, когда $x \notin S$ и в смысле главного значения по Коши при $x \in S; x \notin l$.

Пусть $\Theta(\xi) = \Theta_0 = \text{const}$ на S . Тогда из (8.37) получим

$$\iint_S \Theta(\xi) \frac{\partial^2}{\partial n \partial N} \frac{1}{r} dS_\xi = - \int_l \Theta \left(\operatorname{grad} \frac{1}{r} \times n, dl \right). \quad (8.38)$$

Рассмотрим сначала случай, когда область S представляет собой плоский прямоугольник $S = \{[-b, b] \times [-l, l]\}$. Из (8.38) следует формальное равенство

$$I(x) = \Theta_0 \int \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{1}{r} \right) d\xi_2 - \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{1}{r} \right) d\xi_1 \right] = \Theta_0 \int_{-b-l}^b \int_{-l}^l \frac{d\xi_1 d\xi_2}{\left[(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}. \quad (8.39)$$

Это равенство понимаем в том смысле, что его правая часть представляет собой соответствующий предел. Вычисляя в (8.39) однократный интеграл, приходим к следующей формуле:

$$\begin{aligned} I(x) = \Theta_0 & \left[-\frac{\sqrt{(x_1 - b)^2 + (x_2 - l)^2}}{(x_1 - b)(x_2 - l)} + \frac{\sqrt{(x_1 - b)^2 + (x_2 + l)^2}}{(x_1 - b)(x_2 + l)} + \right. \\ & \left. + \frac{\sqrt{(x_1 + b)^2 + (x_2 - l)^2}}{(x_1 + b)(x_2 - l)} - \frac{\sqrt{(x_1 + b)^2 + (x_2 + l)^2}}{(x_1 + b)(x_2 + l)} \right]. \end{aligned} \quad (8.40)$$

Выражение (8.40) совпадает с приведенной в [9] формулой (6.4.16), которая получена формальным сведением двойного интеграла в (8.39) к повторному.

Пусть S — многоугольник, лежащий в плоскости xOy (рис. 8.4) и $\Theta(\xi) = \Theta_0 = \text{const}$ на S .

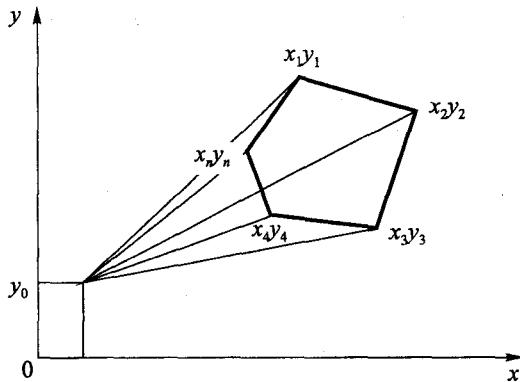


Рис. 8.4. Вычисление интеграла по Адамару по плоскому многоугольнику

Получим формулы для вычисления $I(x)$ по S для произвольной точки внутри S . Для определения предельного значения рассматриваемого интеграла будем пользоваться формулой

$$I(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I(x') = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_S \Theta(\xi) \frac{\partial^2}{\partial n \partial N} \frac{1}{|x' - \xi|} dS_\xi, \quad x' \notin S,$$

предполагая, что точка $x' = x + \varepsilon n$ лежит на нормали n к S в точке x (нормаль направлена к оси Oz). Обозначим через (x_i, y_i) ($i = 1, 2, \dots, n$) координаты вершин n -угольника S (см. рис. 8.4). Имеем

$$I(x') = \Theta_0 \iint_S \left[-\frac{1}{r_i^3} + \frac{3z^2}{r_i^5} \right] dS,$$

$$r_1 = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2}.$$

Введем полярную систему координат с центром в точке $\mathbf{m}_0 = (x_0, y_0, 0)$:

$$x - x_0 = \rho \cos \varphi, y - y_0 = \rho \sin \varphi.$$

Тогда интеграл $I(\mathbf{x}')$ может быть записан в виде

$$I(\mathbf{x}') = \Theta_0 \sum_{i=1}^n \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} \left[-\frac{1}{r_1^3} + \frac{3z^2}{r_1^5} \right] \rho d\rho,$$

где $\varphi_i = \arcsin \frac{y_i - y_0}{r_{i0}}$; $r_{i0} = \sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 + z^2}$; $i = 1, 2, \dots, n$; $\varphi_{n+1} = \varphi_1$;

$$\rho_i(\varphi) = c_i / \sin(\varphi - \varphi_i^*); c_i = [(y_i - y_0)(x_{i+1} - x_i) - (x_i - x_0)(y_{i+1} - y_i)] / r_{i,i+1};$$

$$\varphi_i^* = \arcsin \frac{y_{i+1} - y_i}{r_{i+1,i}}; r_{i+1,i} = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2 + z^2}; y_{n+1} = y_1; x_{n+1} = x_1.$$

Таким образом, $I(\mathbf{x}')$ можно представить в виде суммы $I(\mathbf{x}') = \Theta_0 \sum_{i=1}^n I_i(\mathbf{x}')$, в которой $I_i(\mathbf{x}')$ представляют собой интегралы по треугольным областям с вершинами в точках (x_0, y_0, z) ; $(x_i, y_i, 0)$; $(x_{i+1}, y_{i+1}, 0)$.

Вычислим интеграл $I_i(\mathbf{x}')$

$$I_i(\mathbf{x}') = \Theta_0 \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} \left[-\frac{1}{r_1^3} + \frac{3z^2}{r_1^5} \right] \rho d\rho = \Theta_0 \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \frac{\rho_i^2(\varphi)}{\left(\sqrt{\rho_i^2(\varphi) + z^2} \right)^3} d\varphi. \quad (8.41)$$

После того, как взят внутренний интеграл по ρ , в (8.41) можно перейти к пределу при $z \rightarrow 0$. Подставляя в (8.41) значения $\rho(\varphi)$, получим

$$I_i(\mathbf{x}') = \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \frac{\Theta_0 c_i^2 \sin(\varphi - \varphi_i^*) d\varphi}{\left(\sqrt{c_i^2 + z^2 - z^2 \cos^2(\varphi - \varphi_i^*)} \right)^3} = - \left. \frac{\Theta_0 c_i^2 \cos(\varphi - \varphi_i^*)}{(c_i^2 + z^2) \sqrt{c_i^2 + z^2 \sin^2(\varphi - \varphi_i^*)}} \right|_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} = \\ = \Theta_0 \left[\frac{b_{1i} a_{1i}}{\left(a_{1i}^2 + z^2 r_{i+1,i} \right) \sqrt{r_{i+1,0}^2 + z^2}} - \frac{b_{0i} a_{0i}}{\left(a_{0i}^2 + z^2 r_i \right) \sqrt{r_{i0}^2 + z^2}} \right], \quad (8.42)$$

где $b_{ki} = (y_{i+k} - y_0)(y_{i+1} - y_i) + (x_{i+k} - x_0)(x_{i+1} - x_i)$.

Отметим, что формула (8.42) совпадает с полученным в [15, 16] выражением для «скользящего» потока, т. е. вычисленной по формуле Био-Савара скорости, индуцированной вихревым отрезком с координатами $(x_i, y_i, 0)$; $(x_{i+1}, y_{i+1}, 0)$ в точке (x_0, y_0, z) . Таким образом, здесь дано строгое математическое обоснование приведенной в [15] формулы.

Рассмотрим случай, когда область S представляет собой прямоугольник, вершинами которого являются точки $A_1 = (x_1, y_1)$; $A_2 = (x_1, y_2)$ ($y_2 > y_1$), $A_3 = (x_2, y_2)$ ($x_2 > x_1$), $A_4 = (x_2, y_1)$. Подставим эти координаты в (8.42) и просуммируем по i , а затем перейдем к пределу при $z \rightarrow 0$. Для $\mathbf{m}_0 \notin S$ будем иметь

$$I(\mathbf{m}_0) = \Theta_0 [V_{12} + V_{23} + V_{34} + V_{41}]. \quad (8.43)$$

Здесь выражения V_{ij} определяются формулами (8.42) при $z = 0$ и совпадают с приведенными в монографии [9] (формула (9.6.22)).

$$\begin{aligned} V_{12} &= \frac{1}{x_1 - x_0} \left[\frac{y_2 - y_0}{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2}} - \frac{y_1 - y_0}{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}} \right]; \\ V_{23} &= -\frac{1}{y_2 - y_0} \left[\frac{x_2 - x_0}{\sqrt{(x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2}} - \frac{x_1 - x_0}{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2}} \right]; \\ V_{34} &= -\frac{1}{x_2 - x_0} \left[\frac{y_2 - y_0}{\sqrt{(x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2}} - \frac{y_1 - y_0}{\sqrt{(x_2 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}} \right]; \\ V_{41} &= \frac{1}{y_1 - y_0} \left[\frac{x_2 - x_0}{\sqrt{(x_2 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}} - \frac{x_1 - x_0}{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}} \right]. \end{aligned} \quad (8.44)$$

Формула (8.43) с учетом (8.44) легко преобразуется к виду (8.40).

Таким образом, получены аналитические формулы для вычисления интегралов типа Адамара, возникающих при рассмотрении нормальной производной гармонического потенциала двойного слоя, при произвольном положении особой точки внутри области интегрирования.

Получим аналитические формулы для вычисления нормальной производной потенциала двойного слоя с заданной плотностью по плоскому n -угольнику, произвольно ориентированному в пространстве. Выше было показано, что искомый интеграл в точке $\mathbf{x} = (x_0, y_0, z_0)$ можно представить в виде

$$I(\mathbf{x}) = \Theta_0 \sum_{i=1}^n J_i(\mathbf{x}). \quad (8.45)$$

Слагаемые $J_i(\mathbf{x})$ представляют собой интегралы типа

$$J_i(\mathbf{x}) = \int_{l_i} \left(\operatorname{grad} \frac{1}{r} \times \mathbf{n} \right) \cdot d\mathbf{l}_i,$$

где \mathbf{l}_i — отрезок прямой, соединяющий две вершины M_i и M_{i+1} рассматриваемого n -угольника.

Пусть $M_i = (x_i, y_i, z_i)$; $M_{i+1} = (x_{i+1}, y_{i+1}, z_{i+1})$. Запишем уравнение прямой l_i в параметрической форме

$$x = x_{i+1} + (x_{i+1} - x_i)t; \quad y = y_{i+1} + (y_{i+1} - y_i)t; \quad z = z_{i+1} + (z_{i+1} - z_i)t.$$

Будем использовать векторы

$$\mathbf{r}_k = (x_k - x_0, y_k - y_0, z_k - z_0); \quad \mathbf{l}_i = (x_{i+1} - x_i, y_{i+1} - y_i, z_{i+1} - z_i); \quad \mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3).$$

Тогда

$$\left(\operatorname{grad} \frac{1}{r} \times \mathbf{n} \right) \cdot d\mathbf{l}_i = \frac{1}{r^3} \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix},$$

где $dx = (x_{i+1} - x_i)dt$; $dy = (y_{i+1} - y_i)dt$; $dz = (z_{i+1} - z_i)dt$.

Проинтегрировав по t в пределах от 0 до 1, получим следующую формулу:

$$J_i(\mathbf{x}) = \frac{[(\mathbf{l}_i \times \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{n}]}{\|(\mathbf{l}_i \times \mathbf{r}_i)\|^2} \left[\frac{(\mathbf{l}_i \cdot \mathbf{r}_{i+1})}{r_{i+1}} - \frac{(\mathbf{l}_i \cdot \mathbf{r}_i)}{r_i} \right]; \quad r_k = |\mathbf{r}_k|. \quad (8.46)$$

С помощью формул (8.45)–(8.46) можно вычислить интеграл по плоскому n -угольнику, произвольно ориентированному в пространстве.

8.2.5. Вычисление гиперсингулярных интегралов с дифференцируемой плотностью

В предыдущем подразделе получены аналитические формулы для вычисления гиперсингулярных интегралов с постоянной плотностью. Рассмотрим теперь случай, когда плотность является изменяющейся дифференцируемой функцией внутри рассматриваемой подобласти.

Будем вычислять интеграл

$$I(\mathbf{m}_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \Theta(\mathbf{m}) \frac{\partial^2}{\partial n \partial N} \left(\frac{1}{|\mathbf{m} - \mathbf{m}_0|} \right) dS, \quad (8.47)$$

где \mathbf{n}, N — нормали к поверхности S в точках \mathbf{m}_0 и \mathbf{m} соответственно.

Допустим, что параметрические уравнения поверхности S имеют вид $x = x(\xi, \eta); y = y(\xi, \eta); z = z(\xi, \eta); -a \leq \xi \leq a; -b \leq \eta \leq b$. Будем считать, что область интегрирования S разбита на ряд подобластей $S_k (k = 1, 2, \dots, N_s)$ координатными линиями ортогональной системы координат. В каждой подобласти введем свою локальную декартову систему координат так, чтобы нормаль в центре подобласти совпадала с осью $0z$. Предположим, что функция $\Theta(\xi, \eta)$ имеет в подобластях $S_k (k = 1, 2, \dots, N_s)$ вторые производные.

Получим выражение для ядра интегрального оператора в (8.47)

$$K(\mathbf{m}, \mathbf{m}_0) = \frac{\partial^2}{\partial n \partial N} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{3(z - z_0)(\mathbf{n}, \mathbf{r})}{r^5} - \frac{\cos \gamma_0}{r^3},$$

где $\mathbf{n} = (\cos \alpha_0, \cos \beta_0, \cos \gamma_0)$.

Заменим интегралы в (8.47) приближенными выражениями. Предположим, что в каждой подобласти коэффициенты Ламе $d_x^k, d_y^k (k = 1, 2, \dots, N_s)$ постоянны.

$$I(\mathbf{m}_0) \approx \sum_{k=1}^{N_s} \int_{-d_x^k}^{d_x^k} \int_{-d_y^k}^{d_y^k} \Theta(\mathbf{m}) \left[\frac{3z_{\rho}^k(\mathbf{n}^k, \mathbf{r})}{r^5} - \frac{\cos \gamma_0^k}{r^3} \right] d\xi d\eta.$$

Опуская для удобства индекс k , представим слагаемые в этом приближенном равенстве в виде

$$\begin{aligned} J &= \int_{-d_x}^{d_x} \int_{-d_y}^{d_y} \Theta(\mathbf{m}) K(\mathbf{m}, \mathbf{m}_0) d\xi d\eta = \Theta(\xi_0, \eta_0) I(\xi_0, \eta_0) + \Theta'_\xi(\xi_0, \eta_0) I_x(\xi_0, \eta_0) + \\ &+ \Theta'_\eta(\xi_0, \eta_0) I_y(\xi_0, \eta_0) + 0,5 \Theta''_{\xi^2}(\xi_0, \eta_0) I_{xx}(\xi_0, \eta_0) + R(\xi_0, \eta_0). \end{aligned}$$

Здесь выражение $R(\xi_0, \eta_0)$ определяется соотношением

$$R(\xi_0, \eta_0) = \int_{-d_x}^{d_x} \int_{-d_y}^{d_y} D_2 \Theta(m) K(m, m_0) d\xi d\eta, \quad (8.48)$$

где

$$\begin{aligned} D_2 \Theta(m) &= \Theta(\xi, \eta) - \Theta(\xi_0, \eta_0) - \Theta'_\xi(\xi_0, \eta_0)(\xi - \xi_0) - \\ &- \Theta'_\eta(\xi_0, \eta_0)(\eta - \eta_0) - 0.5 \Theta''_{\xi^2}(\xi_0, \eta_0)(\xi - \xi_0)^2. \end{aligned}$$

Величины $I_0(\xi_0, \eta_0)$, $I_x(\xi_0, \eta_0)$, $I_y(\xi_0, \eta_0)$, $I_{xx}(\xi_0, \eta_0)$ вычисляются аналитически по формулам $I_\tau(\xi_0, \eta_0) = \cos \alpha_0 I_\alpha^\tau + \cos \beta_0 I_\beta^\tau + \cos \gamma_0 I_\gamma^\tau$, ($\tau = 0, x, y, xx$), в которых

$$\begin{aligned} I_\alpha^0 &= -z_0 \frac{y}{(x^2 + z_0^2)r}, \quad I_\beta^0 = -z_0 \frac{x}{(y^2 + z_0^2)r}, \quad I_\gamma^0 = \frac{xy}{r} \left[\frac{1}{y^2 + z_0^2} + \frac{1}{x^2 + z_0^2} \right]; \\ I_\alpha^x &= z_0 \frac{xy}{(x^2 + z_0^2)r} - \operatorname{arctg} \frac{xy}{z_0 r}, \quad I_\beta^x = -z_0 / r, \quad I_\gamma^x = z_0^2 \frac{y}{(x^2 + z_0^2)r} + \ln(y + r); \\ I_\alpha^y &= -I_\beta^x, \quad I_\beta^y = -I_\alpha^x, \quad I_\gamma^y = z_0^2 \frac{xz_0^2}{(y^2 + z_0^2)r} + \ln(x + r); \\ I_\alpha^{xx} &= z_0 \left[\frac{y}{2} + \ln|y + r| + I_\gamma^x \right], \quad I_\beta^{xx} = z_0 \left[-\frac{x}{2} + \ln|x + r| \right], \quad I_\gamma^{xx} = -z_0 I_\alpha^x - y \ln(x + r). \end{aligned} \quad (8.49)$$

При применении формул (8.49) осуществляется подстановка пределов интегрирования по x — $(-d_x - \xi_0, d_x - \xi_0)$ и по y — $(-d_y - \eta_0, d_y - \eta_0)$. После выделения сингулярных составляющих и аналитического вычисления соответствующих интегралов численно определяются интегралы вида (8.48), имеющие не более чем слабую особенность. Однако использование для их вычисления квадратурных формул Гаусса приводит к значительным погрешностям. Продемонстрируем это на следующем примере. Пусть

$$a = d_x = 1, \quad b = d_y = 1; \quad \Theta(\xi, \eta) = \sqrt{1 - \eta^2} \left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \left(\arcsin \xi + \xi \sqrt{1 - \xi^2} \right) \right].$$

В таком виде представляется один из элементов ряда для нахождения неизвестной плотности в задаче о циркуляционном обтекании пластины.

В точке $\xi_0 = \eta_0 = 0$ интеграл (8.48) определяется аналитически:

$$R(0, 0) = \pi \sqrt{2} \left[1 - E \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \pi \right) \right] \approx -1,5576.$$

Применение N -точечных квадратурных формул Гаусса в двух направлениях для вычисления $R(0, 0)$ по формуле (8.48) дает $R(0, 0) \approx 1,4770$ при $N = 12$ и $R(0, 0) \approx 1,5091$ при $N = 20$. Установлено, что наблюдаемая потеря точности обусловлена погрешностью вычисления внутреннего интеграла в (8.48). Аналитическое значение для этого интеграла равно

$$J_1 = \frac{\sqrt{1 - y^2} - 1}{y^2 \sqrt{1 - y^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2} \left(1 + \sqrt{1 - y^2} \right)}.$$

Однако при численной реализации применение формул Гаусса для вычисления внутреннего интеграла в (8.48) приводит к погрешности, которая увеличивается с уменьшением y . Получаемую погрешность можно устраниить, если вычислять $R(\xi_0, \eta_0)$ по формуле

$$R(\xi_0, \eta_0) = \int_{-b-a}^b \int_{-\infty}^a \frac{G(\xi, \xi_0, n)}{r^3} d\xi d\eta + \int_{-b}^b \frac{G_0(\xi_0, \eta_0, \eta) F_0(\xi_0, \eta_0, \eta)}{(\eta - \eta_0)^2} d\xi + \\ + \int_{-b}^b G_1(\xi_0, \eta_0, \eta) F_1(\xi_0, \eta_0, \eta) d\xi + \int_{-b}^b G_2(\xi_0, \eta_0, \eta) F_2(\xi_0, \eta_0, \eta) d\xi, \quad (8.50)$$

где

$$G(\xi, \xi_0, \eta) = \Theta(\xi, \eta) - \Theta(\xi_0, \eta) - \Theta'_\xi(\xi_0, \eta)(\xi - \xi_0) - \frac{1}{2}\Theta''_{\xi^2}(\xi_0, \eta)(\xi - \xi_0)^2;$$

$$G_0(\xi_0, \eta_0, \eta) = \Gamma(\xi_0, \eta) - \Theta(\xi_0, \eta_0) - \Theta'_\eta(\xi_0, \eta_0)(\eta - \eta_0);$$

$$G_1(\xi_0, \eta_0, \eta) = \Theta'_\xi(\xi_0, \eta) - \Theta'_\xi(\xi_0, \eta_0); \quad G_2(\xi_0, \eta_0, \eta) = \frac{1}{2}(\Theta''_{\xi^2}(\xi_0, \eta) - \Theta''_{\xi^2}(\xi_0, \eta_0));$$

$$F_0(\xi_0, \eta_0, \eta) = (a - \xi_0)/R_1 + (a - \xi_0)/R_2; \quad F_1(\xi_0, \eta_0, \eta) = 1/R_2 - 1/R_1;$$

$$F_2(\xi_0, \eta_0, \eta) = -F_0(\xi_0, \eta_0, \eta) + \ln \left(\frac{a - \xi_0 + R_1}{a + \xi_0 - R_2} \right); \quad R_{1,2} = \sqrt{(a \mp \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2}.$$

Применение формулы (8.50) дает приближенное значение $R(0,0)$, равное 1,5577 при $N = 10$. Оно лишь в четвертом знаке после запятой отличается от аналитического выражения, получаемого по (8.50).

8.3. Обобщенный потенциал двойного слоя на разомкнутой поверхности Ляпунова

Пусть S — произвольная разомкнутая поверхность Ляпунова, $\mathbf{n}(x)$ — нормаль к этой поверхности в точке x . Следуя [17], введем дифференциальный оператор упругих напряжений (оператор напряжений классической теории упругости) $\mathbf{T}^n(\partial_x, \mathbf{n}(x)) = \|\mathbf{T}_{ij}^n(\partial_x, \mathbf{n}(x))\|_{3 \times 3}$ следующим образом:

$$\mathbf{T}_{ij}^n(\partial_x, \mathbf{n}(x)) = \lambda n_i(x) \frac{\partial}{\partial x_j} + \mu n_j(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + \delta_{ij} \mu \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}(x)}, \quad (8.51)$$

или в векторной форме:

$$\mathbf{T}^n(\partial_x, \mathbf{n}(x)) \mathbf{u}(x) = 2\mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} + \lambda \mathbf{n} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu (\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{u}).$$

Приведем фундаментальное и сингулярное решения уравнений теории упругости в перемещениях

$$\mu \Delta u_j + (\lambda + \mu) \frac{\partial \vartheta}{\partial x_j} = 0 \quad j = 1, 2, 3. \quad (8.52)$$

Пусть изотропная упругая среда заполняет пространство E_3 и в точке $x = \xi$ действует единичная сосредоточенная сила, направленная по оси x_j ($j = 1, 2, 3$). Тогда смещение $\Gamma(x, \xi) = (\Gamma_1(x, \xi), \Gamma_2(x, \xi), \Gamma_3(x, \xi))$ точки $x = (x_1, x_2, x_3)$, вызванное указанной силой, вычисляется по формуле

$$\Gamma_{ij}(x - \xi) = \frac{\lambda + \mu}{8\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \left[\frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \frac{\delta_{ij}}{|x - \xi|} + \frac{(x_i - \xi_i)(x_j - \xi_j)}{|x - \xi|^3} \right], \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (8.53)$$

Введем матрицу

$$\Gamma(x - \xi) = \left\| \Gamma_{ij}(x - \xi) \right\|_{3 \times 3} = \left\| \Gamma^1(x, \xi), \Gamma^2(x, \xi), \Gamma^3(x, \xi) \right\|,$$

называемую матрицей фундаментальных решений Кельвина–Сомильяны. Эта матрица симметрична и каждый ее столбец, а также строка удовлетворяют уравнениям равновесия в перемещениях в произвольной точке $x \in E_3$, кроме $x = \xi$. Если в точке $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ приложено усилие $p(\xi) = p_j(\xi)$ ($j = 1, 2, 3$), то можно определить перемещения $u(x, \xi) = \Gamma(x - \xi)p(\xi)$ в бесконечном теле, вызванные действием этого усилия. Пусть $n(x) = (n_1(x), n_2(x), n_3(x))$ — произвольный единичный вектор. Для вычисления напряжений в точке x в направлении $n(x)$ воспользуемся матричным дифференциальным оператором упругих напряжений $T^n(\partial_x, n(x))$, определенным формулой (2.29). С помощью фундаментального решения (8.53) и оператора напряжений образуем сингулярное решение уравнений (8.52). Введем матрицы

$$T^n(\partial_x, n(x))\Gamma(x - \xi) = \Gamma_1(x - \xi), \quad \Gamma_2(x - \xi) = [T^n(\partial_\xi, n(\xi))\Gamma(\xi - x)],$$

$$\Gamma_{2ij}(x - \xi) = \Gamma_{1ji}(\xi - x).$$

В [18] показано, что каждый столбец матриц $\Gamma_1(x - \xi)$ и $\Gamma_2(x - \xi)$ удовлетворяет уравнению статики (8.52) в произвольной точке $x \in E_3$, кроме точки $x = \xi$. Приведем выражения для компонент матрицы $\Gamma_2(x - \xi)$

$$\begin{aligned} \Gamma_{2ij}(x - \xi) &= \frac{1}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \left\{ \left[\mu\delta_{ij} + 3(\lambda + \mu) \frac{(x_i - \xi_i)(x_j - \xi_j)}{r^2} \right] \times \right. \\ &\times \sum_{l=1}^3 \frac{(x_l - \xi_l)n_l(\xi)}{r^3} + \mu \left[n_i(\xi) \frac{(x_j - \xi_j)}{r^3} - n_j(x) \frac{(x_i - \xi_i)}{r^3} \right] \left. \right\}. \end{aligned} \quad (8.54)$$

Если в точке $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ имеется скачок смещений $\alpha(\xi) = (\alpha_j(\xi), j = 1, 2, 3)$, то перемещения в бесконечном теле, обусловленные наличием такого разрыва, могут быть вычислены по формуле

$$u(x, \xi) = \Gamma_2(x - \xi)\alpha(\xi).$$

По фундаментальному (8.53) и сингулярному (8.54) решениям системы (8.52) построим интегральные представления решений в виде обобщенных потенциалов теории упругости простого и двойного слоя.

Пусть $p(\xi), \alpha(\xi)$ — заданные на поверхности S вектор-функции. Согласно [18, 19] назовем

$$V(x) = \iint_S \Gamma(x - \xi) p(\xi) dS_\xi \quad (8.55)$$

обобщенным потенциалом простого слоя, а

$$W(x) = \iint_S \Gamma_2(x - \xi) \alpha(\xi) dS_\xi \quad (8.56)$$

обобщенным потенциалом двойного слоя (первого рода). Указанные потенциалы были впервые введены в работе И. С. Аржаных [19]. Как показано в [19, 20, 21], свойства потенциалов (8.55), (8.56) аналогичны свойствам соответствующих гармонических потенциалов. Так, потенциал (8.55) может быть определен непосредственно в точках поверхности S , причем его предельные значения при стремлении точки наблюдения к S по n^+ и n^- совпадают и равны прямому значению. Следовательно, обобщенный упругий потенциал простого слоя представляет собой вектор-функцию, непрерывную во всем пространстве. На бесконечности потенциал $V(x)$ стремится к нулю, как $1/|x|$. Отметим, что гармонический и обобщенный упругий потенциалы двойного слоя удобно использовать при решении краевых задач на разомкнутых поверхностях. В таких случаях искомая функция разрывна (скакок смещений на трещине, перепад давлений на несущей поверхности), а ее нормальная производная непрерывна (самоуравновешенные нагрузки на берегах трещины, нормальная составляющая скорости на несущей поверхности).

Получим представление обобщенного потенциала двойного слоя, позволяющее построить эффективные квадратурные формулы для его численного определения.

Дадим некоторые вспомогательные определения, следуя [18].

Введем антисимметричный матричный дифференциальный оператор $M(\partial_x, n(x)) = \{M_{kj}(\partial_x, n(x))\}_{3 \times 3}$ согласно следующим формулам:

$$M_{kj}(\partial_x, n(x)) = n_j \frac{\partial}{\partial x_k} - n_k \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

В [20] показано, что при использовании этого оператора формула Стокса для замкнутой поверхности S и непрерывно-дифференцируемой функции $\varphi \in C^1(S)$ может быть записана в следующем виде:

$$\iint_S M_{kj}(\partial_\xi, N(\xi)) \varphi(\xi) dS_\xi = 0. \quad (8.57)$$

Из доказательства этой формулы, проведенного в [18], следует, что если S — разомкнутая поверхность Ляпунова, ограниченная контуром l , то равенство (8.57) будет верно при выполнении следующего условия:

$$\varphi(x)|_l = 0. \quad (8.58)$$

Следуя [18], можно показать, что при выполнении условия (8.58) для любых неотрицательных λ' и μ' и вектор-функции $u \in C^1(S)$ будет также выполнено равенство

$$\iint_S \left\{ \left[M(\partial_\xi, N(\xi)) \Gamma(x - \xi) \right]' u(\xi) - \Gamma(x - \xi) M(\partial_\xi, N(\xi)) u(\xi) \right\} dS_\xi = 0, \quad (8.59)$$

где

$$\begin{aligned} & \left[M(\partial_\xi, N(\xi)) \Gamma(x - \xi) \right]'_{kj} = \\ & = -\lambda' M_{kj}(\partial_\xi, N(\xi)) \frac{1}{|x - \xi|} + \mu' \left(3 \frac{\partial |x - \xi|}{\partial \xi_k} \frac{\partial |x - \xi|}{\partial \xi_j} - \delta_{kj} \right) \frac{\partial}{\partial N(\xi)} \frac{1}{|x - \xi|}. \end{aligned}$$

Получим два важных следствия из формулы (6.59). Если λ' и μ' определяются формулами $\lambda' = (\lambda+3\mu)[8\pi\mu(\lambda+2\mu)]^{-1}$; $\mu' = (\lambda+\mu)[8\pi\mu(\lambda+2\mu)]^{-1}$, в которых λ и μ представляют собой коэффициенты Ламе, то $\Gamma(x - \xi)$ в равенстве (8.59) представляет собой фундаментальное решение уравнений статики Кельвина–Сомильяны (8.51). Если подставить $\lambda'=1$, $\mu'=0$ в соотношение (8.59), то получим

$$\iint_S \left[\mathbf{M}(\partial_\xi, N(\xi)) \frac{E}{|x-\xi|} u(\xi) + \frac{E}{|x-\xi|} \mathbf{M}(\partial_\xi, N(\xi)) u(\xi) \right] dS_\xi = 0, \quad x \in E_3, \quad (8.60)$$

где E — единичная матрица.

Пусть S — разомкнутая поверхность Ляпунова с показателем $\lambda = 1$, вектор-функция $a \in C^{1,\beta}(S)$ при этом $\beta < 1$. Отметим, что в более слабых предположениях относительно вектор-функции a , а именно предполагая, что $a \in C^0(S)$, обобщенный потенциал двойного слоя

$$W(a) = \iint_S \left[T''(\partial_\xi, N(\xi)) \Gamma(x - \xi) \right]' a(\xi) dS_\xi$$

можно представить в виде

$$W(a) = \iint_S \left\{ \left[T(\partial_\xi, N(\xi)) \Gamma(x - \xi) \right]' + 2\mu \left[\mathbf{M}(\partial_\xi, N(\xi)) \Gamma(x - \xi) \right]' \right\} a(\xi) dS_\xi, \quad (8.61)$$

где

$$\left[T(\partial_\xi, N(\xi)) \Gamma(x - \xi) \right]'_{kj} = \frac{1}{4\pi} \left(\delta_{kj} \frac{\partial}{\partial N} \frac{1}{|x-\xi|} \right) + M_{kj}(\partial_\xi, N(\xi)) \frac{1}{|x-\xi|},$$

а $[M(\partial_\xi, N(\xi)) \Gamma(x - \xi)]'$ определяется в (8.59). Анализируя формулу (8.61), видим, что для численного определения прямого значения обобщенного потенциала двойного слоя требуется построить формулы для вычисления прямого значения гармонического потенциала двойного слоя и первых производных гармонического потенциала простого слоя.

Получим представление обобщенного потенциала двойного слоя в виде суммы гармонических потенциалов двойного и простого слоя, а также обобщенного потенциала простого слоя.

Обратимся к случаю, когда $a \in C^{1,\beta}(S)$, $\beta < 1$, и, кроме того, выполнено условие (8.58). Тогда обобщенный потенциал двойного слоя, определенный формулой (8.61), можно представить в виде

$$W(a) = \frac{1}{4\pi} w(a) - \frac{1}{4\pi} v(Ma) + 2\mu V(Ma), \quad (8.62)$$

где $w(a)$ и $v(Ma)$ — гармонические потенциалы двойного и простого слоя

$$w(a) = \iint_S a(\xi) \frac{\partial}{\partial N} \frac{1}{|x-\xi|} dS_\xi, \quad v(a) = \iint_S a(\xi) \frac{1}{|x-\xi|} dS_\xi,$$

а $V(a)$ — обобщенный потенциал простого слоя.

Доказательство этого утверждения следует из справедливости равенств (8.59), (8.60) на разомкнутой поверхности Ляпунова при выполнении условия (8.58).

Формулу (8.62) удобно применять для вычисления производных обобщенного потенциала двойного слоя. Как видим, основная трудность здесь заключается в вычислении производных гармонического потенциала двойного слоя, что приводит к появлению гиперсингулярных составляющих. Так, действие оператора напряжений (8.51) на обобщенный потенциал двойного слоя (8.62) приводит к появлению нормальной производной гармонического потенциала двойного слоя.

Как и при вычислении гиперсингулярных интегралов, порожденных нормальной производной гармонического потенциала двойного слоя, в случае обобщенных потенциалов теории упругости удается получить формулы для вычисления гиперсингулярных интегралов, основанные на интегрировании по частям.

Покажем, что полученная в [18] формула для вычисления оператора напряжений от потенциала двойного слоя обобщается на случай разомкнутой поверхности Ляпунова, если $a \in C^{1,\beta}(S)$, $\beta < 1$ и выполнено условие (8.58). Запишем (8.62) в виде

$$\begin{aligned} W(a) = & \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\partial}{\partial N} \frac{1}{|x-\xi|} a(\xi) dS_\xi + \\ & + \iint_S \left[2\mu \Gamma(x-\xi) - \frac{1}{4\pi} \frac{E}{|x-\xi|} \right] M(\partial_\xi, N(\xi)) a(\xi) dS_\xi. \end{aligned} \quad (8.63)$$

Второе слагаемое здесь можно рассматривать как некий обобщенный потенциал простого слоя с измененными константами λ' и μ' .

Вычислим оператор $T^n(\partial_x, n(x))$ от $W(a)$. Из (8.63) имеем

$$\begin{aligned} T^n(\partial_x, n(x))W(a) = & \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ 2\mu \frac{\partial^2}{\partial n \partial N} \frac{1}{|x-\xi|} a(\xi) + \lambda n(x) \operatorname{div}_x \left(a(\xi) \frac{\partial}{\partial N} \frac{1}{|x-\xi|} \right) + \right. \\ & + \mu \left[n(x) \times \operatorname{rot}_x \left(a(\xi) \frac{\partial}{\partial N} \frac{1}{|x-\xi|} \right) \right] \left. \right\} dS_\xi + \\ & + \iint_S T^n(\partial_x, n(x)) \left[2\mu \Gamma(x-\xi) - \frac{E}{4\pi |x-\xi|} \right] M(\partial_\xi, N(\xi)) a(\xi) dS_\xi. \end{aligned} \quad (8.64)$$

Видим, что первое слагаемое здесь представляет нормальную производную потенциала двойного слоя.

Имеют место следующие соотношения [20, 21]:

$$\operatorname{div}_x \left(a(\xi) \frac{\partial}{\partial N} \frac{1}{|x-\xi|} \right) = \left(\operatorname{grad}_x \frac{\partial}{\partial N} \frac{1}{|x-\xi|}, a(\xi) \right), \quad (8.65)$$

$$\left[n(x) \times \operatorname{rot}_x \left(a(\xi) \frac{\partial}{\partial N} \frac{1}{|x-\xi|} \right) \right] = \operatorname{grad}_x \frac{\partial}{\partial N} \frac{1}{|x-\xi|} (a(\xi), n(x)) - a(\xi) \frac{\partial^2}{\partial n \partial N} \frac{1}{|x-\xi|},$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \mathbf{T}^n(\partial_x, \mathbf{n}(x)) \left[2\mu\Gamma(x-\xi) - \frac{E}{4\pi|x-\xi|} \right] \right\}_{kj} = \frac{1}{4\pi} \left\{ \left[-\frac{\mu\lambda}{\lambda+2\mu} \delta_{kj} + \right. \right. \\ & + 6 \frac{(\lambda+\mu)\mu}{\lambda+2\mu} \frac{(\xi_k - x_k)}{|x-\xi|} \frac{(\xi_j - x_j)}{|x-\xi|} \left. \right] \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|x-\xi|} - (\lambda+\mu)n_k \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{|x-\xi|} - \\ & \left. \left. - \frac{\mu\lambda}{\lambda+2\mu} \mathbf{M}^n(\partial_x, \mathbf{n}(x)) \frac{1}{|x-\xi|} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Для точек $x \notin S$ и плотностей, удовлетворяющих условию (8.58), как и в [20], можно установить справедливость равенств (8.65) и для разомкнутой поверхности Ляпунова

$$\begin{aligned} & \iint_S \left(\operatorname{grad}_x \frac{\partial}{\partial N} \frac{1}{|x-\xi|}, \mathbf{a}(\xi) \right) dS_\xi = \iint_S \left(\operatorname{grad}_x \frac{1}{|x-\xi|}, \mathbf{M}(\partial_x, N(\xi)) \mathbf{a}(\xi) \right) dS_\xi, \quad (8.66) \\ & \iint_S \operatorname{grad}_x \frac{\partial}{\partial N} \frac{1}{|x-\xi|} (\mathbf{n}(x), \mathbf{a}(\xi)) dS_\xi = \\ & = \iint_S \left\{ \mathbf{n}(x) \left(\operatorname{grad}_x \frac{1}{|x-\xi|}, \mathbf{M}(\partial_\xi, N(\xi)) \mathbf{a}(\xi) \right) - \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|x-\xi|} \mathbf{M}(\partial_x, N(\xi)) \mathbf{a}(\xi) + \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^3 n_k(x) \left(\operatorname{grad}_x \frac{1}{|x-\xi|}, ((N(\xi) \times \nabla)_k \mathbf{a}(\xi)) \right) \right\} dS_\xi. \end{aligned}$$

Используя (8.65), (8.66), приведем (8.64) к виду

$$\begin{aligned} & \mathbf{T}^n(\partial_x, \mathbf{n}(x)) \mathbf{W}(\mathbf{a}) = \frac{\mu}{4\pi} \iint_S \left\{ \left((\operatorname{grad} \mathbf{a}(\xi) \times N(\xi)) \times \operatorname{grad}_x \frac{1}{|x-\xi|} \right), \mathbf{n}(x) \right\} + \\ & + \sum_{k=1}^3 \left(\operatorname{grad}_x \frac{1}{|x-\xi|}, ((N(\xi) \times \nabla)_k \mathbf{a}(\xi)) \right) + \\ & + \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu} \mathbf{R}(\partial_\xi, N(\xi)) \frac{1}{|x-\xi|} \mathbf{M}(\partial_\xi, N(\xi)) \mathbf{a}(\xi) \} dS_\xi, \quad (8.67) \end{aligned}$$

где компоненты матричного дифференциального оператора $\mathbf{R}(\partial_\xi, N(\xi))$ вычисляются по формуле

$$R_{kj}(x-\xi) = \left(-\delta_{kj} + 6 \frac{\xi_k - x_k}{|x-\xi|} \frac{\xi_j - x_j}{|x-\xi|} \right) \frac{\partial}{\partial N} - \frac{\lambda}{\lambda+\mu} M_{kj}(\partial_\xi, N(\xi)). \quad (8.68)$$

Проанализируем формулу (8.67). Как и в (8.61), видим, что для численного определения оператора напряжений от обобщенного потенциала двойного слоя необходимо построить

формулы для вычисления некоторых интегралов. К ним относятся прямое значение гармонического потенциала двойного слоя, первые производные гармонического потенциала простого слоя и интегралы, ядра которых представляют собой произведение нормальной производной от $|x - \zeta|^{-1}$ на ограниченные, но разрывные функции, фигурирующие в формуле (8.68).

Отметим, что интегралы в (8.61) и (8.67) существуют в смысле главного значения по Коши. Из формул (8.61), (8.67) также видно, что наиболее сильные сингулярности в этих интегральных операторах связаны с гармоническим потенциалом и его нормальной производной.

8.4. Методы численного решения гиперсингулярных уравнений

8.4.1. Плоские задачи

Рассмотрим гиперсингулярное интегральное уравнение

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\Gamma(t)}{(t-x)^2} dt = f(x), \quad (8.69)$$

где интеграл понимается в смысле конечной части по Адамару.

Введем многочлены Чебышева I рода степени n

$$T_n(t) = \cos n\theta = \cos(n \arccos t) = t^n + C_n^2 t^{n-2} (t^2 - 1) + \dots$$

и II рода степени $n-1$

$$U_{n-1}(t) = \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} = \frac{\sin(n \arccos t)}{\sin(\arccos t)} = C_n^1 t^{n-1} + C_n^3 t^{n-3} (t^2 - 1) + \dots$$

Имеет место следующее равенство [2]:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos n\theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta = \frac{\sin n\theta_0}{\sin \theta_0}. \quad (8.70)$$

Рассмотрим (8.70) при $0 < \theta_0 < \pi$ и введем новые переменные $t = \cos \theta$; $x = \cos \theta_0$. С использованием представлений для полиномов Чебышева получим

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} (t-x)} = 0, \quad |x| < 1; \quad \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_n(t) dt}{\sqrt{1-t^2} (t-x)} = U_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

В [2] построены квадратурные формулы интерполяционного типа для вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов с различными ядрами. Кроме того, в [2] показано, что

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{U_{n-1}(t)}{(t-x)^2} \sqrt{1-t^2} dt = -n U_{n-1}(x). \quad (8.71)$$

Поэтому, если правую часть гиперсингулярного интегрального уравнения задать в виде ряда по полиномам Чебышева II рода, то из (8.71) вытекает способ представления искомой плотности.

Отметим, что при рассмотрении пространственных задач не всегда удается получить столь эффективные представления. Поэтому далее рассмотрим метод граничных элементов, который может быть обобщен на пространственный случай.

Разделим отрезок интегрирования $[-l, l]$ на ряд граничных элементов. Допустим, что на каждом из них неизвестная плотность $\Gamma(t)$ является постоянной величиной Γ_i . Проанализировав формулы, полученные в 8.1.1, устанавливаем, что максимальное значение отклика достигается в центре граничного элемента. Сведем уравнение (8.69) к системе линейных алгебраических уравнений вида

$$\sum_{i=1}^N a_{ij} \gamma_i = f(x_{0j}); \quad a_{ij} = \frac{1}{\pi \Delta x} \frac{4}{x_{0j}^2 - 1}, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Отметим, что существует единственное решение гиперсингулярного уравнения (8.69). Поэтому дополнительное условие не ставится.

При использовании линейных, квадратичных и кубических элементов аппроксимируем плотность на каждом элементе линейными, квадратичными и кубическими функциями (функциями формы) так, чтобы в узлах элементов плотность была непрерывной.

Анализируя величины «откликов», соответствующие используемым функциям формы, устанавливаем, что на границах элементов отклик обращается в бесконечность, однако внутри каждого элемента имеется точка, в которой отклик имеет конечный максимум. Такие точки и выбираем в качестве контрольных.

Отметим, что существенное увеличение точности удается получить лишь при введении кубических элементов с непрерывно дифференцируемой плотностью.

8.4.2. Пространственные задачи

Идея разложения неизвестной плотности в ряд по известным функциям (с заданным характером поведения на границе области интегрирования) оказалась весьма плодотворной при решении двумерных сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений. Далее рассмотрены варианты метода решения гиперсингулярных уравнений, возникающих в пространственных задачах, основанный на разложении неизвестной функции в ряд по полиномам Чебышева (с весом) в двух направлениях.

Метод коллокаций. Рассмотрим следующее гиперсингулярное интегральное уравнение:

$$\frac{1}{4\pi} \iint_S \Gamma(\xi) \frac{\partial^2}{\partial n_x \partial n_\xi} \frac{1}{|x - \xi|} dS = f(x). \quad (8.72)$$

Пусть область интегрирования S представляет собой плоский прямоугольник

$$S = \{[-b, b] \times [-l, l]\}.$$

Предположим, что функция $\Gamma(\xi)$ имеет непрерывные частные производные, удовлетворяющие условию Гельдера всюду внутри S . Будем считать, что $\xi = (\xi, \eta)$, $x = (x, y)$. Неизвестную интенсивность $\Gamma(\xi, \eta)$ находим в виде ряда по некоторым заранее заданным линейно-независимым функциям с определенным асимптотическим поведением на границе S

$$\Gamma(\xi, \eta) = \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L C_{ml} \varphi_l(\xi) \chi_m(\eta), \quad (8.73)$$

где C_{ml} — неизвестные коэффициенты.

Распределение неизвестной плотности вдоль обоих направлений будем задавать в виде рядов по синусам кратных углов

$$\varphi_l = \sin l\mu = \sin \left(l \arccos \frac{\xi}{a} \right), \quad l = 1, 2, \dots, \quad (8.74)$$

$$\chi_m = \sin m\sigma = \sin \left(m \arccos \frac{\eta}{b} \right), \quad m = 1, 2, \dots \quad (8.75)$$

Отметим, что формулы (8.74), (8.75) представляют собой функции, которые выражаются через полиномы Чебышева II рода вследствие равенства

$$\sin(n \arccos t) = U_{n-1}(t) \sqrt{1-t^2}.$$

Как следует из формулы (8.71), именно такие ортогональные функции наиболее удобно брать в качестве базисных при решении двумерных гиперсингулярных уравнений. Вычислив гиперсингулярные интегралы по методике, предложенной в 8.2, приходим к системе алгебраических уравнений относительно C_{ml}

$$\sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L H_{ml}(M_k) C_{ml} = f(M_k), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (8.76)$$

где элементы матрицы определяются формулами

$$\begin{aligned} 4\pi H_{ml}(x, y) &= \Gamma_{ml}(x, y) I_0(x, y) + A_{ml}(x, y) I_x(x, y) + \\ &+ B_{ml}(x, y) I_y(x, y) + 0,5G_{ml}(x, y) I_{xx}(x, y) + R_{ml}(x, y), \\ \Gamma_{ml}(x, y) &= \varphi_m(x) \chi_l(y), \quad A_{ml}(x, y) = \varphi'_m(x) \chi_l(y), \\ B_{ml}(x, y) &= \chi'_l(y) \varphi_m(x), \quad G_{ml}(x, y) = \chi'_l(y) \varphi'_m(x). \end{aligned} \quad (8.77)$$

Здесь величины $I_0(x, y)$, $I_x(x, y)$, $I_y(x, y)$, $I_{xx}(x, y)$ вычисляются аналитически по формулам (8.49), в которых следует положить $\cos \alpha_0 = \cos \beta_0 = 0$; $z_0 = 0$. В 8.2.5 описан также алгоритм вычисления интегралов $R_{ml}(x, y)$ и произведены оценки возникающей погрешности. Определение коэффициентов C_{ml} из системы (8.76) решает задачу отыскания неизвестной функции Γ .

Проекционный метод. Будем искать неизвестную плотность Γ в виде

$$\Gamma(x, y) = \sum_{i=1}^{N_1} c_i \Gamma^{(i)}(x, y).$$

Здесь элементы $\Gamma^{(i)}(x, y)$ вычисляются как произведения функций, определяемых формулами (8.74), (8.75); c_i — неизвестные коэффициенты, для их определения строим СЛАУ проекционного метода

$$\sum_{i=1}^{N_1} c_i a_{ij} = b_j, \quad (8.78)$$

$$a_{ij} = \iint_S N \Gamma^{(i)}(x, y) \Gamma^{(j)}(x, y) dx dy, \quad b_j = \iint_S f(x, y) \Gamma^{(j)}(x, y) dx dy.$$

Величины $N\Gamma^{(i)}(x, y)$ представляют собой результат вычисления гиперсингулярных интегралов с заданной плотностью

$$N\Gamma^{(i)}(x) \frac{1}{4\pi} \iint_S \Gamma^{(i)}(\xi) \frac{\partial^2}{\partial n_x \partial n_\xi} \frac{1}{|x - \xi|} dS.$$

Вычисление интегралов в (8.78) осуществляем по квадратурным формулам Чебышева либо Гаусса. Для этого определим $N\Gamma^{(i)}(x, y)$ в заданных узлах. Разобьем область S так, чтобы узлы квадратур попали в центры прямоугольников со сторонами $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. Тогда область S будет состоять из подобластей $\{U_1\}$ (прямоугольников размерами $\varepsilon_1 \times \varepsilon_2$), содержащих узлы интегрирования, и подобластей $\{U_2\}$, не содержащих узлы интегрирования. Каждую из подобластей множества $\{U_2\}$ размерами $l_1 \times l_2$ разобьем еще на $([l_1/\varepsilon_1]+1) \times ([l_2/\varepsilon_2]+1)$ частей. Таким образом, область S окажется разбитой на $N \times M$ приблизительно равных прямоугольных подобластей. Значения $N\Gamma^{(i)}$ в узлах интегрирования x_i^0, y_m^0 вычисляем по квадратурным формулам, приведенным в 8.2.5.

Отметим, что в случае использования граничных элементов с плотностью, непрерывной на границах элементов, но имеющей разрывную производную, аппроксимирующий оператор будет терпеть разрывы на границах элементов. Преимуществом проекционного метода является возможность получения непрерывного оператора, аппроксимирующего (8.72), что позволяет адекватно описывать физические поля. Отметим также, что при применении проекционного метода количество базисных функций может быть не равным числу точек коллокации.

Метод граничных элементов. Описанные выше методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений эффективны при решении задач, в которых форма поверхности интегрирования может быть хорошо аппроксимирована плоским прямоугольником. В общем случае не всегда удается описать решение рассматриваемой задачи (искомую плотность) одним аналитическим выражением, например рядом Бирнбаума. Это связано со сложностью геометрии реальных элементов конструкций. Для решения задач со сложной геометрией используется метод граничных элементов.

Разобьем область интегрирования S на ряд плоских треугольных и четырехугольных подобластей S_k ($k = 1, 2, \dots, N$). Опишем метод граничных элементов с постоянной аппроксимацией плотности для численного решения уравнения (8.72). Рассмотрим гиперсингулярный интеграл по аппроксимированной поверхности. Приходим к СЛАУ относительно неизвестных Γ_i

$$\sum_{k=1}^N H_{kj} \Gamma_k = f(x_{0j}); \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Элементы матрицы H_{kj} определяются по формуле, полученной в 8.2.

$$H_{kj} = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^m \frac{([l_i \times r_i] \cdot n)}{[l_i \times r_i]^2} \left[\frac{(l_i \cdot r_{i+1})}{r_{i+1}} - \frac{(l_i \cdot r_i)}{r_i} \right], \quad (8.79)$$

где n — нормаль к поверхности интегрирования в точке x_{0j} ;

m — число сторон в k -м граничном элементе;

векторы r_k, l_i, n задаются соотношениями

$$\begin{aligned} r_k &= (x_k - x_0, y_k - y_0, z_k - z_0); \quad l_i = (x_{i+1} - x_i, y_{i+1} - y_i, z_{i+1} - z_i), \\ n &= (n_1, n_2, n_3); \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad x_{m+1} = x_1; \quad y_{m+1} = y_1; \quad z_{m+1} = z_1; \quad r_k = |r_k|. \end{aligned}$$

В [9] показано, что точность метода граничных элементов и его сходимость зависят от выбора контрольных точек. Как и в плоском случае, анализируя величины, вычисляемые по формуле (8.79) устанавливаем, что на границах элементов отклик обращается в минус бесконечность, однако внутри каждого элемента имеется точка, в которой отклик имеет конечный максимум.

Таким образом, рассмотрены гиперсингулярные интегралы, возникающие при применении методов теории потенциала для решения плоских и пространственных задач механики и математической физики.

Показано, что предельное значение нормальной производной потенциала двойного слоя равно конечной части интеграла по Адамару прямого значения этой нормальной производной. Получены формулы, с помощью которых можно вычислить конечное значение по Адамару в виде суммы некоторых конечных величин и интегралов, существующих в смысле главного значения по Коши либо имеющих слабые особенности. Даны эквивалентные формы записи гиперсингулярного интеграла.

Установлено, что конечное значение по Адамару интеграла по криволинейному элементу существует тогда и только тогда, когда существует конечное значение по Адамару для интеграла по прямолинейному элементу, представляющему собой отрезок касательной к рассматриваемой кривой в особой точке. Это позволяет обосновать замену области интегрирования аппроксимирующей ломаной линией.

Получены аналитические формулы для вычисления конечной части интеграла по Адамару для полиномиальных плотностей при линейной и квадратичной аппроксимации контура интегрирования; это дает возможность построить высокоточные граничные элементы.

Дана оценка погрешности, возникающей при различных аппроксимациях контура интегрирования.

В интегральных уравнениях, описывающих пространственные задачи рассматриваемого класса, наиболее сильные сингулярности присутствуют в ядрах, представляющих собой нормальные производные от гармонического потенциала двойного слоя. Установлено, что предельное значение интегрального оператора, представляющего собой нормальную производную потенциала двойного слоя, существует тогда и только тогда, когда существует предельное значение соответствующего оператора, вычисленного по элементу касательной плоскости. Прямого значения нормальной производной потенциала двойного слоя на касательной плоскости не существует в смысле главного значения по Коши, оно может пониматься лишь как соответствующий предел (интеграл в смысле конечной части по Адамару). Установлено, при каких условиях относительно плотности существуют конечные предельные значения рассматриваемых гиперсингулярных интегралов. Получены формулы, позволяющие свести гиперсингулярные интегралы к интегралам, существующим в смысле главного значения по Коши в плоских и пространственных задачах.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ 8

1. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа / Ж. Адамар. М.: Наука, 1978. 352 с.
2. Гандель Ю. В. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов / Ю. В. Гандель. Харьков: Изд. Харьк. нац. ун-та им. В. Н. Каразина, 2000. 92 с.
3. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения / Н. И. Мусхелишвили. М: Наука, 1968. 512 с.
4. Владимиров В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. М.: Наука, 1981. 512 с.
5. Лаврентьев М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. М.: Наука, 1987. 688 с.
6. Стрельникова Е. А. Гиперсингулярные интегральные уравнения в двумерных краевых задачах для уравнения Лапласа и уравнений Ламе / Е. А. Стрельникова // Докл. НАН України. 2001. № 3. С. 27–31.
7. Щербина В. А. Граничные операторы и один вариант метода дискретных вихрей в задаче Неймана / В. А. Щербина // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. 1985. Вып. 43. С. 136–143.
8. Кантор Б. Я. Об аппроксимации поверхности плоскими элементами при численном решении сингулярных интегральных уравнений типа Адамара / Б. Я. Кантор, В. В. Науменко, Е. А. Стрельникова // Докл. АН України. Сер. А. 1995. № 11. С. 21–23.
9. Белоцерковский С. М. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике / С. М. Белоцерковский, И. К. Лифанов. М.: Наука, 1985. 254 с.
10. Кит Г. С. Метод потенциалов в трехмерных задачах термоупругости для тел с трещинами / Г. С. Кит, М. В. Хай. Киев: Наук. думка, 1989. 288 с.
11. Линьков А. М. Комплексный метод граничных интегральных уравнений теории упругости / А. М. Линьков. СПб.: Наука, 1999. 382 с.
12. Стрельникова Е. А. Об эквивалентности сингулярных интегральных уравнений теории крыла конечного размаха / Е. А. Стрельникова // Докл. АН України. Сер. А. 1993. № 3. С. 28–32.
13. Леонов М. Я. Решение одного интегрального уравнения теории ньютонаского потенциала / М. Я. Леонов // Укр. мат. журн. 1953. Т. 5, № 1. С. 50–57.
14. Хай М. В. Двумерные интегральные уравнения типа ньютона потенциала и их приложения / М. В. Хай. Киев: Наук. думка, 1993. 252 с.
15. Белоцерковский С. М. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью / С. М. Белоцерковский, М. И. Ништ. М.: Наука, 1978. 352 с.
16. Белоцерковский С. М. Исследования по аэrodинамике современных несущих поверхностей: дис. ... д-ра техн. наук / С. М. Белоцерковский. М., 1955. 250 с.
17. Купрадзе В. Д. Методы потенциала в теории упругости / В. Д. Купрадзе. М.: Физматгиз, 1963. 472 с.
18. Трехмерные задачи математической теории упругости / В. Д. Купрадзе [и др.]. М.: Наука, 1976. 664 с.
19. Аржаных И. С. Интегральные уравнения теории упругости / И. С. Аржаных // Успехи математических наук. 1949. Т. 14, вып. 5. С. 5–121.
20. Парсон В. З. Интегральные уравнения теории упругости / В. З. Парсон, П. И. Перлин. М.: Наука, 1977. 312 с.
21. Парсон В. З. Методы математической теории упругости / В. З. Парсон, П. И. Перлин. М.: Наука, 1981. 688 с.

ГЛАВА 9

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Прочность деформируемых твердых тел существенно зависит от имеющихся в нем дефектов, таких как трещины, отверстия и инородные включения. Такие дефекты в деформируемом теле являются инициаторами зон предразрушения из-за возникающей значительной концентрации напряжений в их окрестностях, что приводит к образованию новых и росту уже имеющихся трещин и к локальному или полному разрушению тела. Поэтому процесс развития хрупкого разрушения можно представить как результат распространения трещин, образовавшихся около дефектов.

Проблема разрушения материалов и конструкций является одной из актуальных областей механики деформируемого твердого тела. Однако, несмотря на наличие большой и разнообразной информации о различных явлениях разрушения, механизм его известен далеко не полностью и изучение этого процесса требует приложения усилий ученых, работающих в различных областях науки. Хотя механизм разрушения нельзя сводить только к процессу распространения трещин, однако изучение тех условий, при которых в среде распространяется трещина или система трещин, несомненно, является чрезвычайно важной и интересной стороной проблемы разрушения. Эта сторона вопроса сводится к исследованию напряженно-деформированного состояния среды в окрестности особых точек.

Одна из важных научно-производственных задач — создание конструкционных материалов, обладающих высокой жесткостью, прочностью, надежностью, долговечностью и экономичностью. Элементы конструкций, построенные из этих материалов, предназначаются для работы в условиях воздействия агрессивных сред, высоких температур, давлений и электромагнитных полей, обуславливающих протекание в твердом теле как механического, так и целого ряда немеханических процессов, приводящих к разрушению. Эти процессы сильно интенсифицируются в окрестности имеющихся в материале неоднородностей технологического, конструктивного и структурного характера, таких как трещины, инородные включения, полости, стрингеры, ребра жесткости, сварные швы и т. д. Следует заметить, что пластины с ребрами жесткости находят широкое применение в инженерной практике, особенно при изготовлении летательных аппаратов. Задача о подкрепленных пластинах становится особенно сложной при наличии в среде дефектов в виде отверстий, надрезов, трещин и т. п. В этом случае приобретает важное значение определение взаимного влияния двух противоположных факторов — усиление среды и ее ослабление. Решение задач указанного типа представляет интерес как с точки зрения влияния такого рода дефектов структуры квазихрупких тел на их несущую способность, так и с точки зрения определения степени упрочнения или разупрочнения тела при а) увеличении в нем числа дефектов заданной ориентации и б) изменении их геометрии и ориентации.

В современной технике находят применение в качестве элементов конструкций анизотропные тела, у которых сопротивление и реакция к физико-механическим полям различны в разных направлениях. Для расчета на прочность анизотропных тел с дефектами и инородными включениями необходимо применение математических методов теории упругости, термоупругости и электромагнитоупругости.

Инженерная практика выдвигает проблемы, связанные с оценками прочности различных соприкасающихся деталей даже в простейших механизмах и устройствах. Эти оцен-

ки возможны лишь при достаточно полной информации о распределении напряжений в местах контакта. Необходимость в таких оценках способствовала развитию большого класса смешанных задач механики деформируемого твердого тела. Методы, развивающиеся в этих задачах, позволяют найти распределение давлений в местах контакта, что дает возможность ответить на важный вопрос концентрации напряжений. Развитие математического аппарата, связанного с постановкой и решением смешанных задач ТФКП и теории СИУ, послужило достаточной основой для получения решений огромного класса задач механики связанных полей, которые и по сей день являются актуальными и представляют как теоретический, так и практический интерес.

9.1. Плоская задача теории упругости

Выпишем основные, используемые в дальнейшем, формулы [38]. Пусть плоская изотропная среда отнесена к прямоугольной системе координат $x_1 0x_2$.

Компоненты тензора напряжения $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$ и вектора перемещения u_1, u_2 , выражаются через две аналитические функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ комплексной переменной $z = x_1 + ix_2$

$$\begin{aligned}\sigma_{11} + \sigma_{22} &= 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}], \\ \sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} &= 2[z\Phi'(z) + \Psi(z)], \\ 2\mu(u_1 + iu_2) &= \kappa\varphi(z) - z\overline{\Phi(z)} - \overline{\Psi(z)}, \\ \varphi'(z) &= \Phi(z), \quad \psi'(z) = \Psi(z).\end{aligned}\tag{9.1}$$

В случае плоской деформации $\kappa = 3 - 4\nu$, в случае обобщенного плоского напряженного состояния $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$, ν — коэффициент Пуассона, μ — модуль сдвига, штрих обозначает производную.

Границные условия по напряжениям имеют вид

$$\sigma_m - i\sigma_t = N - iT = \Phi(t) + \overline{\Phi(t)} + [\bar{\tau}\Phi'(t) + \Psi(t)]e^{2i\theta(t)},\tag{9.2}$$

где $\theta(t)$ — угол между осью $0x_1$ и положительной касательной к дуге в точке t , отсчитываемый от первой, N и T — соответственно, нормальная и касательная составляющая вектора напряжения.

Формулировка краевой задачи. Выбор представлений для комплексных потенциалов. Пусть Γ — простой замкнутый кусочно-гладкий контур с одной угловой точкой c . Упругие постоянные среды внутри контура Γ (конечная область D_1 — включение) и вне (бесконечная область D — матрица) различны и равны μ_1, κ_1 и μ, κ соответственно. Из точки c к точкам c_1, c_2, c_3 выходят три гладких разреза: L_1 — в область D_1 , L_2 — в область D , L_3 — вдоль контура Γ (рис. 9.1).

Берега разрезов свободны от усилий, на $L_4 = \Gamma \setminus L_3$ имеет место идеальный контакт материалов. Граница области равна

$$L = \bigcup_{j=1}^4 L_j,$$

точки c, c_1, c_2, c_3 будем называть узлами. Кривизны всех дуг L_j и контура Γ в окрестности точки c_3 считаем удовлетворяющими условию Гельдера.

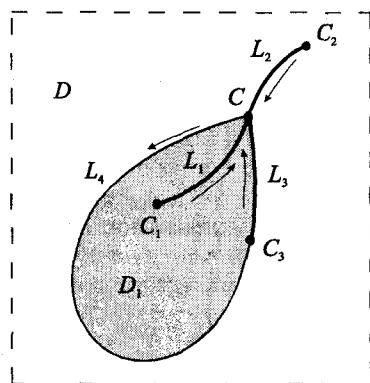


Рис. 9.1. Кусочно-однородная среда с включениями и разрезами

Требуется определить кусочно-голоморфные функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, обеспечивающие заданное однородное напряженное состояние на бесконечности $\sigma_{11}^{(\infty)}, \sigma_{12}^{(\infty)}, \sigma_{22}^{(\infty)}$ и удовлетворяющие на границе следующим краевым условиям (узлы из рассмотрения исключаются): на разрезах

$$(N - iT)^+ = (N - iT)^- = 0, \quad (9.3)$$

на участке идеального контакта

$$(N - iT)^+ = (N - iT)^-, \quad (9.4)$$

$$\frac{d}{dt} \left[(u_1 + iu_2)^+ - (u_1 + iu_2)^- \right] = 0.$$

Здесь верхними индексами $+$ и $-$ отмечены левые и правые предельные значения по отношению к выбранному положительному направлению обхода (на рис. 9.1 указано стрелками); $t \in l$.

Используя (9.1) и (9.2), перепишем краевые условия (9.3), (9.4) в виде

$$\begin{aligned} \Phi^+(t) + \overline{\Phi^+(t)} + \exp[2i\theta(t)] \lim_{z \rightarrow t^+} [\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)] &= \\ = \Phi^-(t) + \overline{\Phi^-(t)} + \exp[2i\theta(t)] \lim_{z \rightarrow t^-} [\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)] &= 0, \end{aligned} \quad (9.5)$$

$$\exp[2i\theta(t)] = \frac{dt}{dt}, \quad t \in L_1 \cup L_2 \cup L_3,$$

$$\begin{aligned} \Phi^+(t) + \overline{\Phi^+(t)} + \exp[2i\theta(t)] \lim_{z \rightarrow t^+} [\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)] &= \\ = \Phi^-(t) + \overline{\Phi^-(t)} + \exp[2i\theta(t)] \lim_{z \rightarrow t^-} [\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)], & \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{\mu_1} \left[\kappa_1 \phi^+(t) - t \overline{\Phi^+(t)} - \overline{\psi^+(t)} \right] - \frac{1}{\mu} \left[\kappa \psi^-(t) - t \overline{\Phi^-(t)} - \overline{\psi^-(t)} \right] \right\} = 0,$$

$$\exp[2i\theta(t)] = \frac{dt}{dt}, \quad t \in L_4.$$

Заметим прежде всего, что вектор напряжения должен быть непрерывен при переходе через границу на всех ее участках.

Благодаря тому, что в формулах (9.1), связывающих компоненты тензора напряжения с комплексными потенциалами, упругие постоянные не участвуют, оказывается возможным построить интегральные представления для этих потенциалов, автоматически удовлетворяющие условию непрерывности вектора напряжения при переходе через границу и содержащие всего одну неизвестную комплексную функцию (плотность) точек границы.

Используя [48, 102], разыскиваем комплексные потенциалы в виде

$$\Phi(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega(\tau) d\tau}{\tau - z} + A^{(\infty)} + \begin{cases} E/\lambda, & z \in D_1, \\ 0, & z \in D, \end{cases} \quad (9.6)$$

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{\omega(\tau) d\tau}}{\tau - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\bar{\tau} \omega(\tau) d\tau}{(\tau - z)^2} + B^{(\infty)},$$

$$A^{(\infty)} = \frac{\sigma_{11}^{(\infty)} + \sigma_{22}^{(\infty)}}{4}, \quad B^{(\infty)} = \frac{\sigma_{22}^{(\infty)} - \sigma_{11}^{(\infty)} + 2i\sigma_{12}^{(\infty)}}{2},$$

$$E = \frac{i}{4\pi} \operatorname{Re} \int_{L_4} \frac{\omega(\tau) d\tau}{\tau - z_1}, \quad \lambda = \frac{\mu}{\mu_1}.$$

Неизвестную комплексную плотность $\omega(\tau)$ считаем принадлежащей на L классу H^* [39], причем узлами являются точки c, c_1, c_2, c_3 . В качестве z_1 можно брать любую фиксированную точку из области D_1 .

Непосредственной подстановкой представлений (9.6) в краевые условия (9.5) убеждаемся, что вектор напряжения непрерывен при переходе через границу L (в узлах краевые условия не записываются).

Чисто мнимая постоянная E , описывающая поворот включения, как жесткого целого, введена в представления для того, чтобы полученное в следующем параграфе интегральное уравнение краевой задачи было справедливо во всем диапазоне $0 \leq \lambda < \infty$.

Сделаем следующее замечание. Полученные из (9.6) представления для потенциалов $\phi(z)$ и $\psi(z)$ содержат логарифмические ядра, вследствие чего соответствующий вектор перемещения является, вообще говоря, неоднозначной функцией. Из сравнения (9.1) и (9.6) вытекает необходимое и достаточное условие однозначности вектора перемещения

$$\int_L \omega(\tau) d\tau = 0. \quad (9.7)$$

Ясно, что выбор для рассмотрения изображенной на рис. 9.1 конфигурации нисколько не ограничивает общности изложения и продиктован лишь желанием избежать громоздких обозначений. Например, в случае нескольких включений представления (9.6) сохранят свой вид за исключением того, что постоянные E и λ будут принимать различные значения в областях, соответствующих различным включениям, а условие (9.7) заменится несколькими подобными.

Интегральное уравнение краевой задачи (9.5). Подставляя представления (9.6) в оставшиеся пока не выполненными краевые условия и вычисляя предельные значения входящих сюда интегралов, а также используя свойство переместимости операций дифференцирования и предельного перехода для интегралов типа Коши, получаем интегральное уравнение относительно искомой плотности $\omega(t)$

$$\begin{aligned} A(t)\omega(t) + \frac{B(t)}{\pi i} \int_L \frac{\omega(\tau) d\tau}{\tau - t} + \frac{R(t)}{2\pi i} \int_L K_1(t, \tau) \omega(t) d\tau + \\ + \frac{R(t)}{2\pi i} \int_L \overline{K_2(t, \tau) \omega(t) d\tau} - e(t) E = g(t), \quad t \in L, \end{aligned} \quad (9.8)$$

где

$$\begin{aligned} K_1(t, \tau) &= \frac{1}{\tau - t} \cdot \left(\frac{\tau - t}{\tau - t} \cdot \frac{d\bar{t}}{dt} - 1 \right), \\ \overline{K_2(t, \tau)} &= \frac{1}{\tau - t} \cdot \left(\frac{\tau - t}{\tau - t} \cdot \frac{d\bar{t}}{dt} - 1 \right), \\ A(t) &= \begin{cases} \frac{(\kappa+1) + \lambda(\kappa_1+1)}{2}, & t \in L_4, \\ 0, & t \in L_1 \cup L_2 \cup L_3, \end{cases} \\ B(t) &= \begin{cases} \frac{(1-\kappa) - \lambda(1-\kappa_1)}{2}, & t \in L_4 \\ 1, & t \in L_1 \cup L_2 \cup L_3, \end{cases} \\ R(t) &= \begin{cases} 1 - \lambda, & t \in L_4 \\ 1, & t \in L_1 \cup L_2 \cup L_3, \end{cases} \\ e(t) &= \begin{cases} \kappa_1 + 1, & t \in L_4 \\ 0, & t \in L_1 \cup L_2 \cup L_3, \end{cases} \\ g(t) &= 2B(t)A^{(\infty)} + R(t)\overline{B^{(\infty)}} \cdot \frac{d\bar{t}}{dt}. \end{aligned}$$

Ядра $K_1(t, \tau)$ и $K_2(t, \tau)$ при стремлении точки τ к точке t , когда τ и t принадлежат одновременно одной из дуг L_j , ведут себя, в смысле гладкости, как кривизна этой дуги. Поэтому на L , за исключением сколь угодно малой окрестности узла c , ядра K_1 и K_2 принадлежат классу H_0 [39]. В узле c , где сходятся не касательные друг к другу дуги, ядра K_1 и K_2 имеют сингулярные особенности.

Таким образом, уравнение (9.8) является сингулярным интегральным уравнением с неподвижной особенностью. Решение этого уравнения будем разыскивать в классе H^* (узлы — c, c_1, c_2, c_3).

Для того чтобы подчинить решение уравнения (9.8) условию однозначности вектора перемещения (9.7), поступим следующим образом.

