ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ и ПРИКЛАДНАЯ ФИЗИКА

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА ВОЛНОВЕДУЩИХ СТРУКТУР

А.А. БАРЫБИН

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ и ПРИКЛАДНАЯ ФИЗИКА

А.А. БАРЫБИН

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА ВОЛНОВЕДУЩИХ СТРУКТУР

ТЕОРИЯ ВОЗБУЖДЕНИЯ И СВЯЗИ ВОЛН

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2007

УДК 537.876; 621.372.8
ББК 31.27-01
Б 26

Барыбин А. А. **Электродинамика волноведущих структур. Теория возбуждения и связи волн.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 512 с. — ISBN 978-5-9221-0740-2.

На основе базовых положений электродинамики разработана самосогласованная теория возбуждения и связи волноводных мод, применимая к любым (закрытым и открытым) волноведущим структурам. Рассмотрены волноведущие структуры, содержащие в своем составе среды с изотропными, анизотропными и бианизотропными свойствами. Рассмотрение проводилось с учётом диссипации энергии в этих средах. В качестве приложения общей теории рассмотрены планарные оптические волноводы, используемые в интегральной оптике, электрооптике, акустооптике и магнитооптике. Коэффициенты модальной связи получаются как частный случай общих выражений, учитывающих статистические и динамические параметрические возмущения в применении к направляемым и излучательным модам открытых диэлектрических волноводов.

Результаты двух последних глав могут служить основой для разработки прикладных программ численного расчета разнообразных устройств волноводной оптики.

Книга предназначена студентам, аспирантам и преподавателям вузов, а также специалистам в области теоретической и прикладной электродинамики, интегральной оптики, акустооптики, электрооптики и магнитооптики.

ISBN 978-5-9221-0740-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

Электродинамика с момента своего зарождения во времена Максвелла до современного состояния прошла большой путь трудами многочисленных исследователей и ученых. Ее первые шаги как теории электромагнитного поля заложили надежные основы для практического применения электромагнитных колебаний и волн, что впоследствии сформировало различные направления технической электродинамики. В дальнейшем прогресс теоретической и технической электродинамики определялся не только чисто научными интересами, но и стимулировался технологическими потребностями и техническими задачами, возникавшими на определенном этапе.

Одним из первых стимулирующих факторов было развитие *радиосвязи* и *радиолокационной техники*. Возникла практическая необходимость в теоретическом изучении и инженерном освоении электромагнитных резонаторов, волноводов и антенн радиочастотного и сверхвысокочастотного (СВЧ) диапазонов. В качестве волноведущих сред для разнообразных СВЧ-устройств изначально применялись пассивные диэлектрики с изотропными свойствами, а затем магнитодиэлектрики с анизотропными свойствами (ферриты). Антенная тематика и вопросы распространения электромагнитных волн в околоземной атмосфере породили в свое время большой интерес к изучению газовой плазмы (естественной и искусственной) как волноведущей среды. Накопленный за многие годы опыт в этих направлениях в настоящее время аккумулирован в многочисленных научных и инженерно-технических публикациях, которые составляют современную основу теоретической и технической электродинамики сантиметрового и миллиметрового диапазонов длин волн.

Электромагнитные волны оптического диапазона издавна изучались в рамках геометрической и волновой оптики некогерентного и когерентного излучения. Несколько десятилетий назад появился мощный стимул для переформулировки ряда теоретических положений электродинамики в приложении к практическим нуждам *волоконной и интегральной оптики*, зародившейся в те годы. Сегодня оптические каналы передачи, приема и обработки информации широко применяются в современных системах связи и телекоммуникаций, включая всемирную сеть Интернет. Для этих целей используют оптические волноводы различного типа, среди которых преобладают волоконные и планарные конструкции как основные волноведущие структуры. Обработка информации в оптических волноводах осуществляется на основе материальных сред со специфическими свойствами, позволяющими эффективно управлять характеристиками распространения электромагнитных волн. К подобным средам прежде всего относятся материалы, обладающие акустооптическими, электрооптическими и магнитооптическими свойствами. Широкое применение также находят периодические волноводы с гофрированной поверхностью и связанные диэлектрические волноводы. Электродинамические проблемы волновых процессов в разнообразных устройствах волоконной и интегральной оптики составляют сегодня предмет *волноводной оптики*.

В настоящее время наблюдается возросший интерес к электродинамическим проблемам, которые вызваны применением киральных и бианизотропных сред для управления электромагнитными процессами в волноведущих структурах. Несмотря на то, что свойство естественной киральности (оптической активности) в ряде природных веществ было известно свыше полтораста лет назад и достаточно изучено, оно не находило практического применения до последнего времени. Возрождение научного и технического интереса к подобным средам вызвано в настоящее время достижениями в технологии синтеза искусственных сред с бианизотропными свойствами. Уникальные свойства таких сред открывают неожиданные потенциальные возможности, связанные с их применением в СВЧ и оптическом диапазонах, что формирует новое направление *бианизотропной электродинамики*.

Таким образом, современная электродинамика имеет дело с различного рода анизотропными и бианизотропными средами, обладающими разнообразными физическими свойствами (диэлектрическими, магнитными, акустооптическими, электрооптическими, магнитооптическими и др.), которые можно собирательно назвать *сложными средами*, в отличие от простых сред с изотропными свойствами.

К настоящему моменту научная литература, посвященная различным аспектам электродинамики волноведущих структур, огромна и отличается разнообразием применяемых подходов, формулировок и приближений. Это делает чрезвычайно трудной, а зачастую и невыполнимой, задачу формирования единой физической картины и согласования между собой результатов, полученных разными авторами. Более того, применение различных волноведущих сред (например, с акустооптическими, электрооптическими и магнитооптическими свойствами) привело к формированию самостоятельных научно-технических направлений в волноводной оптике, таких как акустооптика, электрооптика и магнитооптика. В последние годы эти направления, в том числе и бианизотропная электродинамика, развивались практически независимо друг от друга, что породило большое количество работ, базирующихся на различных теоретических моделях и подходах. Как следствие этого, ученые и инженеры, специализирующиеся в разных областях теоретической и технической электродинамики, зачастую испытывают трудности в общении и взаимопонимании, а также при чтении литературы.

Все вышесказанное свидетельствует о том, что в настоящее время возникла необходимость в разработке строгой и последовательной теории возбуждения и связи мод в волноведущих структурах, изложенной с единых электродинамических позиций. Это вполне реально, так как теоретическое изучение электромагнитных волн в любой волноведущей структуре всегда базируется на совместном решении уравнений Максвелла с учетом специфики применяемой среды в форме материальных уравнений и электродинамических граничных условий. Разрабатываемая теория должна быть построенной на фундаментальных формулировках электродинамики, таких как теорема Пойнтинга, лемма Лоренца, спектр собственных мод волноведущей структуры и т. п. Только в этом случае она может дать единый электродинамический подход к анализу различных волноводов и сформировать физически непротиворечивую картину разнообразных волновых взаимодействий. Именно это и составляет основную цель данной монографии.

Самосогласованный подход к разработке единой теории волновых взаимодействий, основанный на строгих электродинамических принципах, будет *осуществлен последовательно в три этапа,* описанные во введении.

Глава 1 посвящена рассмотрению волноведущих свойств и отличительных особенностей открытых волноводов как наиболее общей формы волноведущей структуры. Открытые волноводы имеют в составе своего спектра не только дискретные моды (являющиеся единственно возможными для закрытых волноводов), но и излучательные моды непрерывной части спектра.

В гл. 2 разрабатывается теория возбуждения дискретных и излучательных мод открытого волновода заданными источниками для общего случая бианизотропных сред. В частном случае теория применима к оптическим волноводам, а также допускает обобщение на случай сред с пространственной дисперсией, рассмотрение которых выходит за рамки данной книги.

Главы 3 и 4 содержат изложение техники перехода от уравнений возбуждения мод заданными источниками к уравнениям связанных мод на примере открытых волноводов с последующим анализом оптико-волновых взаимодействий в одноволноводных и многоволноводных оптических системах.

Математические выводы и вспомогательный материал, в частности общие аспекты теории связанных мод, вынесены в приложения.

Изложение в книге построено так, чтобы сделать ее доступной большинству читателей без обращения к другой литературе. Однако для этого читатель должен обладать начальными знаниями в области теории электромагнитного поля и классической электродинамики, изложенными, например, в следующих книгах:

- *Никольский В. В.* Теория электромагнитного поля. 3-е изд. — М.: Высшая школа, 1964.
- *Джексон Дж.* Классическая электродинамика. — М.: Мир, 1965.
- *Каценеленбаум Б. З.* Высокочастотная электродинамика (основы математического аппарата). — М.: Наука, 1966.
- *Гольдштейн Л. Д., Зернов Н. В.* Электромагнитные поля и волны. 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Советское радио, 1971.
- *Вайнштейн Л. А.* Электромагнитные волны. 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Радио и связь, 1988.

Книга предназначена для студентов, аспирантов и преподавателей вузов, а также для специалистов в области теоретической и прикладной электродинамики, интегральной оптики, акустооптики, электрооптики и магнитооптики. Результаты двух последних глав могут служить основой для разработки прикладных программ численного расчета устройств волноводной оптики.

Любые критические замечания и пожелания, высланные по нижеуказанному адресу, будут приняты с благодарностью.

Санкт-Петербург
декабрь 2006 г.

А. А. Барыбин
barybin@mail.ru

Введение

ПОСТАНОВКА И КРАТКОЕ ОБСУЖДЕНИЕ ПРОБЛЕМ, РАЗРАБАТЫВАЕМЫХ В КНИГЕ

Предлагаемое введение содержит материал, который кратко вводит читателя в круг общих проблем и задач, решаемых в последующих главах книги на пути к разработке единой электродинамической теории возбуждения и связи мод в волноведущих структурах.

Анализ любой волноведущей структуры имеет конечной целью выяснение характера волновых взаимодействий в форме обмена мощностью между модами этой структуры при наличии ее возмущения. Поэтому разработка общей электродинамической теории волновых взаимодействий осуществляется последовательно в три этапа:

- решение волноводной задачи на собственные значения,
- решение задачи о возбуждении волновода заданными источниками,
- решение задачи о связи между модами рассматриваемого волновода.

Первый этап — решение волноводной задачи на собственные значения, имеет дело с так называемым *базовым волноводом*, выделенным из сложной волноведущей структуры. Геометрическая форма и параметры среды, заполняющей подобный волновод, должны допускать решение граничной задачи на собственные значения для однородных уравнений Максвелла (без возбуждающих источников) с соответствующими электродинамическими граничными условиями (ЭГУ). Такое решение дает искомый спектр базового волновода, дискретные моды которого подчиняются дисперсионному уравнению, полученному на этом этапе.

Основными характеристиками собственной моды (для определенности, с номером m) любого волновода, в том числе выбранного в качестве базового, являются следующие:

1) *постоянная распространения* $\gamma_m = \alpha_m + i\beta_m$, которая найдена из решения дисперсионного уравнения и описывает продольное распределение полей в форме $\exp(-\gamma_m z)$;

2) набор собственных функций, которые найдены как решение однородной граничной задачи и описывают поперечное распределение электрического и магнитного полей $\widehat{\mathbf{E}}_m(\mathbf{r}_t)$ и $\widehat{\mathbf{H}}_m(\mathbf{r}_t)$, отмеченных сверху колпачком и в дальнейшем называемых *мембранными функциями*.

Полные невозмущенные поля m-й моды (при гармонической зависимости от времени в форме $\exp(i\omega t)$) записываем в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_m(\mathbf{r}_t, z, t) &= \mathbf{E}_m(\mathbf{r}_t, z)\, e^{i\omega t} = \widehat{\mathbf{E}}_m(\mathbf{r}_t)\, e^{(i\omega t - \gamma_m z)}, \\ \mathbf{H}_m(\mathbf{r}_t, z, t) &= \mathbf{H}_m(\mathbf{r}_t, z)\, e^{i\omega t} = \widehat{\mathbf{H}}_m(\mathbf{r}_t)\, e^{(i\omega t - \gamma_m z)}. \end{aligned} \tag{1}$$

Волновой множитель $\exp(i\omega t - \gamma_m z)$ учитывает *дисперсию моды*, понимаемую *в расширенной форме* как частотную зависимость не только фазовой скорости $v_{\mathrm{ph},m}(\omega) = \omega/\beta_m(\omega)$, но и амплитудной постоянной $\alpha_m(\omega)$. В диссипативных системах потери обеспечивают ненулевое затухание ($\alpha_m \neq 0$) для всех без исключения мод, называемых поэтому *диссипативными модами*.

В недиссипативных системах модальный спектр содержит, как известно, кроме *распространяющихся мод* с $\alpha_m = 0$ и $\gamma_m = i\beta_m$, также моды, имеющие комплекснозначные постоянные распространения $\gamma_m = \alpha_m + i\beta_m$ с $\alpha_m \neq 0$, несмотря на отсутствие потерь. Такие моды могут существовать только на частотах, соответствующих полосе непропускания волновода, и поэтому называются *нераспространяющимися* модами. Среди них имеются *исчезающие моды* (англ. *evanescent modes*), которые затухают по амплитуде ($\alpha_m \neq 0$) без изменения фазы ($\beta_m = 0$), так что их постоянная распространения чисто вещественная ($\gamma_m = \alpha_m$). Кроме того, возможны более общие физические ситуации, когда в полосе непропускания существуют так называемые *комплексные моды* (англ. *complex modes*), имеющие одновременно $\alpha_m \neq 0$ и $\beta_m \neq 0$. Для таких мод затухание амплитуды в форме $\exp(-\alpha_m z)$ сопровождается распространением фазы, описываемым фазовым множителем $\exp\left[i(\omega t - \beta_m z)\right]$.

Следовательно, термин *нераспространяющийся* в применении к комплексным модам является неточным. По этой причине нераспространяющиеся моды (комплексные и исчезающие) предпочтительнее собирательно называть *реактивными модами*, поскольку их затухание имеет чисто реактивный (недиссипативный) характер, связанный с запасанием реактивной энергии без переноса ее вдоль волновода.

По этой терминологии, распространяющиеся моды с чисто мнимой постоянной распространения $\gamma_m = i\beta_m$, в отличие от реактивных, следует называть *активными модами*. Для таких мод характерно существование действительной групповой скорости $v_{\mathrm{gr},m} = (\partial\beta_m/\partial\omega)^{-1}$, которая определяет активную *собственную мощность*, переносимую m-й модой вдоль волновода,

$$P_m = v_{\mathrm{gr},m} W_m, \tag{2}$$

где W_m — средняя во времени электромагнитная энергия, запасенная m-й модой в единице длины волновода.

Реактивные моды, подобно активным, также запасают энергию ($W_m \neq 0$), но каждая из них по отдельности *не может* переносить *собственную мощность* из-за отсутствия у нее групповой скорости (вследствие комплексных *или чисто вещественных значений* γ_m). Как показано в гл. 2, такая возможность для каждой реактивной моды возникает только в отношении *взаимной мощности*, переносимой в паре с другой реактивной модой, названной *двойниковой модой* (англ. *twin-conjugate mode*).

Таким образом, вновь введенные термины *активная мода* и *реактивная мода* классифицируют их по наличию или отсутствию переносимой активной мощности P_m, определяемой выражением (2). Эти термины полностью эквивалентны терминам *распространяющаяся мода* и *нераспространяющаяся мода*, если под этим понимать наличие или отсутствие не фазовой скорости, а *групповой скорости* моды.

Разработке первого этапа анализа в применении к открытым волноведущим структурам посвящена гл. 1, где изучаются спектральные и энергетические характеристики открытого диэлектрического волновода, используемого в качестве базового волновода, который имеет в своем спектре как дискретные направляемые моды, так и непрерывные излучательные моды.

Второй этап — решение задачи о возбуждении волновода сторонними источниками, рассматривает оставшуюся (после выделения базового волновода на первом этапе) часть исследуемой волноведущей структуры как возмущение базового волновода. Это возмущение записывается в форме *возбуждающих источников* (электрических и магнитных токов, соответственно отмеченных верхними индексами e и m от англ. *electric* и *magnetic*), которые считаются заданными на данном этапе.

Возбуждающие источники в форме *объемных токов* $\mathbf{J}_b^{e,m}$ (с нижним индексом b от англ. *bulk*) входят в уравнения Максвелла,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{J}_b^m, \tag{3}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}_b^e, \tag{4}$$

и в форме *поверхностных токов* $\mathbf{J}_s^{e,m}$ (с нижним индексом s от англ. *surface*) входят в электродинамические граничные условия,

$$\mathbf{n}_s^+ \times \mathbf{E}^+ + \mathbf{n}_s^- \times \mathbf{E}^- = -\mathbf{J}_s^m, \tag{5}$$

$$\mathbf{n}_s^+ \times \mathbf{H}^+ + \mathbf{n}_s^- \times \mathbf{H}^- = \mathbf{J}_s^e. \tag{6}$$

Здесь векторы с верхними индексами $^{\pm}$ обозначают поля, взятые в точках границы с поверхностными токами $\mathbf{J}_s^{e,m}$, лежащих по разные ее стороны, которые отмечены единичными нормалями $\mathbf{n}_s^{\pm}$, направленными *внутрь* соседних сред, разделяемых этой границей.

Иными словами, второй этап анализа разрабатывает *теорию возбуждения мод* волновода заданными токами, чему и посвящена гл. 2 в применении к любым сложным волноведущим структурам с многослойными изотропными, анизотропными и бианизотропными средами.

Теоретическую основу второго этапа составляет *метод модальных разложений*, широко используемый в волновой теории. Основная идея метода базируется на том факте, что совокупность собственных мод невозмущенного базового волновода является *полной*, т. е. система мембранных функций $\{\widehat{\mathbf{E}}_m(\mathbf{r}_t), \widehat{\mathbf{H}}_m(\mathbf{r}_t)\}$ полна на поперечном сечении волновода. Это означает, что возбуждение мод заданным током (как и связь между ними) возмущает только продольное (в направлении оси волновода) распределение мод и оставляет без изменения их поперечные распределения, описываемые мембранными функциями. Эти функции были найдены на первом этапе из решения невозмущенной задачи на собственные значения.

Искомые электромагнитные поля при наличии возмущений могут быть представлены в форме модального разложения по невозмущенному спектру базового волновода (опуская у полей (1) временну́ю зависимость $\exp(i\omega t)$):

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}_t, z) &= \sum_m A_m(z)\,\mathbf{E}_m(\mathbf{r}_t, z) = \sum_m A_m(z)\,\widehat{\mathbf{E}}_m(\mathbf{r}_t)\,e^{-\gamma_m z},\\ \mathbf{H}(\mathbf{r}_t, z) &= \sum_m A_m(z)\,\mathbf{H}_m(\mathbf{r}_t, z) = \sum_m A_m(z)\,\widehat{\mathbf{H}}_m(\mathbf{r}_t)\,e^{-\gamma_m z}.\end{aligned} \tag{7}$$

Здесь амплитуды $A_m(z)$, называемые *амплитудами возбуждения*, содержат искомую зависимость от z, порожденную возбуждением мод заданным распределением токов. Вне области возбуждения амплитуда моды остается неизменной ($A_m(z) = \text{const}$) и равной той величине, которую мода приобрела на выходе из области возбуждения.

Нахождение закона изменения амплитуды $A_m(z)$ *внутри* области возбуждения является основной и конечной целью теории возбуждения мод.

В простейшем случае волноводов без потерь уравнение возбуждения *активной моды* заданными объемными ($\mathbf{J}_b^{e,m}$) и поверхностными ($\mathbf{J}_s^{e,m}$) токами имеет вид (см. уравнение (2.7.15))

$$\begin{aligned}\frac{dA_m}{dz} = &-\frac{1}{N_m}\int\limits_{S_b}\left(\mathbf{J}_b^e\cdot\mathbf{E}_m^* + \mathbf{J}_b^m\cdot\mathbf{H}_m^*\right)dS -\\ &-\frac{1}{N_m}\int\limits_{L_s}\left(\mathbf{J}_s^e\cdot\mathbf{E}_m^* + \mathbf{J}_s^m\cdot\mathbf{H}_m^*\right)dL.\end{aligned} \tag{8}$$

Здесь объемные токи занимают область S_b, а поверхностные локализованы на контуре L_s; при этом N_m — *норма* m-й активной моды, построенная на ее мембранных функциях в следующей форме (см. уравнение (2.7.16)):

$$N_m = 2\mathrm{Re}\int\limits_S \left(\widehat{\mathbf{E}}_m \times \widehat{\mathbf{H}}_m^*\right)\cdot\mathbf{e}_z dS, \tag{9}$$

где S — площадь поперечного сечения базового волновода.

Для реактивных мод в волноводах без потерь и диссипативных мод при наличии потерь уравнения (8) и (9) имеют другой вид, приведенный в гл. 2.

Знание закона изменения амплитуды возбуждения $A_m(z)$, полученного из решения уравнения (8) (или ему подобного), позволяет найти продольное распределение *собственной мощности*, переносимой m-й модой (см. уравнения (2.2.10) и (2.4.12)),

$$P_m(z) = \frac{1}{4}N_m\left|A_m(z)\right|^2 e^{-2\alpha_m z}, \tag{10}$$

где $\alpha_m = 0$ для активных (распространяющихся) мод в волноводе без потерь.

Обоснование выражений (9) и (10), а также аналогичных формул, выражающих *взаимную норму* N_{mn} и *взаимную мощность* P_{mn} для пары мод с номерами m и n, будет сделано в гл. 2 (см. уравнения (2.2.6)–(2.2.13)).

В рамках метода модальных разложений решающей является *проблема полноты* системы базисных функций невозмущенного волновода в области возбуждающих источников. Большинство авторов решают эту проблему путем разложения искомых электромагнитных полей по невозмущенному спектру мод с учетом только поперечных компонент полей. Такой подход к проблеме возбуждения обеспечивает полноту системы собственных функций на поперечном сечении волновода благодаря исключению продольной компоненты полей. Однако эта процедура одновременно исключает из рассмотрения и так называемые *ортогональные дополнительные поля*. Как следствие этого, в области источников, содержащей не только поперечные, но продольные объемные токи, модальные разложения (7), широко используемые в литературе, дают неполное представление искомых полей.

Как показано в гл. 2, *внутри* области возбуждающих источников *полные* электромагнитные поля всегда должны быть представлены в следующей форме (см. уравнения (2.6.1) и (2.6.2)):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_t, z) = \mathbf{E}_a(\mathbf{r}_t, z) + \mathbf{E}_b(\mathbf{r}_t, z) = \sum_m A_m(z)\,\mathbf{E}_m(\mathbf{r}_t, z) + \mathbf{E}_b(\mathbf{r}_t, z), \tag{11}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}_t, z) = \mathbf{H}_a(\mathbf{r}_t, z) + \mathbf{H}_b(\mathbf{r}_t, z) = \sum_m A_m(z)\,\mathbf{H}_m(\mathbf{r}_t, z) + \mathbf{H}_b(\mathbf{r}_t, z). \tag{12}$$

Здесь модальные разложения полей $\mathbf{E}_a(\mathbf{r}_t, z)$ и $\mathbf{H}_a(\mathbf{r}_t, z)$ (отмеченные индексом a и совпадающие с выражениями (7)) дополнены полями $\mathbf{E}_b(\mathbf{r}_t, z)$ и $\mathbf{H}_b(\mathbf{r}_t, z)$ (отмеченными индексом b), которые ортогональны полям невозмущенного модального спектра. Такие дополнительные поля порождены продольными объемными токами $\mathbf{J}_{bz}^{e,m} = \mathbf{e}_z J_{bz}^{e,m}$ и пропорциональны этим токам в форме следующих соотношений (см. уравнения (2.6.27)):

$$\mathbf{E}_b = -\,\mathbf{e}_z\,\frac{J_{bz}^e}{i\omega\varepsilon_{zz}}, \tag{13}$$

$$\mathbf{H}_b = -\,\mathbf{e}_z\,\frac{J_{bz}^m}{i\omega\mu_{zz}}, \tag{14}$$

где ε_{zz} и μ_{zz} — zz-компоненты тензоров диэлектрической и магнитной проницаемости для анизотропной среды, заполняющей базовый волновод.

Знание ортогональных дополнительных полей, даваемых равенствами (13) и (14), позволяет найти так называемые *эффективные поверхностные токи* в форме (см. уравнения (2.6.28))

$$\mathbf{J}_{s,eff}^m = \mathbf{n}_b \times \mathbf{E}_b \Big|_{L_b} = \boldsymbol{\tau}_b\,\frac{J_{bz}^e(L_b)}{i\omega\varepsilon_{zz}}, \tag{15}$$

$$\mathbf{J}_{s,eff}^e = -\,\mathbf{n}_b \times \mathbf{H}_b \Big|_{L_b} = -\,\boldsymbol{\tau}_b\,\frac{J_{bz}^m(L_b)}{i\omega\mu_{zz}}. \tag{16}$$

Здесь $J^e_{bz}(L_b)$ и $J^m_{bz}(L_b)$ — продольные компоненты объемных токов, взятые на границе L_b области S_b их существования, $\boldsymbol{\tau}_b = \mathbf{e}_z \times \mathbf{n}_b$ — единичный *тангенциальный* вектор, а $\mathbf{n}_b$ означает единичную нормаль к L_b, направленную *наружу* по отношению к сечению S_b, занятому объемными токами $\mathbf{J}^{e,m}_b$.

Эффективные поверхностные токи $\mathbf{J}^{e,m}_{s,eff}$, как и объемные токи $\mathbf{J}^{e,m}_b$, играют роль *возбуждающих токов* и входят в уравнение возбуждения (8) (или ему подобные) вместо $\mathbf{J}^{e,m}_s$ с заменой контура интегрирования L_s на L_b.

Эффективные поверхностные токи (15) и (16), порожденные ортогональными дополнительными полями (13) и (14), ранее были потеряны практически всеми авторами. Нахождение тех и других будет выполнено в гл. 2 для общего случая *бианизотропных сред*, дающего по сравнению с формулами (13)–(16) более сложные выражения, которые перемешивают вклады от электрических и магнитных продольных токов. В этом и состоит специфика второго этапа нашего анализа, которая отличает его от результатов ранее опубликованных работ.

Разработке второго этапа, связанного с построением общей теории возбуждения волноведущих структур сторонними источниками, полностью посвящена гл. 2. В основу разработанной теории положено новое понятие *квазиортогональности мод*, обобщающее привычное понятие ортогональности на случай диссипативных систем. Именно это позволяет вывести уравнения возбуждения мод в общей форме, справедливой как для диссипативных, так и недиссипативных волноведущих структур. В отсутствие потерь эти уравнения применимы не только для распространяющихся мод (переносящих собственную мощность), но и для нераспространяющихся (исчезающих) мод (переносящих только взаимную мощность в паре со своей *двойниковой модой*).

Третий этап — решение задачи о связи между волноводными модами, представляет возбуждающие источники (введенные на втором этапе как объемные и эффективные поверхностные токи, входящие в уравнения возбуждения) в форме спектрального разложения по собственным модам базового волновода. Эта процедура обеспечивает взаимную связь между волноводными модами и превращает уравнения возбуждения мод, полученные на втором этапе, в уравнения связанных мод. Иными словами, третий этап анализа завершает разработку *электродинамической теории связанных мод*, чему посвящены гл. 3 и 4 в применении к одноволноводным и многоволноводным оптическим системам.

Согласно современным физическим воззрениям, возмущение любой среды на оптических частотах проявляется как диэлектрическое возмущение в форме *избыточной поляризации* $\mathbf{P}$. В этих условиях объемные возбуждающие токи, входящие в уравнения Максвелла (3) и (4), принимают вид

$$\mathbf{J}^e_b = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \neq 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{J}^m_b = 0, \tag{17}$$

откуда для эффективных поверхностных токов (15) и (16) получаем

$$\mathbf{J}^m_{s,eff} \neq 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{J}^e_{s,eff} = 0. \tag{18}$$

Избыточная поляризация $\mathbf{P} = \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_\Sigma \cdot \mathbf{E}$ вызвана диэлектрическим возмущением среды в форме суммарного тензора (см. уравнение (2.10.19)):

$$\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_\Sigma(\mathbf{r},t) = \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{r}) + \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{dyn}(\mathbf{r},t) \equiv \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{r}) + \mathrm{Re}\{2\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{r})e^{i\omega_p t}\}. \tag{19}$$

Суммарный тензор диэлектрического возмущения (19) учитывает не только статическое, $\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{r})$, но и динамическое, $\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{dyn}(\mathbf{r},t)$, возмущение среды. Последнее порождено параметрическими процессами в среде на частоте ω_p накачки (индекс p от англ. *pump*), гармоники которой совместно с частотой ω оптического сигнала создают спектр комбинационных частот:

$$\omega_\nu = \omega + \nu\omega_p, \qquad \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Таким образом, диэлектрическое возмущение, записанное в общей форме (19), обеспечивает многочастотный режим работы волноведущей структуры, при котором поля представлены в виде суммы частотных компонент. В частности, для электрического поля и избыточной поляризации среды имеем следующие частотные разложения (см. уравнения (2.10.21) и (2.10.23)):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \mathbf{E}^{(\nu)}(\mathbf{r})\, e^{i\omega_\nu t}, \tag{20}$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{r},t) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \mathbf{P}^{(\nu)}(\mathbf{r})\, e^{i\omega_\nu t}, \tag{21}$$

где $\mathbf{E}^{(\nu)}$ и $\mathbf{P}^{(\nu)}$ — комплексные амплитуды поля и поляризации на частоте ω_ν, при этом (см. уравнение (2.10.24))

$$\mathbf{P}^{(\nu)} = \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{E}^{(\nu)} + \delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{E}^{(\nu-1)} + \delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\,*} \cdot \mathbf{E}^{(\nu+1)}. \tag{22}$$

Комплексные амплитуды электрического поля, $\mathbf{E}^{(\nu)}$ и $\mathbf{E}^{(\nu\pm1)}$, на частотах ω_ν и $\omega_{\nu\pm1} = \omega_\nu \pm \omega_p$, входящие в (22), представляются в виде полного модального разложения (11), учитывающего ортогональное дополнительное поле $\mathbf{E}_b$. Это поле на частоте ω_ν определяется выражениями (13) и (17) в виде $\mathbf{E}_b^{(\nu)} = -\mathbf{e}_z P_z^{(\nu)}/\varepsilon$ для базового волновода с изотропным заполнением, когда $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$. Здесь и далее в книге принято обозначение $\varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_0$, где ε_r — относительная диэлектрическая проницаемость и ε_0 — электрическая постоянная.

Возбуждающие токи в форме объемного электрического тока (17) и эффективного поверхностного магнитного тока (18), по аналогии с (20) и (21), представлены в виде суммы частотных составляющих (индекс *eff* опущен):

$$\mathbf{J}_b^e(\mathbf{r},t) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \mathbf{J}_b^{e(\nu)}(\mathbf{r})\, e^{i\omega_\nu t}, \tag{23}$$

$$\mathbf{J}_s^m(\mathbf{r},t) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \mathbf{J}_s^{m(\nu)}(\mathbf{r})\, e^{i\omega_\nu t}. \tag{24}$$

Уравнения (19)–(22) обеспечивают модальные разложения для комплексных амплитуд возбуждающих токов на частоте ω_ν, входящие в выражения

(23) и (24) в следующей форме (см. уравнения (3.1.16)–(3.1.21)):

$$\mathbf{J}_b^{e(\nu)} \equiv i\omega_\nu \mathbf{P}^{(\nu)} = i\omega_\nu \sum_m \Big[A_m^{(\nu)} \big(\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c \cdot \mathbf{E}_m^{(\nu)}\big) + A_m^{(\nu-1)} \big(\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c \cdot \mathbf{E}_m^{(\nu-1)}\big) + \\ + A_m^{(\nu+1)} \big(\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^{\,*} \cdot \mathbf{E}_m^{(\nu+1)}\big)\Big], \tag{25}$$

$$\mathbf{J}_s^{m(\nu)} \equiv \frac{\tau_b}{\varepsilon} P_z^{(\nu)}\Big|_{L_b} = \sum_m \Big[A_m^{(\nu)} \big(\Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c \cdot \mathbf{E}_m^{(\nu)}\big) + A_m^{(\nu-1)} \big(\delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c \cdot \mathbf{E}_m^{(\nu-1)}\big) + \\ + A_m^{(\nu+1)} \big(\delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c^{\,*} \cdot \mathbf{E}_m^{(\nu+1)}\big)\Big], \tag{26}$$

где введены отсутствующие в современной литературе физические величины:

- ***тензоры объемной связи*** (статический $\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c$ и динамический $\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c$),

$$\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c = \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \left(\overline{\mathbf{I}} - \frac{\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z \cdot \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\varepsilon + \Delta\varepsilon_{zz}}\right), \tag{27}$$

$$\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c = \left(\overline{\mathbf{I}} - \frac{\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z}{\varepsilon + \Delta\varepsilon_{zz}}\right) \cdot \delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \left(\overline{\mathbf{I}} - \frac{\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z \cdot \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\varepsilon + \Delta\varepsilon_{zz}}\right), \tag{28}$$

отличающиеся от *тензоров диэлектрического возмущения* (статического $\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ и динамического $\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$), которые входят в суммарный тензор возмущения (19);

- ***тензоры поверхностной связи*** (статический $\Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c$ и динамический $\delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c$),

$$\Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c = \frac{\tau_b\mathbf{e}_z \cdot \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}(L_b)}{\varepsilon(L_b) + \Delta\varepsilon_{zz}(L_b)}, \tag{29}$$

$$\delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c = \frac{\tau_b\mathbf{e}_z \cdot \delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}(L_b)}{\varepsilon(L_b) + \Delta\varepsilon_{zz}(L_b)} \cdot \left(\overline{\mathbf{I}} - \frac{\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z \cdot \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}(L_b)}{\varepsilon(L_b) + \Delta\varepsilon_{zz}(L_b)}\right), \tag{30}$$

порожденные эффективным поверхностным магнитным током; при этом $\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z$, $\tau_b\mathbf{e}_z$ и $\overline{\mathbf{I}}$ обозначают диадные произведения векторов и единичный тензор, а $\varepsilon(L_b)$, $\Delta\varepsilon_{zz}(L_b)$, $\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}\,(L_b)$ и $\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}\,(L_b)$ — значения соответствующих величин, взятые в точках контура L_b, ограничивающего сечение S_b, занятое объемными токами. Тензоры связи (27)–(30) помечены нижним индексом c (от англ. *coupling*), для того чтобы отличить их от тензоров возмущения $\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ и $\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$.

Подстановка модальных разложений (25) и (26) для возбуждающих токов в уравнения возбуждения типа (8) (или им подобные) превращает последние в уравнения связанных мод (см. соответствующие параграфы в гл. 3 и 4).

Для простейшего случая волноведущей структуры без потерь общая система *уравнений связанных мод* имеет вид (с нижними модальными индексами $m, n = 1, 2, \ldots, \infty$ и с верхними частотными индексами (ν) и $(\nu \pm 1)$) (см. уравнение (3.2.24)):

$$\frac{dA_m^{(\nu)}}{dz} = \sum_n \Big[c_{mn}^{(\nu,\nu)} e^{i(\beta_m^{(\nu)} - \beta_n^{(\nu)})z} A_n^{(\nu)} + c_{mn}^{(\nu,\nu-1)} e^{i(\beta_m^{(\nu)} - \beta_n^{(\nu-1)})z} A_n^{(\nu-1)} + \\ + c_{mn}^{(\nu,\nu+1)} e^{i(\beta_m^{(\nu)} - \beta_n^{(\nu+1)})z} A_n^{(\nu+1)} \Big]. \tag{31}$$

Здесь *коэффициенты связи*, определенные в форме *матричных элементов* для тензоров связи (27)–(30), характеризуют связь между модами как на одной частоте (благодаря статическим тензорам $\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c$ и $\Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c$), так и на разных частотах (благодаря динамическим тензорам $\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c$ и $\delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c$) (см. уравнения (3.2.17)–(3.2.19) при $\alpha = n$):

$$c_{mn}^{(\nu,\nu)} = -\frac{i\omega_\nu}{N_m^{(\nu)}} \int\limits_{S_b} \left(\widehat{\mathbf{E}}_m^{(\nu)*} \cdot \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c \cdot \widehat{\mathbf{E}}_n^{(\nu)}\right) dS - \\ - \frac{1}{N_m^{(\nu)}} \int\limits_{L_b} \left(\widehat{\mathbf{H}}_m^{(\nu)*} \cdot \Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c \cdot \widehat{\mathbf{E}}_n^{(\nu)}\right) dL, \tag{32}$$

$$c_{mn}^{(\nu,\nu-1)} = -\frac{i\omega_\nu}{N_m^{(\nu)}} \int\limits_{S_b} \left(\widehat{\mathbf{E}}_m^{(\nu)*} \cdot \delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c \cdot \widehat{\mathbf{E}}_n^{(\nu-1)}\right) dS - \\ - \frac{1}{N_m^{(\nu)}} \int\limits_{L_b} \left(\widehat{\mathbf{H}}_m^{(\nu)*} \cdot \delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c \cdot \widehat{\mathbf{E}}_n^{(\nu-1)}\right) dL, \tag{33}$$

$$c_{mn}^{(\nu,\nu+1)} = -\frac{i\omega_\nu}{N_m^{(\nu)}} \int\limits_{S_b} \left(\widehat{\mathbf{E}}_m^{(\nu)*} \cdot \delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^{\,*} \cdot \widehat{\mathbf{E}}_n^{(\nu+1)}\right) dS - \\ - \frac{1}{N_m^{(\nu)}} \int\limits_{L_b} \left(\widehat{\mathbf{H}}_m^{(\nu)*} \cdot \delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c^{\,*} \cdot \widehat{\mathbf{E}}_n^{(\nu+1)}\right) dL. \tag{34}$$

Система связанных уравнений (31) существенно усложняется при учете излучательных мод непрерывного спектра и тем более в случае волноведущих структур с потерями (см. уравнения (3.2.9)–(3.2.10) и (3.2.16)–(3.2.23)).

Принципиальной особенностью разработанной теории является тот факт (не замеченный ранее другими авторами), что связь между модами обеспечивают *отнюдь не* тензоры *диэлектрического возмущения* (статический $\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ и динамический $\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$), а вновь введенные тензоры *объемной связи* ($\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c$, $\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c$) и *поверхностной связи* ($\Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c$, $\delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c$ — они прежде вообще были потеряны). Для конкретной волноведущей структуры тензоры возмущения, $\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ и $\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$, появляются при выделении базового волновода, а тензоры связи рассчитываются по формулам (27)–(30). Тогда коэффициенты связи типа (32)–(34), построенные на тензорах связи, позволяют исследовать взаимодействие между модами, используя основные положения общей теории связанных мод (изложенной в приложении Г) или ее модификации, приведенной в приложении Д.

Именно такая схема будет демонстрироваться в гл. 3 и 4 в применении к следующим случаям взаимодействия между оптическими модами:

- акустооптическая связь мод,
- электрооптическая связь мод,
- магнитооптическая связь мод,
- связь мод в гофрированном волноводе,
- связь двух и большего числа оптических волноводов.

Все изложенное в данном введении получит обоснованное подтверждение в последующих главах.

В заключение укажем основные математические обозначения, использованные как во введении, так и в остальной части книги:

а) тензоры ранга 0 (скаляры), 1 (векторы), 2 и выше второго обозначены, соответственно, как A, $\mathbf{A}$ (полужирная буква), $\overline{\mathbf{A}}$ (полужирная буква с одной чертой) и $\overline{\overline{\mathbf{A}}}$ (полужирная буква с двумя чертами);

б) их произведения обозначены как AB (для двух скаляров); $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$, $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ и $\mathbf{AB}$ (для скалярного, векторного и диадного произведения двух векторов); $\mathbf{AB}\cdot\mathbf{CD}=\mathbf{AD}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})$, $\overline{\mathbf{A}}\cdot\overline{\mathbf{B}}=A_{ij}B_{jk}$ и $\overline{\overline{\mathbf{A}}}\cdot\overline{\overline{\mathbf{B}}}=A_{ijk}B_{klm}$ (для скалярного произведения двух векторных диад и тензоров); $\mathbf{AB}:\mathbf{CD}=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{D})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})$, $\overline{\mathbf{A}}:\overline{\mathbf{B}}=A_{ij}B_{ji}$ и $\overline{\overline{\mathbf{A}}}:\overline{\overline{\mathbf{B}}}=A_{ijk}B_{kjl}$ (для двойного скалярного произведения двух векторных диад и тензоров); здесь подразумевается суммирование по повторяющимся индексам.

Глава 1

НАПРАВЛЯЕМЫЕ И ИЗЛУЧАТЕЛЬНЫЕ МОДЫ ОТКРЫТЫХ ВОЛНОВЕДУЩИХ СТРУКТУР

Настоящая глава имеет дело с дисперсионными и нормировочными характеристиками открытых волноведущих структур. Выбор их в качестве объекта изучения диктуется тем обстоятельством, что для них спектр собственных мод имеет более общий состав по сравнению с экранированными (закрытыми) волноводами. Как известно, для любого закрытого волновода спектр мод всегда является дискретным, в то время как в спектре открытого волновода, наряду с дискретными модами, также присутствуют излучательные моды непрерывной части спектра. Именно это и делает открытые волноведущие структуры более привлекательным объектом для дальнейшего электродинамического изучения.

Для того чтобы продемонстрировать впоследствии строгий электродинамический подход к анализу взаимодействия как направляемых мод дискретного спектра, так и излучательных мод непрерывного спектра, в качестве *базового волновода* выбрана планарная трехслойная диэлектрическая структура. В этом случае можно строго вывести дисперсионные уравнения для мод ТЕ- и ТМ-типов и последовательно выполнить анализ структуры полей для направляемых и излучательных мод. Результаты такого анализа использованы при вычислении нормы этих мод, а в дальнейшем (см. гл. 3 и 4) и при нахождении коэффициентов связи между ними.

Современная литература, посвященная общим проблемам распространения электромагнитных волн и специальным вопросам, связанным со спецификой открытых волноводов, достаточно обширна (см., например, книги [1–24] и цитируемую в них литературу). Несмотря на широкий охват волноводных проблем в опубликованной литературе, ниже будем рассматривать основные спектральные, модальные и энергетические свойства открытых волноведущих структур. Для такого рассмотрения имеются по крайней мере три причины, сформулированные в виде следующих задач:

- строгое спектральное обоснование непрерывной части спектра, присущей *излучательным модам*;
- установление связи между реактивными (нераспространяющимися) излучательными модами и так называемыми *вытекающими модами* на основе строгого спектрального подхода;

• демонстрация техники вычисления нормы для дискретных и излучательных мод планарной трехслойной диэлектрической структуры как базового волновода, используемого при анализе возбуждения и связи мод.

Прежде чем анализировать открытые волноведущие структуры, сначала необходимо рассмотреть общие волноводные свойства закрытого (экранированного) волновода произвольного сечения. Целью является выяснение характера трансформации спектра мод при переходе к открытой структуре путем удаления на бесконечность внешней экранирующей границы. Это и составляет содержание п. 1.1, где выясняются общие условия существования и взаимной трансформации *объемных*, *поверхностных* и *комплексных* мод закрытого волновода.

Последующие параграфы данной главы посвящены рассмотрению дисперсионных и энергетических особенностей открытых волноводов, в том числе планарной трехслойной диэлектрической структуры. Параграфы 1.2–1.4 содержат анализ дискретного и непрерывного спектров произвольного открытого волновода с использованием результатов п. 1.1 и общего спектрального подхода, изложенного в приложении А.

Параграф 1.5 посвящен разработке концепции вытекающих мод с целью установления связи между ними и нераспространяющимися (исчезающими) модами непрерывного спектра. В п. 1.6 излагается общепринятая лучевая интерпретация мод планарной диэлектрической структуры и обосновывается их классификация на *направляемые моды*, *излучательные моды подложки* и *излучательные моды структуры* с целью выяснения корреляции их с объемными, поверхностными и комплексными модами закрытого волновода.

Последние параграфы 1.7–1.9 содержат детальный анализ структуры полей в планарном трехслойном диэлектрическом волноводе для направляемых и излучательных мод TE- и TM-типов. Полученные здесь результаты в большинстве своем коррелируют с результатами, приведенными (без вывода) Когельником [22], но отчасти и подправляют их.

1.1. Общие свойства собственных мод закрытого волновода без потерь

Специфической особенностью любого закрытого волновода, независимо от формы поперечного сечения и заполняющей его волноведущей среды (в том числе многослойной и бианизотропной), является *дискретный характер* спектра собственных мод. Такая особенность порождена наличием внешней металлической границы, экранирующей внутренность волновода от бесконечно удаленных точек, что исключает необходимость в граничных условиях на бесконечности. Остаются лишь ЭГУ на внешней экранирующей поверхности и границах раздела внутренних сред. Число требуемых граничных условий всегда точно равняется числу искомых констант, характеризующих поперечное распределение полей. Такая ситуация приводит к требованию обращения в нуль детерминанта алгебраических уравнений относительно этих искомых констант. Именно это и дает дисперсионное уравнение (с трансцендентными функциями), корни которого образуют дискретную счетную последовательность в общем случае комплексных чисел. Они соответствуют поперечным волновым числам (а значит и продольным постоянным распространения γ_m, $m = 1, 2, \ldots$) закрытого волновода. При этом в отсутствие потерь чисто мнимые значения $\gamma_m = i\beta_m$ соответствуют *активным* (распространяющимся) *модам*, а комплексные значения $\gamma_m = \alpha_m + i\beta_m$ — *реактивным* (нераспространяющимся) *модам* (уточнение терминологии см. в п. 2.4).

Для определенности рассмотрим многослойную среду с произвольными физическими и геометрическими свойствами, которая окружена идеально проводящей поверхностью, как показано на рис. 1.1. Единственным требованием является обязательное наличие однородной изотропной среды с относительными проницаемостями $\varepsilon_r = \varepsilon/\varepsilon_0$ и $\mu_r = \mu/\mu_0$, расположенной между внутренней волноведущей средой и внешним металлическим экраном. Такой изотропной среде соответствует характеристическое уравнение,

$$k^2 \equiv \omega^2 \varepsilon\mu = k_t^2 + k_z^2, \tag{1.1.1}$$

где k_z и $k_t = \left(k_x^2 + k_y^2\right)^{1/2}$ — продольное и поперечное волновые числа.

Формула (1.1.1) является следствием подстановки волнового множителя $\exp\left[i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\right]$ в обычное волновое уравнение, превращающей его в поперечное уравнение Гельмгольца,

$$\nabla_t^2 \widehat{f}(\mathbf{r}_t) + k_t^2 \widehat{f}(\mathbf{r}_t) = 0. \tag{1.1.2}$$

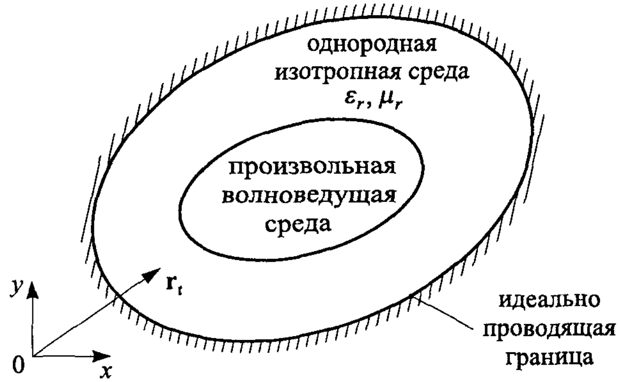


Рис. 1.1. Поперечное сечение закрытого волновода, состоящего из волноведущей среды с произвольными физическими и геометрическими свойствами и внешней однородной среды с изотропными проницаемостями ε_r и μ_r, ограниченной идеально проводящей поверхностью

Поперечный оператор Лапласа ∇_t^2 действует на радиус-вектор $\mathbf{r}_t$ точки, принадлежащей поперечному сечению изотропной среды, ограниченной идеально проводящей внешней границей (рис. 1.1). Функция поперечных координат $\widehat{f}(\mathbf{r}_t)$ (иначе называемая *мембранной функцией* и отмеченная колпачком) соответствует любой компоненте электромагнитного поля и определяет его полную волновую зависимость в виде (ср. уравнение (1))

$$f(\mathbf{r}_t, z, t) = \widehat{f}(\mathbf{r}_t)\, e^{i(\omega t - k_z z)}. \tag{1.1.3}$$

Как следует из (1.1.2), структура электромагнитного поля в изотропной среде определяется поперечным волновым числом k_t:

- если k_t^2 вещественно и положительно, то структура поля соответствует *объемным модам*,
- если k_t^2 вещественно и отрицательно, то структура поля соответствует *поверхностным модам*,
- если k_t^2 комплекснозначно, то структура поля соответствует *комплексным модам*.

Для обоснования этих утверждений упростим ситуацию, принимая рассматриваемую структуру планарной, когда $\partial/\partial x = -ik_x = 0$ и $k_t = k_y$. Согласно (1.1.1), m-я мода на частоте ω имеет продольное волновое число

$$k_{z,m}(\omega) = \sqrt{\omega^2 \varepsilon\mu - k_{y,m}^2(\omega)}\ . \tag{1.1.4}$$

Частотная зависимость $k_{y,m}(\omega)$ для внешней изотропной среды определяется дисперсионными свойствами рассматриваемого волновода, которые формируются всеми средами, входящими в его состав. Уравнение Гельмгольца (1.1.2) для m-й моды планарной структуры принимает вид

$$\frac{d^2 \widehat{f}_m(y)}{dy^2} + k_{y,m}^2(\omega)\widehat{f}_m(y) = 0, \tag{1.1.5}$$

и его решение определяет мембранную функцию моды в форме

$$\widehat{f}_m(y) = A_m e^{-ik_{y,m}y} + B_m e^{ik_{y,m}y}. \tag{1.1.6}$$

1.1.1. Объемные моды. Объемные моды, для которых всегда $k_{y,m}^2(\omega) > 0$, имеют чисто вещественные значения $k_{y,m}$, так что выражения (1.1.3) и (1.1.6) дают при $z = \mathrm{const}$ поперечное распределение полей в форме двух волн, бегущих в противоположных направлениях вдоль оси y:

$$f_m(y,z,t) = \left[A_m e^{i(\omega t - k_{y,m}y)} + B_m e^{i(\omega t + k_{y,m}y)}\right] e^{-ik_{z,m}z}. \tag{1.1.7}$$

Выражение (1.1.7) описывает так называемый «поперечный резонанс» в объеме изотропной среды как результат интерференции прямой и обратной волн, бегущих вдоль y и отражающихся от двух границ — идеально проводящей границы и внешней границы внутренней волноведущей среды.

Картина поперечного распределения поля $\widehat{f}_m(y)$ для m-й объемной моды выше планарной волноведущей среды при $d < y < D$, описываемая уравнением (1.1.6), качественно показана на рис. 1.2 *а* в форме стоячей волны, типичной для поперечного резонанса.

1. На частотах, для которых $\omega^2\varepsilon\mu > k_{y,m}^2(\omega)$, формула (1.1.4) дает чисто вещественные значения фазовой постоянной

$$k_{z,m}(\omega) = \sqrt{\omega^2 \varepsilon\mu - k_{y,m}^2(\omega)} \equiv \beta_m(\omega). \tag{1.1.8}$$

В этом случае выражение (1.1.7) принимает следующий вид:

$$f_m(y,z,t) \equiv \widehat{f}_m(y)\, e^{i(\omega t - \beta_m z)} =$$
$$= \left[A_m e^{-ik_{y,m}y} + B_m e^{ik_{y,m}y}\right] e^{i(\omega t - \beta_m z)}. \qquad (1.1.9)$$

Волновой множитель $\exp\left[i(\omega t - \beta_m z)\right]$ в (1.1.9) соответствует *объемной моде*, распространяющейся с фазовой скоростью

$$v_{\mathrm{ph},m}(\omega) \equiv \frac{\omega}{\beta_m(\omega)} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left[k_{y,m}(\omega)\, c/\omega\right]^2}}. \qquad (1.1.10)$$

Из (1.1.10) следует, что объемные моды всегда *быстрые* в том смысле, что $v_{\mathrm{ph},m} > c$, где $c = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ — скорость света в среде.

Групповая скорость m-й объемной моды равняется

$$v_{\mathrm{gr},m}(\omega) \equiv \left(\frac{\partial\beta_m(\omega)}{\partial\omega}\right)^{-1} = c\,\frac{\beta_m(\omega)}{\omega/c - k_{y,m}(\omega)c\left[\partial k_{y,m}(\omega)/\partial\omega\right]}. \qquad (1.1.11)$$

Условие $v_{\mathrm{gr},m} \leqslant c$ накладывает следующее требование на частотную зависимость поперечного волнового числа во внешней изотропной среде:

$$\frac{\partial k_{y,m}(\omega)}{\partial\omega} \leqslant \frac{1}{c}\,\frac{\omega/c - \beta_m(\omega)}{k_{y,m}(\omega)}. \qquad (1.1.12)$$

2. На частотах, для которых $\omega^2\varepsilon\mu < k_{y,m}^2(\omega)$, формула (1.1.4) дает чисто мнимые значения $k_{z,m}(\omega)$, равные

$$k_{z,m}(\omega) = -i\sqrt{k_{y,m}^2(\omega) - \omega^2\varepsilon\mu} \equiv -i\alpha_m(\omega), \qquad (1.1.13)$$

т. е. фазовая постоянная β_m превращается в амплитудную постоянную α_m. Знак минус в (1.1.13) выбран для того, чтобы обеспечить затухание амплитуды в направлении прежнего распространения фазы: $\alpha_m > 0$ при $\beta_m > 0$ в выражении (1.1.8). В этом случае формула (1.1.7) принимает вид

$$f_m(y,z,t) = \left[A_m e^{i(\omega t - k_{y,m}y)} + B_m e^{i(\omega t + k_{y,m}y)}\right] e^{-\alpha_m z}. \qquad (1.1.14)$$

Выражение (1.1.14) с чисто вещественными α_m описывает так называемые *исчезающие моды* (англ. *evanescent modes*). Из сравнения (1.1.14) с (1.1.7) следует, что любая объемная мода, превращаясь в исчезающую, утрачивает распространение по фазе и начинает затухать в продольном направлении как $\exp(-\alpha_m z)$, но сохраняет поперечное распределение полей в форме стоячей волны, показанной на рис. 1.2 *а*. Другими словами, исчезающие моды являются реактивными *модами отсечки* (англ. *cutoff modes*), частотная область существования которых соответствует полосе непропускания волновода, в отличие от полосы пропускания, где существуют активные (распространяющиеся) моды с вещественными фазовыми постоянными β_m.

Переход между полосами пропускания и непропускания (когда распространяющаяся объемная мода с номером m превращается в нераспространяющуюся исчезающую моду или наоборот) происходит на *частоте отсечки* ω_m^c

(верхний индекс c от англ. *cutoff*), где, согласно (1.1.8), имеет место следующее требование, наложенное на продольное и поперечное волновые числа:

$$\beta_m(\omega_m^c) = 0 \quad \text{и} \quad k_{y,m}(\omega_m^c) = \omega_m^c/c. \tag{1.1.15}$$

Выражения (1.1.10) и (1.1.11) для фазовой и групповой скоростей показывают, что на частоте отсечки всегда

$$v_{\mathrm{ph},m}^c \equiv v_{\mathrm{ph},m}(\omega_m^c) = \infty \quad \text{и} \quad v_{\mathrm{gr},m}^c \equiv v_{gr,m}(\omega_m^c) = 0. \tag{1.1.16}$$

Следовательно, на дисперсионных кривых в координатах $\omega - \beta$, точки отсечки с $\omega = \omega_m^c$ и $\beta_m = 0$ располагаются на оси частот и всегда соответствуют точкам экстремума этих кривых, так как здесь $\partial\omega/\partial\beta_m = 0$ в силу того, что $v_{\mathrm{gr},m}^c = 0$. Однако последнее справедливо, если только

$$\left.\frac{\partial k_{y,m}(\omega)}{\partial\omega}\right|_{\omega=\omega_m^c} \neq \frac{1}{c}. \tag{1.1.17}$$

В противном случае выражение (1.1.11) имеет неопределенность типа 0/0, так что возможно $v_{\mathrm{gr},m}^c \neq 0$ на частоте отсечки, а именно $v_{\mathrm{gr},m}^c = c$.

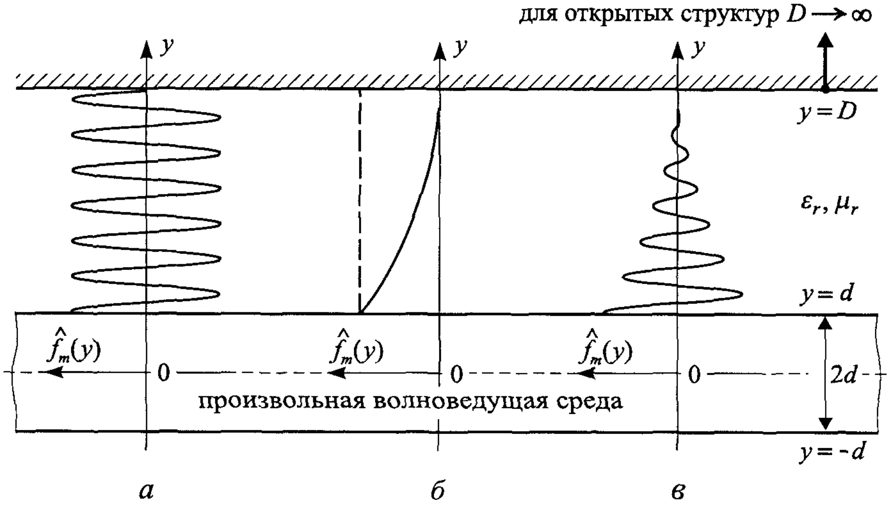


Рис. 1.2. Качественная картина поперечного распределения любой компоненты, $\hat{f}_m(y)$, поля m-й моды внутри изотропной среды с проницаемостями ε_r и μ_r, расположенной выше планарной волноведущей среды толщиною $2d$ и ограниченной идеально проводящей поверхностью при $y = D$: *а* — объемные моды, *б* — поверхностные моды, *в* — комплексные моды

Из соотношений (1.1.15) следует, что во внешней изотропной среде на частоте отсечки ω_m^c поля m-й моды распространяются в поперечном направлении как плоские волны с законом дисперсии $k_{y,m} = \omega_m^c/c$. Именно такая ситуация обеспечивает фазовую и групповую скорости в продольном направлении, даваемые формулами (1.1.16).

Забегая вперед, полезно отметить, что именно объемные моды (распространяющиеся и исчезающие) с поперечным распределением полей, показанным на рис. 1.2 *а*, превращаются в излучательные моды (распространяющиеся и исчезающие) открытого волновода, когда отражающая металлическая граница удаляется на бесконечность, т. е. при $D \to \infty$.

1.1.2. Поверхностные моды. Поверхностные моды, для которых всегда $k_{y,m}^2(\omega) = -|k_{y,m}(\omega)|^2 < 0$, имеют мнимые значения $k_{y,m}(\omega) = -i|k_{y,m}(\omega)|$, так что их продольные волновые числа (1.1.4) являются всегда вещественными и равными

$$k_{z,m}(\omega) = \sqrt{\omega^2 \varepsilon\mu + \left|k_{y,m}(\omega)\right|^2} \equiv \beta_m(\omega). \tag{1.1.18}$$

Формула (1.1.18) дает следующие выражения для фазовой и групповой скорости m-й *поверхностной моды* (ср. формулы (1.1.10) и (1.1.11)):

$$v_{\mathrm{ph},m}(\omega) \equiv \frac{\omega}{\beta_m(\omega)} = \frac{c}{\sqrt{1 + \left[|k_{y,m}(\omega)|\, c/\omega\right]^2}}, \tag{1.1.19}$$

$$v_{\mathrm{gr},m}(\omega) \equiv \left(\frac{\partial \beta_m(\omega)}{\partial \omega}\right)^{-1} = c\,\frac{\beta_m(\omega)}{\omega/c + |k_{y,m}(\omega)| c \left[\partial |k_{y,m}(\omega)|/\partial\omega\right]}. \tag{1.1.20}$$

Уравнение (1.1.19) показывает, что поверхностные моды всегда *медленные* в том смысле, что $v_{\mathrm{ph},m} < c = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$, в отличие от быстрых объемных мод, распространяющихся с фазовой скоростью $v_{\mathrm{ph},m} > c$.

Условие $v_{\mathrm{gr},m} \leqslant c$, наложенное на величину (1.1.20), приводит к следующему требованию для частотной зависимости поперечного волнового числа во внешней изотропной среде (ср. уравнение (1.1.12)):

$$\frac{\partial |k_{y,m}(\omega)|}{\partial \omega} \geqslant \frac{1}{c}\,\frac{\beta_m(\omega) - \omega/c}{|k_{y,m}(\omega)|} > 0. \tag{1.1.21}$$

В случае поверхностных мод формулы (1.1.3) и (1.1.6) дают следующее выражение для любой компоненты электромагнитного поля:

$$\begin{aligned} f_m(y,z,t) &\equiv \widehat{f}_m(y)\, e^{i(\omega t - \beta_m z)} = \\ &= \left[A_m e^{-|k_{y,m}|y} + B_m e^{|k_{y,m}|y}\right] e^{i(\omega t - \beta_m z)}. \end{aligned} \tag{1.1.22}$$

Выражение (1.1.22) описывает экспоненциальное распределение по оси y полей во внешней изотропной среде, присущее m-й поверхностной моде, распространяющейся вдоль границы раздела между этой средой и внутренней волноведущей средой с произвольными физическими и геометрическими свойствами. Качественная картина поля $\widehat{f}_m(y)$ для поверхностной моды при $d < y < D$ показана на рис. 1.2 *б* сплошной кривой, которая учитывает только первое слагаемое в (1.1.22), т. е. при $B_m = 0$. Это верно, когда расстояние $(D - d)$ между идеально проводящей поверхностью при $y = D$ и границей раздела сред при $y = d$, достаточно большое для того, чтобы обеспечить неравенство $|k_{y,m}|(D - d) \gg 1$. Если это выполняется, то первое слагаемое в формуле (1.1.22), будучи равным $A_m \exp(-|k_{y,m}|d)$ при $y = d$, экспоненциально уменьшается при удалении от границы раздела и практически исчезает при $y = D$. В противном случае оба слагаемые в (1.1.22) с амплитудами $A_m \neq 0$ и $B_m \neq 0$ дают более сложную картину поперечного распределения.

Локализация полей в районе границы волноведущей среды, как показано сплошной кривой на рис. 1.2 *б*, и дает название *поверхностным модам.*

Поскольку подкоренное выражение в (1.1.18) всегда положительно, то распространяющаяся поверхностная мода никогда (в пределах частотного диапазона своего существования) не превращается в нераспространяющуюся (исчезающую) моду, как это было для объемных мод, имеющих частоту отсечки ω_m^c, определяемую равенствами (1.1.15). Эта особенность является фундаментальным свойством, характерным для мод поверхностного типа.

Тем не менее, каждая поверхностная мода имеет свою *критическую частоту* ω_m^{cr} (верхний индекс *cr* от англ. *critical*), на которой она превращается в объемную моду. Это имеет место при условии $k_{y,m}(\omega_m^{cr}) = 0$, которое разделяет режимы объемных мод (характеризуемых кривой на рис. 1.2 *а*) и поверхностных мод (характеризуемых сплошной кривой на рис. 1.2 *б*). Из формулы (1.1.22) следует, что при $k_{y,m}(\omega_m^{cr}) = 0$ поле $\widehat{f}_m(y)$ во внешней изотропной среде ($d < y < D$) постоянно в поперечном направлении, как показано штриховой линией на рис. 1.2 *б*.

Следовательно, переход между режимами поверхностных и объемных мод соответствует частоте ω_m^{cr}, на которой, согласно равенству (1.1.18), имеет место следующее условие, наложенное на поперечное и продольное волновые числа (ср. уравнение (1.1.15)):

$$k_{y,m}(\omega_m^{cr}) = 0 \quad \text{и} \quad \beta_m(\omega_m^{cr}) = \omega_m^{cr}/c. \tag{1.1.23}$$

Выражения (1.1.19) и (1.1.20) для фазовой и групповой скоростей показывают, что на критической частоте всегда (ср. уравнение (1.1.16))

$$v_{\mathrm{ph},m}^{cr} \equiv v_{\mathrm{ph},m}(\omega_m^{cr}) = c \quad \text{и} \quad v_{\mathrm{gr},m}^{cr} \equiv v_{\mathrm{gr},m}(\omega_m^{cr}) = c, \tag{1.1.24}$$

т. е. обе скорости волны равняются скорости света во внешней диэлектрической среде с изотропными свойствами.

Из равенств (1.1.23) следует, что на частоте ω_m^{cr} поля m-й моды, будучи неизменными вдоль оси y ($\partial/\partial y = -ik_{y,m} = 0$), распространяются в направлении z как плоские волны с законом дисперсии $\beta_m = \omega_m^{cr}/c$. Именно это обеспечивает фазовую и групповую продольные скорости, равными скорости света в окружающей диэлектрической среде, что вытекает из (1.1.24).

Такая физическая ситуация отличается направлением распространения плоской волны от той, что имела место на частоте отсечки ω_m^c, даваемой формулой (1.1.15). В том случае объемная распространяющаяся и нераспространяющаяся (исчезающая) моды превращались друг в друга. При этом электромагнитное поле, будучи неизменным вдоль z ($\partial/\partial z = -i\beta_m = 0$), распространялось в направлении y, что обеспечивало поперечный резонанс с фазовой и групповой скоростями в продольном направлении, даваемыми формулой (1.1.16).

На основании вышесказанного утверждения о превращении объемных мод в излучательные моды, когда $D \to \infty$ на рис. 1.2, можно предвидеть, что при переходе к открытой структуре критическая частота ω_m^{cr}, определяемая формулами (1.1.23), соответствует исчезновению дискретной поверхностной моды и появлению непрерывного спектра излучательных мод.

1.1.3. Комплексные моды. Комплексные моды в недиссипативных волноводах со сложными средами возникают, когда $k_y^2(\omega)$ становится комплекснозначным, в результате чего как поперечное, так и продольное волновые числа принимают комплексные значения:

$$k_y = \mathrm{Re}\, k_y + i\mathrm{Im}\, k_y \quad \text{и} \quad k_z = \mathrm{Re}\, k_z + i\mathrm{Im}\, k_z. \tag{1.1.25}$$

Комплексность числа k_y обеспечивает поперечное распределение полей в m-й моде, описываемое мембранной функцией (1.1.6) поверхностного типа. Это означает, что поля моды локализованы около границы раздела сред, затухая по амплитуде при удалении от границы $y = d$ как $\exp(-\mathrm{Im}\, k_{y,m}\, y)$, что иллюстрирует рис. 1.2 *в*. В этом отношении комплексные моды сходны с поверхностными модами (для которых мембранная функция $\widehat{f}_m(y)$ изображена сплошной кривой на рис. 1.2 *б*), но отличаются от них наличием поперечного распространения фазы в форме $\exp\left[i(\omega t - \mathrm{Re}\, k_{y,m}\, y)\right]$.

Волновые числа (1.1.25) не являются независимыми друг от друга, так как связаны характеристическим уравнением (1.1.1). Их подстановка в это уравнение дает следующие соотношения, позволяющие выразить $\mathrm{Re}\, k_y$ и $\mathrm{Im}\, k_y$ через $\mathrm{Re}\, k_z$ и $\mathrm{Im}\, k_z$:

$$(\mathrm{Re}\, k_y)^2 - (\mathrm{Im}\, k_y)^2 = K^2, \tag{1.1.26}$$

$$\mathrm{Re}\, k_y\, \mathrm{Im}\, k_y = \alpha\beta. \tag{1.1.27}$$

Здесь введены амплитудная и фазовая постоянные, $\alpha = -\mathrm{Im}\, k_z$ и $\beta = \mathrm{Re}\, k_z$, образующие постоянную продольного распространения,

$$\gamma \equiv \alpha + i\beta = -\mathrm{Im}\, k_z + i\mathrm{Re}\, k_z \equiv ik_z, \tag{1.1.28}$$

а также введено обозначение

$$K^2 = k^2 + \alpha^2 - \beta^2. \tag{1.1.29}$$

Уравнения (1.1.26) и (1.1.27) описывают гиперболы, чьи графики качественно изображены на рис. 1.3 для двух случаев:

а) $K^2 > 0$ или $\beta^2 < k^2 + \alpha^2$, что дает

$$\left(\frac{v_{\mathrm{ph}}}{c}\right)^2 > \frac{1}{1 + (\alpha/k)^2}, \tag{1.1.30}$$

б) $K^2 < 0$ или $\beta^2 > k^2 + \alpha^2$, что дает

$$\left(\frac{v_{\mathrm{ph}}}{c}\right)^2 < \frac{1}{1 + (\alpha/k)^2}. \tag{1.1.31}$$

В каждом из этих случаев графическое решение системы уравнений (1.1.26) и (1.1.27) находится как четыре точки пересечения шести гипербол, показанных на рис. 1.3 *а* и *б*, которые обозначены цифрами 1, $\widetilde{1}$, 2, $\widetilde{2}$. В соответствии с неравенствами (1.1.30) и (1.1.31), все четыре точки на рис. 1.3 *б* соответствуют *медленным* модам с фазовой скоростью $v_{\mathrm{ph}} < c$, в то время как комплексные моды на рис. 1.3 *а* могут быть как *медленными* ($v_{\mathrm{ph}} < c$), так и *быстрыми* ($v_{\mathrm{ph}} > c$). Более того, предельный случай $\alpha \to 0$ приводит к парному слиянию точек, в результате чего приходим к следующей ситуации:

а) рис. 1.3 *а* дает два решения в точках K и $-K$, имеющие

$$k_y \equiv \mathrm{Re}\, k_y = \pm K(\alpha = 0) = \pm\sqrt{k^2 - \beta^2}, \tag{1.1.32}$$

которые соответствуют *быстрым объемным модам*, поскольку $\beta^2 < k^2$ (см. п. 1.1.1);

б) рис. 1.3 *б* дает два решения в точках $|K|$ и $-|K|$, имеющие

$$k_y \equiv i\mathrm{Im}\, k_y = \pm i|K(\alpha = 0)| = \pm i\sqrt{\beta^2 - k^2}, \tag{1.1.33}$$

которые соответствуют *медленным поверхностным модам*, так как $\beta^2 > k^2$ (см. п. 1.1.2).

Следовательно, комплексные моды имеют более общую структуру полей, которая приводит к объемным и поверхностным модам в предельных случаях (1.1.32) и (1.1.33).

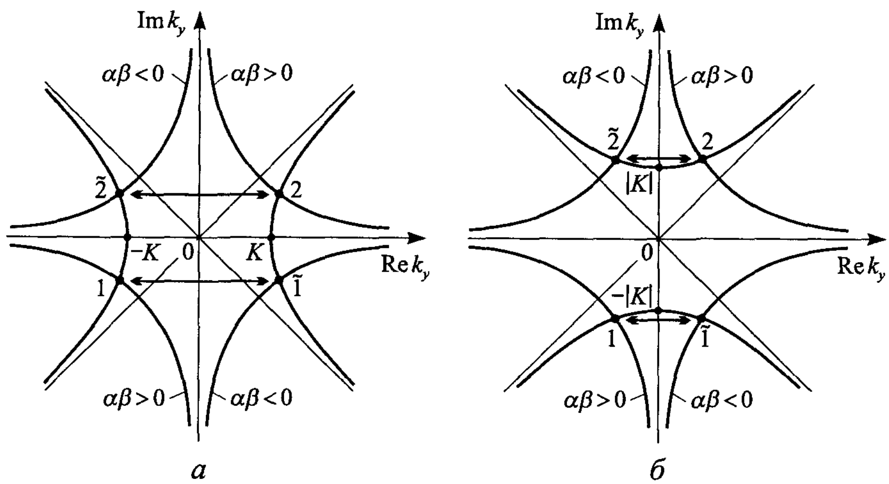


Рис. 1.3. Графическое нахождение поперечного волнового числа $k_y = \mathrm{Re}\, k_y + i\mathrm{Im}\, k_y$ для двух пар, $1-\tilde{1}$ и $2-\tilde{2}$, двойниковых мод, соединенных друг с другом горизонтальной стрелкой: *а* — при $K^2 > 0$, *б* — при $K^2 < 0$

Четыре корня уравнений (1.1.26) и (1.1.27) объединяются в пары, $1-\tilde{1}$ и $2-\tilde{2}$, которые выделены на рис. 1.3 *а* и *б* двойными горизонтальными стрелками. Каждая пара корней соответствует так называемым *двойниковым модам* (англ. *twin-conjugate modes*), которые обоснованно введены позже в п. 2.4. Там будет показано, что эти парные моды являются реактивными модами с номерами m и $\tilde{m}$, каждая из которых не имеет собственного потока мощности ($P_m = P_{\tilde{m}} = 0$), но в паре друг с другом они переносят взаимную мощность $P_{m\tilde{m}}^{pair}$, определенную выражением (2.4.22). Для реализации этой ситуации необходимо обеспечить следующие соотношения между продольными постоянными распространения для двойниковой пары (см. уравнение (2.4.7)):

$$\gamma_{\tilde{m}} = -\gamma_m^* \quad \text{или} \quad k_{z,\tilde{m}} = k_{z,m}^*, \tag{1.1.34}$$

что означает

$$\alpha_{\widetilde{m}} \equiv -\operatorname{Im} k_{z,\widetilde{m}} = \operatorname{Im} k_{z,m} \equiv -\alpha_m,$$
$$\beta_{\widetilde{m}} \equiv \operatorname{Re} k_{z,\widetilde{m}} = \operatorname{Re} k_{z,m} \equiv \beta_m. \tag{1.1.35}$$

Если точку 1 или 2 (для которых $\alpha\beta > 0$) отождествить с модой m, тогда точка $\widetilde{1}$ или $\widetilde{2}$ (для которых $\alpha\beta < 0$) соответствует ее двойнику $\widetilde{m}$, для которого

$$\operatorname{Re} k_{y,\widetilde{m}} = -\operatorname{Re} k_{y,m} \quad \text{и} \quad \operatorname{Im} k_{y,\widetilde{m}} = \operatorname{Im} k_{y,m}, \tag{1.1.36}$$

что означает

$$k_{y,\widetilde{m}} = -k^*_{y,m}. \tag{1.1.37}$$

Для последующего рассмотрения *открытых* волноведущих структур (при $D \to \infty$) следует отметить, что обе моды, образующие двойниковую пару, всегда имеют одинаковые значения $\operatorname{Im} k_y$, как видно из (1.1.36). Это гарантирует их принадлежность одному и тому же листу римановой поверхности для функции $k_y(k_z) = \sqrt{k^2 - k_z^2}$ (см. приложение А.2). Тогда точки 1 и $\widetilde{1}$ с $\operatorname{Im} k_y < 0$, расположенные на *физическом листе* римановой поверхности, являются *реактивными модами* поверхностного типа, в то время как точки 2 и $\widetilde{2}$ с $\operatorname{Im} k_y > 0$ принадлежат *нефизическом листу* и интерпретируются как *вытекающие моды* (англ. *leaky modes*), поля которых нарастают в поперечном направлении при удалении на бесконечность (см. п. 1.5.2).

Таким образом, каждая пара *двойниковых мод* удовлетворяет условиям (1.1.34)–(1.1.37), наложенным на их продольные и поперечные волновые числа. Как видно из (1.1.35), такие двойники имеют одинаковую фазовую скорость ($\beta_m = \beta_{\widetilde{m}}$), но их амплитудные постоянные отличаются знаком ($\alpha_m = -\alpha_{\widetilde{m}}$). Последнее также свойственно исчезающим модам как частный случай, поскольку у них отсутствует распространение фазы ($\beta_m = 0$).

Знак амплитудной постоянной α_m может быть использован для классификации нераспространяющихся (реактивных) мод на *прямые* и *обратные* моды путем присвоения первым положительного индекса ($+m > 0$), а вторым отрицательного ($-m < 0$), где m означает модуль номера моды при наличии знаков $\pm m$. Такая классификация подобна той, что используется для распространяющихся мод, разделяемых на прямые и обратные по знаку групповой скорости $v_{\text{gr},m} = [\partial\beta_m(\omega)/\partial\omega]^{-1}$. Так как такая скорость у нераспространяющихся мод отсутствует, то ее роль выполняет амплитудная постоянная α_m.

Таким образом, активные (распространяющиеся) и реактивные (нераспространяющиеся) моды классифицируются на два типа:

- ***прямые моды*** (отмеченные индексом $+m > 0$) характеризуются либо положительной групповой скоростью ($v_{\text{gr},+m} > 0$) для активных мод, либо положительной амплитудной постоянной ($\alpha_{+m} > 0$) для реактивных мод;

- ***обратные моды*** (отмеченные индексом $-m < 0$) характеризуются либо отрицательной групповой скоростью ($v_{\text{gr},-m} < 0$) для активных мод, либо отрицательной амплитудной постоянной ($\alpha_{-m} < 0$) для реактивных мод.

Спектральное обоснование вышеприведенной классификации будет выполнено в п. 1.3.

Рассмотрим поведение прямых и обратных мод при прохождении через область источников (область межмодовой связи), расположенную вдоль оси волновода между плоскостями $z = -z_0$ и $z = z_0$ (см. ниже рис. 1.4).

Прямые моды (активные и реактивные) с номером $+m$ возбуждаются, начиная со входа при $z = -z_0$, где они имеют амплитуду $A_{+m}(-z_0)$, равную или не равную нулю. Пройдя через область источников, они выходят на противоположном конце при $z = z_0$ с амплитудой $A_{+m}(z_0) \neq 0$. Справа от области источников (при $z > z_0$) активные моды (объемные и поверхностные) распространяются без затухания с неизменной амплитудой $\big(A_{+m}(z_0) = = \mathrm{const}\big)$, а реактивные моды (комплексные и исчезающие) затухают в виде $A_{+m}(z_0)\exp\big[-\alpha_{+m}(z-z_0)\big]$.

Обратные моды (активные и реактивные) с номером $-m$ возбуждаются, начиная со своего входа при $z = z_0$, где они имеют амплитуду $A_{-m}(z_0)$, равную или не равную нулю. Пройдя через область источников, они выходят на противоположном конце при $z = -z_0$ с амплитудой $A_{-m}(-z_0) \neq 0$. Слева от области источников (при $z < -z_0$) активные моды распространяются без затухания с постоянной амплитудой $\big(A_{-m}(-z_0) = \mathrm{const}\big)$, в то время как реактивные моды затухают в виде $A_{-m}(-z_0)\exp\big[|\alpha_{-m}|(z+z_0)\big]$.

Внутри области источников (области межмодовой связи), расположенной при $-z_0 < z < z_0$, в общем случае существует полная система собственных мод (активных и реактивных) с амплитудами $A_{\pm m}(z)$, изменяющимися в продольном направлении в результате действия возбуждающих источников или связи между модами.

Входные амплитуды $A_{+m}(0)$ для прямых мод (с индексом $+m > 0$) и $A_{-m}(L)$ для обратных мод (с индексом $-m < 0$) играют роль краевых условий в задачах возбуждения или связи мод и задаются в следующей форме:

- на *левом* краю при $z = -z_0$ для *прямой* моды (активной с $v_{\mathrm{gr},+m} > 0$ и реактивной с $\alpha_{+m} > 0$)

$$A_{+m}(-z_0) \neq 0 \quad \text{или} \quad A_{+m}(-z_0) = 0; \tag{1.1.38}$$

- на *правом* краю при $z = z_0$ для *обратной* моды (активной с $v_{\mathrm{gr},-m} < 0$ и реактивной с $\alpha_{-m} < 0$)

$$A_{-m}(z_0) \neq 0 \quad \text{или} \quad A_{-m}(z_0) = 0. \tag{1.1.39}$$

Нулевые входные условия, приведенные в формулах (1.1.38) и (1.1.39), соответствуют той моде, которая не вводится в область взаимодействия, а возникает в результате возбуждения заданными источниками или благодаря связи с другими модами.

Возвращаясь к паре *двойниковых мод* с номерами m и $\widetilde{m}$, можно объяснить, на основании вышесказанного, противоположные знаки их амплитудных постоянных α_m и $\alpha_{\widetilde{m}}$ тем, что вне области возбуждения (связи мод) каждая из двойниковых мод существует по разные стороны этой области. Если, например, m-я мода — прямая (с номером $m = +m$), а $\widetilde{m}$-я мода — обратная (с номером $\widetilde{m} = -m$), то первая существует при $z > z_0$, а вторая при $z < -z_0$, и обе реактивно затухают при удалении от своих выходных концов $z = z_0$ и $z = -z_0$ в силу того, что $\alpha_m = \alpha_{+m} > 0$ и $\alpha_{\widetilde{m}} = \alpha_{-m} < 0$.

Внутри области возбуждения (связи мод) обе двойниковые моды существуют одновременно, обеспечивая, как будет показано в п. 2.4.2, ненулевую парную кросс-мощность $P^{pair}_{m\tilde{m}}$ в форме (2.4.22).

1.2. Определение направляемых и излучательных мод открытого волновода

Рассмотрим свойства собственных мод открытой волноведущей структуры, руководствуясь основными результатами, полученными в предыдущем параграфе для закрытых волноводов.

Отличительной особенностью любого открытого волновода (в том числе с многослойными средами) является неограниченность области существования электромагнитных полей в поперечном направлении. Если поля моды, бегущей вдоль оси z, локализованы в районе границы волноведущей среды (например, границы $y = d$ на рис. 1.2) и экспоненциально затухают при удалении вовнутрь внешней изотропной среды (как изображено сплошной кривой на рис. 1.2 *б*), то эта картина соответствует модам *поверхностного типа*. Такая структура полей в принципе не отличается от той, которая характерна для поверхностных мод закрытого волновода, рассмотренных в п. 1.1.2. Действительно, поля этих мод практически не чувствуют металлической отражающей стенки, если она достаточно удалена от внешней границы волноведущей среды (в предельном случае $D \to \infty$ на рис. 1.2, что обеспечивает переход к открытой структуре). В применении к *открытым диэлектрическим волноводам* такие поверхностные моды называются *направляемыми модами* дискретного спектра [11–19].

Как установлено выше, фундаментальное свойство, присущее распространяющимся модам поверхностного типа, состоит в невозможности их превращения в нераспространяющиеся (исчезающие) моды, в отличие от мод объемного типа, рассмотренных в п. 1.1.1. Однако m-я поверхностная мода может превратиться в объемную моду на частоте ω_m^{cr}, определяемой соотношениями (1.1.23). На этой частоте структура поля соответствует плоской волне ($\partial/\partial y = -ik_{y,m} = 0$, как показано штриховой линией на рис. 1.2 *б*), которая распространяется вдоль оси z с одинаковыми фазовой и групповой скоростями, равными, согласно формуле (1.1.24), скорости света в окружающей изотропной среде.

Только что упомянутое свойство поверхностных мод в закрытых волноводах может быть обобщено на направляемые моды поверхностного типа в открытых волноводах, поскольку структура полей не меняется при удалении на бесконечность металлической отражающей границы. Следовательно, любая направляемая мода, например с номером m, всегда остается распространяющейся в пределах частотного диапазона своего существования. На границе этого диапазона, соответствующей критической частоте ω_m^{cr}, мода должна превратиться в плоскую волну (с поперечным распределением полей в форме штриховой линии на рис. 1.2 *б*), распространяющуюся со скоростью света во внешней диэлектрической среде. Именно такая плоская электромагнитная волна порождает *излучательные моды* непрерывного спектра в открытых волноводах. Они возникают как предельный случай объемных мод закрытого волновода, когда спектральное расстояние между соседними модами, т. е. $\Delta k_y \sim 1/D$, уменьшается с ростом D. Это уплотняет дискретный спектр мод, делая его непрерывным в пределе $D \to \infty$.

В общем случае дискретный спектр волноводов со сложными волноведущими средами может содержать, кроме поверхностных мод (распространяющихся вдоль z, но исчезающих в поперечном направлении), и комплексные моды (см. п. 1.1.3). Они также относятся к модам поверхностного типа, поскольку их поля затухают при удалении от границы раздела, но с фазовой задержкой в поперечном направлении, как показано на рис. 1.2 *в*. Поверхностный характер этих мод сохраняется и при удалении металлической стенки на бесконечность ($D \to \infty$). В отличие от распространяющихся мод поверхностного типа, комплексные моды являются нераспространяющимися (точнее, реактивно распространяющимися, так как имеет место распространение по фазе в отсутствие групповой скорости).

В этом параграфе рассматривается общий случай открытых волноведущих структур со сложными материальными средами, поддерживающими существование как распространяющихся поверхностных мод, так и нераспространяющихся комплексных мод, которые собирательно будем называть *направляемыми модами*.

Собственное поле, принадлежащее любой направляемой моде, описывается функцией $f_{guid}(x, y, z)$ (индекс *guid* от англ. *guided modes*), квадратично интегрируемой на бесконечном поперечном сечении открытого волновода ($S \to \infty$). Это требование связано с поверхностным характером полей и гарантирует конечную величину энергии, запасаемой полями каждой дискретной моды. Свойство квадратичной интегрируемости записывается как

$$\int\limits_{S\to\infty} |f_{guid}(x, y, z)|^2\, dxdy \leqslant C < \infty, \tag{1.2.1}$$

где $f_{guid}(x, y, z)$ — физическая величина, определяющая запасенную электромагнитную энергию. Требование (1.2.1) с неизбежностью дает следующее условие, обеспечивающее поверхностный характер полей:

$$|f_{guid}(y, z)| \to 0 \qquad \text{при} \quad |y| \to \infty. \tag{1.2.2}$$

Оно записано для *планарной* открытой структуры с отсутствием зависимости от x и осью y, направленной по нормали к границам раздела многослойной среды. Соотношение (1.2.2) удовлетворяет общему *принципу излучения*, требующему исчезновения полей на (поперечной) бесконечности [4, 6, 27].

Дискретный спектр направляемых мод (поверхностных и комплексных), затухающих в поперечном направлении, не может быть полным для электромагнитного поля во всем безграничном пространстве, поскольку с помощью только этих мод невозможно учесть поля в точках, удаленных на достаточно большое (в пределе бесконечное) расстояние.

Именно эти удаленные поля и составляют *поле излучения* $f_{rad}(y, z)$ (индекс *rad* от англ. *radiation*) открытой волноведущей структуры. Это поле может быть представлено в форме интеграла Фурье по поперечным координатам (k_y-представление):

$$f_{rad}(y,z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{C_F} \widetilde{f}_y(k_y,z)\, e^{-ik_y y}\, dk_y \equiv \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_y(y,z;k_y)\, dk_y, \tag{1.2.3}$$

где фурье-контур C_F проходит вдоль вещественной оси $\mathrm{Re}\, k_y$ от $-\infty$ до ∞.

Спектральное фурье-представление (1.2.3) устанавливает соответствие между *полем излучения* $f_{rad}(y,z)$ и его *фурье-образом* $\widetilde{f}_y(k_y,z)$ по координате y. Последний, кроме нижнего индекса y, отмечен знаком тильды и рассматривается как функция непрерывно меняющейся переменной k_y. Бесконечный континуум значений поперечного волнового числа k_y вместе с соответствующими значениями $\widetilde{f}_y(k_y,z)$ и составляет *непрерывный спектр* поля излучения.

Отдельную спектральную составляющую, обозначенную в k_y-представлении (1.2.3) в виде (без знака тильды)

$$f_y(y,z;k_y) \equiv \frac{1}{2\pi}\widetilde{f}_y(k_y,z)\, e^{-ik_y y}, \tag{1.2.4}$$

принято называть *излучательной модой*.

Поскольку все значения k_y в спектральном преобразовании (1.2.3) чисто вещественные, то каждая излучательная мода $f_y(y,z;k_y)$ имеет осциллирующую зависимость от y в виде функции $\exp(-ik_y y)$. Следовательно, вместо требования исчезновения полей на поперечной бесконечности, выражаемого формулой (1.2.2), для (1.2.4) работает более слабое ограничение, наложенное на излучательные моды в форме

$$|f_y(y,z;k_y)| \leqslant C < \infty \qquad \text{при} \quad |y| \to \infty. \tag{1.2.5}$$

Формула (1.2.5) выражает конечность поля отдельной излучательной моды (1.2.4) в поперечном направлении. На первый взгляд, это может быть интерпретировано как нарушение принципа излучения. Однако полное поле излучения в виде интеграла (1.2.3) обязательно должно удовлетворять этому принципу, а именно

$$|f_{rad}(y,z)| \to 0 \qquad \text{при} \quad |y| \to \infty. \tag{1.2.6}$$

Таким образом, условия (1.2.2) для дискретного спектра направляемых мод (поверхностных и комплексных) и (1.2.6) для непрерывного спектра излучательных мод дают общий *принцип излучения* для полного электромагнитного поля:

$$|f(y,z)| \equiv |f_{guid}(y,z) + f_{rad}(y,z)| \to 0 \qquad \text{при} \quad |y| \to \infty. \tag{1.2.7}$$

Требование (1.2.7), наложенное на полное поле, позволяет отбирать физически реализуемые решения граничной задачи, как удовлетворяющие принципу излучения. Ниже продемонстрируем, как это делается на практике.

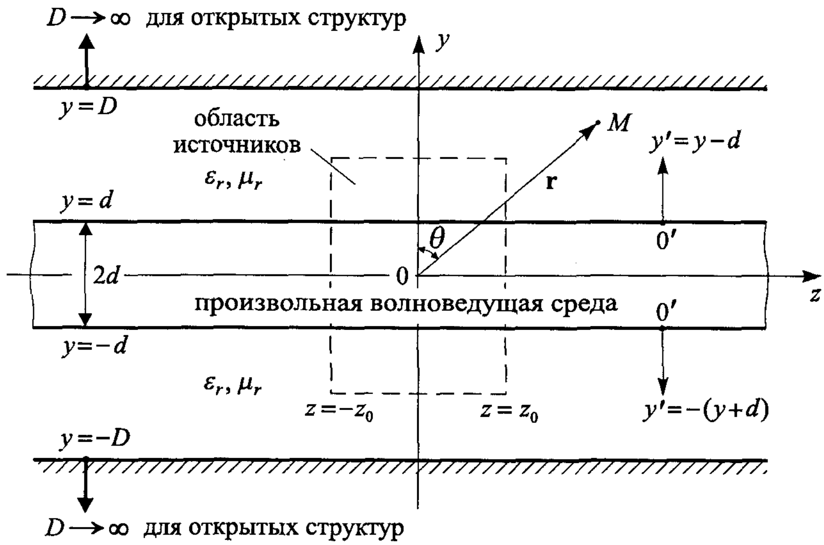


Рис. 1.4. Планарный волновод с идеально проводящей внешней границей и изотропной средой с проницаемостями ε_r и μ_r: возбуждающие источники расположены в области $-z_0 < z < z_0$, M — точка наблюдения. Координатные оси y' используются в приложении А.1

1.3. Спектральное представление полей в открытых волноведущих структурах

Рассмотрим открытую волноведущую структуру с возбуждающими источниками, локализованными вдоль оси z в области $-z_0 < z < z_0$, что качественно показано на рис. 1.4. Нас интересует поле вне области источников в точке M изотропной диэлектрической среды выше $(y > d)$ или ниже $(y < -d)$ крайних границ $y = \pm\, d$ волноведущей среды (состоящей в общем случае из различных слоев, расположенных в пределах $-d < y < d$).

Трансляционная инвариантность структуры, связанная с ее продольной однородностью *вне* области источников, делает более удобной запись искомого решения неоднородной задачи (с возбуждающими источниками) в форме преобразования Фурье по продольной координате (k_z-представление) (ср. уравнение (1.2.3)):

$$f(y,z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{C_{\mathrm{F}}} \widetilde{f}_z(y,k_z)\, e^{-ik_z z} dk_z \equiv \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_z(y,z;k_z)\, dk_z, \qquad (1.3.1)$$

где фурье-контур C_{F} проходит вдоль вещественной оси $\mathrm{Re}\, k_z$ от $-\infty$ до ∞ (см. рис. 1.5).

По аналогии с (1.2.4), *фурье-образ* $\widetilde{f}_z(y,k_z)$ по координате z отмечен нижним индексом и знаком тильды, в то время как *излучательная мода* в k_z-представлении определена в виде

$$f_z(y,z;k_z) \equiv \frac{1}{2\pi}\widetilde{f}_z(y,k_z)\, e^{-ik_z z}. \qquad (1.3.2)$$

Как следует из приложения А.1, полное поле (1.3.1) *вне* области источников может быть записано в форме спектрального представления (А.1.26) для комплексной амплитуды $f_\omega(y,z)$ на частоте ω. Для определенности рассмотрим поле (опуская индекс ω) в точке M на рис. 1.4, где $y > d$ и $z > z_0$, тогда нижнее выражение (А.1.26) дает

$$f(y,z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{C_F} \frac{s(\omega, k_z) \exp(-ik_z z_0)}{\mathcal{D}(\omega, k_z)} e^{-ik_y y} e^{-ik_z(z-z_0)} dk_z. \tag{1.3.3}$$

Из сравнения выражений (1.3.1) и (1.3.3) видно, что в k_z-представлении фурье-образ $\widetilde{f}_z(y,k_z)$ и излучательная мода $f_z(y,z;k_z)$, определенные в форме (1.3.2), имеют следующий вид:

$$\widetilde{f}_z(y,k_z) = \frac{s(\omega,k_z)}{\mathcal{D}(\omega,k_z)} e^{-ik_y y}, \tag{1.3.4}$$

$$f_z(y,z;k_z) = \frac{1}{2\pi} \frac{s(\omega,k_z)}{\mathcal{D}(\omega,k_z)} e^{-i(k_y y + k_z z)}. \tag{1.3.5}$$

В приложении А.1 показано, что функция $\mathcal{D}(\omega,k_z)$, стоящая в знаменателе выражений (1.3.3)–(1.3.5), является *дисперсионной функцией* однородной граничной задачи (без возбуждающих источников). Нули этой функции, будучи корнями дисперсионного уравнения,

$$\mathcal{D}(\omega,k_z) = 0, \tag{1.3.6}$$

образуют *дискретный спектр* направляемых мод — *активных* (распространяющиеся поверхностные моды) и *реактивных* (нераспространяющиеся комплексные моды) для общего случая волновода со сложными средами.

Поперечное волновое число k_y, входящее в выражения (1.3.3)–(1.3.5), характеризует внешнюю диэлектрическую среду с изотропными параметрами $\varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_0$ и $\mu = \mu_r\mu_0$ (рис. 1.4) и равняется величине

$$k_y(k_z) = \sqrt{k^2 - k_z^2} = \sqrt{\omega^2\varepsilon\mu - k_z^2}, \tag{1.3.7}$$

рассматриваемой как двузначная функция продольного волнового числа k_z.

Функция источника $s(\omega,z)$, заданная в виде (А.1.22), т. е. локализованная внутри области $-z_0 < z < z_0$, имеет такой фурье-образ $s(\omega,k_z)$, что стоящая в числителе подынтегрального выражения (1.3.3) функция $s^-(\omega,k_z) \equiv$ $\equiv s(\omega,k_z)\exp(-ik_z z_0)$ является аналитической в нижней полуплоскости k_z, где $\operatorname{Im} k_z < 0$ (обоснование этого см. в приложении А.1.2).

Обычно вычисление несобственного интеграла (1.3.3) основывается на технике контурного интегрирования с использованием теоремы Коши [25, 26]. Подынтегральное выражение $f_z(y,z;k_z)$ преобразования Фурье (1.3.3) определено на вещественной оси $\operatorname{Re} k_z$ от $-\infty$ до ∞ (фурье-контур C_F). Эта область определения может быть аналитически продолжена в нижнюю полуплоскость k_z, где экспоненциальная функция $\exp[-ik_z(z-z_0)]$ затухает при $|k_z| \to \infty$ для точек $z > z_0$, поскольку $\operatorname{Im} k_z < 0$. Подобная ситуация для точек $z < -z_0$ имеет место в верхней полуплоскости, где $\operatorname{Im} k_z > 0$ (см. уравнения (А.1.22)–(А.1.26)). Замыкание фурье-контура C_F контуром

Жордана C_J (в форме полуокружности бесконечно большого радиуса $J \to \infty$, на котором выполняются требования леммы Жордана) позволяет применить теорему о вычетах [25, 26], как описано в приложении А.1.2. Тогда результат контурного интегрирования при вычислении (1.3.3) содержит два вклада:

- от *точки ветвления* $k_z = k$ двузначной функции $k_y(k_z)$ в виде (1.3.7);
- от *полюсов*, соответствующих корням дисперсионного уравнения (1.3.6), лежащим в нижней полуплоскости k_z.

Комплексные значения k_z, полученные как результат аналитического продолжения функции $f_z(y, z; k_z)$, приводят по формуле (1.3.7) к комплексным значениям k_y. В этом случае требование исчезновения полного поля $f(y, z)$ на поперечной бесконечности при $|y| \to \infty$ (см. уравнение (1.2.7)) удовлетворяется, если

$$\operatorname{Im} k_y < 0. \tag{1.3.8}$$

Неравенство (1.3.8) одновременно справедливо для точек выше ($y > d$) и ниже ($y < -d$) волноведущей среды, так как общее выражение (А.1.26) содержит экспоненциальную функцию $\exp\left[-ik_y(|y| - d)\right]$, которая обеспечивает затухающий характер полей для обоих случаев. Следует подчеркнуть, что спектральное представление (1.2.3) поля излучения $f_{rad}(y, z)$ имеет в качестве переменной интегрирования поперечное волновое число k_y, которое в отличие от (1.3.8) всегда вещественное.

Решения, удовлетворяющие требованию (1.3.8), принято называть *физическими решениями*, так как для них выполняется *принцип излучения* (1.2.7), в отличие от *нефизических решений*, для которых $\operatorname{Im} k_y > 0$. Именно условие (1.3.8) определяет правило проведения разрезов на комплексной плоскости k_z (как показано на рис. 1.5) для того, чтобы выбрать физическую ветвь двузначной функции (1.3.7). Математическое обоснование надлежащего выбора физического решения дано в приложении А.2.

С учетом малых потерь во внешней диэлектрической среде, когда ее волновые числа комплекснозначные (т. е. $k = k' - ik''$, см. уравнение (А.2.1)), разрезы имеют форму части гиперболы, описываемой формулой $\operatorname{Im} k_y(k_z) = 0$, и изображены сплошными кривыми на рис. А.2 *а*. В пределе нулевых потерь ($k'' \to 0$) гиперболы превращаются в кусочно-ломаные линии, показанные на рис. А.2 *б*. Эти линии выходят из точек ветвления $k_z = \pm k$ (лежащих теперь на вещественной оси $\operatorname{Re} k_z$) и идут сначала горизонтально к началу координат $k = 0$, а затем вертикально вниз (для точки ветвления $+k$) или вверх (для точки ветвления $-k$).

В отличие от рис. А.2 *б*, разрезы на рис. 1.5 слегка смещены от осей $\operatorname{Re} k_z$ и $\operatorname{Im} k_z$, чтобы показать их принадлежность к соответствующей полуплоскости k_z. Наше рассмотрение имеет дело с нижней полуплоскостью, которой соответствуют точки пространства $z > z_0$, расположенные справа от области источников (см. точку наблюдения M на рис. 1.4). Как видно из рис. 1.5, нижне-правый ($C_1 = C_1' + C_1''$) и верхне-левый ($C_2 = C_2' + C_2''$) берега разреза принадлежат, соответственно, $\operatorname{Re} k_y < 0$ и $\operatorname{Re} k_y > 0$. Кроме того, имеется малая окружность C_ε радиуса $\varepsilon \to 0$ с центром в точке ветвления $k_z = k$.

Для вычисления несобственного интеграла (1.3.3) в пределах от $-\infty$ до ∞ вдоль вещественной оси $\operatorname{Re} k_z$ надо замкнуть фурье-контур C_F составным

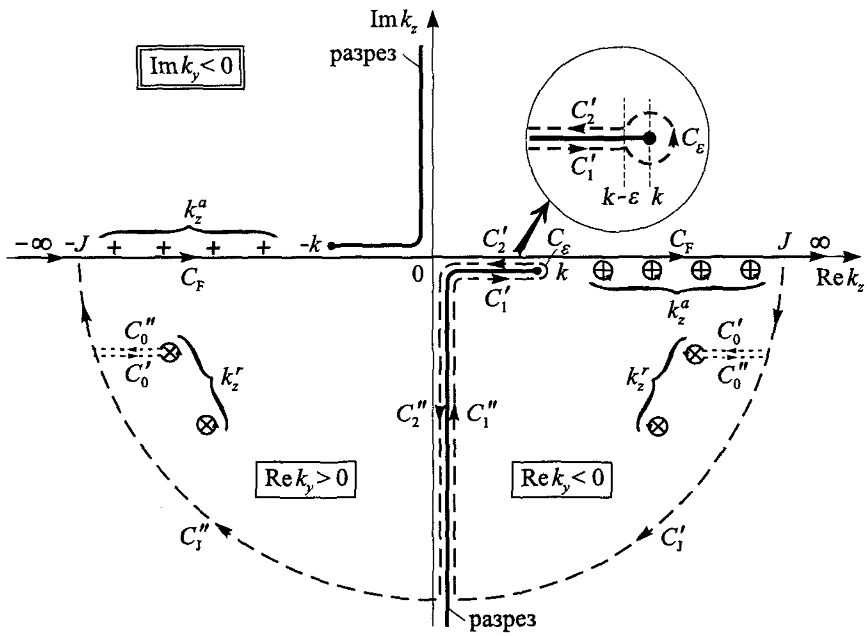


Рис. 1.5. Замыкание фурье-контура C_F на физическом листе римановой поверхности с $\mathrm{Im}\,k_y < 0$ составным контуром, $C_\Sigma = C_\mathrm{J}' + C_1'' + C_1' + C_\varepsilon + C_2' + C_2'' + C_\mathrm{J}''$, включающим нижне-правый, $C_1 = C_1' + C_1''$, и верхне-левый, $C_2 = C_2' + C_2''$, берега разреза, контур Жордана, $C_\mathrm{J} = C_\mathrm{J}' + C_\mathrm{J}''$ (при $J \to \infty$), и малую окружность C_ε (при $\varepsilon \to 0$). Результирующий замкнутый контур $C_\mathrm{F} + C_\Sigma$ охватывает полюсы, соответствующие *активным модам* (с чисто вещественными значениями k_z^a) и *реактивным модам* (с комплексными значениями k_z^r), которые обозначены как $\oplus$ и $\otimes$ с положительным обходом (против часовой стрелки)

контуром, $C_\Sigma = C_\mathrm{J}' + C_1'' + C_1' + C_\varepsilon + C_2' + C_2'' + C_\mathrm{J}''$, показанным пунктиром на рис. 1.5, который включает:

- контур Жордана в виде полуокружности, $C_\mathrm{J} = C_\mathrm{J}' + C_\mathrm{J}''$, бесконечно большого радиуса $J \to \infty$,
- нижний и правый берега разреза, $C_1 = C_1' + C_1''$,
- верхний и левый берега разреза, $C_2 = C_2' + C_2''$,
- окружность C_ε бесконечно малого радиуса, $\varepsilon \to 0$, с центром в точке ветвления $k_z = k$.

На основании интегральной теоремы Коши [25, 26] можем записать

$$\int\limits_{C_\mathrm{F}} \ldots\, dk_z + \int\limits_{C_\mathrm{J}} \ldots\, dk_z + \oint\limits_{C_\varepsilon} \ldots\, dk_z + \int\limits_{C_1} \ldots\, dk_z + \int\limits_{C_2} \ldots\, dk_z + \sum_{\oplus\,\otimes} \oint\limits_{C_k} \ldots\, dk_z = 0. \qquad (1.3.9)$$

Здесь сумма включает интегралы по малым окружностям C_k, охватывающим сингулярные точки k_z^a и k_z^r (обозначенные $\oplus$ и $\otimes$ на рис. 1.5), с положительным направлением обхода (против часовой стрелки). Интегрирование вдоль каждой пары дополнительных отрезков C_0' и C_0'' (показанных точками на рис. 1.5) дает нулевой вклад из-за противоположных направлений.

В соответствии с требованиями леммы Жордана [25], можно записать следующие равенства для подынтегрального выражения в формуле (1.3.3) (см. приложение А.1.2):

$$\lim_{J\to\infty}\int\limits_{C_J} f_z(y,z;k_z)\,dk_z = 0, \tag{1.3.10}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\oint\limits_{C_\varepsilon} f_z(y,z;k_z)\,dk_z = 0, \tag{1.3.11}$$

где поле $f_z(y,z;k_z)$ излучательной моды (1.3.2) имеет вид равенства (1.3.5). Следовательно, искомый интеграл в (1.3.9) вида $\int_{C_{\rm F}}\ldots dk_z$ содержит:

- вклады от интегрирования вдоль берегов разреза C_1 и C_2,
- вклады от вычетов $\operatorname{Res} f_z(k_z^\circ)$ подынтегральной функции $f_z(k_z)$ в сингулярных точках $k_z = k_z^\circ$ (полюсах или существенно особых точках), лежащих в нижней полуплоскости $\operatorname{Im} k_z < 0$, где функция источника, $s^-(\omega,k_z)\equiv$ $\equiv s(\omega,k_z)\exp(-ik_zz_0)$, аналитична (см. приложение А.1.2).

Такие сингулярности возникают в точках, соответствующих корням дисперсионного уравнения (1.3.6), которые образуют дискретный спектр волноведущей структуры, включающий следующие направляемые моды:

а) *активные* (распространяющиеся) моды с чисто вещественными продольными волновыми числами $k_z^a = \operatorname{Re} k_z^a$, обозначенными $\oplus$ на рис. 1.5;

б) *реактивные* (нераспространяющиеся) моды с комплексными продольными волновыми числами $k_z^r = \operatorname{Re} k_z^r + i\operatorname{Im} k_z^r$, обозначенными $\otimes$ на рис. 1.5.

Комплексные значения k_z^r для реактивных мод приводят к комплексным поперечным волновым числам k_y^r, получаемым из уравнений (1.1.26) и (1.1.27), графическое решение которых показано на рис. 1.3. Среди корней дисперсионного уравнения (1.3.6) необходимо выбрать такие, для которых $\operatorname{Im} k_y^r < 0$. Они характеризуют *физически реализуемые поля* поверхностного типа во внешней диэлектрической среде. Соответствующие значения k_z^r располагаются на *физическом листе* римановой поверхности для функции (1.3.7) (см. приложение А.2). Такие точки на k_z-плоскости обычно называют *спектральными* (или собственными) [10, 24], в отличие от *неспектральных* (или несобственных) точек на *нефизическом листе* с $\operatorname{Im} k_y^r > 0$. Последние соответствуют *физически нереализуемым полям* с бесконечно нарастающей амплитудой в поперечном направлении (когда $|y|\to\infty$). Их принято интерпретировать как *вытекающие моды* [10, 13, 19, 24], не удовлетворяющие принципу излучения (1.2.2), но физически проявляющиеся в ближней зоне излучения. Они будут детально исследованы в п. 1.5.2.