Обозначим через Y_1 приращение вектора перемещения (в плоскости $x_1 0 x_2$) на пути, лежащем в D_1 : левый берег разреза L_3 от узла c_3 до узла c , правый берег разреза L_1 от узла c до узла c_1 , левый берег разреза L_1 от узла c_1 до узла c . Через Y обозначим приращение вектора перемещения на лежащем в D пути: правый берег разреза L_3 от узла c_3 до узла c , левый берег разреза L_2 от узла c до узла c_2 , правый берег разреза L_2 от узла c_2 до узла c .

Будем разыскивать решение уравнения (9.8), удовлетворяющее дополнительному условию

$$Y_1 = Y. \quad (9.9)$$

В D_1 вектор перемещения, соответствующий представлениям (9.6), является однозначной функцией (следует помнить при этом, что лежащие на разных берегах разреза точки — разные точки). Приращения вектора перемещения вдоль левой и правой сторон дуги L_4 от узла c до узла c_3 равны между собой, если только на L_4 выполнено уравнение (9.8). Следовательно, любое решение уравнения (9.8), удовлетворяющее дополнительному условию (9.9), необходимо удовлетворяет условию однозначности вектора перемещения (9.7).

Дополнительное условие (9.9) выделяет из всего множества решений уравнения (9.8) единственное решение. Точнее, имеет место предложение.

Решение уравнения (9.8) в классе H^* , удовлетворяющее условию (9.9), если такое решение существует, единственно. Это утверждение для всего диапазона $0 \leq \lambda < \infty$ доказано в [13, 14, 16].

Отметим теперь ряд частных ситуаций, описываемых представлениями (9.6) и уравнением (9.8). Если упругие постоянные среды внутри и вне контура Γ одинаковы, то из (9.8) следует, что $\omega(\tau) = 0$ на L_4 , и мы имеем представления и интегральное уравнение для ветвящегося разреза в однородной среде.

Если отсутствуют разрезы L_1 и L_2 , то уравнение (9.8) и представления (9.6) соответствуют случаю инородного включения с кусочно-гладким контуром, когда на линии раздела материалов расположен разрез. Если при этом также $\lambda = 0$ (абсолютно жесткое включение), то получаем интегральное уравнение и представления смешанной задачи для области D с кусочно-гладкой границей: на L_3 заданы усилия (нулевые), на L_4 — перемещения (поворот включения, как жесткого целого).

Если отсутствуют разрезы L_1 и L_2 и кривизна окрестности точки c контура Γ удовлетворяет условию Гельдера (случай инородного включения с гладким контуром, когда на линии раздела материалов расположен разрез), то уравнение (9.8) превращается в классическое сингулярное интегральное уравнение с разрывными коэффициентами [39].

Докажем существование решения уравнения (9.8) для этого случая. Коэффициент $G(t)$ соответствующей уравнению задачи сопряжения равен

$$G(t) = \frac{A(t) - B(t)}{A(t) + B(t)} = \begin{cases} \frac{\lambda + \kappa}{1 + \lambda \kappa}, & t \in L_4, \\ -1, & t \in L_3. \end{cases}$$

Выбирая ветвь $\ln G(t)$ так, что $\ln(-1) = \pi i$, находим порядки особенностей плотности $\omega(\tau)$ в узлах c_3 и c

$$\gamma = \gamma_{c_3} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2\pi} \ln \frac{\lambda + \kappa}{1 + \lambda \kappa},$$

$$\gamma = \gamma_C = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2\pi} \ln \frac{\lambda + \kappa}{1 + \lambda \kappa_0} + \kappa_0, \quad (9.10)$$

где κ_0 — индекс задачи сопряжения (формулы (9.10) отличаются знаком от общепринятых [39] в связи с тем, что здесь под порядком особенности γ в узле c мы понимаем показатель степени у величины $(\tau - c)$, стоящей в знаменателе, а именно $\omega(\tau) = \omega^*(\tau)/(\tau - c)^\gamma$). Поскольку, по физическому смыслу, вещественные части порядков особенностей должны быть в узлах c_3 и c одинаковы, то полагаем индекс $\kappa_0 = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \gamma = \gamma_{C_3} &= \frac{1}{2} + \frac{i}{2\pi} \ln \frac{\lambda + \kappa}{1 + \lambda \kappa_1}, \\ \gamma = \gamma_C &= \frac{1}{2} - \frac{i}{2\pi} \ln \frac{\lambda + \kappa}{1 + \lambda \kappa_1}. \end{aligned} \quad (9.11)$$

Согласно теоремам типа Нетера [39] (см. также гл. 6, п. 6.4)

$$k - k' = 2\kappa_0 = 2, \quad (9.12)$$

где k и k' — количества линейно-независимых (в узком смысле) решений соответствующего (9.8) однородного уравнения в классе h_0 и союзного к нему в классе h_2 . То есть

$$k \geq 2. \quad (9.13)$$

С другой стороны, согласно предыдущему предложению, соответствующее (9.8) однородное уравнение вместе с комплексным дополнительным условием (9.9) (приращения перемещений здесь вычисляются только вдоль L_3), имеют лишь нулевое решение. То есть

$$k \leq 2. \quad (9.14)$$

Объединяя (9.13) и (9.14), имеем

$$k = 2. \quad (9.15)$$

Подставляя (9.15) в (9.12), получаем $k' = 0$ и, следовательно, согласно теоремам типа Нетера, равно нулю количество условий разрешимости уравнения (9.8), налагаемых на его правую часть. Таким образом, в рассматриваемом случае, уравнение (9.8) вместе с дополнительным условием (9.9) разрешимы единственным образом в классе h_0 с порядками особенностей (9.11).

9.2. Некоторые плоские задачи теории упругости для изотропной области с дефектами типа трещин и включенияй

При рассмотрении плоской задачи теории упругости различают два вида упругого равновесия: 1) плоскую деформацию упругой среды, т. е. деформацию цилиндрических тел постоянного поперечного сечения, когда на тело действуют внешние силы, нормальные к его оси и одинаковые для всех поперечных (нормальных) сечений тела, и 2) обобщенное плоское напряженное состояние, т. е. деформацию тонкой пластины силами, действующими в ее плоскости. Если исследуемое изотропное тело отнесено к декартовой системе координат таким образом, что плоскость xOy совпадает для случая плоской деформации с поперечным сечением, а для случая обобщенного плоского напряженного

состояния — со срединной плоскостью пластины, то для определения напряженно-деформированного состояния в произвольной его точке необходимо найти три компоненты тензора напряжений σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} и две составляющие вектора перемещений u , v (рис. 9.2). Поперечное сечение или плоская изотропная среда отнесена к декартовой системе координат xOy .

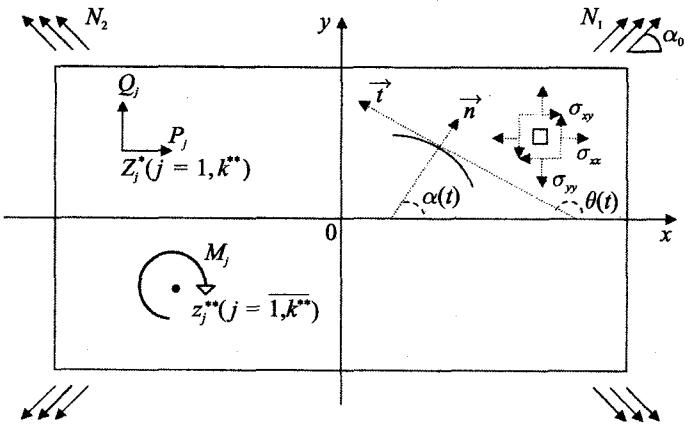


Рис. 9.2. Плоская бесконечная изотропная среда, подверженная сосредоточенными силами и моментами в ее плоскости

В работах Г. В. Колосова и Н. И. Мусхелишвили [26, 38] показано, что при отсутствии объемных сил компоненты напряжений σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} и составляющие перемещений u , v в декартовой системе координат выражаются через две аналитические функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, от одного комплексного переменного $z = x + iy$, упомянутого выше формулами (9.1):

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}] = 2\operatorname{Re}\Phi(z) \\ \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} &= 2[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)], \\ 2\mu(u + iv) &= \kappa\varphi(z) - z\overline{\Phi(z)} - \overline{\Psi(z)} \\ \varphi'(z) &= \Phi(z), \quad \Psi'(z) = \Psi(z). \end{aligned} \tag{9.1}$$

Здесь $\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ — модуль сдвига, E — модуль Юнга (упругости), ν — коэффициент Пуассона,

$$\kappa = \begin{cases} 3-4\nu & \text{для плоской деформации,} \\ \frac{3-\nu}{1+\nu} & \text{для обобщенного плоского напряженного состояния.} \end{cases}$$

Главный вектор сил, действующих вдоль произвольной дуги AB , расположенной внутри или на контуре пластины, определяется по формуле

$$X + iY = -i[\varphi(z) + z\overline{\Phi(z)} + \overline{\Psi(z)}] \Big|_A^B, \tag{9.16}$$

где X, Y — проекции главного вектора на оси координат x и y , $\left[\right]_A^B$ — обозначает разность выражения, записанного в скобках, при значениях z в точках A и B .

Если новая система координат $x_1O_1y_1$ связана со старой системой xOy соотношением

$$z = z_1 e^{i\alpha} + z_1^0, \quad (9.17)$$

где α и z_1^0 — поворот и перемещение старой относительно новой системы координат соответственно, а функции $\Phi_1(z_1)$ и $\Psi_1(z_1)$ выполняют ту же роль в системе $x_1O_1y_1$, что и функции $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ в системе xOy , то

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(z_1) &= \Phi(z_1 e^{i\alpha} + z_1^0), \\ \Psi_1(z_1) &= e^{2i\alpha} [\Psi(z_1 e^{i\alpha} + z_1^0) + \bar{z}_1^0 \Phi'(z_1 e^{i\alpha} + z_1^0)] \end{aligned} \right\} \quad (9.18)$$

Компоненты $\{\sigma_n, \sigma_s, \sigma_t\}$ тензора напряжений и составляющие вектора смещений в новой (локальной) системе координат (одна из осей — касательная к границе) связаны с соответствующими компонентами напряжений и смещений в старой (декартовой) системе координат xOy соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \sigma_n + \sigma_s &= \sigma_{xx} + \sigma_{yy}, \\ \sigma_n - \sigma_s + 2i\sigma_t &= e^{-2i\alpha} (\sigma_{xx} - \sigma_{yy} + 2i\sigma_{xy}), \\ u_n + iu_t &= e^{-i\alpha} (u + iv) \end{aligned} \right\} \quad (9.19)$$

Решение плоской задачи теории упругости сводится к отысканию двух аналитических функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ в области, занятой упругим телом, при использовании предельных значений этих функций на границе тела. Когда на его границе заданы напряжения (первая основная задача), граничное условие имеет известный для нас вид (9.2)

$$\Phi(t) + \overline{\Phi(t)} + \frac{dt}{dt} [\bar{t} \Phi'(t) + \Psi(t)] = \sigma_n - i\sigma_t, \quad (9.2)$$

где σ_n, σ_t — заданные нормальные и касательные компоненты внешнего напряжения, действующего на границе тела, и

$$\frac{dt}{dt} = \frac{\frac{dx}{ds} + i \frac{dy}{ds}}{\frac{ds}{dx} - i \frac{dy}{ds}} = e^{2i\vartheta(t)}, \quad (9.20)$$

$\vartheta(t)$ — угол, который образует касательная к контуру с осью Ox .

Когда на границе тела заданы перемещения (вторая основная задача), граничное условие имеет вид

$$\Phi(t) - \kappa \overline{\Phi(t)} + \frac{dt}{dt} [\bar{t} \Phi'(t) + \Psi(t)] = -2\mu \frac{d}{dt} (u - iv). \quad (9.21)$$

Здесь u, v — заданные на границе функции.

Если в бесконечной плоской среды действуют сосредоточенные силы $P_j + iQ_j$ в точках z_j^* ($j = \overline{1, k^*}$), моменты M_j в точках z_j^{**} ($j = \overline{1, k^{**}}$), а на бесконечности заданы вза-

имно перпендикулярные усилия интенсивности N_1 , N_2 и поворот ε_∞ , то комплексные потенциалы напряжений имеют вид

$$\Phi_0(z) = \Gamma - \sum_{j=1}^k \frac{P_j + iQ_j}{2\pi(1+\kappa)} \frac{1}{z - z_j^*}, \quad (9.22)$$

$$\Psi_0(z) = \Gamma' + \sum_{j=1}^k \left[\frac{\kappa(P_j - iQ_j)}{2\pi(1+\kappa)} \frac{1}{z - z_j^*} - \frac{\overline{z_j^*}(P_j + iQ_j)}{2\pi(1+\kappa)} \frac{1}{(z - z_j^*)^2} \right] - i \sum_{j=1}^k \frac{M_j}{2\pi} \frac{1}{(z - z_j^{**})^2}. \quad (9.23)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{1}{4}(N_1 + N_2) + \frac{2i\mu\varepsilon_\infty}{1+\kappa}, \\ \Gamma' &= -\frac{1}{2}(N_1 - N_2)e^{-2ia_0}, \end{aligned}$$

a_0 — угол между N_1 и осью Ox .

Вспомним некоторые основные соотношения из теории аналитических функций и сингулярных интегральных уравнений, которые необходимы в дальнейшем изложении.

Пусть L — простой замкнутый или разомкнутый гладкий контур в конечной части плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, а $\varphi(t)$ — непрерывная функция точек этого контура. Тогда интеграл

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau \quad (9.24)$$

представляет собой аналитическую функцию во всей комплексной плоскости, за исключением точек самого контура. Если функция $\varphi(t)$ — плотность интеграла типа Коши (9.24), удовлетворяет на L условию Гельдера, т. е. для любых двух точек t_1 и t_2 контура выполняется неравенство

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leq A |t_2 - t_1|^\lambda, \quad A > 0, \quad 0 < \lambda < 1, \quad (9.25)$$

то интеграл (9.24) имеет предельные значения $\Phi^\pm(t)$ при $z \rightarrow t$, ($t \in L$) во всех точках t , не совпадающих с его концами при приближении точки z к контуру соответственно слева (+) и справа (-) по отношению к выбранному положительному направлению. Эти предельные значения определяются формулами Сохоцкого–Племеля

$$\Phi^\pm(t) = \pm \frac{1}{2} \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau. \quad (9.26)$$

Если интеграл типа Коши берется по контуру, имеющему конечное число угловых точек, то предельное значение интеграла существует, причем для неугловых точек остаются в силе обычно формулы Сохоцкого–Племеля, а для угловых точек имеют место формулы

$$\left. \begin{aligned} \Phi^+(t) &= \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi} \right) \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau, \\ \Phi^-(t) &= -\frac{\alpha}{2\pi} \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau, \end{aligned} \right\} \quad (9.27)$$

где α — угол между правой и левой касательной к L в угловой точке.

Интеграл в правых частях формул Сохоцкого–Племеля понимается в смысле главного значения по Коши

$$\int_L \frac{\phi(\tau)}{\tau - t} d\tau = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{L-L_\varepsilon}^L \frac{\phi(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad (9.28)$$

где L_ε — часть кривой, попадающая в круг $|z - t| < \varepsilon$. Эти интегралы называются сингулярными.

Производная m -го порядка функции (9.24) определяется по формуле

$$\Phi^{(m)}(z) = \frac{m!}{2\pi i} \int_L \frac{\phi(\tau)}{(\tau - z)^{m+1}} d\tau. \quad (9.29)$$

Интегрируя ее m раз по частям с учетом замкнутости контура L или равенства нулю $\phi(\tau)$ на концах, если он разомкнут, предельные значения производной m -го порядка запишутся в виде Сохоцкого–Племеля:

$$\Phi^{(m)}(t) = \pm \frac{1}{2} \phi^{(m)}(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\phi^{(m)}(\tau)}{\tau - t} d\tau. \quad (9.30)$$

Пусть теперь L — простой замкнутый гладкий контур в плоскости z , разделяющий ее на область S^+ и S^- . Будем считать, что S^+ — та часть плоскости, которая остается слева при заданном направлении обхода контура. Рассмотрим интеграл типа Коши (9.24) с плотностью $\phi(t)$ по замкнутому контуру L . Если $z \in S^+$ и $\phi(t)$ — краевое значение аналитической в S^+ функции

$$\Phi^+(z) = \phi(z), \quad (9.31)$$

если $z \in S^-$ и $\phi(\tau)$ — краевое значение аналитической в S^- функции, то по формуле Коши для бесконечной области

$$\Phi^-(z) = -\phi(z) + \phi(\infty). \quad (9.32)$$

Беря предельные значения на контуре L и используя формулы Сохоцкого–Племеля, получаем

$$\phi(t) = \frac{1}{2} \phi(t) + \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{\phi(t)}{\tau - t} d\tau, \quad (9.33)$$

если $\phi(z)$ — аналитическая в S^+ , и

$$-\phi(t) + \phi(\infty) = -\frac{1}{2} \phi(t) + \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{\phi(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad (9.34)$$

если $\phi(z)$ — аналитическая в S^- .

Отсюда следует утверждение: для того чтобы функция была краевым значением функции, аналитической во внутренней области S^+ , необходимо и достаточно выполнения условия

$$-\frac{1}{2} \phi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\phi(\tau)}{\tau - t} d\tau = 0 \quad (9.35)$$

и соответственно для того чтобы $\phi(z)$ была краевым значением функции, аналитической во внешней области S^- , обязательно выполнение условия

$$\frac{1}{2} \phi(t) + \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{\phi(\tau)}{\tau - t} d\tau = \phi(\infty). \quad (9.36)$$

Следует заметить, что если $\varphi(z)$ голоморфна в S^+ и непрерывна на $S^+ + L$, за исключением конечного числа точек $z_0^j \in S^+$ ($j = \overline{1, N}$) области S^+ , где она имеет полюсы с главными частями $G_j(z)$ ($j = \overline{1, N}$), то

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau = \begin{cases} \varphi(z) - \sum_{j=1}^N G_j(z), & z \in S^+, \\ -\sum_{j=1}^N G_j(z), & z \in S^-. \end{cases} \quad (9.37)$$

Если же $\varphi(z)$ голоморфна в S^- и непрерывна на $S^- + L$, за исключением конечного числа точек $z_0^j \in S^-$ ($j = \overline{1, N}$), где она имеет полюсы с главными частями $G_j(z)$ ($j = \overline{1, N}$), то

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau = \begin{cases} \sum_{j=1}^N G_j(z), & z \in S^+, \\ -\varphi(z) + \sum_{j=1}^N G_j(z), & z \in S^-. \end{cases} \quad (9.38)$$

Задача 1. Первая, вторая и смешанная задачи теории упругости для тел с трещинами.

А: Рассмотрим плоскую изотропную пластину, отнесенную к декартовой системе координат xOy и ослабленную системой произвольно расположенных $N(n_1 \cup n_2 \cup n_3)$ криволинейных трещин. На бесконечности действуют два взаимно перпендикулярных усилия N_1 и N_2 (рис. 9.3). Предположим теперь, что на берегах трещин заданы следующие граничные условия: 1) на n_1 — нормальные и касательные усилия, 2) на n_2 — производные от перемещений и 3) на n_3 — нормальные и касательные напряжения на одном краю и производная от перемещений на других.

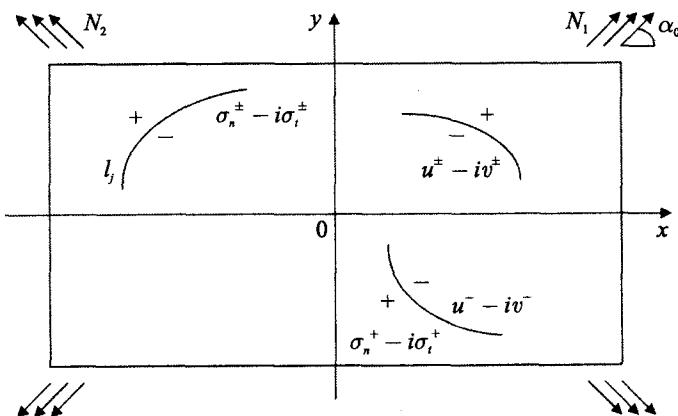


Рис. 9.3. Плоская бесконечная изотропная пластина ослабленная системой произвольно расположенных N криволинейных трещин

Для рассматриваемого случая комплексные потенциалы Колосова–Мусхелишвили имеют следующий вид:

$$\Phi_0(z) = \Gamma + \Phi(z), \quad (9.39)$$

$$\Psi_0(z) = \Gamma' + \Psi(z).$$

Здесь

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2\pi i l_j} \int \frac{\varphi_j(\tau)}{\tau - z} d\tau \quad (9.40)$$

— функция, характеризующая возмущения механического поля в окрестности разрезов.

На основании формул (9.2) и (9.21) граничные условия на берегах трещин можно записать в виде

$$(\sigma_n^\pm - i\sigma_t^\pm) = \Phi_0^\pm + \overline{\Phi_0^\pm(t)} + \frac{dt}{dt} \left[i\Phi_0^\pm(t) + \Psi_0^\pm(t) \right], \quad t \in l_j \quad (j = \overline{1, n_1}), \quad (9.41)$$

$$2\mu \left\{ -\frac{du^\pm}{dt} + i \frac{dv^\pm}{dt} \right\} = \Phi_0^\pm(t) - \kappa \overline{\Phi_0^\pm(t)} + \frac{dt}{dt} \left[i\Phi_0^\pm + \Psi_0^\pm(t) \right], \quad t \in l_j \quad (j = \overline{n_1+1, n_1+n_2}), \quad (9.42)$$

$$\begin{cases} \sigma_n^+ - i\sigma_t^+ = \Phi_0^+(t) + \overline{\Phi_0^+(t)} + \frac{dt}{dt} \left[i\Phi_0^{+'}(t) + \Psi_0^+(t) \right], \\ 2\mu \left\{ -\frac{du^-}{dt} + i \frac{dv^-}{dt} \right\} = \Phi_0^-(t) - \kappa \overline{\Phi_0^-(t)} + \frac{dt}{dt} \left[i\Phi_0^{-'}(t) + \Psi_0^-(t) \right], \end{cases} \quad t \in l_j \quad (j = \overline{n_1+n_2+1, N}). \quad (9.43)$$

Разрешая каждое из выражений (9.41)–(9.43) относительно $\Psi^+(t) - \Psi^-(t)$ и применяя формулы Сохоцкого–Племеля, получим выражение $\Psi(z)$:

$$\Psi(z) = \sum_{j=1}^N \left[\frac{1}{2\pi i l_j} \int \frac{q_i^{(j)}(\tau)}{\tau - z} d\tau - \frac{1}{2\pi i l_j} \int \frac{\overline{\nu_j(\tau)}}{\tau - z} d\tau - \frac{1}{2\pi i l_j} \int \frac{\bar{\tau}\varphi_j(\tau)}{(\tau - z)^2} d\tau \right]. \quad (9.44)$$

Здесь:

$$\left. \begin{aligned} q_i^{(j)} &= (\sigma_n^+ - \sigma_n^-) - i(\sigma_t^+ - \sigma_t^-), \\ \nu_j(t) &= \varphi_j(t) \end{aligned} \right\} \quad t \in l_j \quad (j = \overline{1, n_1}), \quad (9.45)$$

$$\left. \begin{aligned} q_i^{(j)} &= -2\mu \frac{d}{dt} [(u^+(t) - u^-(t)) - i(v^+(t) - v^-(t))], \\ \nu_j(t) &= \varphi_j(t) \end{aligned} \right\} \quad t \in l_j \quad (j = \overline{n_1+1, n_2}),$$

$$\left. \begin{aligned} q_i^{(j)} &= \sigma_n^+ - i\sigma_t^+ + 2\mu \frac{d}{dt} [u^-(t) - iv^-], \\ \nu_j(t) &= -\kappa\varphi_j(t) \end{aligned} \right\} \quad t \in l_j, \quad j = \overline{n_1+n_2+1, N}.$$

Перейдем к построению системы уравнений, удовлетворяющей граничным условиям задачи. Складывая соответственно выражения (9.41)–(9.43) и принимая во внимание

формулы Сохоцкого–Племеля для предельных значений функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, получим следующую систему СИУ:

$$\begin{aligned} \beta_k(t)\varphi_k(t) + \frac{1}{\pi i} \int_{l_k}^t \frac{\varphi_k(\tau)}{\tau-t} d\tau + \frac{\alpha_k}{\pi i} \int_{l_k}^t \frac{\overline{\varphi_k(\tau)}}{\tau-t} d\tau - \frac{dt}{dt} \left[\frac{1}{\pi i} \int_{l_k}^t \frac{v_k(\tau)}{\tau-t} d\tau + \frac{1}{\pi i} \int_{l_k}^t \frac{\bar{\tau}-\bar{t}}{(\tau-t)^2} \varphi_k(\tau) d\tau \right] + \\ + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \left\{ \frac{1}{\pi i} \int_{l_j}^t \frac{\varphi_j(\tau)}{\tau-t} d\tau + \frac{\alpha_k}{\pi i} \int_{l_j}^t \frac{\overline{\varphi_j(\tau)}}{\tau-t} d\tau - \frac{dt}{dt} \left[\frac{1}{\pi i} \int_{l_j}^t \frac{v_j(\tau)}{\tau-t} d\tau + \frac{1}{\pi i} \int_{l_j}^t \frac{\bar{\tau}-\bar{t}}{(\tau-t)^2} \varphi_j(\tau) d\tau \right] \right\} = \quad (9.46) \\ = q_2^{(k)}(t) - \frac{dt}{dt} \left[\frac{1}{\pi i} \int_{l_k}^t \frac{q_1^{(k)}(\tau)}{\tau-t} d\tau + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \frac{q_1^{(j)}(\tau)}{\tau-t} d\tau \right], \quad t \in l_k, \quad k = \overline{1, N}, \end{aligned}$$

где

$$v_k(t) = \alpha_k \varphi_k(t) - \frac{\beta_k}{\pi i} \sum_{j=1}^N \int_{l_j}^t \frac{\varphi_j(\tau)}{\tau-t} d\tau \quad (9.47)$$

$$\begin{cases} \beta_k = 0, \quad \alpha_k = -1, \quad q_2^{(k)}(t) = (\sigma_n^+ + \sigma_n^-) - i(\sigma_t^+ + \sigma_t^-) - 2 \left(\Gamma + \bar{\Gamma} + \frac{dt}{dt} \Gamma' \right), \quad k = \overline{1, n_1}, \\ \beta_k = 0, \quad \alpha_k = \kappa, \quad q_2^{(k)}(t) = -2\mu \frac{d}{dt} \{ (u^+(t) + u^-(t)) - i(v^+(t) + v^-(t)) \} + \\ + 2 \left[\kappa \bar{\Gamma} - \Gamma - \frac{dt}{dt} \Gamma' \right], \quad k = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2}, \\ \beta_k = \frac{\kappa + 1}{2}, \quad \alpha_k = \frac{\kappa - 1}{2}, \quad q_2^{(k)} = \sigma_n^+ - i\sigma_t^+ - 2\mu \frac{d}{dt} [u^-(t) - iv^-(t)] + (\kappa - 1) \bar{\Gamma} - \\ - 2(\Gamma + \frac{dt}{dt} \Gamma'), \quad k = \overline{n_1 + n_2 + 1, N}. \end{cases} \quad (9.48)$$

Для единственности решения поставленной задачи необходимо систему уравнений (9.46) дополнить условием однозначности перемещений вокруг контуров трещин.

$$\begin{aligned} \int_{l_k}^t \varphi_k(t) dt = \frac{1}{\kappa + 1} \int_{l_k}^t \overline{q_1^{(k)}(\tau)} d\tau, \quad k = \overline{1, n_1}, \\ \int_{l_k}^t [\kappa \varphi_k(t) + V_k(t)] dt = \int_{l_k}^t \overline{q_1^{(k)}} d\tau, \quad k = \overline{n_1 + n_2 + 1, N}. \end{aligned} \quad (9.49)$$

Условие однозначности перемещений вокруг трещины l_k ($k = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2}$) удовлетворяется тождественно, так как

$$\begin{aligned} u^+(a) + iv^+(a) &= u^-(a) + iv^-(a), \\ u^+(b) + iv^+(b) &= u^-(b) + iv^-(b), \end{aligned} \quad (9.50)$$

где a, b — концы трещины.

Б: Пусть теперь растянутая на бесконечности упругая область ослаблена периодической системой разрезов, когда в основной полосе периодов шириной ω (вдоль оси ox) имеется N криволинейных разрезов l_j ($j = \overline{1, N}$) (рис. 9.4). На берегах трещин заданы те же три типа граничных условий, что и для произвольной системы трещин. Поскольку напряжено-деформированное состояние каждой полосы одинаково, достаточно найти комплексные потенциалы (с периодом ω) для основной полосы.

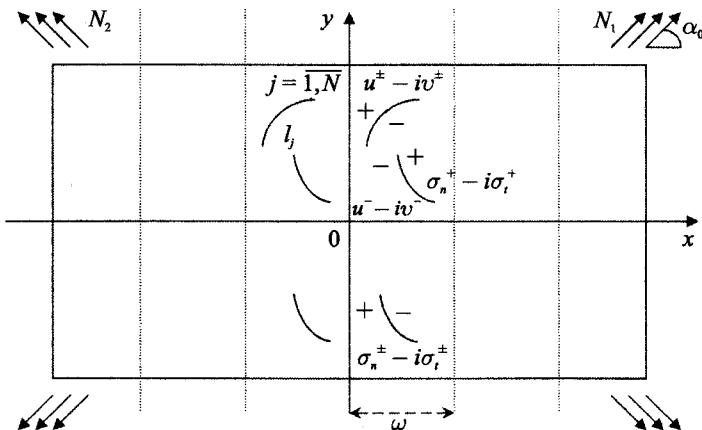


Рис. 9.4. Упругая плоскость, ослабленная периодической системой разрезов

Относительно вышесказанных комплексных потенциалов $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ удовлетворяются следующие условия:

$$\left. \begin{array}{l} \Phi(z + \omega) = \Phi(z), \\ \Psi(z + \omega) = \Psi(z) - \omega \Phi'(z). \end{array} \right\} \quad (9.51)$$

Условия (9.51) вытекают из формул (9.18), где $\Phi(z)$ — периодическая функция. Вместо функции $\Psi(z)$ введем новую функцию

$$\underline{\Omega}(z) = \Psi(z) + z \Phi'(z), \quad (9.52)$$

которая является периодической функцией.

Воспользуемся известной формулой из монографии [84]

$$\pi \operatorname{ctg}(\pi x) = \frac{1}{x} + 2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 - n^2}, \quad (9.53)$$

представим комплексный потенциал для основной полосы периодов, выраженный суммой интегралов типа Коши в виде

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2\omega i} \int_{l_j} \phi_j(\tau) \operatorname{ctg} \frac{\pi(\tau - z)}{\omega} d\tau. \quad (9.54)$$

Границные условия на берегах трещин запишутся в виде

$$\sigma_n^{\pm} - i \sigma_t^{\pm} = \Phi_0^{\pm}(t) + \overline{\Phi_0^{\pm}(t)} + \frac{dt}{dt} \left\{ (\bar{t} - t) \Phi_0'^{\pm}(t) + \underline{\Omega}_0^{\pm}(t) \right\}, \quad t \in l_j \quad (j = \overline{1, n_1}), \quad (9.55)$$

$$-2\mu \frac{d}{dt} [u^\pm(t) - iv^\pm(t)] = \Phi_0^\pm(t) - \kappa \overline{\Phi_0^\pm(t)} + \frac{dt}{dt} \left\{ (\bar{t}-t) \Phi_0'^\pm(t) + \underline{\Omega}_0^\pm(t) \right\}, \quad t \in l_j \quad (j = \overline{n_1+1, n_1+n_2}) \quad (9.56)$$

$$\begin{cases} \sigma_n^+ - i\sigma_i^+ = \Phi_0^+(t) + \overline{\Phi_0^+(t)} + \frac{dt}{dt} \left\{ (\bar{t}-t) \Phi_0'^+(t) + \underline{\Omega}_0^+(t) \right\}, \\ -2\mu \frac{d}{dt} [u^-(t) - iv^-(t)] = \Phi_0^-(t) - \kappa \overline{\Phi_0^-(t)} + \frac{dt}{dt} \left\{ (\bar{t}-t) \Phi_0'^-(t) + \underline{\Omega}_0^-(t) \right\}, \\ \quad t \in l_j \quad (j = \overline{n_1+n_2+1, N}). \end{cases} \quad (9.57)$$

Разрешая каждое из выражений (9.55)–(9.57) относительно $\underline{\Omega}^+(t) - \underline{\Omega}^-(t)$ и принимая во внимание формулы Сохоцкого–Племеля для $\Phi(z)$, $\Phi'(z)$ при $z \rightarrow t \in l_k$

$$\Phi^\pm(t) = \pm \frac{1}{2} \varphi_k(t) + \sum_{j=1}^N \frac{1}{2\omega i} \int_{l_j} \varphi_j(\tau) \operatorname{ctg} \frac{\pi(\tau-t)}{\omega} d\tau, \quad (9.58)$$

$$\Phi'^\pm(t) = \pm \frac{1}{2} \varphi_k(t) + \sum_{j=1}^N \frac{\pi}{2\omega^2 i} \int_{l_j} \varphi_j(\tau) \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi(\tau-t)}{\omega} d\tau, \quad (9.59)$$

получим следующее интегральное выражение для $\underline{\Omega}(z)$:

$$\begin{aligned} \underline{\Omega}(z) = & \sum_{j=1}^N \left[\frac{1}{2\omega i} \int_{l_j} q_1^{(j)}(\tau) \operatorname{ctg} \frac{\pi(\tau-z)}{\omega} d\tau - \right. \\ & - \frac{1}{2\omega i} \int_{l_j} \operatorname{ctg} \frac{\pi(\tau-z)}{\omega} \left[\varphi_j(\tau) d\tau + \overline{v_j(\tau) d\tau} \right] - \\ & - \frac{\pi}{2\omega^2 i} \int_{l_j} (\bar{\tau} - \tau) \varphi_j(\tau) \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi(\tau-z)}{\omega} d\tau \left. \right]. \end{aligned} \quad (9.60)$$

Складывая соответственно выражения (9.55)–(9.57) и принимая во внимание формулы Сохоцкого–Племеля, получим следующую систему СИУ:

$$\begin{aligned} \beta_k \varphi_k(t) + \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{1}{\omega i} \int_{l_j} \varphi_j(\tau) \operatorname{ctg} \frac{\pi(\tau-t)}{\omega} d\tau + \frac{\alpha_k}{\omega i} \int_{l_j} \overline{\varphi_j(\tau)} \operatorname{ctg} \frac{\pi(\bar{\tau}-t)}{\omega} d\bar{\tau} - \right. \\ \left. - \frac{dt}{dt} \left\{ \frac{1}{\omega i} \int_{l_j} \operatorname{ctg} \frac{\pi(\tau-t)}{\omega} \left[\varphi_j(\tau) d\tau + \overline{v_j(\tau) d\tau} \right] + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\pi}{\omega^2 i} \int_{l_j} (\bar{\tau} - \tau) - (\bar{t} - t) \right] \varphi_j(\tau) \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi(\tau-t)}{\omega} d\tau = \right. \end{aligned} \quad (9.61)$$

$$= q_2^{(k)}(t) - \frac{dt}{dt} \sum_{j=1}^N \frac{1}{\omega i} \int_{l_j} q_1^{(j)}(\tau) \operatorname{ctg} \frac{\pi(\tau-t)}{\omega} d\tau, \quad t \in l_k \quad (k = \overline{1, N}),$$

$$\nu_k(t) + \alpha_k \varphi_k(t) + \sum_{j=1}^N \frac{\beta_k}{\omega i} \int_{l_j} \varphi_j(\tau) \operatorname{ctg} \frac{\pi(\tau-t)}{\omega} d\tau = 0, \quad t \in l_k \quad (k = \overline{1, N}). \quad (9.62)$$

В: Пусть растянутая на бесконечности упругая плоскость ослаблена циклически размешенными криволинейными трещинами. При этом будем считать, что каждая последующая система разрезов l_k ($k = 1, N$) получается (без наложения) из предыдущей системы путем поворота относительно точки O предыдущей системы на угол $2\pi/n$, т. е. вся плоскость состоит из циклически повторяющихся секторов (рис. 9.5), усилия на бесконечности приложены таким образом, что напряженно-деформированное состояние области удовлетворяет условиям циклической симметрии, т. е.

$$\begin{cases} N_1 = N_2 = \Gamma + \bar{\Gamma}, \\ N_1 - N_2 = \Gamma' = 0. \end{cases} \quad (9.63)$$

Границные условия на берегах трещин аналогичны условиям задачи с произвольной системой трещин и условием периодической задачи. Здесь нужно найти комплексные потенциалы основного сектора, удовлетворяющие условиям циклической симметрии. Принимая во внимание, что для двух секторов напряженно-деформированное состояние одинаково, значит имеем

$$\begin{cases} \sigma_{xx}(z) + \sigma_{yy}(z) = \sigma_{xx}(\varepsilon z) + \sigma_{yy}(\varepsilon z), \\ \varepsilon^2 [\sigma_{xx}(z) - \sigma_{yy}(z) + 2i\sigma_{xy}(z)] = \sigma_{xx}(\varepsilon z) - \sigma_{yy}(\varepsilon z) + 2i\sigma_{xy}(\varepsilon z), \\ \varepsilon [u(z) + iv(z)] = u(\varepsilon z) + iv(\varepsilon z), \end{cases} \quad (9.64)$$

где $\varepsilon = e^{2\pi i/n}$.

Условия циклической симметрии (9.64), выраженные через комплексные потенциалы $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, запишутся в следующем виде:

$$\begin{cases} \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} = \Phi(\varepsilon z) + \overline{\Phi(\varepsilon z)}, \\ \varepsilon^{-2} [\overline{z\Phi'(z)} + \Psi(z)] = \overline{\varepsilon z\Phi'(\varepsilon z)} + \Psi(\varepsilon z), \\ \varepsilon [k\varphi(z) - z\overline{\Phi(z)} - \overline{\psi(z)}] = k\varphi(\varepsilon z) - \varepsilon z\overline{\Phi(\varepsilon z)} - \overline{\psi(\varepsilon z)}. \end{cases} \quad (9.65)$$

Из условий (9.64) находим

$$\begin{cases} \Phi(\varepsilon z) = \Phi(z), \\ \Psi(\varepsilon z) = \varepsilon^{-2} \Psi(z), \\ \varphi(\varepsilon z) = \varepsilon \varphi(z), \\ \psi(\varepsilon z) = \overline{\varepsilon \psi(z)}. \end{cases} \quad (9.66)$$

Откуда следует, что функции $\Phi(z)$ и $\underline{\varphi}(z)$, где

$$\underline{\varphi}(z) = z^{2-n} \Psi(z), \quad (9.67)$$

удовлетворяют условиям циклической симметрии.

Принимая во внимание тождество

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varepsilon^k}{\varepsilon^k t - z} = \frac{nt^{n-1}}{t^n - z^n}, \quad (9.68)$$

комплексный потенциал $\Phi(z)$ для основного сектора запишем в виде

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^N \frac{n}{2\pi i} \int_{l_j} \varphi_j(\tau) \frac{\tau^{n-1}}{\tau^n - z^n} d\tau. \quad (9.69)$$

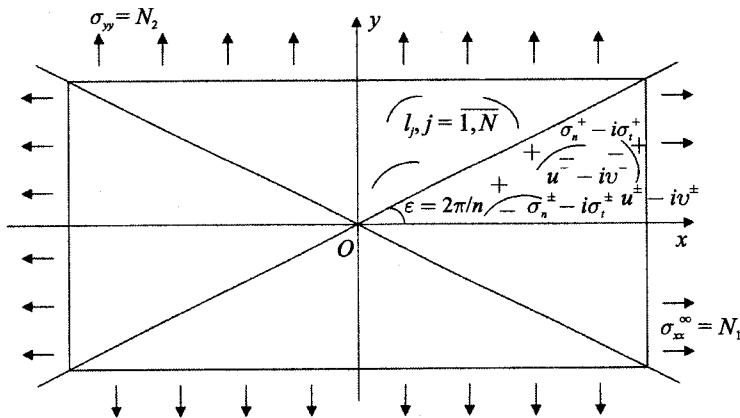


Рис. 9.5. Бесконечная упругая плоскость, ослабленная циклически размещеными криволинейными трещинами

Границные условия на берегах трещин, выраженные через $\Phi(z)$ и $\underline{\Phi}(z)$, удовлетворяющие условиям циклической симметрии, запишутся в виде

$$(\sigma_n^\pm - i\sigma_t^\pm) = \Phi_0^\pm(t) + \overline{\Phi_0^\pm(t)} + \frac{dt}{dt} \left\{ \bar{t} \Phi_0'^\pm + t^{n-2} \underline{\Omega}_0^\pm(t) \right\}, \quad t \in l_j \quad (j = \overline{l, n_1}), \quad (9.70)$$

$$-2\mu \frac{d}{dt} [u^\pm(t) - iv^\pm(t)] = \Phi_0^\pm(t) - \kappa \overline{\Phi_0^\pm(t)} + \frac{dt}{dt} \left\{ \bar{t} \Phi_0'^\pm(t) + t^{n-2} \underline{\Omega}_0^\pm(t) \right\}, \quad t \in l_j \quad (j = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2}), \quad (9.71)$$

$$\begin{cases} \sigma_n^+ - i\sigma_t^+ = \Phi_0^+ + \overline{\Phi_0^+(t)} + \frac{dt}{dt} \left\{ \bar{t} \Phi_0'^+(t) + t^{n-2} \underline{\Omega}_0^+(t) \right\}, \\ -2\mu \frac{d}{dt} [u^-(t) - iv^-(t)] = \Phi_0^-(t) - \kappa \overline{\Phi_0^-(t)} + \frac{dt}{dt} \left\{ \bar{t} \Phi_0'^-(t) + t^{n-2} \underline{\Omega}_0^-(t) \right\}, \end{cases} \quad t \in l_j \quad (j = \overline{n_1 + n_2 + 1, N}). \quad (9.72)$$

Разрешая каждое из выражений (9.70)–(9.72) относительно $\underline{\Omega}^+(t) - \underline{\Omega}^-(t)$ и принимая во внимание формулы Сохоцкого–Племеля для $\Phi(z)$, $\Phi'(z)$ при $z \rightarrow t \in l_k$

$$\Phi^\pm(t) = \pm \frac{1}{2} \varphi_k(t) + \sum_{j=1}^N \frac{n}{2\pi i} \int_{l_j} \varphi_j(\tau) \frac{\tau^{n-1}}{\tau^n - t^n} d\tau, \quad (9.73)$$

$$\Phi'^\pm(t) = \pm \frac{1}{2} \varphi'_k(t) + \sum_{j=1}^N \frac{n^2}{2\pi i} \int_{l_j} \varphi_j(\tau) \frac{\tau^{n-1} t^{n-1}}{(\tau^n - t^n)^2} d\tau, \quad (9.74)$$

получим следующее выражение для $\underline{\Omega}(z)$:

$$\underline{\Omega}(z) = \sum_{j=1}^N \left[\frac{n}{2\pi i} \int_{l_j} \tau q_1^{(j)}(\tau) \frac{d\tau}{\tau^n - z^n} - \frac{n}{2\pi i} \int_{l_j} \overline{\tau v_j(\tau)} \frac{d\tau}{\tau^n - z^n} - \frac{n^2}{2\pi i} \int_{l_j} \overline{\tau \varphi_j(\tau)} \frac{(n-1)\tau^n + z^n}{(\tau^n - z^n)^2} d\tau \right]. \quad (9.75)$$

Складывая соответственно выражения (9.70)–(9.72) и принимая во внимание формулы Сохоцкого–Племеля, получим следующую систему СИУ:

$$\begin{aligned} & \beta_k \varphi_k(t) + \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{n}{\pi i} \int_{l_j} \varphi_j(\tau) \frac{\tau^{n-1}}{\tau^n - t^n} d\tau + \alpha_k \frac{n}{\pi i} \int_{l_j} \overline{\varphi_j(\tau)} \frac{\overline{\tau}^{n-1}}{\overline{\tau}^n - \overline{t}^n} d\tau - \right. \\ & \left. - \frac{dt}{dt} \left\{ \frac{n}{\pi i} \int_{l_j} \overline{v_j(\tau)} \frac{\tau t^{n-2}}{\tau^n - t^n} d\tau + \frac{n}{\pi i} \int_{l_j} \overline{\varphi_j(\tau)} \frac{t^{n-2} \{[(n-1)\tau^n + t^n]\bar{\tau} - n\tau^{n-1}t\bar{t}\}}{(t^n - \tau^n)^2} \right\} \right\} = \\ & = q_2^{(k)}(t) - \frac{dt}{dt} \sum_{j=1}^N \frac{n}{\pi i} \int_{l_j} q_1^{(j)}(\tau) \frac{\tau t^{n-2}}{\tau^n - t^n} d\tau, \quad t \in l_k, \quad k = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (9.76)$$

$$v_k(t) + \alpha_k \varphi_k(t) + \sum_{j=1}^N \frac{\beta_k}{\pi i} \int_{l_j} \varphi_j(\tau) \frac{\tau^{n-1}}{\tau^n - t^n} d\tau = 0, \quad t \in l_k, \quad k = \overline{1, N}. \quad (9.77)$$

Решение системы уравнений (9.46)–(9.47), (9.61)–(9.62) и (9.76)–(9.77) совместно с условиями однозначности перемещений вокруг контуров трещин и с условиями равновесия позволяет определить напряженно-деформированное состояние бесконечной плоскости, ослабленной произвольной, периодической и циклически размещенней системой трещин для вышеуказанных граничных условий на их берегах.

Задача 2. Бесконечная пластина со вставленным круглым упругим включением.

Пусть круглое включение S_1^+ радиуса R_1 с упругими постоянными κ_1 , μ_1 вложено в круглое отверстие радиуса R_2 ($R_1 > R_2$) бесконечной пластины S_2^- , упругие постоянные которой κ_2 , μ_2 (рис. 9.6). Мы будем предполагать, что трение между упругим включением и пластиной отсутствует, так что взаимодействие этих тел сводится к неизвестному нормальному давлению $P(t)$ на обводы включения и отверстия. Ввиду полной симметрии это давление будет постоянным вокруг контуров и будет зависеть от упругих постоянных со-прикасающихся тел и разности радиусов $R_1 - R_2 = \rho$.

Для описания напряженно-деформированного состояния составной пластины привлечем комплексные потенциалы $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, которые зададим в известной для нас форме интегралов типа Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau, \quad (9.78)$$

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{y(z)}{\tau - z} d\tau, \quad (9.79)$$

где γ — граница контакта двух тел.

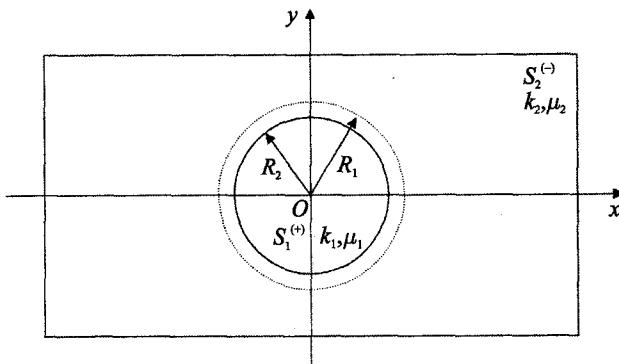


Рис. 9.6. Бесконечная пластина со вставленным круглым упругим включением

Граничные условия на контуре (γ) относительно неизвестного нормального давления $P(t)$ задаются в известной форме

$$\Phi^+(t) + \overline{\Phi^+(t)} + \frac{dt}{dt} [\bar{t}\Phi'^+(t) + \Psi^+(t)] = P(t), \quad (9.80)$$

$$\Phi^-(t) + \overline{\Phi^-(t)} + \frac{dt}{dt} [\bar{t}\Phi'^-(t) + \Psi^-(t)] = P(t), \quad (9.81)$$

где знаки (+) и (-) у комплексных потенциалов относятся к их предельным значениям, когда $z \rightarrow t \in \gamma$ со стороны двух тел S_1^+ и S_2^- соответственно.

Вычитая и складывая соответственно выражения (9.80)–(9.81) имеем:

$$[\Phi^+(t) - \Phi^-(t)] + [\overline{\Phi^+(t)} - \overline{\Phi^-(t)}] + \frac{dt}{dt} [t(\Phi'^+(t) - \Phi'^-(t)) + \Psi^+(t) - \Psi^-(t)] = 0, \quad (9.82)$$

$$[\Phi^+(t) + \Phi^-(t)] + [\overline{\Phi^+(t)} + \overline{\Phi^-(t)}] + \frac{dt}{dt} [t(\Phi'^+(t) + \Phi'^-(t)) + \Psi^+(t) + \Psi^-(t)] = 2P(t). \quad (9.83)$$

Принимая во внимание известную формулу Сохоцкого–Племеля для функции $\Phi(z)$

$$\Phi^\pm(t) = \pm \frac{1}{2} \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau \quad (9.84)$$

и разрешая выражение (9.82) относительно $\Psi^+(t) - \Psi^-(t)$, получим следующее выражение для $\Psi(z)$:

$$\begin{aligned} \Psi(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{y(\tau)}{\tau - z} d\tau = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\Psi^+(\tau) - \Psi^-(\tau)}{\tau - z} d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{-\frac{d\tau}{d\tau} [\varphi(\tau) + \overline{\varphi(\tau)}] - \bar{t}\varphi'(\tau)}{\tau - z} d\tau = \dots = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\overline{\varphi(\tau)}}{\tau - z} d\tau - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\bar{t}\varphi(\tau)}{(\tau - z)^2} d\tau. \end{aligned} \quad (9.85)$$

Принимая во внимание формулу (9.85) и предельные значения $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ в форме формул Сохоцкого–Племеля, выражение (9.83) примет вид

$$\frac{1}{\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau - \frac{1}{\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\overline{\varphi(\tau)}}{\tau - t} d\bar{\tau} - \frac{dt}{dt} \left[\frac{1}{\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\overline{\varphi(\tau)}}{\tau - t} d\bar{\tau} + \frac{1}{\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\bar{t} - \bar{t}}{(\tau - t)^2} \varphi(\tau) d\tau \right] = 2P(t). \quad (9.86)$$

Ввиду полной симметрии поставленной задачи плотность $\varphi(t)$, как функция, зависящая от контактного напряжения $P(t)$ и разницы смещений точки включения и пластины на границе контакта, будет везде $\forall t \in \gamma$ постоянна, т. е. $\varphi(t) = \text{const}$. Принимая во внимание этот факт и значение выражений следующих сингулярных интегралов:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi i} \oint_{\gamma} \frac{d\tau}{\tau - t} &= -\frac{1}{\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\overline{d\tau}}{\tau - t} = 1, \\ -\frac{dt}{dt} \left[\frac{1}{\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\overline{d\tau}}{\tau - t} + \frac{1}{\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\bar{\tau} - \bar{t}}{(\tau - t)^2} d\tau \right] &= 2, \end{aligned} \quad (9.87)$$

СИУ (9.86) примет вид

$$P(t) = 2\varphi(t). \quad (9.88)$$

Относительно перемещений на контуре γ со стороны двух упругих тел имеем известные формулы, которые вытекают из третьей формулы (9.1):

$$2\mu_1 [u^+(t) + iv^+(t)] = 2\mu_1 (-\delta_1 e^{i\theta}) = \kappa_1 \int \Phi^+(t) dt - t \overline{\Phi^+(t)} - \int \overline{\Psi^+(t)} dt \quad (9.89)$$

$$2\mu_2 [u^-(t) + iv^-(t)] = 2\mu_2 (\delta_2 e^{i\theta}) = \kappa_2 \int \Phi^-(t) dt - t \overline{\Phi^-(t)} - \int \overline{\Psi^-(t)} dt \quad (9.90)$$

где δ_1, δ_2 — соответствующие радиальные перемещения двух тел на контуре γ , т. е.

$$\delta_1 + \delta_2 = R_1 - R_2 = \rho \quad (9.91)$$

Дифференцируя выражения (9.89)–(9.90) относительно t ($t = (R_2 + \sigma_2)e^{i\theta}$) и принимая во внимание (9.83) и формулу Сохоцкого–Племеля, будем иметь

$$\frac{P(t)}{1 + \kappa_1} - \frac{2\mu_1}{1 + \kappa_1} \frac{\delta_1}{R_2 + \delta_2} = \frac{1}{2} \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad (9.92)$$

$$\frac{P(t)}{1 + \kappa_2} + \frac{2\mu_2}{1 + \kappa_2} \frac{\delta_2}{R_2 + \delta_2} = -\frac{1}{2} \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau. \quad (9.93)$$

Вычитая выражения (9.92)–(9.93) имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{1 + \kappa_1} - \frac{1}{1 + \kappa_2} \right) P(t) - \left(\frac{2\mu_1}{1 + \kappa_1} \frac{\delta_1}{R_2 + \delta_2} + \frac{2\mu_2}{1 + \kappa_2} \frac{\delta_2}{R_2 + \delta_2} \right) &= \varphi(t), \\ \left(\frac{1}{1 + \kappa_1} - \frac{1}{1 + \kappa_2} \right) P(t) - \frac{2\mu_1}{1 + \kappa_1} \frac{\rho}{R_2 + \delta_2} + \left(\frac{2\mu_1}{1 + \kappa_1} - \frac{2\mu_2}{1 + \kappa_2} \right) \frac{\delta_2}{R_2 + \delta_2} &= \varphi(t). \end{aligned} \quad (9.94)$$

Принимая во внимание формулы (9.88)–(9.94) получим:

$$P(t) = \frac{4\mu_1}{1 - \kappa_1 - 2\Gamma_0} \frac{\rho}{R_2 + \delta_2}, \quad (9.95)$$

$(\Gamma_0 = \mu_1 / \mu_2).$

С другой стороны, (9.93) и (9.87) дают выражение

$$P(t) = -2\mu_2 \frac{\delta_2}{R_2 + \delta_2}, \quad (9.96)$$

Выражения (9.95) и (9.96) дадут радиальное смещение δ_2 :

$$\delta_2 = \frac{2\Gamma_0\rho}{\kappa_1 + 2\Gamma_0 - 1}. \quad (9.97)$$

Следовательно, формулы (9.95) и (9.97) полностью определяют решение поставленной смешанной контактной задачи для составной бесконечной пластины, и имея в виду выражение (9.88), можем считать известными комплексные потенциалы $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, что дают возможность при помощи формул Колосова–Мусхелишвили полностью определить напряженно-деформированное состояние исследуемого тела в любой точке.

Задача 3. Разрезы на границе раздела между произвольным включением и бесконечной пластиной.

Рассмотрим отнесенную к декартовой системе координат бесконечную кусочно-неоднородную среду, состоящую из упругого включения $S_1^{(+)}$ и бесконечной изотропной пластины $S_2^{(-)}$. Считаем, что контакт между пластиной и включением имеет место не по всей границе $l = l_1 \cup l_2 \cup l_3$, так что граница раздела двух тел разбивается на две части: 1) l_1 — неконтактирующий участок границы l (разреза), где заданы нормальные и касательные напряжения; 2) l_2 — неконтактирующий участок границы l (разреза), где заданы перемещения; 3) l_3 — контактирующий участок границы (рис. 9.7).

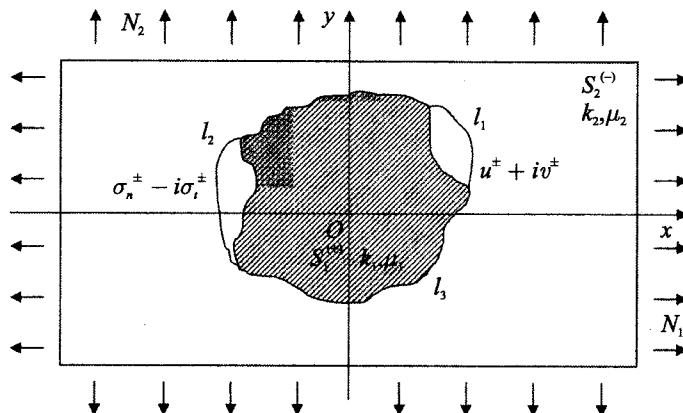


Рис. 9.7. Разрезы на границе раздела между произвольным включением и бесконечной пластиной

Исследуемая бесконечная неоднородная среда находится в равновесии под действием самоуравновешенных усилий, приложенных на бесконечности, к берегам разрезов и возникающих контактных напряжений на границах между изотропной плоскостью и инородным включением. На контактирующей части l_3 между пластиной $S_2^{(-)}$ и включением $S_1^{(+)}$ предполагается, что контактные напряжения равны между собой и задан определенным образом скачок деформаций $g_0(t) = 2\mu_1 \left\{ -\frac{d(u^+ - u^-)}{dt} + i \frac{d(v^+ - v^-)}{dt} \right\}$.

Выражения для комплексных потенциалов Колосова–Мусхелишвили имеют вид

$$\begin{cases} \Phi_0(z) = \Gamma + \Phi(z), \\ \Psi_0(z) = \Gamma' + \Psi(z). \end{cases} \quad (9.98)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{1}{4}(N_1 + N_2), \quad \Gamma' = -\frac{1}{2}(N_1 - N_2), \\ \Phi(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau, \end{aligned} \quad (9.99)$$

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_1(t), & t \in l_1, \\ \varphi_2(t), & t \in l_2, \\ \varphi_3(t), & t \in l_3. \end{cases}$$

— неизвестные плотности на соответствующих участках l_j ,

На участке l_1 разреза между двумя телами граничные условия имеют вид

$$1) \quad \sigma_n^\pm - i\sigma_t^\pm = \Phi_0^+(t) + \overline{\Phi_0^+(t)} + \frac{dt}{dt} [\bar{i}\Phi_0'^\pm(t) + \Psi_0^\pm(t)], \quad t \in l_1. \quad (9.100)$$

На участке l_2 имеем:

$$2) \quad \begin{cases} -2\mu_1 \frac{d}{dt} (u^+ - iv^+) = \Phi_0^+(t) - \kappa_1 \overline{\Phi_0^+(t)} + \frac{dt}{dt} [\bar{i}\Phi_0'^+(t) + \Psi_0^+(t)], \\ -2\mu_2 \frac{d}{dt} (u^- - iv^-) = \Phi_0^-(t) - \kappa_2 \overline{\Phi_0^-(t)} + \frac{dt}{dt} [\bar{i}\Phi_0'^-(t) + \Psi_0^-(t)], \end{cases} \quad t \in l_2, \quad (9.101)$$

На контактирующем участке l_3 имеем смешанные граничные условия

$$\begin{cases} \Phi_0^+(t) + \overline{\Phi_0^+(t)} + \frac{dt}{dt} [\bar{i}\Phi_0'^+(t) + \Psi_0^+(t)] = \Phi_0^-(t) + \overline{\Phi_0^-(t)} + \frac{dt}{dt} [\bar{i}\Phi_0'^-(t) + \Psi_0^-(t)], \end{cases} \quad (9.102)$$

$$\begin{cases} \Phi_0^+(t) - \kappa_1 \overline{\Phi_0^+(t)} + \frac{dt}{dt} [\bar{i}\Phi_0'^+(t) + \Psi_0^+(t)] = \\ = \Gamma_0 \left\{ \Phi_0^-(t) - \kappa_2 \overline{\Phi_0^-(t)} + \frac{dt}{dt} [\bar{i}\Phi_0'^-(t) + \Psi_0^-(t)] \right\} + g_0(t), \end{cases} \quad t \in l_3, \quad (9.103)$$

где $\Gamma_0 = \frac{\mu_1}{\mu_2}$.

Разрешая каждое из выражений (9.100), (9.101) и (9.102) относительно $\Psi^+(t) - \Psi^-(t)$ и принимая во внимание формулы Сохоцкого–Племеля для функций $\Phi(z)$, $\Phi'(z)$ при $z \rightarrow t \in l_j$, будем иметь

$$\begin{cases} \Psi^+(t) - \Psi^-(t) = \frac{dt}{dt} [q_1(t) - \varphi_1(t) - \overline{\varphi_1(t)}] - \bar{t} \varphi'_1(t), \quad t \in l_1, \\ \text{где } q_1(t) = (\sigma_n^+ - \sigma_n^-) - i(\sigma_t^+ - \sigma_t^-), \end{cases} \quad (9.104)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi^+(t) - \Psi^-(t) = \frac{dt}{dt} \left[g_1(t) - \phi_2(t) - \overline{\nu(t)} \right] - i\phi'_2(t), \\ \text{где } g_1(t) = - \left[2\mu_1 \frac{d}{dt} (u^+ + iv^+) - 2\mu_2 \frac{d}{dt} (u^- - iv^-) \right], \quad t \in l_2, \\ \nu(t) = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} \phi_2(t) + \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{2\pi i} \oint_l \frac{\phi(\tau)}{\tau - t} d\tau, \end{array} \right. \quad (9.105)$$

$$\Psi^+(t) - \Psi^-(t) = - \frac{dt}{dt} \left[\phi_3(t) + \overline{\phi_3(t)} \right] - i\phi'_3(t), \quad t \in l_3. \quad (9.106)$$

Формулы (9.104)–(9.105) дают следующие выражения функции $\Psi(z)$:

$$\begin{aligned} \Psi(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_l \frac{\Psi^+(\tau) - \Psi^-(\tau)}{\tau - z} d\tau = \frac{1}{2\pi i} \int_{l_1} q_1(\tau) \frac{d\tau}{\tau - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{l_1} \overline{\frac{\phi_1(\tau)}{\tau - z}} d\tau - \\ &- \frac{1}{2\pi i} \int_{l_1} \overline{i\phi_1(\tau)} d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_{l_2} g_1(\tau) \frac{d\tau}{\tau - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{l_2} \overline{\nu(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{l_2} \overline{i\nu(\tau)} \frac{d\tau}{(\tau - z)^2} - \\ &- \frac{1}{2\pi i} \int_{l_3} \overline{\frac{\phi_3(\tau)}{\tau - z}} d\tau - \frac{1}{2\pi i} \int_{l_3} \overline{i\phi_3(\tau)} \frac{d\tau}{(\tau - z)^2}. \end{aligned} \quad (9.107)$$

Складывая выражения (9.100) и (9.101) и применяя известные формулы Сохоцкого–Племеля для функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, получим следующие сингулярные интегральные уравнения для участков l_1 и l_2 соответственно:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi i} \oint_l \frac{\phi(\tau)}{\tau - t} d\tau - \frac{1}{\pi i} \oint_l \overline{\frac{\phi(\tau)}{\tau - t}} d\tau - \frac{dt}{dt} \left\{ \frac{1}{\pi i} \oint_l \overline{\frac{\phi(\tau)}{\tau - t}} d\tau + \frac{1}{\pi i} \oint_l \overline{\frac{\tau - t}{(\tau - t)^2}} \phi(\tau) d\tau \right\} = \\ = q_2(t) - \frac{1}{\pi i} \frac{dt}{dt} \left[\int_{l_1} q_1(\tau) \frac{d\tau}{\tau - t} + \int_{l_2} g_1(\tau) \frac{d\tau}{\tau - t} \right], \end{aligned} \quad (9.108)$$

где $q_2(t) = (\sigma_n^+ + \sigma_n^-) - i(\sigma_i^+ + \sigma_i^-) - 2 \left(\Gamma + \bar{\Gamma} + \frac{dt}{dt} \Gamma' \right)$, $t \in l_1$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi i} \oint_l \frac{\phi(\tau)}{\tau - t} d\tau - \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{2} \overline{\phi_2(t)} + \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2\pi i} \oint_l \overline{\frac{\phi(\tau)}{\tau - t}} d\tau - \\ - \frac{dt}{dt} \left[- \frac{1}{\pi i} \int_{l_2} \overline{\nu(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t} + \frac{1}{\pi i} \oint_l \overline{\frac{\tau - t}{(\tau - t)^2}} \phi(\tau) d\tau \right] = \\ = g_2(t) - \frac{1}{\pi i} \frac{dt}{dt} \left[\int_{l_2} g_1(\tau) \frac{d\tau}{\tau - t} + \int_{l_2} \overline{q(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t} \right], \end{aligned} \quad (9.109)$$

где $g_2(t) = - \left[2\mu_1 \frac{d}{dt} (u^+ + iv^+) + 2\mu_2 \frac{d}{dt} (u^- + iv^-) \right] - 2\Gamma + (\kappa_1 + \kappa_2) \bar{\Gamma} - 2 \frac{dt}{dt} \Gamma'$, $t \in l_2$.

И, наконец, заменяя в выражении (9.103) формулы Сохоцкого–Племеля для функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, получим следующее сингулярное интегральное уравнение:

$$\begin{aligned} -\left\{\left(\kappa_1+1\right)+\Gamma_0\left(\kappa_2+1\right)\right\}\overline{\varphi_3(t)}+\frac{1-\Gamma_0}{\pi i}\oint\limits_{l_1}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau+\frac{\kappa_1-\Gamma_0\kappa_2}{\pi i}\oint\limits_{l_1}\frac{\overline{\varphi(\tau)}}{\bar{\tau}-\bar{t}}d\bar{\tau}-\left(1-\Gamma_0\right)\frac{dt}{dt}\left\{\frac{1}{\pi i}\int\limits_{l_1\cup l_3}\frac{\overline{\varphi(\tau)}}{\tau-t}d\tau-\right. \\ \left.-\frac{1}{\pi i}\int\limits_{l_2}\frac{\overline{\nu(\tau)}}{\bar{\tau}-\bar{t}}d\bar{\tau}+\frac{1}{\pi i}\oint\limits_{l_2}\frac{\bar{\tau}-\bar{t}}{(\tau-t)^2}\varphi(\tau)d\tau\right\}=2g(t)-\frac{2(1-\Gamma_0)}{\pi i}\left[\int\limits_{l_1}q_1(\tau)d\tau+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{l_2}g_1(\tau)d\tau\right], \end{aligned} \quad (9.110)$$

где $g(t)=g_0(t)+(\Gamma_0-1)\Gamma-(\Gamma_0\kappa_2-\kappa_1)\bar{\Gamma}+\frac{dt}{dt}(\Gamma_0-1)\Gamma'$, $t \in l_3$. Для единственности решения поставленной задачи необходимо систему уравнений (9.108)–(9.110) дополнить условием однозначности перемещений вокруг контуров трещин

$$\begin{aligned} \int d\left[-(u^+-u^-)+i(v^+-v^-)\right]=0 \Rightarrow \int\limits_{l_1}\left[\Phi^+(t)-\Gamma_0\Phi^-(t)\right]-\left[\kappa_1\overline{\Phi^+(t)}-\Gamma_0\kappa_2\overline{\Phi^-(t)}\right]+ \\ +\frac{dt}{dt}\left\{\bar{t}\left[\Phi'^+(t)-\Gamma_0\Phi'^-(t)\right]+\left[\Psi^+(t)-\Gamma_0\Psi^-(t)\right]\right\}\overline{dt}=-\int\limits_{l_3}g(t)\overline{dt}. \end{aligned} \quad (9.111)$$

Если упругие постоянные включения у бесконечной пластины одни и те же, т. е. $\Gamma_0=1$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa$, $\mu_1=\mu_2=\mu$, тогда система сингулярных интегральных уравнений (9.108)–(9.109) принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi i}\oint\limits_{l_1}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau-\frac{1}{\pi i}\oint\limits_{l_1}\frac{\overline{\varphi(\tau)}}{\bar{\tau}-\bar{t}}d\bar{\tau}-\frac{dt}{dt}\left\{\frac{1}{\pi i}\oint\limits_{l_1}\frac{\overline{\varphi(\tau)}}{\tau-t}d\tau+\frac{1}{\pi i}\oint\limits_{l_2}\frac{\bar{\tau}-\bar{t}}{(\tau-t)^2}\varphi(\tau)d\tau\right\}= \\ =q_2(t)-\frac{1}{\pi i}\frac{dt}{dt}\left[\int\limits_{l_1}q_1(\tau)d\tau+\int\limits_{l_2}g_1(\tau)d\tau\right], \quad t \in l_1, \end{aligned} \quad (9.112)$$

где

$$\begin{aligned} g_1(t)=-2\mu\frac{d}{dt}\left[(u^+-u^-)-i(v^+-v^-)\right], \\ \frac{1}{\pi i}\oint\limits_{l_1}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau+\frac{\kappa}{\pi i}\oint\limits_{l_1}\frac{\overline{\varphi(\tau)}}{\bar{\tau}-\bar{t}}d\bar{\tau}-\frac{dt}{dt}\left[-\frac{1}{\pi i}\int\limits_{l_2}\frac{\overline{\nu(\tau)}}{\bar{\tau}-\bar{t}}d\bar{\tau}+\frac{1}{\pi i}\oint\limits_{l_2}\frac{\bar{\tau}-\bar{t}}{(\tau-t)^2}\varphi(\tau)d\tau\right]= \\ =g_2(t)-\frac{1}{\pi i}\frac{dt}{dt}\left[\int\limits_{l_2}g_1(\tau)d\tau+\int\limits_{l_1}\frac{q_1(\tau)}{\tau-t}d\tau\right], \quad t \in l_2, \end{aligned} \quad (9.113)$$

где $\nu(t)=\kappa\varphi_2(t)$ и

$$\varphi_3(t)=\frac{1}{2(\kappa+1)}g_0(t). \quad (9.114)$$

Задача 4. Усиление стрингером бесконечной пластины с трещиной.

Рассмотрим отнесенную к декартовой системе координат xoy бесконечную пластину с криволинейной трещиной l , которая усиливается прямолинейным армирующим стрингером L . Изотропная пластина на бесконечности растягивается (или сжимается) взаимно

перпендикулярными усилиями N_1 и N_2 (рис. 9.7). Кусочно-неоднородная среда находится в равновесии под действием самоуравновешенных усилий, приложенных к берегам трещины, и возникающих контактных напряжений на границах между изотропным тонким включением (стрингером) и изотропной бесконечной плоскостью. Геометрия и расположение дефектов и инородных тел — произвольное, однако предполагается, что между собой они не пересекаются. Кроме заданных усилий на бесконечности, в плоскости среды могут действовать сосредоточенные силы $P_j + iQ_j$ в точках z_j^* ($j = 1, \kappa^*$) и моменты M_j в точках z_j^{**} ($j = 1, \overline{\kappa^{**}}$).

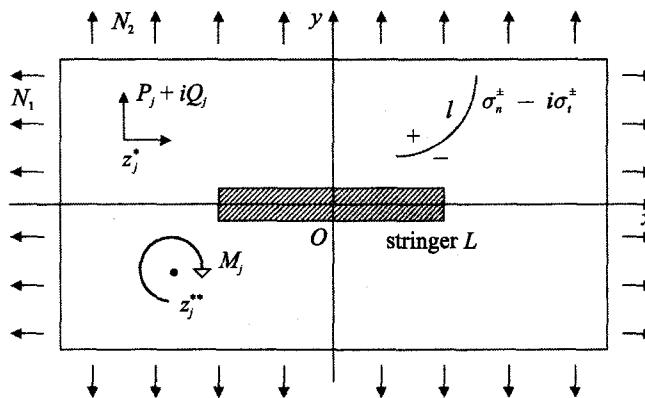


Рис. 9.8. Бесконечная пластина, ослабленная трещиной и усиленная стрингером

Относительно граничных условий на контурах дефектов имеем:

- 1) на берегах трещины l заданы нормальные и касательные напряжения

$$(\sigma_n^\pm - i\sigma_t^\pm)|_{\text{тел}}; \quad (9.115)$$

- 2) на границе между пластиной и тонким упругим прямолинейным включением (стрингером) L задается следующая система смешанных граничных задач [104]:

$$\sigma_n^+ = \sigma_n^-, \quad \varepsilon_0 = \frac{du_t^+}{dt} = \frac{du_t^-}{dt}, \quad u_n^+ + iu_t^+ = u_n^- + iu_t^-. \quad (9.116)$$

Первые два условия (9.116) приводят к равенству

$$ih[(\sigma_n^+ - i\sigma_t^+) - (\sigma_n^- - i\sigma_t^-)] + \frac{E_0 S_0}{E} \frac{d}{dt} [(\sigma_n^+ + \sigma_s^+) - (1+\nu)\sigma_n^+] = 0, \quad (9.117)$$

где ε_0 — деформация стрингера, $\{\sigma_n^\pm, \sigma_s^\pm, \sigma_t^\pm\}$ — возникающие контактные напряжения на границе L между бесконечной пластиной и прямолинейным стрингером, E_0 , E — модули упругости стрингера L и пластиинки соответственно, ν — коэффициент Пуассона для пластиинки, S_0 — площадь поперечного сечения стрингера, h — толщина пластины.