Для каждой комплексной точки (спектральной или неспектральной) на рис. 1.3 имеется парная ей точка, удовлетворяющая условиям (1.1.34) и (1.1.37), наложенным на продольные и поперечные волновые числа. Как показано в п. 2.4.2, такая пара комплексных точек соответствует модам, названным *двойниковыми* (англ. *twin-conjugate modes*) [24]. Они неортогональны друг к другу в энергетическом смысле (обеспечивая ненулевую парную кросс-мощность), но ортогональны ко всем другим модам, включая дискретные активные моды и излучательные моды непрерывного спектра. На рис. 1.3 такие парные точки соединены друг с другом горизонтальной двойной стрелкой: спектральные (собственные) точки 1 и $\widetilde{1}$ с $\operatorname{Im} k_y^r < 0$ соответствуют *реактивным модам*, а неспектральные (несобственные) точки 2 и $\widetilde{2}$ с $\operatorname{Im} k_y^r > 0$ — *вытекающим модам*.

Возвращаясь к (1.3.3), на основе вышесказанного можно записать следующие вклады в полное поле справа от области источников (при $z > z_0$):

$$f(y,z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{C_\mathrm{F}} \frac{s^-(\omega,k_z)}{\mathcal{D}(\omega,k_z)}\, e^{-ik_y y} e^{-ik_z(z-z_0)} dk_z \equiv \int\limits_{C_\mathrm{F}} f_z(y,z,;k_z)\,dk_z =$$

$$= -2\pi i \sum_{k_z^a} \operatorname{Res} f_z(y,z;k_z^a) - 2\pi i \sum_{k_z^r} \operatorname{Res} f_z(y,z;k_z^r) -$$

$$- \int\limits_{C_1} f_z(y,z,;k_z)\,dk_z - \int\limits_{C_2} f_z(y,z,;k_z)\,dk_z. \qquad (1.3.12)$$

Согласно теореме о вычетах [25, 26], суммы по k_z^a и k_z^r учитывают вклады от вычетов подынтегральной функции $f_z(y,z;k_z)$, вычисленные в полюсах, охваченных результирующим контуром $C_\mathrm{F} + C_\Sigma$. Эти полюсы являются нулями дисперсионной функции $\mathcal{D}(\omega,k_z)$, которые соответствуют активным и реактивным дискретным модам, обозначенным $\oplus$ и $\otimes$ на рис. 1.5. Знак минус перед суммами в формуле (1.3.12) появляется как результат обхода контура в направлении, указанном стрелками на рис. 1.5.

Так как имеем $k_z = k$ в точке ветвления и $\operatorname{Im} k_y = 0$ на линии разреза (см. приложение А.2), то интегрирование по k_z вдоль нижне-правого берега, $C_1 = C_1' + C_1''$, где $\operatorname{Re} k_y < 0$ (рис. 1.5), равняется интегралу на плоскости k_y вдоль вещественной оси $\operatorname{Re} k_y$ от $-\infty$ до 0. Аналогично, интегрирование по k_z вдоль верхне-левого берега, $C_2 = C_2' + C_2''$, где $\operatorname{Re} k_y > 0$, дает интеграл на плоскости k_y вдоль вещественной оси $\operatorname{Re} k_y$ от 0 до ∞.

Следовательно, с учетом соотношения $dk_z = -(k_y/k_z)\,dk_y$, вытекающего из $k_y^2 + k_z^2 = k^2$, для контурных интегралов в (1.3.12) можно записать

$$-\int\limits_{C_1} f_z(y,z;k_z)\,dk_z = \int\limits_{-\infty}^{0} f_z(y,z;k_z)\,\frac{k_y}{k_z}\,dk_y \equiv \int\limits_{-\infty}^{0} f_y(y,z;k_y)\,dk_y, \qquad (1.3.13)$$

$$-\int\limits_{C_2} f_z(y,z;k_z)\,dk_z = \int\limits_{0}^{\infty} f_z(y,z;k_z)\,\frac{k_y}{k_z}\,dk_y \equiv \int\limits_{0}^{\infty} f_y(y,z;k_y)\,dk_y, \qquad (1.3.14)$$

где вместо $f_z(y,z;k_z)$ введена новая функция

$$f_y(y,z;k_y) = f_z(y,z;k_z)\,\frac{k_y}{k_z}. \qquad (1.3.15)$$

Соотношение (1.3.15) устанавливает для излучательной моды связь между k_y-представлением (формула (1.2.4)) и k_z-представлением (формула (1.3.2)).

Из уравнений (1.3.12)–(1.3.14) следует, что искомое полное поле в общем случае включает три вклада,

$$f(y,z) = f^a_{guid}(y,z) + f^r_{guid}(y,z) + f_{rad}(y,z), \tag{1.3.16}$$

которые вносят моды дискретного и непрерывного спектров:

- дискретные *активные направляемые моды* (распространяющиеся),

$$f^a_{guid}(y,z) = -2\pi i \sum_{k_z^a} \operatorname{Res} f_z(y,z;k_z^a), \tag{1.3.17}$$

- дискретные *реактивные направляемые моды* (нераспространяющиеся),

$$f^r_{guid}(y,z) = -2\pi i \sum_{k_z^r} \operatorname{Res} f_z(y,z;k_z^r), \tag{1.3.18}$$

- *излучательные моды* непрерывного спектра,

$$f_{rad}(y,z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_y(y,z;k_y)\,dk_y \equiv \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \widetilde{f}_y(k_y,z)\,e^{-ik_y y}\,dk_y. \tag{1.3.19}$$

Выведенное выражение (1.3.19) для поля излучения $f_{rad}(y,z)$ совпадает с интегралом Фурье (1.2.3), который был записан из общих соображений.

Как следует из формул (1.2.4), (1.3.2) и (1.3.15), преобразования Фурье в k_y-представлении $\widetilde{f}_y(k_y,z)$ и в k_z-представлении $\widetilde{f}_z(y,k_z)$ связаны друг с другом следующим соотношением:

$$\widetilde{f}_y(k_y,z)\,e^{-ik_y y} = \widetilde{f}_z(y,k_z)\,\frac{k_y}{k_z}\,e^{-ik_z z}. \tag{1.3.20}$$

Согласно рис. 1.5, реактивные поля справа от области источников (при $z > z_0$) создаются комплексными модами, для которых $\operatorname{Im} k_z^r < 0$ при любом знаке $\operatorname{Re} k_z^r$. Поэтому для каждой из них постоянная распространения, равная $\gamma^r \equiv ik_z^r = -\operatorname{Im} k_z^r + i\operatorname{Re} k_z^r$, имеет положительную амплитудную постоянную, $\alpha^r = -\operatorname{Im} k_z^r > 0$. В противоположность этому, комплексные моды слева от области источников (где $z < -z_0$, так что соответствующие корни дисперсионного уравнения находятся в верхней полуплоскости на рис. 1.5) имеют отрицательную амплитудную постоянную, $\alpha^r = -\operatorname{Im} k_z^r < 0$.

Волновой множитель $\exp(i\omega t - \gamma^r z) = \exp(-\alpha^r z)\exp[i(\omega t - \beta^r z)]$ показывает, что поля комплексных (реактивных) мод всегда затухают при удалении от области источников в обоих направлениях. Кроме того, эти поля имеют поверхностный характер, т. е. они исчезают в поперечном направлении из-за $\operatorname{Im} k_y < 0$ (на физическом листе римановой поверхности).

Полученный результат служит математическим обоснованием ранее введенной терминологии по отношению к реактивным (комплексным) модам, которые были, по аналогии с активными модами, классифицированы на *прямые моды* с $\alpha_{+m} > 0$ (характеризуемые индексом $+m > 0$) и *обратные моды* с $\alpha_{-m} < 0$ (характеризуемые индексом $-m < 0$) (см. с. 29 и п. 2.4). Итак, прямые и обратные моды (активные и реактивные) вносят вклад в поле, соответственно, справа и слева от области источников. Внутри этой области (при $-z_0 < z < z_0$) существуют как те, так и другие моды, будучи возбужденными с амплитудами, меняющимися в продольном направлении в результате действия источников (или связи между модами). Решение уравнений возбуждения типа (8) или уравнений связанных мод типа (31), приведенных во введении, требует применения краевых условий, заданных для прямых и обратных мод в виде равенств (1.1.38) и (1.1.39).

В заключение важно отметить, что *вытекающие моды*, которые соответствуют корням дисперсионного уравнения, расположенным на *нефизическом листе* римановой поверхности с $\operatorname{Im} k_y > 0$, вообще не дают *никакого вклада* в полное поле, определяемое уравнениями (1.3.16)–(1.3.19). Вытекающие моды появляются *лишь при асимптотическом вычислении* поля излучения, созданного реактивными излучательными модами в ближней зоне, и будут детально рассмотрены в п. 1.5.2.

1.4. Поле излучения открытых волноведущих структур

Будем обсуждать поле излучения, существующее в открытых волноводах в форме, описываемой интегралом Фурье (1.3.19), для того чтобы показать, что это поле изменяется в дальней зоне как $r^{-1/2}$, что удовлетворяет принципу излучения. Для дальнейшего рассмотрения удобно переписать выражение (1.3.19) в слегка измененной форме:

$$f_{rad}(y,z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \widetilde{f}_y(k_y,z)\, e^{-ik_y y}\, dk_y = $$
$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(k_z)\,\frac{k_y}{k_z}\, e^{-i(k_y y + k_z z)}\, dk_y, \tag{1.4.1}$$

где на основе (1.3.4) и (1.3.20) введена величина

$$F(k_z) = \widetilde{f}_z(y,k_z)\, e^{ik_y y} \equiv \frac{s(\omega,k_z)}{\mathcal{D}(\omega,k_z)}, \tag{1.4.2}$$

рассматриваемая как функция k_y из-за того, что $k_z(k_y) = (k^2 - k_y^2)^{1/2}$. Функции $\mathcal{D}(\omega,k_z)$ и $s(\omega,k_z)$, появившиеся в (1.4.2), представляют собой дисперсионную функцию и фурье-образ функции источника $s(\omega,z)$, определенной в форме (А.1.23).

Согласно преобразованию Фурье (1.4.1), непрерывный спектр излучательных мод характеризуется поперечным волновым числом k_y для внешней изотропной среды, значения которого непрерывно заполняют вещественную ось $\operatorname{Re} k_y$ от $-\infty$ до ∞. На этой оси имеются две характерные точки $k_y = \pm k$, в которых $k_z = 0$, т. е. прекращается волновой процесс вдоль оси z для излучательных мод непрерывного спектра. Такая ситуация аналогична отсечке объемной моды в закрытом волноводе, когда она превращается в исчезающую моду, как было описано в п. 1.1.1. Используя эту аналогию, можно сказать, что точки $k_y = \pm k$ разграничивают полосы пропускания и непропускания (по поперечному волновому числу) для излучательных мод:

а) *излучательная полоса пропускания* $-k < k_y < k$ характеризуется чисто вещественными значениями продольного волнового числа,

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_y^2} = \sqrt{\omega^2 \varepsilon \mu - k_y^2} \equiv \beta, \tag{1.4.3}$$

так что здесь существуют *распространяющиеся излучательные моды* непрерывного спектра;

б) *излучательная полоса непропускания* $k_y < -k$ и $k_y > k$ имеет чисто мнимые значения продольного волнового числа,

$$k_z = -i\sqrt{k_y^2 - k^2} = -i\sqrt{k_y^2 - \omega^2 \varepsilon \mu} \equiv -i\alpha, \tag{1.4.4}$$

что делает излучательные моды непрерывного спектра *нераспространяющимися* вдоль направлении z, и это позволяет, по аналогии с закрытыми волноводами, называть такие моды *исчезающими излучательными модами*.

Сравнение (1.4.3) и (1.4.4) с подобными выражениями (1.1.8) и (1.1.13) подтверждает вышеупомянутую аналогию между излучательными модами в открытых волноводах и объемными модами в закрытых волноводах. Эта аналогия прослеживается также в работе [10] при рассмотрении поля между идеально проводящей и импедансной плоскостями. Анализ показывает, что по мере увеличения расстояния между плоскостями дискретный спектр быстрых мод (с $v_{\text{ph}} > c$) становится все более плотным, превращаясь в непрерывный при удалении идеально проводящей плоскости на бесконечность.

Иными словами, любая открытая волноведущая структура может рассматриваться как экранированный волновод с идеально проводящей границей, удаленной на бесконечность. Это нужно для того, чтобы создать поле во внешней диэлектрической среде в форме двух поперечно-распространяющихся волн: одна — по направлению к бесконечно удаленной отражающей стенке, другая — в обратном направлении как результат отражения от нее. Суперпозиция этих волн образует стоячую картину для излучательных мод, которые не исчезают при $|y| \to \infty$, что отличает их от направляемых мод поверхностного типа. Это обеспечивает условие конечности поля (1.2.5) для отдельной излучательной моды, которая фактически может существовать только в составе всего непрерывного спектра.

Следовательно, модель экранированного волновода с идеально отражающей границей на поперечной бесконечности дает физическое объяснение факту появления непрерывного спектра в открытых структурах и обосновывает условие конечности поля (1.2.5). В этой модели излучательные моды (распространяющиеся в силу (1.4.3) и нераспространяющиеся из-за (1.4.4)) появляются как результат трансформации, соответственно, распространяющихся и исчезающих мод закрытого волновода. Это вызвано уплотнением дискретного спектра по мере удаления на бесконечность идеально отражающей границы.

Таким образом, как направляемые, так и излучательные моды подразделяются на два типа — *активные моды* (распространяющиеся) и *реактивные моды* (комплексные и исчезающие). Любая из активных мод самостоятельно переносит среднюю запасенную электромагнитную энергию W_m в продольном направлении с групповой скоростью $v_{\text{gr},m}$ в форме собственной мощности $P_m = v_{\text{gr},m} W_m$. В то же время для реактивной моды существует 90-градусный фазовый сдвиг между электрическим и магнитным поперечными полями, так что она может только запасать энергию W_m в районе нерегулярностей и возбуждающих источников без переноса ее по волноводу из-за отсутствия групповой скорости (см. п. 2.4).

С учетом двух типов излучательных мод, подчиняющихся соотношениям (1.4.3) и (1.4.4), поле излучения (1.4.1) может быть представлено в виде двух вкладов:

$$f_{rad}(y,z) = f^a_{rad}(y,z) + f^r_{rad}(y,z), \tag{1.4.5}$$

от *активных излучательных мод* (верхний индекс a от англ. *active*),

$$f^a_{rad}(y,z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-k}^{k} \widetilde{f}_y(k_y,z)\, e^{-ik_y y} dk_y \equiv \int\limits_{-k}^{k} f_y(y,z;k_y)\, dk_y, \tag{1.4.6}$$

от *реактивных излучательных мод* (верхний индекс r от англ. *reactive*),

$$\begin{aligned} f^r_{rad}(y,z) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{-k} \widetilde{f}_y(k_y,z)\, e^{-ik_y y} dk_y + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{k}^{\infty} \widetilde{f}_y(k_y,z)\, e^{-ik_y y} dk_y \equiv \\ &\equiv \int\limits_{-\infty}^{-k} f_y(y,z;k_y)\, dk_y + \int\limits_{k}^{\infty} f_y(y,z;k_y)\, dk_y. \end{aligned} \tag{1.4.7}$$

Используя те же рассуждения, что привели к соотношениям (1.3.13) и (1.3.14), легко перейти в выражениях (1.4.6) и (1.4.7) от интегрирования по k_y к контурному интегрированию в плоскости k_z, как изображено на рис. 1.5, тогда

$$\begin{aligned} f^a_{rad}(y,z) &= \int\limits_{-k}^{0} f_y(y,z;k_y)\, dk_y + \int\limits_{0}^{k} f_y(y,z;k_y)\, dk_y = \\ &= -\int\limits_{C_1'} f_z(y,z;k_z)\, dk_z - \int\limits_{C_2'} f_z(y,z;k_z)\, dk_z, \end{aligned} \tag{1.4.8}$$

$$\begin{aligned} f^r_{rad}(y,z) &= \int\limits_{-\infty}^{-k} f_y(y,z;k_y)\, dk_y + \int\limits_{k}^{\infty} f_y(y,z;k_y)\, dk_y = \\ &= -\int\limits_{C_1''} f_z(y,z;k_z)\, dk_z - \int\limits_{C_2''} f_z(y,z;k_z)\, dk_z. \end{aligned} \tag{1.4.9}$$

В формулах (1.4.8) и (1.4.9) использованы выражения для излучательной моды в k_y-представлении $f_y(y,z;k_y)$ (формула (1.2.4)) и в k_z-представлении $f_z(y,z;k_z)$ (формула (1.3.2)). Они связаны друг с другом соотношением (1.3.15), что и обеспечивает переход от первых интегралов ко вторым в выражениях (1.4.8) и (1.4.9).

Из полученных выражений (1.4.8) и (1.4.9) явно следует, что активные излучательные моды возникают как результат контурного интегрирования на плоскости k_z вдоль горизонтальных частей C_1' и C_2' берегов разреза (рис. 1.5), в то время как вертикальные части C_1'' и C_2'' дают вклад исчезающих излучательных мод.

Реактивный характер исчезающих (нераспространяющихся) мод, существующих при $k_y < -k$ и $k_y > k$, очень важен при вычислении несобственных интегралов типа (1.4.1) для поля излучения в дальней зоне. Из-за их реактивной природы (в смысле существования 90-градусного фазового сдвига между электрическим и магнитным поперечными полями) отсутствует реальный вектор Пойнтинга, определяющий среднюю во времени мощность излучения. Следовательно, нераспространяющиеся (исчезающие) излучательные моды в действительности *не являются* реально излучаемыми, несмотря на название, которое отражает не более, чем их принадлежность к непрерывному спектру. Поэтому такие моды правильнее было бы называть исчезающими модами непрерывного спектра для того, чтобы исключить термин «излучательные» из их названия.

Таким образом, действительно излучаемые поля в дальней зоне с ненулевым реальным вектором Пойнтинга создаются только распространяющимися излучательными модами, которые существуют в своей полосе пропускания (по поперечному волновому числу) и подчиняются соотношению (1.4.3). Они имеют чисто вещественные поперечные волновые числа k_y для внешней диэлектрической среды, лежащие в интервале $-k < k_y < k$. Именно такие активные (распространяющиеся) излучательные моды обеспечивают единственно реальный вклад в *поле излучения в дальней зоне* f^a_{rad} (в виде диаграммы направленности, даваемой выражением (1.4.18), которое получено из интеграла Фурье (1.4.6)).

Поля f^r_{rad} в форме интеграла Фурье (1.4.7), созданные реактивными (нераспространяющимися) исчезающими модами, следует отнести к *полям ближней зоны*, которые локализованы в окрестности неоднородностей или области источников поля. Естественно, для полного поля в ближней зоне необходимо принимать во внимание не только их, но и весь спектр, включая как непрерывные излучательные моды (активные и реактивные), так и дискретные направляемые моды (активные и реактивные). В следующем параграфе поля реактивных мод непрерывного спектра будут связаны с полем вытекающей моды, которая появляется как результат асимптотического вычисления интеграла для полного поля излучения.

Все вышесказанное в отношении излучательных мод позволяет нам при нахождении поля излучения в дальней зоне ограничиться учетом только активных излучательных мод и выбрать интервал интегрирования в пределах $-k \leqslant k_y \leqslant k$. Поступая таким образом, мы исключаем необходимость вычисления несобственного интеграла (1.4.1) с бесконечными пределами, сознательно опуская при этом исчезающие моды непрерывного спектра как не дающие реального вклада в поле излучения в дальней зоне.

Следовательно, поле излучения (1.4.1), созданное активными излучательными модами вдали от области источников, там, где $r \gg z_0$ (см. точку наблюдения M на рис. 1.4), может быть представлено в форме интеграла вдоль вещественной оси k_y с конечными пределами:

$$f_{rad}(y,z) \simeq f^a_{rad}(y,z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-k}^{k} \widetilde{f}_y(k_y,z)\, e^{-ik_y y} dk_y =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-k}^{k} F(k_z)\,\frac{k_y}{k_z}\, e^{-i(k_y y + k_z z)} dk_y. \qquad (1.4.10)$$

Здесь функция $F(k_z)$ имеет вид (1.4.2), где величина $k_z(k_y) = (k^2 - k_y^2)^{1/2}$ рассматривается как функция переменной k_y, принимающей только вещественные значения в силу того, что $-k \leqslant k_y \leqslant k$.

Для того чтобы вычислить поле излучения в дальней зоне, следует:

а) перейти от декартовых координат (y,z) к полярным координатам (r,θ), связь между которыми дается формулами (см. рис. 1.4)

$$y = r\cos\theta \quad \text{и} \quad z = r\sin\theta; \qquad (1.4.11)$$

б) заменить переменную интегрирования путем перехода от поперечного волнового числа k_y к углу w в k-пространстве с помощью равенств

$$k_y = k\cos w \quad \text{и} \quad k_z = k\sin w. \qquad (1.4.12)$$

Область изменения k_y между $-k$ и k соответствует *реальным* значениям угла w, лежащим между π и 0.

Подстановка равенств (1.4.11) и (1.4.12) в подынтегральное выражение (1.4.10) дает следующий результат:

$$f^a_{rad}(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi} F(k\sin w)\, k\cos w\, e^{-ikr\cos(w-\theta)} dw, \qquad (1.4.13)$$

где интегрирование проводится в указанных пределах вдоль вещественной оси $\mathrm{Re}\, w$ в общем случае комплексного угла w.

Для асимптотического вычисления интеграла (1.4.13) при $kr \to \infty$ разумно использовать *метод стационарной фазы* вместо метода седловой точки, как это обычно делается при комплекснозначных w, когда значения k_y выходят за пределы интервала $-k \leqslant k_y \leqslant k$ [26, 27]. В методе стационарной фазы путь интегрирования по комплексному углу w сохраняется лежащим вдоль отрезка $[0,\pi]$ вещественной оси $\mathrm{Re}\, w$ и не переходит на комплексную плоскость w, в отличие от пути наибыстрейшего спуска в методе седловой точки (см. приложение А.3). Как результат этого, при таком интегрировании отсутствует вклад вытекающих мод, который с неизбежностью появляется в методе седловой точки, что будет обсуждаться в п. 1.5.

Разложение в ряд Тейлора функции $\cos(w-\theta)$, стоящей в показателе экспоненты под интегралом (1.4.13), в районе стационарной точки $w_s = \theta$ (где θ — угол наблюдения в точке M на рис. 1.4) дает (см. приложение А.3)

$$\cos(w-\theta) = 1 - \frac{1}{2}(w-\theta)^2 + \cdots .$$

С учетом этого, применение метода стационарной фазы [27] к выражению (1.4.13) для поля излучения позволяет преобразовать его при условии $kr \gg 1$ к следующему виду:

$$\begin{aligned} f^a_{rad}(r,\theta) &\simeq \frac{k\cos\theta}{2\pi} F(k\sin\theta)\, e^{-ikr} \int\limits_0^{\pi} e^{ikr(w-\theta)^2/2}\, dw = \\ &= \frac{k\cos\theta}{2\sqrt{\pi}} \frac{e^{-ikr}}{\sqrt{kr}} F(k\sin\theta) \left[\int\limits_0^{u_1} e^{i\pi t^2/2}\, dt + \int\limits_0^{u_2} e^{i\pi t^2/2}\, dt \right], \end{aligned} \tag{1.4.14}$$

где введены обозначения

$$u_1 = \sqrt{\frac{kr}{\pi}}\, \theta \quad \text{и} \quad u_2 = \sqrt{\frac{kr}{\pi}}\, (\pi - \theta). \tag{1.4.15}$$

При использовании интегралов Френеля (см. формулы (21.3-6) в [25])

$$C(u) = \int\limits_0^{u} \cos\left(\frac{\pi}{2} t^2\right) dt \quad \text{и} \quad S(u) = \int\limits_0^{u} \sin\left(\frac{\pi}{2} t^2\right) dt$$

выражение (1.4.14) может быть приведено к окончательной форме:

$$f^a_{rad}(r,\theta) \simeq \frac{k\cos\theta}{2\sqrt{\pi}} \frac{e^{-ikr}}{\sqrt{kr}} F(k\sin\theta)\Big[\big(C(u_1) + C(u_2)\big) + i\big(S(u_1) + S(u_2)\big)\Big]. \tag{1.4.16}$$

Так как $C(u) \approx S(u) \to 1/2$ при $u \to \infty$ [25], то уравнение (1.4.16) дает искомое выражение для асимптотического представления поля в дальней зоне, созданного только *активными* излучательными модами (что отмечено верхним индексом a):

$$f^a_{rad}(r,\theta) \simeq \frac{k\cos\theta}{\sqrt{2\pi kr}} F(k\sin\theta)\, e^{-i(kr-\pi/4)} \quad \text{при} \quad kr \to \infty. \tag{1.4.17}$$

Выражение (1.4.17) исчезает для углов наблюдения $\theta = \pm\pi/2$, т. е. вдоль оси z. Соответствующая этому случаю формула была выведена в [28] и приведена в приложении А.3.

Как видно из (1.4.17), поле в дальней зоне имеет форму волны, удовлетворяющей принципу излучения, поскольку $|f^{pr}_{rad}(r,\theta)| \sim (kr)^{-1/2} \to 0$ при $kr \to \infty$. Такую волну принято называть *пространственной волной* [10, 19]. Функция $F(k\sin\theta)\, k\cos\theta$ характеризует диаграмму направленности для пространственной волны в дальней зоне. Она получается из выражения (1.4.2) для $F(k_z)$ подстановкой $k\sin\theta$ вместо k_z, что является следствием соотношения (1.4.12) для $k_z = k\sin w$ в стационарной точке $w_s = \theta$. Тогда

$$F(k\sin\theta)\, k\cos\theta = \frac{s(\omega, k\sin\theta)}{\mathcal{D}(\omega, k\sin\theta)}\, k\cos\theta. \tag{1.4.18}$$

Выражение, в точности совпадающее с (1.4.17), будет выведено в п. 1.3.1 применением метода седловой точки к интегралу Фурье (1.3.3) для полного поля $f(y,z)$ в k_z-представлении. Тождественность результатов, полученных двумя разными методами, будет служить основанием для важного вывода о роли вытекающих мод в представлении поля в ближней зоне, созданного реактивными (исчезающими) модами непрерывного спектра.

Таким образом, излучательные моды (распространяющиеся и исчезающие) непрерывного спектра вместе с направляемыми модами (активными и реактивными) дискретного спектра образуют *полную систему собственных мод* для открытых волноведущих структур (без включения сюда вытекающих мод, как это иногда ошибочно делается [19]).

Следовательно, *вне* области источников полное поле (1.3.16), с учетом поля излучения (1.4.5), в общем случае включает четыре вклада,

$$f(y,z) = f^a_{guid}(y,z) + f^r_{guid}(y,z) + f^a_{rad}(y,z) + f^r_{rad}(y,z), \tag{1.4.19}$$

обусловленные активными и реактивными модами как дискретного спектра (см. уравнения (1.3.17) и (1.3.18)), так и непрерывного спектра (см. уравнения 1.4.6).

Внутри области источников выражение (1.4.19) должно быть дополнено *ортогональными дополнительными полями* типа (13) и (14), что будет обосновано в п. 2.6.

В заключение еще раз подчеркнем, что одиночная излучательная мода, в силу условия (1.2.5), не удовлетворяет принципу излучения (требующему исчезновения полей на поперечной бесконечности) и, как следствие этого, мощность, переносимая этой модой, становится бесконечно большой из-за отсутствия поперечных границ. Однако в силу непрерывности спектра, отдельная излучательная мода не может быть возбужденной независимо от других таких же мод, т. е. она всегда существует в совокупности со всеми модами непрерывного спектра. Поэтому физическое требование исчезновения полного поля на поперечной бесконечности, выраженное формулой (1.2.6), и конечное значение переносимой мощности обеспечиваются только всем непрерывным спектром излучательных мод как целого, представленным в форме интеграла Фурье (1.4.1).

Тем не менее, из-за линейности уравнений Максвелла и применения преобразования Фурье любая излучательная мода, взятая индивидуально, может рассматриваться как линейно независимое решение однородной (без возбуждающих источников) граничной задачи на собственные значения. С математической точки зрения каждая излучательная мода представляет собой корректное решение граничной задачи и в этом смысле формально ничем не отличается от дискретных решений. Единственная разница между ними состоит в том, что последние подчиняются дисперсионному уравнению, которого нет для мод непрерывного спектра. Сингулярность отдельной излучательной моды, связанная с бесконечностью переносимой ею мощности, математически легко разрешается путем введения δ-функции Дирака вместо символа Кронекера δ_{mn}, характерного для дискретного спектра.

Именно такой прием будет использован в п. 1.9 при записи соотношения ортонормировки (1.9.5) для активных излучательных мод как обобщение аналогичного соотношения (1.8.1) для активных дискретных мод в п. 1.8.

1.5. Поле излучения и концепция вытекающих мод

1.5.1. Вклад пространственной волны в поле излучения. Спектральный подход, разработанный в п. 1.3, строго обосновывает представление поля излучения в форме интеграла Фурье по поперечному волновому числу внешней диэлектрической среды (k_y-представление (1.4.1)). Этот интеграл был выделен из полного поля (1.3.3) в виде интеграла Фурье по продольному волновому числу (k_z-представление) как независимый вклад (1.3.19) непрерывного спектра излучательных мод в суммарное поле (1.3.16). Такое поле включает два других вклада (1.3.17) и (1.3.18) от активных и реактивных направляемых мод дискретного спектра. Они появляются как соответствующие корни дисперсионного уравнения, лежащие на физическом листе (с $\operatorname{Im} k_y < 0$) римановой поверхности для функции $k_y(k_z) = \sqrt{k^2 - k_z^2}$ (см. приложение А.2).

Поле излучения f_{rad}, записанное в форме (1.4.5), также состоит из активных и реактивных (исчезающих) мод непрерывного спектра в форме (1.4.6) и (1.4.7). Согласно (1.4.8) и (1.4.9), они возникают как результат контурного интегрирования вдоль берегов разреза, показанного на рис. 1.5. Четыре вклада в полное поле (1.4.19) от активных и реактивных мод дискретного и непрерывного спектров образуют полную систему линейно независимых собственных функций для открытой волноведущей структуры. Эти собственные функции могут быть использованы в качестве функционального базиса для разложения искомого поля вне области возбуждающих источников. Следует еще раз отметить, что среди собственных мод дискретного спектра явно не присутствуют такие моды, которым соответствуют корни дисперсионного уравнения, лежащие на нефизическом листе (с $\operatorname{Im} k_y > 0$) римановой поверхности, связанные с *вытекающими модами*. Это заключение логически вытекает из последовательного спектрального анализа, разработанного в п. 1.3 и в приложении А.

Поле излучения в дальней зоне было асимптотически вычислено применением метода стационарной фазы к интегралу Фурье (1.4.1) в k_y-представлении. При этом был опущен вклад реактивных (исчезающих) мод непрерывного спектра, для которых $|k_y| > k$ (см. формулу (1.4.10)). Результат вычисления дает выражение (1.4.17) для поля излучения в дальней зоне в виде так называемой *пространственной волны*, удовлетворяющей принципу излучения (1.2.6).

Теперь переходим к асимптотическому вычислению полного поля $f(y,z)$ в форме интеграла Фурье (1.3.3) $\big($без выделения поля излучения $f_{rad}(y,z)\big)$ применением метода седловой точки, кратко изложенного в приложении А.3.

Для дальнейшего анализа удобно записать спектральное k_z-представление (1.3.3) для полного поля $f(y,z)$ в точке (y,z) вне области источников (см. точку M на рис. 1.4) в следующей форме:

$$f(y,z) \equiv \frac{1}{2\pi}\int\limits_{C_{\mathrm{F}}} \widetilde{f}_z(y,k_z)\,e^{-ik_z z}dk_z = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{C_{\mathrm{F}}} F(k_z)\,e^{-i(k_y y+k_z z)}dk_z, \qquad (1.5.1)$$

где фурье-контур C_{F} проходит вдоль вещественной оси $\mathrm{Re}\,k_z$ от $-\infty$ до ∞. Функция $F(k_z)$ имеет вид (1.4.2), а именно

$$F(k_z) = \frac{s(\omega,k_z)}{\mathcal{D}(\omega,k_z)}. \qquad (1.5.2)$$

Функция источника $s(\omega,k_z)$ и дисперсионная функция $\mathcal{D}(\omega,k_z)$ рассматриваются здесь, в отличие от (1.4.1), как функции k_z, которые считаются известными для конкретной волноведущей структуры.

Чтобы вычислить поле в дальней зоне, обычно переходят от декартовых координат (y,z) к полярным координатам (r,θ) с помощью соотношений (1.4.11). Кроме того, переменная интегрирования k_z в интеграле (1.5.1) должна быть заменена переменной w, связанной с k_z следующим равенством (см. уравнение (1.4.12)):

$$k_z = k\sin w. \qquad (1.5.3)$$

Так как переменная k_z принимает на фурье-контуре C_{F} все значения от $-\infty$ до ∞, то новая переменная w представляет собой комплексный угол. Функция, обратная по отношению к функции (1.5.3), вида

$$w = \arcsin(k_z/k) \qquad (1.5.4)$$

отображает плоскость k_z (или всю риманову поверхность) в соответствующие точки плоскости w. Так как функция $\sin w$ периодическая с вещественным периодом 2π, то вся плоскость k_z отображается на плоскость w в форме бесконечной полосы, параллельной мнимой оси $\mathrm{Im}\,w$ шириною 2π, которая периодически повторяется вдоль вещественной оси $\mathrm{Re}\,w$. Точка $k_z = 0$ отображается в эквивалентные точки $w = 0,\ \pm 2\pi, \ldots$ Если плоскость k_z рассматривать как двулистную риманову поверхность для функции $k_y(k_z) = \sqrt{k^2 - k_z^2}$, то восемь квадрантов физического и нефизического листов этой плоскости отображаются в соответствующие восемь полубесконечных полос на плоскости w. Поперечное волновое число,

$$k_y(w) = \sqrt{k^2 - k_z^2(w)} = k\cos w, \qquad (1.5.5)$$

трансформируется из двузначной функции на плоскости k_z в однозначную функцию на плоскости w, определенную в различных полуполосах, соответствующих двум листам k_z-плоскости. Поскольку функция $k_y(w) = k\cos w$ однозначная, то у нее не может быть точек ветвления, и поэтому нет необходимости в проведении разрезов, как это ранее делалось на k_z-плоскости (см. приложение А.2).

Представляя комплексный угол как $w = u + iv$, легко записать вещественную и мнимую части выражений (1.5.3) и (1.5.5) в виде

$$\mathrm{Re}\,k_z = k\sin u\ \mathrm{ch}\,v, \qquad \mathrm{Im}\,k_z = k\cos u\ \mathrm{sh}\,v; \qquad (1.5.6)$$

$$\operatorname{Re} k_y = k \cos u \operatorname{ch} v, \qquad \operatorname{Im} k_y = -k \sin u \operatorname{sh} v. \tag{1.5.7}$$

Соотношения (1.5.6) и (1.5.7) устанавливают взаимно однозначное соответствие между физическим и нефизическим листами плоскости k_z, с одной стороны, и полубесконечными полосами на плоскости w, с другой стороны, что иллюстрирует рис. 1.6. Физический лист состоит из четырех квадрантов с $\operatorname{Im} k_y < 0$, которые обозначены цифрами от 1 до 4 на рис. 1.6 *а*. Нефизический лист содержит те же самые квадранты с номерами от 1 до 4, только теперь для них $\operatorname{Im} k_y > 0$. Эти два листа сшиты между собой вдоль линий разреза, показанных на рис. 1.6 *а*.

Отображение всей римановой k_z-поверхности на плоскость комплексного угла w выполняется функцией (1.5.4) и может быть легко проанализировано с учетом знаков тригонометрических и гиперболических функций, входящих в (1.5.6) и (1.5.7).

Соотношения (1.5.6) позволяют присвоить надлежащий номер (от 1 до 4) каждой полуполосе на w-плоскости, в соответствии с нумерацией квадрантов k_z-плоскости. Тогда соотношения (1.5.7) позволяют причислить каждую полуполосу к физическому или нефизическому листу, добавляя к их номерам буквы 'p' (от англ. *physical*) или 'n' (от англ. *nonphysical*). На рис. 1.6 *б* они обозначены комбинированными номерами в кружках от 1p до 4p (для физического листа) или от 1n до 4n (для нефизического листа, отмеченного инвертированным цветом). Здесь же указаны соответствующие знаки $\operatorname{Re} k_y$ и $\operatorname{Im} k_y$ для каждой полуполосы. Восемь полуполос образуют одну бесконечную полосу шириною 2π, которая периодически повторяется вдоль оси $u \equiv \operatorname{Re} w$ в обоих направлениях.

Фурье-контур C_F, входящий в (1.5.1) как путь интегрирования вдоль вещественной оси $\operatorname{Re} k_z$, показан на рис. 1.6 *а*. Преобразование $w = \arcsin(k_z/k)$ отображает фурье-контур в кусочно-ломаную линию C_F на плоскости w, имеющую изломы в точках $w = \pm\pi/2 \pm i0$, которые эквивалентны точкам ветвления $\pm k$ на плоскости k_z. Именно такой контур C_F изображен сплошной линией на рис. 1.6 *б* и представляет собой путь интегрирования для вычисляемого интеграла,

$$f(r,\theta) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{C_\mathrm{F}} F(k \sin w)\, k \cos w\, e^{-ikr\cos(w-\theta)} dw, \tag{1.5.8}$$

с углом наблюдения θ в точке M, где вычисляется поле (см. рис. 1.4).

Интеграл (1.5.8) получен из исходного интеграла Фурье (1.5.1) как результат отображения на плоскость w при помощи функции (1.5.4) с применением полярных координат (r,θ), введенных равенствами (1.4.11).

Как уже обсуждалось в п. 1.3, для вычисления исходного интеграла Фурье (1.5.1) и нахождения поля $f(y,z)$ справа от области источников (при $z > z_0$) фурье-контур C_F надо замкнуть составным контуром, $C_\Sigma = C'_\mathrm{J} + C''_1 + C'_1 + C'_2 + C''_2 + C''_\mathrm{J}$, лежащим в нижней полуплоскости k_z. Контур C_Σ изображен пунктирной линией на рис. 1.5 и включает контур Жордана, $C_\mathrm{J} = C'_\mathrm{J} + C''_\mathrm{J}$, вместе с двумя берегами, $C_1 = C'_1 + C''_1$ и $C_2 = C'_2 + C''_2$, разреза, исходящего из точки ветвления $k_z = k$ (подробности см. на с. 37).

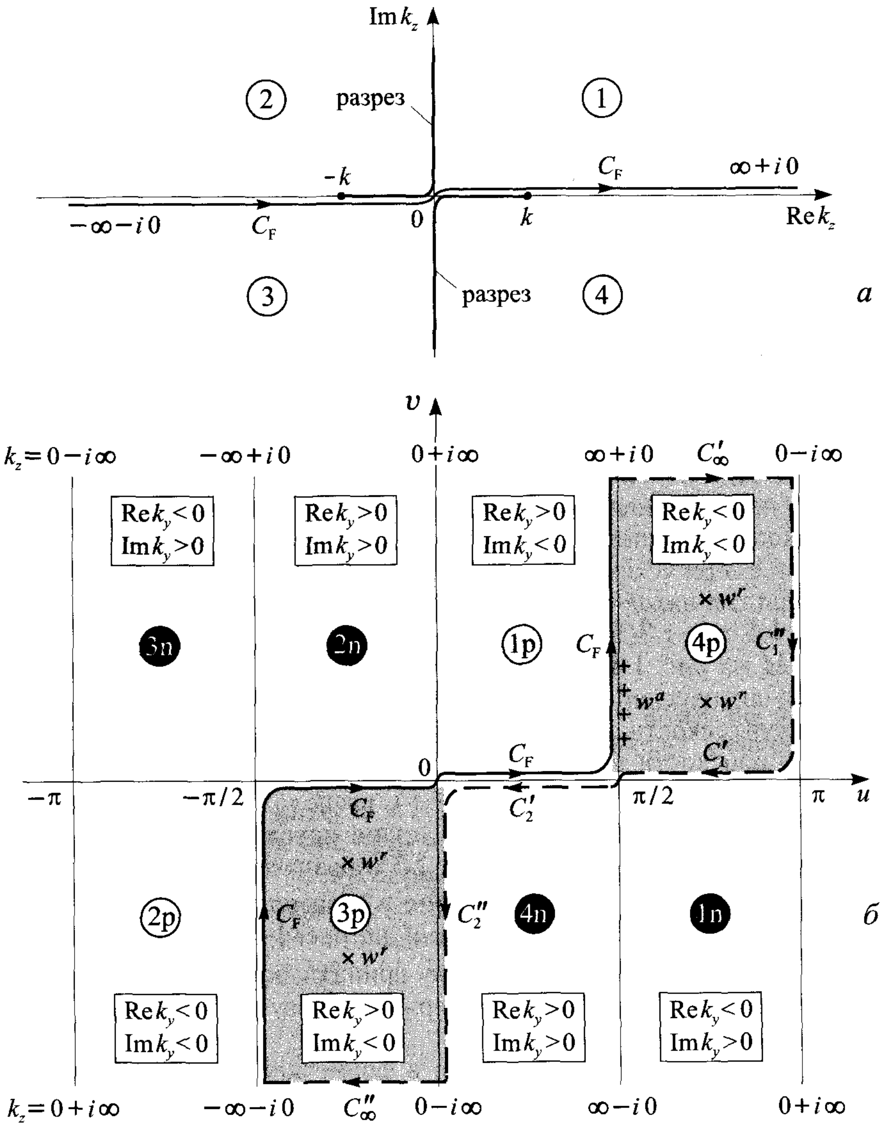


Рис. 1.6. Квадранты двулистной k_z-плоскости с разрезами (*а*) и конформное отображение квадрантов в восемь полубесконечных полос на плоскости комплексного угла $w = u + iv$ с помощью функции $w = \arcsin(k_z/k)$ (*б*). Каждая полуполоса характеризуется знаками $\mathrm{Re}\,k_y$, $\mathrm{Im}\,k_y$ и предельными значениями k_z на вертикальных линиях $u = 0$, $\pm\pi/2$, $\pm\pi$ при $v \to \pm\infty$. Фурье-контур C_F и составной контур C_Σ, обозначенный пунктирной линией на w-плоскости, соответствуют аналогичным контурам на рис. 1.5

На рис. 1.6 *б* приведены значения k_z на бесконечно удаленных концах ($v \to \pm\infty$) вертикальных линий, проходящих через точки $u = 0$, $\pm\pi/2$, $\pm\pi$. Эти значения позволяют изобразить на плоскости w пунктирной линией составной контур, $C_\Sigma = C'_\infty + C''_1 + C'_1 + C'_2 + C''_2 + C''_\infty$, эквивалентный аналогичному контуру C_Σ на рис. 1.5. Отрезки C'_∞ и C''_∞, эквивалентные частям

C'_J и C''_J контура Жордана бесконечно большого радиуса $J \to \infty$, идут параллельно вещественной оси u при $v = \pm\infty$. Согласно (1.3.10), они не дают вклада в результат контурного интегрирования. Берега, $C''_1 + C'_1$ и $C'_2 + C''_2$, разреза на k_z-плоскости (рис. 1.5) отображаются в кусочно-ломаную линию, $C''_1 + C'_1 + C'_2 + C''_2$, изображенную пунктиром на w-плоскости (рис. 1.6 *б*). Эта пунктирная линия полностью идентична со сплошной линией C_F, но смещена на $\pi/2$ вдоль оси u и имеет обход в противоположном направлении.

Как видно из рис. 1.6 *б*, часть фурье-контура C_F, параллельная оси $\mathrm{Re}\, w$, в пределах интервала $0 < u < \pi/2$ совпадает с участком C'_2 составного контура C_Σ, но имеет противоположный обход. Следовательно, результирующий контур $C_F + C_\Sigma$ на рис. 1.6 *б* распадается на два отдельных замкнутых контура, которые составлены из его частей. Эти контуры обрамляют две полубесконечные полосы '3p' и '4p' (выделенные серым фоном), которые соответствуют нижней k_z-полуплоскости физического листа с $\mathrm{Im}\, k_y < 0$. Это верно только для полей справа от области источников, т. е. при $z > z_0$. Аналогично, полубесконечные полосы '1p' и '2p', соответствующие верхней k_z-полуплоскости физического листа, применимы к полям слева от области источников, т. е. при $z < -z_0$ (рис. 1.4).

Эти результаты находятся в полном согласии с тем, что было получено из анализа рис. 1.5 в п. 1.3 для поля справа от области источников (т. е. в точке наблюдения M на рис. 1.4). Вклады в это поле дают моды, которым соответствуют корни дисперсионного уравнения $\mathcal{D}(\omega, k_z) = 0$ с $\mathrm{Im}\, k_y < 0$, лежащие в нижней полуплоскости k_z, т. е. они принадлежат полуполосам '3p' and '4p'. Среди них на плоскости w имеются (рис. 1.6 *б*):

а) *активные моды* w^a (обозначение $+$), расположенные в полуполосе '4p' вдоль ее левой границы (вертикальная линия, исходящая из точки $w = \pi/2$), которым эквивалентны моды k_z^a на рис. 1.5 (обозначение $\oplus$);

б) *реактивные моды* w^r (обозначение $\times$), расположенные в полуполосах '3p' и '4p', которым эквивалентны моды k_z^r на рис. 1.5 (обозначение $\otimes$).

Среди этих мод нет таких, которые принадлежат полубесконечным полосам с $\mathrm{Im}\, k_y > 0$, что еще раз подтверждает отсутствие явного вклада от вытекающих мод.

Полное поле $f(r, \theta)$, представленное в форме интеграла Фурье (1.5.8) на плоскости w, как и аналогичное ему фурье-представление (1.5.1) на плоскости k_z, состоит из четырех вкладов (ср. уравнение (1.4.19)),

$$f(r,\theta) = f^a_{guid}(r,\theta) + f^r_{guid}(r,\theta) + f^a_{rad}(r,\theta) + f^r_{rad}(r,\theta), \tag{1.5.9}$$

обязанных направляемым активным модам (вклад вычетов в полюсах w^a), направляемым реактивным модам (вклад вычетов в полюсах w^r), излучательным активным модам (вклад интегралов вдоль $C'_1 + C'_2$) и излучательным реактивным модам (вклад интегралов вдоль $C''_1 + C''_2$).

Асимптотическое вычисление поля в дальней зоне обычно выполняется по *методу седловой точки* [26–28], сущность которого кратко изложена в приложении А.3. Главная идея метода основана на трансформации фурье-контура C_F в плоскости комплексного угла w (рис. 1.6 *б*) в путь наибыстрейшего спуска (ПНС), обозначенный P_s на рис. А.4.

Для того чтобы воспользоваться результатами метода седловой точки, необходимо записать исходный интеграл Фурье (1.5.8) в специальной форме (А.3.1), применяемой для этого метода [26, 27],

$$f(r,\theta) \equiv \int\limits_{C_\mathrm{F}} f_w(r,\theta;w)\,dw = \int\limits_{C_\mathrm{F}} Q(w)\,e^{krq(w,\theta)}dw, \tag{1.5.10}$$

где путь интегрирования совпадает с фурье-контуром C_F на рис. 1.6 *б* и введены следующие функции:

$$f_w(r,\theta;w) \equiv \frac{1}{2\pi}\,F(k\sin w)\,k\cos w\,e^{-ikr\cos(w-\theta)}, \tag{1.5.11}$$

$$Q(w) \equiv \frac{k\cos w}{2\pi}\,F(k\sin w) = \frac{k\cos w}{2\pi}\,\frac{s(\omega,k\sin w)}{\mathcal{D}(\omega,k\sin w)}, \tag{1.5.12}$$

$$q(w,\theta) \equiv -i\cos(w-\theta). \tag{1.5.13}$$

Переход в интеграле (1.5.10) от фурье-контура C_F к ПНС дает

$$f(r,\theta) = \int\limits_{P_s} Q(w)\,e^{krq(w,\theta)}dw, \tag{1.5.14}$$

где путь наибыстрейшего спуска P_s соответствует функции $q(w,\theta)$ в форме (1.5.13) с седловой точкой $w_s = \theta$ и удовлетворяет уравнению (А.3.16) (см. приложение А.3).

Точное вычисление интеграла (1.5.14), если бы это было возможно, обязательно содержало бы все четыре модальных вклада, входящих в (1.5.9). Однако метод седловой точки, применяемый здесь для асимптотического вычисления интеграла в дальней зоне при $kr \to \infty$, дает только часть полного поля (1.5.14). Как показано в приложении А.3, результат такого вычисления равен (см. уравнения (А.3.24) и (А.3.25))

$$\begin{aligned} f(r,\theta) \simeq f^a_{rad}(r,\theta) &= \sqrt{\frac{2\pi}{kr}}\;Q(\theta)\,e^{-i(kr-\pi/4)} = \\ &= \frac{k\cos\theta}{\sqrt{2\pi kr}}\,F(k\sin\theta)\,e^{-i(kr-\pi/4)} \quad \text{при} \quad kr \to \infty. \end{aligned} \tag{1.5.15}$$

В последнем равенстве (1.5.15) было использование выражение (1.5.12) для функции $Q(w)$, взятое в седловой точке $w_s = \theta$. Этот результат соответствует простейшей ситуации, когда асимптотический вклад дает одна седловая точка функции $q(w)$, специфичной для спектрального представления поля в виде (1.5.8). Общее математическое рассмотрение [27] имеет дело с более сложными ситуациями, при которых функция $Q(w)$ может иметь сингулярность (полюс или точку ветвления), лежащую в окрестности седловой точки w_s.

Выражение (1.5.15) исчезает на оси z, т. е. при *скользящих углах наблюдения* $\theta = \pm\pi/2$, так как $Q(\pm\pi/2) = 0$. В этом случае вычисления, выполненные в работе [28], дают следующее выражение (в наших обозначениях) для поля в дальней зоне около продольной оси (см. формулу (А.3.27)):

$$f(y\simeq 0, z) \simeq \mp \frac{k}{\sqrt{2\pi|kz|^3}}\, F'(\pm\pi/2)\, e^{-i(k|z|-3\pi/4)} \qquad \text{при} \quad k|z| \to \infty; \quad (1.5.16)$$

здесь $F'(\pm\pi/2)$ обозначает первую производную по переменной w от функции $F(w)$, определенной соотношением (1.5.12), которая вычислена в точках $w = \pm\pi/2$.

Сравнение формулы (1.5.15) с прежним выражением (1.4.17) показывает их полную идентичность, хотя это выражение ранее было выведено методом стационарной фазы в применении к интегралу (1.4.13), учитывающему *только* активные излучательные моды.

Следовательно, асимптотический результат (1.5.15), полученный для изначально полного поля $f(r, \theta)$ в форме (1.5.8), также принимает во внимание *только* вклад $f^a_{rad}(r, \theta)$ активных излучательных мод в поле дальней зоны. Этот вклад представляет собой так называемую *пространственную волну* с зависимостью от расстояния в виде $r^{-1/2}$ [10, 19, 28]. В отличие от этого, поле в дальней зоне около продольной оси структуры, имеющее вид (1.5.16), затухает как $|z|^{-3/2}$ и обычно называется *боковой волной* [27, 28].

Общее выражение (1.5.9) для полного поля в любой точке вне области источников содержит, в дополнение к $f^a_{rad}(r, \theta)$, еще три независимых вклада, не учтенных асимптотическим выражением (1.5.15). Среди них различают:

- вклады $f^a_{guid}(r, \theta)$ и $f^r_{guid}(r, \theta)$ от направляемых мод (активных и реактивных) дискретной части спектра,
- вклад $f^r_{rad}(r, \theta)$ от излучательных реактивных (исчезающих) мод непрерывной части спектра.

Любая направляемая мода распространяется вдоль волноведущей структуры в соответствии с собственным законом дисперсии, который находится из решения граничной задачи на собственные значения. В отсутствие потерь постоянная распространения чисто мнимая ($\gamma^a_m \equiv ik^a_{z,m} = i\beta_m$) для активных мод и комплекснозначная ($\gamma^r_m \equiv ik^r_{z,m} = \alpha_m + i\beta_m$) для реактивных мод. Поперечное распределение полей имеет поверхностный характер как для активных, так и реактивных мод, т. е. поля исчезают на поперечной бесконечности.

По этой причине активные моды вдали от возбуждающих источников могут давать вклад f^a_{guid} только при скользящих углах (т. е. около поверхности волноведущей среды в продольном направлении). Поля реактивных мод f^r_{guid} (комплексных и исчезающих), будучи продольно затухающими как $\exp[-\alpha_m(z - z_0)]$, существуют лишь в относительно ближней зоне источников. Поэтому в дальней зоне излучения вне области скользящих углов для этих мод можно положить $f^a_{guid}(r, \theta) = 0$ и $f^r_{guid}(r, \theta) = 0$.

Таким образом, среди четырех слагаемых, определяющих полное поле (1.5.9), остается не учтенным вклад $f^r_{rad}(r, \theta)$ от реактивных (исчезающих) излучательных мод, который можно ассоциировать с вытекающими модами.

Как известно, отдельная частотная компонента поля излучения, исчезающего в продольном направлении, имеет вид (см. формулу (1.1.14))

$$f_\omega^r(t,y,z) = A_\omega\, e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - k_y y)}, \tag{1.5.17}$$

где обе величины α и $k_y = \pm|k_y|$ являются чисто вещественными при $|k_y| > k$. Согласно (1.4.4), они связаны друг с другом соотношением $k_y^2 - \alpha^2 = k^2$. Это позволяет ввести такой реальный угол ϕ, что

$$k_y = k\operatorname{ch}\phi \quad \text{и} \quad \alpha = k\operatorname{sh}\phi. \tag{1.5.18}$$

Подстановка формул (1.4.11) и (1.5.18) в выражение (1.5.17) дает частотную компоненту исчезающего поля излучения в полярных координатах,

$$f_\omega^r(t,r,\theta) = A_\omega\, e^{-\alpha_\theta r} e^{i(\omega t - \beta_\theta r)}, \tag{1.5.19}$$

с амплитудной и фазовой постоянными в радиальном направлении, равными

$$\alpha_\theta = k\sin\theta\operatorname{sh}\phi \quad \text{и} \quad \beta_\theta = k\cos\theta\operatorname{ch}\phi. \tag{1.5.20}$$

Следовательно, любая из исчезающих излучательных мод распространяется в радиальном направлении с затуханием по амплитуде как $\exp(-\alpha_\theta r)$. Такая особенность отражает реактивную природу исчезающих мод, которые не имеют собственной переносимой мощности и могут только запасать реактивную энергию (см. п. 2.4.2).

Поскольку выражение (1.4.17) для поля излучения f_{rad}^a было получено в пренебрежении вкладом реактивных излучательных мод, то имеются все основания считать, что опущенные реактивные поля исчезающих мод связаны с вкладом неспектральных корней дисперсионного уравнения, для которых $\operatorname{Im} k_y > 0$. На плоскости комплексного угла w такие корни располагаются на нефизических полубесконечных полосах (например, на полуполосе '4n' рис. 1.6 *б*). Однако они могут стать физически существенными всякий раз, когда ПНС (путь наибыстрейшего спуска) проходит через такую полуполосу и захватывает один из корней. Так как неспектральные корни ассоциируются с вытекающими модами, то последние могут служить объяснением реактивного вклада f_{rad}^r от исчезающих излучательных мод, в дополнение к вкладу от седловой точки, даваемого формулами (1.5.15) или (1.5.16). Поэтому ближайшей задачей становится выяснение того, описывается ли структура поля вытекающих мод выражением, подобным (1.5.19), которое присуще исчезающим модам излучения.

1.5.2. Вклад вытекающих мод в поле излучения. Вытекающая мода открытой волноведущей структуры обычно ассоциируется с таким решением дисперсионного уравнения, которое дает поля, нарастающие в поперечном направлении при удалении на бесконечность от крайней границы волноведущей среды. Такая нефизическая особенность, нарушающая принцип излучения (1.2.2) для дискретных мод, позволяет называть вытекающие моды неспектральными (несобственными) решениями граничной задачи для открытых структур.

Корень дисперсионного уравнения, соответствующий вытекающей моде (отмеченной индексом l от англ. *leaky*), всегда является комплекснозначным, что дает продольное волновое число $k_{z,l} = \mathrm{Re}\, k_{z,l} + i\mathrm{Im}\, k_{z,l}$. Если l-я мода распространяется по фазе в положительном z-направлении с затуханием по амплитуде, тогда ее постоянная распространения равна $\gamma_l \equiv ik_{z,l} = \alpha_l + i\beta_l$ с $\beta_l \equiv \mathrm{Re}\, k_{z,l} > 0$ и $\alpha_l \equiv -\mathrm{Im}\, k_{z,l} > 0$. В силу соотношений (1.1.26) и (1.1.27) между продольным ($k_{z,l}$) и поперечным ($k_{y,l}$) волновыми числами, движение фазы в положительном направлении оси y ($\mathrm{Re}\, k_{y,l} > 0$) с неизбежностью сопровождается поперечным нарастанием амплитуды, поскольку $\mathrm{Im}\, k_{y,l} > 0$ (см. точки 2 на рис. 1.3).

Реактивное продольное затухание дискретной вытекающей моды (при $\mathrm{Im}\, k_{z,l} < 0$) делает ее похожей на реактивную (исчезающую) излучательную моду непрерывного спектра. Более того, как уже было отмечено ранее, неучтенный вклад f^r_{rad} в полное поле (1.5.9) от реактивных излучательных мод может быть связан с дискретными корнями, лежащими на нефизическом листе с $\mathrm{Im}\, k_y > 0$. Действительно, реальные направляемые моды (активные и реактивные) с $\mathrm{Im}\, k_{y,m} < 0$ дают независимые вклады f^a_{guid} и f^r_{guid}, которыми можно пренебречь в дальней зоне излучения. Следовательно, остаются неиспользованными лишь неспектральные корни дисперсионного уравнения, порождающие вытекающие моды, которые эквивалентны исчезающим излучательным модам в ближней зоне.

Из предыдущего рассмотрения очевидно, что вытекающие моды никогда не появляются, если спектральный интеграл в форме либо (1.5.1), либо (1.5.8) вычисляется вдоль фурье-контура C_F, проходящего либо в плоскости k_z (рис. 1.5), либо в плоскости w (рис. 1.6 *б*). Единственной причиной, вызывающей появление вытекающих мод, является переход от интегрирования вдоль фурье-контура C_F к интегрированию вдоль пути наибыстрейшего спуска (ПНС) P_s при асимптотическом вычислении интеграла (1.5.14). Этот переход осуществляется трансформацией контура C_F в ПНС $P_s(\theta)$, проходящий через седловую точку $w_s = \theta$ на плоскости комплексного угла $w = \arcsin(k_z/k)$, что графически изображено на рис. 1.7 (см. также рис. А.4 в приложении А.3).

Математически вклад вытекающей моды возникает как вычет подынтегральной функции $f_w(r, \theta; w)$ в форме (1.5.11), взятый в полюсе w_l, соответствующем l-й моде. С учетом выражения (1.5.12), функция (1.5.11) принимает следующий вид:

$$f_w(r, \theta; w) = Q(w)\, e^{-ikr\cos(w-\theta)}. \tag{1.5.21}$$

Если сингулярная точка w_l является простым полюсом, то вычет функции (1.5.21) равен

$$\mathrm{Res}\, f_w(r, \theta; w_l) = \Big[Q(w)(w - w_l)\Big]_{w_l} e^{-ikr\cos(w_l-\theta)}. \tag{1.5.22}$$

Вклад l-й моды появляется, когда ПНС пересекает полюс w_l, как показано пунктирной линией $P_s(\theta_l)$ на рис. 1.7. Эта ситуация характеризуется таким критическим углом наблюдения θ_l, что при $\theta < \theta_l$ нет вклада вытекающей моды, а появляется он лишь при $\theta \geqslant \theta_l$. Для того чтобы найти угол θ_l, необходимо использовать уравнение (А.3.15), описывающее ПНС, и записать

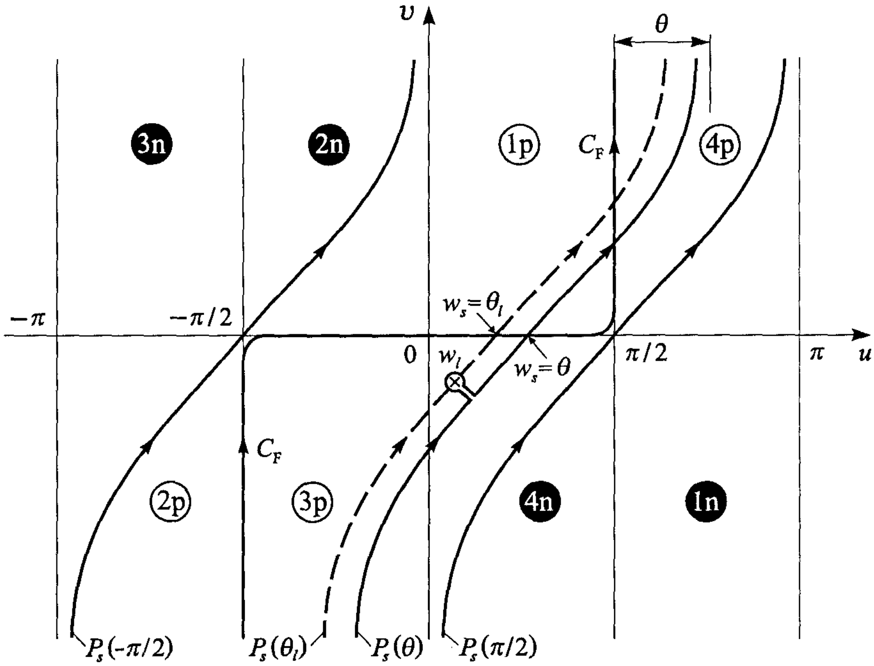


Рис. 1.7. Фурье-контур C_F на плоскости комплексного угла $w = \arcsin(k_z/k)$ и путь наибыстрейшего спуска $P_s(\theta)$, проходящий через седловую точку $w_s = \theta$ с произвольным углом наблюдения θ, а также его предельные положения $P_s(\pi/2)$ и $P_s(-\pi/2)$ при $\theta = \pi/2$ и $-\pi/2$. Пунктирная линия $P_s(\theta_l)$ проходит через полюс w_l, принадлежащий нефизической полуполосе '4n' и соответствующий вытекающей моде с критическим углом θ_l

его в точке $w_l = u_l + iv_l$. Это дает искомое уравнение для нахождения θ_l:

$$\cos(u_l - \theta_l) = \frac{1}{\operatorname{ch} v_l} \equiv \operatorname{sech} v_l, \tag{1.5.23}$$

откуда получаем

$$\theta_l = u_l - \arccos(\operatorname{sech} v_l). \tag{1.5.24}$$

Представляя вклад вытекающей l-й моды в поле излучения как добавку $\Delta_l f_{rad}(r,\theta)$ к асимптотическому выражению (1.5.15) для поля $f^a_{rad}(r,\theta)$ в дальней зоне, можно записать эту добавку, используя вычет (1.5.22), в следующей форме:

$$\Delta_l f_{rad}(r,\theta) \simeq 2\pi i \operatorname{Res} f_w(r,\theta;w_l)\, U(\theta-\theta_l) =$$

$$= \begin{cases} 2\pi i \Big[Q(w)(w-w_l)\Big]_{w_l} e^{-ikr\cos(w_l-\theta)} & \text{при} \quad \theta > \theta_l, \\ 0 & \text{при} \quad \theta < \theta_l. \end{cases} \tag{1.5.25}$$

Здесь $U(\theta-\theta_l)$ — единичная ступенчатая функция, равная 0, 1/2 и 1 при $\theta-\theta_l < 0$, $\theta-\theta_l = 0$ и $\theta-\theta_l > 0$, соответственно [25]. Следует помнить, что угол наблюдения θ измеряется от нормали к плоскости границ раздела в многослойных планарных структурах, как показано на рис. 1.4. Поэтому угол, измеренный от оси z, равен $\theta_z = \pi/2 - \theta$.

Уравнение (1.5.25) описывает волну с амплитудой

$$A_l = 2\pi i \Big[Q(w)(w - w_l)\Big]_{w=w_l}, \tag{1.5.26}$$

уходящую в радиальном направлении r под углом θ_z, который лежит в интервале $-(\pi/2 - \theta_l) \leqslant \theta_z \leqslant (\pi/2 - \theta_l)$ по отношению к продольному направлению. С помощью выражения (1.5.25), дополненного временным множителем $\exp(i\omega t)$, эта волна может быть записана для углов $\theta \geqslant \theta_l$ в форме

$$\Delta_l f_{rad}(t, r, \theta \geqslant \theta_l) = A_l\, e^{i[\omega t - kr\cos(w_l - \theta)]} \equiv A_l\, e^{-\alpha_\theta r} e^{i(\omega t - \beta_\theta r)}, \tag{1.5.27}$$

где амплитудная и фазовая постоянные для радиального направления равняются

$$\alpha_\theta = k\sin(u_l - \theta)\,\mathrm{sh}\, v_l \equiv k\sin(u_l - \theta)\,\mathrm{tg}(u_l - \theta_l), \tag{1.5.28}$$

$$\beta_\theta = k\cos(u_l - \theta)\,\mathrm{ch}\, v_l \equiv k\,\frac{\cos(u_l - \theta)}{\cos(u_l - \theta_l)}. \tag{1.5.29}$$

Здесь последние выражения получены с помощью уравнения (1.5.23).

Для дальнейшего анализа удобно переписать (1.5.28) и (1.5.29) путем введения продольной постоянной распространения, $\gamma_l = \alpha_l + i\beta_l$, и поперечного волнового числа, $k_{y,l} = \mathrm{Re}\, k_{y,l} + i\mathrm{Im}\, k_{y,l}$, для вытекающей l-й моды, имеющей полюс $w_l = u_l + iv_l$ на нефизической полуполосе '4п' с $v_l < 0$. Тогда величины α_θ и β_θ принимают следующий вид:

$$\alpha_\theta = \alpha_l \sin\theta - \mathrm{Im}\, k_{y,l}\cos\theta \equiv \alpha_l\cos\theta_z - \mathrm{Im}\, k_{y,l}\sin\theta_z, \tag{1.5.30}$$

$$\beta_\theta = \beta_l \sin\theta + \mathrm{Re}\, k_{y,l}\cos\theta \equiv \beta_l\cos\theta_z + \mathrm{Re}\, k_{y,l}\sin\theta_z, \tag{1.5.31}$$

где использованы формулы (1.5.6) и (1.5.7).

Общие соотношения (1.5.28)–(1.5.31) дают следующие частные случаи, которые соответствуют

а) радиальному распространению волны под критическим углом $\theta = \theta_l$:

$$\alpha_{\theta_l} = k\,\mathrm{sh}\, v_l\,\mathrm{th}\, v_l \quad \text{и} \quad \beta_{\theta_l} = k; \tag{1.5.32}$$

б) продольному распространению волны под углом $\theta = \pi/2$:

$$\alpha_{\pi/2} = \alpha_l \quad \text{и} \quad \beta_{\pi/2} = \beta_l. \tag{1.5.33}$$

Анализируя полученные выражения (1.5.28)–(1.5.33), можно сделать вывод о том, что вытекающая мода, излученная в радиальном направлении, всегда *быстрая* ($v_{\mathrm{ph}} = \omega/\beta_\theta > \omega/k = c$) и *затухающая* ($\alpha_\theta > 0$), так как в интервале углов $\theta_l \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ имеем $k \geqslant \beta_\theta \geqslant \beta_l$ и $\alpha_{\theta_l} \leqslant \alpha_\theta \leqslant \alpha_l$. Следовательно, при радиальном излучении под критическим углом θ_l волна (1.5.27) распространяется со скоростью света и имеет минимальное затухание α_{θ_l}. В продольном направлении ($\theta = \pi/2$) волна бежит с постоянной распространения $\gamma_l = \alpha_l + i\beta_l$, свойственной вытекающей l-й моде.

Как и ожидалось, поле вытекающей моды (1.5.27) идентично по структуре полю исчезающей излучательной моды, даваемому формулой (1.5.19).

Поэтому вклад вытекающей моды может быть отождествлен с вкладом реактивной моды излучения. Обе они, будучи реактивно распространяющимися комплексными волнами, существуют лишь вблизи источников, так как их поля способны только запасать электромагнитную энергию, не перенося ее вдоль волновода. Однако при определенных условиях область их существования может простираться на достаточно большие расстояния от области источников. Подобная ситуация наиболее очевидна для так называемых *слабо вытекающих мод* [19].

Слабо вытекающие моды характеризуются малым изменением амплитуды поля как в продольном, так и в поперечном направлениях, что обеспечивается следующими неравенствами:

$$|\mathrm{Im}\, k_{y,l}| \ll |\mathrm{Re}\, k_{y,l}| \quad \text{и} \quad |\mathrm{Im}\, k_{z,l}| \equiv |\alpha_l| \ll |\beta_l| \equiv |\mathrm{Re}\, k_{z,l}|. \tag{1.5.34}$$

Предельный случай слабой утечки реализуется, когда мнимая часть обоих волновых чисел равняется нулю. Используя (1.5.6) и (1.5.7) для l-й моды, можем потребовать

$$\mathrm{Im}\, k_{y,l} \equiv -k \sin u_l \,\mathrm{sh}\, v_l = 0, \tag{1.5.35}$$

$$\mathrm{Im}\, k_{z,l} \equiv -\alpha_l = k \cos u_l \,\mathrm{sh}\, v_l = 0. \tag{1.5.36}$$

Оба уравнения (1.5.35) и (1.5.36) удовлетворяются при

$$v_l = 0. \tag{1.5.37}$$

Тогда выражения (1.5.6) и (1.5.7) для вещественных частей обоих волновых чисел, входящих в неравенства (1.5.34), равняются

$$\mathrm{Re}\, k_{y,l} \equiv k \cos u_l \,\mathrm{ch}\, v_l = k \cos u_l, \tag{1.5.38}$$

$$\mathrm{Re}\, k_{z,l} \equiv k \sin u_l \,\mathrm{ch}\, v_l = k \sin u_l \equiv \beta_l. \tag{1.5.39}$$

С учетом (1.5.35)–(1.5.39), выражения (1.5.30) и (1.5.31) для амплитудной и фазовой постоянных в радиальном направлении принимают вид

$$\alpha_\theta \equiv \alpha_l \sin\theta - \mathrm{Im}\, k_{y,l} \cos\theta = 0, \tag{1.5.40}$$

$$\beta_\theta \equiv \beta_l \sin\theta + \mathrm{Re}\, k_{y,l} \cos\theta = k \cos(u_l - \theta). \tag{1.5.41}$$

В соответствии с (1.5.25), угол наблюдения θ должен быть таким, чтобы $\theta > \theta_l$, где критический угол θ_l для вытекающей l-й моды находится из уравнения (1.5.23), которое в данном случае (при $v_l = 0$) имеет вид

$$\cos(u_l - \theta_l) = 1. \tag{1.5.42}$$

Из (1.5.39) и (1.5.42) следует, что критический угол для слабо вытекающей моды равен

$$\theta_l = u_l = \arcsin(\beta_l / k). \tag{1.5.43}$$

С учетом (1.5.40), (1.5.41) и (1.5.43), выражение (1.5.27) для вклада слабо вытекающей моды в поле излучения принимает вид

$$\Delta_l f_{rad}(t, r, \theta \geqslant \theta_l) = A_l\, e^{i[\omega t - kr\cos(\theta - \theta_l)]}. \tag{1.5.44}$$

Следовательно, слабо вытекающая мода распространяется практически без затухания в пределах интервала разрешенных углов $\theta_l < \theta < \pi/2$, или $0 < \theta_z < (\pi/2 - \theta_l)$. Это обеспечивает заметные поля исчезающих мод излучения на достаточно большом удалении от области источников, несмотря на их реактивную природу. За пределами этого интервала углов наблюдения в дальней зоне существует лишь пространственная волна (1.5.15), обусловленная активными излучательными модами.

Этим мы ограничиваем вышеприведенное краткое обсуждение концепции вытекающих мод и за более подробной информацией отсылаем читателя к публикациям [10, 13, 19, 27–30].

1.6. Лучевая интерпретация направляемых и излучательных мод в планарных диэлектрических волноводах

До настоящего момента мы имели дело с открытыми структурами, содержащими произвольную волноведущую среду (в общем случае многослойную и бианизотропную), которая окружена изотропной диэлектрической средой, не имеющей внешних границ, как изображено на рис. 1.4 при $D \to \infty$. В дальнейшем изложении будем рассматривать планарную трехслойную диэлектрическую структуру в качестве *базового волновода*, удобного для строгого аналитического изучения волновых взаимодействий.

Прежде, чем переходить к анализу модальной структуры электромагнитных полей в планарном трехслойном волноводе, рассмотрим интерпретацию полей в таком волноводе с точки зрения геометрической оптики.

Одна физическая интерпретация, объясняющая появление непрерывного спектра собственных мод в открытой волноведущей структуре, уже была обсуждена в п. 1.4. Она основывалась на модели закрытого (экранированного) волновода с идеально проводящими (и поэтому отражающими) стенками, которые удалены от внешней границы волноведущей среды на бесконечно большое расстояние. По мере того, как идеальные стенки закрытого волновода удаляются, дискретный спектр его собственных мод становится все более и более плотным, превращаясь в континуум при предельном положении стенок на бесконечности. Сохранение идеально отражающей границы на поперечной бесконечности приводит к интерференции падающей и отраженной волн, бегущих противоположно в поперечном направлении, что формирует стоячую картину поля. Таким образом, в этой модели основная волноведущая среда излучает прямую волну, направленную от ее крайних границ к поперечной бесконечности, которая возвращает эту волну как отраженную в обратном направлении благодаря отражающему действию идеально проводящей стенки, которая предполагается существующей на бесконечном расстоянии.

Другая широко распространенная модель для интерпретации непрерывного спектра излучательных мод использует представление геометрической оптики при описании распространения луча света в плоскопараллельной структуре [13, 17–19, 22]. В отличие от выше рассмотренной волновой интерпретации, лучевая модель предполагает наличие монохроматического источника света на бесконечности, который направляет падающий луч света к поверхности волноведущей структуры. Обратный луч возникает как результат отражения первичного луча от крайней границы структуры. Суперпозиция падающего и отраженного лучей дает стоячую картину поля во внешней среде со стороны источника света. Условия прохождения первичного светового луча через многослойную структуру определяют картину поля со стороны, противоположной источнику света.

Предположим, что бесконечно удаленный источник света, расположенный в изотропной среде 1 с относительными проницаемостями ε_{r1} и μ_{r1}, испускает луч в направлении волнового вектора $\mathbf{k}_1$. Луч падает на границу этой среды с другой средой 2, имеющей относительные проницаемости ε_{r2} и μ_{r2}, под углом θ_1 относительно нормали к границе раздела сред. В общем случае граница создает два новых луча — отраженный луч, возвращенный в среду 1 под тем же углом θ_1, и проходящий луч с волновом вектором $\mathbf{k}_2$, направленным в среду 2 под углом θ_2. Поскольку результирующая волна, распространяющаяся вдоль границы раздела, является общей для обеих сред, то продольное волновое число k_z должно быть одинаковым, т. е. $k_z = k_1 \sin\theta_1 = k_2 \sin\theta_2$. Отсюда следует соотношение

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{k_2}{k_1} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r2}\,\mu_{r2}}}{\sqrt{\varepsilon_{r1}\,\mu_{r1}}} \equiv \frac{n_2}{n_1},$$

известное как *закон Снеллиуса*. Он связывает углы падения θ_1 и прохождения θ_2 с волновыми числами сред $k_i = \omega\sqrt{\varepsilon_i\,\mu_i} \equiv k_{\text{в}} n_i$ $(i = 1, 2)$, где $n_i = \sqrt{\varepsilon_{ri}\,\mu_{ri}}$ — показатель преломления i-й среды с относительными проницаемостями $\varepsilon_{ri} = \varepsilon_i/\varepsilon_0$ и $\mu_{ri} = \mu_i/\mu_0$, а $k_{\text{в}} = \omega\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}$ — волновое число вакуума, характеризуемого постоянными ε_0 и μ_0.

Как вытекает из закона Снеллиуса, при достаточно больших углах падения θ_1 величина $(k_1/k_2)\sin\theta_1 \equiv \sin\theta_2$ может стать больше единицы. Это означает, что преломленная волна не может распространяться в среде 2 из-за комплексных значений угла θ_2. Такая ситуация соответствует так называемому *полному внутреннему отражению*. Оно начинается при $\sin\theta_2 = 1$, т. е. характеризуется *критическим углом* падения θ_1^{cr}, таким что $\sin\theta_1^{cr} = k_2/k_1$, и при $k_2 \leqslant k_1$ угол θ_1^{cr} вещественный.

Применим понятие полного внутреннего отражения к планарной структуре, содержащей три среды с номерами $i = 0, 1, 2$, как показано на рис. 1.8. В общем случае относительные проницаемости ε_{r0}, μ_{r0} (для верхней среды $i = 0$ при $y > a$), ε_{r1}, μ_{r1} (для волноведущего слоя $i = 1$ при $-a < y < a$) и ε_{r2}, μ_{r2} (для подложки $i = 2$ при $y < -a$) различные. Чтобы обеспечить волноведущие свойства такой структуры, между показателями преломления трех сред должно быть следующее соотношение: $n_0 \leqslant n_2 < n_1$ (см. ниже формулу (1.7.5)).

Верхняя (при $y = a$) и нижняя (при $y = -a$) границы раздела сред имеют собственные критические углы θ_{1u}^{cr} и θ_{1l}^{cr} (с нижними индексами u и l от англ. *upper* и *lower*). Эти углы характеризуют начало полного внутреннего отражения на верхней границе (при $\theta_1 \geqslant \theta_{1u}^{cr}$) и на нижней границе (при $\theta_1 \geqslant \theta_{1l}^{cr}$).

Между этими критическими углами имеется следующее соотношение:

$$\theta_{1u}^{cr} = \arcsin\frac{k_0}{k_1} \leqslant \arcsin\frac{k_2}{k_1} = \theta_{1l}^{cr}.$$

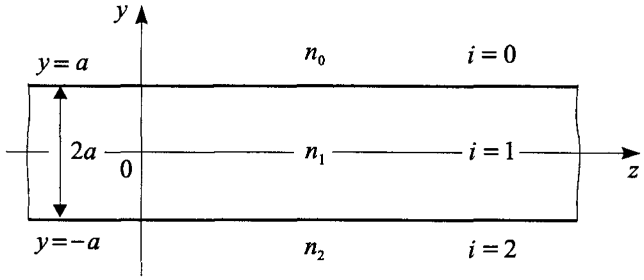


Рис. 1.8. Открытая планарная трехслойная структура с волноведущим диэлектрическим слоем ($i = 1$) толщиною $2a$ с показателем преломления n_1, который размещен между верхним покрытием ($i = 0$) и подложкой ($i = 2$), представляющими собою полубесконечные среды с показателями преломления n_0 и n_2, такими что $n_0 \leqslant n_2 < n_1$

С увеличением угла θ_1, под которым плоская волна во внутреннем слое падает на верхнюю и нижнюю границы раздела сред, возможны следующие три физические ситуации, последовательно сменяющие друг друга:

а) при $\theta_1 < \theta_{1u}^{cr} < \theta_{1l}^{cr}$, или при

$$k_z < k_0 < k_2 \tag{1.6.1}$$

полное внутреннее отражение отсутствует на обеих границах раздела;

б) при $\theta_{1u}^{cr} < \theta_1 < \theta_{1l}^{cr}$, или при

$$k_0 < k_z < k_2 \tag{1.6.2}$$

полное внутреннее отражение происходит только на верхней границе;

в) при $\theta_{1u}^{cr} < \theta_{1l}^{cr} < \theta_1$, или при

$$k_0 < k_2 < k_z \tag{1.6.3}$$

полное внутреннее отражение имеет место на обеих границах раздела.

Картины прохождения светового луча, испущенного бесконечно удаленным источником света, через трехслойную структуру показаны на рис. 1.9 для того, чтобы проиллюстрировать три вышеупомянутые ситуации.

В первом случае, когда угол падения первичного луча 1 меньше, чем критические углы $\theta_{1u}^{cr} < \theta_{1l}^{cr}$, полное внутреннее отражение отсутствует на обеих границах раздела. Тогда источник света S может быть независимо расположен либо снизу, либо сверху волноведущего слоя, как изображено на рис. 1.9 *а*. В той полубесконечной среде, которая содержит источник света, интерференция падающего (1) и отраженного (2) лучей дает стоячую картину поля, в то время как в другой среде преломленный луч (3) образует распространяющуюся волну. Если волноведущий слой облучается двумя источниками света с противоположных сторон, то наложение двух картин, изображенных на рис. 1.9 *а*, формирует стоячую картину поля одновременно выше и ниже этого слоя. Именно такая физическая ситуация интерпретируется как существование излучательных мод. Наличие стоячей картины поля одновременно в верхней и нижней средах позволило Когельнику [22] назвать эти моды *substrate-cover radiation modes*, которые будем называть *излучательными модами структуры*.

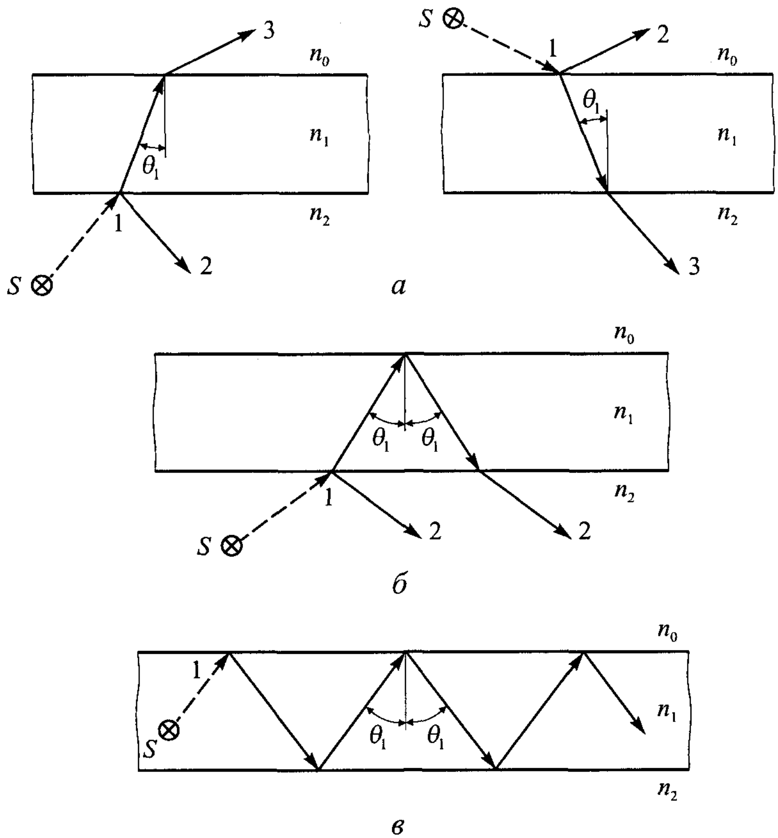


Рис. 1.9. Картины прохождения падающего светового луча 1 (показан пунктиром), испущенного бесконечно удаленным источником S, через трехслойную диэлектрическую структуру с показателями преломления $n_0 \leqslant n_2 < n_1$ для трех физических ситуаций, соответствующих: *а* — излучательным модам структуры $(\theta_1 < \theta_{1u}^{cr} < \theta_{1l}^{cr})$, *б* — излучательным модам подложки $(\theta_{1u}^{cr} < \theta_1 < \theta_{1l}^{cr})$, *в* — направляемым модам $(\theta_{1u}^{cr} < \theta_{1l}^{cr} < \theta_1)$

В действительности независимо осуществимы две конфигурации для излучательных мод структуры — *симметричная* (четная) и *антисимметричная* (нечетная), которые соответствуют синфазному и противофазному возбуждению верхней ($y = a$) и нижней ($y = -a$) границ раздела. Строго говоря, такое независимое возбуждение возможно лишь для симметричной структуры, когда $n_0 = n_2$. В случае асимметричных структур (при $n_0 \neq n_2$) выбор двух независимых решений для излучательных мод структуры осуществляется таким образом, чтобы при снятии асимметрии одно из решений переходило в симметричную (четную) конфигурацию (соответствующую синфазному возбуждению), а другое — в антисимметричную (нечетную) конфигурацию (соответствующую противофазному возбуждению), см. п. 1.9.

Картина прохождения светового луча 1, падающего со стороны подложки, как изображено на рис. 1.9 *б*, соответствует полному внутреннему отражению на верхней границе. Луч, полностью отраженный от этой границы, возвращается как преломленный через нижнюю границу обратно в подложку. Поэтому в нижней полубесконечной среде с $n_2 > n_0$, где располагается источник света, интерференция двух противоположно распространяющихся лучей создает стоячую картину поля, типичную для излучательных мод.

Интересно выяснить структуру поля выше волноведущего слоя ($y > a$) в условиях полного внутреннего отражения на верхней границе. Так как вдоль границы распространяется волна с продольным волновым числом, общим для всех сред, т. е. $k_z = k_0 \sin\theta_0 = k_1 \sin\theta_1 = k_2 \sin\theta_2$, то для верхней среды имеем

$$\sin\theta_0 = \frac{k_1}{k_0}\sin\theta_1 > 1.$$

Тогда, полагая угол θ_0 комплексным в форме $\theta_0 = \theta_0' + i\theta_0''$, получаем

$$\sin\theta_0 \equiv \sin\theta_0' \operatorname{ch}\theta_0'' + i\cos\theta_0' \operatorname{sh}\theta_0'' = \frac{k_1}{k_0}\sin\theta_1.$$

Это соотношение приводит к равенствам

$$\theta_0' = \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad \operatorname{ch}\theta_0'' = \frac{k_1}{k_0}\sin\theta_1. \tag{1.6.4}$$

Поперечное волновое число верхней среды с учетом (1.6.4) равняется

$$\begin{aligned} k_{y0} \equiv k_0\cos\theta_0 &= k_0(\cos\theta_0' \operatorname{ch}\theta_0'' - i\sin\theta_0' \operatorname{sh}\theta_0'') = \\ &= -ik_0 \operatorname{sh}\theta_0'' = -i\sqrt{k_1^2\sin^2\theta_1 - k_0^2} \equiv -i|k_{y0}|. \end{aligned} \tag{1.6.5}$$

Отсюда следует, что полное внутреннее отражение имеет место только в том случае, если для внешней среды поперечное волновое число мнимое. Это обеспечивает поверхностный характер поля вне волноведущего слоя в форме $\exp(-ik_{y0}y) = \exp(-|k_{y0}|y)$.

Излучательные моды, поле которых в верхней среде имеет поверхностный характер, а в подложке форму стоячей волны, принято называть *излучательными модами подложки* (англ. *substrate radiation modes*) [14, 22].

Картина луча зигзагообразной формы, показанная на рис. 1.9 *в*, соответствует наличию полного внутреннего отражения на обеих границах волноведущего слоя, вне которого (выше и ниже) поля имеют поверхностный характер. Поэтому луч света, введенный внутрь этого слоя, не может его покинуть и распространяется между его границами путем многократных внутренних отражений. Такая физическая ситуация соответствует *направляемым модам* (англ. *guided modes*), которые имеют дискретный спектр благодаря поперечному резонансу, вызванному многократными отражениями.

Неравенства (1.6.1), (1.6.2) и (1.6.3) определяют области продольного волнового числа k_z, в которых существуют излучательные моды структуры, излучательные моды подложки и направляемые волноводные моды. В соответствии с этим, плоскость (ω, k_z) может быть разделена прямыми линиями $\omega = c_i k_z$ (индексы $i = 0, 1, 2$ соответствуют нумерации слоев на рис. 1.8) на три угловых сектора, обозначенных на рис. 1.10 цифрами в кружках 1, 2, 3.

В секторах 1 и 2, где справедливы неравенства (1.6.1) и (1.6.2), существуют излучательные моды структуры и подложки. Линия $\omega = c_0 k_z$, разделя-

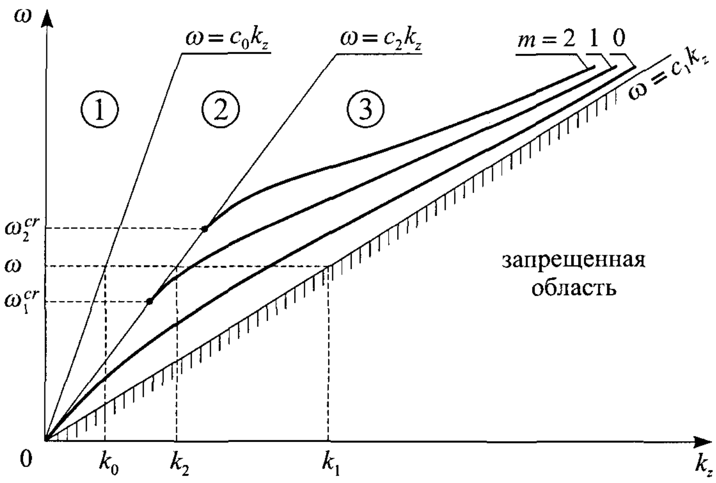


Рис. 1.10. Области существования излучательных мод структуры ①, излучательных мод подложки ② и направляемых мод ③. В области ③ качественно изображены дисперсионные кривые для первых трех направляемых мод с номерами $m = 0, 1, 2$, которые являются типичными для симметричного волновода с $n_0 = n_2$ (для асимметричного волновода с $n_0 \neq n_2$ основная мода $m = 0$, не имеющая критической частоты, исчезает)

ющая эти секторы, определяется скоростью света, $c_0 = (\varepsilon_0\mu_0)^{-1/2}$, в верхней среде. Для симметричного волновода с $n_0 = n_2$ эта линия сливается с линией $\omega = c_2k_z$, тогда сектор ② исчезает. Поэтому излучательные моды подложки существуют только в асимметричных волноводах с $n_0 \neq n_2$.

Направляемые моды существуют в секторе ③, ограниченном линиями $\omega = c_2k_z$ и $\omega = c_1k_z$ на рис. 1.10, где изображены три моды с номерами $m = 0, 1, 2$. Основная мода ($m = 0$) не имеет критической частоты (точнее $\omega_0^{cr} = 0$). Для остальных мод ($m = 1, 2, \ldots$) имеются ненулевые критические частоты $\omega_1^{cr} < \omega_2^{cr} < \ldots$. Как известно, такая картина характерна только для симметричных волноводов, в то время как в любом асимметричном волноводе даже основная мода имеет ненулевую критическую частоту [13–19].

Правая граница сектора ③ определяется скоростью света, $c_1 = (\varepsilon_1\mu_1)^{-1/2}$, в волноведущей среде. Справа от сектора ③ располагается *запрещенная область*, поскольку, как показано в конце п. 1.7, фазовая скорость направляемых мод в трехслойной структуре не может превышать c_1.

Левая граница сектора ③ определяется скоростью света, $c_2 = (\varepsilon_2\mu_2)^{-1/2}$, в подложке. Эта линия соответствует критическим частотам направляемых мод. В частности, для m-й моды на частоте ω_m^{cr} имеют место следующие равенства:

$$\beta_m(\omega_m^{cr}) \equiv k_z(\omega_m^{cr}) = k_2(\omega_m^{cr}) \equiv \omega_m^{cr}/c_2 \quad \text{и} \quad k_{y2}(\omega_m^{cr}) = 0. \tag{1.6.6}$$

Условия (1.6.6) для направляемых мод открытого волновода полностью идентичны с аналогичными условиями (1.1.23), полученными для поверхностных мод закрытого волновода. Как уже обсуждалось, условия (1.1.23) соответствуют превращению поверхностных мод в объемные для закрытого волновода. Совпадение условий (1.1.23) и (1.6.6) лишний раз подтверждает справедливость прямой аналогии между объемными модами в закрытых волноводах и излучательными модами в открытых волноводах, что уже ранее подчеркивалось в п. 1.2.

Следовательно, на критической частоте ω_m^{cr}, определяемой условиями (1.6.6), дискретная направляемая m-я мода исчезает, превращаясь в непрерывный спектр излучательных мод. В соответствии с выражениями (1.1.24), которые остаются справедливыми и для открытого волновода, фазовая и групповая скорости любой направляемой моды на ее критической частоте ω_m^{cr} должны быть равными скорости света в подложке:

$$v_{\mathrm{ph},m}^{cr} = v_{\mathrm{gr},m}^{cr} = c_2.$$

Этот факт отражается на рис. 1.10 изображением дисперсионных кривых с номерами $m = 0, 1, 2, \ldots$ по касательной к линии $\omega = c_2 k_z$ на критических частотах $\omega_0^{cr} = 0$, ω_1^{cr}, ω_2^{cr}, ...

Такая ситуация для m-й моды означает исчезновение переносимой ею средней мощности $\left(P_m^{cr} \equiv P_m(\omega_m^{cr}) = 0\right)$. Поскольку на критической частоте групповая скорость $v_{\mathrm{gr},m}^{cr} = c_2 \neq 0$, то требование $P_m^{cr} = v_{\mathrm{gr},m}^{cr} W_m^{cr} = 0$ реализуется, когда исчезает средняя запасенная энергия $\left(W_m^{cr} \equiv W_m(\omega_m^{cr}) = 0\right)$. Это означает тот факт, что поля m-й моды стремятся к нулю, обеспечивая $W_m \to 0$ по мере приближения рабочей частоты к критической частоте, и полностью исчезают при $\omega = \omega_m^{cr}$.

Описанное поведение радикально отличается от поведения объемной моды закрытого волновода, в котором она превращается в исчезающую моду на *частоте отсечки* ω_m^c, определяемой условиями (1.1.15). В последнем случае, согласно (1.1.16),

$$v_{\mathrm{gr},m}^c \equiv v_{\mathrm{gr},m}(\omega_m^c) = 0,$$

так что $P_m^c = v_{\mathrm{gr},m}^c W_m^c = 0$, но средняя запасенная энергия $W_m^c \neq 0$.

Следовательно, в условиях отсечки для закрытого волновода поля объемной моды не исчезают (в силу $W_m^c \neq 0$), а мода лишь изменяет свое собственное состояние, превращаясь из распространяющейся в исчезающую.

1.7. Электромагнитные поля и дисперсионные уравнения направляемых мод в планарных диэлектрических волноводах

Планарные диэлектрические волноводы, как и оптические волокна, были предметом многочисленных исследований и публикаций за последние годы, включая книги [11–22]. Тем не менее, предметом дальнейшего рассмотрения в этой главе будет анализ электромагнитных полей в планарной трехслойной структуре со ступенчатым профилем показателя преломления, изображенной на рис. 1.8. Именно такие структуры использованы в последующих главах в качестве *базового волновода* при *исследовании возбуждения и связи оптических мод*. В отличие от обычно применяемой модели диэлектрической среды без магнитных свойств, будем для общности считать, что каждый изотропный i-слой обладает как диэлектрической, так и магнитной проницаемостями, отличными от единицы ($\varepsilon_{ri} \neq 1$ и $\mu_{ri} \neq 1$), но при этом сохраним название «диэлектрический волновод».

Изучаемая структура (рис. 1.8) состоит из волноведущего слоя ($i=1$ с показателем преломления n_1) толщиною $2a$, расположенного между двумя полубесконечными средами ($-a < y < a$): подложкой ($i = 2$ при $y < -a$ с показателем преломления n_2) и верхней средой ($i = 0$ при $y > a$ с показателем преломления n_0).

В дальнейшем будем рассматривать два частных случая общей структуры:

а) *симметричные* волноведущие структуры с $n_0 = n_2$,

б) *сильно асимметричные* волноведущие структуры с $n_0 \ll n_2$.

Основная задача последующего анализа — вывод дисперсионных уравнений и выражений для нормировки ТЕ- и ТМ-мод дискретного и непрерывного спектра в планарной трехслойной диэлектрической структуре. В нашем изложении будем следовать основным обозначениям и результатам, которые были приведены (в большинстве своем без вывода) Когельником [22].

Аналогично закрытым волноводам с изотропным заполнением, электромагнитное поле в планарной трехслойной структуре (показанной на рис. 1.8) описывается поперечным уравнением Гельмгольца типа (1.1.5), записанным в следующей форме для i-слоя ($i = 0, 1, 2$):

$$\frac{d^2 \widehat{f}_i(y)}{dy^2} + k_{yi}^2 \widehat{f}_i(y) = 0, \tag{1.7.1}$$

при этом

$$k_{yi}^2 = k_i^2 - k_z^2 = \omega^2 \varepsilon_i \mu_i - k_z^2. \tag{1.7.2}$$

Здесь $\widehat{f}_i(y)$ — функция поперечных координат (*мембранная функция*, отмеченная колпачком), которая описывает любую компоненту электромагнитного поля, так что ее полная зависимость $f_i(y, z, t)$ дается выражением (1.1.3).

Из-за поверхностного характера направляемых мод их поперечные волновые числа должны быть такими:

$$k_{y1} = |k_{y1}|, \qquad k_{y0} = -i|k_{y0}|, \qquad k_{y2} = -i|k_{y2}|, \tag{1.7.3}$$

чтобы обеспечить вне волноведущего слоя (при $|y| > a$) исчезновение полей при удалении на поперечную бесконечность ($|y| \to \infty$). Поэтому выражения (1.7.2) для поперечных волновых чисел дают соотношение

$$k_{y1}^2 + |k_{yi}|^2 = k_{\text{в}}^2 (n_1^2 - n_i^2) > 0 \qquad \text{при} \quad i = 0,\ 2, \tag{1.7.4}$$

где $k_{\text{в}} = \omega\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ — волновое число вакуума и $n_i = \sqrt{\varepsilon_{ri} \mu_{ri}}$ — показатель преломления i-й среды.

Следовательно, неравенство (1.7.4) накладывает обязательное требование на показатели преломления сред, используемых в качестве волноведущих в трехслойной планарной структуре, показанной на рис. 1.8:

$$n_0 \leqslant n_2 < n_1. \tag{1.7.5}$$

Исследуем отдельно два случая, соответствующие электромагнитным полям ТЕ- и ТМ-поляризаций.

1.7.1. Направляемые моды ТЕ-типа. Электромагнитные поля ТЕ-типа в планарной структуре, показанной на рис. 1.8, характеризуются следующими нулевыми компонентами: $E_y = E_z = H_x = 0$. Среди ненулевых компонент удобно выбрать в качестве независимой электрическое поле E_x, подчиняющееся уравнению (1.7.1). Тогда компоненты магнитного поля выражаются через E_x при помощи следующих формул:

$$H_y = \frac{k_z}{\omega\mu} E_x, \tag{1.7.6}$$

$$H_z = \frac{1}{i\omega\mu} \frac{\partial E_x}{\partial y}. \tag{1.7.7}$$

Искомое решение $\widehat{E}_{xi}(y)$ уравнения Гельмгольца (1.7.1) для трех слоев структуры ($i = 0, 1, 2$) может быть представлено в виде

$$\widehat{E}_{xi}(y) = \begin{cases} A_0 e^{-ik_{y0}(y-a)} & (i=0) \quad \text{при} \quad y > a, \\ A_1 e^{-ik_{y1}y} + B_1 e^{ik_{y1}y} & (i=1) \quad \text{при} \ -a < y < a, \\ B_2 e^{ik_{y2}(y+a)} & (i=2) \quad \text{при} \quad y < -a. \end{cases} \tag{1.7.8}$$

Здесь поля во внешних средах (при $y>a$ и $y<-a$) записаны в общей форме $\exp\left[-ik_{yi}(|y|-a)\right]$, чтобы обеспечить их поверхностный характер с помощью неравенства $\operatorname{Im} k_{yi} < 0$ для диэлектрических слоев ($i = 0, 2$), что согласуется с общим требованием (1.3.8).

Подстановка (1.7.8) в уравнение (1.7.7) дает соответствующие выражения для $\widehat{H}_{zi}(y)$. Граничные условия, требующие непрерывности касательных компонент $\widehat{E}_{xi}(\pm a)$ и $\widehat{H}_{zi}(\pm a)$, приводят к следующим равенствам:

$$\begin{aligned} A_1 e^{-ik_{y1}a} + B_1 e^{ik_{y1}a} &= A_0, \\ A_1 e^{ik_{y1}a} + B_1 e^{-ik_{y1}a} &= B_2, \\ A_1 e^{-ik_{y1}a} - B_1 e^{ik_{y1}a} &= \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r0}} \frac{k_{y0}}{k_{y1}} A_0, \\ A_1 e^{ik_{y1}a} - B_1 e^{-ik_{y1}a} &= -\frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}} \frac{k_{y2}}{k_{y1}} B_2. \end{aligned} \tag{1.7.9}$$

Из (1.7.9) легко получить следующие соотношения между амплитудами поперечного распределения полей в слоях:

$$A_1 = A_0 \frac{k_{y1} + k^{\mu}_{y0}}{2k_{y1}} e^{ik_{y1}a} = B_2 \frac{k_{y1} - k^{\mu}_{y2}}{2k_{y1}} e^{-ik_{y1}a}, \tag{1.7.10}$$

$$B_1 = B_2 \frac{k_{y1} + k^{\mu}_{y2}}{2k_{y1}} e^{ik_{y1}a} = A_0 \frac{k_{y1} - k^{\mu}_{y0}}{2k_{y1}} e^{-ik_{y1}a}, \tag{1.7.11}$$

$$\frac{A_0}{B_2} = \frac{k_{y1} + k^{\mu}_{y2}}{k_{y1} - k^{\mu}_{y0}} e^{i2k_{y1}a} = \frac{k_{y1} - k^{\mu}_{y2}}{k_{y1} + k^{\mu}_{y0}} e^{-i2k_{y1}a}, \tag{1.7.12}$$

где введены модифицированные поперечные волновые числа для внешних сред:

$$k_{y0}^{\mu} \equiv \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r0}} k_{y0} \quad \text{и} \quad k_{y2}^{\mu} \equiv \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}} k_{y2}. \tag{1.7.13}$$

Последнее равенство в формуле (1.7.12) непосредственно дает искомое *дисперсионное уравнение* для асимметричной структуры,

$$e^{-i4k_{y1}a} = \frac{(k_{y1}+k_{y0}^{\mu})(k_{y1}+k_{y2}^{\mu})}{(k_{y1}-k_{y0}^{\mu})(k_{y1}-k_{y2}^{\mu})}, \tag{1.7.14}$$

которое может быть преобразовано к следующему виду:

$$\operatorname{tg} 2k_{y1}a = i\,\frac{k_{y1}(k_{y0}^{\mu}+k_{y2}^{\mu})}{k_{y1}^2+k_{y0}^{\mu}k_{y2}^{\mu}}. \tag{1.7.15}$$

Будем анализировать общее дисперсионное уравнение (1.7.15) и поперечную структуру полей для двух частных случаев, соответствующих:

- *симметричным* волноведущим структурам с $n_0 = n_2 < n_1$,
- *сильно асимметричным* волноведущим структурам с $n_0 \ll n_2 < n_1$.

Симметричные волноводы имеют одинаковую внешнюю среду выше и ниже волноведущего слоя с $\varepsilon_{r0} = \varepsilon_{r2}$ и $\mu_{r0} = \mu_{r2}$, что накладывает следующее условие:

$$k_{y0}^{\mu} = k_{y2}^{\mu} \tag{1.7.16}$$

на общее дисперсионное уравнение (1.7.15), которое принимает частный вид

$$\operatorname{tg} 2k_{y1}a = i\frac{2k_{y1}k_{y2}^{\mu}}{k_{y1}^2+k_{y2}^{\mu\,2}}. \tag{1.7.17}$$

Легко убедиться в том, что уравнение (1.7.17) распадается на два независимых уравнения, соответствующих четным (симметричным) и нечетным (антисимметричным) модам:

$$ik_{y2}^{\mu} = \begin{cases} k_{y1}\operatorname{tg} k_{y1}a & \text{— четные моды,} \\ -k_{y1}\operatorname{ctg} k_{y1}a & \text{— нечетные моды.} \end{cases} \tag{1.7.18}$$

Подстановка дисперсионного уравнений (1.7.18) в (1.7.10)–(1.7.12) дает следующие соотношения:

$$A_1 = \pm B_1 \quad \text{и} \quad A_0 = \pm B_2, \tag{1.7.19}$$

где знаки $\pm$ соответствуют четным и нечетным модам.

Как видно из (1.7.8), внутри волноведущего слоя $(-a < y < a)$ электрическое поле $\widehat{E}_{x1}(y)$ является суперпозицией прямой и обратной волн с амплитудами A_1 и B_1, бегущих вдоль оси y в противоположных направлениях. Из равенств (1.7.19) следует, что симметричные и антисимметричные моды возникают как результат синфазного $(A_1 = B_1)$ и противофазного $(A_1 = -B_1)$ возбуждения этих волн. Это образует симметричное (E_1^s) и антисимметричное

(E_1^a) независимые распределения электрического поля в волноведущем слое ($i = 1$):

$$\widehat{E}_{x1}(y) = \begin{cases} E_1^s \cos k_{y1} y & \text{— четные моды,} \\ E_1^a \sin k_{y1} y & \text{— нечетные моды.} \end{cases} \tag{1.7.20}$$

Таким образом, модовая симметрия в дисперсионных уравнениях (1.7.18) означает симметрию по отношению к электрическому полю $\widehat{E}_{x1}(y)$. Как следует из выражений (1.7.6) и (1.7.7), поперечное магнитное поле $\widehat{H}_{y1}(y)$ имеет ту же симметрию, что и $\widehat{E}_{x1}(y)$, в то время как продольное магнитное поле $\widehat{H}_{z1}(y)$ — противоположную: компонента $\widehat{H}_{z1}(y)$ симметрична для нечетных мод и антисимметрична для четных мод.

Сильно асимметричные волноводы имеют различные внешние среды выше и ниже волноведущего слоя с $\varepsilon_{r0} \ll \varepsilon_{r2}$ и $\mu_{r0} \ll \mu_{r2}$, что накладывает следующее условие:

$$|k_{y2}^\mu| \ll |k_{y0}^\mu| \tag{1.7.21}$$

на общее дисперсионное уравнение (1.7.15), которое принимает частный вид

$$\operatorname{tg} 2k_{y1}a = i\frac{k_{y1}}{k_{y2}^\mu}\,\frac{1}{1 + k_{y1}^2/k_{y0}^\mu k_{y2}^\mu}\,. \tag{1.7.22}$$

Упрощение этого уравнения достигается в случае так называемых *слабонаправляющих волноводов*, когда $n_2 = n_1 - \Delta n$ и $\Delta n \ll n_1$, т. е. волноведущий слой и подложка имеют близкие показатели преломления. Это обеспечивает следующее условие:

$$|k_{y1}| \approx |k_{y2}^\mu|, \tag{1.7.23}$$

применение которого к (1.7.22) дает дисперсионное уравнение для сильно асимметричного волновода со *слабой направленностью*:

$$ik_{y2}^\mu = -k_{y1}\operatorname{ctg} 2k_{y1}a. \tag{1.7.24}$$

Из сравнения формулы (1.7.24) с дисперсионным уравнением (1.7.18) для симметричных волноводов видно, что дисперсия в слабонаправляющем волноводе совпадает с дисперсией нечетных мод симметричного волновода двойной толщины $4a$.

Подстановка (1.7.24) в соотношения (1.7.10) и (1.7.11) позволяет представить амплитуды A_1 и B_1 в форме

$$A_1 = \frac{i}{2}A\,e^{ik_{y1}a} \quad \text{и} \quad B_1 = -\frac{i}{2}A\,e^{-ik_{y1}a}, \tag{1.7.25}$$

включающей общую для A_1 и B_1 константу, обозначенную A.

Из сравнения (1.7.25) с (1.7.19) следует, что сильная асимметрия волноведущей структуры модифицирует ее поля следующим образом:

а) симметричное распределение (когда в симметричных волноводах $A_1 = B_1$) полностью подавлено сильной асимметрией;

б) антисимметричное распределение (когда $A_1 = -B_1$ в симметричных волноводах) дополнено появлением общего фазового сдвига $\phi_1 = k_{y1}a$ с противоположными знаками для прямой (A_1) и обратной (B_1) волн.

Подстановка (1.7.25) в выражение (1.7.8) дает следующее распределение поперечного электрического поля в волноведущем слое ($-a < y < a$) для сильно асимметричного волновода (с $E_1^a \equiv A$ и $\phi_1 = k_{y1}a$):

$$\widehat{E}_{x1}(y) = E_1^a \sin(k_{y1}y - \phi_1). \tag{1.7.26}$$

Следовательно, сильная асимметрия, наложенная на слабонаправляющий волновод, дает антисимметричное распределение (1.7.26) электрического поля, сдвинутое по фазе на угол $\phi_1 = k_{y1}a$. В результате этого на верхней границе (при $y = a$) между волноведущим слоем и внешней средой с минимальным показателем преломления ($n_0 \ll n_2$) поперечные поля практически отсутствуют ($\widehat{E}_{x1}(a) = \widehat{H}_{y1}(a) = 0$), в то время как продольное магнитное поле $\widehat{H}_{z1}$ имеет здесь максимальное значение $\widehat{H}_{z1}(a)$.

Выполненный выше анализ структуры полей для симметричного и сильно асимметричного волноводов позволяет обобщить полученные результаты на случай структур *с произвольной симметрией.* Можно ожидать, что:

а) угол фазового сдвига $\pm\phi_1$ для прямой и обратной волн будет произвольным (вместо $\pm k_{y1}a$ в (1.7.25));

б) в дополнение к противофазному возбуждению (когда $A_1 = -B_1$ в симметричных волноводах при $\phi_1 = 0$) будет также присутствовать синфазное возбуждение (когда $A_1 = B_1$ в симметричных волноводах при $\phi_1 = 0$), которое было подавлено сильной асимметрией.

Вышесказанное позволяет, по аналогии с (1.7.25), записать подобные соотношения для волноведущих структур с произвольной симметрией:

$$A_1 = \frac{i}{2}\,A\,e^{i\phi_1} \quad \text{и} \quad B_1 = \pm\frac{i}{2}\,A\,e^{-i\phi_1}. \tag{1.7.27}$$

Как следствие соотношений (1.7.27), электрическое поле (1.7.8) в волноведущем слое ($i = 1$) может быть представлено в двух формах (симметричной с амплитудой E_1^s и антисимметричной с амплитудой E_1^a):

$$\widehat{E}_{x1}(y) = E_1^s \cos(k_{y1}y - \phi_1), \tag{1.7.28}$$

$$\widehat{E}_{x1}(y) = E_1^a \sin(k_{y1}y - \phi_1). \tag{1.7.29}$$

Сравнение (1.7.28) и (1.7.29) с аналогичными выражениями (1.7.20) для симметричных волноводов показывает, что произвольная асимметрия смещает симметричное и антисимметричное распределения на один и тот же фазовый угол ϕ_1. Действительно, если в симметричной структуре плоскость симметрии проходит посередине (при $y = 0$), то для обоих распределений (1.7.28) и (1.7.29) она располагается при $y_1 = \phi_1/k_{y1}$. Это означает, что плоскость симметрии всегда смещается в направлении внешней среды с меньшим показателем преломления (в нашем случае вверх, так как $n_0 < n_2$). Согласно (1.7.26), в случае сильной асимметрии $E_1^s = 0$, $\phi_1 = k_{y1}a$ и $y_1 = a$.

Необходимо подчеркнуть, что распределения (1.7.28) и (1.7.29) не являются независимыми для направляемых мод (так $E_1^a \equiv A = -iE_1^s$), поскольку они соответствуют одному дисперсионному уравнению (1.7.15). Как будет ясно из последующего рассмотрения (см. п. 1.9), симметричное и антисимметричное распределения (1.7.28) и (1.7.29) становятся независимыми в случае излучательных мод, для которых не существует дисперсионного уравнения.

1.7.2. Направляемые моды ТМ-типа. Электромагнитные поля ТМ-типа в планарной структуре, показанной на рис. 1.8, характеризуются следующими нулевыми компонентами: $E_x = H_y = H_z = 0$. Среди ненулевых компонент удобно выбрать в качестве независимой магнитное поле H_x, подчиняющееся уравнению (1.7.1). Тогда компоненты электрического поля выражаются через H_x с помощью следующих формул:

$$E_y = -\frac{k_z}{\omega\varepsilon} H_x, \tag{1.7.30}$$

$$E_z = -\frac{1}{i\omega\varepsilon}\frac{\partial H_x}{\partial y}. \tag{1.7.31}$$

Искомое решение $\widehat{H}_{xi}(y)$ уравнения Гельмгольца (1.7.1) для трех слоев ($i = 0, 1, 2$) может быть представлено в виде (ср. уравнение (1.7.8))

$$\widehat{H}_{xi}(y) = \begin{cases} A_0 e^{-ik_{y0}(y-a)} & (i=0) \quad \text{при} \quad y > a, \\ A_1 e^{-ik_{y1}y} + B_1 e^{ik_{y1}y} & (i=1) \quad \text{при} \quad -a < y < a, \\ B_2 e^{ik_{y2}(y+a)} & (i=2) \quad \text{при} \quad y < -a. \end{cases} \tag{1.7.32}$$

Подстановка (1.7.32) в уравнение (1.7.31) дает соответствующие выражения для $\widehat{E}_{zi}(y)$. Граничные условия, требующие непрерывности касательных компонент $\widehat{H}_{xi}(\pm a)$ и $\widehat{E}_{zi}(\pm a)$, приводят к следующим равенствам:

$$\begin{aligned} A_1 e^{-ik_{y1}a} + B_1 e^{ik_{y1}a} &= A_0, \\ A_1 e^{ik_{y1}a} + B_1 e^{-ik_{y1}a} &= B_2, \\ A_1 e^{-ik_{y1}a} - B_1 e^{ik_{y1}a} &= \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r0}}\frac{k_{y0}}{k_{y1}} A_0, \\ A_1 e^{ik_{y1}a} - B_1 e^{-ik_{y1}a} &= -\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}\frac{k_{y2}}{k_{y1}} B_2. \end{aligned} \tag{1.7.33}$$

Из сравнения двух систем уравнений (1.7.9) и (1.7.33) следует, что первые превращаются во вторые при следующих заменах:

$$\begin{array}{ccc} \textbf{TE} & & \textbf{TM} \\ k^{\mu}_{y0} \equiv \dfrac{\mu_{r1}}{\mu_{r0}} k_{y0} & \longrightarrow & \dfrac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r0}} k_{y0} \equiv k^{\varepsilon}_{y0}, \\ k^{\mu}_{y2} \equiv \dfrac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}} k_{y2} & \longrightarrow & \dfrac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} k_{y2} \equiv k^{\varepsilon}_{y2}. \end{array} \tag{1.7.34}$$

Следовательно, осуществляя замены (1.7.34) в равенствах (1.7.10)–(1.7.12), легко получить аналогичные соотношения между амплитудами A_i

и B_i поперечного распределения полей в трех слоях ($i = 0, 1, 2$) для мод ТМ-типа. Таким же образом дисперсионные уравнения (1.7.14), (1.7.15), (1.7.17), (1.7.18), (1.7.22) и (1.7.24) могут быть преобразованы в искомую форму для мод ТМ-типа. В частности, *дисперсионные уравнения* (1.7.18) и (1.7.24) принимают следующий вид:

а) для ***симметричных волноводов***

$$ik_{y2}^{\varepsilon} = \begin{cases} k_{y1}\operatorname{tg} k_{y1}a & \text{— четные моды,} \\ -k_{y1}\operatorname{ctg} k_{y1}a & \text{— нечетные моды;} \end{cases} \tag{1.7.35}$$

б) для ***сильно асимметричных волноводов*** со слабой направленностью

$$ik_{y2}^{\varepsilon} = -k_{y1}\operatorname{ctg} 2k_{y1}a. \tag{1.7.36}$$

Приведенные выше рассуждения о структуре и симметрии полей ТЕ-типа оказываются верными и для ТМ-мод, только в применении к ним симметрия имеет место по отношению к поперечному магнитному полю $\widehat{H}_{x1}$ (вместо электрического поля $\widehat{E}_{x1}$ для ТЕ-мод).

Полученные дисперсионные уравнения для ТЕ- и ТМ-мод по существу совпадают (отличаясь только формой записи) с имеющимися в литературе, где дано их детальное исследование (см., например, [17–19]). Оказывается, что в трехслойной структуре с пассивными диэлектрическими средами каждая мода дискретного спектра является распространяющейся (активной) модой. В то же время все комплексные корни дисперсионного уравнения, если таковые имеются, лежат на нефизическом листе римановой поверхности с $\operatorname{Im} k_z > 0$ (см. п. 1.3 и приложение А.2), т. е. они соответствуют вытекающим модам (см. п. 1.5.2). Подробный анализ комплексных корней дисперсионного уравнения и характера частотного поведения вытекающих мод можно найти в монографиях [13, 24].

В заключение дадим обоснование появлению запрещенной области на плоскости (ω, k_z) правее углового сектора ③ на рис. 1.10. Правая граница этого сектора (внутри которого располагается дискретный спектр направляемых мод) описывается прямой линией $\omega = c_1 k_z$, чьи точки с учетом (1.7.2) подчиняются следующим соотношениям:

$$k_z = k_1, \qquad k_{y1} = 0, \qquad |k_{y2}| = k\sqrt{n_1^2 - n_2^2}\,. \tag{1.7.37}$$

Справа от сектора ③, в котором $k_z > k_1$, требование вещественности продольного волнового числа k_z делает поперечное волновое число волноведущей среды чисто мнимым, т. е. $k_{y1} = \sqrt{k_1^2 - k_z^2} = -i|k_{y1}|$. В этом случае дисперсионные уравнения (1.7.18) и (1.7.24) для ТЕ-мод и аналогичные уравнения (1.7.35) и (1.7.36) для ТМ-мод не имеют корней, так как их левая и правая части принимают вещественные значения противоположных знаков. По этой причине область правее сектора ③ на рис. 1.10 была названа *запрещенной областью*.

1.8. Нормировка направляемых мод в планарных диэлектрических волноводах

Формулы (1.7.9) для ТЕ-мод или (1.7.33) для ТМ-мод, полученные из соответствующих граничных условий на границах $y = \pm a$ трехслойной диэлектрической структуры (рис. 1.8), представляют собой однородную систему алгебраических уравнений относительно искомых амплитудных множителей A_0, A_1, B_1 и B_2, которые описывают поперечное распределение полей. Обращение в нуль детерминанта этой системы дает дисперсионное уравнение типа (1.7.14) или (1.7.15). Тогда уравнения (1.7.9) или (1.7.33) позволяют выразить любые три амплитудных множителя через четвертый, как это было сделано, например, в форме (1.7.10) и (1.7.11). Эта независимая амплитуда будет определять *норму моды* и по этой причине называется *нормировочной амплитудой*. Не следует путать ее с *амплитудой возбуждения* $A_m(z)$, появляющейся в модальных разложениях полей типа (7) или (11)–(12). Нормировочная амплитуда всегда имеет размерность той физической величины, которую она описывает (т. е. напряженности электрического или магнитного поля), и не зависит от координат, в отличие от амплитуды возбуждения, безразмерной для дискретных мод и зависящей от z внутри области источников.

Как будет показано в п. 2.4.1, *соотношение ортонормировки* для любой пары (m, n) *дискретных активных мод* имеет вид (см. уравнение (2.4.15))

$$N_{mn} \equiv \int\limits_S \left[\widehat{\mathbf{E}}_m^*(\mathbf{r}_t) \times \widehat{\mathbf{H}}_n(\mathbf{r}_t) + \widehat{\mathbf{E}}_n(\mathbf{r}_t) \times \widehat{\mathbf{H}}_m^*(\mathbf{r}_t)\right] \cdot \mathbf{e}_z\, dS = N_m \delta_{mn}, \qquad (1.8.1)$$

где $\widehat{\mathbf{E}}_{m(n)}(\mathbf{r}_t)$ и $\widehat{\mathbf{H}}_{m(n)}(\mathbf{r}_t)$ — мембранные функции для мод m и n, описывающие распределение полей типа (1) по сечению волновода S с поперечной координатой $\mathbf{r}_t$.

В соотношении (1.8.1) символ Кронекера δ_{mn} выражает ортогональность m-й моды со всеми другими модами с номерами $n \neq m$ (включая в общем случае также излучательные моды), а N_m — норма *активной* m-й моды, которая определена в виде (см. уравнения (9) и (2.4.10))

$$N_m = 2\mathrm{Re} \int\limits_S \left(\widehat{\mathbf{E}}_m^* \times \widehat{\mathbf{H}}_m\right) \cdot \mathbf{e}_z\, dS. \qquad (1.8.2)$$

Будем вычислять норму для дискретных мод ТЕ- и ТМ-типа в трехслойной диэлектрической структуре (рис. 1.8) без магнитных свойств ($\mu_{r0} = \mu_{r1} = \mu_{r2} = 1$). Волновые числа m-й моды для удобства запишем в форме

$$k_{y0,m} = -i|k_{y0,m}| \equiv -i\zeta_{0m}, \qquad (1.8.3)$$

$$k_{y2,m} = -i|k_{y2,m}| \equiv -i\zeta_{2m}, \qquad (1.8.4)$$

$$k_{y1,m} = |k_{y1,m}| \equiv \varkappa_m, \qquad (1.8.5)$$

$$k_{z,m} = \pm\,|k_{z,m}| \equiv \beta_m, \qquad (1.8.6)$$

где $\zeta_{0m} > 0$, $\zeta_{2m} > 0$, $\varkappa_m > 0$ и $\beta_m > 0$ или < 0 для прямой или обратной моды.

1.8.1. Нормировка направляемых мод ТЕ-типа. Компоненты E_x, H_y и H_z полей ТЕ-типа в волноведущем слое ($i = 1$), верхней среде ($i = 0$) и подложке ($i = 2$) описываются уравнениями (1.7.6)–(1.7.8). С учетом обозначений (1.8.3)–(1.8.6), выражения (1.7.8) для электрического поля m-й моды в каждом слое структуры принимают следующий вид:

$$\widehat{E}_{xi,m}(y) = \begin{cases} A_{0m}e^{-\zeta_{0m}(y-a)} & (i=0) \quad \text{при} \quad y > a, \\ A_{1m}e^{-i\varkappa_m y} + B_{1m}e^{i\varkappa_m y} & (i=1) \quad \text{при} \ -a < y < a, \\ B_{2m}e^{\zeta_{2m}(y+a)} & (i=2) \quad \text{при} \quad y < -a. \end{cases} \tag{1.8.7}$$

Выражение (1.8.2) для нормы ТЕ-моды с поперечными компонентами полей $\widehat{E}_{x,m}(y)$ и $\widehat{H}_{y,m}(y)$ записывается в виде

$$N_m = 2\mathrm{Re}\ w \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{E}^*_{x,m}(y)\widehat{H}_{y,m}(y)\,dy, \tag{1.8.8}$$

где w — ширина планарной структуры в x-направлении, вдоль которого она считается достаточно протяженной, в результате чего $\partial/\partial x \equiv -ik_x = 0$.

Вычисление нормы (1.8.8) заключается в интегрировании по толщине трех слоев с номерами $i = 0, 1, 2$, так что

$$N_m = N_m^{(0)} + N_m^{(1)} + N_m^{(2)}, \tag{1.8.9}$$

где, с учетом формул (1.7.6) и (1.8.7),

$$N_m^{(0)} = \frac{2\beta_m w}{\omega\mu_0} \int\limits_a^{\infty} \left|\widehat{E}_{x0,m}(y)\right|^2 dy, \tag{1.8.10}$$

$$N_m^{(1)} = \frac{2\beta_m w}{\omega\mu_0} \int\limits_{-a}^{a} \left|\widehat{E}_{x1,m}(y)\right|^2 dy, \tag{1.8.11}$$

$$N_m^{(2)} = \frac{2\beta_m w}{\omega\mu_0} \int\limits_{-\infty}^{-a} \left|\widehat{E}_{x2,m}(y)\right|^2 dy. \tag{1.8.12}$$

Подстановка (1.8.7) в интегралы (1.8.10)–(1.8.12) после интегрирования дает

$$N_m^{(0)} = \frac{w}{\omega\mu_0}\frac{\beta_m}{\zeta_{0m}}|A_{0m}|^2, \tag{1.8.13}$$

$$N_m^{(1)} = \frac{4w}{\omega\mu_0}\frac{\beta_m}{\varkappa_m}\left[\mathrm{Re}\,(A^*_{1m}B_{1m})\sin 2\varkappa a + \left(|A_{1m}|^2 + |B_{1m}|^2\right)\varkappa a\right], \tag{1.8.14}$$

$$N_m^{(2)} = \frac{w}{\omega\mu_0}\frac{\beta_m}{\zeta_{2m}}|B_{2m}|^2. \tag{1.8.15}$$

Выражая амплитуды A_{1m} и B_{1m} внутри волноведущего слоя при помощи (1.7.10)–(1.7.11) через амплитуды A_{0m} и B_{2m} внешних сред, преобразуем выражения (1.8.13)–(1.8.15) с использованием дисперсионного уравнения (1.7.14). Подставляя их в формулу (1.8.9), получаем

$$N_m = \frac{\beta_m w}{\omega\mu_0} \frac{\varkappa_m^2 + \zeta_{0m}^2}{\varkappa_m^2} \left(2a + \frac{1}{\zeta_{0m}} + \frac{1}{\zeta_{2m}}\right) |A_{0m}|^2 =$$

$$= \frac{\beta_m w}{\omega\mu_0} \frac{\varkappa_m^2 + \zeta_{2m}^2}{\varkappa_m^2} \left(2a + \frac{1}{\zeta_{0m}} + \frac{1}{\zeta_{2m}}\right) |B_{2m}|^2. \tag{1.8.16}$$

Формулы (1.7.10) и (1.7.11) при $k_{y0}^{\mu} = k_{y0,m} = -i\zeta_{0m}$ и $k_{y2}^{\mu} = k_{y2,m} = -i\zeta_{2m}$ приводим к следующим соотношениям:

$$A_{0m} = A_{1m} \frac{2\varkappa_m}{\varkappa_m - i\zeta_{0m}} e^{-i\varkappa_m a}, \tag{1.8.17}$$

$$B_{2m} = B_{1m} \frac{2\varkappa_m}{\varkappa_m - i\zeta_{2m}} e^{-i\varkappa_m a}. \tag{1.8.18}$$

С помощью (1.8.17) и (1.8.18) норма (1.8.16) может быть выражена через амплитудные множители A_{1m} и B_{1m} для волноведущего слоя в виде

$$N_m = 4w \frac{\beta_m d_m}{\omega\mu_0} |A_{1m}|^2 = 4w \frac{\beta_m d_m}{\omega\mu_0} |B_{1m}|^2, \tag{1.8.19}$$

где введено известное выражение для *эффективной толщины* планарного волновода в случае TE$_m$-моды [17–19, 22]:

$$d_m = 2a + \frac{1}{\zeta_{0m}} + \frac{1}{\zeta_{2m}}\,. \tag{1.8.20}$$

Эффективная толщина отражает тот факт, что электромагнитная мощность переносится m-й модой не только внутри волноведущего слоя толщиною $2a$, но и вне его, благодаря полям поверхностного типа, проникающим во внешнюю среду на некую эффективную глубину, равную ζ_{im}^{-1}, $i = 0, 2$. В лучевом описании эффективная толщина учитывает так называемый сдвиг Гуса–Хенхена [17–19, 22].

Вместо двух волн с амплитудами A_{1m} и B_{1m}, бегущих в противоположных направлениях поперек волноведущего слоя, удобно ввести в рассмотрение *стоячую волну*, характеризуемую максимальным значением поля E_m и фазой ϕ_m, записанную в форме

$$\widehat{E}_{x1,m}(y) = E_m \cos(\varkappa_m y - \phi_m) \quad \text{при } -a < y < a. \tag{1.8.21}$$

Сравнение (1.8.21) с (1.8.7) дает следующие соотношения:

$$A_{1m} = \frac{1}{2} E_m e^{i\phi_m} \quad \text{и} \quad B_{1m} = \frac{1}{2} E_m e^{-i\phi_m}, \tag{1.8.22}$$

которые позволяют получить из (1.8.19) окончательную формулу для нормы направляемой TE$_m$-моды, выраженной через амплитуду E_m стоячей волны:

$$N_m = w \frac{\beta_m d_m}{\omega\mu_0} E_m^2. \tag{1.8.23}$$

Как определено в дальнейшем формулой (2.2.10), норма N_m активной моды дает нормировочную мощность P_m° (в форме собственной мощности, переносимой модой с единичной амплитудой возбуждения):

$$P_m^\circ \equiv \frac{1}{4} N_m = w \frac{\beta_m d_m}{4\omega\mu_0} E_m^2 = \frac{w d_m}{4} \frac{\omega\mu_0}{\beta_m} H_m^2 = \frac{w d_m}{4} E_m H_m. \tag{1.8.24}$$

Здесь введено поперечное магнитное поле TE$_m$-моды в форме стоячей волны,

$$\widehat{H}_{y1,m}(y) = H_m \cos(\varkappa_m y - \phi_m), \tag{1.8.25}$$

с максимумом $H_m = (\beta_m/\omega\mu_0)E_m$, полученным из формул (1.7.6) и (1.8.21).

1.8.2. Нормировка направляемых мод ТМ-типа. Компоненты E_y, E_z и H_x полей ТМ-типа в волноведущем слое ($i = 1$), верхней среде ($i = 0$) и подложке ($i = 2$) описываются уравнениями (1.7.30)–(1.7.32). С учетом обозначений (1.8.3)–(1.8.6), выражения (1.7.32) для магнитного поля m-й моды в каждом слое структуры принимают следующий вид:

$$\widehat{H}_{xi,m}(y) = \begin{cases} A_{0m} e^{-\zeta_{0m}(y-a)} & (i=0) \quad \text{при} \quad y > a, \\ A_{1m} e^{-i\varkappa_m y} + B_{1m} e^{i\varkappa_m y} & (i=1) \quad \text{при} \ -a < y < a, \\ B_{2m} e^{\zeta_{2m}(y+a)} & (i=2) \quad \text{при} \quad y < -a. \end{cases} \tag{1.8.26}$$

Выражение (1.8.2) *для нормы ТМ-моды с поперечными компонентами полей* $\widehat{E}_{y,m}(y)$ и $\widehat{H}_{x,m}(y)$ записывается в виде

$$N_m = -2\mathrm{Re}\ w \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{E}^*_{y,m}(y) \widehat{H}_{x,m}(y)\, dy. \tag{1.8.27}$$

Как и выражение (1.8.9), норма (1.8.27) состоит из вкладов трех слоев, которые вычисляются аналогично (1.8.10)–(1.8.15), с использованием формул (1.7.30) и (1.8.26):

$$N_m^{(0)} = \frac{2\beta_m w}{\omega\varepsilon_0} \int\limits_a^{\infty} \left|\widehat{H}_{x0,m}(y)\right|^2 dy = \frac{w}{\omega\varepsilon_0} \frac{\beta_m}{\zeta_{0m}} |A_{0m}|^2, \tag{1.8.28}$$

$$N_m^{(1)} = \frac{2\beta_m w}{\omega\varepsilon_1} \int\limits_{-a}^{a} \left|\widehat{H}_{x1,m}(y)\right|^2 dy =$$

$$= \frac{4w}{\omega\varepsilon_1} \frac{\beta_m}{\varkappa_m} \left[\mathrm{Re}\,(A^*_{1m} B_{1m}) \sin 2\varkappa a + \left(|A_{1m}|^2 + |B_{1m}|^2\right) \varkappa a\right], \tag{1.8.29}$$

$$N_m^{(2)} = \frac{2\beta_m w}{\omega\varepsilon_2} \int\limits_{-\infty}^{-a} \left|\widehat{H}_{x2,m}(y)\right|^2 dy = \frac{w}{\omega\varepsilon_2} \frac{\beta_m}{\zeta_{2m}} |B_{2m}|^2. \tag{1.8.30}$$

Выполняя преобразования, подобные ранее сделанным над формулами (1.8.13)–(1.8.15), и подставляя результаты в равенство (1.8.9), получаем следующее выражение (ср. уравнение (1.8.16)):

$$N_m = \frac{\beta_m w}{\omega\varepsilon_1}\,\frac{\varkappa_m^2+\zeta_{0m}^2(\varepsilon_{r1}/\varepsilon_{r0})^2}{\varkappa_m^2}\left(2a+\frac{1}{\zeta_{0m}q_{0m}}+\frac{1}{\zeta_{2m}q_{2m}}\right)|A_{0m}|^2 =$$

$$= \frac{\beta_m w}{\omega\varepsilon_1}\,\frac{\varkappa_m^2+\zeta_{2m}^2(\varepsilon_{r1}/\varepsilon_{r2})^2}{\varkappa_m^2}\left(2a+\frac{1}{\zeta_{0m}q_{0m}}+\frac{1}{\zeta_{2m}q_{2m}}\right)|B_{2m}|^2. \quad (1.8.31)$$

Следуя Когельнику [22], мы использовали в формуле (1.8.31) так называемые *коэффициенты приведения*:

- для верхней среды

$$q_{0m} = \frac{\beta_m^2}{k_1^2}+\frac{\beta_m^2}{k_0^2}-1 \equiv \frac{\beta_m^2}{k_{10}^2}-1, \quad (1.8.32)$$

- для подложки

$$q_{2m} = \frac{\beta_m^2}{k_1^2}+\frac{\beta_m^2}{k_2^2}-1 \equiv \frac{\beta_m^2}{k_{12}^2}-1, \quad (1.8.33)$$

при этом

$$k_{1i}^2 = k_1^2\frac{\varepsilon_{ri}}{\varepsilon_{r1}+\varepsilon_{ri}} = k_{\text{в}}^2\,\frac{\varepsilon_{r1}\varepsilon_{ri}}{\varepsilon_{r1}+\varepsilon_{ri}}, \qquad i = 0,\ 2.$$

Формулы (1.7.10) и (1.7.11), с использованием замены (1.7.34) при $k_{y0}^{\varepsilon} = k_{y0,m}(\varepsilon_{r1}/\varepsilon_{r0}) = -i\zeta_{0m}(\varepsilon_{r1}/\varepsilon_{r0})$ и $k_{y2}^{\varepsilon} = k_{y2,m}(\varepsilon_{r1}/\varepsilon_{r2}) = -i\zeta_{2m}(\varepsilon_{r1}/\varepsilon_{r2})$, приводят к следующим соотношениям:

$$A_{0m} = A_{1m}\,\frac{2\varkappa_m}{\varkappa_m - i\zeta_{0m}(\varepsilon_{r1}/\varepsilon_{r0})}\,\mathrm{e}^{-i\varkappa_m a}, \quad (1.8.34)$$

$$B_{2m} = B_{1m}\,\frac{2\varkappa_m}{\varkappa_m - i\zeta_{2m}(\varepsilon_{r1}/\varepsilon_{r2})}\,\mathrm{e}^{-i\varkappa_m a}, \quad (1.8.35)$$

которые позволяют выразить норму (1.8.31) через амплитудные множители A_{1m} и B_{1m} для волноведущего слоя (ср. уравнение (1.8.19)):

$$N_m = 4w\frac{\beta_m d_m}{\omega\varepsilon_1}\,|A_{1m}|^2 = 4w\frac{\beta_m d_m}{\omega\varepsilon_1}\,|B_{1m}|^2. \quad (1.8.36)$$

Здесь введена *эффективная толщина* планарного волновода для TM_m-моды [17–19, 22], равная (ср. уравнение (1.8.20)):

$$d_m = 2a+\frac{1}{\zeta_{0m}q_{0m}}+\frac{1}{\zeta_{2m}q_{2m}}\,. \quad (1.8.37)$$

По аналогии с (1.8.21), представление магнитного поля в волноведущем слое в форме стоячей волны,

$$\widehat{H}_{x1,m}(y) = H_m\cos(\varkappa_m y - \phi_m) \qquad \text{при } -a < y < a, \quad (1.8.38)$$

приводит норму (1.8.36) к окончательному виду, включающему амплитуду H_m этой волны (ср. уравнение (1.8.23)):

$$N_m = w\,\frac{\beta_m d_m}{\omega\varepsilon_1}\,H_m^2. \qquad (1.8.39)$$

Нормировочная мощность P_m° выражается через норму (1.8.39), аналогично выражению (1.8.24),

$$P_m^\circ \equiv \frac{1}{4}\,N_m = w\,\frac{\beta_m d_m}{4\omega\varepsilon_1}\,H_m^2 = \frac{wd_m}{4}\frac{\omega\varepsilon_1}{\beta_m}\,E_m^2 = \frac{wd_m}{4}\,E_m H_m. \qquad (1.8.40)$$

Здесь введено поперечное электрическое поле TM_m-моды в форме стоячей волны,

$$\widehat{E}_{y1,m}(y) = E_m\cos(\varkappa_m y - \phi_m), \qquad (1.8.41)$$

с максимумом $E_m = (\beta_m/\omega\varepsilon_1)H_m$, полученным из формул (1.7.30) и (1.8.38).

Эффективная толщина планарного волновода для TM_m-моды, определяемая в виде (1.8.37), отличается от аналогичного выражения (1.8.20) для TE_m-моды наличием коэффициентов приведения q_{0m} и q_{2m}, введенных формулами (1.8.32) и (1.8.33). Как видно из рис. 1.10, с увеличением частоты в полосе пропускания направляемой моды ее фазовая постоянная β_m монотонно возрастает в интервале значений

$$k_2 \equiv \beta_m^{min} \leqslant \beta_m \leqslant \beta_m^{max} \equiv k_1. \qquad (1.8.42)$$

Из неравенств (1.8.42) следует, что коэффициенты приведения также монотонно возрастают от минимальных значений q_{0m}^{min} и q_{2m}^{min} до максимальных q_{0m}^{max} и q_{2m}^{max}, равных

$$q_{0m}^{min} = \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r0}} + \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} - 1, \qquad q_{0m}^{max} = \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r0}} > 1, \qquad (1.8.43)$$

$$q_{2m}^{min} = \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} < 1, \qquad q_{2m}^{max} = \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} > 1. \qquad (1.8.44)$$

Симметричные волноводы (при $\varepsilon_{r0} = \varepsilon_{r2} < \varepsilon_{r1}$) имеют единый коэффициент приведения $q_{2m} \equiv q_{0m}$, который изменяется в пределах (1.8.44) и принимает значение $q_{2m} = 1$, когда $\beta_m = k_2\sqrt{2\varepsilon_{r1}/(\varepsilon_{r1}+\varepsilon_{r2})}$. В этой точке вклады от внешних сред в эффективную толщину d_m, даваемую выражениями (1.8.20) и (1.8.37), становятся одинаковыми для ТЕ- и ТМ-мод. На частотах выше и ниже этой точки значения d_m для ТМ-моды, соответственно, меньше и больше, чем для ТЕ-моды (при условии, что поперечные волновые числа ζ_{2m} одинаковы для обеих мод).

Сильно асимметричные волноводы со слабой направленностью (при $\varepsilon_{r0} \ll \varepsilon_{r2} = \varepsilon_{r1} - \Delta\varepsilon/\varepsilon_0$ и $\Delta\varepsilon/\varepsilon_0 \ll \varepsilon_{r1}$) имеют практически постоянные коэффициенты приведения, которые, как следует из (1.8.43) и (1.8.44), равны

$$q_{0m} \simeq \varepsilon_{r1}/\varepsilon_{r0} \gg 1 \quad \text{и} \quad q_{2m} \simeq 1. \qquad (1.8.45)$$

Следовательно, вклад в эффективную толщину от верхней среды пренебрежимо мал в силу $q_{0m} \gg 1$. Тогда выражение (1.8.37) для d_m может быть записано в приближенной форме:

$$d_m \simeq 2a + \frac{1}{\zeta_{2m}}. \tag{1.8.46}$$

Это выражение справедливо не только для ТМ-мод, но и для ТЕ-мод, поскольку в случае сильной асимметрии поля практически не проникают в верхнюю среду из-за ее малой диэлектрической проницаемости ($\varepsilon_{r0} \ll \varepsilon_{r2}$), так что, согласно (1.7.21), $\zeta_{0m} \gg \zeta_{2m}$. В этом случае выражение (1.8.20) для ТЕ-мод принимает форму, совпадающую с выражением (1.8.46), полученным для мод ТМ-типа.

На частотах, достаточно удаленных от критической частоты m-й моды, когда $\beta_m \simeq k_1$ и $V \equiv \omega a\sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\mu_0} \gg 1$, поперечные волновые числа для внешних сред равняются

$$\begin{aligned} \zeta_{0m} &\equiv \sqrt{\beta_m^2 - k_0^2} = \omega\sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\mu_0} \approx \frac{V}{a} \gg \frac{1}{a}, \\ \zeta_{2m} &\equiv \sqrt{\beta_m^2 - k_2^2} = \omega\sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\mu_0} = \frac{V}{a} \gg \frac{1}{a}. \end{aligned} \tag{1.8.47}$$

Если неравенства в (1.8.47) имеют место, то формулы (1.8.20) и (1.8.37) дают приближенное значение эффективной толщины, общее для ТЕ-мод и ТМ-мод:

$$d_m \approx 2a. \tag{1.8.48}$$

Моды, для которых справедливо выражение (1.8.48), принято называть *сильно ограниченными*, так как их поля практически полностью локализованы внутри волноведущего слоя ($-a < y < a$).

Как видно из выражений (1.8.23) и (1.8.39) для нормы моды, максимальные поля E_m и H_m в поперечной стоячей волне (1.8.21) и (1.8.38) играют роль *нормировочной амплитуды*, поскольку они однозначно определяют норму направляемой m-й моды ТЕ- и ТМ-типов. Это обеспечивает две альтернативные возможности для нормировки полей дискретных активных мод (см. п. 2.4.1).

- **Нормировка на единичную мощность** m-й моды:

$$P_m^\circ = 1\ \text{Вт} \quad \text{или} \quad N_m = 4\ \text{Вт}, \tag{1.8.49}$$

которая с учетом (1.8.24) и (1.8.40) определяет *нормировочные амплитуды*,

$$E_m = 2\sqrt{\frac{\omega\mu_0}{\beta_m d_m w}}\ (\text{В/м}) \quad \text{или} \quad H_m = 2\sqrt{\frac{\beta_m}{\omega\mu_0 d_m w}}\ (\text{А/м}) \quad \text{— ТЕ-мода,} \tag{1.8.50}$$

$$H_m = 2\sqrt{\frac{\omega\varepsilon_1}{\beta_m d_m w}}\ (\text{А/м}) \quad \text{или} \quad E_m = 2\sqrt{\frac{\beta_m}{\omega\varepsilon_1 d_m w}}\ (\text{В/м}) \quad \text{— ТМ-мода,} \tag{1.8.51}$$

и обеспечивает для m-й моды с амплитудой возбуждения $A_m(z)$ представление ее *собственной мощности* (2.2.10) в форме (2.4.13), наиболее принятой для активных мод (ср. уравнение (10)):

$$P_m(z) = \pm |A_m(z)|^2. \tag{1.8.52}$$

• **Нормировка на единичную амплитуду** m-й моды:

$$E_m = 1 \ \text{В/м} \qquad \text{— ТЕ-мода,} \tag{1.8.53}$$

$$H_m = 1 \ \text{А/м} \qquad \text{— ТМ-мода,} \tag{1.8.54}$$

которая с учетом (1.8.23)–(1.8.24) и (1.8.39)–(1.8.40) определяет *норму* N_m и *нормировочную мощность* P_m° в следующем виде:

$$N_m = w\,\frac{\beta_m d_m}{\omega\mu_0}\ (\text{Вт}) \quad \text{или} \quad P_m^\circ = w\,\frac{\beta_m d_m}{4\omega\mu_0}\ (\text{Вт}) \qquad \text{— ТЕ-мода,} \tag{1.8.55}$$

$$N_m = w\,\frac{\beta_m d_m}{\omega\varepsilon_1}\ (\text{Вт}) \quad \text{или} \quad P_m^\circ = w\,\frac{\beta_m d_m}{4\omega\varepsilon_1}\ (\text{Вт}) \qquad \text{— ТМ-мода,} \tag{1.8.56}$$

и обеспечивает для m-й моды с амплитудой возбуждения $A_m(z)$ представление ее *собственной мощности* (2.2.10) в форме (2.4.13) (ср. уравнение (10)):

$$P_m(z) = \frac{1}{4} N_m |A_m(z)|^2 \equiv P_m^\circ |A_m(z)|^2. \tag{1.8.57}$$

1.9. Нормировка излучательных мод в планарных диэлектрических волноводах

Как было показано в п. 1.3, полное поле излучения представляется в форме интеграла Фурье (1.4.1) по поперечному волновому числу внешней изотропной среды (k_y-представление). В случае трехслойной диэлектрической среды (рис. 1.8) поперечное волновое число подложки k_{y2} следует выбирать в качестве переменной интегрирования для интегралов Фурье. Действительно, волновое число k_{y2} всегда принимает вещественные значения, в отличие от волнового числа k_{y0} верхней среды, которое является вещественным для *излучательных мод структуры*, но становится, в силу (1.6.5), мнимым для *излучательных мод подложки*. Следовательно, волновое число подложки k_{y2} является общей независимой переменной для всех излучательных мод.

Для упрощения записи последующих выражений удобно ввести следующие обозначения:

$$k_{y0} = \begin{cases} -i\zeta_0 & \text{— для излучательных мод подложки,} \\ \varkappa_0 & \text{— для излучательных мод структуры,} \end{cases} \tag{1.9.1}$$

$$k_{y1} = \varkappa_1, \tag{1.9.2}$$

$$k_{y2} = \varkappa_2, \tag{1.9.3}$$

где $\zeta_0 > 0$ и $\varkappa_i > 0$ $(i = 0, 1, 2)$.

Полное поле излучения должно включать интегралы Фурье с переменной интегрирования $\varkappa_2$, которые соответствуют независимым вкладам как от четных и нечетных излучательных мод структуры, так и от излучательных мод подложки (последние существуют только в асимметричных структурах с $\varepsilon_{r0} \neq \varepsilon_{r2}$). Более того, каждый из этих интегралов содержит независимые вклады ТЕ- и ТМ-решений. Согласно рис. 1.10, секторы 1 и 2 для излучательных мод структуры (четных и нечетных) и для излучательных мод подложки отличаются между собой разрешенными значениями продольного волнового числа k_z, а значит и соответствующими значениями $\varkappa_2$.

Таким образом, излучательные моды структуры являются четырехкратно вырожденными (в виде четных и нечетных мод ТЕ- и ТМ-поляризаций), а излучательные моды подложки, имеющие лишь ТЕ- и ТМ-поляризации, — двухкратно вырожденными. При анализе непрерывного спектра открытых диэлектрических волноводов необходимо рассматривать следующие шесть независимых решений:

- два — для *излучательных мод подложки* ТЕ- и ТМ-типов,
- четыре — для *излучательных мод структуры* ТЕ- и ТМ-типов с четными (симметричными) и нечетными (антисимметричными) конфигурациями.

Каждое из этих решений независимо от других удовлетворяет уравнениям Максвелла и соответствующим граничным условиям на границах раздела сред планарной структуры.

Как было показано в п. 1.4, поле излучения в дальней зоне не включает вклад реактивных (исчезающих) излучательных мод с мнимыми значениями k_z. Поэтому их можно исключить из рассмотрения, если интересоваться только пространственной волной. Вклад реактивных (исчезающих) мод непрерывного спектра при необходимости может быть учтен, если принять во внимание несобственные дискретные решения дисперсионного уравнения, соответствующие вытекающим модам (см. п. 1.5.2).

Пренебрежение исчезающими модами непрерывного спектра позволяет записать несобственный интеграл Фурье (1.4.1) в приближенной форме (1.4.10) с конечными пределами интегрирования вдоль вещественной оси $\mathrm{Re}\, k_{y2}$, равными $-k_2$ и k_2. Такая процедура приводит к существенному упрощению при выводе соотношений между амплитудами поперечного распределения полей. Это вызвано тем фактом, что в данном случае амплитуды, как и волновые числа k_z и k_{y2}, оказываются вещественными. Вещественность собственных функций для полей, свойственная распространяющимся излучательным модам, используется ниже при вычислении нормы этих мод.

Соотношение ортонормировки для *излучательных мод* непрерывного спектра записывается по аналогии с соотношением (1.8.1) для дискретных мод путем естественной замены символа Кронекера δ_{mn}, характерного для счетной последовательности, на δ-функцию Дирака, выполняющую аналогичную роль для континуума. Как следствие этого, операция суммирования по дискретному спектру заменяется интегрированием по непрерывному спектру. Отличие между символом Кронекера и функцией Дирака, в дополнение к разному характеру их поведения, состоит также в том, что первый —

безразмерен, а функция Дирака всегда имеет размерность, обратную по отношению к размерности независимой переменной.

На фиксированной частоте ω волновые числа (продольное и поперечные) в спектре направляемых мод изменяются дискретно. Поэтому собственные поля m-й моды, записанные в форме (1), отмечены нижним индексом m, принимающим дискретные значения. В отличие от этого, аналогичные поля излучательной моды, принадлежащей к непрерывному спектру, не имеют такого индекса. Они характеризуются волновыми числами (продольным и поперечными), непрерывно изменяющимися в определенном диапазоне, которые принято писать в скобках в качестве аргумента функции (выполняющего ту же роль, что и индекс у дискретных мод).

Как отмечалось, для фурье-представления полей излучения информативными являются поперечные волновые числа той среды (предположительно изотропной), которая простирается вплоть до поперечной бесконечности, где и вычисляется поле излучения. Пусть внешняя полубесконечная среда характеризуется поперечным волновым вектором $\mathbf{k}_t^{\text{o}} = \mathbf{e}_x k_x^{\text{o}} + \mathbf{e}_y k_y^{\text{o}}$. В этом случае продольное волновое число для излучательных мод становится функцией, $k_z(k_x^{\text{o}}, k_y^{\text{o}})$, поперечных волновых чисел k_x^{o} и k_y^{o}, которые принимают непрерывные значения, лежащие вдоль вещественных осей от $-\infty$ до ∞. Следовательно, собственные поля излучательной моды записываются в виде (ср. уравнения (1) и (2.3.5) для дискретных мод)

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}_t, z; k_x^{\text{o}}, k_y^{\text{o}}) &= \widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_t; k_x^{\text{o}}, k_y^{\text{o}})\, e^{-ik_z(k_x^{\text{o}}, k_y^{\text{o}})z},\\ \mathbf{H}(\mathbf{r}_t, z; k_x^{\text{o}}, k_y^{\text{o}}) &= \widehat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}_t; k_x^{\text{o}}, k_y^{\text{o}})\, e^{-ik_z(k_x^{\text{o}}, k_y^{\text{o}})z}.\end{aligned} \tag{1.9.4}$$

Вышесказанное позволяет обобщить запись соотношения ортонормировки (1.8.1) для дискретных мод на случай излучательных мод непрерывного спектра следующим образом:

$$\begin{aligned}N(k_x^{\text{o}}, k_y^{\text{o}};\, k_x^{\text{o}\prime}, k_y^{\text{o}\prime}) \equiv \int\limits_S \Big[&\widehat{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r}_t; k_x^{\text{o}}, k_y^{\text{o}}) \times \widehat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}_t; k_x^{\text{o}\prime}, k_y^{\text{o}\prime}) +\\ &+ \widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_t; k_x^{\text{o}\prime}, k_y^{\text{o}\prime}) \times \widehat{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r}_t; k_x^{\text{o}}, k_y^{\text{o}})\Big] \cdot \mathbf{e}_z\, dS =\\ &= \overline{\overline{N}}(k_x^{\text{o}}, k_y^{\text{o}})\, \delta(k_x^{\text{o}} - k_x^{\text{o}\prime})\, \delta(k_y^{\text{o}} - k_y^{\text{o}\prime}).\end{aligned} \tag{1.9.5}$$

Здесь величины $k_x^{\text{o}}, k_y^{\text{o}}$ и $k_x^{\text{o}\prime}, k_y^{\text{o}\prime}$, записанные как аргументы соответствующих функций, эквивалентны индексам m и n, а дельта-функции Дирака $\delta(k_x^{\text{o}} - k_x^{\text{o}\prime})$ и $\delta(k_y^{\text{o}} - k_y^{\text{o}\prime})$ заменяют символ Кронекера δ_{mn} в соотношении (1.8.1). Величину $\overline{\overline{N}}$, стоящую множителем при δ-функциях, принято интерпретировать как *норму излучательной моды*.

Для *канальных волноводов*, представляющих собой открытые структуры с *двумерным* безграничным сечением $S \to \infty$ (когда $k_x \neq 0$ и $k_y \neq 0$), норма $\overline{\overline{N}}(k_x^{\text{o}}, k_y^{\text{o}})$ излучательной моды является функцией *двух* независимых переменных k_x^{o} и k_y^{o}, что отмечено двумя чертами сверху. Соотношение ортонормировки (1.9.5) справедливо именно для общего случая открытых канальных волноводов.

Для *планарных волноводов* достаточно большой ширины w в направлении оси x (когда $k_x = 0$, а $k_y \neq 0$) исчезает зависимость от координаты x, так что в формуле (1.9.5) элемент площади равен $dS = w dy$. Тогда норма $\overline{N}(k_y^{\text{o}})$ излучательной моды становится функцией *одной* независимой переменной k_y^{o}, что и отмечается одной чертой сверху. В этом случае, как было обосновано выше, роль k_y^{o} выполняет поперечное волновое число подложки $k_{y2} \equiv \varkappa_2$. Тогда *соотношение ортонормировки* для излучательного спектра в общей форме (1.9.5) принимает следующий частный вид (см. уравнение (2.12.14)):

$$N(\varkappa_2, \varkappa_2') \equiv w \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\widehat{\mathbf{E}}^*(y;\varkappa_2) \times \widehat{\mathbf{H}}(y;\varkappa_2') + \widehat{\mathbf{E}}(y;\varkappa_2') \times \widehat{\mathbf{H}}^*(y;\varkappa_2)\right] \cdot \mathbf{e}_z \, dy =$$

$$= \overline{N}(\varkappa_2)\,\delta(\varkappa_2 - \varkappa_2'). \tag{1.9.6}$$

Интегралы, стоящие в левой части соотношений (1.9.5) и (1.9.6), имеют размерность мощности (Вт). Как отмечалось выше, размерность дельта-функции всегда обратна размерности ее аргумента, т. е. в данном случае каждая δ-функция имеет размерность длины (м), обратную размерности волнового числа $k_y^{\text{o}} \equiv k_{y2} \equiv \varkappa_2$. По этой причине нормы $\overline{N}$ и $\overline{\overline{N}}$ излучательных мод непрерывного спектра в планарных и канальных волноводах измеряются в Вт/м и Вт/м^2, соответственно. Это отличает их от нормы N_m направляемой моды дискретного спектра с размерностью мощности (Вт), что следует из соотношения ортонормировки (1.8.1). Подобное отличие существует и между другими модальными характеристиками (отмеченными отсутствием или наличием одной и двух черточек сверху), такими как амплитуды возбуждения мод (типа $\overline{A}$ и $\overline{\overline{A}}$ для излучательных мод и A_m для направляемых мод) и коэффициенты связи между модами (типа c_{mn} и т. п.), используемые ниже.

Размерности модальных характеристик для дискретных направляемых мод и излучательных мод непрерывного спектра в планарных и канальных структурах представлены в табл. 1.1. Размерность каждой величины обозначена квадратными скобками, содержащими эту величину; например, $[N_m]$ означает размерность нормы m-й направляемой моды. Символ $\varkappa$ использован для обозначения поперечного волнового числа излучательных мод, так что $(\varkappa) \equiv \equiv (k_y^{\text{o}}) \equiv (\varkappa_2)$ для планарных волноводов и $(\varkappa) \equiv (k_x^{\text{o}}, k_y^{\text{o}})$ для канальных волноводов. Как видно из табл. 1.1, модальные нормы N_m, $\overline{N}(\varkappa)$ и $\overline{\overline{N}}(\varkappa)$ имеют размерности Вт, Вт/м Вт/м^2, а размерности амплитуд возбуждения A_m, $\overline{A}(\varkappa)$ и $\overline{\overline{A}}(\varkappa)$ равняются, соответственно, 1 (безразмерная), м и м^2.

Интеграл $N(\varkappa_2, \varkappa_2')$, стоящий в левой части соотношения (1.9.6), является сингулярным, так как он обращается в бесконечность вместе с дельта-функцией $\delta(\varkappa_2 - \varkappa_2')$ при $\varkappa_2 = \varkappa_2'$ (для одной и той же излучательной моды) и исчезает, когда $\varkappa_2 \neq \varkappa_2'$ (для разных излучательных мод). Однако при этом множитель $\overline{N}(\varkappa_2)$ при δ-функции, выполняющий роль *нормы излучательной моды*, остается конечным по величине.

Таблица 1.1. Размерность модальных характеристик

Модальные характеристики	Направляемые моды	Излучательные моды	
		планарные стр-ры	канальные стр-ры
Норма моды	$[N_m] = \text{Вт}$	$[\overline{N}(\varkappa)] = \text{Вт/м}$	$[\overline{\overline{N}}(\varkappa)] = \text{Вт/м}^2$
Амплитуда возбуждения	$[A_m] = 1$	$[\overline{A}(\varkappa)] = \text{м}$	$[\overline{\overline{A}}(\varkappa)] = \text{м}^2$
Коэффициенты связи	$\begin{cases} [c_{mn}] = \text{м}^{-1} \\ [c_m(\varkappa')] = \text{м}^{-1} \end{cases}$	$\begin{cases} [\overline{c}_n(\varkappa)] = 1 \\ [\overline{c}(\varkappa, \varkappa')] = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} [\overline{\overline{c}}_n(\varkappa)] = \text{м} \\ [\overline{\overline{c}}(\varkappa, \varkappa')] = \text{м} \end{cases}$

Основной задачей последующего анализа является приведение интеграла $N(\varkappa_2, \varkappa_2')$ к явной сингулярной форме. Тогда множитель, стоящий при дельта-функции $\delta(\varkappa_2 - \varkappa_2')$ в правой части соотношения (1.9.6), даст искомую норму $\overline{N}(\varkappa_2)$ для излучательной моды непрерывного спектра.

Представленный ниже анализ мод непрерывного спектра проводится в таком порядке: сначала рассматриваются излучательные моды подложки ТЕ-типа, затем четные и нечетные излучательные моды структуры ТЕ-типа, и наконец полученные результаты обобщаются на излучательные моды подложки и структуры ТМ-типа.

1.9.1. Нормировка излучательных мод ТЕ-типа. Как уже отмечалось в п. 1.6, моды непрерывного спектра планарных диэлектрических структур подразделяются на моды подложки, излучаемые только в подложку, и моды структуры, которые излучаются в обе стороны от волноведущего слоя. Ниже будем рассматривать их по отдельности.

Излучательные моды подложки могут существовать только в асимметричных волноводах, когда $\varepsilon_{r0} \neq \varepsilon_{r2}$. Анализ планарной структуры, изображенной на рис. 1.8, показал, что распределение полей для таких мод имеет поверхностный характер в подложке (при $y > a$) и осциллирующий характер как в подложке (при $y < -a$), так и в волноведущем слое (при $-a < y < a$). Это позволяет представить искомое электрическое $\widehat{E}_{xi}(y)$ в трех слоях структуры ($i = 0, 1, 2$) в форме, аналогичной (1.7.8):

$$\widehat{E}_{xi}(y) = \begin{cases} A_0 e^{-ik_{y0}(y-a)} & (i=0) \quad \text{при} \quad y > a, \\ A_1 e^{-ik_{y1}y} + B_1 e^{ik_{y1}y} & (i=1) \quad \text{при} \; -a < y < a, \\ A_2 e^{-ik_{y2}(y+a)} + B_2 e^{ik_{y2}(y+a)} & (i=2) \quad \text{при} \quad y < -a. \end{cases} \tag{1.9.7}$$

В отличие от полей (1.7.8) для направляемых мод, выражение (1.9.7) учитывает в подложке вторую волну с амплитудой A_2 для того, чтобы обеспечить осциллирующий характер полей по аналогии с тем, что всегда имеет место в волноведущем слое.

Для последующего анализа вместо полей $\widehat{E}_{x1}(y)$ и $\widehat{E}_{x2}(y)$ в форме двух противоположно распространяющихся волн с амплитудами A_1, B_1 и A_2, B_2 удобно ввести в рассмотрение стоячие волны, аналогичные по форме (1.8.21), с максимальными полями E_1 и E_2. Используя обозначения (1.9.1)–(1.9.3), перепишем выражения (1.9.7) в требуемом виде:

$$\widehat{E}_{xi}(y) = \begin{cases} E_0 e^{-\zeta_0(y-a)} & (i=0) \quad \text{при} \quad y > a, \\ E_1 \cos(\varkappa_1 y - \phi_1) & (i=1) \quad \text{при} \quad -a < y < a, \\ E_2 \cos\left[\varkappa_2(y+a) - \phi_2\right] & (i=2) \quad \text{при} \quad y < -a. \end{cases} \tag{1.9.8}$$

Амплитуды A_1, B_1 и A_2, B_2 связаны с характеристиками стоячих волн E_1, ϕ_1 и E_2, ϕ_2 формулами, аналогичными (1.8.22), в то время как $E_0 = A_0$.

Поперечные распределения компонент магнитного поля $\widehat{H}_{yi}(y)$ и $\widehat{H}_{zi}(y)$ получаются из выражений (1.9.8) при использовании (1.7.6) и (1.7.7). Тогда граничные условия, требующие непрерывности касательных компонент $\widehat{E}_{xi}(y)$ и $\widehat{H}_{zi}(y)$ при $y = \pm a$, приводят к следующим равенствам:

$$E_1 \cos(\varkappa_1 a - \phi_1) = E_0, \tag{1.9.9}$$

$$E_1 \cos(\varkappa_1 a + \phi_1) = E_2 \cos\phi_2, \tag{1.9.10}$$

$$E_1 \sin(\varkappa_1 a - \phi_1) = \frac{\zeta_0}{\varkappa_1} E_0, \tag{1.9.11}$$

$$E_1 \sin(\varkappa_1 a + \phi_1) = \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1} E_2 \sin\phi_2. \tag{1.9.12}$$

Система из четырех уравнений (1.9.9)–(1.9.12) содержит пять неизвестных — ϕ_1, ϕ_2 и E_i $(i=0,1,2)$, все из которых вещественные для активных излучательных мод. Фазовые углы ϕ_1 и ϕ_2 могут быть выражены через $\varkappa_1 a$ с помощью соотношений,

$$\operatorname{tg}(\varkappa_1 a - \phi_1) = \frac{\zeta_0}{\varkappa_1} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}(\varkappa_1 a + \phi_1) = \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\operatorname{tg}\phi_2, \tag{1.9.13}$$

получающихся из равенств (1.9.11) и (1.9.12) делением их, соответственно, на (1.9.9) и (1.9.10). С учетом (1.9.13), уравнения (1.9.9)–(1.9.12) превращаются в систему из двух уравнений с тремя неизвестными полями E_i $(i = 0, 1, 2)$. Любое из этих полей может быть выбрано в качестве нормировочной амплитуды при вычислении нормы излучательной моды подложки, так как все они связаны между собой соотношениями,

$$\frac{E_1^2}{E_0^2} = 1 + \frac{\zeta_0^2}{\varkappa_1^2}, \tag{1.9.14}$$

$$\frac{E_1^2}{E_2^2} = \cos^2\phi_2 + \frac{\varkappa_2^2}{\varkappa_1^2}\sin^2\phi_2, \tag{1.9.15}$$

вытекающими из уравнений (1.9.9)–(1.9.12) путем комбинирования их с предшествующим возведением в квадрат.

Следовательно, исходные уравнения (1.9.9)–(1.9.12) должны рассматриваться как неоднородная система, содержащая в правой части одно из полей

E_i $(i = 0, 1, 2)$, принятое за нормировочную амплитуду. Ненулевое решение такой системы существует, если ее определитель *отличен от нуля*.

Таким образом, излучательные моды *не имеют* дисперсионного уравнения (которое для дискретных мод всегда получается из обращения в нуль определителя системы уравнений). Это означает, что поперечные (а значит и продольное) волновые числа могут принимать любые вещественные значения из разрешенного интервала, что и образует непрерывный спектр открытой волноведущей структуры.

Будем вычислять норму излучательной моды подложки приведением интеграла $N(\varkappa_2, \varkappa_2')$ в соотношении ортонормировки (1.9.6) к сингулярной форме (с выделением δ-функции в явном виде). С учетом (1.7.6), это соотношение для мод ТЕ-типа может быть записано в форме

$$N(\varkappa_2, \varkappa_2') \equiv w \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big[\widehat{E}_x^*(y;\varkappa_2)\widehat{H}_y(y;\varkappa_2') + \widehat{E}_x(y;\varkappa_2')\widehat{H}_y^*(y;\varkappa_2)\Big] dy \equiv$$

$$\equiv \frac{2k_z w}{\omega\mu_0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{E}_x(y;\varkappa_2)\widehat{E}_x(y;\varkappa_2')\, dy = \overline{N}(\varkappa_2)\delta(\varkappa_2 - \varkappa_2'), \qquad (1.9.16)$$

где величины k_z и $\widehat{E}_x(y)$ приняты вещественными для активных (распространяющихся) излучательных мод в силу пренебрежения вкладом реактивных (исчезающих) мод.

Вычисление интеграла $N(\varkappa_2, \varkappa_2')$ в (1.9.16) сводится к интегрированию по толщине трех слоев $(i = 0, 1, 2)$ с полями $\widehat{E}_{xi}(y)$ в форме (1.9.8), так что

$$N(\varkappa_2, \varkappa_2') = N^{(0)}(\zeta_0, \zeta_0') + N^{(1)}(\varkappa_1, \varkappa_1') + N^{(2)}(\varkappa_2, \varkappa_2'), \qquad (1.9.17)$$

где переменные ζ_0 и $\varkappa_1$ связаны с $\varkappa_2$ равенствами

$$\zeta_0^2 = (k_2^2 - k_0^2) - \varkappa_2^2 \quad \text{и} \quad \varkappa_1^2 = (k_1^2 - k_2^2) + \varkappa_2^2. \qquad (1.9.18)$$

Слагаемые, входящие в (1.9.17), равняются

$$N^{(0)}(\zeta_0, \zeta_0') = \frac{2k_z w}{\omega\mu_0} \int\limits_{a}^{\infty} \widehat{E}_{x0}(y;\zeta_0)\widehat{E}_{x0}(y;\zeta_0')\, dy =$$
$$= \frac{2k_z w}{\omega\mu_0} E_0 E_0' \int\limits_{a}^{\infty} e^{-(\zeta_0+\zeta_0')(y-a)} dy = \frac{2k_z w}{\omega\mu_0} \frac{E_0 E_0'}{\zeta_0 + \zeta_0'}, \qquad (1.9.19)$$

$$N^{(1)}(\varkappa_1, \varkappa_1') = \frac{2k_z w}{\omega\mu_0} \int\limits_{-a}^{a} \widehat{E}_{x1}(y;\varkappa_1)\widehat{E}_{x1}(y;\varkappa_1')\, dy =$$
$$= \frac{2k_z w}{\omega\mu_0} E_1 E_1' \int\limits_{-a}^{a} \cos(\varkappa_1 y - \phi_1)\cos(\varkappa_1' y - \phi_1')\, dy, \qquad (1.9.20)$$

$$N^{(2)}(\varkappa_2, \varkappa_2') = \frac{2k_z w}{\omega\mu_0} \int\limits_{-\infty}^{-a} \widehat{E}_{x2}(y; \varkappa_2)\widehat{E}_{x2}(y; \varkappa_2')\, dy = \\ = \frac{2k_z w}{\omega\mu_0} E_2 E_2' \int\limits_{-\infty}^{-a} \cos\bigl[\varkappa_2(y+a) - \phi_2\bigr] \cos\bigl[\varkappa_2'(y+a) - \phi_2'\bigr]\, dy. \tag{1.9.21}$$

Легко видеть, что интегралы (1.9.19) и (1.9.20) не имеют особенностей при $\zeta_0 = \zeta_0'$ и $\varkappa_1 = \varkappa_1'$ и по этой причине не вносят вклада в сингулярное соотношение (1.9.16). Следовательно, остается лишь вычислить интеграл (1.9.21), который может быть представлен в виде

$$N^{(2)}(\varkappa_2, \varkappa_2') = \frac{2k_z w}{\omega\mu_0} E_2 E_2' \lim_{A\to\infty} N_A(\varkappa_2, \varkappa_2'), \tag{1.9.22}$$

где введено обозначение

$$N_A(\varkappa_2, \varkappa_2') \equiv \int\limits_{-A}^{-a} \cos\bigl[\varkappa_2(y+a) - \phi_2\bigr] \cos\bigl[\varkappa_2'(y+a) - \phi_2'\bigr]\, dy = \\ = \frac{\cos(\overline{\phi}_2 - \overline{\phi}_2')}{2} \left.\frac{\sin(\varkappa_2 - \varkappa_2')y}{(\varkappa_2 - \varkappa_2')}\right|_{y=-A}^{-a} + \\ + \frac{\cos(\overline{\phi}_2 + \overline{\phi}_2')}{2} \left.\frac{\sin(\varkappa_2 + \varkappa_2')y}{(\varkappa_2 + \varkappa_2')}\right|_{y=-A}^{-a} - \\ - \frac{\sin(\overline{\phi}_2 - \overline{\phi}_2')}{2} \left.\frac{\cos(\varkappa_2 - \varkappa_2')y}{(\varkappa_2 - \varkappa_2')}\right|_{y=-A}^{-a} - \\ - \frac{\sin(\overline{\phi}_2 + \overline{\phi}_2')}{2} \left.\frac{\cos(\varkappa_2 + \varkappa_2')y}{(\varkappa_2 + \varkappa_2')}\right|_{y=-A}^{-a}, \tag{1.9.23}$$

включающее

$$\overline{\phi}_2 = \pi_2 - \varkappa_2 a \quad \text{и} \quad \overline{\phi}_2' = \phi_2' - \varkappa_2' a. \tag{1.9.24}$$

Все четыре слагаемых в правой части (1.9.23) принимают конечные значения на верхнем пределе $y = -a$, поэтому надо исследовать их поведение на нижнем пределе $y = -A$ при $A \to \infty$. Для этого воспользуемся известным предельным соотношением для δ-функции [25],

$$\delta(x) = \lim_{A\to\infty} \frac{e^{iAx}}{i\pi x},$$

вещественная и мнимая части которого дают

$$\lim_{A\to\infty} \frac{\sin Ax}{x} = \pi\delta(x) \quad \text{и} \quad \lim_{A\to\infty} \frac{\cos Ax}{x} = 0.$$

Следовательно, два последних слагаемых в правой части выражения (1.9.23), содержащие $\cos(\varkappa_2 \mp \varkappa_2')y \,/\, (\varkappa_2 \mp \varkappa_2')$, исчезают на нижнем пределе $y = -A \to -\infty$. Тогда сингулярный вклад в (1.9.22) вносят лишь два первых слагаемых в (1.9.23), в которых $\sin(\varkappa_2 \mp \varkappa_2')y \,/\, (\varkappa_2 \mp \varkappa_2') \to \pi\delta(\varkappa_2 \mp \varkappa_2')$ при $y = A \to \infty$. На этом основании, с учетом ранее сказанного можем записать

$$N(\varkappa_2, \varkappa_2') = N^{(2)}(\varkappa_2, \varkappa_2') = \\ = \frac{\pi k_z w}{\omega\mu_0} E_2 E_2' \left[\cos(\overline{\phi}_2 - \overline{\phi}_2')\,\delta(\varkappa_2 - \varkappa_2') + \cos(\overline{\phi}_2 + \overline{\phi}_2')\,\delta(\varkappa_2 + \varkappa_2')\right]. \tag{1.9.25}$$

По определению $\varkappa_2 \equiv k_{y2} > 0$, поскольку выражение для поля $\widehat{E}_{x2}(y)$ в (1.9.7) при $y < -a$ содержит два слагаемых с противоположными знаками показателя экспоненты. Поэтому последнее слагаемое в квадратных скобках (1.9.25) следует опустить, так как функция $\delta(\varkappa_2 + \varkappa_2')$ после интегрирования дает вклад в точке $\varkappa_2' = -\varkappa_2 < 0$. В этом случае соотношение ортонормировки (1.9.25) принимает окончательный вид

$$N(\varkappa_2, \varkappa_2') = \frac{\pi k_z w}{\omega\mu_0} E_2^2\,\delta(\varkappa_2 - \varkappa_2'). \tag{1.9.26}$$

Сравнение (1.9.26) с общим соотношением ортонормировки (1.9.16) позволяет записать искомое выражение для нормы излучательных ТЕ-мод подложки в следующем виде:

$$\overline{N}(\varkappa_2) = w\,\frac{\pi k_z(\varkappa_2)}{\omega\mu_0}\,E_2^2, \tag{1.9.27}$$

где $k_z(\varkappa_2)$ — продольное число непрерывного спектра, рассматриваемое как функция волнового числа подложки $\varkappa_2 \equiv k_{y2}$, равная $k_z(\varkappa_2) = \sqrt{k_2^2 - \varkappa_2^2}$.

Выражение (1.9.27) показывает, что максимальное поле E_2 стоячей волны в подложке действительно удобно выбирать в качестве нормировочной амплитуды, хотя и другие поля E_0, E_1 тоже подходят для этой цели, поскольку все они связаны друг с другом соотношениями (1.9.14)–(1.9.15).

Излучательные моды структуры ТЕ-типа имеют осциллирующую картину полей во всех слоях ($i = 0, 1, 2$) исследуемой трехслойной структуры, показанной на рис. 1.8. Поэтому электрическое поле вместо (1.9.7) принимает следующий вид:

$$\widehat{E}_{xi}(y) = \begin{cases} A_0 e^{-ik_{y0}(y-a)} + B_0 e^{ik_{y0}(y-a)} & (i=0) \quad \text{при} \quad y > a, \\ A_1 e^{-ik_{y1}y} + B_1 e^{ik_{y1}y} & (i=1) \quad \text{при} \quad -a < y < a, \\ A_2 e^{-ik_{y2}(y+a)} + B_2 e^{ik_{y2}(y+a)} & (i=2) \quad \text{при} \quad y < -a. \end{cases} \tag{1.9.28}$$

Общее число неизвестных амплитудных множителей A_i и B_i в (1.9.28) равняется шести, что на два превышает число алгебраических уравнений, получаемых из граничных условий. Любой из этих множителей может быть выбран в качестве нормировочной амплитуды и, подобно (1.8.53), положен при необходимости равным единице. Для того, чтобы оставшиеся амплитудные множители можно было выразить через нормировочную амплитуду, их число должно в точности равняться числу граничных условий, которых в данном случае ровно четыре. Именно такое равенство имело место в предыдущем параграфе для излучательных мод подложки, описываемых пятью амплитудными множителями, входящими в (1.9.7), вместо шести множителей в формуле (1.9.28).

В рассматриваемом случае для излучательных мод структуры число неизвестных амплитудных множителей (равное пяти, не считая нормировочной амплитуды) на единицу превышает число граничных условий. По этой причине необходимо воспользоваться представлением поперечного распределения электрического поля $\widehat{E}_{x1}(y)$ внутри волноведущего слоя в виде суперпозиции четной (симметричной) и нечетной (антисимметричной) конфигураций.

Для симметричных диэлектрических структур (при $\varepsilon_{r0} = \varepsilon_{r2}$) симметрия полей осуществляется по отношению к средней плоскости $y = 0$ (рис. 1.8). В этом случае электрическое поле $\widehat{E}_{x1}(y)$ имеет два независимых распределения в форме (1.7.20) — симметричное (с амплитудой E_1^s) и антисимметричное (с амплитудой E_1^a).

Как было показано в п. 1.7.1, асимметрия структуры сдвигает плоскость симметрии полей на расстояние $y_1 = \phi_1/\varkappa_1$ от середины $y = 0$ по направлению к верхней среде, как имеющей наименьшую диэлектрическую проницаемость ($\varepsilon_{r0} < \varepsilon_{r2}$). По отношению к смещенному положению плоскости $y = y_1$ электрическое поле $\widehat{E}_{x1}(y)$ по-прежнему может быть представлено в двух формах: симметричной (уравнение (1.7.28)) и антисимметричной (уравнение (1.7.29)). Для дискретных направляемых мод эти два распределения не являются независимыми, так как они связаны друг с другом обычными граничными условиями, приводящими к единому дисперсионному уравнению.

В отличие от этого, для излучательных мод непрерывного спектра отсутствует дисперсионное уравнение, поэтому два распределения поля (1.7.28) и (1.7.29) могут рассматриваться как независимые конфигурации. Будем их называть, соответственно, симметричными и антисимметричными полями, поскольку они переходят в действительно симметричные и антисимметричные распределения (1.7.20) при снятии асимметрии структуры путем обеспечения равенств $\varepsilon_{r0} = \varepsilon_{r2}$ и $\phi_1 = 0$.

Как и для дискретных направляемых мод, удобно вместо выражения (1.9.28), описывающего искомое поле $\widehat{E}_{x1}(y)$ в виде двух противоположно бегущих волн в каждой среде с амплитудами A_0, B_0, A_1, B_1 и A_2, B_2, ввести в рассмотрение стоячие волны, аналогичные (1.7.28) и (1.7.29):

- для *четных* (симметричных) *излучательных мод структуры*

$$\widehat{E}_{xi}^s(y) = \begin{cases} E_0^s \cos\left[\varkappa_0(y-a) - \phi_0^s\right] & (i=0) \quad \text{при} \quad y > a, \\ E_1^s \cos(\varkappa_1 y - \phi_1) & (i=1) \quad \text{при} \ -a < y < a, \\ E_2^s \cos\left[\varkappa_2(y+a) - \phi_2^s\right] & (i=2) \quad \text{при} \quad y < -a; \end{cases} \tag{1.9.29}$$

- для *нечетных* (антисимметричных) *излучательных мод структуры*

$$\widehat{E}^a_{xi}(y) = \begin{cases} E^a_0 \sin\left[\varkappa_0(y-a) - \phi^a_0\right] & (i=0) \quad \text{при} \quad y > a, \\ E^a_1 \sin(\varkappa_1 y - \phi_1) & (i=1) \quad \text{при} \; -a < y < a, \\ E^a_2 \sin\left[\varkappa_2(y+a) - \phi^a_2\right] & (i=2) \quad \text{при} \quad y < -a. \end{cases} \tag{1.9.30}$$

Важным является тот факт, что фазовый угол ϕ_1 оказывается общим как для симметричной, так и для антисимметричной конфигурации полей, что было обосновано в п. 1.7.1. Этот угол находится из условия взаимной ортогональности четных и нечетных мод. Следовательно, для каждого решения (четного и нечетного) имеется пять неизвестных — ϕ_0, ϕ_2 и E_i $(i = 0, 1, 2)$ при четырех граничных условиях. Именно это позволяет выбрать любое поле E_i в качестве нормировочной амплитуды и связать его в дальнейшем с нормой излучательных мод.

Граничные условия, наложенные на касательные поля $\widehat{E}_{xi}(y)$ и $\widehat{H}_{zi}(y)$ при $y = \pm\, a$, приводят к следующим соотношениям:

четные ТЕ-моды	**нечетные ТЕ-моды**
$E^s_1 \cos(\varkappa_1 a - \phi_1) = E^s_0 \cos\phi^s_0$	$E^a_1 \sin(\varkappa_1 a - \phi_1) = -E^a_0 \sin\phi^a_0$
$E^s_1 \cos(\varkappa_1 a + \phi_1) = E^s_2 \cos\phi^s_2$	$E^a_1 \sin(\varkappa_1 a + \phi_1) = E^a_2 \sin\phi^a_2$
$E^s_1 \sin(\varkappa_1 a - \phi_1) = -\dfrac{\varkappa_0}{\varkappa_1} E^s_0 \sin\phi^s_0$	$E^a_1 \cos(\varkappa_1 a - \phi_1) = \dfrac{\varkappa_0}{\varkappa_1} E^a_0 \cos\phi^a_0$
$E^s_1 \sin(\varkappa_1 a + \phi_1) = \dfrac{\varkappa_2}{\varkappa_1} E^s_2 \sin\phi^s_2$	$E^a_1 \cos(\varkappa_1 a + \phi_1) = \dfrac{\varkappa_2}{\varkappa_1} E^a_2 \cos\phi^a_2$.

(1.9.31)

Фазовые углы ϕ^s_0, ϕ^s_2 и ϕ^a_0, ϕ^a_2 могут быть выражены через $\varkappa_1 a$ при помощи следующих равенств,

четные ТЕ-моды	**нечетные ТЕ-моды**	
$\operatorname{tg}(\varkappa_1 a - \phi_1) = -\dfrac{\varkappa_0}{\varkappa_1} \operatorname{tg}\phi^s_0$	$\operatorname{tg}(\varkappa_1 a - \phi_1) = -\dfrac{\varkappa_1}{\varkappa_0} \operatorname{tg}\phi^a_0$	(1.9.32)
$\operatorname{tg}(\varkappa_1 a + \phi_1) = \dfrac{\varkappa_2}{\varkappa_1} \operatorname{tg}\phi^s_2$	$\operatorname{tg}(\varkappa_1 a + \phi_1) = \dfrac{\varkappa_1}{\varkappa_2} \operatorname{tg}\phi^a_2$,	(1.9.33)

получаемых делением друг на друга соответствующих уравнений в системе (1.9.31). Из выражений (1.9.32) и (1.9.33) следует, что

$$\frac{\varkappa_0^2}{\varkappa_1^2} = \frac{\operatorname{tg}\phi^a_0}{\operatorname{tg}\phi^s_0} \quad \text{и} \quad \frac{\varkappa_2^2}{\varkappa_1^2} = \frac{\operatorname{tg}\phi^a_2}{\operatorname{tg}\phi^s_2}. \tag{1.9.34}$$

Возведением в квадрат и соответствующей комбинацией уравнений, входящих в систему (1.9.31), получаем следующие соотношения между полями стоячих волн:

четные ТЕ-моды **нечетные ТЕ-моды**

$$\frac{(E_1^s)^2}{(E_0^s)^2} = \cos^2\phi_0^s + \frac{\varkappa_0^2}{\varkappa_1^2}\sin^2\phi_0^s \qquad \frac{(E_1^a)^2}{(E_0^a)^2} = \sin^2\phi_0^a + \frac{\varkappa_0^2}{\varkappa_1^2}\cos^2\phi_0^a$$

$$\frac{(E_1^s)^2}{(E_2^s)^2} = \cos^2\phi_2^s + \frac{\varkappa_2^2}{\varkappa_1^2}\sin^2\phi_2^s \qquad \frac{(E_1^a)^2}{(E_2^a)^2} = \sin^2\phi_2^a + \frac{\varkappa_2^2}{\varkappa_1^2}\cos^2\phi_2^a \tag{1.9.35}$$

$$\frac{(E_0^s)^2}{(E_2^s)^2} = \frac{\cos\phi_0^a}{\cos\phi_0^s}\,\frac{\cos\phi_2^s}{\cos\phi_2^a}\,\frac{\cos(\phi_2^s-\phi_2^a)}{\cos(\phi_0^s-\phi_0^a)} \qquad \frac{(E_0^a)^2}{(E_2^a)^2} = \frac{\sin\phi_0^s}{\sin\phi_0^a}\,\frac{\sin\phi_2^a}{\sin\phi_2^s}\,\frac{\cos(\phi_2^s-\phi_2^a)}{\cos(\phi_0^s-\phi_0^a)}\,.$$

Последние выражения в (1.9.35) получаются из первых двух при помощи (1.9.34). Умножая эти выражения друг на друга и используя (1.9.34), приходим к следующему соотношению:

$$\varkappa_0 E_0^s E_0^a \cos(\phi_0^s-\phi_0^a) \;=\; \varkappa_2 E_2^s E_2^a \cos(\phi_2^s-\phi_2^a). \tag{1.9.36}$$

Чтобы вычислить норму $\overline{N}(\varkappa_2)$ для четных и нечетных излучательных ТЕ-мод структуры, необходимо преобразовать интеграл $N(\varkappa_2,\varkappa_2')$ в левой части соотношения ортонормировки (1.9.16) к явной сингулярной форме. Процедура преобразований аналогична той, которая привела к выводу нормы (1.9.27) для излучательных ТЕ-мод подложки. Ее применение к модам структуры путем подстановки (1.9.29) и (1.9.30) в интеграл (1.9.16) дает следующее соотношение ортонормировки (ср. уравнение (1.9.26)):

$$N(\varkappa_2,\varkappa_2') = \frac{\pi k_z w}{\omega\mu_0}\left[E_0^2\,\delta(\varkappa_0-\varkappa_0') + E_2^2\,\delta(\varkappa_2-\varkappa_2')\right], \tag{1.9.37}$$

общее для четных и нечетных излучательных мод структуры.

Эта формула симметрично включает вклады от обеих внешних сред — верхней среды (E_0^2) и подложки (E_2^2). Если поперечное волновое число $\varkappa_2$ выбирается в качестве независимой переменной непрерывного спектра, то дельта-функция $\delta(\varkappa_0-\varkappa_0')$ должна быть выражена через $\delta(\varkappa_2-\varkappa_2')$. Для этой цели необходимо использовать очевидное равенство,

$$\varkappa_0^2-\varkappa_2^2 = k_0^2-k_2^2, \tag{1.9.38}$$

из которого следует величина,

$$\varkappa_0-\varkappa_0' = \sqrt{\varkappa_2^2-\varkappa_2'^2+\varkappa_0'^2}-\varkappa_0' \equiv f(\varkappa_2), \tag{1.9.39}$$

рассматриваемая как функция переменной $\varkappa_2$, т. е. $\varkappa_0-\varkappa_0' = f(\varkappa_2)$.

Чтобы получить соотношение между двумя дельта-функциями, $\delta(\varkappa_0 - \varkappa_0')$ и $\delta(\varkappa_2 - \varkappa_2')$, будем применять известную формулу [25]

$$\delta[f(x)] = \sum_n \frac{\delta(x - x_n)}{|f'(x_n)|} \quad \text{при} \quad f(x_n) = 0, \tag{1.9.40}$$

где $f'(x_n)$ — значение производной функции $f(x)$, взятое в ее нулях x_n.

В применении к функции (1.9.39) формула (1.9.40) содержит $x \equiv \varkappa_2$ и $f(x) \equiv f(\varkappa_2) = \varkappa_0 - \varkappa_0'$, а сама функция (1.9.39) имеет единственный нуль при $\varkappa_2 = \varkappa_2'$, в котором $f'(x_n) \equiv f'(\varkappa_2 = \varkappa_2') = \varkappa_2'/\varkappa_0'$. Подстановка этих значений в (1.9.40) дает требуемое соотношение:

$$\delta(\varkappa_0 - \varkappa_0') = \frac{\varkappa_0}{\varkappa_2}\,\delta(\varkappa_2 - \varkappa_2'). \tag{1.9.41}$$

Включением (1.9.41) в выражение (1.9.37) получаем условие ортонормировки для четных и нечетных TE-мод структуры (ср. уравнение (1.9.26)):

$$N(\varkappa_2, \varkappa_2') = \frac{\pi k_z w}{\omega\mu_0}\left(E_2^2 + \frac{\varkappa_0}{\varkappa_2}\,E_0^2\right)\delta(\varkappa_2 - \varkappa_2'). \tag{1.9.42}$$

Сравнение (1.9.42) с общим соотношением ортонормировки (1.9.16) позволяет записать искомое выражение для нормы излучательных TE-мод структуры в следующем виде (ср. уравнение (1.9.27)):

$$\overline{N}(\varkappa_2) = w\,\frac{\pi k_z(\varkappa_2)}{\omega\mu_0}\left(E_2^2 + \frac{\varkappa_0(\varkappa_2)}{\varkappa_2}\,E_0^2\right), \tag{1.9.43}$$

где функции $k_z(\varkappa_2)$ и $\varkappa_0(\varkappa_2)$ равны

$$k_z(\varkappa_2) = \sqrt{k_2^2 - \varkappa_2^2} \qquad \text{и} \qquad \varkappa_0(\varkappa_2) = \sqrt{\varkappa_2^2 + (k_0^2 - k_2^2)}\,. \tag{1.9.44}$$

Норма $\overline{N}(\varkappa_2)$ излучательных мод структуры в форме (1.9.43) пригодна для вычисления поля излучения в подложке (при $y < -a$).

Однако при вычислении поля излучения в верхней среде (при $y > a$) удобнее использовать поперечное волновое число $\varkappa_0$ в качестве независимой переменной непрерывного спектра. В этом случае соотношение ортонормировки (1.9.37) с помощью (1.9.41) может быть переписано в виде

$$N(\varkappa_0, \varkappa_0') = \overline{N}(\varkappa_0)\,\delta(\varkappa_0 - \varkappa_0'), \tag{1.9.45}$$

с другой формой записи нормы излучательных мод структуры, включающей поперечное волновое число $\varkappa_0$ вместо $\varkappa_2$ (ср. уравнение (1.9.43)),

$$\overline{N}(\varkappa_0) = w\,\frac{\pi k_z(\varkappa_0)}{\omega\mu_0}\left(E_0^2 + \frac{\varkappa_2(\varkappa_0)}{\varkappa_0}E_2^2\right), \tag{1.9.46}$$

где функции $k_z(\varkappa_0)$ и $\varkappa_2(\varkappa_0)$ равны

$$k_z(\varkappa_0) = \sqrt{k_0^2 - \varkappa_0^2} \qquad \text{и} \qquad \varkappa_2(\varkappa_0) = \sqrt{\varkappa_0^2 + (k_2^2 - k_0^2)}\,. \tag{1.9.47}$$

Выражения (1.9.43) и (1.9.46) для нормы излучательных мод структуры оказываются справедливыми одновременно для симметричных (четных) и антисимметричных (нечетных) мод TE-типа, при этом амплитуды поля стоячих волн E_0, E_2 означают E_0^s, E_2^s и E_0^a, E_2^a, соответственно.

Теперь осталось найти выражение для фазового угла ϕ_1 наложением требования взаимной (кросс-)ортогональности четных и нечетных мод. Для этого по аналогии с (1.9.16) записываем соотношение кросс-ортонормировки (индекс *cr* от англ. *cross*):

$$\begin{aligned} N_{cr}(\varkappa_2, \varkappa_2') &\equiv w \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big[\widehat{E}_x^s(y;\varkappa_2)\widehat{H}_y^a(y;\varkappa_2') + \widehat{E}_x^a(y;\varkappa_2')\widehat{H}_y^s(y;\varkappa_2)\Big]dy \equiv \\ &\equiv \frac{2k_z w}{\omega\mu_0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{E}_x^s(y;\varkappa_2)\widehat{E}_x^a(y;\varkappa_2')\, dy = \overline{N}_{cr}(\varkappa_2)\,\delta(\varkappa_2 - \varkappa_2'). \end{aligned} \tag{1.9.48}$$

Кросс-ортогональность четных и нечетных излучательных мод будет обеспечена, если для кросс-нормы $\overline{N}_{cr}$, вычисляемой ниже, потребовать выполнение условия

$$\overline{N}_{cr}(\varkappa_2) = 0. \tag{1.9.49}$$

Для вычисления $N_{cr}(\varkappa_2, \varkappa_2')$ в форме интеграла (1.9.48) необходимо использовать выражения (1.9.29) и (1.9.30). Их произведение интегрируется по y, с тем чтобы выделить δ-образные сингулярности путем применения той же техники, которая была ранее использована для излучательных TE-мод подложки. Результат вычислений имеет вид

$$\begin{aligned} N_{cr}(\varkappa_2, \varkappa_2') = \frac{\pi k_z w}{\omega\mu_0} \Big[& E_0^s E_0^a \sin(\phi_0^s - \phi_0^a)\,\delta(\varkappa_0 - \varkappa_0') \\ & + E_2^s E_2^a \sin(\phi_2^s - \phi_2^a)\,\delta(\varkappa_2 - \varkappa_2')\Big]. \end{aligned} \tag{1.9.50}$$

Подстановка (1.9.41) в формулу (1.9.50) приводит к искомой форме выражения (1.9.48), а именно

$$\begin{aligned} N_{cr}(\varkappa_2, \varkappa_2') = \frac{\pi k_z w}{\omega\mu_0} \Big[& E_2^s E_2^a \sin(\phi_2^s - \phi_2^a) + \\ & + \frac{\varkappa_0}{\varkappa_2} E_0^s E_0^a \sin(\phi_0^s - \phi_0^a)\Big]\delta(\varkappa_2 - \varkappa_2'), \end{aligned} \tag{1.9.51}$$

где величина, стоящая множителем перед $\delta(\varkappa_2 - \varkappa_2')$, равняется $\overline{N}_{cr}(\varkappa_2)$.

Следовательно, требование выполнения условия кросс-ортогональности четных и нечетных излучательных мод TE-типа в форме (1.9.49) удовлетворяется при

$$\varkappa_0 E_0^s E_0^a \sin(\phi_0^s - \phi_0^a) + \varkappa_2 E_2^s E_2^a \sin(\phi_2^s - \phi_2^a) = 0. \tag{1.9.52}$$

Использование (1.9.36) позволяет переписать условие кросс-ортогональности (1.9.52) в виде

$$\operatorname{tg}(\phi_0^s - \phi_0^a) + \operatorname{tg}(\phi_2^s - \phi_2^a) = 0 \tag{1.9.53}$$

или

$$\sin\big[(\phi_0^s - \phi_0^a) + (\phi_2^s - \phi_2^a)\big] = 0. \tag{1.9.54}$$

Из равенства (1.9.54) следует, что фазовые углы для симметричного (ϕ_0^s, ϕ_2^s) и антисимметричного (ϕ_0^a, ϕ_2^a) распределения полей (1.9.29) и (1.9.30) во внешних средах всегда связаны между собой соотношением

$$(\phi_0^s + \phi_2^s) - (\phi_0^a + \phi_2^a) = n\pi, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{1.9.55}$$

Соотношения (1.9.53)–(1.9.55) между фазовыми углами для внешних сред являются следствием взаимной ортогональности четных и нечетных излучательных мод структуры. Так как эти углы связаны с фазовым углом ϕ_1 волноведущего слоя равенствами (1.9.32)–(1.9.33), то после ряда тригонометрических преобразований выражение (1.9.53) можно привести к условию кросс-ортогональности, наложенному на фазовый угол ϕ_1:

$$\operatorname{tg} 2\phi_1 = \frac{\varkappa_1^2 + \varkappa_0\varkappa_2}{\varkappa_1^2 - \varkappa_0\varkappa_2}\,\frac{\varkappa_2 - \varkappa_0}{\varkappa_2 + \varkappa_0}\,\operatorname{tg} 2\varkappa_1 a. \tag{1.9.56}$$

Из общей формулы (1.9.56) следуют ранее рассмотренные частные случаи. Действительно, для симметричных волноводов, когда $\varepsilon_{r0} = \varepsilon_{r2}$ и $\varkappa_0 = \varkappa_2$, условие (1.9.56) дает $\phi_1 = 0$, что согласуется с выражениями (1.7.20). Для слабонаправляющих волноводов с сильной асимметрией, когда $\varepsilon_{r0} \ll \varepsilon_{r2} \approx \varepsilon_{r1}$ и $\varkappa_0 \ll \varkappa_2 \approx \varkappa_1$, условие (1.9.56) обеспечивает равенство $\phi_1 = \varkappa_1 a \equiv k_{y1} a$, которое соответствует выражению (1.7.26).

1.9.2. Нормировка излучательных мод ТМ-типа. Подобно непрерывному спектру мод ТЕ-типа в планарных диэлектрических структурах, аналогичный спектр ТМ-мод содержит излучательные моды подложки и структуры, которые рассматриваются ниже по отдельности.

Излучательные моды подложки имеют и качестве основной компоненты полей поперечное магнитное поле $\widehat{H}_x(y)$, которое по аналогии с (1.9.8) представляется в следующем виде:

$$\widehat{H}_{xi}(y) = \begin{cases} H_0 e^{-\zeta_0(y-a)} & (i=0) \quad \text{при} \quad y > a, \\ H_1 \cos(\varkappa_1 y - \phi_1) & (i=1) \quad \text{при} \ -a < y < a, \\ H_2 \cos\big[\varkappa_2(y+a) - \phi_2\big] & (i=2) \quad \text{при} \quad y < -a. \end{cases} \tag{1.9.57}$$

Граничные условия, требующие непрерывности касательных компонент $\widehat{H}_{xi}(y)$ и $\widehat{E}_{zi}(y)$ при $y = \pm\, a$, приводят к равенствам:

$$H_1 \cos(\varkappa_1 a - \phi_1) = H_0, \tag{1.9.58}$$

$$H_1 \cos(\varkappa_1 a + \phi_1) = H_2 \cos\phi_2, \tag{1.9.59}$$

$$H_1 \sin(\varkappa_1 a - \phi_1) = \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r0}} \frac{\zeta_0}{\varkappa_1} H_0, \tag{1.9.60}$$

$$H_1 \sin(\varkappa_1 a + \phi_1) = \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1} H_2 \sin\phi_2. \tag{1.9.61}$$

Из сравнения выражений (1.9.58)–(1.9.61) с аналогичными формулами (1.9.9)–(1.9.12) для ТЕ-мод следует, что в случае излучательных мод подложки ТМ-типа существуют соотношения, получаемые из (1.9.13)–(1.9.15) при помощи следующих замен: $\zeta_0 \to \zeta_0(\varepsilon_{r1}/\varepsilon_{r0})$ и $\varkappa_2 \to \varkappa_2(\varepsilon_{r1}/\varepsilon_{r2})$.

Соотношение ортонормировки (1.9.6) с помощью (1.7.30) принимает вид

$$\begin{aligned} N(\varkappa_2, \varkappa_2') &\equiv -w \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big[\widehat{E}_y^*(y;\varkappa_2)\widehat{H}_x(y;\varkappa_2') + \widehat{E}_y(y;\varkappa_2')\widehat{H}_x^*(y;\varkappa_2)\Big] dy \equiv \\ &\equiv \frac{2k_z w}{\omega\varepsilon_0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2(y)} \widehat{H}_x(y;\varkappa_2)\widehat{H}_x(y;\varkappa_2')\, dy = \overline{N}(\varkappa_2)\,\delta(\varkappa_2 - \varkappa_2'), \end{aligned} \tag{1.9.62}$$

где $n(y) = \sqrt{\varepsilon(y)/\varepsilon_0}$ — распределение показателя преломления для ступенчатого профиля трехслойной структуры (рис. 1.8). При выводе (1.9.62) была учтена вещественность значений k_z и $\widehat{H}_x(y)$ для активных излучательных мод в силу пренебрежения реактивными (исчезающими) модами.

Вычисление интеграла $N(\varkappa_2, \varkappa_2')$ в соотношении ортонормировки (1.9.62) выполняется, подобно уравнениям (1.9.16)–(1.9.21), путем интегрирования по толщине трех слоев ($i = 0, 1, 2$) с полями $\widehat{H}_{xi}(y)$ в виде (1.9.57), так что

$$N(\varkappa_2, \varkappa_2') = N^{(0)}(\zeta_0, \zeta_0') + N^{(1)}(\varkappa_1, \varkappa_1') + N^{(2)}(\varkappa_2, \varkappa_2'), \tag{1.9.63}$$

где вклады от этих слоев равняются (ср. уравнения (1.9.19)–(1.9.21))

$$\begin{aligned} N^{(0)}(\zeta_0, \zeta_0') &= \frac{2k_z w}{\omega\varepsilon_0} \int\limits_{a}^{\infty} \widehat{H}_{x0}(y;\zeta_0)\widehat{H}_{x0}(y;\zeta_0')\, dy = \\ &= \frac{2k_z w}{\omega\varepsilon_0} H_0 H_0' \int\limits_{a}^{\infty} e^{-(\zeta_0+\zeta_0')(y-a)} dy = \frac{2k_z w}{\omega\varepsilon_0} \frac{H_0 H_0'}{\zeta_0 + \zeta_0'}, \end{aligned} \tag{1.9.64}$$

$$\begin{aligned} N^{(1)}(\varkappa_1, \varkappa_1') &= \frac{2k_z w}{\omega\varepsilon_1} \int\limits_{-a}^{a} \widehat{H}_{x1}(y;\varkappa_1)\widehat{H}_{x1}(y;\varkappa_1')\, dy = \\ &= \frac{2k_z w}{\omega\varepsilon_1} H_1 H_1' \int\limits_{-a}^{a} \cos(\varkappa_1 y - \phi_1)\cos(\varkappa_1' y - \phi_1')\, dy, \end{aligned} \tag{1.9.65}$$

$$N^{(2)}(\varkappa_2, \varkappa_2') = \frac{2k_z w}{\omega\varepsilon_2} \int\limits_{-\infty}^{-a} \widehat{H}_{x2}(y;\varkappa_2)\widehat{H}_{x2}(y;\varkappa_2')\,dy = \\ = \frac{2k_z w}{\omega\varepsilon_2} H_2 H_2' \int\limits_{-\infty}^{-a} \cos\bigl[\varkappa_2(y+a)-\phi_2\bigr]\cos\bigl[\varkappa_2'(y+a)-\phi_2'\bigr]dy. \tag{1.9.66}$$

Последующее рассмотрение полностью идентично тому анализу, что был выполнен в п. 1.9.1 для излучательных ТЕ-мод подложки. В частности, полученные выше соотношения (1.9.22)–(1.9.25) остаются в силе и для рассматриваемых излучательных мод ТМ-типа.

Следовательно, в полном соответствии с рассмотренными выше выражениями (1.9.19)–(1.9.21), единственный сингулярный вклад в соотношение ортонормировки (1.9.62) вносит последнее слагаемое (1.9.66). Тогда искомый результат, аналогичный выражению (1.9.26), равняется

$$N(\varkappa_2, \varkappa_2') = \frac{\pi k_z w}{\omega\varepsilon_2} H_2^2\,\delta(\varkappa_2 - \varkappa_2'). \tag{1.9.67}$$

Сравнение выражения (1.9.67) с общим соотношением ортонормировки (1.9.62) позволяет записать искомое выражение для нормы излучательных ТМ-мод подложки в следующем виде (ср. уравнение (1.9.27)):

$$\overline{N}(\varkappa_2) = w\,\frac{\pi k_z(\varkappa_2)}{\omega\varepsilon_2} H_2^2. \tag{1.9.68}$$

Излучательные моды структуры ТМ-типа, подобно аналогичным ТЕ-модам, представляются в форме стоячих волн во всех трех слоях структуры ($i = 0, 1, 2$):

- для *четных* (симметричных) *излучательных мод структуры*

$$\widehat{H}_{xi}^s(y) = \begin{cases} H_0^s \cos\bigl[\varkappa_0(y-a)-\phi_0^s\bigr] & (i=0) \quad \text{при} \quad y > a, \\ H_1^s \cos(\varkappa_1 y - \phi_1) & (i=1) \quad \text{при} \ -a < y < a, \\ H_2^s \cos\bigl[\varkappa_2(y+a)-\phi_2^s\bigr] & (i=2) \quad \text{при} \quad y < -a; \end{cases} \tag{1.9.69}$$

- для *нечетных* (антисимметричных) *излучательных мод структуры*

$$\widehat{H}_{xi}^a(y) = \begin{cases} H_0^a \sin\bigl[\varkappa_0(y-a)-\phi_0^a\bigr] & (i=0) \quad \text{при} \quad y > a, \\ H_1^a \sin(\varkappa_1 y - \phi_1) & (i=1) \quad \text{при} \ -a < y < a, \\ H_2^a \sin\bigl[\varkappa_2(y+a)-\phi_2^a\bigr] & (i=2) \quad \text{при} \quad y < -a, \end{cases} \tag{1.9.70}$$

где фазовый угол ϕ_1 является общим для симметричной и антисимметричной конфигурации поля.

Граничные условия, наложенные на касательные компоненты полей $\widehat{H}_{xi}(y)$ и $\widehat{E}_{zi}(y)$ при $y = \pm a$, приводят к следующим соотношениям:

четные ТМ-моды	**нечетные ТМ-моды**
$H_1^s \cos(\varkappa_1 a - \phi_1) = H_0^s \cos\phi_0^s$	$H_1^a \sin(\varkappa_1 a - \phi_1) = -H_0^a \sin\phi_0^a$
$H_1^s \cos(\varkappa_1 a + \phi_1) = H_2^s \cos\phi_2^s$	$H_1^a \sin(\varkappa_1 a + \phi_1) = H_2^a \sin\phi_2^a$
$H_1^s \sin(\varkappa_1 a - \phi_1) = -\dfrac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r0}}\dfrac{\varkappa_0}{\varkappa_1} H_0^s \sin\phi_0^s$	$H_1^a \cos(\varkappa_1 a - \phi_1) = \dfrac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r0}}\dfrac{\varkappa_0}{\varkappa_1} H_0^a \cos\phi_0^a$
$H_1^s \sin(\varkappa_1 a + \phi_1) = \dfrac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}\dfrac{\varkappa_2}{\varkappa_1} H_2^s \sin\phi_2^s$	$H_1^a \cos(\varkappa_1 a + \phi_1) = \dfrac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}\dfrac{\varkappa_2}{\varkappa_1} H_2^a \cos\phi_2^a.$

(1.9.71)

Из сравнения (1.9.71) с аналогичными уравнениями (1.9.31) видно, что соотношения (1.9.32)–(1.9.36), полученные ранее для ТЕ-мод, превращаются в идентичные соотношения для ТМ-мод при следующих заменах:

$$\begin{array}{ccc} \textbf{TE} & & \textbf{TM} \\ \varkappa_0 & \longrightarrow & \dfrac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r0}}\,\varkappa_0 \equiv \widetilde{\varkappa}_0, \\ \varkappa_2 & \longrightarrow & \dfrac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}\,\varkappa_2 \equiv \widetilde{\varkappa}_2. \end{array} \tag{1.9.72}$$

В частности, формула (1.9.36) принимает следующий вид:

$$\widetilde{\varkappa}_0 H_0^s H_0^a \cos(\phi_0^s - \phi_0^a) = \widetilde{\varkappa}_2 H_2^s H_2^a \cos(\phi_2^s - \phi_2^a). \tag{1.9.73}$$

Для нахождения нормы $\overline{N}(\varkappa_2)$ четных и нечетных излучательных ТМ-мод структуры, необходимо преобразовать интеграл в левой части (1.9.62) так, чтобы привести его к явной сингулярной форме. Применение процедуры, выполненной в п. 1.9.1, к излучательным ТМ-модам структуры путем подстановки (1.9.69) и (1.9.70) в интеграл (1.9.62) дает следующее соотношение ортонормировки (ср. уравнения (1.9.37) и (1.9.42)):

$$\begin{aligned} N(\varkappa_2, \varkappa_2') &= \frac{\pi k_z w}{\omega}\left[\frac{H_0^2}{\varepsilon_0}\,\delta(\varkappa_0 - \varkappa_0') + \frac{H_2^2}{\varepsilon_2}\,\delta(\varkappa_2 - \varkappa_2')\right] = \\ &= \frac{\pi k_z w}{\omega\varepsilon_2}\left(H_2^2 + \frac{\widetilde{\varkappa}_0}{\widetilde{\varkappa}_2}\,H_0^2\right)\delta(\varkappa_2 - \varkappa_2') = \\ &= \frac{\pi k_z w}{\omega\varepsilon_0}\left(H_0^2 + \frac{\widetilde{\varkappa}_2}{\widetilde{\varkappa}_0}\,H_2^2\right)\delta(\varkappa_0 - \varkappa_0'), \end{aligned} \tag{1.9.74}$$

общее для четных и нечетных ТМ-мод. Два последних равенства в (1.9.74) получены с учетом (1.9.41).

Таким образом, из формулы (1.9.74) следуют искомые выражения для нормы излучательных ТМ-мод структуры (ср. уравнения (1.9.43) и (1.9.46)):

$$\overline{N}(\varkappa_2) = w\,\frac{\pi k_z(\varkappa_2)}{\omega\varepsilon_2}\left(H_2^2 + \frac{\widetilde{\varkappa}_0(\varkappa_2)}{\widetilde{\varkappa}_2(\varkappa_2)}\,H_0^2\right), \tag{1.9.75}$$

$$\overline{N}(\varkappa_0) = w\,\frac{\pi k_z(\varkappa_0)}{\omega\varepsilon_0}\left(H_0^2 + \frac{\widetilde{\varkappa}_2(\varkappa_0)}{\widetilde{\varkappa}_0(\varkappa_0)}\,H_2^2\right), \tag{1.9.76}$$

где для симметричных (четных) и антисимметричных (нечетных) мод следует писать, соответственно, H_0^s, H_2^s и H_0^a, H_2^a вместо H_0, H_2.

Напомним, что для излучательных мод черта сверху нормы $\overline{N}$ (размерностью Вт/м) означает их принадлежность к планарной структуре, чтобы отличить ее как от нормы $\overline{\overline{N}}$ (Вт/м^2) для мод канального волновода, так и от нормы N_m (Вт) для дискретных мод (см. табл. 1.1).

Требование взаимной (кросс-)ортогональности четных и нечетных ТМ-мод удовлетворяется условием (1.9.49) с кросс-нормой $\overline{N}_{cr}$, входящей в следующее соотношение кросс-ортогональности:

$$\begin{aligned} N_{cr}(\varkappa_2,\varkappa_2') &\equiv -w\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big[\widehat{E}_y^s(y;\varkappa_2)\widehat{H}_x^a(y;\varkappa_2') + \widehat{E}_y^a(y;\varkappa_2')\widehat{H}_x^s(y;\varkappa_2)\Big]dy \equiv \\ &\equiv \frac{2k_z w}{\omega\varepsilon_0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2(y)}\,\widehat{H}_x^s(y;\varkappa_2)\widehat{H}_x^a(y;\varkappa_2')\,dy = \overline{N}_{cr}(\varkappa_2)\,\delta(\varkappa_2-\varkappa_2'). \end{aligned} \tag{1.9.77}$$

Интеграл $N_{cr}(\varkappa_2,\varkappa_2')$ в форме (1.9.77) вычисляется с использованием полей (1.9.69) и (1.9.70), произведение которых интегрируется по y для того, чтобы явно выделить δ-образные сингулярности путем применения той же техники, которая была ранее использована для излучательных ТЕ-мод подложки. Результат вычислений имеет вид (ср. уравнения (1.9.50)–(1.9.51))

$$\begin{aligned} N_{cr}(\varkappa_2,\varkappa_2') &= \frac{\pi k_z w}{\omega}\left[\frac{H_0^s H_0^a}{\varepsilon_0}\,\sin(\phi_0^s-\phi_0^a)\,\delta(\varkappa_0-\varkappa_0') + \right. \\ &\qquad\left. + \frac{H_2^s H_2^a}{\varepsilon_2}\,\sin(\phi_2^s-\phi_2^a)\,\delta(\varkappa_2-\varkappa_2')\right] = \\ &= \frac{\pi k_z w}{\omega\varepsilon_2}\Big[H_2^s H_2^a\,\sin(\phi_2^s-\phi_2^a) + \\ &\qquad + \frac{\widetilde{\varkappa}_0}{\widetilde{\varkappa}_2}\,H_0^s H_0^a\,\sin(\phi_0^s-\phi_0^a)\Big]\delta(\varkappa_2-\varkappa_2'), \end{aligned} \tag{1.9.78}$$

где последнее равенство получено с использованием (1.9.41). Величина, стоящая здесь множителем перед $\delta(\varkappa_2-\varkappa_2')$, равняется $\overline{N}_{cr}(\varkappa_2)$.

Следовательно, условие кросс-ортогональности (1.9.49) между четными и нечетными излучательными ТМ-модами удовлетворяется, если положить (ср. уравнение (1.9.52))

$$\widetilde{\varkappa}_0 H_0^s H_0^a \sin(\phi_0^s - \phi_0^a) + \widetilde{\varkappa}_2 H_2^s H_2^a \sin(\phi_2^s - \phi_2^a) = 0. \tag{1.9.79}$$

Использование соотношения (1.9.73) позволяет переписать условие кросс-ортогональности (1.9.79) в форме, содержащей фазовые углы внешних сред, которые в точности совпадают с формулами (1.9.53)–(1.9.55), ранее полученными для ТЕ-мод. Кроме того, если записать для ТМ-мод выражения, выведенные из равенств (1.9.32)–(1.9.33) с помощью замен (1.9.72), то соотношение (1.9.53) принимает форму, аналогичную (1.9.56), которая содержит только фазовый угол ϕ_1 волноведущего слоя:

$$\operatorname{tg} 2\phi_1 = \frac{\varkappa_1^2 + \widetilde{\varkappa}_0 \widetilde{\varkappa}_2}{\varkappa_1^2 - \widetilde{\varkappa}_0 \widetilde{\varkappa}_2} \, \frac{\widetilde{\varkappa}_2 - \widetilde{\varkappa}_0}{\widetilde{\varkappa}_2 + \widetilde{\varkappa}_0} \operatorname{tg} 2\varkappa_1 a, \tag{1.9.80}$$

где $\widetilde{\varkappa}_0 = \varkappa_0(\varepsilon_{r1}/\varepsilon_{r0})$ и $\widetilde{\varkappa}_2 = \varkappa_2(\varepsilon_{r1}/\varepsilon_{r2})$ (см. правило замен (1.9.72)).