Для рассматриваемого случая смешанной задачи теории упругости потенциалы Колосова–Мусхелишвили имеют следующий вид:

$$\Phi_0(z) = \Gamma - \sum_{j=1}^{\kappa^*} \frac{P_j + iQ_j}{2\pi(1+\kappa)} \frac{1}{z - z_j^*} + \Phi(z), \quad (9.118)$$

$$\Psi_0(z) = \Gamma' + \sum_{j=1}^{k'} \left[\frac{\kappa(P_j - iQ_j)}{2\pi(1+\kappa)} \frac{1}{z - z_j^*} - \frac{\bar{z}_j^*(P_j + iQ_j)}{2\pi(1+\kappa)} \frac{1}{(z - z_j^*)^2} \right] - i \sum_{j=1}^{k''} \frac{M_j}{2\pi} \frac{1}{(z - z_j^{**})^2} + \Psi(z). \quad (9.119)$$

Здесь Γ, Γ' — известные постоянные,

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_l^{\tau} \frac{\phi(\tau)}{\tau - z} d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_L^{\tau} \frac{\mu(\tau)}{\tau - z} d\tau, \\ \Psi(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_l^{\psi(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_L^{\psi(\tau)} \frac{y(\tau)}{\tau - z} d\tau, \end{aligned} \quad (9.120)$$

$\{\phi(t), \mu(t), \psi(t), y(t)\}$ — неизвестные плотности комплексных потенциалов $\Phi(z), \Psi(z)$ соответственно на границах l и L .

Для того чтобы построить потенциал $\Psi(z)$ в зависимости от плоскостей $\{\phi(t), \mu(t)\}$, запишем граничные условия задачи с помощью предельных значений $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$.

На берегах трещины l нормальные и касательные усилия имеют вид

$$\sigma_n^{\pm} - i\sigma_t^{\pm} = \Phi_0^{\pm}(t) + \overline{\Phi_0^{\pm}(t)} + \frac{dt}{dt} \left[\kappa \Phi_0^{\pm}(t) + \Psi_0^{\pm}(t) \right], \quad t \in l. \quad (9.121)$$

На границе L , где контактирует пластина и стрингер, будут выполняться следующие два условия (учитывается третье равенство (9.116) и (9.117)):

$$\Phi_0^+(t) - \kappa \overline{\Phi_0^+(t)} + \frac{dt}{dt} \left[i\Phi_0'^+(t) + \Psi_0^+(t) \right] = \Phi_0^-(t) - \kappa \overline{\Phi_0^-(t)} + \frac{dt}{dt} \left[i\Phi_0'^-(t) + \Psi_0^-(t) \right], \quad t \in L, \quad (9.122)$$

$$\begin{aligned} ih(\Phi_0^+(t) - \Phi_0^-(t)) + (\Phi_0^+(t) - \Phi_0^-(t)) + \frac{dt}{dt} \left[t(\Phi_0'^+(t) - \Phi_0'^-(t)) + \Psi_0^+(t) - \Psi_0^-(t) \right] + \\ + \frac{E_0 S_0}{E} \frac{d}{dt} \left[\left[2(\Phi_0^+ + \overline{\Phi_0^+(t)}) - (1+\nu) \left\{ \Phi_0^+(t) + \overline{\Phi_0^+(t)} + \operatorname{Re} \frac{dt}{dt} [i\Phi_0'^+(t) + \Psi_0^+(t)] \right\} \right] \right] = 0, \quad t \in L. \end{aligned} \quad (9.123)$$

Разрешая каждое из выражений (9.121) и (9.122) относительно $\Psi^+(t) - \Psi^-(t)$ и применяя известные формулы Сохоцкого–Племеля, получим выражение для $\Psi(z)$:

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_l^{\tau} \frac{q_1(\tau)}{\tau - z} d\tau - \frac{1}{2\pi i} \int_l^{\phi(\tau)} \frac{d\phi(\tau)}{\tau - z} d\tau - \frac{1}{2\pi i} \int_l^{\bar{\tau}\phi(\tau)} \frac{\bar{\tau}\phi(\tau)}{(\tau - z)^2} d\tau + \frac{\kappa}{2\pi i} \int_l^{\bar{\tau}} \frac{\mu(\tau)}{\tau - z} d\tau - \frac{1}{2\pi i} \int_l^{\bar{\tau}\mu(\tau)} \frac{\bar{\tau}\mu(\tau)}{(\tau - z)^2} d\tau, \quad (9.124)$$

где

$$q_1(t) = (\sigma_n^+ - \sigma_n^-) - i(\sigma_t^+ - \sigma_t^-), \quad t \in l.$$

Перейдем теперь к построению системы уравнений, вытекающей из граничных условий. Принимая во внимание выражения (9.121) и (9.122) и формулы Сохоцкого–Племеля для $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$ при $z \rightarrow t \in l$ и L , получим соответственно следующую систему СИУ:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi i} \int_l^{\phi(\tau)} \frac{d\phi(\tau)}{\tau - t} d\tau - \frac{1}{\pi i} \int_l^{\overline{\phi(\tau)}} \frac{d\overline{\phi(\tau)}}{\tau - t} d\tau - \frac{dt}{dt} \left[\frac{1}{\pi i} \int_l^{\phi(\tau)} \frac{d\phi(\tau)}{\tau - t} d\tau + \frac{1}{\pi i} \int_l^{\bar{\tau} - \bar{t}} \phi(\tau) d\tau \right] + \frac{1}{\pi i} \int_l^{\mu(\tau)} \frac{d\mu(\tau)}{\tau - t} d\tau - \\ - \frac{1}{\pi i} \int_l^{\overline{\mu(\tau)}} \frac{d\overline{\mu(\tau)}}{\tau - t} d\tau - \frac{dt}{dt} \left[-\frac{\kappa}{\pi i} \int_l^{\overline{\mu(\tau)}} \frac{d\overline{\mu(\tau)}}{\tau - t} d\tau + \frac{1}{\pi i} \int_l^{\bar{\tau} - \bar{t}} \mu(\tau) d\tau \right] = q_2(t) - \frac{dt}{dt} \left[\frac{1}{\pi i} \int_l^{q_1(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t} \right], \quad t \in l, \end{aligned} \quad (9.125)$$

$$\begin{aligned}
 & i(\kappa+1)h\overline{\mu(t)} + \frac{E_0 S_0}{E} \frac{d}{dt} \left\{ \operatorname{Re} \left[\frac{3-\nu-\kappa(1+\nu)}{2} \mu(t) + (1-\nu) \frac{1}{\pi i} \int_L^t \frac{\mu(\tau)}{\tau-t} d\tau, \right. \right. \\
 & \left. \left. - \left[(1+\nu) \frac{dt}{dt} \left[\frac{\kappa}{2\pi i} \int_L^t \frac{\overline{\mu(\tau)}}{\tau-t} d\tau - \frac{1}{2\pi i} \int_L^t \frac{\bar{\tau}-\bar{t}}{(\tau-t)^2} \mu(\tau) d\tau \right] \right] + \frac{1-\nu}{\pi i} \int_L^t \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t} d\tau - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \left[(1+\nu) \frac{dt}{dt} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_L^t \frac{\overline{\varphi(\tau)}}{\tau-t} d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_L^t \frac{\bar{\tau}-\bar{t}}{(\tau-t)^2} \varphi(\tau) d\tau \right] \right] = A(t), \quad t \in L. \right. \right.
 \end{aligned} \tag{9.126}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 q_1(t) = & (\sigma_n^+ + \sigma_n^-) - i(\sigma_t^+ + \sigma_t^-) - 2(\Gamma + \bar{\Gamma} + \frac{dt}{dt} \Gamma') + \\
 & + \sum_{j=1}^K \left[2 \operatorname{Re} \frac{P_j + iQ_j}{\pi(1+\kappa)} \frac{1}{t-z_j^*} - \frac{dt}{dt} \left[\kappa \frac{P_j - iQ_j}{\pi(1+\kappa)} \frac{1}{t-z_j^*} + \frac{P_j + iQ_j}{\pi(1+\kappa)} \frac{\bar{t}-\bar{z}_j^*}{(t-z_j^*)^2} \right] \right] + i \sum_{j=1}^{K''} \frac{M_j}{2\pi} \frac{dt}{dt} \frac{1}{(t-z_j^{**})^2}
 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
 A(t) = & -\frac{E_0 S_0}{E} \frac{1+\nu}{2} \frac{d}{dt} \left[\operatorname{Re} \left\{ \sum_{j=1}^{K'} \left[\frac{2(1-\nu)}{1+\nu} \frac{P_j + iQ_j}{\pi(1+\kappa)} \frac{1}{t-z_j^*} + \frac{dt}{dt} \left[\kappa \frac{P_j - iQ_j}{\pi(1+\kappa)} \frac{1}{t-z_j^*} + \right. \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \left. + \frac{P_j + iQ_j}{\pi(1+\kappa)} \frac{\bar{t}-\bar{z}_j^*}{(t-z_j^*)^2} \right] \right] - i \sum_{j=1}^{K''} \frac{M_j}{\pi} \frac{dt}{dt} \frac{1}{(t-z_j^{**})^2} \right\} \right] - \frac{E_0 S_0}{E} \frac{d}{dt} \left[\operatorname{Re} \frac{dt}{dt} \frac{1}{2\pi i} \int_L^t \frac{q_1(\tau)}{\tau-t} d\tau \right].
 \end{aligned}$$

Приведем выражение для плотности $\varphi(t)$, которая задана на контуре L , интеграла типа Коши. Для этого рассмотрим выражение граничного условия относительно производных на берегах трещин, через комплексные потенциалы:

$$2\mu \left[-\frac{du^\pm}{dt} + i \frac{dv^\pm}{dt} \right] = \Phi_0^\pm(t) - \kappa \overline{\Phi_0^\pm(t)} + \frac{dt}{dt} \left[i\Phi_0^\pm(t) + \Psi_0^\pm(t) \right]. \tag{9.127}$$

Принимая во внимание выражение (9.121), выражение (9.127) принимает вид

$$2\mu \left[-\frac{du^\pm}{dt} + i \frac{dv^\pm}{dt} \right] = (\sigma_n^\pm - i\sigma_t^\pm) - (\kappa+1) \overline{\Phi_0^\pm(t)}. \tag{9.128}$$

Вычитая сопряженные к (9.128) выражения и принимая во внимание формулы Сохондского–Племеля, будем иметь:

$$\varphi(t) = \frac{\overline{q_1(t)}}{\kappa+1} + g(t), \quad t \in L, \tag{9.129}$$

где

$$g(t) = \frac{2\mu}{1+\kappa} \frac{d}{dt} [(u^+(t) - u^-(t)) + i(v^+(t) - v^-(t))] — неизвестная функция.$$

Аналогичным образом находим, что выражение плотности $\mu(t)$ на контуре L будет иметь вид

$$\mu(t) = i \frac{\sigma_t^+ - \sigma_t^-}{(1+\kappa)}, \quad t \in L. \tag{9.130}$$

Для единственности решения поставленной задачи необходимо СИУ дополнить условием однозначности перемещений вокруг контуров $\{l, L\}$ соответственно:

$$\left. \begin{aligned} \int_l \phi(t) dt &= \frac{1}{\kappa+1} \int_l q_1(t) dt, \\ \int_l \mu(t) dt &= \frac{P_2 - P_1}{(1+\kappa)h} \end{aligned} \right\}, \quad (9.131)$$

где P_1, P_2 — возможные растягивающие или сжимающие усилия, направленные вдоль стрингера и приложенные на его концах.

9.3. Численное решение плоских задач теории упругости для тел с дефектами

Основные соотношения численного интегрирования.

Выше были рассмотрены задачи, решение которых сводится к системе СИУ. В общей постановке решение этих систем невозможно получить в замкнутой форме, так как произвольность границы дефектов и их произвольное расположение приводят к очень сложным подынтегральным выражениям.

Существует несколько способов численного решения СИУ. Стандартный метод решения СИУ состоит в их регуляризации и последующем численном решении полученных интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Однако такой подход очень трудоемок, т. к. подынтегральные выражения и правые части уравнений в общей постановке задачи бывают настолько громоздкими, что после их регуляризации полученные интегральные уравнения принимают более сложный вид. Кроме того, такой подход неприемлем для создания пакета программ, т. к. в этом случае описание другой геометрии тела и дефектов приводит к необходимости повторения процедуры регуляризации.

В последнее время в численных расчетах наибольшее распространение получили прямые методы решения СИУ, которые, минуя регуляризацию, приводят к решению конечных систем алгебраических уравнений. Среди них можно отметить метод коллокаций, при котором приближенное решение ищется в априорной форме с неизвестными параметрами, определяемыми из условия удовлетворения уравнения в отдельных точках, и метод механических квадратур, основанный на определенных формулах для интерполяционного полинома и квадратурных формулах для сингулярного интеграла. Последний метод и будет в дальнейшем использован при численном решении системы [5, 103, 108]. Сущность этого численного метода решения СИУ состоит в замене исходного уравнения его дискретным аналогом, полученным путем вычисления интегралов при помощи некоторых квадратурных формул. При этом сначала из анализа искомой функции определяется ее особенность на концах контура интегрирования. Предварительно искомую функцию представляют как произведение двух функций, одна из которых (весовая функция) выражает особенность решения. Точки дискретизации (точки интерполяции и коллокаций), или совпадают с узлами квадратурных формул, или находятся с помощью некоторой функциональной зависимости.

Прежде чем рассмотреть решение СИУ методом механических квадратур, приведем некоторые квадратурные формулы интерполяционного типа.

Для вычисления интеграла типа

$$I_1 = \int_a^b w(t) f(t) dt \quad (9.132)$$

рассмотрим интеграл

$$I_2 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\tau)}{(\tau - z) \underline{\Omega}_n(z)} d\tau, \quad (9.133)$$

где $w(t) = (1-t)^\alpha (1+t)^\beta$ — весомая функция, γ — замкнутая гладкая кривая в области S , внутри которой задан отрезок $[a, b]$, направленный параллельно оси Ox . Функция $f(z) \in S$ голоморфна во всей области, кроме отрезка $[a, b]$ и некоторых m особых точек (полюсы 1-го порядка) (рис. 9.9).

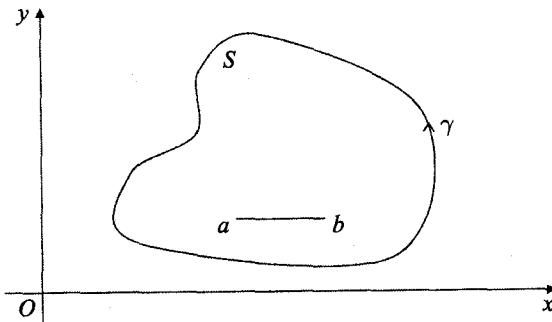


Рис. 9.9. Комплексная область S голоморфности функции, кроме отрезка $[a, b]$ и некоторых особых точек

Применяя теорему о вычетах для интеграла (9.133), получим:

$$I_2 = \frac{f(z)}{\underline{\Omega}_n(z)} + \sum_{k=1}^n \frac{f(t_k)}{(t_k - z) \underline{\Omega}'_n(t_k)} + \sum_{k=1}^m \frac{\operatorname{res} f(z_k)}{(z_k - z) \underline{\Omega}_n(z_k)}. \quad (9.134)$$

Сравнивая выражения (9.133) и (9.134), находим

$$f(t) = \underline{\Omega}_n(t) \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{f(t_k)}{(t - t_k) \underline{\Omega}'_n(t_k)} + \sum_{k=1}^m \frac{\operatorname{res} f(z_k)}{(t - z_k) \underline{\Omega}_n(z_k)} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\tau)}{(\tau - t) \underline{\Omega}_n(\tau)} d\tau \right\}. \quad (9.135)$$

Подставляя (9.135) в (9.132), получим

$$I_1 = \int_a^b w(t) f(t) dt = \sum_{k=1}^n A_k f(t_k) + \sum_{k=1}^m \frac{\operatorname{res} f(z_k)}{\underline{\Omega}_n(z_k)} \int_a^b \frac{w(t) \underline{\Omega}_n(t)}{t - z_k} dt + R_n, \quad (9.136)$$

где

$$A_k = \int_a^b \frac{w(t) \underline{\Omega}_n(t)}{(t - t_k) \underline{\Omega}'_n(t_k)} dt \text{ — множители интегрирования,}$$

$$R_n = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b w(t) \underline{\Omega}_n(t) \oint_{\gamma} \frac{f(\tau) d\tau}{(\tau - t) \underline{\Omega}_n(\tau)} dt \text{ — остаточный член.}$$

Введем функцию

$$Q_n(z) = -\frac{1}{2} \int_a^b \frac{w(\tau) \underline{\Omega}_n(\tau)}{\tau - z} d\tau. \quad (9.137)$$

Применяя формулы Сохоцкого–Племеля к $\underline{Q}_n(z)$, находим

$$Q_n(t) = \frac{1}{2} [Q_n^+(t) + Q_n^-(t)] = -\frac{1}{2} \int_a^b \frac{w(\tau) \underline{Q}_n(\tau)}{\tau - t} d\tau. \quad (9.138)$$

Квадратурную формулу (9.136) запишем в виде

$$I_1 = \int_a^b w(t) f(t) dt = \sum_{k=1}^n A_k f(t_k) - 2 \sum_{k=1}^m \frac{\text{resf}(z_k) Q_n(z_k)}{\underline{Q}'_n(z_k)} + R_n. \quad (9.139)$$

В зависимости от корней уравнения

$$Q_k(t) = 0, \quad t \in [a, b] \quad (9.140)$$

различают три вида интегрирования.

1. Если принять

$$\underline{Q}_n(z) = k P_n^{(\alpha, \beta)}(z), \quad (9.141)$$

где $P_n^{(\alpha, \beta)}(z)$ — многочлен Якоби, то получим метод интегрирования, который называется методом Гаусса–Якоби. Ни один из корней уравнения (9.140) не совпадает с концами отрезка $[a, b]$.

2. Полагая

$$\underline{Q}_n(z) = k \left[P_n^{(\alpha, \beta)}(z) + c P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(z) \right], \quad (9.142)$$

будем иметь метод интегрирования, который называется методом Радау–Якоби. В этом случае один из корней уравнения (9.140) совпадает с одним из концов отрезка $[a, b]$. Постоянная c может принимать одно из двух значений:

$$c_1 = -\frac{P_n^{(\alpha, \beta)}(a)}{P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(a)} \quad \text{или} \quad c_2 = -\frac{P_n^{(\alpha, \beta)}(b)}{P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(b)}$$

в зависимости от того, с каким концом отрезка $[a, b]$ совпадает корень уравнения (9.140).

3. В случае

$$\underline{Q}_n(z) = k \left[P_n^{(\alpha, \beta)}(z) + c_1 P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(z) + c_2 P_{n-2}^{(\alpha, \beta)}(z) \right] \quad (9.143)$$

получим метод интегрирования Лобатто–Якоби. В этом случае концы отрезка $[a, b]$ совпадают с корнями уравнения (9.140). Постоянные c_1 и c_2 имеют следующие значения:

$$c_1 = -\frac{P_n^{(\alpha, \beta)}(a) P_{n-2}^{(\alpha, \beta)}(b) - P_n^{(\alpha, \beta)}(b) P_{n-2}^{(\alpha, \beta)}(a)}{P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(a) P_{n-2}^{(\alpha, \beta)}(b) - P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(b) P_{n-2}^{(\alpha, \beta)}(a)},$$

$$c_2 = -\frac{P_n^{(\alpha, \beta)}(a) P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(b) - P_n^{(\alpha, \beta)}(b) P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(a)}{P_n^{(\alpha, \beta)}(a) P_{n-2}^{(\alpha, \beta)}(b) - P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(b) P_{n-2}^{(\alpha, \beta)}(a)}.$$

Заметим, что при решении СИУ численным методом отрезок интегрирования нормируют на $[-1, 1]$.

Для интеграла типа Коши интегрирование методом Гаусса–Якоби дается формулой [103]

$$\int_{-1}^1 \frac{w(t) f(t)}{t - x} dt = \sum_{k=1}^n A_k \frac{f(t_k)}{t_k - x} - 2 f(x) \frac{Q_n^{(\alpha, \beta)}(x)}{P_n^{(\alpha, \beta)}(x)} + R_n. \quad (9.144)$$

Так как в задачах теории упругости и других приложениях наиболее часто встречаются случаи, когда $\alpha, \beta = \pm \frac{1}{2}$, то в зависимости от вида особенности искомой функции квадратурная формула (9.144) принимает определенный вид:

$$1. \text{ Если } \alpha = \beta = -\frac{1}{2}, \text{ то } w(x) = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

и

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad (9.145)$$

$$Q_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \pi U_{n-1}(x) = \frac{\sin(n \arccos x)}{\sin(\arccos x)}, \quad (9.146)$$

где $T_n(x)$, $U_{n-1}(x)$ — полиномы Чебышева первого и второго рода.

Корни многочленов $T_n(t)$ и $Q_n(t)$, являющиеся узлами квадратурной формулы (9.144) и точками коллокации соответственно, имеют вид:

$$t_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi, \quad k = \overline{1, n}, \quad (9.147)$$

$$x_r = \cos \frac{r\pi}{n}, \quad r = \overline{1, n-1}, \quad (9.148)$$

$$A_k = \frac{\pi}{n}. \quad (9.149)$$

Если в квадратурную формулу (9.144) подставить выражения (9.147—9.149), то получим случай интегрирования методом Гаусса—Чебышева.

$$2. \text{ Пусть теперь } \alpha = \beta = \frac{1}{2}, \text{ т. е.}$$

$$w(x) = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

В этом случае будем иметь многочлены Чебышева второго рода, т. е.

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{\sin[(n+1)\arcsin x]}{\sin[\arcsin x]} \quad (9.150)$$

с корнями

$$t_k = \cos \frac{k}{n+1} \pi, \quad k = \overline{1, n}. \quad (9.151)$$

Для функции $Q_n(x)$ получим формулу

$$Q_n(x) = \pi T_{n+1}(x) \quad (9.152)$$

с корнями

$$x_r = \cos \frac{2r-1}{2(n+1)} \pi, \quad r = \overline{1, n+1} \quad (9.153)$$

и множителем A_k в виде

$$A_k = \frac{\pi}{n+1} \sin^2 \frac{k}{n+1} \pi, \quad k = \overline{1, n} \quad (9.154)$$

3. Наконец, для случая $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{1}{2}$ имеем

$$w(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

В этом случае многочлен $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ принимает вид

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{T_{n+1}(x) - T_n(x)}{1-x}, \quad (9.155)$$

а его корни будут определяться так:

$$t_k = \cos \frac{2k}{2n+1} \pi, \quad k = \overline{1, n}. \quad (9.156)$$

Для функции $Q_n(x)$ будем иметь выражение

$$Q_n(x) = \pi [U_n(x) - U_{n-1}(x)]. \quad (9.157)$$

Корнями (9.157) являются точки

$$x_r = \cos \frac{2r-1}{2n+1} \pi, \quad r = \overline{1, n}. \quad (9.158)$$

Для коэффициентов A_k получим формулу

$$A_k = \frac{4\pi}{2n+1} \sin^2 \frac{k}{2n+1} \pi, \quad k = \overline{1, n}. \quad (9.159)$$

И, наконец, рассмотрим сингулярное интегральное уравнение, к которому сводятся многие задачи теории упругости:

$$A(x)w(x)\varphi(x) + B(x) \int_{-1}^1 \frac{w(t)}{t-x} dt + \int_{-1}^1 w(t)k(t, x)\varphi(t)dt = f(x), \quad -1 \leq x \leq 1. \quad (9.160)$$

Применяя квадратурные формулы интегрирования для регулярного и сингулярного интегралов, преобразуем уравнение (9.160) к виду

$$\left[A(x)w(x) - 2B(x) \frac{Q_n^{(\alpha, \beta)}(x)}{P_n^{(\alpha, \beta)}(x)} \right] \varphi(x) + \sum_{k=1}^n A_k \left[\frac{B(x)}{t_k - x} + k(t_k, x) \right] \varphi(t_k) = f(x), \quad -1 \leq x \leq 1. \quad (9.161)$$

Полагая в уравнении (9.161) x равным корню уравнения

$$A(x)w(x) - 2B(x) \frac{Q_n^{(\alpha, \beta)}(x)}{P_n^{(\alpha, \beta)}(x)} = 0, \quad (9.162)$$

получим алгебраическую систему уравнений относительно $\varphi(t_k)$:

$$\sum_{k=1}^n A_k \left[\frac{B(x_r)}{t_k - x_r} + k(t_k, x_r) \right] \varphi(t_k) = f(x_r), \quad r = \overline{1, n}. \quad (9.163)$$

Так как при решении задач о круглом включении возникают регулярные и сингулярные интегралы по замкнутой окружности γ , то приведем приближенные формулы для вычисления этих интегралов, которые были использованы в работах [105, 107]:

$$\frac{1}{\pi} \oint_{\gamma} \varphi(\tau) d\vartheta = \frac{2}{2n+1} \sum_{j=1}^{2n+1} \varphi(\tau_j), \quad (9.164)$$

$$\frac{1}{\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^n \varphi(\tau_j) \left[1 + i \frac{2 \sin[n(\vartheta - \vartheta_j)/2] \sin[(n+1)(\vartheta - \vartheta_j)/2]}{\sin[(\vartheta - \vartheta_j)/2]} \right], \quad (9.165)$$

где

$$\tau_j = e^{\frac{2\pi j}{2n+1}}, \quad \vartheta_j = \frac{2\pi j}{2n+1}.$$

Определение коэффициентов интенсивности напряжений K_I и K_{II} .

Прежде чем перейти к решению системы сингулярных интегральных уравнений, к которым сводятся поставленные задачи, определим выражения для коэффициентов интенсивности напряжений K_I и K_{II} на концах трещин.

Пусть известны значения плотностей $\varphi_k(t)$ на концах трещины l_k в задаче о плоскости, ослабленной N трещинами и упрочненной прямолинейным стрингером (рис. 9.10). Для определения поведения K_I и K_{II} в окрестности вершины l_k введем локальную систему координат $O'x'y'$ так, чтобы ось $o'x'$ была направлена по касательной к вершине криволинейной трещины. Тогда на основании формул (9.18) имеем

$$\begin{aligned} z &= b_k + z'e^{i\theta_k}, \\ \Phi^*(z') &= \Phi^*(b_k + z'e^{i\theta_k}) = \Phi(z). \end{aligned} \quad (9.166)$$

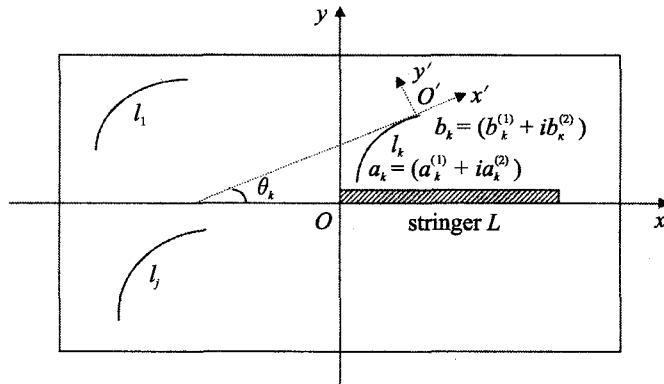


Рис. 9.10. Бесконечная область, ослабленная N трещинами и упрочненная прямолинейным стрингером L

Так как функция $\Phi(z)$ в окрестности вершины трещины имеет особенность, представим ее в окрестности точки b_k в виде

$$4 \lim_{z' \rightarrow 0} \Phi^*(z') = \sqrt{2\pi} K(z')^{\frac{1}{2}}$$

или

$$4 \lim_{z \rightarrow b_k} \Phi(z) = \sqrt{2\pi} e^{(i\theta_k/2)} K(z - b_k)^{-\frac{1}{2}}, \quad (9.167)$$

где $K = K_I - iK_{II}$ есть комплексное выражение для коэффициентов интенсивности напряжений в точке b_k .

Если выражение для $\Phi(z)$ известно, то определяется по формуле

$$K = K_1 - iK_{\text{II}} = 2\sqrt{2\pi}e^{-i\theta_k/2} \lim_{z \rightarrow b_k} \left\{ (z - b_k)^{1/2} \Phi(z) \right\}. \quad (9.168)$$

Так как определить комплексный потенциал $\Phi(z)$ в замкнутой форме невозможно, то приходится определять его поведение в окрестности точки b_k приближенными методами.

Для исследуемого случая $\Phi(z)$ зададим в виде

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\tau)}{\tau - z} d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_{l_k} \frac{\varphi_k(\tau)}{\tau - z} d\tau + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \frac{1}{2\pi i} \int_{l_j} \frac{\varphi_j(\tau)}{\tau - z} d\tau. \quad (9.169)$$

Плотность интеграла типа Коши $\varphi_k(t)$ задается как сумма двух функций в виде формулы (9.129): функции $f_k(t)$, выражающей разность приложенных усилий на берегах l_k , и функции скачка перемещений $g_k(t)$.

Так как функция $f_k(t)$ не имеет особенностей у концов трещины, то необходимо исследовать поведение $g_k(t)$ у конца трещины. Учитывая, что $g_k(t)$ на концах a_k и b_k имеет особенность, представим ее в виде

$$g_k(t) = i \left\{ (b_k - t)(t - a_k) \right\}^{-1/2} g_k^*(t), \quad (9.170)$$

где $g_k^*(t) = g_k^{(1)}(t) + ig_k^{(2)}(t)$ — функция без особенностей.

Таким образом, функцию $\Phi_k(z)$ можно представить в виде

$$\Phi_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l_k} \frac{f_k(\tau)}{\tau - z} d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_{l_k} i \left\{ (b_k - t)(t - a_k) \right\}^{-1/2} \frac{g_k^*(\tau)}{\tau - z} d\tau, \quad (9.171)$$

причем в окрестности b_k будем иметь

$$\Phi_k(z) = \frac{f_k(b_k)}{2\pi i} \ln(z - b_k) - i \frac{(z - a_k)^{-1/2} g_k^*(b_k)}{2} (b_k - z)^{-1/2} + A(z), \quad (9.172)$$

где $A(z)$ — аналитическая функция в окрестности.

Принимая во внимание (9.169) и (9.172), выражение (9.168) можно записать так:

$$\begin{aligned} K &= 2\sqrt{\pi} e^{(-i\theta_k/2)} \lim_{z \rightarrow b_k} \left\{ (z - b_k)^{1/2} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\tau)}{\tau - b_k} d\tau + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \frac{1}{2\pi i} \int_{l_j} \frac{\varphi_j(\tau)}{\tau - b_k} d\tau + \frac{f_k(b_k)}{2\pi i} \ln(z - b_k) - \frac{i(z - a_k)^{-1/2} g_k^*(b_k)}{2} (b_k - z)^{-1/2} + A(z) \right] \right\} \end{aligned} \quad (9.173)$$

или

$$K_1 - iK_{\text{II}} = \sqrt{2\pi} (b_k - a_k)^{-1/2} e^{(-i\theta_k/2)} g_k^*(b_k). \quad (9.174)$$

Следовательно, для определения коэффициентов интенсивности напряжений у конца трещины необходимо иметь значение $g_k^*(b_k)$.

Из формулы (9.174) следует

$$\begin{cases} K_I = \sqrt{\frac{2\pi}{\rho_k}} (\cos \frac{\psi_k + \vartheta_k}{2} g_k^{*(1)}(b_k) + \sin \frac{\psi_k + \vartheta_k}{2} g_k^{*(2)}(b_k)), \\ K_{II} = \sqrt{\frac{2\pi}{\rho_k}} (-\sin \frac{\psi_k + \vartheta_k}{2} g_k^{*(1)}(b_k) + \cos \frac{\psi_k + \vartheta_k}{2} g_k^{*(2)}(b_k)), \end{cases} \quad (9.175)$$

где

$$\rho_k = |b_k - a_k|, \quad \psi_k = \arg(b_k - a_k).$$

Поведение коэффициентов интенсивности напряжений K_I и K_{II} на концах прямолинейной трещины в бесконечной изотропной плоскости, подкрепленной прямолинейным стрингером [104, 106].

Пусть бесконечная пластина с прямолинейной ненагруженной трещиной l подкреплена стрингером L , на концах которого приложены растягивающие (или сжимающие) силы P (рис. 9.11). Действие сил $\pm P$ на концах стрингера можно заменить L парами (P_j, M_j) , которые действуют в точках z_j : $\{-L_0, \pm i\delta\}$, $\{L_0, \pm i\delta\}$, где $\delta \ll L$. Задача сводится к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi i} \int_L^t \frac{g(\tau)}{\tau-t} d\tau - \frac{1}{\pi i} \int_L^{\bar{t}} \frac{\overline{g(\tau)}}{\tau-\bar{t}} d\bar{\tau} - \frac{dt}{dt} \left[\frac{1}{\pi i} \int_L^t \frac{\overline{g(\tau)}}{\tau-t} d\tau + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\pi i} \int_L^{\bar{t}} \frac{\overline{\tau-\bar{t}}}{(\tau-t)^2} g(\tau) d\tau \right] + \frac{1}{\pi i} \int_L^t \frac{\mu(\tau)}{\tau-t} d\tau - \frac{1}{\pi i} \int_L^{\bar{t}} \frac{\overline{\mu(\tau)}}{\tau-\bar{t}} d\bar{\tau} - \\ & - \frac{dt}{dt} \left[-\frac{\kappa}{\pi i} \int_L^t \frac{\overline{\mu(\tau)}}{\tau-t} d\tau + \frac{1}{\pi i} \int_L^{\bar{t}} \frac{\overline{\tau-\bar{t}}}{(\tau-t)^2} \mu(\tau) d\tau \right] = \\ & = A_1(t, \bar{t}), \quad t \in l, \quad l = [-L_0, L_0], \end{aligned} \quad (9.176)$$

$$\begin{aligned} & i(\kappa+1)h\overline{\mu(t)} + \frac{E_0 S_0}{E} \frac{d}{dt} \left\{ \operatorname{Re} \left[\frac{3-\nu-\kappa(1+\nu)}{2} \mu(t) + \right. \right. \\ & \left. \left. + (1-\nu) \left(\frac{1}{\pi i} \int_L^t \frac{\mu(\tau)}{\tau-t} d\tau + \frac{1}{\pi i} \int_L^{\bar{t}} \frac{g(\tau)}{\tau-\bar{t}} d\bar{\tau} \right) - (1+\nu) \frac{dt}{dt} \left[\frac{\kappa}{2\pi i} \int_L^t \frac{\overline{\mu(\tau)}}{\tau-t} d\tau - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - \frac{1}{2\pi i} \int_L^{\bar{t}} \frac{\overline{\tau-\bar{t}}}{(\tau-t)^2} \mu(\tau) d\tau - \frac{1}{2\pi i} \int_L^t \frac{\overline{g(\tau)}}{\tau-t} d\tau - \frac{1}{2\pi i} \int_L^{\bar{t}} \frac{\overline{\tau-\bar{t}}}{(\tau-t)^2} g(\tau) \right] \right] \right\} = \\ & = A_2(t, \bar{t}), \quad t \in L, \quad L = [-L_0, L_0], \end{aligned} \quad (9.177)$$

$$\int_l g(t) dt = 0. \quad (9.178)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 A_1(t, \bar{t}) = & \sum_{j=1}^4 \left[2 \operatorname{Re} \frac{P_j}{\pi(1+\kappa)} \frac{1}{t-z_j} - \frac{dt}{d\bar{t}} \left(\kappa \frac{P_j}{\pi(1+\kappa)} \frac{1}{t-z_j} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{P_j(\bar{t}-\bar{z}_j) - i(\kappa+1)M_j}{\pi(1+\kappa)} \frac{1}{(t-z_j)^2} \right) \right] - 2 \left(\Gamma + \bar{\Gamma} + \frac{dt}{d\bar{t}} \Gamma' \right), \\
 A_2(t, \bar{t}) = & \frac{E_0 S_0}{E} \frac{1+\nu}{2} \frac{d}{dt} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{j=1}^4 \left[\frac{2(1-\nu)}{1+\nu} \frac{P_j}{\pi(1+\kappa)} \frac{1}{t-z_j} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{dt}{d\bar{t}} \left(\kappa \frac{P_j}{\pi(1+\kappa)} \frac{1}{t-z_j} + \frac{P_j(\bar{t}-\bar{z}_j) - i(\kappa+1)M_j}{\pi(1+\kappa)(t-z_j)^2} \right) \right] \right\}, \\
 P_j = & \begin{cases} \frac{P}{2}, & j=1, 4, \\ -\frac{P}{2}, & j=2, 3, \end{cases} \quad M_j = \begin{cases} \frac{P\delta}{2}, & j=1, 3, \\ -\frac{P\delta}{2}, & j=2, 4. \end{cases}
 \end{aligned}$$

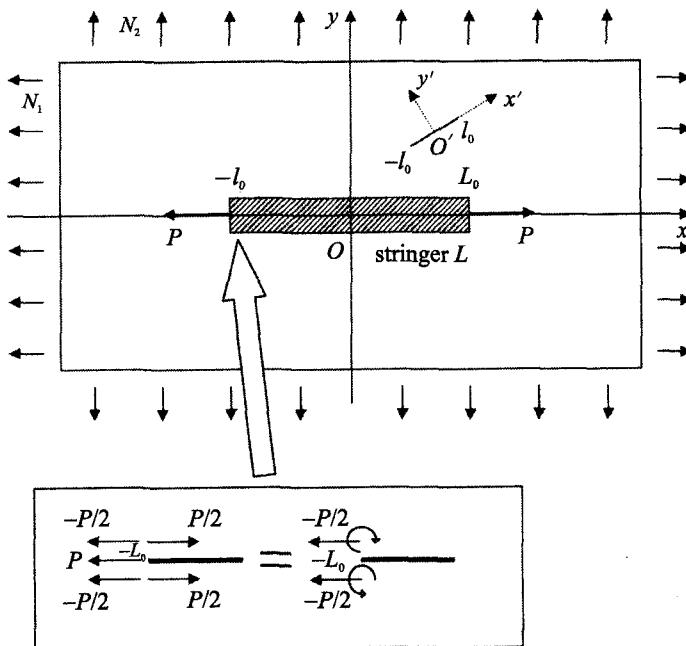


Рис. 9.11. Бесконечная изотропная пластина с трещиной l и стрингером L , на концах которого приложены растягивающие (или сжимающие) силы P

Для решения системы (9.176)–(9.178) нужно перейти от комплексных τ, t к действительным x, ξ следующей заменой:

$$\left. \begin{aligned} \tau &= l_0 x e^{i\vartheta} + d_0 e^{i\beta}, & t &= l_0 \xi e^{i\delta} + d_0 e^{i\beta}, \\ \tau &= L_0 x, & t &= L_0 \xi, \\ g(t) &= \{(l_0 - t)(t - l_0)\}^{-1/2} g^*(t) = \frac{g_1^*(x) + i g_2^*(x)}{l_0 \sqrt{1-x^2}}, \\ \mu(t) &= \{(L_0 - t)(t - L_0)\}^{-1/2} \mu^*(t) = \frac{\mu_1^*(x) + i \mu_2^*(x)}{L_0 \sqrt{1-x^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (9.179)$$

Принимая во внимание, что [106]

$$U_{n-1}(x) = \frac{1}{1-x^2} \{ (n+2)x U_{n-1}(x) - (n+1)U_n(x) + T_n(x) \} \quad (9.180)$$

и представляя искомую функцию

$$\mu_2^*(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j T_j(x), \quad (9.181)$$

уравнения (9.176)–(9.178) после замены переменных (9.179) перейдут в сингулярные интегральные уравнения с действительными переменными, и впоследствии применяя к ним приближенный метод интегрирования Лобатто–Чебышева, получим систему $(3n+2) \times (3n+2)$ линейных алгебраических уравнений относительно $g_1^*(x), g_2^*(x)$ и c_j :

$$\begin{aligned} &\frac{2 \cos \vartheta}{nl_0} \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j \frac{g_2^*(x_j)}{x_j - x_r} - \frac{2 \sin \vartheta}{nl_0} \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j \frac{g_1^*(x_j)}{x_j - x_r} + \\ &+ \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j K_{11}(x_j, \xi_r) T_k(x_j) \right] c_k = A_{11}^*(\xi_r), \quad r = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (9.182)$$

$$\begin{aligned} &\frac{2 \cos \vartheta}{nl_0} \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j \frac{g_1^*(x_j)}{x_j - \xi_r} + \frac{2 \sin \vartheta}{nl_0} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{g_2^*(x_j)}{x_j - \xi_r} + \\ &+ \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j K_{21}(x_j, \xi_r) T_k(x_j) \right] c_k = A_{12}^*(\xi_r), \quad r = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (9.183)$$

$$\begin{aligned} &\frac{(1+\kappa)h}{L_0} \frac{c_0}{\sqrt{1-\xi_r^2}} + \sum_{j=1}^{n-1} \left[\frac{(1+\kappa)h}{L_0 \sqrt{1-\xi_r^2}} T_j(\xi_1) + \frac{1}{1-\xi_r^2} \frac{E_0 S_0 (3-\nu + \kappa(1+\nu))}{2EL_0} \right] \times \\ &\times \left[(j+2)\xi_r U_{j-1}(\xi_r) - (j+1)U_j(\xi_r) + T_j(\xi_r) \right] c_j + \end{aligned} \quad (9.184)$$

$$+ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j K_{31}(x_j, \xi_r) g_1^*(x_j) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j K_{32}(x_j, \xi_r) g_2^*(x_j) = A_{21}(\xi_r), \quad r = \overline{1, n},$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j g_1^*(x_j) = 0, \quad \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j g_2^*(x_j), \quad (9.185)$$

здесь $K_{11}(x, \xi)$, $K_{21}(x, \xi)$, $K_{31}(x, \xi)$, $K_{32}(x, \xi)$, $A_{12}(\xi)$, $A_{21}(\xi)$ — известные ядра и функции действительных переменных, $T(x)$, $U(x)$ — полиномы 1-го и 2-го рода Чебышева соответственно,

$$\begin{cases} x_j = \frac{\cos(j\pi)}{n}, & j = \overline{0, n}, \\ \xi_r = \cos \frac{(2r-1)\pi}{2n}, & r = \overline{1, n}, \\ \lambda_j = \begin{cases} 1/2, & j = 1, n+1, \\ 1, & j = \overline{2, n}. \end{cases} \end{cases}$$

Для значения величин плотностей $g_1^*(x)$ и $g_2^*(x)$ на концах трещины можно определить коэффициенты интенсивности напряжений K_I и K_{II} по формуле (9.175).

Ниже для случая алюминиевой пластины показано изменение коэффициентов интенсивности напряжений K_I и K_{II} в вершинах трещины ($2l_0 = 0,02m$) в зависимости от параметров, характеризующих ее расположение относительно стального стрингера ($2L_0 = 0,1m$), на концах которого действуют растягивающие силы.

На рис. 9.12–9.13 показано изменение коэффициентов K_I и K_{II} в зависимости от расстояния между трещиной и стрингером. Заметим, что минимальные значения величины K_I для разных P возникают в случае расположения трещины в окрестности конца стрингера. Значения величины K_{II} в этой же окрестности достигают максимального значения.

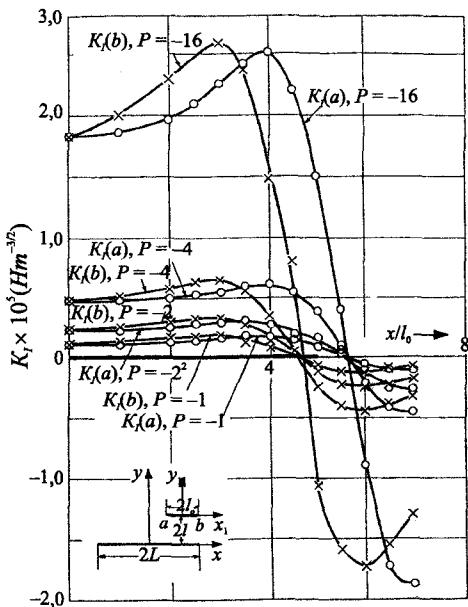


Рис. 9.12. Поведение коэффициента интенсивности напряжения K_I в зависимости от расстояния между трещиной и стрингером, направления которых параллельны между собой

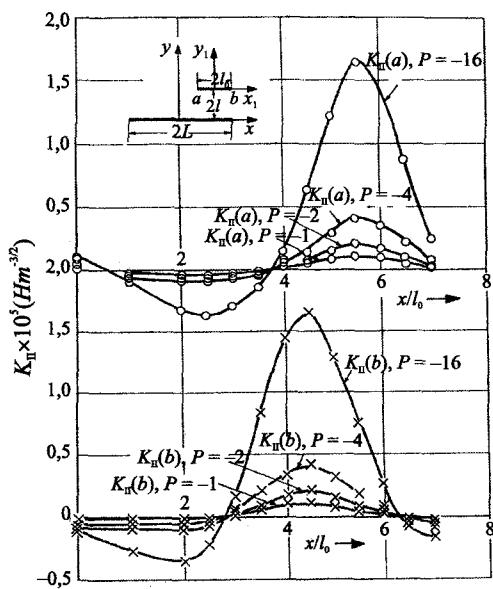


Рис. 9.13. Поведение коэффициента интенсивности напряжения K_{II} в зависимости от расстояния между трещиной и стрингером, направления которых параллельны между собой

На рис. 9.14–9.17 показано изменение коэффициентов K_I и K_{II} для трещины, расположенной перпендикулярно стрингеру, в зависимости от ее расположения. Заметим, что в этих случаях K_I достигает максимальных величин в окрестности конца стрингера, а K_{II} в этой окрестности принимает одинаковые значения для различных растягивающих (или сжимающих) сил P , приложенных к концам стрингера.

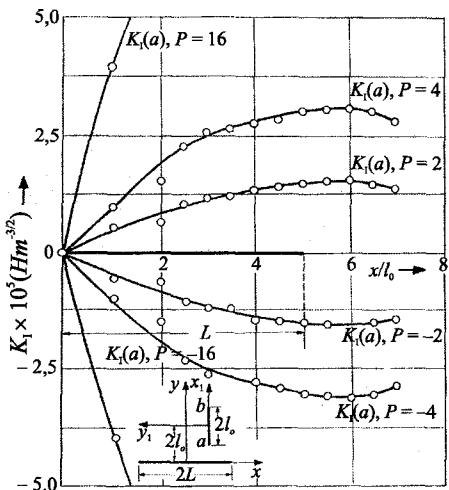


Рис. 9.14. Поведение K_I на краю a трещины l , которая перпендикулярна стрингеру L

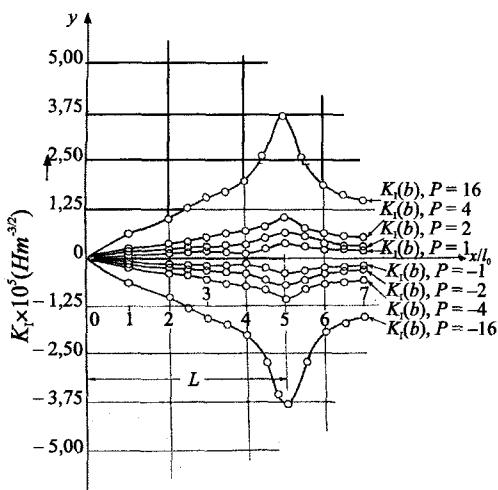


Рис. 9.15. Поведение K_I на краю b трещины l , которая перпендикулярна стрингеру L

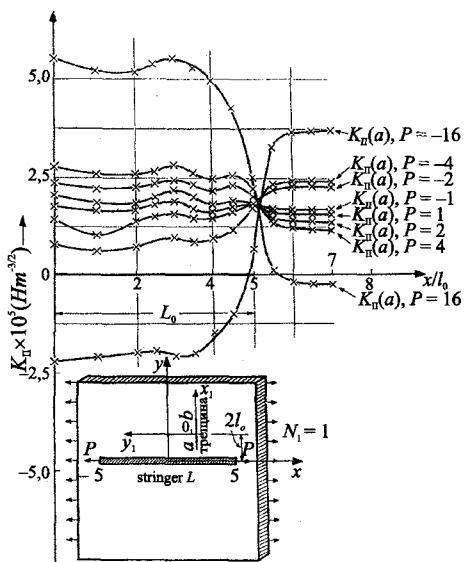


Рис. 9.16. Поведение коэффициента K_{II} на краю a трещины l , которая перпендикулярна стрингеру L

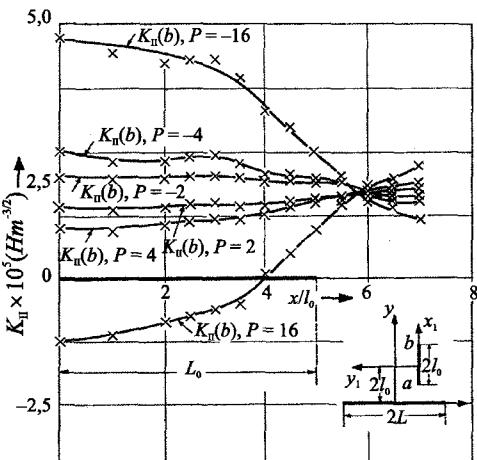


Рис. 9.17. Поведение коэффициента K_{II} на краю b трещины l , которая перпендикулярна стрингеру L

На рис. 9.18–9.19 показано изменение K_I и K_{II} для трещины, расположенной параллельно и перпендикулярно линии стрингера, когда центр трещины находится на уровне конца стрингера и принимает различные значения.

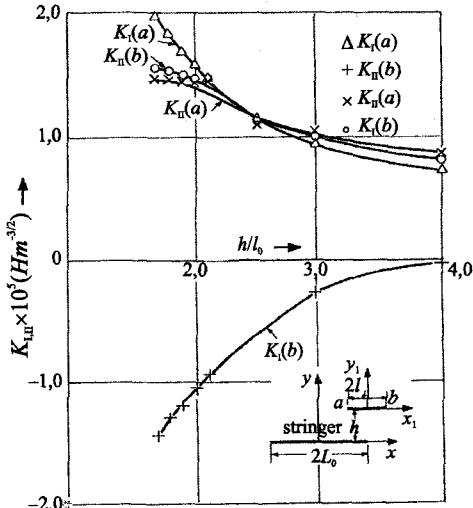


Рис. 9.18. Поведение коэффициентов K_I и K_{II} на краю трещины l , которая параллельно стрингеру L и движется параллельно оси Oy

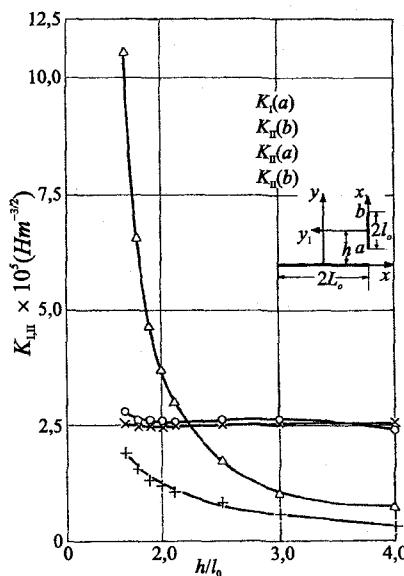


Рис. 9.19. Поведение коэффициентов K_I , K_{II} на краю трещины l , которая перпендикулярно стрингеру L и движется параллельно оси Oy

Заметим, что общая постановка задачи методом ТФКП и СИУ, и приближенный метод решения системы СИУ дает возможность полного описания напряженно-деформированного состояния плоской среды и определения поведения коэффициентов интенсивности напряжений K_I и K_{II} у краев трещины в зависимости от ее расположения, что очень важно для инженерной практики.

Определение возникающих контактных напряжений и перемещений в задаче о включении [107].

Пусть упругая круглая шайба единичного радиуса впаяна с натягом в круговое отверстие в неограниченной пластине S_2 , которая растягивается усилиями N_1 и N_2 на бесконечности. Разность радиусов шайбы и отверстия ρ считаем известной. Для задачи о включении с учетом общего подхода получаем следующее сингулярное уравнение:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{1+\kappa_1} - \frac{1}{1+\kappa_2} \right) & \left\{ 2 \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \oint_{\gamma} \frac{P(\tau)}{\tau-t} d\tau + \frac{2}{\pi i} \oint_{\gamma} \frac{P(\tau)}{\tau-t} d\tau - \frac{2}{\pi i} \oint_{\gamma} \frac{P(\tau)}{\tau} d\tau - \frac{t}{\pi i} \oint_{\gamma} \frac{P(\tau)}{\tau^2} d\tau \right\} + \\ & + \left(\frac{2\mu_1}{1+\kappa_1} - \frac{2\mu_2}{1+\kappa_2} \right) * \left\{ 2 \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\delta(\tau)}{\tau-t} d\tau + \frac{2}{\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\delta(\tau)}{\tau-t} d\tau - \frac{2}{\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\delta(\tau)}{\tau} d\tau - \frac{t}{\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\delta(\tau)}{\tau^2} d\tau \right\} = \\ & = 2P(t) - 2(\Gamma + \bar{\Gamma} + \frac{dt}{dt}\Gamma') + \frac{8\mu_1}{1+\kappa_1} \rho, \quad t \in \gamma, \end{aligned} \quad (9.186)$$

где $P(t)$, $\delta(t)$ — неизвестные радиальные напряжения и перемещения на границе γ между включением и пластиной. Модули упругости и коэффициенты Пуассона для шайбы и пластины: $\mu_1 = 3,9 \times 10^9 \text{Н/m}^2$, $\nu_1 = 0,35$ и $\mu_2 = 3,8 \times 10^8 \text{Н/m}^2$, $\nu_2 = 0,32$ соответственно.

Принимая во внимание формулу

$$\varphi(t) \approx u_n(\varphi, t) = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^n \varphi(\tau_j) \left(\frac{t}{\tau_j} \right)^{-n} \begin{cases} 1 - \left(\frac{t}{\tau_j} \right)^{2n+1} \\ 1 - \left(\frac{t}{\tau_j} \right) \end{cases} \quad (9.187)$$

и формулы (9.164)–(9.165), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно дискретных значений $P(t)$, $\delta(t)$ на γ :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2n+1} \sum_{j=1}^{2n+1} \left\{ \frac{\sin[(2n+1)(\vartheta_r - \vartheta_j)/2]}{\sin[(\vartheta_r - \vartheta_j)/2]} + \left(\frac{1}{1+\kappa_1} - \frac{1}{1+\kappa_2} \right) \cos(\vartheta_r - \vartheta_j) \right\} \times \\ & \times P(t_j) + \left(\frac{2\mu_1}{1+\kappa_1} - \frac{2\mu_2}{1+\kappa_2} \right) \sum_{j=1}^{2n+1} \cos(\vartheta_r - \vartheta_j) \delta(t_j) = \end{aligned} \quad (9.188)$$

$$= \frac{1}{2} (N_1 + N_2) + \frac{1}{2} (N_1 - N_2) \cos 2\vartheta_r - \frac{4\mu_1}{1+\kappa_1} \rho,$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{1+\kappa_1} - \frac{1}{1+\kappa_2} \right) \frac{1}{2n+1} \sum_{j=1}^{2n+1} \left\{ \frac{2 \sin \left[\frac{n(\vartheta_r - \vartheta_j)}{2} \right] \sin \left[\frac{(n+1)(\vartheta_r - \vartheta_j)}{2} \right]}{\sin \left(\frac{\vartheta_r - \vartheta_j}{2} \right)} - \sin(\vartheta_r - \vartheta_j) \right\} \times P(t_j) + \\ & + \left(\frac{2\mu_1}{1+\kappa_1} - \frac{2\mu_2}{1+\kappa_2} \right) \frac{1}{2n+1} \times \sum_{j=1}^{2n+1} \left\{ \frac{2 \sin \left[\frac{n(\vartheta_r - \vartheta_j)}{2} \right] \sin \left[\frac{(n+1)(\vartheta_r - \vartheta_j)}{2} \right]}{\sin \left(\frac{(\vartheta_r - \vartheta_j)}{2} \right)} - \sin(\vartheta_r - \vartheta_j) \right\} \delta(t_j) = \end{aligned} \quad (9.189)$$

$$= -\frac{1}{2} (N_1 - N_2) \sin 2\vartheta_r,$$

где $\vartheta_j = \frac{2\pi j}{2n+1}$ ($j = \overline{1, 2n+1}$) — точки интерполяции, $\vartheta_r = \frac{(2r-1)\pi}{2n-1}$ ($r = \overline{1, 2n+1}$) — точки коллокаций.

На рис. 9.20 показано распределение напряжений на границе контакта между включением и средой в зависимости от изменения усилий на бесконечности N_1 , N_2 и разности радиусов ρ (величина натяга). Из представленной зависимости величины контактных напряжений от угла ϑ можно определить, при каких экстремальных значениях усилий на бесконечности (при заданном ρ) меняется знак контактного напряжения, т. е. при каких значениях N_1 и N_2 образуется щель между двумя телами.

На рис. 9.21 при заданных $\rho = 10 \text{ mm}$ и трех значениях N_2 показана зависимость угла раскрытия щели от величины N_1 .

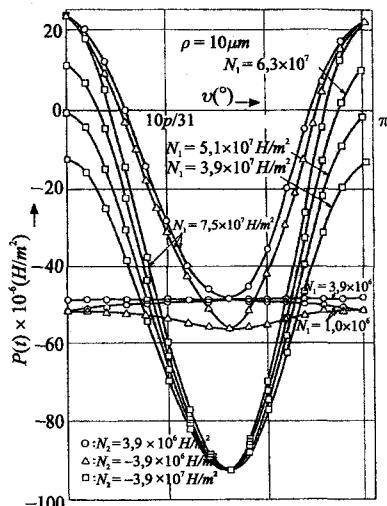
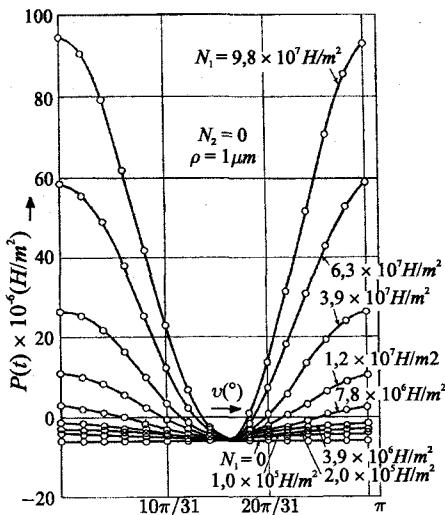


Рис. 9.20. Распределение напряжений на границе контакта между включением и средой в зависимости от изменения усилий на бесконечности и разности радиусов отверстия и включения

Следует заметить, что графики, заданные на рис. 9.22, определяют картину поведения контактных напряжений в зависимости от соответствующего угла ϑ для разных N_1 , N_2 и ρ и, самое главное, определяют экстремальные значения N_1 , N_2 , при которых начинает образовываться щель между телами.

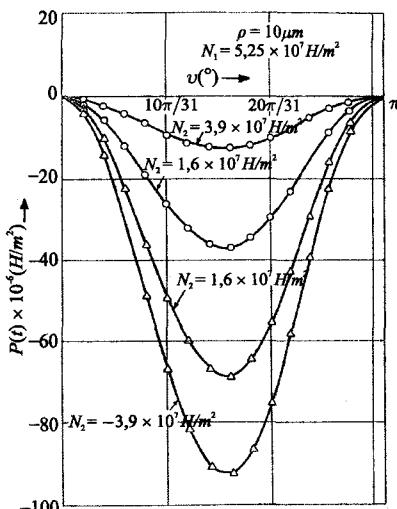


Рис. 9.22. Поведение контактных напряжений в зависимости от угла ϑ и разных усилий на бесконечности

Жесткое круглое включение в бесконечной пластине, ослабленное прямолинейной трещиной [2, 105].

Пусть жесткая круглая шайба S_1 , единичного радиуса впаяна в круговое отверстие γ бесконечной пластины S_2 , рис. 9.23. Разность радиусов шайбы и отверстия задана $\delta = 0,001m$. Пластина ослаблена прямолинейной ненагруженной трещиной l , длина которой равна диаметру шайбы. Модули упругости и коэффициенты Пуассона шайбы и пластины:

$$E_1 = 20,59 \times 10^{10} \text{ H/m}^2, \nu_1 = 0,28 \text{ и } E_2 = 3,34 \times 10^9 \text{ H/m}^2, \nu_2 = 0,33 \text{ соответственно.}$$

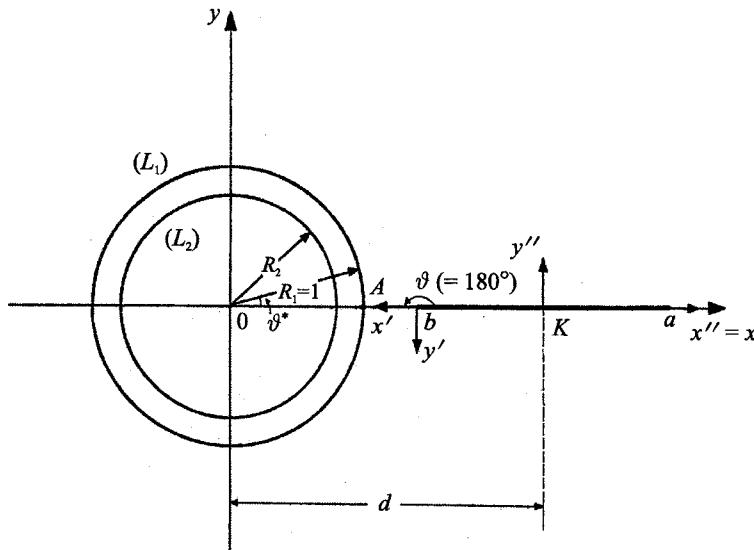


Рис. 9.23. Жесткая круглая шайба (S_1) впаянная в круговое отверстие бесконечной пластины (S_2), с L_1 и L_2 соответственно. (ϑ и ϑ^* —узловые точки интерполяции и коллокации).

Задача о жестком включении с трещиной сводится к следующей системе СИУ:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi i} \oint_{\gamma} \frac{g(\tau)}{\tau - t} d\tau - \frac{1}{\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\overline{g(\tau)}}{\tau - t} d\bar{\tau} - \\ & - \frac{dt}{dt} \left[\frac{1}{\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\overline{g(\tau)}}{\tau - t} d\bar{\tau} + \frac{1}{\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\bar{\tau} - \bar{t}}{(\tau - t)^2} g(\tau) d\tau \right] + \\ & + \frac{1}{\pi i} \oint_{\gamma} \frac{G(\tau)}{\tau - t} d\tau - \frac{1}{\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\overline{G(\tau)}}{\tau - t} d\bar{\tau} - \\ & - \frac{dt}{dt} \left[\frac{1}{\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\overline{G(\tau)}}{\tau - t} d\bar{\tau} + \frac{1}{\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\bar{\tau} - \bar{t}}{(\tau - t)^2} G(\tau) d\tau \right] = 0, \quad t \in l, \end{aligned} \quad (9.190)$$

$$-(\kappa_1 + 1 + \Gamma_0 + \Gamma_0 \kappa_2) \overline{G(t)} + (1 - \Gamma_0) \left(\frac{1}{\pi i} \oint_{\gamma} \frac{G(\tau)}{\tau - t} d\tau + \frac{1}{\pi i} \int_l \frac{g(\tau)}{\tau - t} d\tau \right) + (\kappa_1 - \Gamma_0 \kappa_2) \left(\frac{1}{\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\overline{G(\tau)}}{\bar{\tau} - \bar{t}} d\tau + \frac{1}{\pi i} \int_l \frac{\overline{g(\tau)}}{\bar{\tau} - \bar{t}} d\tau \right) = \quad (9.191)$$

$$-(1 - \Gamma_0) \frac{dt}{dt} \left\{ \frac{1}{\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\overline{G(\tau)}}{\bar{\tau} - \bar{t}} d\tau + \frac{1}{\pi i} \int_l \frac{\overline{g(\tau)}}{\bar{\tau} - \bar{t}} d\tau + \frac{1}{\pi i} \int_l \frac{\overline{g(\tau)}}{\bar{\tau} - \bar{t}} d\tau + \frac{1}{\pi i} \int_l \frac{\overline{g(\tau)}}{(\bar{\tau} - \bar{t})^2} g(\tau) d\tau \right\} = \\ = 2g_0(t), \quad t \in \gamma,$$

$$\int_l g(t) dt = 0, \quad (9.192)$$

$$\oint_{\gamma} \left\{ (1 - \Gamma_0) P(t) - \frac{\Gamma_0 \kappa_2 + \Gamma_0 + \kappa_1 + 1}{2} \overline{G(t)} - \frac{\Gamma_0 \kappa_2 + \Gamma_0 - \kappa_1 - 1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\overline{G(\tau)}}{\bar{\tau} - \bar{t}} d\tau - \frac{\Gamma_0 (\kappa_2 + 1)}{2\pi i} \int_l \frac{\overline{g(\tau)}}{\bar{\tau} - \bar{t}} d\tau \right\} d\tau = 0. \quad (9.193)$$

Здесь

$$\begin{cases} g_0(t) = 2\mu_1 \delta, \\ G(t) = \left(\frac{1}{1 + \kappa_1} - \frac{1}{1 + \kappa_2} \right) P(t) - \frac{2\mu_2}{1 + \kappa_2} \delta, \quad t \in \gamma, \end{cases}$$

$$g(t) = g_1(t) + ig_2(t) = \frac{2\mu_2}{1 + \kappa_2} \frac{d}{dt} \{ (u^+(t) - u^-(t)) + i(v^+(t) - v^-(t)) \}, \quad t \in l,$$

где

$$g(t) = i[(b-t)(t-a)]^{-1/2} g^*(t),$$

$$\Gamma_0 = \frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

Применяя формулы численного интегрирования по контуру (9.164), (9.165), (9.187) и формулы численного интегрирования по методу Лобатто–Чебышева для $g^*(t)$, можно определить значения плотностей $g^*(t)$ и $G(t)$ в интерполяционных точках контура интегрирования. Метод Лобатто–Чебышева дает возможность сразу определить функцию $g^*(t)$ на концах трещины l , а значит, и коэффициенты интенсивности напряжений в угловых точках по формуле (9.175).

На рис. 9.24 (а, б) показано изменение коэффициентов интенсивности напряжений K_I и K_{II} в зависимости от расположения трещины относительно жесткого включения, а на рис. 9.25 показано изменение контактного напряжения $P(t)$ в точке A при приближении трещины к границе. Из представленных графиков следует, что при приближении трещины l к границе контакта γ величина контактного напряжения уменьшается, а значения коэффициентов интенсивности напряжений возрастают. Когда один конец трещины приближается очень близко к границе контакта, наблюдается резкое уменьшение значения K_I до нуля.

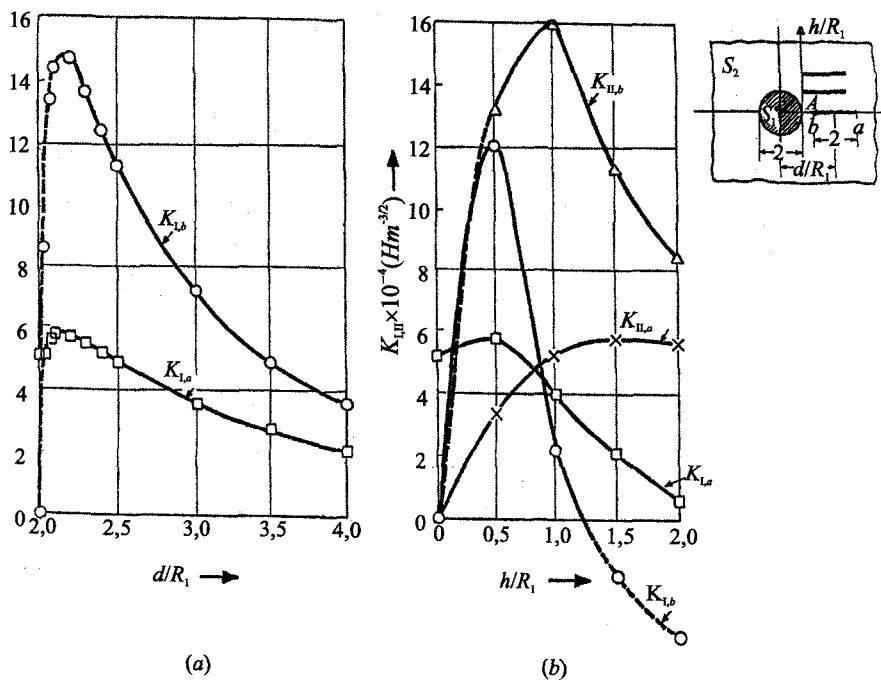


Рис. 9.24. Поведение K_I , K_{II} на краях трещины в зависимости от ее расположения относительно жесткого включения

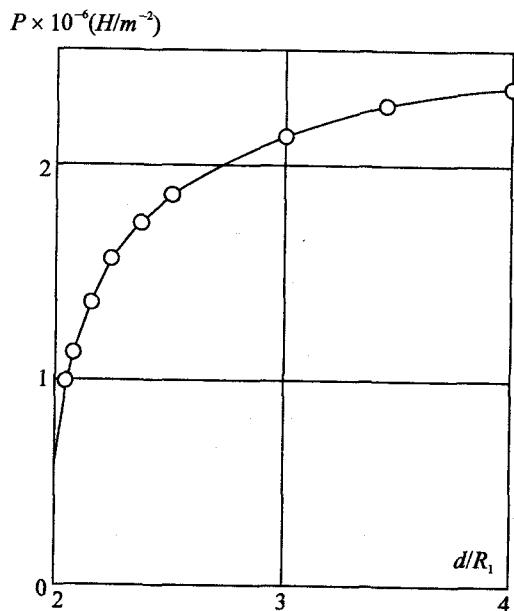


Рис. 9.25. Изменение контактного напряжения $P(t)$ в точке А при приближении трещины к границе

9.4. Теория регулярно армированного волокнистого композитного материала

Пусть упругие и геометрические свойства трехмерной изотропной кусочно-однородной среды, отнесенной к некоторой прямоугольной системе координат $0x_1x_2x_3$ с единичными направляющими векторами e_1, e_2, e_3 , неизменны в направлении оси $0x_3$. Распределение упругих и геометрических свойств в плоскости x_10x_2 предполагаем двоякопериодическим.

Как следует из результатов [4, 6], важную роль при построении осредненных уравнений, описывающих упругое поведение такой структуры, играет двоякопериодическое решение, когда компонента деформации e_{33} есть константа, а остальные компоненты деформации не зависят от координаты x_3 .

Такое напряженное состояние распадается на два независимых [38]: обобщенную плоскую деформацию

$$\begin{aligned} u_j &= u_j(x_1, x_2), \quad e_{jk} = e_{jk}(x_1, x_2), \\ \sigma_{jk} &= \sigma_{jk}(x_1, x_2), \quad (j, k = 1, 2), \\ e_{33} &= \text{const}, \quad \sigma_{33} = 2\mu(1+\nu)e_{33} + \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}), \\ e_{13} = e_{23} = \sigma_{13} = \sigma_{23} &= 0; \end{aligned}$$

антиплоскую деформацию (продольный сдвиг)

$$\begin{aligned} u_3 &= u_3(x_1, x_2), \quad e_{j3} = e_{j3}(x_1, x_2) \quad (j = 1, 2), \\ \sigma_{j3} &= \sigma_{j3}(x_1, x_2), \quad e_{11} = e_{12} = e_{22} = e_{33} = 0, \\ \sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{22} = \sigma_{33} &= 0. \end{aligned}$$

Здесь e_{jk}, σ_{jk}, u_j — компоненты тензоров деформаций, напряжений и вектора перемещения соответственно.

Пусть в двоякопериодической структуре распределение тензора напряжения, а следовательно и тензора деформации, носит двоякопериодический характер. Через Ω_1 и Ω_2 обозначим основные периоды структуры, через l_1 и l_2 — длины этих векторов. Считаем, что оси координат выбраны так, что направления вектора Ω_1 совпадает с положительным направлением оси $0x_1$ и что угол α между векторами Ω_1 и Ω_2 , отсчитываемый от первого против часовой стрелки, меньше π . Соответствующие векторам Ω_1 и Ω_2 основные периоды в комплексной форме имеют вид

$$\omega_1 = l_1, \quad \omega_2 = l_2 \exp(i\alpha).$$

Параллелограмм, построенный на векторах Ω_1 и Ω_2 , будем называть основным параллелограммом периодов (фундаментальной ячейкой). В силу двойкой периодичности структуры и напряженного состояния достаточно изучить распределение тензора напряжения лишь в фундаментальной ячейке.

Двоякопериодичность тензора деформации означает, что вектор перемещения \mathbf{u} в какой-либо точке с радиусом-вектором \mathbf{R} отличается от вектора перемещения в точке с радиусом-вектором $\mathbf{R} + \boldsymbol{\Omega}_j$ не более чем на вектор малого жесткого перемещения.

$$\mathbf{u}(\mathbf{R} + \boldsymbol{\Omega}_j) - \mathbf{u}(\mathbf{R}) = \Delta_j + \mathbf{R} \times \mathbf{b}_j. \quad (9.194)$$

Отметим, что векторы $\mathbf{R}, \boldsymbol{\Omega}_1, \boldsymbol{\Omega}_2$ лежат в плоскости $x_1 0 x_2$, а векторы $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ перпендикулярны этой плоскости.

Вычислим при помощи (9.194) значение $\mathbf{u}(\mathbf{R} + \boldsymbol{\Omega}_1 + \boldsymbol{\Omega}_2)$ двумя способами: идя через точку с радиусами-векторами $\mathbf{R} + \boldsymbol{\Omega}_1$ и $\mathbf{R} + \boldsymbol{\Omega}_2$. Условие однозначности вектора перемещения дает

$$\boldsymbol{\Omega}_1 \times \mathbf{b}_2 = \boldsymbol{\Omega}_2 \times \mathbf{b}_1,$$

откуда следует, что $b_1 = 0, b_2 = 0$.

Таким образом, из двоякопериодичности тензора напряжения следует квазипериодичность вектора перемещения. Запишем его в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{R}) &= \mathbf{u}^* + \frac{x_1 - x_2 \operatorname{ctg} \alpha}{l_1} \Delta_1 + \frac{x_2}{l_2 \sin \alpha} \Delta_2 + x_3 \mathbf{e}_3 e_{33}, \\ \Delta_j &= \sum_{k=1}^3 \delta_{jk} \mathbf{e}_k \quad (j=1,2), \end{aligned}$$

где \mathbf{u}^* — двоякопериодическая, не зависящая от координаты x_3 составляющая вектора перемещения. В проекциях на координатные оси это векторное равенство выглядит так:

$$u_j = u_j^* + \frac{x_1 - x_2 \operatorname{ctg} \alpha}{l_1} \delta_{1j} + \frac{x_2}{l_2 \sin \alpha} \delta_{2j} + \begin{cases} 0, & j = 1, 2, \\ x_3 e_{33}, & j = 3. \end{cases} \quad (9.195)$$

Соответствующие полю (9.195) угол малого поворота в плоскости $x_1 0 x_2$ и компоненты тензора деформации имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{2} (\partial_1 u_2 - \partial_2 u_1) = \varepsilon^* + \langle \varepsilon \rangle, \\ e_{jk} &= \frac{1}{2} (\partial_k u_j + \partial_j u_k) = e_{jk}^* + \langle e_{jk} \rangle \quad (j, k = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Взятые в угловые скобки средний угол малого поворота и средние компоненты тензора деформации в структуре равны

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon \rangle &= \frac{1}{2} \left(\frac{\delta_{12}}{l_1} + \frac{\delta_{11}}{l_1} \operatorname{ctg} \alpha - \frac{\delta_{21}}{l_2 \sin \alpha} \right), \\ \langle e_{11} \rangle &= \frac{\delta_{11}}{l_1}, \quad \langle e_{33} \rangle = e_{33}, \quad \langle e_{22} \rangle = \frac{\delta_{22}}{l_2 \sin \alpha} - \frac{\delta_{12}}{l_1} \operatorname{ctg} \alpha, \\ \langle e_{12} \rangle &= \frac{1}{2} \left(\frac{\delta_{12}}{l_1} + \frac{\delta_{21}}{l_2 \sin \alpha} - \frac{\delta_{11}}{l_1} \operatorname{ctg} \alpha \right), \quad \langle e_{13} \rangle = \frac{\delta_{13}}{2l_1}, \\ \langle e_{23} \rangle &= \frac{1}{2} \left(\frac{\delta_{23}}{l_2 \sin \alpha} - \frac{\delta_{13}}{l_1} \operatorname{ctg} \alpha \right). \end{aligned} \quad (9.196)$$

Найдем теперь энергию U упругих деформаций параллелепипеда, построенного на векторах $\Omega_1, \Omega_2, l e_3$, где l — какое-либо положительное число. Вычисляя ее как половину работы приложенных к граням параллелепипеда усилий на перемещениях этих граней, получим

$$U = \frac{1}{2} l l_1 l_2 \sin \alpha \sum_{j,k=1}^3 \langle \sigma_{jk} \rangle \langle e_{jk} \rangle, \quad \langle \sigma_{jk} \rangle = \langle \sigma_{kj} \rangle, \quad \langle e_{jk} \rangle = \langle e_{kj} \rangle. \quad (9.197)$$

Здесь через $\langle \sigma_{jk} \rangle$ обозначены средние компоненты тензора напряжения в структуре, определяемые следующим образом: величина $\langle \sigma_{33} \rangle$ есть среднее по площади основной ячейки от компоненты σ_{33} ; остальные величины $\langle \sigma_{jk} \rangle$ определяются так, чтобы соотношения между ними и средними по сторонам основного параллелограмма периодов векторами напряжений p_1 и p_2 , действующими на эти стороны, совпадали с обычными соотношениями [16, 38] между компонентами тензора напряжения и вектором напряжения, действующим на произвольную площадку

$$\begin{aligned} p_1 &= \{\langle \sigma_{11} \rangle \sin \alpha - \langle \sigma_{12} \rangle \cos \alpha\} e_1 + \{\langle \sigma_{12} \rangle \sin \alpha - \langle \sigma_{22} \rangle \cos \alpha\} e_2 + \{\langle \sigma_{13} \rangle \sin \alpha - \langle \sigma_{23} \rangle \cos \alpha\} e_3, \\ p_2 &= \langle \sigma_{12} \rangle e_1 + \langle \sigma_{22} \rangle e_2 + \langle \sigma_{23} \rangle e_3. \end{aligned} \quad (9.198)$$

Из формулы (9.197) следует, что напряженно-деформированное состояние регулярной упругой структуры однозначно определяется значениями любых шести с неодинаковыми парами индексов величин из двенадцати различных величин $\langle \sigma_{jk} \rangle, \langle e_{jk} \rangle$. Коэффициенты, входящие в связь между указанными выше шестью величинами и шестью оставшимися являются эффективными (осредненными, макроскопическими) упругими постоянными регулярной структуры.

Рассмотрим линейно армированный композитный материал (КМ) с микроструктурой ячейки, показанной на рис. 9.26. Здесь D_1 — область, занятая включением, D — область ячейки вне включения; c — угловая точка. Вдоль дуги cc_3 (кривая L_3) имеется отслойка волокна от матрицы (межфазная трещина); трещина L_2 (дуга cc_2) подходит к волокну со стороны матрицы, трещина L_1 (дуга cc_1) подходит к матрице со стороны волокна.

Задача о напряженно деформированном состоянии КМ обычным образом сводится к краевым задачам для кусочно-аналитических функций [16]

$$\Phi^+(t) + \overline{\Phi^+(t)} + e^{2i\theta} \lim_{z \rightarrow t^+} \{ z \Phi'(z) + \Psi(z) \} = \Phi^-(t) + \overline{\Phi^-(t)} + e^{2i\theta} \lim_{z \rightarrow t^-} \{ z \Phi'(z) + \Psi(z) \} = 0, \quad (9.199)$$

$$\begin{aligned} \Phi^+(t) + \overline{\Phi^+(t)} + \exp[2i\theta(t)] \lim_{z \rightarrow t^+} [z \Phi'(z) + \Psi(z)] &= \\ = \Phi^-(t) + \overline{\Phi^-(t)} + \exp[2i\theta(t)] \lim_{z \rightarrow t^-} [z \Phi'(z) + \Psi(z)], \quad t \in \bigcup_1^3 L_k, \\ \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2\mu_1} \left[\kappa_1 \varphi^+(t) - t \overline{\Phi^+(t)} - \overline{\psi^+(t)} \right] \right\} - e_3 v_1 - h'(t) &= \\ = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2\mu} \left[\kappa_1 \varphi^-(t) - t \overline{\Phi^-(t)} - \overline{\psi^-(t)} \right] \right\} - e_3 v, \quad t \in L_4, \end{aligned} \quad (9.200)$$

$$\operatorname{Im}\{F^+(t)\exp[i\theta(t)]\} = \operatorname{Im}\{F^-(t)\exp[i\theta(t)]\} = 0,$$

$$\exp[i\theta(t)] = \frac{dt}{ds}, \quad t \in \overset{\circ}{U}_1^3 L_k,$$

$$\operatorname{Im}\{F^+(t)\exp[i\theta(t)]\} = \operatorname{Im}\{F^-(t)\exp[i\theta(t)]\},$$

$$\frac{d}{ds} \left\{ \frac{\operatorname{Re} f^+(t)}{\mu_1} \right\} = \frac{d}{ds} \left\{ \frac{\operatorname{Re} f^-(t)}{\mu} \right\}, \quad t \in L.$$

Здесь верхними индексами + и – отмечены левые и правые предельные значения по отношению к выбранному положительному направлению обхода (на рис. 9.26 указано стрелками); S — дуговая абсцисса; функцию $h'(t)$ предполагаем удовлетворяющей условию Гельдера (допускаем, что волокно посажено в матрицу с некоторым натягом $h(t)$).

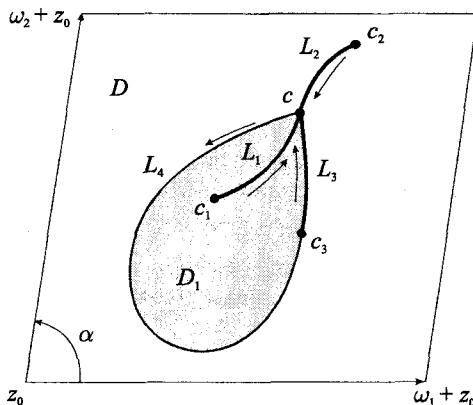


Рис. 9.26. Микроструктура ячейки

Заметим прежде всего что краевые условия (9.199), (9.200) совпадают по форме с краевыми условиями (9.4) и краевыми условиями для антиплоской деформации кусочно-однородной среды [16]. Естественно поэтому использовать для решения краевых задач (9.199), (9.200) представления типа (9.6), видоизменив их таким образом, чтобы отразить двоякопериодический характер задачи. Сделаем это, используя схему работы [48, 50].

Положим

$$\Phi(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \omega(\tau) \zeta(\tau-z) d\tau + A_L + A^{(\infty)} + \begin{cases} E/\lambda, & z \in D_1, \\ 0, & z \in D. \end{cases} \quad (9.201)$$

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \bar{\omega}(\tau) \zeta(\tau-z) d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_L \omega(\tau) [\bar{\varphi}(\tau-z) - \varphi_1(\tau-z)] d\tau + B_L + B^{(\infty)},$$

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L p(\tau) \exp[-i\theta(\tau)] \zeta(\tau-z) d\tau + E_L + \langle \sigma_{13} \rangle - i \langle \sigma_{23} \rangle,$$

$$A^{(\infty)} = \frac{\langle \sigma_{11} \rangle + \langle \sigma_{22} \rangle}{4}, \quad B^{(\infty)} = \frac{\langle \sigma_{22} \rangle - \langle \sigma_{11} \rangle + 2i \langle \sigma_{12} \rangle}{2},$$

$$E = \frac{i}{4\pi} \operatorname{Re} \int_L \frac{\omega(\tau) d\tau}{\tau - z_1}, \quad \lambda = \mu/\mu_1,$$

$$\operatorname{Im} p(\tau) \equiv 0, \quad L = \bigcup_{j=1}^4 L_j.$$

Здесь z_1 — произвольная фиксированная точка из области D_1 ; $\theta(\tau)$ — как обычно, угол между положительной касательной к границе L в точке τ и осью $0x_1$; $\zeta(z)$ и $\wp(z)$ — дзета-функция и пе-функция Вейерштрасса, имеющие соответственно полюсы с главными частями $1/(z - m\omega_1 - n\omega_2)$ и $1/(z - m\omega_1 - n\omega_2)^2$ в точках $m\omega_1 + n\omega_2$ ($m, n = 0, \pm 1, \pm 2$) и удовлетворяющие соотношениям [20, 30, 15] (см. также гл. 1, п. 1.7)

$$\wp(z + \omega_j) - \wp(z) = 0, \quad \zeta(z + \omega_j) - \zeta(z) = \delta_j,$$

$$\delta_j = 2\zeta'(\omega_j/2), \quad j = 1, 2,$$

$$\delta_1\omega_2 - \delta_2\omega_1 = 2\pi i, \quad \wp(z) = -\zeta'(z),$$

$\wp_1(z)$ — специальная меморфная функция [15, 40], имеющая полюсы с главными частями $m\bar{\omega}_1 + n\bar{\omega}_2/(z - m\omega_1 - n\omega_2)$ в точках $m\omega_1 + n\omega_2$ ($m, n = \pm 1, \pm 2$) и обращающаяся в ноль при $z = 0$, из свойств которой мы отметим следующие [16, 17]:

$$\wp_1(z + \omega_j) - \wp_1(z) = \bar{\omega}_j \wp(z) + \gamma_j,$$

$$\gamma_j = 2\wp_1(\omega_j/2) - \bar{\omega}_j \wp(\omega_j/2), \quad j = 1, 2,$$

$$\gamma_2\omega_1 - \gamma_1\omega_2 = \delta_1\bar{\omega}_2 - \delta_2\bar{\omega}_1.$$

Неизвестную комплексную $\omega(\tau)$ и вещественную $p(\tau)$ плотности считаем принадлежащими на L классу H^* (узлы — c, c_1, c_2, c_3).

Необходимые и достаточные условия того, чтобы соответствующий представлениям (9.201) вектор перемещения был однозначным, а распределение компонент тензора напряжения было двоякоперiodическим, имеют вид

$$\int_L \omega(\tau) d\tau = 0, \quad \int_L p(\tau) \exp[-i\theta(\tau)] d\tau = 0. \quad (9.202)$$

Фигурирующие в (9.201) постоянные A_L, B_L, E_L подберем таким образом, чтобы соответствующие этим представлениям средние по сторонам основного параллелограмма периодов векторы напряжений имели вид (9.198) и чтобы средний угол малого поворота $\langle e \rangle$ в структуре равнялся нулю. Используя свойства функций $\zeta(z), \wp(z), \wp_1(z)$ и предполагая, что условия (9.202) выполняются, запишем

$$[\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}]_j = 2\omega_j \operatorname{Re}(A_L + A^{(\infty)}) + \bar{\omega}_j (B_L + B^{(\infty)}) - a\delta_j - \bar{a}\gamma_j - 2\bar{\delta}_j \operatorname{Re}(b), \quad (9.203)$$

$$[\kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}]_j = -[\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}]_j + (\kappa+1)\omega_j (A_L + A^{(\infty)}) - (\kappa+1)a\delta_j,$$

$$[f]_j = \omega_j (E_L + \langle \sigma_{13} \rangle - i\langle \sigma_{23} \rangle) + c\delta_j, \quad j = 1, 2.$$

Через a, b, c обозначены следующие функционалы

$$a = \frac{1}{2\pi i} \int_L \tau \omega(\tau) d\tau, \quad b = \frac{1}{2\pi i} \int_L \bar{\tau} \omega(\tau) d\tau,$$

$$c = \frac{1}{2\pi i} \int_L \tau p(\tau) \exp[-i\theta(\tau)] d\tau.$$

С другой стороны, [14]

$$\left[\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} \right]_1 = l_1 \{ -i\langle \sigma_{12} \rangle + \langle \sigma_{22} \rangle \}, \quad (9.204)$$

$$\left[\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} \right]_2 = l_2 \{ i[\langle \sigma_{11} \rangle \sin \alpha - \langle \sigma_{12} \rangle \cos \alpha] - [\langle \sigma_{12} \rangle \sin \alpha - \langle \sigma_{22} \rangle \cos \alpha] \},$$

$$\operatorname{Im} [f(z)]_1 = -l_1 \langle \sigma_{23} \rangle,$$

$$\operatorname{Im} [f(z)]_2 = l_2 [\langle \sigma_{13} \rangle \sin \alpha - \langle \sigma_{23} \rangle \cos \alpha].$$

Сравнивая (9.203) и (9.204), получаем систему уравнений относительно $\operatorname{Re} A_L$, B_L и E_L , решение которой есть

$$\operatorname{Re} A_L = \operatorname{Re} \left[\left(\frac{\delta_1}{l_1} - \frac{\pi}{F_0} \right) a \right] + \frac{\pi}{F_0} \operatorname{Re}(b), \quad (9.205)$$

$$B_L = \frac{\pi}{F_0} \bar{a} + \left(\frac{\pi}{F_0} + \frac{\gamma_1 - \delta_1}{l_1} \right) a + 2 \left(\frac{\delta_1}{l_1} - \frac{\pi}{F_0} \right) \operatorname{Re}(b),$$

$$E_L = \operatorname{Re} \left(\frac{2\pi c}{F_0} \right) - \frac{\delta_1}{l_1} c,$$

где $F_0 = l_1 l_2 \sin \alpha$ — площадь основного параллелограмма периодов.

Вычисляя при помощи (9.203), (9.204) средний угол малого поворота $\langle e \rangle$ и приравнивая его к нулю, находим

$$\operatorname{Im} A_L = \operatorname{Im} \left[\left(\frac{\delta_1}{l_1} - \frac{\pi}{F_0} \right) a \right]. \quad (9.206)$$

Интегральные уравнения краевых задач (9.199), (9.200). Представления (9.201) также, как и в п. 9.1, удовлетворяют условию непрерывности вектора напряжения при переходе через границу.

Подставляя их в остальные краевые условия, приходим к двум сингулярным интегральным уравнениям с неподвижными особенностями (одно для задачи об обобщенной плоской деформации, другое для задачи о продольном сдвиге) относительно искомых плотностей $\omega(\tau)$ и $p(\tau)$:

$$A(t)\omega(t) + \frac{B(t)}{\pi i} \int_L \omega(\tau) \zeta(\tau-t) d\tau + \frac{R(t)}{2\pi i} \int_L K_1(t, \tau) \omega(\tau) d\tau + \quad (9.207)$$

$$+ \frac{R(t)}{2\pi i} \int_L \overline{K_2(t, \tau) \omega(\tau) d\tau} - 2B(t) \operatorname{Re} A_L + 2i[A(t) - \lambda e(t)] \operatorname{Im} A_L -$$

$$- R(t) \bar{B}_L \frac{d\bar{t}}{dt} - e(t) E = g(t),$$

где

$$\begin{aligned}
 K_1(t, \tau) &= \zeta(\tau-t) \left[\frac{\zeta(\tau-t)}{\zeta(\tau-t)} \cdot \frac{d\bar{t}}{dt} - 1 \right], \\
 \overline{K_2(t, \tau)} &= \overline{\zeta(\tau-t)} \left[\frac{(\tau-t)\overline{\wp(\tau-t)}}{\zeta(\tau-t)} \cdot \frac{d\bar{t}}{dt} - 1 \right] - \overline{\wp_1(\tau-t)} \cdot \frac{d\bar{t}}{dt}, \\
 A(t) &= \begin{cases} \frac{(\kappa+1)+\lambda(\kappa_1+1)}{2}, & t \in L_4, \\ 0, & t \in L_1 \cup L_2 \cup L_3, \end{cases} \\
 B(t) &= \begin{cases} \frac{(1-\kappa)-\lambda(1-\kappa_1)}{2}, & t \in L_4, \\ 1, & t \in L_1 \cup L_2 \cup L_3, \end{cases} \\
 R(t) &= \begin{cases} 1-\lambda, & t \in L_4, \\ 1, & t \in L_1 \cup L_2 \cup L_3, \end{cases} \\
 e(t) &= \begin{cases} \kappa_1+1, & t \in L_4, \\ 0, & t \in L_1 \cup L_2 \cup L_3, \end{cases} \\
 g(t) &= 2B(t)A^{(\infty)} + R(t)\overline{B^{(\infty)}} \cdot \frac{d\bar{t}}{dt} + \begin{cases} 2\mu [e_{33}(\nu-\nu_1)-h'(t)], & t \in L_4, \\ 0, & t \in L_1 \cup L_2 \cup L_3 \end{cases}
 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
 (1+\lambda)p(t) - \frac{1-\lambda}{2\pi i} \int_L p(\tau) [q(t, \tau)\zeta(\tau-t)d\tau - \\
 - \overline{q(t, \tau)\zeta(\tau-t)d\tau}] - 2(1-\lambda)\operatorname{Re}\{\exp[i\theta(t)] \cdot E_L\} = \\
 = 2(1-\lambda)\{\langle\sigma_{13}\rangle\cos[\theta(t)] + \langle\sigma_{23}\rangle\sin[\theta(t)]\}, \quad t \in L_4,
 \end{aligned} \tag{9.208}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi i} \int_L ip(\tau) [q(t, \tau)\zeta(\tau-t)d\tau + \overline{q(t, \tau)\zeta(\tau-t)d\tau}] - 2\operatorname{Im}\{\exp[i\theta(t)] \cdot E_L\} = \\
 = 2\{\langle\sigma_{13}\rangle\sin[\theta(t)] - \langle\sigma_{23}\rangle\cos[\theta(t)]\}, \quad t \in L_1 \cup L_2 \cup L_3,
 \end{aligned}$$

$$q(t, \tau) = \exp[i\theta(t) - i\theta(\tau)], \quad \lambda = \frac{\mu}{\mu_1}.$$

Уравнения (9.207) и (9.208) отличаются от уравнений, соответствующих случаю $\omega_1 = \infty, \omega_2 = i\infty$ лишь слагаемыми с регулярными ядрами. Поэтому выводы о характере асимптотического поведения вблизи узлов границы L плотностей $\omega(\tau)$ и $p(\tau)$, а также тензора напряжения, полностью переносятся на рассматриваемый случай.

Также как и в предыдущем случае, здесь для выполнения условий однозначности вектора перемещения следует разыскивать лишь такие решения уравнений (9.207) и (9.208), которые удовлетворяют дополнительным условиям (9.202).

Имеют место утверждения. Решение уравнения (9.207) в классе H^* , удовлетворяющее первому условию (9.202), если такое решение существует, единственno.

Решение уравнения (9.208) в классе H^* , удовлетворяющее второму условию (9.202), если такое решение существует, единственno.

Из различных частных случаев, описываемых уравнениями (9.207), (9.208), отметим один, достаточно интересный для приложений.

Пусть в основном параллелограмме периодов расположено два включения с упругими постоянными $\mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2$, заполняющих односвязные области D_1 и D_2 , ограниченные контурами L_1 и L_2 соответственно (рис. 9.27). Предполагаем, что вдоль контуров L_1 и L_2 имеет место идеальный контакт материалов и что кривизны контуров L_1 и L_2 удовлетворяют условию Гельдера. Будем под границей L понимать объединение контуров L_1 и L_2 . Тогда в рассматриваемом случае можно использовать представления (9.201), если вместо E/λ подставить E_1/λ_1 при $z \in D_1$ и E_2/λ_2 при $z \in D_2$. Здесь

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{i}{4\pi} \operatorname{Re} \int_{L_1} \frac{\omega(\tau) d\tau}{\tau - z_1}, \quad \lambda_1 = \frac{\mu}{\mu_1}, \\ E_2 &= \frac{i}{4\pi} \operatorname{Re} \int_{L_2} \frac{\omega(\tau) d\tau}{\tau - z_2}, \quad \lambda_2 = \frac{\mu}{\mu_2}. \end{aligned} \quad (9.209)$$

В качестве z_1 и z_2 можно выбрать произвольные фиксированные точки из областей D_1 и D_2 соответственно.

Интегральные уравнения краевых задач в рассматриваемом случае имеют такой же вид, как и уравнения (9.207), (9.208) при $t \in L_4$. Следует только подставить вместо λ, ν, κ, E при $t \in L_1$ величины $\lambda_1, \nu_1, \kappa_1, E_1$ соответственно и величины $\lambda_2, \nu_2, \kappa_2, E_2$ при $t \in L_2$.

В силу того, что построенные таким образом интегральные уравнения выражают непрерывность вектора перемещения (точнее, его производной по дуговой абсциссе) при переходе через границу L , любые решения этих уравнений автоматически удовлетворяют условиям однозначности вектора перемещения.

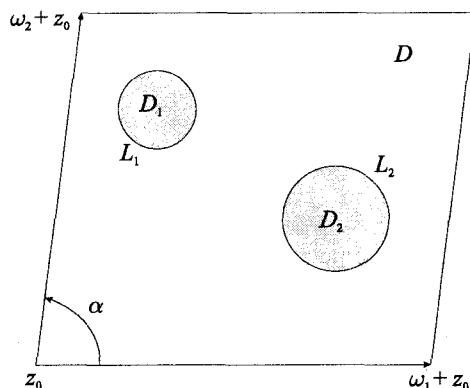


Рис. 9.27. Фундаментальная ячейка гибридного композита (общий случай)

Интегральные уравнения в рассматриваемом случае являются классическими сингулярными интегральными уравнениями, имеют нулевые индексы и разрешимы единственным образом в классе функций, удовлетворяющих условию Гельдера [30, 39].

Эффективные упругие постоянные волокнистого композиционного материала с двоякоперiodической структурой. Вычисляя средние компоненты тензора деформации (9.196) в структуре при помощи формул (9.203)–(9.204), имеем

$$\begin{aligned}\langle e_{11} \rangle &= \frac{1}{2\mu} \left[-\langle \sigma_{22} \rangle + \frac{(\kappa+1)(\langle \sigma_{11} \rangle + \langle \sigma_{22} \rangle)}{4} + \frac{\pi(\kappa+1)\operatorname{Re}(b-a)}{F_0} \right] - \nu e_{33}, \\ \langle e_{22} \rangle &= \frac{1}{2\mu} \left[-\langle \sigma_{11} \rangle + \frac{(\kappa+1)(\langle \sigma_{11} \rangle + \langle \sigma_{22} \rangle)}{4} + \frac{\pi(\kappa+1)\operatorname{Re}(b+a)}{F_0} \right] - \nu e_{33}, \\ 2\langle e_{12} \rangle &= \frac{1}{\mu} \left[\langle \sigma_{12} \rangle - \frac{\pi(\kappa+1)\operatorname{Im}(a)}{F_0} \right], \\ 2\langle e_{13} \rangle &= \frac{1}{\mu} \left[\langle \sigma_{13} \rangle + \frac{2\pi\operatorname{Re}(c)}{F_0} \right], \\ 2\langle e_{23} \rangle &= \frac{1}{\mu} \left[\langle \sigma_{23} \rangle + \frac{2\pi\operatorname{Im}(c)}{F_0} \right].\end{aligned}\quad (9.210)$$

Подчеркнем, что соотношения (9.210) справедливы при любом наборе размещенных внутри основного параллелограмма периодов неоднородностей, если только используются представления вида (9.207), (9.208). Согласно принятому определению

$$\langle \sigma_{33} \rangle = \frac{1}{F_0} \iint_{F_0} \sigma_{33} dx_1 dx_2 = \frac{1}{F_0} \iint_{F_0} \{2\mu(1+\nu)e_{33} + 4\nu\operatorname{Re}[\Phi(z)]\} dx_1 dx_2. \quad (9.211)$$

Следовательно, соотношения (9.210), (9.211) устанавливают линейную связь между средними компонентами тензора деформации, средними компонентами тензора напряжения и несколькими линейными функционалами, определенными на плотностях $\omega(\tau)$ и $p(\tau)$.

Считаем далее в этом параграфе, что $h'(t) = 0$, то есть что волокна посажены в матрицу без натяга и что, следовательно, начальные внутренние напряжения в среде отсутствуют.

Тогда являющиеся решением уравнений (9.207) и (9.208) плотности $\omega(\tau)$ и $p(\tau)$ линейным образом зависят от средних компонент тензора напряжения (за исключением компоненты $\langle \sigma_{33} \rangle$) и средней компоненты тензора деформации $\langle e_{33} \rangle \equiv e_{33}$. Таким образом, равенства (9.210) являются линейными соотношениями между средними компонентами тензоров напряжения и деформации в структуре.

Запишем эти соотношения в виде

$$\begin{aligned}\langle e_{11} \rangle &= a_{11} \langle \sigma_{11} \rangle + a_{12} \langle \sigma_{22} \rangle + a_{13} \langle \sigma_{33} \rangle + a_{16} \langle \sigma_{12} \rangle, \\ \langle e_{22} \rangle &= a_{21} \langle \sigma_{11} \rangle + a_{22} \langle \sigma_{22} \rangle + a_{23} \langle \sigma_{33} \rangle + a_{26} \langle \sigma_{12} \rangle, \\ \langle e_{33} \rangle &= a_{31} \langle \sigma_{11} \rangle + a_{32} \langle \sigma_{22} \rangle + a_{33} \langle \sigma_{33} \rangle + a_{36} \langle \sigma_{12} \rangle,\end{aligned}\quad (9.212)$$

$$2\langle e_{23} \rangle = a_{44} \langle \sigma_{23} \rangle + a_{45} \langle \sigma_{13} \rangle,$$

$$2\langle e_{13} \rangle = a_{54} \langle \sigma_{23} \rangle + a_{55} \langle \sigma_{13} \rangle,$$

$$2\langle e_{12} \rangle = a_{61} \langle \sigma_{11} \rangle + a_{62} \langle \sigma_{22} \rangle + a_{63} \langle \sigma_{33} \rangle + a_{66} \langle \sigma_{12} \rangle.$$

Из (9.197) и теоремы взаимности Бетти [41] следует, что матрица $\|a_{jk}\|_1^6$ — положительно определенная и симметричная.

Таким образом, поведение в «большом» волокнистого композиционного материала с двоякоперiodической структурой описывается законом (9.212). Причем эффективные упругие постоянные a_{jk} ($j, k = 1, \dots, 6$) вычисляются по описанному выше алгоритму через несколько функционалов, определенных на являющихся решением уравнений (9.207) и (9.208) со стандартными правыми частями плотностях $\omega(\tau)$ и $p(\tau)$. Соответствующие расчеты содержатся в [16, 18, 19]. В табл. 9.1 приведены результаты для гибридного композита с ячейкой, изображенной на рис. 9.28.

Таблица 9.1

**Эффективные упругие постоянные композиционного материала
с двумя типами эллиптических волокон в ячейке**

R_i	$R_l = 0,3$			$R_2 = 0,3$		
$\langle E_1 \rangle / E$	0,4			0,2		
R_4	0,2	0,3	0,4	0,2	0,3	0,4
$\langle E_1 \rangle / E$	1,348	1,429	1,510	1,230	1,267	1,303
$\langle E_2 \rangle / E$	1,304	1,398	1,528	1,236	1,279	1,345
$\langle E_3 \rangle / E$	1,534	1,600	1,785	1,408	1,471	1,534
$\langle G_{12} \rangle / G$	1,247	1,320	1,395	1,187	1,218	1,249
$\langle G_{13} \rangle / G$	1,349	1,422	1,484	1,225	1,255	1,282
$\langle G_{23} \rangle / G$	1,284	1,377	1,507	1,233	1,284	1,351
R_i	$R_l = 0,4$			$R_2 = 0,2$		
$\langle E_1 \rangle / E$	0,4			0,2		
R_4	0,2	0,3	0,4	0,2	0,3	0,4
$\langle E_1 \rangle / E$	1,361	1,455	1,526	1,233	1,270	1,307
$\langle E_2 \rangle / E$	1,266	1,359	1,496	1,200	1,249	1,314
$\langle E_3 \rangle / E$	1,503	1,628	1,754	1,377	1,440	1,503
$\langle G_{12} \rangle / G$	1,230	1,308	1,398	1,169	1,200	1,229
$\langle G_{13} \rangle / G$	1,370	1,445	1,509	1,239	1,270	1,297
$\langle G_{23} \rangle / G$	1,234	1,330	1,460	1,187	1,238	1,304

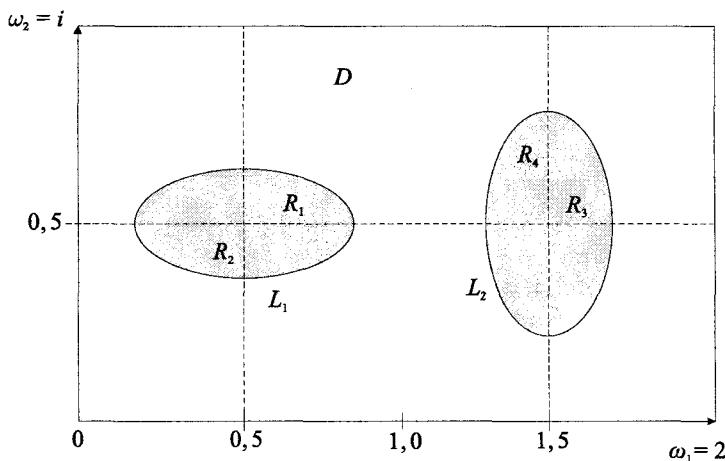


Рис. 9.28. Фундаментальная ячейка гибридного композита (расчетный случай)

9.5. Математическое моделирование эксперимента по определению механических характеристик наноразмерных объектов

Предположим, что на подложке, которая представляет собой тонкую металлическую пластиночку — полоску или пленку, выращена система наностержней (нанотрубок). Растигнув полоску в направлении оси стержня и замерив ее удлинение, можно определить среднюю деформацию системы в этом направлении. С другой стороны, теория регулярных структур [16–19] дает возможность вычислить средние деформации системы подложка — наностержни в зависимости от микроструктуры фундаментальной ячейки. Идея заключается в том, что сравнив экспериментальные и теоретические значения средних деформаций, мы получаем функциональное уравнение для определения жесткостных характеристик наностержня. Точнее, возникает обратная задача (решение которой может оказаться и неединственным и неустойчивым). Попробуем все-таки сделать начальные шаги на этом пути.

Растяжение подложки, скрепленной с двоякопериодической системой стержней. Пусть на подложке, которая представляет собой тонкую пластиночку или достаточно жесткую пленку, выращена регулярная (двоюкопериодическая) система наностержней (нанотрубок), ориентированных вдоль оси x , непрерывно скрепленных с подложкой (рис. 9.29). Пусть ω_1 и ω_2 ($\text{Im } \omega_1 = 0, \text{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0$) — основные периоды структуры. Стержень представляет собой отрезок L длиной $2l$ с концевыми точками a, b ($\text{Im } a = \text{Im } b$). Центры стержней образуют двоякопериодическую систему точек $P = m\omega_1 + n\omega_2$.

В области, занимаемой системой, имеют место средние напряжения $\langle \sigma_{ik} \rangle$ ($i, k = 1, 2$). В рамках указанной модели передача нагрузки от подложки к стержню осуществляется с помощью касательных напряжений $q_0(i)$.

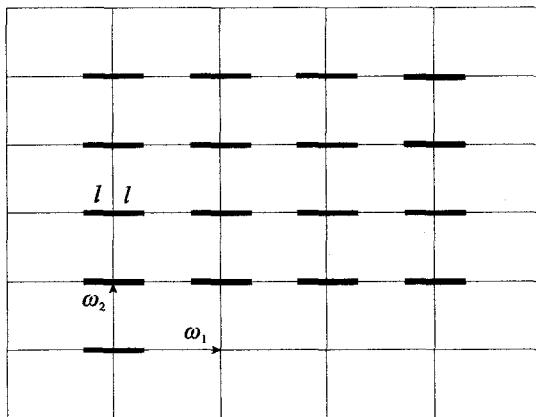


Рис. 9.29. Схема нанокомпозита

Составляя уравнение равновесия элемента стержня единичной длины в направлении оси x , выражаем погонное нормальное усилие в стержне через контактное усилие $q_0(t)$

$$P(t_0) = - \int_{t_0}^b q_0(t) dt,$$

$$P(b) = 0, P(a) = - \int_a^b q_0(t) dt = 0.$$

В соответствии с моделью плоского напряженного состояния [33] можно выразить смещения и напряжения в подложке через две аналитические в рассматриваемой области функции по формулам

$$h(z) = 2\mu\delta(u_1 + iu_2) = x\varphi(z) - z\overline{\Phi(z)} - \overline{\psi(z)}, \quad (9.213)$$

$$\delta(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 4 \operatorname{Re} \Phi(z),$$

$$\delta(\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12}) = 2 \left[\overline{z\Phi'(z)} + \Psi(z) \right],$$

$$\Phi(z) = \varphi'(z), \quad \Psi(z) = \psi'(z),$$

где δ — толщина пластиинки.

Главный вектор сил, действующих вдоль произвольной дуги AB , определяется формулой

$$X + iY = \int_{AB} (X_n + iY_n) ds = -ig(z) \Big|_A^B,$$

$$g(z) = \varphi(z) + z\overline{\Phi(z)} + \overline{\psi(z)}. \quad (9.214)$$

Интегральные представления аналитических функций, обеспечивающие двоякоперiodическое распределение тензора напряжений в пластине, возьмем в виде [16, 19]

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi(\kappa+1)} \int_L q_0(t) \zeta(t-z) dt + A_1,$$

$$\Psi(z) = \frac{\kappa}{2\pi(\kappa+1)} \int_L q_0(t) \zeta(z-t) dt - \frac{1}{2\pi(\kappa+1)} \int_L q_0(t) \left\{ \wp_1(z-t) + \bar{t} \wp(z-t) \right\} dt + A_2. \quad (9.215)$$

$$\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}.$$

Здесь постоянные A_1, A_2 определяются из условия существования в структуре заданных средних напряжений $\langle \sigma_{ik} \rangle$, ν — коэффициент Пуассона материала подложки.

Квазипериодичность вектора перемещения и главного вектора сил на дуге AB .

Покажем, что $h(z)$ и $g(z)$ — квазипериодические функции. Интегрируя функции (9.215), находим

$$\phi(z) = -\frac{1}{2\pi(\kappa+1)} \int_L q_0(t) \nu(t-z) dt + A_1 z,$$

$$\psi(z) = \frac{\kappa}{2\pi(\kappa+1)} \int_L q_0(t) \nu(z-t) dt - \frac{1}{2\pi(\kappa+1)} \int_L q_0(t) \left\{ \wp_1^{(-1)}(z-t) + \bar{t} \wp^{(-1)}(z-t) \right\} dt + A_2 z, \quad (9.216)$$

где [16, 17]

$$\nu'(z) = \zeta(z), \quad \wp^{(-1)} = -\zeta(z), \quad \wp_1^{(-1)}(z) = \int \wp_1(z) dz,$$

$$\nu(z + \omega_\nu) - \nu(z) = \pi i + \delta_\nu \left(z + \frac{1}{2} \omega_\nu \right),$$

$$\wp_1^{(-1)}(z + \omega_\nu) - \wp_1^{(-1)}(z) = -\bar{\omega}_\nu \zeta(z) + \gamma_\nu z + \gamma_\nu^*, \quad \gamma_2 \omega_1 - \gamma_1 \omega_2 = \delta_1 \bar{\omega}_2 - \delta_2 \bar{\omega}_1.$$

Условия существования в структуре средних напряжений $\langle \sigma_{ik} \rangle$ приводят к системе уравнений относительно постоянных A_1 и A_2 , решение которой дает

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} A_1 &= \frac{\langle \sigma_{11} \rangle + \langle \sigma_{22} \rangle}{4} \delta + \left(\frac{\pi(1+\kappa)}{2F} - \frac{\operatorname{Re} \delta_1}{\omega_1} \right) B, \\ A_2 &= \frac{\delta}{2} (\langle \sigma_{22} \rangle - \langle \sigma_{11} \rangle + 2i \langle \sigma_{12} \rangle) + \left(\frac{\kappa \delta_1 - \gamma_1}{\omega_1} - \frac{\pi(1+\kappa)}{F} \right) B, \\ B &= \frac{1}{2\pi(1+\kappa)} \int_L t q_0(t) dt, \quad F = \omega_1 \operatorname{Im} \omega_2. \end{aligned} \quad (9.217)$$

Таким образом, интегральные представления (9.215) при наличии равенств (9.217) корректны в том смысле, что они обеспечивают двоякую периодичность поля напряжений в структуре; квазипериодичность вектора перемещений и главного вектора усилий на дуге, соединяющей конгруэнтные точки; существование заданных средних напряжений $\langle \sigma_{11} \rangle, \langle \sigma_{12} \rangle, \langle \sigma_{22} \rangle$ при любой плотности $q_0(t) \in H(L)$, удовлетворяющей условию

$$\int_L q_0(t) dt = 0.$$

Интегральные уравнения структуры подложка — наностержни. Приравнивая деформацию e_{11} подложки деформации стержня на L , получаем сингулярное интегродифференциальное уравнение

$$\int_L q_0(t) K(t-t_0) dt + \beta(t_0) \int_{t_0}^b q_0(t) dt + M \{q_0(t)\} = N, \quad t_0 \in L,$$

$$\begin{aligned}
 K(t-t_0) &= \operatorname{Re} \left\{ \zeta(t-t_0) + \frac{(t-t_0)\overline{\wp(t-t_0)} - \overline{\wp_1(t-t_0)}}{2\kappa-1} \right\}, \\
 M\{q_0(t)\} &= \left[\frac{\pi(1+\kappa)^2}{2(2\kappa-1)F} - \frac{(2\kappa-1)\operatorname{Re}\delta_i - \operatorname{Re}\gamma_i}{(2\kappa-1)\omega_i} \right] \int_L q_0(t) dt, \\
 \beta\{t_0\} &= \frac{8\pi E\delta}{(1+\nu)(5-3\nu)E_0 F_0(t_0)}, \quad \kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}, \\
 N &= \frac{\pi(\kappa+1)\delta}{2(2\kappa-1)} [(3-\kappa)\langle\sigma_{22}\rangle - (1+\kappa)\langle\sigma_{11}\rangle].
 \end{aligned} \tag{9.218}$$

Здесь E, E_0 — модули упругости материалов подложки и наностержня, δ и ν — толщина и коэффициент Пуассона подложки, $F_0(t)$ — площадь поперечного сечения наностержня. Уравнение (9.218) в совокупности с дополнительным условием

$$\int_L q_0(t) dt = 0$$

однозначно определяет решение $q_0(t)$ на L .

Вводя безразмерные координаты

$$\xi = \frac{t}{l}, \quad \lambda = \frac{2l}{\omega_i},$$

приводим (9.218) к уравнению вида

$$\int_{-1}^1 \frac{q(\xi)}{\xi - \xi_0} d\xi + \int_{-1}^1 K(\xi_0 - \xi)q(\xi) d\xi + \beta(\xi_0) \int_{\xi_0}^1 q(\xi) d\xi = \pi f_1, \tag{9.219}$$

где

$$\begin{aligned}
 K(\xi) &= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{2} \right)^{2j+2} \Lambda_j \xi^{2j+1}, \\
 \Lambda_0 &= \frac{\omega_i}{2\kappa} \left\{ (2\kappa-1)\operatorname{Re}\delta_i - \operatorname{Re}\gamma_i - \frac{\pi}{2H}(1+\kappa)^2 \right\}, \quad H = |\omega_2| \sin \alpha, \\
 \Lambda_j &= \frac{1}{\kappa} \left\{ (j+1)\operatorname{Re}g_{2j+3}^{(1)} - (j+1-\kappa)\operatorname{Re}g_{2j+2}^0 \right\} \left(\frac{\omega_i}{2} \right)^{2j+2}, \quad (j=1, 2, \dots), \\
 \beta(\xi) &= \frac{4\pi E\delta l}{(3-\nu)(1+\nu)E_0 F_0}, \quad q(\xi) = q_0(l\xi), \\
 g_{2j+2} &= \sum_{m,n} \left(\frac{1}{T} \right)^{2j+2}, \quad g_{2j+3}^{(1)} = \sum_{m,n} \frac{T}{(T)^{2j+3}}, \quad T = \frac{1}{2}(m\omega_1 + n\omega_2), \\
 f_1 &= \frac{(1+\kappa)\delta}{4\kappa} \{ (3-\kappa)\langle\sigma_{22}\rangle - (1+\kappa)\langle\sigma_{11}\rangle \}.
 \end{aligned}$$

Уравнение (9.219) необходимо рассматривать совместно с дополнительным условием

$$\int_{-1}^1 q(\xi) d\xi = 0. \tag{9.220}$$

Макромодель нанокомпозита. Пусть $q^c(t)$ — стандартное решение уравнений (9.219), (9.220), определяемое формулой (при $\langle \sigma_{11} \rangle \neq 0, \langle \sigma_{22} \rangle \neq 0, \langle \sigma_{12} \rangle = 0$)

$$q_0(t) = q(\xi) = \left[\langle \sigma_{11} \rangle + \frac{\kappa-3}{\kappa+1} \langle \sigma_{22} \rangle \right] q^c(t). \quad (9.221)$$

Соответственно, (9.221) функционал B из (9.217) примет вид

$$B = \frac{b_{11}^c}{2\pi(\kappa+1)} \left[\langle \sigma_{11} \rangle + \frac{\kappa-3}{\kappa+1} \langle \sigma_{22} \rangle \right],$$

где

$$b_{11}^c = \int_L t q^c(t) dt.$$

Средние деформации в структуре можно найти по формулам [16]

$$\begin{aligned} \langle e_{11} \rangle &= \frac{1}{\omega_1} u_1(z) \Big|_z^{z+\omega_1}, \\ \langle e_{22} \rangle &= \frac{1}{\text{Im } \omega_2} u_2(z) \Big|_z^{z+\omega_2} - \frac{\text{ctg } \alpha}{\omega_1} u_2(z) \Big|_z^{z+\omega_1}, \\ 2\langle e_{12} \rangle &= \frac{1}{\omega_1} \left[u_2(z) - u_1(z) \text{ctg } \alpha \right]_z^{z+\omega_1} + \frac{1}{\text{Im } \omega_2} u_1(z) \Big|_z^{z+\omega_2}. \end{aligned}$$

Выполняя предписанные здесь операции взятия приращений от перемещений в конгруэнтных точках, приходим к уравнениям макромодели структуры

$$\langle e_{11} \rangle = \langle a_{11} \rangle \langle \sigma_{11} \rangle + \langle a_{12} \rangle \langle \sigma_{22} \rangle,$$

$$\langle e_{22} \rangle = \langle a_{12} \rangle \langle \sigma_{11} \rangle + \langle a_{22} \rangle \langle \sigma_{22} \rangle,$$

где

$$\begin{aligned} \langle a_{11} \rangle &= \frac{1}{\langle E_1 \rangle} = \frac{1}{E} \left(1 + \frac{b_{11}^c}{F} \right), \\ \langle a_{22} \rangle &= \frac{1}{\langle E_2 \rangle} = \frac{1}{E} \left(1 + \nu^2 \frac{b_{11}^c}{F} \right), \\ \langle a_{12} \rangle &= -\frac{\nu}{E} \left(1 + \frac{b_{11}^c}{F} \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что наиболее существенно изменяется макромодуль $\langle a_{11} \rangle$, величина $\langle a_{12} \rangle$ по абсолютной величине равна $\nu \langle a_{11} \rangle$, величина $\langle a_{22} \rangle \cdot E$ изменяется как $1 + 0(\nu^2)$. Это объясняется тем, что стержни ориентированы вдоль оси x -в. и их присутствие не влияет на сдвиговые деформации системы. Функционал b_{11}^c содержит в себе информацию о структуре фундаментальной ячейки (в данном случае о жесткости и геометрических параметрах наностержня). Поэтому, определив $\langle E_1 \rangle$ из эксперимента, получаем уравнение для определения модуля упругости наностержня

$$b_{11}^c = F \left(\frac{E}{\langle E_1 \rangle} - 1 \right).$$

9.6. Плоская задача теории упругости для анизотропной области с дефектами

В этом параграфе рассматривается класс задач, относящихся к телам, обладающим различными упругими свойствами в различных направлениях. В основном рассмотрим один тип анизотропии, когда тело характеризуется наличием в каждой его точке трех взаимно перпендикулярных плоскостей упругой симметрии, т. е. имеем ортотропное тело. Для этих тел закон Гука, отнесенный к главной системе координат, записывается в виде

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= a_{11}\sigma_{xx} + a_{12}\sigma_{yy} + a_{13}\sigma_{zz}, \\ \varepsilon_{yy} &= a_{12}\sigma_{xx} + a_{22}\sigma_{yy} + a_{23}\sigma_{zz}, \\ \varepsilon_{zz} &= a_{13}\sigma_{xx} + a_{23}\sigma_{yy} + a_{33}\sigma_{zz}, \\ \gamma_{xy} &= a_{66}\sigma_{xy}, \quad \gamma_{yz} = a_{44}\sigma_{yz}, \quad \gamma_{zx} = a_{55}\sigma_{zx}.\end{aligned}\tag{9.222}$$

Уравнения (9.222) приобретают большую наглядность, если вместо коэффициентов упругости ввести так называемые технические постоянные:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E_x}\sigma_{xx} - \frac{\nu_{yx}}{E_y}\sigma_{yy} - \frac{\nu_{zx}}{E_z}\sigma_{zz}, \\ \varepsilon_{yy} &= -\frac{\nu_{xy}}{E_x}\sigma_{xx} + \frac{1}{E_y}\sigma_{yy} - \frac{\nu_{zy}}{E_z}\sigma_{zz}, \\ \varepsilon_{zz} &= -\frac{\nu_{xz}}{E_x}\sigma_{xx} - \frac{\nu_{yz}}{E_y}\sigma_{yy} + \frac{1}{E_z}\sigma_{zz}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G_{xy}}\sigma_{xy}, \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G_{yz}}\sigma_{yz}, \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G_{xz}}\sigma_{zx}.\end{aligned}\tag{9.223}$$

Здесь E_x , E_y , E_z — модули упругости для растяжения (сжатия) вдоль главных направлений упругости x , y , z ; ν_{xy} — коэффициент Пуассона, характеризующий сокращение в направлении y при растяжении в направлении x и т. д.; G_{xy} , G_{yz} , G_{xz} — модули сдвига, характеризующие изменение углов между направлениями x и y , y и z , z и x . Между модулями упругости и коэффициентами Пуассона в силу симметрии уравнений (9.222) существуют зависимости:

$$E_x\nu_{yx} = E_y\nu_{xy}, \quad E_y\nu_{zy} = E_z\nu_{yz}, \quad E_z\nu_{xz} = E_x\nu_{zx}.\tag{9.224}$$

Заметим, что число независимых упругих постоянных для ортотропного тела равно девяти.

Для другого типа анизотропии, т. е. для трансверсально-изотропного тела характерно наличие в каждой его точке плоскости изотропии. Для этих тел закон Гука, отнесенный к главной системе координат, записывается в виде

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= a_{11}\sigma_{xx} + a_{12}\sigma_{yy} + a_{13}\sigma_{zz}, \\ \varepsilon_{yy} &= a_{12}\sigma_{xx} + a_{11}\sigma_{yy} + a_{13}\sigma_{zz}, \\ \varepsilon_{zz} &= a_{13}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + a_{33}\sigma_{zz}, \\ \gamma_{yz} &= a_{44}\sigma_{yz}, \quad \gamma_{zx} = a_{44}\sigma_{zx}, \quad \gamma_{xy} = 2(a_{11} - a_{12})\sigma_{xy}\end{aligned}\tag{9.225}$$

или

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}) - \frac{\nu_z}{E_z}\sigma_{zz}, \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}) - \frac{\nu_z}{E_z}\sigma_{zz}, \\ \varepsilon_{zz} &= -\frac{\nu_z}{E_z}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \frac{1}{E_z}\sigma_{zz}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\sigma_{xy}, \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G_z}\sigma_{yz}, \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G_z}\sigma_{zx}.\end{aligned}\tag{9.226}$$

Здесь E — модуль упругости для направлений в плоскости изотропии; E_z — модуль упругости для направлений, перпендикулярных к этой плоскости, ν — коэффициент Пуассона, характеризующий сокращение в плоскости изотропии при растяжении в той же плоскости; ν_z — коэффициент Пуассона, характеризующий сокращение в плоскости изотропии при растяжении в направлении, перпендикулярном к ней, $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$, G_z — модули сдвига, характеризующие искажения углов между направлениями в плоскости изотропии и направлением, перпендикулярном к ней соответственно.

Легко заметить, что для этих тел число независимых упругих постоянных равно пяти.

Для анизотропных тел различают два вида упругого равновесия: обобщенное плоское напряженное состояние и плоскую деформацию. Закон Гука, отнесенный к произвольной системе координат, для двух состояний имеет соответственно следующий вид:

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = a_{11}\sigma_{xx} + a_{12}\sigma_{yy} + a_{16}\sigma_{xy}, \\ \varepsilon_{yy} = a_{12}\sigma_{xx} + a_{22}\sigma_{yy} + a_{26}\sigma_{xy}, \\ \gamma_{xy} = a_{16}\sigma_{xx} + a_{26}\sigma_{yy} + a_{66}\sigma_{xy}, \\ \sigma_{zz} = 0, \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \end{cases}\tag{9.227}$$

и

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = c_{11}\sigma_{xx} + c_{12}\sigma_{yy} + c_{16}\sigma_{xy}, \\ \varepsilon_{yy} = c_{12}\sigma_{xx} + c_{22}\sigma_{yy} + c_{26}\sigma_{xy}, \\ \gamma_{xy} = c_{16}\sigma_{xx} + c_{26}\sigma_{yy} + c_{66}\sigma_{xy}, \\ \sigma_{zz} = -\frac{1}{a_{33}}(a_{13}\sigma_{xx} + a_{23}\sigma_{yy} + a_{36}\sigma_{xy}), \\ \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0. \end{cases}\tag{9.228}$$

Здесь c_{ij} — приведенные коэффициенты деформации, связанные с a_{ij} отношениями

$$c_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i3}a_{j3}}{a_{33}} \quad (i, j = 1, 2, 6).\tag{9.229}$$

При изучении плоской задачи теории упругости для анизотропного тела часто возникает необходимость преобразования упругих постоянных при повороте координатных осей на угол α . Для ортотропной пластины закон Гука, отнесенный к главным и новым произвольным осям, имеет вид

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E_x} \sigma_{xx} - \frac{\nu_{yx}}{E_y} \sigma_{yy}, \\ \varepsilon_{yy} &= -\frac{\nu_{xy}}{E_x} \sigma_{xx} + \frac{1}{E_y} \sigma_{yy}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G_{xy}} \sigma_{xy}\end{aligned}\quad (9.230)$$

и

$$\begin{aligned}\varepsilon'_{xx} &= \frac{1}{E'_x} \sigma'_{xx} - \frac{\nu'_{yx}}{E'_y} \sigma'_{yy} + \alpha_1 \sigma'_{xy}, \\ \varepsilon'_{yy} &= -\frac{\nu'_{xy}}{E'_x} \sigma'_{xx} + \frac{1}{E'_y} \sigma'_{yy} + \alpha_2 \sigma'_{xy}, \\ \gamma'_{xy} &= \alpha_1 \sigma'_{xx} + \alpha_2 \sigma'_{yy} + \frac{1}{G'_{xy}} \sigma'_{xy},\end{aligned}\quad (9.231)$$

а связь между упругими постоянными определяется формулами:

$$\begin{aligned}\frac{1}{E'_x} &= \frac{\cos^4 \alpha}{E_x} + \left(\frac{1}{G_{xy}} - \frac{2\nu_{xy}}{E_x} \right) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \frac{\sin^4 \alpha}{E_y}, \\ \frac{1}{E'_y} &= \frac{\sin^4 \alpha}{E_x} + \left(\frac{1}{G_{xy}} - \frac{2\nu_{xy}}{E_x} \right) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \frac{\cos^4 \alpha}{E_y}, \\ \frac{1}{G'_{xy}} &= \frac{1}{G_{xy}} + \left(\frac{1+\nu_{xy}}{E_x} + \frac{1+\nu_{yx}}{E_y} - \frac{1}{G_{xy}} \right) \sin^2 2\alpha, \\ \frac{\nu'_{xy}}{E'_x} &= \frac{\nu_{xy}}{E} - \frac{1}{4} \left(\frac{1+\nu_{xy}}{E_x} + \frac{1+\nu_{yx}}{E_y} - \frac{1}{G_{xy}} \right) \sin^2 2\alpha, \\ \nu'_{yx} E'_x &= \nu'_{xy} E'_y, \\ \alpha_1 &= \left[\frac{\sin^2 \alpha}{E_y} - \frac{\cos^2 \alpha}{E_x} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{G_{xy}} - \frac{2\nu_{xy}}{E_x} \right) \cos 2\alpha \right] \sin 2\alpha, \\ \alpha_2 &= \left[\frac{\cos^2 \alpha}{E_y} - \frac{\sin^2 \alpha}{E_x} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{G_{xy}} - \frac{2\nu_{xy}}{E_x} \right) \cos 2\alpha \right] \sin 2\alpha.\end{aligned}\quad (9.232)$$

Перейдем впоследствии к выводу формул, с помощью которых, при помощи метода ТФКП выразим компоненты тензора напряжения и перемещения через комплексные по-

тенциалы [31, 32]. Для этого подставим выражение (9.227) в известное условие совместности деформаций

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (9.233)$$

и принимая во внимание выражения компонент тензора напряжений, через функцию Эйри U

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \quad (9.234)$$

получим следующее бигармоническое дифференциальное уравнение:

$$a_{22} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} - 2a_{26} \frac{\partial^4 U}{\partial x^3 \partial y} + (2a_{12} + a_{66}) \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} - 2a_{16} \frac{\partial^4 U}{\partial x \partial y^3} + a_{11} \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0. \quad (9.235)$$

В частности, уравнение (9.235) для ортотропной пластинки в так называемых технических постоянных, когда направления осей x и y совпадают с главными направлениями упругости, принимает вид

$$\frac{1}{E_y} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + \left(\frac{1}{G_{xy}} - \frac{2\nu_{xy}}{E_x} \right) \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{E_x} \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0. \quad (9.236)$$

Для случая плоской деформации, бигармоническое уравнение принимает вид

$$c_{22} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} - 2c_{26} \frac{\partial^4 U}{\partial x^3 \partial y} + (2c_{12} + c_{66}) \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} - 2c_{16} \frac{\partial^4 U}{\partial x \partial y^3} + c_{11} \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0. \quad (9.237)$$

Уравнение (9.235) можно проинтегрировать в общем виде, предварительно записав его символически с помощью линейных дифференциальных операторов в виде

$$L_1 L_2 L_3 L_4 U = 0. \quad (9.238)$$

Здесь символ L_k обозначает операцию

$$L_k = \frac{\partial}{\partial y} - \mu_k \frac{\partial}{\partial x}, \quad (9.239)$$

где μ_k — корни характеристического уравнения

$$a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{26}\mu + a_{22} = 0. \quad (9.240)$$

Известно, что характеристические уравнения (9.240) для всякого идеально-упругого тела могут иметь либо комплексные, либо чисто мнимые корни. Возможны следующие случаи:

а) $\operatorname{Im} \mu_1 > 0, \operatorname{Im} \mu_2 > 0, \mu_3 = \overline{\mu_1}, \mu_4 = \overline{\mu_2}$;

б) $\mu_1 = \mu_2 = a + i\beta$.

Ко второму случаю относится случай изотропной пластины, когда $a = 0, \beta = 1 \Rightarrow \mu_1 = \mu_2 = i, \mu_3 = \mu_4 = -i$.

В работах С. Г. Лехницкого [31, 32] показано, что при отсутствии объемных сил бигармоническое уравнение сводится к определению двух аналитических функций $\varphi_0(z_1)$ и $\psi_0(z_2)$ для определения тензора напряжения $\{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}\}$ и вектора смещения $\{u, v\}$ ортотропной пластины. Эти соотношения имеют вид

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = 2 \operatorname{Re} [\mu_1^2 \Phi_0(z_1) + \mu_2^2 \Psi_0(z_2)], \\ \sigma_{yy} = 2 \operatorname{Re} [\Phi_0(z_1) + \Psi_0(z_2)], \\ \sigma_{xy} = -2 \operatorname{Re} [\mu_1 \Phi_0(z_1) + \mu_2 \Psi_0(z_2)], \end{cases} \quad (9.241)$$

$$\begin{cases} u = 2 \operatorname{Re} [p_1 \varphi_0(z_1) + p_2 \psi_0(z_2)], \\ v = 2 \operatorname{Re} [q_1 \varphi_0(z_1) + q_2 \psi_0(z_2)]. \end{cases} \quad (9.242)$$

Здесь

$$\varphi'_0(z_1) = \Phi_0(z_1), \quad \psi'_0(z_2) = \Psi_0(z_2),$$

$$z_k = x + \mu_k y,$$

μ_k — корни характеристического уравнения:

$$\begin{cases} \mu^4 - \left(\frac{E_x}{G_{xy}} - 2\nu_{xy} \right) \mu^2 + \frac{E_x}{E_y} = 0 \quad (\operatorname{Im} \mu_k > 0), \\ p_k = \frac{\mu_k^2}{E_x} - \frac{\nu_{yx}}{E_y}, \\ q_k = \frac{1}{E_y \mu_k} - \frac{\nu_{xy}}{E_y} \mu_k, \quad k = 1, 2. \end{cases} \quad (9.243)$$

Если трансверсально-изотропное тело находится в состоянии плоской деформации, то компоненты напряжений и смещений определяются по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= 2 [\Phi_0(z) + \overline{\Phi_0(z)}], \\ \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} &= 2 [\bar{z}\Phi'_0(z) + \Psi_0(z)], \\ 2\mu(u + iv) &= \kappa\varphi_0(z) - z\overline{\Phi_0(z)} - \overline{\psi_0(z)}, \end{aligned} \quad (9.244)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_0(z) &= \varphi'_0(z), \quad \Psi_0(z) = \psi'_0(z), \\ \kappa &= 1 + \frac{2E}{1+\nu} \left(\frac{1-\nu}{E} - \frac{2\nu_z^2}{E_z} \right). \end{aligned}$$

Вид формул (9.244) аналогичен соответствующим формулам для изотропного тела и, следовательно, методы решения задач плоской деформации изотропного тела можно распространить на случай трансверсально-изотропного тела.

Если в некоторой точке $z_0^*(x_0^*, y_0^*)$, расположенной внутри области анизотропного тела, приложена сосредоточенная сила с проекциями P и Q , а в точке $z_0^{**}(x_0^{**}, y_0^{**})$ приложен сосредоточенный момент интенсивности M_0 , то функции $\varphi_0(z_1)$ и $\psi_0(z_2)$ имеют вид

$$\begin{aligned}\varphi_0(z_1) &= A_0 \ln(z_1 - t_1^*) + \left(-\frac{M_0}{8\pi i} \right) \frac{1}{z_1 - t_1^{**}}, \\ \psi_0(z_2) &= B_0 \ln(z_2 - t_2^*) + \left(-\frac{M_0}{8\pi i} \right) \frac{1}{z_2 - t_2^{**}},\end{aligned}\quad (9.245)$$

где:

$$\begin{aligned}t_k^* &= x_0^* + \mu_k y_0^*, \quad t_k^{**} = x_0^{**} + \mu_k y_0^{**}, \quad k = 1, 2, \\ A_0 &= [i(P + \mu_2 Q) + m - n\mu_2] / 4\pi(\mu_1 - \mu_2), \\ B_0 &= -[i(P + \mu_1 Q) + m - n\mu_1] / 4\pi(\mu_1 - \mu_2), \\ \operatorname{Im} [m(\mu_1 + \mu_2) - n\mu_1\mu_2] &= -\left[\operatorname{Re}(\mu_1\mu_2) - \frac{c_{12}}{c_{11}} \right] Q, \\ \operatorname{Im} [m\mu_1\mu_2 + n(\mu_1 + \mu_2)\overline{\mu_1\mu_2}] &= \left[\operatorname{Re}(\mu_1\mu_2) - \frac{c_{12}}{c_{11}} \right] P.\end{aligned}$$

Задача 1. Трещина в ортотропной бесконечной пластине.

В декартовой системе координат xy , оси которой совпадают с главными направлениями, рассмотрим плоскую бесконечную ортотропную область, которая ослаблена криволинейной трещиной l . Эта область на бесконечности подвержена действию усилий σ_{xx}^∞ , σ_{yy}^∞ , σ_{xy}^∞ . Предполагается, что среда находится в равновесии под действием самоуравновешенных усилий, приложенных к берегам криволинейной трещины l (рис. 9.30). Основанием для определения напряженно-деформированного состояния бесконечной ортотропной пластины с трещиной служат соотношения (9.241)–(9.242), где

$$\begin{aligned}\Phi_0(z) &= \Gamma + \Phi(z), \\ \Psi_0(z) &= \Gamma' + \Psi(z).\end{aligned}\quad (9.246)$$

Здесь

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{l_1} \frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1 - z_1} d\tau_1, \\ \Psi(z_2) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{l_2} \frac{y(\tau_2)}{\tau_2 - z_2} d\tau_2,\end{aligned}\quad (9.247)$$

l_1 , l_2 — образы трещины l .