Уравнение (1.9.80) для ТМ-мод, как и аналогичное уравнение (1.9.56) для ТЕ-мод, является следствием взаимной ортогональности четных и нечетных излучательных мод структуры и позволяет найти фазовый угол ϕ_1 стоячей волны в волноведущем слое, занимающем область $-a < y < a$ на рис. 1.8.

В заключение следует отметить, что большинство формул, выведенных в пп. 1.8 и 1.9, совпадает (в измененных обозначениях) с формулами, приведенными (без вывода) Когельником [22]. Исключение составляют формулы (1.9.50) и (1.9.78), а также вытекающие из них соотношения (1.9.51)–(1.9.56) и (1.9.79)–(1.9.80). В аналогичных формулах (2.3.31) и (2.3.63) (с нумерацией работы [22]) отсутствуют синусоидальные функции типа $\sin(\phi_0^s - \phi_0^a)$ и $\sin(\phi_2^s - \phi_2^a)$ (в наших обозначениях), которые были ошибочно потеряны Когельником.

Глава 2

ТЕОРИЯ ВОЗБУЖДЕНИЯ ВОЛНОВЕДУЩИХ СТРУКТУР СТОРОННИМИ ИСТОЧНИКАМИ

Настоящая глава разрабатывает общую теорию возбуждения собственных мод волноведущих структур сторонними источниками, которые считаются заданными на данном этапе электродинамического анализа. Этот этап, как описано во введении, базируется на результатах предыдущего этапа, рассмотренного в первой главе для случая открытых волноводов, спектр которых включает дискретные направляемые и непрерывные излучательные моды. Задачей первого этапа было нахождение спектра мод *базового волновода* (закрытого или открытого), выделенного из сложной волноведущей структуры на том этапе анализа.

Для последующей разработки теории возбуждения мод заданными источниками необходимо знание дисперсионных и энергетических (нормировочных) характеристик собственных мод базового волновода. Эти характеристики находятся из решения однородной граничной задачи на собственные значения в отсутствие возбуждающих источников, что продемонстрировано в гл. 1 на примере планарной трехслойной диэлектрической структуры. Подобные электродинамические проблемы для разнообразных по структуре волноводов нашли свое отражение в опубликованной литературе. Для примера можно назвать такие книги, как [1–24], в которых приведена обширная библиография, существенно расширяющая круг публикаций, представляющих интерес для читателя.

В последние годы, наряду с традиционной электродинамикой сред с изотропными и анизотропными свойствами, наблюдается также возросший интерес к электродинамике биизотропных (киральных) и бианизотропных сред. Специфичность этих сред, проявляющаяся в форме материальных уравнений с перекрестной связью между электрическими и магнитными полями, открывает уникальные возможности для управления электромагнитными процессами в волноведущих структурах на их основе. Это породило большую волну электродинамических исследований, сопровождаемую многочисленными публикациями. Среди них можно отметить как книги общего содержания [24, 31–33], включающие бианизотропную тематику, так и публикации [34–38], специально посвященные этой теме.

Начальной задачей второго этапа, разрабатываемого в этой главе, является обоснованное введение возбуждающих источников (объемных и поверхностных), входящих в уравнения Максвелла и в электродинамические граничные условия (ЭГУ). Эти источники в форме электрических и магнитных токов фактически отражают возмущение полей базового волновода той частью сложной волноведущей структуры, которая осталась неучтенной при его выделении на первом этапе. Конечная цель второго этапа состоит в разработке общей электродинамической теории возбуждения волноводов. Уравнения возбуждения мод заданными токами должны быть применимыми для анализа разнообразных волноведущих структур с произвольными средами, включая диссипативные среды с бианизотропными свойствами как наиболее физически сложный объект электродинамического описания [1]).

Основу общей теории возбуждения волноведущих структур составляет *метод модальных разложений* искомого поля по невозмущенному спектру базового волновода, найденному на первом этапе анализа. Ключевыми элементами этого метода являются два основных положения:

- *полнота* системы базисных функций волновода для разложения полей,
- *ортогональность* базисных функций на поперечном сечении волновода.

Свойство полноты системы функций, используемых в качестве базиса функционального пространства (называемого в математике гильбертовым пространством [25]), является *обязательным требованием* для применимости метода модальных разложений. В приложении к электродинамическим проблемам этот вопрос обычно решается большинством авторов чисто интуитивно путем предположения, что система собственных мод дискретного и непрерывного спектров, найденная для волновода без возбуждающих источников, остается по определению полной и внутри области источников. Однако строгий электродинамический анализ показывает, что это не так.

Из математического рассмотрения, приведенного в приложении Б.1, следует, что свойство полноты гильбертова пространства, построенного на базисе из множества $\{\psi_m(x)\}$ линейно независимых функций, выполняется только для класса функций $\psi(x)$, касательных к этому пространству. Именно такие функции представимы в виде разложения (Б.1.12) (сходящегося в среднем) по базисным функциям $\psi_m(x)$ гильбертова пространства. Для функций $\psi(x)$ это разложение является полным и единственным (в смысле единственности коэффициентов разложения a_m). Для произвольной функции $f(x)$ разложение по базису гильбертова пространства *не является полным*, так как учитывает лишь часть этой функции в виде ее *проекции* $\psi(x)$ на это пространство. Наряду с этим, существует другая ее часть в виде ненулевой функции $c(x)$, ортогональной к гильбертову пространству и поэтому называемой *ортогональным дополнением*. Оно принципиально неразложимо по базисным функциям гильбертова пространства и должно быть найдено независимым способом. По этой причине *полное представление* функции

[1]) Еще более сложные для электродинамического анализа среды с пространственной дисперсией, описываемые в дополнение к уравнениям Максвелла специфическими уравнениями движения, лежат за рамками настоящего рассмотрения. Теория возбуждения волноводов, содержащих такие среды, изложена в работах [24, 42].

записывается в форме (Б.1.20) как $f(x) = \psi(x) + c(x)$, где к проекции $\psi(x)$ в виде разложения (Б.1.12) по базису $\{\psi_m(x)\}$ гильбертова пространства *обязательно* добавляется ортогональное дополнение $c(x)$.

Высказанное выше утверждение, основанное на базовых положениях функционального анализа, является совершенно очевидным для математиков. Однако оно было полностью проигнорировано большинством авторов при разработке современных направлений электродинамики волноведущих структур, за исключением ранее вышедших книг Вайнштейна [4] и Фелсена и Маркувица [27]. Выглядит странным, что при построении теории возбуждения оптических волноводов многие авторы [10–22] вполне корректно применяли модальные разложения к поперечным компонентам электромагнитного поля, но полностью потеряли ортогональные дополнения, вызванные продольными возбуждающими токами. Необходимость их учета математически следует из аналогии, проведенной в приложении Б, между электродинамической модальной теорией и основными положениями функционального анализа.

В этой главе строго обоснована необходимость полного представления полей в области возбуждающих источников в форме (11)–(12), включающей, наряду с модальными разложениями полей (7), также *ортогональные дополнительные поля* (13)–(14) (см. введение). Кроме того, эти поля порождают *эффективные поверхностные токи* (15)–(16) на границах области, занятой возбуждающими объемными токами, при условии, что они имеют продольную компоненту. Следовательно, пренебрежение ортогональными дополнительными полями неизбежно приводило предыдущих авторов к потере эффективных поверхностных токов в качестве дополнительных источников возбуждения волноведущих структур.

Свойство ортогональности базисных функций, в отличие от свойства полноты, отнюдь не является обязательным при использовании метода модальных разложений, что показано с общих математических позиций в приложении Б.1. Бесспорно, наличие ортогонального базиса существенно облегчает задачу нахождения волновых амплитуд, являющихся коэффициентами модального разложения. Однако это верно только на этапе возбуждения мод заданными источниками. Как ясно из дальнейшего анализа (см. гл. 3 и 4), преимущество ортогонального базиса перед неортогональным полностью исчезает при переходе от уравнений возбуждения к уравнениям связанных мод. Неортогональность базиса, составленного из собственных мод волноведущей структуры, физически порождается потерями, приводящими к диссипации электромагнитной энергии. Учет диссипации в теории возбуждения приводит к необходимости введения нового понятия *квази-ортогональности мод*, обобщающего привычную модальную ортогональность на случай потерь.

В изложении материала настоящей главы будем частично следовать основным результатам предыдущих исследований автора, опубликованных в работах [24, 37, 39, 47].

Параграф 2.1 посвящен выводу энергетических соотношений электродинамики в применении к бианизотропным диссипативным средам, включая теорему Пойнтинга в дифференциальной и интегральной формах для мгновенных и средних во времени величин. Энергетические соотношения использованы в п. 2.2 для получения модальных разложений активной мощности, переносимой и диссипируемой модами в волноводе с потерями, которые учитывают как собственные, так и взаимные модальные мощности.

Параграф 2.3 содержит обоснование нового понятия *квази-ортогональности мод* для диссипативной волноведущей структуры. В частном случае волноводов без потерь, рассмотренном в п. 2.4, соотношение квази-ортогональности мод принимает привычную форму соотношения ортогональности в применении не только к активным (распространяющимся) модам, но и к реактивным (нераспространяющимся, или комплексным и исчезающим) модам.

Возбуждающие источники, задаваемые в форме сторонних токов, полей и возмущений среды, рассматриваются в п. 2.5, в то время как структура электромагнитного поля внутри области источников анализируется в п. 2.6, где обоснована необходимость введения *ортогональных дополнительных полей* и порожденных ими *эффективных поверхностных токов*.

Параграф 2.7 посвящен выводу уравнений возбуждения закрытых волноводов заданными источниками, основанный на электродинамической аналогии с известным в математике методом вариации постоянных [25], что применимо только для недиссипативных волноводов. Более общий подход, учитывающий потери в волноводах и использующий соотношение квазиортогональности мод, разрабатывается в п. 2.8 на основе квадратичного электродинамического соотношения в форме сопряженной леммы Лоренца. Обоснование ее выбора в сравнении с несопряженной формой леммы дано в приложении В. Именно такой подход приводит к уравнениям возбуждения в самой общей форме, справедливой для диссипативных и недиссипативных волноведущих структур со всевозможными средами, обладающими изотропными, анизотропными и бианизотропными свойствами. Недиссипативная и диссипативная теория возбуждения *закрытых волноводов* заканчивается в п. 2.9 сравнительным анализом соответствующих уравнений возбуждения с учетом и без учета потерь в волноводах.

Начиная с п. 2.10, полученные выше результаты обобщаются на *открытые волноведущие структуры* с изотропными диэлектрическими средами, в том числе, работающие в оптическом диапазоне частот. Здесь рассматриваются возбуждающие источники и модальные разложения полей (п. 2.10), сопряженная лемма Лоренца (п. 2.11) и соотношения модальной квази-ортогональности (п. 2.12) для многочастотного режима волноводного распространения при параметрических возмущениях среды и, наконец, вывод уравнений возбуждения направляемых и излучательных мод в открытых оптических волноводах (п. 2.13).

2.1. Энергетические соотношения электродинамики волноводов с бианизотропными средами

2.1.1. Дифференциальная форма теоремы Пойнтинга. В макроскопической электродинамике электромагнитные процессы, протекающие во всех без исключения материальных средах (в том числе с учетом пространственной дисперсии [24, 40, 42], исключенной здесь из рассмотрения), описываются двумя векторами напряженности поля (электрического $\mathbf{E}$ и магнитного $\mathbf{H}$)

и двумя векторами индукции (электрической $\mathbf{D}$ и магнитной $\mathbf{B}$). Эти четыре вектора связаны между собой уравнениями Максвелла, записанными в общей форме (для системы единиц СИ) [1–9]:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}, \tag{2.1.1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \tag{2.1.2}$$

Влияние подвижных носителей заряда в среде как источников электромагнитного поля учитывается плотностями электрического заряда ρ и электрического тока $\mathbf{J}$, которые подчиняются уравнению непрерывности,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \tag{2.1.3}$$

Связанные заряды в среде, возникающие как ее поляризационный отклик на электромагнитное воздействие, определяют электрическую и магнитную поляризацию среды, характеризуемую, соответственно, вектором поляризации $\mathbf{P}$ и вектором намагниченности $\mathbf{M}$. Эти векторы связаны с векторами индукции $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ следующими соотношениями:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \tag{2.1.4}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}), \tag{2.1.5}$$

где ε_0 и μ_0 — электрическая и магнитная постоянные в системе единиц СИ.

Скалярно умножая первое из уравнений (2.1.1) на $\mathbf{H}$, второе на $-\mathbf{E}$ и применяя тождество $\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b})$, после их сложения получаем известное квадратичное соотношение [1–9]

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right) - \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}. \tag{2.1.6}$$

Подстановка (2.1.4) и (2.1.5) в соотношение (2.1.6) превращает его в закон сохранения электромагнитной энергии, называемый *теоремой Пойнтинга*:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = -I_{\mathbf{P}} - I_{\mathbf{M}} - I_{\mathbf{J}}. \tag{2.1.7}$$

Здесь мгновенные значения плотности запасенной энергии w и плотности потока энергии $\mathbf{S}$ (вектора Пойнтинга) определены как

$$w = \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} + \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} \quad \text{и} \quad \mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \tag{2.1.8}$$

Члены в правой части теоремы Пойнтинга (2.1.7) имеют следующий вид:

$$I_{\mathbf{P}} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} - \mathbf{P} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right), \tag{2.1.9}$$

$$I_{\mathbf{M}} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mu_0 \mathbf{M}}{\partial t} - \mu_0 \mathbf{M} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\right), \tag{2.1.10}$$

$$I_{\mathbf{J}} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}. \tag{2.1.11}$$

Слагаемые (2.1.9)–(2.1.11) отражают специфические свойства среды и дают мгновенную мощность взаимодействия электромагнитных полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ с подвижными зарядами, несущими ток $\mathbf{J}$ (член I_J), и со связанными зарядами, создающими поляризацию $\mathbf{P}$ (член I_P) и намагниченность $\mathbf{M}$ (член I_M).

В известной литературе [1–9] теорема Пойнтинга (2.1.7) обычно содержит лишь единственный член I_J, в то время как $I_\mathrm{P} = I_\mathrm{M} = 0$. Из сравнения (2.1.6) и (2.1.7) видно, что в этом случае первое слагаемое справа в (2.1.6) молчаливо отождествляется с производной $\partial w/\partial t$ в (2.1.7), а именно

$$\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\Big(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{H}\cdot\mathbf{B}\Big).$$

Легко видеть, что такая ситуация реализуется в средах, описываемых материальными уравнениями $\mathbf{D} = \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}\cdot\mathbf{E}$ и $\mathbf{B} = \overline{\boldsymbol{\mu}}\cdot\mathbf{H}$, где тензоры $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ и $\overline{\boldsymbol{\mu}}$ являются постоянными и симметричными (в простейшем случае $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \varepsilon\overline{\mathbf{I}}$ и $\overline{\boldsymbol{\mu}} = \mu\overline{\mathbf{I}}$ для изотропных сред). Для более сложных сред (в том числе бианизотропных) оба члена (2.1.9) и (2.1.10) в правой части теоремы Пойнтинга (2.1.7) становятся принципиально важными и не могут быть опущены.

В частности, важность величин I_P и I_M была продемонстрирована в работе [40] при выводе обобщенной теоремы Пойнтинга для сред с пространственной дисперсией, описываемых уравнениями движения (типа уравнений упругости для пьезоэлектриков, уравнения движения намагниченности для ферритов и уравнений движения носителей заряда в плазменных средах). Оказывается, что *обобщенная теорема Пойнтинга* для сложных сред принимает явную форму закона сохранения энергии [40]:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{S} + q = 0. \tag{2.1.12}$$

Здесь плотность запасенной энергии w и плотность потока энергии $\mathbf{S}$, кроме электромагнитных величин (2.1.8), включают также дополнительные вклады, порожденные средой, а величина q учитывает все потери, характерные для той или иной рассматриваемой среды.

Аналогично выполненному в работе [40], будем вычислять для бианизотропных сред величины (2.1.9)–(2.1.11). Чтобы сделать это, необходимо знать для этих сред материальные уравнения, связывающие индукции $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ с напряженностями поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. В литературе имеются различные формы записи подобных уравнений [31–36], среди которых наиболее подходящей для дальнейшего рассмотрения является следующая:

$$\mathbf{D} = \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}\cdot\mathbf{E} + \overline{\boldsymbol{\xi}}\cdot\mathbf{H}, \tag{2.1.13}$$

$$\mathbf{B} = \overline{\boldsymbol{\zeta}}\cdot\mathbf{E} + \overline{\boldsymbol{\mu}}\cdot\mathbf{H}. \tag{2.1.14}$$

Четыре материальных параметра среды — два тензора проницаемости ($\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$, $\overline{\boldsymbol{\mu}}$) и два перекрестных тензора ($\overline{\boldsymbol{\xi}}$, $\overline{\boldsymbol{\zeta}}$), рассматриваются в общем случае как феноменологически заданные функции частоты. Следует обратить внимание на тот факт, что известные магнитоэлектрические эффекты [31, 34, 41] по своей микроскопической природе порождены нелокальностью поляризационного отклика среды на электромагнитные воздействия. Однако их макроскопические проявления, как правило, подобны таковым для сред с частотной дисперсией, поскольку при волновых числах $k = \omega/c$ материальные параметры такой среды воспринимаются как частотно-зависимые [41].

Тензоры, входящие в материальные уравнения (2.1.13) и (2.1.14), охватывают все известные частные случаи физических сред:

- для изотропных сред

$$\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \varepsilon\overline{\mathbf{I}}, \qquad \overline{\boldsymbol{\mu}} = \mu\overline{\mathbf{I}}, \qquad \overline{\boldsymbol{\xi}} = \overline{\boldsymbol{\zeta}} = 0; \tag{2.1.15}$$

- для сред с двойной анизотропией

$$\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} \neq \varepsilon\overline{\mathbf{I}}, \qquad \overline{\boldsymbol{\mu}} \neq \mu\overline{\mathbf{I}}, \qquad \overline{\boldsymbol{\xi}} = \overline{\boldsymbol{\zeta}} = 0; \tag{2.1.16}$$

- для биизотропных (киральных) сред

$$\begin{gathered} \overline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \varepsilon\overline{\mathbf{I}}, \qquad \overline{\boldsymbol{\mu}} = \mu\overline{\mathbf{I}}, \\ \overline{\boldsymbol{\xi}} = (\chi - i\varkappa)\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\,\overline{\mathbf{I}}, \qquad \overline{\boldsymbol{\zeta}} = (\chi + i\varkappa)\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\,\overline{\mathbf{I}}, \end{gathered} \tag{2.1.17}$$

где ε_0 и μ_0 — электрическая и магнитная постоянные, χ — параметр невзаимности Теллегена, $\varkappa$ — параметр киральности Пастера [33, 36].

Известно [31–33], что для бианизотропных сред в отсутствие потерь тензоры проницаемости $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ и $\overline{\boldsymbol{\mu}}$ являются эрмитовыми, в то время как перекрестные тензоры $\overline{\boldsymbol{\xi}}$ и $\overline{\boldsymbol{\zeta}}$ — эрмитово сопряженные. Тогда

$$\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\dagger}, \qquad \overline{\boldsymbol{\mu}} = \overline{\boldsymbol{\mu}}^{\dagger}, \qquad \overline{\boldsymbol{\xi}} = \overline{\boldsymbol{\zeta}}^{\dagger}, \tag{2.1.18}$$

где верхний знак † обозначает эрмитово сопряжение (т. е. транспонирование с комплексным сопряжением).

Из соотношений (2.1.18) следует, что в случае бианизотропных сред с потерями антиэрмитовы части тензоров проницаемости, $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{a} = (\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} - \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\dagger})/2$ и $\overline{\boldsymbol{\mu}}^{a} = (\overline{\boldsymbol{\mu}} - \overline{\boldsymbol{\mu}}^{\dagger})/2$, а также разность перекрестных тензоров $(\overline{\boldsymbol{\xi}} - \overline{\boldsymbol{\zeta}}^{\dagger})$ учитывают, соответственно, диэлектрические, магнитные и магнитоэлектрические потери, связанные с инерционностью процессов переполяризации среды переменными полями [4, 41].

Если кроме потерь переполяризации, в среде имеются также потери, вызванные ее электропроводностью и характеризуемые тензором проводимости $\overline{\boldsymbol{\sigma}}_c$, то в дополнение к (2.1.13) и (2.1.14) имеется еще одно материальное уравнение

$$\mathbf{J} = \overline{\boldsymbol{\sigma}}_c \cdot \mathbf{E}. \tag{2.1.19}$$

Для гармонических полей (с зависимостью от времени в виде $\exp(i\omega t)$) обычно интересуются усредненными по времени энергетическими величинами. Будем обозначать их стоящими в скобках $\langle \ldots \rangle$ и применять известное правило для вычисления среднего от произведения комплексных величин типа $\langle AB \rangle = (1/2)\operatorname{Re}\{AB^*\}$ [4]. В этом случае $\langle \partial w/\partial t \rangle = 0$, так что теорема Пойнтинга (2.1.7) принимает следующий вид для средних величин:

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{S} \rangle = -\langle I_{\mathrm{P}} \rangle - \langle I_{\mathrm{M}} \rangle - \langle I_{\mathrm{J}} \rangle. \tag{2.1.20}$$

Вычисляем усредненные слагаемые в правой части выражения (2.1.20), используя их определения (2.1.9)–(2.1.11) и материальные уравнения (2.1.13), (2.1.14) и (2.1.19):

$$
\begin{aligned}
\langle I_{\mathrm{P}} \rangle &= \frac{1}{2}\left\langle \mathbf{E}\cdot\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} - \mathbf{P}\cdot\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right\rangle \equiv \frac{1}{2}\left\langle \mathbf{E}\cdot\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{D}\cdot\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right\rangle = \\
&= \frac{1}{4}\operatorname{Re}\Big\{\mathbf{E}^*\cdot(i\omega\mathbf{D}) - \mathbf{D}^*\cdot(i\omega\mathbf{E})\Big\} = \\
&= \frac{1}{4}\operatorname{Re}\Big\{i\omega\big(\mathbf{E}^*\cdot\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}\cdot\mathbf{E} + \mathbf{E}^*\cdot\overline{\xi}\cdot\mathbf{H} - \mathbf{E}\cdot\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^*\cdot\mathbf{E}^* - \mathbf{E}\cdot\overline{\xi}^*\cdot\mathbf{H}^*\big)\Big\} = \\
&= \frac{1}{4}\operatorname{Re}\Big\{i\omega\big[\mathbf{E}^*\cdot(\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} - \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\dagger})\cdot\mathbf{E} + 2\mathbf{E}^*\cdot\overline{\xi}\cdot\mathbf{H}\big]\Big\} \equiv \\
&\equiv \frac{1}{2}\operatorname{Re}\Big\{i\omega\big(\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{a} : \mathbf{E}\mathbf{E}^* + \overline{\xi} : \mathbf{H}\mathbf{E}^*\big)\Big\},
\end{aligned}
\tag{2.1.21}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle I_{\mathrm{M}} \rangle &= \frac{1}{2}\left\langle \mathbf{H}\cdot\frac{\partial \mu_0\mathbf{M}}{\partial t} - \mu_0\mathbf{M}\cdot\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\right\rangle \equiv \frac{1}{2}\left\langle \mathbf{H}\cdot\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{B}\cdot\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\right\rangle = \\
&= \frac{1}{4}\operatorname{Re}\Big\{\mathbf{H}^*\cdot(i\omega\mathbf{B}) - \mathbf{B}^*\cdot(i\omega\mathbf{H})\Big\} = \\
&= \frac{1}{4}\operatorname{Re}\Big\{i\omega\big(\mathbf{H}^*\cdot\overline{\boldsymbol{\mu}}\cdot\mathbf{H} + \mathbf{H}^*\cdot\overline{\zeta}\cdot\mathbf{E} - \mathbf{H}\cdot\overline{\boldsymbol{\mu}}^*\cdot\mathbf{H}^* - \mathbf{H}\cdot\overline{\zeta}^*\cdot\mathbf{E}^*\big)\Big\} = \\
&= \frac{1}{4}\operatorname{Re}\Big\{i\omega\big[\mathbf{H}^*\cdot(\overline{\boldsymbol{\mu}} - \overline{\boldsymbol{\mu}}^{\dagger})\cdot\mathbf{H} - 2\mathbf{E}^*\cdot\overline{\zeta}^{\dagger}\cdot\mathbf{H}\big]\Big\} \equiv \\
&\equiv \frac{1}{2}\operatorname{Re}\Big\{i\omega\big(\overline{\boldsymbol{\mu}}^{a} : \mathbf{H}\mathbf{H}^* - \overline{\zeta}^{\dagger} : \mathbf{H}\mathbf{E}^*\big)\Big\},
\end{aligned}
\tag{2.1.22}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle I_{\mathrm{J}} \rangle &= \langle \mathbf{J}\cdot\mathbf{E} \rangle = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\{\mathbf{J}\cdot\mathbf{E}^*\} = \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{Re}\{\mathbf{E}^*\cdot\overline{\sigma}_c\cdot\mathbf{E}\} \equiv \frac{1}{2}\overline{\sigma}_c : \mathbf{E}\mathbf{E}^*.
\end{aligned}
\tag{2.1.23}
$$

Подстановка выражений (2.1.21)–(2.1.23) в уравнение (2.1.20) дает теорему Пойнтинга для средних во времени величин, совпадающую по форме с усредненным уравнением (2.1.12), а именно

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\langle \mathbf{S} \rangle + \langle q \rangle = 0. \tag{2.1.24}$$

Уравнение (2.1.24) содержит средний вектор Пойнтинга (среднюю плотность переносимой мощности, Вт/м^2) в виде

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\{\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*\} \tag{2.1.25}$$

и среднюю плотность мощности объемных потерь (Вт/м^3) в виде

$$\langle q \rangle = \langle I_{\mathrm{P}} \rangle + \langle I_{\mathrm{M}} \rangle + \langle I_{\mathrm{J}} \rangle = \\ = \frac{1}{2}\overline{\boldsymbol{\sigma}}_e : \mathbf{E}\mathbf{E}^* + \frac{1}{2}\overline{\boldsymbol{\sigma}}_m : \mathbf{H}\mathbf{H}^* + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\overline{\boldsymbol{\sigma}}_{me} : \mathbf{H}\mathbf{E}^*\right\}. \tag{2.1.26}$$

Здесь мы имеем введенными:

- результирующий тензор *электрической проводимости*,

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}}_e = \overline{\boldsymbol{\sigma}}_c + \overline{\boldsymbol{\sigma}}_d = \overline{\boldsymbol{\sigma}}_c + i\omega\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\,a} \equiv \overline{\boldsymbol{\sigma}}_c + \frac{i\omega}{2}\left(\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} - \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\,\dagger}\right), \tag{2.1.27}$$

учитывающий проводящие ($\overline{\boldsymbol{\sigma}}_c$) и диэлектрические ($\overline{\boldsymbol{\sigma}}_d = i\omega\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\,a}$) потери среды;

- тензор *магнитной проводимости*,

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}}_m = i\omega\overline{\boldsymbol{\mu}}^{\,a} \equiv \frac{i\omega}{2}\left(\overline{\boldsymbol{\mu}} - \overline{\boldsymbol{\mu}}^{\,\dagger}\right), \tag{2.1.28}$$

учитывающий магнитные потери среды;

- тензор *магнитоэлектрической проводимости*,

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}}_{me} = i\omega\left(\overline{\boldsymbol{\xi}} - \overline{\boldsymbol{\zeta}}^{\,\dagger}\right) \equiv i\omega\left[\left(\overline{\boldsymbol{\xi}}^{\,h} - \overline{\boldsymbol{\zeta}}^{\,h}\right) + \left(\overline{\boldsymbol{\xi}}^{\,a} + \overline{\boldsymbol{\zeta}}^{\,a}\right)\right], \tag{2.1.29}$$

составленный из эрмитовых (с индексом h) и антиэрмитовых (с индексом a) частей тензоров $\overline{\boldsymbol{\xi}}$ и $\overline{\boldsymbol{\zeta}}$. В отличие от $\overline{\boldsymbol{\sigma}}_{me}$, тензоры $\overline{\boldsymbol{\sigma}}_e = \overline{\boldsymbol{\sigma}}_c + i\omega\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\,a}$ и $\overline{\boldsymbol{\sigma}}_m = i\omega\overline{\boldsymbol{\mu}}^{\,a}$ являются эрмитовыми, так что они образуют в выражении (2.1.26) *положительно определенные* квадратичные формы [25].

Таким образом, в отличие от сложных сред с пространственной дисперсией, исследованных в работе [40], для бианизотропных сред (не имеющих уравнений движения) слагаемые (2.1.9)–(2.1.11) в правой части теоремы Пойнтинга (2.1.7) не дают дополнительных вкладов к электромагнитным величинам (2.1.8), а учитывают лишь электрические, магнитные и магнитоэлектрические потери в виде (2.1.27)–(2.1.29).

2.1.2. Интегральная форма теоремы Пойнтинга. Чтобы получить выражения для мощности, которая переносится и рассеивается модами, распространяющимися вдоль волноведущей структуры с бианизотропной средой, необходимо перейти от дифференциальной формы (2.1.24) теоремы Пойнтинга для средних величин к ее интегральной форме.

С этой целью будем интегрировать (2.1.24) по сложному поперечному сечению $S = \sum_i S_i$, составленному из нескольких сред, имеющих сечение S_i, ограниченное контуром L_i, и применять двумерную теорему о дивергенции следующего вида (см., например, с. 150 в книге [8]):

$$\int\limits_{S_i} (\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A})\,dS = \frac{\partial}{\partial z}\int\limits_{S_i} (\mathbf{e}_z\cdot\mathbf{A})\,dS + \oint\limits_{L_i} (\mathbf{n}_{\mathrm{o}}\cdot\mathbf{A})\,dL, \tag{2.1.30}$$

которая получается как предельный переход из трехмерной теоремы Гаусса–Остроградского [25]. В выражении (2.1.30) под $\mathbf{A}$ понимается произвольное векторное поле, а $\mathbf{n}_{\mathrm{o}}$ означает *внешнюю* (для сечения S_i) единичную нормаль к контуру L_i, перпендикулярную продольному орту $\mathbf{e}_z$. Применение интегрального соотношения (2.1.30) к $\boldsymbol{\nabla}\cdot\langle\,\mathbf{S}\,\rangle$ дает равенство

$$\int\limits_S (\nabla\cdot\langle \mathbf{S}\rangle)dS = \frac{\partial}{\partial z}\int\limits_S (\mathbf{e}_z\cdot\langle \mathbf{S}\rangle)dS - \sum_i \oint\limits_{L_i} \langle \mathbf{n}_i^+\cdot \mathbf{S}^+ + \mathbf{n}_i^-\cdot \mathbf{S}^-\rangle dL, \quad (2.1.31)$$

где $\mathbf{S}^{\pm}$ соответствует значениям вектора Пойнтинга, взятым в точках контура L_i, которые лежат по разные его стороны, отмеченные *внутренними* (для каждой соседней среды) единичными нормалями $\mathbf{n}_i^{\pm} = \pm\,\mathbf{n}_i$.

На границах раздела сред касательные компоненты полей непрерывны, т. е. на соответствующих частях контура L_i выполняются ЭГУ вида

$$\mathbf{n}_i^+\times \mathbf{E}^+ + \mathbf{n}_i^-\times \mathbf{E}^- = 0, \quad (2.1.32)$$

$$\mathbf{n}_i^+\times \mathbf{H}^+ + \mathbf{n}_i^-\times \mathbf{H}^- = 0. \quad (2.1.33)$$

Тогда подынтегральное выражение в контурном интеграле (2.1.31) обращается в нуль. Действительно, используя (2.1.32) и (2.1.33), получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{n}_i^+\cdot \mathbf{S}^+ + \mathbf{n}_i^-\cdot \mathbf{S}^- &= (\mathbf{n}_i^+\times \mathbf{E}^+)\cdot \mathbf{H}^+ + (\mathbf{n}_i^-\times \mathbf{E}^-)\cdot \mathbf{H}^- = \\ &= (\mathbf{n}_i^+\times \mathbf{E}^+)\cdot(\mathbf{H}^+ - \mathbf{H}^-) = -(\mathbf{n}_i^+\times \mathbf{H}^+ + \mathbf{n}_i^-\times \mathbf{H}^-)\cdot \mathbf{E}^+ = 0.\end{aligned} \quad (2.1.34)$$

Единственный вклад в контурный интеграл дают те части контура L_i, которые проходят по металлическим поверхностям с неидеальной проводимостью, на которых выполняется импедансное граничное условие [1–9, 41]:

$$\mathbf{n}_i\times \mathbf{E}_\tau = \overline{\mathbf{Z}}_s\cdot \mathbf{H}_\tau. \quad (2.1.35)$$

Здесь $\mathbf{n}_i$ — единичная нормаль, направленная *внутрь* металла, $\mathbf{E}_\tau$ и $\mathbf{H}_\tau$ — электрическое и магнитное поля, касательные к поверхности металла, а $\overline{\mathbf{Z}}_s$ — тензор поверхностного импеданса. Для частного случая изотропного металла с проводимостью σ и толщиной скин-слоя $\delta = \sqrt{2/\omega\mu_0\sigma}$ имеем [1–9]

$$\overline{\mathbf{Z}}_s = (1+i)\,\mathcal{R}_s\overline{\mathbf{I}}, \qquad \text{где} \quad \mathcal{R}_s = \frac{1}{\sigma\delta} = \sqrt{\frac{\omega\mu_0}{2\sigma}}\,. \quad (2.1.36)$$

Таким образом, подынтегральное выражение в контурном интеграле формулы (2.1.31) определяет среднюю плотность мощности *поверхностных потерь* $\langle q^{(s)}\rangle$ (Вт/м^2), которая появляется в дополнение к средней плотности мощности *объемных потерь* $\langle q^{(b)}\rangle$ (Вт/м^3), входящей в теорему Пойнтинга (2.1.24). Объемные и поверхностные величины помечены верхними индексами (b) и (s) (от англ. *bulk* и *surface*).

Интегрирование дифференциальной формы (2.1.24) теоремы Пойнтинга по поперечному сечению S волновода с использованием формул (2.1.25), (2.1.26), (2.1.31) и (2.1.34)–(2.1.36) приводит к ее интегральной форме:

$$\frac{dP}{dz} + Q = 0. \quad (2.1.37)$$

Активная электромагнитная мощность (Вт), переносимая в положительном направлении оси z, равняется

$$P = \int_S \langle \mathbf{S} \rangle \cdot \mathbf{e}_z \, dS = \frac{1}{2} \mathrm{Re} \int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot \mathbf{e}_z \, dS. \qquad (2.1.38)$$

Общая активная мощность потерь в единице длины волновода (Вт/м), вызванная объемным вкладом $Q^{(b)}$ (получаемым интегрированием $\langle q^{(b)} \rangle$ по составному сечению $S = \sum_i S_i$) и поверхностным (скиновым) вкладом $Q^{(s)}$ (получаемым интегрированием $\langle q^{(s)} \rangle$ вдоль составного контура $L = \sum_i L_i$) равняется

$$\begin{aligned} Q = Q^{(b)} + Q^{(s)} &= \int_S \langle q^{(b)} \rangle \, dS + \int_L \langle q^{(s)} \rangle \, dL = \\ &= \frac{1}{2} \int_S (\overline{\sigma}_e : \mathbf{E}\mathbf{E}^*) \, dS + \frac{1}{2} \int_S (\overline{\sigma}_m : \mathbf{H}\mathbf{H}^*) \, dS + \\ &+ \frac{1}{2} \mathrm{Re} \int_S (\overline{\sigma}_{me} : \mathbf{H}\mathbf{E}^*) \, dS + \frac{1}{2} \int_L \mathcal{R}_s (\mathbf{H}_\tau \cdot \mathbf{H}_\tau^*) \, dL, \end{aligned} \qquad (2.1.39)$$

где двоеточие означает двойное скалярное произведение, определяемое как $\overline{\sigma}_e : \mathbf{E}\mathbf{E}^* = \mathbf{E}^* \cdot \overline{\sigma}_e \cdot \mathbf{E}$.

2.1.3. Электромагнитная энергия в бианизотропных средах. Теорема Пойнтинга в дифференциальной форме (2.1.24) для средних во времени энергетических величин не содержит плотности запасенной энергии $\langle w \rangle$. Чтобы найти $\langle w \rangle$, обычно применяют вариационный метод (см., например, [22]). Для этого необходимо вывести соотношение, связывающее вариации электромагнитного поля ($\delta \mathbf{E}$, $\delta \mathbf{H}$) с возмущениями частоты и параметров бианизотропной среды $\big(\delta(\omega \overline{\boldsymbol{\varepsilon}})$, $\delta(\omega \overline{\boldsymbol{\mu}})$, $\delta(\omega \overline{\boldsymbol{\xi}})$, $\delta(\omega \overline{\boldsymbol{\zeta}})\big)$, которые и порождают подобные вариации поля.

Запишем вихревые уравнения Максвелла (2.1.1) для монохроматических процессов в бианизотропной среде, подставляя в них материальные уравнения (2.1.13) и (2.1.14),

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -i\omega \overline{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{H} - i\omega \overline{\boldsymbol{\zeta}} \cdot \mathbf{E}, \\ \nabla \times \mathbf{H} &= i\omega \overline{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{E} + i\omega \overline{\boldsymbol{\xi}} \cdot \mathbf{H}. \end{aligned} \qquad (2.1.40)$$

При этом материальные тензоры удовлетворяют требованию отсутствия потерь, записанному в виде равенств (2.1.18) и $\overline{\sigma}_c = 0$. Взятием вариации в уравнениях (2.1.40) приходим к следующим равенствам:

$$\begin{aligned} \nabla \times \delta \mathbf{E} &= -i\omega \overline{\boldsymbol{\mu}} \cdot \delta \mathbf{H} - i\omega \overline{\boldsymbol{\zeta}} \cdot \delta \mathbf{E} - i\delta(\omega \overline{\boldsymbol{\mu}}) \cdot \mathbf{H} - i\delta(\omega \overline{\boldsymbol{\zeta}}) \cdot \mathbf{E}, \\ \nabla \times \delta \mathbf{H} &= i\omega \overline{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \delta \mathbf{E} + i\omega \overline{\boldsymbol{\xi}} \cdot \delta \mathbf{H} + i\delta(\omega \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}) \cdot \mathbf{E} + i\delta(\omega \overline{\boldsymbol{\xi}}) \cdot \mathbf{H}. \end{aligned} \qquad (2.1.41)$$

Применим к равенствам (2.1.41) ту же самую процедуру получения квадратичных соотношений, которая была уже использована при выводе (2.1.6). В результате этого получаем

$$\begin{aligned}
&\nabla \cdot (\mathbf{E}^* \times \delta\mathbf{H} + \delta\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = \\
&\qquad = -i\omega\Big[\mathbf{E}^* \cdot (\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} - \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\dagger}) \cdot \delta\mathbf{E} + \mathbf{H}^* \cdot (\overline{\boldsymbol{\mu}} - \overline{\boldsymbol{\mu}}^{\dagger}) \cdot \delta\mathbf{H} + \\
&\qquad\qquad + \mathbf{E}^* \cdot (\overline{\boldsymbol{\xi}} - \overline{\boldsymbol{\zeta}}^{\dagger}) \cdot \delta\mathbf{H} + \mathbf{H}^* \cdot (\overline{\boldsymbol{\zeta}} - \overline{\boldsymbol{\xi}}^{\dagger}) \cdot \delta\mathbf{E}\Big] - \\
&\qquad\quad - i\Big[\mathbf{E}^* \cdot \delta(\omega\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}) \cdot \mathbf{E} + \mathbf{H}^* \cdot \delta(\omega\overline{\boldsymbol{\mu}}) \cdot \mathbf{H} + \\
&\qquad\qquad + \mathbf{E}^* \cdot \delta(\omega\overline{\boldsymbol{\xi}}) \cdot \mathbf{H} + \mathbf{H}^* \cdot \delta(\omega\overline{\boldsymbol{\zeta}}) \cdot \mathbf{E}\Big].
\end{aligned}$$

Здесь члены внутри первой квадратной скобки исчезают из-за соотношений (2.1.18), выражающих отсутствие потерь в среде, так что

$$\begin{aligned}
&\nabla \cdot (\mathbf{E}^* \times \delta\mathbf{H} + \delta\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = \\
&\qquad = -i\Big[\delta(\omega\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}) : \mathbf{E}\mathbf{E}^* + \delta(\omega\overline{\boldsymbol{\mu}}) : \mathbf{H}\mathbf{H}^* + 2\,\mathrm{Re}\,\{\delta(\omega\overline{\boldsymbol{\xi}}) : \mathbf{H}\mathbf{E}^*\}\Big].
\end{aligned} \tag{2.1.42}$$

Электромагнитные поля волнового процесса, распространяющегося в среде вдоль направления z с фазовой постоянной β, и их вариации записываются в следующем виде:

$$\mathbf{E} = \widehat{\mathbf{E}}\,e^{-i\beta z} \quad \text{и} \quad \delta\mathbf{E} = (\delta\widehat{\mathbf{E}} - i\delta\beta z\,\widehat{\mathbf{E}})\,e^{-i\beta z}, \tag{2.1.43}$$

$$\mathbf{H} = \widehat{\mathbf{H}}\,e^{-i\beta z} \quad \text{и} \quad \delta\mathbf{H} = (\delta\widehat{\mathbf{H}} - i\delta\beta z\,\widehat{\mathbf{H}})\,e^{-i\beta z}. \tag{2.1.44}$$

Подставляем (2.1.43) и (2.1.44) в (2.1.42) и применяем интегральное соотношение (2.1.31), в котором контурные интегралы отсутствуют из-за непрерывности касательных компонент полей, что приводит к нулевому равенству (2.1.34). Тогда интегрирование по поперечному сечению S дает

$$\begin{aligned}
&\delta\beta\,\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\int\limits_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot \mathbf{e}_z\,dS = \\
&= \frac{1}{4}\int\limits_S \Big[\delta(\omega\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}) : \widehat{\mathbf{E}}\widehat{\mathbf{E}}^* + \delta(\omega\overline{\boldsymbol{\mu}}) : \widehat{\mathbf{H}}\widehat{\mathbf{H}}^* + 2\,\mathrm{Re}\,\{\delta(\omega\overline{\boldsymbol{\xi}}) : \widehat{\mathbf{H}}\widehat{\mathbf{E}}^*\}\Big]dS.
\end{aligned} \tag{2.1.45}$$

В левой части равенства (2.1.45) в качестве множителя при $\delta\beta$ стоит среднее значение мощности P. Используем известное соотношение [4, 24, 32]

$$P = v_{\mathrm{gr}}W, \tag{2.1.46}$$

где $v_{\mathrm{gr}} = \big(\partial\beta(\omega)/\partial\omega\big)^{-1}$ означает групповую скорость распространяющейся волны. Тогда из равенства (2.1.45) получаем искомое выражение для среднего значения электромагнитной энергии, запасенной в единице длины волновода (Дж/м),

$$W = \frac{1}{4}\int\limits_S \left[\mathbf{E}^* \cdot \frac{\partial(\omega\overline{\boldsymbol{\varepsilon}})}{\partial\omega} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{H}^* \cdot \frac{\partial(\omega\overline{\boldsymbol{\mu}})}{\partial\omega} \cdot \mathbf{H}\right] dS + \\ + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int\limits_S \left[\mathbf{E}^* \cdot \frac{\partial(\omega\overline{\boldsymbol{\xi}})}{\partial\omega} \cdot \mathbf{H}\right] dS \equiv \int\limits_S \langle w\rangle\, dS. \tag{2.1.47}$$

Как следует из (2.1.47), средняя плотность энергии, запасенной в *недиссипативной бианизотропной среде*, выражается следующей формулой:

$$\langle w\rangle = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}\mathbf{E}^* & \mathbf{H}^*\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial(\omega\overline{\boldsymbol{\varepsilon}})/\partial\omega & \partial(\omega\overline{\boldsymbol{\xi}})/\partial\omega \\ \partial(\omega\overline{\boldsymbol{\zeta}})/\partial\omega & \partial(\omega\overline{\boldsymbol{\mu}})/\partial\omega \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\mathbf{E} \\ \mathbf{H}\end{pmatrix}. \tag{2.1.48}$$

Эта формула является обобщением ранее известных выражений для изотропных и анизотропных сред [22, 41] на случай бианизотропной среды.

2.2. Модальные разложения переносимой мощности и мощности потерь в закрытых волноводах

На данном этапе ограничимся рассмотрением только закрытых волноводов, спектр мод которых всегда дискретный, что не создает сложностей, связанных с учетом непрерывного спектра. Позже это ограничение снимается и, начиная с п. 2.10, будут рассмотрены характерные особенности, порожденные излучательными модами в открытых волноведущих структурах.

Как следует из приложения Б, система модальных полей для *закрытого волновода* образует бесконечное счетное множество векторных функций, квадратично интегрируемых на его поперечном сечении S. Это множество может быть выбрано в качестве базиса соответствующего гильбертова пространства для *модального разложения* электромагнитных полей вне области возбуждающих источников (см. уравнения (7) и (Б.2.10)–(Б.2.11)):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_t, z) = \sum_m A_m\, \widehat{\mathbf{E}}_m(\mathbf{r}_t)\, e^{-\gamma_m z} = \sum_m a_m(z)\, \widehat{\mathbf{E}}_m(\mathbf{r}_t), \tag{2.2.1}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}_t, z) = \sum_m A_m\, \widehat{\mathbf{H}}_m(\mathbf{r}_t)\, e^{-\gamma_m z} = \sum_m a_m(z)\, \widehat{\mathbf{H}}_m(\mathbf{r}_t). \tag{2.2.2}$$

Каждая m-я мода характеризуется постоянной продольного распространения $\gamma_m = \alpha_m + i\beta_m$ и мембранными функциями $\widehat{\mathbf{E}}_m, \widehat{\mathbf{H}}_m$ (зависящими только от координат $\mathbf{r}_t$ поперечного сечения, что отмечено колпачком сверху, см. приложение Б.2). Эти величины считаются известными из решения граничной задачи для регулярного волновода, принятого в качестве базового.

Амплитуда возбуждения $A_m(z)$ моды определяется возбуждающими источниками, занимающими некоторую область вдоль оси z, внутри которой она зависит от z, как результат действия этих источников. Однако вне области источников $A_m(z) = \mathrm{const}$, что характерно для для уравнений (2.2.1) и (2.2.2).

Часто вместо амплитуды возбуждения $A_m(z)$ удобно использовать *волновую* (или *модальную*) *амплитуду*, вводимую соотношением

$$a_m(z) = A_m(z)e^{-\gamma_m z} = A_m(z)e^{-\alpha_m z}e^{-i\beta_m z}. \tag{2.2.3}$$

Удобство ее применения состоит в том, что $a_m(z)$ учитывает результирующую зависимость от z, вызванную как невозмущенной постоянной распространения $\left(\exp(-\gamma_m z)\right)$, так и действием возбуждающих источников $\left(A_m(z)\right)$.

Применим модальные разложения полей (2.2.1) и (2.2.2) для нахождения индивидуального вклада мод в переносимую мощность $P(z)$ и в мощность потерь $Q(z)$, даваемые формулами (2.1.38) и (2.1.39) вне области источников. Окончательный результат вычислений следующий:

$$\begin{aligned} P(z) &= \frac{1}{2}\operatorname{Re}\int\limits_S (\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*)\cdot\mathbf{e}_z dS \equiv \frac{1}{4}\int\limits_S (\mathbf{E}^*\times\mathbf{H} + \mathbf{E}\times\mathbf{H}^*)\cdot\mathbf{e}_z\, dS = \\ &= \frac{1}{4}\sum_m\sum_n N_{mn}a_m^*(z)a_n(z) \equiv \sum_m\sum_n P_{mn}(z), \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

$$\begin{aligned} Q(z) &= \frac{1}{2}\int\limits_S (\mathbf{E}^*\cdot\overline{\sigma}_e\cdot\mathbf{E})\, dS + \frac{1}{2}\int\limits_S (\mathbf{H}^*\cdot\overline{\sigma}_m\cdot\mathbf{H})\, dS + \\ &+ \frac{1}{4}\int\limits_S (\mathbf{E}^*\cdot\overline{\sigma}_{me}\cdot\mathbf{H} + \mathbf{H}^*\cdot\overline{\sigma}_{me}^{\dagger}\cdot\mathbf{E})\, dS + \frac{1}{2}\int\limits_L \mathcal{R}_s\,(\mathbf{H}_\tau^*\cdot\mathbf{H}_\tau)\, dL = \\ &= \frac{1}{4}\sum_m\sum_n M_{mn}a_m^*(z)a_n(z) \equiv \sum_m\sum_n Q_{mn}(z). \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

Здесь введены *нормировочные коэффициенты*,

$$N_{mn} = \int\limits_S \left(\widehat{\mathbf{E}}_m^*\times\widehat{\mathbf{H}}_n + \widehat{\mathbf{E}}_n\times\widehat{\mathbf{H}}_m^*\right)\cdot\mathbf{e}_z\, dS, \tag{2.2.6}$$

и *диссипативные коэффициенты*, включающие объемные и поверхностные (скиновые) потери,

$$\begin{aligned} M_{mn} \equiv M_{mn}^{(b)} + M_{mn}^{(s)} &= 2\int\limits_S \left(\widehat{\mathbf{E}}_m^*\cdot\overline{\sigma}_e\cdot\widehat{\mathbf{E}}_n\right) dS + 2\int\limits_S \left(\widehat{\mathbf{H}}_m^*\cdot\overline{\sigma}_m\cdot\widehat{\mathbf{H}}_n\right) dS + \\ &+ \int\limits_S \left(\widehat{\mathbf{E}}_m^*\cdot\overline{\sigma}_{me}\cdot\widehat{\mathbf{H}}_n + \widehat{\mathbf{H}}_m^*\cdot\overline{\sigma}_{me}^{\dagger}\cdot\widehat{\mathbf{E}}_n\right) dS + 2\int\limits_L \mathcal{R}_s\left(\widehat{\mathbf{H}}_{\tau m}^*\cdot\widehat{\mathbf{H}}_{\tau n}\right) dL, \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

которые построены на мембранных функциях (отмеченных сверху колпачком) для m-й и n-й мод.

Из выражений (2.2.6) и (2.2.7) следует, что матрицы $\{N_{mn}\}$ и $\{M_{mn}\}$ являются эрмитовыми, т. е.

$$N_{mn} = N_{nm}^* \quad \text{и} \quad M_{mn} = M_{nm}^*, \tag{2.2.8}$$

а их элементы имеют размерности Вт и Вт/м, соответственно, так как амплитуды A_m и a_m — безразмерные (см. табл. 1.1 в п. 1.9).

Следовательно, диагональные элементы $N_{mm} \equiv N_m$ и $M_{mm} \equiv M_m$ являются чисто вещественными. В частности, N_m определяет *собственную норму* m-й активной моды в виде (см. формулы (9) и (Б.2.5))

$$N_m \equiv N_{mm} = 2\mathrm{Re}\int\limits_S \left(\widehat{\mathbf{E}}_m \times \widehat{\mathbf{H}}_m^*\right) \cdot \mathbf{e}_z dS. \tag{2.2.9}$$

Вклады $P_m(z)$ и $Q_m(z)$, появляющиеся в разложениях (2.2.4) и (2.2.5) при $n = m$ в форме

$$P_m(z) \equiv P_{mm}(z) = \frac{1}{4} N_{mm}\, a_m^*(z) a_m(z) = \frac{1}{4} N_m |A_m|^2 e^{-2\alpha_m z}, \tag{2.2.10}$$

$$Q_m(z) \equiv Q_{mm}(z) = \frac{1}{4} M_{mm}\, a_m^*(z) a_m(z) = \frac{1}{4} M_m |A_m|^2 e^{-2\alpha_m z}, \tag{2.2.11}$$

определяют в точке z реальные значения *собственной мощности*, переносимой (P_m) и рассеиваемой (Q_m) m-й модой, которая была возбуждена с амплитудой A_m при выходе из области источников в точке $z = 0$.

Аналогично этому, вклады $P_{mn}(z)$ и $Q_{mn}(z)$ при $n \neq m$, равные

$$P_{mn}(z) = \frac{1}{4} N_{mn}\, a_m^*(z) a_n(z) = \frac{1}{4} N_{mn}\, A_m^* A_n\, e^{-(\gamma_m^* + \gamma_n) z}, \tag{2.2.12}$$

$$Q_{mn}(z) = \frac{1}{4} M_{mn}\, a_m^*(z) a_n(z) = \frac{1}{4} M_{mn}\, A_m^* A_n\, e^{-(\gamma_m^* + \gamma_n) z}, \tag{2.2.13}$$

могут быть интерпретированы как комплексные значения в точке z *взаимной мощности* (*кросс-мощности*), переносимой (P_{mn}) и рассеиваемой (Q_{mn}) совместно m-й и n-й модами, которые были возбуждены с амплитудами A_m и A_n при выходе из области источников в точке $z = 0$.

Из-за равенств (2.2.8) комплексные взаимные мощности (2.2.12) и (2.2.13) также являются эрмитовыми:

$$P_{mn}(z) = P_{nm}^*(z) \qquad \text{и} \qquad Q_{mn}(z) = Q_{nm}^*(z). \tag{2.2.14}$$

Из выражений (2.2.12)–(2.2.14) следует, что в волноводах с потерями для любой пары мод всегда существует реальная *парная кросс-мощность* — переносимая P_{mn}^{pair} и рассеиваемая Q_{mn}^{pair}:

$$P_{mn}^{pair}(z) \equiv P_{mn}(z) + P_{nm}(z) = 2\mathrm{Re}\, P_{mn}(z) = \\ = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left\{N_{mn}\, a_m^*(z) a_n(z)\right\}, \tag{2.2.15}$$

$$Q_{mn}^{pair}(z) \equiv Q_{mn}(z) + Q_{nm}(z) = 2\mathrm{Re}\, Q_{mn}(z) = \\ = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left\{M_{mn}\, a_m^*(z) a_n(z)\right\}. \tag{2.2.16}$$

Таким образом, с учетом выражений (2.2.15) и (2.2.16) двойные суммы в формулах (2.2.4) и (2.2.5) принимают чисто вещественные значения, которые определяют следующие *модальные разложения*:

- для средней *мощности, переносимой модами* вдоль волновода,

$$P(z) = \sum_m \sum_n P_{mn}(z) = \sum_m P_m(z) + \sum_m \sum_{n \neq m} P_{mn}^{pair}(z) =$$
$$= \frac{1}{4} \sum_m N_m \left|a_m(z)\right|^2 + \frac{1}{2} \mathrm{Re} \sum_m \sum_{n>m} N_{mn}\, a_m^*(z) a_n(z), \qquad (2.2.17)$$

- для средней *мощности, диссипируемой модами* в волноводе с потерями,

$$Q(z) = \sum_m \sum_n Q_{mn}(z) = \sum_m Q_m(z) + \sum_m \sum_{n \neq m} Q_{mn}^{pair}(z) =$$
$$= \frac{1}{4} \sum_m M_m \left|a_m(z)\right|^2 + \frac{1}{2} \mathrm{Re} \sum_m \sum_{n>m} M_{mn}\, a_m^*(z) a_n(z). \qquad (2.2.18)$$

Здесь собственные величины $N_m \equiv N_{mm}$ и $M_m \equiv M_{mm}$ для каждой m-й моды принимают чисто вещественные значения, в отличие от комплексных взаимных величин N_{mn} и M_{mn} при $m \neq n$, дающих тем не менее вещественные парные значения мощностей (2.2.15) и (2.2.16).

Выражения (2.2.17) и (2.2.18) для модального разложения мощностей справедливы не только вне, но и внутри области источников, где волновые амплитуды $a_m(z)$ в форме (2.2.3) учитывают продольную зависимость амплитуд возбуждения $A_m(z)$, порожденную действием источников.

В следующем параграфе будут получены специальные *соотношения квази-ортогональности*, связывающие кросс-мощности P_{mn} и Q_{mn}, которые справедливы как для каждой пары мод (m, n) в диссипативных волноводах (п. 2.3), так и для специфической пары мод $(m, \widetilde{m})$, названной *двойниковой парой*, в недиссипативных волноводах (п. 2.4).

2.3. Квази-ортогональность мод в закрытых волноводах с потерями

Начнем с рассмотрения наиболее общего случая сложной волноведущей структуры закрытого типа, содержащей в своем составе *бианизотропную среду*. Будем учитывать как *объемные потери* в среде — а) электрические в форме (2.1.27), б) магнитные в форме (2.1.28), в) магнитоэлектрические в форме (2.1.29), так и *поверхностные потери*, вызванные скин-эффектом в металлах и выражаемые формулой (2.1.36).

Рассмотрим *вне области* возбуждающих источников две моды волноведущей структуры с номерами m и n. Они подчиняются вихревым уравнениям Максвелла (2.1.1), переписанным с помощью бианизотропных материальных уравнений (2.1.13), (2.1.14) и (2.1.19) для гармонических полей частоты ω в следующей форме:

- для m-й моды (с комплексным сопряжением)

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E}_m^* &= i\omega\overline{\boldsymbol{\mu}}^* \cdot \mathbf{H}_m^* + i\omega\overline{\boldsymbol{\zeta}}^* \cdot \mathbf{E}_m^*, \\ \nabla \times \mathbf{H}_m^* &= (\overline{\boldsymbol{\sigma}}_c^* - i\omega\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^*) \cdot \mathbf{E}_m^* - i\omega\overline{\boldsymbol{\xi}}^* \cdot \mathbf{H}_m^*; \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

- для n-ой моды (без комплексного сопряжения)

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E}_n &= -i\omega\overline{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{H}_n - i\omega\overline{\boldsymbol{\zeta}} \cdot \mathbf{E}_n, \\ \nabla \times \mathbf{H}_n &= (\overline{\boldsymbol{\sigma}}_c + i\omega\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}) \cdot \mathbf{E}_n + i\omega\overline{\boldsymbol{\xi}} \cdot \mathbf{H}_n. \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

Скалярно умножая первые уравнения (2.3.1) и (2.3.2) на $\mathbf{H}_n$ и $\mathbf{H}_m^*$, соответственно, а вторые — на $-\mathbf{E}_n$ и $-\mathbf{E}_m^*$, соответственно, и применяя после их сложения тождество $\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b})$ [25], получаем

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{E}_m^* \times \mathbf{H}_n + \mathbf{E}_n \times \mathbf{H}_m^*) = -2\left(\mathbf{E}_m^* \cdot \overline{\boldsymbol{\sigma}}_e \cdot \mathbf{E}_n + \mathbf{H}_m^* \cdot \overline{\boldsymbol{\sigma}}_m \cdot \mathbf{H}_n\right) - \\ - \left(\mathbf{E}_m^* \cdot \overline{\boldsymbol{\sigma}}_{me} \cdot \mathbf{H}_n + \mathbf{H}_m^* \cdot \overline{\boldsymbol{\sigma}}_{me}^{\dagger} \cdot \mathbf{E}_n\right), \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

где были использованы формулы (2.1.27)–(2.1.29).

Применение двумерной теоремы о дивергенции в форме (2.1.30) к левой части уравнения (2.3.3), аналогично (2.1.31), и использование граничных условий типа (2.1.32)–(2.1.36) приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial z}\int_S (\mathbf{E}_m^* \times \mathbf{H}_n + \mathbf{E}_n \times \mathbf{H}_m^*) \cdot \mathbf{e}_z \, dS = \\ &= -2\int_S (\mathbf{E}_m^* \cdot \overline{\boldsymbol{\sigma}}_e \cdot \mathbf{E}_n) \, dS - 2\int_S (\mathbf{H}_m^* \cdot \overline{\boldsymbol{\sigma}}_m \cdot \mathbf{H}_n) \, dS - \\ &\quad - \int_S (\mathbf{E}_m^* \cdot \overline{\boldsymbol{\sigma}}_{me} \cdot \mathbf{H}_n + \mathbf{H}_m^* \cdot \overline{\boldsymbol{\sigma}}_{me}^{\dagger} \cdot \mathbf{E}_n) \, dS - 2\int_L \mathcal{R}_s (\mathbf{H}_{\tau m}^* \cdot \mathbf{H}_{\tau n}) \, dL. \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

Электрическое и магнитное поля m-й (n-й) моды имеют вид (1), т. е.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{m(n)}(\mathbf{r}_t, z) &= \widehat{\mathbf{E}}_{m(n)}(\mathbf{r}_t) e^{-\gamma_{m(n)} z}, \\ \mathbf{H}_{m(n)}(\mathbf{r}_t, z) &= \widehat{\mathbf{H}}_{m(n)}(\mathbf{r}_t) e^{-\gamma_{m(n)} z}. \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

Подстановка (2.3.5) в формулу (2.3.4), с использованием выражений (2.2.6) и (2.2.7) для нормировочных и диссипативных коэффициентов N_{mn} и M_{mn}, приводит к следующему равенству:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[N_{mn} e^{-(\gamma_m^* + \gamma_n) z}\right] = -M_{mn} e^{-(\gamma_m^* + \gamma_n) z}, \tag{2.3.6}$$

которое дает искомое ***соотношение квази-ортогональности***

$$(\gamma_m^* + \gamma_n) N_{mn} = M_{mn}. \tag{2.3.7}$$

Как будет видно из последующего рассмотрения (см. уравнение (2.8.31)), соотношение квази-ортогональности в форме (2.3.7) играет ту же роль при выводе уравнений возбуждения для волноводов с потерями, что и обычное соотношение ортогональности для волноводов без потерь, когда $M_{mn} = 0$.

Выражения (2.2.12) и (2.2.13) связывают коэффициенты N_{mn} и M_{mn}, соответственно, с взаимной переносимой мощностью P_{mn} и взаимной мощностью потерь Q_{mn}, которые переносят и рассеивают совместно m-я и n-я моды вне области источников, где $A_m(z) = \text{const}$ и $A_n(z) = \text{const}$. Использование этих выражений приводит соотношение квази-ортогональности (2.3.7) к *энергетической форме*:

$$(\gamma_m^* + \gamma_n)P_{mn} = Q_{mn}. \tag{2.3.8}$$

Эта форма позволяет дать следующую *физическую интерпретацию* соотношения квази-ортогональности: вне области источников любая пара мод независимо от других переносит комплексную кросс-мощность P_{mn}, которая жестко связана с комплексной кросс-мощностью потерь Q_{mn} через множитель $(\gamma_m^* + \gamma_n)$, содержащий постоянные распространения этих мод $\gamma_{m(n)} = \alpha_{m(n)} + i\beta_{m(n)}$. Согласно (2.2.15) и (2.2.16), парные кросс-мощности $P_{mn}^{pair} = P_{mn} + P_{nm}$ и $Q_{mn}^{pair} = Q_{mn} + Q_{nm}$ всегда остаются вещественными для данной пары мод и не зависят от наличия других мод.

Поскольку вне области источников амплитуды возбуждения A_m всех мод постоянны, то энергетическая форма (2.3.8) соотношения квази-ортогональности означает, что теорема Пойнтинга (2.1.37) справедлива не только для суммарного поля всех мод, но и для каждой произвольно взятой пары (m, n). С учетом (2.2.12) и (2.2.13), из соотношения (2.3.8) действительно следует

$$\frac{dP_{mn}}{dz} + Q_{mn} = 0. \tag{2.3.9}$$

Кроме того, каждая одиночная мода переносит собственную мощность $P_m \equiv P_{mm}$ и имеет собственную мощность потерь $Q_m \equiv Q_{mm}$, определенные формулами (2.2.10) и (2.2.11). Эти собственные мощности также жестко связаны друг с другом соотношением типа (2.3.8) или (2.3.9), которое при $n = m$ дает следующее выражение для постоянной затухания:

$$\alpha_m = \frac{Q_m}{2P_m} = \frac{M_m}{2N_m}.$$

Таким образом, в волноводах с потерями имеет место следующая картина переноса мощности модами. Любая m-я мода удаляется от области источников с неизменной амплитудой A_m (затухание учитывается амплитудной постоянной α_m, входящей в γ_m), которую она приобрела внутри области возбуждения. За пределами этой области каждая мода, будучи линейно независимым решением граничной задачи, не взаимодействует с другими модами, что и обеспечивает постоянство амплитуды (см. п. 2.9). При этом мода переносит как свою *собственную мощность* P_m, построенную на полях только m-й моды, так и *взаимные мощности* P_{mn}, созданные полями этой моды попарно с другими модами n, которые также были возбуждены внутри области источников и вне ее сохраняют постоянными свои амплитуды A_n.

2.4. Ортогональность активных и реактивных мод в волноводах без потерь

Соотношение ортогональности для недиссипативных волноведущих структур получается из общего соотношения квази-ортогональности (2.3.7) как частный случай при $M_{mn} = 0$ в привычной форме

$$(\gamma_m^* + \gamma_n)N_{mn} = 0. \tag{2.4.1}$$

Как показано с общих электродинамических позиций в п. 1.1, в спектре закрытых волноведущих структур со сложными (в том числе бианизотропными) средами без потерь всегда имеются два типа собственных мод:

- распространяющиеся моды, названные *активными модами*, с чисто мнимой постоянной распространения $\gamma_m = i\beta_m$ при $\alpha_m \equiv 0$,
- нераспространяющиеся моды, названные *реактивными модами* с комплексной постоянной распространения $\gamma_m = \alpha_m + i\beta_m$ при $\alpha_m \neq 0$, в частности, допускающие $\beta_m = 0$.

Активные моды получили свое название по той причине, что каждая из них (скажем, с номером m) переносит собственную активную мощность P_m, определенную выражением (2.2.10) в отсутствие затухания ($\alpha_m = 0$). Такие моды существуют в *полосе пропускания* волновода и имеют поперечную структуру полей либо *объемного типа*, описываемого формулой (1.1.7), либо *поверхностного типа*, описываемого формулой (1.1.22).

Реактивные моды называются в литературе по-разному — комплексные моды, исчезающие моды или моды отсечки (англ. *complex, evanescent or cutoff modes*). Они существуют только в *полосе непропускания* волновода, что отражено названием *моды отсечки. Комплексные моды* соответствуют общему случаю комплексных значений постоянной распространения $\gamma_m = \alpha_m + i\beta_m$. В частном случае при $\beta_m = 0$ возникают *исчезающие моды*, поперечная структура полей которых описывается формулой (1.1.14). Новое название «*реактивные моды*» отражает тот факт, что каждая из этих мод, как увидим вскоре (см. п. 2.4.2), *не переносит* собственную активную мощность ($P_m = 0$) из-за отсутствия групповой скорости, но всегда запасает реактивную энергию. Это представление, как было показано в п. 1.4, распространяется также на реактивные излучательные моды непрерывного спектра в открытых волноводах. Дискретная реактивная m-я мода может переносить парную активную мощность $P_{m\widetilde{m}}^{pair}$, даваемую формулой (2.2.15) при $n = \widetilde{m}$, *лишь* совместно со своей *двойниковой модой* (англ. *twin-conjugate mode*), имеющей номер $\widetilde{m}$, помеченный знаком тильды (см. п. 2.4.2).

Покажем, что в волноводах без потерь, независимо от геометрии поперечного сечения и параметров волноведущей среды, каждая реактивная мода с номером m имеет своего двойника с номером $\widetilde{m}$, такого что их постоянные распространения связаны соотношением

$$\gamma_{\widetilde{m}} = -\gamma_m^* \tag{2.4.2}$$

или $\alpha_{\widetilde{m}} = -\alpha_m$ и $\beta_{\widetilde{m}} = \beta_m$ для амплитудных и фазовых постоянных.

Существование среди реактивных (нераспространяющихся) мод двойниковых пар, обладающих свойством (2.4.2), может быть ооосновано с помощью следующих рассуждений.

Наш электродинамический анализ строится на выборе волнового множителя в форме $\exp\left[i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\right]$, где $k_z = -i\gamma$. Тогда, согласно (1.1.3), любая компонента электромагнитного поля m-й моды имеет вид

$$f_m(\mathbf{r}_t, z, t) = \widehat{f}_m(\mathbf{r}_t)\, e^{i(\omega t - k_{z,m} z)}. \tag{2.4.3}$$

Наряду с этим, возможна альтернативная форма волнового множителя $\exp\left[-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\right]$ с противоположным знаком мнимой единицы (часто используемая в физической литературе). При таком выборе волнового множителя будем обозначать моды номерами с тильдой. Тогда для поля $\widetilde{m}$-й моды, которая является двойником моды m, имеем

$$f_{\widetilde{m}}(\mathbf{r}_t, z, t) = \widehat{f}_{\widetilde{m}}(\mathbf{r}_t)\, e^{-i(\omega t - k_{z,\widetilde{m}} z)}. \tag{2.4.4}$$

Естественно, что спектр мод волноведущей структуры не может зависеть от выбора формы записи волнового множителя. Это означает, что при записи в форме (2.4.4) номер $\widetilde{m}$ пробегает в спектре те же значения, что и номер m в формуле (2.4.3). Из сравнения этих формул можно установить соответствие между нумерацией мод при двух альтернативных выборах волнового множителя. Действительно, комплексным сопряжением выражения (2.4.3) приводим его к форме записи (2.4.4):

$$f^*_m(\mathbf{r}_t, z, t) = \widehat{f}^*_m(\mathbf{r}_t)\, e^{-i(\omega t - k^*_{z,m} z)}. \tag{2.4.5}$$

Сравнение (2.4.4) и (2.4.5) показывает, что мембранные функции и продольные волновые числа двойниковой пары $(m, \widetilde{m})$ связаны соотношениями

$$\widehat{f}_{\widetilde{m}}(\mathbf{r}_t) = \widehat{f}^*_m(\mathbf{r}_t), \tag{2.4.6}$$

$$k_{z,\widetilde{m}} = k^*_{z,m} \qquad \text{или} \qquad \gamma_{\widetilde{m}} = -\gamma^*_m, \tag{2.4.7}$$

что доказывает искомое равенство (2.4.2).

Именно такие реактивные моды, которые имеют одинаковую фазовую скорость ($\beta_m = \beta_{\widetilde{m}}$), но затухают по амплитуде в противоположных направлениях ($\alpha_m = -\alpha_{\widetilde{m}}$), и образуют *двойниковую пару* $(m, \widetilde{m})$. Противоположные знаки амплитудных постоянных α_m и $\alpha_{\widetilde{m}}$ говорят о том, что одна из этих мод является *прямой*, а другая — *обратной* (см. с. 29 и конец п. 1.3), т. е. вне области они существуют по разные стороны от нее. И лишь внутри области источников двойниковые моды существуют в паре, обеспечивая, как увидим ниже, перенос активной мощности в форме (2.4.22).

Рассмотрим специфику ортогональности активных и реактивных мод, исходя из общего соотношения (2.4.1), применимого для недиссипативных волноведущих структур.

2.4.1. Соотношения ортогональности и нормировки активных мод. Активные (распространяющиеся) моды существуют в полосе пропускания волноводов без потерь, где они имеют нулевую постоянную затухания ($\alpha_m = 0$), так что их постоянная распространения чисто мнимая ($\gamma_m = i\beta_m$).

В этом случае соотношение ортогональности (2.4.1), переписанное в виде

$$(\beta_m - \beta_n) N_{mn} = 0, \tag{2.4.8}$$

вместе с выражением (2.2.6) для нормировочного коэффициента N_{mn} обеспечивает две альтернативные возможности:

- при $n \neq m$, когда $\beta_m \neq \beta_n$,

$$N_{mn} \equiv \int\limits_S \left(\widehat{\mathbf{E}}_m^* \times \widehat{\mathbf{H}}_n + \widehat{\mathbf{E}}_n \times \widehat{\mathbf{H}}_m^*\right) \cdot \mathbf{e}_z \, dS = 0, \tag{2.4.9}$$

- при $n = m$, когда $\beta_m = \beta_n$,

$$N_m \equiv N_{mm} = 2\,\mathrm{Re} \int\limits_S \left(\widehat{\mathbf{E}}_m^* \times \widehat{\mathbf{H}}_m\right) \cdot \mathbf{e}_z \, dS \neq 0. \tag{2.4.10}$$

Соотношение (2.4.9) выражает привычную *ортогональность* между распространяющимися модами, для которых $\beta_m \neq \beta_n$. В то же время формула (2.4.10) определяет *собственную норму* $N_m \equiv N_{mm}$ для m-й моды, совпадающую с выражением (2.2.9).

Следует отметить, что соотношение (2.4.9) не выполняется для вырожденных мод с разными номерами m и n, для которых однако $\beta_m = \beta_n$. В этом случае можно применить известную процедуру ортогонализации Грама–Шмидта [25], которая используется в теории обычных волноводов [4, 6]. Для этого вырожденные моды объединяют в линейные комбинации, составляющие новое подмножество, для членов которого выполняется соотношение ортогональности типа (2.4.9). По этой причине в дальнейшем не будем уделять специального внимания вырожденным модам.

Из формул (2.2.12) и (2.4.9) следует, что две различные невырожденные активные моды (с разными номерами $m \neq n$) всегда имеют нулевую взаимную мощность ($P_{mn} = 0$), построенную на полях этих двух мод, т. е. они взаимно ортогональны в энергетическом смысле.

Любая активная мода переносит собственную мощность P_m, построенную только на полях этой моды в форме (2.2.10) при $\alpha_m = 0$. Это выражение позволяет дать следующую интерпретацию нормы активной моды:

$$N_m = 4P_m^\circ, \tag{2.4.11}$$

где P_m° называется *нормировочной мощностью* и определяет активную мощность, переносимую в положительном направлении оси z m-й модой с единичной амплитуды ($|A_m| = 1$). Такая нормировка является *нормировкой на единичную амплитуду* (см. конец п. 1.8).

В том случае, когда мода имеет амплитуду $A_m(z)$, переносимая ею мощность (2.2.10) равняется

$$P_m(z) = P_m^\circ \, |A_m(z)|^2 = \frac{1}{4} N_m \, |a_m(z)|^2. \tag{2.4.12}$$

В большинстве случаев удобнее использовать *нормировку на единичную мощность*, при которой нормировочная мощность $|P_m^\circ| = 1$ Вт и норма моды

$|N_m| = 4$ Вт. В этом случае формула (2.2.10) дает переносимую мощность в виде

$$P_{\pm m}(z) = \pm\,|A_{\pm m}(z)|^2 = \pm\,|a_{\pm m}(z)|^2. \tag{2.4.13}$$

Здесь двойные знаки $\pm$ соответствуют прямым модам (с индексом $+m > 0$) и обратным модам (с индексом $-m < 0$), где под m (при наличии знаков $\pm$) понимается модуль $|m|$ номера моды. Следовательно, прямые и обратные активные моды имеют нормы разных знаков: $N_{+m} = 4$ Вт и $N_{-m} = -4$ Вт.

Для *взаимного волновода*, в спектре которого для каждой прямой моды (с номером $+m$) существует обратная мода (с номером $-m$), имеющая тот же закон дисперсии, нормы этих мод связаны равенством

$$N_{+m} = -N_{-m}. \tag{2.4.14}$$

В заключение полезно вместо двух равенств (2.4.9) и (2.4.10) записать единое ***соотношение ортонормировки*** для активных мод в следующем виде:

$$N_{mn} = N_{mm}\delta_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad n \neq m, \\ N_{mm} \equiv N_m & \text{при} \quad n = m, \end{cases} \tag{2.4.15}$$

где нормировочные коэффициенты N_{mn} и модальные нормы N_m определены, соответственно, формулами (2.2.6) и (2.2.9).

2.4.2. Соотношения ортогональности и нормировки реактивных мод. Реактивные моды в волноводах без потерь являются модами отсечки, существующими в полосе непропускания с постоянными распространения $\gamma_m = \alpha_m + i\beta_m$, которые в общем случае являются комплекснозначными и лишь для исчезающих мод (с $\beta_m = 0$) становятся чисто действительными. Поэтому для реактивных мод справедливо общее соотношение ортогональности (2.4.1), которое вместе с выражением (2.2.6) для нормировочного коэффициента N_{mn} и равенством (2.4.2) для двойниковых мод с номерами m и $\widetilde{m}$ обеспечивает две альтернативные возможности:

- при $n \neq \widetilde{m}$, когда $\gamma_m \neq -\gamma_n^*$,

$$N_{mn} \equiv \int\limits_S (\widehat{\mathbf{E}}_m^* \times \widehat{\mathbf{H}}_n + \widehat{\mathbf{E}}_n \times \widehat{\mathbf{H}}_m^*) \cdot \mathbf{e}_z\, dS = 0, \tag{2.4.16}$$

- при $n = \widetilde{m}$, когда $\gamma_m = -\gamma_{\widetilde{m}}^*$,

$$N_{m\widetilde{m}} = \int\limits_S (\widehat{\mathbf{E}}_m^* \times \widehat{\mathbf{H}}_{\widetilde{m}} + \widehat{\mathbf{E}}_{\widetilde{m}} \times \widehat{\mathbf{H}}_m^*) \cdot \mathbf{e}_z\, dS \neq 0. \tag{2.4.17}$$

Равенство (2.4.16) исполняет роль *соотношения ортогональности* для реактивных (нераспространяющихся) мод. Из него видно, что реактивная m-я мода ортогональна другим n-м модам (реактивным с $\alpha_n \neq 0$ и активным с $\alpha_n = 0$), для которых $\gamma_m^* + \gamma_n \neq 0$ и $N_{mn} = 0$. Это верно и при $n = m$, так как $\gamma_m^* + \gamma_m = 2\alpha_m \neq 0$ и $N_{mm} = 0$, т. е. любая *реактивная мода* в этом смысле *ортогональна самой себе*.

Единственной модой, неортогональной к данной реактивной m-й моде, является ее собственный *двойник* с номером $\widetilde{m}$, для которого постоянная распространения $\gamma_{\tilde{m}}$ связаны с γ_m равенством (2.4.2), т. е. $\gamma_{\tilde{m}} = -\gamma_m^*$. Тогда из соотношения (2.4.1) при $n = \tilde{m}$ вытекает (2.4.17), т. е. $N_{m\tilde{m}} \neq 0$.

Каждая из мод, входящих в состав *двойниковой пары* $(m, \tilde{m})$, будучи неортогональной своему двойнику, имеет *норму*, $N_m \equiv N_{m\tilde{m}}$ или $N_{\tilde{m}} \equiv N_{\tilde{m}m}$, построенную на полях этой пары мод, в соответствии с определением (2.4.17), а именно

$$N_m \equiv N_{m\tilde{m}} = \int\limits_S (\widehat{\mathbf{E}}_m^* \times \widehat{\mathbf{H}}_{\tilde{m}} + \widehat{\mathbf{E}}_{\tilde{m}} \times \widehat{\mathbf{H}}_m^*) \cdot \mathbf{e}_z \, dS = \\ = 2\int\limits_S (\widehat{\mathbf{E}}_m^* \times \widehat{\mathbf{H}}_m^*) \cdot \mathbf{e}_z \, dS = 2\int\limits_S (\widehat{\mathbf{E}}_{\tilde{m}} \times \widehat{\mathbf{H}}_{\tilde{m}}) \cdot \mathbf{e}_z \, dS, \tag{2.4.18}$$

$$N_{\tilde{m}} \equiv N_{\tilde{m}m} = \int\limits_S (\widehat{\mathbf{E}}_{\tilde{m}}^* \times \widehat{\mathbf{H}}_m + \widehat{\mathbf{E}}_m \times \widehat{\mathbf{H}}_{\tilde{m}}^*) \cdot \mathbf{e}_z \, dS = \\ = 2\int\limits_S (\widehat{\mathbf{E}}_{\tilde{m}}^* \times \widehat{\mathbf{H}}_{\tilde{m}}^*) \cdot \mathbf{e}_z \, dS = 2\int\limits_S (\widehat{\mathbf{E}}_m \times \widehat{\mathbf{H}}_m) \cdot \mathbf{e}_z \, dS. \tag{2.4.19}$$

Здесь в последних равенствах была использована формула (2.4.6), устанавливающая связь между мембранными функциями для полей двойниковых мод следующего вида:

$$\widehat{\mathbf{E}}_{\tilde{m}}(\mathbf{r}_t) = \widehat{\mathbf{E}}_m^*(\mathbf{r}_t) \quad \text{и} \quad \widehat{\mathbf{H}}_{\tilde{m}}(\mathbf{r}_t) = \widehat{\mathbf{H}}_m^*(\mathbf{r}_t). \tag{2.4.20}$$

Как видно, из (2.4.18) и (2.4.19), в отличие от вещественной нормы (2.4.10) активной моды, норма реактивной моды всегда комплексная, при этом для пары двойниковых мод их нормы — комплексно-сопряженные:

$$N_m = N_{\tilde{m}}^*. \tag{2.4.21}$$

Это согласуется с общим свойством эрмитовой симметрии нормировочных коэффициентов, выраженным равенством (2.2.8).

Из (2.2.10), (2.2.12) и (2.4.16) следует, что любая реактивная m-я мода не переносит как собственной мощности ($P_{mm} = 0$ в силу $N_{mm} = 0$), так и взаимной мощности ($P_{mn} = 0$ в силу $N_{mn} = 0$) с теми модами n, для которых $\gamma_n \neq -\gamma_m^*$, т. е. эти моды ортогональны в энергетическом смысле.

Несмотря на отсутствие собственной переносимой мощности у одиночной реактивной моды, пара двойниковых мод в области их совместного существования переносит реальную *парную кросс-мощность* (ср. уравнение (2.2.15)):

$$P_{m\tilde{m}}^{pair} \equiv P_{m\tilde{m}} + P_{\tilde{m}m} = 2\mathrm{Re}\, P_{m\tilde{m}} = \\ = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\,\{N_m\, A_m^* A_{\tilde{m}}\} \equiv \frac{1}{2}\mathrm{Re}\,\{N_{\tilde{m}}\, A_{\tilde{m}}^* A_m\}. \tag{2.4.22}$$

Из выражения (2.4.22) видно, что для переноса реальной мощности реактивными модами необходимо, чтобы обе моды двойниковой пары имели ненулевые амплитуды и находились в таком фазовом соотношении, при котором парная кросс-мощность $P_{m\tilde{m}}^{pair}$ отлична от нуля.

Подобная ситуация существует в регулярном взаимном волноводе конечной длины, ограниченном нерегулярностями на противоположных концах и возбуждаемом на частотах ниже частоты отсечки для основной моды [1–6]. Отражения от концевых нерегулярностей образуют внутри такого запредельного отрезка волновода стоячую волну из двух исчезающих мод с номерами $m = +m$ (прямая мода) и $\widetilde{m} = -m$ (обратная мода), которые составляют двойниковую пару с $\beta_{\pm m} = 0$ и $\gamma_{+m} \equiv \alpha_{+m} = -\alpha_{-m} \equiv -\gamma^*_{-m}$. Нетрудно убедиться в том, что нормы для прямой и обратной исчезающих мод являются чисто мнимыми и связанными друг с другом общим соотношением (2.4.21). Суперпозиция полей таких мод с противоположным направлением затухания обеспечивает ненулевой поток кросс-мощности $P^{pair}_{+m,-m}$ через отрезок запредельного волновода конечной длины. На этом основан принцип работы запредельных аттенюаторов.

В заключение полезно вместо двух равенств (2.4.16) и (2.4.17) записать единое ***соотношение ортонормировки*** для реактивных (нераспространяющихся) мод в следующем виде:

$$N_{mn} = N_{m\widetilde{m}}\delta_{\widetilde{m}n} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad n \neq \widetilde{m}, \\ N_{m\widetilde{m}} \equiv N_m & \text{при} \quad n = \widetilde{m}, \end{cases} \tag{2.4.23}$$

где нормировочные коэффициенты N_{mn} и модальные нормы $N_m \equiv N_{m\widetilde{m}}$ определены, соответственно, формулами (2.2.6) и (2.4.18).

Из сравнения (2.4.15) и (2.4.23) видно, что последнее соотношение имеет более общую форму, так как оно применимо и к активным модам как частный случай, получаемый заменой индекса $\widetilde{m}$ на m, при этом норма $N_m \equiv N_{m\widetilde{m}}$ принимает вид, даваемый формулой (2.4.10).

Уместно отметить, что все вышеприведенные выражения для модальных норм и соотношения ортогональности и ортонормировки могут содержать полные векторы модальных полей вместо их мембранных функций (помеченных колпачком сверху), так как они связаны между собой формулами (2.3.5). Следовательно, колпачок над векторами поля в приведенных выше выражениях может быть опущен, что вполне очевидно для активных мод, а для реактивных двойниковых пар следует из равенства $\gamma^*_m + \gamma_{\widetilde{m}} = 0$.

Если в волноведущей структуре присутствуют как активные (распространяющиеся), так и реактивные (нераспространяющиеся) моды, то полная мощность (2.2.17), переносимая всеми модами, на основании вышесказанного равняется

$$\begin{aligned} P(z) &= P_{act}(z) + P_{react}(z) = \sum_{\substack{m \\ (active)}} P_m(z) + {\sum_{\substack{m \\ (reactive)}}}' P^{pair}_{m\widetilde{m}}(z) = \\ &= \frac{1}{4} \sum_{\substack{m \\ (active)}} N_m |a_m(z)|^2 + \frac{1}{2} \operatorname{Re} {\sum_{\substack{m \\ (reactive)}}}' N_m\, a^*_m(z) a_{\widetilde{m}}(z), \end{aligned} \tag{2.4.24}$$

где верхний штрих у знака суммы означает суммирование двойниковых мод парами вместо суммирования одиночных реактивных мод.

2.5. Объемные и поверхностные возбуждающие источники

До настоящего момента сторонние источники, возбуждающие сложные волноведущие структуры с бианизотропными средами, были исключены из рассмотрения, т. е. изучались собственные моды структуры вне области, занятой возбуждающими источниками. Начиная с этого параграфа, основное внимание будет уделено исследованию поведения волноводных мод внутри области источников. Совокупность собственных полей $\{\mathbf{E}_m, \mathbf{H}_m\}$ этих мод считается известной из решения граничной задачей на собственные значения для рассматриваемого волновода. Модальные поля записаны в форме (2.3.5), которая включает мембранные векторные функции $\widehat{\mathbf{E}}_m, \widehat{\mathbf{H}}_m$ (зависящие только от поперечных координат $\mathbf{r}_t$, что отмечено колпачком сверху) и продольную постоянную распространения $\gamma_m = \alpha_m + i\beta_m$ (входящую в волновой множитель вида $\exp(i\omega t - \gamma_m z)$).

Как следует из приложения Б, мембранные функции собственных мод образуют бесконечное счетное множество векторных функций $\{\widehat{\mathbf{E}}_m, \widehat{\mathbf{H}}_m\}$, квадратично интегрируемых на поперечном сечении S волноведущей структуры. Это множество линейно независимых функций может быть выбрано в качестве базиса гильбертова пространства для разложения искомых полей, $\mathbf{E}(\mathbf{r}_t, z)$ и $\mathbf{H}(\mathbf{r}_t, z)$, не только вне, но и внутри области источников, как это в первом случае делалось в форме уравнений (2.2.1) и (2.2.2). Однако *внутри* области источников этот векторный базис в общем случае оказывается *неполным*, так как он не может в полной мере учесть потенциальные поля возбуждающих источников (см. [42] и гл. 4 монографии [24]). Именно это приводит к необходимости введения *ортогональных дополнительных полей*, $\mathbf{E}_b(\mathbf{r}_t, z)$ и $\mathbf{H}_b(\mathbf{r}_t, z)$, добавленных к *модальным разложениям*, $\mathbf{E}_a(\mathbf{r}_t, z)$ и $\mathbf{H}_a(\mathbf{r}_t, z)$, с искомыми амплитудами возбуждения $A_m(z)$, что и обеспечивает полноту представления полей внутри источников (см. формулы (Б.2.8)–(Б.2.11)).

Таким образом, задачами, которые должна разрешить теория возбуждения волноводов, являются, во-первых, нахождение ортогональных дополнительных полей $\mathbf{E}_b(\mathbf{r}_t, z)$, $\mathbf{H}_b(\mathbf{r}_t, z)$ и, во-вторых, вывод уравнений возбуждения для нахождения амплитуд $A_m(z)$ как функций продольной координаты z. Решению этих двух задач посвящены последующие параграфы данной главы.

В самом общем случае сложных неоднородных волноведущих структур (включая многоволноводные системы, рассматриваемые в гл. 4) любой регулярный волновод, будучи выделенным из структуры, «ощущает» оставшиеся ее части (т. е. неоднородности и волноводные элементы структуры) через возмущение своих собственных полей. Это возмущающее действие должно быть представлено в виде возбуждающих объемных и поверхностных токов, входящих в уравнения Максвелла и в электродинамические граничные условия. Для такого выделенного волновода, названного *базовым волноводом*, считаются известными дисперсионные и энергетические (нормировочные) характеристики его собственных мод (см. гл. 1).

Разнообразные физические ситуации, встречающиеся при возбуждении базового волновода сторонними (англ. *external*) источниками, сводятся к следующим трем случаям:

• ***сторонние токи*** — электрические $\mathbf{J}^e_{ext}$ и магнитные $\mathbf{J}^m_{ext}$, например токи, созданные движением заряженных частиц в плазменных средах или движением намагниченности в ферритовых средах (см. [42] и гл. 4 в [24]);

• ***сторонние поля*** — электрические $\mathbf{E}_{ext}$ и магнитные $\mathbf{H}_{ext}$, например поля, созданные другими волноводами многоволноводной системы по отношению к данному базовому волноводу (см. ниже гл. 4 и гл. 7 в [24]);

• ***сторонние возмущения*** материальных тензоров бианизотропной среды $\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$, $\Delta\overline{\boldsymbol{\mu}}$, $\Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}$ и $\Delta\overline{\boldsymbol{\zeta}}$, вводимые по отношению к волноведущей среде данного базового волновода (см. [24, 37]).

Благодаря возмущениям среды, суммарные поля (электрическое $\mathbf{E}+\mathbf{E}_{ext}$ и магнитное $\mathbf{H}+\mathbf{H}_{ext}$) создают через них *избыточные индукции* (электрическую $\Delta\mathbf{D}$ и магнитную $\Delta\mathbf{B}$), которые связаны с полями при помощи материальных уравнений (2.1.13) и (2.1.14), а именно

$$\Delta\mathbf{D} = \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}\cdot(\mathbf{E}+\mathbf{E}_{ext}) + \Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}\cdot(\mathbf{H}+\mathbf{H}_{ext}), \tag{2.5.1}$$

$$\Delta\mathbf{B} = \Delta\overline{\boldsymbol{\zeta}}\cdot(\mathbf{E}+\mathbf{E}_{ext}) + \Delta\overline{\boldsymbol{\mu}}\cdot(\mathbf{H}+\mathbf{H}_{ext}). \tag{2.5.2}$$

Здесь $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ представляют собой искомые возмущенные поля в базовом волноводе, возбужденные вышеупомянутыми сторонними источниками, рассматриваемыми как заданные на данном этапе анализа. Позже возбуждающие источники, представленные в виде объемных и эффективных поверхностных токов, будут разложены в ряд по модальному спектру базового волновода, что превратит уравнения возбуждения (выводимые в этой главе) в уравнения связанных мод (выведенные в гл. 3 и 4).

Избыточные индукции (2.5.1) и (2.5.2) приводят к появлению *индуцированных* токов смещения (электрического $\mathbf{J}^e_{ind}=\partial\Delta\mathbf{D}/\partial t$ и магнитного $\mathbf{J}^m_{ind} = \partial\Delta\mathbf{B}/\partial t$), которые добавляются к сторонним токам $\mathbf{J}^e_{ext}$ и $\mathbf{J}^m_{ext}$, создавая *объемные* возбуждающие токи (нижний индекс b от англ. *bulk*):

$$\mathbf{J}^e_b = \mathbf{J}^e_{ext} + \mathbf{J}^e_{ind} = \mathbf{J}^e_{ext} + \frac{\partial}{\partial t}\Delta\mathbf{D}, \tag{2.5.3}$$

$$\mathbf{J}^m_b = \mathbf{J}^m_{ext} + \mathbf{J}^m_{ind} = \mathbf{J}^m_{ext} + \frac{\partial}{\partial t}\Delta\mathbf{B}. \tag{2.5.4}$$

Именно плотности токов (2.5.3) и (2.5.4) входят в уравнения Максвелла для искомых полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, имеющие теперь симметризованную форму:

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{J}^m_b, \tag{2.5.5}$$

$$\nabla\times\mathbf{H} = \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}^e_b. \tag{2.5.6}$$

Для монохроматических полей уравнения (2.5.5) и (2.5.6) принимают вид

$$\nabla\times\mathbf{E} = -i\omega\mathbf{B} - \mathbf{J}^m_b, \tag{2.5.7}$$

$$\nabla\times\mathbf{H} = i\omega\mathbf{D} + \mathbf{J}^e_b. \tag{2.5.8}$$

Индуцированные токи смещения, входящие в полные возбуждающие токи (2.5.3) и (2.5.4), в случае монохроматического возбуждения равняются $\mathbf{J}^e_{ind} = i\omega\Delta\mathbf{D}$ и $\mathbf{J}^m_{ind} = i\omega\Delta\mathbf{B}$.

Векторы индукции $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ для бианизотропной среды, заполняющей (хотя бы частично) базовый волновод, связаны с полями $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ материальными уравнениями (2.1.13) и (2.1.14) с невозмущенными тензорными параметрами (их возмущения вошли в избыточные индукции (2.5.1) и (2.5.2), а через них в возбуждающие токи (2.5.3) и (2.5.4)). Ток проводимости $\mathbf{J}$, введенный равенством (2.1.19), считается вошедшим в электрический ток смещения $i\omega\mathbf{D}$, подобно вторым уравнениям (2.3.1) и (2.3.2). Следовательно, тензор диэлектрической проницаемости $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ теперь рассматривается как сумма $(\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} + \overline{\boldsymbol{\sigma}}_c/i\omega)$, чья антиэрмитова часть определяет результирующий тензор электрической проводимости $\overline{\boldsymbol{\sigma}}_e = \overline{\boldsymbol{\sigma}}_c + \overline{\boldsymbol{\sigma}}_d$ в виде (2.1.27).

Наряду с объемными токами $\mathbf{J}^e_b$ и $\mathbf{J}^m_b$, входящими как возбуждающие токи в уравнения Максвелла (2.5.5) и (2.5.6), могут также существовать *поверхностные токи* $\mathbf{J}^e_s$ и $\mathbf{J}^m_s$. Эти токи, являясь сторонними по отношению к рассматриваемому базовому волноводу, играют, как и объемные, роль источника возбуждения полей. Как известно, поверхностные токи обеспечивают разрыв соответствующих касательных компонент полей на границе, где эти поверхностные токи локализованы. Этот факт записывается в форме следующих граничных условий [1–8]:

$$\mathbf{n}^+_s \times \mathbf{E}^+ + \mathbf{n}^-_s \times \mathbf{E}^- = -\mathbf{J}^m_s, \tag{2.5.9}$$

$$\mathbf{n}^+_s \times \mathbf{H}^+ + \mathbf{n}^-_s \times \mathbf{H}^- = \mathbf{J}^e_s. \tag{2.5.10}$$

Здесь векторы с верхними индексами $\pm$ дают значения полей, взятые в точках граничного контура L_s с поверхностными токами $\mathbf{J}^{e,m}_s$, лежащих по разные стороны L_s, что отмечено единичными нормалями $\mathbf{n}^\pm_s$, направленными *внутрь* соседних сред, разделяемых этим контуром.

2.6. Ортогональные дополнительные поля и эффективные поверхностные токи

Электродинамическая формулировка, приведенная в приложении Б.2 и основанная на аналогии с известными сведениями из функционального анализа (приложение Б.1), представляет абстрактное векторное поле $\mathbf{F}(\mathbf{r}_t, z)$ внутри области источников в виде суммы модального разложения $\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{r}_t, z)$, дающего *проекцию* поля $\mathbf{F}$ на гильбертово пространство, и дополнения $\mathbf{C}(\mathbf{r}_t, z)$, *ортогонального* к гильбертову пространству (см. уравнение (Б.2.6)).

Следовательно, множество мембранных векторных функций $\{\widehat{\mathbf{E}}_m, \widehat{\mathbf{H}}_m\}$ может быть использовано в качестве базиса для разложения искомых полей не только вне, но и внутри области источников. Однако внутри источников к *модальным разложениям полей* $\mathbf{E}_a$ и $\mathbf{H}_a$ в форме (Б.2.10) и (Б.2.11) (с индексом a, отражающим их зависимость от модальных амплитуд a_m) должны быть добавлены *ортогональные дополнительные поля* $\mathbf{E}_b$ и $\mathbf{H}_b$ (с индексом b, отражающим их зависимость от объемных (англ. *bulk*) источников).

Таким образом, электромагнитное поле внутри области источников записывается в полном представлении, даваемом формулами (Б.2.8) и (Б.2.9):

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}_t, z) &= \mathbf{E}_a(\mathbf{r}_t, z) + \mathbf{E}_b(\mathbf{r}_t, z) = \sum_m A_m(z)\,\mathbf{E}_m(\mathbf{r}_t, z) + \mathbf{E}_b(\mathbf{r}_t, z) = \\ &= \sum_m A_m(z)\,\widehat{\mathbf{E}}_m(\mathbf{r}_t)\,e^{-\gamma_m z} + \mathbf{E}_b(\mathbf{r}_t, z) = \\ &= \sum_m a_m(z)\,\widehat{\mathbf{E}}_m(\mathbf{r}_t) + \mathbf{E}_b(\mathbf{r}_t, z),\end{aligned} \tag{2.6.1}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(\mathbf{r}_t, z) &= \mathbf{H}_a(\mathbf{r}_t, z) + \mathbf{H}_b(\mathbf{r}_t, z) = \sum_m A_m(z)\,\mathbf{H}_m(\mathbf{r}_t, z) + \mathbf{H}_b(\mathbf{r}_t, z) = \\ &= \sum_m A_m(z)\,\widehat{\mathbf{H}}_m(\mathbf{r}_t)\,e^{-\gamma_m z} + \mathbf{H}_b(\mathbf{r}_t, z) = \\ &= \sum_m a_m(z)\,\widehat{\mathbf{H}}_m(\mathbf{r}_t) + \mathbf{H}_b(\mathbf{r}_t, z),\end{aligned} \tag{2.6.2}$$

где амплитуды возбуждения $A_m(z)$ и волновые амплитуды $a_m(z)$ связаны между собой соотношением (2.2.3).

Именно полные электромагнитные поля (2.6.1) и (2.6.2) определяют избыточные индукции (электрическую и магнитную) в форме (2.5.1) и (2.5.2), а через них и объемные токи (2.5.3) и (2.5.4), которые возбуждают эти поля. Такой подход обеспечивает самосогласованный анализ взаимодействия мод, приводящий в конечном итоге к уравнениям связанных мод.

Подстановка выражений (2.6.1) и (2.6.2) в уравнения (2.1.13) и (2.1.14) приводит к аналогичным по структуре выражениям для индукций:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}_t, z) = \mathbf{D}_a(\mathbf{r}_t, z) + \mathbf{D}_b(\mathbf{r}_t, z) = \sum_m a_m(z)\,\widehat{\mathbf{D}}_m(\mathbf{r}_t) + \mathbf{D}_b(\mathbf{r}_t, z), \tag{2.6.3}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_t, z) = \mathbf{B}_a(\mathbf{r}_t, z) + \mathbf{B}_b(\mathbf{r}_t, z) = \sum_m a_m(z)\,\widehat{\mathbf{B}}_m(\mathbf{r}_t) + \mathbf{B}_b(\mathbf{r}_t, z). \tag{2.6.4}$$

Неизвестными величинами в (2.6.1) и (2.6.2), подлежащими выражению через объемные возбуждающие токи $\mathbf{J}_b^e$ и $\mathbf{J}_b^m$, являются волновые амплитуды a_m как функции z, а также ортогональные дополнительные поля $\mathbf{E}_b$ и $\mathbf{H}_b$.

Для того, чтобы найти ортогональные дополнительные поля, необходимо подставить модальные разложения полей (2.6.1)–(2.6.2) и индукций (2.6.3)–(2.6.4) в уравнения Максвелла (2.5.7) и (2.5.8) и учесть то, что собственные модальные векторы $\mathbf{E}_m, \mathbf{H}_m$ и $\mathbf{D}_m, \mathbf{B}_m$ удовлетворяют однородным (без токов) уравнениям Максвелла:

$$\nabla \times \mathbf{E}_m = -i\omega\mathbf{B}_m, \tag{2.6.5}$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_m = i\omega\mathbf{D}_m. \tag{2.6.6}$$

После ряда преобразований с учетом (2.6.5) и (2.6.6) приходим к следующим уравнениям:

$$\sum_m \frac{dA_m}{dz}(\mathbf{e}_z \times \mathbf{E}_m) = -\nabla \times \mathbf{E}_b - i\omega\mathbf{B}_b - \mathbf{J}_b^m, \tag{2.6.7}$$

$$\sum_m \frac{dA_m}{dz}(\mathbf{e}_z \times \mathbf{H}_m) = -\nabla \times \mathbf{H}_b + i\omega\mathbf{D}_b + \mathbf{J}_b^e. \tag{2.6.8}$$

Очевидно, что левая часть (2.6.7) и (2.6.8) никогда не имеет продольной компоненты, в то время как при произвольных возбуждающих источниках правая часть такую компоненту может иметь. Отсюда с неизбежностью следует, что если предположить отсутствующими дополнительные поля, т. е. в уравнениях (2.6.7) и (2.6.8) при $J_{bz}^{e,m} \neq 0$ положить $\mathbf{E}_b = \mathbf{H}_b = \mathbf{D}_b = \mathbf{B}_b \equiv 0$, то эти уравнения становятся физически противоречивыми. Действительно, в этом случае они требуют отсутствия продольной компоненты у объемных возбуждающих токов $\mathbf{J}_b^e$ и $\mathbf{J}_b^m$, что *в общем случае* физически бессмысленно.

Таким образом, уравнения (2.6.7) и (2.6.8) являются математическим обоснованием факта существования ортогональных дополнительных полей, задача которых обратить в нуль продольную компоненту в правой части уравнений при $J_{bz}^e \neq 0$ и $J_{bz}^m \neq 0$. Это выполняется при

$$\nabla \cdot (\mathbf{e}_z \times \mathbf{E}_b) - \mathbf{e}_z \cdot (i\omega\mathbf{B}_b + \mathbf{J}_b^m) = 0, \tag{2.6.9}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{e}_z \times \mathbf{H}_b) + \mathbf{e}_z \cdot (i\omega\mathbf{D}_b + \mathbf{J}_b^e) = 0, \tag{2.6.10}$$

где было использовано тождество $\mathbf{e}_z \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) \equiv -\nabla \cdot (\mathbf{e}_z \times \mathbf{a})$.

Так как поля $\mathbf{E}_b$ и $\mathbf{H}_b$ образуют ортогональное дополнение к гильбертову пространству, построенному на базисных векторах $\{\mathbf{E}_m, \mathbf{H}_m\}$, то они должны быть ортогональны полям любой m-й моды в энергетическом смысле, выражаемом соотношением, которое записывается, аналогично (2.4.9) или (2.4.16), в форме (см. уравнение (Б.2.7))

$$\int_S (\mathbf{E}_m^* \times \mathbf{H}_b + \mathbf{E}_b \times \mathbf{H}_m^*) \cdot \mathbf{e}_z \, dS = \\ = \int_S \Big[(\mathbf{e}_z \times \mathbf{E}_b) \cdot \mathbf{H}_m^* - (\mathbf{e}_z \times \mathbf{H}_b) \cdot \mathbf{E}_m^* \Big] dS = 0. \tag{2.6.11}$$

В силу произвольности выбора m-й моды, взятой из спектра базового волновода, на котором построено гильбертово пространство, требование обращения в нуль равенства (2.6.11) может быть выполнено, если и только если

$$\mathbf{e}_z \times \mathbf{E}_b \equiv 0 \quad \text{или} \quad \mathbf{E}_b = \mathbf{e}_z E_b, \tag{2.6.12}$$

$$\mathbf{e}_z \times \mathbf{H}_b \equiv 0 \quad \text{или} \quad \mathbf{H}_b = \mathbf{e}_z H_b, \tag{2.6.13}$$

т. е. оба ортогональных дополнительных поля должны быть *продольными*.

Для того, чтобы найти E_b и H_b, необходимо подставить формулы (2.1.13), (2.1.14), (2.6.12) и (2.6.13) в уравнения (2.6.9) и (2.6.10). Тогда приходим к искомым уравнениям для нахождения полей E_b и H_b:

$$\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{D}_b \equiv \varepsilon_{zz} E_b + \xi_{zz} H_b = -\frac{1}{i\omega} J^e_{bz}, \tag{2.6.14}$$

$$\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{B}_b \equiv \zeta_{zz} E_b + \mu_{zz} H_b = -\frac{1}{i\omega} J^m_{bz}. \tag{2.6.15}$$

Ортогональные дополнительные поля получаются отсюда в виде

$$E_b = -\frac{J^e_{bz} - \nu^m J^m_{bz}}{i\omega\varepsilon_{zz}(1-\nu^e\nu^m)}, \tag{2.6.16}$$

$$H_b = -\frac{J^m_{bz} - \nu^e J^e_{bz}}{i\omega\mu_{zz}(1-\nu^e\nu^m)}, \tag{2.6.17}$$

где введены следующие обозначения для бианизотропной среды:

$$\nu^e = \frac{\zeta_{zz}}{\varepsilon_{zz}} \equiv \frac{\overline{\boldsymbol{\zeta}} : \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z}{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} : \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z} \quad \text{и} \quad \nu^m = \frac{\xi_{zz}}{\mu_{zz}} \equiv \frac{\overline{\boldsymbol{\xi}} : \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z}{\overline{\boldsymbol{\mu}} : \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z}. \tag{2.6.18}$$

Следовательно, ортогональные дополнительные поля *всегда продольные* ($\mathbf{E}_b = \mathbf{e}_z E_b$, $\mathbf{H}_b = \mathbf{e}_z H_b$) и создаются *также продольными* компонентами объемных возбуждающих токов — электрического J^e_{bz} и магнитного J^m_{bz}.

Существование ортогональных дополнительных полей $\mathbf{E}_b$ и $\mathbf{H}_b$ немедленно приводит к появлению так называемых *эффективных поверхностных токов* $\mathbf{J}^e_{s,eff}$ и $\mathbf{J}^m_{s,eff}$, что вытекает из нижеследующего рассмотрения.