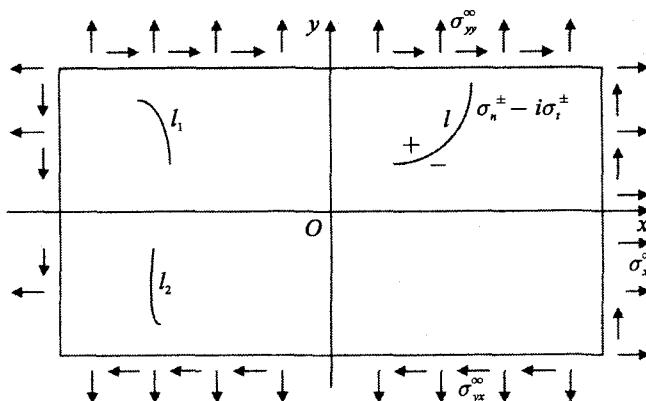


Рис. 9.30. Бесконечная ортотропная плоская область, ослабленная трещиной l

Кроме того, известно, что постоянные Γ , Γ' удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned}\Gamma - \bar{\Gamma} &= 0, \\ \mu_1^2 \Gamma + \overline{\mu_1^2 \bar{\Gamma}} + \mu_2^2 \Gamma' + \overline{\mu_2^2 \bar{\Gamma}'} &= \sigma_{xx}^\infty, \\ \Gamma + \bar{\Gamma} + \Gamma' + \bar{\Gamma}' &= \sigma_{yy}^\infty, \\ \mu_1 \Gamma + \overline{\mu_1 \bar{\Gamma}} + \mu_2 \Gamma' + \overline{\mu_2 \bar{\Gamma}'} &= -\sigma_{xy}^\infty.\end{aligned}\quad (9.248)$$

На берегах трещины l заданы нормальные и касательные напряжения

$$(\sigma_n^\pm + i\sigma_t^\pm) \Big|_{l \in l}. \quad (9.249)$$

Принимая во внимание известную формулу

$$\sigma_n + i\sigma_t = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) - \frac{e^{-2i\theta}}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy} + 2i\sigma_{xy}) \quad (9.250)$$

и предельные значения комплексных потенциалов в выражениях (9.241), будем иметь следующие соотношения на берегах трещины l:

$$\begin{aligned}\sigma_n^\pm + i\sigma_t^\pm &= \operatorname{Re} \left\{ (1 + \mu_1^2) \Phi_0^\pm(t_1) + (1 + \mu_2^2) \Psi_0^\pm(t_2) \right\} + \\ &+ \frac{dt}{dt} \left\{ \operatorname{Re} \left\{ (1 - \mu_1^2) \Phi_0^\pm(t_1) + (1 - \mu_2^2) \Psi_0^\pm(t_2) \right\} + 2i \operatorname{Re} \left\{ \mu_1 \Phi_0^\pm(t_1) + \mu_2 \Psi_0^\pm(t_2) \right\} \right\},\end{aligned}\quad (9.251)$$

когда

$$\left. \begin{aligned}z &\rightarrow t = z + iy, \\ z_1 &\rightarrow t_1 = x + \mu_1 y, \\ z_2 &\rightarrow t_2 = x + \mu_2 y.\end{aligned} \right\} \quad (9.252)$$

Принимая во внимание выражения (9.252), имеем:

$$x = \frac{t + \bar{t}}{2}, \quad y = -i \frac{t - \bar{t}}{2}, \quad (9.253)$$

$$t_1 = \frac{1}{2} \left\{ (1 - i\mu_1)t + (1 + i\mu_1)\bar{t} \right\}, \quad t_2 = \frac{1}{2} \left\{ (1 - i\mu_2)t + (1 + i\mu_2)\bar{t} \right\}.$$

Дифференцируя (9.253) относительно t и \bar{t} , имеем:

$$\begin{aligned}\frac{dt_1}{dt} &= \frac{1}{2} \left\{ (1-i\mu_1) + (1+i\mu_1) \frac{d}{dt} \right\}, \quad \frac{dt_2}{dt} = \frac{1}{2} \left\{ (1-i\mu_2) + (1+i\mu_2) \frac{d}{dt} \right\}, \\ \frac{d\bar{t}_1}{dt} &= \frac{1}{2} \left\{ (1-i\mu_1) \frac{d}{dt} + (1+i\mu_1) \right\}, \quad \frac{d\bar{t}_2}{dt} = \frac{1}{2} \left\{ (1-i\mu_2) \frac{d}{dt} + (1+i\mu_2) \right\}.\end{aligned}\quad (9.254)$$

Выражения (9.251) после преобразования принимают вид:

$$\begin{aligned}(1+i\mu_1) \left\{ (1-i\mu_1) + \frac{dt}{dt} (1+i\mu_1) \right\} \Phi^\pm(t_1) + (1+i\bar{\mu}_1) \times \left\{ (1-i\bar{\mu}_1) + \frac{d\bar{t}}{dt} (1+i\bar{\mu}_1) \right\} \overline{\Phi^\pm(t_1)} + \\ + (1+i\mu_2) \left\{ (1-i\mu_2) \frac{dt}{dt} (1+i\mu_2) \right\} \Psi^\pm(t_2) + (1+i\bar{\mu}_2) \left\{ (1-i\bar{\mu}_2) + \frac{d\bar{t}}{dt} (1+i\bar{\mu}_2) \right\} \overline{\Psi^\pm(t_2)} = \\ = 2f^\pm(t),\end{aligned}\quad (9.255)$$

где

$$\begin{aligned}f^\pm(t) = \sigma_n^\pm + i\sigma_t^\pm - \frac{1}{2} \left\{ (1+\mu_1^2)\Gamma + (1+\bar{\mu}_1^2)\bar{\Gamma} + (1+\mu_2^2)\Gamma' + (1+\bar{\mu}_2^2)\bar{\Gamma}' \right\} - \\ - \frac{1}{2} \frac{d\bar{t}}{dt} \left\{ (1+i\mu_1)^2 \Gamma + (1+i\bar{\mu}_1)^2 \bar{\Gamma} + (1+i\mu_2)^2 \Gamma' + (1+i\bar{\mu}_2)^2 \bar{\Gamma}' \right\}.\end{aligned}$$

Умножая $\frac{d\bar{t}}{dt}$ на сопряженное к (9.255) выражение, имеем:

$$\begin{aligned}(1-i\mu_1) \left\{ (1-i\mu_1) + \frac{d\bar{t}}{dt} (1+i\mu_1) \right\} \Phi^\pm(t_1) + (1-i\bar{\mu}_1) \times \\ \times \left\{ (1-i\bar{\mu}_1) + \frac{d\bar{t}}{dt} (1+i\bar{\mu}_1) \right\} \times \overline{\Phi^\pm(t_1)} + (1-i\mu_2) \times \\ \times \left\{ (1-i\mu_2) + \frac{d\bar{t}}{dt} (1+i\mu_2) \right\} \Psi^\pm(t_2) + (1-i\bar{\mu}_2) \left\{ (1-i\bar{\mu}_2) + \frac{d\bar{t}}{dt} (1+i\bar{\mu}_2) \right\} \overline{\Psi^\pm(t_2)} = 2 \frac{d\bar{t}}{dt} f_1^\pm(t).\end{aligned}\quad (9.256)$$

Умножая (9.255) на $(1-i\bar{\mu}_2)$ и (9.256) на $(1+i\bar{\mu}_2)$, а затем соответственно вычитая одно из другого, получим:

$$\begin{aligned}(\mu_1 - \bar{\mu}_2) \left\{ (1-i\mu_1) + \frac{d\bar{t}}{dt} (1+i\mu_1) \right\} \Phi^\pm(t_1) + (\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2) \left\{ (1-i\bar{\mu}_1) + \frac{d\bar{t}}{dt} (1+i\bar{\mu}_1) \right\} \overline{\Phi^\pm(t_1)} + \\ + (\mu_2 - \bar{\mu}_2) \left\{ (1-i\mu_2) + \frac{d\bar{t}}{dt} (1+i\mu_2) \right\} \Psi^\pm(t_2) = f_2^\pm(t),\end{aligned}\quad (9.257)$$

где

$$f_2^\pm(t) = -i(1-i\bar{\mu}_2)f_1^\pm(t) + i \frac{d\bar{t}}{dt} (1+i\bar{\mu}_2) \overline{f_1^\pm(t)}.$$

Вычитая и складывая соответственно выражения (9.257) и применяя формулы Сохоцкого–Племеля

$$\begin{aligned}\Phi^\pm(t_1) &= \pm \frac{1}{2} \varphi(t_1) + \frac{1}{2\pi i} \int_{l_1}^{\bar{\tau}_1} \frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1 - t_1} d\tau_1, \\ \Psi^\pm(t_2) &= \pm \frac{1}{2} y(t_2) + \frac{1}{2\pi i} \int_{l_1}^{\bar{\tau}_2} \frac{y(\tau_1)}{\tau_2 - t_2} d\tau_1,\end{aligned}\quad (9.258)$$

получим следующие два выражения:

$$\begin{aligned}(\mu_1 - \bar{\mu}_2) \left\{ (1 - i\mu_1) + \frac{dt}{dt} (1 + i\mu_1) \right\} \varphi(t_1) + (\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2) \left\{ (1 - i\bar{\mu}_1) + \right. \\ \left. + \frac{dt}{dt} (1 + i\bar{\mu}_1) \right\} \overline{\varphi(t_1)} + (\mu_2 - \bar{\mu}_2) \left\{ (1 - i\mu_2) + \frac{dt}{dt} (1 + i\mu_2) \right\} y(t_2) = \\ = f_2^+(t) - f_2^-(t) = g_1(t)\end{aligned}\quad (9.259)$$

и

$$\begin{aligned}(\mu_1 - \bar{\mu}_2) \left\{ (1 - \mu_1) + \frac{dt}{dt} (1 + i\mu_1) \right\} \frac{1}{\pi i} \int_{l_1}^{\bar{\tau}_2} \frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_2 - \tau_1} d\tau_1 - (\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2) \times \\ \times \left\{ (1 - i\bar{\mu}_1) + \frac{dt}{dt} (1 + i\bar{\mu}_1) \right\} \frac{1}{\pi i} \int_{l_1}^{\bar{\tau}_1} \frac{\overline{\varphi(\tau_1)}}{\tau_1 - t_1} d\tau_1 + (\mu_2 - \bar{\mu}_2) \times \\ \times \left\{ (1 - i\mu_2) + \frac{dt}{dt} (1 + i\mu_2) \right\} \frac{1}{\pi i} \int_{l_2}^{\bar{\tau}_2} \frac{y(\tau_2)}{\tau_2 - t_2} d\tau_2 = f_2^+(t) + f_2^-(t) = g_2(t).\end{aligned}\quad (9.260)$$

Принимая во внимание (9.254) и сопряженные к ним, выражения (9.259) и (9.260) примут соответствующий вид:

$$(\mu_1 - \bar{\mu}_2) \frac{dt_1}{dt} \varphi(t_1) + (\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2) \frac{dt_1}{dt} \overline{\varphi(t_1)} + (\mu_2 - \bar{\mu}_2) \frac{dt_2}{dt} y(t_2) = \frac{1}{2} g_1(t) = q_1^*(t), \quad (9.261)$$

$$\begin{aligned}\frac{\mu_1 - \bar{\mu}_2}{\pi i} \frac{dt_1}{dt} \int_{l_1}^{\bar{\tau}_1} \frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1 - t_1} d\tau_1 - \frac{\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2}{\pi i} \frac{dt_1}{dt} \int_{l_1}^{\bar{\tau}_1} \frac{\overline{\varphi(\tau_1)}}{\tau_1 - t_1} d\tau_1 + \\ + \frac{\mu_2 - \bar{\mu}_2}{\pi i} \frac{dt_2}{dt} \int_{l_2}^{\bar{\tau}_2} \frac{y(\tau_2)}{\tau_2 - t_2} d\tau_2 = \frac{1}{2} g_2(t) = q_2^*(t).\end{aligned}\quad (9.262)$$

Разрешая (9.261) относительно $y(t_2)$, имеем

$$y(t_2) = \frac{1}{\mu_2 - \bar{\mu}_2} \frac{dt}{dt_2} q_1^*(t) - \frac{\mu_1 - \bar{\mu}_2}{\mu_2 - \bar{\mu}_2} \frac{dt_1}{dt_2} \varphi(t_1) - \frac{\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2}{\mu_2 - \bar{\mu}_2} \frac{dt_1}{dt_2} \overline{\varphi(t_1)}. \quad (9.263)$$

Принимая во внимание (9.263), вторая формула (9.247) для интеграла типа Коши $\Psi(z_2)$ примет вид

$$\Psi(z_2) = \frac{1}{2\pi i(\mu_2 - \bar{\mu}_2)} \int_{l_1}^{\bar{\tau}_2} \frac{q_1^*(\tau)}{\tau_2 - z_2} d\tau - \frac{\mu_1 - \bar{\mu}_2}{2\pi i(\mu_2 - \bar{\mu}_2)} \int_{l_1}^{\bar{\tau}_2} \frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_2 - z_2} d\tau_1 - \frac{\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2}{2\pi i(\mu_2 - \bar{\mu}_2)} \int_{l_1}^{\bar{\tau}_2} \frac{\overline{\varphi(\tau_1)}}{\tau_2 - z_2} d\tau_1. \quad (9.264)$$

Уравнение (9.262) на основании формулы Сохоцкого–Племеля для комплексного потенциала $\Psi(z_2)$ примет вид

$$\begin{aligned} & \frac{\mu_1 - \bar{\mu}_2}{\pi i} \frac{dt_1}{dt} \int_{l_1}^t \frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1 - t_1} d\tau_1 - \frac{\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2}{\pi i} \frac{dt_1}{dt} \int_{l_1}^t \frac{\overline{\varphi(\tau_1)}}{\bar{\tau}_1 - \bar{t}_1} d\bar{\tau}_1 - \\ & - \frac{dt_2}{dt} \left\{ \frac{\mu_1 - \bar{\mu}_2}{\pi i} \int_{l_1}^t \frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1 - t_2} d\tau_1 + \frac{\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2}{\pi i} \int_{l_1}^t \frac{\overline{\varphi(\tau_1)}}{\bar{\tau}_1 - \bar{t}_2} d\bar{\tau}_1 \right\} = \\ & = q_2^*(t) - \frac{dt_2}{dt} \frac{1}{\pi i} \int_{l_2}^t \frac{q_1^*(\tau)}{\tau_2 - t_2} d\tau, \quad t, t_1, t_2 \in l, l_1, l_2 \quad \text{соответственно} \end{aligned} \quad (9.265)$$

или в другой форме:

$$\begin{aligned} & \frac{\mu_1 - \bar{\mu}_2}{\pi i} \int_{l_1}^t \left\{ \frac{1}{\tau_1 - t_1} \frac{dt_1}{dt} - \frac{1}{\tau_2 - t_2} \frac{dt_2}{dt} \right\} \varphi(\tau_1) d\tau_1 - \\ & - \frac{\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2}{\pi i} \int_{l_1}^t \left\{ \frac{1}{\tau_1 - t_1} \frac{d\bar{\tau}_1}{dt} + \frac{1}{\tau_2 - t_2} \frac{d\bar{\tau}_2}{dt} \right\} \overline{\varphi(\tau_1) d\tau_1} = q_2^*(t) - \frac{dt_2}{dt} \frac{1}{\pi i} \int_{l_2}^t \frac{q_1^*(\tau)}{\tau_2 - t_2} d\bar{\tau}. \end{aligned} \quad (9.266)$$

Как для изотропного тела с трещиной, так и для анизотропного, для полного решения поставленной задачи нужно СИУ (9.266) дополнить условием однозначности смещений вокруг контура:

$$\int_l \left[\frac{d[u^+(t) - u^-(t)]}{dt} + i \frac{d[v^+(t) - v^-(t)]}{dt} \right] = 0. \quad (9.267)$$

При $z \rightarrow t$ формулы (9.242) после дифференцирования принимают вид

$$\begin{aligned} & \frac{du^\pm(t)}{dt} + i \frac{dv^\pm(t)}{dt} = (p_1 + iq_1) \frac{dt_1}{dt} \Phi^\pm(t_1) + (\bar{p}_1 + i\bar{q}_1) \frac{d\bar{t}_1}{dt} \overline{\Phi^\pm(t_1)} + \\ & + (p_2 + iq_2) \frac{dt_2}{dt} \Psi^\pm(t_2) + (\bar{p}_2 + i\bar{q}_2) \frac{d\bar{t}_2}{dt} \overline{\Psi^\pm(t_2)}, \end{aligned} \quad (9.268)$$

и условие (9.267) после этого запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} & (p_1 + iq_1) \int_{l_1}^t [\Phi^+(t_1) - \Phi^-(t_1)] dt_1 + (\bar{p}_1 + i\bar{q}_1) \int_{l_1}^t [\overline{\Phi^+(t_1)} - \overline{\Phi^-(t_1)}] d\bar{t}_1 + \\ & + (p_2 + iq_2) \int_{l_2}^t [\Psi^+(t_2) - \Psi^-(t_2)] dt_2 + (\bar{p}_2 + i\bar{q}_2) \int_{l_2}^t [\overline{\Psi^+(t_2)} - \overline{\Psi^-(t_2)}] d\bar{t}_2 = 0. \end{aligned} \quad (9.269)$$

Применяя формулы Сохоцкого–Племеля условие (9.269) после некоторых преобразований принимает вид

$$\begin{aligned} & \left\{ (p_1 + iq_1)(\mu_2 - \bar{\mu}_2) - (p_2 + iq_2)(\mu_1 - \bar{\mu}_1) + (\bar{p}_2 + i\bar{q}_2)(\mu_1 - \mu_2) \right\} \times \\ & \times \int_l \varphi(t_1) dt_1 + \left\{ (\bar{p}_1 + i\bar{q}_1)(\mu_2 - \bar{\mu}_2) - (p_2 + iq_2)(\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2) + \right. \\ & \left. + (\bar{p}_2 + i\bar{q}_2)(\bar{\mu}_1 - \mu_2) \right\} \int_l \overline{\varphi(t_1) dt_1} = - (p_2 + iq_2) \int_l q_1^*(t) dt + (\bar{p}_2 + i\bar{q}_2) \int_l \overline{q_1^*(t) dt}. \end{aligned} \quad (9.270)$$

Сингулярное интегральное уравнение (9.266) и условие однозначности перемещений (9.269) вокруг контуров составляют систему уравнений, которая после определения плотности $\varphi(t_1)$ способна полностью определить напряженно-деформированное состояние бесконечной ортотропной плоскости с трещиной.

Задача 2. Усиление изотропным стрингером бесконечной ортотропной пластины с трещиной [3].

Рассмотрим плоскую бесконечную ортотропную область относительно декартовой системы координат xy , оси которой совпадают с главными направлениями. Эта область на бесконечности подвержена действию усилий σ_{xx}^∞ , σ_{yy}^∞ , σ_{xy}^∞ , а в точке z нагружена сосредоточенной силой $X + iY$. Предполагается, что среда находится в равновесии под действием самоуравновешенных усилий, приложенных к берегам криволинейной трещины l и возникающих контактных напряжений на границе между ортотропной пластиной и прямолинейным изотропным стрингером L конечной длины. Направление стрингера совпадает с одним из главных направлений упругости осью Ox (рис. 9.31).

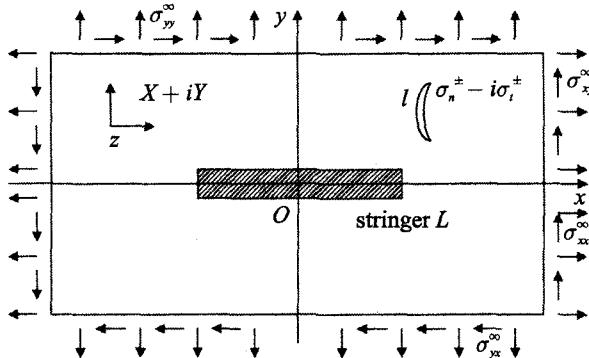


Рис. 9.31. Плоская бесконечная ортотропная область, ослабленная трещиной l и одновременно усиление изотропным прямолинейным стрингером L

Границные условия, заданные на контурах l и L , аналогичны соответствующим условиям в случае изотропной среды, т. е.

а) на берегах трещины l заданы нормальные и касательные напряжения

$$\left(\sigma_n^\pm + i\sigma_t^\pm\right)\Big|_{\epsilon_l}; \quad (9.271)$$

б) на границе между пластиной и стрингером задается следующая система граничных условий:

$$\sigma_n^+ = \sigma_n^-,\quad \varepsilon_0 = \frac{du_t^+}{dt} = \frac{du_t^-}{dt},\quad u_n^+ + iu_t^+ = u_n^- + iu_t^-. \quad (9.272)$$

Из первых двух условий (9.272) следует выражение

$$ih\left[\left(\sigma_n^+ - i\sigma_t^+\right) - \left(\sigma_n^- - i\sigma_t^-\right)\right] + E_0 S_0 \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{E_x} \sigma_s^+ - \frac{\nu_{yx}}{E_y} \sigma_n^+ \right] = 0. \quad (9.273)$$

Комплексные потенциалы $\Phi_0(z_1)$ и $\Psi_0(z_2)$ имеют следующий вид в исследуемой задаче:

$$\Phi_0(z_1) = \Phi(z_1) + \Gamma + \frac{C_{11}X + C_{12}Y}{z_1 - \xi_1}, \quad (9.274)$$

$$\Psi_0(z_2) = \Psi(z_2) + \Gamma' + \frac{C_{21}X - C_{22}Y}{z_2 - \xi_2}. \quad (9.275)$$

Здесь

$$\begin{cases} \Phi(z_1) = \Phi_1(z_1) + \Phi_2(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l_1} \frac{\phi(\tau_1)}{\tau_1 - z_1} d\tau_1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{l_1} \frac{g(\tau_1)}{\tau_1 - z_1} d\tau_1, \\ \Psi(z_2) = \Psi_1(z_2) + \Psi_2(z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l_2} \frac{\psi(\tau_2)}{\tau_2 - z_2} d\tau_2 + \frac{1}{2\pi i} \int_{l_2} \frac{y(\tau_2)}{\tau_2 - z_2} d\tau_2, \end{cases} \quad (9.276)$$

l_1, l_2, L_1, L_2 — образы трещины и стрингера соответственно,

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{1}{2\pi i} \frac{\mu_2 + \bar{\mu}_2 + \bar{\mu}_1 + \mu_2 \bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2 \frac{\nu_{xy} E_y}{E_x}}{(\mu_1 - \mu_2)(\mu_1 - \bar{\mu}_1) \left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1}\right)}, \\ C_{12} &= \frac{1}{2\pi i} \frac{\mu_2 \bar{\mu}_2 + \bar{\mu}_1 \mu_2 + \bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2 + \nu_{xy}}{(\mu_1 - \mu_2)(\mu_1 - \bar{\mu}_1) \left(1 - \frac{\bar{\mu}_2}{\mu_1}\right)}, \\ C_{21} &= \frac{1}{2\pi i} \frac{\mu_1 + \bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_1 + \mu_2 \bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2 \frac{\nu_{xy} E_y}{E_x}}{(\mu_2 - \mu_1)(\mu_2 - \bar{\mu}_2) \left(1 - \frac{\bar{\mu}_1}{\mu_2}\right)}, \\ C_{22} &= \frac{1}{2\pi i} \frac{\mu_1 \bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2 \mu_1 + \bar{\mu}_2 \bar{\mu}_1 + \nu_{xy}}{(\mu_2 - \mu_1)(\mu_2 - \bar{\mu}_2) \left(1 - \frac{\mu_1}{\mu_2}\right)}. \end{aligned} \quad (9.277)$$

Относительно постоянных Γ и Γ' они удовлетворяют известным нам условиям (9.248).

Для того чтобы выразить потенциал $\Psi(z_2)$ через плотности $\phi(t_1)$ и $g(t_1)$, нужно записать, как и в предыдущих исследуемых задачах, граничные условия с помощью предельных значений $\Phi_0(z_1)$ и $\Psi_0(z_2)$. Проводя аналогичные операции относительно граничного условия (9.271), как и раньше, будем иметь:

$$\begin{aligned} \Psi_2(z_2) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{l_2} \frac{y(\tau_2)}{\tau_2 - z_2} d\tau_2 = \frac{1}{2\pi i (\mu_2 - \bar{\mu}_2)} \int_{l_2} \frac{q_1^*(\tau)}{\tau_2 - z_2} d\tau - \\ &- \frac{\mu_1 - \bar{\mu}_2}{2\pi i (\mu_2 - \bar{\mu}_2)} \int_{l_1} \frac{g(\tau_1)}{\tau_2 - z_2} d\tau_1 - \frac{\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2}{2\pi i (\mu_2 - \bar{\mu}_2)} \int_{l_1} \frac{\overline{g(\tau_1)}}{\tau_2 - z_2} d\tau_1, \end{aligned} \quad (9.278)$$

где

$$\begin{aligned} q_1^*(t) &= \frac{1}{2} [f_2^+(t) - f_2^-(t)], \\ f_2^\pm(t) &= -i(1 - i\bar{\mu}_2) f_1^\pm(t) + i \frac{dt}{dt} (1 + i\bar{\mu}_2) \overline{f_1^\pm(t)}, \end{aligned}$$

$$f_1^\pm(t) = (\sigma_n^\pm + i\sigma_t^\pm) - \frac{1}{2} \left\{ 2 \operatorname{Re} \left[(1+i\mu_1^2) \left(\Gamma + \frac{C_{11}X + C_{12}Y}{t_1 - \xi_1} \right) + (1+i\mu_2^2) \left(\Gamma' + \frac{C_{21}X - C_{22}Y}{t_2 - \xi_2} \right) \right] + \right.$$

$$+ \frac{\overline{dt}}{dt} \left[(1+i\mu_1)^2 \left(\Gamma + \frac{C_{11}X + C_{12}Y}{t_1 - \xi_1} \right) + (1+i\bar{\mu}_1)^2 \left(\bar{\Gamma} + \frac{\bar{C}_{11}X + \bar{C}_{12}Y}{t_1 - \xi_1} \right) + \right.$$

$$\left. \left. + (1+i\mu_2)^2 \left(\Gamma' + \frac{C_{21}X - C_{22}Y}{t_2 - \xi_2} \right) + (1+i\bar{\mu}_2)^2 \left(\bar{\Gamma}' + \frac{\bar{C}_{21}X + \bar{C}_{22}Y}{t_2 - \xi_2} \right) \right] \right\}.$$

Воспользовавшись продифференцируемыми выражениями (9.242) при $z \rightarrow t^\pm \in L$ и третьим условием (9.272) (с учетом формул Сохоцкого–Племеля), получим:

$$(p_1 + iq_1) \frac{dt_1}{dt} \varphi(t_1) + (\bar{p}_1 + i\bar{q}_1) \frac{\overline{dt_1}}{dt} \overline{\varphi(t_1)} + (p_2 + iq_2) \times$$

$$\times \frac{dt_2}{dt} \psi(t_2) + (\bar{p}_2 + i\bar{q}_2) \frac{\overline{dt_2}}{dt} \overline{\psi(t_2)} = 0, \quad t, t_1, t_2 \in L, L_1, L_2. \quad (9.279)$$

Разрешая уравнение (9.279) и сопряженное ему относительно $\psi(t_2)$, в конечном итоге найдем выражение комплексного потенциала $\Psi_1(z_2)$:

$$\Psi_1(z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{\psi(\tau_2)}{\tau_2 - z_2} d\tau_2 = \frac{1}{2\pi i} \frac{\bar{p}_1 \bar{q}_2 - \bar{p}_2 \bar{q}_1}{p_2 q_2 - p_1 q_2} \int_{L_1} \frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_2 - z_2} d\tau_1 + \frac{1}{2\pi i} \frac{\bar{p}_1 q_2 - \bar{p}_2 \bar{q}_1}{p_2 q_2 - p_1 q_2} \int_{L_1} \frac{\overline{\varphi(\tau_1)}}{\tau_2 - z_2} d\tau_1. \quad (9.280)$$

После определения комплексных потенциалов подставим в условие (9.273) значение напряжений, выраженных через комплексные потенциалы $\Phi_0(z_1)$ и $\Psi_0(z_2)$. Применяя затем формулы Сохоцкого–Племеля, получим следующее сингулярное интегральное уравнение:

$$ih \left\{ \left[(1-i\mu_1) + (1-i\mu_2) \frac{\bar{p}_1 \bar{q}_2 - \bar{p}_2 \bar{q}_1}{p_2 q_2 - p_1 q_2} + (1-i\bar{\mu}_2) \frac{p_1 q_2 - p_2 \bar{q}_1}{p_2 q_2 - p_1 q_2} \right] \frac{dt_1}{dt} \varphi(t_1) + \right.$$

$$+ \left[(1-i\bar{\mu}_1) + (1-i\mu_2) \frac{\bar{p}_1 q_2 - \bar{p}_2 \bar{q}_1}{p_2 q_2 - p_1 q_2} + (1-i\mu_2) \frac{\bar{p}_1 \bar{q}_2 - \bar{p}_2 q_1}{p_2 q_2 - p_1 q_2} \right] \frac{\overline{dt_1}}{dt} \overline{\varphi(t_1)} \Bigg\} +$$

$$+ \frac{E_0 S_0}{4} \frac{d}{dt} \left\{ \left(B_1 + B_3 \frac{\bar{p}_1 \bar{q}_2 - \bar{p}_2 \bar{q}_1}{p_2 q_2 - p_1 q_2} \frac{dt_1}{dt_2} + B_4 \frac{p_1 q_2 - p_2 \bar{q}_1}{p_2 q_2 - p_1 q_2} \frac{dt_1}{dt_2} \right) \varphi(t_1) + \right.$$

$$+ \left(B_2 + B_3 \frac{\bar{p}_1 q_2 - \bar{p}_2 \bar{q}_1}{p_2 q_2 - p_1 q_2} \frac{\overline{dt_1}}{dt_2} + B_4 \frac{\bar{p}_1 \bar{q}_2 - \bar{p}_2 q_1}{p_2 q_2 - p_1 q_2} \frac{\overline{dt_1}}{dt_2} \right) \overline{\varphi(t_1)} +$$

$$+ \frac{B_1}{\pi i} \int_{L_1} \frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1 - t_1} d\tau_1 - \frac{B_2}{\pi i} \int_{L_1} \frac{\overline{\varphi(\tau_1)}}{\tau_1 - t_1} d\tau_1 + \frac{B_3}{\pi i} \frac{\bar{p}_1 \bar{q}_2 - \bar{p}_2 \bar{q}_1}{p_2 q_2 - p_1 q_2} \int_{L_1} \frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_2 - t_2} d\tau_1 +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{B_3}{\pi i} \overline{\frac{p_1 q_2 - p_2 q_1}{p_2 q_2 - p_2 q_2}} \int_{l_1}^{\infty} \overline{\frac{\phi(\tau_1)}{\tau_2 - t_2}} d\tau_1 - \frac{B_4}{\pi i} \overline{\frac{p_1 q_2 - p_2 q_1}{p_2 q_2 - p_2 q_2}} \int_{l_1}^{\infty} \overline{\frac{\phi(\tau_1)}{\tau_2 - t_2}} d\tau_1 - \\
& - \frac{B_4}{\pi i} \overline{\frac{p_1 q_2 - p_2 q_1}{p_2 q_2 - p_2 q_2}} \int_{l_1}^{\infty} \overline{\frac{\phi(\tau_1)}{\tau_2 - t_2}} d\tau_1 + \frac{B_1}{\pi i} \int_{l_1}^{\infty} \overline{\frac{g(\tau_1)}{\tau_1 - t_1}} d\tau_1 - \frac{B_2}{\pi i} \int_{l_1}^{\infty} \overline{\frac{g(\tau_1)}{\tau_1 - t_1}} d\tau_1 - \\
& - B_3 \left[\frac{\mu_1 - \overline{\mu_2}}{\pi i (\mu_2 - \overline{\mu_2})} \int_{l_1}^{\infty} \overline{\frac{g(\tau_1)}{\tau_2 - t_2}} d\tau_1 + \frac{\overline{\mu_1} - \overline{\mu_2}}{\pi i (\mu_2 - \overline{\mu_2})} \int_{l_1}^{\infty} \overline{\frac{g(\tau_1)}{\tau_2 - t_2}} d\tau_1 \right] + \\
& + B_4 \left[\frac{\overline{\mu_1} - \mu_2}{\pi i (\mu_2 - \overline{\mu_2})} \int_{l_1}^{\infty} \overline{\frac{g(\tau_1)}{\tau_2 - t_2}} d\tau_1 + \frac{\mu_1 - \mu_2}{\pi i (\mu_2 - \overline{\mu_2})} \int_{l_1}^{\infty} \overline{\frac{g(\tau_1)}{\tau_2 - t_2}} d\tau_1 \right] = \\
& = A(t, \bar{t}) - \frac{E_0 S_0}{4} \frac{d}{dt} \left[\frac{B_3}{\pi i (\mu_2 - \overline{\mu_2})} \int_{l_1}^{\infty} \overline{\frac{q_1^*(\tau)}{\tau_2 - t_2}} d\tau - \right. \\
& \left. - \frac{B_4}{\pi i (\mu_2 - \overline{\mu_2})} \int_{l_1}^{\infty} \overline{\frac{q_1^*(\tau)}{\tau_2 - t_2}} d\tau \right], \quad t, t_1, t_2 \in L, L_1, L_2.
\end{aligned} \tag{9.281}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
B_1 &= \frac{1}{E_x} \left[2 + 2\mu_1^2 + (1-i\mu_1) \frac{dt_1}{dt} - (1-i\mu_1) \frac{dt_1}{dt} \right] - \frac{V_{yx}}{E_y} \left[(1+i\mu_1) \frac{dt_1}{dt} + (1-i\mu_1) \frac{dt_1}{dt} \right], \\
B_3 &= \frac{1}{E_x} \left[2 + 2\mu_2^2 - (1+i\mu_2) \frac{dt_2}{dt} - (1-i\mu_2) \frac{dt_2}{dt} \right] - \frac{V_{yx}}{E_y} \left[(1+i\mu_2) \frac{dt_2}{dt} + \right. \\
&\quad \left. + (1-i\mu_2) \frac{dt_2}{dt} \right], \quad B_2 = \overline{B_1}, \quad B_4 = \overline{B_3},
\end{aligned}$$

$$A(t, \bar{t}) = -\frac{E_0 S_0}{2} \frac{d}{dt} \left\{ B_1 \frac{C_{11}X + C_{12}Y}{t_1 - \xi_1} + B_2 \frac{\overline{C_{11}}X + \overline{C_{12}}Y}{\bar{t}_1 - \bar{\xi}_1} + B_3 \frac{C_{21}X - C_{22}Y}{t_2 - \xi_2} + B_4 \frac{\overline{C_{21}}X - \overline{C_{22}}Y}{\bar{t}_2 - \bar{\xi}_2} \right\}.$$

Подставляя в условие (9.271) значения напряжений, выраженных через комплексные потенциалы $\Phi_0(z_1)$ и $\Psi_0(z_2)$ и применяя известные формулы Сохоцкого–Племеля, получим следующее сингулярное интегральное уравнение:

$$\begin{aligned}
& \frac{\mu_1 - \overline{\mu_2}}{\pi i} \frac{dt_1}{dt} \left[\int_{l_1}^{\infty} \overline{\frac{g(\tau_1)}{\tau_1 - t_1}} d\tau_1 + \int_{l_1}^{\infty} \overline{\frac{\phi(\tau_1)}{\tau_1 - t_1}} d\tau_1 \right] + \frac{\overline{\mu_1} - \mu_2}{\pi i} \frac{dt_1}{dt} \left[\int_{l_1}^{\infty} \overline{\frac{g(\tau_1)}{\tau_1 - t_1}} d\tau_1 + \int_{l_1}^{\infty} \overline{\frac{\phi(\tau_1)}{\tau_1 - t_1}} d\tau_1 \right] - \\
& - \frac{\mu_2 - \overline{\mu_2}}{\pi i} \frac{dt_2}{dt} \left[\frac{\mu_1 - \overline{\mu_2}}{\mu_2 - \overline{\mu_2}} \int_{l_2}^{\infty} \overline{\frac{g(\tau_1)}{\tau_2 - t_2}} d\tau_1 + \frac{\overline{\mu_1} - \overline{\mu_2}}{\mu_2 - \overline{\mu_2}} \int_{l_2}^{\infty} \overline{\frac{g(\tau_1)}{\tau_2 - t_2}} d\tau_1 - \frac{\overline{p_1 q_2} - \overline{p_2 q_1}}{p_2 q_2 - p_2 q_2} \int_{l_2}^{\infty} \overline{\frac{\phi(\tau_1)}{\tau_2 - t_2}} d\tau_1 - \right. \\
& \left. - \frac{\overline{p_2 q_2} - \overline{p_2 q_1}}{p_2 q_2 - p_2 q_2} \int_{l_2}^{\infty} \overline{\frac{\phi(\tau_1)}{\tau_2 - t_2}} d\tau_1 \right] = q_2^*(t) - \frac{dt_2}{dt} \frac{1}{\pi i} \int_{l_2}^{\infty} \overline{\frac{q_1^*(\tau)}{\tau_2 - t_2}} d\tau, \quad t, t_1, t_2 \in l, l_1, l_2,
\end{aligned} \tag{9.282}$$

где

$$q_2^*(t) = \frac{1}{2} [f_2^+(t) + f_2^-(t)].$$

Для единственности решения поставленной задачи необходимо систему СИУ (9.281)–(9.282) дополнить условием однозначности перемещений вокруг трещины:

$$\begin{aligned} & \left[(p_1 + iq_1) - (p_2 + iq_2) \frac{\mu_1 - \overline{\mu_2}}{\mu_2 - \overline{\mu_2}} - (\overline{p_2} + i\overline{q_2}) \frac{\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2}{\underline{\mu}_2 - \underline{\mu}_2} \right] \int g(t_1) dt_1 + \\ & + \left[(\overline{p_1} + i\overline{q_1}) - (p_2 + iq_2) \frac{\overline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2}{\underline{\mu}_2 - \underline{\mu}_2} - (\overline{p_2} + i\overline{q_2}) \frac{\overline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2}{\underline{\mu}_2 - \underline{\mu}_2} \right] \int \overline{g(t_1) dt_1} = \\ & = - \frac{p_2 + iq_2}{\underline{\mu}_2 - \underline{\mu}_2} \int q_1^*(t) dt - \frac{\overline{p_2} + i\overline{q_2}}{\underline{\mu}_2 - \underline{\mu}_2} \int \overline{q_1^*(t) dt}. \end{aligned} \quad (9.283)$$

Решение системы уравнений (9.281)–(9.283) полностью определяет напряженно-деформированное состояние исследуемой неоднородной среды.

Рассмотренную задачу можно обобщить на случай конечного числа непересекающихся трещин, стрингеров и сосредоточенных сил. Если расположение стрингера не совпадает с главным направлением упругости, то граничное условие (9.273) в сочетании с формулами (9.231), (9.232) принимает вид

$$ih \left[(\sigma_n^+ - i\sigma_t^+) - (\sigma_n^- - i\sigma_t^-) \right] + E_0 S_0 \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{E_x'} \sigma_s^+ - \frac{v'_{yx}}{E_y'} \sigma_n^+ + \alpha_t \sigma_t^+ \right] = 0, \quad (9.284)$$

откуда можно получить равенство, выраженное через предельные значения комплексных потенциалов.

9.7. Классические плоские термоупругие задачи

Решение краевых задач для многокомпонентных сред служат основой при проектировании элементов конструкций из новых композитных материалов. Прочность и характер разрушения таких материалов наряду с такими факторами, как геометрические размеры, характер нагружения и т. п. существенно зависят от физико-механических характеристик их составляющих.

Конструкционные элементы типа пластин широко используются в современной инженерной практике. Во многих случаях они изготовлены из анизотропных материалов, обладающих различными упругими и тепловыми свойствами в различных направлениях. Большой интерес представляет изучение напряженно-деформированного состояния как изотропных, так и анизотропных тел, содержащих трещины и инородные включения, под действием механических и тепловых нагрузок. Для построения математической теории расчета таких элементов конструкций на прочность, жесткость и устойчивость здесь будет использована модель линейно-термоупругого тела. Общая теория этой модели предполагает: *a*) компоненты деформации являются малыми величинами; *b*) между компонентами деформаций и напряжений имеют место линейные зависимости, определяемые обобщенным законом Гука и *c*) упругие и тепловые характеристики тела не зависят от температуры и напряжений. При этом предполагается, так же как и в плоских задачах теории упру-

гости, что тело представляет собой пластину, находящуюся в обобщенном плоском напряженном состоянии, или в состоянии плоской деформации, а для анизотропных тел в каждой его точке имеется плоскость упругой и тепловой симметрии. Распространение тепла в области, занимаемой телом, считается стационарным и не зависящим от времени и координаты z .

Пусть в области, занимаемой анизотропным телом, температура T зависит как от времени, так и от декартовых или ортогональных криволинейных координат, причем касательные к координатным линиям в каждой точке определяются единичными векторами (ортами) \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} . Выделим внутри этой области элементарную площадку с нормалью \vec{n} в произвольной точке. Назовем вектором теплопроводности в этой точке через площадку с нормалью \vec{n} вектор

$$\overrightarrow{K_n} = \alpha_1 k_{11} \vec{i} + \alpha_2 k_{22} \vec{j} + \alpha_3 k_{33} \vec{k}, \quad (9.285)$$

где k_{ii} — коэффициенты теплопроводности, α_i — косинусы углов между векторами \vec{n} и ортами \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} .

Площадки, на которых вектор теплопроводности направлен по нормали \vec{n} , называются главными площадками теплопроводности, а направления нормалей к этим площадкам — главными направлениями теплопроводности.

Назовем величину

$$q_n = -(\overrightarrow{K_n} \overrightarrow{\text{grad} T}) \quad (9.286)$$

плотностью потока тепла через элементарную площадку с нормалью \vec{n} . Ту из элементарных площадок, проходящих через произвольную точку тела, на которой плотность потока тепла принимает максимальное значение, назовем главной площадкой потока тепла, а направление, нормальное к этой площадке, — главным направлением потока тепла в этой точке.

Если оси координат совпадают с главными направлениями теплопроводности, то уравнение теплопроводности можно записать в виде

$$k_{11} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_{22} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + k_{33} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = c \rho \frac{\partial T}{\partial t} - Q, \quad (9.287)$$

где c — удельная теплоемкость тепла, ρ — его плотность, Q — количество тепла, выделяемое единицей объема за единицу времени.

Для нахождения определенного решения уравнения теплопроводности необходимо задавать начальное и граничное условия. Наиболее распространенными граничными условиями являются следующие:

а) граничные условия первого рода, когда всюду на поверхности тела задаются значения температуры

$$T = f_1(x, y, z, t); \quad (9.288)$$

б) граничные условия второго рода, когда на поверхности тела задаются значения плотности тепла

$$\overrightarrow{K_n} \overrightarrow{\text{grad} T} = f_2(x, y, z, t); \quad (9.289)$$

в) граничное условие третьего рода, когда на поверхности тела задаются условия теплообмена с внешней средой, температура которой равна T_{cp}

$$\left(\vec{K}_n \cdot \overrightarrow{\text{grad} T} \right) = \lambda(T - T_{cp}), \quad (9.290)$$

где λ — коэффициент теплообмена.

Рассмотрим цилиндрическое тело, у которого образующая боковой поверхности перпендикулярна к плоскости декартовых координат, а основания теплоизолированы. Предположим, что температура тела в любой точке зависит только от координат x и y . Кроме того, будем считать, что тело обладает такой прямолинейной тепловой анизотропией, что в каждой его точке одно из главных направлений теплопроводности перпендикулярно к плоскости xy .

Если тело однородно и внутри него отсутствуют источники и стоки тепла, то из уравнения (9.287) следует, что в области, занимаемой телом, температура должна удовлетворять уравнению теплопроводности

$$\lambda_{11} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + 2\lambda_{12} \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} + \lambda_{22} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \quad (9.291)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_{11} &= k_{11} \cos^2 \alpha + k_{22} \sin^2 \alpha, \\ \lambda_{22} &= k_{11} \sin^2 \alpha + k_{22} \cos^2 \alpha, \\ \lambda_{12} &= (k_{11} - k_{22}) \sin \alpha \cos \alpha, \end{aligned} \quad (9.292)$$

α — угол между осью Ox и одним из главных направлений теплопроводности. Величины k_{ii} , λ_{ij} являются постоянными.

Общее решение уравнения (9.291) представим в виде [44, 45]

$$T = F(z_3) + \overline{F(z_3)}. \quad (9.293)$$

Здесь $F(z_3)$ — произвольная аналитическая функция комплексного переменного z_3 , μ_3 — один из корней характеристического уравнения

$$\lambda_{22}\mu^2 + 2\lambda_{12}\mu + \lambda_{11} = 0, \quad (9.294)$$

т. е.

$$\mu_3 = \left(-\lambda_{12} + i\sqrt{k_{11}k_{22}} \right) / \lambda_{22}.$$

Теперь выразим поток через функцию $F(z_3)$. Учитывая, что β_1 , β_2 — направляющие косинусы нормали к элементу ds , получим

$$\vec{K}_n \cdot \overrightarrow{\text{grad} T} = \left(\lambda_{11} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{12} \frac{\partial T}{\partial y} \right) \beta_1 + \left(\lambda_{12} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{22} \frac{\partial T}{\partial y} \right) \beta_2. \quad (9.295)$$

С помощью (9.293) выражение (9.295) запишется в виде:

$$\vec{K}_n \cdot \overrightarrow{\text{grad} T} = A_1^* F'(z_3) + \overline{A_1^* F'(z_3)}, \quad (9.296)$$

где

$$A_1^* = (\lambda_{12} + \mu_3 \lambda_{22})(-\beta_2 + \mu_3 \beta_1).$$

Если исследуемое однородное тело находится в состоянии плоской деформации и в каждой его точке имеется плоскость упругой симметрии, перпендикулярная к оси z , то зависимость между компонентами напряжений и деформаций определяется уравнениями закона Гука:

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = a_{11}\sigma_{xx} + a_{12}\sigma_{yy} + a_{13}\sigma_{zz} + a_{16}\sigma_{xy} + \beta_{11}T, \\ \varepsilon_{yy} = a_{12}\sigma_{xx} + a_{22}\sigma_{yy} + a_{23}\sigma_{zz} + a_{26}\sigma_{xy} + \beta_{22}T, \\ \varepsilon_{zz} = a_{13}\sigma_{xx} + a_{23}\sigma_{yy} + a_{33}\sigma_{zz} + a_{36}\sigma_{xy} + \beta_{33}T = 0, \\ 2\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy} = a_{16}\sigma_{xx} + a_{26}\sigma_{yy} + a_{36}\sigma_{zz} + a_{66}\sigma_{xy} - 2\beta_{66}T, \\ \gamma_{yz} = a_{44}\sigma_{yz} + a_{45}\sigma_{xz} = 0, \\ \gamma_{xz} = a_{45}\sigma_{yz} + a_{55}\sigma_{xz} = 0 \end{cases} \quad (9.297)$$

или

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = c_{11}\sigma_{xx} + c_{12}\sigma_{yy} + c_{16}\sigma_{xy} + \alpha_1 T, \\ \varepsilon_{yy} = c_{12}\sigma_{xx} + c_{22}\sigma_{yy} + c_{26}\sigma_{xy} + \alpha_2 T, \\ \gamma_{xy} = c_{16}\sigma_{xx} + c_{26}\sigma_{yy} + c_{66}\sigma_{xy} - 2\alpha_6 T. \end{cases} \quad (9.298)$$

Здесь a_{ij} , c_{ij} — коэффициенты упругости, связанные формулами (9.229); β_{ii} — коэффициенты, определяющие компоненты тензора деформации свободного от внешних сил элемента тела при изменении температуры на один градус.

$$\begin{cases} \alpha_i = \beta_{ii} - \beta_{33}a_{i3}/a_{33}, \\ \alpha_6 = \beta_{66} + \beta_{33}a_{36}/2a_{33}. \end{cases} \quad (9.299)$$

При условии, что коэффициенты c_{ij} , α_j , λ_{ij} являются постоянными величинами, не зависящими от компонент напряжений, координат и температуры тела, запишем формулы для компонентов напряжений и смещений, выраженных через комплексные потенциалы $\Phi_0(z_1)$, $\Psi_0(z_2)$ и $F_0(z_3)$ при стационарном температурном поле [45].

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = 2\operatorname{Re}[\mu_1^2\Phi_0(z_1) + \mu_2^2\Psi_0(z_2) + \mu_0\mu_3^2F_0(z_3)], \\ \sigma_{yy} = 2\operatorname{Re}[\Phi_0(z_1) + \Psi_0(z_2) + \mu_0F_0(z_3)], \\ \sigma_{xy} = -2\operatorname{Re}[\mu_1\Phi_0(z_1) + \mu_2\Psi_0(z_2) + \mu_0\mu_3F_0(z_3)], \\ u = 2\operatorname{Re}[p_1\phi_0(z_1) + p_2\psi_0(z_2) + p_3\psi_0(z_3)], \\ v = 2\operatorname{Re}[q_1\phi_0(z_1) + q_2\psi_0(z_1) + q_2\phi_0(z_2) + q_3\psi_0(z_3)]. \end{cases} \quad (9.300)$$

Здесь

$$\begin{cases} p_j = c_{11}\mu_j^2 + c_{12} - c_{16}\mu_j, \\ \mu_j q_j = c_{12}\mu_j^2 + c_{22} - c_{26}\mu_j \quad j = 1, 2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_* = \alpha_1 + \mu_0(c_{11}\mu_3^2 - c_{16}\mu_3 + c_{12}), \\ \mu_3 q_* = \alpha_2 + \mu_0(c_{11}\mu_3^2 - c_{26}\mu_3 + c_{22}), \\ \mu_0 = -(-\alpha_1\mu_3^2 + 2\alpha_6\mu_3 + \alpha_2)/\Delta(\mu_3), \\ \Delta(\mu_3) = c_{11}(\mu_3 - \mu_1)(\mu_3 - \mu_2)(\mu_3 - \overline{\mu_1})(\mu_3 - \overline{\mu_2}), \\ \Phi_0(z_1) = \phi'_0(z_1), \quad \Psi_0(z_0) = \psi'_0(z_2), \quad F_0(z_3) = \psi'_0(z_3). \end{cases}$$

Если трансверсально-изотропное тело находится в состоянии плоской деформации, то закон Гука имеет вид

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} \sigma_{xx} - \frac{\nu}{E} \sigma_{yy} - \frac{\nu_z}{E_z} \sigma_{zz} + \beta_{11} T, \\ \varepsilon_{yy} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{xx} + \frac{1}{E} \sigma_{yy} - \frac{\nu_z}{E_z} \sigma_{zz} + \beta_{11} T, \\ \varepsilon_{zz} = -\frac{\nu_z}{E_z} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \frac{1}{E_z} \sigma_{zz} + \beta_{33} T = 0, \\ \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \sigma_{xy}, \end{cases} \quad (9.301)$$

а компоненты напряжений и смещений при стационарном температурном поле определяются по формулам:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 2 \left[\Phi_0(z) + \overline{\Phi_0(z)} \right], \\ \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} = 2 \left[z\Phi'_0(z) + \Psi_0(z) \right], \\ 2\mu(u + iv) = \kappa\varphi_0(z) - z\overline{\Phi_0(z)} - \overline{\psi_0(z)} + \beta \int F_0(z) dz, \\ T(x, y) = 2 \operatorname{Re} F_0(z). \end{cases} \quad (9.302)$$

Здесь β_{11} и β_{33} — температурные коэффициенты линейного расширения в плоскости изотропии (параллельной координатной плоскости xy) и в направлении, перпендикулярном к плоскости изотропии, коэффициенты κ и β определяются по формулам

$$\kappa = 1 + \frac{2E}{1+\nu} \left(\frac{1-\nu}{E} - \frac{2\nu_z^2}{E_z} \right),$$

$$\beta = \frac{2E}{1+\nu} (\beta_{11} + \nu_z \beta_{33})$$

и для обобщенного плоского напряженного состояния

$$\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}, \quad \beta = \frac{2E\beta_{11}}{1+\nu}.$$

В случае изотропного тела, когда соотношения между деформациями и напряжениями записываются в виде

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{1}{E_*} (\sigma_{xx} - \nu_* \sigma_{yy}) + \alpha_i^* T, \\ \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E_*} (\sigma_{yy} - \nu_* \sigma_{xx}) + \alpha_t^* T, \\ \gamma_{xy} = \frac{1}{G_{xy}^*} \sigma_{xy} \quad \left(G_{xy}^* = \frac{2E_*}{1+\nu_*} \right), \end{cases} \quad (9.303)$$

компоненты напряжений и смещений при стационарном температурном поле $T(x, y) = 2\operatorname{Re} F_0(z)$ определяются по формулам:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 2[\Phi_0(z) + \overline{\Phi_0(z)}], \\ \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} = 2[\bar{z}\Phi'_0(z) + \Psi_0(z)], \\ 2\mu(u + iv) = \kappa\varphi_0(z) - \bar{z}\Phi_0(z) - \psi_0(z) + \beta_t \int F_0(z) dz. \end{cases} \quad (9.304)$$

Здесь

$$\begin{cases} E_* = E / (1 - \nu^2), & \nu_* = \nu / (1 - \nu), & \alpha_t^* = \alpha_t(1 + \nu) \\ \beta_t = \alpha_t^* E_*, & \kappa = 3 - 4\nu_* \end{cases} \quad \text{для плоской деформации},$$

$$\begin{cases} \beta_t = \frac{\alpha_t^* E_*}{1 + \nu_*}, & \kappa = \frac{3 - \nu_*}{1 + \nu_*} \\ E_* = E, & \nu_* = \nu, & \alpha_t^* = \alpha_t \end{cases} \quad \text{для плоского напряженного состояния},$$

α_t — температурный коэффициент линейного расширения.

Если в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ помещен источник (сток) тепла мощности q_0 ($-q_0$ соответственно), то для ортотропной области комплексные потенциалы в окрестности этой точки имеют вид

$$\begin{cases} \varphi(z_1) = a'_0(z_1 - t_1) \ln(z_1 - t_1), \\ \psi(z_2) = b'_0(z_2 - t_2) \ln(z_2 - t_2), \\ \psi(z_3) = m_0(z_3 - t_3) \ln(z_3 - t_3). \end{cases} \quad (9.305)$$

Здесь

$$m_0 = -q_0 / 4\pi\sqrt{k_{11}k_{22}},$$

$$t_j = x_0 + \mu_j y_0, \quad j = \overline{1, 3},$$

а коэффициенты a'_0, b'_0 определяются на основании равенств

$$\begin{cases} a'_0 = \frac{m - n\mu_2}{\mu_1 - \mu_2}, & b'_0 = -\frac{m - n\mu_1}{\mu_1 - \mu_2}, \\ \operatorname{Im}[m(\mu_1 + \mu_2) - n\mu_1\mu_2 - m_0 r_0 / c_{11}] = 0, \\ \operatorname{Im}[m\mu_1\mu_2 + n\mu_1\mu_2(\mu_1 + \mu_2) - \\ - m_0 (\alpha_1\mu_3 - r_0 (\mu_3 - \overline{\mu_1} - \overline{\mu_2})) / c_{11}] = 0, \end{cases}$$

где $r_0 = (\alpha_1\mu_3^2 + 2\alpha_6\mu_2 + \alpha_2) / (\mu_3 - \overline{\mu_1})(\mu_3 - \overline{\mu_2})$.

Для случая трансверсально-изотропной области эти комплексные потенциалы имеют вид

$$\begin{cases} \Phi(z) = A_0 \ln(z - z_0), \\ \Psi(z) = -\frac{\bar{z}_0 A_0}{z - z_0}, \\ F(z) = m_0 \ln(z - z_0), \end{cases} \quad (9.306)$$

где $A_0 = -\frac{\beta m_0}{1 + \kappa}$, $m_0 = -\frac{q_0}{4\pi\lambda}$.

И, наконец, для случая бесконечной пластины, когда на бесконечности задан однородный тепловой поток q_∞ , направленный под углом β_0 к оси Ox , а в точках $z = \pm a_1$, $z = \pm ia_2$ размещены источники и стоки тепла, мощности которых равняются соответственно $\pm q_j$ ($j = 1, 2$), комплексные потенциалы в сплошной плоскости имеют вид:

$$\begin{cases} F_0(z) = \frac{q_\infty}{2} ze^{-i\beta_0} + F^*(z), \\ F^*(z) = m_1 \ln \frac{z - a_1}{z + a_1} + m_2 \ln \frac{z - ia_2}{z + ia_2}, \quad m_j = -\frac{q_j}{2\pi\lambda}, \\ \Phi_0(z) = H^* F^*(z), \quad \Psi_0(z) = 2H^* z \left[\frac{m_1 a_1}{z^2 - a_1^2} - i \frac{a_2 m_2}{z^2 + a_2^2} \right], \end{cases} \quad (9.307)$$

где

$$H^* = \begin{cases} \alpha_i E / 2(1 - \nu) & \text{для плоской деформации,} \\ \alpha_i E / 2 & \text{для плоского напряженного состояния.} \end{cases}$$

В заключение следует заметить, что решение плоских задач стационарной термоупругости выполняется в два этапа. На первом этапе определяется стационарное температурное поле $T(x, y)$, удовлетворяющее уравнению (9.291) или уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial y^2} = 0 \quad (9.308)$$

для изотропного тела при одном из основных граничных условий (9.288)–(9.290). Второй этап решения плоской стационарной задачи термоупругости заключается в определении трех компонентов тензора напряжений и двух компонентов вектора смещений на основании формул (9.300) или (9.304).

Задача 1. Условие теплового контакта.

При решении задач теплопроводности для тел, содержащих инородные включения и трещины, очень важно выбрать правильную расчетную модель теплового контакта твердых тел. Для выбора расчетной модели теплового контакта поверхностей реальной трещины в анизотропном теле воспользуемся математической формулировкой условий неидеального теплового контакта в теории теплопроводности изотропных тел, содержащих включения и трещины [24, 42, 43]. При выводе этих условий предполагается, что поверхности контактирующих тел разделены тонким промежуточным слоем с некоторыми приве-

денными теплофизическими параметрами (рис. 9.32). Если данные параметры считать постоянными, а толщину промежуточного слоя устремить к нулю, то получим некоторую физическую поверхность раздела и соответствующие граничные условия, которые должны выполняться на этой поверхности.

В соответствии с указанной схемой рассмотрим решение плоской задачи теплопроводности для неограниченной области с тонким слоем изотропного включения. Запишем в криволинейной системе координат (n, s) уравнение теплопроводности для тонкого изотропного включения:

$$\frac{\partial^2 T_c}{\partial n^2} + \frac{\partial^2 T_c}{\partial s^2} = 0. \quad (9.309)$$

На поверхности раздела переходного слоя $n = \pm h$ должны выполняться условия идеального теплового контакта

$$T_c(s, \pm h) = T^\pm, \quad (9.310)$$

$$-\lambda^* \frac{\partial T_c}{\partial n} \Big|_{n=\pm h} = T_n^\pm, \quad (9.311)$$

где

$$T_n^\pm = -\left(\overrightarrow{K_n} \overrightarrow{\text{grad}} T \right)^\pm,$$

T^\pm , T_n^\pm — предельные значения температуры и теплового потока на поверхности раздела $n = \pm h$ анизотропного тела, λ^* — коэффициент теплопроводности тонкого включения.

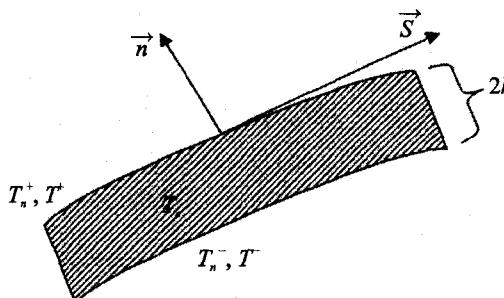


Рис. 9.32. Тонкий промежуточный слой толщиной $2h$ между контактирующими поверхностями

Введем интегральные характеристики слоя

$$\begin{cases} T_c^* = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h T_c, \\ T_c^{**} = \frac{3}{2h^2} \int_{-h}^h T_c n dn \end{cases} \quad (9.312)$$

и усредним уравнение (9.309) по толщине слоя. Тогда с учетом условий (9.310), (9.311) будем иметь

$$\lambda_s \frac{\partial^2 T_c^*}{\partial s^2} + (T_n^+ - T_n^-) = 0, \quad (9.313)$$

где

$$\lambda_s = 2h\lambda^*.$$

Умножая (9.309) на $\frac{3}{2h^2}n$ и интегрируя по n в пределах от $-h$ до $+h$, получим еще одно уравнение относительно интегральной характеристики T_c^{**} :

$$\lambda_s \frac{\partial^2 T_c^{**}}{\partial s^2} + 3\lambda(T_n^+ + T_n^-) - 6\lambda_n(T^+ - T^-) = 0, \quad (9.314)$$

где

$$\lambda_n = \lambda^*/2h.$$

Для того чтобы выразить T_c^* , T_c^{**} через предельные значения T^\pm , воспользуемся операторным решением уравнения (9.309), записав его в виде

$$\frac{\partial^2 T_c}{\partial n^2} + p^2 T_c = 0 \quad \left(p_2 = \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right). \quad (9.315)$$

Решение этого уравнения при условии (9.310) будет следующим:

$$T_c = \frac{(T^+ + T^-)}{2 \cos ph} \cos pn + \frac{(T^+ - T^-)}{2 \sin ph} \sin pn. \quad (9.316)$$

Подставляя последнее выражение в (9.312), найдем интегральные характеристики

$$\begin{cases} T_c^* = \frac{T^+ + T^-}{2ph} \operatorname{tg} ph, \\ T_c^{**} = \frac{3}{2p^2 h} (T^+ - T^-)(1 - ph \operatorname{ctg} ph). \end{cases} \quad (9.317)$$

Исключая теперь величины T_c^* , T_c^{**} из (9.313) и (9.314) с помощью (9.317) и устремляя в полученных соотношениях $h \rightarrow 0$, при постоянных λ_s , λ_n получим следующее условие неидеального теплового контакта на поверхности анизотропного тела:

$$\lambda_s \frac{\partial^2}{\partial s^2} (T^+ + T^-) + 2 \left[\left(\overrightarrow{K_n} \overrightarrow{\operatorname{grad} T} \right)^+ - \left(\overrightarrow{K_n} \overrightarrow{\operatorname{grad} T} \right)^- \right] = 0, \quad (9.318)$$

$$\lambda_s \frac{\partial^2}{\partial s^2} (T^+ - T^-) + 6 \left[\left(\overrightarrow{K_n} \overrightarrow{\operatorname{grad} T} \right)^+ + \left(\overrightarrow{K_n} \overrightarrow{\operatorname{grad} T} \right)^- \right] - 12\lambda_n(T^+ - T^-) = 0.$$

В случае изотропного тела условие неидеального теплового контакта запишется в виде

$$\lambda_s \frac{\partial^2}{\partial s^2} (T^+ + T^-) + 2\lambda \left[\left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)^+ - \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)^- \right] = 0, \quad (9.319)$$

$$\lambda_s \frac{\partial^2}{\partial s^2} (T^+ - T^-) + 6\lambda \left[\left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)^+ + \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)^- \right] - 12\lambda_n(T^+ - T^-) = 0,$$

где λ — коэффициент теплопроводности изотропной среды.

Когда роль инородного тонкого изотропного включения играет трещина значения λ_s и λ_n характеризует ее теплопроводность в продольном и поперечном направлениях соответственно. Различают три вида трещин:

1) $\lambda_s \neq 0, \lambda_n \neq 0$ — теплопроводящая трещина; 2) $\lambda_s = 0, \lambda_n \neq 0$ — теплопроницаемая трещина и 3) $\lambda_s = \lambda_n = 0$ — теплоизолированная трещина.

Всегда искомую температуру $T(x, y)$ можно представить в виде

$$T(x, y) = T_0(x, y) + T_*(x, y), \quad (9.320)$$

где $T_0(x, y)$ — заданное температурное поле в сплошной однородной среде, $T_*(x, y)$ — температурное поле, обусловленное наличием разрезов, включений, дефектов и т. д.

В зависимости от условий теплового контакта на границах разрезов и тонких ино-родных включений возможно задание одного из трех граничных условий на их берегах:

$$T_*^\pm = f^\pm - T_0(t), \quad (9.321)$$

$$\left(\overrightarrow{K_n} \overrightarrow{\text{grad}} T_* \right)^\pm = Q^\pm - \left(\overrightarrow{K_n} \overrightarrow{\text{grad}} T_* \right), \quad (9.322)$$

$$\lambda_s \frac{\partial^2}{\partial s^2} (T_*^+ + T_*^-) + 2 \left[\left(\overrightarrow{K_n} \overrightarrow{\text{grad}} T_* \right)^+ - \left(\overrightarrow{K_n} \overrightarrow{\text{grad}} T_* \right)^- \right] = 2 \lambda_s \frac{\partial^2 T_0}{\partial s^2}, \quad (9.323)$$

$$\lambda_s \frac{\partial^2}{\partial s^2} (T_*^+ - T_*^-) + 6 \left[\left(\overrightarrow{K_n} \overrightarrow{\text{grad}} T_* \right)^+ + \left(\overrightarrow{K_n} \overrightarrow{\text{grad}} T_* \right)^- \right] - 12 \lambda_n (T_*^+ - T_*^-) = -12 \left[\overrightarrow{K_n} \overrightarrow{\text{grad}} T_0 \right],$$

где $f^\pm(t)$, $Q^\pm(t)$ — заданные температуры и тепловые потоки на берегах трещины.

Аналогичный подход применяется при рассмотрении выбора расчетной модели электрического контакта поверхностей реальной трещины в пьезоэлектрике. Наличие в диэлектрике тонких включений из другого материала приводит к локальной концентрации электрического поля, что может явиться причиной пробоя. Для того чтобы учесть влияние включений на электрическую прочность, рассматривается следующая модельная задача, которая аналогична случаю неидеального теплового контакта в теории теплопроводности тел, содержащих включения и трещины.

В соответствии с вышеуказанный схемой рассмотрим решение плоской задачи электростатики для неограниченной области тонким слоем анизотропного включения-диэлектрика. В криволинейной системе координат (n, s) , связанной со срединной поверхностью слоя, уравнение для определения потенциала электрического поля φ_c имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \varphi_c}{\partial n^2} + \beta^2 \frac{\partial^2 \varphi_c}{\partial s^2} = 0, \quad (9.324)$$

где $\beta^2 = \epsilon_1 / \epsilon_2$, ϵ_1, ϵ_2 — диэлектрические проницаемости слоя в тангенциальном и нормальном направлениях.

Условия сопряжения на поверхностях слоя $n = \pm h$ следующие:

$$\begin{cases} \varphi_c(s, \pm h) = \varphi^\pm, \\ -\epsilon_1 \frac{\partial \varphi_c}{\partial n} \Big|_{n=\pm h} = D_n^\pm, \end{cases} \quad (9.325)$$

где φ^\pm , D_n^\pm — предельные значения электрического потенциала и нормальной составляющей вектора индукции на поверхностях $n = \pm h$.

Определяя интегральные характеристики электрического поля в слое соотношениями

$$\begin{cases} \Phi_c^* = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \varphi_c(s, n) dn, \\ \Phi_c^{**} = \frac{3}{2h^2} \int_{-h}^h n \varphi_c(s, n) dn \end{cases} \quad (9.326)$$

и затем усредняя уравнение (9.324) по толщине слоя с учетом условий сопряжения, после некоторых известных нам преобразований, придем к следующим выражениям:

$$\varepsilon_s \frac{\partial^2 \Phi_c^*}{\partial s^2} - (D_n^+ - D_n^-) = 0, \quad \varepsilon_s = \varepsilon_i \cdot 2h, \quad (9.327)$$

$$\varepsilon_s \frac{\partial^2 \Phi_c^{**}}{\partial s^2} - 3(D_n^+ + D_n^-) - 6\varepsilon_n(\varphi^+ - \varphi^-), \quad \varepsilon_n = \frac{\varepsilon_2}{2h}. \quad (9.328)$$

Исключая из (9.327)–(9.328) известным способом интегральные характеристики и устремляя $h \rightarrow 0$, получим:

$$\begin{cases} \varepsilon_s \frac{\partial^2}{\partial s^2} (\varphi^+ + \varphi^-) - 2(D_n^+ - D_n^-) = 0, \\ \varepsilon_s \frac{\partial^2}{\partial s^2} (\varphi^+ - \varphi^-) - 6(D_n^+ + D_n^-) - 12\varepsilon_n(\varphi^+ - \varphi^-) = 0. \end{cases} \quad (9.329)$$

Таким образом, электрические граничные условия на поверхности слоя характеризуются двумя параметрами ε_s , ε_n .

Интерес представляют некоторые частные случаи сопряжения диэлектриков, которые моделируются физическими поверхностями:

1. Идеальный контакт диэлектрических сред реализуется в случае, когда $h \rightarrow 0$, а приведенные характеристики удовлетворяют условиям $\varepsilon_s \rightarrow 0$, $\varepsilon_n \rightarrow \infty$. В этом случае имеем

$$\varphi^+ = \varphi^-, \quad D_n^+ = D_n^-. \quad (9.330)$$

2. Включению со слабой диэлектрической проницаемостью соответствует случай $\varepsilon_s = 0$, $\varepsilon_n \neq 0$. Условия сопряжения представляются соотношениями:

$$\begin{cases} D_n^+ = D_n^- = D_n & \text{— условие непрерывности} \\ & \text{нормальной составляющей} \\ & \text{вектора электрической индукции}, \\ \varphi^+ - \varphi^- = -\frac{D_n}{\varepsilon_n} & \text{— выражение для скачка потенциала.} \end{cases} \quad (9.331)$$

3. Предельному случаю $\varepsilon_s \neq 0$, $\varepsilon_n \rightarrow \infty$ соответствует слой с большой диэлектрической проницаемостью и в этом случае имеем:

$$\begin{cases} \varphi^+ = \varphi^- = \varphi & \text{— условие непрерывности потенциала} \\ & \text{на поверхности слоя,} \\ D_n^+ - D_n^- = \varepsilon_s \frac{\partial^2 \varphi_c}{\partial s^2} & \text{— скачок нормальной составляющей} \\ & \text{вектора электрической индукции} \\ & \text{на исследуемой поверхности.} \end{cases} \quad (9.332)$$

4. Для слоя со свойствами идеального изолятора $\epsilon_s = \epsilon_n = 0$, а значит, диэлектрики рассматриваются как взаимодействующие, т. е.

$$D_n^+ = D_n^- = 0. \quad (9.333)$$

Выражения (9.329) используются для описания электрических условий на берегах трещины в пьезоэлектрической среде, и в зависимости от значений параметров ϵ_s , ϵ_n имеем различные модели трещины, которые рассматриваются как физическая поверхность с заданными значениями диэлектрических постоянных.

Задача 2. Действие теплового поля на бесконечную изотропную пластину с трещиной и тонким включением.

Рассмотрим отнесенную к декартовой системе координат xy бесконечную изотропную пластину с криволинейной трещиной l , которая усиливается прямолинейным армирующим стрингером (тонкое изотропное включение) L . Плоскость растягивается (или сжимается) на бесконечности взаимно перпендикулярными усилиями интенсивности N_1 и N_2 , и находится под действием однородного теплового потока мощностью q_∞ . Кроме заданных усилий на бесконечности в плоскости среды могут действовать сосредоточенные силы $P_j + iQ_j$ в точках z_j^* ($j = \overline{1, k^*}$), моменты M_j в точках z_j^{**} ($j = \overline{1, k^{**}}$) и существовать Λ источников (стоков) тепла мощностью q_j в точках G_j ($j = \overline{1, \Lambda}$) (рис. 9.33).

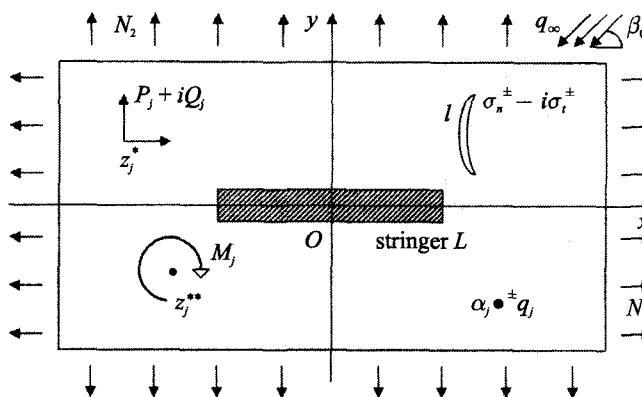


Рис. 9.33. Бесконечная изотропная плоская область с дефектами под действием статических механических и тепловых полей

В зависимости от условий теплового контакта на границах l и L для определения стационарного температурного поля изотропной среды могут быть использованы на основании (9.321)–(9.323) следующие тепловые граничные условия:

$$T_*^\pm = f^\pm(t) - T_0(t), \quad (9.334)$$

$$\lambda \left(\frac{\partial T_*}{\partial n} \right)^\pm = Q^\pm(t) - \lambda \frac{\partial T_0(t)}{\partial n}, \quad (9.335)$$

$$\begin{cases} \lambda_s \frac{\partial^2}{\partial s^2} (T_*^+ + T_*^-) + 2\lambda \left[\left(\frac{\partial T_*}{\partial n} \right)^+ - \left(\frac{\partial T_*}{\partial n} \right)^- \right] = -2\lambda_s \frac{\partial^2 T_0(t)}{\partial s^2}, \\ \lambda_s \frac{\partial^2}{\partial s^2} (T_*^+ - T_*^-) + 6\lambda \left[\left(\frac{\partial T_*}{\partial n} \right)^+ + \left(\frac{\partial T_*}{\partial n} \right)^- \right] - 12\lambda_n (T_*^+ - T_*^-) = -12\lambda \frac{\partial T_0(t)}{\partial n}, \end{cases} \quad (9.336)$$

где $f^\pm(t)$, $Q^\pm(t)$ — заданные температуры и тепловые потоки на берегах дефектов.

Кроме возможных тепловых граничных условий (9.334)–(9.336) на берегах трещины и на границах контакта между тонким включением (стрингером) и бесконечной средой заданы известные механические условия.

На берегах трещины l заданы нормальные и касательные усилия

$$(\sigma_n^\pm - i\sigma_t^\pm)|_{rel}, \quad (9.337)$$

а на границе L выполняются равенства

$$\begin{cases} \sigma_n^+ = \sigma_n^-, & \varepsilon_0 = \frac{du_i^+}{dt} = \frac{du_i^-}{dt}, \\ u_n^+ + iu_t^+ = u_n^- + iu_t^-, \end{cases} \quad (9.338)$$

где первые два условия (9.338) приводят к равенству

$$ih \left[(\sigma_n^+ - i\sigma_t^+) - (\sigma_n^- - i\sigma_t^-) \right] + \frac{E_0 S_0}{E} \frac{d}{dt} \left[(\sigma_n^+ + \sigma_s^+) - (\nu + 1)\sigma_n^+ + \alpha_t T \right] = 0. \quad (9.339)$$

Относительно тепловых граничных усилий на l будем считать заданной функцию температур $f_l^\pm(t) = T_l^\pm$ вида (9.334), а на границе контакта между стрингером L и бесконечной средой задана температура, которую имеет стрингер $f_2^\pm(t) = T_2^+ = T_2^-$.

После этих замечаний относительно граничных условий зададим выражения трех комплексных потенциалов $F_0(z)$, $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$ в виде

$$F_0(z) = \frac{q_\infty}{2} ze^{-i\beta_0} - \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{2\pi\lambda} \ln(z - a_j) + F_*(z), \quad (9.340)$$

$$\Phi_0(z) = \Gamma - \sum_{j=1}^K \frac{P_j + iQ_j}{2\pi(1+\kappa)} \frac{1}{z - z_j^*} + \frac{\beta_t}{1+\kappa} \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{2\pi\lambda} \ln(z - a_j) + \Phi_*(z), \quad (9.341)$$

$$\Psi_0(z) = \Gamma' + \sum_{j=1}^{K''} \left[\frac{\kappa(P_j - iQ_j)}{2\pi(1+\kappa)} \frac{1}{z - z_j^*} - \frac{\overline{z_j^*}(P_j + iQ_j)}{2\pi(1+\kappa)} \frac{1}{(z - z_j^*)^2} \right] - \quad (9.342)$$

$$- \sum_{j=1}^{K''} \frac{M_j}{2\pi} \frac{1}{(z - z_j^{**})^2} - \frac{\beta_t}{1+\kappa} \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{2\pi\lambda} \frac{\overline{a_j}}{z - a_j} + \Psi_*(z).$$

Здесь

$$\begin{cases} F_*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_l^\infty \frac{\phi(\tau)}{\tau - z} d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_l^\infty \frac{\mu(\tau)}{\tau - z} d\tau, \\ \Phi_*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_l^\infty \frac{g(\tau)}{\tau - z} d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_l^\infty \frac{G(\tau)}{\tau - z} d\tau, \\ \Psi_*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_l^\infty \frac{y(\tau)}{\tau - z} d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_l^\infty \frac{\psi(\tau)}{\tau - z} d\tau. \end{cases} \quad (9.343)$$

Границные условия на берегах трещины l при помощи предельных значений комплексных потенциалов записываются в известном для нас виде:

$$\sigma_n^{\pm} - i\sigma_t^{\pm} = \Phi_0^{\pm}(t) + \overline{\Phi_0^{\pm}(t)} + \frac{dt}{dt} \left[\bar{t}\Phi_0'^{\pm}(t) + \Psi_0^{\pm}(t) \right], \quad t \in l. \quad (9.344)$$

Третье условие на L (9.338) при помощи предельных значений комплексных потенциалов примет вид

$$\begin{cases} 2\mu \left\{ -\frac{du^+}{dt} + i \frac{dv^+}{dt} \right\} = 2\mu \left\{ -\frac{du^-}{dt} + i \frac{dv^-}{dt} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \Phi_0^+(t) - \kappa \overline{\Phi_0^+(t)} + \frac{dt}{dt} \left[\bar{t}\Phi_0'^+(t) + \Psi_0^+(t) \right] - \beta_t \overline{F_0^+(t)} = \\ = \Phi_0^-(t) - \kappa \overline{\Phi_0^-(t)} + \frac{dt}{dt} \left[\bar{t}\Phi_0'^-(t) + \Psi_0^-(t) \right] - \beta_t \overline{F_0^-(t)}, \quad t \in L. \end{cases} \quad (9.345)$$

Принимая во внимание формулы Сохозкого–Племеля для $F_*(z)$, тепловые граничные условия на берегах l и L соответственно запишутся:

$$\begin{cases} f_1^+(t) - f_1^-(t) = 2\operatorname{Re}\varphi(t) \Rightarrow \varphi_l(t) = \frac{T_l^+ - T_l^-}{2} — \text{ действительная часть } \varphi(t), \\ f_1^+(t) + f_1^-(t) = 2\operatorname{Re} \left[\frac{1}{\pi i} \int_l^{\infty} \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t} d\tau + \frac{1}{\pi i} \int_l^{\infty} \frac{\mu(\tau)}{\tau-t} d\tau \right] + 2\operatorname{Re} \left[\frac{q_{\infty}}{2} te^{-i\beta_0} - \sum_{j=1}^{\Lambda} \frac{q_j}{2\pi\lambda} \ln(t-a_j) \right], \quad t \in l, \end{cases} \quad (9.346)$$

$$\begin{cases} f_2^+(t) - f_2^-(t) = 0 = 2\operatorname{Re}\mu(t) \Rightarrow \mu_l(t) = 0, \\ f_2^+(t) + f_2^-(t) = 2\operatorname{Re} \left[\frac{1}{\pi i} \int_l^{\infty} \frac{\mu(\tau)}{\tau-t} d\tau + \frac{1}{\pi i} \int_l^{\infty} \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t} d\tau \right] + \\ + 2\operatorname{Re} \left[\frac{q_{\infty}}{2} te^{-i\beta_0} - \sum_{j=1}^{\Lambda} \frac{q_j}{2\pi\lambda} \ln(t-a_j) \right] \quad t \in L. \end{cases} \quad (9.347)$$

Выражения (9.346)–(9.347) дают следующую систему СИУ исследуемой задачи на стадии определения температурного поля:

$$\begin{cases} 2\operatorname{Re} \left[\frac{1}{\pi} \int_l^{\infty} \frac{\varphi_2(\tau)}{\tau-t} d\tau + \frac{1}{\pi} \int_l^{\infty} \frac{\mu_2(\tau)}{\tau-t} d\tau \right] = q_1(t), \quad t \in l, \\ 2\operatorname{Re} \left[\frac{1}{\pi} \int_l^{\infty} \frac{\mu_2(\tau)}{\tau-t} d\tau + \frac{1}{\pi} \int_l^{\infty} \frac{\varphi_2(\tau)}{\tau-t} d\tau \right] = q_2(t), \quad t \in L. \end{cases} \quad (9.348)$$

Здесь

$$\begin{aligned} q_1(t) &= f_1^+(t) + f_1^-(t) - 2\operatorname{Re} \left[\frac{q_{\infty}}{2} te^{-i\beta_0} - \sum_{j=1}^{\Lambda} \frac{q_j}{2\pi\lambda} \ln(t-a_j) \right], \quad \varphi_l(t) = \frac{T_l^+ - T_l^-}{2}, \\ q_2(t) &= f_2^+(t) + f_2^-(t) - 2\operatorname{Re} \left[\frac{q_{\infty}}{2} te^{-i\beta_0} - \sum_{j=1}^{\Lambda} \frac{q_j}{2\pi\lambda} \ln(t-a_j) \right], \quad \mu_l(t) = 0. \end{aligned}$$

Перейдем теперь к построению систем уравнений, необходимых для определения напряженно-деформированного состояния исследуемой кусочно-неоднородной области в рамках линейной термоупругости. Для этого вычтем выражения (9.344):

$$(\sigma_n^+ - \sigma_n^-) - i(\sigma_t^+ - \sigma_t^-) = [\Phi_0^+(t) - \Phi_0^-(t)] + [\overline{\Phi_0^+(t)} - \overline{\Phi_0^-(t)}] + \frac{dt}{dt} \left[\bar{t} (\Phi_0^{''}(t) - \Phi_0^{'}(t)) + \Psi_0^+(t) - \Psi_0^-(t) \right]. \quad (9.349)$$

Разрешая выражения (9.345) и (9.349) относительно $\Psi^+(t) - \Psi^-(t)$ и применяя известные нам формулы Сохоцкого–Племеля, получим следующее выражение для $\Psi(z)$:

$$\begin{aligned} \Psi(z) = & \left[\frac{1}{2\pi i} \int_L^P \frac{P_1(\tau)}{\tau - z} d\tau - \frac{1}{2\pi i} \int_L^{\bar{t}} \frac{\overline{g(\tau)}}{\tau - z} d\tau - \frac{1}{2\pi i} \int_L^{\bar{t}} \frac{\bar{t}g(\tau)}{(\tau - z)^2} d\tau \right] + \\ & + \left[\frac{\kappa}{2\pi i} \int_L^{\overline{G(\tau)}} d\tau - \frac{1}{2\pi i} \int_L^{\bar{t}} \frac{\bar{t}G(\tau)}{(\tau - z)^2} d\tau \right] + \frac{\beta_i}{2\pi i} \int_L^{\overline{\mu(\tau)}} d\tau, \end{aligned} \quad (9.350)$$

где

$$P_1(t) = (\sigma_n^+ - \sigma_n^-) - i(\sigma_t^+ - \sigma_t^-), \quad t \in L.$$

Принимая во внимание предельные значения интегральных выражений для комплексных потенциалов, получим после сложения выражений (9.344) и имея в виду граничное условие (9.339) следующую систему СИУ:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi i} \int_L^{\overline{g(\tau)}} d\tau - \frac{1}{\pi i} \int_L^{\overline{g(\tau)}} d\tau - \frac{dt}{dt} \left[\frac{1}{\pi i} \int_L^{\overline{g(\tau)}} d\tau + \frac{1}{\pi i} \int_L^{\bar{t}-\bar{t}} g(\tau) d\tau \right] + \frac{1}{\pi i} \int_L^{\overline{G(\tau)}} d\tau - \\ & - \frac{1}{\pi i} \int_L^{\overline{G(\tau)}} d\tau - \left[-\frac{\kappa}{\pi i} \int_L^{\overline{G(\tau)}} d\tau + \frac{1}{\pi i} \int_L^{\bar{t}-\bar{t}} G(\tau) d\tau - \frac{\beta_i}{\pi i} \int_L^{\overline{\mu(\tau)}} d\tau \right] = P_2(t), \quad t \in L, \end{aligned} \quad (9.351)$$

$$\begin{aligned} & ih \left[(\kappa+1) \overline{G(t)} + \beta_i \overline{\mu(t)} \right] + \frac{E_0 S_0}{E} \frac{d}{dt} \left[\operatorname{Re} \left[\frac{3-\nu-\kappa(1+\nu)}{2} \times G(t) - \frac{\beta_i(1+\nu)}{2} \mu(t) + \right. \right. \\ & \left. \left. + (1-\nu) \left[\frac{1}{\pi i} \int_L^{\overline{G(\tau)}} d\tau + \frac{1}{\pi i} \int_L^{\overline{g(\tau)}} d\tau \right] + \left[(1+\nu) \frac{dt}{dt} \left[-\frac{\kappa}{\pi i} \int_L^{\overline{G(\tau)}} d\tau + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \frac{1}{2\pi i} \int_L^{\bar{t}-\bar{t}} G(\tau) d\tau - \frac{\beta_i}{2\pi i} \int_L^{\overline{\mu(\tau)}} d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_L^{\overline{g(\tau)}} d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_L^{\bar{t}-\bar{t}} g(\tau) d\tau \right] \right] + \right. \\ & \left. + \alpha_i \left[\frac{1}{\pi i} \int_L^{\overline{\phi(\tau)}} d\tau + \frac{1}{\pi i} \int_L^{\overline{\mu(\tau)}} d\tau \right] = A(t, \bar{t}), \quad t \in L, \right. \end{aligned} \quad (9.352)$$

где

$$\begin{aligned} P_2(t) = & (\sigma_n^+ + \sigma_n^-) - i(\sigma_t^+ + \sigma_t^-) - 2 \left(\Gamma + \bar{\Gamma} + \frac{dt}{dt} \Gamma' \right) + \sum_{j=1}^{K^*} \left[2 \operatorname{Re} \frac{P_j + iQ_j}{\pi(1+\kappa)} \frac{1}{t - z_j^*} - \right. \\ & \left. - \frac{dt}{dt} \left[\kappa \frac{P_j - iQ_j}{\pi(1+\kappa)} \frac{1}{t - z_j^*} + \frac{P_j + iQ_j}{\pi(1+\kappa)} \frac{\bar{t} - \bar{z}_j^*}{(t - z_j^*)^2} \right] \right] + i \sum_{j=1}^{K^*} \frac{M_j}{2\pi} \frac{dt}{dt} \frac{1}{(t - z_j^{**})^2} + \\ & + \frac{\beta_i}{1+\kappa} \times \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{2\pi\lambda} \times \left[\operatorname{Re} \ln(t - a_j) + \frac{dt}{dt} \frac{\bar{t} - \bar{a}_j}{t - a_j} - \frac{dt}{dt} \left[\frac{1}{\pi i} \int_L^{\overline{P_1(\tau)}} d\tau + \frac{\beta_i}{\pi i} \int_L^{\overline{\mu(\tau)}} d\tau \right] \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A(t, \bar{t}) = & -\frac{E_0 S_0}{E} \frac{d}{dt} \operatorname{Re} \left\{ \frac{dt}{dt} \frac{1}{\pi i} \int_{\tau=t}^{\bar{t}} \frac{P_1(\tau)}{\tau - t} d\tau + \sum_{j=1}^{\kappa'} \left[(1-\nu) \frac{P_j + iQ_j}{\pi(1+\kappa)} \frac{1}{t - z_j^*} - \right. \right. \\
 & - \frac{d}{dt} \left[\frac{\kappa(P_j - iQ_j)}{2\pi(1+\kappa)} \frac{1}{t - z_j^*} + \frac{P_j + iQ_j}{2\pi(1+\kappa)} \frac{\bar{t} - z_j^*}{(t - z_j^*)^2} \right] \left. \right] - i \sum_{j=1}^{\kappa''} \frac{dt}{dt} \frac{M_j}{2\pi} \frac{1}{(t - z_j^{**})^2} - \\
 & \left. - \frac{\beta_i}{1+\kappa} \times \sum_{j=1}^{\Lambda} \left[\frac{q_j}{2\pi\lambda} \left[2(1-\nu) \ln(t - a_j) + \frac{dt}{dt} \frac{\bar{t} - \bar{a}_j}{t - a_j} \right] + \alpha_i \left[q_{\infty} t e^{-i\beta_0} - \sum_{j=1}^{\Lambda} \frac{q_j}{\pi\lambda} \ln(t - a_j) \right] \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Для единственности решения поставленной задачи необходимо получить систему СИУ (9.348), (9.351), (9.352), с одной стороны, дополнить условием однозначности перемещений вокруг трещины

$$\int_l g(t) dt = \frac{1}{1+\kappa} \int_l P_1(t) dt - \frac{\beta_i}{1+\kappa} \int_l \mu(t) dt \quad (9.353)$$

и, с другой стороны, там, где на берегах заданы температуры, дополнительным условием относительно неизвестного скачка теплового потока

$$\int_l \left(\frac{\partial T^+}{\partial n} - \frac{\partial T^-}{\partial n} \right) dt = \frac{Q}{\lambda}, \quad (9.354)$$

где Q — суммарное количество тепла, которое выходит из тела через контур.

Приведем выражения для плотностей $g(t)$ и $G(t)$ на соответствующих контурах с учетом граничных условий, выраженных через комплексные потенциалы:

$$\begin{cases} g(t) = \frac{P_1(t)}{1+\kappa} + g_0(t) - \frac{\beta_i}{1+\kappa} \varphi(t), \\ G(t) = \frac{i(\sigma_t^+ - \sigma_t^-)}{1+\kappa} - \frac{\beta_i}{1+\kappa} \mu(t), \end{cases} \quad (9.355)$$

где

$$g_0(t) = \frac{2\mu}{1+\kappa} \frac{d}{dt} \left[\left((u^+(t) - u^-(t)) + i(v^+(t) - v^-(t)) \right) \right].$$

Полученная система уравнений вместе с дополнительными условиями полностью описывает напряженно-деформированное состояние и стационарное температурное поле исследуемой кусочно-неоднородной бесконечной пластины.

9.8. Неклассические модели теплопереноса

В последние годы возрос интерес к изучению различного рода локально-неравновесных процессов переноса (энергии, массы, импульса). Это связано, с одной стороны, с естественным направлением развития науки — от равновесных в целом систем к локально-неравновесным. С другой стороны, интенсификация технологических процессов, использование материалов со сложной структурой (полимеров, жидких кристаллов, капиллярно-пористых и других дисперсных систем), широкое распространение лазерной техники, возможность достижения сверхвысоких и сверхнизких температур и давлений объясняют с практической точки зрения интерес к системам в локально-неравновесных условиях. Появляется боль-

шой круг вопросов, требующих описания процессов теплопроводности в твердых телах, испытывающих резкие тепловые воздействия. Подобные исследования оказались необходимыми, в частности, при исследовании синтеза и свойств теплостойких полимеров в условиях радиационного облучения или резких температурных перепадов. В таких случаях классическая равновесная термодинамика не дает адекватных моделей описания температурных полей, поэтому следует пользоваться неклассическими, локально-неравновесными моделями.

Обсуждение вопроса о бесконечной скорости распространения тепла, предполагаемое классической моделью Фурье, началось в пятидесятых годах прошлого столетия. Гипотеза о мгновенном диффузионном распространении тепла является лишь феноменологической и, кроме того, физически неприемлемой. Для устранения этого противоречия ряд исследователей [82, 110] стали вводить гипотезу о релаксации теплового потока. В рамках этой гипотезы процесс распространения тепла принял волновой характер, характеризующийся конечной скоростью распространения тепловых волн. При этом оказалось, что в ряде задач, рассмотренных с позиций параболического оператора теплопроводности, время релаксации было очень малой величиной. Озисик и Тзоу в их обзорной статье [97] показали, что скорости тепловых волн в металлах порядка 10^5 м/с . Поэтому в связи с большой величиной значения скоростей тепловых волн, факт их конечности необходимо учитывать только в сильно неустановившихся процессах, таких как импульсный лазерный нагрев [92]. Последнее обстоятельство позволяло считать гипотезу о релаксации теплового потока необоснованной.

Однако интерес исследователей к волновой природе тепла не утихает и по сей день. Как указывает В. А. Бубнов (см. [23]), в теории теплопроводности имеет место такой же дуализм, как в оптике. С одной стороны, процесс распространения тепла осуществляется потоком взаимодействующих частиц (атомов, молекул), с другой стороны — это волновой процесс. В первом случае он описывается параболическим оператором теплопроводности, и такие параметры этого оператора, как теплоемкость и теплопроводность, суть теплофизические константы среды, определяющие количественные характеристики теплопроводности. Во втором случае такими количественными характеристиками являются скорость тепловой волны и ее дисперсия.

Классическая теория переноса тепла опирается на приближения локального термодинамического равновесия и сплошной среды. Приближение локального термодинамического равновесия означает, что в каждом малом элементе среды существует состояние локального равновесия, для которого локальная энтропия является той же функцией макроскопических переменных, что и для равновесной системы. Локальное термодинамическое равновесие может установиться в системе, если скорость изменения ее макропараметров за счет внешних воздействий, т. е. скорость разрушения равновесия, намного меньше скорости установления равновесия. Кроме того, приближение локального термодинамического равновесия справедливо для моментов времени, значительно превышающих характерное время релаксации системы к локальному равновесию. Приближение сплошной среды, подразумевающее отсутствие у нее внутренней структуры, означает, что в интегральных законах сохранения для этой среды можно совершать предельный переход при стремлении объема интегрирования к нулю. С физической точки зрения эта процедура некорректна, так как среда всегда состоит из отдельных элементов (атомов, молекул). Однако если характерный макромасштаб системы много больше характерного размера ее микроструктуры, то можно пренебречь дискретностью вещества и рассматривать такую систему в приближении сплошной среды.

Таким образом, классическая теория переноса справедлива, если характерная скорость данного процесса много меньше скорости распространения возмущений в таких средах. В этом случае процессы теплопроводности описываются дифференциальными уравнениями в частных производных параболического типа с бесконечно большой скоростью распространения возмущений от мгновенного точечного источника, что с физической точки зрения неверно. Однако для достаточно медленных процессов, когда бесконечно большая скорость распространения возмущений понимается в смысле «намного больше скорости установления равновесия», такое приближение можно считать достаточно оправданным. В противном случае, т. е. при высокоскоростных процессах, следует пользоваться локально-неравновесными методами описания таких систем.

Для описания «неклассических» (локально-неравновесных) систем могут быть использованы различные термодинамические, кинетические, феноменологические и некоторые другие методы [47]. Рациональная термодинамика, отказываясь от принципа локально-термодинамического равновесия, вводит понятие тепловой памяти [95]. В рамках рациональной термодинамики рассмотрены среды с внутренними степенями свободы, среды скоростного типа и среды с памятью. Расширенная необратимая термодинамика, волновая теория Дьярмати и некоторые другие варианты локально-неравновесных теорий основаны на предположении, что удельная энтропия является одновременно функцией равновесных параметров и их потоков. Уравнения переноса (тепла, энергии, и т. д.) в локально-неравновесных средах могут быть также получены из уравнения Больцмана, молекулярно-кинетическими методами, при помощи теории случайных блужданий и др. [47].

Первоначальные попытки обобщения уравнения теплопроводности Фурье сделаны авторами работ [33, 110]. Здесь гипотеза Фурье уточняется следующим образом:

$$\mathbf{q} = -\lambda_r \mathbf{grad}T - \tau_r \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t},$$

где τ_r — время релаксации теплового потока.

На начальном этапе использования этого уравнения в практических расчетах новую теплофизическую константу отождествляли с максвелловским временем релаксации вязких напряжений. В обычных условиях это время есть малая величина [43], что препятствует широкому распространению этой формулы в теории теплопроводности. На данный момент получены результаты, которые говорят о времени релаксации как о характеристике столкновения свободных электронов с фононами, а также запаздывания реакции отклика на неоднородности в пористых средах. Значение времени релаксации существенно зависит от материала: для однородных материалов значения находятся в диапазоне $10^{-12} \div 10^{-8}$ с; а для неоднородных — $10^{-3} \div 10^3$ с [101].

Используя представления о длине свободного пробега молекул и введя гипотезу о конечности продолжительности удара молекул, формулу для теплового потока из молекулярно-кинетических представлений получил К. Каттанео [82]. Подстановка выражения для потока в закон сохранения энергии приводит к уравнению теплопроводности гиперболического типа

$$\lambda_r \Delta T - c \rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \tau_r \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right) = - \left(f + \tau_r \frac{\partial f}{\partial t} \right).$$

Это уравнение было также предложено независимо Бандом, Мейером [74] и Осборном [96] с целью объяснения существования второго звука в Не II, который был обнаружен в экспериментах Пешкова [99] в контексте диссипативной волновой формулировки.

В 1968 г. Гуртинг и Пипкин [87] предложили модель теплопроводности в средах с памятью. В рамках этой модели связь между тепловым потоком q и градиентом температуры, а также между внутренней энергией системы и температурой T имеет интегральную форму

$$q = - \int_0^{\infty} \alpha(s) \operatorname{grad} T(t-s) ds,$$

$$E = c\rho T + \int_0^{\infty} \beta(s) T(t-s) ds,$$

где $\alpha(s)$ и $\beta(s)$ — функции релаксации теплового потока и энергии соответственно. Эти выражения учитывают тот факт, что вдали от локального равновесия тепловой поток и внутренняя энергия не зависят от мгновенных значений градиента и температуры, а определяются всей предысторией процесса теплопереноса в рассматриваемом пространственном элементе. О таких средах говорят как о «средах с памятью». Отсюда и из закона сохранения энергии можно получить уравнение переноса в среде с памятью

$$c\rho\ddot{T} + \beta(0)T + \int_0^{\infty} \beta'(s)\dot{T}(x, t-s) ds = \alpha(0)\Delta T + \int_0^{\infty} \alpha'(s)\Delta T(x, t-s) ds + w(x, t).$$

Вышеупомянутый закон Каттанео–Вернотта получается, если в этом уравнении функции релаксации задать в виде (функции Максвелла)

$$\alpha(t-s) = \lambda_t \exp\left(\frac{t-s}{\tau_r}\right),$$

$$\beta(t-s) = c\rho \exp\left(\frac{t-s}{\tau_e}\right).$$

Как было указано выше, значительный интерес вызывает оценка параметра τ_r , который связан со скоростью тепловой волны соотношением $V_t = \lambda_t / (c\rho\tau_r)$. А. В. Лыков показал [34], что скорость распространения тепловых возмущений может быть получена из решения нелинейного параболического уравнения теплопроводности. В последнее время появились работы, посвященные вычислению скоростей тепловых волн и времен релаксации для различных материалов. Метод вычисления скорости тепловых волн на основе данных косвенных измерений (посредством измерения коэффициента поглощения звуковых волн) [36] дает хорошее совпадение теоретических данных с экспериментальными, а это свидетельствует о том, что введение в уравнение теплопроводности второй производной по времени целесообразно. В работах В. А. Бубнова и С. Ю. Яновского (см. [67]) приведены общая структурная схема идентификации функций релаксации теплового потока и внутренней энергии, а также структурная схема идентификации времени релаксации теплового потока, построенные на основе решения задачи о переносе тепла через бесконечную пластину, поверхность которой излучает тепло по закону Стефана–Больцмана. Было показано, что релаксационные процессы проявляются при частотах модуляции одного порядка с величиной, обратной времени релаксации ($\omega \sim \tau^{-1}$).

Недавние публикации Д. Тзоу и И. Чена [109] показывают, что неклассическая теплопроводность все еще представляет экспериментальный и теоретический интерес. Им удалось доказать, что временные постоянные, фигурирующие в релаксационных эффектах, порядка микро- и наносекунд.

Тепловые волны в слое, возникающие вследствие импульсного нагрева поверхности полости. Будем рассматривать изотропный (в смысле теплофизических свойств) слой толщины $2h$, ограниченный поверхностью сквозной туннельной полости. В декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ рассматриваемое тело задается соотношениями $-\infty < x_1, x_2 < \infty$, $|x_3| \leq h$, $|y(x_1, x_2)| > R$, $R > 0$, где $y(x_1, x_2)$ — кусочно-гладкая функция.

В начальный момент времени $t = 0$ среда находилась в состоянии термодинамического равновесия при температуре T_0 . Вследствие теплового нагрева температура тела будет меняться и ее приращение составит $\theta = T - T_0$. На торцевых плоскостях слоя поддерживается постоянная температура T_0 , а на поверхности полости σ действует тепловой нагрев с плотностью потока $\psi(x, t)$. Математическую формулировку задачи запишем следующим образом.

Уравнение теплопроводности (с учетом тепловой памяти) [67, 68, 81]

$$c\rho\ddot{\theta} + \beta(0)\theta + \int_0^\infty \beta'(s)\dot{\theta}(x, t-s)ds = \alpha(0)\Delta\theta + \int_0^\infty \alpha'(s)\Delta\theta(x, t-s)ds + w(x, t), \quad (9.356)$$

начальные условия

$$\theta|_{t=0} = \frac{\partial\theta}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \quad (9.357)$$

граничные условия

$$\theta|_{x_3=\pm h} = 0, \quad (9.358)$$

$$\int_0^\infty \alpha(s) \frac{\partial\theta(x, t-s)}{\partial n} \Big|_{x \in \sigma} = \frac{-\psi}{\lambda_r}. \quad (9.359)$$

В соотношениях (9.356)–(9.359) приняты следующие обозначения: c — удельная теплоемкость при постоянном объеме; ρ — плотность материала; λ_r — коэффициент теплопроводности; σ — поверхность полости; $n = (n_1, n_2)$ — орт нормали к поверхности σ ; w — плотность тепловых источников; $\alpha(s)$, $\beta(s)$ — функции релаксации теплового потока и энергии соответственно. В условиях данной задачи будем предполагать, что тепловые источники отсутствуют ($w = 0$).

Введя безразмерные параметры по формулам

$$\begin{aligned} X_k &= \frac{x_k}{R}; \quad H = \frac{h}{R}; \quad \tau = \frac{\lambda_r}{c\rho R^2}t; \quad \bar{N} = \frac{\vec{n}}{R} \quad (k = 1, 2, 3), \\ A(\tau) &= \frac{\alpha(t)}{\lambda_r}; \quad B(\tau) = \frac{\beta(t)}{c\rho}; \quad \Psi = \frac{R}{\lambda_r}\psi; \quad W = \frac{R^2}{\lambda_r}w \end{aligned} \quad (9.360)$$

и применяя к соотношениям (9.356), (9.358), (9.359) преобразование Лапласа при однородных начальных условиях (9.357), получаем

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial X_3^2} \right) \bar{\theta} - \frac{p + p\bar{B}(p)}{\bar{A}(p)} \bar{\theta} = \frac{\bar{W}}{\bar{A}(p)}, \quad (9.361)$$

$$\bar{\theta}|_{x_3=\pm h} = 0, \quad (9.362)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{\theta}(X, p)}{\partial N} \right|_{X \in \Sigma} = -\frac{\bar{\Psi}}{\bar{A}(p)}, \quad (9.363)$$

где $\bar{f}(p) = \int_0^\infty f(\tau) e^{-p\tau} d\tau$, Σ — поверхность полости в безразмерных координатах.

Найдем однородные решения уравнения (9.361), удовлетворяющие условиям (9.362). Для этого уравнение (9.361) представим таким образом:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial^2}{\partial X_3^2} + D^2 \right] \bar{\theta} = 0, \\ & D^2 = \frac{\partial^2}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} - \frac{p + p\bar{B}(p)}{\bar{A}(p)}. \end{aligned}$$

Для его интегрирования применим операторный метод. Общее решение будет иметь вид

$$\bar{\theta} = (\cos DX_3) C_1(X_1, X_2) + (D^{-1} \sin DX_3) C_2(X_1, X_2).$$

Для определения функций $\bar{\theta}$ привлечем граничные условия (9.362) и выделим в решении симметричную и кососимметричную составляющие.

Симметричное решение имеет вид [52, 55, 56]

$$\bar{\theta}_s = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(X_1, X_2) \cos \mu_j X_3, \quad \mu_j = \frac{\pi}{2H} (2j+1), \quad (9.364)$$

где функции $\varphi_j(X_1, X_2)$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} & D^2 \varphi_j = \mu_j^2 \varphi_j, \\ & D^2 = \frac{\partial^2}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} - \frac{p + p\bar{B}(p)}{\bar{A}(p)}. \end{aligned}$$

Кососимметричное решение определяется соотношениями

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_c &= \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(X_1, X_2) \cos \lambda_j X_3, \quad \lambda_j = \frac{\pi j}{H}. \\ & D^2 \psi_j = \lambda_j^2 \psi_j. \end{aligned}$$

Функции $\varphi_j(X_1, X_2)$ и $\psi_j(X_1, X_2)$ определяются из уравнений

$$(\nabla^2 - \nu_j^2) \varphi_j = 0, \quad \nu_j^2 = \frac{p + p\bar{B}(p)}{\bar{A}(p)} + \mu_j^2, \quad (9.365)$$

$$(\nabla^2 - \eta_j^2) \psi_j = 0, \quad \eta_j^2 = \frac{p + p\bar{B}(p)}{\bar{A}(p)} + \lambda_j^2,$$

где ∇^2 — двумерный оператор Лапласа.

Подставляя представление (9.364) в граничное условие (9.363) и предполагая, что функция $\bar{\Psi}(X, p)$ может быть представлена рядом Фурье $\sum_{j=0}^{\infty} \bar{\Psi}_j \cos \mu_j X_3$, исключаем «толщинную» координату X_3 . Получаем

$$\left. \frac{\partial \varphi_j}{\partial N} \right|_{\Gamma} = -\frac{\bar{\Psi}_j}{\bar{A}(p)}. \quad (9.366)$$

Здесь Γ — контур поперечного сечения полости плоскостью $x_3 = c$ ($c = \text{const}$), который задается аналитически уравнением $\phi(X_1, X_2) = R$.

Таким образом, для решения поставленной задачи (симметричной) необходимо определить коэффициенты ряда Фурье φ_j , удовлетворяющие в области $\mathcal{D}: |\phi(X_1, X_2)| \geq R$ однородному уравнению Гельмгольца (Клейна–Гордона) (9.365) и граничному условию (9.366).

Теплопроводность в слое, содержащем полость произвольного поперечного сечения. Будем искать решение задачи (9.366) в виде

$$\varphi_j(z) = \int_{\Gamma} g_j(\zeta) K_0(v_j \rho) ds, \quad \zeta = \xi_1 + i \xi_2 \in \Gamma, \quad z = X_1 + i X_2 \in \mathcal{D} \setminus \Gamma, \quad \operatorname{Re} v_j > 0. \quad (9.367)$$

Интегральное представление (9.367) корректно, так как удовлетворяет уравнению (9.365) и условиям на бесконечности независимо от выбора плотностей $g_j(\zeta)$, которые необходимо определить из граничного условия (9.366).

Подставляя (9.367) в (9.366), запишем

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial N} \left[\int_{\Gamma} g_j(\zeta) K_0(v_j \rho) ds \right] \right\}_{z \rightarrow \zeta_0 \in \Gamma} = -\frac{\bar{\Psi}_j}{A(p)}. \quad (9.368)$$

Для преобразования последнего соотношения представим оператор дифференцирования по нормали $\frac{\partial}{\partial N}$ с помощью комплексных операторов дифференцирования: $\frac{\partial}{\partial N} =$

$$= e^{i\psi} \frac{\partial}{\partial z} + e^{-i\psi} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad \text{где } \psi \text{ — угол между нормалью к контуру } \Gamma \text{ и осью } OX_1.$$

Операторы $\frac{\partial^m}{\partial z^m}$ и $\frac{\partial^m}{\partial \bar{z}^m}$ действуют на $K_0(v\rho)$ по формулам [49]

$$\frac{\partial^m}{\partial z^m} K_0(v\rho) = \left(-\frac{v}{2} \right)^m e^{-im\varphi} K_m(v\rho), \quad z = \rho e^{i\varphi},$$

$$\frac{\partial^m}{\partial \bar{z}^m} K_0(v\rho) = \left(-\frac{v}{2} \right)^m e^{im\varphi} K_m(v\rho) \quad (m=1, 2, \dots).$$

С учетом этих формул и представления (9.367) находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \varphi_j &= \frac{v_j}{2} \int_{\Gamma} g_j(\zeta) e^{-i\alpha} K_1(v_j \rho) ds, \quad \zeta - z = \rho e^{i\alpha}, \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \varphi_j &= \frac{v_j}{2} \int_{\Gamma} g_j(\zeta) e^{i\alpha} K_1(v_j \rho) ds. \end{aligned} \quad (9.369)$$

Подставляя предельные значения функции (9.369) в граничное равенство (9.368), приходим к интегральным уравнениям

$$g_j(\zeta_0) - \frac{v_j}{\pi} \int_{\Gamma} g_j(\zeta) K_1(v_j \rho_0) \cos(\alpha_0 - \psi_0) ds = -\frac{\bar{\Psi}_j}{2\pi A(p)}. \quad (9.370)$$

Далее, находя из (9.370) плотности $g_j(\zeta_0)$ для $j = 0, 1, 2, \dots$, решение определяем по формуле

$$\bar{\theta}(X, p) = \sum_{j=0}^{\infty} \cos \mu_j X_3 \int_{\Gamma} g_j(\zeta) K_0(v_j \rho) ds.$$

Численная реализация интегрального уравнения (9.370) сводится к определению значений $g_j^*(\beta_k)$ в узлах интерполяции из следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=1}^N \left\{ (-1)^{k+l} \cos ec \frac{\beta_k - \beta_{0l}}{2} - \frac{v_j}{\pi} G_j(\beta_k, \beta_{0l}) s'(\beta_k) \right\} g_j^*(\beta_k) = -\frac{N}{2\pi} \frac{\bar{\Psi}_j^*(\beta_{0l})}{A(p)}.$$

Отсюда легко восстанавливаются значения $\bar{\theta}(X, p)$ в любой точке слоя.

Алгоритм численного обращения преобразования Лапласа. Алгоритм обратного преобразования Лапласа, применяемый в данной работе, основан на разложении изображения в ряд Фурье и аппроксимации с помощью цепных дробей (см. [46]).

Как известно, важнейшим средством для вычисления оригинала по изображению является комплексный интеграл

$$f(t) = L^{-1}[f] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{pt} (p) dp \quad (t > 0), \quad (9.371)$$

где γ есть абсцисса в полуплоскости абсолютной сходимости интеграла Лапласа $L^{-1}[f]$.

Выполнив замену $p = \gamma + i\omega$, запишем соотношение (9.371) в виде

$$f(t) = \frac{1}{\pi} e^{\gamma t} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \{ \Phi(p) e^{i\omega t} \} d\omega. \quad (9.372)$$

Применим для интеграла (9.372) формулу трапеций с шагом π/l на интервале $(0, 2l)$, после чего получим следующую аппроксимационную формулу:

$$f(t) \approx \frac{1}{l} e^{\gamma t} \left[\operatorname{Re} \frac{\Phi(\gamma)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left\{ \Phi \left(\gamma + \frac{ik\pi}{l} \right) e^{(ik\pi t/l)} \right\} \right]. \quad (9.373)$$

Ряд в правой части (9.373) вычисляется с помощью аппроксимации цепными дробями.

Пусть $g(z)$ — аналитическая функция, которая может быть представлена степенным рядом

$$g(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i,$$

и $v(z)$ — соответствующая $g(z)$ непрерывная дробь

$$v(z) = d_0 / \left(1 + d_1 z / \left(1 + d_2 z / \left(1 + \dots \right) \right) \right).$$

Введем обозначения

$$e_0^{(i)} = 0, \quad q_1^{(i)} = \frac{a_{i+1}}{a_i} \quad (i = 0, 1, \dots). \quad (9.374)$$

Тогда справедливы соотношения [38]

$$q_{k+1}^{(i)} \cdot e_k^{(i)} = q_k^{(i+1)} \cdot e_k^{(i+1)} \quad (i = 0, 1, \dots; k = 1, 2, \dots). \quad (9.375)$$

Коэффициенты d_k определяются по формулам

$$\begin{cases} d_0 = a_0, \\ d_{2k-1} = -q_k^{(0)}, \\ d_{2k} = -e_k^{(0)} \quad (k = 1, 2, \dots). \end{cases} \quad (9.376)$$

Предположим, что

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = \frac{\Phi(\gamma)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Phi\left(\gamma + \frac{ik\pi}{l}\right) e^{ik\pi t/l}, \quad (9.377)$$

где

$$a_0 = \frac{1}{2} \Phi(\gamma), \quad a_k = \Phi\left(\gamma + \frac{ik\pi}{l}\right), \quad z = e^{i\pi t/l} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Применяя формулы (9.374), (9.375), (9.376), получим коэффициенты цепной дроби, соответствующей степенному ряду (9.377).

Обозначим через $v(z, M)$ M -ую подходящую дробь

$$v(z, M) = d_0 / \left(1 + d_1 z / \left(1 + d_2 z / \left(1 + d_3 z / \left(1 + d_M z \right) \right) \right) \right).$$

Числитель и знаменатель соответствующей подходящей дроби связаны с коэффициентами d_k следующими рекуррентными соотношениями:

$$\begin{cases} A_k = A_{k-1} + d_k z A_{k-2}, \\ B_k = B_{k-1} + d_k z B_{k-2} \quad (k = 1, 2, \dots), \end{cases}$$

где $A_{-1} = 0$; $B_{-1} = 1$; $A_0 = d_0$; $B_0 = 1$.

Тогда $v(z, M) = A_M / B_M$ и аппроксимация функции дает следующее представление

$$f(t) = \frac{1}{l} e^{\pi t} \operatorname{Re}\{v(z, M)\}.$$

Таким образом, определение оригинала сводится к последовательному вычислению подходящих дробей $v(z, m)$ ($m = 1, \dots, M$). Критерием определения числа M (порядка аппроксимации) является следующее соотношение

$$|v(z, M) - v(z, M-1)| < \epsilon,$$

где ϵ — заданное отклонение.

Эта оценка не является строгой, но, как указывается в [73], точна в большинстве случаев и часто применяется на практике.

Расчет температурного поля и внутренней энергии. В качестве примера решения задачи (9.356)–(9.359) посредством вышеизложенного метода рассмотрим изотропный слой, содержащий сквозную тунNELЬНУЮ полость эллиптического поперечного сечения ($\Gamma : (3x)^2 + (2y)^2 = (6)^2$). Тепловые волны в слое возникают вследствие импульсного нагрева поверхности полости

$$\Psi_1 = \Psi_{01}(\tau) \cdot \cos \frac{\pi X_3}{2H}, \quad \Psi_{01}(\tau) = \begin{cases} 1, & 0 < \tau < l_0, \\ 0, & \tau \geq l_0, \quad \tau = 0 \end{cases}$$

или

$$\Psi_2 = \Psi_{02}(\tau) \cdot \cos \frac{\pi X_3}{2H}, \quad \Psi_{02}(\tau) = \exp(-\tau) - \exp(-6\tau).$$

В расчетах задавались следующие параметры:

$$h/R = 10, \quad l_0 = 1, \quad \alpha(s) = \lambda_r / \tau_r \exp(s/\tau_r), \quad \beta(s) = c\rho / \tau_e \exp(s/\tau_e),$$

$\tau_r = 10^{-11}$ с — время релаксации теплового потока; $\tau_e = 10^{-13}$ с — время релаксации внутренней энергии.

На рисунках 9.34–9.39 представлены графики зависимости безразмерных величин E (энергия) и θ (температура) от безразмерного временного параметра τ в точке слоя $(2, 0, 0)$. На рис. 9.34–9.37 $\Psi = \Psi_1$, а на рис. 9.38, 9.39 $\Psi = \Psi_2$. Результаты приведены для разных значений безразмерных времен релаксации τ_0 и τ_1 (теплового потока и энергии соответственно).

Графики на рис. 9.34 демонстрируют условия применения волновой модели теплопроводности. Сплошной линией обозначено решение, рассматриваемое в рамках классической теории теплопроводности ($\alpha(s) = \beta(s) = 0$). Пунктирной линией показано решение, получаемое при $\beta(s) = 0, \alpha(s) \neq 0, \tau_0 = 0.05$. Этот случай соответствует гиперболической модели теплопроводности (которая является следствием закона теплопроводности Каттанео–Вернотта), но время релаксации теплового потока в 20 раз меньше времени действия теплового импульса, поэтому различий между двумя результатами практически нет. На рис. 9.35 эти же решения рассматриваются при $\tau_0 = 1$. Очевидно, что температура, рассчитанная в рамках гиперболической модели теплопроводности имеет характер бегущей волны, причем тепловой поток описывается разрывной функцией (непрерывность нарушается в моменты времени, когда внешняя тепловая нагрузка изменяется скачкообразно). Можно заключить, что гиперболическая модель адекватно описывает процесс теплопроводности, временной масштаб которого соизмерим со временем релаксации теплового потока в данной среде. Если время наблюдения больше (хотя бы на порядок) времени установления термодинамического равновесия, то можно рассматривать процесс теплопроводности как равновесный, диффузионный, т. е. подчиняющийся закону теплопроводности Фурье.

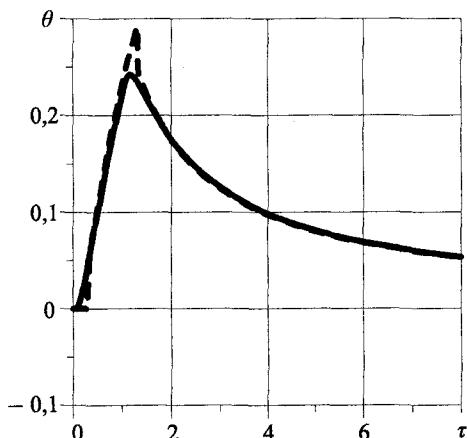


Рис. 9.34. Изменение безразмерной температуры со временем в случае действия прямоугольного импульса (сравнение гиперболической и параболической моделей $\tau_0 = 0,05$)

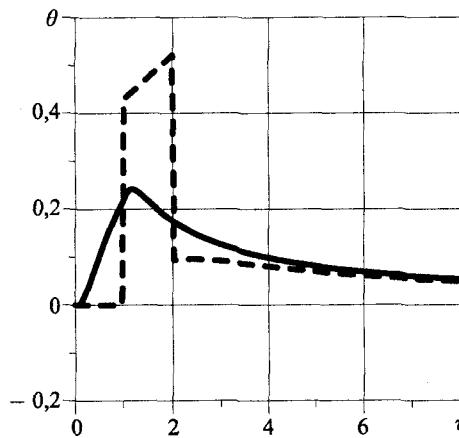


Рис. 9.35. Изменение безразмерной температуры со временем в случае действия прямоугольного импульса (сравнение гиперболической и параболической моделей $\tau_0 = 1$)

Рис. 9.36, 9.37 демонстрируют влияние «тепловой памяти» на распространение тепловых волн при действии импульсного теплового нагрева. Кривые 1 соответствуют линеаризованной модели теплопроводности Гуртина–Пипкина ($\tau_0 = 1$, $\tau_1 = 2$), а кривые 2 — гиперболической модели Каттанео–Вернотта–Лыкова. Как видим, учет релаксации теплового потока приводит к появлению четко выраженного волнового фронта (участок кривой, где температура равна нулю, совпадает с промежутком времени, за который тепловая волна приходит от источника в точку наблюдения). Релаксация энергии (кривая 2 на рис. 9.35) существенно меняет волновую картину: уменьшается амплитуда температуры, однако даже после снятия нагрузки температура может возрастать некоторое время. Отметим, что с течением времени оба решения совпадают, т. е. эффект «тепловой памяти» можно не учитывать.

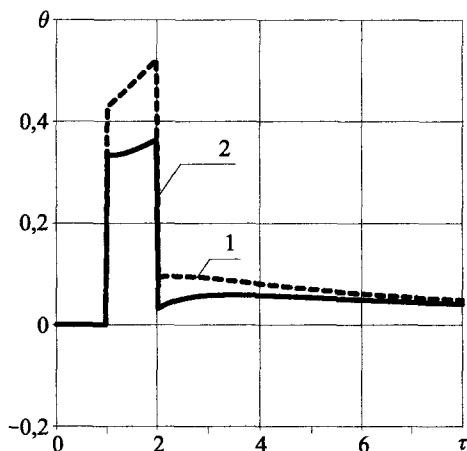


Рис. 9.36. Изменение безразмерной температуры со временем в случае действия прямоугольного импульса (сравнение гиперболической модели и модели с тепловой памятью, $\tau_0 = 1$, $\tau_1 = 2$)

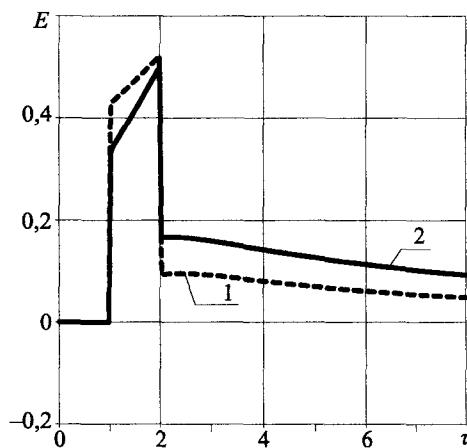


Рис. 9.37. Изменение безразмерной энергии со временем в случае действия прямоугольного импульса (сравнение гиперболической модели и модели с тепловой памятью, $\tau_0 = 1$, $\tau_1 = 2$)

На рис. 9.38, 9.39 приведены аналогичные результаты расчетов температуры и внутренней энергии при $\tau_0 = 1$, $\tau_1 = 0,01$. Здесь учет механизма релаксации внутренней энергии приводит к увеличению затухания и уменьшению скорости распространения тепловых возмущений (рис. 9.38) по сравнению со скоростью и затуханием тепловых возмущений, получаемых из гиперболического уравнения теплопроводности.

Гиперболическая задача теплопроводности для анизотропного слоя в R^3 . В декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ рассмотрим анизотропный слой $-\infty < x_1, x_2 < \infty, |x_3| \leq h$, имеющий в каждой точке плоскость тепловой симметрии, к которой нормальна ось Ox_3 . Слой содержит сквозную тунNELЬНУЮ полость (вдоль оси Ox_3) достаточно произвольного поперечного сечения. На основаниях слоя поддерживается постоянная температура T_0 , а на

поверхности полости σ действует тепловой нагрев с плотностью потока $q(\xi, t)$. Температура в произвольной точке слоя $x = (x_1, x_2, x_3)$ определяется из гиперболического уравнения теплопроводности [67]

$$\left[\sum_{m,l=1}^3 a_{ml} \partial_m \partial_l - c \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \tau_r \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \right] T(x, t) = 0, \quad \partial_m = \frac{\partial}{\partial x_m} \quad (9.378)$$

при выполнении граничных

$$T|_{x_3=\pm h} = T_0, \quad (9.379)$$

$$\left[\sum_{m,l=1}^2 n_m a_{ml} \partial_l T \right]_\sigma = - \left(q(\xi, t) + \tau_r \frac{\partial q(\xi, t)}{\partial t} \right), \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, x_3) \in \sigma$$

и начальных условий

$$T|_{t=0} = T_0, \quad \frac{\partial T}{\partial t}|_{t=0} = 0. \quad (9.380)$$

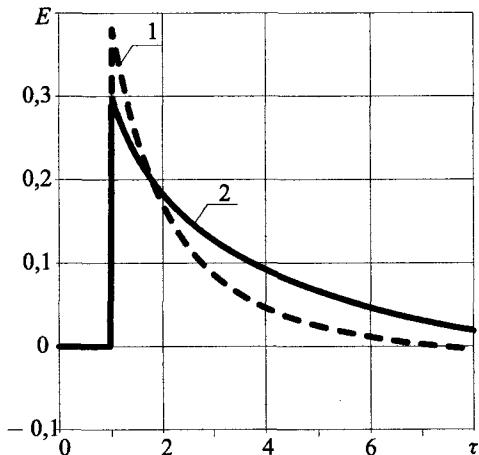


Рис. 9.38. Изменение безразмерной энергии со временем в случае действия экспоненциального импульса (сравнение гиперболической модели и модели с тепловой памятью, $\tau_0 = 1$, $\tau_1 = 0,01$)

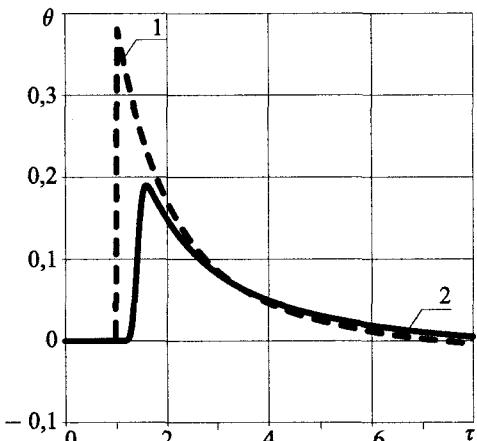


Рис. 9.39. Изменение безразмерной температуры со временем в случае действия экспоненциального импульса (сравнение гиперболической модели и модели с тепловой памятью, $\tau_0 = 1$, $\tau_1 = 0,01$)

В соотношениях (9.378)–(9.380) приняты следующие обозначения: a_{ml} — компоненты тензора теплопроводности ($a_{13} = a_{23} = 0$); c — удельная теплоемкость при постоянном объеме; ρ — плотность материала; τ_r — время релаксации теплового потока; $n = (n_1, n_2)$ — орт нормали к поверхности полости σ ; T_0 — температура тела в исходном состоянии.

Введем безразмерные величины

$$k_{11} = a_{11}/a_{33}, \quad k_{12} = a_{12}/a_{33}, \quad k_{22} = a_{22}/a_{33}, \quad X_1 = x_1 \sqrt{k_{22}} / (R\sqrt{\Delta}), \quad X_2 = x_2 \sqrt{k_{22}} / (R\sqrt{\Delta}),$$

$$X_3 = x_3/R, \quad H = h/R, \quad \Xi_m = \xi_m \sqrt{k_{22}} / (R\sqrt{\Delta}) \quad (m=1,2), \quad \tau = t a_{33} / (R^2 c \rho), \quad \tau_0 = \tau_r a_{33} / (R^2 c \rho),$$

$$\theta = (T - T_0) / (T_c - T_0), \quad \Psi = q \cdot (R\sqrt{\Delta}) / (a_{33} (T_c - T_0) \sqrt{k_{22}}), \quad \Delta = k_{11} k_{22} - k_{12}^2 > 0,$$

где $R = d/2$ (d — диаметр поперечного сечения полости); T_c — температура среды.

Теперь начально-краевая задача (9.378)–(9.380) будет иметь вид

$$\left[\frac{k_{22}}{\Delta} \sum_{m,l=1}^2 k_{ml} \partial_m \partial_l + \partial_3^2 \right] \theta(X, \tau) = \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \tau_0 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) \theta(X, \tau), \quad \partial_m = \frac{\partial}{\partial X_m},$$

$$\theta|_{X_3=\pm H} = 0, \quad (9.381)$$

$$\left[\sum_{m,l=1}^2 k_{ml} n_m \partial_l \theta \right]_\Sigma = - \left(1 + \tau_0 \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \Psi(\Xi, \tau), \quad \Xi = (\Xi_1, \Xi_2, X_3) \in \Sigma,$$

$$\theta|_{\tau=0} = \frac{\partial \theta}{\partial \tau}|_{\tau=0} = 0,$$

где Σ — поверхность полости в безразмерных координатах X_m ($m=1,2,3$).

Применяя к уравнению (9.381) и граничным условиям преобразование Лапласа в предположении однородных начальных условий

$$U(X, p) = \int_0^\infty e^{-pt} \theta(X, \tau) d\tau, \quad Q(X, p) = \int_0^\infty e^{-pt} \Psi(X, \tau) d\tau,$$

получаем следующую граничную задачу относительно изображений

$$[\partial_3^2 + \gamma^2] U(X, p) = 0,$$

$$\gamma^2 = \frac{k_{22}}{\Delta} \sum_{m,l=1}^2 k_{ml} \partial_m \partial_l - \tau_0 p^2 - p, \quad (9.382)$$

$$U|_{X_3=\pm H} = 0, \quad (9.383)$$

$$\left[\sum_{m,l=1}^2 k_{ml} n_m \partial_l U \right]_\Sigma = -(1 + \tau_0 p) Q(\Xi, p). \quad (9.384)$$

Для интегрирования уравнения (9.382) применим операторный метод. Общее решение будет иметь вид

$$U = (\cos \gamma X_3) C(X_1, X_2) + (\gamma^{-1} \sin \gamma X_3) D(X_1, X_2).$$

Однородным решением задачи назовем решение однородного уравнения теплопроводности (9.382) для сплошного (без отверстий) слоя при однородных граничных условиях на его основаниях (9.383).

Для определения функций $C(X_1, X_2)$, $D(X_1, X_2)$ привлечем граничные условия (9.383) и выделим в решении симметричную и кососимметричную составляющие. Тогда искомое однородное (симметричное) решение будет иметь вид [52, 56, 60]

$$U = \sum_{j=0}^{\infty} U_j(X_1^*, X_2^*) \cos \mu_j X_3, \quad X_1^* = X_1 - \frac{k_{12}}{k_{22}} X_2, \quad X_2^* = \frac{\sqrt{\Delta}}{k_{22}} X_2, \quad \mu_j = \frac{2j+1}{2H} \pi.$$

Комплексные метагармонические функции $U_j(X_1^*, X_2^*)$ определяются из уравнения

$$(\nabla_*^2 - \nu_j^2) U_j = 0, \quad \nabla_*^2 = \frac{\partial^2}{\partial X_1^{*2}} + \frac{\partial^2}{\partial X_2^{*2}}, \quad \nu_j^2 = p + \tau_0 p^2 + \mu_j^2.$$

Справедливо представление U_j в виде обобщенного потенциала простого слоя

$$U_j = \int_{\Gamma} g_j(\zeta) K_0(\nu_j \rho) ds, \quad \zeta = \Xi_1 + i \Xi_2 \in \Gamma \quad (j = 0, 1, \dots);$$

$$\rho = |\zeta_* - z_*|, \quad z_* = X_1^* + i X_2^*, \quad \zeta_* = \Xi_1 - \frac{k_{12}}{k_{22}} \Xi_2 + i \frac{\sqrt{\Delta}}{k_{22}} \Xi_2, \quad \operatorname{Re} \nu_j > 0, \quad (9.385)$$

где $K_m(z)$ — функция Макдональда порядка m [35], $g_j(\zeta)$ — искомая плотность, Γ — контур поперечного сечения полости Σ , ds — элемент дуги контура Γ .

Интегральное представление (9.385) корректно, так как удовлетворяет уравнению (9.382) и граничному условию на основаниях слоя (9.383) независимо от выбора плотностей $g_j(\zeta)$, которые необходимо определить из граничного условия (9.384).

Анизотропный слой с полостью. Введем операторы комплексного дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial z_*} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial X_1^*} - i \frac{\partial}{\partial X_2^*} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_*} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial X_1^*} + i \frac{\partial}{\partial X_2^*} \right), \quad \bar{z}_* = X_1^* - i X_2^*.$$

В этих переменных (9.385) запишется следующим образом:

$$\left[\beta \frac{\partial U}{\partial z_*} + \bar{\beta} \frac{\partial U}{\partial \bar{z}_*} \right]_{\Sigma} = -Q(\Theta, p) \cdot (1 + \tau_0 p),$$

$$\beta = \sum_{l=1}^2 (k_{l1} + \nu_* k_{l2}) n_l, \quad \nu_* = \frac{i \sqrt{\Delta} - k_{12}}{k_{22}}. \quad (9.386)$$

Далее, предполагая, что функция $Q(\Theta, p)$ может быть представлена рядом Фурье $Q = \sum Q_j \cdot \cos \mu_j X_3$, и исключая «толщинную» координату X_3 из (9.386), получим

$$\left[\beta \frac{\partial}{\partial z_*} U_j + \bar{\beta} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_*} U_j \right]_{\Gamma} = -Q_j(\Xi_1, \Xi_2, p) \cdot (1 + \tau_0 p), \quad (\Xi_1, \Xi_2) \in \Gamma \quad (j = 0, 1, \dots) \quad (9.387)$$

С помощью интегрального представления (9.385) счетная совокупность функциональных уравнений (9.387) сводится к системе несвязанных интегральных уравнений второго рода

$$g_j(\zeta_0) - \frac{\nu_j}{\pi \sqrt{\Delta}} \int_{\Gamma} g_j(\zeta) K_0(\nu_j \rho_0) \operatorname{Re} \{ \beta(\varphi_0) e^{-i\alpha_0} \} ds = \frac{Q_j(1 + \tau_0 p)}{2\pi \sqrt{\Delta}} \quad (j = 0, 1, \dots);$$

$$\zeta_* - \zeta_{*0} = \rho_0 e^{i\alpha_0}, \quad \zeta_0 \in \Gamma, \quad (9.388)$$

где φ_0 — угол между нормалью к контуру Γ в точке ζ_0 и осью OX_1 .

Таким образом, температурное поле в плоскости изображений по Лапласу полностью определяется интегральными уравнениями (9.388) и представлениями (9.385).

Приложение метода интегральных уравнений к решению задачи о распространении тепловых волн в полуслое. Рассмотрим теперь изотропный полуслой $0 \leq x_1 < \infty$, $-\infty < x_2 < \infty$, $|x_3| \leq h$ с теплоизолированной боковой стенкой, в котором содержится сквозная тунNELьная вдоль оси OX_3 полость с импульсно нагреваемой поверхностью. В этом случае задача о распространении тепловых волн может быть решена методом отражений [34].

Для изотропной среды интегральное представление (9.385) запишется в виде

$$U_j = \int_{\Gamma} g_j(\zeta) K_0(v_j r) dS, \quad r = |\zeta - z|, \quad \zeta = \Xi_1 + i\Xi_2 \in \Gamma. \quad (9.389)$$

Начально-краевую задачу (9.378)–(9.380) необходимо дополнить условием на границе полуслоя

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial T}{\partial x_2} \right|_{x_1=0} &= 0, \\ \left. \frac{\partial T}{\partial x_2} \right|_{x_1=0} &= 0. \end{aligned} \quad (9.390)$$

Границочное условие (9.390) выполнится автоматически, если представление (9.389) модифицировать следующим образом:

$$U_j = \int_{\Gamma} g_j(\zeta) (K_0(v_j r) + K_0(v_j r^*)) dS, \quad r^* = |\zeta^* - z|, \quad \zeta^* = -\Xi_1 + i\Xi_2. \quad (9.391)$$

Далее, аналогично предыдущему, получаем разрешающую систему интегральных уравнений для определения неизвестных плотностей $g_j(\zeta)$

$$\begin{aligned} g_j(\zeta_0) - \frac{v_j}{\pi} \int_{\Gamma} g_j(\zeta) \{ K_1(v_j r_0) \cos(\varphi_0 - \alpha_0) + K_1(v_j r_0^*) \cos(\varphi_0 - \alpha_0^*) \} dS &= \\ &= \frac{Q_j(1 + \tau_0 p)}{2\pi} \quad (j = 0, 1, \dots), \\ \zeta - \zeta_0 &= r_0 e^{i\alpha_0}, \quad \zeta^* - \zeta_0 = r_0^* e^{i\alpha_0^*}. \end{aligned} \quad (9.392)$$

Результаты расчетов и их обсуждение. В качестве примера рассмотрим изотропный слой с тунNELьной полостью эллиптического поперечного сечения ($\Gamma: \zeta = \cos \varphi + i \cdot 0,5 \sin \varphi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$). Тепловые волны в слое возникают вследствие импульсного нагрева поверхности полости

$$\Psi_1 = \Psi_{01}(\tau) \cdot \cos \frac{\pi X_3}{2H}, \quad \Psi_{01}(\tau) = \begin{cases} 1, & 0 < \tau < l_0, \\ 0, & \tau \geq l_0, \quad \tau = 0, \end{cases}$$

или

$$\Psi_2 = \Psi_{02}(\tau) \cdot \cos \frac{\pi X_3}{2H}, \quad \Psi_{02}(\tau) = \exp(-\tau) - \exp(-6\tau).$$

Интегральные уравнения (9.388) решались численно (методом механических квадратур) с последующим обращением преобразования Лапласа.

На рис. 9.40–9.43 представлено изменение величины θ в зависимости от безразмерного времени τ в точке слоя $X = (2,0,0)$ при $H = 1$, $k_{11} = k_{22} = 1$, $k_{12} = 0$. Рис. 9.40, 9.41 выполнены для случая, когда изменение теплового потока задается функцией Ψ_1 , а рис. 9.42, 9.43 — функцией Ψ_2 .

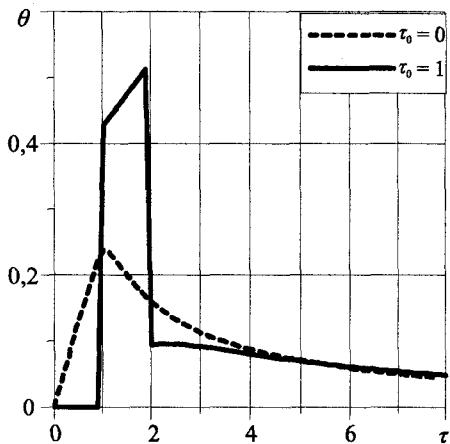


Рис. 9.40. Изменение безразмерной температуры от времени в случае действия прямоугольного импульса (Ψ_2)

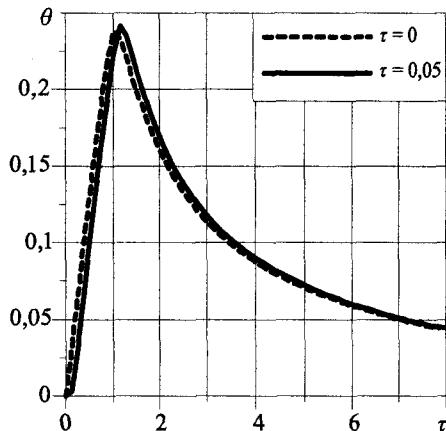


Рис. 9.41. Изменение безразмерной температуры от времени в случае действия прямоугольного импульса (Ψ_1)

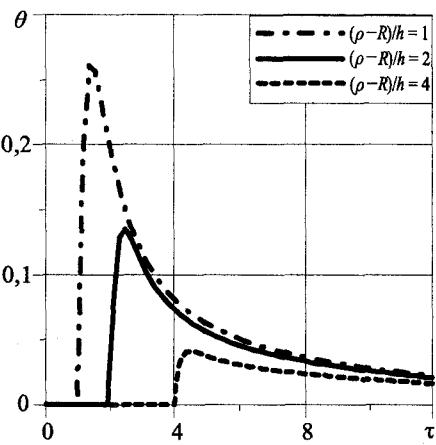


Рис. 9.42. Изменение безразмерной температуры от времени в случае действия экспоненциального импульса (Ψ_2)

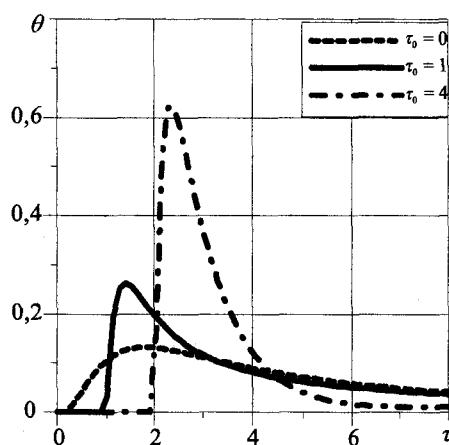


Рис. 9.43. Изменение безразмерной температуры от времени в случае действия экспоненциального импульса (Ψ_1)

При импульсном тепловом воздействии температура имеет характер бегущей волны, распространяющейся от носителя тепловых источников с некоторой скоростью в случае решения гиперболического уравнения, и медленного, диффузионного процесса в случае модели Фурье. Это иллюстрируется кривыми на рис. 9.43, которые построены для значения времени релаксации $\tau_0 = 1; 0$ и длины теплового импульса $l_0 = \tau_0 = 1$. Скачкообразное изменение температуры в точках $\tau = 1$ и $\tau = 2$ обусловлено наличием процессов релаксации и видом функции теплового воздействия. Однако в случае, когда время действия импульса несоизмеримо со временем релаксации системы к состоянию равновесия (рис. 9.41), решения гиперболического и параболического уравнений теплопроводности совпадают, т. е. волновая природа теплопереноса не наблюдается.

Графики на рис. 9.42 описывают поведение тепловой волны при удалении точки наблюдения от источника нагрева (ρ — расстояние от центра сечения полости до точки наблюдения). Можно заключить, что функции имеют четко выраженный волновой фронт и экспоненциально затухают на бесконечности. На рис. 9.43 видим, что тепловое возмущение достигает данной точки слоя в момент времени $\tau = \sqrt{\tau_0}$, а скорость тепловой волны в безразмерных переменных равна $1/\sqrt{\tau_0}$. Таким образом, в гиперболической модели теплопроводности ($\tau_0 \neq 0$) распространение тепла имеет характер бегущей волны.

На рис. 9.44, 9.45 представлены графики распределения температуры вдоль контура срединного сечения полости для двух разных анизотропных материалов: 1 — молибдат свинца $PbMoO_4$ ($k_{11} = 1,5$; $k_{22} = 2$; $k_{12} = 0$), 2 — дигидрофосфат аммония ($k_{11} = 1$; $k_{12} = 1,244$; $k_{22} = 2,52$) [7] при значении безразмерного времени $\tau = 1$. Сплошные кривые соответствуют гиперболической модели теплопроводности (учет релаксации теплового потока), а пунктирные — параболической (без учета релаксации).

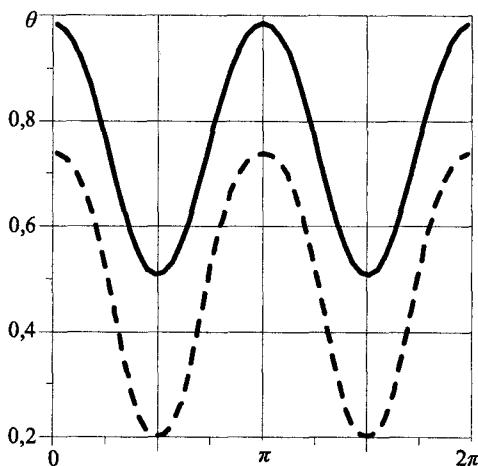


Рис. 9.44. Распределение температуры вдоль эллиптического сечения полости в ортотропном материале

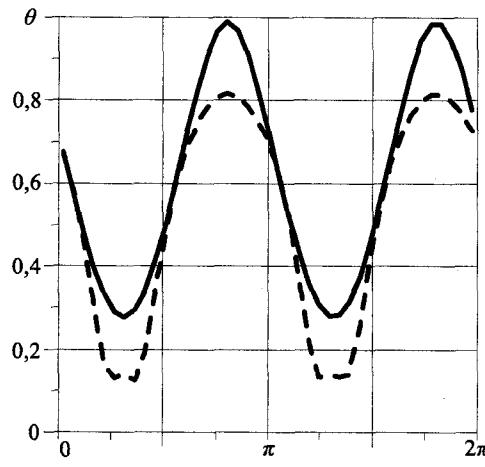


Рис. 9.45. Распределение температуры вдоль эллиптического сечения полости в анизотропном материале

Очевидно, что кривая, соответствующая решению гиперболического уравнения, расположена выше, чем кривая, соответствующая температурному полю без релаксации. Это связано с тем, что энергия (теплота) в гиперболической модели локализуется в области действия источника тепла, в то время как классическая модель представляет равновесный, диффузионный процесс переноса энергии.

С целью исследования волновых свойств распространения тепла рассмотрим ограниченное тело — полуслой с теплоизолированной стенкой (рис. 9.46).

Теперь температурное поле в плоскости изображений по Лапласу определяется системой интегральных уравнений (9.392) и представлениями (9.391). На рис. 9.47 показан отклик температурной функции на тепловой импульс, действующий на поверхности полости (OA — расстояние от точки наблюдения до стенки полуслоя). В расчетах задавались следующие параметры: $H = 1$; $AB/BC = 1$; $AO/BC = 2$; $\tau_0 = 1$; $k_{11} = k_{22} = 1$; $k_{12} = 0$.

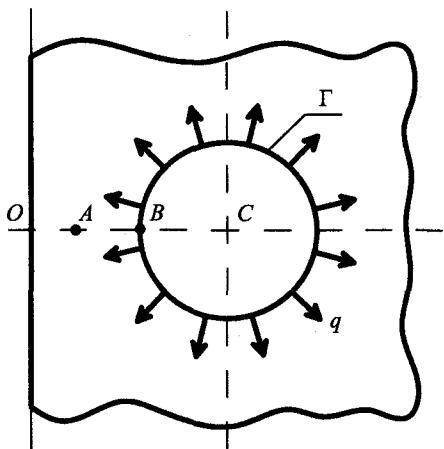


Рис. 9.46. Поперечное сечение полуслоя с туннельной полостью

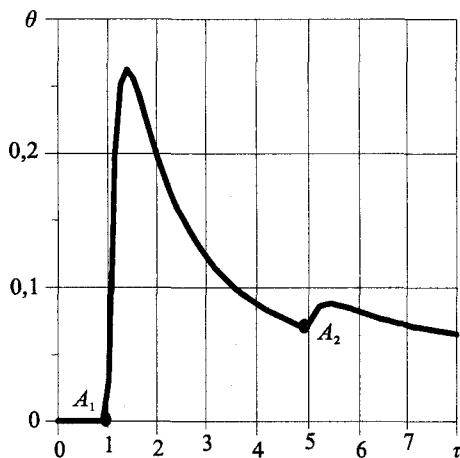


Рис. 9.47. Отклик температурной функции на действие теплового импульса в полуслое

Точка A_1 на графике соответствует моменту времени, когда тепловой сигнал приходит от поверхности полости в точку наблюдения, точка A_2 — моменту времени, когда отраженная от стенки волна приходит в точку A .

9.9. Плоская задача термоупругости для анизотропной среды

В настоящее время развитие теории термоупругости движется в двух направлениях: применение волновой модели теплопроводности (такие задачи называются обобщенными задачами термоупругости) и рассмотрение термоупругих волн без диссипации энергии [85, 86, 76].

Теории термоупругости, учитывающие конечную скорость распространения тепловых сигналов, активно развиваются на протяжении последних 30 лет. В противоположность конвекционной теории связанный термоупругости, которая базируется на параболическом уравнении теплопроводности [23], эти теории базируются на гиперболическом уравнении теплопроводности [25, 27, 43].

М. А. Био [78] на основе механики и термодинамики необратимых процессов получил уравнения связанный термоупругости, обобщающие классическую теорию упругости и теорию теплопроводности. Первое решение динамической задачи термоупругости о тепловом ударе на границе полупространства принадлежит В. И. Даниловской [22]. Последующие работы были посвящены исследованию таких явлений, как перенос тепла теплопроводностью в теле при стационарном и нестационарном теплообмене между поверхностью тела и внешней средой; термоупругие напряжения, вызванные градиентами температуры; динамические эффекты при резко нестационарных процессах нагрева в условиях теплового удара; термомеханические эффекты, обусловленные взаимодействием полей деформации и температуры. Наиболее известными стали труды М. А. Био, П. Чедвига, Б. Боли и Дж. Уэйнера, А. Д. Коваленко, В. Новацкого, Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица, Я. С. Подстригача, Ю. М. Коляно (см. [12]).

Первое обобщение уравнений термоупругости для изотропных тел принадлежит Лорду и Шульману (1967), которые получили уравнение теплопроводности волнового типа. Е. Б. Поповым была решена обобщенная задача термоупругости для полупространства, подвергнутого тепловому удару по краевой поверхности. Обнаружены две волны, распространяющиеся с поверхности вглубь тела (быстрая и медленная). При малых и средних значениях времени максимум достигается на фронте быстрой (звуковой) волны, затухает по экспоненциальному закону и зависит от скорости распространения тепла. При больших значениях времени t появляется второй максимум, скорость распространения и величина которого не зависят от скорости распространения тепловой волны. Этот максимум затухает $\sim 1/\sqrt{t}$, поэтому при очень больших временах он дает основной вклад в напряженное состояние.

Э. М. Карташов и Г. М. Бартенев (см. [29]) приводят данные по обобщенной динамической термоупругости, касающиеся дальнейшего развития этого класса задач. Получены основные уравнения в криволинейных координатах, выведены общие теоремы и сформулирован вариационный принцип; выведены определяющие соотношения для анизотропных тел и доказаны основные теоремы; сформулированы обобщенные граничные условия теплообмена для анизотропных и изотропных тел.