Пусть область, занятая *объемными источниками*, имеет поперечное сечение S_b, ограниченное контуром L_b. Запишем полные электрические и магнитные поля внутри ($\mathbf{E}^-$, $\mathbf{H}^-$) и вне ($\mathbf{E}^+$, $\mathbf{H}^+$) сечения S_b при $z = \text{const}$:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_t, z) = \begin{cases} \sum_m A_m(z)\,\mathbf{E}_m(\mathbf{r}_t, z) + \mathbf{E}_b(\mathbf{r}_t, z) \equiv \mathbf{E}^- & \text{внутри } S_b, \\ \sum_m A_m(z)\,\mathbf{E}_m(\mathbf{r}_t, z) \equiv \mathbf{E}^+ & \text{вне } S_b; \end{cases} \tag{2.6.19}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}_t, z) = \begin{cases} \sum_m A_m(z)\,\mathbf{H}_m(\mathbf{r}_t, z) + \mathbf{H}_b(\mathbf{r}_t, z) \equiv \mathbf{H}^- & \text{внутри } S_b, \\ \sum_m A_m(z)\,\mathbf{H}_m(\mathbf{r}_t, z) \equiv \mathbf{H}^+ & \text{вне } S_b. \end{cases} \tag{2.6.20}$$

Модальные поля $\mathbf{E}_m$ и $\mathbf{H}_m$, существующие вне источников, в общем случае непрерывны в точках, лежащих на контуре L_b, ограничивающем сечение S_b. Тогда из выражений (2.6.19) и (2.6.20) следует, что касательные компоненты полных полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ имеют разрывы на контуре L_b:

$$\mathbf{n}^+_b \times \mathbf{E}^+ + \mathbf{n}^-_b \times \mathbf{E}^- = -\,\mathbf{n}_b \times \mathbf{E}_b \equiv -\mathbf{J}^m_{s,eff}, \tag{2.6.21}$$

$$\mathbf{n}^+_b \times \mathbf{H}^+ + \mathbf{n}^-_b \times \mathbf{H}^- = -\,\mathbf{n}_b \times \mathbf{H}_b \equiv \mathbf{J}^e_{s,eff}, \tag{2.6.22}$$

где $\mathbf{n}^\pm_b = \pm\,\mathbf{n}_b$ — единичные векторы, нормальные к контуру L_b и направленные *внутрь* соседних сред, разделяемых этим контуром.

Эффективные поверхностные токи введены в (2.6.21) и (2.6.22) по аналогии с граничными условиями (2.5.9) и (2.5.10) следующим образом:

$$\mathbf{J}^e_{s,eff} \equiv -\mathbf{n}_b \times \mathbf{H}_b\Big|_{L_b} = -\boldsymbol{\tau}_b \frac{J^m_{bz}(L_b) - \nu^e J^e_{bz}(L_b)}{i\omega\mu_{zz}(1-\nu^e\nu^m)}, \tag{2.6.23}$$

$$\mathbf{J}^m_{s,eff} \equiv \mathbf{n}_b \times \mathbf{E}_b\Big|_{L_b} = \boldsymbol{\tau}_b \frac{J^e_{bz}(L_b) - \nu^m J^m_{bz}(L_b)}{i\omega\varepsilon_{zz}(1-\nu^e\nu^m)}. \tag{2.6.24}$$

Здесь $J^e_{bz}(L_b)$ и $J^m_{bz}(L_b)$ — продольные компоненты объемных токов, взятые на границе L_b области их существования S_b с единичным *тангенциальным* вектором $\boldsymbol{\tau}_b = \mathbf{e}_z \times \mathbf{n}_b$, где $\mathbf{n}_b$ означает единичную нормаль к L_b, направленную *наружу* по отношению к сечению S_b, занятому объемными токами $\mathbf{J}^{e,m}_b$.

Общие выражения (2.6.16) и (2.6.17) для ортогональных дополнительных полей, $\mathbf{E}_b = \mathbf{e}_z E_b$ и $\mathbf{H}_b = \mathbf{e}_z H_b$, а также общие выражения (2.6.23) и (2.6.24) для эффективных поверхностных токов, $\mathbf{J}^e_{s,eff}$ и $\mathbf{J}^m_{s,eff}$, полученные для бианизотропных сред, принимают упрощенную форму в двух частных случаях:

- для *изотропных сред* с параметрами (2.1.15) ($\nu^e = \nu^m = 0$)

$$\mathbf{E}_b = -\frac{\mathbf{e}_z}{i\omega\varepsilon} J^e_{bz} \quad \text{и} \quad \mathbf{H}_b = -\frac{\mathbf{e}_z}{i\omega\mu} J^m_{bz}, \tag{2.6.25}$$

$$\mathbf{J}^m_{s,eff} = \frac{\boldsymbol{\tau}_b}{i\omega\varepsilon} J^e_{bz}(L_b) \quad \text{и} \quad \mathbf{J}^e_{s,eff} = -\frac{\boldsymbol{\tau}_b}{i\omega\mu} J^m_{bz}(L_b), \tag{2.6.26}$$

- для *анизотропных сред* с параметрами (2.1.16) ($\nu^e = \nu^m = 0$)

$$\mathbf{E}_b = -\frac{\mathbf{e}_z}{i\omega\varepsilon_{zz}} J^e_{bz} \quad \text{и} \quad \mathbf{H}_b = -\frac{\mathbf{e}_z}{i\omega\mu_{zz}} J^m_{bz}, \tag{2.6.27}$$

$$\mathbf{J}^m_{s,eff} = \frac{\boldsymbol{\tau}_b}{i\omega\varepsilon_{zz}} J^e_{bz}(L_b) \quad \text{и} \quad \mathbf{J}^e_{s,eff} = -\frac{\boldsymbol{\tau}_b}{i\omega\mu_{zz}} J^m_{bz}(L_b). \tag{2.6.28}$$

Выражения (2.6.25) и (2.6.27) для ортогональных дополнительных полей аналогичны выражениям, которые были получены, соответственно, Вайнштейном [4] и Фелсеном и Маркувицем [27]. Что касается эффективных поверхностных токов (2.6.26) и (2.6.28), то Вайнштейн их попросту потерял, а в теории Фелсена–Маркувица интеграл возбуждения учитывает эти токи в неявной форме, что доказано ниже в п. 2.7.2.

Таким образом, в отсутствие бианизотропии возбуждающие объемные токи (*электрические* $\mathbf{J}^e_b$ и *магнитные* $\mathbf{J}^m_b$) создают эффективные поверхностные токи (соответственно, *магнитные* $\mathbf{J}^m_{s,eff}$ и *электрические* $\mathbf{J}^e_{s,eff}$). Как видно из (2.6.23) и (2.6.24), бианизотропные свойства среды перемешивают вклады в эффективные поверхностные токи от электрических и магнитных объемных токов из-за наличия продольных компонент, ξ_{zz} и ζ_{zz}, перекрестных тензоров.

Полученные выше эффективные поверхностные токи, $\mathbf{J}^e_{s,eff}$ и $\mathbf{J}^m_{s,eff}$, также как и реальные поверхностные токи, $\mathbf{J}^e_s$ и $\mathbf{J}^m_s$, входящие в граничные условия (2.5.9) и (2.5.10), вносят вклад в амплитуды возбуждения мод A_m, наряду с объемными токами, $\mathbf{J}^e_b$ и $\mathbf{J}^m_b$.

Дальнейший шаг в разработке теории возбуждения волноводов должен быть направлен на вывод дифференциальных уравнений для нахождения продольной зависимости амплитуд возбуждения $A_m(z)$ (или волновых амплитуд $a_m(z)$) *внутри* области, занятой объемными и поверхностными возбуждающими токами. Для этой цели будем применять два независимых подхода, основанных: а) на электродинамической аналогии с математическим методом вариации постоянных [25] (см. п. 2.7) и б) на сопряженной лемме Лоренца (см. п. 2.8). Кроме того, существует третий способ вывода уравнений возбуждения, основанный на использовании уравнений (2.6.7)–(2.6.8), являющихся прямым следствием уравнений Максвелла. Этот вывод можно найти в приложении С книги [24] или в приложении В статьи [37].

2.7. Электродинамический метод вариации постоянных в теории возбуждения волноводов

Математический метод вариации постоянных [25] обычно применяют для построения решения неоднородных линейных дифференциальных уравнений путем представления его в виде суперпозиции известных линейно независимых решений соответствующего однородного уравнения с коэффициентами, которые уже не являются постоянными. Нахождение их в форме функций от независимой переменной и составляет основную задачу метода вариации постоянных.

Электродинамический аналог математического метода вариации постоянных строится посредством представления полей $\mathbf{E}(\mathbf{r}_t, z)$ и $\mathbf{H}(\mathbf{r}_t, z)$ внутри области источников в форме полных модальных разложений (2.6.1) и (2.6.2) по множеству собственных функций однородной граничной задачи $(\mathbf{E}_a(\mathbf{r}_t, z)$ и $\mathbf{H}_a(\mathbf{r}_t, z))$ совместно с ортогональными дополнительными полями $(\mathbf{E}_b(\mathbf{r}_t, z)$ и $\mathbf{H}_b(\mathbf{r}_t, z))$. Внутри области источников амплитуды возбуждения $A_m(z)$ варьируются, т. е. ищутся как функции координаты z, а не как константы вне области источников.

В полном соответствии с известной математической техникой, метод вариации постоянных должен давать дифференциальные уравнения для амплитуд мод в следующей форме:

$$\frac{dA_m(z)}{dz} = f_m(z), \qquad m = 1, 2, \ldots, \tag{2.7.1}$$

где функции $f_m(z)$ учитывают продольное распределение возбуждающих источников (объемных и поверхностных).

Интегрирование уравнения (2.7.1) дает искомую зависимость в виде

$$A_m(z) = A_m^\circ + \int f_m(z)\,dz \equiv A_m^\circ + \Delta A_m(z). \tag{2.7.2}$$

Постоянные интегрирования A_m° находятся из краевых условий типа (1.1.38) и (1.1.39), которые задают условия ввода данной m-й моды в область возбуждающих источников.

Подстановка (2.7.2) в модальные разложения полей (2.6.1) и (2.6.2) позволяет представить полное решение для электромагнитного поля внутри области источников в виде суммы *общего решения* $(\mathbf{E}_{gen}, \mathbf{H}_{gen})$ однородной граничной задачи (без возбуждающих источников) с постоянными коэффициентами A_m° и *частного решения* $(\mathbf{E}_{part}, \mathbf{H}_{part})$ неоднородной граничной задачи (с возбуждающими источниками), а именно

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}_t, z) &= \sum_m A_m^\circ \mathbf{E}_m(\mathbf{r}_t, z) + \left[\sum_m \Delta A_m(z)\, \mathbf{E}_m(\mathbf{r}_t, z) + \mathbf{E}_b(\mathbf{r}_t, z)\right] \equiv \\ &\equiv \mathbf{E}_{gen} + \mathbf{E}_{part},\end{aligned} \tag{2.7.3}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(\mathbf{r}_t, z) &= \sum_m A_m^\circ \mathbf{H}_m(\mathbf{r}_t, z) + \left[\sum_m \Delta A_m(z)\, \mathbf{H}_m(\mathbf{r}_t, z) + \mathbf{H}_b(\mathbf{r}_t, z)\right] \equiv \\ &\equiv \mathbf{H}_{gen} + \mathbf{H}_{part}.\end{aligned} \tag{2.7.4}$$

Таким образом, общая техника решения электродинамической задачи возбуждения волноводов сторонними источниками, основанная на методе вариации постоянных, приводит к представлению искомого электромагнитного поля в виде суммы общего и частного решений в форме (2.7.3) и (2.7.4). Это полностью соответствует общепринятой методике в теории линейных дифференциальных уравнений [25].

2.7.1. Вывод уравнений возбуждения мод в волноводах без потерь. Умножаем уравнения (2.6.1) и (2.6.2) векторно справа на $\widehat{\mathbf{H}}_n^*$ и $-\widehat{\mathbf{E}}_n^*$, соответственно, и складываем их. Скалярное умножение результата сложения на орт $\mathbf{e}_z$ с последующим интегрированием по сечению S волновода дает

$$\begin{aligned}\int_S (\widehat{\mathbf{E}}_n^* \times \mathbf{H} + \mathbf{E} \times \widehat{\mathbf{H}}_n^*) \cdot \mathbf{e}_z\, dS &= \sum_m a_m \int_S (\widehat{\mathbf{E}}_n^* \times \widehat{\mathbf{H}}_m + \widehat{\mathbf{E}}_m \times \widehat{\mathbf{H}}_n^*) \cdot \mathbf{e}_z\, dS + \\ &+ \int_S (\widehat{\mathbf{E}}_n^* \times \mathbf{H}_b + \mathbf{E}_b \times \widehat{\mathbf{H}}_n^*) \cdot \mathbf{e}_z\, dS.\end{aligned} \tag{2.7.5}$$

Последний интеграл в правой части (2.7.5) исчезает из-за соотношения ортогональности (2.6.11) или (Б.2.7) для дополнительных полей. В отсутствие потерь соотношения ортонормировки (2.4.15) и (2.4.23) приводят к тому, что интеграл под знаком суммирования в (2.7.5), обозначенный как N_{nm}, равняется $N_n \delta_{nm}$ для активных (распространяющихся) мод и $N_n \delta_{\tilde{n}m}$ для реактивных (нераспространяющихся) мод.

Следовательно, из формулы (2.7.5) получаем (ср. уравнение (Б.2.13)):

- для *активных мод* (с заменой индексов $n \to m$ в (2.7.5))

$$\begin{aligned}a_m &= \frac{1}{N_m} \int_S (\widehat{\mathbf{E}}_m^* \times \mathbf{H} + \mathbf{E} \times \widehat{\mathbf{H}}_m^*) \cdot \mathbf{e}_z\, dS \equiv A_m\, e^{-i\beta_m z}, \\ A_m &= \frac{1}{N_m} \int_S (\mathbf{E}_m^* \times \mathbf{H} + \mathbf{E} \times \mathbf{H}_m^*) \cdot \mathbf{e}_z\, dS,\end{aligned} \tag{2.7.6}$$

где норма активной моды $N_m \equiv N_{mm}$ определена формулой (2.4.10);

• для *реактивных мод* (с заменой индексов $n \to \widetilde{m}$ и $\widetilde{n} \to m$ в (2.7.5))

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{N_{\widetilde{m}}} \int\limits_S (\widehat{\mathbf{E}}^*_{\widetilde{m}} \times \mathbf{H} + \mathbf{E} \times \widehat{\mathbf{H}}^*_{\widetilde{m}}) \cdot \mathbf{e}_z \, dS \equiv A_m \, e^{-\gamma_m z}, \\ A_m &= \frac{1}{N_{\widetilde{m}}} \int\limits_S (\mathbf{E}^*_{\widetilde{m}} \times \mathbf{H} + \mathbf{E} \times \mathbf{H}^*_{\widetilde{m}}) \cdot \mathbf{e}_z \, dS, \end{aligned} \tag{2.7.7}$$

где норма реактивной моды $N_{\widetilde{m}} \equiv N^*_m$ определена формулой (2.4.19). При этом индекс $\widetilde{m}$ соответствует $\widetilde{m}$-й моде, которая вместе с модой m образует *двойниковую пару* мод, постоянные распространения которых связаны соотношением $\gamma_{\widetilde{m}} + \gamma^*_m = 0$.

Из сравнения (2.7.6) и (2.7.7) видно, что последние выражения имеет более общую форму, применимую не только для реактивных мод, но также и для активных мод при замене индексов $\widetilde{m}$ на m.

Полезно отметить, что выражение (2.7.6) для волновой амплитуды a_m согласуется с формулой (Б.2.13), полученной минимизацией среднеквадратичной разности D_N (между частичной суммой $\mathbf{S}_N$ в форме (Б.2.14) и модальным разложением $\mathbf{\Psi}$), записанной в виде (Б.2.15), с целью обеспечения сходимости в среднем для модального разложения.

Выражения (2.7.6) и (2.7.7) дают правило вычисления амплитуд a_m или A_m при условии, что известны электромагнитные поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, стоящие в этих выражениях под знаком интеграла. Однако на практике поля являются искомыми и нам неизвестны, а вместо них считается известным распределение токов (объемных и поверхностных). Поэтому в выражениях (2.7.6) и (2.7.7) надо перейти от полей к токам, возбуждающим эти поля.

Для этого продифференцируем по z уравнение (2.7.7):

$$\begin{aligned} N_{\widetilde{m}} \frac{dA_m}{dz} &= \frac{\partial}{\partial z} \int\limits_S (\mathbf{E}^*_{\widetilde{m}} \times \mathbf{H} + \mathbf{E} \times \mathbf{H}^*_{\widetilde{m}}) \cdot \mathbf{e}_z \, dS = \\ &= \int\limits_S \nabla \cdot (\mathbf{E}^*_{\widetilde{m}} \times \mathbf{H} + \mathbf{E} \times \mathbf{H}^*_{\widetilde{m}}) \, dS + \\ &+ \sum_i \oint\limits_{L_i} \Big[\mathbf{n}^+_i \cdot (\mathbf{E}^*_{\widetilde{m}} \times \mathbf{H} + \mathbf{E} \times \mathbf{H}^*_{\widetilde{m}})^+ + \mathbf{n}^-_i \cdot (\mathbf{E}^*_{\widetilde{m}} \times \mathbf{H} + \mathbf{E} \times \mathbf{H}^*_{\widetilde{m}})^-\Big] dL. \end{aligned} \tag{2.7.8}$$

Здесь под знаком суммы стоит контурный интеграл, полученный применением интегрального соотношения типа (2.1.31).

Полные поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ внутри области источников удовлетворяют неоднородным уравнениям Максвелла (2.5.7) и (2.5.8), в то время как модальные поля $\mathbf{E}^*_{\widetilde{m}}$ и $\mathbf{H}^*_{\widetilde{m}}$ для $\widetilde{m}$-й моды подчиняются однородным уравнениям:

$$\nabla \times \mathbf{E}^*_{\widetilde{m}} = i\omega \mathbf{B}^*_{\widetilde{m}}, \tag{2.7.9}$$

$$\nabla \times \mathbf{H}^*_{\widetilde{m}} = -i\omega \mathbf{D}^*_{\widetilde{m}}. \tag{2.7.10}$$

С помощью формул (2.1.13), (2.1.14), (2.5.7), (2.5.8), (2.7.9) и (2.7.10) нетрудно доказать, что

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\mathbf{E}^*_{\widetilde{m}}\times\mathbf{H}+\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*_{\widetilde{m}}) &= -(\mathbf{J}^e_b\cdot\mathbf{E}^*_{\widetilde{m}}+\mathbf{J}^m_b\cdot\mathbf{H}^*_{\widetilde{m}})-\\ &-i\omega\Big[(\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}-\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\dagger}):\mathbf{E}\mathbf{E}^*_{\widetilde{m}}+(\overline{\boldsymbol{\mu}}-\overline{\boldsymbol{\mu}}^{\dagger}):\mathbf{H}\mathbf{H}^*_{\widetilde{m}}+\\ &+(\overline{\boldsymbol{\xi}}-\overline{\boldsymbol{\zeta}}^{\dagger}):\mathbf{H}\mathbf{E}^*_{\widetilde{m}}+(\overline{\boldsymbol{\zeta}}-\overline{\boldsymbol{\xi}}^{\dagger}):\mathbf{E}\mathbf{H}^*_{\widetilde{m}}\Big].\end{aligned}\tag{2.7.11}$$

Здесь квадратная скобка исчезает для недиссипативной бианизотропной среды, материальные параметры которой удовлетворяют требованиям (2.1.18).

Каждый контурный интеграл в правой части (2.7.8) содержит два вклада:

а) от *реальных* поверхностных токов $\mathbf{J}^e_s$ и $\mathbf{J}^m_s$, которые локализованы на контуре L_s и удовлетворяют граничным условиям (2.5.9) и (2.5.10);

б) от *эффективных* поверхностных токов $\mathbf{J}^e_{s,eff}$ и $\mathbf{J}^m_{s,eff}$, введенных равенствами (2.6.23) и (2.6.24), которые расположены на контуре L_b, ограничивающем сечение S_b, занятое объемными токами $\mathbf{J}^e_b$ и $\mathbf{J}^m_b$, и удовлетворяют граничным условиям (2.6.21) и (2.6.22).

На основании вышесказанного можно записать следующее выражение для последнего члена в правой части (2.7.8):

$$\begin{aligned}&\sum_i\oint\limits_{L_i}\Big[\mathbf{n}^+_i\cdot(\mathbf{E}^*_{\widetilde{m}}\times\mathbf{H}+\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*_{\widetilde{m}})^+ +\mathbf{n}^-_i\cdot(\mathbf{E}^*_{\widetilde{m}}\times\mathbf{H}+\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*_{\widetilde{m}})^-\Big]dL=\\ &=\int\limits_{L_s}\Big[\mathbf{n}^+_s\cdot(\mathbf{E}^*_{\widetilde{m}}\times\mathbf{H}+\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*_{\widetilde{m}})^+ +\mathbf{n}^-_s\cdot(\mathbf{E}^*_{\widetilde{m}}\times\mathbf{H}+\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*_{\widetilde{m}})^-\Big]dL=\\ &=\int\limits_{L_b}\Big[\mathbf{n}^+_b\cdot(\mathbf{E}^*_{\widetilde{m}}\times\mathbf{H}+\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*_{\widetilde{m}})^+ +\mathbf{n}^-_b\cdot(\mathbf{E}^*_{\widetilde{m}}\times\mathbf{H}+\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*_{\widetilde{m}})^-\Big]dL=\\ &=-\int\limits_{L_s}\big(\mathbf{J}^e_s\cdot\mathbf{E}^*_{\widetilde{m}}+\mathbf{J}^m_s\cdot\mathbf{H}^*_{\widetilde{m}}\big)\,dL-\int\limits_{L_b}\big(\mathbf{J}^e_{s,eff}\cdot\mathbf{E}^*_{\widetilde{m}}+\mathbf{J}^m_{s,eff}\cdot\mathbf{H}^*_{\widetilde{m}}\big)\,dL.\end{aligned}\tag{2.7.12}$$

Формулы (2.7.8), (2.7.11) и (2.7.12) дают искомые уравнения возбуждения:

- для *амплитуды возбуждения*

$$\begin{aligned}\frac{dA_m}{dz}=&-\frac{1}{N_{\widetilde{m}}}\int\limits_{S_b}\big(\mathbf{J}^e_b\cdot\mathbf{E}^*_{\widetilde{m}}+\mathbf{J}^m_b\cdot\mathbf{H}^*_{\widetilde{m}}\big)\,dS-\\ &-\frac{1}{N_{\widetilde{m}}}\int\limits_{L_s}\big(\mathbf{J}^e_s\cdot\mathbf{E}^*_{\widetilde{m}}+\mathbf{J}^m_s\cdot\mathbf{H}^*_{\widetilde{m}}\big)\,dL-\\ &-\frac{1}{N_{\widetilde{m}}}\int\limits_{L_b}\big(\mathbf{J}^e_{s,eff}\cdot\mathbf{E}^*_{\widetilde{m}}+\mathbf{J}^m_{s,eff}\cdot\mathbf{H}^*_{\widetilde{m}}\big)\,dL;\end{aligned}\tag{2.7.13}$$

• для *волновой амплитуды*

$$
\begin{aligned}
\frac{da_m}{dz} + \gamma_m a_m = &-\frac{1}{N_{\widetilde{m}}}\int\limits_{S_b}\left(\mathbf{J}_b^e\cdot\widehat{\mathbf{E}}_{\widetilde{m}}^* + \mathbf{J}_b^m\cdot\widehat{\mathbf{H}}_{\widetilde{m}}^*\right)dS - \\
&-\frac{1}{N_{\widetilde{m}}}\int\limits_{L_s}\left(\mathbf{J}_s^e\cdot\widehat{\mathbf{E}}_{\widetilde{m}}^* + \mathbf{J}_s^m\cdot\widehat{\mathbf{H}}_{\widetilde{m}}^*\right)dL - \\
&-\frac{1}{N_{\widetilde{m}}}\int\limits_{L_b}\left(\mathbf{J}_{s,eff}^e\cdot\widehat{\mathbf{E}}_{\widetilde{m}}^* + \mathbf{J}_{s,eff}^m\cdot\widehat{\mathbf{H}}_{\widetilde{m}}^*\right)dL. \qquad (2.7.14)
\end{aligned}
$$

Разница между этими уравнениями состоит в том, что уравнение (2.7.13) для амплитуд возбуждения A_m содержит под интегралами модальные поля (без колпачка сверху), а уравнение (2.7.14) для волновых амплитуд a_m — мембранные функции полей (с колпачком сверху). Интегралы возбуждения, стоящие справа в этих уравнениях, представляют собой комплексную мощность взаимодействия объемных и поверхностных токов с модальными полями. Так как эффективные поверхностные токи (2.6.23) и (2.6.24) направлены вдоль касательного вектора $\boldsymbol{\tau}_b = \mathbf{e}_z\times\mathbf{n}_b$, то эти токи взаимодействуют лишь с поперечными компонентами модальных полей.

Уравнения (2.7.13) и (2.7.14) записаны для наиболее общего случая возбуждения реактивной m-й моды. Они остаются применимыми также для активной m-й моды, если в них сделать замены индексов $\widetilde{m}\to m$ и постоянной распространения $\gamma_m\to i\beta_m$. Как видно из этих уравнений, интегралы возбуждения m-й моды содержат не ее собственные поля $(\mathbf{E}_m, \mathbf{H}_m)$, а поля $(\mathbf{E}_{\widetilde{m}}, \mathbf{H}_{\widetilde{m}})$, присущие двойнику этой моды с номером $\widetilde{m}$. Так как модальные поля двойниковой пары связаны соотношениями (2.4.20), то интегралы возбуждения в (2.7.13) и (2.7.14) для m-й моды могут быть записаны через поля только этой моды, заменяя норму $N_{\widetilde{m}}\to N_m^*$ в соответствии с (2.4.21).

На основании вышесказанного запишем уравнение возбуждения (2.7.14) отдельно для активной и реактивной m-й моды с интегралами возбуждения, содержащими мембранные функции возбуждаемой моды:

• для *активной моды*

$$
\begin{aligned}
\frac{da_m}{dz} + i\beta_m a_m = &-\frac{1}{N_m}\int\limits_{S_b}\left(\mathbf{J}_b^e\cdot\widehat{\mathbf{E}}_m^* + \mathbf{J}_b^m\cdot\widehat{\mathbf{H}}_m^*\right)dS - \\
&-\frac{1}{N_m}\int\limits_{L_s}\left(\mathbf{J}_s^e\cdot\widehat{\mathbf{E}}_m^* + \mathbf{J}_s^m\cdot\widehat{\mathbf{H}}_m^*\right)dL, \qquad (2.7.15)
\end{aligned}
$$

где выражение (2.4.10) для *вещественной нормы* активной моды определяет

$$
N_m = 2\mathrm{Re}\int\limits_S(\widehat{\mathbf{E}}_m\times\widehat{\mathbf{H}}_m^*)\cdot\mathbf{e}_z\,dS; \qquad (2.7.16)
$$

• для *реактивной моды*

$$\frac{da_m}{dz}+\gamma_m a_m=-\frac{1}{N_m^*}\int\limits_{S_b}\left(\mathbf{J}_b^e\cdot\widehat{\mathbf{E}}_m+\mathbf{J}_b^m\cdot\widehat{\mathbf{H}}_m\right)dS-$$

$$-\frac{1}{N_m^*}\int\limits_{L_s}\left(\mathbf{J}_s^e\cdot\widehat{\mathbf{E}}_m+\mathbf{J}_s^m\cdot\widehat{\mathbf{H}}_m\right)dL, \tag{2.7.17}$$

где выражение (2.4.18) для *комплексной нормы* реактивной моды определяет

$$N_m^*=2\int\limits_S(\widehat{\mathbf{E}}_m\times\widehat{\mathbf{H}}_m)\cdot\mathbf{e}_z\,dS. \tag{2.7.18}$$

Поверхностные токи — реальные ($\mathbf{J}_s^{e,m}$) и эффективные ($\mathbf{J}_{s,eff}^{e,m}$), которые явно входили в уравнения (2.7.13) и (2.7.14), в интегралах возбуждения (2.7.15) и (2.7.17) объединены для краткости записи в суммарные поверхностные токи, совпадающие по обозначению с реальными токами $\mathbf{J}_s^{e,m}$, но учитывающими также эффективные токи при замене контура интегрирования L_s (с реальными токами) на контур L_b (с эффективными токами).

Различие между уравнениями (2.7.15) и (2.7.17) состоит в том, что возбуждающие токи ($\mathbf{J}_b^{e,m}$ и $\mathbf{J}_s^{e,m}$) взаимодействуют с модальными полями в комплексно-сопряженной форме ($\widehat{\mathbf{E}}_m^*$, $\widehat{\mathbf{H}}_m^*$) при возбуждении активных мод и в простой форме ($\widehat{\mathbf{E}}_m$, $\widehat{\mathbf{H}}_m$) при возбуждении реактивных мод; при этом их нормы (2.7.16) и (2.7.18) — вещественная и комплексная, соответственно.

2.7.2. Сравнение с теорией Фелсена–Маркувица. Сопоставим уравнение (2.7.15) для возбуждения активных мод с аналогичным уравнением, которое было иначе выведено Фелсеном и Маркувицем для волноводов с *анизотропными средами* (*без* бианизотропных свойств!) (см. гл. 8 в [27]). Авторы имели дело только с распространяющимися волноводными модами, уравнение возбуждения которых имеет следующий вид (с заменой их токов $\mathbf{J}$ и $\mathbf{M}$ нашими обозначениями $\mathbf{J}_b^e$ и $\mathbf{J}_b^m$):

$$\frac{da_m}{dz}+i\beta_m a_m=-\frac{1}{N_m}\int\limits_{S_b}\left(\mathbf{J}_{b,eff}^e\cdot\widehat{\mathbf{E}}_{mt}^*+\mathbf{J}_{b,eff}^m\cdot\widehat{\mathbf{H}}_{mt}^*\right)dS. \tag{2.7.19}$$

Следуя авторам [27], мы ввели здесь поперечные *объемные токи*, назвав их *эффективными* и обозначив в виде (с заменой $\mathbf{J}_{te}\to\mathbf{J}_{b,eff}^e$ и $\mathbf{M}_{te}\to\mathbf{J}_{b,eff}^m$)

$$\mathbf{J}_{b,eff}^e=\mathbf{J}_{bt}^e+\left(\boldsymbol{\nabla}_t\times\frac{\mathbf{J}_{bz}^m}{i\omega\mu_{zz}}\right)-\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{zt}}{\varepsilon_{zz}}J_{bz}^e, \tag{2.7.20}$$

$$\mathbf{J}_{b,eff}^m=\mathbf{J}_{bt}^m-\left(\boldsymbol{\nabla}_t\times\frac{\mathbf{J}_{bz}^e}{i\omega\varepsilon_{zz}}\right)-\frac{\boldsymbol{\mu}_{zt}}{\mu_{zz}}J_{bz}^m, \tag{2.7.21}$$

где $\mathbf{J}_{bt}^{e,m}$ и $J_{bz}^{e,m}$ — поперечные и продольная компоненты реальных объемных токов (электрических и магнитных), а из компонент тензоров проницаемости

$\overline{\varepsilon}$ и $\overline{\mu}$ составлены вспомогательные поперечные векторы [27]:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{zt} = \mathbf{e}_x\varepsilon_{xz} + \mathbf{e}_y\varepsilon_{yz} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{\mu}_{zt} = \mathbf{e}_x\mu_{xz} + \mathbf{e}_y\mu_{yz}. \tag{2.7.22}$$

Объемные токи (2.7.20) и (2.7.21), введенные Фелсеном и Маркувицем, действительно являются эффективными, поскольку от реальных токов $\mathbf{J}_b^{e,m} = \mathbf{J}_{bt}^{e,m} + \mathbf{e}_z J_{bz}^{e,m}$ они берут по отдельности поперечные и продольные компоненты и перемешивают их. Более того, каждый из эффективных объемных токов $\mathbf{J}_{b,eff}^{e}$ и $\mathbf{J}_{b,eff}^{m}$ одновременно содержит вклады от реальных токов, как электрических $\mathbf{J}_b^e$, так и магнитных $\mathbf{J}_b^m$. Это сильно запутывает физическую картину взаимодействия этих токов с поперечными модальными полями $\widehat{\mathbf{E}}_{mt}^*$ и $\widehat{\mathbf{H}}_{mt}^*$, входящими под интеграл возбуждения в уравнении (2.7.19).

Таким образом, уравнение Фелсена–Маркувица по виду в корне отличается от нашего уравнения (2.7.15), как в силу вышесказанного, так и из-за отсутствия возбуждающего вклада от эффективных поверхностных токов. Но это только на первый взгляд, поскольку в действительности наши эффективные поверхностные токи $\mathbf{J}_{s,eff}^{e,m}$ (в форме (2.6.28) для анизотропных сред) неявно учитываются эффективными объемными токами $\mathbf{J}_{b,eff}^{e,m}$, введенными Фелсеном и Маркувицем.

Для доказательства этого утверждения используем однородные уравнения Максвелла для m-й моды в анизотропном волноводе без потерь, записанные в комплексно-сопряженной форме,

$$\nabla \times \mathbf{E}_m^* = i\omega\overline{\boldsymbol{\mu}}^* \cdot \mathbf{H}_m^*, \tag{2.7.23}$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_m^* = -i\omega\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^* \cdot \mathbf{E}_m^*, \tag{2.7.24}$$

и спроектируем их на продольную ось z, вводя поперечные (с индексом t) и продольные (с индексом z) компоненты модальных полей:

$$(\nabla \times \mathbf{E}_m^*)_z \equiv (\nabla_t \times \mathbf{E}_{mt}^*)_z = i\omega(\boldsymbol{\mu}_{zt} \cdot \mathbf{H}_{mt}^* + \mu_{zz}H_{mz}^*), \tag{2.7.25}$$

$$(\nabla \times \mathbf{H}_m^*)_z \equiv (\nabla_t \times \mathbf{H}_{mt}^*)_z = -i\omega(\boldsymbol{\varepsilon}_{zt} \cdot \mathbf{E}_{mt}^* + \varepsilon_{zz}E_{mz}^*). \tag{2.7.26}$$

При записи уравнений (2.7.25) и (2.7.26) учтено, что в отсутствие потерь тензоры проницаемости эрмитовы, т. е. $\varepsilon_{kl}^* = \varepsilon_{lk}$ и $\mu_{kl}^* = \mu_{lk}$, а также использованы поперечные материальные векторы $\boldsymbol{\varepsilon}_{zt}$ и $\boldsymbol{\mu}_{zt}$, введенные равенствами (2.7.22) [27].

Выделим в подынтегральном выражении уравнения (2.7.19) слагаемое, содержащее реальные объемные токи $\mathbf{J}_b^e$ и $\mathbf{J}_b^m$, взаимодействующие с полными (поперечными и продольными) модальными полями $\widehat{\mathbf{E}}_m^*$ и $\widehat{\mathbf{H}}_m^*$, в той форме, которая входит под интеграл возбуждения в нашем уравнении (2.7.15). Тогда это подынтегральное выражение можно записать в следующем виде:

$$\left(\mathbf{J}_{b,eff}^{e} \cdot \widehat{\mathbf{E}}_{mt}^* + \mathbf{J}_{b,eff}^{m} \cdot \widehat{\mathbf{H}}_{mt}^*\right) = \left(\mathbf{J}_b^e \cdot \widehat{\mathbf{E}}_m^* + \mathbf{J}_b^m \cdot \widehat{\mathbf{H}}_m^*\right) + \\ + \left(\mathbf{F}_m^e + \mathbf{F}_m^m\right)e^{-i\beta_m z}, \tag{2.7.27}$$

где величины $\mathbf{F}_m^e$ и $\mathbf{F}_m^m$ получены на основании (2.7.20) и (2.7.21) в форме

$$\mathbf{F}_m^e = \left(\boldsymbol{\nabla}_t \times \frac{\mathbf{J}_{bz}^m}{i\omega\mu_{zz}}\right) \cdot \mathbf{E}_{mt}^* - \left(\boldsymbol{\varepsilon}_{zt} \cdot \mathbf{E}_{mt}^* + \varepsilon_{zz} E_{mz}^*\right) \frac{J_{bz}^e}{\varepsilon_{zz}}, \tag{2.7.28}$$

$$\mathbf{F}_m^m = -\left(\boldsymbol{\nabla}_t \times \frac{\mathbf{J}_{bz}^e}{i\omega\varepsilon_{zz}}\right) \cdot \mathbf{H}_{mt}^* - \left(\boldsymbol{\mu}_{zt} \cdot \mathbf{H}_{mt}^* + \mu_{zz} H_{mz}^*\right) \frac{J_{bz}^m}{\mu_{zz}}. \tag{2.7.29}$$

Первое слагаемое в (2.7.28) и (2.7.29) преобразуется с помощью тождества $(\boldsymbol{\nabla}_t \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \boldsymbol{\nabla}_t \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\boldsymbol{\nabla}_t \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a}$, а второе слагаемое содержит в скобках множитель, пропорциональный правой части одного из уравнений (2.7.25) или (2.7.26). В результате преобразований выражения (2.7.28) и (2.7.29) принимают окончательный вид:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_m^e &= -\boldsymbol{\nabla}_t \cdot \left(\mathbf{E}_{mt}^* \times \frac{\mathbf{J}_{bz}^m}{i\omega\mu_{zz}}\right) + \\ &\quad + \left(\boldsymbol{\nabla}_t \times \mathbf{E}_{mt}^*\right)_z \frac{J_{bz}^m}{i\omega\mu_{zz}} + \left(\boldsymbol{\nabla}_t \times \mathbf{H}_{mt}^*\right)_z \frac{J_{bz}^e}{i\omega\varepsilon_{zz}},\end{aligned} \tag{2.7.30}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_m^m &= \boldsymbol{\nabla}_t \cdot \left(\mathbf{H}_{mt}^* \times \frac{\mathbf{J}_{bz}^e}{i\omega\varepsilon_{zz}}\right) - \\ &\quad - \left(\boldsymbol{\nabla}_t \times \mathbf{H}_{mt}^*\right)_z \frac{J_{bz}^e}{i\omega\varepsilon_{zz}} - \left(\boldsymbol{\nabla}_t \times \mathbf{E}_{mt}^*\right)_z \frac{J_{bz}^m}{i\omega\mu_{zz}}.\end{aligned} \tag{2.7.31}$$

При сложении равенств (2.7.30) и (2.7.31) последние слагаемые взаимно уничтожаются, и остается лишь сумма первых членов в форме поперечной дивергенции $\boldsymbol{\nabla}_t \cdot (\ldots)$. Интегрированием суммы $(\mathbf{F}_m^e + \mathbf{F}_m^m)$ по поперечному сечению S_b (занятому объемными токами $\mathbf{J}_b^{e,m}$) с внешним контуром L_b и нормалью $\mathbf{n}_b$ с применением двумерной теоремы Гаусса–Остроградского [25] получаем

$$\begin{aligned}&\int_{S_b} (\mathbf{F}_m^e + \mathbf{F}_m^m) e^{-i\beta_m z} dS = \\ &\quad = -\int_{S_b} \boldsymbol{\nabla}_t \cdot \left(\widehat{\mathbf{E}}_{mt}^* \times \frac{\mathbf{J}_{bz}^m}{i\omega\mu_{zz}}\right) dS + \int_{S_b} \boldsymbol{\nabla}_t \cdot \left(\widehat{\mathbf{H}}_{mt}^* \times \frac{\mathbf{J}_{bz}^e}{i\omega\varepsilon_{zz}}\right) dS = \\ &\quad = -\oint_{L_b} \mathbf{n}_b \cdot \left(\widehat{\mathbf{E}}_{mt}^* \times \frac{\mathbf{J}_{bz}^m}{i\omega\mu_{zz}}\right) dL + \oint_{L_b} \mathbf{n}_b \cdot \left(\widehat{\mathbf{H}}_{mt}^* \times \frac{\mathbf{J}_{bz}^e}{i\omega\varepsilon_{zz}}\right) dL = \\ &\quad = \int_{L_b} \left(\mathbf{J}_{s,eff}^e \cdot \widehat{\mathbf{E}}_m^* + \mathbf{J}_{s,eff}^m \cdot \widehat{\mathbf{H}}_m^*\right) dL,\end{aligned} \tag{2.7.32}$$

где для эффективных поверхностных токов $\mathbf{J}_{s,eff}^{e,m}$ использованы выражения (2.6.28), применимые к анизотропным средам.

Подстановка выражения (2.7.27) под интеграл возбуждения в уравнении (2.7.19) с учетом (2.7.32) приводит уравнение возбуждения Фелсена–Маркувица (2.7.19) к искомой форме:

$$\frac{da_m}{dz} + i\beta_m a_m = -\frac{1}{N_m}\int\limits_{S_b}\left(\mathbf{J}_b^e \cdot \widehat{\mathbf{E}}_m^* + \mathbf{J}_b^m \cdot \widehat{\mathbf{H}}_m^*\right)dS - \\ -\frac{1}{N_m}\int\limits_{L_b}\left(\mathbf{J}_{s,eff}^e \cdot \widehat{\mathbf{E}}_m^* + \mathbf{J}_{s,eff}^m \cdot \widehat{\mathbf{H}}_m^*\right)dL. \qquad (2.7.33)$$

Это уравнение полностью совпадает с нашим уравнением (2.7.15), в котором, как отмечалось выше, эффективные поверхностные токи явно появляются при заменах $\mathbf{J}_s^{e,m} \to \mathbf{J}_{s,eff}^{e,m}$ и $L_s \to L_b$.

Итак, интеграл возбуждения в уравнении Фелсена–Маркувица с *эффективными* ***объемными*** *токами* $\mathbf{J}_{b,eff}^{e,m}$ в форме (2.7.20) и (2.7.21) неявно учитывает введенные нами *эффективные* ***поверхностные*** *токи* $\mathbf{J}_{s,eff}^{e,m}$ в форме (2.6.23) и (2.6.24), имеющие частный вид (2.6.28) для анизотропных сред.

Следовательно, учет эффективных поверхностных токов является принципиально важным моментом в разрабатываемой теории, *без которых* уравнения возбуждения, записанные аналогично нашим, становятся по существу *неверными*. С полной определенностью можно утверждать, что ранее разработанные теории других авторов, *потерявших* эффективные поверхностные токи, включая Вайнштейна [4], Маркузе [12, 13], Ярива [16, 43], Снайдера и Лава [19], Когельника [22] и других, с электродинамической точки зрения являются *нестрогими*. В определенных физических условиях они теряют достоверность. Так как эффективные поверхностные токи определяются продольными объемными токами $J_{bz}^{e,m}$ на границе L_b области их существования и направлены вдоль касательного вектора $\boldsymbol{\tau}_b = \mathbf{e}_z \times \mathbf{n}_b$, то без учета $\mathbf{J}_{s,eff}^{e,m}$ теряется взаимодействие реальных продольных токов $J_{bz}^{e,m}$ с поперечными компонентами модальных полей $\widehat{\mathbf{E}}_m$ и $\widehat{\mathbf{H}}_m$ на границе L_b.

Примером подобной физической ситуации может служить так называемый *эффект наведенной поляризации*, подробно обсуждавшийся в литературе [44–46], который экспериментально наблюдался в планарных оптических волноводах только для мод ТМ-типа. Дело в том, что результаты существовавшей теории (разумеется, не учитывающей введенные нами эффективные поверхностные токи) хорошо совпадали с экспериментом для мод ТЕ-типа, но расходились для ТМ-мод. Объяснение, лишенное, однако, электродинамической строгости, было тогда дано в форме предположения о появлении поляризационных зарядов на границах диэлектрических слоев с большой разностью показателей преломления [44–46].

Введенные нами эффективные поверхностные токи без труда объясняют эти экспериментальные результаты, даже на качественном уровне.

Известно, что на оптических частотах отклик любой среды на внешнее воздействие проявляется в форме электрической поляризации, поскольку для всех сред $\mu_r \equiv \mu/\mu_0 = 1$ [41]. Отсюда, согласно (2.5.3) и (2.5.4), для объемных токов имеем $\mathbf{J}_b^e \neq 0$ и $\mathbf{J}_b^m = 0$, а для эффективных поверхностных токов, в соответствии с (2.6.28), наоборот: $\mathbf{J}^e_{s,eff} = 0$ и $\mathbf{J}^m_{s,eff} \neq 0$. Поэтому из четырех возбуждающих интегралов в правой части уравнения (2.7.33) остаются только два, содержащие $\mathbf{J}^e_b \cdot \widehat{\mathbf{E}}^*_m$ и $\mathbf{J}^m_{s,eff} \cdot \widehat{\mathbf{H}}^*_m = J^m_{s,eff}(\boldsymbol{\tau}_b \cdot \widehat{\mathbf{H}}^*_m)$. Как известно (см. п. 1.7), в планарных структурах для поперечных компонент магнитного поля имеем $(\boldsymbol{\tau}_b \cdot \mathbf{H}^{TE}_m) = H^{TE}_{mx} \equiv 0$ и $(\boldsymbol{\tau}_b \cdot \mathbf{H}^{TM}_m) = H^{TM}_{mx} \neq 0$. Следовательно, эффективный поверхностный магнитный ток $\mathbf{J}^m_{s,eff}$ не влияет на ТЕ-моды, но создает дополнительный вклад в возбуждение мод ТМ-типа. Этим и объясняется наблюдавшийся в эксперименте эффект, неудачно, на наш взгляд, названный эффектом наведенной поляризации [44–46].

В отличие от теории Фелсена–Маркувица [27], полученные в этом параграфе уравнения возбуждения типа (2.7.13)–(2.7.15), (2.7.17) и (2.7.33) описывают возбуждение не только активных, но и реактивных мод, и применимы к волноводам с любыми средами, включая бианизотропные. Тип среды отражается на норме возбуждаемой моды в форме (2.7.16) или (2.7.18), но не влияет на вид уравнений возбуждения.

Единственным ограничением, наложенным на применимость полученных выше уравнений, как и в теории Фелсена–Маркувица, является отсутствие потерь в среде. Для их учета будем применять более общий подход, использующий лемму Лоренца в комплексно-сопряженной форме.

2.8. Теория возбуждения волноводов на основе сопряженной леммы Лоренца

2.8.1. Дифференциальная и интегральная формы леммы Лоренца для бианизотропной среды. Лемма Лоренца широко используется в электродинамике как инструмент для доказательства ряда важных положений. Она имеет вид квадратичного соотношения, построенного на основе уравнений Максвелла для двух физических ситуаций, отмеченных индексами 1 и 2. Электромагнитные поля ($\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$ и $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$) возбуждаются разными источниками — объемными токами ($\mathbf{J}^{e,m}_{b1} \neq \mathbf{J}^{e,m}_{b2}$) и поверхностными суммарными токами ($\mathbf{J}^{e,m}_{s1} \neq \mathbf{J}^{e,m}_{s2}$), содержащими в себе одновременно как реальные, так и эффективные токи. Существуют две формы леммы Лоренца:

- *сопряженная лемма Лоренца*, в которой одно из полей (например, с индексом 2) берется в комплексно-сопряженной форме;
- *несопряженная (простая) лемма Лоренца*, в которой оба поля берутся без комплексного сопряжения.

Для наших целей будем использовать сопряженную лемму Лоренца. Этот выбор обоснован в приложении В, где выводится несопряженная форма леммы и обсуждаются электродинамические следствия из нее в виде соотношения ортогональности и уравнений возбуждения мод.

Запишем уравнения Максвелла в форме (2.5.7) и (2.5.8) с возбуждающими объемными токами $\mathbf{J}^{e,m}_b$ для двух электромагнитных процессов 1 и 2, упомянутых выше:

$$\nabla \times \mathbf{E}_1 = -i\omega\mathbf{B}_1 - \mathbf{J}^m_{b1}, \qquad \nabla \times \mathbf{E}^*_2 = i\omega\mathbf{B}^*_2 - \mathbf{J}^{m*}_{b2}, \tag{2.8.1}$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_1 = i\omega\mathbf{D}_1 + \mathbf{J}^e_{b1}, \qquad \nabla \times \mathbf{H}^*_2 = -i\omega\mathbf{D}^*_2 + \mathbf{J}^{e*}_{b2}. \tag{2.8.2}$$

Скалярно умножаем каждое уравнение (2.8.1), соответственно, на $\mathbf{H}_2^*$ и $\mathbf{H}_1$, а уравнения (2.8.2), соответственно, на $-\mathbf{E}_2^*$ и $-\mathbf{E}_1$, то после их сложения, применяя известное тождество $\nabla\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \mathbf{b}\cdot(\nabla\times\mathbf{a}) - \mathbf{a}\cdot(\nabla\times\mathbf{b})$ [25], получаем квадратичное соотношение,

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\mathbf{E}_1\times\mathbf{H}_2^* + \mathbf{E}_2^*\times\mathbf{H}_1) &= \\ &= -(\mathbf{J}_{b1}^e\cdot\mathbf{E}_2^* + \mathbf{J}_{b2}^{e*}\cdot\mathbf{E}_1) - (\mathbf{J}_{b1}^m\cdot\mathbf{H}_2^* + \mathbf{J}_{b2}^{m*}\cdot\mathbf{H}_1) - \\ &\quad - i\omega\Big[(\mathbf{D}_1\cdot\mathbf{E}_2^* - \mathbf{D}_2^*\cdot\mathbf{E}_1) + (\mathbf{B}_1\cdot\mathbf{H}_2^* - \mathbf{B}_2^*\cdot\mathbf{H}_1)\Big], \end{aligned}\tag{2.8.3}$$

известное как *сопряженная лемма Лоренца* (часто называемая в английской литературе *сопряженной теоремой взаимности* [19, 24]).

На данном этапе считаем, что волноведущая среда для двух рассматриваемых процессов 1 и 2 одна и та же, что в принципе совсем не обязательно. В приложении В при выводе простой леммы Лоренца и в гл. 4 при анализе многоволноводных оптических систем это требование нарушается.

Для наиболее общего случая бианизотропной среды последнее слагаемое в правой части (2.8.3) преобразуется с помощью материальных уравнений (2.1.13) и (2.1.14) к следующему виду:

$$\begin{aligned}i\omega\Big[(\mathbf{D}_1\cdot\mathbf{E}_2^* - \mathbf{D}_2^*\cdot\mathbf{E}_1) + (\mathbf{B}_1\cdot\mathbf{H}_2^* - \mathbf{B}_2^*\cdot\mathbf{H}_1)\Big] &= \\ = i\omega\Big[(\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} - \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^\dagger) : \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2^* &+ (\overline{\boldsymbol{\mu}} - \overline{\boldsymbol{\mu}}^\dagger) : \mathbf{H}_1\mathbf{H}_2^* + \\ &+ (\overline{\boldsymbol{\xi}} - \overline{\boldsymbol{\zeta}}^\dagger) : \mathbf{H}_1\mathbf{E}_2^* + (\overline{\boldsymbol{\zeta}} - \overline{\boldsymbol{\xi}}^\dagger) : \mathbf{E}_1\mathbf{H}_2^*\Big]. \end{aligned}\tag{2.8.4}$$

Здесь тензор диэлектрической проницаемости $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$, как отмечалось в п. 2.5, включает проводимость среды, т. е. понимается как сумма $(\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} + \overline{\boldsymbol{\sigma}}_c/i\omega)$, антиэрмитова часть которой определяет результирующие электрические потери (электрическая проводимость $\overline{\boldsymbol{\sigma}}_e$). Антиэрмитова часть тензора магнитной проницаемости $\overline{\boldsymbol{\mu}}$ учитывает магнитные потери (магнитная проводимость $\overline{\boldsymbol{\sigma}}_m$), в то время как разность $(\overline{\boldsymbol{\xi}} - \overline{\boldsymbol{\zeta}}^\dagger)$ перекрестных тензоров отражает наличие магнитоэлектрических потерь (магнитоэлектрическая проводимость $\overline{\boldsymbol{\sigma}}_{me}$).

Выражения (2.1.27)–(2.1.29) для тензоров проводимости дают

$$i\omega(\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} - \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^\dagger) = 2\overline{\boldsymbol{\sigma}}_e, \qquad i\omega(\overline{\boldsymbol{\mu}} - \overline{\boldsymbol{\mu}}^\dagger) = 2\overline{\boldsymbol{\sigma}}_m, \qquad i\omega(\overline{\boldsymbol{\xi}} - \overline{\boldsymbol{\zeta}}^\dagger) = \overline{\boldsymbol{\sigma}}_{me}. \tag{2.8.5}$$

Подстановка (2.8.4) и (2.8.5) в соотношение (2.8.3) приводит к *дифференциальной форме* сопряженной леммы Лоренца для бианизотропной среды:

$$\nabla\cdot\mathbf{S}_{12} + q_{12}^{(b)} = r_{12}^{(b)}, \tag{2.8.6}$$

где введены обозначения

$$\mathbf{S}_{12} = \mathbf{E}_1\times\mathbf{H}_2^* + \mathbf{E}_2^*\times\mathbf{H}_1, \tag{2.8.7}$$

$$\begin{aligned}q_{12}^{(b)} &= 2\big(\overline{\boldsymbol{\sigma}}_e : \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2^* + \overline{\boldsymbol{\sigma}}_m : \mathbf{H}_1\mathbf{H}_2^*\big) + \\ &\quad + \big(\overline{\boldsymbol{\sigma}}_{me} : \mathbf{H}_1\mathbf{E}_2^* + \overline{\boldsymbol{\sigma}}_{me}^\dagger : \mathbf{E}_1\mathbf{H}_2^*\big), \end{aligned}\tag{2.8.8}$$

$$r_{12}^{(b)} = -\left(\mathbf{J}_{b1}^{e} \cdot \mathbf{E}_2^* + \mathbf{J}_{b2}^{e*} \cdot \mathbf{E}_1\right) - \\ - \left(\mathbf{J}_{b1}^{m} \cdot \mathbf{H}_2^* + \mathbf{J}_{b2}^{m*} \cdot \mathbf{H}_1\right). \tag{2.8.9}$$

Двоеточие в равенстве (2.8.8) означает двойное скалярное произведение, определенное как $\overline{\sigma}_e : \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2^* = \mathbf{E}_2^* \cdot \overline{\sigma}_e \cdot \mathbf{E}_1$. У величин $q_{12}^{(b)}$ и $r_{12}^{(b)}$ верхний индекс (b) отражает их принадлежность к объемным характеристикам системы (от англ. *bulk*), в то время как аналогичные поверхностные величины, введенные ниже, будут отмечены индексом (s) (от англ. *surface*).

Для того, чтобы получить лемму Лоренца в интегральной форме, необходимо проинтегрировать ее дифференциальную форму (2.8.6) по поперечному сечению волноведущей структуры с использованием интегрального соотношения типа (2.1.31). Это соотношение включает контурные интегралы, учитывающие два физических фактора:

- *скиновые потери* в неидеально проводящих металлах с поверхностным сопротивлением (2.1.36), выраженные импедансным граничным условием (2.1.35), которое задано на контуре L вдоль металлических поверхностей;
- *поверхностные токи*, обеспечивающие разрыв касательных компонент полей, которые включают: а) *реальные* поверхностные токи $\mathbf{J}_s^{e,m}$, локализованные на любом контуре L_s с граничными условиями (2.5.9) и (2.5.10), и б) *эффективные* поверхностные токи $\mathbf{J}_{s,eff}^{e,m}$ в форме (2.6.23)–(2.6.24), расположенные вдоль границы L_b области S_b, занятой объемными токами, на которой заданы граничные условия (2.6.21) и (2.6.22).

Как уже говорилось выше, для упрощения записи реальные и эффективные поверхностные токи объединяются в *суммарные поверхностные токи*, совпадающие по обозначению с реальными токами $\mathbf{J}_s^{e,m}$ и локализованные вдоль общего контура L_s, обозначенного так же, как для реальных токов.

В интегральном соотношении (2.1.31) заменим $\langle \mathbf{S} \rangle$ на величину $\mathbf{S}_{12}$ в виде (2.8.7), тогда

$$\int\limits_S \left(\nabla \cdot \mathbf{S}_{12}\right) dS = \frac{\partial}{\partial z} \int\limits_S \left(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2^* + \mathbf{E}_2^* \times \mathbf{H}_1\right) \cdot \mathbf{e}_z \, dS - \\ - \int\limits_{L+L_s} \Big[\mathbf{n}_s^+ \cdot \left(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2^* + \mathbf{E}_2^* \times \mathbf{H}_1\right)^+ + \\ + \mathbf{n}_s^- \cdot \left(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2^* + \mathbf{E}_2^* \times \mathbf{H}_1\right)^-\Big] dL = \\ = \frac{\partial}{\partial z} \int\limits_S \mathbf{S}_{12} \cdot \mathbf{e}_z \, dS + \int\limits_L q_{12}^{(s)} \, dL - \int\limits_{L_s} r_{12}^{(s)} \, dL. \tag{2.8.10}$$

Здесь в результате применения граничных условий (2.1.35) на контуре L (вдоль проводящих поверхностей) и граничных условий (2.5.9)–(2.5.10) на контуре L_s (с возбуждающими поверхностными токами, нарушающими непрерывность касательных компонент полей) появились два контурных интеграла, учитывающие:

• плотность мощности поверхностных (скиновых) потерь в неидеально проводящем металле с поверхностным сопротивлением $\mathcal{R}_s = \sqrt{\omega\mu/2\sigma}$,

$$q_{12}^{(s)} = 2\mathcal{R}_s(\mathbf{H}_{\tau 1} \cdot \mathbf{H}_{\tau 2}^*), \tag{2.8.11}$$

• плотность мощности взаимодействия суммарных поверхностных токов (реальных и эффективных) с электромагнитными полями,

$$r_{12}^{(s)} = -\left(\mathbf{J}_{s1}^e \cdot \mathbf{E}_2^* + \mathbf{J}_{s2}^{e*} \cdot \mathbf{E}_1\right) - \left(\mathbf{J}_{s1}^m \cdot \mathbf{H}_2^* + \mathbf{J}_{s2}^{m*} \cdot \mathbf{H}_1\right). \tag{2.8.12}$$

Для восстановления в явном виде эффективных токов, входящих неявно в выражение (2.8.12), надо сделать замену $\mathbf{J}_s^{e,m} \to \mathbf{J}_{s,eff}^{e,m}$, изменяя также контур интегрирования L_s (с реальными токами) на контур L_b (с эффективными токами).

Интегрирование леммы Лоренца в дифференциальной форме (2.8.6) по поперечному сечению S волноведущей структуры с учетом (2.8.10) приводит ее к *интегральной форме*,

$$\frac{dP_{12}}{dz} + Q_{12} = R_{12}, \tag{2.8.13}$$

где введены следующие интегральные (комплекснозначные) величины для бианизотропных сред (ср. формулы (2.1.38) и (2.1.39)):

$$P_{12} \equiv \int\limits_S \mathbf{S}_{12}(\mathbf{r}_t, z) \cdot \mathbf{e}_z \, dS = \int\limits_S (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2^* + \mathbf{E}_2^* \times \mathbf{H}_1) \cdot \mathbf{e}_z \, dS, \tag{2.8.14}$$

$$\begin{aligned} Q_{12} = {} & Q_{12}^{(b)} + Q_{12}^{(s)} \equiv \int\limits_S q_{12}^{(b)}(\mathbf{r}_t, z) \, dS + \int\limits_L q_{12}^{(s)}(\mathbf{r}_t, z) \, dL = \\ & = 2\int\limits_S (\overline{\sigma}_e : \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2^*) \, dS + 2\int\limits_S (\overline{\sigma}_m : \mathbf{H}_1\mathbf{H}_2^*) \, dS + \\ & + \int\limits_S (\overline{\sigma}_{me} : \mathbf{H}_1\mathbf{E}_2^* + \overline{\sigma}_{me}^{\dagger} : \mathbf{E}_1\mathbf{H}_2^*) \, dS + 2\int\limits_L \mathcal{R}_s \, (\mathbf{H}_{\tau 1} \cdot \mathbf{H}_{\tau 2}^*) \, dL, \end{aligned} \tag{2.8.15}$$

$$\begin{aligned} R_{12} = {} & R_{12}^{(b)} + R_{12}^{(s)} \equiv \int\limits_{S_b} r_{12}^{(b)}(\mathbf{r}_t, z) \, dS + \int\limits_{L_s} r_{12}^{(s)}(\mathbf{r}_t, z) \, dL = \\ & = -\int\limits_{S_b} \left[(\mathbf{J}_{b1}^e \cdot \mathbf{E}_2^* + \mathbf{J}_{b1}^m \cdot \mathbf{H}_2^*) + (\mathbf{J}_{b2}^{e*} \cdot \mathbf{E}_1 + \mathbf{J}_{b2}^{m*} \cdot \mathbf{H}_1) \right] dS - \\ & - \int\limits_{L_s} \left[(\mathbf{J}_{s1}^e \cdot \mathbf{E}_2^* + \mathbf{J}_{s1}^m \cdot \mathbf{H}_2^*) + (\mathbf{J}_{s2}^{e*} \cdot \mathbf{E}_1 + \mathbf{J}_{s2}^{m*} \cdot \mathbf{H}_1) \right] dL. \end{aligned} \tag{2.8.16}$$

Лемма Лоренца в интегральной форме (2.8.13) имеет настолько общий характер, что позволяет получать, как частные случаи, разнообразные соотношения квадратичного типа между электромагнитными величинами, в том числе и те, которые ранее были получены другим способом, например:

а) интегральная теорема Пойнтинга (2.1.37),

б) соотношение модальной квази-ортогональности (2.3.7),

в) уравнения возбуждения мод типа (2.7.15) и (2.7.17), обобщенные на диссипативные системы.

Покажем, как это делается для трех вышеперечисленных случаев.

2.8.2. Вывод интегральной теоремы Пойнтинга. Теорема Пойнтинга в интегральной форме (2.1.37) была ранее выведена для уравнений Максвелла без возбуждающих источников. Следовательно, надо положить $\mathbf{J}_b^{e,m} = \mathbf{J}_s^{e,m} = 0$, что приводит к исчезновению правой части ($R_{12} = 0$) уравнения (2.8.13). В уравнениях Максвелла (2.8.1) и (2.8.2) вторая система уравнений (с индексом 2) при принятом нами условии одинаковых материальных сред описывает в этом случае те же самые поля, что и первая система (с индексом 1), только взятые с комплексным сопряжением. Это делает возможным в выражениях (2.8.13)–(2.8.15) заменить индекс 2 на 1 и, более того, вообще опустить последний за ненадобностью.

В этом случае интегральная лемма Лоренца (2.8.13) принимает вид

$$\frac{dP}{dz} + Q = 0, \tag{2.8.17}$$

совпадающий с теоремой Пойнтинга в интегральной форме (2.1.37).

Активная электромагнитная мощность P, переносимая в положительном направлении оси z, и активная мощность Q объемных и поверхностных потерь на единицу длины волновода получаются из выражений (2.8.14) и (2.8.15) в следующем виде:

$$P = \frac{1}{4}\int\limits_S \mathbf{S}_{11}\cdot \mathbf{e}_z\, dS \equiv \int\limits_S \langle\, \mathbf{S}\,\rangle \cdot \mathbf{e}_z\, dS = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\int\limits_S (\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*)\cdot \mathbf{e}_z\, dS, \tag{2.8.18}$$

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{4}\int\limits_S q_{11}^{(b)}\, dS + \frac{1}{4}\int\limits_L q_{11}^{(s)}\, dL \equiv \int\limits_S \langle\, q^{(b)}\rangle\, dS + \int\limits_L \langle\, q^{(s)}\rangle\, dL = \\ &= \frac{1}{2}\int\limits_S (\overline{\sigma}_e : \mathbf{E}\mathbf{E}^*)\, dS + \frac{1}{2}\int\limits_S (\overline{\sigma}_m : \mathbf{H}\mathbf{H}^*)\, dS + \\ &+ \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\int\limits_S (\overline{\sigma}_{me} : \mathbf{H}\mathbf{E}^*)\, dS + \frac{1}{2}\int\limits_L \mathcal{R}_s\,(\mathbf{H}_\tau\cdot \mathbf{H}_\tau^*)\, dL. \end{aligned} \tag{2.8.19}$$

Сравнением легко убедиться в том, что (2.8.18) и (2.8.19) в точности совпадают с аналогичными выражениями (2.1.38) и (2.1.39). Поэтому остаются справедливыми и все следствия из этих выражений, полученные в п. 2.2, включая нормировочные и диссипативные коэффициенты (2.2.6) и (2.2.7), а также модальные разложения мощностей (2.2.17) и (2.2.18).

2.8.3. Вывод соотношений квази-ортогональности. Ортогональность (квази-ортогональность) мод в спектре любой волноведущей структуры доказывается в отсутствие возбуждающих источников. Поэтому в данном случае, как и в предыдущем, правая часть леммы Лоренца (2.8.13) равняется нулю. Роль систем с индексами 1 и 2 играют при этом собственные моды одного и того же волновода с номерами n и m, электромагнитные поля которых имеют вид (2.3.5). При соответствующих заменах лемма Лоренца превращается в следующее соотношение:

$$\frac{dP^{\circ}_{mn}}{dz} + Q^{\circ}_{mn} = 0, \tag{2.8.20}$$

где для мод m и n введены *нормировочная* взаимная переносимая мощность,

$$P^{\circ}_{mn} = \frac{1}{4}\int\limits_S (\mathbf{E}^*_m \times \mathbf{H}_n + \mathbf{E}_n \times \mathbf{H}^*_m)\cdot \mathbf{e}_z\, dS = \frac{1}{4} N_{mn}\, e^{-(\gamma^*_m + \gamma_n)z}, \tag{2.8.21}$$

и *нормировочная* взаимная мощность потерь,

$$\begin{aligned} Q^{\circ}_{mn} = \frac{1}{2}\int\limits_S (\overline{\sigma}_e : \mathbf{E}_n\mathbf{E}^*_m)\, dS + \frac{1}{2}\int\limits_S (\overline{\sigma}_m : \mathbf{H}_n\mathbf{H}^*_m)\, dS +& \\ + \frac{1}{4}\int\limits_S (\overline{\sigma}_{me} : \mathbf{H}_n\mathbf{E}^*_m + \overline{\sigma}^{\dagger}_{me} : \mathbf{E}_n\mathbf{H}^*_m)\, dS +& \\ + \frac{1}{2}\int\limits_L \mathcal{R}_s\,(\mathbf{H}_{\tau n}\cdot \mathbf{H}^*_{\tau m})\, dL = \frac{1}{4} M_{mn}\, e^{-(\gamma^*_m + \gamma_n)z}.& \end{aligned} \tag{2.8.22}$$

Эти мощности отмечены верхним кружком $^{\circ}$ и названы *нормировочными*, так как они соответствуют собственным полям (2.3.5) мод с единичными амплитудами возбуждения ($|A_m| = |A_n| = 1$). В последних равенствах (2.8.21) и (2.8.22) введены нормировочные (N_{mn}) и диссипативные (M_{mn}) коэффициенты, определенные формулами (2.2.6) и (2.2.7).

Равенство (2.8.20) есть не что иное, как *энергетическая форма* соотношения квази-ортогональности, полученная ранее в виде (2.3.9). Подстановка величин P°_{mn} и Q°_{mn}, выраженных через N_{mn} и M_{mn}, в формулу (2.8.20) приводит к равенству (ср. формулу (2.3.6)),

$$\frac{d}{dz}\left[N_{mn}e^{-(\gamma^*_m + \gamma_n)z}\right] = -M_{mn}e^{-(\gamma^*_m + \gamma_n)z}, \tag{2.8.23}$$

которое дает ***соотношение квази-ортогональности*** в форме

$$(\gamma^*_m + \gamma_n)N_{mn} = M_{mn}, \tag{2.8.24}$$

полностью совпадающей с ранее выведенным соотношением (2.3.7).

Физический смысл соотношения квази-ортогональности для диссипативных структур и ортогональность активных и реактивных мод в волноводах без потерь были в деталях обсуждены в п. 2.3 и 2.4.

2.8.4. Вывод уравнений возбуждения дискретных мод. Переходим к выводу уравнений возбуждения мод на основе сопряженной леммы Лоренца (2.8.13). При этом, как и ранее в этой главе, ограничиваем свое рассмотрение только закрытыми волноводами, чтобы на первом этапе избежать сложностей, связанных с учетом непрерывного спектра. Обобщение теории возбуждения на открытые волноведущие структуры будет сделано позже на примере оптических волноводов (см. п. 2.13). Начало такому обобщению уже было положено в п. 1.9 написанием общего соотношения ортонормировки (1.9.5) для излучательных мод.

При выводе уравнений возбуждения электромагнитные поля с индексом 1 полагаем соответствующими *искомым полям* $\mathbf{E} = \mathbf{E}_a + \mathbf{E}_b$ и $\mathbf{H} = \mathbf{H}_a + \mathbf{H}_b$ исследуемого волновода в форме (2.6.1) и (2.6.2) (с заменой индекса суммирования m на n), которые возбуждаются заданными токами — объемными $\mathbf{J}_b^{e,m}$ и поверхностными $\mathbf{J}_s^{e,m}$ (последние учитывают совместный вклад реальных и эффективных токов). Электромагнитные поля с индексом 2 соответствуют *известным полям* $\mathbf{E}_m$ и $\mathbf{H}_m$ собственной m-й моды волновода, принятого в качестве базового, без возбуждающих токов ($\mathbf{J}_{b2}^{e,m} = \mathbf{J}_{s2}^{e,m} = 0$). Таким образом, опуская индекс 1 и заменяя $2 \to m$, записываем поля и токи:

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}_1 \equiv \mathbf{E} = \mathbf{E}_a + \mathbf{E}_b, && \mathbf{J}_{b1}^{e,m} \equiv \mathbf{J}_b^{e,m} \neq 0, \\ &\mathbf{H}_1 \equiv \mathbf{H} = \mathbf{H}_a + \mathbf{H}_b, && \mathbf{J}_{s1}^{e,m} \equiv \mathbf{J}_s^{e,m} \neq 0, \\ &\mathbf{E}_2 \equiv \mathbf{E}_m,\ \mathbf{H}_2 \equiv \mathbf{H}_m, && \mathbf{J}_{b2}^{e,m} = 0,\ \mathbf{J}_{s2}^{e,m} = 0. \end{aligned} \tag{2.8.25}$$

Подстановка полных полей в форме (2.6.1) и (2.6.2) (с учетом (2.8.25) и заменой индекса m на n) в общие выражения (2.8.14)–(2.8.16), входящие в интегральную лемму Лоренца (2.8.13) (при замене индекса $2 \to m$), придает им частный вид, необходимый для вывода уравнений возбуждения (с указанием явной зависимости от координаты z):

$$\begin{aligned} P_{1m}(z) &\equiv \int_S \mathbf{S}_{1m}(\mathbf{r}_t, z)\cdot \mathbf{e}_z\, dS = \int_S (\mathbf{E}\times\mathbf{H}_m^* + \mathbf{E}_m^*\times\mathbf{H})\cdot\mathbf{e}_z\, dS = \\ &= \sum_n N_{mn} A_n(z)\, e^{-(\gamma_m^* + \gamma_n)z}, \end{aligned} \tag{2.8.26}$$

$$\begin{aligned} Q_{1m}(z) &= Q_{1m}^{(b)}(z) + Q_{1m}^{(s)}(z) \equiv \int_S q_{1m}^{(b)}(\mathbf{r}_t, z)\, dS + \int_L q_{1m}^{(s)}(\mathbf{r}_t, z)\, dL = \\ &= \sum_n M_{mn}\, A_n(z)\, e^{-(\gamma_m^* + \gamma_n)z}, \end{aligned} \tag{2.8.27}$$

$$\begin{aligned} R_{1m}(z) &= R_{1m}^{(b)}(z) + R_{1m}^{(s)}(z) \equiv \int_{S_b} r_{1m}^{(b)}(\mathbf{r}_t, z)\, dS + \int_{L_s} r_{1m}^{(s)}(\mathbf{r}_t, z)\, dL = \\ &= \left[R_m^{(b)}(z) + R_m^{(s)}(z)\right] e^{-\gamma_m^* z} \equiv R_m(z)\, e^{-\gamma_m^* z}. \end{aligned} \tag{2.8.28}$$

Здесь нормировочные и диссипативные коэффициенты, N_{mn} и M_{mn}, определены формулами (2.2.6) и (2.2.7).

Следует обратить внимание на тот факт, что выражения (2.8.26) и (2.8.27) учитывают вклад только модальных разложений, $\mathbf{E}_a$ и $\mathbf{H}_a$, для полных полей, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_a + \mathbf{E}_b$ и $\mathbf{H} = \mathbf{H}_a + \mathbf{H}_b$. Ортогональные дополнительные поля, $\mathbf{E}_b$ и $\mathbf{H}_b$, будучи пропорциональными продольной компоненте $J_{bz}^{e,m}$ сторонних возбуждающих токов, не вносят вклада в P_{1m} и не могут повлиять на внутренние потери в среде, связанные с Q_{1m}.

Величина $R_m(z) = R_m^{(b)}(z) + R_m^{(s)}(z)$, появившаяся в (2.8.28) как результат подстановки (2.8.25) в общее выражение (2.8.16) для $R_{12}(z)$, включает два интеграла возбуждения, определенные в следующем виде:

- интеграл *объемного возбуждения*

$$R_m^{(b)}(z) = -\int\limits_{S_b} \Big(\mathbf{J}_b^e(z)\cdot\widehat{\mathbf{E}}_m^* + \mathbf{J}_b^m(z)\cdot\widehat{\mathbf{H}}_m^*\Big)dS, \tag{2.8.29}$$

- интеграл *поверхностного возбуждения*

$$R_m^{(s)}(z) = -\int\limits_{L_s} \Big(\mathbf{J}_s^e(z)\cdot\widehat{\mathbf{E}}_m^* + \mathbf{J}_s^m(z)\cdot\widehat{\mathbf{H}}_m^*\Big)dL. \tag{2.8.30}$$

Оба интегралы возбуждения содержат векторные мембранные функции, $\widehat{\mathbf{E}}_m^*(\mathbf{r}_t)$ и $\widehat{\mathbf{H}}_m^*(\mathbf{r}_t)$, для полей m-й моды (не зависящие от z, что отмечено колпачком сверху) и неявно зависят от z, поскольку на данном этапе анализа продольное распределение как объемных токов $\mathbf{J}_b^{e,m}(\mathbf{r}_t, z)$, так и поверхностных токов $\mathbf{J}_s^{e,m}(\mathbf{r}_t, z)$ считается заданным.

Подстановка (2.8.26)–(2.8.28) в интегральную лемму Лоренца (2.8.13) (с заменой индекса 2 на m) после сокращения на общий экспоненциальный множитель $\exp(-\gamma_m^* z)$ приводит к следующему соотношению для области возбуждающих источников:

$$\sum_n \left\{N_{mn}\frac{dA_n(z)}{dz} - \big[(\gamma_m^* + \gamma_n)N_{mn} - M_{mn}\big]A_n(z)\right\}e^{-\gamma_n z} =$$
$$= R_m^{(b)}(z) + R_m^{(s)}(z) \equiv R_m(z), \tag{2.8.31}$$

где $A_n(z)$ — амплитуда возбуждения n-й моды с искомой зависимостью от z.

Ключевое положение теории возбуждения и связи мод заключается в том, что набор $\{\gamma_n\}$ невозмущенных постоянных продольного распространения мод и система $\{\widehat{\mathbf{E}}_n(\mathbf{r}_t), \widehat{\mathbf{H}}_n(\mathbf{r}_t)\}$ векторных мембранных функций, описывающих поперечное распределение модальных полей (которые были найдены для базового волновода без возбуждающих источников), считаются *неизменными* и для области источников. Здесь система мембранных функций выбирается в качестве базиса гильбертова пространства, будучи дополненной ортогональными дополнительными полями, $\mathbf{E}_b = \mathbf{e}_z E_b$ и $\mathbf{H}_b = \mathbf{e}_z H_b$, в форме (2.6.16) и (2.6.17). Это означает, что все величины, построенные на функциях $\widehat{\mathbf{E}}_n(\mathbf{r}_t)$ и $\widehat{\mathbf{H}}_n(\mathbf{r}_t)$, такие как нормировочные и диссипативные коэффициенты, N_{mn} и M_{mn}, в форме (2.2.6) и (2.2.7), а также связывающее их соотношение квази-ортогональности, остаются применимыми и внутри области возбуждающих источников.

Таким образом, благодаря соотношению квази-ортогональности (2.3.7) квадратная скобка в равенстве (2.8.31) обращается в нуль, что приводит к искомой системе уравнений возбуждения мод, записанной в двух формах:

- для *амплитуд возбуждения* $A_n(z)$, $n = 1, 2, \dots$

$$\sum_{\substack{n \\ m=1,2,\dots}} N_{mn} \frac{dA_n(z)}{dz} e^{-\gamma_n z} = R_m(z); \tag{2.8.32}$$

- для *волновых амплитуд* $a_n(z) = A_n(z)\, e^{-\gamma_n z}$, $n = 1, 2, \dots$

$$\sum_{\substack{n \\ m=1,2,\dots}} N_{mn} \left(\frac{da_n(z)}{dz} + \gamma_n a_n(z) \right) = R_m(z). \tag{2.8.33}$$

Здесь нормировочные коэффициенты N_{mn} даны формулой (2.2.6) в виде

$$N_{mn} = \int\limits_S \left(\widehat{\mathbf{E}}^*_m \times \widehat{\mathbf{H}}_n + \widehat{\mathbf{E}}_n \times \widehat{\mathbf{H}}^*_m \right) \cdot \mathbf{e}_z \, dS, \tag{2.8.34}$$

а интегралы объемного и поверхностного возбуждения (2.8.29) и (2.8.30) образуют суммарный возбуждающий интеграл:

$$\begin{aligned} R_m(z) = &- \int\limits_{S_b} \left(\mathbf{J}^e_b(z) \cdot \widehat{\mathbf{E}}^*_m + \mathbf{J}^m_b(z) \cdot \widehat{\mathbf{H}}^*_m \right) dS - \\ &- \int\limits_{L_s} \left(\mathbf{J}^e_s(z) \cdot \widehat{\mathbf{E}}^*_m + \mathbf{J}^m_s(z) \cdot \widehat{\mathbf{H}}^*_m \right) dL. \end{aligned} \tag{2.8.35}$$

Поверхностные возбуждающие токи $\mathbf{J}^{e,m}_s$, входящие в интеграл возбуждения (2.8.35), включают реальные поверхностные токи $\mathbf{J}^{e,m}_s$, заданные на контуре L_s, в сумме с эффективными поверхностными токами $\mathbf{J}^{e,m}_{s,eff}$, определенными в виде (2.6.23) и (2.6.24), которые локализованы на контуре L_b, ограничивающем поперечное сечение S_b, занятое объемными токами $\mathbf{J}^{e,m}_b$.

Система уравнений возбуждения в форме (2.8.32) или (2.8.33) получена для наиболее общего случая волноведущих структур произвольного поперечного сечения, заполненного (хотя бы частично) *диссипативной бианизотропной средой*.

Нетрудно видеть, что использование вместо соотношения квази-ортогональности (2.3.7) его упрощенной формы при $M_{mn} = 0$ в виде соотношения ортогональности (2.4.1) для частного случая *недиссипативных структур* ничего не изменяет в процессе вывода уравнения (2.8.31): в обоих случаях исчезает квадратная скобка в его левой части. При отсутствии потерь упрощение достигается лишь для уравнений (2.8.32) и (2.8.33) путем применения условия ортонормировки (2.4.15) в форме $N_{mn} = N_m \delta_{mn}$ для активных мод или (2.4.23) в форме $N_{mn} = N_m \delta_{\widetilde{m}n}$ для реактивных мод. Тогда система уравнений (2.8.33) с интегралом возбуждения (2.8.35) превращается в одиночное уравнение возбуждения m-й моды — в форме (2.7.15) для активной моды или (2.7.17) для реактивной. В последнем случае после взаимной смены индексов $m \rightleftarrows \widetilde{m}$, в соответствии с (2.4.20) и (2.4.21), делаются замены $\widehat{\mathbf{E}}_{\widetilde{m}} \to \widehat{\mathbf{E}}^*_m$, $\widehat{\mathbf{H}}_{\widetilde{m}} \to \widehat{\mathbf{H}}^*_m$ и $N_{\widetilde{m}} \to N^*_m$, ранее приведшие к переходу от уравнения (2.7.14) к уравнению (2.7.17).

Таким образом, уравнения возбуждения для диссипативных волноводов имеют форму бесконечной системы связанных (благодаря $N_{mn} \neq 0$) уравнений и кажутся существенно сложнее по сравнению с одиночными уравнениями типа (2.7.15) или (2.7.17) для волноводов без потерь. Однако сложность системы уравнений (или вернее простота одиночных уравнений) проявляется только в уравнениях возбуждения и исчезает для уравнений связанных мод. Действительно, коэффициенты связи $c_{mn} \neq 0$ между модами в первом случае дополняют связь через кросс-нормы $N_{mn} \neq 0$, а во втором случае превращают одиночные уравнения возбуждения в бесконечную систему уравнений, связанных благодаря тому, что $c_{mn} \neq 0$.

Более подробный анализ характера диссипативного и недиссипативного возбуждения мод приведен в следующем параграфе.

2.9. Обсуждение уравнений возбуждения для диссипативных и недиссипативных закрытых волноводов

Основной результат разработанной теории возбуждения закрытых волноводов (имеющих дискретный спектр собственных мод) состоит в том, что уравнения возбуждения в форме (2.8.32) (для амплитуд возбуждения A_m) или (2.8.33) (для волновых амплитуд a_m) с интегралом возбуждения в виде (2.8.35) имеют общую структуру, применимую к изотропным, анизотропным и бианизотропным средам как с потерями, так и без потерь при произвольной геометрии поперечного сечения.

Диссипативные волноведущие структуры подчиняются уравнениям возбуждения в виде бесконечной системы дифференциальных уравнений первого порядка относительно модальных амплитуд $a_m(z)$ или $A_m(z)$, возбуждаемых как объемными токами (интеграл возбуждения $R_m^{(b)}$ в виде (2.8.29)), так и поверхностными токами (интеграл возбуждения $R_m^{(s)}$ в виде (2.8.30)). Эта система уравнений может быть представлена в матричной форме

$$\overline{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{Z}(z) = \mathbf{R}(z). \tag{2.9.1}$$

Матрица $\overline{\mathbf{N}}$, составленная из нормировочных коэффициентов N_{mn}, является эрмитовой, т. е. $N_{mn} = N^*_{nm}$ (см. формулу (2.2.6)). Элементы вектор-столбца $\mathbf{R}(z)$ равны возбуждающим интегралам $R_m(z) = R_m^{(b)}(z) + R_m^{(s)}(z)$, а вектор-столбец $\mathbf{Z}(z)$ образован из элементов

$$Z_m(z) = \frac{da_m(z)}{dz} + \gamma_m a_m(z) \equiv \frac{dA_m(z)}{dz}\, e^{-\gamma_m z}. \tag{2.9.2}$$

Недиссипативные волноведущие структуры являются частным случаем диссипативных структур, так как для них общее соотношение квазиортогональности (2.3.7) превращается в соотношение ортогональности (2.4.1), которое дает ортонормировочные соотношения (2.4.15) для *активных мод* и (2.4.23) для *реактивных мод*. Эти соотношения могут быть совместно записаны в виде

$$N_{mn} = \begin{cases} N_m \delta_{mn} & \text{— активные моды,} \\ N_m \delta_{\widetilde{m}n} & \text{— реактивные моды.} \end{cases} \tag{2.9.3}$$

Модальная норма N_m обладает таким свойством, что для активных мод она чисто вещественная, а для реактивных мод комплекснозначная, так что $N_m \equiv N_{m\widetilde{m}} = N^*_{\widetilde{m}m} \equiv N^*_{\widetilde{m}}$, где мода с номером $\widetilde{m}$ образует с m-й модой *двойниковую пару*, для которой постоянные распространения мод связаны равенством $\gamma^*_m + \gamma_{\widetilde{m}} = 0$.

Подстановка соотношений ортонормировки (2.9.3) в матричное уравнение (2.9.1) превращает матрицу $\overline{\mathbf{N}}$ в диагональную, что дает недиссипативное уравнение возбуждения для m-й моды (ср. уравнения (2.7.13) и (2.7.14)):

$$Z_m = \begin{cases} R_m / N_m & \text{— активные моды,} \\ R_{\widetilde{m}} / N_{\widetilde{m}} & \text{— реактивные моды.} \end{cases} \tag{2.9.4}$$

Уравнения возбуждения (2.9.4) для активных мод напоминают по форме уравнение (Б.2.13), полученное в приложении Б путем минимизации среднеквадратичной разности (Б.2.15) между модальным разложением поля в ряд и частичной суммой ряда (Б.2.14). Различие между этими уравнениями заключается в том, что последнее содержит волновую амплитуду a_m вместо величины Z_m в виде (2.9.2). Этот результат является следствием того, что член R_m, появляющийся в уравнениях (2.9.4) и (Б.2.13), выражается через разные физические величины: через электромагнитные поля $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$ в (Б.2.13) и источники поля $(\mathbf{J}^{e,m}_b, \mathbf{J}^{e,m}_s)$ в (2.9.4). Однако уравнение (Б.2.13) полностью согласуется с уравнением(2.7.6), так как они оба имеют член R_m одинаковой формы, выраженной через поля.

Как следует из соотношений ортогональности (2.9.3), каждая собственная мода волновода без потерь ортогональна всем другим модам, кроме одной единственной моды, в комбинации с которой она образует собственную норму: активная мода неортогональна самой себе, а реактивная m-я мода неортогональна своей двойниковой $\widetilde{m}$-й моде, для которой $\gamma_{\widetilde{m}} = -\gamma^*_m$. Поля $(\widehat{\mathbf{E}}_{\widetilde{m}}, \widehat{\mathbf{H}}_{\widetilde{m}})$ двойниковой моды входят в интегралы возбуждения и определяют мощность взаимодействия со сторонними токами, возбуждающими m-ю реактивную моду независимо от других мод. Уравнение возбуждения для m-й реактивной моды, подобно аналогичному уравнению (2.7.15) для активной моды, может быть записано в форме (2.7.17), содержащей только ее собственные поля $(\widehat{\mathbf{E}}_m, \widehat{\mathbf{H}}_m)$, а не поля $(\widehat{\mathbf{E}}_{\widetilde{m}}, \widehat{\mathbf{H}}_{\widetilde{m}})$ ее двойника, поскольку эти поля связаны между собой соотношениями (2.4.20).

Независимое возбуждение отдельной моды заданным распределением токов (объемных и поверхностных) присуще только недиссипативным волноводам. При наличии потерь имеется диссипативная связь между модами, вызванная недиагональными элементами N_{mn} нормировочной матрицы $\overline{\mathbf{N}}$. Такая диссипативная связь означает, что заданные сторонние токи возбуждают не индивидуальные моды, как в ситуации без потерь, а весь спектр в совокупности. Необходимо подчеркнуть, что связь между модами через N_{mn} при $m \neq n$ является *кажущейся*, так как, будучи вызванной потерями, она добавляется к *реальной* связи, вызванной физическими механизмами взаимодействия мод, *только внутри* области источников. Вне источников существование недиагональных элементов $N_{mn} \neq 0$ оставляет собственные моды несвязанными друг с другом. Действительно, в этом случае правая часть (2.9.1) исчезает ($\mathbf{R} = 0$ из-за $\mathbf{J}_b^{e,m} = \mathbf{J}_s^{e,m} = 0$). Поскольку при любом конечном числе мод в системе уравнений (2.9.1) ее детерминант $\det\{\overline{\mathbf{N}}\} \neq 0$, то отсюда следует, что $\mathbf{Z}(z) = 0$ или $Z_m(z) = 0$, а тогда $A_m(z) = \text{const}$. Именно это и доказывает, что в волноводе с потерями отсутствует диссипативная связь между модами за пределами области возбуждающих токов.

Таким образом, собственные моды волновода с потерями, будучи линейно независимыми решениями соответствующей граничной задачи, оказываются реально *несвязанными вне области источников*, несмотря на кажущуюся связь в уравнениях (2.9.1) при $R_m = 0$, но $N_{mn} \neq 0$. В этих условиях каждая мода приобретает амплитуду A_m на выходе из области источников и распространяется далее без связи с другими модами, имея $A_m(z) = \text{const}$.

Однако энергетическая картина переноса мощности вдоль волновода более сложная. При наличии потерь отдельная m-я мода, кроме *собственной мощности* $P_m \equiv P_{mm}$, переносит также *взаимные* (*кросс*) *мощности* P_{mn} в паре с другими модами с номером $n \neq m$, которые также были возбуждены внутри области источников и вне ее имеют постоянные амплитуды $A_n(z) = \text{const}$. Согласно соотношению квази-ортогональности в энергетической форме (2.3.9), любая пара мод (m, n) имеет переносимую кросс-мощность P_{mn} и кросс-мощность потерь Q_{mn}, которые жестко связаны этим соотношением. Этот факт является физическим проявлением энергетической неортогональности (названной *квази-ортогональностью*) среди собственных мод диссипативного волновода. Именно наличие кросс-мощностей $P_{mn} \neq 0$, пропорциональных нормировочным коэффициентам N_{mn}, проявляется как *кажущаяся связь* диссипативного характера между собственными модами вне области источников, описываемая уравнениями (2.9.1) при $R_m = 0$ и $N_{mn} \neq 0$.

На первый взгляд кажется, что бесконечная система диссипативно связанных уравнений (2.9.1) создает существенные трудности при решении по сравнению с несвязанными уравнениями (2.9.4) в отсутствие потерь. И это действительно так только на этапе анализа возбуждения мод заданными источниками. Однако разница между ними исчезает в самосогласованной постановке проблемы волновых взаимодействий, приводящей к уравнениям связанных мод. В этом случае сторонние источники, входящие в R_m, сами могут быть представлены в виде разложения по собственным модам исследуемой волноведущей структуры.

В самосогласованной постановке задачи *диссипативная связь* мод, обусловленная недиагональными коэффициентами $N_{mn} \neq 0$ при $m \neq n$, дополняется *действительной связью*, вызванной физическими механизмами взаимодействия между модами. В отличие от кажущейся диссипативной связи, исчезающей в отсутствие потерь, действительная физическая связь между модами всегда сохраняется. И как результат этого, независимые уравнения для каждой отдельной моды типа (2.9.4) преобразуются в бесконечную систему связанных уравнений (математическую технику таких преобразований можно найти, например, ниже в гл. 3 и 4, а также в литературе [24, 39, 47, 48]). Решение подобных уравнений для недиссипативных структур имеет практически ту же степень вычислительной сложности, что и аналогичные диссипативные уравнения. В обоих случаях получение точного решения бесконечной системы уравнений, учитывающего взаимодействия между всеми модами, физически бессмысленно и практически неосуществимо. Обычно основной эффект определяется связью лишь конечного числа взаимодействующих мод. Они всегда могут быть выделены при помощи техники связанных мод (см. ниже приложение Г и гл. 1 монографии [24]), которая позволяет получить приближенное решение с точностью, достаточной для практических приложений.

Диссипативно связанные уравнения (2.9.1) с ненулевыми недиагональными коэффициентами N_{mn} для волноводов с потерями в принципе всегда могут быть приведены к диагональной форме, поскольку нормировочная матрица $\overline{\mathbf{N}}$ эрмитова. Операция диагонализации означает построение взаимно ортогональных линейных комбинаций из величин Z_m вида (2.9.2) таким способом, чтобы каждая из них возбуждалась своим собственным членом, также построенным в виде комбинации интегралов возбуждения R_m. Эта математическая операция с физической точки зрения оказывается малополезной, поскольку она перемешивает реальные моды. Практический же интерес представляет продольная зависимость амплитуды $A_m(z)$ отдельной моды, а не комбинации мод, лишенной физического смысла. Если тем не менее воспользоваться процедурой ортогонализации, то на окончательном этапе потребуется обратная операция восстановления модальных амплитуд. Это даст тот же самый результат, как если бы исходное матричное уравнение (2.9.1) было изначально решено в форме $\mathbf{Z} = \overline{\mathbf{N}}^{-1} \cdot \mathbf{R}$, минуя операцию диагонализации. Тогда, применяя (2.9.2) и краевые условия (1.1.38)–(1.1.39), можно получить амплитуды возбуждения $A_m(z)$ в искомой форме (2.7.2).

Следовательно, искусственная процедура ортогонализации системы собственных мод волновода с потерями (которые в действительности энергетически неортогональны из-за ненулевой парной кросс-мощности), несмотря на математическую привлекательность, не дает существенного упрощения при решении задачи о взаимодействии мод. Более того, как показано в приложении Б, свойство ортогональности базисных функций гильбертова пространства не является обязательным, в отличие от свойства полноты. Действительно, даже в отсутствие ортогональности полное множество линейно независимых собственных функций, выбранных в качестве базиса гильбертова пространства, позволяет однозначно представить любую функцию, касательную к этому пространству, в виде разложения по базису. Это разложение сходится в среднем к исходной функции при условии ее квадратичной интегрируемости. Для функций, имеющих не только касательную, но и нормальную к гильбертову пространству составляющую, к разложению по базисным функциям добавляется ортогональное дополнение.

Математическое требование квадратичной интегрируемости полей на поперечном сечении волновода, наложенное на его собственные функции, физически означает конечность мощности, переносимой как отдельной модой, так и их суперпозицией, дающей искомые возмущенные поля. Это требование практически всегда выполняется для закрытых волноводов, так как физически реализуемые поля описываются кусочно-непрерывными функциями, которые удовлетворяют требованию квадратичной интегрируемости. Как известно [25, 26], для таких функций разложение в ряд по базису сходится равномерно в точках непрерывности самой функции и ее производных. Равномерная сходимость ряда осуществляется тем быстрее, чем выше порядок непрерывной производной, которую имеет функция. Предполагается, что именно такие «физически разумные» функции описывают всевозможные поля, встречающиеся в задачах о волновых взаимодействиях.

Разработанная теория возбуждения волноведущих структур со средами с частотной дисперсией (среди которых наиболее сложными являются бианизотропные среды) допускает обобщение на еще более сложные среды с пространственной дисперсией, такие как упругие пьезоэлектрики, намагниченные ферриты, плазменные среды с дрейфовыми потоками носителей заряда. Они требуют для своего электродинамического описания, в дополнение к уравнениям Максвелла, специальных уравнений движения среды с учетом ее нелокальности и так называемых дополнительных граничных условий (ДГУ), в дополнение к ЭГУ. Такое обобщение сделано в гл. 4 монографии [24], где получены уравнения возбуждения мод заданными источниками, которые оказались той же формы, что и уравнения (2.8.32)–(2.8.33). Специфика среды отразилась в нормировочных коэффициентах N_{mn}, в то время как интегралы объемного и поверхностного возбуждения, $R_m^{(b)}$ и $R_m^{(s)}$, сохранили прежнюю форму (2.8.29) и (2.8.30). Однако они принимают другой вид (как и нормировочные коэффициенты N_{mn}) при выделении потенциальных полей, существующих в таких средах. При этом одновременно исчезает необходимость в ортогональных дополнительных полях, $\mathbf{E}_b$ и $\mathbf{H}_b$, которые оказались разложимыми по базису квазистатических потенциалов.

Как отмечалось во введении, разработка теории возбуждения волноводных мод заданными источниками завершает второй этап электродинамического анализа. Он открывает путь к последнему этапу построения самосогласованной теории связанных мод, которая будет разрабатываться в гл. 3 и 4 для дискретных и излучательных оптических мод. Но прежде чем переходить к третьему этапу анализа, необходимо распространить разработанную теорию возбуждения мод на открытые волноведущие структуры.

2.10. Возбуждающие источники и модальные разложения полей в открытых волноводах с изотропным заполнением

Теория возбуждения волноведущих структур оптического излучения, используемых в волоконной и интегральной оптике, содержит как усложнение, так и упрощение по сравнению с разработанной выше теорией для закрытых волноводов произвольного поперечного сечения с диссипативными сложными (в том числе бианизотропными) средами.

Усложнение теории вызвано двумя причинами. Во-первых, оптические волноводы относятся к классу открытых структур, имеющих в модальном спектре, наряду с дискретными направляемыми модами, также излучательные моды непрерывной части спектра, существование которых невозможно в закрытых волноводах (см. гл. 1). Во-вторых, появление динамических (зависящих от времени) возмущений открытого базового волновода, вызванных параметрическими явлениями в волноведущей среде, порождает многочастотный спектр.

Упрощение теории достигается в результате учета следующих моментов. В оптических волноводах в качестве волноведущих сред обычно применяются изотропные среды, для описания которых вместо сложных бианизотропных уравнений (2.1.13)–(2.1.14) применимы предельно простые материальные соотношения:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \tag{2.10.1}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \tag{2.10.2}$$

где $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ и $\mu = \mu_r \mu_0$ — скалярные величины.

В отличие от изотропной среды, заполняющей базовый волновод, ее сторонние возмущения могут быть в общем случае анизотропными, характеризуемыми избыточными тензорами, $\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ и $\Delta\overline{\boldsymbol{\mu}}$, поскольку отсутствие бианизотропии снимает необходимость в учете сторонних возмущений для перекрестных тензоров ($\Delta\overline{\xi} = 0$ и $\Delta\overline{\zeta} = 0$). Тогда в общем случае сторонние источники возбуждения базового волновода, перечисленные в п. 2.5, следующие:

- *сторонние токи* — электрические $\mathbf{J}^e_{ext}$ и магнитные $\mathbf{J}^m_{ext}$,
- *сторонние поля* — электрические $\mathbf{E}_{ext}$ и магнитные $\mathbf{H}_{ext}$,
- *сторонние возмущения* проницаемостей среды $\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ и $\Delta\overline{\boldsymbol{\mu}}$.

Но и среди них для одиночных волноводов остаются в силе лишь последние.

Во-первых, мы рассматриваем *диэлектрические волноводы* в отсутствие как подвижных носителей заряда, создающих сторонние электрические токи $\mathbf{J}^e_{ext}$, так и намагниченности среды, присущей ферритам и создающей сторонние магнитные токи $\mathbf{J}^m_{ext}$, т. е. можно положить

$$\mathbf{J}^e_{ext} = 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{J}^m_{ext} = 0. \tag{2.10.3}$$

Во-вторых, на данном этапе анализа мы рассматриваем *одноволноводные системы*, в которых для одиночного базового волновода отсутствуют сторонние поля (электрическое и магнитное), т. е. можно положить

$$\mathbf{E}_{ext} = 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{H}_{ext} = 0. \tag{2.10.4}$$

Такие поля появляются только в многоволноводных системах, изучаемых в гл. 4, когда для выделенного базового волновода оставшиеся волноведущие части системы создают ненулевые сторонние поля.

На основании вышесказанного общие выражения (2.5.1) и (2.5.2) для избыточных индукций, созданных возмущением среды, с учетом (2.10.4) принимают следующий упрощенный вид:

$$\Delta\mathbf{D} = \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{E}, \tag{2.10.5}$$

$$\Delta\mathbf{B} = \Delta\overline{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{H}. \tag{2.10.6}$$

Избыточные индукции (2.10.5) и (2.10.6) создают индуцированные токи смещения, $\mathbf{J}^e_{ind}$ и $\mathbf{J}^m_{ind}$, которые в отсутствие сторонних токов (2.10.3) создают единственный вклад в объемные возбуждающие токи (2.5.3) и (2.5.4), принимающие форму

$$\mathbf{J}^e_b = \mathbf{J}^e_{ind} \equiv \frac{\partial}{\partial t}\Delta\mathbf{D}, \tag{2.10.7}$$

$$\mathbf{J}^m_b = \mathbf{J}^m_{ind} \equiv \frac{\partial}{\partial t}\Delta\mathbf{B}. \tag{2.10.8}$$

И, наконец, последнее упрощение вызвано тем, что возмущение любой среды на оптических частотах проявляется как диэлектрическое возмущение, в то время как относительная магнитная проницаемость для всех сред равняется единице ($\mu_r \equiv \mu/\mu_0 = 1$) [41]. На этом основании можно положить

$$\Delta\overline{\varepsilon} \neq 0 \quad \text{и} \quad \Delta\overline{\mu} = 0. \tag{2.10.9}$$

Таким образом, с учетом (2.10.5), (2.10.6) и (2.10.9) выражения (2.10.7) и (2.10.8) для объемных возбуждающих токов принимают упрощенную форму,

$$\mathbf{J}^e_b = \frac{\partial}{\partial t}(\Delta\overline{\varepsilon}\cdot\mathbf{E}), \tag{2.10.10}$$

$$\mathbf{J}^m_b = 0, \tag{2.10.11}$$

свидетельствующую о том, что на оптических частотах объемные магнитные токи $\mathbf{J}^m_b$ всегда отсутствуют.

2.10.1. Статические и динамические возмущения диэлектрической среды. Искомые электромагнитные поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ подчиняются неоднородным уравнениям Максвелла (2.5.5) и (2.5.6), которые с учетом (2.10.1)–(2.10.2) и (2.10.10)–(2.10.11) принимают упрощенную асимметричную форму,

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\mu_0\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}, \tag{2.10.12}$$

$$\nabla\times\mathbf{H} = \varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J}^e_b, \tag{2.10.13}$$

применимую для оптических диэлектрических волноводов с изотропным заполнением. Здесь электрический возбуждающий ток (2.10.10), возникший в результате диэлектрического возмущения среды, можно рассматривать как поляризационный ток

$$\mathbf{J}^e_b = \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}, \tag{2.10.14}$$

созданный *избыточной поляризацией среды* в виде $\mathbf{P} \equiv \Delta\mathbf{D}$, где

$$\mathbf{P} = \Delta\overline{\varepsilon}_\Sigma\cdot\mathbf{E}. \tag{2.10.15}$$

Суммарный *тензор диэлектрического возмущения* будем представлять в наиболее общей форме

$$\Delta\overline{\varepsilon}_\Sigma(\mathbf{r},t) = \overline{\varepsilon}(\mathbf{r},t) - \varepsilon(\mathbf{r}_t)\overline{\mathbf{I}}, \tag{2.10.16}$$

учитывающей одновременно пространственные и временны́е изменения в полном тензоре диэлектрической проницаемости $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{r}, t)$ для неоднородной и переменной во времени среды, заполняющей исследуемый нерегулярный волновод. Для регулярного волновода, выбранного в качестве базового, его невозмущенная скалярная проницаемость $\varepsilon(\mathbf{r}_t)$ предполагается зависящей только от координат $\mathbf{r}_t$ поперечного сечения, например в виде гладкой или кусочно-ступенчатой функции, соответственно, для градиентных или слоистых диэлектрических волноводов [17–19].

Пространственные и временны́е вклады в тензор (2.10.16) связываются со статическими ($\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$) и динамическими ($\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{dyn}$) возмущениями среды:

$$\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\Sigma}(\mathbf{r}, t) = \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}\,(\mathbf{r}) + \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{dyn}(\mathbf{r}, t). \tag{2.10.17}$$

Форма общего тензора диэлектрического возмущения $\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\Sigma}$ определяется волноводными нерегулярностями как *геометрической* природы (например, возмущение границы в гофрированном волноводе), так и *физической* природы (например, возмущения, создаваемые электрооптическим, магнитооптическим и акустооптическим эффектами). Геометрические нерегулярности вместе со статическими возмущающими полями учитываются *тензором статического возмущения* $\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{r})$, в то время как переменные во времени поля (электрическое, магнитное и акустическое) вносят вклад в *тензор динамического возмущения* $\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{dyn}(\mathbf{r}, t)$.

Дальнейшее исследование предполагает наличие параметрических явлений в волноведущей среде, когда динамическое возмущение диэлектрической проницаемости изменяется гармонически с частотой накачки ω_p:

$$\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{dyn}(\mathbf{r}, t) = \delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{r})e^{i\omega_p t} + \delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{*}(\mathbf{r})e^{-i\omega_p t}. \tag{2.10.18}$$

В этом случае суммарный тензор диэлектрического возмущения (2.10.17) имеет следующий вид:

$$\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\Sigma}(\mathbf{r}, t) = \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{r}) + \mathrm{Re}\Big\{2\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{r})\exp(i\omega_p t)\Big\}, \tag{2.10.19}$$

где $\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ — комплексная *полуамплитуда* динамического возмущающего тензора (2.10.18), использование которой вместо амплитуды $2\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ упрощает в дальнейшем запись тензоров связи (см. формулы (3.1.16)–(3.1.17) и (3.1.20)–(3.1.21)).

Параметрическая накачка достаточно большой интенсивности генерирует, благодаря нелинейности среды, гармоники $\nu\omega_p$ частоты накачки (индекс p от англ. *pump*), которые в результате смешения с оптическим сигналом частоты ω образуют спектр комбинационных частот

$$\omega_\nu = \omega + \nu\omega_p, \qquad \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{2.10.20}$$

Следовательно, диэлектрическое возмущение в форме (2.10.19) обеспечивает многочастотный режим волноводного распространения мод, так что электромагнитные поля и избыточная поляризация представляются в виде бесконечной суммы частотных составляющих:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \mathbf{E}^{(\nu)}(\mathbf{r})\, e^{i\omega_\nu t}, \tag{2.10.21}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \mathbf{H}^{(\nu)}(\mathbf{r})\, e^{i\omega_\nu t}, \qquad (2.10.22)$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{r},t) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \mathbf{P}^{(\nu)}(\mathbf{r})\, e^{i\omega_\nu t}, \qquad (2.10.23)$$

где $\mathbf{E}^{(\nu)}(\mathbf{r})$, $\mathbf{H}^{(\nu)}(\mathbf{r})$, $\mathbf{P}^{(\nu)}(\mathbf{r})$ — комплексные амплитуды соответствующих величин на частоте ω_ν.

Подстановка (2.10.19), (2.10.21) и (2.10.23) в выражение (2.10.15) для избыточной поляризации среды дает соотношение между комплексной амплитудой поляризации $\mathbf{P}^{(\nu)}$ на частоте ω_ν и комплексными амплитудами полей $\mathbf{E}^{(\nu)}$ и $\mathbf{E}^{(\nu\pm1)}$ частотах ω_ν и $\omega_{\nu\pm1}$, которое имеет общую форму

$$\mathbf{P}^{(\nu)} = \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}\cdot\mathbf{E}^{(\nu)} + \delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}\cdot\mathbf{E}^{(\nu-1)} + \delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\,*}\cdot\mathbf{E}^{(\nu+1)}. \qquad (2.10.24)$$

Следовательно, динамический тензор $\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{dyn} = 2\mathrm{Re}\{\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}\exp(i\omega_p t)\}$ связывает поляризацию на частоте ω_ν с электрическими полями на двух соседних частотах $\omega_\nu \pm \omega_p$, в то время как тензор статического возмущения $\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ делает то же самое для поляризации и поля одной частоты ω_ν.

Избыточная поляризация (2.10.23) дает возбуждающий поляризационный ток (2.10.14) в форме разложения по составляющим частотного спектра:

$$\mathbf{J}_b^e(\mathbf{r},t) = \frac{\partial\mathbf{P}(\mathbf{r},t)}{\partial t} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \mathbf{J}_b^{e(\nu)}(\mathbf{r})\, e^{i\omega_\nu t}. \qquad (2.10.25)$$

Здесь комплексная амплитуда объемного электрического тока на частоте ω_ν равняется

$$\mathbf{J}_b^{e(\nu)} = i\omega_\nu\mathbf{P}^{(\nu)}, \qquad (2.10.26)$$

в то время как, согласно (2.10.11), для объемного магнитного тока на всех частотах

$$\mathbf{J}_b^{m(\nu)} = 0. \qquad (2.10.27)$$

В силу ортогональности частотных компонент в разложениях (2.10.21)–(2.10.23) и (2.10.25), их подстановка в уравнения Максвелла (2.10.12) и (2.10.13) позволяет записать эти уравнения для комплексных амплитуд полей $\mathbf{E}^{(\nu)}$, $\mathbf{H}^{(\nu)}$ и тока $\mathbf{J}_b^{e(\nu)}$ на одной и той же частоте ω_ν:

$$\nabla\times\mathbf{E}^{(\nu)} = -\,i\omega_\nu\mu_0\mathbf{H}^{(\nu)}, \qquad (2.10.28)$$

$$\nabla\times\mathbf{H}^{(\nu)} = i\omega_\nu\varepsilon\mathbf{E}^{(\nu)} + \mathbf{J}_b^{e(\nu)}. \qquad (2.10.29)$$

В соответствии с (2.10.24) и (2.10.26), возбуждающий ток $\mathbf{J}_b^{e(\nu)}$ зависит не только от электрического поля $\mathbf{E}^{(\nu)}$ на частоте ω_ν, но и от полей $\mathbf{E}^{(\nu\pm1)}$ на соседних частотах $\omega_{\nu\pm1} = \omega_\nu \pm \omega_p$. Следовательно, уравнения Максвелла (2.10.28) и (2.10.29) образуют бесконечную цепочку зацепляющихся пар уравнений, соответствующих разным комбинационным частотам (2.10.20).

Как следует из формул (2.6.25)–(2.6.26) для *изотропных сред*, объемные токи (2.10.26) и (2.10.27) на частоте $\omega_\nu = \omega + \nu\omega_p$ однозначно определяют:

• ***ортогональные дополнительные поля***

$$\mathbf{E}_b^{(\nu)} = -\frac{\mathbf{e}_z}{i\omega_\nu\varepsilon}\, J_{bz}^{e(\nu)} = -\frac{\mathbf{e}_z}{\varepsilon}\, P_z^{(\nu)}, \tag{2.10.30}$$

$$\mathbf{H}_b^{(\nu)} = -\frac{\mathbf{e}_z}{i\omega_\nu\mu_0}\, J_{bz}^{m(\nu)} = 0\,; \tag{2.10.31}$$

• ***эффективные поверхностные токи***

$$\mathbf{J}_{s,eff}^{e(\nu)} \equiv -\,\mathbf{n}_b\times \mathbf{H}_b^{(\nu)}\Big|_{L_b} = -\,\boldsymbol{\tau}_b\frac{J_{bz}^{m(\nu)}(L_b)}{i\omega_\nu\mu_0} = 0, \tag{2.10.32}$$

$$\mathbf{J}_{s,eff}^{m(\nu)} \equiv \mathbf{n}_b\times \mathbf{E}_b^{(\nu)}\Big|_{L_b} = \boldsymbol{\tau}_b\frac{J_{bz}^{e(\nu)}(L_b)}{i\omega_\nu\varepsilon} = \frac{\boldsymbol{\tau}_b}{\varepsilon}\, P_z^{(\nu)}(L_b). \tag{2.10.33}$$

Здесь $P_z^{(\nu)}(L_b)$ — продольная компонента избыточной поляризации на частоте ω_ν в виде (2.10.24), взятая на контуре L_b, ограничивающем сечение S_b, занятое объемным электрическим током $\mathbf{J}_b^{e(\nu)}$ в форме (2.10.26); при этом $\boldsymbol{\tau}_b = \mathbf{e}_z\times\mathbf{n}_b$ — единичный вектор, касательный к L_b, а $\mathbf{n}_b$ означает единичную нормаль к L_b, направленную *наружу* по отношению к сечению S_b.

Как видно из (2.10.30)–(2.10.33), продольная избыточная поляризация $P_z^{(\nu)}$ создает одновременно ортогональное дополнительное *электрическое поле* $\mathbf{E}_b^{(\nu)}$ и эффективный поверхностный *магнитный ток* $\mathbf{J}_{s,eff}^{m(\nu)}$; при этом для противоположных по типу величин (т. е. для магнитного поля и поверхностного электрического тока) всегда имеем $\mathbf{H}_b^{(\nu)}\equiv 0$ и $\mathbf{J}_{s,eff}^{e(\nu)}\equiv 0$.

2.10.2. Полное модальное представление полей. По аналогии с выражениями (2.6.1) и (2.6.2), оптические поля $\mathbf{E}^{(\nu)}$ и $\mathbf{H}^{(\nu)}$ на частоте ω_ν, входящие в уравнения Максвелла (2.10.28) и (2.10.29), с учетом (2.10.30) и (2.10.31) записываем внутри области источников в полной форме:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^{(\nu)} \equiv \mathbf{E}_a^{(\nu)} + \mathbf{E}_b^{(\nu)} &= \sum_m A_m^{(\nu)}\,\widehat{\mathbf{E}}_m^{(\nu)} e^{-\gamma_m^{(\nu)} z} - \frac{\mathbf{e}_z}{\varepsilon} P_z^{(\nu)} = \\ &= \sum_m a_m^{(\nu)}\,\widehat{\mathbf{E}}_m^{(\nu)} - \frac{\mathbf{e}_z}{\varepsilon} P_z^{(\nu)},\end{aligned} \tag{2.10.34}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{H}^{(\nu)} \equiv \mathbf{H}_a^{(\nu)} &= \sum_m A_m^{(\nu)}\,\widehat{\mathbf{H}}_m^{(\nu)} e^{-\gamma_m^{(\nu)} z} = \\ &= \sum_m a_m^{(\nu)}\,\widehat{\mathbf{H}}_m^{(\nu)},\end{aligned} \tag{2.10.35}$$

где, согласно (2.10.31), у магнитного поля на оптических частотах всегда отсутствует ортогональное дополнение.

Для открытых диэлектрических волноводов модальные разложения полей в (2.10.34) и (2.10.35) подразумевают не только суммирование по направляемым модам дискретного спектра, но и интегрирование по излучательным модам непрерывного спектра. Чтобы явно выделить излучательные моды, надо воспользоваться записью их собственных полей в виде (1.9.4). Тогда модальные разложения $\mathbf{E}_a^{(\nu)}$ и $\mathbf{H}_a^{(\nu)}$ принимают вид

$$\mathbf{E}_a^{(\nu)} = \sum_m a_m^{(\nu)}\,\widehat{\mathbf{E}}_m^{(\nu)} + \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} a^{(\nu)}(k_x^{\text{o}}, k_y^{\text{o}})\,\widehat{\mathbf{E}}^{(\nu)}(k_x^{\text{o}}, k_y^{\text{o}})\,dk_x^{\text{o}}\,dk_y^{\text{o}}, \tag{2.10.36}$$

$$\mathbf{H}_a^{(\nu)} = \sum_m a_m^{(\nu)}\,\widehat{\mathbf{H}}_m^{(\nu)} + \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} a^{(\nu)}(k_x^{\text{o}}, k_y^{\text{o}})\,\widehat{\mathbf{H}}^{(\nu)}(k_x^{\text{o}}, k_y^{\text{o}})\,dk_x^{\text{o}}\,dk_y^{\text{o}}, \tag{2.10.37}$$

где k_x^{o} и k_y^{o} — поперечные волновые числа внешней среды (простирающейся до бесконечности в поперечном направлении), для которой вычисляется поле излучения.

Интегралы по непрерывному спектру в (2.10.36) и (2.10.37) записаны для *канальных волноводов* (с двумерным сечением, когда $k_x \neq 0$ и $k_y \neq$ $\neq 0$). В случае *планарных волноводов* (с одномерным сечением, когда $k_x =$ $= 0$ и $k_y \neq 0$) роль переменной интегрирования k_y^{o} по непрерывному спектру выполняет поперечное волновое число подложки $k_{y2} \equiv \varkappa_2$ (см. с. 84). Для единства записи, удобно ввести общее обозначение $\varkappa$, такое что $\varkappa \equiv \{k_x^{\text{o}}, k_y^{\text{o}}\}$ для канальных волноводов и $\varkappa \equiv \varkappa_2 = k_{y2}$ для планарных волноводов.

Тогда уравнения (2.10.34) и (2.10.35) с учетом (2.10.36) и (2.10.37) представимы в следующем виде:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^{(\nu)} \equiv \mathbf{E}_a^{(\nu)} + \mathbf{E}_b^{(\nu)} &= \sum_m A_m^{(\nu)}\,\mathbf{E}_m^{(\nu)} + \int\limits_0^{\infty} A_\varkappa^{(\nu)}\,\mathbf{E}_\varkappa^{(\nu)}\,d\varkappa - \frac{\mathbf{e}_z}{\varepsilon}P_z^{(\nu)} = \\ &= \sum_m a_m^{(\nu)}\,\widehat{\mathbf{E}}_m^{(\nu)} + \int\limits_0^{\infty} a_\varkappa^{(\nu)}\,\widehat{\mathbf{E}}_\varkappa^{(\nu)}\,d\varkappa - \frac{\mathbf{e}_z}{\varepsilon}P_z^{(\nu)},\end{aligned} \tag{2.10.38}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{H}^{(\nu)} \equiv \mathbf{H}_a^{(\nu)} &= \sum_m A_m^{(\nu)}\,\mathbf{H}_m^{(\nu)} + \int\limits_0^{\infty} A_\varkappa^{(\nu)}\,\mathbf{H}_\varkappa^{(\nu)}\,d\varkappa = \\ &= \sum_m a_m^{(\nu)}\,\widehat{\mathbf{H}}_m^{(\nu)} + \int\limits_0^{\infty} a_\varkappa^{(\nu)}\,\widehat{\mathbf{H}}_\varkappa^{(\nu)}\,d\varkappa.\end{aligned} \tag{2.10.39}$$

Здесь, в отличие от (2.10.36) и (2.10.37), переменная интегрирования по непрерывному спектру записана не как аргумент функций, а в виде индекса $\varkappa$ для того, чтобы симметрировать форму записи для дискретных и непрерывных мод. Пределы интегрирования в (2.10.38) и (2.10.39) берутся равными 0 и ∞, в отличие от (2.10.36) и (2.10.37), поскольку, в соответствии с (1.9.3), поперечное волновое число подложки $k_{y2} \equiv \varkappa$ всегда положительно.

Модальные поля и их мембранные функции (отмеченные колпачком), а также волновые амплитуды и амплитуды возбуждения для мод дискретного и непрерывного спектров связаны формулами (2.2.3) и (2.3.5), а именно

- для *направляемых мод* (номер моды m — дискретное целое число):

$$\mathbf{E}_m^{(\nu)}(\mathbf{r}_t, z) = \widehat{\mathbf{E}}_m^{(\nu)}(\mathbf{r}_t)\, e^{-\gamma_m^{(\nu)} z}, \tag{2.10.40}$$

$$\mathbf{H}_m^{(\nu)}(\mathbf{r}_t, z) = \widehat{\mathbf{H}}_m^{(\nu)}(\mathbf{r}_t)\, e^{-\gamma_m^{(\nu)} z}, \tag{2.10.41}$$

$$a_m^{(\nu)}(z) = A_m^{(\nu)}(z)\, e^{-\gamma_m^{(\nu)} z}; \tag{2.10.42}$$

- для *излучательных мод* (номер моды $\varkappa$ — непрерывная переменная):

$$\mathbf{E}_\varkappa^{(\nu)}(\mathbf{r}_t, z) = \widehat{\mathbf{E}}_\varkappa^{(\nu)}(\mathbf{r}_t)\, e^{-\gamma_\varkappa^{(\nu)} z} \equiv \widehat{\mathbf{E}}^{(\nu)}(\mathbf{r}_t; \varkappa)\, e^{-\gamma^{(\nu)}(\varkappa) z}, \tag{2.10.43}$$

$$\mathbf{H}_\varkappa^{(\nu)}(\mathbf{r}_t, z) = \widehat{\mathbf{H}}_\varkappa^{(\nu)}(\mathbf{r}_t)\, e^{-\gamma_\varkappa^{(\nu)} z} \equiv \widehat{\mathbf{H}}^{(\nu)}(\mathbf{r}_t; \varkappa)\, e^{-\gamma^{(\nu)}(\varkappa) z}, \tag{2.10.44}$$

$$a_\varkappa^{(\nu)}(z) = A_\varkappa^{(\nu)}(z)\, e^{-\gamma_\varkappa^{(\nu)} z} \equiv A^{(\nu)}(z; \varkappa)\, e^{-\gamma^{(\nu)}(\varkappa) z}. \tag{2.10.45}$$

Как обсуждалось в п. 1.9, амплитуды возбуждения (как и волновые амплитуды) для дискретных мод всегда безразмерные, в то время как аналогичная размерность для мод непрерывного спектра зависит от числа измерений поперечного сечения структуры (равного единице для планарных волноводов и двум для канальных волноводов). Это отражено в табл. 1.1 проведением одной или двух черточек над амплитудами (а также над модальными нормами и коэффициентами связи). Однако в формулах (2.10.38)–(2.10.39) и далее в этой главе не будем придерживаться этого правила для упрощения записи.

Дальнейшим шагом является вывод уравнений для нахождения продольной зависимости амплитуд возбуждения $A_m^{(\nu)}(z)$ и $A_\varkappa^{(\nu)}(z)$ (или волновых амплитуд $a_m^{(\nu)}(z)$ и $a_\varkappa^{(\nu)}(z)$), появляющейся в результате возбуждения оптических мод объемным электрическим током $\mathbf{J}_b^{e(\nu)}$ и эффективным поверхностным магнитным током $\mathbf{J}_{s,eff}^{m(\nu)} \equiv \mathbf{J}_s^{m(\nu)}$ (индекс *eff* будем опускать). Основу для вывода уравнений возбуждения составляет лемма Лоренца в комплексно-сопряженной форме.

2.11. Сопряженная лемма Лоренца для многочастотного режима

Как и ранее в п. 2.8, исходной точкой для вывода сопряженной леммы Лоренца является система из двух уравнений Максвелла на частоте ω_ν (с маркировкой комплексных амплитуд верхним индексом (ν)), аналогичных уравнениям (2.10.28) и (2.10.29) (ср. уравнения (2.8.1)–(2.8.2)):

$$\nabla \times \mathbf{E}_1^{(\nu)} = -i\omega_\nu \mathbf{B}_1^{(\nu)}, \qquad \nabla \times \mathbf{E}_2^{(\nu)*} = i\omega_\nu \mathbf{B}_2^{(\nu)*}, \tag{2.11.1}$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_1^{(\nu)} = i\omega_\nu \mathbf{D}_1^{(\nu)} + \mathbf{J}_{b1}^{e(\nu)}, \qquad \nabla \times \mathbf{H}_2^{(\nu)*} = -i\omega_\nu \mathbf{D}_2^{(\nu)*} + \mathbf{J}_{b2}^{e(\nu)*}. \tag{2.11.2}$$

Эти уравнения записаны для двух различных электромагнитных процессов (отмеченных индексами 1 и 2), которые возбуждаются разными источниками — объемными электрическими токами $\mathbf{J}_{b1(2)}^{e(\nu)}$ и эффективными поверхностными магнитными токами $\mathbf{J}_{s1(2)}^{m(\nu)}$, введенными соотношением (2.10.33).

Применяя к уравнениям (2.11.1) и (2.11.2) ту же самую процедуру, которая привела к квадратичному соотношению (2.8.3), получаем искомую лемму Лоренца:

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\left(\mathbf{E}_1^{(\nu)}\times\mathbf{H}_2^{(\nu)*}+\mathbf{E}_2^{(\nu)*}\times\mathbf{H}_1^{(\nu)}\right) = -\left(\mathbf{J}_{b1}^{e(\nu)}\cdot\mathbf{E}_2^{(\nu)*}+\mathbf{J}_{b2}^{e(\nu)*}\cdot\mathbf{E}_1^{(\nu)}\right) -\\ - i\omega_\nu\Big[\left(\mathbf{D}_1^{(\nu)}\cdot\mathbf{E}_2^{(\nu)*}-\mathbf{D}_2^{(\nu)*}\cdot\mathbf{E}_1^{(\nu)}\right)+\\ +\left(\mathbf{B}_1^{(\nu)}\cdot\mathbf{H}_2^{(\nu)*}-\mathbf{B}_2^{(\nu)*}\cdot\mathbf{H}_1^{(\nu)}\right)\Big].\end{aligned}\tag{2.11.3}$$

В случае одноволноводных систем, анализируемых здесь, параметры среды ε и μ_0, входящие в материальные уравнения (2.10.1) и (2.10.2), одинаковые для двух физических ситуаций, отмеченных индексами 1 и 2, тогда

$$\mathbf{D}_1^{(\nu)}=\varepsilon\mathbf{E}_1^{(\nu)} \quad \text{и} \quad \mathbf{D}_2^{(\nu)}=\varepsilon\mathbf{E}_2^{(\nu)},\tag{2.11.4}$$

$$\mathbf{B}_1^{(\nu)}=\mu_0\mathbf{H}_1^{(\nu)} \quad \text{и} \quad \mathbf{B}_2^{(\nu)}=\mu_0\mathbf{H}_2^{(\nu)}.\tag{2.11.5}$$

При помощи (2.11.4) и (2.11.5) последнее слагаемое в правой части (2.11.3) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}i\omega_\nu\Big[\left(\mathbf{D}_1^{(\nu)}\cdot\mathbf{E}_2^{(\nu)*}-\mathbf{D}_2^{(\nu)*}\cdot\mathbf{E}_1^{(\nu)}\right)+\left(\mathbf{B}_1^{(\nu)}\cdot\mathbf{H}_2^{(\nu)*}-\mathbf{B}_2^{(\nu)*}\cdot\mathbf{H}_1^{(\nu)}\right)\Big] =\\ = i\omega_\nu(\varepsilon-\varepsilon^*)\,\mathbf{E}_1^{(\nu)}\cdot\mathbf{E}_2^{(\nu)*}.\end{aligned}\tag{2.11.6}$$

Это выражение учитывает электрические потери в среде, вводимые скалярной электрической проводимостью $\sigma_e = i\omega_\nu(\varepsilon-\varepsilon^*)/2$, аналогично (2.1.27).

Подстановка (2.11.6) в равенство (2.11.3) приводит к *дифференциальной форме* леммы Лоренца для многочастотного режима (ср. уравнение (2.8.6)):

$$\nabla\cdot\mathbf{S}_{12}^{(\nu)}+q_{12}^{(b)}=r_{12}^{(b)},\tag{2.11.7}$$

где введены обозначения (ср. уравнения (2.8.7)–(2.8.9))

$$\mathbf{S}_{12}^{(\nu)}=\mathbf{E}_1^{(\nu)}\times\mathbf{H}_2^{(\nu)*}+\mathbf{E}_2^{(\nu)*}\times\mathbf{H}_1^{(\nu)},\tag{2.11.8}$$

$$q_{12}^{(b)}=2\sigma_e\mathbf{E}_1^{(\nu)}\cdot\mathbf{E}_2^{(\nu)*},\tag{2.11.9}$$

$$r_{12}^{(b)}=-\left(\mathbf{J}_{b1}^{e(\nu)}\cdot\mathbf{E}_2^{(\nu)*}+\mathbf{J}_{b2}^{e(\nu)*}\cdot\mathbf{E}_1^{(\nu)}\right).\tag{2.11.10}$$

Как и ранее, индекс (b) отражает принадлежность соответствующих величин к объемным характеристикам системы, в то время как поверхностные свойства будут отмечены индексом (s).

Для получения леммы Лоренца в интегральной форме необходимо проинтегрировать дифференциальное соотношение (2.11.7) по сложному поперечному сечению $S=\sum_i S_i$, составленному из нескольких сред, имеющих сечение S_i, ограниченное контуром L_i, с применением двумерной теоремы о дивергенции типа (2.1.31), которая дает

$$\int\limits_S \left(\nabla \cdot \mathbf{S}_{12}^{(\nu)}\right) dS = \frac{\partial}{\partial z} \int\limits_S \left(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{S}_{12}^{(\nu)}\right) dS - \\ - \sum_i \oint\limits_{L_i} \left(\mathbf{n}_i^+ \cdot \mathbf{S}_{12}^{(\nu)+} + \mathbf{n}_i^- \cdot \mathbf{S}_{12}^{(\nu)-}\right) dL. \qquad (2.11.11)$$

Здесь $\mathbf{S}_{12}^{(\nu)\pm}$ соответствует значениям вектора $\mathbf{S}_{12}^{(\nu)}$, взятым в точках контура L_i, лежащих по разные его стороны, что отмечено единичными нормалями $\mathbf{n}_i^{\pm}$, направленными *внутрь* смежных сред, разделенных этим контуром.

Части контура, соответствующие границе между диэлектрическими средами, не вносят вклада в контурные интегралы (2.11.11) из-за непрерывности касательных компонент полей, выраженной граничными условиями (2.1.32) и (2.1.33). Имеются только две физические причины, обеспечивающие ненулевой вклад в эти контурные интегралы:

- *скиновые потери* в неидеально проводящем металле с поверхностным сопротивлением $\mathcal{R}_s = \sqrt{\omega_\nu \mu_0 / 2\sigma}$, входящим в граничное условие на контуре L (ср. формулы (2.1.35)–(2.1.36)),

$$\mathbf{n}_i \times \mathbf{E}_\tau^{(\nu)} = (1+i)\,\mathcal{R}_s \mathbf{H}_\tau^{(\nu)}; \qquad (2.11.12)$$

- *поверхностные токи*, главным образом (помимо реальных токов $\mathbf{J}_s^{(\nu)}$) эффективный поверхностный *магнитный ток* $\mathbf{J}_{s,eff}^{m(\nu)}$ (2.10.33), который расположен на контуре L_b, ограничивающем сечение S_b, занятое объемным электрическим током $\mathbf{J}_b^{e(\nu)}$, и удовлетворяет граничному условию (2.6.21).

С учетом граничных условий (2.6.21), (2.6.22) и (2.11.12), интегральное соотношение (2.11.11) принимает вид (ср. формулу (2.8.10))

$$\int\limits_S \left(\nabla \cdot \mathbf{S}_{12}^{(\nu)}\right) dS = \frac{\partial}{\partial z} \int\limits_S \mathbf{S}_{12}^{(\nu)} \cdot \mathbf{e}_z \, dS + \int\limits_L q_{12}^{(s)} \, dL - \int\limits_{L_b} r_{12}^{(s)} \, dL, \qquad (2.11.13)$$

где введены следующие поверхностные величины (с индексом (s)):

$$q_{12}^{(s)} = 2\mathcal{R}_s \left(\mathbf{H}_{\tau 1}^{(\nu)} \cdot \mathbf{H}_{\tau 2}^{(\nu)*}\right), \qquad (2.11.14)$$

$$r_{12}^{(s)} = -\left(\mathbf{J}_{s1}^{m(\nu)} \cdot \mathbf{H}_2^{(\nu)*} + \mathbf{J}_{s2}^{m(\nu)*} \cdot \mathbf{H}_1\right). \qquad (2.11.15)$$

Интегрирование дифференциальной леммы Лоренца (2.11.7) по поперечному сечению S с учетом (2.11.13) приводит к *интегральной форме* леммы (ср. формулу (2.8.13)):

$$\frac{dP_{12}^{(\nu)}}{dz} + Q_{12}^{(\nu)} = R_{12}^{(\nu)}. \qquad (2.11.16)$$

Здесь по аналогии с выражениями (2.8.14)–(2.8.16) введены следующие интегральные величины для многочастотного режима в параметрических

6*

структурах (с верхним индексом (ν), отмечающим частоту $\omega_\nu = \omega + \nu\omega_p$):

$$
\begin{aligned}
P_{12}^{(\nu)} &\equiv \int\limits_S \mathbf{S}_{12}^{(\nu)}(\mathbf{r}_t, z) \cdot \mathbf{e}_z \, dS = \\
&= \int\limits_S \left(\mathbf{E}_1^{(\nu)} \times \mathbf{H}_2^{(\nu)*} + \mathbf{E}_2^{(\nu)*} \times \mathbf{H}_1^{(\nu)}\right) \cdot \mathbf{e}_z \, dS,
\end{aligned} \tag{2.11.17}
$$

$$
\begin{aligned}
Q_{12}^{(\nu)} &= Q_{12}^{(b)} + Q_{12}^{(s)} \equiv \int\limits_S q_{12}^{(b)}(\mathbf{r}_t, z) \, dS + \int\limits_L q_{12}^{(s)}(\mathbf{r}_t, z) \, dL = \\
&= 2 \int\limits_S \sigma_e \left(\mathbf{E}_1^{(\nu)} \cdot \mathbf{E}_2^{(\nu)*}\right) dS + 2 \int\limits_L \mathcal{R}_s \left(\mathbf{H}_{\tau 1}^{(\nu)} \cdot \mathbf{H}_{\tau 2}^{(\nu)*}\right) dL,
\end{aligned} \tag{2.11.18}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{12}^{(\nu)} &= R_{12}^{(b)} + R_{12}^{(s)} \equiv \int\limits_{S_b} r_{12}^{(b)}(\mathbf{r}_t, z) dS + \int\limits_{L_s} r_{12}^{(s)}(\mathbf{r}_t, z) dL = \\
&= - \int\limits_{S_b} \left(\mathbf{J}_{b1}^{e(\nu)} \cdot \mathbf{E}_2^{(\nu)*} + \mathbf{J}_{b2}^{e(\nu)*} \cdot \mathbf{E}_1^{(\nu)}\right) dS - \\
&\quad - \int\limits_{L_b} \left(\mathbf{J}_{s1}^{m(\nu)} \cdot \mathbf{H}_2^{(\nu)*} + \mathbf{J}_{s2}^{m(\nu)*} \cdot \mathbf{H}_1^{(\nu)}\right) dL.
\end{aligned} \tag{2.11.19}
$$

Сравнение выражений (2.11.16)–(2.11.19) с аналогичными выражениями (2.8.13)–(2.8.16), полученными для бианизотропных волноводов, показывает их близкое сходство (при добавлении к последним частотного индекса (ν)); при этом выражение (2.11.18), учитывающее потери, существенно упрощено. Кроме того, интеграл возбуждения (2.11.19) учитывает не все возможные возбуждающие токи, как в (2.8.16), а только те из них, которые характерны для возбуждения оптических волноводов, а именно: объемные *электрические токи* $\mathbf{J}_b^{e(\nu)}$, занимающие поперечное сечение S_b, и эффективные поверхностные *магнитные токи* $\mathbf{J}_s^{m(\nu)}$ (с опущенным индексом eff), распределенные вдоль границы L_b сечения S_b.

2.12. Квази-ортогональность и ортогональность мод в открытых волноводах с изотропным заполнением

2.12.1. Соотношения квази-ортогональности для многочастотного режима в волноводах с потерями. Как и ранее в п. 2.8.3, применяем интегральную лемму Лоренца (2.11.16) для вывода соотношений модальной квази-ортогональности в многочастотном случае. С этой целью вне области источников ($R_{12}^{(\nu)} = 0$) полагаем, что электромагнитные поля с индексами 1 и 2 соответствуют n-й и m-й модам базового волновода, собственные поля которых выражаются в виде (2.10.40) и (2.10.41). В этом случае лемма Лоренца (2.11.16) принимает следующий вид (ср. уравнение (2.8.20)):

$$\frac{dP_{mn}^{(\nu)}(z)}{dz} + Q_{mn}^{(\nu)}(z) = 0. \tag{2.12.1}$$

Переносимая кросс-мощность $P_{mn}^{(\nu)}$ и кросс-мощность потерь $Q_{mn}^{(\nu)}$, созданные полями m-й и n-й мод на частоте ω_ν, равняются (ср. уравнения (2.2.12) и (2.2.13))

$$P_{mn}^{(\nu)}(z) = \frac{1}{4}\, N_{mn}^{(\nu)}\, a_m^{(\nu)*}(z)\, a_n^{(\nu)}(z) = \frac{1}{4}\, N_{mn}^{(\nu)}\, A_m^{(\nu)*} A_n^{(\nu)} e^{-(\gamma_m^{(\nu)*}+\gamma_n^{(\nu)})z}, \tag{2.12.2}$$

$$Q_{mn}^{(\nu)}(z) = \frac{1}{4}\, M_{mn}^{(\nu)}\, a_m^{(\nu)*}(z)\, a_n^{(\nu)}(z) = \frac{1}{4}\, M_{mn}^{(\nu)}\, A_m^{(\nu)*} A_n^{(\nu)} e^{-(\gamma_m^{(\nu)*}+\gamma_n^{(\nu)})z}. \tag{2.12.3}$$

Здесь по аналогии с (2.2.6) и (2.2.7) введены *нормировочные коэффициенты*,

$$N_{mn}^{(\nu)} = \int\limits_S \left(\widehat{\mathbf{E}}_m^{(\nu)*} \times \widehat{\mathbf{H}}_n^{(\nu)} + \widehat{\mathbf{E}}_n^{(\nu)} \times \widehat{\mathbf{H}}_m^{(\nu)*}\right) \cdot \mathbf{e}_z dS \equiv N_{nm}^{(\nu)*}, \tag{2.12.4}$$

и *диссипативные коэффициенты*,

$$M_{mn}^{(\nu)} = 2\int\limits_S \sigma_e \left(\widehat{\mathbf{E}}_m^{(\nu)*} \cdot \widehat{\mathbf{E}}_n^{(\nu)}\right) dS + 2\int\limits_L \mathcal{R}_s \left(\widehat{\mathbf{H}}_{\tau m}^{(\nu)*} \cdot \widehat{\mathbf{H}}_{\tau n}^{(\nu)}\right) dL \equiv M_{nm}^{(\nu)*}, \tag{2.12.5}$$

созданные векторными мембранными функциями m-й и n-й мод (отмеченными колпачком) на частоте ω_ν.

Соотношение (2.12.1) обеспечивает жесткую связь между $P_{mn}^{(\nu)}$ и $Q_{mn}^{(\nu)}$ для каждой пары (m,n) мод на любой частоте ω_ν. Это характеризует независимый перенос и диссипацию энергии данной парой без связи ее с другими модами волновода за пределами области источников. Другими словами, в многочастотной диссипативной волноведущей структуре электромагнитные поля для произвольной составляющей частотного спектра каждой пары мод подчиняются собственной теореме Пойнтинга в интегральной форме (2.12.1), не зависящей от наличия других модальных пар.

Так как вне области источников амплитуды возбуждения $A_m^{(\nu)}(z)$ постоянны, то подстановка (2.12.2) и (2.12.3) в равенство (2.12.1) дает искомое ***соотношение квази-ортогональности*** для многочастотных диссипативных волноводов (ср. уравнение (2.3.7)),

$$\left(\gamma_m^{(\nu)*} + \gamma_n^{(\nu)}\right) N_{mn}^{(\nu)} = M_{mn}^{(\nu)}, \tag{2.12.6}$$

которое, с использованием (2.12.2) и (2.12.3), может быть записано в энергетической форме (ср. уравнение (2.3.8)):

$$\left(\gamma_m^{(\nu)*} + \gamma_n^{(\nu)}\right) P_{mn}^{(\nu)} = Q_{mn}^{(\nu)}. \tag{2.12.7}$$

Следовательно, кросс-мощности $P_{mn}^{(\nu)}$ и $Q_{mn}^{(\nu)}$ для любой пары (m,n) диссипативных мод, будучи *комплекснозначными*, жестко связаны друг с другом множителем $(\gamma_m^{(\nu)*}+\gamma_n^{(\nu)})$, составленным из модальных постоянных распространения $\gamma_{m(n)}^{(\nu)}=\alpha_{m(n)}^{(\nu)}+i\beta_{m(n)}^{(\nu)}$. Однако суммарные *парные кросс-мощности* P_{mn}^{pair} и Q_{mn}^{pair}, определенные в виде (ср. формулы (2.2.15) и (2.2.16))

$$P_{mn}^{pair}(z)\equiv P_{mn}^{(\nu)}(z)+P_{nm}^{(\nu)}(z)=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left\{N_{mn}^{(\nu)}\,a_m^{(\nu)*}(z)\,a_n^{(\nu)}(z)\right\}, \tag{2.12.8}$$

$$Q_{mn}^{pair}(z)\equiv Q_{mn}^{(\nu)}(z)+Q_{nm}^{(\nu)}(z)=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left\{M_{mn}^{(\nu)}\,a_m^{(\nu)*}(z)\,a_n^{(\nu)}(z)\right\}, \tag{2.12.9}$$

всегда остаются *вещественными* и не зависят от других модальных пар в силу соотношения квази-ортогональности (2.12.7).

2.12.2. Соотношения ортонормировки для направляемых и излучательных мод в волноводах без потерь. Для недиссипативных волноведущих структур соотношение ортогональности получается из общего соотношения квази-ортогональности (2.12.6), как частный случай при $M_{mn}^{(\nu)}=0$, в привычной форме (ср. формулу (2.4.1))

$$\left(\gamma_m^{(\nu)*}+\gamma_n^{(\nu)}\right)N_{mn}^{(\nu)}=0. \tag{2.12.10}$$

Как известно (см. пп. 1.1 и 2.4), спектр собственных мод волновода без потерь содержит, кроме распространяющихся мод с $\alpha_m^{(\nu)}=0$ и $\gamma_m^{(\nu)}=i\beta_m^{(\nu)}$, названных *активными модами*, также нераспространяющиеся моды с комплексными, несмотря на отсутствие потерь, постоянными распространения $\gamma_m^{(\nu)}=\alpha_m^{(\nu)}+i\beta_m^{(\nu)}$ при $\alpha_m^{(\nu)}\neq 0$, которые были названы *реактивными модами*. Понятно, что реактивные моды могут существовать только в режиме отсечки (в полосе непропускания) волновода. Следовательно, их затухание имеет недиссипативный (чисто реактивный) характер, связанный с запасанием реактивной энергии без переноса активной (реальной) мощности вдоль волновода отдельной модой.

Результаты изучения общих свойств активных и реактивных мод, включая реактивные *двойниковые пары*, приведенные в п. 2.4, остаются справедливыми и для оптических мод. В применении к базовому оптическому волноводу в форме трехслойной диэлектрической структуры, изображенной на рис. 1.8, все реактивные моды принадлежат непрерывному спектру излучательных мод, в то время как дискретные направляемые моды всегда являются активными в полосе своего существования [24]. Как показано в гл. 1, реактивные (исчезающие) моды непрерывного спектра обеспечивают реактивные поля в ближней зоне, которые эквивалентны вкладу вытекающих мод (см. п. 1.5.2).

В последующем анализе оптических мод ограничимся *только активными модами* дискретного и непрерывного спектров. В частности, для активных направляемых мод соотношение ортогональности (2.12.10) принимает следующий вид (ср. формулу (2.4.8)):

$$\left(\beta_m^{(\nu)}-\beta_n^{(\nu)}\right)N_{mn}^{(\nu)}=0. \tag{2.12.11}$$

Соотношение ортонормировки для *активных направляемых мод* следует из (2.12.11) в виде (ср. уравнения (1.8.1) и (2.4.15))

$$N_{mn}^{(\nu)} \equiv \int_S \left(\widehat{\mathbf{E}}_m^{(\nu)*} \times \widehat{\mathbf{H}}_n^{(\nu)} + \widehat{\mathbf{E}}_n^{(\nu)} \times \widehat{\mathbf{H}}_m^{(\nu)*}\right) \cdot \mathbf{e}_z \, dS = N_m^{(\nu)} \delta_{mn}, \qquad (2.12.12)$$

где норма m-й моды на частоте $\omega_\nu = \omega + \nu\omega_p$ определена как

$$N_m^{(\nu)} \equiv N_{mm}^{(\nu)} = 2\mathrm{Re} \int_S \left(\widehat{\mathbf{E}}_m^{(\nu)*} \times \widehat{\mathbf{H}}_m^{(\nu)}\right) \cdot \mathbf{e}_z \, dS. \qquad (2.12.13)$$

Соотношение ортонормировки (2.12.12) для дискретных направляемых мод легко обобщается на непрерывные излучательные моды путем замены символа Кронекера δ_{mn} дельта-функцией Дирака $\delta(\varkappa - \varkappa')$, где $\varkappa$ является независимой переменной интегрирования по непрерывному спектру излучательных мод (см. с. 84 и табл. 1.1). В частности, для планарного трехслойного волновода переменная интегрирования является поперечным волновым числом подложки, т. е. $\varkappa \equiv \varkappa_2 = k_{y2}$.

Соотношение ортонормировки для *активных излучательных мод* получается как обобщение соотношения (2.12.12) в виде (ср. уравнение (1.9.6))

$$N_{\varkappa\varkappa'}^{(\nu)} \equiv \int_S \left(\widehat{\mathbf{E}}_\varkappa^{(\nu)*} \times \widehat{\mathbf{H}}_{\varkappa'}^{(\nu)} + \widehat{\mathbf{E}}_{\varkappa'}^{(\nu)} \times \widehat{\mathbf{H}}_\varkappa^{(\nu)*}\right) \cdot \mathbf{e}_z \, dS = N_\varkappa^{(\nu)} \delta(\varkappa - \varkappa'). \qquad (2.12.14)$$

Нормировочная константа $N_\varkappa^{(\nu)}$ интерпретируется как норма излучательной моды на частоте ω_ν, которая характеризуется конкретным значением $\varkappa$ для переменной интегрирования по непрерывному спектру.

Нормы направляемых и излучательных мод ТЕ- и ТМ-типов были вычислены в п. 1.8 и 1.9 для планарного трехслойного диэлектрического волновода, показанного на рис. 1.8.

Соотношение ортогональности (2.12.11), верное для любой пары (m, n) направляемых активных мод дискретного спектра, может быть обобщено на модальную пару, состоящую из дискретной активной моды (с индексом m) и непрерывной активной моды (с индексом $\varkappa$), следующим образом:

$$\left(\beta_m^{(\nu)} - \beta_\varkappa^{(\nu)}\right) N_{m\varkappa}^{(\nu)} = 0. \qquad (2.12.15)$$

В планарном диэлектрическом волноводе направляемые моды дискретного спектра и излучательные моды непрерывного спектра занимают разные угловые секторы на диаграмме в координатах $\omega - \beta$, изображенной на рис. 1.10, поэтому всегда $\beta_m^{(\nu)} \neq \beta_\varkappa^{(\nu)}$. Тогда из (2.12.15) следует свойство взаимной ортогональности мод дискретного и непрерывного спектров, записанное в виде

$$N_{m\varkappa}^{(\nu)} \equiv \int_S \left(\widehat{\mathbf{E}}_m^{(\nu)*} \times \widehat{\mathbf{H}}_\varkappa^{(\nu)} + \widehat{\mathbf{E}}_\varkappa^{(\nu)} \times \widehat{\mathbf{H}}_m^{(\nu)*}\right) \cdot \mathbf{e}_z \, dS = 0. \qquad (2.12.16)$$

2.13. Возбуждение направляемых и излучательных мод в открытых оптических волноводах

Для вывода уравнений возбуждения направляемых и излучательных мод в открытых оптических волноводах следует, как и ранее в п. 2.8.4, применять сопряженную лемму Лоренца в интегральной форме (2.11.16) для области, занятой объемными и эффективными поверхностными токами. Согласно (2.10.27) и (2.10.32), специфической особенностью теории возбуждения оптических волноводов является отсутствие *объемных магнитных* токов ($\mathbf{J}_b^{m(\nu)} = 0$) и эффективных *поверхностных электрических* токов ($\mathbf{J}_{s,eff}^{e(\nu)} = 0$). Это существенно упрощает уравнения возбуждения и связи оптических мод, выводимые ниже. Роль возбуждаемых источников для них играют *объемные электрические* токи и эффективные *поверхностные магнитные* токи, даваемые формулами (2.10.26) и (2.10.33) в виде

$$\mathbf{J}_b^{e(\nu)} = i\omega_\nu \mathbf{P}^{(\nu)} \quad \text{и} \quad \mathbf{J}_{s,eff}^{m(\nu)} = \frac{\tau_b}{\varepsilon} P_z^{(\nu)}(L_b) \equiv \mathbf{J}_s^{m(\nu)}, \tag{2.13.1}$$

с опущенным в дальнейшем индексом eff. Оба возбуждающих тока (2.13.1) создаются *избыточной поляризацией* $\mathbf{P}^{(\nu)}$ в форме (2.10.24).

Для получения уравнений возбуждения электромагнитные поля с индексами 1 и 2, которые подчиняются уравнениям Максвелла (2.11.1)–(2.11.2) и входят в лемму Лоренца, даваемую формулами (2.11.16)–(2.11.19), имеют следующую структуру.

1. Электромагнитные поля с индексом 1 выражают *искомые* полные поля (2.10.38) и (2.10.39), которые возбуждаются объемным электрическим $\left(\mathbf{J}_b^{e(\nu)}\right)$ и эффективным поверхностным магнитным $\left(\mathbf{J}_s^{m(\nu)}\right)$ токами в форме (2.13.1), а именно

$$\mathbf{E}_1^{(\nu)} \equiv \mathbf{E}^{(\nu)} = \mathbf{E}_a^{(\nu)} + \mathbf{E}_b^{(\nu)}, \qquad \mathbf{J}_{b1}^{e(\nu)} \equiv \mathbf{J}_b^{e(\nu)} \neq 0, \tag{2.13.2}$$

$$\mathbf{H}_1^{(\nu)} \equiv \mathbf{H}^{(\nu)} = \mathbf{H}_a^{(\nu)}, \qquad \mathbf{J}_{s1}^{m(\nu)} \equiv \mathbf{J}_s^{m(\nu)} \neq 0, \tag{2.13.3}$$

где поля $\mathbf{E}^{(\nu)}$ и $\mathbf{H}^{(\nu)}$ имеют вид (2.10.38) и (2.10.39) с заменой индекса суммирования m на n и переменной интегрирования $\varkappa$ на $\varkappa'$.

2. Электромагнитные поля с индексом 2 выражают *известные* собственные поля либо m-й направляемой моды, либо $\varkappa$-й излучательной моды, которые подчиняются однородным уравнениям Максвелла (без возбуждающих токов), а именно

$$\mathbf{E}_2^{(\nu)} \equiv \mathbf{E}_m^{(\nu)} \quad \text{или} \quad \equiv \mathbf{E}_\varkappa^{(\nu)}, \qquad \mathbf{J}_{b2}^{e(\nu)} = 0, \tag{2.13.4}$$

$$\mathbf{H}_2^{(\nu)} \equiv \mathbf{H}_m^{(\nu)} \quad \text{или} \quad \equiv \mathbf{H}_\varkappa^{(\nu)}, \qquad \mathbf{J}_{s2}^{m(\nu)} = 0, \tag{2.13.5}$$

где поля $\mathbf{E}_m^{(\nu)}$ и $\mathbf{H}_m^{(\nu)}$ направляемых мод имеют вид (2.10.40) и (2.10.41), а поля $\mathbf{E}_\varkappa^{(\nu)}$ и $\mathbf{H}_\varkappa^{(\nu)}$ излучательных мод даны формулами (2.10.43) и (2.10.44).

Будем применять вышесказанное к сопряженной лемме Лоренца в интегральной форме (2.11.16), для того чтобы вывести уравнение возбуждения отдельно для дискретных направляемых мод и для непрерывных излучательных мод в открытых оптических волноводах.

2.13.1. Вывод уравнений возбуждения для направляемых мод. Если интересоваться возбуждением направляемой моды, скажем с номером m, тогда необходимо записать лемму Лоренца (2.11.16) в следующем виде (с заменой индекса 2 на m):

$$\frac{dP_{1m}^{(\nu)}(z)}{dz} + Q_{1m}^{(\nu)}(z) = R_{1m}^{(\nu)}(z). \tag{2.13.6}$$

Подстановка полных полей в форме (2.10.38) и (2.10.39) (при замене индекса $m \to n$) в общие выражения (2.11.17)–(2.11.19), с заменой индекса 2 на m и с учетом (2.13.2)–(2.13.5), приводит к следующим соотношениям (явно указывающим зависимость от координаты z):

$$\begin{aligned} P_{1m}^{(\nu)}(z) &\equiv \int\limits_S \mathbf{S}_{1m}^{(\nu)} \cdot \mathbf{e}_z \, dS = \int\limits_S \left(\mathbf{E}_1^{(\nu)} \times \mathbf{H}_m^{(\nu)*} + \mathbf{E}_m^{(\nu)*} \times \mathbf{H}_1^{(\nu)}\right) \cdot \mathbf{e}_z \, dS = \\ &= \left\{ \sum_n N_{mn}^{(\nu)} A_n^{(\nu)}(z) \, e^{-\gamma_n^{(\nu)} z} + \int\limits_0^\infty N_{m\varkappa}^{(\nu)} A_\varkappa^{(\nu)}(z) \, e^{-\gamma_\varkappa^{(\nu)} z} d\varkappa \right\} e^{-\gamma_m^{(\nu)*} z}, \end{aligned} \tag{2.13.7}$$

$$\begin{aligned} Q_{1m}^{(\nu)}(z) &\equiv 2 \int\limits_S \sigma_e \left(\mathbf{E}_1^{(\nu)} \cdot \mathbf{E}_m^{(\nu)*}\right) dS + 2 \int\limits_L \mathcal{R}_s \left(\mathbf{H}_{\tau 1}^{(\nu)} \cdot \mathbf{H}_{\tau m}^{(\nu)*}\right) dL = \\ &= \left\{ \sum_n M_{mn}^{(\nu)} A_n^{(\nu)}(z) \, e^{-\gamma_n^{(\nu)} z} + \int\limits_0^\infty M_{m\varkappa}^{(\nu)} A_\varkappa^{(\nu)}(z) \, e^{-\gamma_\varkappa^{(\nu)} z} d\varkappa \right\} e^{-\gamma_m^{(\nu)*} z}, \end{aligned} \tag{2.13.8}$$

$$R_{1m}^{(\nu)}(z) = -\int\limits_{S_b} \mathbf{J}_b^{e(\nu)}(z) \cdot \mathbf{E}_m^{(\nu)*}(z) \, dS - \int\limits_{L_b} \mathbf{J}_s^{m(\nu)}(z) \cdot \mathbf{H}_m^{(\nu)*}(z) \, dL \equiv R_m^{(\nu)}(z) e^{-\gamma_m^{(\nu)*} z}. \tag{2.13.9}$$

Здесь интегралы объемного и поверхностного возбуждения m-й направляемой моды определены в виде (ср. уравнения (2.8.29)–(2.8.30))

$$R_m^{(\nu)}(z) = -\int\limits_{S_b} \mathbf{J}_b^{e(\nu)}(z) \cdot \widehat{\mathbf{E}}_m^{(\nu)*} dS - \int\limits_{L_b} \mathbf{J}_s^{m(\nu)}(z) \cdot \widehat{\mathbf{H}}_m^{(\nu)*} dL. \tag{2.13.10}$$

Эти интегралы содержат мембранные функции $\widehat{\mathbf{E}}_m^{(\nu)}(\mathbf{r}_t)$ и $\widehat{\mathbf{H}}_m^{(\nu)}(\mathbf{r}_t)$ собственных полей моды, которые зависят только от координат $\mathbf{r}_t$ поперечного сечения волновода. Поэтому зависимость $R_m^{(\nu)}(z)$ от z вызвана продольным распределением объемного электрического тока $\mathbf{J}_b^{e(\nu)}(\mathbf{r}_t, z)$ и эффективного поверхностного магнитного тока $\mathbf{J}_s^{m(\nu)}(\mathbf{r}_t, z)$.

Выражения (2.13.7) и (2.13.8) включают нормировочные коэффициенты $N_{mn}^{(\nu)}$, $N_{m\varkappa}^{(\nu)}$ и диссипативные коэффициенты $M_{mn}^{(\nu)}$, $M_{m\varkappa}^{(\nu)}$, которые были определены в виде (2.12.4) и (2.12.5) (в том числе с заменой индекса $n \to \varkappa$).

Подстановка (2.13.7)–(2.13.9) в соотношение (2.13.6) приводит к следующему уравнению:

$$\begin{gathered}\sum_n \left\{ N_{mn}^{(\nu)} \frac{dA_n^{(\nu)}}{dz} - \left[\left(\gamma_m^{(\nu)*} + \gamma_n^{(\nu)} \right) N_{mn}^{(\nu)} - M_{mn}^{(\nu)} \right] A_n^{(\nu)} \right\} e^{-\gamma_n^{(\nu)} z} + \\ + \int\limits_0^\infty \left\{ N_{m\varkappa}^{(\nu)} \frac{dA_\varkappa^{(\nu)}}{dz} - \left[\left(\gamma_m^{(\nu)*} + \gamma_\varkappa^{(\nu)} \right) N_{m\varkappa}^{(\nu)} - M_{m\varkappa}^{(\nu)} \right] A_\varkappa^{(\nu)} \right\} e^{-\gamma_\varkappa^{(\nu)} z} d\varkappa = R_m^{(\nu)}. \end{gathered} \tag{2.13.11}$$

Соотношение квази-ортогональности (2.12.6) для двух направляемых мод (m, n) и его обобщение для пары $(m, \varkappa)$, состоящей из направляемой моды и излучательной моды, требуют выполнения равенств

$$\left(\gamma_m^{(\nu)*} + \gamma_n^{(\nu)} \right) N_{mn}^{(\nu)} = M_{mn}^{(\nu)}, \tag{2.13.12}$$

$$\left(\gamma_m^{(\nu)*} + \gamma_\varkappa^{(\nu)} \right) N_{m\varkappa}^{(\nu)} = M_{m\varkappa}^{(\nu)}, \tag{2.13.13}$$

которые обращают в нуль обе квадратные скобки в (2.13.11), что и приводит к искомому результату.

Диссипативные уравнения, описывающие возбуждение направляемых мод в волноведущих структурах с потерями, получаются подстановкой соотношений квази-ортогональности (2.13.12)–(2.13.13) в уравнение (2.13.11) и записываются в следующих двух формах:

• для *амплитуд возбуждения* $A_{n(\varkappa)}^{(\nu)}$

$$\sum_{\substack{n \\ m=1,2,\ldots}} N_{mn}^{(\nu)} \frac{dA_n^{(\nu)}}{dz} e^{-\gamma_n^{(\nu)} z} + \int\limits_0^\infty N_{m\varkappa}^{(\nu)} \frac{dA_\varkappa^{(\nu)}}{dz} e^{-\gamma_\varkappa^{(\nu)} z} \, d\varkappa = R_m^{(\nu)}; \tag{2.13.14}$$

• для *волновых амплитуд* $a_{n(\varkappa)}^{(\nu)} = A_{n(\varkappa)}^{(\nu)} e^{-\gamma_{n(\varkappa)}^{(\nu)} z}$

$$\sum_{\substack{n \\ m=1,2,\ldots}} N_{mn}^{(\nu)} \left(\frac{da_n^{(\nu)}}{dz} + \gamma_n^{(\nu)} a_n^{(\nu)} \right) + \int\limits_0^\infty N_{m\varkappa}^{(\nu)} \left(\frac{da_\varkappa^{(\nu)}}{dz} + \gamma_\varkappa^{(\nu)} a_\varkappa^{(\nu)} \right) d\varkappa = R_m^{(\nu)}, \tag{2.13.15}$$

где нормировочные коэффициенты, определенные в виде (2.12.4), равняются

$$N_{mn}^{(\nu)} = \int\limits_S \left(\widehat{\mathbf{E}}_m^{(\nu)*} \times \widehat{\mathbf{H}}_n^{(\nu)} + \widehat{\mathbf{E}}_n^{(\nu)} \times \widehat{\mathbf{H}}_m^{(\nu)*} \right) \cdot \mathbf{e}_z \, dS \equiv N_{nm}^{(\nu)*}, \tag{2.13.16}$$

$$N_{m\varkappa}^{(\nu)} = \int\limits_S \left(\widehat{\mathbf{E}}_m^{(\nu)*} \times \widehat{\mathbf{H}}_\varkappa^{(\nu)} + \widehat{\mathbf{E}}_\varkappa^{(\nu)} \times \widehat{\mathbf{H}}_m^{(\nu)*} \right) \cdot \mathbf{e}_z \, dS \equiv N_{\varkappa m}^{(\nu)*}. \tag{2.13.17}$$

Специфичность возбуждаемой m-й моды отражена в правой части обоих уравнений (2.13.14) и (2.13.15), которые содержат одинаковый интеграл возбуждения $R_m^{(\nu)}(z)$ в виде (2.13.10). Он описывает взаимодействие модальных полей $\widehat{\mathbf{E}}_m^{(\nu)}$ и $\widehat{\mathbf{H}}_m^{(\nu)}$ m-й моды с возбуждающими токами $\mathbf{J}_b^{e(\nu)}(z)$ и $\mathbf{J}_s^{m(\nu)}(z)$, которые считаются заданными на данном этапе анализа. Как видно из уравнений (2.13.14) и (2.13.15), эти токи возбуждают весь волноводный спектр, включая дискретные и непрерывные моды.

Для оптических волноводов без потерь уравнения возбуждения дискретных направляемых мод получаются из общих уравнений (2.13.14) и (2.13.15), как частный случай, применением к ним *соотношений ортонормировки* (2.12.12) и (2.12.16), а именно

$$N_{mn}^{(\nu)} = N_m^{(\nu)}\delta_{mn} \quad \text{и} \quad N_{m\varkappa}^{(\nu)} = 0. \tag{2.13.18}$$

Недиссипативное уравнение, описывающее возбуждение отдельной *активной направляемой* m*-й* моды (с чисто мнимой постоянной распространения $\gamma_m^{(\nu)} = i\beta_m^{(\nu)}$), имеет следующий вид, записанный в двух формах:

- для *амплитуды возбуждения* $A_m^{(\nu)}(z)$

$$\begin{aligned}\frac{dA_m^{(\nu)}(z)}{dz} = &-\frac{1}{N_m^{(\nu)}}\int\limits_{S_b}\mathbf{J}_b^{e(\nu)}(z)\cdot\mathbf{E}_m^{(\nu)*}(z)\,dS - \\ &-\frac{1}{N_m^{(\nu)}}\int\limits_{L_b}\mathbf{J}_s^{m(\nu)}(z)\cdot\mathbf{H}_m^{(\nu)*}(z)\,dL;\end{aligned} \tag{2.13.19}$$

- для *волновой амплитуды* $a_m^{(\nu)}(z) = A_m^{(\nu)}(z)\,e^{-i\beta_m^{(\nu)}z}$

$$\begin{aligned}\frac{da_m^{(\nu)}(z)}{dz} + i\beta_m^{(\nu)}a_m^{(\nu)}(z) = &-\frac{1}{N_m^{(\nu)}}\int\limits_{S_b}\mathbf{J}_b^{e(\nu)}(z)\cdot\widehat{\mathbf{E}}_m^{(\nu)*}\,dS - \\ &-\frac{1}{N_m^{(\nu)}}\int\limits_{L_b}\mathbf{J}_s^{m(\nu)}(z)\cdot\widehat{\mathbf{H}}_m^{(\nu)*}\,dL.\end{aligned} \tag{2.13.20}$$

Следует обратить внимание на различие интегралов возбуждения, входящих в уравнения (2.13.19) и (2.13.20). Правая часть (2.13.20) равняется $R_m^{(\nu)}/N_m^{(\nu)}$ с интегралом возбуждения $R_m^{(\nu)}$ в форме (2.13.10), включающей мембранные функции полей направляемой m-й моды. В то же время правая часть (2.13.19) имеет вид $(R_m^{(\nu)}/N_m^{(\nu)})\exp(i\beta_m^{(\nu)}z)$, т. е. содержит модальные поля (не отмеченные колпачком) в форме (2.10.40) и (2.10.41) с $\gamma_m^{(\nu)} = i\beta_m^{(\nu)}$.

2.13.2. Вывод уравнений возбуждения для излучательных мод. Если интересоваться возбуждением излучательной моды, скажем с номером $\varkappa$, тогда необходимо записать лемму Лоренца (2.11.16) в следующем виде (при замене индекса 2 на $\varkappa$):

$$\frac{dP_{1\varkappa}^{(\nu)}(z)}{dz} + Q_{1\varkappa}^{(\nu)}(z) = R_{1\varkappa}^{(\nu)}(z). \tag{2.13.21}$$

Подстановка полных полей (2.10.38) и (2.10.39) в (2.11.17)–(2.11.19) (с заменой индекса 2 на $\varkappa$) и использование формул (2.13.2)–(2.13.5) дает следующие соотношения (с указанием явной зависимости от координаты z):

$$P_{1\varkappa}^{(\nu)}(z) \equiv \int\limits_S \mathbf{S}_{1\varkappa}^{(\nu)} \cdot \mathbf{e}_z \, dS = \int\limits_S \left(\mathbf{E}_1^{(\nu)} \times \mathbf{H}_\varkappa^{(\nu)*} + \mathbf{E}_\varkappa^{(\nu)*} \times \mathbf{H}_1^{(\nu)}\right) \cdot \mathbf{e}_z \, dS = \tag{2.13.22}$$

$$= \left\{ \sum_n N_{\varkappa n}^{(\nu)} A_n^{(\nu)}(z)\, e^{-\gamma_n^{(\nu)} z} + \int\limits_0^\infty N_{\varkappa\varkappa'}^{(\nu)} A_{\varkappa'}^{(\nu)}(z)\, e^{-\gamma_{\varkappa'}^{(\nu)} z} d\varkappa' \right\} e^{-\gamma_\varkappa^{(\nu)*} z},$$

$$Q_{1\varkappa}^{(\nu)}(z) \equiv 2 \int\limits_S \sigma_e \left(\mathbf{E}_1^{(\nu)} \cdot \mathbf{E}_\varkappa^{(\nu)*}\right) dS + 2 \int\limits_L \mathcal{R}_s \left(\mathbf{H}_{\tau 1}^{(\nu)} \cdot \mathbf{H}_{\tau\varkappa}^{(\nu)*}\right) dL = \tag{2.13.23}$$

$$= \left\{ \sum_n M_{\varkappa n}^{(\nu)} A_n^{(\nu)}(z)\, e^{-\gamma_n^{(\nu)} z} + \int\limits_0^\infty M_{\varkappa\varkappa'}^{(\nu)} A_{\varkappa'}^{(\nu)}(z)\, e^{-\gamma_{\varkappa'}^{(\nu)} z} d\varkappa' \right\} e^{-\gamma_\varkappa^{(\nu)*} z},$$

$$R_{1\varkappa}^{(\nu)}(z) = -\int\limits_{S_b} \mathbf{J}_b^{e(\nu)}(z) \cdot \mathbf{E}_\varkappa^{(\nu)*}(z)\, dS - \int\limits_{L_b} \mathbf{J}_s^{m(\nu)}(z) \cdot \mathbf{H}_\varkappa^{(\nu)*}(z)\, dL \equiv R_\varkappa^{(\nu)}(z) e^{-\gamma_\varkappa^{(\nu)*} z}, \tag{2.13.24}$$

Здесь интегралы объемного и поверхностного возбуждения $\varkappa$-й излучательной моды определены в виде (ср. уравнения (2.8.29)–(2.8.30))

$$R_\varkappa^{(\nu)}(z) = -\int\limits_{S_b} \mathbf{J}_b^{e(\nu)}(z) \cdot \widehat{\mathbf{E}}_\varkappa^{(\nu)*} dS - \int\limits_{L_b} \mathbf{J}_s^{m(\nu)}(z) \cdot \widehat{\mathbf{H}}_\varkappa^{(\nu)*} dL. \tag{2.13.25}$$

Выражения (2.13.22) и (2.13.23) включают нормировочные коэффициенты $N_{\varkappa n}^{(\nu)}$, $N_{\varkappa\varkappa'}^{(\nu)}$ и диссипативные коэффициенты $M_{\varkappa n}^{(\nu)}$, $M_{\varkappa\varkappa'}^{(\nu)}$, которые определены в форме (2.12.4) и (2.12.5) (с заменой индексов $m \to \varkappa$ и $n \to \varkappa'$).

Подстановка (2.13.22)–(2.13.24) в соотношение (2.13.21) приводит к следующему уравнению:

$$\sum_n \left\{ N_{\varkappa n}^{(\nu)} \frac{dA_n^{(\nu)}}{dz} - \left[\left(\gamma_\varkappa^{(\nu)*} + \gamma_n^{(\nu)}\right) N_{\varkappa n}^{(\nu)} - M_{\varkappa n}^{(\nu)}\right] A_n^{(\nu)} \right\} e^{-\gamma_n^{(\nu)} z} + \tag{2.13.26}$$

$$+ \int\limits_0^\infty \left\{ N_{\varkappa\varkappa'}^{(\nu)} \frac{dA_{\varkappa'}^{(\nu)}}{dz} - \left[\left(\gamma_\varkappa^{(\nu)*} + \gamma_{\varkappa'}^{(\nu)}\right) N_{\varkappa\varkappa'}^{(\nu)} - M_{\varkappa\varkappa'}^{(\nu)}\right] A_{\varkappa'}^{(\nu)} \right\} e^{-\gamma_{\varkappa'}^{(\nu)} z} d\varkappa' = R_\varkappa^{(\nu)}.$$

Обобщение *соотношения квази-ортогональности* (2.12.6) для пары направляемых мод (m, n) на случай двух пар — одной $(\varkappa, n)$, состоящей из излучательной и направляемой мод, и другой $(\varkappa, \varkappa')$, состоящей из двух излучательных мод, приводит к следующим соотношениям:

$$\left(\gamma_\varkappa^{(\nu)*} + \gamma_n^{(\nu)}\right) N_{\varkappa n}^{(\nu)} = M_{\varkappa n}^{(\nu)}, \tag{2.13.27}$$

$$\left(\gamma_\varkappa^{(\nu)*} + \gamma_{\varkappa'}^{(\nu)}\right) N_{\varkappa\varkappa'}^{(\nu)} = M_{\varkappa\varkappa'}^{(\nu)}, \tag{2.13.28}$$

которые обращают в нуль обе квадратные скобки в (2.13.26), что и приводит к искомому результату.

Диссипативные уравнения, описывающие возбуждение излучательных мод в волноведущих структурах с потерями, получаются подстановкой соотношений квази-ортогональности (2.13.27)–(2.13.28) в уравнение (2.13.26) и записываются в следующих двух формах:

- для *амплитуд возбуждения* $A^{(\nu)}_{n(\varkappa')}$

$$\sum_{\substack{n\\ \varkappa\ \text{continuous}}} N^{(\nu)}_{\varkappa n}\frac{dA^{(\nu)}_n}{dz}e^{-\gamma^{(\nu)}_n z}+\int_0^\infty N^{(\nu)}_{\varkappa\varkappa'}\frac{dA^{(\nu)}_{\varkappa'}}{dz}e^{-\gamma^{(\nu)}_{\varkappa'} z}\,d\varkappa' = R^{(\nu)}_{\varkappa}; \tag{2.13.29}$$

- для *волновых амплитуд* $a^{(\nu)}_{n(\varkappa')} = A^{(\nu)}_{n(\varkappa')}e^{-\gamma^{(\nu)}_{n(\varkappa')}z}$

$$\sum_{\substack{n\\ \varkappa\ \text{continuous}}} N^{(\nu)}_{\varkappa n}\left(\frac{da^{(\nu)}_n}{dz}+\gamma^{(\nu)}_n a^{(\nu)}_n\right)+\int_0^\infty N^{(\nu)}_{\varkappa\varkappa'}\left(\frac{da^{(\nu)}_{\varkappa'}}{dz}+\gamma^{(\nu)}_{\varkappa'}a^{(\nu)}_{\varkappa'}\right)d\varkappa' = R^{(\nu)}_{\varkappa}, \tag{2.13.30}$$

где нормировочные коэффициенты, определенные в виде (2.12.4), равняются

$$N^{(\nu)}_{\varkappa n} = \int_S \left(\widehat{\mathbf{E}}^{(\nu)*}_{\varkappa}\times\widehat{\mathbf{H}}^{(\nu)}_n + \widehat{\mathbf{E}}^{(\nu)}_n\times\widehat{\mathbf{H}}^{(\nu)*}_{\varkappa}\right)\cdot\mathbf{e}_z\,dS \equiv N^{(\nu)*}_{n\varkappa}, \tag{2.13.31}$$

$$N^{(\nu)}_{\varkappa\varkappa'} = \int_S \left(\widehat{\mathbf{E}}^{(\nu)*}_{\varkappa}\times\widehat{\mathbf{H}}^{(\nu)}_{\varkappa'} + \widehat{\mathbf{E}}^{(\nu)}_{\varkappa'}\times\widehat{\mathbf{H}}^{(\nu)*}_{\varkappa}\right)\cdot\mathbf{e}_z\,dS \equiv N^{(\nu)*}_{\varkappa'\varkappa}. \tag{2.13.32}$$

Для оптических волноводов без потерь уравнения возбуждения излучательных мод непрерывного спектра получаются из общих уравнений (2.13.29) и (2.13.30), как частный случай, применением к ним *соотношений ортонормировки* (2.12.14) и (2.12.16), а именно

$$N^{(\nu)}_{\varkappa\varkappa'} = N^{(\nu)}_{\varkappa}\delta(\varkappa-\varkappa') \quad \text{и} \quad N^{(\nu)}_{\varkappa n} = 0. \tag{2.13.33}$$

Недиссипативное уравнение, описывающее возбуждение отдельной *активной излучательной $\varkappa$-й* моды (с чисто мнимой постоянной распространения $\gamma^{(\nu)}_{\varkappa} = i\beta^{(\nu)}_{\varkappa}$), имеет следующий вид, записанный в двух формах:

- для *амплитуды возбуждения* $A^{(\nu)}_{\varkappa}(z)$

$$\begin{aligned}\frac{dA^{(\nu)}_{\varkappa}(z)}{dz} = &-\frac{1}{N^{(\nu)}_{\varkappa}}\int_{S_b}\mathbf{J}^{e(\nu)}_b(z)\cdot\mathbf{E}^{(\nu)*}_{\varkappa}(z)\,dS - \\ &-\frac{1}{N^{(\nu)}_{\varkappa}}\int_{L_b}\mathbf{J}^{m(\nu)}_s(z)\cdot\mathbf{H}^{(\nu)*}_{\varkappa}(z)\,dL;\end{aligned} \tag{2.13.34}$$

• для *волновой амплитуды* $a_\varkappa^{(\nu)}(z) = A_\varkappa^{(\nu)}(z)\, e^{-i\beta_\varkappa^{(\nu)} z}$

$$\frac{da_\varkappa^{(\nu)}(z)}{dz} + i\beta_\varkappa^{(\nu)} a_\varkappa^{(\nu)}(z) = -\frac{1}{N_\varkappa^{(\nu)}} \int\limits_{S_b} \mathbf{J}_b^{e(\nu)}(z) \cdot \widehat{\mathbf{E}}_\varkappa^{(\nu)*}\, dS - \\ - \frac{1}{N_\varkappa^{(\nu)}} \int\limits_{L_b} \mathbf{J}_s^{m(\nu)}(z) \cdot \widehat{\mathbf{H}}_\varkappa^{(\nu)*}\, dL. \qquad (2.13.35)$$

Как и в случае уравнений (2.13.19) и (2.13.20) для направляемых мод, правая часть (2.13.35) равняется $R_\varkappa^{(\nu)} / N_\varkappa^{(\nu)}$ с интегралом возбуждения $R_\varkappa^{(\nu)}$ в форме (2.13.25), включающей мембранные функции полей излучательной $\varkappa$-й моды. В отличие от этого, в уравнении (2.13.34) правая часть имеет вид $(R_\varkappa^{(\nu)} / N_\varkappa^{(\nu)}) \exp(i\beta_\varkappa^{(\nu)} z)$, т. е. содержит модальные поля (не отмеченные колпачком) в форме (2.10.43) и (2.10.44) с $\gamma_\varkappa^{(\nu)} = i\beta_\varkappa^{(\nu)}$.

Подводя итоги результатам теории возбуждения оптических мод, можно заметить, что в волноводах с потерями, описываемых системами уравнений (2.13.14)–(2.13.15) и (2.13.29)–(2.13.30), заданное распределение токов (объемных электрических $\mathbf{J}_b^{e(\nu)}$ и поверхностных магнитных $\mathbf{J}_s^{m(\nu)}$) возбуждает всю совокупность мод дискретного и непрерывного спектров, которые связаны между собой через нормировочные коэффициенты N_{mn}, $N_{m\varkappa}$, $N_{\varkappa n}$ и $N_{\varkappa\varkappa'}$ (модальные кросс-нормы). Такая связь имеет диссипативную природу и существует *только внутри* области возбуждающих токов. Как показано в п. 2.9, диссипативная связь является *кажущейся*, так как за пределами области источников (где правая часть всех уравнений возбуждения обращается в нуль) собственные моды любого волновода с потерями остаются несвязанными, несмотря на ненулевые кросс-нормы диссипативных мод.

В отсутствие потерь недиссипативные уравнения возбуждения (2.13.19)–(2.13.20) и (2.13.34)–(2.13.35), в отличие от систем уравнений (2.13.14)–(2.13.15) и (2.13.29)–(2.13.30), описывают независимое возбуждение каждой отдельной моды. Действительно, любая мода (направляемая с номером m или излучательная с номером $\varkappa$) возбуждается своим собственным интегралом возбуждения ($R_m^{(\nu)}$ в виде (2.13.10) или $R_\varkappa^{(\nu)}$ в виде (2.13.25)), характеризующим комплексную мощность взаимодействия собственных полей этой моды с заданным распределением токов (объемных и поверхностных).

Следовательно, на этапе возбуждения мод сторонними источниками в волноводах *с потерями* собственные моды кажутся *диссипативно связанными* с помощью системы уравнений (2.13.14)–(2.13.15) и (2.13.29)–(2.13.30). Для волноводов *без потерь* они выступают как *несвязанные* между собой в силу независимости уравнений возбуждения (2.13.19)–(2.13.20) и (2.13.34)–(2.13.35). Реальная физическая связь между модами (не исчезающая и в отсутствие потерь) может возникать только, если возбуждающие источники перестают быть независимо заданными и сами определяются модальным спектром базового волновода как результат возмущения его геометрических и физических характеристик. Именно подобные ситуации приводят к связи оптических мод, которая подробно рассматривается в следующих главах.

Разработанная в этой главе теория возбуждения применима лишь к волноводам, заполненным средами с *частотной дисперсией*. Наиболее сложными из них являются бианизотропные среды, описываемые материальными уравнениями типа (2.1.13)–(2.1.14), которые содержат, помимо тензоров проницаемостей $\overline{\varepsilon}$ и $\overline{\mu}$, еще два тензора $\overline{\xi}$ и $\overline{\zeta}$ перекрестной связи между электрическим и магнитным полями.

Как уже отмечалось в конце п. 2.9, разработанная теория возбуждения волноводов в представленной форме допускает обобщение на еще более сложный случай — на волноведущие структуры, содержащие в своем составе активные среды с *пространственной дисперсией* [42]. Примером таких сред могут служить упругие пьезоэлектрики, намагниченные ферриты и плазменные среды с дрейфовыми потоками носителей заряда, используемые в акустоволновой, спин-волновой и плазменно-волновой электронике. Сложность их электродинамического описания заключается в том, что, помимо уравнений Максвелла и электродинамических граничных условий, дополнительно требуются уравнения движения среды. Кроме того, учет нелокальных эффектов (типа упругих взаимодействий в пьезоэлектриках, обменного взаимодействия в ферритах и диффузии подвижных носителей заряда), что само по себе уже непросто, порождает появление так называемых дополнительных граничных условий. Все это и создает существенные усложнения при разработке теории возбуждения волноведущих структур со средами с пространственной дисперсией. Детали такой разработки и окончательные уравнения возбуждения, в том числе с выделением потенциальных полей, можно найти в монографии [24] и в статье [42].

На данном этапе, имея в руках теорию возбуждения волноводов заданными источниками, можно переходить к заключительному этапу анализа, а именно к построению теории связанных мод. Ниже это делается в гл. 3 для одиночных волноводов и в гл. 4 для многоволноводных систем, содержащих в своем составе не менее двух волноводов.

Глава 3

ТЕОРИЯ СВЯЗИ МОД В ОДИНОЧНОМ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ

Теория связанных колебаний и волн как математический инструмент для анализа электромагнитных взаимодействий в геометрически сложных структурах и материальных средах со специфическими свойствами впервые была применена Миллером к металлическим волноводам [1] и Пирсом к электронным потокам в вакууме [2]. Вслед за этим многочисленные работы большого числа авторов в этом направлении привели к разработке современной формы теории связанных мод (см. обзор работ в приложении Г). Впечатляющих результатов в теоретическом и прикладном плане теория связанных мод (ТСМ) добилась в волоконной и интегральной оптике. Точкой отсчета здесь явились первые публикации Снайдера [3–5], Маркузе [6–8] и Ярива [9–11]. В последующие годы появилась огромная литература по оптическим волноводам. Наиболее значительными среди публикаций в дополнение к [7, 8, 11] явились широко известные теперь книги [12–18].

В 1985 году теоретические основы взаимодействия оптических мод, разработанные к тому времени, были поколеблены публикацией статьи Харди и Стрейфера [19], бросивших вызов существовавшим тогда представлениям. Ранее все авторы использовали различные формулировки одного и того же подхода к связи мод, называемого ныне *обычной* (англ. *conventional*) *теорией связанных мод* (ОТСМ). Они применяли *ортогональный базис* векторного пространства для разложения искомых полей взаимодействующих мод. Такой «ортогональный» подход казался правильным и не вызывающим сомнений, что действительно справедливо по отношению к одноволноводным системам без потерь. Однако в применении к двум связанным волноводам и многоволноводным системам (даже в отсутствие потерь) этот подход оказался теоретически несостоятельным. Дело в том, что он не учитывает существенного момента, связанного с перекрытием электромагнитных полей соседних волноводов, что вносит неортогональность в систему волноводных функций, взятых в качестве базиса соответствующего гильбертова пространства.

Именно это послужило основанием для пересмотра ОТСМ с целью разработки новой для того времени *неортогональной формулировки*, известной сегодня как *модифицированная теория* (англ. *improved theory* [1])) *связанных мод* (МТСМ), основы которой были заложены Харди и Стрейфером. Публикация их статьи [19] вызвала новый поток исследования связи оптических волноводов [20–40]. Она породила продолжительную дискуссию в литературе относительно справедливости и точности обычной ортогональной ТСМ в сопоставлении с результатами модифицированной неортогональной теории. Эта дискуссия была инициирована Снайдером с сотрудниками [41,42], а затем продолжена в публикациях конца 80-х годов прошлого столетия [43–52]. Поскольку данная глава имеет дело с одиночными волноводами, то обсуждение этой дискуссии и существа МТСМ откладываем до следующей главы, посвященной разработке самосогласованной теории связанных волноводов и многоволноводных систем.

Даже без обсуждения разногласий между ОТСМ и МТСМ среди публикаций имеется немало противоречий и спорных результатов, полученных разными авторами в рамках обычной (ортогональной) теории. Их появление можно объяснить различными теоретическими подходами, методами исследования и использованными приближениями в указанной ниже литературе.

1. Некоторые авторы (Снайдер и Лав [4,15], Харди и Стрейфер [19,20], Когельник [13,53] и другие [17,24,27,29,30]) применяют уравнения Максвелла как исходные дифференциальные уравнения первого порядка для вывода уравнений связанных мод. Другие авторы (Маркузе [7,8], Ярив и Юх [9,11,16]) используют для этой же цели уравнения второго порядка типа уравнения Гельмгольца, полученные из уравнений Максвелла. Второй подход требует так называемой параболической аппроксимации, с тем чтобы убрать вторые производные искомых амплитуд по z, которые просто не появляются при первом подходе, что и делает его более предпочтительным.

2. Существуют два подхода к выводу уравнений связанных мод, в которых используются разные базовые положения электродинамики:

- *теорема взаимности* (Снайдер и Лав [4,15], Харди и Стрейфер [19,20], Когельник, см. гл. 2 в [13,53] и работы [29,30,35,36,52]);
- *вариационный принцип* [24,25,27,29,38].

3. Исходные уравнения и соотношения ортогональности мод, полученные из них, обычно записываются в одной из следующих форм:

- *несопряженная форма* (Ярив [9,11], Снайдер и Лав [15], Харди и Стрейфер [19,20] и работы [29,30,36,52]);
- *сопряженная форма* (Снайдер и Лав [4,15], Маркузе [7,8], Ярив и Юх [16], Когельник, см. гл. 2 в [13,53] и работы [17,24,27,35]).

4. Известны две различные формулировки теории связанных мод:

- *векторная формулировка* (Снайдер и Лав [4,15], Маркузе [7,8], Ярив и Юх [16], Харди и Стрейфер [19,20], Когельник, см. гл. 2 в [13,53] и работы [17,24,27,29,30,35–37,52]);
- *скалярная формулировка* [31,34,38–40].

[1]) Дословный перевод с английского языка как *улучшенная теория* не соответствует требуемому уровню и строгости математической проработки в статье [19] при всей плодотворности высказанной там идеи о модальной неортогональности (см. обсуждение в начале гл. 4).

Некоторые из вышеуказанных статей можно найти, например, в тематическом сборнике, выпущенном под редакцией Холла [54].

Большое разнообразие противоречивых подходов, формулировок и аппроксимаций, встречающихся в литературе, делает практически невозможной задачу согласования результатов, полученных разными авторами, с целью выработки единого физического взгляда на многообразные межмодовые взаимодействия в современной волноводной оптике. Единственный путь в этом направлении, обещающий достижение желаемой цели, заключается в независимой разработке самосогласованной теории связи оптических мод на основе общей теории возбуждения волноведущих структур заданными источниками, изложенной в предыдущей главе.

Достижению этой цели посвящена данная глава, которая завершает указанный во введении третий этап разработки общей электродинамической теории волновых взаимодействий в применении к одноволноводным оптическим системам; многоволноводные системы рассмотрены в гл. 4.

В изложении материала настоящей главы будем частично следовать основным результатам предыдущих исследований автора, опубликованных в работах [55, 56, 59].

Как уже неоднократно отмечалось, теория возбуждения волноводов как второй этап общего электродинамического анализа предполагает заданными возбуждающие токи (объемные электрические токи и эффективные поверхностные магнитные токи для оптических волноводов), созданные избыточной поляризацией (статической и динамической) оптической среды. Ключевой момент перехода к заключительному этапу в форме теории связанных мод заключается в выводе модального разложения статической и динамической избыточной поляризации среды (а значит и возбуждающих токов) по собственным функциям волновода, выбранного в качестве базового. Именно этому посвящен п. 3.1, результаты которого открывают прямой путь к превращению уравнений возбуждения в уравнения связанных мод для диссипативных и недиссипативных оптических волноводов, пройденный в п. 3.2. Такая процедура сразу дает коэффициенты связи между модами как дискретного, так и непрерывного спектра в форме матричных элементов, содержащих четыре тензора межмодовой связи (объемной/поверхностной и статической/динамической). Появление коэффициентов поверхностной связи (характерных для мод ТМ-типа и ранее потерянных другими авторами) нарушает перестановочную симметрию, типичную для коэффициентов объемной связи, что в деталях обсуждается в приложении Д.

Полученные интегральные выражения для коэффициентов связи имеют самую общую форму, применимую для различных устройств современной волноводной оптики. Последующие параграфы данной главы демонстрируют применение общих уравнений связанных мод к четырем практически интересным случаям использования одноволноводных структур. Среди них:

- связь мод в гофрированном волноводе (пп. 3.3–3.5),
- электрооптическая связь мод (пп. 3.6–3.7),
- акустооптическая связь мод (пп. 3.8–3.10),
- магнитооптическая связь мод (пп. 3.11–3.12).

Такой порядок рассмотрения позволяет последовательно усложнять характер связи мод, начиная со статических изотропных и анизотропных возмущений в применении к *гофрированному волноводу* и к *электрооптической связи*, проходя через динамические возмущения, порожденные *акустооптической связью*, и заканчивая более сложным случаем *магнитооптической связи*. Она возникает при совместном действии статических и динамических возмущений, создаваемых постоянным полем намагничивания и переменными магнитными полями спин-волновых мод в намагниченных ферритах.

Знание коэффициентов связи для конкретных механизмов взаимодействия мод в оптических волноведущих структурах позволяет воспользоваться общими результатами обычной теории связанных мод, изложенными в приложении Г. Среди четырех режимов недиссипативной парной связи (см. рис. Г.10 и табл. Г.1) для оптических волноводов типичными являются только два режима — *переизлучение попутных мод* и *переизлучение встречных мод*, основные закономерности которых исследованы в пп. Г.10 и Г.11. Режимы усиления (пп. Г.12 и Г.13), требующие для своей реализации присутствия медленной волны с отрицательной запасенной энергией или высокочастотной накачки, обычно нереализуемы в оптических волноводах.

Конкретный вид коэффициентов связи получается из общих выражений в применении к модам ТЕ- и ТМ-типов в открытой планарной трехслойной структуре, выбранной в качестве базового волновода. Спектр направляемых и излучательных мод такой структуры и их нормировочные характеристики были изучены в гл. 1.

3.1. Модальные разложения избыточной поляризации среды и возбуждающих токов

Уравнения возбуждения оптических волноводов, полученные в предыдущей главе в форме уравнений (2.13.14)–(2.13.15), (2.13.19)–(2.13.20) и (2.13.29)–(2.13.30), (2.13.34)–(2.13.35), служат основой для разработки теории связанных мод. С целью получения связанных уравнений необходимо разложить возбуждающие источники — объемный электрический ток $\mathbf{J}_e^{e(\nu)}$ и эффективный поверхностный магнитный ток $\mathbf{J}_m^{m(\nu)}$, заданные в виде (2.13.1), — по собственным модам дискретного и непрерывного спектра волноведущей структуры, выбранной в качестве базового волновода. Так как возбуждающие токи (2.13.1) оба выражаются через вектор избыточной поляризации среды $\mathbf{P}^{(\nu)}$, то модальное разложение надо получить именно для этого вектора.

Исходными для последующего вывода являются выражение (2.10.24) для комплексной амплитуды избыточной поляризации,

$$\mathbf{P}^{(\nu)} = \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{E}^{(\nu)} + \delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{E}^{(\nu-1)} + \delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^* \cdot \mathbf{E}^{(\nu+1)}, \tag{3.1.1}$$

и полные модальные разложения электрического поля на трех комбинационных частотах ω_ν и $\omega_{\nu\pm1}$ в виде (2.10.20) (ср. (2.10.34) и (2.10.38))

$$\mathbf{E}^{(\nu)} = \sum_n A_n^{(\nu)}\, \mathbf{E}_n^{(\nu)} - \frac{\mathbf{e}_z}{\varepsilon} P_z^{(\nu)}, \tag{3.1.2}$$

$$\mathbf{E}^{(\nu\pm1)} = \sum_n A_n^{(\nu\pm1)}\,\mathbf{E}_n^{(\nu\pm1)} - \frac{\mathbf{e}_z}{\varepsilon}\,P_z^{(\nu\pm1)}. \tag{3.1.3}$$

Здесь знаки модальных сумм подразумевают не только суммирование по дискретному спектру направляемых мод, но и интегрирование но непрерывному спектру излучательных мод открытой волноведущей структуры (см. уравнение (2.10.38)).

Подстановка (3.1.2) и (3.1.3) в выражение (3.1.1) приводит его к виду

$$\mathbf{P}^{(\nu)} = \sum_n \Big[A_n^{(\nu)}\big(\Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\cdot\mathbf{E}_n^{(\nu)}\big) + A_n^{(\nu-1)}\big(\delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\cdot\mathbf{E}_n^{(\nu-1)}\big) + A_n^{(\nu+1)}\big(\delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^*\cdot\mathbf{E}_n^{(\nu+1)}\big)\Big] -$$
$$-\frac{1}{\varepsilon}\Big[\big(\Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\cdot\mathbf{e}_z\big)P_z^{(\nu)} + \big(\delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\cdot\mathbf{e}_z\big)P_z^{(\nu-1)} + \big(\delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^*\cdot\mathbf{e}_z\big)P_z^{(\nu+1)}\Big]. \tag{3.1.4}$$

Отсюда получаем продольную компоненту $P_z^{(\nu)}$ вектора избыточной поляризации среды на частоте $\omega_\nu = \omega + \nu\omega_p$:

$$P_z^{(\nu)} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon+\Delta\varepsilon_{zz}}\sum_n \Big[A_n^{(\nu)}\big(\mathbf{e}_z\cdot\Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\cdot\mathbf{E}_n^{(\nu)}\big) + A_n^{(\nu-1)}\big(\mathbf{e}_z\cdot\delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\cdot\mathbf{E}_n^{(\nu-1)}\big) +$$
$$+ A_n^{(\nu+1)}\big(\mathbf{e}_z\cdot\delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^*\cdot\mathbf{E}_n^{(\nu+1)}\big)\Big] - \frac{\delta\varepsilon_{zz}}{\varepsilon+\Delta\varepsilon_{zz}}\,P_z^{(\nu-1)} - \frac{\delta\varepsilon_{zz}^*}{\varepsilon+\Delta\varepsilon_{zz}}\,P_z^{(\nu+1)}. \tag{3.1.5}$$

По аналогии с (3.1.5) записываются также подобные выражения для $P_z^{(\nu\pm1)}$ на частотах $\omega_{\nu\pm1} = \omega_\nu \pm \omega_p$.

Полученные выражения образуют бесконечную систему зацепляющихся уравнений относительно P_z, отвечающих разным частотам, которая не может быть решена в общем виде. Будем применять итерационную процедуру последовательных приближений по малому параметру $\delta \equiv |\delta\varepsilon_{zz}|/|\varepsilon+\Delta\varepsilon_{zz}| \ll 1$, пропорциональному величине динамического возмущения.

Для этого z-компоненту вектора избыточной поляризации представим в форме ряда

$$P_z^{(\nu)} = P_{z,0}^{(\nu)} + \delta\big(P_z^{(\nu)}\big) + \delta^2\big(P_z^{(\nu)}\big) + \ldots + \delta^r\big(P_z^{(\nu)}\big) + \ldots, \tag{3.1.6}$$

где $P_{z,0}^{(\nu)}$ порождено статическим возмущением $\Delta\bar{\varepsilon}$ (при $\delta\bar{\varepsilon} = 0$), а $\delta^r\big(P_z^{(\nu)}\big)$ является добавкой r-го приближения ($r = 1, 2, \ldots$), созданной ненулевым динамическим возмущением (при $\delta\bar{\varepsilon} \neq 0$). Тогда искомое решение имеет вид:

а) в первом приближении ($r = 1$)

$$P_{z,1}^{(\nu)} = P_{z,0}^{(\nu)} + \delta\big(P_z^{(\nu)}\big), \tag{3.1.7}$$

б) во втором приближении ($r = 2$)

$$P_{z,2}^{(\nu)} = P_{z,0}^{(\nu)} + \delta\big(P_z^{(\nu)}\big) + \delta^2\big(P_z^{(\nu)}\big), \tag{3.1.8}$$

и так далее.

Разложения, аналогичные (3.1.6), записываются также для продольной компоненты поляризации $P_z^{(\nu\pm1)}$ на двух соседних частотах $\omega_{\nu\pm1} = \omega_\nu \pm \omega_p$. Тогда подстановка выражения (3.1.6) для $P_z^{(\nu)}$ в левую часть формулы (3.1.5) и аналогичных выражений для $P_z^{(\nu\pm1)}$ в правую ее часть приводит к следующему уравнению:

$$P_{z,0}^{(\nu)} + \delta\big(P_z^{(\nu)}\big) + \delta^2\big(P_z^{(\nu)}\big) + \ldots = \frac{\varepsilon}{\varepsilon+\Delta\varepsilon_{zz}}\sum_n \Big[A_n^{(\nu)}\big(\mathbf{e}_z\cdot\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}\cdot\mathbf{E}_n^{(\nu)}\big) +$$
$$+ A_n^{(\nu-1)}\big(\mathbf{e}_z\cdot\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}\cdot\mathbf{E}_n^{(\nu-1)}\big) + A_n^{(\nu+1)}\big(\mathbf{e}_z\cdot\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\,*}\cdot\mathbf{E}_n^{(\nu+1)}\big)\Big] -$$
$$- \frac{\delta\varepsilon_{zz}}{\varepsilon+\Delta\varepsilon_{zz}}\Big[P_{z,0}^{(\nu-1)} + \delta\big(P_z^{(\nu-1)}\big) + \delta^2\big(P_z^{(\nu-1)}\big) + \ldots\Big] -$$
$$- \frac{\delta\varepsilon_{zz}^*}{\varepsilon+\Delta\varepsilon_{zz}}\Big[P_{z,0}^{(\nu+1)} + \delta\big(P_z^{(\nu+1)}\big) + \delta^2\big(P_z^{(\nu+2)}\big) + \ldots\Big]. \qquad (3.1.9)$$

Приравнивая в (3.1.9) слагаемые, содержащие одинаковую степень малого параметра δ, получаем

$$P_{z,0}^{(\nu)} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon+\Delta\varepsilon_{zz}}\sum_n A_n^{(\nu)}\big(\mathbf{e}_z\cdot\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}\cdot\mathbf{E}_n^{(\nu)}\big), \qquad (3.1.10)$$

$$\delta\big(P_z^{(\nu)}\big) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon+\Delta\varepsilon_{zz}}\sum_n \Big[A_n^{(\nu-1)}\big(\mathbf{e}_z\cdot\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}\cdot\boldsymbol{\mathcal{E}}_n^{(\nu-1)}\big) + A_n^{(\nu+1)}\big(\mathbf{e}_z\cdot\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\,*}\cdot\boldsymbol{\mathcal{E}}_n^{(\nu+1)}\big)\Big], \qquad (3.1.11)$$

$$\delta^r\big(P_z^{(\nu)}\big) = -\frac{\delta\varepsilon_{zz}}{\varepsilon+\Delta\varepsilon_{zz}}\,\delta^{r-1}\big(P_z^{(\nu-1)}\big) - \frac{\delta\varepsilon_{zz}^*}{\varepsilon+\Delta\varepsilon_{zz}}\,\delta^{r-1}\big(P_z^{(\nu+1)}\big), \quad r = 2, 3\ldots \qquad (3.1.12)$$

где введено обозначение

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_n^{(\nu\pm1)} = \left(\overline{\mathbf{I}} - \frac{\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z\cdot\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\varepsilon+\Delta\varepsilon_{zz}}\right)\cdot\mathbf{E}_n^{(\nu\pm1)} \equiv \mathbf{E}_n^{(\nu\pm1)} - \mathbf{e}_z\frac{\mathbf{e}_z\cdot\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}\cdot\mathbf{E}_n^{(\nu\pm1)}}{\varepsilon+\Delta\varepsilon_{zz}}, \qquad (3.1.13)$$

при этом $\overline{\mathbf{I}}$ и $\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z$ представляют собой единичный тензор и диадное произведение двух продольных единичных векторов $\mathbf{e}_z$.

Как видно из (3.1.11), в первом приближении динамическое возмущение $\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ обеспечивает на частоте ω_ν вклад $\delta\big(P_z^{(\nu)}\big)$ только от двух ближайших соседей на частотах $\omega_{\nu-1} = \omega_\nu - \omega_p$ и $\omega_{\nu+1} = \omega_\nu + \omega_p$. Из (3.1.12) следует, что рост порядка приближения ($r \geqslant 2$) увеличивает число взаимодействующих частотных компонент. Сходимость итерационного процесса гарантируется условием

$$\frac{|\delta^r(P_z^{(\nu)})|}{|\delta^{r-1}(P_z^{(\nu\pm1)})|} \sim \frac{|\delta\varepsilon_{zz}|}{|\varepsilon+\Delta\varepsilon_{zz}|} \equiv \delta < 1.$$

Если $\delta \ll 1$, что обычно выполняется для параметрических процессов, то можно пренебречь вкладом высших приближений (3.1.12) и ограничиться лишь решением (3.1.7) первого приближения, тогда

$$P_z^{(\nu)} \simeq P_{z,1}^{(\nu)} = P_{z,0}^{(\nu)} + \delta\big(P_z^{(\nu)}\big) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon+\Delta\varepsilon_{zz}}\sum_n \Big[A_n^{(\nu)}\big(\mathbf{e}_z\cdot\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}\cdot\mathbf{E}_n^{(\nu)}\big) +$$
$$+ A_n^{(\nu-1)}\big(\mathbf{e}_z\cdot\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}\cdot\boldsymbol{\mathcal{E}}_n^{(\nu-1)}\big) + A_n^{(\nu+1)}\big(\mathbf{e}_z\cdot\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\,*}\cdot\boldsymbol{\mathcal{E}}_n^{(\nu+1)}\big)\Big]. \qquad (3.1.14)$$

Подставляя (3.1.14) и аналогичные выражения для $P_z^{(\nu\pm1)}$ в разложение (3.1.4) и учитывая только линейные по $\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ члены, приходим к искомому *модальному разложению избыточной поляризации*:

$$\mathbf{P}^{(\nu)} = \sum_n \left[A_n^{(\nu)}\left(\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c \cdot \mathbf{E}_n^{(\nu)}\right) + A_n^{(\nu-1)}\left(\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c \cdot \mathbf{E}_n^{(\nu-1)}\right) + A_n^{(\nu+1)}\left(\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^{\,*} \cdot \mathbf{E}_n^{(\nu+1)}\right)\right]. \tag{3.1.15}$$

При выводе модального разложения избыточной поляризации в виде (3.1.15) были использованы следующие равенства:

$$(\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{e}_z)\left(\mathbf{e}_z \cdot \delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}_n^{(\nu-1)}\right) = (\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z) \cdot \left(\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}_n^{(\nu-1)}\right),$$

$$(\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{e}_z)\left(\mathbf{e}_z \cdot \delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\,*} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}_n^{(\nu+1)}\right) = (\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z) \cdot \left(\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\,*} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}_n^{(\nu+1)}\right),$$

содержащие модифицированные модальные поля в форме (3.1.13).

Исходные *тензоры возмущения* — статический $\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ и динамический $\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$, которые определяют общий тензор диэлектрического возмущения $\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_\Sigma$ в форме (2.10.19), — были модифицированы при выводе выражения (3.1.15) и дали новые ***тензоры объемной связи*** (с индексом c от англ. *coupling*):

$$\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c = \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \left(\overline{\mathbf{I}} - \frac{\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z \cdot \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\varepsilon + \Delta\varepsilon_{zz}}\right) \equiv \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z \cdot \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\varepsilon + \Delta\varepsilon_{zz}}, \tag{3.1.16}$$

$$\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c = \left(\overline{\mathbf{I}} - \frac{\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z}{\varepsilon + \Delta\varepsilon_{zz}}\right) \cdot \delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \left(\overline{\mathbf{I}} - \frac{\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z \cdot \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\varepsilon + \Delta\varepsilon_{zz}}\right). \tag{3.1.17}$$

Вновь полученные *тензоры объемной связи* (3.1.16) и (3.1.17) — статический $\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c$ и динамический $\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c$ — получили такое название по той причине, что именно они (а не тензоры возмущения $\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ и $\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$) будут всегда определять связь между модами и войдут в коэффициенты связи совместно с *тензорами поверхностной связи* $\Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c$ и $\delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c$, вводимыми ниже (см. формулы (3.2.2)–(3.2.4) и (3.2.6)–(3.2.8) для коэффициентов связи).

Подстановка формул (3.1.14) для $P_z^{(\nu)}$ и (3.1.15) для $\mathbf{P}^{(\nu)}$ в выражения (2.13.1) для возбуждающих токов $\mathbf{J}_b^{e(\nu)}$ и $\mathbf{J}_s^{m(\nu)}$ приводит их искомой форме ***модального разложения*** с явно выделенным в виде интеграла вкладом от непрерывного спектра излучательных мод:

- для ***объемного электрического тока***

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_b^{e(\nu)} \equiv i\omega_\nu \mathbf{P}^{(\nu)} = i\omega_\nu \sum_n \Big[a_n^{(\nu)}\left(\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c \cdot \widehat{\mathbf{E}}_n^{(\nu)}\right) + a_n^{(\nu-1)}\left(\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c \cdot \widehat{\mathbf{E}}_n^{(\nu-1)}\right) + \\ + a_n^{(\nu+1)}\left(\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^{\,*} \cdot \widehat{\mathbf{E}}_n^{(\nu+1)}\right)\Big] + \\ + i\omega_\nu \sum_1^{2(4)} \int_0^\infty \Big[a_\varkappa^{(\nu)}\left(\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c \cdot \widehat{\mathbf{E}}_\varkappa^{(\nu)}\right) + a_\varkappa^{(\nu-1)}\left(\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c \cdot \widehat{\mathbf{E}}_\varkappa^{(\nu-1)}\right) + \\ + a_\varkappa^{(\nu+1)}\left(\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^{\,*} \cdot \widehat{\mathbf{E}}_\varkappa^{(\nu+1)}\right)\Big] d\varkappa,\end{aligned} \tag{3.1.18}$$

• для ***эффективного поверхностного магнитного тока***

$$\mathbf{J}_s^{m(\nu)} \equiv \frac{\tau_b}{\varepsilon} P_z^{(\nu)}\Big|_{L_b} = \sum_n \Big[a_n^{(\nu)}\big(\Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c \cdot \widehat{\mathbf{E}}_n^{(\nu)}\big) + a_n^{(\nu-1)}\big(\delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c \cdot \widehat{\mathbf{E}}_n^{(\nu-1)}\big) + \\ + a_n^{(\nu+1)}\big(\delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c^{\,*} \cdot \widehat{\mathbf{E}}_n^{(\nu+1)}\big)\Big] + \\ + \sum_1^{2(4)} \int_0^\infty \Big[a_\varkappa^{(\nu)}\big(\Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c \cdot \widehat{\mathbf{E}}_\varkappa^{(\nu)}\big) + a_\varkappa^{(\nu-1)}\big(\delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c \cdot \widehat{\mathbf{E}}_\varkappa^{(\nu-1)}\big) + \\ + a_\varkappa^{(\nu+1)}\big(\delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c^{\,*} \cdot \widehat{\mathbf{E}}_\varkappa^{(\nu+1)}\big)\Big] d\varkappa. \tag{3.1.19}$$

Здесь суммы от 1 до 2(4) отражают двухкратное вырождение излучательных мод подложки (в виде TE- и TM-поляризаций) и четырехкратное вырождение излучательных мод структуры (в виде четных и нечетных мод TE- и TM-поляризаций) в планарной трехслойной структуре (см. п. 1.9). Для упрощения записи в дальнейшем эти суммы опускаем.

Модальное разложение (3.1.19) для эффективного поверхностного магнитного тока содержит новые ***тензоры поверхностной связи*** — статический $\Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c$ и динамический $\delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c$, которые определены в виде

$$\Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c = \frac{\boldsymbol{\tau}_b\mathbf{e}_z \cdot \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}\,(L_b)}{\varepsilon(L_b) + \Delta\varepsilon_{zz}(L_b)} \equiv \boldsymbol{\tau}_b \frac{\mathbf{e}_z \cdot \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}\,(L_b)}{\varepsilon(L_b) + \Delta\varepsilon_{zz}(L_b)}, \tag{3.1.20}$$

$$\delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c = \frac{\boldsymbol{\tau}_b\mathbf{e}_z \cdot \delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}\,(L_b)}{\varepsilon(L_b) + \Delta\varepsilon_{zz}(L_b)} \cdot \left(\overline{\mathbf{I}} - \frac{\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z \cdot \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}\,(L_b)}{\varepsilon(L_b) + \Delta\varepsilon_{zz}(L_b)}\right). \tag{3.1.21}$$

Здесь $\varepsilon(L_b)$, $\Delta\varepsilon_{zz}(L_b)$, $\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}\,(L_b)$ и $\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}\,(L_b)$ — значения соответствующих величин, взятые в точках контура L_b, ограничивающего сечение S_b, занятое объемными токами $\mathbf{J}_b^{e(\nu)}$. Если поперечный единичный вектор, касательный к контуру L_b, равняется

$$\boldsymbol{\tau}_b \equiv \mathbf{e}_z \times \mathbf{n}_b = \mathbf{e}_x \cos\theta_b + \mathbf{e}_y \sin\theta_b, \tag{3.1.22}$$

то диады $\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z$ и $\boldsymbol{\tau}_b\mathbf{e}_z$, входящие в выражения (3.1.16)–(3.1.17) и (3.1.20)–(3.1.21) для тензоров связи, имеют следующий вид:

$$\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{\tau}_b\mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos\theta_b \\ 0 & 0 & \sin\theta_b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.1.23}$$

Модальные разложения (3.1.18) и (3.1.19) для возбуждающих токов $\mathbf{J}_b^{e(\nu)}$ и $\mathbf{J}_s^{m(\nu)}$ содержат волновые амплитуды $a_{n(\varkappa)}^{(\nu)}$ и $a_{n(\varkappa)}^{(\nu\pm1)}$. Они могут быть заменены амплитудами возбуждения $A_{n(\varkappa)}^{(\nu)}$ и $A_{n(\varkappa)}^{(\nu\pm1)}$ с помощью равенств (2.10.42) и (2.10.45). В этом случае на месте мембранных функций $\widehat{\mathbf{E}}_{n(\varkappa)}^{(\nu)}$ и $\widehat{\mathbf{E}}_{n(\varkappa)}^{(\nu\pm1)}$ будут стоять модальные поля $\mathbf{E}_{n(\varkappa)}^{(\nu)}$ и $\mathbf{E}_{n(\varkappa)}^{(\nu\pm1)}$, связанные с ними соотношениями (2.10.40)–(2.10.41) и (2.10.43)–(2.10.44).

3.2. Уравнения связанных мод для волноводов с потерями и без потерь

3.2.1. Уравнения связанных мод для диссипативных волноводов. Возбуждение собственных мод оптического волновода заданными объемными и поверхностными токами с учетом потерь описывается в общем случае

а) системой диссипативно связанных уравнений (2.13.14)–(2.13.15) для направляемой моды с номером m (где $m = 1, 2, \ldots$ — индекс суммирования по модам дискретного спектра);

б) системой диссипативно связанных уравнений (2.13.29)–(2.13.30) для излучательной моды с номером $\varkappa$ (где $\varkappa$ — переменная интегрирования по непрерывному спектру).

В правой части этих уравнений стоят интегралы суммарного (объемного и поверхностного) возбуждения $R_m^{(\nu)}$ и $R_\varkappa^{(\nu)}$, определенные в форме (2.13.10) и (2.13.25) и включающие возбуждающие токи $\mathbf{J}_b^{e(\nu)}$ и $\mathbf{J}_s^{m(\nu)}$.

Подстановка модальных разложений токов $\mathbf{J}_b^{e(\nu)}$ и $\mathbf{J}_s^{m(\nu)}$ в виде (3.1.18) и (3.1.19) в выражения (2.13.10) и (2.13.25) дает модальные разложения для интегралов возбуждения по дискретному и непрерывному спектрам направляемых и излучательных мод.

- Для *направляемой m-й моды* дискретного спектра

$$R_m^{(\nu)} \equiv -\int\limits_{S_b} \left(\mathbf{J}_b^{e(\nu)} \cdot \widehat{\mathbf{E}}_m^{(\nu)*}\right) dS - \int\limits_{L_b} \left(\mathbf{J}_s^{m(\nu)} \cdot \widehat{\mathbf{H}}_m^{(\nu)*}\right) dL =$$

$$= \sum_n \left(K_{mn}^{(\nu,\nu)} a_n^{(\nu)} + K_{mn}^{(\nu,\nu-1)} a_n^{(\nu-1)} + K_{mn}^{(\nu,\nu+1)} a_n^{(\nu+1)}\right) +$$

$$+ \int\limits_0^\infty \left(K_{m\varkappa}^{(\nu,\nu)} a_\varkappa^{(\nu)} + K_{m\varkappa}^{(\nu,\nu-1)} a_\varkappa^{(\nu-1)} + K_{m\varkappa}^{(\nu,\nu+1)} a_\varkappa^{(\nu+1)}\right) d\varkappa, \tag{3.2.1}$$

где введены следующие *коэффициенты связи* между модами как дискретного, так и непрерывного спектров:

$$K_{m\alpha}^{(\nu,\nu)} = -i\omega_\nu \int\limits_{S_b} \left(\widehat{\mathbf{E}}_m^{(\nu)*} \cdot \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c \cdot \widehat{\mathbf{E}}_\alpha^{(\nu)}\right) dS - \int\limits_{L_b} \left(\widehat{\mathbf{H}}_m^{(\nu)*} \cdot \Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c \cdot \widehat{\mathbf{E}}_\alpha^{(\nu)}\right) dL, \tag{3.2.2}$$

$$K_{m\alpha}^{(\nu,\nu-1)} = -i\omega_\nu \int\limits_{S_b} \left(\widehat{\mathbf{E}}_m^{(\nu)*} \cdot \delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c \cdot \widehat{\mathbf{E}}_\alpha^{(\nu-1)}\right) dS - \int\limits_{L_b} \left(\widehat{\mathbf{H}}_m^{(\nu)*} \cdot \delta\overline{\overline{\boldsymbol{\xi}}}_c \cdot \widehat{\mathbf{E}}_\alpha^{(\nu-1)}\right) dL, \tag{3.2.3}$$

$$K_{m\alpha}^{(\nu,\nu+1)} = -i\omega_\nu \int\limits_{S_b} \left(\widehat{\mathbf{E}}_m^{(\nu)*} \cdot \delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^* \cdot \widehat{\mathbf{E}}_\alpha^{(\nu+1)}\right) dS - \int\limits_{L_b} \left(\widehat{\mathbf{H}}_m^{(\nu)*} \cdot \delta\overline{\overline{\boldsymbol{\xi}}}_c^* \cdot \widehat{\mathbf{E}}_\alpha^{(\nu+1)}\right) dL, \tag{3.2.4}$$

при $\alpha = n$ или $\varkappa$ для направляемых и излучательных мод, соответственно.