Уравнения термоупругости в обобщенной постановке для анизотропных тел предложил С. Калиски (1965). Существует не много работ, посвященных расчету термоупругих полей в телах с общей анизотропией (см. [12, 57, 76]), однако тенденции развития современных материалов возвращают исследователей к подобным задачам [90].

Следующее обобщение классической теории термоупругости известно как теория термоупругости с двумя временами релаксации или теория термоупругости с температурно-скоростной зависимостью. Она была предложена в 1972 г. Грином и Линдссеем [86] и базируется на неравенстве Грина–Лоуза, описывающем изменение энтропии. Эта теория не нарушает закон теплопроводности Фурье, если рассматриваемое тело обладает центром симметрии, и справедлива как для изотропных, так и для анизотропных тел. В книге [29] приведено решение одномерной задачи термоупругости с температурно-скоростной зависимостью, полученное Ц. П. Ивановым и Ю. К. Энгельбрехтом. Установлено, что скорости изменения температуры необходимо учитывать при высоких частотах (имеющих порядок характеристических).

Описание процессов переноса теплоты при интенсивном кратковременном нагреве и в диапазоне низких температур, а при обычных условиях в средах со сложной структурой (поликристаллические материалы, полимеры, микро- и наноэлектромеханические системы, неоднородные, композиционные материалы), где может распространяться второй звук, при-

вело к построению теорий термоупругости с учетом тепловой памяти. Эти теории строго выводятся в рамках нелинейной термомеханики и не противоречат законам термодинамики. Под памятью здесь понимается учет зависимости текущего состояния материала от предыстории изменения термомеханических величин, причем эта зависимость носит самый общий характер [34, 67, 68].

Большинство известных моделей термоупругости с тепловой памятью основаны на уравнении теплопроводности Гуртина–Пипкина. Авторы статей [86–88] исследовали термонапряженное состояние полупространства с учетом тепловой памяти при различных граничных условиях и разных видах функций релаксации напряжений, теплового потока и энергии.

Фундаментальные решения для анизотропной термоупругой двумерной среды в случае установившихся колебаний. Полная система дифференциальных уравнений связанный термоупругости для анизотропного тела в двумерном случае имеет вид [8, 12, 25, 27, 29]

$$\begin{aligned} \lambda_{ij}\partial_i\partial_j\theta - T_0\beta_{ij}l\partial_iu_j &= c_\epsilon l\dot{\theta} - lw, \\ c_{ijkl}\partial_l\partial_ju_k + X_i &= \rho\ddot{u}_i + \beta_{ij}\partial_j\theta. \end{aligned} \quad (9.393)$$

Здесь c_{ijkl} — декартовы компоненты постоянного тензора упругой жесткости для анизотропного тела, причем $c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk} = c_{klij}$; λ_{ij} — компоненты симметричного тензора теплопроводности; β_{ij} — компоненты тензора тепловых напряжений; T_0 — температура тела в исходном состоянии; $\theta = T - T_0$; c_ϵ — удельная теплоемкость при постоянной деформации (отнесенная к единице объема), w — плотность тепловой мощности внешнего источника, т. е. количество тепла, выделяемого в единицу времени в единице объема; X_i — компоненты объемных сил; $l = 1 + \tau_r \partial/\partial t$; τ_r — время релаксации теплового потока.

Ограничивааясь случаем гармонических изменений вектора смещения и температуры

$$u_j = \operatorname{Re}(U_j e^{-i\omega t}), \quad \theta = \operatorname{Re}(U_3 e^{-i\omega t}) \quad (j=1,2),$$

перепишем систему (9.393) в следующем виде:

$$L_{\alpha\beta}U_\beta = -f_\alpha \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3);$$

$$f_\alpha = \{X_i, l_\omega w\}, \quad l_\omega = 1 - i\omega\tau_r, \quad L_{ik} = c_{ijkl}\partial_l\partial_j + \rho\omega^2\delta_{ik};$$

$$L_{i3} = -\beta_{ik}\partial_k, \quad L_{3k} = T_0\beta_{ik}i\omega l_\omega\partial_i, \quad L_{33} = \lambda_{ik}\partial_{ik} + i\omega l_\omega c_\epsilon \quad (i, k = 1, 2).$$

Фундаментальное решение оператора $L_{\alpha\beta}$ определим равенством

$$L_{\alpha\beta}G_\beta^{(\gamma)} = -\delta(x)\delta_{\alpha\gamma}, \quad x = (x_1, x_2) \quad (\gamma = 1, 2, 3).$$

Здесь $\delta_{\alpha\gamma}$ — символ Кронекера, верхний индекс γ указывает на соответствие величин $G_\beta^{(\gamma)}$ единичным сосредоточенным нагрузкам X_1, X_2 и w .

Для вычисления матрицы $G_\beta^{(\gamma)}$ воспользуемся интегральным преобразованием Фурье в пространстве обобщенных функций медленного роста L' [11]

$$\bar{G}_\beta^{(\gamma)}(\xi, \omega) = \int e^{i(x, \xi)} G_\beta^{(\gamma)}(x, \omega) dx,$$

$$G_{\beta}^{(\gamma)}(x, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{-i(x, \xi)} \bar{G}_{\beta}^{(\gamma)}(\xi, \omega) d\xi. \quad (9.394)$$

Из выражения (9.394) следует, что при преобразовании $F : L' \rightarrow L'$ имеет место замена $\partial_j \rightarrow -i\xi_j$. В результате будем иметь

$$\begin{aligned} \bar{L}_{\alpha\beta} \bar{G}_{\beta}^{(\gamma)} &= -\delta_{\alpha\gamma}; \\ \bar{L}_{ik} &= -c_{ijkl} \xi_j \xi_l + \rho \omega^2 \delta_{ik}; \quad \bar{L}_{i3} = i \beta_{ik} \xi_k, \\ \bar{L}_{3k} &= \omega \Gamma_0 l_{\omega} \beta_{ik} \xi_i, \quad \bar{L}_{33} = -\lambda_{ik} \xi_i \xi_k + i \omega l_{\omega} c_e. \end{aligned} \quad (9.395)$$

С учетом преобразований координат по формулам $\xi_1 = \rho \cos \varphi$; $\xi_2 = \rho \sin \varphi$; $x_1 = r \cos \alpha$; $x_2 = r \sin \alpha$ из (9.395) находим

$$\bar{G}_{\beta}^{(\gamma)} = \frac{\Delta_{\beta}^{(\gamma)}(\xi, \omega)}{\Delta(\xi, \omega)}, \quad (9.396)$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} \rho \omega^2 - c_{1j1l} \xi_j \xi_l & -c_{1j2l} \xi_j \xi_l & i \beta_{1l} \xi_l \\ -c_{1j2l} \xi_j \xi_l & \rho \omega^2 - c_{2j2l} \xi_j \xi_l & i \beta_{2l} \xi_l \\ \omega \Gamma_0 l_{\omega} \beta_{1l} \xi_l & \omega \Gamma_0 l_{\omega} \beta_{12} \xi_l & i \omega l_{\omega} c_e - \lambda_{jl} \xi_j \xi_l \end{vmatrix},$$

а выражения для $\Delta_q^{(m)}$ ($q, m = 1, 2, 3$) получаются заменой в определителе Δ q -го столбца на $(-\delta_{1m}, -\delta_{2m}, -\delta_{3m})$.

Для правильного вычисления фундаментального решения по формулам (9.394) необходимо знать структуру множества решений уравнения $\Delta(\rho) = 0$. Отметим, что это равенство определяет собственные значения тензора $\bar{L}_{\alpha\beta}(\rho)$ и тесно связано с уравнением Кристоффеля [28], задающим скорости плоских волн в анизотропной среде. Анализ уравнения $\Delta(\rho) = 0$ показывает, что оно имеет вещественные и комплексные корни в отличие от анизотропной упругой среды, для которой все собственные значения тензора (волновые числа) являются действительными.

Используя разложение дроби (9.396) на простейшие и переходя в пространство оригиналов, получаем

$$G_k^{(i)}(r, \alpha, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\lambda(\varphi)} \sum_{v=1}^3 A_{vk}^{(i)} \int_0^\infty \frac{\rho \exp[r\rho \cos(\varphi - \alpha)]}{\rho^2 - \rho_v^2(\varphi)} d\rho \quad ((k, i = 1, 2) \vee (k = i = 3)),$$

$$G_{\beta}^{(\gamma)}(r, \alpha, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\lambda(\varphi)} \sum_{v=1}^3 A_{v\beta}^{(\gamma)} \int_0^\infty \frac{\exp[r\rho \cos(\varphi - \alpha)]}{\rho^2 - \rho_v^2(\varphi)} d\rho \quad ((\beta = 3) \vee (\gamma = 3)),$$

где ρ_v^2 — корни характеристического уравнения $\Delta = 0$; $A_{vk}^{(i)} / \lambda(\varphi)$ — коэффициенты в разложении дроби (9.396) на простейшие.

Далее, применяя контурное интегрирование и лемму Жордана [10, 30, 87], получаем формулы для определения компонент матрицы фундаментальных решений

$$G_{\beta}^{(\gamma)} = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{v=1}^3 \int_0^{\pi} \frac{A_{v\beta}^{(\gamma)}}{\lambda(\varphi)} F(\theta_v) d\varphi, \quad (9.397)$$

где

$$F(x) = \frac{i\pi}{2} e^{ix} - \cos x \operatorname{Ci} x - \sin x \operatorname{si} x, \quad \theta_\nu = r \rho_\nu |\cos(\varphi - \alpha)| \quad (\beta, \gamma = 1, 2) \vee (\beta = \gamma = 3), \quad (9.398)$$

$$F(x) = \left(\frac{\pi}{2i\rho_\nu} e^{ix} + i \frac{(\cos x \operatorname{si} x - \sin x \operatorname{Ci} x)}{\rho_\nu} \right) \operatorname{sign}(\cos(\varphi - \alpha)) \quad (\beta = 3) \vee (\gamma = 3). \quad (9.399)$$

Функции $\operatorname{Ci} x$, $\operatorname{si} x$ — интегральные косинус и синус соответственно [35].

Компоненты матрицы (9.398), (9.397) имеют слабую (логарифмическую) особенность, а представления (9.397), (9.399) регулярны.

Гармонические термоупругие колебания анизотропной пластины с отверстием.

Полученная выше матрица фундаментальных решений $G_\beta^{(\gamma)}$ может быть использована при исследовании динамических термоупругих напряжений, возникающих в пластине с отверстием.

В декартовой системе координат Ox_1x_2 рассмотрим анизотропную пластину с полостью, ограниченной замкнутой кривой Γ . На границе отверстия действует заданная гармонически изменяющаяся во времени нагрузка $y_n = \operatorname{Re}(Y_n e^{-i\omega t})$ и тепловой поток $q_n = -\operatorname{Re}(Q e^{-i\omega t})$. Задача заключается в построении эффективных процедур исследования связанных тепловых и механических волновых полей с учетом релаксации теплового потока.

Полная система дифференциальных уравнений, описывающая данную граничную задачу, будет теперь состоять из уравнений (9.393) и граничных условий

$$\begin{aligned} (c_{ijkl} \partial_i u_k - \beta_{ij} \theta) n_j \Big|_\Gamma &= y_{ni}, \\ n_i \lambda_{ij} \partial_j \theta \Big|_\Gamma &= -l q_n. \end{aligned} \quad (9.400)$$

Искомое волновое поле представим в виде сверток

$$U_\beta = \int_\Gamma p_\gamma(\zeta) G_\beta^{(\gamma)}(r, \alpha) ds, \quad (9.401)$$

где $r = |\zeta - z|$, $\alpha = \arg(\zeta - z)$, $z = x_1 + ix_2$, $\zeta = \xi_1 + i\xi_2 \in \Gamma$, $p_\gamma(\zeta)$ — неизвестные функции, подлежащие определению на контуре Γ , ds — элемент длины дуги Γ .

Можно показать, что сингулярные слагаемые, фигурирующие в (9.397), отвечают статическому случаю ($\omega = 0$). Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_\beta^{(\gamma)}(\xi, \omega)}{\Delta(\xi, \omega)} - \frac{\Delta_\beta^{(\gamma)}(\xi, 0)}{\Delta(\xi, 0)} &= \frac{1}{\lambda(\phi)} \sum_{\nu=1}^3 A_{\nu\beta}^{(\gamma)} \left(\frac{1}{\rho^2 - \rho_\nu^2} - \frac{1}{\rho^2} \right), \\ \tilde{G}_\beta^{(\gamma)} &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\nu=1}^\infty \sum_{\nu=1}^\pi \frac{A_{\nu\beta}^{(\gamma)}}{\lambda(\phi)} \left\{ \frac{\rho \exp[r\rho \cos(\phi - \alpha)]}{\rho^2 - \rho_\nu^2} - \frac{\exp[r\rho \cos(\phi - \alpha)]}{\rho} \right\} d\phi d\rho = \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\nu=1}^3 \sum_{\nu=1}^\pi \frac{A_{\nu\beta}^{(\gamma)}}{\lambda(\phi)} \{ F(\theta_\nu) + \ln(r|\cos(\phi - \alpha)|) + C \} d\phi. \end{aligned} \quad (9.402)$$

Соотношением (9.402) описывается регулярная часть фундаментального решения. Здесь C — постоянная Эйлера [10], а функция F вычисляется по формуле (9.398). Вычислим теперь производные функции $\tilde{G}_{\beta}^{(\gamma)}$. Имеем

$$\tilde{G}_{\beta,j}^{(\gamma)} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \sum_{\nu=1}^3 \frac{A_{\nu\beta}^{(\gamma)}}{\lambda(\varphi)} \{F_*(\theta_\nu)\rho_\nu(\varphi) \cdot \text{sign}[-\cos(\varphi-\alpha)n_j]\} d\varphi,$$

$$F_*(x) = -\frac{\pi}{2} e^{ix} + \sin x \operatorname{Ci} x - \cos x \operatorname{si} x, \quad n_1 = \cos \varphi, \quad n_2 = \sin \varphi. \quad (9.403)$$

При $z \rightarrow \zeta$ $F_* \rightarrow 0$, следовательно, функции $\tilde{G}_{\beta,j}^{(\gamma)}$ не имеют особенностей на Γ .

Таким образом, сингулярная часть выражения $G_{\beta,j}^{(\gamma)}$ (которую ниже обозначим через $\hat{G}_{\beta,j}^{(\gamma)}$) может быть найдена из соответствующей статической несвязанной задачи, например с помощью функций напряжений для анизотропной среды [27].

Пусть в точке $x_0 = (0,0)$ имеет место сосредоточенное воздействие $\{P_1, P_2, w\}$, где P_1, P_2 — компоненты механического усилия, а w — плотность тепловых источников. Решение несвязанной задачи термоупругости заключается в определении температурного поля от источника из уравнения теплопроводности и нахождения фундаментального решения статической задачи теории упругости для плоского напряженного состояния.

1. Уравнение теплопроводности ($w=1$)

$$(\lambda_{11}\partial_1^2 + 2\lambda_{12}\partial_1\partial_2 + \lambda_{22}\partial_2^2)U_3^0 = -\delta(x), \quad (9.404)$$

где U_3^0 — стационарное температурное поле.

Введем невырожденное линейное преобразование

$$y = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_{12}/\lambda_{22} \\ 0 & \sqrt{\lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}^2}/\lambda_{22} \end{pmatrix}. \quad (9.405)$$

С учетом (9.403) уравнение (9.404) будет иметь вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) U_3^0 = -\frac{\delta(y)}{\sqrt{\lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}^2}}.$$

Интегрирование этого уравнения в пространстве обобщенных функций дает

$$U_3^0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{\lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}^2}} \ln|y|.$$

2. В статической задаче о плоском напряженном состоянии анизотропной среды вектор перемещения и тензор напряжения выражаются через аналитические функции своих комплексных переменных по формулам [31]

$$\Phi = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 f_k(x_1 + \mu_k x_2), \quad \operatorname{Im} \mu_k > 0,$$

$$\{\sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{11}\} = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left\{ 1; -\mu_k; \mu_k^2 \right\} f_k''(x_1 + \mu_k x_2), \quad (9.406)$$

$$\{U_1, U_2\} = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \{p_k, q_k\} f_k'(x_1 + \mu_k x_2),$$

$$p_k = s_{11}\mu_k^2 + s_{12} - s_{16}\mu_k; \quad q_k = s_{12}\mu_k + \frac{s_{22}}{\mu_k} - s_{26} \quad (k=1,2),$$

где характеристические числа μ_k являются корнями алгебраического уравнения.

$$s_{22}\mu^4 - 2s_{26}\mu^3 + (2s_{12} + s_{66})\mu^2 - 2s_{16}\mu + s_{11} = 0.$$

Положим $f_k'(x_1 + \mu_k x_2) = A_k \ln(x_1 + \mu_k x_2)$. Коэффициенты A_k определяются из условий однозначности перемещений и статических условий

$$-4\pi \operatorname{Im} \left\{ \sum_{k=1}^2 p_k A_k \right\} = 0,$$

$$-4\pi \operatorname{Im} \left\{ \sum_{k=1}^2 q_k A_k \right\} = 0,$$

$$\operatorname{Im} \left\{ \sum_{k=1}^2 \mu_k A_k \right\} = \frac{P_1}{4\pi},$$

$$\operatorname{Im} \left\{ \sum_{k=1}^2 A_k \right\} = -\frac{P_2}{4\pi}; \quad P_1 = P_2 = 1. \quad (9.407)$$

Определитель системы (9.407) является определителем Вандермонда, поэтому она однозначно разрешима.

Окончательно получаем

$$\hat{G}_{\beta,j}^{(\gamma)} = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \frac{Q_{k\beta}^{(\gamma)} m_{kj}}{\zeta_k - z_k}; \quad m_{k1} = 1, m_{k2} = \mu_k, z_k = x_1 + \mu_k x_2, \quad (9.408)$$

где $Q_{k1}^{(\gamma)} = p_k A_k^{(\gamma)}$, $Q_{k2}^{(\gamma)} = q_k A_k^{(\gamma)}$, $Q_{33}^{(3)} = r_3$ (здесь нет суммирования по повторяющемуся индексу);

$$p_k = c_{11}\mu_k^2 + c_{12} - c_{16}\mu_k, \quad q_k = c_{12}\mu_k + c_{22}/\mu_k - c_{26} \quad (k, \gamma = 1, 2);$$

$$r_3 = 1/4\pi \sqrt{\lambda_{11}\lambda_{12} - \lambda_{12}^2}.$$

Подставляя в (9.400) граничные значения соответствующих комбинаций (9.401), (9.403) с учетом (9.408) приходим к разрешающей системе сингулярных интегральных уравнений

$$E(\zeta_0) p(\zeta_0) + \int_{\Gamma} p(\zeta) K(r_0, \alpha_0, s) dg = f(\zeta_0), \quad (9.409)$$

$$K = R + S, \quad S = \|S_{\beta\gamma}\|_{3 \times 3}, \quad S_{kp} = 2 \operatorname{Re} \sum_{\nu=1}^2 \frac{M_{\nu}^{(kp)}}{\zeta_{\nu} - z_{\nu}}, \quad M_{\nu}^{(kp)} = (c_{kj1q} n_j Q_{\nu 1}^{(p)} + c_{kj2q} n_j Q_{\nu 2}^{(p)}) (\mu_{\nu})^{q-1},$$

$$S_{k3} = S_{3k} = 0, \quad S_{33} = 2 \operatorname{Re} \frac{N_3}{\zeta_3 - z_3}, \quad N_3 = \lambda_{jq} n_j Q_{33}^{(3)} (\mu_3)^{q-1},$$

$$R = \|R_{\beta\gamma}\|_{3 \times 3}, \quad (2\pi)^2 R_{3k} = \lambda_{jq} n_j \int_0^{2\pi} \frac{1}{\lambda(\phi)} \sum_{v=1}^3 i m_q A_{vk}^{(3)} \Phi(\theta_v) d\phi,$$

$$(2\pi)^2 R_{kp} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\lambda(\phi)} \sum_{v=1}^3 (c_{kj1q} A_{v1}^{(p)} + c_{kj2q} A_{v2}^{(p)}) n_j m_q F(\theta_v) d\phi - \beta_{kj} n_j \int_0^{2\pi} \frac{1}{\lambda(\phi)} \sum_{v=1}^3 A_{v3}^{(p)} \Psi(\Phi_v) d\phi,$$

$$(2\pi)^2 R_{k3} = \sum_{v=1}^3 \int_0^{2\pi} \frac{1}{\lambda(\phi)} (c_{kj1q} n_j i m_q A_{v1}^{(3)} + c_{kj2q} n_j i m_q A_{v2}^{(3)} - \beta_{kj} n_j A_{v3}^{(3)}) \Phi(\theta_v) d\phi,$$

$$(2\pi)^2 R_{33} = \lambda_{jq} n_j \int_0^{2\pi} \frac{1}{\lambda(\phi)} \sum_{v=1}^3 A_{v3}^{(3)} m_q F(\theta_v) d\phi, \quad b_v(n) = n_i \mu_v - n_2,$$

где n_0 — нормаль в точке ζ_0 .

$$F(\theta_v) = \eta_v \left(\frac{\pi}{2} e^{i\theta_v} + \sin \theta_v \cos \theta_v - \operatorname{Ci} \theta_v \sin \theta_v \right) \operatorname{sign}(\cos(\varphi - \alpha)), \quad m_1 = \cos \varphi, \quad m_2 = \sin \varphi,$$

$$E_{kp}(\zeta_0) = 2\pi \operatorname{Im} \sum_{v=1}^2 \frac{M_v^{(kp)}}{b_v(n_0)}, \quad E_{3k} = E_{k3} = 0, \quad E_{33}(\zeta_0) = 2\pi \operatorname{Im} \left(\frac{N_3}{b_3(n_0)} \right), \quad \zeta - \zeta_0 = r_0 e^{i\alpha_0}$$

$$(k, p = 1, 2),$$

$$f = (f_1, f_2, -l_\omega Q), \quad f_k = Y_{nk}.$$

Результаты расчетов. В качестве примера рассмотрим пластину с отверстием из стеклопластика СТЭТ. Упругие характеристики этого материала приведены в [31]. Отверстие имеет форму эллипса с полуосами 1 см и 1,5 см. На контуре отверстия задана нагрузка, направленная по нормали \vec{n} к контуру в виде $Y_n = 1H/m^2$. На рис. 9.48 приведены зависимости окружного нормального напряжения на контуре с учетом связности полей деформаций и температуры (сплошная линия) и без учета влияния температурного поля (пунктирная линия). Очевидно, что в статике решения задач совпадают, так как статические механические нагрузки не могут вызвать изменение температуры.

На рис. 9.49 приведено изменение во времени окружного напряжения (связанная термоупругость) при условии, что на границе действует импульсный тепловой поток единичной мощности

$$q_n = H(t) - H(t - l_0),$$

где $H(t)$ — единичная функция Хевисайда, l_0 — длина импульса.

По характеру графиков функций можно заключить, что релаксация теплового потока даже при наличии только механической нагрузки оказывает влияние на напряжения, возникающие на контуре, а именно: нивелируется эффект термоупругого рассеивания.

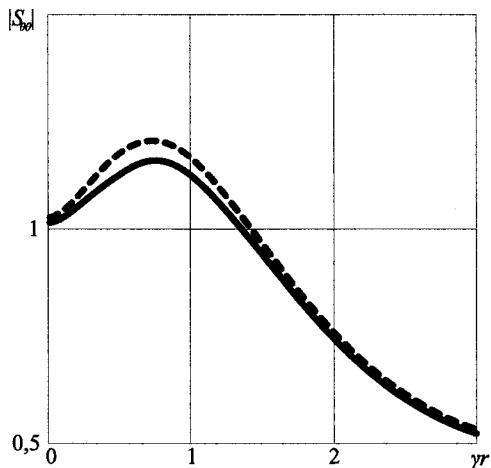


Рис. 9.48. Изменение величины $|S_{\theta\theta}|$ в зависимости от относительного волнового числа γr для пластины из стеклопластика с эллиптическим отверстием

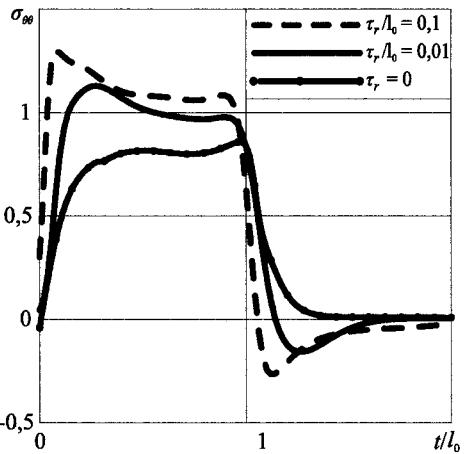


Рис. 9.49. Изменение величины $\sigma_{\theta\theta}$ в зависимости от времени t при действии импульсного теплового потока

9.10. Пространственная задача связанный термоупругости

Основная система уравнений связанный термоупругости после исключения из нее временного множителя $e^{-i\omega t}$ приобретает вид:

$$\begin{aligned} \Delta U_j + \sigma \partial_j e - \frac{3\lambda + 2\mu}{\mu} \alpha_T \partial_j U_4 + \gamma_2^2 U_j + \frac{1}{\mu} X_j^* &= 0 \quad (j = 1, 2, 3), \\ \Delta U_4 + (\gamma_T^2 + i\gamma^2) U_4 + m\omega(i + \tau^* \omega) e + \frac{Q^*}{\lambda_T} (1 - i\omega\tau^*) &= 0, \\ \gamma_T^2 = \frac{\omega^2}{V_T^2}, \quad \gamma^2 = \frac{\omega}{a^2}, \quad \gamma_2^2 = \frac{\omega^2}{V_2^2}, \quad m = \sigma E T_0 \frac{\alpha_T}{\lambda_T}, & \\ a^2 = \frac{\lambda_T}{\rho c_e}, \quad \sigma = \frac{1}{1 - 2\nu}, \quad \partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \Delta = \partial_j \partial_j, & \\ e = \partial_k U_k, \quad k = 1, 2, 3... & \end{aligned} \quad (9.410)$$

Здесь U_j ($j = 1, 2, 3$), U_4 , X_j^* и Q^* — амплитуды перемещений u_j , температуры $\theta = T - T_0$, интенсивностей объемных сил F_j и тепловых источников Q соответственно; E, ν, ρ — модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность материала, α_T, λ_T, c_e — коэффициенты линейного расширения, теплопроводности и теплоемкость материала; V_T и V_2 — скорости распространения тепловых и механических сдвиговых возбуждений; T_0 — темпе-

ратура тела в начальном невозбужденном состоянии, τ^* — время релаксации теплового потока, ω — круговая частота.

Амплитуды тензора напряжения определяются следующими соотношениями [25]:

$$S_{ij} = \mu(\partial_i U_j + \partial_j U_i) + [\lambda e - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T U_4] \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (9.411)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

Ф-решения связанный термоупругости для слоя в R^3 (кососимметричный случай). В данном разделе с помощью процедуры [58–61] построена матрица Ф-решений, соответствующая кососимметричному термоупругому состоянию шарнирно опертого слоя с теплоизолированными основаниями.

В системе прямоугольных декартовых координат $0x_1x_2x_3$ рассмотрим слой $-\infty < x_1, x_2 < \infty, |x_3| \leq h$, на основаниях которого заданы граничные условия смешанного типа. Пусть внутри слоя вдоль отрезка $x_1 = x_{10}, x_2 = x_{20}, |x_3| \leq h$ распределены усилия $Y_j = \operatorname{Re}(e^{-i\omega t} X_j)$ или тепловые источники $q = \operatorname{Re}(e^{-i\omega t} Q)$.

Рассмотрим кососимметричное относительно срединной плоскости слоя термоупругое состояние. В соответствии с видом однородных решений [70–72] компоненты вектора перемещения и температуры представим в виде рядов Фурье по координате x_3 :

$$\begin{aligned} \{U_1, U_2, U_4\} &= \sum_{n=0}^{\infty} \{U_{1n}, U_{2n}, U_{4n}\} \sin(\lambda_n x_3), \\ U_3 &= \sum_{n=1}^{\infty} U_{3n} \cos(\lambda_n x_3), \quad \lambda_n = \frac{\pi(1+2n)}{2h}, \\ e &= \sum_{n=0}^{\infty} e_n \sin(\lambda_n x_3), \quad e_n = \partial_1 U_{1n} + \partial_2 U_{2n} - \lambda_n U_{3n}. \end{aligned}$$

Предположим, что для функций X_1, X_2, X_3, Q имеют место соответствующие разложения

$$\begin{aligned} \{X_1, X_2, Q\} &= \sum_{n=0}^{\infty} \{P_{1n}, P_{2n}, P_{4n}\} \sin(\lambda_n x_3), \\ X_3 &= \sum_{n=1}^{\infty} P_{3n} \cos(\lambda_n x_3). \end{aligned}$$

Исключая из системы соотношений связанный термоупругости (9.410) время и толщинную координату x_3 , получаем систему дифференциальных уравнений относительно коэффициентов Фурье полевых величин

$$\begin{aligned} (\Delta^2 + \mu_n^2) U_{kn} + \partial_k \left(\partial e_n - \frac{3\lambda + 2\mu}{\mu} \alpha_T U_{4n} \right) + \frac{P_{kn}}{\mu} \delta(x) &= 0 \quad (k = 1, 2, 3), \\ (\Delta^2 + d_n^2) U_{4n} + \omega n^* e_n + \frac{P_{4n}}{\lambda_T} (1 - i\omega \tau^*) \delta(x) &= 0, \quad x = (x_1, x_2) \in R^2, \\ \partial_3 &= -\lambda_n, \quad d_n^2 = \gamma_T^2 + i\gamma^2 - \lambda_n^2, \end{aligned} \quad (9.412)$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака.

После стандартных преобразований получим из (9.412) систему из двух уравнений относительно неизвестных U_{4n} и e_n :

$$\begin{aligned} l_{11}e_n - l_{12}U_{4n} &= -\frac{p_{1n}\partial_1 + p_{2n}\partial_2 - p_{3n}\lambda_n}{\mu(\sigma+1)}\delta(x), \\ l_{21}e_n + l_{22}U_{4n} &= -\frac{P_{4n}}{\lambda_T}(1-i\omega\tau^*)\delta(x), \\ l_{11} &= \Delta + \gamma_1^2 - \lambda_n^2, \quad l_{12} = \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_T(\Delta^2 - \lambda_n^2), \\ l_{21} &= \omega m^*, \quad l_{22} = \Delta + d_n^2. \end{aligned} \quad (9.413)$$

Дальнейшие выкладки целесообразно провести отдельно для каждого из четырех вариантов возбуждения. Остановимся более подробно на первом варианте $X_1 \neq 0$, $X_2 = X_3 = Q = 0$, а для всех остальных случаев приведем только лишь окончательные результаты.

Введем в рассмотрение функции $\Phi_n^{(1)}$ по формулам $e_n = l_{22}\Phi_n^{(1)}$, $U_{4n} = -l_{21}\Phi_n^{(1)}$. Тогда второе уравнение системы (9.413) удовлетворится тождественно, а первое сводится к такому:

$$\begin{aligned} (\Delta\Delta + A_n\Delta + B_n)\Phi_n^{(1)} &= -\frac{p_{1n}}{\mu(\sigma+1)}\partial_1\delta(x), \\ A_n &= \gamma_T^2 - \lambda_n^2 + d_n^2 + \frac{1+\nu}{1-\nu}\omega\alpha_T m^*, \\ B_n &= (\gamma_1^2 - \lambda_n^2)d_n^2 - \frac{1+\nu}{1-\nu}\lambda_n^2\omega\alpha_T m^*. \end{aligned} \quad (9.414)$$

Интегрирование уравнения (9.414) в классе обобщенных функций D' дает

$$\begin{aligned} \Phi_n^{(1)} &= \frac{p_{1n}\alpha_n}{4i\mu} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \partial_1 H_0^{(1)}(\mu_{jn}r), \\ \alpha_n &= \frac{1}{(\sigma+1)(\mu_{1n}^2 - \mu_{2n}^2)}, \\ z &= x_1 + ix_2, \quad z_0 = x_{10} + ix_{20}, \quad r = |z - z_0|, \end{aligned}$$

где $H_p^{(1)}(x)$ — функция Ганкеля первого рода порядка p ; μ_{1n}, μ_{2n} — корни характеристического биквадратного уравнения

$$Z_n^4 - A_n Z_n^2 + B_n = 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

Причем отбираются корни только с положительными мнимыми частями, благодаря чему обеспечивается затухание термоупругих волн на бесконечности. Окончательно получим

$$\begin{aligned} e_n^{(1)} &= l_{22}\Phi_n^{(1)} = \frac{p_{1n}\alpha_n}{4i\mu} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} (d_n^2 - \mu_{jn}^2) \partial_1 H_0^{(1)}(\mu_{jn}r), \\ U_{4n}^{(1)} &= -\omega m^* \Phi_n^{(1)}. \end{aligned} \quad (9.415)$$

При помощи этих соотношений система (9.412) сводится к трем независимым уравнениям вида

$$\begin{aligned} (\Delta + \mu_n^2)U_{kn} &= -\frac{p_{kn}\alpha_n}{4i\mu} \sigma \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \rho_{jn} \partial_1 \partial_k H_0^{(1)}(\mu_{jn}r) - \frac{p_{ln}}{\mu} \delta(x) \delta_{k1}, \quad k = 1, 2, 3, \\ \rho_{jn} &= d_n^2 - \mu_{jn}^2 + 2(1+\nu)\alpha_T \omega m^*, \quad \partial_3 = -\lambda_n. \end{aligned}$$

Здесь δ_{k1} — символ Кронекера.

После интегрирования этой системы получим

$$\begin{aligned} U_{kn}^{(1)} &= \frac{ip_{ln}}{4\mu} \delta_{k1} H_0^{(1)}(\mu_n r) - \frac{p_{ln}\alpha_n\sigma}{4i\mu} \sum_{j=0}^2 (-1)^{j-1} B_{jn} \partial_1 \partial_k H_0^{(1)}(\mu_{jn}r), \quad \partial_3 = -\lambda_n, \quad (9.416) \\ B_{on} &= \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \frac{\rho_{jn}}{\mu_n^2 - \mu_{jn}^2}, \quad B_{jn} = \frac{\rho_{jn}}{\mu_n^2 - \mu_{jn}^2}, \\ \mu_{0n} &= \mu_n, \quad j = 1, 2; \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

При этом комбинация $e_n = \partial_1 U_{1n} + \partial_2 U_{2n} - \lambda_n U_{3n}$ удовлетворяется тождественно. Таким образом, формулы (9.415), (9.416) полностью определяют решение системы (9.412) для данного варианта возбуждения слоя. Произведя аналогичные преобразования для остальных случаев, запишем окончательную сводку результатов.

1. $X_1 \neq 0, X_2 = X_3 = Q = 0$.

$$\begin{aligned} U_{kn}^{(1)} &= \frac{p_{kn}}{4i\mu} g_{kn}^{(1)} \quad (k = 1, 2, 3, 4; \quad n = 0, 1, \dots), \\ g_{1n}^{(1)} &= -H_0^{(1)}(\mu_n r) + \sigma \alpha_n \sum_{j=0}^2 (-1)^j B_{jn} \partial_1^2 H_0^{(1)}(\mu_{jn}r), \\ g_{2n}^{(1)} &= \sigma \alpha_n \sum_{j=0}^2 (-1)^j B_{jn} \partial_1 \partial_2 H_0^{(1)}(\mu_{jn}r), \\ g_{3n}^{(1)} &= \sigma \alpha_n \lambda_n \sum_{j=0}^2 (-1)^j B_{jn} \partial_1 H_0^{(1)}(\mu_{jn}r), \\ g_{4n}^{(1)} &= -\omega \alpha_n m^* \partial_1 H_n(r), \\ H_n(r) &= H_0^{(1)}(\mu_{1n}r) - H_0^{(1)}(\mu_{2n}r); \end{aligned}$$

2. $X_2 \neq 0, X_1 = X_3 = Q = 0$.

$$\begin{aligned} U_{kn}^{(2)} &= \frac{p_{2n}}{4i\mu} g_{kn}^{(2)}, \\ g_{2n}^{(2)} &= -H_0^{(1)}(\mu_n r) + \sigma \alpha_n \sum_{j=0}^2 (-1)^j B_{jn} \partial_2^2 H_0^{(1)}(\mu_{jn}r), \\ g_{3n}^{(2)} &= \sigma \alpha_n \lambda_n \sum_{j=0}^2 (-1)^j B_{jn} \partial_2 H_0^{(1)}(\mu_{jn}r), \\ g_{1n}^{(2)} &= g_{2n}^{(1)}, \quad g_{4n}^{(2)} = -\omega \alpha_n m^* \partial_2 H_n(r); \end{aligned}$$

3. $X_3 \neq 0$, $X_1 = X_2 = Q = 0$.

$$U_{kn}^{(3)} = \frac{P_{3n}}{4i\mu} g_{kn}^{(3)},$$

$$g_{1n}^{(3)} = -g_{3n}^{(1)}, \quad g_{2n}^{(3)} = -g_{3n}^{(2)},$$

$$g_{3n}^{(3)} = -H_0^{(1)}(\mu_n r) - \alpha_n \lambda_n^2 \sigma \sum_{j=0}^2 (-1)^j B_{jn} H_0^{(1)}(\mu_{jn} r),$$

$$g_{4n}^{(3)} = \alpha_n \lambda_n \omega m^* H_n(r);$$

4. $Q \neq 0$, $X_1 = X_2 = X_3 = 0$.

$$U_{kn}^{(4)} = \frac{P_{4n}}{4i\mu} g_{kn}^{(4)},$$

$$g_{1n}^{(4)} = \sigma \beta_n \alpha_T \mu (1 + \nu) \sum_{j=1}^2 (-1)^j C_{jn} \partial_1 H_0^{(1)}(\mu_{jn} r),$$

$$g_{2n}^{(4)} = \sigma \beta_n \alpha_T \mu (1 + \nu) \sum_{j=1}^2 (-1)^j C_{jn} \partial_2 H_0^{(1)}(\mu_{jn} r),$$

$$g_{3n}^{(4)} = \sigma \beta_n \alpha_T \mu \lambda_n (1 + \nu) \sum_{j=1}^2 (-1)^j C_{jn} H_0^{(1)}(\mu_{jn} r),$$

$$g_{4n}^{(4)} = \beta_n \mu \sum_{j=1}^2 (-1)^j (\gamma_1^2 - \mu_{jn}^2 - \lambda_n^2) H_0^{(1)}(\mu_{jn} r),$$

$$\beta_n = \frac{i\omega\tau^* - 1}{\lambda_r (\mu_{1n}^2 - \mu_{2n}^2)}, \quad C_{jn} = \frac{\delta_{jn}}{\mu_n^2 - \mu_{jn}^2},$$

$$\delta_{jn} = \frac{\mu_{jn}^2 + \lambda_n^2}{1 - \nu} - 2(\mu_{jn}^2 + \lambda_n^2 - \gamma_1^2).$$

Полученную матрицу $\|g_{kn}^{(m)}\|$ ($m = 1, 2, 3, 4$) будем называть матрицей Ф-решений для слоя.

Внешние и внутренние граничные задачи связанный термоупругости в R^3 для слоя. Ниже рассмотрено кососимметричное термоупругое состояние изотропного слоя, ослабленного туннельной вдоль толщиной координаты полостью. Основания слоя шарнирно закреплены, а на поверхности полости выполняется условие теплообмена с окружающей средой по закону Ньютона. Интегральные представления полевых величин построены на основании матрицы Ф-решений. В результате при помощи операции предельного перехода граничная задача термоупругости сведена к системе одномерных сингулярных интегральных уравнений, которая решена численно на основе метода механических квадратур.

Рассмотрим слой $-\infty < x_1, x_2 < \infty$, $|x_3| \leq h$, ослабленный туннельной вдоль оси Ox_3 полостью, поперечное сечение которой представляет собой достаточно гладкий замкнутый контур Γ (рис. 9.50).

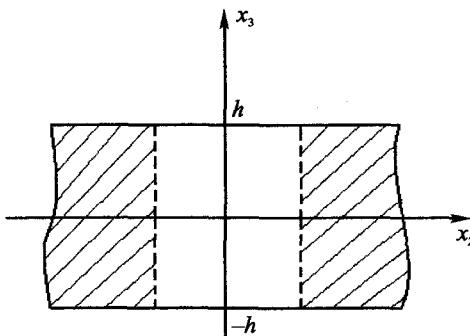


Рис. 9.50. Слой, ослабленный туннельной полостью

Исходная система соотношений связанный термоупругости с учетом конечной скорости распространения тепла имеет вид (9.410), на основаниях слоя заданы граничные условия вида

$$u_3 = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x_3} = 0.$$

Компоненты вектора перемещения и температуры в слое представим в виде рядов Фурье по координате x_3 :

$$\begin{aligned} \{U_1, U_2, U_4\} &= \sum_{n=0}^{\infty} \{U_{1n}, U_{2n}, U_{4n}\} \sin(\lambda_n x_3), \quad U_3 = \sum_{n=0}^{\infty} U_{3n} \cos(\lambda_n x_3), \\ e &= \sum_{n=0}^{\infty} e_n \sin(\lambda_n x_3), \quad e_n = \partial_1 U_{1n} + \partial_2 U_{2n} - \lambda_n U_{3n}, \\ T^e - T_0 &= \operatorname{Re} \{e^{-i\omega t} U^e\}, \quad U^e = \sum_{n=0}^{\infty} U_n^e \sin(\lambda_n x_3), \end{aligned} \quad (9.417)$$

где T^e — температура внешней среды.

Пусть на поверхности полости S заданы нормальная и касательная компоненты вектора напряжений, а тепловой поток удовлетворяет условию теплообмена с окружающей средой по закону Ньютона. Составим граничные условия на полости S . Для гармонических колебаний слоя запишем

$$\sigma_{ij} = \operatorname{Re} [e^{-i\omega t} S_{ij}],$$

здесь

$$S_{ij} = \mu (\partial_i U_j + \partial_j U_i) + [\lambda \partial_i U_i - 2\mu(1+\nu) \sigma \alpha_T U_4] \delta_{ij},$$

причем на основании (9.411) получаем

$$S_{11} = \sum_{n=0}^{\infty} S_{11}^{(n)} \sin(\lambda_n x_3), \quad S_{11}^{(n)} = 2\mu (\partial_1 U_{1n} + \nu \sigma e_n^* - (1+\nu) \sigma \alpha_T U_{4n}),$$

$$S_{22} = \sum_{n=0}^{\infty} S_{22}^{(n)} \sin(\lambda_n x_3), \quad S_{22}^{(n)} = 2\mu (\partial_2 U_{2n} + \nu \sigma e_n^* - (1+\nu) \sigma \alpha_T U_{4n}),$$

$$\begin{aligned}
 S_{33} &= \sum_{n=0}^{\infty} S_{33}^{(n)} \sin(\lambda_n x_3), & S_{33}^{(n)} &= 2\mu(-\lambda_n U_{3n} + \nu \sigma e_n^* - (1+\nu) \sigma \alpha_T U_{4n}), \\
 S_{23} &= \sum_{n=0}^{\infty} S_{23}^{(n)} \cos(\lambda_n x_3), & S_{23}^{(n)} &= \mu(\partial_2 U_{3n} + \lambda_n U_{2n}), \\
 S_{13} &= \sum_{n=0}^{\infty} S_{13}^{(n)} \cos(\lambda_n x_3), & S_{13}^{(n)} &= \mu(\partial_1 U_{3n} + \lambda_n U_{1n}), \\
 S_{12} &= \sum_{n=0}^{\infty} S_{12}^{(n)} \sin(\lambda_n x_3), & S_{12}^{(n)} &= \mu(\partial_1 U_{2n} + \partial_2 U_{1n}).
 \end{aligned}$$

Механические граничные условия на Γ представим в комплексной форме

$$\begin{aligned}
 S_1^{(n)} - e^{2i\psi} S_2^{(n)} &= 2(N^{(n)} - iT^{(n)}), \\
 S_1^{(n)} - e^{-2i\psi} \tilde{S}_2^{(n)} &= 2(N^{(n)} + iT^{(n)}), \\
 S_3^{(n)} e^{i\psi} + \tilde{S}_3^{(n)} e^{-i\psi} &= 2Z^{(n)},
 \end{aligned} \tag{9.418}$$

где

$$\begin{aligned}
 S_1^{(n)} &= S_{11}^{(n)} + S_{22}^{(n)}, & S_2^{(n)} &= S_{22}^{(n)} - S_{11}^{(n)} + 2iS_{12}^{(n)}, & \tilde{S}_2^{(n)} &= S_{22}^{(n)} - S_{11}^{(n)} - 2iS_{12}^{(n)}, \\
 S_3^{(n)} &= S_{13}^{(n)} - iS_{23}^{(n)}, & \tilde{S}_3^{(n)} &= S_{13}^{(n)} + iS_{23}^{(n)}.
 \end{aligned}$$

В этих формулах ψ — угол между внешней нормалью к контуру Γ в точке ζ и осью $0x_1$ (рис. 9.51).

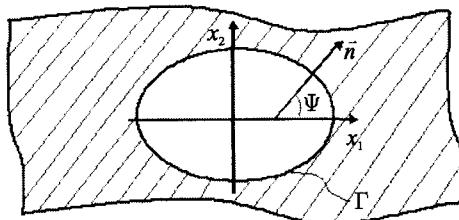


Рис. 9.51. Поперечное сечение слоя с полостью

Тепловое граничное условие на поверхности полости S

$$\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_S = -h^* (T - T^e) \Big|_S$$

приобретает вид

$$\left[\frac{\partial U_4}{\partial n} + h^* (U_4 - U^e) \right]_S = 0,$$

где

$$T^e - T_0 = \operatorname{Re} [e^{-i\omega t} U^e], \quad T - T_0 = \Theta = \operatorname{Re} [e^{-i\omega t} U_4], \quad U^e = \sum_{n=0}^{\infty} U_n^e \sin(\lambda_n x_3).$$

Следовательно, для коэффициентов Фурье получаем

$$\left[\frac{\partial U_{4n}}{\partial n} + h^* (U_{4n} - U_n^e) \right]_{\Gamma} = 0. \quad (9.419)$$

Здесь h^* — относительный коэффициент теплообмена.

Интегральные представления решений. Интегральные уравнения граничной задачи (9.418), (9.419). Интегральные представления запишем в виде

$$U_{kn}(z) = \int_{\Gamma} \sum_{m=1}^4 Z_m^{(n)}(\zeta) g_{km}^{(m)}(\zeta, z) ds, \quad \zeta_0 \in \Gamma \quad (k = \overline{1, 4}; \quad n = 0, 1, \dots), \quad (9.420)$$

$$z = x_1 + ix_2,$$

где $g_{km}^{(m)}$ — матрица Φ -решений, $Z_m^{(n)}(\zeta) \in \text{Lip}_{\alpha} \Gamma$ — искомые плотности на контуре по-перечного сечения полости Γ , ds — элемент дуги контура Γ .

Вводя предельные значения представлений (9.420) в граничные условия (9.418)–(9.419), приходим к системе четырех сингулярных интегральных уравнений второго рода относительно неизвестных плотностей $Z_m^{(n)}(\zeta)$ ($m = 1, 2, 3, 4$) при каждом фиксированном h

$$\pm 4iW_p^{(n)}(\zeta_0) + \int_{\Gamma} \sum_{m=1}^4 W_m^{(n)}(\zeta) K_{pm}^{(n)}(\zeta, \zeta_0) ds = F_p^{(n)}(\zeta_0), \quad \zeta_0 \in \Gamma \quad (p = \overline{1, 4}), \quad (9.421)$$

где

$$Z_1^{(n)} = W_1^{(n)} e^{i\psi} + W_2^{(n)} e^{-i\psi}, \quad Z_2^{(n)} = -i(W_1^{(n)} e^{i\psi} - W_2^{(n)} e^{-i\psi}), \quad Z_3^{(n)} = W_3^{(n)}, \quad Z_4^{(n)} = \frac{1}{\mu \alpha_T} W_4^{(n)},$$

$$F_1^{(n)}(\zeta_0) = \frac{1}{\mu} (N^{(n)} + iT^{(n)}), \quad F_2^{(n)}(\zeta_0) = \frac{1}{\mu} (N^{(n)} - iT^{(n)}),$$

$$F_3^{(n)}(\zeta_0) = \frac{2}{\mu} Y_3^{(n)}, \quad F_4^{(n)}(\zeta_0) = \frac{2\alpha_T \lambda_T}{1 - i\omega \tau^*} h^* U_n^e,$$

$$K_{11}^{(n)} = -e^{i(\psi - \alpha_0)} \left[\frac{\mu_n \lambda_n^2}{\gamma_2^2} H_1^{(1)}(\mu_n r_0) + \sum_{j=1}^2 (-1)^j \{ \sigma^2 \alpha_n B_{jn} (\mu_{jn}^2 + 2\nu \lambda_n^2) + \sigma \beta_n^* \} \mu_{jn} H_1^{(1)}(\mu_{jn} r_0) \right] - \\ - e^{i(\psi - 2\psi_0 + \alpha_0)} \left[\left(1 + \frac{\lambda_n^2}{\gamma_2^2} \right) \mu_n H_1^{(1)}(\mu_n r_0) + \sigma \alpha_n \sum_{j=1}^2 (-1)^j B_{jn} \mu_{jn}^3 H_1^{(1)}(\mu_{jn} r_0) \right],$$

$$K_{12}^{(n)} = -e^{i(\alpha_0 - \psi)} \left[\frac{\mu_n \lambda_n^2}{\gamma_2^2} H_1^{(1)}(\mu_n r_0) + \sum_{j=1}^2 (-1)^j \{ \sigma^2 \alpha_n B_{jn} (\mu_{jn}^2 + 2\nu \lambda_n^2) + \sigma \beta_n^* \} \mu_{jn} H_1^{(1)}(\mu_{jn} r_0) \right] + \\ + e^{i(3\alpha_0 - \psi - 2\psi_0)} \sigma \alpha_n \sum_{j=0}^2 (-1)^j B_{jn} \mu_{jn}^3 H_3^{(1)}(\mu_{jn} r_0),$$

$$K_{13}^{(n)} = -\frac{\mu_n^2 \lambda_n}{\gamma_2^2} H_0^{(1)}(\mu_n r_0) + \sum_{j=1}^2 (-1)^j \{ \sigma \alpha_n \lambda_n (\mu_{jn}^2 + 2\nu \lambda_n^2) B_{jn} + \lambda_n \beta_n^* \} \sigma H_0^{(1)}(\mu_{jn} r_0) + \\ + e^{2i(\alpha_0 - \psi_0)} \sigma \alpha_n \lambda_n \sum_{j=0}^2 (-1)^j B_{jn} g_{jn}^{(2,2)}(r_0),$$

$$K_{14}^{(n)} = -\beta_n \sigma (1+\nu) \sum_{j=1}^2 (-1)^j \left\{ e^{2i(\alpha_0-\psi_0)} C_{jn} g_{jn}^{(2,2)}(r_0) + \right. \\ \left. + \left[2(\mu_{jn}^2 + \lambda_n^2 - \gamma_1^2) - C_{jn} \sigma (\mu_{jn}^2 + 2\nu \lambda_n^2) \right] H_0^{(1)}(\mu_{jn} r_0) \right\},$$

$$K_{22}^{(n)} = -e^{i(\alpha_0-\psi)} \left[\frac{\lambda_n^2}{\gamma_2^2} \mu_n H_1^{(1)}(\mu_n r_0) + \sum_{j=1}^2 (-1)^j \left\{ \sigma^2 \alpha_n B_{jn} (\mu_{jn}^2 + 2\nu \lambda_n^2) + \sigma \beta_n^* \right\} \mu_{jn} H_1^{(1)}(\mu_{jn} r_0) \right] + \\ + e^{i(2\psi_0-\psi-\alpha_0)} \left[\left(1 + \frac{\lambda_n^2}{\gamma_2^2} \right) \mu_n H_1^{(1)}(\mu_n r_0) + \sigma \alpha_n \sum_{j=0}^2 (-1)^j B_{jn} \mu_{jn}^3 H_1^{(1)}(\mu_{jn} r_0) \right],$$

$$K_{23}^{(n)} = -\frac{\mu_n^2 \lambda_n}{\gamma_2^2} H_0^{(1)}(\mu_n r_0) + \lambda_n \sum_{j=1}^2 (-1)^j \left\{ \sigma \alpha_n (\mu_{jn}^2 + 2\nu \lambda_n^2) B_{jn} + \beta_n^* \right\} \sigma H_0^{(1)}(\mu_{jn} r_0) + \\ + e^{2i(\psi_0-\alpha_0)} \sigma \alpha_n \lambda_n \sum_{j=1}^2 (-1)^j B_{jn} g_{jn}^{(2,2)}(r_0),$$

$$K_{24}^{(n)} = \sigma \beta_n (1+\nu) \left\{ \sum_{j=1}^2 (-1)^j \left[2(\gamma_1^2 - \mu_{jn}^2 - \lambda_n^2) + C_{jn} \sigma (\mu_{jn}^{22} + 2\nu \lambda_n) \right] H_0^{(1)}(\mu_{jn} r_0) + \right. \\ \left. + e^{2i(\psi_0-\alpha_0)} \alpha_T \sum_{j=1}^2 (-1)^j C_{jn} \mu_{jn}^2 H_2^{(1)}(\mu_{jn} r_0) \right\},$$

$$K_{32}^{(n)} = -e^{i(\psi_0-\psi)} \left[2 \frac{\lambda_n^3}{\gamma_2^2} H_0^{(1)}(\mu_n r_0) + 2 \sigma \alpha_n \lambda_n \sum_{j=1}^2 (-1)^j B_{jn} \mu_{jn}^2 H_0^{(1)}(\mu_{jn} r_0) \right] - \\ - e^{i(2\alpha_0-\psi-\psi_0)} 2 \sigma \alpha_n \lambda_n \sum_{j=1}^2 (-1)^j B_{jn} g_{jn}^{(2,2)}(r_0),$$

$$K_{33}^{(n)} = \left[-\frac{\mu_n^2 - \lambda_n^2}{\gamma_2^2} \mu_n H_1^{(1)}(\mu_n r_0) - 2 \alpha_n \lambda_n^2 \sigma \sum_{j=1}^2 (-1)^j B_{jn} \mu_{jn} H_1^{(1)}(\mu_{jn} r_0) \right] 2 \cos(\psi_0 - \alpha_0),$$

$$K_{34}^{(n)} = 4 \sigma \beta_n \lambda_n \frac{1+\nu}{\alpha_T} \sum_{j=1}^2 (-1)^j C_{jn} \mu_{jn} H_1^{(1)}(\mu_{jn} r_0) \cos(\psi_0 - \alpha_0),$$

$$K_{41}^{(n)} = i \alpha_T^2 \omega \alpha_n \sigma E T_0 \sum_{j=1}^2 (-1)^j \left[-\mu_{jn}^2 H_2^{(1)}(\mu_{jn} r_0) e^{i(\psi_0-2\alpha_0+\psi)} + \right. \\ \left. + \mu_{jn}^2 H_0^{(1)}(\mu_{jn} r_0) e^{i(\psi-\psi_0)} - 2 h^* \mu_{jn} H_1^{(1)}(\mu_{jn} r_0) e^{i(\psi-\alpha_0)} \right],$$

$$K_{42}^{(n)} = i \alpha_T^2 \omega \alpha_n \sigma E T_0 \sum_{j=1}^2 (-1)^j \left[\mu_{jn}^2 H_0^{(1)}(\mu_{jn} r_0) e^{i(\psi_0-\psi)} - \right. \\ \left. - \mu_{jn}^2 H_2^{(1)}(\mu_{jn} r_0) e^{i(2\alpha_0-\psi_0-\psi)} - 2 \mu_{jn} h^* H_1^{(1)}(\mu_{jn} r_0) e^{i(\alpha_0-\psi)} \right],$$

$$K_{43}^{(n)} = 2 i \omega \alpha_n \sigma E T_0 \alpha_T^2 \lambda_n \sum_{j=1}^2 (-1)^j \left[-h^* H_0^{(1)}(\mu_{jn} r_0) - \mu_{jn} H_1^{(1)}(\mu_{jn} r_0) \cos(\psi_0 - \alpha_0) \right],$$

$$K_{44}^{(n)} = \frac{2}{\mu_{jn}^2 - \mu_{2n}^2} \sum_{j=1}^2 (-1)^j (\mu_{jn}^2 + \lambda_n^2 - \gamma_1^2) \left[h^* H_0^{(1)}(\mu_{jn} r_0) + \mu_{jn} H_1^{(1)}(\mu_{jn} r_0) \cos(\psi_0 - \alpha_0) \right],$$

$$g_{jn}^{(2,2)}(r_0) = \mu_n^2 H_2^{(1)}(\mu_n r_0) - \mu_{jn}^2 H_2^{(1)}(\mu_{jn} r_0),$$

$$g_{jn}^{(3,3)}(r_0) = \mu_n^3 H_3^{(n)}(\mu_n r_0) - \mu_{jn}^3 H_3^{(1)}(\mu_{jn} r_0),$$

$$\beta_n^* = 2(1+\nu) \alpha_n \omega m^* \alpha_n, \quad r_0 = |\zeta - \zeta_0|, \quad \alpha_0 = \arg(\zeta - \zeta_0), \quad \psi_0 = \psi(\zeta_0).$$

Здесь ψ_0 — угол между внешней нормалью к контуру Γ в точке $\zeta_0 \in \Gamma$ и осью $0x_1$. Внешнеинтегральное слагаемое появляется при выполнении операции предельного перехода, причем знак «+» при нем отвечает внутренней задаче, то есть задаче об изгибных колебаниях шарнирно опертого термоупругого цилиндра конечной длины; знак «-» соответствует внешней задаче об изгибных колебаниях термоупругого слоя, ослабленного сквозным вдоль толщинной координаты отверстием при скользящей заделке его торцов.

Численные результаты. В соответствии с материальными соотношениями нормальное окружное напряжение на поверхности полости в слое имеет вид

$$\sigma_{\theta\theta} = |S_{\theta\theta}| \cos(\omega t - \varphi), \quad \varphi = \arg S_{\theta\theta}, \quad (9.422)$$

$$S_{\theta\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} S_{\theta\theta}^{(n)} \sin \lambda_n x_3,$$

$$S_{\theta\theta}^{(n)} = S_{11}^{(n)} + S_{22}^{(n)} - N^{(n)} = S_1^{(n)} - N^{(n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

В результате операции предельного перехода получаем на контуре отверстия Γ

$$S_1^{(n)}(\zeta_0) = \pm 2i\mu \frac{W_1^{(n)}(\zeta_0) + W_2^{(n)}(\zeta_0)}{1-\nu} + 2\mu\sigma \int_{\Gamma} \sum_{m=1}^4 W_m^{(n)}(\zeta) R_m^{(n)}(\zeta, \zeta_0) ds, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Здесь знак «+» отвечает внутренней задаче (цилиндр конечной длины), а знак «-» внешней (слой с туннельной полостью). Ядра $R_m^{(n)}(\zeta, \zeta_0)$ определяются соотношениями

$$R_1^{(n)}(\zeta, \zeta_0) = -e^{i(\psi - \alpha_0)} \left(\frac{\lambda_n^2}{\sigma \gamma_2^2} \mu_n H_1^{(1)}(\mu_n r_0) + \sum_{j=1}^2 (-1)^j [\sigma \alpha_n (\mu_{jn}^2 + 2\nu \lambda_n^2) B_{jn} + \beta_n^*] \mu_{jn} H_1^{(1)}(\mu_{jn} r_0) \right),$$

$$R_2^{(n)}(\zeta, \zeta_0) = -e^{i(\alpha_0 - \psi)} \left(\frac{\lambda_n^2}{\sigma \gamma_2^2} \mu_n H_1^{(1)}(\mu_n r_0) + \sum_{j=1}^2 (-1)^j [\sigma \alpha_n (\mu_{jn}^2 + 2\nu \lambda_n^2) B_{jn} + \beta_n^*] \mu_{jn} H_1^{(1)}(\mu_{jn} r_0) \right),$$

$$R_3^{(n)}(\zeta, \zeta_0) = \frac{\lambda_n}{\sigma \gamma_2^2} \mu_n^2 H_0^{(1)}(\mu_n r_0) - \sum_{j=1}^2 (-1)^j [\sigma \alpha_n (\mu_{jn}^2 + 2\nu \lambda_n^2) B_{jn} + \beta_n^*] \lambda_n H_0^{(1)}(\mu_{jn} r_0),$$

$$R_4^{(n)}(\zeta, \zeta_0) = (1+\nu) \beta_n \sum_{j=1}^2 (-1)^j [2(\mu_{jn}^2 + \lambda_n^2 - \gamma_1^2) - \sigma C_{jn} (\mu_{jn}^2 + 2\nu \lambda_n^2)] H_0^{(1)}(\mu_{jn} r_0).$$

В рассматриваемых задачах большой интерес представляет учет эффекта связанности термомеханических полей. Этот эффект характеризуется коэффициентом связанности полей, который имеет вид [12]

$$\delta = \sigma ET_0 \alpha_T^2 \frac{(1+\nu)}{\rho c_e (1-\nu)} = m \frac{\lambda_T \alpha_T (1+\nu)}{\rho c_e (1-\nu)}.$$

Диапазон значений коэффициента связанности варьируется в интервале $[0; 0,5]$. Для алюминия и сталей различных марок его значения имеют порядок 10^{-2} , что позволяет пре-небречь его влиянием на напряженно-деформированное состояние тела. Однако для многих современных полимерных материалов, таких как полистирол, поливинилбутириль, поливинилформаль и некоторых других материалов альдегидных групп, широко применяющихся в современной промышленности, его значения стремятся к максимальным.

Слой с туннельным отверстием. Рассмотрим напряженно-деформированное состоя-ние термоупругого слоя, ослабленного туннельной вдоль оси x_3 полостью, контур попереч-ного сечения которой задается параметрическим уравнением

$$\zeta = R_1 (\cos \theta + c_3 \cos 3\theta) + iR_2 (\sin \theta - c_3 \sin 3\theta) \quad (9.423)$$

или

$$\zeta = R_1 (\cos \theta + c_3 \cos 2\theta) + iR_2 (\sin \theta - c_3 \sin 2\theta). \quad (9.424)$$

Формула (9.423) применяется для круговых, эллиптических и квадратных (со скругленными углами) контуров Γ . При этом полагаем для окружности $R = R_1 = R_2$, $c_3 = 0$, для эллипса $R = \frac{R_1 + R_2}{2}$, $c_3 = 0$, для квадрата $R = R_1 = R_2$, $c_3 = 0,14036$. Формула (9.424) при-меняется для контуров треугольного поперечного сечения (треугольник со скругленными углами), причем $R = R_1 = R_2$, $c_3 = 0,25$.

На рисунках 9.52–9.55 представлены результаты расчетов величины $|S_{\infty}|$, фигурирую-щей в формулах (9.422), в предположении, что на тело действует гармонически изменяю-щееся во времени нормальное давление с амплитудой, распределенной по закону $N = N_0 \frac{x_3}{h}$. Все результаты, кроме отдельно оговоренных, приведены для поливинилбутири-ля, у которого коэффициент связанности полей равен 0,44 [12]. Пунктирные линии отве- чают задаче с учетом связанности термомеханических полей, сплошные — несвязанной. Таким образом, демонстрируется влияние эффекта термомеханической связанности на дина-мическую концентрацию напряжений в слое, ослабленном туннельным вдоль оси x_3 от-верстием.

Результаты на рис. 9.52 соответствуют слою с полостью кругового поперечного сечения при $h = 1$, $R = 0,1$, $x_3 = h$. Точками нанесены результаты точного решения. Рис. 9.53 и 9.54 соотвествуют слою с полостью квадратного и треугольного поперечного сечения (квадрат и треугольник со скругленными углами) при $h = 1$, $R = 0,1$, $x_3 = h$. Рис. 9.55 построен для полости эллиптического поперечного сечения при $h = 1$, $R_1 = 0,1$, $R_2 = 0,05$, $x_3 = h$.

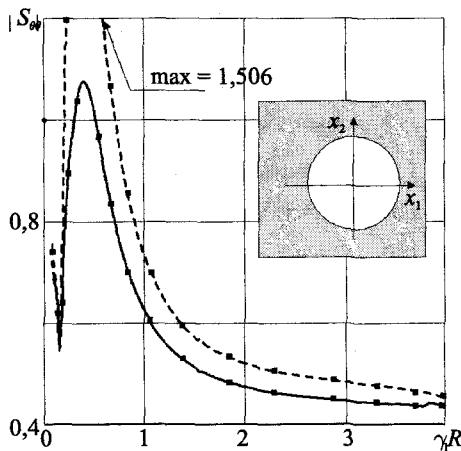


Рис. 9.52. Динамическая концентрация напряжений в слое, ослабленном круговым отверстием, при $h=1$, $R=0,1$, $x_3=h$ (поливинилбутираль)

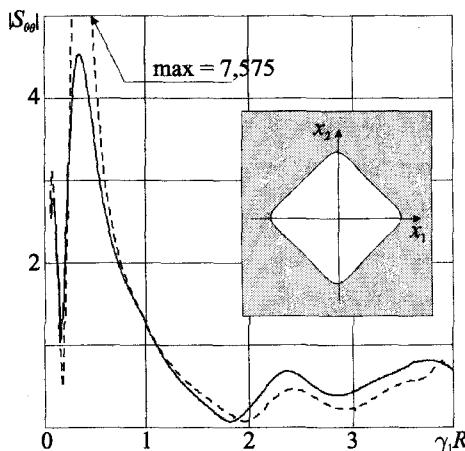


Рис. 9.53. Динамическая концентрация напряжений в слое, ослабленном квадратным отверстием, при $h=1$, $R=0,1$, $x_3=h$ (поливинилбутираль)

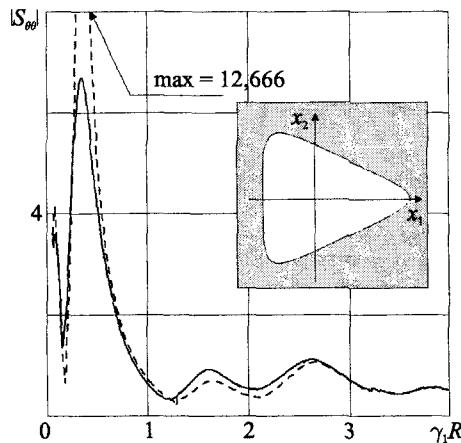


Рис. 9.54. Динамическая концентрация напряжений в слое, ослабленном треугольным отверстием, при $h=1$, $R=0,1$, $x_3=h$ (поливинилбутираль)

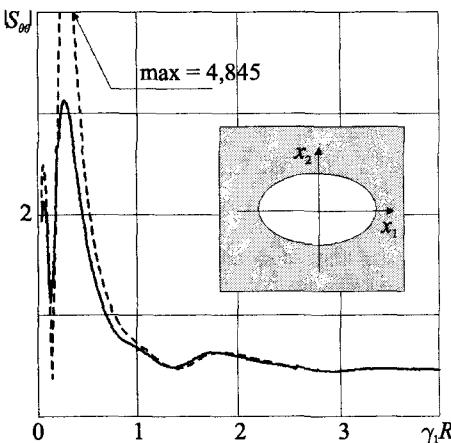


Рис. 9.55. Динамическая концентрация напряжений в слое, ослабленном эллиптическим отверстием, при $h=1$, $R_1=0,1$, $R_2=0,05$, $x_3=h$ (поливинилбутираль)

Из рисунков видно, что для слоя, ослабленного сквозным отверстием, результаты расчетов отличаются качественно в сторону увеличения амплитуд. С возрастанием частоты возбуждения кривые постепенно приближаются друг к другу до практически полного совпадения.

Цилиндр конечной длины. Рассмотрим теперь напряженно-деформированное состояние термоупругого цилиндра с достаточно гладким контуром поперечного сечения. Параметризация контура задается приведенными выше соотношениями (9.423)–(9.424). В результате численного эксперимента получены амплитудно-частотные характеристики конечных цилиндров в зависимости от относительного волнового числа $\gamma_i R$. На рис. 9.56–9.60 представлены результаты расчетов величины $|S_{\theta\theta}|$ в предположении, что на тело действует гармонически изменяющееся во времени нормальное давление с амплитудой, распределенной по закону $N = N_0 \frac{x_3}{h}$. Результаты на рис. 9.56 и 9.57 соответствуют цилиндуру кругового поперечного сечения при $h = 1$, $R = 0,01$, $x_3 = h$ для алюминия и поливинилбутираля соответственно. Коэффициент связанности полей для алюминия равен 0,04, а для поливинилбутираля — 0,44. Точками на графиках нанесено точное решение, полученное методом рядов на основе однородных решений задачи [9].

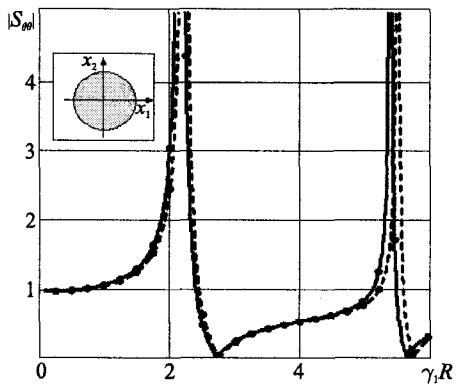


Рис. 9.56. Амплитудно-частотная характеристика сплошного кругового цилиндра конечной длины при $h=1$, $R=0,01$, $x_3=h$ (алюминий)

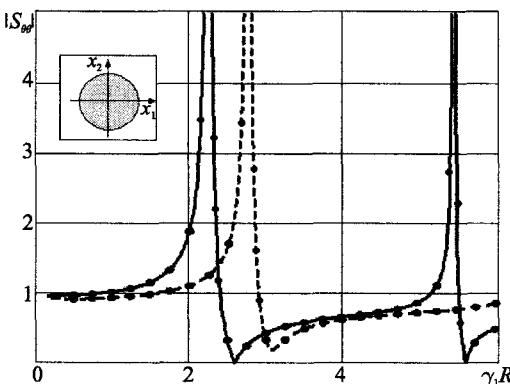


Рис. 9.57. Амплитудно-частотная характеристика сплошного кругового цилиндра конечной длины при $h=1$, $R=0,01$, $x_3=h$ (поливинилбутираль)

Кривые на рис. 9.58–9.61 отражают результаты расчетов для цилиндров эллиптического поперечного сечения, $h=1$, $R_1=0,1$, $R_2=0,05$, $x_3=h$, и для цилиндров с поперечным сечением в виде квадрата со скругленными углами, $h=1$, $R=0,1$, $x_3=h$. Рис. 9.58 и 9.59 отвечают алюминию и поливинилбутиралю соответственно, рис. 9.60 (алюминий), 9.61 (поливинилбутираль). Сплошные кривые, как и ранее, соответствуют несвязанной задаче, пунктирные — связанный.

Незначительное влияние связанности полей для алюминия объясняется относительно невысоким значением коэффициента связанности полей, в то время как для поливинилбутираля это влияние прослеживается отчетливо, наблюдается смещение собственных частот и изменение формы кривых с увеличением относительного волнового числа. Таким обра-

зом, можно сделать вывод о практической целесообразности применения связанный модели термоупругости для расчетов тел с высоким коэффициентом связанности термомеханических полей.