• Для *излучательной $\varkappa$-й моды* непрерывного спектра

$$R_{\varkappa}^{(\nu)} \equiv -\int\limits_{S_b} \left(\mathbf{J}_b^{e(\nu)} \cdot \widehat{\mathbf{E}}_{\varkappa}^{(\nu)*}\right) dS - \int\limits_{L_b} \left(\mathbf{J}_s^{m(\nu)} \cdot \widehat{\mathbf{H}}_{\varkappa}^{(\nu)*}\right) dL =$$

$$= \sum_n \left(K_{\varkappa n}^{(\nu,\nu)} a_n^{(\nu)} + K_{\varkappa n}^{(\nu,\nu-1)} a_n^{(\nu-1)} + K_{\varkappa n}^{(\nu,\nu+1)} a_n^{(\nu+1)}\right) +$$

$$+ \int\limits_0^{\infty} \left(K_{\varkappa\varkappa'}^{(\nu,\nu)} a_{\varkappa'}^{(\nu)} + K_{\varkappa\varkappa'}^{(\nu,\nu-1)} a_{\varkappa'}^{(\nu-1)} + K_{\varkappa\varkappa'}^{(\nu,\nu+1)} a_{\varkappa'}^{(\nu+1)}\right) d\varkappa', \tag{3.2.5}$$

где введены следующие *коэффициенты связи* между модами как непрерывного, так и дискретного спектров:

$$K_{\varkappa\alpha}^{(\nu,\nu)} = -i\omega_\nu \int\limits_{S_b} \left(\widehat{\mathbf{E}}_{\varkappa}^{(\nu)*} \cdot \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c \cdot \widehat{\mathbf{E}}_{\alpha}^{(\nu)}\right) dS - \int\limits_{L_b} \left(\widehat{\mathbf{H}}_{\varkappa}^{(\nu)*} \cdot \Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c \cdot \widehat{\mathbf{E}}_{\alpha}^{(\nu)}\right) dL, \tag{3.2.6}$$

$$K_{\varkappa\alpha}^{(\nu,\nu-1)} = -i\omega_\nu \int\limits_{S_b} \left(\widehat{\mathbf{E}}_{\varkappa}^{(\nu)*} \cdot \delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c \cdot \widehat{\mathbf{E}}_{\alpha}^{(\nu-1)}\right) dS - \int\limits_{L_b} \left(\widehat{\mathbf{H}}_{\varkappa}^{(\nu)*} \cdot \delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c \cdot \widehat{\mathbf{E}}_{\alpha}^{(\nu-1)}\right) dL, \tag{3.2.7}$$

$$K_{\varkappa\alpha}^{(\nu,\nu+1)} = -i\omega_\nu \int\limits_{S_b} \left(\widehat{\mathbf{E}}_{\varkappa}^{(\nu)*} \cdot \delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^{\,*} \cdot \widehat{\mathbf{E}}_{\alpha}^{(\nu+1)}\right) dS - \int\limits_{L_b} \left(\widehat{\mathbf{H}}_{\varkappa}^{(\nu)*} \cdot \delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c^{\,*} \cdot \widehat{\mathbf{E}}_{\alpha}^{(\nu+1)}\right) dL, \tag{3.2.8}$$

при $\alpha = n$ или $\varkappa'$ для направляемых и излучательных мод, соответственно.

Зависимость интегралов возбуждения $R_m^{(\nu)}(z)$ и $R_{\varkappa}^{(\nu)}(z)$ от продольной координаты z, появляющаяся в модальных разложениях (3.2.1) и (3.2.5), вызвана следующими двумя причинами:

а) продольным распределением *тензоров связи* — объемных $\left(\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c(z),\ \delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c(z)\right)$ и поверхностных $\left(\Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c(z),\ \delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c(z)\right)$ — которые определены уравнениями (3.1.16)–(3.1.17) и (3.1.20)–(3.1.21),

б) продольной зависимостью волновых амплитуд $a_{n,\varkappa}^{(\nu)}(z) = A_{n,\varkappa}^{(\nu)}(z)\exp(-\gamma_{n,\varkappa}^{(\nu)} z)$ и $a_{n,\varkappa}^{(\nu\pm1)}(z) = A_{n,\varkappa}^{(\nu\pm1)}(z)\exp(-\gamma_{n,\varkappa}^{(\nu\pm1)} z)$, которая порождена как *невозмущенными* постоянными распространения $\left(\gamma_{n,\varkappa}^{(\nu)}\right.$ и $\left.\gamma_{n,\varkappa}^{(\nu\pm1)}\right)$, так и зависимостью от z амплитуд возбуждения $\left(A_{n,\varkappa}^{(\nu)}(z)\right.$ и $\left.A_{n,\varkappa}^{(\nu\pm1)}(z)\right)$ *за счет связи* между модами.

Подставляя модальные разложения возбуждающих интегралов $R_m^{(\nu)}$ и $R_{\varkappa}^{(\nu)}$, полученные в форме выражений (3.2.1) и (3.2.5), в правую часть уравнений возбуждения (2.13.15) и (2.13.30), окончательно приходим к искомой системе *диссипативно связанных уравнений*, которая охватывает все моды (направляемые и излучательные) дискретного и непрерывного спектра открытой волноведущей структуры:

$$
\sum_{\substack{n\\ m=1,2,\ldots}} N_{mn}^{(\nu)}\left(\frac{da_n^{(\nu)}}{dz}+\gamma_n^{(\nu)}a_n^{(\nu)}\right)+\int\limits_0^\infty N_{m\varkappa}^{(\nu)}\left(\frac{da_\varkappa^{(\nu)}}{dz}+\gamma_\varkappa^{(\nu)}a_\varkappa^{(\nu)}\right)d\varkappa =
$$

$$
=\sum_n\left(K_{mn}^{(\nu,\nu)}a_n^{(\nu)}+K_{mn}^{(\nu,\nu-1)}a_n^{(\nu-1)}+K_{mn}^{(\nu,\nu+1)}a_n^{(\nu+1)}\right)+ \tag{3.2.9}
$$

$$
+\int\limits_0^\infty\left(K_{m\varkappa}^{(\nu,\nu)}a_\varkappa^{(\nu)}+K_{m\varkappa}^{(\nu,\nu-1)}a_\varkappa^{(\nu-1)}+K_{m\varkappa}^{(\nu,\nu+1)}a_\varkappa^{(\nu+1)}\right)d\varkappa;
$$

$$
\sum_{\substack{n\\ \varkappa\ \text{continuous}}} N_{\varkappa n}^{(\nu)}\left(\frac{da_n^{(\nu)}}{dz}+\gamma_n^{(\nu)}a_n^{(\nu)}\right)+\int\limits_0^\infty N_{\varkappa\varkappa'}^{(\nu)}\left(\frac{da_{\varkappa'}^{(\nu)}}{dz}+\gamma_{\varkappa'}^{(\nu)}a_{\varkappa'}^{(\nu)}\right)d\varkappa' =
$$

$$
=\sum_n\left(K_{\varkappa n}^{(\nu,\nu)}a_n^{(\nu)}+K_{\varkappa n}^{(\nu,\nu-1)}a_n^{(\nu-1)}+K_{\varkappa n}^{(\nu,\nu+1)}a_n^{(\nu+1)}\right)+ \tag{3.2.10}
$$

$$
+\int\limits_0^\infty\left(K_{\varkappa\varkappa'}^{(\nu,\nu)}a_{\varkappa'}^{(\nu)}+K_{\varkappa\varkappa'}^{(\nu,\nu-1)}a_{\varkappa'}^{(\nu-1)}+K_{\varkappa\varkappa'}^{(\nu,\nu+1)}a_{\varkappa'}^{(\nu+1)}\right)d\varkappa'.
$$

Коэффициенты связи (3.2.2)–(3.2.4) (при $\alpha=n$ или $\alpha=\varkappa$) в уравнениях (3.2.9) учитывают взаимодействие направляемой m-й моды:

а) с направляемыми модами дискретного спектра (когда $\alpha=n$ — дискретный номер направляемой моды), включая саму себя (когда $\alpha=m$);

б) с излучательными модами непрерывного спектра (когда $\alpha=\varkappa$ — переменная интегрирования по непрерывному спектру).

Коэффициенты связи (3.2.6)–(3.2.8) (при $\alpha=n$ или $\alpha=\varkappa'$) в уравнениях (3.2.10) учитывают взаимодействие излучательной $\varkappa$-й моды:

а) с направляемыми модами дискретного спектра (когда $\alpha=n$ — дискретный номер направляемой моды);

б) со всем непрерывным спектром (когда $\alpha=\varkappa'$ — переменная интегрирования по непрерывному спектру).

Все коэффициенты связи по своей структуре являются *матричными элементами* тензоров объемной и поверхностной связи, посредством которых связываются собственные поля двух взаимодействующих мод. При этом *статические* тензоры связи $\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c$ и $\Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c$ обеспечивают взаимодействие между модами на одной и той же частоте ω_ν, а *динамические* тензоры связи $\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c$ и $\delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c$ обеспечивают параметрическое взаимодействие между модами соседних частот ω_ν и $\omega_{\nu\pm1}=\omega_\nu\pm\omega_p$.

Из выражений (3.2.2)–(3.2.4) и (3.2.6)–(3.2.8) следует, что каждый коэффициент связи в общем случае включает два слагаемых:

• от *тензоров объемной связи* — статического $\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c$ и динамического $\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c$ в виде (3.1.16) и (3.1.17), которые дают объемный вклад;

• от *тензоров поверхностной связи* — статического $\Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c$ и динамического $\delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c$ в виде (3.1.20) и (3.1.21), которые дают поверхностный вклад.

Тензоры поверхностной связи обеспечивают взаимодействие между электрическим полем одной моды и *поперечным* магнитным полем другой моды. Например, контурный интеграл для коэффициента связи $K_{mn}^{(\nu,\nu)}$ в виде (3.2.2) содержит выражение

$$\left(\widehat{\mathbf{H}}_m^{(\nu)*}\cdot\Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c\cdot\widehat{\mathbf{E}}_n^{(\nu)}\right)=\left(\widehat{\mathbf{H}}_m^{(\nu)*}\cdot\boldsymbol{\tau}_b\right)\frac{\mathbf{e}_z\cdot\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}(L_b)\cdot\widehat{\mathbf{E}}_n^{(\nu)}}{\varepsilon(L_b)+\Delta\varepsilon_{zz}(L_b)},\tag{3.2.11}$$

где единичный вектор $\boldsymbol{\tau}_b$, касательный к контуру L_b, задан в форме (3.1.22), тогда

$$\left(\widehat{\mathbf{H}}_m^{(\nu)*}\cdot\boldsymbol{\tau}_b\right)=H_{mx}^{(\nu)*}\cos\theta_b+H_{my}^{(\nu)*}\sin\theta_b.\tag{3.2.12}$$

Из (3.2.11) и (3.2.12) следует, что статический тензор поверхностной связи $\Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c$, так же как и динамический $\delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c$, всегда включает во взаимодействие *поперечные* компоненты собственного *магнитного* поля моды. Эта специфика взаимодействия особенно важна для мод ТМ-типа, если имеется большой разрыв диэлектрической проницаемости $\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}(L_b)$ в точках контура L_b, ограничивающего область S_b, занятую объемными токами.

Подобная ситуация наблюдалась экспериментально для ТМ-мод в планарных оптических волноводах и получила малопонятное название *эффект наведенной поляризации* [46, 51]. Этот эффект по существу не получил тогда должного объяснения, что и понятно, поскольку в то время авторы не знали о существовании эффективного поверхностного тока и порожденного им тензора поверхностной связи. Формулы (3.2.11) и (3.2.12) даже на качественном уровне объясняют экспериментально наблюдавшиеся факты (см. с. 140).

Чтобы упростить запись системы связанных уравнений (3.2.9) и (3.2.10), будем считать интегралы по непрерывному спектру включенными в знак суммирования, понимая новые суммы в обобщенном смысле. Тогда вместо двух систем уравнений (3.2.9) и (3.2.10) остается лишь одна, записанная в следующей сокращенной форме:

$$\sum_n N_{mn}^{(\nu)}\left(\frac{da_n^{(\nu)}}{dz}+\gamma_n^{(\nu)}a_n^{(\nu)}\right)=$$
$$=\sum_n\left(K_{mn}^{(\nu,\nu)}a_n^{(\nu)}+K_{mn}^{(\nu,\nu-1)}a_n^{(\nu-1)}+K_{mn}^{(\nu,\nu+1)}a_n^{(\nu+1)}\right).\tag{3.2.13}$$

Сокращенная форма (3.2.13) допускает также запись уравнений связанных мод в матричной форме

$$\frac{d\overline{\mathbf{a}}^{(\nu)}}{dz}+\overline{\gamma}^{(\nu)}\cdot\overline{\mathbf{a}}^{(\nu)}=\overline{\mathbf{c}}^{(\nu,\nu)}\cdot\overline{\mathbf{a}}^{(\nu)}+\overline{\mathbf{c}}^{(\nu,\nu-1)}\cdot\overline{\mathbf{a}}^{(\nu-1)}+\overline{\mathbf{c}}^{(\nu,\nu+1)}\cdot\overline{\mathbf{a}}^{(\nu+1)},\tag{3.2.14}$$

где введены новые коэффициенты связи в следующем виде:

$$\overline{\mathbf{c}}^{(\nu,\nu)}=\left[\overline{\mathbf{N}}^{(\nu)}\right]^{-1}\cdot\overline{\mathbf{K}}^{(\nu,\nu)}\quad\text{и}\quad\overline{\mathbf{c}}^{(\nu,\nu\pm1)}=\left[\overline{\mathbf{N}}^{(\nu)}\right]^{-1}\cdot\overline{\mathbf{K}}^{(\nu,\nu\pm1)}.\tag{3.2.15}$$

Здесь вектор-столбец $\overline{\mathbf{a}}^{(\nu)} \equiv \operatorname{col}[a_1^{(\nu)}, a_2^{(\nu)}, \ldots]$ построен из волновых амплитуд, диагональная матрица $\overline{\gamma}^{(\nu)} \equiv \operatorname{diag}[\gamma_1^{(\nu)}, \gamma_2^{(\nu)}, \ldots]$ содержит постоянные распространения мод, а квадратные нормировочная матрица $\overline{\mathbf{N}}^{(\nu)}$ и матрица связи $\overline{\mathbf{K}}^{(\nu,\nu)}$ имеют элементами $N_{mn}^{(\nu)} \equiv N_{mn}^{(\nu,\nu)}$ и $K_{mn}^{(\nu,\nu)}$.

3.2.2. Уравнения связанных мод для недиссипативных волноводов. Интегралы возбуждения $R_m^{(\nu)}$ and $R_\varkappa^{(\nu)}$, входящие в правую часть уравнений (2.13.19)–(2.13.20) и (2.13.34)–(2.13.35) в виде $R_m^{(\nu)}/N_m^{(\nu)}$ и $R_\varkappa^{(\nu)}/N_\varkappa^{(\nu)}$, имеют универсальную форму (2.13.10) и (2.13.25), справедливую как для диссипативных, так и недиссипативных систем.

Следовательно, можно использовать полученные в предыдущем параграфе модальные разложения (3.2.1)–(3.2.4) и (3.2.5)–(3.2.8) для интегралов возбуждения по дискретному и непрерывному спектрам направляемых и излучательных мод для того, чтобы преобразовать недиссипативные уравнения возбуждения (2.13.20) и (2.13.35) к удобной форме уравнений связанных мод следующего вида.

- Для *направляемой m-й моды* дискретного спектра

$$\frac{da_m^{(\nu)}}{dz} + i\beta_m^{(\nu)} a_m^{(\nu)} = \sum_n \left(c_{mn}^{(\nu,\nu)} a_n^{(\nu)} + c_{mn}^{(\nu,\nu-1)} a_n^{(\nu-1)} + c_{mn}^{(\nu,\nu+1)} a_n^{(\nu+1)} \right) +$$
$$+ \int_0^\infty \left(c_{m\varkappa}^{(\nu,\nu)} a_\varkappa^{(\nu)} + c_{m\varkappa}^{(\nu,\nu-1)} a_\varkappa^{(\nu-1)} + c_{m\varkappa}^{(\nu,\nu+1)} a_\varkappa^{(\nu+1)} \right) d\varkappa, \tag{3.2.16}$$

где введены следующие *коэффициенты связи* между модами как дискретного, так и непрерывного спектров (ср. уравнения (3.2.2)–(3.2.4)):

$$c_{m\alpha}^{(\nu,\nu)} \equiv \frac{K_{m\alpha}^{(\nu,\nu)}}{N_m^{(\nu)}} = -\frac{i\omega_\nu}{N_m^{(\nu)}} \int_{S_b} \left(\widehat{\mathbf{E}}_m^{(\nu)*} \cdot \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c \cdot \widehat{\mathbf{E}}_\alpha^{(\nu)} \right) dS -$$
$$- \frac{1}{N_m^{(\nu)}} \int_{L_b} \left(\widehat{\mathbf{H}}_m^{(\nu)*} \cdot \Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c \cdot \widehat{\mathbf{E}}_\alpha^{(\nu)} \right) dL, \tag{3.2.17}$$

$$c_{m\alpha}^{(\nu,\nu-1)} \equiv \frac{K_{m\alpha}^{(\nu,\nu-1)}}{N_m^{(\nu)}} = -\frac{i\omega_\nu}{N_m^{(\nu)}} \int_{S_b} \left(\widehat{\mathbf{E}}_m^{(\nu)*} \cdot \delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c \cdot \widehat{\mathbf{E}}_\alpha^{(\nu-1)} \right) dS -$$
$$- \frac{1}{N_m^{(\nu)}} \int_{L_b} \left(\widehat{\mathbf{H}}_m^{(\nu)*} \cdot \delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c \cdot \widehat{\mathbf{E}}_\alpha^{(\nu-1)} \right) dL, \tag{3.2.18}$$

$$c_{m\alpha}^{(\nu,\nu+1)} \equiv \frac{K_{m\alpha}^{(\nu,\nu+1)}}{N_m^{(\nu)}} = -\frac{i\omega_\nu}{N_m^{(\nu)}} \int\limits_{S_b} \left(\widehat{\mathbf{E}}_m^{(\nu)*} \cdot \delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^* \cdot \widehat{\mathbf{E}}_\alpha^{(\nu+1)}\right) dS - $$
$$- \frac{1}{N_m^{(\nu)}} \int\limits_{L_b} \left(\widehat{\mathbf{H}}_m^{(\nu)*} \cdot \delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c^* \cdot \widehat{\mathbf{E}}_\alpha^{(\nu+1)}\right) dL, \qquad (3.2.19)$$

при $\alpha = n$ или $\varkappa$ для направляемых и излучательных мод, соответственно.

- Для *излучательной $\varkappa$-й моды* непрерывного спектра

$$\frac{da_\varkappa^{(\nu)}}{dz} + i\beta_\varkappa^{(\nu)} a_\varkappa^{(\nu)} = \sum_n \left(c_{\varkappa n}^{(\nu,\nu)} a_n^{(\nu)} + c_{\varkappa n}^{(\nu,\nu-1)} a_n^{(\nu-1)} + c_{\varkappa n}^{(\nu,\nu+1)} a_n^{(\nu+1)}\right) +$$
$$+ \int\limits_0^\infty \left(c_{\varkappa\varkappa'}^{(\nu,\nu)} a_{\varkappa'}^{(\nu)} + c_{\varkappa\varkappa'}^{(\nu,\nu-1)} a_{\varkappa'}^{(\nu-1)} + c_{\varkappa\varkappa'}^{(\nu,\nu+1)} a_{\varkappa'}^{(\nu+1)}\right) d\varkappa', \qquad (3.2.20)$$

где введены следующие *коэффициенты связи* между модами как непрерывного, так и дискретного спектров (ср. уравнения (3.2.6)–(3.2.8)):

$$c_{\varkappa\alpha}^{(\nu,\nu)} \equiv \frac{K_{\varkappa\alpha}^{(\nu,\nu)}}{N_\varkappa^{(\nu)}} = -\frac{i\omega_\nu}{N_\varkappa^{(\nu)}} \int\limits_{S_b} \left(\widehat{\mathbf{E}}_\varkappa^{(\nu)*} \cdot \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c \cdot \widehat{\mathbf{E}}_\alpha^{(\nu)}\right) dS - $$
$$- \frac{1}{N_\varkappa^{(\nu)}} \int\limits_{L_b} \left(\widehat{\mathbf{H}}_\varkappa^{(\nu)*} \cdot \Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c \cdot \widehat{\mathbf{E}}_\alpha^{(\nu)}\right) dL, \qquad (3.2.21)$$

$$c_{\varkappa\alpha}^{(\nu,\nu-1)} \equiv \frac{K_{\varkappa\alpha}^{(\nu,\nu-1)}}{N_\varkappa^{(\nu)}} = -\frac{i\omega_\nu}{N_\varkappa^{(\nu)}} \int\limits_{S_b} \left(\widehat{\mathbf{E}}_\varkappa^{(\nu)*} \cdot \delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c \cdot \widehat{\mathbf{E}}_\alpha^{(\nu-1)}\right) dS - $$
$$- \frac{1}{N_\varkappa^{(\nu)}} \int\limits_{L_b} \left(\widehat{\mathbf{H}}_\varkappa^{(\nu)*} \cdot \delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c \cdot \widehat{\mathbf{E}}_\alpha^{(\nu-1)}\right) dL, \qquad (3.2.22)$$

$$c_{\varkappa\alpha}^{(\nu,\nu+1)} \equiv \frac{K_{\varkappa\alpha}^{(\nu,\nu+1)}}{N_\varkappa^{(\nu)}} = -\frac{i\omega_\nu}{N_\varkappa^{(\nu)}} \int\limits_{S_b} \left(\widehat{\mathbf{E}}_\varkappa^{(\nu)*} \cdot \delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^* \cdot \widehat{\mathbf{E}}_\alpha^{(\nu+1)}\right) dS - $$
$$- \frac{1}{N_\varkappa^{(\nu)}} \int\limits_{L_b} \left(\widehat{\mathbf{H}}_\varkappa^{(\nu)*} \cdot \delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c^* \cdot \widehat{\mathbf{E}}_\alpha^{(\nu+1)}\right) dL, \qquad (3.2.23)$$

при $\alpha = n$ или $\varkappa'$ для направляемых и излучательных мод, соответственно.

Недиссипативные уравнения связанных мод (3.2.16) и (3.2.20) вытекают как частный случай из общей системы диссипативных связанных уравнений в матричной форме (3.2.14) при использовании равенства $\gamma_m^{(\nu)} = i\beta_m^{(\nu)}$ и соотношения ортонормировки (2.12.12) в виде $N_{mn}^{(\nu)} = N_m^{(\nu)}\delta_{mn}$, справедливом для волноводов без потерь.

Уместно напомнить, что волновая амплитуда $a_\varkappa^{(\nu)}$ и норма $N_\varkappa^{(\nu)}$ излучательной моды имеют различные размерности для планарных структур (с одномерным поперечным сечением) и канальных структур (с двумерным поперечным сечением) — см. с. 84. В отличие от этого, для дискретных мод амплитуда $a_m^{(\nu)}$ всегда безразмерная, а норма $N_m^{(\nu)}$ измеряется в ваттах. Это нашло отражение в табл. 1.1 (см. п. 1.9). Вышесказанное приводит к тому, что коэффициенты связи (3.2.17)–(3.2.19) для направляемых мод и (3.2.21)–(3.2.23) для излучательных мод в планарных и канальных волноводах также имеют разные размерности, указанные в табл. 1.1.

Часто бывает удобно ввести амплитуды возбуждения $A_m^{(\nu)}$ и $A_\varkappa^{(\nu)}$ вместо волновых амплитуд $a_m^{(\nu)}$ и $a_\varkappa^{(\nu)}$ подстановкой соотношений (2.10.42) (при $\gamma_m^{(\nu)} = i\beta_m^{(\nu)}$) и (2.10.45) (при $\gamma_\varkappa^{(\nu)} = i\beta_\varkappa^{(\nu)}$) в уравнения связанных мод (3.2.16) и (3.2.20). Тогда эти уравнения, по аналогии с (3.2.13), можно записать в форме, которая объединяет моды дискретного и непрерывного спектров в общую сумму, понимаемую в обобщенном смысле:

$$\frac{dA_m^{(\nu)}}{dz} = \sum_n \Big(c_{mn}^{(\nu,\nu)} e^{i(\beta_m^{(\nu)} - \beta_n^{(\nu)})z} A_n^{(\nu)} + c_{mn}^{(\nu,\nu-1)} e^{i(\beta_m^{(\nu)} - \beta_n^{(\nu-1)})z} A_n^{(\nu-1)} + \\ + c_{mn}^{(\nu,\nu+1)} e^{i(\beta_m^{(\nu)} - \beta_n^{(\nu+1)})z} A_n^{(\nu+1)} \Big), \tag{3.2.24}$$

где коэффициенты связи определяются теми же формулами (3.2.17)–(3.2.19) и (3.2.21)–(3.2.23). Преимущество уравнений в форме (3.2.24) состоит в том, что они явно показывают фазовое согласование $\big($при $\beta_m^{(\nu)} = \beta_n^{(\nu)}$ или $\beta_m^{(\nu)} = \beta_n^{(\nu\pm1)}\big)$ и фазовое рассогласование $\big($при $\beta_m^{(\nu)} \neq \beta_n^{(\nu)}$ или $\beta_m^{(\nu)} \neq \beta_n^{(\nu\pm1)}\big)$ между связанными модами.

Рассмотрим по отдельности два случая, соответствующие статическим ($\Delta\overline{\varepsilon} \neq 0$ и $\delta\overline{\varepsilon} = 0$) и динамическим ($\delta\overline{\varepsilon} \neq 0$ и $\Delta\overline{\varepsilon} = 0$) возмущениям в одиночных волноведущих структурах.

Статические диэлектрические возмущения. Существование только статических возмущений диэлектрической проницаемости волноведущей среды означает, что $\Delta\overline{\varepsilon} \neq 0$ и $\delta\overline{\varepsilon} = 0$, в результате чего для динамических тензоров связи (3.1.17) и (3.1.21) имеем $\delta\overline{\varepsilon}_c = \delta\overline{\xi}_c = 0$. Однако статические тензоры связи $\Delta\overline{\varepsilon}_c$ и $\Delta\overline{\xi}_c$, определенные формулами (3.1.16) и (3.1.20), остаются неизменными.

Как следует из (3.2.17)–(3.2.19), коэффициенты связи таковы, что

$$c_{mn}^{(\nu,\nu-1)} = c_{mn}^{(\nu,\nu+1)} = 0 \quad \text{и} \quad c_{mn}^{(\nu,\nu)} \neq 0, \tag{3.2.25}$$

т. е. нет связи между модами (как дискретного, так и непрерывного спектра) на разных частотах из-за отсутствия параметрических эффектов ($\omega_p = 0$). В этом случае взаимодействие может происходить только между модами одной и той же частоты ($\omega_\nu \equiv \omega$), что позволяет опустить частотные индексы (ν) и (ν, ν) в последующих формулах. Тогда уравнение связанных мод (3.2.24) принимает упрощенный вид

$$\frac{dA_m}{dz} = \sum_n c_{mn}\, e^{i(\beta_m - \beta_n)z} A_n. \tag{3.2.26}$$

Полезно записать выражения для коэффициентов связи c_{mn}, входящих в уравнения (3.2.26), отдельно для случаев анизотропных и изотропных диэлектрических возмущений.

Анизотропные статические возмущения описываются статическим *тензором возмущения* $\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ произвольной формы. Этот тензор однозначно определяет статические *тензоры связи* $\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c$ и $\Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c$ вида (3.1.16) и (3.1.20). Подстановка этих тензоров в выражение (3.2.17) дает искомые коэффициенты связи:

$$\begin{aligned} c_{mn} \equiv \frac{K_{mn}}{N_m} = &-\frac{i\omega}{N_m} \int\limits_{S_b} \Bigg[\widehat{\mathbf{E}}^*_{mt} \cdot \left(\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \widehat{\mathbf{E}}_n\right)_t + \\ &+ \frac{\varepsilon}{\varepsilon + \Delta\varepsilon_{zz}} \left(\widehat{E}^*_{mz} - \widehat{\mathbf{E}}^*_{mt} \cdot \frac{(\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{e}_z)_t}{\varepsilon} \right) \left(\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \widehat{\mathbf{E}}_n\right)_z \Bigg] dS - \\ &- \frac{1}{N_m} \int\limits_{L_b} \left(\widehat{\mathbf{H}}^*_m \cdot \boldsymbol{\tau}_b\right) \frac{(\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \widehat{\mathbf{E}}_n)_z}{\varepsilon + \Delta\varepsilon_{zz}}\, dL. \end{aligned} \tag{3.2.27}$$

Здесь электрическое поле m-й моды в общем случае имеет продольную и поперечные компоненты,

$$\widehat{\mathbf{E}}_m = \widehat{\mathbf{E}}_{mt} + \mathbf{e}_z \widehat{E}_{mz}, \tag{3.2.28}$$

а тангенциальная компонента $(\widehat{\mathbf{H}}^*_m \cdot \boldsymbol{\tau}_b)$ магнитного поля чисто поперечная, как видно из (3.2.12).

Изотропные статические возмущения описываются статическим *скаляром возмущения* $\Delta\varepsilon$, так что для тензора возмущения имеем

$$\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \Delta\varepsilon \overline{\mathbf{I}} \quad \text{и} \quad (\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{e}_z)_t = 0. \tag{3.2.29}$$

Выражение для коэффициентов связи получается как частный случай из общей формулы (3.2.27) при подстановке в нее соотношений (3.2.29):

$$\begin{aligned} c_{mn} \equiv \frac{K_{mn}}{N_m} = &-\frac{i\omega}{N_m} \int\limits_{S_b} \Delta\varepsilon \left(\widehat{\mathbf{E}}^*_{mt} \cdot \widehat{\mathbf{E}}_{nt} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon + \Delta\varepsilon} \widehat{E}^*_{mz} \widehat{E}_{nz} \right) dS - \\ &- \frac{1}{N_m} \int\limits_{L_b} \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon + \Delta\varepsilon} \left(\widehat{\mathbf{H}}^*_m \cdot \boldsymbol{\tau}_b\right) \widehat{E}_{nz}\, dL. \end{aligned} \tag{3.2.30}$$

Первый интеграл в (3.2.30), учитывающий объемные диэлектрические возмущения и порожденный объемным электрическим током $\mathbf{J}_b^e$, полностью совпадает с аналогичным выражением, полученным ранее [8, 13]. Второй интеграл, учитывающий вклад эффективного поверхностного магнитного тока $\mathbf{J}_s^m$, прежде был потерян всеми авторами, что верно также и для других форм поверхностных коэффициентов связи. Понятно, что этот дополнительный вклад может быть существенным для мод ТМ-типа, в которых преобладают поперечные магнитные и продольные электрические поля (см. п. 1.7.2).

Динамические диэлектрические возмущения. Существование только динамических возмущений диэлектрической проницаемости волноведущей среды означает, что $\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} \neq 0$ и $\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} = 0$, в результате чего для статических тензоров связи (3.1.16) и (3.1.20) имеем $\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c = \Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c = 0$. Динамические тензоры связи $\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c$ и $\delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c$, определенные формулами (3.1.17) и (3.1.21), принимают следующий вид:

$$\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c = \delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \text{и} \quad \delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c = \boldsymbol{\tau}_b \mathbf{e}_z \cdot \frac{\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}(L_b)}{\varepsilon(L_b)}. \tag{3.2.31}$$

Как следует из (3.2.17)–(3.2.19), коэффициенты связи таковы, что

$$c_{mn}^{(\nu,\nu)} = 0 \quad \text{и} \quad c_{mn}^{(\nu,\nu\pm1)} \neq 0, \tag{3.2.32}$$

т. е. m-я мода на частоте ω_ν параметрически связывается с n-й модой на соседних частотах $\omega_{\nu\pm1} = \omega_\nu \pm \omega_p$. Тогда уравнение связанных мод (3.2.24) записывается в следующей форме:

$$\frac{dA_m^{(\nu)}}{dz} = \sum_n \left(c_{mn}^{(\nu,\nu-1)} e^{i(\beta_m^{(\nu)} - \beta_n^{(\nu-1)})z} A_n^{(\nu-1)} + c_{mn}^{(\nu,\nu+1)} e^{i(\beta_m^{(\nu)} - \beta_n^{(\nu+1)})z} A_n^{(\nu+1)} \right). \tag{3.2.33}$$

Коэффициенты связи получаются из общих формул (3.2.18) и (3.2.19) при подстановке в них соотношений (3.2.31):

$$\begin{aligned} c_{mn}^{(\nu,\nu-1)} \equiv \frac{K_{mn}^{(\nu,\nu-1)}}{N_m^{(\nu)}} = &-\frac{i\omega_\nu}{N_m^{(\nu)}} \int\limits_{S_b} \left(\widehat{\mathbf{E}}_m^{(\nu)*} \cdot \delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \widehat{\mathbf{E}}_n^{(\nu-1)} \right) dS - \\ &- \frac{1}{N_m^{(\nu)}} \int\limits_{L_b} \left(\widehat{\mathbf{H}}_m^{(\nu)*} \cdot \boldsymbol{\tau}_b \right) \frac{\mathbf{e}_z \cdot \delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\varepsilon} \cdot \widehat{\mathbf{E}}_n^{(\nu-1)}\, dL, \end{aligned} \tag{3.2.34}$$

$$\begin{aligned} c_{mn}^{(\nu,\nu+1)} \equiv \frac{K_{mn}^{(\nu,\nu+1)}}{N_m^{(\nu)}} = &-\frac{i\omega_\nu}{N_m^{(\nu)}} \int\limits_{S_b} \left(\widehat{\mathbf{E}}_m^{(\nu)*} \cdot \delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^* \cdot \widehat{\mathbf{E}}_n^{(\nu+1)} \right) dS - \\ &- \frac{1}{N_m^{(\nu)}} \int\limits_{L_b} \left(\widehat{\mathbf{H}}_m^{(\nu)*} \cdot \boldsymbol{\tau}_b \right) \frac{\mathbf{e}_z \cdot \delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^*}{\varepsilon} \cdot \widehat{\mathbf{E}}_n^{(\nu+1)}\, dL. \end{aligned} \tag{3.2.35}$$

Следует иметь в виду, что условия (3.2.25) для статических возмущений, будучи следствием нулевого приближения в итерационном процессе (3.1.6), справедливы всегда (независимо от порядка приближения). В отличие от них, условия (3.2.32) для динамических возмущений применимы только в рамках первого приближения (3.1.7), которое обеспечивает, согласно (3.2.34) и (3.2.35), связь между модами разных частот. Если использовать второе приближение (3.1.8), то получим $c_{mn}^{(\nu,\nu)} \neq 0$, что дополнительно дает более слабую динамическую связь между модами на одной и той же частоте. Однако в последующем рассмотрении будем ограничиваться только первым приближением по динамическому возмущению, считая $|\delta\varepsilon_{zz}| \ll \varepsilon$, что гарантирует применимость условий (3.2.32).

Недиссипативные уравнения связанных мод в форме (3.2.16) и (3.2.20) впервые были получены в работе [59]. Однако там, в отличие от (3.2.17)–(3.2.19) и (3.2.21)–(3.2.23), коэффициенты связи (как статические, так и динамические) включали только объемный вклад в виде первого интеграла по сечению S_b, занятому объемными электрическими токами $\mathbf{J}_b^e$. Дополнительный вклад, даваемый вторым контурным интегралом вдоль границы L_b области S_b с эффективным поверхностным магнитным током $\mathbf{J}_s^m$, был потерян нами тогда, как до сих пор и другими авторами. Настоящая теория связанных мод устраняет этот недостаток прежних теорий.

Появившийся поверхностный вклад в коэффициенты связи в форме контурного интеграла по границе области, занятой возбуждающими электрическими токами, модифицирует перестановочные свойства коэффициентов связи, рассмотренные в приложении Г.

Перестановочная симметрия коэффициентов объемной связи. Последующие параграфы этой главы будут посвящены вычислению коэффициентов связи (3.2.2)–(3.2.4) и (3.2.6)–(3.2.8), представляемых в виде суммы объемного и поверхностного вкладов,

$$K_{mn}^{(\nu,\nu)} = \left(K_{mn}^{(\nu,\nu)}\right)_{bulk} + \left(K_{mn}^{(\nu,\nu)}\right)_{surf}, \tag{3.2.36}$$

которые вызваны действием *объемного* электрического тока (индекс *bulk*) и эффективного *поверхностного* магнитного тока (индекс *surf*).

Эти коэффициенты имеют общую форму, присущую как дискретным направляемым, так и непрерывным излучательным модам и нечувствительную к наличию или отсутствию потерь. В частном случае недиссипативных систем, когда применимы формулы (3.2.17)–(3.2.19) и (3.2.21)–(3.2.23), делением выражения (3.2.36) на модальную норму $N_m^{(\nu)}$ получаем аналогичное выражение для недиссипативных коэффициентов связи:

$$c_{mn}^{(\nu,\nu)} = \left(c_{mn}^{(\nu,\nu)}\right)_{bulk} + \left(c_{mn}^{(\nu,\nu)}\right)_{surf}. \tag{3.2.37}$$

Структура объемных коэффициентов связи такова, что она может гарантировать их перестановочную симметрию, поскольку объемные тензоры связи $\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c$ и $\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c$ связывают друг с другом два модальных *электрических* поля $(\widehat{\mathbf{E}}_m, \widehat{\mathbf{E}}_n)$. В отличие от этого, поверхностные коэффициенты связи связывают между собой *магнитное* и *электрическое* модальные поля $(\widehat{\mathbf{H}}_m, \widehat{\mathbf{E}}_n)$ с помощью поверхностных тензоров связи $\Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c$ и $\delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c$.

Известно [72], что каждый тензор может быть представлен в виде суммы двух частей — либо *эрмитовой* и *антиэрмитовой* (с индексами h и a), либо *симметричной* и *антисимметричной* (с индексами s и a). Для дальнейшего удобно представить тензоры объемной связи в следующем виде:

- *статический* тензор объемной связи (с *эрмитовой* и *антиэрмитовой* частями)

$$\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c = \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^h + \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^a \qquad \text{или} \qquad \Delta\varepsilon_{c,ij} = \Delta\varepsilon_{c,ij}^h + \Delta\varepsilon_{c,ij}^a, \tag{3.2.38}$$

так что

$$\Delta\varepsilon_{c,ij}^h = \Delta\varepsilon_{c,ji}^{h*} \qquad \text{и} \qquad \Delta\varepsilon_{c,ij}^a = -\Delta\varepsilon_{c,ji}^{a*}; \tag{3.2.39}$$

- *динамический* тензор объемной связи (с *симметричной* и *антисимметричной* частями)

$$\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c = \delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^s + \delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^a \qquad \text{или} \qquad \delta\varepsilon_{c,ij} = \delta\varepsilon_{c,ij}^s + \delta\varepsilon_{c,ij}^a, \tag{3.2.40}$$

так что

$$\delta\varepsilon_{c,ij}^s = \delta\varepsilon_{c,ji}^s \qquad \text{и} \qquad \delta\varepsilon_{c,ij}^a = -\,\delta\varepsilon_{c,ji}^a. \tag{3.2.41}$$

Статический тензор объемной связи (3.2.38) дает «эрмитов» и «антиэрмитов» вклады в статические коэффициенты объемной связи (3.2.17):

$$\left(c_{mn}^{(\nu,\nu)}\right)_{bulk} = \left(c_{mn}^{(\nu,\nu)}\right)_{bulk}^h + \left(c_{mn}^{(\nu,\nu)}\right)_{bulk}^a, \tag{3.2.42}$$

где

$$\left(c_{mn}^{(\nu,\nu)}\right)_{bulk}^{h,a} = -\frac{i\omega_\nu}{N_m^{(\nu)}} \int\limits_{S_b} \left(\widehat{\mathbf{E}}_m^{(\nu)*} \cdot \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^{h,a} \cdot \widehat{\mathbf{E}}_n^{(\nu)}\right) dS. \tag{3.2.43}$$

Используя перестановочные свойства (3.2.39), легко доказать, что

$$\begin{aligned}\left(\widehat{\mathbf{E}}_m^{(\nu)*} \cdot \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^{h,a} \cdot \widehat{\mathbf{E}}_n^{(\nu)}\right) &\equiv \widehat{E}_{m,i}^{(\nu)*} \Delta\varepsilon_{c,ij}^{h,a}\, \widehat{E}_{n,j}^{(\nu)} = \pm\, \widehat{E}_{m,i}^{(\nu)*} \Delta\varepsilon_{c,ji}^{h,a\,*} \widehat{E}_{n,j}^{(\nu)} = \\ &= \pm \left(\widehat{E}_{n,i}^{(\nu)*} \Delta\varepsilon_{c,ij}^{h,a}\, \widehat{E}_{m,j}^{(\nu)}\right)^* \equiv \pm \left(\widehat{\mathbf{E}}_n^{(\nu)*} \cdot \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^{h,a} \cdot \widehat{\mathbf{E}}_m^{(\nu)}\right)^*,\end{aligned} \tag{3.2.44}$$

где два знака $\pm$ соответствуют разным верхним индексам h (эрмитовый) и a (антиэрмитовый).

Формулы (3.2.43) и (3.2.44) дают следующие перестановочные соотношения для «эрмитовой» и «антиэрмитовой» частей (3.2.43):

$$N_m^{(\nu)} \left(c_{mn}^{(\nu,\nu)}\right)_{bulk}^{h,a} = \mp N_n^{(\nu)} \left(c_{nm}^{(\nu,\nu)}\right)_{bulk}^{h,a\,*} \tag{3.2.45}$$

или для суммарного коэффициента связи (3.2.42)

$$N_m^{(\nu)} \left[\left(c_{mn}^{(\nu,\nu)}\right)_{bulk}^h + \left(c_{mn}^{(\nu,\nu)}\right)_{bulk}^a\right] = -\,N_n^{(\nu)} \left[\left(c_{nm}^{(\nu,\nu)}\right)_{bulk}^{h*} - \left(c_{nm}^{(\nu,\nu)}\right)_{bulk}^{a*}\right]. \tag{3.2.46}$$

Динамический тензор объемной связи (3.2.40) дает «симметричный» и «антисимметричный» вклады в динамические коэффициенты объемной связи (3.2.18) и (3.2.19):

$$\left(c_{mn}^{(\nu,\nu\mp1)}\right)_{bulk} = \left(c_{mn}^{(\nu,\nu\mp1)}\right)_{bulk}^{s} + \left(c_{mn}^{(\nu,\nu\mp1)}\right)_{bulk}^{a}, \tag{3.2.47}$$

где

$$\left(c_{mn}^{(\nu,\nu-1)}\right)_{bulk}^{s,a} = -\frac{i\omega_\nu}{N_m^{(\nu)}} \int\limits_{S_b} \left(\widehat{\mathbf{E}}_m^{(\nu)*}\cdot\, \delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^{\,s,a}\cdot \widehat{\mathbf{E}}_n^{(\nu-1)}\right) dS, \tag{3.2.48}$$

$$\left(c_{mn}^{(\nu,\nu+1)}\right)_{bulk}^{s,a} = -\frac{i\omega_\nu}{N_m^{(\nu)}} \int\limits_{S_b} \left(\widehat{\mathbf{E}}_m^{(\nu)*}\cdot\, \delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^{\,s,a*}\cdot \widehat{\mathbf{E}}_n^{(\nu+1)}\right) dS. \tag{3.2.49}$$

Используя перестановочные свойства (3.2.41), легко доказать, что

$$\begin{aligned}\left(\widehat{\mathbf{E}}_m^{(\nu)*}\cdot\, \delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^{\,s,a}\cdot \widehat{\mathbf{E}}_n^{(\nu-1)}\right) &\equiv \widehat{E}_{m,i}^{(\nu)*}\delta\varepsilon_{c,ij}^{s,a}\,\widehat{E}_{n,j}^{(\nu-1)} = \pm\,\widehat{E}_{m,i}^{(\nu)*}\delta\varepsilon_{c,ji}^{s,a}\,\widehat{E}_{n,j}^{(\nu-1)} = \\ &= \pm\left(\widehat{E}_{n,i}^{(\nu-1)*}\delta\varepsilon_{c,ij}^{s,a*}\widehat{E}_{m,j}^{(\nu)}\right)^{*} \equiv \pm\left(\widehat{\mathbf{E}}_n^{(\nu-1)*}\cdot\, \delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^{\,s,a*}\cdot \widehat{\mathbf{E}}_m^{(\nu)}\right)^{*},\end{aligned} \tag{3.2.50}$$

$$\begin{aligned}\left(\widehat{\mathbf{E}}_m^{(\nu)*}\cdot\, \delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^{\,s,a*}\cdot \widehat{\mathbf{E}}_n^{(\nu+1)}\right) &\equiv \widehat{E}_{m,i}^{(\nu)*}\delta\varepsilon_{c,ij}^{s,a*}\widehat{E}_{n,j}^{(\nu+1)} = \pm\,\widehat{E}_{m,i}^{(\nu)*}\delta\varepsilon_{c,ji}^{s,a*}\widehat{E}_{n,j}^{(\nu+1)} = \\ &= \pm\left(\widehat{E}_{n,i}^{(\nu+1)*}\delta\varepsilon_{c,ij}^{s,a}\widehat{E}_{m,j}^{(\nu)}\right)^{*} \equiv \pm\left(\widehat{\mathbf{E}}_n^{(\nu+1)*}\cdot\, \delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^{\,s,a}\cdot \widehat{\mathbf{E}}_m^{(\nu)}\right)^{*},\end{aligned} \tag{3.2.51}$$

где два знака $\pm$ соответствуют разным верхним индексам s (симметричный) и a (антисимметричный).

Формулы (3.2.48)–(3.2.51) дают следующие перестановочные соотношения для «симметричной» и «антисимметричной» частей коэффициентов объемной связи (3.2.47)–(3.2.49):

$$\frac{N_m^{(\nu)}}{\omega_\nu}\left(c_{mn}^{(\nu,\nu-1)}\right)_{bulk}^{s,a} = \mp\frac{N_n^{(\nu-1)}}{\omega_{\nu-1}}\left(c_{nm}^{(\nu-1,\nu)}\right)_{bulk}^{s,a*}, \tag{3.2.52}$$

$$\frac{N_m^{(\nu)}}{\omega_\nu}\left(c_{mn}^{(\nu,\nu+1)}\right)_{bulk}^{s,a} = \mp\frac{N_n^{(\nu+1)}}{\omega_{\nu+1}}\left(c_{nm}^{(\nu+1,\nu)}\right)_{bulk}^{s,a*}. \tag{3.2.53}$$

Перестановочные соотношения (3.2.52)–(3.2.53) идентичны по форме с таким же соотношением (Г.6.9), полученным из энергетических соображений.

Следует подчеркнуть, что определения «эрмитовый/антиэрмитовый» и «симметричный/антисимметричный» в применении к коэффициентам связи *условны* и заключены в кавычки потому, что они просто отражают связь этих коэффициентов с истинно эрмитовыми/антиэрмитовыми или симметричными/антисимметричными тензорами связи с помощью формул (3.2.43) и (3.2.48)–(3.2.49). Сами же коэффициенты связи в общем случае не обладают требуемыми свойствами симметрии типа (3.2.39) и (3.2.41), вернее, обладают ими в специфической форме (3.2.45) и (3.2.52)–(3.2.53).

Присутствие «эрмитового» и «антиэрмитового» вкладов в перестановочных соотношениях (3.2.45)–(3.2.46) для коэффициентов объемной связи и появление коэффициентов поверхностной связи, нарушающих перестановочную симметрию, модифицирует привычную структуру решения связанных уравнений в рамках обычной теории связанных мод, изложенной в приложении Г. Структура решения модифицированных уравнений связанных мод исследована в приложении Д.

Главной отличительной особенностью модифицированного анализа связанных уравнений, приведенного в приложении Д, является необходимость выполнения закона сохранения мощности в недиссипативных системах с учетом не только собственной мощности, переносимой каждой модой, но и взаимной (кросс-) мощности, переносимой каждой парой мод. Необходимость учета парной кросс-мощности является прямым следствием нарушения перестановочной симметрии коэффициентов связи, что показано в приложении Д. Это несколько усложняет построение решения связанных уравнений, но в принципе всегда осуществимо, если знать конкретную форму коэффициентов объемной и поверхностной связи, определенных в виде (3.2.17)–(3.2.19) и (3.2.21)–(3.2.23), в применении к различным оптическим структурам, рассмотренным в нижеследующих параграфах данной главы.

Уравнения связанных мод, выведенные выше на основе самосогласованного электродинамического подхода, позволяют анализировать любые волновые взаимодействия при условии, что известны:

- закон дисперсии мод и модальные мембранные функции полей,
- тензоры возмущения — статический $\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ и динамический $\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$.

Знание мембранных функций собственных мод базового волновода позволяет найти по формулам (2.13.16)–(2.13.17) и (2.13.31)–(2.13.32) нормировочные коэффициенты типа $N_{mn}^{(\nu)}$ (собственные и взаимные нормы мод).

Тензоры возмущения дают *тензоры связи* — объемные ($\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c, \delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c$) и поверхностные ($\Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c, \delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c$), введенные в виде (3.1.16)–(3.1.17) и (3.1.20)–(3.1.21). Знание последних, наряду с мембранными функциями взаимодействующих мод, необходимо для вычисления коэффициентов связи (3.2.17)–(3.2.19) и (3.2.21)–(3.2.23). Особенность тензоров связи, отличающая их от тензоров возмущения, вызвана неаддитивным совместным вкладом статических и динамических возмущений в динамические тензоры связи $\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c$ и $\delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c$.

Разработанная теория связанных оптических мод имеет широкую область применения, поскольку она охватывает любые статические и динамические (параметрические) возмущения волноведущих структур, как с потерями, так и без потерь, и включает в рассмотрение не только дискретные моды, но и излучательные моды непрерывного спектра.

Последующие параграфы данной главы применяют уравнения общей теории к конкретным механизмам связи между оптическими модами в открытых диэлектрических структурах, имеющих практическое использование в различных устройствах волноводной оптики. Среди них планарные волноводы с гофрированной поверхностью (пп. 3.3–3.5) и с волноведущей средой, обладающей электрооптическими (пп. 3.6–3.7), акустооптическими (пп. 3.8–3.10) и магнитооптическими (пп. 3.11–3,12) свойствами.

3.3. Планарный диэлектрический волновод с периодическим возмущением границы

3.3.1. Общие выражения для тензоров и коэффициентов объемной и поверхностной связи. Рассмотрим базовый планарный волновод, изображенный на рис. 1.8 в виде трех диэлектрических слоев без магнитных свойств ($\mu_{r0} = \mu_{r1} = \mu_{r2} = 1$), характеризуемых следующими скалярными проницаемостями ε_{ri}: ε_{r0} — для верхней среды (с номером $i = 0$), ε_{r1} — для волноведущего слоя (с номером $i = 1$) толщиною $2a$, ε_{r2} — для подложки (с номером $i = 2$), при этом $\varepsilon_{r0} \leqslant \varepsilon_{r2} < \varepsilon_{r1}$. Поэтому невозмущенное распределение относительной диэлектрической проницаемости таково:

$$\varepsilon_r(y) = \begin{cases} \varepsilon_{r0} & \text{при} \quad y > a, \\ \varepsilon_{r1} & \text{при} \quad -a < y < a, \\ \varepsilon_{r2} & \text{при} \quad y < -a. \end{cases} \tag{3.3.1}$$

Геометрическая нерегулярность поверхности волноведущего слоя 1 может трактоваться как статическое диэлектрическое возмущение. Например, геометрическое возмущение верхней границы структуры при $y = a$, показанное на рис. 3.1 и описываемое произвольной функцией $s(z)$, имеет следующее уравнение:

$$y_0(z) = a\big[1 + s(z)\big]. \tag{3.3.2}$$

Это геометрическое возмущение может быть представлено в форме статического *тензора возмущения* $\Delta\overline{\varepsilon}(y,z) = \Delta\varepsilon(y,z)\,\overline{\mathbf{I}}$, где

$$\frac{\Delta\varepsilon(y,z)}{\varepsilon_0} = \begin{cases} \varepsilon_{r1} - \varepsilon_{r0} & \text{при} \quad a < y < y_0(z), \\ & \quad\quad \text{когда} \ \ s(z) > 0, \\ \varepsilon_{r0} - \varepsilon_{r1} & \text{при} \quad y_0(z) < y < a, \\ & \quad\quad \text{когда} \ \ s(z) < 0, \end{cases} \tag{3.3.3}$$

ε_0 — электрическая постоянная.

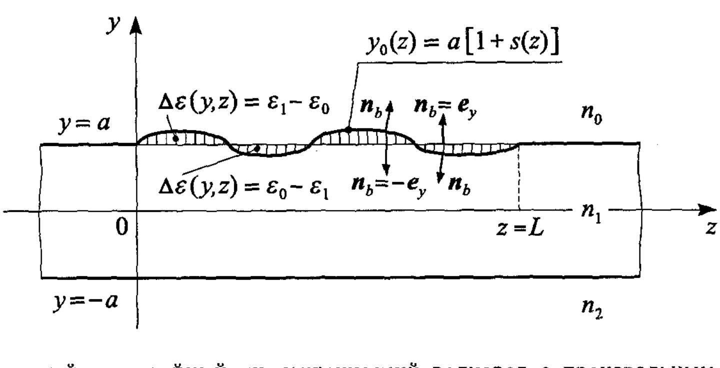


Рис. 3.1. Планарный трехслойный диэлектрический волновод с произвольным возмущением верхней границы длиною L, описываемым функцией $y_0(z)$. Заштрихованная площадь с единичными внешними векторами $\mathbf{n}_b$, нормальными к ее границам, соответствует области локализации вектора избыточной поляризации $\mathbf{P}^{(\nu)}$ и объемного электрического тока $\mathbf{J}_b^{e(\nu)}$, создаваемых диэлектрическим возмущением $\Delta\varepsilon(y,z)$ в результате геометрического возмущения границы

Из общего рассмотрения в п. 3.1 известно, что скалярное диэлектрическое возмущение, даваемое формулой (3.3.3), приводит к тензорам объемной и поверхностной связи $\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c$ и $\Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c$, получаемым подстановкой выражения (3.3.3) в формулы (3.1.16) и (3.1.20).

Тензор *объемной связи* $\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c$, определенный в форме (3.1.16), в этом случае принимает вид

$$\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c(y,z) = \Delta\varepsilon(y,z)\left(\overline{\mathbf{I}} - \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z\,\frac{\Delta\varepsilon(y,z)/\varepsilon_0}{\varepsilon_r(y) + \Delta\varepsilon(y,z)/\varepsilon_0}\right) \equiv$$

$$\equiv \Delta\varepsilon(y,z)\left(\overline{\mathbf{I}}_t + \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z\,\frac{\varepsilon_r(y)}{\varepsilon_r(y) + \Delta\varepsilon(y,z)/\varepsilon_0}\right), \tag{3.3.4}$$

где $\overline{\mathbf{I}}_t = \mathbf{e}_x\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y\mathbf{e}_y$ — поперечный единичный тензор.

На основании формул (3.3.1) и (3.3.3) получаем

$$\frac{\varepsilon_r(y)}{\varepsilon_r(y) + \Delta\varepsilon(y,z)/\varepsilon_0} = \begin{cases} \varepsilon_{r0}/\varepsilon_{r1} & \text{при } a < y < y_0(z), \\ & \text{когда } s(z) > 0, \\ \varepsilon_{r1}/\varepsilon_{r0} & \text{при } y_0(z) < y < a, \\ & \text{когда } s(z) < 0. \end{cases} \tag{3.3.5}$$

Тензор *поверхностной связи* $\Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c$, определенный в форме (3.1.20), в этом случае принимает вид

$$\Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c(z) = \boldsymbol{\tau}_b\mathbf{e}_z\,\Xi\big(y_0(z)\big) \equiv (\mathbf{e}_z\times\mathbf{n}_b)\mathbf{e}_z\,\Xi\big(y_0(z)\big). \tag{3.3.6}$$

Как показано на рис. 3.1, единичный вектор $\mathbf{n}_b$ направлен по нормали к возмущенной границе *наружу* по отношению к области возмущения, заштрихованной на рисунке. Функция $\Xi(y_0)$ с $y_0(z)$ в форме (3.3.2) введена как

$$\Xi(y_0) \equiv \frac{\Delta\varepsilon(y_0)/\varepsilon_0}{\varepsilon_r(y_0) + \Delta\varepsilon(y_0)/\varepsilon_0} = \begin{cases} (\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{r0})/\varepsilon_{r1} & \text{при } a < y < y_0(z), \\ & \text{когда } s(z) > 0, \\ (\varepsilon_{r0} - \varepsilon_{r1})/\varepsilon_{r0} & \text{при } y_0(z) < y < a, \\ & \text{когда } s(z) < 0. \end{cases} \tag{3.3.7}$$

Поскольку диэлектрическое возмущение (3.3.3) является *статическим* и *изотропным*, то тензоры связи (3.3.4) и (3.3.6) связывают собственные моды невозмущенной структуры, изображенной на рис. 1.8, уравнениями типа (3.2.26), а именно

$$\frac{dA_m(z)}{dz} = \sum_n c_{mn}(z)\,e^{i(\beta_m-\beta_n)z}A_n(z). \tag{3.3.8}$$

Коэффициенты связи $c_{mn}(z)$, входящие в уравнения (3.3.8), имеют вид (3.2.30). По аналогии с (3.2.37), коэффициенты связи могут быть представлены в виде суммы двух вкладов — объемного, создаваемого тензором $\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c$ в форме (3.3.4), и поверхностного, создаваемого тензором $\Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c$ в форме (3.3.6) (с поднятием вверх индексов *bulk* и *surf*):

$$c_{mn}(z) = c_{mn}^{bulk}(z) + c_{mn}^{surf}(z). \tag{3.3.9}$$

В рассматриваемом случае планарных структур эти два вклада в выражение (3.3.9) для коэффициентов связи принимают следующий вид:

- *коэффициенты объемной связи*

$$
\begin{aligned}
c_{mn}^{bulk}(z) &\equiv -\frac{i\omega}{N_m}\int\limits_{S_b}\Delta\varepsilon\left(\widehat{\mathbf{E}}_{mt}^{*}\cdot\widehat{\mathbf{E}}_{nt}+\frac{\varepsilon}{\varepsilon+\Delta\varepsilon}\,\widehat{E}_{mz}^{*}\widehat{E}_{nz}\right)dS=\\
&=-\frac{i\omega}{N_m}\int\limits_{-w/2}^{w/2}dx\int\limits_{-a}^{y_0(z)}\Delta\varepsilon(y,z)\left(\widehat{\mathbf{E}}_{mt}^{*}\cdot\widehat{\mathbf{E}}_{nt}+\frac{\varepsilon(y)}{\varepsilon(y)+\Delta\varepsilon(y,z)}\,\widehat{E}_{mz}^{*}\widehat{E}_{nz}\right)dy=\\
&=-\frac{i\omega w}{N_m}\left[(\varepsilon_1-\varepsilon_0)\int\limits_{a}^{y_0(z)>a}\left(\widehat{\mathbf{E}}_{mt}^{*}\cdot\widehat{\mathbf{E}}_{nt}+\frac{\varepsilon_{r0}}{\varepsilon_{r1}}\,\widehat{E}_{mz}^{*}\widehat{E}_{nz}\right)dy+\right.\\
&\qquad\left.+(\varepsilon_0-\varepsilon_1)\int\limits_{y_0(z)<a}^{a}\left(\widehat{\mathbf{E}}_{mt}^{*}\cdot\widehat{\mathbf{E}}_{nt}+\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r0}}\,\widehat{E}_{mz}^{*}\widehat{E}_{nz}\right)dy\right]\equiv\\
&\equiv-\frac{i\omega w}{N_m}(\varepsilon_1-\varepsilon_0)\int\limits_{a}^{y_0(z)}\left\{\widehat{\mathbf{E}}_{mt}^{*}\cdot\widehat{\mathbf{E}}_{nt}+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r0}}\left[1-\frac{\varepsilon_{r1}^2-\varepsilon_{r0}^2}{\varepsilon_{r1}^2}\,U\big(s(z)\big)\right]\widehat{E}_{mz}^{*}\widehat{E}_{nz}\right\}dy;
\end{aligned}
\tag{3.3.10}
$$

- *коэффициенты поверхностной связи*

$$
\begin{aligned}
c_{mn}^{surf}(z) &= -\frac{1}{N_m}\int\limits_{L_b}\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon+\Delta\varepsilon}\big(\widehat{\mathbf{H}}_{m}^{*}\cdot\boldsymbol{\tau}_b\big)\widehat{E}_{nz}\,dL=\\
&=-\frac{1}{N_m}\int\limits_{-w/2}^{w/2}\frac{\Delta\varepsilon(y_0)}{\varepsilon(y_0)+\Delta\varepsilon(y_0)}\left\{\Big[\widehat{\mathbf{H}}_{m}^{*}(y_0)\cdot(\mathbf{e}_z\times\mathbf{n}_b)\Big]\widehat{E}_{nz}(y_0)\pm\right.\\
&\qquad\left.\pm\Big[\widehat{\mathbf{H}}_{m}^{*}(a)\cdot\mathbf{e}_x\Big]\widehat{E}_{nz}(a)\right\}dx\equiv\\
&\equiv-\frac{w}{N_m}\,\Xi(y_0)\left\{\Big[\widehat{\mathbf{H}}_{m}^{*}(y_0)\cdot(\mathbf{e}_z\times\mathbf{n}_b)\Big]\widehat{E}_{nz}(y_0)-\right.\\
&\qquad\left.-H_{mx}^{*}(a)\widehat{E}_{nz}(a)\Big[1-2U\big(s(z)\big)\Big]\right\}.
\end{aligned}
\tag{3.3.11}
$$

Здесь $\Xi(y_0)$ определена как (3.3.7) с y_0 в форме функции от z вида $y_0(z)=a\big[1+s(z)\big]$ (см. уравнение (3.3.2)). Двойные знаки $\pm$ в (3.3.11) соответствуют различным направлениям единичной внешней нормали $\mathbf{n}_b$ к границе

$y = a$ области избыточной поляризации (заштрихованной на рис. 3.1): $\mathbf{n}_b = -\mathbf{e}_y$ при $s(z) > 0$ (верхний знак) и $\mathbf{n}_b = \mathbf{e}_y$ при $s(z) < 0$ (нижний знак).

Выражения (3.3.10) и (3.3.11) содержат единичную ступенчатую функцию [72]:

$$U\big(s(z)\big) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad s(z) > 0, \\ 0 & \text{при} \quad s(z) < 0. \end{cases} \tag{3.3.12}$$

Как известно из п. 1.7, планарный диэлектрический волновод имеет следующие ненулевые компоненты полей: $E_x \neq 0$, $H_y \neq 0$, $H_z \neq 0$ для TE-мод и $H_x \neq 0$, $E_y \neq 0$, $E_z \neq 0$ для TM-мод. Следовательно, коэффициенты связи (3.3.10) и (3.3.11) не обеспечивают взаимодействие между модами TE- и TM-типа, а поверхностный вклад (3.3.11) является ненулевым только для TM-мод, поскольку в случае TE-мод имеем $c_{mn}^{surf}(z) = 0$ из-за $\widehat{E}_{nz}^{TE} \equiv 0$.

Рассмотрим два частных случая, допускающих существенное упрощение общих выражений (3.3.10) и (3.3.11) для коэффициентов объемной и поверхностной связи.

3.3.2. Малые поверхностные возмущения произвольной формы. Малость геометрического возмущения границы раздела означает, что $|s(z)| \ll \ll 1$. Это позволяет под интегралом (3.3.10) заменить модальные поля их значениями при $y = a$, а под интегралом (3.3.11) разложить поля в ряд Тейлора в районе точки $y = a$. После таких преобразований выражения (3.3.10) и (3.3.11) принимают приближенный вид:

- *коэффициенты объемной связи*

$$\begin{aligned} c_{mn}^{bulk}(z) \simeq -\frac{i\omega w a}{N_m}(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\Bigg\{ & \widehat{\mathbf{E}}_{mt}^*(a)\cdot\widehat{\mathbf{E}}_{nt}(a) + \\ & + \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r0}}\left[1 - \frac{\varepsilon_{r1}^2 - \varepsilon_{r0}^2}{\varepsilon_{r1}^2}\,U\big(s(z)\big)\right]\widehat{E}_{mz}^*(a)\widehat{E}_{nz}(a)\Bigg\}\, s(z); \end{aligned} \tag{3.3.13}$$

- *коэффициенты поверхностной связи*

$$\begin{aligned} c_{mn}^{surf}(z) \simeq & \frac{wa}{N_m}\,\frac{\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{r0}}{\varepsilon_{r0}}\left[1 - \frac{\varepsilon_{r0} + \varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r1}}\,U\big(s(z)\big)\right] \times \\ & \times\left[\widehat{H}_{mx}^*(a)\widehat{E}_{nz}'(a) + \widehat{H}_{mx}'^*(a)\widehat{E}_{nz}(a)\right]\left[1 - 2U\big(s(z)\big)\right] s(z). \end{aligned} \tag{3.3.14}$$

Здесь была использована формула (3.3.7) и введены обозначения производных $\widehat{E}_{nz}'(y) = \partial\widehat{E}_{nz}(y)/\partial y$ и $\widehat{H}_{mx}'(y) = \partial\widehat{H}_{mx}(y)/\partial y$.

Из (3.3.13) и (3.3.14) видно, что при малых произвольных возмущениях границы их закон продольного изменения непосредственно переходит на функциональную зависимость коэффициентов связи в виде множителя $s(z)$.

3.3.3. Прямоугольные поверхностные возмущения произвольной глубины. Периодическое возмущение верхней границы трехслойной диэлектрической структуры изображено на рис. 3.2 *а* в форме прямоугольных канавок произвольной глубины Δ с периодом Λ. В этом случае поверхностное возмущение описывается функцией

$$s(z) = -\frac{\Delta}{a}\,\Pi(z), \tag{3.3.15}$$

а уравнение (3.3.2) для верхней границы раздела имеет вид

$$y_0(z) = a - \Delta\,\Pi(z), \tag{3.3.16}$$

где $\Pi(z)$ — импульсная функция единичной высоты, показанная на рис. 3.2 *б*.

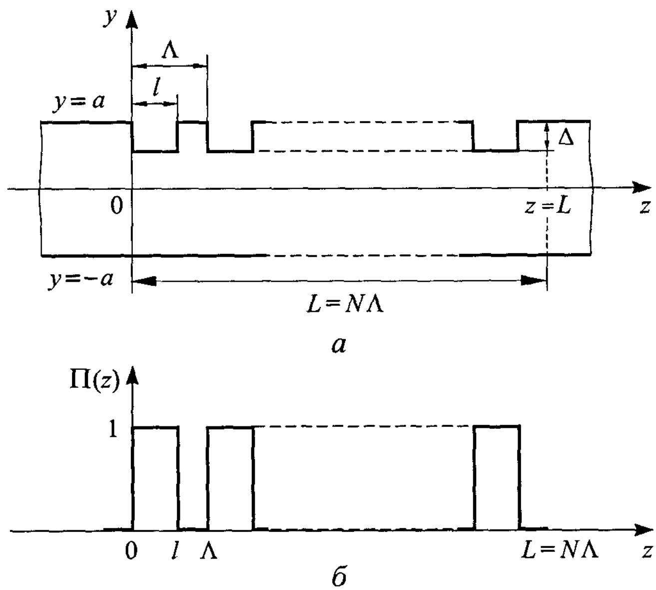


Рис. 3.2. Гофрированный периодический волновод с прямоугольным возмущением границы произвольной глубины Δ (*а*) и единичная импульсная функция $\Pi(z)$ (*б*)

В соответствии с выражением (3.3.15) и рис. 3.2 *а*, имеем $s(z) < 0$, тогда формулы (3.3.7) и (3.3.12) дают

$$\Xi\big(y_0(z)\big) = \frac{\varepsilon_{r0} - \varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r0}}\,\Pi(z) \quad \text{и} \quad U\big(s(z)\big) = 0. \tag{3.3.17}$$

Подстановка (3.3.16) и (3.3.17) в общие формулы (3.3.10) и (3.3.11) для коэффициентов связи приводит к следующим выражениям:

- *коэффициенты объемной связи*

$$\begin{aligned} c_{mn}^{bulk}(z) &= \frac{i\omega w}{N_m}\,(\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \int\limits_{a-\Delta\Pi(z)}^{a} \left(\widehat{\mathbf{E}}_{mt}^{*}\cdot\widehat{\mathbf{E}}_{nt} + \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r0}}\,\widehat{E}_{mz}^{*}\widehat{E}_{nz}\right) dy = \\ &= \frac{i\omega w}{N_m}\,(\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \int\limits_{a-\Delta}^{a} \left(\widehat{\mathbf{E}}_{mt}^{*}\cdot\widehat{\mathbf{E}}_{nt} + \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r0}}\,\widehat{E}_{mz}^{*}\widehat{E}_{nz}\right) dy\;\Pi(z); \end{aligned} \tag{3.3.18}$$

- *коэффициенты поверхностной связи*

$$c_{mn}^{surf}(z) = \frac{w}{N_m} \frac{\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{r0}}{\varepsilon_{r0}} \Big[\widehat{H}_{mx}^*(a-\Delta)\widehat{E}_{nz}(a-\Delta) - \\ - \widehat{H}_{mx}^*(a)\widehat{E}_{nz}(a) \Big] \Pi(z). \qquad (3.3.19)$$

Для частного случая прямоугольных канавок малой глубины при $\Delta \ll a$, из (3.3.18) и (3.3.19) следуют приближенные выражения:

- *коэффициенты объемной связи*

$$c_{mn}^{bulk}(z) \sim \frac{i\omega w\Delta}{N_m} (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \Big[\widehat{\mathbf{E}}_{mt}^*(a) \cdot \widehat{\mathbf{E}}_{nt}(a) + \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r0}} \widehat{E}_{mz}^*(a)\widehat{E}_{nz}(a) \Big] \Pi(z), \qquad (3.3.20)$$

- *коэффициенты поверхностной связи*

$$c_{mn}^{surf}(z) \simeq -\frac{w\Delta}{N_m} \frac{\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{r0}}{\varepsilon_{r0}} \Big[\widehat{H}_{mx}^*(a)\widehat{E}_{nz}'(a) + \widehat{H}_{mx}'^*(a)\widehat{E}_{nz}(a) \Big] \Pi(z). \qquad (3.3.21)$$

Они полностью совпадают с аналогичными выражениями, полученными из (3.3.13) и (3.3.14) с использованием в них соотношений $s(z) = -(\Delta/a)\Pi(z)$ и $U\big(s(z)\big) = 0$ для поверхностных возмущений прямоугольной формы.

Формулы (3.3.18)–(3.3.21) показывают, что импульсная функция $\Pi(z)$, изображенная на рис. 3.2 *б*, входит множителем в эти выражения и непосредственно задает такой же закон продольного изменения коэффициентов связи. Аналогично формуле (Г.8.2), эти коэффициенты можно представить в виде

$$c_{mn}(z) = \widehat{c}_{mn}\, g(z), \qquad (3.3.22)$$

где периодическая функция $g(z)$ (в общем случае произвольная) для частного случая импульсной функции $\Pi(z)$ записывается как ($k = 0, 1, 2, \ldots$)

$$g(z) = \Pi(z) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad k\Lambda < z < (k\Lambda + l), \\ 0 & \text{при} \quad (k\Lambda + l) < z < (k+1)\Lambda. \end{cases} \qquad (3.3.23)$$

Не зависящие от z коэффициенты связи (помеченные колпачком) получаются из (3.3.18)–(3.3.21) в виде суммы объемных и поверхностных вкладов:

$$\widehat{c}_{mn} = \widehat{c}_{mn}^{\,bulk} + \widehat{c}_{mn}^{\,surf}, \qquad (3.3.24)$$

где

$$\widehat{c}_{mn}^{\,bulk} = \frac{i\omega w}{N_m} (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \int\limits_{a-\Delta}^{a} \Big[\widehat{\mathbf{E}}_{mt}^*(y) \cdot \widehat{\mathbf{E}}_{nt}(y) + \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r0}} \widehat{E}_{mz}^*(y)\widehat{E}_{nz}(y) \Big] dy \simeq \\ \simeq \frac{i\omega w\Delta}{N_m} (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \Big[\widehat{\mathbf{E}}_{mt}^*(a) \cdot \widehat{\mathbf{E}}_{nt}(a) + \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r0}} \widehat{E}_{mz}^*(a)\widehat{E}_{nz}(a) \Big], \qquad (3.3.25)$$

$$\widehat{c}_{mn}^{surf} = \frac{w}{N_m} \frac{\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{r0}}{\varepsilon_{r0}} \left[\widehat{H}_{mx}^*(a-\Delta)\widehat{E}_{nz}(a-\Delta) - \widehat{H}_{mx}^*(a)\widehat{E}_{nz}(a) \right] \simeq$$

$$\simeq -\frac{w\Delta}{N_m} \frac{\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{r0}}{\varepsilon_{r0}} \left[\widehat{H}_{mx}^*(a)\widehat{E}_{nz}'(a) + \widehat{H}_{mx}'^*(a)\widehat{E}_{nz}(a) \right]. \tag{3.3.26}$$

Периодическая функция (3.3.23) раскладывается в комплексный ряд Фурье (Г.8.3) вида

$$g(z) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} G_s e^{-isKz} \quad \text{при} \quad K = 2\pi/\Lambda, \tag{3.3.27}$$

с коэффициентами G_s, вычисленными по формуле (Г.8.4) и равными

$$G_0 = Q \quad \text{и} \quad G_s = Q\,\mathrm{sinc}(sQ)\,e^{is\pi Q}, \quad s = \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{3.3.28}$$

где $Q = l/\Lambda$ и $\mathrm{sinc}\,x \equiv (\sin\pi x)/\pi x$. Для частного случая $Q = 1/2$, соответствующего поверхностному возмущению в форме прямоугольного меандра $\Pi_{1/2}(z)$, из (3.3.28) получаем

$$G_0 = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad G_s = \begin{cases} i/s\pi & \text{при} \quad s = \pm 1, \pm 3, \ldots \\ 0 & \text{при} \quad s = \pm 2, \pm 4, \ldots \end{cases} \tag{3.3.29}$$

Фурье-разложение функции (3.3.23) при $l = \Lambda/2$ или $Q = 1/2$, соответствующей меандру $\Pi_{1/2}(z)$, принимает следующий вид:

$$g(z) = \Pi_{1/2}(z) = \frac{1}{2} + \sideset{}{'}\sum_{\substack{s=-\infty \\ s\neq 0, \pm 2, \pm 4, \ldots}}^{\infty} \frac{i}{s\pi}\, e^{-isKz} \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{2} + \sideset{}{'}\sum_{\substack{s=-\infty \\ s\neq 0}}^{\infty} \frac{i(1-\cos s\pi)}{2s\pi}\, e^{-isKz}. \tag{3.3.30}$$

Полученные выражения для коэффициентов связи позволяют изучать закономерности взаимодействия выделенной направляемой моды с другой такой же модой дискретного спектра или со всем непрерывным спектром излучательных мод в гофрированном открытом волноводе. Ниже такой анализ будет сделан для TE- и TM-мод планарного волновода с гофрированной поверхностью в форме меандра путем применения выражений (3.3.29) и (3.3.30) при вычислении коэффициентов связи.

3.4. Взаимная связь направляемых мод в гофрированном волноводе

3.4.1. *Условия фазового согласования и диаграммы волновых векторов.* Запишем систему уравнений для дискретных периодически-связанных мод. С этой целью необходимо подставить (3.3.22) и (3.3.27) в уравнения (3.3.8), которые принимают следующий вид ($m = 1, 2, \ldots$):

$$\frac{dA_m(z)}{dz} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_n c_{mn}^{(s)} e^{i\Delta\beta_{mn}^{(s)} z} A_n(z), \tag{3.4.1}$$

где введены обозначения

$$c_{mn}^{(s)} = \widehat{c}_{mn} G_s, \tag{3.4.2}$$

$$\Delta\beta_{mn}^{(s)} = \beta_m - \beta_n - sK. \tag{3.4.3}$$

Как следует из приложения Г (см. п. Г.8), коэффициент G_0 (при $s = 0$) обеспечивает *однородную* (непериодическую) *связь* между модами, тогда как другие фурье-коэффициенты G_s с $s = \pm 1, \pm 2, \ldots$ (для которых $G_{-s} = G_s^*$ при вещественной функции $g(z)$) ответственны за *периодическую связь*, при этом величина $|s|$ известна как *порядок взаимодействия*. Поскольку $|G_s|$ всегда уменьшается с ростом $|s|$ (см., например, уравнения (3.3.28) и (3.3.29)), то обычно ограничиваются анализом взаимодействия мод лишь в первом или втором порядке [60].

Коэффициенты связи $c_{mn}^{(s)}$ в форме (3.4.2) учитывают s-й порядок взаимодействия между m-й и n-й модами, который обусловлен s-й фурье-компонентой функции $g(z)$. Эти коэффициенты обладают следующим свойством перестановочной симметрии:

$$c_{mn}^{(s)} = \mp c_{nm}^{(-s)*}. \tag{3.4.4}$$

Оно возникает как следствие, во-первых, соотношения $G_s = G_{-s}^*$, типичного для коэффициентов Фурье вещественных функций, и во-вторых, соотношения $\widehat{c}_{mn} = \mp \widehat{c}_{nm}^*$, записанного на основании (Г.9.9) и (Г.9.10). Знаки $\mp$ соответствуют *пассивной* и *активной* связи мод (см. п. Г.9.1).

Величина $\Delta\beta_{mn}^{(s)}$, введенная равенством (3.4.3), учитывает *фазовое рассогласование* между m-й и n-й модами в s-м порядке взаимодействия. Она имеет следующее перестановочное свойство:

$$\Delta\beta_{mn}^{(s)} = -\Delta\beta_{nm}^{(-s)}. \tag{3.4.5}$$

Условие точного фазового согласования $\Delta\beta_{mn}^{(s)} = 0$ дает соотношение

$$\beta_m - \beta_n = sK \quad \text{при} \quad sK = \pm\frac{2\pi|s|}{\Lambda}, \tag{3.4.6}$$

которое совпадает с (Г.8.8), приведенным в приложении Г.

Соберем слагаемые в правой части уравнения (3.4.1) по группам, ответственным за взаимодействия разных порядков:

$$\begin{aligned} \frac{dA_m}{dz} &= \sum_n c_{mn}^{(0)} e^{i(\beta_m - \beta_n) z} A_n + \\ &+ \sum_n \left[c_{mn}^{(+1)} e^{i\Delta\beta_{mn}^{(+1)} z} + c_{mn}^{(-1)} e^{i\Delta\beta_{mn}^{(-1)} z} \right] A_n + \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \\ &+ \sum_n \left[c_{mn}^{(+s)} e^{i\Delta\beta_{mn}^{(+s)} z} + c_{mn}^{(-s)} e^{i\Delta\beta_{mn}^{(-s)} z} \right] A_n + \cdots \end{aligned} \tag{3.4.7}$$

Первая сумма в (3.4.7) учитывает однородную (непериодическую) связь, вызванную коэффициентом связи $c_{mn}^{(0)} = \widehat{c}_{mn}G_0$ (с преобладанием коэффициента $c_{mm}^{(0)} = \widehat{c}_{mm}G_0$, отражающего самовоздействие m-й моды). Вторая и последующие суммы принимают во внимание периодическую связь первого ($|s| = 1$) и более высоких порядков ($|s| \geqslant 2$).

Как показано в п. Г.7, условие (3.4.6) фазового согласования двух мод (точнее, минимальность параметра фазового рассогласования (Г.7.12)) позволяет из бесконечной системы связанных уравнений (3.4.7) выбрать две синфазно-связанные моды с номерами m и n. Для них уравнения связи в s-м порядке вытекают из (3.4.7) в виде

$$\frac{dA_m(z)}{dz} = c_{mn}^{(s)} e^{i\Delta\beta_{mn}^{(s)} z} A_n(z), \tag{3.4.8}$$

$$\frac{dA_n(z)}{dz} = c_{nm}^{(-s)} e^{i\Delta\beta_{nm}^{(-s)} z} A_m(z). \tag{3.4.9}$$

Следует обратить внимание на то, что коэффициенты связи c_{mn} и фазовые рассогласования $\Delta\beta_{mn}$ в этих уравнениях соответствуют индексу s, взятому с разными знаками, т. е. $c_{mn}^{(s)} \leftrightarrow c_{nm}^{(-s)}$ и $\Delta\beta_{mn}^{(s)} \leftrightarrow \Delta\beta_{nm}^{(-s)}$. Только в этом случае эти величины обладают свойством перестановочной симметрии, выраженной равенствами (3.4.4) и (3.4.5), а уравнения (3.4.8)–(3.4.9) совпадают по форме с общими уравнениями (Г.9.3), записанными для пассивной и активной связи мод в недиссипативных системах. Если бы индекс s был взят одного знака, то получающееся ненулевое равенство $\Delta\beta_{mn}^{(s)} + \Delta\beta_{nm}^{(s)} = -2sK \neq 0$ не позволило бы реализовать общее условие фазового согласования (3.4.6), поскольку для синфазно взаимодействующих мод показатель экспоненты должен одновременно обращаться в нуль в обоих уравнениях (3.4.8) и (3.4.9).

Связанные уравнения (3.4.8) и (3.4.9) описывают взаимодействие как *попутных мод* (с одинаковым направлением групповых скоростей), так и *встречных мод* (с противоположным направлением групповых скоростей) (см. п. Г.9.2). Рассмотрим качественно эти два типа модальной связи.

С этой целью приведен рис. 3.3 *а*, где показаны дисперсионные кривые для четырех мод, две из которых (с номерами $+m$ и $+n$) являются прямыми, а две другие (с номерами $-m$ и $-n$) — обратными. Рис. 3.3 *б*–*г* изображают диаграммы волновых векторов, характеризующие условия фазового согласования для режимов связи мод, рассмотренных ниже.

Будем анализировать взаимодействие прямой $+m$-й моды, обозначенной цифрой 1, на фиксированной частоте ω (которой соответствует горизонтальная пунктирная линия на рис. 3.3 *а*) с тремя другими модами под номерами $+n$, $-n$ и $-m$, обозначенными цифрами 2, 3 и 4.

Попутная связь прямых мод $+m$ и $+n$ (для которых $\beta_{+m} \equiv \beta_m > 0$ и $\beta_{+n} \equiv \beta_n > 0$) обеспечивается условием фазового согласования (3.4.6), записанным в виде

$$\beta_{+n} = \beta_{+m} - sK \equiv \beta_m - \frac{2\pi s}{\Lambda} > 0. \tag{3.4.10}$$

При данной величине $\beta_m > 0$ порядок взаимодействия ($s = \pm 1, \pm 2, \ldots$) и величина периода возмущения Λ, входящие в (3.4.10), должны быть

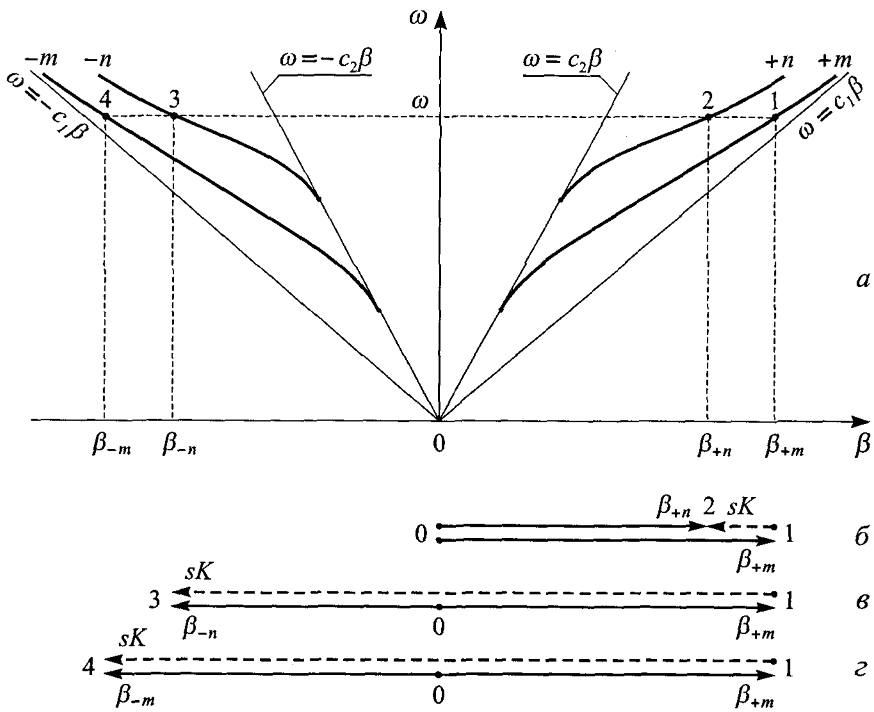


Рис. 3.3. Дисперсионные кривые открытого диэлектрического волновода для прямых мод с номерами $+m$ и $+n$ (обозначенных точками 1 и 2) и для обратных мод с номерами $-n$ и $-m$ (обозначенных точками 3 и 4) (*а*), а также диаграммы волновых векторов, выражающие условие фазового согласования при взаимодействии мод: *б* — в режиме попутного переизлучения (пассивная связь попутных мод 1 и 2), *в* — в режиме встречного переизлучения (активная связь встречных мод 1 и 3), *г* — в режиме брэгговского отражения (активная связь встречных мод 1 и 4). Центральный угловой сектор между линиями $\omega = c_2\beta$ и $\omega = -c_2\beta$ соответствует области существования непрерывного спектра излучательных мод

выбраны такими, чтобы фазовая постоянная $\beta_{+n} \equiv \beta_n$ была положительной для обеспечения попутной связи между данными модами. Условие фазового согласования (3.4.10) графически изображено на рис. 3.3 *б* в виде векторной диаграммы при $s > 0$ и $\beta_n < \beta_m$. В принципе возможна противоположная ситуация при $\beta_n > \beta_m$, если взять $s < 0$. Точка 2, соответствующая $+n$-ой моде должна находиться внутри углового сектора на рис. 3.3 *а*, ограниченного линиями $\omega = c_1\beta$ и $\omega = c_2\beta$, где располагаются моды дискретного спектра (см. рис. 1.10). Как правило, этот сектор довольно узкий, поэтому период Λ должен быть относительно большим (даже при $|s| = 1$), чтобы удовлетворять условию (3.4.10), а именно

$$|s|K < (k_1 - k_2) \quad \text{или} \quad \Lambda > \frac{2\pi|s|}{k_1 - k_2} = \frac{|s|\lambda}{n_1 - n_2}. \tag{3.4.11}$$

Здесь $k_i = \omega/c_i = k_{\text{в}} n_i$ и $n_i = \sqrt{\varepsilon_{ri}}$ — волновое число и показатель преломления i-й среды ($i = 1, 2$) в составе рассматриваемой волноведущей структуры, а $\lambda = 2\pi/k_{\text{в}}$ — длина волны света в вакууме.

В соответствии с табл. Г.1 (см. п. Г.14), попутная непараметрическая связь двух мод с положительной запасенной энергией (что типично для всех электромагнитных волн) может быть только *пассивной*. Тогда перестановочное соотношение (3.4.4) справедливо при верхнем знаке:

$$c^{(s)}_{+m,+n} = -c^{(-s)*}_{+n,+m}. \tag{3.4.12}$$

Как следует из п. Г.10, в этом случае уравнения (3.4.8) и (3.4.9) описывают *режим переизлучения попутных мод* с периодическим характером обмена мощностью между двумя модами, бегущими в одном направлении, что показано на рис. Г.6.

Встречная связь прямой ($+m$) и обратной ($-n$) мод (для которых $\beta_{+m} \equiv \equiv \beta_m > 0$ и $\beta_{-n} \equiv -\beta_n < 0$) обеспечивается условием фазового согласования (3.4.6), записанным в виде

$$\beta_{-n} = \beta_{+m} - sK \equiv \beta_m - \frac{2\pi s}{\Lambda} < 0. \tag{3.4.13}$$

Здесь отрицательное неравенство может быть реализовано только положительными значениями $s = +1, +2, \ldots$ при условии, что период Λ достаточно мал, для того чтобы дать отрицательные значения β_{-n}. В этом случае точка 3 на рис. 3.3 *а* располагается в пределах сектора существования обратных направляемых мод (между линиями $\omega = -c_1\beta$ и $\omega = -c_2\beta$). Для того, чтобы обе моды были распространяющимися (т. е. чтобы точки 1 и 3 лежали внутри соответствующих секторов), величина K или период Λ должны удовлетворять следующим неравенствам:

$$2k_2 < sK < 2k_1 \quad \text{или} \quad \frac{s\lambda}{2n_1} < \Lambda < \frac{s\lambda}{2n_2}. \tag{3.4.14}$$

Условие фазового согласования (3.4.13) для встречных мод графически изображено на рис. 3.3 *в* в виде векторной диаграммы. Каждая из мод переносит положительную энергию в направлении своей групповой скорости. В соответствии с табл. Г.1 (см. п. Г.14), такая встречная непараметрическая связь может быть только *активной*. Тогда перестановочное соотношение (3.4.4) справедливо при нижнем знаке:

$$c^{(s)}_{+m,-n} = c^{(-s)*}_{-n,+m}. \tag{3.4.15}$$

Как следует из п. Г.11, в этом случае уравнения (3.4.8) и (3.4.9) описывают *режим переизлучения встречных мод* с экспоненциальным характером обмена мощностью между двумя модами, распространяющимися (по групповым скоростям) в противоположных направлениях, как показано на рис. Г.7. Мощность, подаваемая в прямую $+m$-ю моду на входе при $z = 0$, переизлучается в обратную $-n$-ю моду, движущуюся навстречу и выходящую из области связи в том же сечении $z = 0$, в котором вводилась мощность в первую моду. Эта ситуация воспринимается как отражение входной мощности с преобразованием прямой $+m$-й моды в обратную $-n$-ю моду. Отражение мощности без преобразования одного типа моды в другой называется *брэгговским отражением*.

Брэгговское отражение является частным случаем связи встречных мод, когда прямая ($+m$) и обратная ($-m$) моды являются модами одного и того же типа (для которых $\beta_{+m} \equiv \beta_m > 0$ и $\beta_{-m} \equiv -\beta_m < 0$). В этом случае условие фазового согласования (3.4.13) (с заменой $-n \to -m$) превращается в следующее равенство:

$$\beta_m = \frac{s}{2} K \equiv \frac{s\pi}{\Lambda}. \tag{3.4.16}$$

Для того, чтобы осуществить брэгговское отражение m-й моды с $\beta_m = 2\pi/\lambda_m$, необходимо создать гофрированную поверхность с периодом $\Lambda = s\lambda_m/2$. Этот период является наименьшим по сравнению с другими, соответствующими связи попутных и встречных мод разного типа. Брэгговское отражение характеризуется точками 1 и 4 на рис. 3.3 *а* и диаграммой волновых векторов на рис. 3.3 *г*. Волноводы, работающие в режиме брэгговского отражения, применяются как оптические режекторные фильтры и в лазерах с брэгговскими зеркалами и с распределенной обратной связью [8–18].

Численный анализ попутного и встречного взаимодействия оптических мод на основе общих соотношений теории связанных мод, приведенных в пп. Г.10 и Г.11 приложения Г, требует знания соответствующих коэффициентов связи. Ниже будем вычислять их для планарного трехслойного волновода с гофрированной поверхностью в форме прямоугольного меандра. Разложение возмущающей функции $g(z) = \Pi_{1/2}(z)$ в ряд Фурье дается формулой (3.3.30) с коэффициентами G_s в виде (3.3.29).

Коэффициенты связи $c_{mn}^{(s)}$, фигурирующие в формулах (3.4.8)–(3.4.9), имеют следующий вид:

$$c_{mn}^{(s)} \equiv \widehat{c}_{mn} G_s = \left(\widehat{c}_{mn}^{\,bulk} + \widehat{c}_{mn}^{\,surf}\right) G_s = \frac{i}{s\pi}\left(\widehat{c}_{mn}^{\,bulk} + \widehat{c}_{mn}^{\,surf}\right), \tag{3.4.17}$$

где для меандра $G_s = i/s\pi$ при $s \neq 0, \pm 2, \pm 4, \ldots$, а коэффициенты объемной ($\widehat{c}_{mn}^{\,bulk}$) и поверхностной ($\widehat{c}_{mn}^{\,surf}$) связи даются формулами (3.3.25) и (3.3.26).

3.4.2. Коэффициенты связи для мод ТЕ-типа. ТЕ-моды планарного волновода имеют следующие компоненты полей (см. п. 1.7.1):

$$E_x \neq 0, \quad H_y \neq 0, \quad H_z \neq 0 \quad \text{и} \quad E_y = E_z = H_x = 0. \tag{3.4.18}$$

Тогда из (3.3.26) следует, что $\widehat{c}_{mn}^{\,surf} \equiv 0$, и выражение (3.4.17) принимает вид

$$c_{mn}^{(s)} \equiv \widehat{c}_{mn}^{\,bulk} G_s = \frac{i}{s\pi}\, \widehat{c}_{mn}^{\,bulk}. \tag{3.4.19}$$

Подстановка (3.3.25) в равенство (3.4.19) дает следующее выражение для коэффициента объемной связи ($s = \pm 1, \pm 3, \ldots$):

$$c_{mn}^{(s)} = -\frac{\omega w}{s\pi N_m}\,(\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \int\limits_{a-\Delta}^{a} \widehat{E}_{mx}^{*}(y)\widehat{E}_{nx}(y)\, dy, \tag{3.4.20}$$

которое справедливо для гофрированного волновода с возмущением поверхности в форме меандра с произвольной глубиной канавок Δ.

Норма TE_m-моды дается формулой (1.8.23) в виде

$$N_m = w\,\frac{\beta_m d_m}{\omega\mu_0}\,E_m^2, \tag{3.4.21}$$

где E_m — максимальное значение поперечного электрического поля в волноведущем слое, представленного в форме (1.8.21):

$$\widehat{E}_{mx}(y) = E_m \cos(\varkappa_m y - \phi_m) \qquad \text{при} \quad -a < y < a. \tag{3.4.22}$$

Входящая в норму (3.4.21) эффективная толщина d_m планарного волновода для m-й моды TE-типа определяется общим выражением (1.8.20).

Для определенности будем рассматривать *слабонаправляющий волновод с сильной асимметрией* (когда $\varepsilon_{r0} \ll \varepsilon_{r2} = \varepsilon_{r1} - \Delta\varepsilon_r$ и $\Delta\varepsilon_r \ll \varepsilon_{r1}$), выбранный в качестве базового волновода, который позволяет строго получить аналитические выражения для коэффициентов связи мод как TE-, так и TM-типа (см. пп. 1.7.1 и 1.7.2).

Сильно асимметричные волноводы имеют для мод TE-типа поперечное распределение электрического поля $\widehat{E}_{mx}(y)$ в форме, описываемой формулой (1.7.26), которая получается из (3.4.22) как частный случай при фазовом угле $\phi_m = \varkappa_m a + \pi/2$, тогда

$$\widehat{E}_{mx}(y) = E_m \sin \varkappa_m (y - a) \qquad \text{при} \quad -a < y < a. \tag{3.4.23}$$

В этом случае общее выражение (1.8.20) для эффективной толщины планарного волновода принимает частную форму (1.8.46):

$$d_m = 2a + \frac{1}{\zeta_{2m}}\,. \tag{3.4.24}$$

Она отражает тот факт, что в сильно асимметричном волноводе поля в верхней среде с малой диэлектрической проницаемостью пренебрежимо малы из-за того, что $\zeta_{0n} \gg \zeta_{2n}$ (см. уравнение (1.8.46)).

В формулах (3.4.21)–(3.4.24) использованы ранее введенные обозначения (1.8.3)–(1.8.6), а именно

$$\beta_m \equiv k_{z,m}, \tag{3.4.25}$$

$$\varkappa_m \equiv k_{y1,m} = \sqrt{k_1^2 - \beta_m^2}\,, \tag{3.4.26}$$

$$\zeta_{2m} \equiv i k_{y2,m} = \sqrt{\beta_m^2 - k_2^2}\,. \tag{3.4.27}$$

Формулы, аналогичные (3.4.21) и (3.4.23)–(3.4.27), также записываются для n-й моды TE-типа.

Подставляя все эти формулы в (3.4.20) и выражая максимальные поля E_m и E_n через нормы N_m и N_n в виде (3.4.21), получаем

$$E_m E_n = \frac{\omega\mu_0}{w}\sqrt{\frac{N_m}{\beta_m d_m}\,\frac{N_n}{\beta_n d_n}}\,. \tag{3.4.28}$$

После ряда преобразований приходим к окончательному выражению:

$$c_{mn}^{(s)} = -\frac{\omega^2\mu_0(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\,\Delta}{2s\pi N_m}\sqrt{\frac{N_m}{\beta_m d_m}\,\frac{N_n}{\beta_n d_n}}\times$$

$$\times\left[\frac{\sin(\varkappa_m - \varkappa_n)\Delta}{(\varkappa_m - \varkappa_n)\Delta} - \frac{\sin(\varkappa_m + \varkappa_n)\Delta}{(\varkappa_m + \varkappa_n)\Delta}\right] \simeq$$

$$\simeq -\frac{\omega^2\mu_0(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\,\Delta}{3s\pi N_m}\sqrt{\frac{N_m}{\beta_m d_m}\,\frac{N_n}{\beta_n d_n}}\;\varkappa_m\Delta\;\varkappa_n\Delta. \tag{3.4.29}$$

Приближенное равенство в (3.4.29) соответствует такой малой глубине канавок меандра, что $\varkappa_m\Delta \ll 1$ и $\varkappa_n\Delta \ll 1$, тогда $(\sin x)/x \approx 1 - x^2/6$.

Из выражения (3.4.29) вытекают следующие перестановочные соотношения для коэффициентов связи:

$$N_m c_{mn}^{(s)} = N_n c_{nm}^{(s)*} = -N_n c_{nm}^{(-s)*}. \tag{3.4.30}$$

Пусть m-я мода будет прямой модой ($m \to +m$), а n-я мода или прямой ($n \to +n$), или обратной ($n \to -n$), тогда $\beta_{+m} = \beta_m > 0$ и $\beta_{+n} = \beta_n > 0$ или $\beta_{-n} = -\beta_n < 0$. Нормировка мод на единичную мощность в форме (1.8.49) дает $N_{+m} = N_{+n} = 4$ Вт и $N_{-n} = -4$ Вт. Заменяя в коэффициенте связи $c_{mn}^{(s)}$ индексы $m \to +m$ и $n \to \pm n$, получаем из (3.4.29) следующее выражение:

$$c_{+m,\pm n}^{(s)} = -\frac{k_1}{2s\pi}\,\frac{\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{r0}}{\varepsilon_{r1}}\,\frac{k_1\Delta}{\sqrt{\beta_m d_m\,\beta_n d_n}}\times$$

$$\times\left[\frac{\sin(\varkappa_m - \varkappa_n)\Delta}{(\varkappa_m - \varkappa_n)\Delta} - \frac{\sin(\varkappa_m + \varkappa_n)\Delta}{(\varkappa_m + \varkappa_n)\Delta}\right] \simeq$$

$$\simeq -\frac{k_1^2 a}{3s\pi}\,\frac{\varkappa_m a\,\varkappa_n a}{\sqrt{\beta_m d_m\,\beta_n d_n}}\left(\frac{\Delta}{a}\right)^3. \tag{3.4.31}$$

Здесь последнее приближенное выражение получено при $\varkappa_m\Delta \ll 1$ и $\varkappa_n\Delta \ll 1$ (что справедливо для малой глубины канавок меандра), а также с использованием неравенства $\varepsilon_{r0} \ll \varepsilon_{r1}$ (что справедливо для сильно асимметричных структур).

Если бы m-я мода была обратной ($m \to -m$) с $\beta_{-m} = -\beta_m < 0$ и $N_{-m} = -4$ Вт, тогда коэффициенты связи были бы равными

$$c_{-m,\pm n}^{(s)} = -\,c_{+m,\pm n}^{(s)}, \tag{3.4.32}$$

где $c_{+m,\pm n}^{(s)}$ дается формулой (3.4.31).

Для коэффициентов связи (3.4.31) свойство перестановочной симметрии, выраженное формулой (3.4.30), принимает следующий вид:

$$c_{+m,\pm n}^{(s)} = \mp\,c_{\pm n,+m}^{(-s)\,*}, \tag{3.4.33}$$

который совпадает с ранее полученными соотношениями (3.4.12) и (3.4.15). Следовательно, конкретный случай периодического волновода с границей в форме меандра подтверждает сделанное ранее заключение о пассивной и активной связи между попутными и встречными оптическими модами в режиме переизлучения мощности (см. пп. Г.10 и Г.11).

Для частного случая брэгговского отражения замена индексов $m \to +m$ и $n \to -m$ в формуле (3.4.29) приводит к выражению

$$c^{(s)}_{+m,-m} = c^{(-s)}_{-m,+m} = -\frac{k_1(1-\varepsilon_{r0}/\varepsilon_{r1})}{2s\pi}\,\frac{k_1\Delta}{\beta_m d_m}\left(1-\frac{\sin 2\varkappa_m\Delta}{2\varkappa_m\Delta}\right) \simeq$$

$$\simeq -\frac{k_1^2 a}{3s\pi}\,\frac{(\varkappa_m a)^2}{\beta_m d_m}\left(\frac{\Delta}{a}\right)^3. \tag{3.4.34}$$

Приближенное выражение, полученное при малой глубине канавок, переходит в аналогичное выражение, приведенное в работе [11], если применить сделанные там приближения. В частности, оба выражения показывают, что $|c^{(s)}_{+m,-m}| \propto (\Delta/a)^3$.

Уместно подчеркнуть, что приближенная формула (3.3.20), полученная для канавок малой глубины, неприменима к рассматриваемому здесь волноводу с сильной асимметрией. Действительно, распределение поля в таком волноводе, даваемое формулой (3.4.23), приводит к $\widehat{E}_{mx}(a) = 0$, что дает нулевой коэффициент связи в (3.3.20). Чтобы исправить это противоречие, надо вместо равенства $\widehat{E}_{mx}(y) \simeq \widehat{E}_{mx}(a)$, использованного в (3.3.20), взять следующее приближенное выражение для поля:

$$\widehat{E}_{mx}(y) \simeq \widehat{E}_{mx}(a) + \widehat{E}'_{mx}(a)\,(y-a), \tag{3.4.35}$$

где $\widehat{E}'_{mx}(y) \equiv \partial\widehat{E}_{mx}(y)/\partial y$. Тогда, несмотря на то, что $\widehat{E}_{mx}(a) = 0$, подстановка в исходную формулу (3.4.20) равенства (3.4.35) сразу приводит к приближенным выражениям в формулах (3.4.29), (3.4.31) и (3.4.34).

3.4.3. Коэффициенты связи для мод ТМ-типа. ТМ-моды планарного волновода имеют следующие компоненты полей (см. п. 1.7.2):

$$E_y \neq 0,\quad E_z \neq 0,\quad H_x \neq 0 \qquad \text{и} \qquad E_x = H_y = H_z = 0. \tag{3.4.36}$$

В этом случае коэффициенты связи $c^{(s)}_{mn}$ имеют общую форму (3.4.17), включающую как объемные, так и поверхностные вклады в виде (3.3.25) и (3.3.26). Их удобно представить как

$$c^{(s)}_{mn} \equiv \left(c^{(s)}_{mn}\right)_{bulk} + \left(c^{(s)}_{mn}\right)_{surf} = \left[\left(c^{(s)}_{mn}\right)^t_{bulk} + \left(c^{(s)}_{mn}\right)^l_{bulk}\right] + \left(c^{(s)}_{mn}\right)_{surf}. \tag{3.4.37}$$

Здесь объемный вклад $\left(c^{(s)}_{mn}\right)_{bulk}$ разделен на две части $\left(c^{(s)}_{mn}\right)^t_{bulk}$ и $\left(c^{(s)}_{mn}\right)^l_{bulk}$, которые создаются поперечными и продольными компонентами полей в виде (3.4.36) и равняются следующим выражениям (для волновода с произвольной меандровой границей, при этом $s = \pm 1, \pm 3, \ldots$):

$$\left(c_{mn}^{(s)}\right)_{bulk}^{t} = -\frac{\omega w}{s\pi N_m}(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\int\limits_{a-\Delta}^{a} \widehat{E}_{my}^{*}(y)\widehat{E}_{ny}(y)\,dy, \tag{3.4.38}$$

$$\left(c_{mn}^{(s)}\right)_{bulk}^{l} = -\frac{\omega w}{s\pi N_m}\,\frac{\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{r0}}{\varepsilon_{r0}}\,\varepsilon_1\int\limits_{a-\Delta}^{a} \widehat{E}_{mz}^{*}(y)\widehat{E}_{nz}(y)\,dy, \tag{3.4.39}$$

$$\left(c_{mn}^{(s)}\right)_{surf} = \frac{iw}{s\pi N_m}\,\frac{\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{r0}}{\varepsilon_{r0}}\left[\widehat{H}_{mx}^{*}(a-\Delta)\widehat{E}_{nz}(a-\Delta) - \widehat{H}_{mx}^{*}(a)\widehat{E}_{nz}(a)\right]. \tag{3.4.40}$$

Норма TM_m-моды дается формулой (1.8.39) и равняется

$$N_m = w\,\frac{\beta_m d_m}{\omega\varepsilon_1}\,H_m^2, \tag{3.4.41}$$

где H_m — максимальное значение поперечного магнитного поля в волноведущем слое, представленного в форме (1.8.38):

$$\widehat{H}_{mx}(y) = H_m\cos(\varkappa_m y - \phi_m) \qquad \text{при} \quad -a < y < a. \tag{3.4.42}$$

Входящая в норму (3.4.41) эффективная толщина d_m планарного волновода для m-й моды TM-типа определяется общим выражением (1.8.37).

Как и в случае TE-мод, будем рассматривать *слабонаправляющий волновод с сильной асимметрией* (когда $\varepsilon_{r0} \ll \varepsilon_{r2} = \varepsilon_{r1} - \Delta\varepsilon_r$ и $\Delta\varepsilon_r \ll \varepsilon_{r1}$). В таком волноводе распределение магнитного поля $\widehat{H}_{mx}(y)$ для мод TM-типа аналогично (3.4.23) и получается из (3.4.42) как частный случай при фазовом угле $\phi_m = \varkappa_m a + \pi/2$ в виде

$$\widehat{H}_{mx}(y) = H_m\sin\varkappa_m(y-a) \qquad \text{при} \quad -a < y < a. \tag{3.4.43}$$

В этом случае общее выражение (1.8.37) для эффективной толщины планарного волновода принимает частную форму (1.8.46):

$$d_m = 2a + \frac{1}{\zeta_{2m}}. \tag{3.4.44}$$

В формулах (3.4.41)–(3.4.44) использованы обозначения (3.4.25)–(3.4.27).