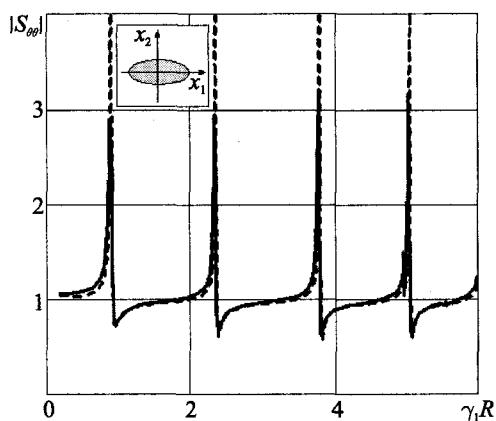


Рис. 9.58. Амплитудно-частотная характеристика сплошного эллиптического цилиндра конечной длины при $h=1$, $R_1=0,1$, $R_2=0,05$, $x_3=h$ (алюминий)

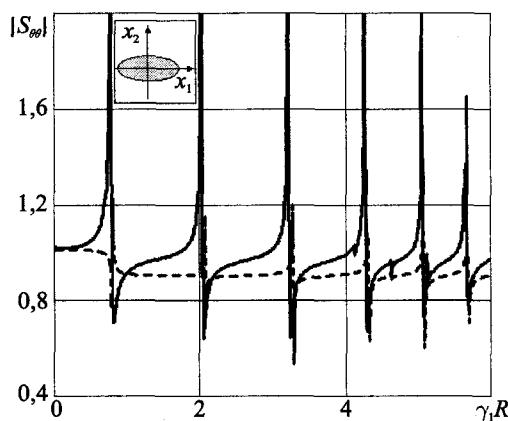


Рис. 9.59. Амплитудно-частотная характеристика сплошного эллиптического цилиндра конечной длины при $h=1$, $R_1=0,1$, $R_2=0,05$, $x_3=h$ (поливинилбутирадь)

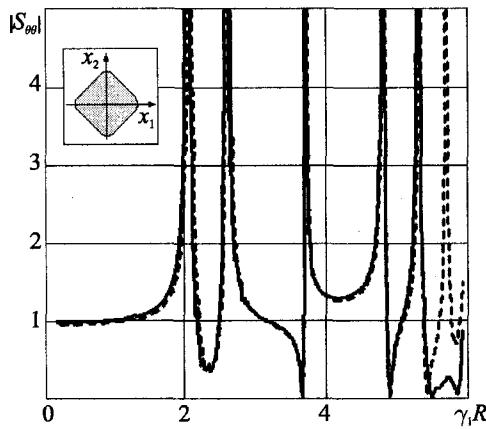


Рис. 9.60. Амплитудно-частотная характеристика сплошного цилиндра квадратного поперечного сечения при $h=1$, $R=0,1$, $x_3=h$ (алюминий)

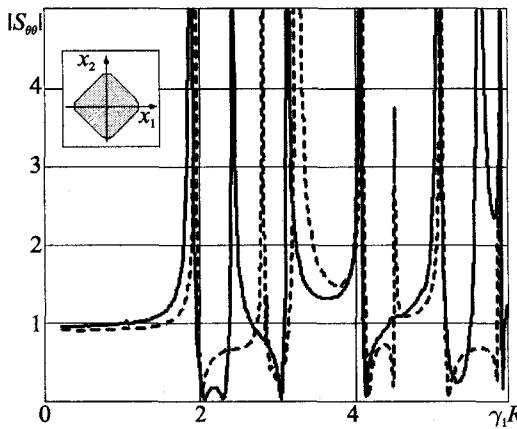


Рис. 9.61. Амплитудно-частотная характеристика сплошного цилиндра квадратного поперечного сечения при $h=1$, $R=0,1$, $x_3=h$ (поливинилбутирадь)

9.11. Сопряженные электроупругие поля в пьезокерамическом слое с полостью

В декартовой системе координат $0x_1x_2x_3$ рассмотрим пьезокерамический слой $-\infty < x_1, x_2 < \infty, |x_3| \leq h$, ослабленный туннельным вдоль оси $0x_3$ сквозным отверстием, поперечное сечение которого — достаточно гладкий замкнутый контур Г. Предположим, что ось x_3 направлена вдоль силовых линий электрического поля предварительной поляризации керамики.

Исходная система уравнений в переменных u, v, w, φ имеет вид [98]:

$$\begin{aligned} V\nabla^2 u + c_{44}\partial_3^2 u + \partial_1\theta = 0, \quad V\nabla^2 v + c_{44}\partial_3^2 v + \partial_2\theta = 0, \quad \theta = U(\partial_1 u + \partial_2 v) + c\partial_3 w + e\partial_3\varphi, \\ c_{44}\nabla^2 w + c_{33}\partial_3^2 w + c\partial_3(\partial_1 u + \partial_2 v) + e_{15}\nabla^2\varphi + e_{33}\partial_3^2\varphi = 0, \\ e_{11}\nabla^2\varphi + e_{33}\partial_3^2\varphi - e\partial_3(\partial_1 u + \partial_2 v) - e_{15}\nabla^2 w - e_{33}\partial_3^2 w = 0, \\ U = (c_{11} + c_{12})/2, \quad V = (c_{11} - c_{12})/2, \quad c = c_{13} + c_{44}, \quad e = e_{15} + e_{31}. \end{aligned} \quad (9.425)$$

Здесь u, v, w — компоненты вектора упругого перемещения; φ — электрический потенциал; $c_{ij}, e_{ij}, \varepsilon_{ij}$ — модули упругости, измеренные при постоянном электрическом поле, пьезомодули и диэлектрические проницаемости, измеренные при постоянной деформации.

Поверхности слоя покрыты диафрагмой, жесткой в своей плоскости и гибкой в перпендикулярном направлении. Границные условия на поверхностях слоя $x_3 = \pm h$ имеют вид

$$u(x_1, x_2, \pm h) = (x_1, x_2, \pm h) = \sigma_{33}(x_1, x_2, \pm h) = D_3(x_1, x_2, \pm h) = 0, \quad (9.426)$$

где σ_{ij} и D_i — компоненты тензора механических напряжений и вектора электрической индукции соответственно.

Пусть на поверхности полости, заполненной воздухом, действует вектор напряжений (X_{1n}, X_{2n}, X_{3n}) . Границные условия на поверхности полости примут вид

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}n_j = X_{ni} \quad (i, j = 1, 2, 3), \\ D_n = D_i n_i = 0. \end{aligned} \quad (9.427)$$

Рассмотрим кососимметричное относительно срединной плоскости слоя электроупругое состояние. Согласно построенным однородным решениям [66], компоненты вектора перемещения и электростатический потенциал в слое имеют вид рядов Фурье:

$$\begin{aligned} \{u, v\} &= \sum_{k=1}^{\infty} \{U_{1k}, U_{2k}\} \sin(\gamma_k x_3), \\ \{w, \varphi\} &= \sum_{k=0}^{\infty} \{U_{3k}, U_{4k}\} \cos(\gamma_k x_3), \quad \gamma_k = \pi k/h. \end{aligned}$$

Тогда и другие компоненты электроупругого поля в слое имеют соответствующие представления:

$$\begin{aligned} \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{33}, D_1, D_2\} &= \sum_{k=1}^{\infty} \{\sigma_{11k}, \sigma_{22k}, \sigma_{12k}, \sigma_{33k}, D_{1k}, D_{2k}\} \sin(\gamma_k x_3), \\ \{\sigma_{13}, \sigma_{23}, D_3\} &= \sum_{k=0}^{\infty} \{\sigma_{13k}, \sigma_{23k}, D_{3k}\} \cos(\gamma_k x_3); \end{aligned} \quad (9.428)$$

с коэффициентами Фурье:

$$\begin{aligned}\sigma_{11k} &= c_{11}\partial_1 U_{1k} + c_{12}\partial_2 U_{2k} - c_{13}\gamma_k U_{3k} - e_{31}\gamma_k U_{4k}, \\ \sigma_{22k} &= c_{12}\partial_1 U_{1k} + c_{11}\partial_2 U_{2k} - c_{13}\gamma_k U_{3k} - e_{31}\gamma_k U_{4k}, \\ \sigma_{33k} &= c_{13}(\partial_1 U_{1k} + \partial_2 U_{2k}) - c_{33}\gamma_k U_{3k} - e_{33}\gamma_k U_{4k}, \quad \sigma_{12k} = V(\partial_2 U_{1k} + \partial_1 U_{2k}), \\ \sigma_{13k} &= c_{44}(\partial_1 U_{3k} + \gamma_k U_{1k}) - e_{15}\partial_1 U_{4k}, \quad \sigma_{23k} = c_{44}(\partial_2 U_{3k} + \gamma_k U_{2k}) + e_{15}\partial_2 U_{4k}, \\ D_{1k} &= -e_{11}\partial_1 U_{4k} + e_{15}(\partial_1 U_{3k} + \gamma_k U_{1k}), \quad D_{2k} = -e_{11}\partial_2 U_{4k} + e_{15}(\partial_2 U_{3k} + \gamma_k U_{2k}), \\ D_{3k} &= e_{33}\gamma_k U_{4k} + e_{31}(\partial_1 U_{1k} + \partial_2 U_{2k}) - e_{33}\gamma_k U_{3k}.\end{aligned}$$

Границные условия на поверхности полости представим в виде

$$\begin{aligned}2(N - iT) &= (\sigma_{11} + \sigma_{22}) - e^{2i\psi}(\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12}), \\ X_{3n} &= \operatorname{Re}\{e^{i\psi}(\sigma_{13} - i\sigma_{23})\}, \quad D_n = \operatorname{Re}\{e^{i\psi}(D_1 - iD_2)\},\end{aligned}\quad (9.429)$$

где N, T — нормальная и касательная составляющие вектора напряжений, ψ — угол между положительным направлением нормали n в точке $\zeta \in \Gamma$ и осью $0x_1$.

Согласно выражениям (9.428), (9.429) имеем:

$$\{N, T\} = \sum_{k=1}^{\infty} \{N_k, T_k\} \sin(\gamma_k x_3), \quad \{X_{3n}, D_n\} = \sum_{k=0}^{\infty} \{X_{3n,k}, D_{nk}\} \cos(\gamma_k x_3). \quad (9.430)$$

В граничных условиях на поверхности полости исключим толщинную координату согласно (9.428), (9.430). Тогда получим условия на Γ относительно коэффициентов Фурье тензора напряжений и вектора электрической индукции

$$\begin{aligned}2(N_k - iT_k) &= (\sigma_{11k} + \sigma_{22k}) - e^{2i\psi}(\sigma_{22k} - \sigma_{11k} + 2i\sigma_{12k}), \\ X_{3n,k} &= \operatorname{Re}\{e^{i\psi}(\sigma_{13k} - i\sigma_{23k})\}, \quad D_{nk} = \operatorname{Re}\{e^{i\psi}(D_{1k} - iD_{2k})\}.\end{aligned}\quad (9.431)$$

Интегральные представления решений возьмем в виде сверток искомых плотностей с матрицей Φ -решений [66]:

$$\begin{aligned}U_{jk}(z) &= \int_{\Gamma} \sum_{m=1}^4 Z_m^{(k)}(\zeta) g_{jk}^{(m)}(\zeta, z) ds, \\ z &= x_1 + ix_2, \quad \zeta \in \Gamma, \quad z - \zeta = re^{i\alpha},\end{aligned}\quad (9.432)$$

где $g_{jk}^{(m)}$ — матрица Φ -решений, $Z_m^{(k)}$ — неизвестные плотности.

Учитывая интегральные представления (9.432) и используя граничный переход при $z \rightarrow \zeta_0 \in \Gamma$ по формулам Сохоцкого–Племеля [39], из граничных условий (9.431) получаем систему сингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{aligned}\pi a_1(\psi_0) Z_1^{(k)}(\zeta_0) + \pi a_2(\psi_0) Z_2^{(k)}(\zeta_0) - \sum_{m=1}^4 \int_{\Gamma} G_{1m}^{(k)}(\zeta, \zeta_0) Z_m^{(k)}(\zeta) d\zeta &= 2(N_k(\zeta_0) - iT_k(\zeta_0)), \\ -2\pi \operatorname{Re} Z_3^{(k)}(\zeta_0) - 2\pi b_7 \operatorname{Re} Z_4^{(k)}(\zeta_0) + \operatorname{Im} \sum_{m=1}^4 \int_{\Gamma} G_{2m}^{(k)}(\zeta, \zeta_0) Z_m^{(k)}(\zeta) d\zeta &= X_{3n,k}(\zeta_0), \\ 2\pi \operatorname{Re} Z_4^{(k)}(\zeta_0) + \operatorname{Im} \sum_{m=1}^4 \int_{\Gamma} G_{3m}^{(k)}(\zeta, \zeta_0) Z_m^{(k)}(\zeta) d\zeta &= 0 = D_{nk}(\zeta_0).\end{aligned}\quad (9.433)$$

Здесь ψ_0 — угол между положительным направлением нормали n в точке $\zeta_0 \in \Gamma$ и осью $0x_1$. Ядра первого интегрального уравнения $G_{11}^{(k)}(\zeta, \zeta_0)$ и $G_{12}^{(k)}(\zeta, \zeta_0)$ сингулярные, все остальные ядра системы (9.433) регулярные. Полное описание ядер системы имеется в работе [66].

При помощи квадратурных и интерполяционных формул интегральные уравнения (9.433) сведены к системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных плотностей $Z_j^{(k)}(\varphi)$. На основании рассчитанных плотностей были вычислены компоненты электроупругого поля в слое с туннельной полостью эллиптического поперечного сечения:

$$\zeta = \xi_1 + i\xi_2, \quad \xi_1 = R_1 \cos \varphi, \quad \xi_2 = R_2 \sin \varphi, \quad R_2/h = 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

На рис. 9.62, 9.63 приведено распределение нормального окружного напряжения $\sigma_{\theta\theta}/N_0$ ($N_0 = \text{const}$) для различных значений параметра $\lambda = R_1/R_2$ в сечении $x_3 = 0,5h$ при действии на контуре эллиптического отверстия нормальных $N = N_0 x_3/h$ и касательных $T = N_0 x_3/h$ нагрузок соответственно.

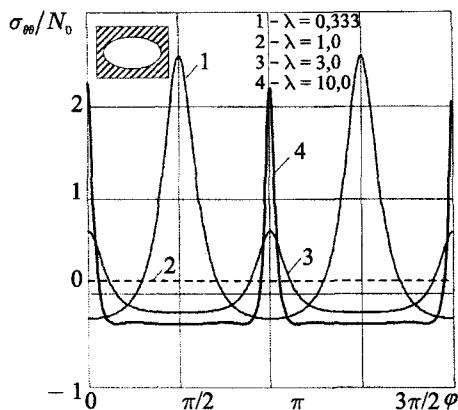


Рис. 9.62. Распределение $\sigma_{\theta\theta}/N_0$ на контуре полости в сечении $x_3 = 0,5h$ при действии нормального давления $N = N_0 x_3/h$

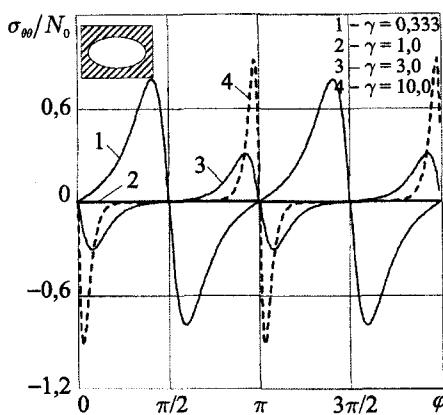


Рис. 9.63. Распределение $\sigma_{\theta\theta}/N_0$ на контуре полости в сечении $x_3 = 0,5h$ при действии касательного давления $T = N_0 x_3/h$

Из системы граничных сингулярных интегральных уравнений для слоя с туннельной полостью легко получить интегральное уравнение краевой задачи электроупругости для конечного цилиндра $|x_3| \leq h$ путем изменения знаков внеинтегральных членов.

На рис. 9.64, 9.65 приведены распределения нормального окружного напряжения $\sigma_{\theta\theta}/N_0$ на контуре эллиптического пьезокерамического цилиндра для различных значений параметра $\lambda = R_1/R_2$ в сечении $x_3 = 0,5h$ при действии на контуре цилиндра нормального $N = N_0 x_3/h$ и касательного $T = N_0 x_3/h$ усилий соответственно.

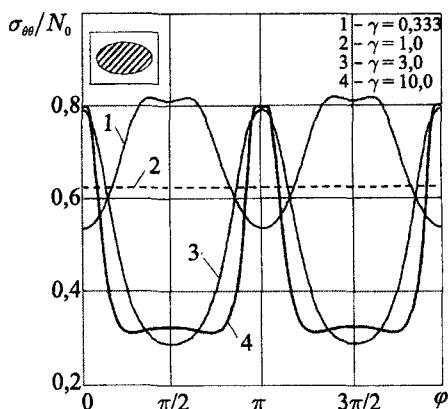


Рис. 9.64. Распределение $\sigma_{\theta\theta} / N_0$ на контуре цилиндра в сечении $x_3 = 0,5h$ при действии нормального давления $N = N_0 x_3 / h$

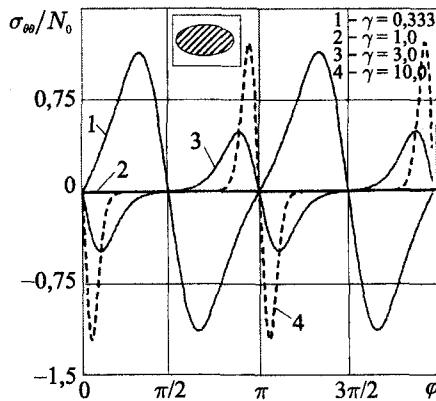


Рис. 9.65. Распределение $\sigma_{\theta\theta} / N_0$ на контуре цилиндра в сечении $x_3 = 0,5h$ при действии касательного нагружения $T = N_0 x_3 / h$

Все числовые результаты были получены для пьезокерамики PZT – 5H [77].

9.12. Гармонические и импульсные возбуждения многосвязных цилиндрических тел

Рассматривается пространственная задача теории упругости о гармонических колебаниях цилиндрических тел (слой с несколькими туннельными полостями, конечный цилиндр) при однородных смешанных граничных условиях на его основаниях. С использованием построенных в работе Ф-решений граничные задачи сводятся к системе одномерных сингулярных интегральных уравнений хорошо изученного типа. Решение задачи об импульсном возбуждении слоя на поверхности полости «собирается» из пакета соответствующих гармонических колебаний при помощи интегрального преобразования Фурье по времени. Приводятся результаты расчетов динамической концентрации напряжений в слое (плите), ослабленном одним и двумя отверстиями различной конфигурации, амплитудно-частотные характеристики для цилиндра конечной длины с поперечным сечением в виде квадрата со скругленными углами и данные расчетов для трапециевидного импульса, действующего на поверхности круговой полости.

Постановка задачи. В декартовой прямолинейной системе координат $Ox_1x_2x_3$ рассмотрим упругий однородный изотропный слой $-\infty < x_1, x_2 < \infty$, $|x_3| \leq h$, ослабленный сквозными туннельными полостями с общей границей поперечного сечения $\Gamma = \cup \Gamma_v$ ($\cap \Gamma_v = \emptyset$, $v = 1, 2, \dots, N$). Будем полагать, что Γ_v — простые замкнутые контуры без точек самопрересечения с непрерывными по Гельдеру кривизнами. На поверхности полостей $S = \cup S_v$ зададим вектор напряжений $(X_{1n}, X_{2n}, X_{3n})(x, t)$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in S$. На основаниях слоя примем однородные граничные условия смешанного типа

$$u_1 = u_2 = \sigma_{33} = 0, \quad x_3 = \pm h, \quad t > 0. \quad (9.434)$$

Задача состоит в определении волновых полей вектора перемещений $u = (u_1, u_2, u_3)$ и тензора напряжений с компонентами σ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) при гармоническом или импульсном возбуждении слоя.

Для определения волнового поля перемещений используем систему уравнений Ламе

$$\Delta u_j + \sigma \partial_j \vartheta + \frac{X_j}{\mu} = \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}, \quad j = 1, 2, 3, \quad (9.435)$$

$$\partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad \Delta = \partial_k \partial_k, \quad \vartheta = \partial_k u_k, \quad \sigma = \frac{1}{1 - 2\nu},$$

где Δ — оператор Лапласа в R^3 , ϑ — объемное расширение, X_j — интенсивность объемных сил, μ и ν — модуль сдвига и коэффициент Пуассона, ρ — плотность материала. Здесь и далее по повторяющимся индексам i, k ведется суммирование от 1 до 3.

Введем обозначения

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad \gamma_1 = \frac{\omega}{c_1}, \quad \mu_{lm}^2 = \gamma_l^2 - \lambda_m^2, \quad \Delta_{lm} = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \mu_{lm}^2; \quad l = 1, 2,$$

где c_1 и c_2 — скорости распространения поперечной (сдвиговой) и продольной волны в упругом теле, γ_1 и γ_2 — соответствующие волновые числа.

Рассмотрим сначала гармоническое возбуждение слоя; положим

$$u_j = e^{-i\omega t} U_j, \quad \vartheta = e^{-i\omega t} \theta = e^{-i\omega t} \partial_k U_k, \quad X_j = e^{-i\omega t} Y_j, \quad j = 1, 2, 3, \quad (9.436)$$

где $U_j = U_j(x)$, $\theta = \theta(x)$, $Y_j = Y_j(x)$ ($x = (x_1, x_2, x_3)$) — амплитуды соответствующих величин.

Исключая время t в уравнениях (9.435) в соответствии с представлениями (9.437), приходим к системе дифференциальных уравнений в амплитудах

$$\Delta U_j + \sigma \partial_j \partial_k U_k + \gamma_2^2 U_j = -\frac{Y_j}{\mu}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (9.437)$$

К системе (9.437) необходимо присовокупить граничные условия на поверхностях полостей

$$S_{ij} n_i = Y_{jn}, \quad j = 1, 2, 3, \quad (9.438)$$

где S_{ij} , Y_{jn} — амплитудные значения величин σ_{ij} и X_{jn} соответственно.

Имея в виду симметричное состояние относительно срединной плоскости слоя, представим амплитуды перемещений и интенсивностей объемных сил в виде рядов Фурье

$$\begin{aligned} \{U_1, U_2, \theta, Y_1, Y_2\} &= \sum_{m=1}^{\infty} \{U_{1m}, U_{2m}, \theta_m, Y_{1m}, Y_{2m}\} \cos \lambda_m x_3, \\ \{U_3, Y_3\} &= \sum_{m=1}^{\infty} \{U_{3m}, Y_{3m}\} \sin \lambda_m x_3, \\ U_{jm} &= U_{jm}(x_1, x_2), \quad Y_{jm} = Y_{jm}(x_1, x_2); \quad j = 1, 2, 3, \\ \theta_m &= \partial_1 U_{1m} + \partial_2 U_{2m} + \lambda_m U_{3m}, \quad \lambda_m = \pi(2m-1)/(2h). \end{aligned} \quad (9.439)$$

В этом случае граничные условия (9.434) на основаниях слоя будут выполнены.

Исключив в уравнениях (9.437) толщинную координату x_3 при помощи представлений (9.439), приходим к системе уравнений относительно коэффициентов Фурье U_{jm}

$$\Delta_{2m} U_{lm} + \sigma \partial_l \theta_m = -\frac{Y_{lm}}{\mu}, \quad l=1, 2; \quad \Delta_{2m} U_{3m} - \sigma \lambda_m \theta_m = -\frac{Y_{3m}}{\mu}; \quad m=1, 2, \dots \quad (9.440)$$

Для исключения толщинной координаты из равенств (9.438) воспользуемся следующими представлениями для амплитуд компонент тензора напряжения и вектора поверхностной нагрузки, согласованными с представлениями (9.439):

$$\{S_{uv}, Y_{un}\} = \sum_{m=1}^{\infty} \{S_{uv}^{(m)}, Y_{un}^{(m)}\} \cos \lambda_m x_3, \quad u, v = 1, 2, \dots \quad (9.441)$$

$$\{S_{j3}, Y_{3n}\} = \sum_{m=1}^{\infty} \{S_{j3}^{(m)}, Y_{3n}^{(m)}\} \sin \lambda_m x_3, \quad j = 1, 2, 3.$$

Тогда граничные условия (9.438) распадутся на совокупность равенств вида

$$S_{ij}^{(m)} n_i = Y_{jn}^{(m)}, \quad j = 1, 2, 3; \quad m = 1, 2, \dots \quad (9.442)$$

Ф-решения для слоя. Пусть теперь вдоль шнура $x_1 = 0, x_2 = 0, |x_3| \leq h$ распределены усилия с погонными интенсивностями $\{P_1, P_2, P_3\}(x_3)$. Тогда фигурирующие в правых частях уравнений (9.440) коэффициенты Фурье интенсивностей объемных сил примут вид

$$Y_{jm} = P_{jm} \delta(x), \quad x = (x_1, x_2), \quad j = 1, 2, 3, \quad (9.443)$$

где $\delta(x)$ — двумерная дельта-функция.

Под Ф-решениями для слоя, соответствующими смешанным граничным условиям (9.434), будем понимать компоненты матрицы фундаментальных решений системы (9.440) с правыми частями, определенными равенствами (9.443).

Из уравнений (9.440) обычным приемом выводим

$$\Delta_{1m} \theta_m = -\frac{1}{\mu(1+\sigma)} (P_{1m} \partial_1 + P_{2m} \partial_2 + P_{3m} \lambda_m) \delta(x). \quad (9.444)$$

Подробно рассмотрим случай $P_1 \neq 0, P_2 = P_3 = 0$.

Из уравнения (9.444) для рассматриваемого случая получаем неоднородное уравнение Гельмгольца

$$\Delta_{1m} \theta_m^{(1)} = -\frac{P_{1m}}{\mu(1+\sigma)} \partial_1 \delta(x). \quad (9.445)$$

Пусть E — фундаментальное решение оператора Гельмгольца [11]. Учитывая, что функция $\delta(x)$ финитна и свертка $E * \partial_1 f = f * \partial_1 E$ существует, получаем из уравнения (9.445)

$$\theta_m^{(1)} = \frac{i P_{1m}}{4\mu(1+\sigma)} \partial_1 H_{01m}, \quad (9.446)$$

где

$$H_{plm} = H_p^{(1)}(\mu_{lm} r), \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad p = 0, 1, 2, 3; \quad l = 1, 2,$$

$H_p^{(1)}(x)$ — функция Ганкеля первого рода, порядка p .

Формула (9.446) дает возможность разделить уравнения в системе (9.440) и представить ее в виде

$$\Delta_{2m} U_{1m}^{(1)} = -\frac{i\sigma P_{1m}}{4\mu(1+\sigma)} \partial_1^2 H_{01m} - \frac{P_{1m}}{\mu} \delta(x), \quad (9.447)$$

$$\Delta_{2m} U_{2m}^{(1)} = -\frac{i\sigma P_{1m}}{4\mu(1+\sigma)} \partial_1 \partial_2 H_{01m}, \quad \Delta_{2m} U_{3m}^{(1)} = \frac{i\sigma P_{1m}}{4\mu(1+\sigma)} \lambda_m \partial_1 H_{01m}.$$

Интегрирование системы (9.447) в пространстве обобщенных функций $\mathcal{D}'(R^2)$ дает

$$U_{1m}^{(1)} = \frac{iP_{1m}}{4\mu} \left(-\frac{1}{\gamma_2^2} \partial_1^2 H + H_{02m} \right), \quad U_{2m}^{(1)} = -\frac{iP_{1m}}{4\mu\gamma_2^2} \partial_1 \partial_2 H, \quad U_{3m}^{(1)} = \frac{iP_{1m}}{4\mu\gamma_2^2} \partial_1 \lambda_m H,$$

$$H = H_{01m} - H_{02m}.$$

Аналогичным образом рассматриваются случаи, когда $P_2 \neq 0, P_1 = P_2 = 0, P_3 \neq 0$. Выпишем окончательные результаты для вектора перемещения

$$U_{nm}^{(j)} = \frac{iP_{nm}}{4\mu} g_{nm}^{(j)}. \quad (9.448)$$

Величины $g_{nm}^{(j)}$ — компоненты матрицы Φ -решений для каждого фиксированного значения m .

$$g_m = \|g_{nm}^{(j)}\|, \quad n, j = 1, 2, 3; \quad m = 1, 2, \dots \quad (9.449)$$

$$g_{vm}^{(v)} = \frac{1}{2\gamma_2^2} \sum_{l=1}^2 (-1)^{l+1} \mu_{lm}^2 \left((-1)^v H_{2lm} \cos 2\alpha + H_{0lm} \right) + H_{02m}, \quad v = 1, 2,$$

$$g_{2m}^{(1)} = g_{1m}^{(2)} = -\frac{1}{2\gamma_2^2} \sum_{l=1}^2 (-1)^{l+1} \mu_{lm}^2 H_{2lm} \sin 2\alpha,$$

$$\frac{g_{3m}^{(1)}}{\cos \alpha} = -\frac{g_{1m}^{(3)}}{\cos \alpha} = \frac{g_{2m}^{(2)}}{\sin \alpha} = -\frac{g_{2m}^{(3)}}{\sin \alpha} = -\frac{\lambda_m}{\gamma_2^2} \sum_{l=1}^2 (-1)^{l+1} \mu_{lm} H_{1lm} \cos \alpha,$$

$$g_{3m}^{(3)} = \frac{\lambda_m^2}{\gamma_2^2} H + H_{02m}.$$

Истинные значения перемещений для общего случая можно определить по формулам

$$u_l = \operatorname{Re} \left(e^{-i\omega t} \sum_{j=1}^3 \sum_{m=1}^{\infty} U_{lm}^{(j)} \cos \lambda_m x_3 \right), \quad l = 1, 2; \quad u_3 = \operatorname{Re} \left(e^{-i\omega t} \sum_{j=1}^3 \sum_{m=1}^{\infty} U_{3m}^{(j)} \sin \lambda_m x_3 \right). \quad (9.450)$$

Выражения (9.448), (9.450) дают представление о волноводных свойствах слоя. Видно, что при любой частоте возбуждения всегда найдется номер m , при котором характеристическое число μ_{jm} или оба характеристических числа станут чисто мнимыми, что приводит к неоднородным, экспоненциально затухающим по r волнам. При $\pi(2m-1) < 2\gamma_1 h$ первые m членов в рядах (9.449) представляют собой суперпозицию распространяющихся от источника волн. Члены ряда, удовлетворяющие неравенству $\pi(2m-1) > 2\gamma_2 h$, экспоненциально затухают с ростом r , а также с увеличением номера m . Отсюда следует, что чем толще волновод, тем более широкий спектр частот он пропускает.

Из сказанного видно, что остатки рядов (9.449) стремятся к нулю, так как общий член любого из этих рядов экспоненциально убывает с ростом номера m . Можно показать, что эти ряды абсолютно сходятся при $r \neq 0$.

Интегральные представления решений граничной задачи (9.440), (9.442). Пусть $f \in C^2(\bar{G})$, где $G = R^2 \setminus \Gamma$ — физическое поле с линией разрыва Γ . Запишем формулы для обобщенных производных

$$\partial_j f = \{\partial_j f\} + n_j [f] \delta_\Gamma, \quad (\partial_1^2 + \partial_2^2) f = \{(\partial_1^2 + \partial_2^2) f\} + \left[\frac{\partial f}{\partial n} \right] \delta_\Gamma + \frac{\partial}{\partial n} ([f] \delta_\Gamma),$$

где $\{\cdot\}$ — соответствующая классическая производная, $[\cdot]$ — скачок указанной функции на контуре Γ , n_j — проекция орта нормали к контуру Γ на ось x_j ; $[\cdot] \delta_\Gamma$ и $\frac{\partial}{\partial n} ([\cdot] \delta_\Gamma)$ — соответственно простой и двойной слои.

Вводя эти соотношения в систему (9.440) с учетом выражений (9.444), представим ее в виде

$$\Delta_{2m} U_{jm} + \sigma \partial_j \theta_m = f_{jm}, \quad j = 1, 2, 3; \quad m = 1, 2, \dots \quad (9.451)$$

$$f_{jm} = - \left[\frac{\partial U_{jm}}{\partial n} \right] \delta_\Gamma - \frac{\partial}{\partial n} \left([U_{jm}] \delta_\Gamma \right) - \sigma [\theta_m] n_j \delta_\Gamma, \quad n_3 = 0.$$

Используя матрицу Φ -решений (9.449), решение системы (9.451) можно представить в виде свертки

$$U_m(x) = \{U_{1m}, U_{2m}, U_{3m}\} = g_m * f_m; \quad x = (x_1, x_2), \quad f_m = \{f_{1m}, f_{2m}, f_{3m}\}.$$

В развернутом виде получаем отсюда интегральные представления волнового поля перемещений (всюду далее, если не оговорено иное, интегрирование ведется по контуру

$$U_{jm}(x) = \int [U_{km}] \left(y \right) \frac{\partial}{\partial n_y} g_{jm}^{(k)}(x-y) dS_y - \int \left(\left[\frac{\partial U_{km}}{\partial n} \right] + \sigma [\theta_m] n_k \right) \left(y \right) g_{jm}^{(k)}(x-y) dS_y, \\ j = 1, 2, 3, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (9.452)$$

где dS_y — элемент дуги контура Γ , суммирование по $k = 1, 2, 3$.

В случае, когда контур Γ — совокупность разомкнутых дуг (математических разрезов) Γ_v ($v = 1, 2, \dots, N$) и вектор напряжения непрерывно продолжим через все Γ_v , доста-

точно оставить первое слагаемое в правой части равенства (9.452), т. е. разыскивать решение в виде обобщенных потенциалов двойного слоя. Для решения рассматриваемой здесь задачи оставим только второе слагаемое и будем искать решение в виде обобщенных потенциалов простого слоя, которые в развернутом виде выглядят так:

$$\begin{aligned} U_{1m}(z) &= \frac{1}{\gamma_2^2} \int \left[D_m \frac{\partial}{\partial \xi_1} H + p_m \gamma_2^2 H_{02m} \right] dS, \quad U_{2m}(z) = \frac{1}{\gamma_2^2} \int \left[D_m \frac{\partial}{\partial \xi_2} H + q_m \gamma_2^2 H_{02m} \right] dS, \quad (9.453) \\ U_{3m}(z) &= \frac{1}{\gamma_2^2} \int [\lambda_m D_m H + r_m \gamma_2^2 H_{02m}] dS, \quad \theta_m(z) = \int D_m H_{01m} \frac{dS}{1+\sigma}, \\ D_m &= -p_m \frac{\partial}{\partial \xi_1} - q_m \frac{\partial}{\partial \xi_2} + r_m \lambda_m. \end{aligned}$$

Функции

$$p_m = \{p_m^\nu(\zeta), \zeta \in \Gamma_\nu\}, \quad q_m = \{q_m^\nu(\zeta), \zeta \in \Gamma_\nu\}, \quad r_m = \{r_m^\nu(\zeta), \zeta \in \Gamma_\nu\}$$

подлежат определению; $\zeta = \xi_1 + i\xi_2 \in \Gamma = \cup \Gamma_\nu$, dS — элемент дуги контура Γ , $\zeta - z = re^{i\alpha}$; функция $H = H(r)$ определена выше.

Разрешающая система интегральных уравнений. Границные условия (9.442) на контуре Γ целесообразно представить в комплексной форме

$$\begin{aligned} S_1^{(m)} - e^{\pm i\psi} S_2^{\pm(m)} &= 2e^{i\psi} (Y_1^{(m)} \mp i Y_2^{(m)}) = 2(N^{(m)} \mp iT^{(m)}), \\ e^{i\psi} S_3^{-(-m)} + e^{-i\psi} S_3^{+(m)} &= 2Y_3^{(m)}; \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (9.454)$$

$$S_i^{(m)} = S_{11}^{(m)} + S_{22}^{(m)}, \quad S_2^{\pm(m)} = S_{22}^{(m)} - S_{11}^{(m)} \pm 2iS_{12}^{(m)}, \quad S_3^{\pm(m)} = S_{13}^{(m)} \pm iS_{23}^{(m)},$$

где ψ — угол между нормалью к контуру Γ и осью Ox_1 , $N^{(m)}$ и $T^{(m)}$ — коэффициенты Фурье амплитуд нормальных и касательных усилий на Γ .

Используя закон Гука в амплитудах, получим представления введенных в (9.454) комбинаций через компоненты вектора перемещений

$$S_1^{(m)} = 2\mu(\sigma\theta_m - \lambda_m U_{3m}), \quad S_2^{\pm(m)} = -2\mu(\partial_1 \mp i\partial_2) \frac{\partial}{\partial z} V_m^\mp, \quad (9.455)$$

$$S_3^{\pm(m)} = \mu \{ (\partial_1 \mp i\partial_2) U_{3m} - \lambda_m V_m^\mp \}; \quad V_m^\pm = U_{1m} \pm iU_{2m}.$$

Введем функции y_{jm} равенствами

$$p_m = y_{1m} e^{i\psi} + y_{2m} e^{-i\psi}, \quad q_m = i(y_{2m} e^{-i\psi} - y_{1m} e^{i\psi}), \quad r_m = y_{3m}. \quad (9.456)$$

Подставив предельные значения комбинаций (9.455) в граничные равенства (9.454) с использованием представлений (9.453) и принимая во внимание формулы (9.456), получим систему сингулярных интегральных уравнений граничной задачи (9.440), (9.442)

$$\mp iy_{jm}(\zeta_0) + \frac{1}{4} \int y_{km}(\zeta) K_{jk} dS = \frac{1}{4\mu} \chi_j^{(m)}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (9.457)$$

Здесь

$$\chi_1^{(m)} = \left(Y_1^{(m)} + iY_2^{(m)} \right) e^{-i\psi_0}, \quad \chi_2^{(m)} = \left(Y_1^{(m)} - iY_2^{(m)} \right) e^{i\psi_0}, \quad \chi_3^{(m)} = 2Y_3^{(m)},$$

$$K_{11} = \left[\frac{1}{2(1-\nu)} \mu_{1m} H_{11m}^0 - \lambda_m^2 g_{1m} + \left\{ g_{4m} + 2\mu_{2m} H_{12m}^0 \right\} e^{2i(\alpha_0 - \psi_0)} \right] e^{i(\psi - \alpha_0)},$$

$$K_{12} = \left[\frac{1}{2(1-\nu)} \mu_{1m} H_{11m}^0 - \lambda_m^2 g_{1m} - g_{3m} e^{2i(\alpha_0 - \psi_0)} \right] e^{i(\alpha_0 - \psi)},$$

$$K_{13} = \lambda_m \left[\frac{1}{2(1-\nu)} H_{01m}^0 - H_{02m}^0 - \frac{\lambda_m^2}{\gamma_2^2} H^0 - g_{2m} e^{2i(\alpha_0 - \psi_0)} \right],$$

$$K_{31} = 2\lambda_m \left[g_{2m} e^{2i(\psi_0 - \alpha_0)} - g_{0m} - H_{02m}^0 \right] e^{i(\psi - \psi_0)},$$

$$K_{33} = 2 \left[2\lambda_m^2 g_{1m} + \mu_{2m} H_{12m}^0 \right] \cos(\alpha_0 - \psi_0),$$

$$\zeta_0 \in \Gamma = \cup \Gamma_\nu, \quad \psi_0 = \psi(\zeta_0), \quad \zeta - \zeta_0 = r_0 e^{i\alpha_0},$$

$$g_{0m} = \frac{1}{\gamma_2^2} \sum_{l=1}^2 (-1)^{l+1} \mu_{lm}^2 H_{0lm}^0, \quad g_{jm} = \frac{1}{\gamma_2^2} \sum_{l=1}^2 (-1)^{l+1} \mu_{lm}^j H_{jlm}^0, \quad j = 1, 2, 3,$$

$$g_{4m} = \frac{1}{\gamma_2^2} \sum_{l=1}^2 (-1)^{l+1} \mu_{lm}^3 H_{1lm}^0, \quad H_{plm}^0 = H_p^{(1)}(\mu_{lm} r_0), \quad H^0 = H(r_0),$$

$$p = 0, 1, 2, 3; \quad l = 1, 2.$$

Ядра K_{22} , K_{21} , K_{23} , K_{32} получаются из K_{11} , K_{21} , K_{13} , K_{31} заменой α_0 , ψ_0 , ψ на $-\alpha_0$, $-\psi_0$, $-\psi$ соответственно [91].

Суммарный индекс системы (9.457) равен нулю, следовательно, она однозначно разрешима для любой частоты ω , не принадлежащей спектру.

Замечание. Систему (9.457) можно использовать как для исследования волновых полей в слое (плите) с полостями, оставляя при внеинтегральных членах нижний знак, так и при рассмотрении колебаний цилиндров конечной длины (верхний знак).

Далее понадобится также выражение для нормального напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ на граничных поверхностях Γ_ν . Используя соотношения (9.453) и (9.455), представим его в виде

$$\sigma_{\theta\theta} = |S_{\theta\theta}| \cos(\omega t - \Omega), \quad \Omega = -\arg S_{\theta\theta}, \quad S_{\theta\theta} = \sum_{m=1}^{\infty} S_{\theta\theta}^{(m)} \cos \lambda_m x_3, \quad (9.458)$$

$$S_{\theta\theta}^{(m)} = S_1^{(m)} - N^{(m)} = \mp \frac{i(y_{1m}(\zeta_0) + y_{2m}(\zeta_0))}{1-\nu} +$$

$$+ \int \left(y_{1m}(\zeta) e^{i(\psi - \alpha_0)} + y_{2m}(\zeta) e^{i(\alpha_0 - \psi)} \right) \left(\frac{\mu_{1m}}{2(1-\nu)} H_{11m}^0 - \lambda_m g_{1m} \right) +$$

$$+ y_{3m}(\zeta_0) \lambda_m \left[\frac{1}{2(1-\nu)} H_{01m}^0 - H_{02m}^0 - \frac{\lambda_m^2}{\gamma_2^2} H^0 \right] dS - N^{(m)}, \quad \zeta_0 \in \Gamma.$$

Рассмотрим теперь импульсное возбуждение слоя с туннельной сквозной полостью. Введя интегральное преобразование Фурье по времени

$$U_j(x, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty u_j(x, t) e^{i\omega t} dt, \quad u_j|_{t=0} = \left. \frac{\partial u_j}{\partial t} \right|_{t=0} = 0,$$

$$u_j(x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Re} \int_0^\infty U_j(x, \omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad j = 1, 2, 3,$$

приводим граничную задачу (9.440), (9.442) относительно трансформант Фурье соответствующих плотностей к системе интегральных уравнений (9.457), где правые части представляют теперь спектральные функции действующей на поверхности полости нагрузки. Решение импульсной задачи является суперпозицией «элементарных» решений по всему спектру частот.

Некоторые результаты. Пусть слой ослаблен туннельной полостью с контуром по перечного сечения в виде эллипса ($\zeta = R_1 \cos \varphi + iR_2 \sin \varphi$) или квадрата со скругленными углами ($\zeta = R(e^{i\varphi} + 0.14036e^{-3i\varphi})$). На поверхности полости действует гармонически изменяющееся во времени нормальное давление с амплитудой

$$N = N_0 \cos \frac{\pi x_3}{2h} \quad (N_0 = \text{const}). \quad (9.459)$$

Расчеты проводили в следующей последовательности. Сначала находили приближенное численное решение системы интегральных уравнений (9.457) по методу механических квадратур [5], затем по соотношениям (9.458) восстанавливали амплитудные значения механических напряжений $\sigma_{\theta\theta}$.

Изменение относительной величины $\alpha = |S_{\theta\theta}/N_0|$ в точке A ($x_3 = 0$) в зависимости от относительного волнового числа $\gamma_1 R$ для полости кругового ($R_1 = R_2 = R = 1$), эллиптического ($R_1 = 3/2$, $R_2 = 1$, $R = (R_1 + R_2)/2$) и «квадратного» ($R = 1$) сечения представлено на рис. 9.66. Здесь $h = 1$, $v = 0,28$. Кривые 1, 2 и 3 построены для круга, эллипса и квадрата соответственно. В правом верхнем углу рис. 9.66 показано распределение величины α вдоль кругового, эллиптического и квадратного контуров в срединной плоскости слоя при тех же параметрах и в том же соответствии, что и выше, для $\gamma_1 R = 0,5$ (это распределение симметрично относительно оси $\varphi = \pi/2$).

Рассмотрим теперь слой, ослабленный двумя туннельными полостями. Кривая 1 на рис. 9.67 иллюстрирует распределение величины α вдоль контура отверстия (в срединной плоскости слоя) для случая двух круговых полостей одинакового радиуса $R = 1$ при перекрытии между ними $d = 0,1$. Кривая 2 соответствует распределению величины α вдоль контура эллиптического отверстия ($R_1 = 3/2$, $R_2 = 1$), взаимодействующего с круговым отверстием ($R = 1$) при $d = 0,1$. В обоих случаях на поверхности полостей действует нормальное давление с амплитудой (9.459). Остальные параметры те же, что и выше.

В правой верхней части рис. 9.67 представлена амплитудно-частотная характеристика величины α в точке A для цилиндра конечной длины с поперечным сечением в виде квадрата со скругленными углами для тех же значений параметров, что и выше.

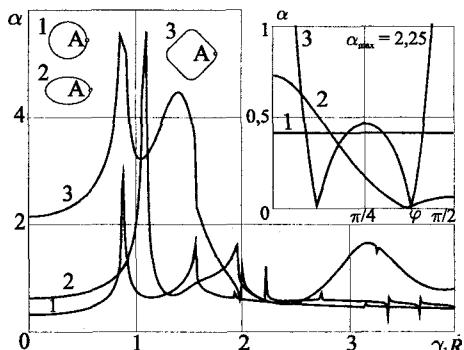


Рис. 9.66. Динамическая концентрация напряжений в слое с туннельной полостью

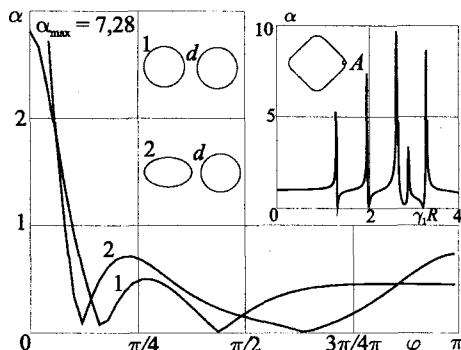
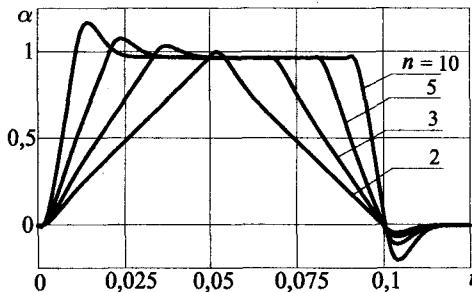


Рис. 9.67. Распределение величины α вдоль контура полости в срединной плоскости слоя ослабленного двумя отверстиями. В правой части рисунка амплитудно-частотная характеристика цилиндра конечной длины с поперечным сечением в виде квадрата со скругленными углами

Пусть на поверхности круговой полости подействовал трапециевидный импульс давления (T — продолжительность импульса)

$$N = N_0 \cos \frac{\pi x_3}{2h} \times \begin{cases} \tilde{t}, & 0 \leq \tilde{t} \leq 1, \\ 1, & 1 < \tilde{t} \leq n-1 \quad (n \geq 2), \quad \tilde{t} = n \frac{t}{T}, \\ (n-\tilde{t}), & n-1 < \tilde{t} \leq n. \end{cases}$$

Результаты расчетов эволюции относительной величины $\alpha = \sigma_{\theta\theta}/N_0$ во времени для различных значений n представлены на рис. 9.68 при $T=0,1$, $h=100$, $x_3=0$, $R=10$, $v=0,28$.



Эволюция $\alpha(t)$ во времени при действии на поверхности круговой полости трапециoidalного импульса

Таким образом, развит достаточно эффективный интегральный метод решения пространственных граничных задач о гармонических колебаниях многосвязного цилиндрического тела при смешанных граничных условиях на его основаниях.

Замечание. Отметим, что по задачам этого класса имеется много публикаций, в которых авторы используют методы однородных решений. Например, [69, 79, 80, 93, 100, 111–113] и др. Сингулярные и гиперсингулярные интегральные уравнения применяются в [5, 21, 37–39, 41, 53, 62–65, 75, 98] и др.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ 9

1. Аветисян А. С. К задаче распространения сдвиговых волн в пьезоэлектрической среде / А. С. Аветисян // Изв. АН АрмССР. Сер. Механика. 1985. Вып. 38, № 1. С. 12–19.
2. Бардзокас Д. Я. Интегральные уравнения теории упругости для многосвязной области с включениями / Д. Я. Бардзокас, В. З. Парсон, П. С. Теокарис // Прикл. математика и механика. 1989. Т. 53, вып. 3. С. 485–495.
3. Бардзокас Д. Я. Плоская задача теории упругости для ортотропной области с дефектами / Д. Я. Бардзокас, В. З. Парсон, П. С. Теокарис // Докл. АН СССР. 1989. Т. 309, № 5. С. 1072–1077.
4. Бахвалов Н. С. Осреднение уравнений с частными производными с быстроосцилирующими коэффициентами / Н. С. Бахвалов // Проблемы математической физики и вычислительной математики. М.: Наука. 1977. С. 34–51.
5. Белоцерковский С. М. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике / С. М. Белоцерковский, И. К. Лифанов. М.: Наука. 1985. 254 с.
6. Бердичевский В. Л. Об осреднении периодических структур / В. Л. Бердичевский // Прикл. математика и механика. 1977. Т. 41, вып. 6. С. 993–1006.
7. Акустические кристаллы: справ. / А. А. Блистанов [и др.]; под ред. М. П. Шаскольской. М.: Наука, 1982. 632 с.
8. Боли Б. Теория температурных напряжений / Б. Боли, Дж. Уэйнер. М.: Мир. 1964. 517 с.
9. Бондарь А. В. Пространственная неклассическая задача термоупругости для полуслоя с полостью / А. В. Бондарь, Л. А. Фильштинский // Материалы Международной научно-технической конференции памяти академика В. И. Моссаковского «Актуальные проблемы механики сплошной среды и прочности конструкций», Днепропетровск, 17–19 октября 2007. Днепропетровск: ДНУ. 2007. С. 142–144.
10. Брычков Ю. А. Интегральные преобразования обобщенных функций / Ю. А. Брычков, А. П. Прудников. М.: Наука, 1977. 287 с.
11. Владимиров В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. М.: Наука, 1981. 512 с.
12. Грибанов В. Д. Связанные и динамические задачи термоупругости / В. Д. Грибанов, И. Г. Паничкин. М.: Машиностроение, 1984. 184 с.
13. Григолюк Э. И. Об одном подходе к исследованию сингулярных полей напряжений в кусочно-однородной среде с ветвящимися разрезами / Э. И. Григолюк, М. Г. Грингауз, Л. А. Фильштинский // Докл. АН СССР. 1981. Т. 261, № 3. С. 567–570.
14. Григолюк Э. И. К решению двумерных задач теории упругости для областей с кусочно-гладкой границей / Э. И. Григолюк, М. Г. Грингауз, Л. А. Фильштинский // Докл. АН СССР. 1984. Т. 275, № 4. С. 831–834.
15. Григолюк Э. И. Перфорированные пластины и оболочки / Э. И. Григолюк, Л. А. Фильштинский. М.: Наука, 1970. 556 с.
16. Григолюк Э. И. Периодические кусочно-однородные упругие структуры / Э. И. Григолюк, Л. А. Фильштинский. М.: Наука, 1992. 290 с.
17. Григолюк Э. И. Регулярные кусочно-однородные структуры с дефектами / Э. И. Григолюк, Л. А. Фильштинский. М.: Физматгиз, 1994. 335 с.

18. Грингауз М. Г. К теории композиционных материалов с регулярной структурой / М. Г. Грингауз // Изв. АН СССР. Сер. Механика твердого тела. 1981. № 2. С. 189.
19. Грингауз М. Г. Теория упругого линейно-армированного композиционного материала / М. Г. Грингауз, Л. А. Фильшинский // Прикл. математика и механика. 1975. Т. 39, вып. 3. С. 537–546.
20. Гурвиц А. Теория функций / А. Гурвиц, Р. Курант. М.: Наука, 1968. 618 с.
21. Гузь А. Н. Хрупкое разрушение материалов при динамических нагрузках / А. Н. Гузь, В. В. Зозуля. Киев: Наук. думка, 1993. 238 с.
22. Даниловская В. И. Температурные напряжения в упругом полупространстве при внезапном нагреве его границы / В. И. Даниловская // Прикл. математика и механика. 1950. Т. 14, № 3. С. 316–318.
23. Карташов Э. М. Аналитические методы решения смешанных граничных задач теории теплопроводности / Э. М. Карташов // Изв. АН СССР. Сер. Энергетика и трансп. 1986. № 6. С. 116–129.
24. Кит Г. С. Плоская задача термоупругости для тел с трещинами / Г. С. Кит, М. Г. Кривцун. Киев: Наук. думка, 1983. 280 с.
25. Коваленко А. Д. Термоупругость / А. Д. Коваленко. Киев: Вища шк., 1975. 216 с.
26. Колесов Г. В. Применение комплексной переменной в теории упругости / Г. В. Колесов. М.–Л.: ОНТИ, 1935. 224 с.
27. Коляно Ю. М. Хвильові рівняння і представлення загального розв'язку узагальненої взаємозв'язаної задачі термопружності анизотропних пластинок / Ю. М. Коляно // ДАН УРСР. Сер. А. 1971. № 12. С. 1094–1096.
28. Красильников В. А. Введение в физическую акустику / В. А. Красильников, В. В. Крылов. М.: Наука, 1984. 400 с.
29. Карташов Э. М. Динамическая термоупругость и проблемы термического удара / Э. М. Карташов, В. З. Парсон. М.: Мир, 1991. 78 с.
30. Лаврентьев М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. М.: Наука, 1973. 736 с.
31. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела / С. Г. Лехницкий. М.: Наука, 1977. 415 с.
32. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластиинки / С. Г. Лехницкий. М.: Гостехиздат, 1957. 463 с.
33. Лыков А. В. Теплопроводность и диффузия в производстве кожи, заменителей и других материалов / А. В. Лыков. М.–Л.: Гизлегпром, 1941. 196 с.
34. Лыков А. В. Теория теплопроводности / А. В. Лыков. М.: Высш. шк., 1967. 600 с.
35. Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации / Ю. Люк. М.: Мир. 1980. 659 с.
36. Михайлов И. Г. Основы молекулярной акустики / И. Г. Михайлов, В. А. Соловьев, Ю. П. Сырников. М.: Наука, 1964. 514 с.
37. Морс Ф. М. Методы теоретической физики: в 2 т. / Ф. М. Морс, Г. М. Фешбах. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. Т. 1. 930 с.
38. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. М.: Наука, 1966. 708 с.
39. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения / Н. И. Мусхелишвили. М.: Наука, 1968. 512 с.
40. Натанзон В. Я. О напряжениях в растягиваемой пластинке, ослабленной одинаково-выми отверстиями, расположенными в шахматном порядке / В. Я. Натанzon // Мат. сб. 1935. Т. 42, № 5. С. 616–636.

41. Новацкий В. Теория упругости / В. Новацкий. М.: Мир, 1975. 872 с.
42. Подстригач Я. С. Определение температурных полей и напряжений в окрестности теплопроводящих трещин / Я. С. Подстригач, Г. С. Кит // Термовые напряжения в элементах конструкций. 1969. № 7. С. 194–201.
43. Подстригач Я. С. Обобщенная термомеханика / Я. С. Подстригач, Ю. М. Коляно. Киев: Наук. думка, 1976. 310 с.
44. Прусов И. А. Некоторые задачи термоупругости / И. А. Прусов. Минск: Изд. БГУ, 1972. 200 с.
45. Прусов И. А. Термоупругие анизотропные пластиинки / И. А. Прусов. Минск: Изд. БГУ, 1978. 200 с.
46. Скоробогатько В. Я. Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике / В. Я. Скоробогатько. М.: Наука, 1983. 311 с.
47. Соболев С. А. Процессы переноса и бегущие волны в локально-неравновесных системах / С. А. Соболев // Успехи физ. наук. 1991. Т. 161, вып. 3. С. 5–29.
48. Фильшинский Л. А. К теории упругих неоднородных сред с регулярной структурой / Л. А. Фильшинский // Прикл. математика и механика. 1973. Т. 37, вып. 2. С. 262–273.
49. Фильшинский Л. А. Теория двумерного потенциального поля в кусочно-неоднородных анизотропных регулярных средах / Л. А. Фильшинский // Прикл. математика и механика. 1974. Т. 38, вып. 2. С. 349–358.
50. Фильшинский Л. А. Упругое равновесие плоской анизотропной среды, ослабленной произвольными криволинейными трещинами. Предельный переход к изотропной среде / Л. А. Фильшинский // Изв. АН СССР. Сер. Механика твердого тела. 1976. № 5. С. 91–97.
51. Фильшинский Л. А. Усреднение электрических свойств волокнистых металлокомпозитов / Л. А. Фильшинский // Механика композит. материалов. 1995. Т. 31, № 4. С. 533–539.
52. Фильшинский Л. А. Периодические во времени однородные решения уравнения теплопроводности для анизотропного слоя в R^3 / Л. А. Фильшинский // Мат. методи та фізико-мех. поля. 2003. № 2. С. 147–154.
53. Фильшинский М. Л. Динамическое нагружение пьезокерамического полупространства с трещиной / М. Л. Фильшинский // Акуст. журн. 1993. Т. 39, вып. 5. С. 921–928.
54. Фильшинский Л. А. Метод интегральных уравнений в двумерных задачах теории упругости для кусочно-однородных сред с разрезами / Л. А. Фильшинский, М. Г. Грингауз // Мат. методы и физ.-мех. поля. Киев, 1986. № 24.
55. Фильшинский Л. А. Действие теплового импульса в анизотропном слое с туннельной полостью / Л. А. Фильшинский, Т. А. Киричек // Теорет. и приклад. механика. 2005. Вып. 40. С. 96–101.
56. Фильшинский Л. А. Гиперболическая модель теплопроводности для слоя с туннельными полостями / Л. А. Фильшинский, Т. А. Киричек // Проблемы машиностроения. 2006. Т. 9, № 1. С. 69–77.
57. Фильшинский Л. А. Расчет термоупругих напряжений в неоднородных анизотропных элементах машиностроительных конструкций / Л. А. Фильшинский, Т. А. Киричек // Проблемы машиностроения. 2007. Т. 10, № 2. С. 54–58.
58. Фильшинский Л. А. К построению фундаментальных решений для слоя в R^3 / Л. А. Фильшинский, Т. Л. Мизина // Теорет. и приклад. механика. 2001. № 32. С. 55–58.

59. Фильштинский Л. А. Двумерные фундаментальные решения в связанный задаче термоупругости / Л. А. Фильштинский, Ю. В. Сиренко // Теорет. и приклад. механика. 2003. Вып. 37. С. 157–161.
60. Фильштинский Л. А. Однородные решения задачи Неймана для композитного слоя в R^3 / Л. А. Фильштинский, Ю. В. Сиренко // Современные проблемы механики сплошной среды. Ростов-н/Д: Новая кн., 2003. Т. 1. С. 200–205.
61. Фильштинский Л. А. Связанные термоупругие поля в слое при сосредоточенных возбуждениях / Л. А. Фильштинский, Ю. В. Сиренко, Л. Л. Фильштинская // Мат. методы и физ.-мех. поля. 2005. № 2. С. 137–146.
62. Фильштинский Л. А. Усреднение физических свойств волокнистых пьезокомпозитов / Л. А. Фильштинский, Ю. В. Шрамко // Механика композит. материалов. 1998. Т. 34, № 1. С. 116–123.
63. Фильштинский Л. А. Применение метода регулярных структур к усреднению физических свойств волокнистых пьезокомпозитов / Л. А. Фильштинский, Ю. В. Шрамко // Проблемы машиностроения. 2002. Т. 5, № 2. С. 82–87.
64. Фильштинський Л. А. Зв'язані термопружні поля в шарі при зосереджених збудженнях (кососиметричний розв'язок) / Л. А. Фильштинський, О. В. Бондар // Машинознавство. Львів, 2004. № 6. С. 30–38.
65. Фильштинський Л. А. Дослідження спектрів власних частот скінчених циліндрів при скручуванні (кососиметричний розв'язок) / Л. А. Фильштинський, О. В. Бондар // Машинознавство. Львів, 2006. № 4. С. 20–25.
66. Фильштинський Л. А. Крайова задача електропружності для п'єзокерамічного еліптичного циліндра та шару з тунельною порожниною / Л. А. Фильштинський, Л. В. Шрамко // Физ.-хім. мех. мат. 2007. № 2. С. 49–54.
67. Шашков А. Г. Волновые явления теплопроводности: системно-структурный подход / А. Г. Шашков, В. А. Бубнов, С. Ю. Яновский. М.: УРСС. 2004. 296 с.
68. Шашков А. Г. Температурные волны в материалах с тепловой памятью / А. Г. Шашков, С. Ю. Яновский // Изв. АН БССР, Сер. физико-энергет. наук. 1983. № 3. С. 79–82.
69. Aksentian O. K. Stress state of a thin plate / O. K. Aksentian, I. I. Vorovich // Appl. Math. Mech. 1963. № 27. P. 1057–1074.
70. Altuhov E. V. The stress state of thick plates under homogeneous boundary conditions of mixed type on the faces / E. V. Altuhov // J. Math. Sci. 1995. № 76. P. 2339–2342.
71. Altuhov E. V. Stress state of isotropic layers with crack / E. V. Altuhov, A. S. Goltsev, V. K. Hiznyak // Int. Appl. Mech. 1997. № 33. P. 39–46.
72. Altuhov E. V. Three-dimensional problems of steady vibrations of isotropic plates / E. V. Altuhov, V. V. Misovshii, Y. V. Panchenko // J. Math. Sci. 1997. № 86. P. 3095–3098.
73. Babolian E. A new computational method for Laplace transforms by decomposition method / E. Babolian, J. Biazar, A. R. Vahidi // Appl. Math. Comput. 2004. Vol. 150, № 3. P. 841–846.
74. Band W. Second sound and the heat conductivity in helium II / W. Band, L. Meyer // Phys. Rev. 1948. Vol. 73. P. 226.
75. Bardzokas D. I. Mathematical methods in Electro-Magneto-Elastisity / D. I. Bardzokas, M. L. Filchtinskii, L. A. Filchtinskii. Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 2007. 530 p.
76. Bardzokas D. I. On the non-classical problem of thermal conduction on anisotropic layers in R^3 / D. I. Bardzokas, T. A. Kirichek, L. A. Filchtinskii // Europ. Journ. of mechanics A/Solids. 2009. Vol. 28, N 4. P. 811–819.

77. Berlincourt D. Properties of Morgan Electroceramic ceramics / D. Berlincourt, H. A. Crueger. 2000. www.morgan-electroceramics.com/techpubl.html.
78. Biot M. A. Thermoelasticity and irreversible thermodynamics / M. A. Biot // J. Appl. Phys. 1956. Vol. 27. № 3. P. 240–253.
79. Bodnya Y. N. Elastic deformation of thick plates with sliding restraint of the end faces / Y. N. Bodnya, V. A. Shaldyrvan // J. Math. Sci. 1991. № 57. P. 2835–2840.
80. Bulanov G. S. Multisided tension of thick partial homogeneous plates / G. S. Bulanov // J. Theor. Appl. Mech. 1977. № 8. P. 19–23.
81. Carillo S. Some remarks on materials with memory: heat conduction and viscoelasticity / S. Carillo // Journal of nonlinear mathematical physics. 2005. Vol. 12. Suppl. 1. P. 163–178.
82. Cattaneo C. // Comptes rendus. 1958. Vol. 247, N 4. P. 431–433.
83. Dreyer W. Heat pulse experiments revisited / W. Dreyer, H. Stuchtrup // Cont. Mech. Thermodyn. 1993. N 5. P. 3–50.
84. Phillips E. G. Some Topics in Complex Analysis / E. G. Phillips. Oxford: Pergamon Press, 1966. 141 p.
85. Golam Hossen F. R. Thermoelastic waves without energy dissipation in an elastic plate to a suddenly punched hole / F. R. Golam Hossen, A. Mallet // Science and Technology. Research Journal. 2000. Vol. 6. P. 16–31.
86. Green F. Thermoelasticity / F. Green, K. Lindsay // J. Elast. 1972. № 2. P. 1–7.
87. Gurtin M. E. A general theory of heat conduction with finite wave speeds / M. E. Gurtin, A. C. Pipkin // Arch. Ration. Mech. Anal. 1968. № 31. P. 113–126.
88. Joseph D. D. Preziosi Luigi. Heat waves / D. D. Joseph // Rev. Mod. Phys. 1989. № 61. P. 41–73.
89. Kosmodamianskii A. S. Three-dimensional problems of the theory of elasticity for multi-connected plates / A. S. Kosmodamianskii // Appl. Mech. 1983. № 19. P. 3–21.
90. Kumar R. Deformation due to mechanical and thermal sources in generalized orthorhombic thermoelastic material / R. Kumar, L. Rani // Sadhana. 2004. Vol. 29. Part. 5. P. 429–447.
91. Kushnir D. V. Harmonic and pulse excitations of multiply connected cylindrical bodies / D. V. Kushnir, L. A. Fil'shtinskii // Journal of Applied Mathematical and Mechanics. 2006. № 70. P. 274–283.
92. Li J. D., Gu. Y., Guo Z. Y. The thermal wave phenomena and analysis in the pulse-laser processing for the reduction of core loss in silicon stress, presented at 4th national conference of thermophysics, Hongzhou, People's Republic of China [in Chinese]. 1993.
93. Lourie A. I. On the theory of thick plates / A. I. Lourie // Appl. Math. Mech. 1942. № 6. P. 151–167.
94. Müller I. Rational extended thermodynamics. Springer Tracts in natural philosophy / I. Müller, T. Ruggeri. 2nd edition. New York: Springer, 1998. 396 p.
95. Nunziato J. W. On heat conduction in materials with memory / J. W. Nunziato // Quart. Appl. Math. 1971. № 29. P. 187–204.
96. Osborne D. V. Propagation of second sound below 1°K / D. V. Osborne // Low temp. phys., NBS (US) Circular. 1950. № 519. P. 139.
97. Ozisik M. N. On the wave theory in heat conduction / M. N. Ozisik, D. Y. Tzou // ASME J Heat Transfer. 1994. № 116. P. 526–535.
98. Parton V. Z. Electromagnetoelasticity of piezoelectrics and electrically conductive solids / V. Z. Parton, B. A. Kudryavtsev. New York: Gordon and Breach, 1988. 389 p.
99. Peshkov V. Second sound in helium II / V. Peshkov // J. Phys. 1944. № 8. P. 381.

100. Prokopov V. K. Application of the symbolic method to the derivation of the equations of the theory of plates / V. K. Prokopov // J. Appl. Math. Mech. 1965. № 29. P. 1064–1083.
101. Shen W. A numerical solution of two-dimensional hyperbolic heat conduction with non-linear boundary conditions / W. Shen, S. Han // Heat and Mass Transfer. 2003. № 39. P. 499–507.
102. Sherman D. I. On the problem of plain strain in non-homogeneous media / D. I. Sherman // Non-homogeneity in elasticity and plasticity. London [etc.]: Pergamon Press, 1959. P. 3–20.
103. Theocaris P. S. Numerical solution of singular integral equation. Part I. Methods. Part II. Applications / P. S. Theocaris // Proc. Amer. Cos. Civil. Eng. Mech. Div. 1981. Vol. 107. № 5. P. 733–771.
104. Theocaris P. S. The influence of a finite stringer on the stress intensities around cracks in plates / P. S. Theocaris, D. I. Bardzokas // Eng. Fract. Mech. 1981. Vol. 14. P. 493–507.
105. Theocaris P. S. The frictionless contact of cracked elastic bodies / P. S. Theocaris, D. I. Bardzokas // ZAMM. 1983. Vol. 63. P. 89–102.
106. Theocaris P. S. Reinforcement of a cracked plate by a loaded strip-inclusion / P. S. Theocaris, D. I. Bardzokas // Ing. Archiv. 1985. Vol. 55. P. 45–56.
107. Theocaris P. S. The plane frictionless contact of two elastic bodies. The Inclusion Problem / P. S. Theocaris, D. I. Bardzokas // Ing. Archiv. 1987. Vol. 57. P. 315–327.
108. Theocaris P. S. N. I. Numerical Integration Methods for the solution of singular integral equations / P. S. Theocaris, N. I. Ioakimidis // Quart. Of Appl. Mathem. 1977. Vol. 35, № 1. P. 173–185.
109. Tzou D. Y. Thermal lagging in random media / D. Y. Tzou, J. K. Chen // J Thermophys Heat transfer. 1998. № 12. P. 567–574.
110. Vernotte P. Les paradoxes de la throrie continue de l'rquation de la chaleur / P. Vernotte // Comptes Rendus. 1958. Vol. 246. N 22. P. 3154–3155.
111. Vorovich I. I. The stress state of thick layers / I. I. Vorovich, O. S. Malkina // Appl. Math. Mech. 1967. № 31. P. 230–241.
112. Vorovich I. I. Certain stress concentration problems / I. I. Vorovich // Appl. Math. Mech. 1968. № 2. P. 45–53.
113. Zhirov V. E. Electro-elastic equilibrium of a piezoceramic plate / V. E. Zhirov // Appl. Math. Mech. 1977. № 41. P. 1114–1121.

Бардзокас Демостенис Иоаннис
Фильшинский Леонид Аншевович
Фильшинский Михаил Леонидович

АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ
СВЯЗАННЫХ ФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ
В ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛАХ

Монография

Том 1

Математический аппарат
физических и инженерных наук

Дизайнер Л. Н. Загуменова
Технический редактор А. В. Широбоков
Компьютерная верстка Ж. И. Абсалямова
Корректор А. А. Чукарева

Подписано в печать 29.12.2009. Формат 70x90 $\frac{1}{16}$.
Гарнитура «Times New Roman». Усл. печ. л. 63,00. Уч.-изд. л. 58,12.
Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Заказ № 78.

НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
<http://shop.rcd.ru> E-mail: mail@rcd.ru

Первый том монографии является математическим введением в методы решения современных научных задач физики, механики сплошной среды и техники. В доступной форме излагаются наиболее востребованные разделы математики: элементы теории аналитических функций комплексного переменного, некоторые аспекты математической физики, основы функционального анализа, теория регулярных интегральных, сингулярных и гиперсингулярных уравнений, а также некоторые их приложения к решению целого круга задач.

Данный том совместно с последующими томами планируемой пятитомной серии может служить учебным пособием для студентов механико-математических и физических факультетов университетов, а также вузов с повышенной математической подготовкой. Эта книга также может быть полезна специалистам в области прикладной математики, механики связанных физических полей, физики твердого тела и т. п.



БАРДЗОКАС Демостенис Иоаннис

Профессор на кафедре механики факультета прикладной математики и физических наук Афинского национального университета. Опубликовал более 130 научных работ по различным разделам механики сплошной среды (механика разрушения, упругость, термоупругость, электроупругость, механика связанных полей, механика композиционных материалов, механика землетрясений, теория волн и т. д.), является автором и соавтором многих учебников и монографий в вышеуказанной научной области, которые были изданы на разных языках (русский, английский, греческий).



ФИЛЬШТИНСКИЙ Леонид Аншевович

Доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной и вычислительной математики Сумского государственного университета, академик Российской Академии Естествознания (РАЕ). Заслуженный деятель науки и образования по определению РАЕ. Подготовил 3 доктора и 26 кандидатов наук. Автор более 300 научных статей, 11 монографий и учебных пособий. Научные интересы: математическая физика, механика сплошной среды.



ФИЛЬШТИНСКИЙ Михаил Леонидович

Родился в г. Новосибирске (Россия) в 1961 г. С 1975 г. жил в г. Сумы (Украина). В 1989 г. защитил кандидатскую диссертацию: «Решение двумерных динамических задач теории упругости и электроупругости для тел с полостями-разрезами» на механико-математическом факультете МГУ. Ведущий научный сотрудник Сумского государственного университета, автор более 55 научных трудов. Безвременно ушел из жизни 21 ноября 2003 г.

ISBN 978-5-93972-781-5

9 785939 727815