Компоненты электрического поля, получаемые из выражения (3.4.43) при использовании (1.7.30) и (1.7.31), равняются

$$\widehat{E}_{my}(y) = -\frac{\beta_m}{\omega\varepsilon_1}\,H_m\sin\varkappa_m(y-a), \tag{3.4.45}$$

$$\widehat{E}_{mz}(y) = -\frac{\varkappa_m}{i\omega\varepsilon_1}\,H_m\cos\varkappa_m(y-a). \tag{3.4.46}$$

Записывая для n-й моды TM-типа формулы, аналогичные (3.4.41) и (3.4.43)–(3.4.46), и выражая максимальные поля H_m и H_n через модальные нормы N_m и N_n в виде (3.4.41), получаем

$$H_m H_n = \frac{\omega\varepsilon_1}{w}\sqrt{\frac{N_m}{\beta_m d_m}\,\frac{N_n}{\beta_n d_n}}\,. \tag{3.4.47}$$

После ряда преобразований исходных формул (3.4.38)–(3.4.40) приходим к окончательным выражениям:

$$\begin{aligned}\left(\widehat{c}_{mn}^{(s)}\right)^t_{bulk} &= -\frac{\beta_m\beta_n\Delta}{2s\pi N_m}\,\frac{\varepsilon_{r1}-\varepsilon_{r0}}{\varepsilon_{r1}}\sqrt{\frac{N_m}{\beta_m d_m}\,\frac{N_n}{\beta_n d_n}}\,\times\\ &\qquad\times\left[\frac{\sin(\varkappa_m-\varkappa_n)\Delta}{(\varkappa_m-\varkappa_n)\Delta}-\frac{\sin(\varkappa_m+\varkappa_n)\Delta}{(\varkappa_m+\varkappa_n)\Delta}\right]=\\ &= -\frac{\beta_m\beta_n\Delta}{2s\pi}\,\frac{1-\varepsilon_{r0}/\varepsilon_{r1}}{\sqrt{\beta_m d_m\,\beta_n d_n}}\left[\frac{\sin(\varkappa_m-\varkappa_n)\Delta}{(\varkappa_m-\varkappa_n)\Delta}-\frac{\sin(\varkappa_m+\varkappa_n)\Delta}{(\varkappa_m+\varkappa_n)\Delta}\right]\simeq\\ &\simeq -\frac{\varkappa_m\varkappa_n\Delta}{3s\pi}\,\frac{\beta_m\Delta\,\beta_n\Delta}{\sqrt{\beta_m d_m\,\beta_n d_n}}\,,\end{aligned} \tag{3.4.48}$$

$$\begin{aligned}\left(\widehat{c}_{mn}^{(s)}\right)^l_{bulk} &= -\frac{\varkappa_m\varkappa_n\Delta}{2s\pi N_m}\,\frac{\varepsilon_{r1}-\varepsilon_{r0}}{\varepsilon_{r0}}\sqrt{\frac{N_m}{\beta_m d_m}\,\frac{N_n}{\beta_n d_n}}\,\times\\ &\qquad\times\left[\frac{\sin(\varkappa_m-\varkappa_n)\Delta}{(\varkappa_m-\varkappa_n)\Delta}+\frac{\sin(\varkappa_m+\varkappa_n)\Delta}{(\varkappa_m+\varkappa_n)\Delta}\right]=\\ &= -\frac{\varkappa_m\varkappa_n\Delta}{2s\pi}\,\frac{\varepsilon_{r1}/\varepsilon_{r0}-1}{\sqrt{\beta_m d_m\,\beta_n d_n}}\left[\frac{\sin(\varkappa_m-\varkappa_n)\Delta}{(\varkappa_m-\varkappa_n)\Delta}+\frac{\sin(\varkappa_m+\varkappa_n)\Delta}{(\varkappa_m+\varkappa_n)\Delta}\right]\simeq\\ &\simeq -\frac{\varkappa_m\varkappa_n\Delta}{s\pi}\,\frac{\varepsilon_{r1}/\varepsilon_{r0}}{\sqrt{\beta_m d_m\,\beta_n d_n}}\,,\end{aligned} \tag{3.4.49}$$

$$\begin{aligned}\left(\widehat{c}_{mn}^{(s)}\right)_{surf} &= \frac{\varkappa_m\varkappa_n\Delta}{s\pi N_m}\,\frac{\varepsilon_{r1}-\varepsilon_{r0}}{\varepsilon_{r0}}\sqrt{\frac{N_m}{\beta_m d_m}\,\frac{N_n}{\beta_n d_n}}\,\frac{\sin\varkappa_m\Delta}{\varkappa_m\Delta}\cos\varkappa_n\Delta=\\ &= \frac{\varkappa_m\varkappa_n\Delta}{s\pi}\,\frac{\varepsilon_{r1}/\varepsilon_{r0}-1}{\sqrt{\beta_m d_m\,\beta_n d_n}}\,\frac{\sin\varkappa_m\Delta}{\varkappa_m\Delta}\cos\varkappa_n\Delta\simeq\\ &\simeq \frac{\varkappa_m\varkappa_n\Delta}{s\pi}\,\frac{\varepsilon_{r1}/\varepsilon_{r0}}{\sqrt{\beta_m d_m\,\beta_n d_n}}\,.\end{aligned} \tag{3.4.50}$$

Вторые равенства в формулах (3.4.48)–(3.4.50) записаны при нормировке мод на единичную мощность в форме (1.8.49), а последние приближенные выражения получены при $\varkappa_m\Delta \ll 1$ и $\varkappa_n\Delta \ll 1$ (что справедливо для малой глубины канавок меандра), а также с использованием неравенства $\varepsilon_{r0} \ll \varepsilon_{r1}$ (справедливого для сильно асимметричных структур).

Сравнение приближенных выражений в (3.4.49) и (3.4.50) показывает, что они равны по величине, но имеют разный знак. Следовательно, поверхностный вклад (3.4.40) компенсирует продольный объемный вклад (3.4.39) при сложении трех выражений (3.4.48)–(3.4.50). Поэтому суммарный коэффициент связи (3.4.37) определяется только поперечным объемным вкладом (3.4.38), принимающим вид (3.4.48), тогда (ср. уравнение (3.4.31))

$$c_{mn}^{(s)} \approx \left(c_{mn}^{(s)}\right)_{bulk}^{t} \simeq -\frac{\varkappa_m\varkappa_n a}{3s\pi}\,\frac{\beta_m a\,\beta_n a}{\sqrt{\beta_m d_m\,\beta_n d_n}}\left(\frac{\Delta}{a}\right)^3. \tag{3.4.51}$$

Выражения (3.4.31) и (3.4.51) показывают, что в сильно асимметричных волноводах со слабой направленностью коэффициенты связи, как для ТЕ-мод, так и для ТМ-мод, примерно пропорциональны $(\Delta/a)^3$, если $\varkappa_m\Delta \ll 1$ и $\varkappa_n\Delta \ll 1$.

3.5. Связь направляемой моды с непрерывным спектром излучательных мод в гофрированном волноводе

Будем исследовать взаимодействие дискретной направляемой моды со спектром излучательных мод открытого планарного волновода, которое вызвано периодическим возмущением его границы. Такое взаимодействие используется на практике для ввода и вывода оптического излучения.

Начнем с качественного рассмотрения условий фазового согласования для взаимодействий такого рода, а затем выведем количественные соотношения, характеризующие излучение направляемой моды ТЕ-типа из гофрированного волновода с границей в форме меандра.

3.5.1. Условия фазового согласования и диаграммы волновых векторов. Рассмотрим прямую моду с номером $+m$, которая поступает на вход $z=0$ гофрированного участка волновода длиною L, показанного на рис. 3.2.

Пусть период Λ выбран таким, что связь $+m$-й моды с другими дискретными модами полностью исключена. Это обеспечивается, если не выполняются условия фазового согласования (3.4.10), (3.4.13) и (3.4.16) для мод дискретного спектра, графически показанные на рис. 3.3 *б*–*г* в форме векторных диаграмм. Для этого вектор длиною sK (в виде пунктирной линии), выходящий из точки 1 для $+m$-й моды, не должен заканчиваться в угловых секторах, соответствующих направляемым модам. Следовательно, конец этого вектора может быть расположенным в любой точке центрального сектора между линиями $\omega=-c_2\beta$ и $\omega=c_2\beta$, в пределах которого существуют излучательные моды подложки и структуры (см. п. 1.6 и рис. 1.10).

В этом случае $+m$-я мода эффективно взаимодействует с той излучательной модой, для которой выполняется условие фазового согласования:

$$\Delta\beta_m^{(s)}(k_z) = 0 \quad \text{или} \quad \beta_{+m} - k_z = sK \equiv \frac{2\pi s}{\Lambda}, \tag{3.5.1}$$

записанное по аналогии с (3.4.6), где k_z — продольное волновое число мод непрерывного спектра. Конечно, при этом будет возбуждаться не только одна эта мода, а весь непрерывный спектр излучательных мод.

Соотношение (3.5.1) определяет условие максимального излучения в направлении главного лепестка диаграммы направленности в дальней зоне. Действительно, в трехслойной планарной структуре с волновыми числами $k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ и $k_2 = \omega\sqrt{\varepsilon_2\mu_0}$ для верхней среды и подложки (рис. 1.8) значение k_z однозначно определяет углы θ_0 и θ_2, под которыми располагается главный лепесток излучения, направленный в верхнюю среду и в подложку. Согласно (1.4.12) и (А.3.12), между k_0 и k_2 существует следующее соотношение, обеспечивающее продольное волновое число k_z, единое для обеих сред:

$$k_z = k_0 \sin\theta_0 = k_2 \sin\theta_2. \tag{3.5.2}$$

Тогда из (3.5.1) и (3.5.2) следуют искомые углы θ_0 и θ_2, равные

$$\sin\theta_0 = \frac{\beta_{+m} - sK}{k_0} \quad \text{и} \quad \sin\theta_2 = \frac{\beta_{+m} - sK}{k_2}. \tag{3.5.3}$$

Соотношения (3.5.1)–(3.5.3) графически изображены на рис. 3.4 *а* и *б*. Точки 1 и 6 соответствуют прямой ($+m$) и обратной ($-m$) направляемым модам, которые могут связываться как с излучательными модами подложки (точки 2 и 5), так и с излучательными модами структуры (точки 3 и 4).

Выбор конкретной пары эффективно взаимодействующих мод определяется, в соответствии с (3.5.1), величиной $sK = 2\pi s/\Lambda$, т. е. периодом Λ и порядком взаимодействия s. Вектор, выходящий из точки 1 и заканчивающийся в любой из вышеуказанных точек (см. для точки 2 пунктирную стрелку на рис. 3.4 *б*), имеет длину sK и связывает $+m$-ю моду с излучательными модами. Значения продольного волнового числа, соответствующего этим модам, обозначены на рис. 3.4 *а* как $k_z(i)$ $(i = 2, 3, 4, 5)$ и изображены на рис. 3.4 *б* в виде горизонтальных векторов с тем же обозначением, которые выходят из начала координат $k_z = 0$. На этом же рисунке приведены круговые векторные диаграммы, построенные на основе соотношения (3.5.2) с помощью двух полуокружностей радиусом k_0 и k_2. Векторы $\mathbf{k}_0(i)$ $(i = 3, 4)$ и $\mathbf{k}_2(i)$ $(i = 2, 3, 4, 5)$, выходящие из начала координат, показывают направления максимума излучения (главного лепестка диаграммы направленности) в верхнюю среду и в подложку, характеризуемые углами $\theta_0(i)$ $(i = 3, 4)$ и $\theta_2(i)$ $(i = 2, 3, 4, 5)$ по формулам (3.5.3).

Как следует из рис. 3.4 *б*, в зависимости от величины sK направляемая $+m$-я мода, бегущая вдоль гофрированного волновода в положительном направлении оси z, может излучать как вперед (точки 2 и 3), так и назад (точки 4 и 5). При этом излучение может наблюдаться либо только в подложке (точки 2 и 5, принадлежащие модам подложки), либо одновременно

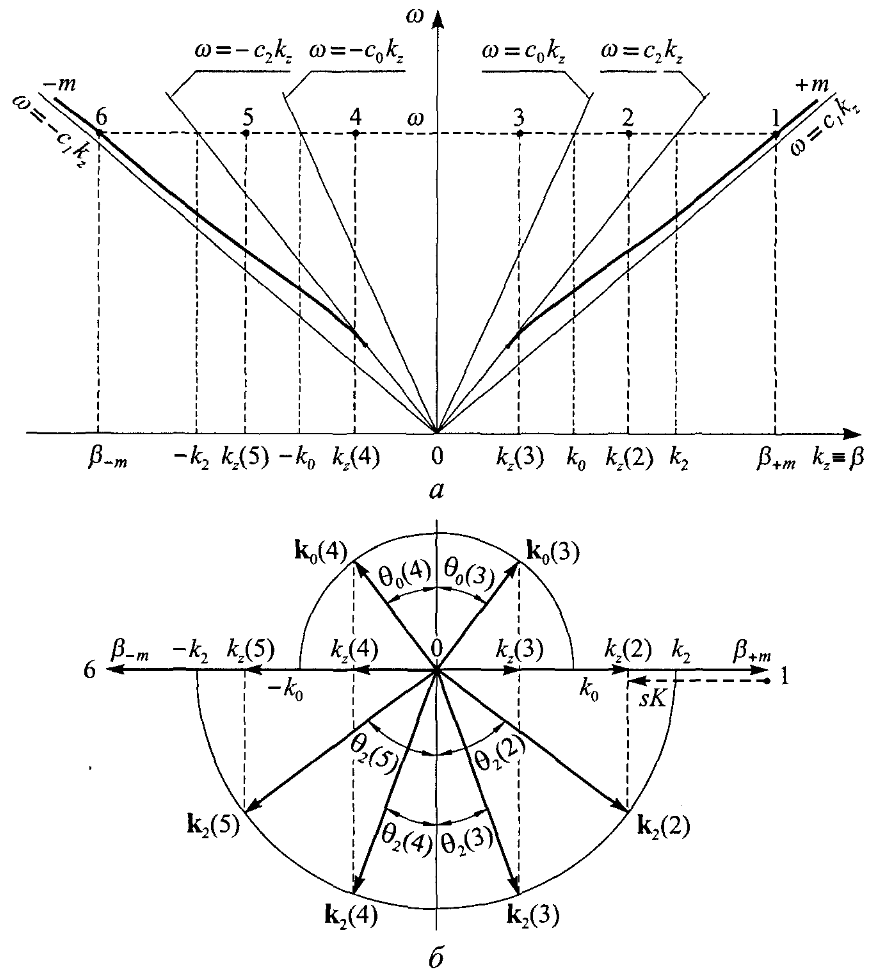


Рис. 3.4. Дисперсионные кривые открытого волновода для прямой ($+m$) и обратной ($-m$) направляемых мод (обозначенных точками 1 и 6), взаимодействующих с излучательными модами (обозначенными точками 2, 3, 4, 5) (*а*) и диаграммы волновых векторов, выражающие условие фазового согласования для этих взаимодействий (*б*)

в подложке и в верхней среде (точки 3 и 4, соответствующие модам структуры). Аналогичное поведение свойственно и обратной моде с номером $-m$.

Наиболее интенсивное излучение формируется взаимодействием первого порядка ($|s| = 1$), уменьшаясь с ростом $|s|$. Процесс излучения направленной моды часто трактуется [12, 13] как ее дифракция на периодически возмущенной границе, а максимумы излучения называют дифракционными максимумами (пучками). Наивысший дифракционный порядок, достижимый на практике, определяется соотношением между волновыми числами k_0, k_2, $\beta_{+m} < k_1$ и $K = 2\pi/\Lambda$. Часто значение $|s| = 1$ является единственным возможным. Как следует из рис. 3.4 *б*, для того чтобы наблюдать два или более дифракционных пучка ($|s| = 1$ и $|s| \geqslant 2$), необходимо иметь в пределах диаметра большой полуокружности конец не только вектора длиной K (исходящего из точки 1), но и по крайней мере еще одного вектора длиной $2K$.

3.5.2. Коэффициенты связи для мод TE- и TM-типов. Чтобы рассчитать коэффициенты связи дискретных мод со спектром излучения открытого гофрированного волновода и в конечном итоге найти диаграмму направленности поля излучения в дальней зоне, надо воспользоваться уравнениями связанных мод (3.2.16) и (3.2.20). Будучи переписанными для амплитуд возбуждения в одночастотном режиме (с опусканием верхних частотных индексов), они принимают следующий вид:

$$\frac{dA_m(z)}{dz} = \sum_n c_{mn}(z)\, e^{i(\beta_m-\beta_n)z} A_n(z) + \int_0^\infty c_{m\varkappa}(z)\, e^{i(\beta_m-\beta_\varkappa)z} A_\varkappa(z)\, d\varkappa, \tag{3.5.4}$$

$$\frac{dA_\varkappa(z)}{dz} = \sum_n c_{\varkappa n}(z)\, e^{i(\beta_\varkappa-\beta_n)z} A_n(z) + \int_0^\infty c_{\varkappa\varkappa'}(z)\, e^{i(\beta_\varkappa-\beta_{\varkappa'})z} A_{\varkappa'}(z)\, d\varkappa'. \tag{3.5.5}$$

Коэффициенты связи получаются из выражений (3.2.17) и (3.2.21) в форме

$$c_{mn}(z) = -\frac{i\omega}{N_m} \int_{S_b} \left(\widehat{\mathbf{E}}_m^* \cdot \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c(z) \cdot \widehat{\mathbf{E}}_n\right) dS - \frac{1}{N_m} \int_{L_b} \left(\widehat{\mathbf{H}}_m^* \cdot \Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c(z) \cdot \widehat{\mathbf{E}}_n\right) dL, \tag{3.5.6}$$

$$c_{m\varkappa}(z) = -\frac{i\omega}{N_m} \int_{S_b} \left(\widehat{\mathbf{E}}_m^* \cdot \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c(z) \cdot \widehat{\mathbf{E}}_\varkappa\right) dS - \frac{1}{N_m} \int_{L_b} \left(\widehat{\mathbf{H}}_m^* \cdot \Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c(z) \cdot \widehat{\mathbf{E}}_\varkappa\right) dL, \tag{3.5.7}$$

$$c_{\varkappa n}(z) = -\frac{i\omega}{N_\varkappa} \int_{S_b} \left(\widehat{\mathbf{E}}_\varkappa^* \cdot \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c(z) \cdot \widehat{\mathbf{E}}_n\right) dS - \frac{1}{N_\varkappa} \int_{L_b} \left(\widehat{\mathbf{H}}_\varkappa^* \cdot \Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c(z) \cdot \widehat{\mathbf{E}}_n\right) dL, \tag{3.5.8}$$

$$c_{\varkappa\varkappa'}(z) = -\frac{i\omega}{N_\varkappa} \int_{S_b} \left(\widehat{\mathbf{E}}_\varkappa^* \cdot \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c(z) \cdot \widehat{\mathbf{E}}_{\varkappa'}\right) dS - \frac{1}{N_\varkappa} \int_{L_b} \left(\widehat{\mathbf{H}}_\varkappa^* \cdot \Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c(z) \cdot \widehat{\mathbf{E}}_{\varkappa'}\right) dL. \tag{3.5.9}$$

Входящие сюда тензоры связи $\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c(z)$ и $\Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c(z)$ в общем случае могут быть произвольными, но для рассматриваемого гофрированного волновода они даются формулами (3.3.4) и (3.3.6).

Для частного случая гофрированной поверхности прямоугольной формы, описываемой функцией (3.3.15), коэффициент связи c_{mn} в виде (3.5.6) представляется как сумма (3.3.9) коэффициентов объемной и поверхностной связи, даваемых формулами (3.3.18) и (3.3.19). Аналогично этому, три других коэффициента связи (3.5.7)–(3.5.9) также представляются подобным образом.

Разложение возмущающей функции $g(z)$ в ряд Фурье (3.3.27) с коэффициентами G_s для прямоугольного меандра в виде (3.3.29) приводит коэффициенты связи (3.5.6)–(3.5.9) к форме, аналогичной (3.3.22). В этом случае исходные связанные уравнения (3.5.4) и (3.5.5) принимают следующий вид (ср. уравнение (3.4.1)):

$$\frac{dA_m(z)}{dz} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_n c_{mn}^{(s)} e^{i\Delta\beta_{mn}^{(s)} z} A_n(z) + \int_0^\infty c_{m\varkappa}^{(s)} e^{i\Delta\beta_{m\varkappa}^{(s)} z} A_\varkappa(z)\, d\varkappa \right\}, \tag{3.5.10}$$

$$\frac{dA_\varkappa(z)}{dz} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_n c_{\varkappa n}^{(s)} e^{i\Delta\beta_{\varkappa n}^{(s)} z} A_n(z) + \int_0^\infty c_{\varkappa\varkappa'}^{(s)} e^{i\Delta\beta_{\varkappa\varkappa'}^{(s)} z} A'_\varkappa(z)\, d\varkappa' \right\}, \tag{3.5.11}$$

где по аналогии с (3.4.2) и (3.4.3) введены обозначения:

$$\begin{aligned} c_{mn}^{(s)} &= \widehat{c}_{mn} G_s, & c_{m\varkappa}^{(s)} &= \widehat{c}_{m\varkappa} G_s, \\ c_{\varkappa n}^{(s)} &= \widehat{c}_{\varkappa n} G_s, & c_{\varkappa\varkappa'}^{(s)} &= \widehat{c}_{\varkappa\varkappa'} G_s, \end{aligned} \tag{3.5.12}$$

$$\begin{aligned} \Delta\beta_{mn}^{(s)} &= \beta_m - \beta_n - sK, & \Delta\beta_{m\varkappa}^{(s)} &= \beta_m - \beta_\varkappa - sK, \\ \Delta\beta_{\varkappa n}^{(s)} &= \beta_\varkappa - \beta_n - sK, & \Delta\beta_{\varkappa\varkappa'}^{(s)} &= \beta_\varkappa - \beta_{\varkappa'} - sK, \end{aligned} \tag{3.5.13}$$

при $G_s = i/s\pi$, $s = \pm 1, \pm 3, \ldots$ для прямоугольного меандра. Не зависящие от z коэффициенты связи, отмеченные колпачком в (3.5.12), определяются выражениями, аналогичными формулам (3.3.24)–(3.3.26) для $\widehat{c}_{mn}$.

Предположим, что среди дискретных мод открытого планарного волновода имеется одна единственная прямая мода с номером m, которая подается на вход участка с гофрированной поверхностью, где она возбуждает непрерывный спектр излучательных мод. В этом случае уравнения связанных мод (3.5.10) и (3.5.11) принимают упрощенную форму в пренебрежении взаимной связью между излучательными модами, т. е. в пренебрежении интегралом в правой части уравнения (3.5.11). Основанием для этого служат те же аргументы, которые были использованы в п. Г.7 при анализе возбуждения вторичных мод (с нулевыми входными амплитудами) первичной модой (с ненулевой входной амплитудой).

В данном случае излучательные моды являются вторичными и в первом приближении связью между ними можно пренебречь. Тогда из уравнений (3.5.10) и (3.5.11) получаем

$$\frac{dA_m(z)}{dz} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty c_m^{(s)}(\varkappa)\, e^{i\Delta\beta_m^{(s)}(\varkappa) z}\, \overline{A}(z;\varkappa)\, d\varkappa, \tag{3.5.14}$$

$$\frac{d\overline{A}(z;\varkappa)}{dz} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \overline{c}_m^{(-s)}(\varkappa)\, e^{-i\Delta\beta_m^{(s)}(\varkappa) z} A_m(z). \tag{3.5.15}$$

В формулах (3.5.14)–(3.5.15) мы обратились к обозначениям, которые были использованы в п. 1.9:

- положение переменной интегрирования $\varkappa$ по непрерывному спектру перенесено из индекса в аргумент функции, например, $c_{m\varkappa}^{(s)} \to c_m^{(s)}(\varkappa)$;
- различие в размерностях амплитуд возбуждения, норм и коэффициентов связи для дискретных мод $(A_m,\ M_m,\ c_{mn})$ и для излучательных мод в *планарных структурах* $\left(\overline{A}(\varkappa),\ \overline{N}(\varkappa),\ \overline{c}_m(\varkappa)\right)$ отражено чертой над последними величинами (см. табл. 1.1 в п. 1.9).

Таким образом, при переходе от уравнений (3.5.10)–(3.5.11) к их частному виду (3.5.14)–(3.5.15) были сделаны следующие замены:

$$A_\varkappa(z) \to \overline{A}(z;\varkappa), \tag{3.5.16}$$

$$c_{m\varkappa}^{(s)} \to c_m^{(s)}(\varkappa) \quad \text{и} \quad c_{\varkappa n}^{(-s)} \to \overline{c}_m^{(-s)}(\varkappa), \tag{3.5.17}$$

$$\Delta\beta_{m\varkappa}^{(s)} \to \Delta\beta_m^{(s)}(\varkappa) \equiv \beta_m - k_z(\varkappa) - sK, \tag{3.5.18}$$

где $k_z(\varkappa) \equiv \beta_\varkappa$ — продольное волновое число излучательных мод, рассматриваемое как функция поперечного волнового числа подложки ($\varkappa \equiv k_{y2}$), которое играет роль переменной интегрирования по непрерывному спектру, т. е. $k_z(\varkappa) \equiv k_z(k_{y2}) = (k_2^2 - \varkappa^2)^{1/2}$ (см. п. 1.9).

По аналогии с (3.4.17), коэффициенты связи $c_m^{(s)}(\varkappa)$ и $\overline{c}_m^{(-s)}(\varkappa)$, входящие в уравнения (3.5.14) и (3.5.15), представлены в виде суммы объемных и поверхностных вкладов:

$$\begin{aligned} c_m^{(s)}(\varkappa) \equiv \widehat{c}_m(\varkappa)\,G_s &= \left[\widehat{c}_m^{\,bulk}(\varkappa) + \widehat{c}_m^{\,surf}(\varkappa)\right] G_s = \\ &= \frac{i}{s\pi}\left[\widehat{c}_m^{\,bulk}(\varkappa) + \widehat{c}_m^{\,surf}(\varkappa)\right], \end{aligned} \tag{3.5.19}$$

$$\begin{aligned} \overline{c}_m^{(-s)}(\varkappa) \equiv \widehat{\overline{c}}_m(\varkappa)\,G_{-s} &= \left[\widehat{\overline{c}}_m^{\,bulk}(\varkappa) + \widehat{\overline{c}}_m^{\,surf}(\varkappa)\right] G_{-s} = \\ &= -\frac{i}{s\pi}\left[\widehat{\overline{c}}_m^{\,bulk}(\varkappa) + \widehat{\overline{c}}_m^{\,surf}(\varkappa)\right], \end{aligned} \tag{3.5.20}$$

где $G_s = i/s\pi$ при $s \neq 0,\ \pm 2,\ \pm 4, \ldots$ для прямоугольного меандра.

Коэффициенты объемной и поверхностной связи в (3.5.19) и (3.5.20) имеют следующую форму, записанную по аналогии с (3.3.25) и (3.3.26):

$$\widehat{c}_m^{\,bulk}(\varkappa) = \frac{i\omega w}{N_m}(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\int\limits_{a-\Delta}^{a}\left[\widehat{\mathbf{E}}_{mt}^*(y)\cdot\widehat{\mathbf{E}}_t(y;\varkappa) + \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r0}}\,\widehat{E}_{mz}^*(y)\widehat{E}_z(y;\varkappa)\right]dy, \tag{3.5.21}$$

$$\widehat{\overline{c}}_m^{\,bulk}(\varkappa) = \frac{i\omega w}{\overline{N}(\varkappa)}(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\int\limits_{a-\Delta}^{a}\left[\widehat{\mathbf{E}}_t^*(y;\varkappa)\cdot\widehat{\mathbf{E}}_{mt}(y) + \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r0}}\,\widehat{E}_z^*(y;\varkappa)\widehat{E}_{mz}(y)\right]dy, \tag{3.5.22}$$

$$\widehat{c}_m^{surf}(\varkappa) = \frac{w}{N_m}\,\frac{\varepsilon_{r1}-\varepsilon_{r0}}{\varepsilon_{r0}}\left[\widehat{H}^*_{mx}(a-\Delta)\widehat{E}_z(a-\Delta;\varkappa) - \widehat{H}^*_{mx}(a)\widehat{E}_z(a;\varkappa)\right], \tag{3.5.23}$$

$$\widehat{\overline{c}}_m^{surf}(\varkappa) = \frac{w}{\overline{N}(\varkappa)}\,\frac{\varepsilon_{r1}-\varepsilon_{r0}}{\varepsilon_{r0}}\left[\widehat{H}^*_{x}(a-\Delta;\varkappa)\widehat{E}_{mz}(a-\Delta) - \widehat{H}^*_{x}(a;\varkappa)\widehat{E}_{mz}(a)\right]. \tag{3.5.24}$$

В общем случае коэффициенты связи (3.5.21)–(3.5.24) применимы для мод дискретного и непрерывного спектров как ТЕ-, так и ТМ-типа в трехслойной планарной структуре. Ниже будем их использовать вместе со связанными уравнениями (3.5.14)–(3.5.15) для нахождения диаграммы направленности поля излучения, создаваемого m-й модой ТЕ-типа в гофрированном волноводе с поверхностью в форме прямоугольного меандра.

3.5.3. Диаграмма направленности поля излучения в дальней зоне. Рассмотрим прямую m-ю моду ТЕ-типа, которая подается на входной край $z = -L/2$ гофрированного в форме меандра участка планарного волновода длиною L (рис. 3.5).

Так как моды ТЕ-типа в рассматриваемом планарном волноводе не имеют продольных электрических полей ($\widehat{E}_{mz}(y) = \widehat{E}_z(y;\varkappa) \equiv 0$), то коэффициенты поверхностной связи (3.5.23) и (3.5.24) исчезают ($\widehat{c}_m^{surf}(\varkappa) = \widehat{\overline{c}}_m^{surf}(\varkappa) \equiv 0$). В этом случае результирующие коэффициенты связи (3.5.19) и (3.5.20), входящие в связанные уравнения (3.5.14) и (3.5.15), определяются только объемными вкладами (3.5.21) и (3.5.22) и принимают следующий вид для мод ТЕ-типа:

$$\begin{aligned} c_m^{(s)}(\varkappa) \equiv \widehat{c}_m^{bulk}(\varkappa)\,G_s &= -\frac{\omega w}{s\pi N_m}\,(\varepsilon_1-\varepsilon_0)\int\limits_{a-\Delta}^{a}\widehat{E}^*_{mx}(y)\widehat{E}_{x1}(y;\varkappa)\,dy \simeq \\ &\simeq -\frac{\omega w\Delta}{s\pi N_m}\,(\varepsilon_1-\varepsilon_0)\Big\{\widehat{E}^*_{mx}(a)\widehat{E}_{x1}(a;\varkappa) - \\ &\qquad -\frac{\Delta}{2}\left[\widehat{E}^*_{mx}(a)\widehat{E}'_{x1}(a;\varkappa) + \widehat{E}'^*_{mx}(a)\widehat{E}_{x1}(a;\varkappa)\right]\Big\}, \end{aligned} \tag{3.5.25}$$

$$\begin{aligned} \overline{c}_m^{(-s)}(\varkappa) \equiv \widehat{\overline{c}}_m^{bulk}(\varkappa)\,G_{-s} &= \frac{\omega w}{s\pi\overline{N}(\varkappa)}\,(\varepsilon_1-\varepsilon_0)\int\limits_{a-\Delta}^{a}\widehat{E}^*_{x1}(y;\varkappa)\widehat{E}_{mx}(y)\,dy \simeq \\ &\simeq \frac{\omega w\Delta}{s\pi\overline{N}(\varkappa)}\,(\varepsilon_1-\varepsilon_0)\Big\{\widehat{E}^*_{x1}(a;\varkappa)\widehat{E}_{mx}(a) - \\ &\qquad -\frac{\Delta}{2}\left[\widehat{E}^*_{x1}(a;\varkappa)\widehat{E}'_{mx}(a) + \widehat{E}'^*_{x1}(a;\varkappa)\widehat{E}_{mx}(a)\right]\Big\}. \end{aligned} \tag{3.5.26}$$

Приближенные выражения в (3.5.25)-(3.5.26) получены при малой глубине канавок меандра ($\Delta \ll a$), когда поперечные распределения электрических полей $\widehat{E}_{mx}(y)$ и $\widehat{E}_x(y;\varkappa)$ представлены линейными (по Δ/a) членами ряда Тейлора типа (3.4.35).

Из выражений (3.5.25) и (3.5.26) вытекает следующее перестановочное соотношение между коэффициентами связи:

$$N_m c_m^{(s)}(\varkappa) = -\overline{N}(\varkappa)\,\overline{c}_m^{(-s)*}(\varkappa), \tag{3.5.27}$$

справедливое для *активных* направляемых и излучательных мод, нормы которых N_m и $\overline{N}(\varkappa)$ чисто вещественные.

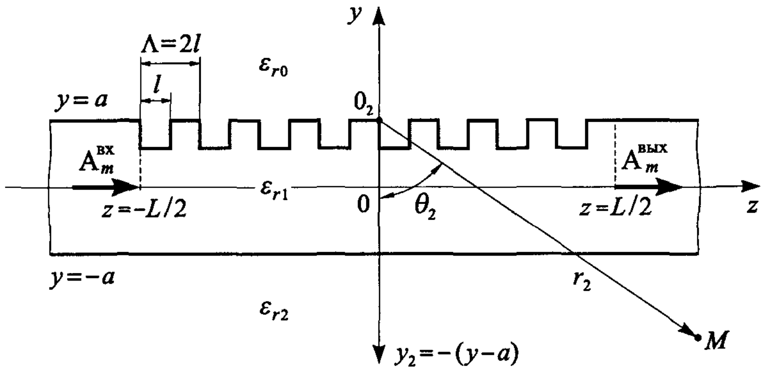


Рис. 3.5. К вычислению поля излучения прямой m-й моды в подложку слабонаправляющего планарного волновода с сильной асимметрией (когда $\varepsilon_{r0} \ll \varepsilon_{r2} = \varepsilon_{r1} - \Delta\varepsilon_r$ и $\Delta\varepsilon_r \ll \varepsilon_{r1}$), вызванного гофрированием поверхности в форме прямоугольного меандра

Пусть рассматриваемый базовый волновод обладает *сильной асимметрией* при *слабой направленности* (т. е. $\varepsilon_{r0} \ll \varepsilon_{r2} = \varepsilon_{r1} - \Delta\varepsilon_r$ и $\Delta\varepsilon_r \ll \varepsilon_{r1}$). Для такого волновода радиус $k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ верхней полуокружности на рис. 3.4 *б* много меньше радиуса $k_2 = \omega\sqrt{\varepsilon_2\mu_0}$ нижней полуокружности. Это означает, что направляемая мода может излучать практически только в подложку.

В слабонаправляющем волноводе с сильной асимметрией m-я мода TE-типа имеет электрическое поле $\widehat{E}_{mx}(y)$ в волноведущем слое в виде (3.4.23), а именно

$$\widehat{E}_{mx}(y) = E_m \sin\varkappa_m(y-a) \qquad \text{при} \quad -a < y < a. \tag{3.5.28}$$

Поля излучательных мод подложки в волноведущем слое, $\widehat{E}_{x1}(y;\varkappa_1)$, и в подложке, $\widehat{E}_{x2}(y;\varkappa_2)$, описываются уравнением (1.9.8) в виде

$$\widehat{E}_{x1}(y;\varkappa_1) = E_1\cos(\varkappa_1 y - \phi_1) \qquad \text{при} \quad -a < y < a, \tag{3.5.29}$$

$$\widehat{E}_{x2}(y;\varkappa_2) = E_2\cos\left[\varkappa_2(y+a) - \phi_2\right] \qquad \text{при} \quad y < -a. \tag{3.5.30}$$

В слабонаправляющих волноводах имеет место соотношение $\varepsilon_{r1} \simeq \varepsilon_{r2}$, поэтому поперечные волновые числа волноведущего слоя $\left(\varkappa_1 \equiv k_{y1} = \sqrt{k_1^2 - k_z^2}\right)$

и подложки $\left(\varkappa_2 \equiv k_{y2} = \sqrt{k_2^2 - k_z^2}\,\right)$ примерно равные, т. е.

$$\varkappa_1 \simeq \varkappa_2 \equiv \varkappa, \tag{3.5.31}$$

где $\varkappa$ означает ранее определенную переменную интегрирования по непрерывному спектру излучательных мод.

Максимальные поля E_1 и E_2, входящие в поперечные распределения (3.5.29) и (3.5.30), связаны друг с другом соотношением (1.9.15), которое для слабонаправляющего волновода, с учетом (3.5.31), приводит к равенству

$$E_1 = \sqrt{\cos^2\phi_2 + (\varkappa_2/\varkappa_1)^2 \sin^2\phi_2}\; E_2 \simeq E_2. \tag{3.5.32}$$

Как следует из (1.9.27) и (3.4.21), максимальные поля E_m и E_2 определяют норму направляемой m-й моды,

$$N_m = w\,\frac{\beta_m d_m}{\omega\mu_0}\,E_m^2, \tag{3.5.33}$$

и норму излучательной $\varkappa$-й моды подложки (с заменой $\varkappa_2 \to \varkappa$),

$$\overline{N}(\varkappa) = w\,\frac{\pi k_z(\varkappa)}{\omega\mu_0}\,E_2^2. \tag{3.5.34}$$

Подстановка (3.5.28) и (3.5.29) в приближенные выражения (3.5.25) и (3.5.26) с учетом того, что $E_1 \simeq E_2$, дает коэффициенты связи:

$$c_m^{(s)}(\varkappa) \simeq \frac{\omega\varepsilon_1 w}{2s\pi N_m}\,\varkappa_m\Delta^2\cos(\varkappa_1 a - \phi_1)\,E_m E_2, \tag{3.5.35}$$

$$\overline{c}_m^{(-s)}(\varkappa) \simeq -\frac{\omega\varepsilon_1 w}{2s\pi\overline{N}(\varkappa)}\,\varkappa_m\Delta^2\cos(\varkappa_1 a - \phi_1)\,E_m E_2, \tag{3.5.36}$$

где, с учетом выражений (1.9.9) и (1.9.14),

$$\cos(\varkappa_1 a - \phi_1) = \frac{E_0}{E_1} = \sqrt{\frac{\varkappa_1^2}{\varkappa_1^2 + \zeta_0^2}} = \sqrt{\frac{\varkappa_1^2}{k_1^2 - k_0^2}} \simeq \frac{\varkappa_1}{k_1} \approx \frac{\varkappa}{k_1}. \tag{3.5.37}$$

Выражения (3.5.35) и (3.5.36) для коэффициентов связи содержат максимальные поля E_m и E_2 для направляемой и излучательной мод, а также их нормы N_m и $\overline{N}(\varkappa)$ в виде (3.5.33) и (3.5.34). Так как эти нормы имеют разные размерности (Вт для N_m и Вт/м для $\overline{N}(\varkappa)$ — см. табл. 1.1 в п. 1.9), то невозможно использовать нормировку мод на единичную мощность в форме (1.8.49), как это было сделано в предыдущем параграфе для связанных дискретных мод. Поэтому применим нормировку на единичную амплитуду в форме (1.8.53)

$$E_m = E_2 = 1\ \text{В/м}. \tag{3.5.38}$$

Используя нормировку (3.5.38) в выражениях (3.5.33) и (3.5.34) для модальных норм и подставляя их в формулы (3.5.35) и (3.5.36), получаем окончательные формулы для коэффициентов связи:

$$c_m^{(s)}(\varkappa) = \frac{k_1}{2s\pi} \frac{\varkappa_m \Delta\, \varkappa\Delta}{\beta_m d_m}, \tag{3.5.39}$$

$$\overline{c}_m^{(-s)}(\varkappa) = -\frac{k_1}{2s\pi^2} \frac{\varkappa_m \Delta\, \varkappa\Delta}{k_z(\varkappa)}, \tag{3.5.40}$$

где $k_z(\varkappa) = \pm\sqrt{k_2^2 - \varkappa_2^2} \simeq \pm\sqrt{k_1^2 - \varkappa^2}$ при $k_z > 0$ для *вперед-излученных* мод и $k_z < 0$ для *назад-излученных* мод.

Знание коэффициентов связи позволяет найти продольное распределение амплитуд $A_m(z)$ и $\overline{A}(z;\varkappa)$ для направляемой и излучательной моды путем решения связанных уравнений (3.5.14) и (3.5.15). Формулировка задачи возбуждения непрерывного спектра направляемой модой дискретного спектра требует задания следующих *входных условий* (система координат соответствует рис. 3.5, см. также рис. 3.4 *б*):

- для возбуждающей дискретной *прямой моды* с $\beta_m > 0$

$$A_m^{\text{вх}} \equiv A_m(-L/2) \neq 0, \qquad \text{тогда} \quad A_m^{\text{вых}} \equiv A_m(L/2) \neq 0; \tag{3.5.41}$$

- для возбуждаемой *вперед-излученной моды* с $k_z(\varkappa) > 0$

$$\overline{A}^{\text{вх}}(\varkappa) \equiv \overline{A}(-L/2;\varkappa) = 0, \ \text{тогда} \quad \overline{A}^{\text{вых}}(\varkappa) \equiv \overline{A}(L/2;\varkappa) \neq 0; \tag{3.5.42}$$

- для возбуждаемой *назад-излученной моды* с $k_z(\varkappa) < 0$

$$\overline{A}^{\text{вх}}(\varkappa) \equiv \overline{A}(L/2;\varkappa) = 0, \qquad \text{тогда} \quad \overline{A}^{\text{вых}}(\varkappa) \equiv \overline{A}(-L/2;\varkappa) \neq 0. \tag{3.5.43}$$

Входная амплитуда $A_m^{\text{вх}}$ возбуждающей прямой m-й моды задается на левом конце $z = -L/2$ гофрированного участка длиною L, расположенного при $-L/2 < z < L/2$. Ее выходная амплитуда $A_m^{\text{вых}}$ на правом конце $z = L/2$ остается постоянной при $z > L/2$, что определяет поля направляемой моды вне области взаимодействия. Положение входных и выходных концов для возбуждаемой излучательной моды зависит от того, является ли она *прямой* с $k_z > 0$ $\big($на ее входе при $z = -L/2$ имеем $\overline{A}^{\text{вх}}(\varkappa) \equiv \overline{A}(-L/2;\varkappa) = 0\big)$ или *обратной* с $k_z < 0$ $\big($на ее входе при $z = L/2$ имеем $\overline{A}^{\text{вх}}(\varkappa) \equiv \overline{A}(L/2;\varkappa) = 0\big)$. Выходная амплитуда $\overline{A}^{\text{вых}}(\varkappa) \equiv \overline{A}(L/2;\varkappa)$ для вперед-излученной моды и $\overline{A}^{\text{вых}}(\varkappa) \equiv \overline{A}(-L/2;\varkappa)$ для назад-излученной моды определяет поле излучения, соответственно, справа и слева от гофрированного участка планарного волновода.

Решение интегро-дифференциальных уравнений (3.5.14) и (3.5.15) возможно, если связь направляемой моды с излучательным спектром достаточно *слабая* для того, чтобы можно было применять метод последовательных приближений. Тогда в *нулевом приближении* можно считать амплитуду $A_m(z)$ входной m-й моды практически неизменной в процессе возбуждения непрерывного спектра, т. е.

$$A_m(z) \approx A_m^{\text{вх}} \equiv A_m(-L/2). \tag{3.5.44}$$

Интегрирование уравнения (3.5.15) с учетом входных краевых условий (3.5.41) и (3.5.42) приводит к амплитуде $\overline{A}(z;\varkappa)$ *нулевого приближения* вперед-излученной моды:

$$\overline{A}(z;\varkappa) = A_m^{\text{вх}} \sum_s \frac{\overline{c}_m^{(-s)}(\varkappa)}{i\Delta\beta_m^{(s)}(\varkappa)} \left(e^{i\Delta\beta_m^{(s)}(\varkappa)\,L/2} - e^{-i\Delta\beta_m^{(s)}(\varkappa)\,z}\right), \tag{3.5.45}$$

где коэффициент связи $\overline{c}_m^{(-s)}(\varkappa)$ дается формулой (3.5.40), а фазовое рассогласование $\Delta\beta_m^{(s)}(\varkappa)$ определено в виде (3.5.18).

Из качественного рассмотрения в п. 3.5.1 следует, что суммирование по s в формуле (3.5.45) обычно включает конечное число членов и часто достаточно единственного значения $s = 1$, соответствующего главному лепестку диаграммы направленности.

Для того, чтобы найти амплитуду $A_m(z)$ в следующем приближении, надо подставить решение (3.5.45) *нулевого приближения* для $\overline{A}(z;\varkappa)$ в правую часть уравнения (3.5.14). После его интегрирования с учетом краевых условий (3.5.41) и (3.5.42) получаем распределение амплитуды входной m-й моды $A_m(z)$ в *первом приближении*:

$$A_m(z) = A_m^{\text{вх}} - A_m^{\text{вх}} \sum_s \sum_{s'} \int_0^\infty \left\{ \frac{c_m^{(s)}(\varkappa)\,\overline{c}_m^{(-s')}(\varkappa)}{i\Delta\beta_m^{(s')}(\varkappa)} \times \right.$$

$$\times \left[\frac{e^{i\Delta\beta_m^{(s')}(\varkappa)\,L/2}}{i\Delta\beta_m^{(s)}(\varkappa)} \left(e^{-i\Delta\beta_m^{(s)}(\varkappa)\,L/2} - e^{i\Delta\beta_m^{(s)}(\varkappa)\,z}\right) + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{i(s-s')K} \left(e^{i(s-s')KL/2} - e^{-i(s-s')Kz}\right)\right]\right\} d\varkappa. \tag{3.5.46}$$

Подстановка решения первого приближения (3.5.46) в правую часть уравнения (3.5.15) в принципе позволяет найти распределение амплитуды излучательной моды $\overline{A}(z;\varkappa)$ в *первом приближении*. Такая итерационная процедура может быть повторена многократно. Легко видеть, что с увеличением порядка приближения найденные амплитуды будут последовательно включать следующие произведения коэффициентов связи: $\overline{c}_m^{(-s)}$, $c_m^{(s)}\overline{c}_m^{(-s')}$, $\overline{c}_m^{(-s)}c_m^{(s')}\overline{c}_m^{(-s'')}$ и так далее. Как следует из (3.5.39) и (3.5.40), величина таких произведений коэффициентов связи определяется степенями Δ/a. Следовательно, при малой глубине канавок ($\Delta \ll a$) можно ограничиться нулевым приближением, используя формулы (3.5.44) и (3.5.45).

Для того, чтобы найти поле, излученное направляемой модой вправо и влево от гофрированного участка планарного волновода, необходимо проинтегрировать уравнение (3.5.15) по длине этого участка от $z = -L/2$ до $z = L/2$, тогда

$$\overline{A}(L/2;\varkappa) - \overline{A}(-L/2;\varkappa) = A_m^{\text{вх}} L \sum_s \overline{c}_m^{(-s)}(\varkappa) \frac{\sin X_m^{(s)}(\varkappa)}{X_m^{(s)}(\varkappa)}; \tag{3.5.47}$$

здесь введено нормированное фазовое рассогласование

$$X_m^{(s)}(\varkappa) = \Delta\beta_m^{(s)}(\varkappa)L/2 \equiv \big[\beta_m - k_z(\varkappa) - sK\big]L/2. \tag{3.5.48}$$

Использование краевых условий (3.5.42) и (3.5.43) в равенстве (3.5.47) дает амплитуду излучательной моды, соответственно, справа и слева от гофрированного участка волновода:

$$\begin{aligned}\overline{A}^{\text{вых}}(\varkappa) &= \pm A_m^{\text{вх}} L \sum_s \overline{c}_m^{(-s)}(\varkappa)\,\frac{\sin X_m^{(s)}(\varkappa)}{X_m^{(s)}(\varkappa)} = \\ &= \mp A_m^{\text{вх}}\,\frac{k_1 L}{2\pi^2}\,\frac{\varkappa_m\Delta\;\varkappa\Delta}{k_z(\varkappa)} \sum_s \frac{1}{s}\,\frac{\sin X_m^{(s)}(\varkappa)}{X_m^{(s)}(\varkappa)},\end{aligned} \tag{3.5.49}$$

где верхний и нижний знаки соответствуют вперед-излученной (при $k_z > 0$) и назад-излученной (при $k_z < 0$) модам. Формула (3.5.49) была получена при использовании выражения (3.5.40) для $\overline{c}_m^{(-s)}(\varkappa)$, в котором

$$k_z(\varkappa) = \pm\sqrt{k_2^2 - \varkappa_2^2} \equiv \pm\sqrt{k_2^2 - \varkappa^2}. \tag{3.5.50}$$

Для дальнейших преобразований удобно ввести такую величину,

$$B(\varkappa) \equiv \mp A_m^{\text{вх}} L\,\frac{k_1\Delta\;\varkappa_m\Delta}{2\pi} \sum_s \frac{1}{s}\,\frac{\sin X_m^{(s)}(\varkappa)}{X_m^{(s)}(\varkappa)}, \tag{3.5.51}$$

что выражение (3.5.49) принимает вид

$$\overline{A}^{\text{вых}}(\varkappa) = \frac{\varkappa}{\pi k_z(\varkappa)}\,B(\varkappa). \tag{3.5.52}$$

Вклад излучательных мод в электрическое поле, записанное в виде полного представления (2.10.38), учитывается интегралом с переменной интегрирования $\varkappa$ по непрерывному спектру. Следовательно, искомое поле излучения TE-типа в подложке (при $y < -a$) с модальными амплитудами $\overline{A}^{\text{вых}}(\varkappa)$ в форме (3.5.52) за пределами гофрированного участка волновода (при $|z| > L/2$) имеет вид

$$E_{x2}^{rad}(y,z) = \int_0^\infty \overline{A}^{\text{вых}}(\varkappa)\widehat{E}_{x2}(y;\varkappa)\,e^{-ik_z(\varkappa)z}d\varkappa. \tag{3.5.53}$$

Поле $\widehat{E}_{x2}(y;\varkappa)$ излучательной моды подложки, равное (3.5.30) с учетом $\varkappa_2 \equiv \varkappa$ (см. формулу (3.5.31)), при выборе нормировки на единичную амплитуду ($E_2 = 1$ В/м) может быть переписано как

$$\begin{aligned}\widehat{E}_{x2}(y;\varkappa) &= \cos\big[\varkappa(y+a) - \phi_2\big] \equiv \\ &\equiv \frac{1}{2}\,e^{i(\varkappa a - \phi_2)}e^{i\varkappa y} + \frac{1}{2}\,e^{-i(\varkappa a - \phi_2)}e^{-i\varkappa y}.\end{aligned} \tag{3.5.54}$$

Для преобразования экспонент $\exp[\pm i(\varkappa a - \phi_2)]$ используем два тригонометрических соотношения, даваемые формулой (1.9.13), каждое из которых дает следующие равенства:

$$e^{\phi_1} = \sqrt{\frac{\varkappa - i\zeta_0}{\varkappa + i\zeta_0}}\; e^{i\varkappa a} \quad \text{и} \quad \varkappa a - \phi_2 = -\phi_1. \tag{3.5.55}$$

Электрическое поле (3.5.54) излучательной моды подложки с учетом равенств (3.5.55) принимает искомую форму

$$\widehat{E}_{x2}(y;\varkappa) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varkappa + i\zeta_0}{\varkappa - i\zeta_0}}\; e^{i\varkappa(y-a)} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varkappa - i\zeta_0}{\varkappa + i\zeta_0}}\; e^{-i\varkappa(y-a)}. \tag{3.5.56}$$

Подстановка (3.5.52) и (3.5.56) в формулу (3.5.53) приводит ее к виду

$$E_{x2}^{rad}(y,z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty B(\varkappa)\,\frac{\varkappa}{k_z(\varkappa)}\sqrt{\frac{\varkappa + i\zeta_0}{\varkappa - i\zeta_0}}\; e^{i\varkappa(y-a)}e^{-ik_z(\varkappa)z}d\varkappa\; +$$
$$+\;\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty B(\varkappa')\,\frac{\varkappa'}{k_z(\varkappa')}\sqrt{\frac{\varkappa' - i\zeta_0}{\varkappa' + i\zeta_0}}\; e^{-i\varkappa'(y-a)}e^{-ik_z(\varkappa')z}d\varkappa'.$$

Делая замену переменной $\varkappa' = -\varkappa$ во втором интеграле и используя свойство четности функций (3.5.50) и (3.5.51), когда $k_z(-\varkappa) = k_z(\varkappa)$ и $B(-\varkappa) = B(\varkappa)$, приходим к окончательному выражению для поля излучения ТЕ-типа в подложке планарной структуры (при $y < -a$ и $|z| > L/2$, см. рис. 3.5). Это поле создается в результате возмущения направляемой моды гофрированной (в форме меандра) поверхностью волновода и равняется

$$E_{x2}^{rad}(y,z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} B(\varkappa)\,\frac{|\varkappa|}{k_z(\varkappa)}\sqrt{\frac{\varkappa + i\zeta_0}{\varkappa - i\zeta_0}}\; e^{-i[\varkappa(|y|+a) + k_z(\varkappa)z]}\, d\varkappa. \tag{3.5.57}$$

Для дальнейших преобразований удобно переместить начало координат на рис. 3.5 в новое положение 0_2 и направить вниз новую координатную ось $y_2 = -(y-a)$, так чтобы в точке подложки с координатой $y = -|y| < -a$ теперь иметь $y_2 = |y| + a > 0$. Кроме того, удобно вернуться к старому обозначению поперечных волновых чисел с использованием равенств (1.9.1)–(1.9.3). В этом случае формула (3.5.57) принимает вид

$$E_{x2}^{rad}(y,z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(k_{y2})\,\frac{k_{y2}}{k_z}\; e^{-i(k_{y2}y_2 + k_z z)}\, dk_{y2}, \tag{3.5.58}$$

где введено обозначение

$$F(k_{y2}) = B(\varkappa)\,\frac{|\varkappa|}{\varkappa}\sqrt{\frac{\varkappa + i\zeta_0}{\varkappa - i\zeta_0}} \equiv B(k_{y2})\,\frac{|k_{y2}|}{k_{y2}}\sqrt{\frac{k_{y2} - k_{y0}}{k_{y2} + k_{y0}}}\,. \tag{3.5.59}$$

Из сравнения (3.5.58) с выражением (1.4.1), полученным из общих спектральных соображений, очевидно их полное сходство за исключением того, что в формулах (3.5.58) и (3.5.59) появился индекс 2, отражающий принадлежность этих величин подложке, характеризуемой этим индексом.

Следуя процедуре, примененной в п. 1.4 для вычисления поля излучения в дальней зоне в форме (3.5.58), необходимо вместо декартовых координат (y_2, z) ввести полярные координаты (r_2, θ_2), используя соотношения (см. рис. 3.5 и ср. уравнение (1.4.11))

$$y_2 = r_2 \cos\theta_2 \quad \text{и} \quad z = r_2 \sin\theta_2, \tag{3.5.60}$$

и перейти от переменной интегрирования k_{y2} к интегрированию по комплексному углу w, введенному равенствами (ср. уравнение (1.4.12))

$$k_{y2} = k_2 \cos w \quad \text{и} \quad k_z = k_2 \sin w. \tag{3.5.61}$$

Как показано в п. 1.4, бесконечный интервал интегрирования в (3.5.58) может быть заменен конечным отрезком $-k_2 \leqslant k_{y2} \leqslant k_2$, который обеспечивает вещественные значения угла w, лежащие между π и 0. За пределами этого интервала существуют реактивные (исчезающие) излучательные моды, которые не вносят вклада в реальное поле излучения в дальней зоне и поэтому исключаются из интервала интегрирования.

Подстановка (3.5.60) и (3.5.61) в выражение (3.5.58) приводит поле излучения в подложке к виду, аналогичному (1.4.13):

$$E_{x2}^{rad}(r_2, \theta_2) = \frac{k_2}{2\pi} \int_0^{\pi} F(w) \cos w \, e^{-ik_2 r_2 \cos(w-\theta_2)} \, dw. \tag{3.5.62}$$

Функция $F(w)$ получается из (3.5.59) при замене k_{y2} и $\zeta_0 \equiv ik_{y0}$ углом w на основе (3.5.61), так что для сильно асимметричной структуры имеем

$$\sqrt{\frac{k_{y2} + i\zeta_0}{k_{y2} - i\zeta_0}} \simeq \frac{k_{y2} + i\zeta_0}{k_2} = \cos w + i\sqrt{\sin^2 w - (k_0/k_2)^2}\,.$$

В этом случае формулы (3.5.59) и (3.5.51) принимают следующий вид:

$$F(w) = B(w) \frac{|\cos w|}{\cos w} \left[\cos w + i\sqrt{\sin^2 w - (k_0/k_2)^2} \right], \tag{3.5.63}$$

$$B(w) = \mp A_m^{\text{вх}} L \frac{k_1 \Delta \, \varkappa_m \Delta}{2\pi} \sum_s \frac{1}{s} \frac{\sin X_m^{(s)}(w)}{X_m^{(s)}(w)}, \tag{3.5.64}$$

где, согласно (3.5.48) и (3.5.61), при $k_z = k_2 \sin w$ имеем

$$X_m^{(s)}(w) = \Delta\beta_m^{(s)}(w) L/2 \equiv \left[\beta_m - k_2 \sin w - sK\right] L/2. \tag{3.5.65}$$

Интеграл (3.5.62) вычисляется методом стационарной фазы, подобно сделанному при вычислении интеграла (1.4.13) для получения асимптотического выражения (1.4.17). По аналогии с этим выражением можно записать асимптотическое представление поля (3.5.62) в дальней зоне:

$$E_{x2}^{rad}(r_2,\theta_2) \simeq \frac{k_2\cos\theta_2}{\sqrt{2\pi k_2 r_2}}\,F(\theta_2)\,e^{-i(k_2r_2-\pi/4)} \quad \text{при} \quad k_2r_2 \to \infty, \tag{3.5.66}$$

где $F(\theta_2)$ — значение функции $F(w)$ в форме (3.5.63), взятое в стационарной точке $w_s = \theta_2$. Тогда из (3.5.63) и (3.5.64) получаем

$$F(\theta_2) \simeq B(\theta_2)\,e^{i\theta_2} = \\ = \mp A_m^{\text{вх}} L\,\frac{k_2\Delta\ \varkappa_m\Delta}{2\pi}\sum_s \frac{1}{s}\,\frac{\sin X_m^{(s)}(\theta_2)}{X_m^{(s)}(\theta_2)}\,e^{i\theta_2}, \tag{3.5.67}$$

где в выражении (3.5.63) было положено $|\cos\theta_2| = \cos\theta_2$ (что верно для углов $-\pi/2 \leqslant \theta_2 \leqslant \pi/2$) и $\sin\theta_2^2 \gg (k_0/k_2)^2 \ll 1$.

Подстановка (3.5.67) в (3.5.66) дает окончательно асимптотическое выражение (справедливое при $k_2r_2 \to \infty$) для поля ТЕ-типа в дальней зоне подложки при излучении из гофрированного волновода (с сильной асимметрией и слабой направленностью, когда $\varepsilon_{r0} \ll \varepsilon_{r2} = \varepsilon_{r1} - \Delta\varepsilon_r$ и $\Delta\varepsilon_r \ll \varepsilon_{r1}$):

$$E_{x2}^{rad}(r_2,\theta_2) \simeq \mp A_m^{\text{вх}} L\,(k_2\Delta)^2\frac{\varkappa_m L}{(2\pi)^{3/2}}\sum_s \frac{\cos\theta_2}{s}\,\frac{\sin X_m^{(s)}(\theta_2)}{X_m^{(s)}(\theta_2)}\times \\ \times\frac{e^{-i(k_2r_2-\pi/4-\theta_2)}}{\sqrt{k_2r_2}}. \tag{3.5.68}$$

Здесь верхний и нижний знаки соответствуют *вперед-излученным* ($k_z > 0$) и *назад-излученным* ($k_z < 0$) полям, а фазовое рассогласование (3.5.65) в стационарной точке $w_s = \theta_2$ имеет вид

$$X_m^{(s)}(\theta_2) = \Delta\beta_m^{(s)}(\theta_2)L/2 \equiv \big[\beta_m - k_2\sin\theta_2 - sK\big]L/2. \tag{3.5.69}$$

Из-за использования нормировки мод на единичную амплитуду в форме (3.5.38) размерность электрического поля в (3.5.68) должна быть присвоена входной амплитуде $A_m^{\text{вх}}$ (В/м) излучающей m-й моды.

Поскольку выражение (3.5.68) было получено для подложки ($y_2 > 2a$) за пределами гофрированного отрезка волновода ($|z| > L/2$), то эти ограничения дают следующий интервал допустимых углов наблюдения:

$$\frac{L}{2r_2} < |\theta_2| < \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2a}{r_2}\right).$$

Диаграмма направленности в дальней зоне вида $|E_{x2}^{rad}(r_2,\theta_2)|^2$ описывается функцией

$$\left(\cos\theta_2\frac{\sin X_m^{(s)}(\theta_2)}{X_m^{(s)}(\theta_2)}\right)^2 \quad \text{при} \quad X_m^{(s)}(\theta_2) = \Big[\beta_m - k_2\sin\theta_2 - sK\Big]L/2\,.$$

Следовательно, основной лепесток диаграммы излучения порядка s, соответствующий условию $\sin\left[X_m^{(s)}(\theta_2)\right]/X_m^{(s)}(\theta_2) = 1$, располагается под углом θ_2, для которого

$$\sin\theta_2 = \frac{\beta_m - sK}{k_2}.$$

Эта формула демонстрирует строгое обоснование условия фазового согласования (3.5.3), использованного в п. 3.5.1 для качественного анализа взаимодействия направляемой дискретной моды с непрерывным спектром излучательных мод на основе рис. 3.4.

3.6. Тензорное описание оптических свойств анизотропных сред

Предыдущий анализ связанных мод имел дело с *изотропным возмущением* диэлектрической проницаемости планарной структуры геометрического типа, которое вызвано гофрированием поверхности структуры. Такая физическая ситуация управляется коэффициентами связи вида (3.2.30), которые обеспечивают парную связь только между модами одинаковой поляризации (обе либо TE-типа, либо TM-типа).

Для того, чтобы связать TE- и TM-моды, необходимо создать *анизотропное возмущение* диэлектрической проницаемости базового волновода, что приводит к коэффициентам связи вида (3.2.27). Такая физическая ситуация может быть реализована с помощью электрооптического и акустооптического эффектов в кристаллах специального типа.

Распространение волн в оптических анизотропных средах обычно описывается с применением так называемой *оптической индикатрисы* [57, 61–66]. Она отображает зависимость обратной фазовой скорости $v_{\text{ph}}^{-1} \equiv k/\omega$ (или показателя преломления $n = c/v_{\text{ph}}$) для плоских волн от направления волнового вектора $\mathbf{k}/k$.

В системе координат (x_1, x_2, x_3), связанной с главными осями кристалла, оптическая индикатриса представляет собой эллипсоид, называемый *эллипсоидом показателей преломления*, уравнение которого имеет вид

$$\eta_1 x_1^2 + \eta_2 x_2^2 + \eta_3 x_3^2 = 1. \tag{3.6.1}$$

Здесь $\eta_i \equiv \eta_{ii}$ — компоненты так называемого тензора *диэлектрической непроницаемости* $\overline{\eta}$ в главных осях кристалла. Этот тензор является обратным по отношению к тензору диэлектрической проницаемости, так что

$$\eta_{ij}\varepsilon_{jk} = \varepsilon_0\delta_{ik} \qquad \text{или} \qquad \overline{\boldsymbol{\eta}} = \varepsilon_0\,\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{-1}, \tag{3.6.2}$$

где ε_0 — электрическая постоянная (на оптических частотах магнитная проницаемость для всех сред принимается равной единице [57]). В первом равенстве (3.6.2) и других подобных выражениях используется правило суммирования по повторяющимся индексам. С учетом этого правила уравнение индикатрисы (3.6.1) в произвольной системе координат принимает вид

$$\eta_{ij} x_i x_j = 1. \tag{3.6.3}$$

Из уравнения (3.6.2), записанного в главных осях кристалла следует, что $\eta_i = (\varepsilon_i/\varepsilon_0)^{-1} = n_i^{-2}$ $(i = 1, 2, 3)$, где $\varepsilon_i/\varepsilon_0$ и n_i — главные значения тензора проницаемости и тензора показателей пр‹ломления. В общем случае $\eta_1 \neq \eta_2 \neq \eta_3$, что соответствует *двуосным кристаллам*, принадлежащим к триклинной, моноклинной и орторомбической системам. В частном случае *одноосных кристаллов* (принадлежащих к тригональной, тетрагональной и гексагональной системам с $\eta_1 = \eta_2$) и *оптически изотропных кристаллов* (принадлежащих к кубической системе с $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3$) уравнение индикатрисы (3.6.1) описывает, соответственно, эллипсоид вращения вокруг оптической оси x_3 и сферу [16, 57–66].

Отклик любого кристалла на электрическое или акустическое воздействие проявляется как изменение поляризационных параметров среды, например, в виде тензора непроницаемости $\Delta\overline{\boldsymbol{\eta}}$, который индуцируется вектором напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ или тензором деформации $\overline{\mathbf{S}}$. Так как обычно нелинейность сред достаточно мала, то при разложении компонент $\Delta\eta_{ij}$ в ряд Тейлора по степеням E_k и S_{kl} ограничиваются линейными членами [16, 57–66]:

$$\Delta\eta_{ij} = r_{ijk}E_k + p_{ijkl}S_{kl} \qquad \text{или} \qquad \Delta\overline{\boldsymbol{\eta}} = \overline{\overline{\mathbf{r}}}\cdot\mathbf{E} + \overline{\overline{\mathbf{p}}} : \overline{\mathbf{S}}, \tag{3.6.4}$$

где r_{ijk} и p_{ijkl} — компоненты электрооптического тензора $\overline{\overline{\mathbf{r}}}$ третьего ранга и фотоупругого тензора $\overline{\overline{\mathbf{p}}}$ четвертого ранга. Тензор упругой деформации определен в виде [16, 57–66]

$$S_{kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right), \tag{3.6.5}$$

где u_k — компоненты вектора $\mathbf{u}$ упругого смещения частиц среды.

Напоминаем, что, как было указано во введении, полужирными буквами обозначены векторы ($\mathbf{u}$, $\mathbf{E}$ и др.), полужирными с одной чертой — тензоры второго ранга ($\overline{\boldsymbol{\eta}}$, $\overline{\mathbf{S}}$ и др.), а полужирными с двумя чертами — тензоры ранга выше второго ($\overline{\overline{\mathbf{p}}}$, $\overline{\overline{\mathbf{r}}}$ и др.). Во втором равенстве (3.6.4) точка означает скалярное произведение (в форме суммирования по повторяющемуся индексу k), а двоеточие — двойное скалярное произведение (в форме суммирования по двум повторяющимся индексам k и l).

Поскольку тензоры объемной и поверхностной связи, записанные в общей форме (3.1.16) и (3.1.20), включают тензор диэлектрического возмущения в виде $\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$, а не $\Delta\overline{\boldsymbol{\eta}}$, то необходимо выразить компоненты $\Delta\varepsilon_{ij}$ через величины $\Delta\eta_{ij}$, определенные в форме (3.6.4). С этой целью используем (3.6.2) для записи следующего соотношения:

$$\Delta\eta_{ij}\varepsilon_{jk} + \eta_{ij}\Delta\varepsilon_{jk} = 0. \tag{3.6.6}$$

Умножая (3.6.6) на ε_{li} и учитывая соотношение (3.6.2), приходим к требуемой связи между тензорами $\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ и $\Delta\overline{\boldsymbol{\eta}}$:

$$\Delta\varepsilon_{lk} = -\frac{\varepsilon_{li}\,\Delta\eta_{ij}\,\varepsilon_{jk}}{\varepsilon_0} \qquad \text{или} \qquad \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} = -\frac{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}\cdot\Delta\overline{\boldsymbol{\eta}}\cdot\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\varepsilon_0}. \tag{3.6.7}$$

Для оптически изотропных кристаллов кубической системы, в которых $\overline{\varepsilon} = \varepsilon\overline{\mathbf{I}}$, формула (3.6.7) принимает упрощенный вид:

$$\Delta\varepsilon_{ij} = -\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon_0}\Delta\eta_{ij} \qquad \text{или} \qquad \Delta\overline{\varepsilon} = -\frac{{}^{2}}{\varepsilon_0}\Delta\overline{\eta}. \tag{3.6.8}$$

Именно оптически изотропные кристаллы будут рассматриваться ниже в качестве волноведущей среды, обладающей электрооптическими свойствами. Как пример такого кристалла, будем использовать арсенид галлия GaAs, относящийся к классу $\overline{4}3\mathrm{m}$ кубической системы, диэлектрическая проницаемость которого изотропна, а электрооптический тензор имеет следующие ненулевые компоненты [16, 61, 62]:

$$r_{123} = r_{213} = r_{132} = r_{312} = r_{231} = r_{321} \equiv r_{41} \neq 0, \tag{3.6.9}$$

где r_{41} соответствует общепринятым матричным обозначениям тензоров [61].

3.7. Электрооптическая связь направляемых мод в планарном волноводе

3.7.1. Общие коэффициенты электрооптической связи для оптически изотропных сред. Как и прежде, базовый волновод выбираем в форме трехслойной планарной структуры, показанной на рис. 1.8, с распределением диэлектрической проницаемости по слоям в виде (3.3.1). Центральный волноведущий слой с номером $i = 1$ располагается при $-a < y < a$ и, будучи оптически изотропным с проницаемостью $\overline{\varepsilon}_r = \varepsilon_{r1}\overline{\mathbf{I}}$, обладает электрооптическими свойствами, являясь, например, кристаллом арсенида галлия GaAs. Пренебрегая фотоупругостью такого кристалла, запишем тензор диэлектрического возмущения $\Delta\overline{\varepsilon}$, даваемый в общем случае формулами (3.6.4) и (3.6.8) при $p_{ijkl} = 0$, а именно

$$\Delta\varepsilon_{ij} = -\frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_0}\Delta\eta_{ij} = -\varepsilon_1 n_1^2 r_{ijk} E_k, \tag{3.7.1}$$

где $\varepsilon_1 = \varepsilon_{r1}\varepsilon_0$, $n_1 = \sqrt{\varepsilon_{r1}}$ — показатель преломления волноведущего слоя, ε_0 — электрическая постоянная.

Полагая в (3.7.1) управляющее поле $\mathbf{E}^\circ(y, z)$ зависящим от y и z, можем с помощью (3.6.9) записать выражение для тензора диэлектрического возмущения в следующей форме при $-a < y < a$:

$$\Delta\overline{\varepsilon}(y, z) = -\varepsilon_1 \begin{pmatrix} 0 & \vartheta_z & \vartheta_y \\ \vartheta_z & 0 & \vartheta_x \\ \vartheta_y & \vartheta_x & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.7.2}$$

с элементами в виде безразмерной функции от y и z:

$$\vartheta_k(y, z) = n_1^2 r_{41} E_k^\circ(y, z), \qquad k = x,\ y,\ z. \tag{3.7.3}$$

Здесь ось z совпадает с направлением распространения волнового процесса в плоскости (x, z) электрооптического слоя толщиною $2a$, вдоль которой направлена ось y (см. рис. 1.8).

Тензор объемной связи $\Delta\overline{\varepsilon}_c$ получается подстановкой формулы (3.7.2) в общее выражение (3.1.16),

$$\Delta\overline{\varepsilon}_c(y,z) = -\varepsilon_1 \begin{pmatrix} \vartheta_y^2 & \vartheta_x\vartheta_y+\vartheta_z & \vartheta_y \\ \vartheta_x\vartheta_y+\vartheta_z & \vartheta_x^2 & \vartheta_x \\ \vartheta_y & \vartheta_x & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.7.4}$$

элементы которого составлены из функций (3.7.3), при этом $-a < y < a$.

Тензор поверхностной связи $\Delta\overline{\xi}_c$ получается подстановкой (3.7.2) в общее выражение (3.1.20), взятое в точках верхней ($y=a$) и нижней ($y=-a$) границы волноведущего электрооптического слоя. Тогда с учетом того, что $\boldsymbol{\tau}_b(\pm a) = \mp\mathbf{e}_x$, получаем

$$\Delta\overline{\xi}_c(z)\Big|_{y=\pm a} = \pm \begin{pmatrix} \vartheta_y(\pm a,z) & \vartheta_x(\pm a,z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.7.5}$$

Электрооптические тензоры связи (3.7.4) и (3.7.5) позволяют вычислить коэффициенты связи, имеющие общую форму (3.2.27) для анизотропных возмущений, и представить их для каждой пары (m,n) дискретных мод в виде суммы (3.3.9) объемного и поверхностного вкладов:

$$c_{mn}(z) = c_{mn}^{bulk}(z) + c_{mn}^{surf}(z). \tag{3.7.6}$$

Для определенности рассмотрим электрооптическую связь в планарной трехслойной диэлектрической структуре между m-й модой ТМ-типа (с *ненулевыми* компонентами полей H_{mx}^{TM}, E_{my}^{TM}, E_{mz}^{TM}) и n-й модой ТЕ-типа (с *ненулевыми* компонентами полей E_{nx}^{TE}, H_{ny}^{TE}, H_{nz}^{TE}). Эти моды связаны между собой уравнениями

$$\frac{dA_m^{TM}(z)}{dz} = c_{mm}\,A_m^{TM}(z) + c_{mn}e^{i(\beta_m^{TM}-\beta_n^{TE})z}A_n^{TE}(z), \tag{3.7.7}$$

$$\frac{dA_n^{TE}(z)}{dz} = c_{nm}e^{i(\beta_n^{TE}-\beta_m^{TM})z}A_m^{TM}(z) + c_{nn}\,A_n^{TE}(z), \tag{3.7.8}$$

где $A_m^{TM}(z)$ и $A_n^{TE}(z)$ — искомые продольные распределения амплитуд возбуждения взаимодействующих мод.

Уравнения (3.7.7) и (3.7.8) учитывают не только взаимную связь между модами (с помощью c_{mn} и c_{nm}), но и «самосвязь» (самовоздействие) каждой моды (с помощью c_{mm} и c_{nn}), которая модифицирует невозмущенные фазовые постоянные β_m^{TM} и β_n^{TE} в соответствии выражением (Г.7.2). Чтобы вычислить коэффициенты связи, входящие в уравнения связанных мод (3.7.7)–(3.7.8), надо либо использовать частную формулу (3.2.27) для статических анизотропных возмущений, либо подставить выражения (3.7.4) и (3.7.5) для тензоров связи $\Delta\overline{\varepsilon}_c$ и $\Delta\overline{\xi}_c$ непосредственно в общую формулу (3.2.17).

Результирующие выражения для собственных и взаимных коэффициентов связи с разделением их, согласно (3.7.6), на объемные и поверхностные вклады имеют следующий вид.

• ***Собственные коэффициенты связи***:

а) *объемные вклады*

$$c_{mm}^{bulk}(z) \equiv -\frac{i\omega}{N_m^{TM}} \int_{-w/2}^{w/2} dx \int_{-a}^{a} \left[\widehat{\mathbf{E}}_m^{TM*} \cdot \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c(y,z) \cdot \widehat{\mathbf{E}}_m^{TM}\right] dy =$$
$$= \frac{i\omega\varepsilon_1 w}{N_m^{TM}} \int_{-a}^{a} \left[\vartheta_x^2 \left|\widehat{E}_{my}^{TM}\right|^2 + \vartheta_x \left(\widehat{E}_{my}^{TM*} \widehat{E}_{mz}^{TM} + \widehat{E}_{my}^{TM} \widehat{E}_{mz}^{TM*}\right)\right] dy, \tag{3.7.9}$$

$$c_{nn}^{bulk}(z) \equiv -\frac{i\omega}{N_n^{TE}} \int_{-w/2}^{w/2} dx \int_{-a}^{a} \left[\widehat{\mathbf{E}}_n^{TE*} \cdot \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c(y,z) \cdot \widehat{\mathbf{E}}_n^{TE}\right] dy =$$
$$= \frac{i\omega\varepsilon_1 w}{N_n^{TE}} \int_{-a}^{a} \vartheta_y^2 \left|\widehat{E}_{nx}^{TE}\right|^2 dy; \tag{3.7.10}$$

б) *поверхностные вклады*

$$c_{mm}^{surf}(z) \equiv -\frac{1}{N_m^{TM}} \int_{-w/2}^{w/2} \left[\widehat{\mathbf{H}}_m^{TM*}(a) \cdot \Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c(a,z) \cdot \widehat{\mathbf{E}}_m^{TM}(a) + \right.$$
$$\left. + \widehat{\mathbf{H}}_m^{TM*}(-a) \cdot \Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c(-a,z) \cdot \widehat{\mathbf{E}}_m^{TM}(-a)\right] dx = \tag{3.7.11}$$
$$= -\frac{w}{N_m^{TM}} \left[\vartheta_x(a)\, \widehat{H}_{mx}^{TM*}(a)\, \widehat{E}_{my}^{TM}(a) - \vartheta_x(-a)\, \widehat{H}_{mx}^{TM*}(-a)\, \widehat{E}_{my}^{TM}(-a)\right],$$

$$c_{nn}^{surf}(z) \equiv -\frac{1}{N_n^{TE}} \int_{-w/2}^{w/2} \left[\widehat{\mathbf{H}}_n^{TE*}(a) \cdot \Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c(a,z) \cdot \widehat{\mathbf{E}}_n^{TE}(a) + \right.$$
$$\left. + \widehat{\mathbf{H}}_n^{TE*}(-a) \cdot \Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c(-a,z) \cdot \widehat{\mathbf{E}}_n^{TE}(-a)\right] dx = 0. \tag{3.7.12}$$

• ***Взаимные коэффициенты связи***:

а) *объемные вклады*

$$c_{mn}^{bulk}(z) \equiv -\frac{i\omega}{N_m^{TM}} \int_{-w/2}^{w/2} dx \int_{-a}^{a} \left[\widehat{\mathbf{E}}_m^{TM*} \cdot \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c(y,z) \cdot \widehat{\mathbf{E}}_n^{TE}\right] dy =$$

$$= \frac{i\omega\varepsilon_1 w}{N_m^{TM}} \int\limits_{-a}^{a} \left[(\vartheta_x\vartheta_y + \vartheta_z)\, \widehat{E}_{my}^{TM*} + \vartheta_y \widehat{E}_{mz}^{TM*} \right] \widehat{E}_{nx}^{TE} dy, \tag{3.7.13}$$

$$c_{nm}^{bulk}(z) \equiv -\frac{i\omega}{N_n^{TE}} \int\limits_{-w/2}^{w/2} dx \int\limits_{-a}^{a} \left[\widehat{\mathbf{E}}_n^{TE*} \cdot \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c(y,z) \cdot \widehat{\mathbf{E}}_m^{TM} \right] dy =$$

$$= \frac{i\omega\varepsilon_1 w}{N_n^{TE}} \int\limits_{-a}^{a} \widehat{E}_{nx}^{TE*} \left[(\vartheta_x\vartheta_y + \vartheta_z)\, \widehat{E}_{my}^{TM} + \vartheta_y \widehat{E}_{mz}^{TM} \right] dy; \tag{3.7.14}$$

б) *поверхностные вклады*

$$c_{mn}^{surf}(z) \equiv -\frac{1}{N_m^{TM}} \int\limits_{-w/2}^{w/2} \left[\widehat{\mathbf{H}}_m^{TM*}(a) \cdot \Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c(a,z) \cdot \widehat{\mathbf{E}}_n^{TE}(a) + \right.$$

$$\left. + \widehat{\mathbf{H}}_m^{TM*}(-a) \cdot \Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c(-a,z) \cdot \widehat{\mathbf{E}}_n^{TE}(-a) \right] dx = \tag{3.7.15}$$

$$= -\frac{w}{N_m^{TM}} \left[\vartheta_y(a)\, \widehat{H}_{mx}^{TM*}(a)\, \widehat{E}_{nx}^{TE}(a) - \vartheta_y(-a)\, \widehat{H}_{mx}^{TM*}(-a)\, \widehat{E}_{nx}^{TE}(-a) \right],$$

$$c_{nm}^{surf}(z) \equiv -\frac{1}{N_n^{TE}} \int\limits_{-w/2}^{w/2} \left[\widehat{\mathbf{H}}_n^{TE*}(a) \cdot \Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c(a,z) \cdot \widehat{\mathbf{E}}_m^{TM}(a) + \right.$$

$$\left. + \widehat{\mathbf{H}}_n^{TE*}(-a) \cdot \Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c(-a,z) \cdot \widehat{\mathbf{E}}_m^{TM}(-a) \right] dx = 0. \tag{3.7.16}$$

Все вышеприведенные выражения ясно показывают асимметрию, вносимую в суммарные коэффициенты связи (3.7.6) поверхностными вкладами, поскольку $c_{mm}^{surf} \neq 0$ и $c_{mn}^{surf} \neq 0$, а $c_{nn}^{surf} = c_{nm}^{surf} = 0$ из-за того, что $H_{nx}^{TE} \equiv 0$ в выражениях (3.7.12) и (3.7.16). Следствия такой «поверхностной асимметрии» вместе с нарушением перестановочной симметрии объемных коэффициентов связи (что приводит к кажущемуся нарушению закона сохранения мощности и порождает необходимость его модификации) частично обсуждались в п. 3.2.2 и подробно рассмотрены в приложении Д.

Зависимость коэффициентов связи (3.7.9)–(3.7.16) от z определяется исключительно продольной зависимостью управляющего электрического поля $\mathbf{E}^\circ(y,z)$ через «управляющий вектор» $\boldsymbol{\vartheta}(y,z) = n_1^2 r_{41} \mathbf{E}^\circ(y,z)$, определенный в виде (3.7.3) и входящий в тензоры связи (3.7.4) и (3.7.5). Поперечная зависимость управляющего поля проявляется в коэффициентах связи в форме весовых функций при вычислении интегралов перекрытия модальных полей. Если управляющее поле $\mathbf{E}^\circ(y,z)$ имеет три ненулевые компоненты, то все коэффициенты связи, за исключением c_{nn}^{surf} и c_{nm}^{surf}, отличны от нуля. Если же $E_x^\circ = 0$, тогда в дополнение к $c_{nn}^{surf} = c_{nm}^{surf} = 0$ имеем также $c_{mm}^{bulk} = c_{mm}^{surf} = 0$. Следовательно, среди коэффициентов (3.7.9)–(3.7.16) остаются ненулевыми только c_{nn}^{bulk}, c_{mn}^{bulk}, c_{nm}^{bulk} и c_{mn}^{surf}.

Рассмотрим по отдельности два случая однородного продольного поля E_z° и продольно-периодического поперечного поля $E_y^\circ(z)$ в слабонаправляющем волноводе с сильной асимметрией (когда $\varepsilon_{r0} \ll \varepsilon_{r2} = \varepsilon_{r1} - \Delta\varepsilon_r$ и $\Delta\varepsilon_r \ll \varepsilon_{r1}$). В таком волноводе поперечные поля $\widehat{E}_{nx}^{TE}(y)$ и $\widehat{H}_{mx}^{TM}(y)$ в волноведущем слое (при $-a < y < a$) описываются формулами (3.4.23) и (3.4.43), а нормы N_n^{TE} и N_m^{TM} для TE$_n$- и TM$_m$-мод имеют вид (3.4.21) и (3.4.41):

$$\widehat{H}_{mx}^{TM}(y) = H_m \sin \varkappa_m^{TM}(y-a) \quad \text{и} \quad N_m^{TM} = w\frac{\beta_m^{TM} d_m^{TM}}{\omega\varepsilon_1} H_m^2, \tag{3.7.17}$$

$$\widehat{E}_{nx}^{TE}(y) = E_n \sin \varkappa_n^{TE}(y-a) \quad \text{и} \quad N_n^{TE} = w\frac{\beta_n^{TE} d_n^{TE}}{\omega\mu_0} E_n^2. \tag{3.7.18}$$

3.7.2. Продольно-однородное управляющее электрическое поле. Пусть управляющее электрическое поле $\mathbf{E}^\circ(y,z)$ однородно и направлено вдоль оси z, т. е. $\mathbf{E}^\circ(y,z) = \mathbf{e}_z E_z^\circ(y,z)$ с $E_z^\circ(y,z) = E_z^\circ = \text{const}$ и $\vartheta_z = n_1^2 r_{41} E_z^\circ$. Тогда большинство коэффициентов связи (3.7.9)–(3.7.16) исчезает, кроме двух взаимных объемных коэффициентов:

$$c_{mn} \equiv c_{mn}^{bulk} = \frac{i\omega\varepsilon_1 w}{N_m^{TM}} n_1^2 (r_{41} E_z^\circ) \int_{-a}^{a} \widehat{E}_{my}^{TM*}(y) \widehat{E}_{nx}^{TE}(y)\, dy, \tag{3.7.19}$$

$$c_{nm} \equiv c_{nm}^{bulk} = \frac{i\omega\varepsilon_1 w}{N_n^{TE}} n_1^2 (r_{41} E_z^\circ) \int_{-a}^{a} \widehat{E}_{nx}^{TE*}(y) \widehat{E}_{my}^{TM}(y)\, dy. \tag{3.7.20}$$

Коэффициенты связи (3.7.19) и (3.7.20) подчиняются следующему перестановочному соотношению:

$$N_m^{TM} c_{mn} = -N_n^{TE} c_{nm}^*. \tag{3.7.21}$$

Оно совпадает с соотношением (Д.1.7), полученным из общего энергетического рассмотрения на основе закона сохранения мощности в обычной форме (Д.1.4) без учета кросс-мощности, переносимой связанными модами.

Для вычисления коэффициентов связи (3.7.19) и (3.7.20), необходимо выразить электрическое поле $\widehat{E}_{my}^{TM}(y)$ через магнитное $\widehat{H}_{mx}^{TM}(y)$, используя формулу (3.4.45), и связать максимальные поля H_m и E_n, входящие в (3.7.17) и (3.7.18), с нормами N_m^{TM} и N_n^{TE}, тогда

$$H_m^{TM} E_n^{TE} = \frac{k_1}{w} \sqrt{\frac{N_m^{TM}}{\beta_m^{TM} d_m^{TM}} \frac{N_n^{TE}}{\beta_n^{TE} d_n^{TE}}}\,. \tag{3.7.22}$$

После подстановки (3.7.17)–(3.7.18) в (3.7.19) и некоторых преобразований приходим к искомому выражению:

$$c_{mn} = -ik_{\text{в}}\, n_1^3 (r_{41} E_z^\circ)\, \frac{\beta_m^{TM} a}{N_m^{TM}} \sqrt{\frac{N_m^{TM}}{\beta_m^{TM} d_m^{TM}}\, \frac{N_n^{TE}}{\beta_n^{TE} d_n^{TE}}} \times$$
$$\times \left[\frac{\sin 2\left(\varkappa_m^{TM} - \varkappa_n^{TE}\right) a}{2\left(\varkappa_m^{TM} - \varkappa_n^{TE}\right) a} - \frac{\sin 2\left(\varkappa_m^{TM} + \varkappa_n^{TE}\right) a}{2\left(\varkappa_m^{TM} + \varkappa_n^{TE}\right) a} \right], \tag{3.7.23}$$

где $k_{\text{в}} = \omega\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ — волновое число вакуума.

Применение нормировки мод на единичную мощность в форме (1.8.49) при $N_m^{TM} = N_n^{TE} = 4$ Вт позволяет записать коэффициенты связи (3.7.19) и (3.7.20) с учетом (3.7.23) в виде

$$c_{mn} = c_{nm} = -i\chi, \tag{3.7.24}$$

где

$$\chi = k_{\text{в}}\, n_1^3 (r_{41} E_z^\circ)\, \frac{\beta_m^{TM} a}{\sqrt{\beta_m^{TM} d_m^{TM}\, \beta_n^{TE} d_n^{TE}}} \times$$
$$\times \left[\frac{\sin 2\left(\varkappa_m^{TM} - \varkappa_n^{TE}\right) a}{2\left(\varkappa_m^{TM} - \varkappa_n^{TE}\right) a} - \frac{\sin 2\left(\varkappa_m^{TM} + \varkappa_n^{TE}\right) a}{2\left(\varkappa_m^{TM} + \varkappa_n^{TE}\right) a} \right]. \tag{3.7.25}$$

В этом случае исходные связанные уравнения (3.7.7)–(3.7.8) принимают следующую симметричную форму:

$$\frac{dA_m^{TM}(z)}{dz} = -i\chi\, e^{i(\beta_m^{TM} - \beta_n^{TE})z} A_n^{TE}(z), \tag{3.7.26}$$

$$\frac{dA_n^{TE}(z)}{dz} = -i\chi\, e^{i(\beta_n^{TE} - \beta_m^{TM})z} A_m^{TM}(z). \tag{3.7.27}$$

Очевидно, что такая форма связанных уравнений соответствует режиму переизлучения попутных мод при их пассивной связи, который характеризуется периодическим обменом мощностью между модами (см. п. Г.10).

Следуя Яриву [9, 11, 16], будем исследовать такую ситуацию, при которой TM_m- и TE_n-моды являются *сильно ограниченными* (см. с. 80) и одного порядка, т. е. $m = n$. При условии сильной ограниченности полей, выраженном неравенствами (1.8.47), почти вырожденные TM_m- и TE_n-моды (при $m = n$) имеют примерно одинаковые фазовые постоянные и эффективные толщины волновода:

$$\beta_m^{TM} \simeq \beta_n^{TE} \simeq k_1 = \omega\sqrt{\varepsilon_1 \mu_0} = n_1 k_{\text{в}} \quad \text{и} \quad d_m^{TM} \simeq d_n^{TE} \simeq 2a, \tag{3.7.28}$$

при этом последнее выражение следует из (1.8.48). Кроме того, сильно ограниченные моды в волноводах с сильной асимметрией имеют такие поперечные волновые числа в волноведущем слое, что

$$2\varkappa_m^{TM} a \simeq 2\varkappa_n^{TE} a \simeq (n+1)\pi/2, \qquad n = 1, 3, 5, \ldots \tag{3.7.29}$$

Это является следствием дисперсионных уравнений (1.7.24) и (1.7.36), что подробно обосновано в монографии [56] (см. там формулу (6.6.38) и рис. 5.12). В силу условий (3.7.29) первое слагаемое в квадратной скобке (3.7.25) равняется единице, а второе обращается в нуль. Использование соотношений (3.7.28) и (3.7.29) приводит (3.7.25) к упрощенному приближенному выражению, справедливому для сильно ограниченных связанных ТМ- и ТЕ-мод:

$$\chi \simeq \frac{k_{\text{в}}}{2}\, n_1^3 (r_{41} E_z^\circ). \tag{3.7.30}$$

Выражение (3.7.30) полностью совпадает с ранее полученным результатом Ярива [9, 11, 16].

3.7.3. Поперечное продольно-периодическое управляющее электрическое поле. Пусть управляющее поле $\mathbf{E}^\circ(y,z)$ однородно поперек структуры и направлено перпендикулярно плоскости слоев, т. е. $\mathbf{E}^\circ(y,z) = \mathbf{e}_y E_y^\circ(z)$, при этом $E_y^\circ(z)$ и $\vartheta_y(z) = n_1^2 r_{41} E_y^\circ(z)$ являются периодическими функциями в продольном направлении с периодом Λ.

Среди коэффициентов связи (3.7.9)–(3.7.16), помимо взаимных объемных коэффициентов c_{mn}^{bulk} и c_{nm}^{bulk} в форме (3.7.13) и (3.7.14), имеются также другие ненулевые коэффициенты: собственный объемный коэффициент c_{nn}^{bulk} в форме (3.7.10) и взаимный поверхностный коэффициент c_{mn}^{surf} в форме (3.7.15) (ср. уравнения (3.7.19)–(3.7.20)):

$$c_{mn}^{bulk} = \frac{i\omega\varepsilon_1 w}{N_m^{TM}}\, n_1^2 (r_{41} E_y^\circ) \int_{-a}^{a} \widehat{E}_{mz}^{TM*}(y)\, \widehat{E}_{nx}^{TE}(y)\, dy, \tag{3.7.31}$$

$$c_{nm}^{bulk} = \frac{i\omega\varepsilon_1 w}{N_n^{TE}}\, n_1^2 (r_{41} E_y^\circ) \int_{-a}^{a} \widehat{E}_{nx}^{TE*}(y)\, \widehat{E}_{mz}^{TM}(y)\, dy, \tag{3.7.32}$$

$$c_{nn}^{bulk} = \frac{i\omega\varepsilon_1 w}{N_n^{TE}}\, n_1^4 (r_{41} E_y^\circ)^2 \int_{-a}^{a} \left|\widehat{E}_{nx}^{TE}(y)\right|^2 dy, \tag{3.7.33}$$

$$c_{mn}^{surf} = -\frac{w}{N_m^{TM}}\, n_1^2 (r_{41} E_y^\circ) \Big[\widehat{H}_{mx}^{TM*}(a)\, \widehat{E}_{nx}^{TE}(a) - \\ - \widehat{H}_{mx}^{TM*}(-a)\, \widehat{E}_{nx}^{TE}(-a) \Big]. \tag{3.7.34}$$

Собственный коэффициент связи (3.7.33) изменяет невозмущенную фазовую постоянную β_n^{TE} моды TE$_n$-типа до модифицированного значения, даваемого формулами (Д.1.3) и (Д.1.9) и равного

$$\beta_n^{TE\prime} = \beta_n^{TE} + i c_{nn}^{bulk} \equiv \beta_n^{TE} - \Delta\beta_n^{TE}. \tag{3.7.35}$$

Этого нет для TM$_m$-моды, так как при $E_x^\circ = 0$ из (3.7.9) и (3.7.11) следует, что $c_{mm}^{bulk} = c_{mm}^{surf} = 0$.

Взаимные коэффициенты объемной связи (3.7.31) и (3.7.32) подчиняются перестановочному соотношению

$$N_m^{TM} c_{mn}^{bulk} = -N_n^{TE} \left(c_{nm}^{bulk}\right)^*, \tag{3.7.36}$$

которое аналогично (3.7.21). В отличие от предыдущего случая, это однако не гарантирует применимость закона сохранения энергии в обычной форме (Д.1.4) без учета кросс-мощности двух связанных мод.

Дело в том, что перестановочное соотношение (3.7.36) совпадает по форме с «эрмитовым» соотношением (Д.1.16) и поэтому гарантирует отсутствие «антиэрмитовой» части у коэффициентов объемной связи (3.7.31) и (3.7.32). Однако имеется ненулевой коэффициент поверхностной связи (3.7.34), который приводит к асимметрии суммарных коэффициентов связи:

$$c_{mn} = c_{mn}^{bulk} + c_{mn}^{surf} \quad \text{и} \quad c_{nm} = c_{nm}^{bulk}. \tag{3.7.37}$$

Как обосновано в приложении Д, именно такая асимметрия коэффициентов связи является тем решающим фактором, который заставляет применять вместо обычной формы (Д.1.4) закона сохранения мощности его модифицированную форму (Д.1.10), учитывающую, кроме собственных мощностей каждой моды, также кросс-мощность, переносимую парой связанных мод.

Установим соответствие между обозначениями, использованными в приложении Д и при настоящем рассмотрении:

$$\begin{aligned} c_{12}^h &\to c_{mn}^{bulk}, & c_{12}^a &\to (c_{mn}^{bulk})^a = 0, \\ c_{21}^h &\to c_{nm}^{bulk}, & c_{21}^a &\to (c_{nm}^{bulk})^a = 0, \\ c_{12}^{as} &\to c_{mn}^{surf}, & c_{21}^{as} &\to c_{nm}^{surf} = 0. \end{aligned} \tag{3.7.38}$$

Тогда произведение коэффициентов связи (Д.2.31) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} c_{12}c_{21} &\equiv \mp \left|c_{eff}\right|^2 e^{i\phi_c} \to \mp \left\{\left|c_{mn}^{bulk}\right|^2 + c_{mn}^{bulk*} c_{mn}^{surf}\right\} = \\ &= \mp \left(c_{mn}^{bulk} + c_{mn}^{surf}\right) c_{mn}^{bulk*} = \mp \left|c_{mn}^{eff}\right|^2 e^{i\phi_c} \equiv c_{mn} c_{nm}. \end{aligned} \tag{3.7.39}$$

Здесь знаки $\mp$ соответствуют нормировке мод на единичную мощность в форме (Д.2.4), при этом

$$N_1 \to N_m^{TM} = +4 \text{ Вт} \quad \text{и} \quad N_2 \to N_n^{TE} = \pm 4 \text{ Вт}, \tag{3.7.40}$$

что обеспечивает последнее тождественное равенство в (3.7.39) при использовании (3.7.36) и (3.7.37).

Как будет ясно из последующего (см. формулу (3.7.51)), три взаимных коэффициента связи (3.7.31), (3.7.32) и (3.7.34) являются вещественными, так что $\phi_c = 0$ в выражении (3.7.39). Это означает, что вместо модифицированной формы (Д.2.25) для корней $\Gamma_{1,2}$ характеристического уравнения можно использовать *обычную форму* (Д.2.15). Следовательно, эти корни имеют обычную структуру, даваемую формулами (Г.9.23)–(Г.9.24) и (Г.9.26)–(Г.9.27), соответственно, для пассивной и активной связи при замене $|c_{12}|$

на $|c_{eff}| \equiv |c_{mn}^{eff}|$. Однако этот факт не исключает необходимости применения закона сохранения мощности в *модифицированной форме* (Д.2.6) с учетом кросс-мощности. Такой закон при нормировке (3.7.40) имеет следующий вид:

$$P(z) = |a_m^{TM}(z)|^2 \pm |a_n^{TE}(z)|^2 + \\ + \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\{N_{mn}\, a_m^{TM*}(z)\, a_n^{TE}(z)\right\} = \mathrm{const}. \qquad (3.7.41)$$

Здесь волновые амплитуды удовлетворяют исходным уравнениям (3.7.7) и (3.7.8), переписанным в виде

$$\frac{da_m^{TM}(z)}{dz} = -i\beta_m^{TM} a_m^{TM}(z) + c_{mn}\, a_n^{TE}(z), \qquad (3.7.42)$$

$$\frac{da_n^{TE}(z)}{dz} = c_{nm}\, a_m^{TM}(z) - i\beta_n^{TE\prime} a_n^{TE}(z). \qquad (3.7.43)$$

Выражение для кросс-нормы N_{mn}, входящей в (3.7.41) и учитывающей кросс-мощность двух связанных мод, следует из общего выражения (Д.1.18) при использовании замен (3.7.38), а именно

$$N_{12} \to N_{mn} = i\frac{N_m^{TM} c_{mn}^{surf}}{\beta_m^{TM} - \left(\beta_n^{TE} - \Delta\beta_n^{TE}\right)}. \qquad (3.7.44)$$

Модифицированная фазовая постоянная $\beta_n^{TE\prime}$ и коэффициенты связи c_{mn} и c_{nm}, входящие в (3.7.42)–(3.7.44), даются формулами (3.7.35) и (3.7.37). Для их вычисления необходимо выразить электрическое поле $\widehat{E}_{mz}^{TM}(y)$ через магнитное поле $\widehat{H}_{mx}^{TM}(y)$, используя (3.4.46). Тогда подстановка (3.7.17) и (3.7.18) в формулы (3.7.31), (3.7.33) и (3.7.34) после ряда преобразований дает

$$c_{nn}^{bulk} = ik_{\text{в}}\, n_1^5 (r_{41} E_y^{\circ})^2 \frac{k_1 a}{\beta_n^{TE} d_n^{TE}} \left(1 - \frac{\sin 4\varkappa_n^{TE} a}{4\varkappa_n^{TE} a}\right), \qquad (3.7.45)$$

$$c_{mn}^{bulk} = k_{\text{в}}\, n_1^3 (r_{41} E_y^{\circ}) \frac{\varkappa_m^{TM} a}{N_m^{TM}} \sqrt{\frac{N_m^{TM}}{\beta_m^{TM} d_m^{TM}} \frac{N_n^{TE}}{\beta_n^{TE} d_n^{TE}}} \times \\ \times \left[\frac{\sin^2\left(\varkappa_m^{TM} - \varkappa_n^{TE}\right)a}{\left(\varkappa_m^{TM} - \varkappa_n^{TE}\right)a} - \frac{\sin^2\left(\varkappa_m^{TM} + \varkappa_n^{TE}\right)a}{\left(\varkappa_m^{TM} + \varkappa_n^{TE}\right)a}\right], \qquad (3.7.46)$$

$$c_{mn}^{surf} = k_{\text{в}}\, n_1^3 (r_{41} E_y^{\circ}) \frac{1}{N_m^{TM}} \sqrt{\frac{N_m^{TM}}{\beta_m^{TM} d_m^{TM}} \frac{N_n^{TE}}{\beta_n^{TE} d_n^{TE}}} \times \\ \times \left[\sin^2\left(\varkappa_m^{TM} + \varkappa_n^{TE}\right)a - \sin^2\left(\varkappa_m^{TM} - \varkappa_n^{TE}\right)a\right], \qquad (3.7.47)$$

где $k_{\text{в}} = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ — волновое число вакуума.

Применение нормировки (3.7.40) при $N_m^{TM} = N_n^{TE} = 4$ Вт для уравнений (3.7.45)–(3.7.47) приводит к окончательным выражениям:

$$\Delta\beta_n^{TE} \equiv -ic_{nn}^{bulk} = k_\text{в}\, n_1^5 (r_{41} E_y^\circ)^2 \frac{k_1 a}{\beta_n^{TE} d_n^{TE}} \left(1 - \frac{\sin 4\varkappa_n^{TE} a}{4\varkappa_n^{TE} a}\right), \tag{3.7.48}$$

$$\begin{gathered} c_{mn} \equiv c_{mn}^{bulk} + c_{mn}^{surf} = k_\text{в}\, n_1^3 (r_{41} E_y^\circ) \frac{\varkappa_n^{TE} a}{\sqrt{\beta_m^{TM} d_m^{TM}\, \beta_n^{TE} d_n^{TE}}} \times \\ \times \left[\frac{\sin^2(\varkappa_m^{TM} + \varkappa_n^{TE})a}{(\varkappa_m^{TM} + \varkappa_n^{TE})a} + \frac{\sin^2(\varkappa_m^{TM} - \varkappa_n^{TE})a}{(\varkappa_m^{TM} - \varkappa_n^{TE})a}\right], \end{gathered} \tag{3.7.49}$$

$$\begin{gathered} c_{nm} \equiv c_{nm}^{bulk} = -c_{mn}^{bulk} = k_\text{в}\, n_1^3 (r_{41} E_y^\circ) \frac{\varkappa_m^{TM} a}{\sqrt{\beta_m^{TM} d_m^{TM}\, \beta_n^{TE} d_n^{TE}}} \times \\ \times \left[\frac{\sin^2(\varkappa_m^{TM} + \varkappa_n^{TE})a}{(\varkappa_m^{TM} + \varkappa_n^{TE})a} - \frac{\sin^2(\varkappa_m^{TM} - \varkappa_n^{TE})a}{(\varkappa_m^{TM} - \varkappa_n^{TE})a}\right]. \end{gathered} \tag{3.7.50}$$

Из выражения (3.7.48) следует, что добавка $\Delta\beta_n^{TE}$, будучи второго порядка относительно величины $(r_{41} E_y^\circ)$, практически может быть опущена из-за малости электрооптических коэффициентов: например, для GaAs, имеющего $r_{41} \simeq (1{,}1\text{–}1{,}5) \times 10^{-12}$ м/В (см. табл. 7.3 в [16]), получаем $(r_{41} E_y^\circ)^2 < 10^{-12}$ при полях $E_y^\circ < 10^6$ В/м.

В отличие от $\Delta\beta_n^{TE}$, коэффициенты связи (3.7.49) и (3.7.50) содержат величину $(r_{41} E_y^\circ)$ в первой степени и действительно, будучи вещественными, обеспечивают фазовый угол $\phi_c = 0$ в соотношении (3.7.39), поскольку

$$\begin{gathered} c_{mn} c_{nm} \equiv -|c_{mn}^{eff}|^2 - k_\text{в}^2\, n_1^6 (r_{41} E_y^\circ)^2 \frac{\varkappa_m^{TM} a\, \varkappa_n^{TE} a}{\beta_m^{TM} d_m^{TM}\, \beta_n^{TE} d_n^{TE}} \times \\ \times \left[\left(\frac{\sin^2(\varkappa_m^{TM} - \varkappa_n^{TE})a}{(\varkappa_m^{TM} - \varkappa_n^{TE})a}\right)^2 - \left(\frac{\sin^2(\varkappa_m^{TM} + \varkappa_n^{TE})a}{(\varkappa_m^{TM} + \varkappa_n^{TE})a}\right)^2\right] < 0. \end{gathered} \tag{3.7.51}$$

Здесь отрицательные значения соответствуют выбору нормировки (3.7.40) при N_m^{TM} и N_n^{TE} одного знака. В этом случае корни $\Gamma_{1,2}$ характеристического уравнения действительно могут быть взяты в *обычной форме* (Д.2.15) (см. известные формулы (Г.9.23)–(Г.9.24)), соответствующей пассивной связи с заменой $|c_{12}|$ на $|c_{eff}| \equiv |c_{mn}^{eff}|$.

Все вышеприведенные формулы, включая кросс-норму (3.7.44) с использованием (3.7.47) и (3.7.48), являются достаточно общими для того, чтобы применять их к разнообразным физическим ситуациям.

Для обеспечения эффективного взаимодействия между TM_m- и TE_n-модами необходимо выполнить условие фазового согласования $\beta_m^{TM} \simeq \beta_n^{TE}$.

Если поперечное управляющее поле продольно-однородное ($E_y^\circ(z) = \text{const}$), то единственной возможностью для этого является использование сильно ограниченных TM_m- и TE_n-мод одного порядка ($m = n$). Такие почти вырожденные моды имеют примерно равные фазовые постоянные и эффективные толщины волновода, даваемые формулами (3.7.28), а их поперечные волновые числа в слабонаправляющем слое сильно асимметричного волновода даются формулой (3.7.29).

Однако, в отличие от предыдущего случая однородного продольного поля ($E_z^\circ(z) = \text{const}$), подстановка (3.7.29) в выражения (3.7.49) и (3.7.50) приводит к тому, что

$$c_{mn} \simeq c_{nm} \approx 0 \quad \text{для сильно ограниченных } \text{TM}_m\text{- и } \text{TE}_n\text{-мод.} \tag{3.7.52}$$

Такое противоречие с ненулевым результатом (3.7.30) для предыдущего случая вполне объяснимо. Дело в том, что при условии сильной ограниченности полей, выраженном неравенствами (1.8.47), формула (3.7.29) дает следующие значения поперечных волновых чисел в волноведущем слое:

$$\varkappa_m^{TM} \simeq \varkappa_n^{TE} \equiv \varkappa_n = \frac{(n+1)\pi}{4a} = \frac{\pi}{2a},\ \frac{\pi}{a},\ \frac{3\pi}{2a},\ \ldots \qquad n = 1,\ 3,\ 5,\ \ldots \tag{3.7.53}$$

Тогда интеграл перекрытия модальных полей при продольном управляющем поле E_z°, входящий в (3.7.19)–(3.7.20) и содержащий произведение

$$E_{my}^{TM*}(y)E_{nx}^{TE}(y) \propto \sin \varkappa_m^{TM}(y-a) \sin \varkappa_n^{TE}(y-a) \simeq \sin^2 \varkappa_n(y-a),$$

становится максимальным. Эта ситуация отличается от случая с поперечным управляющим полем E_y°, когда произведение модальных полей,

$$E_{mz}^{TM*}(y)E_{nx}^{TE}(y) \propto \cos \varkappa_m^{TM}(y-a) \sin \varkappa_n^{TE}(y-a) \simeq \cos \varkappa_n(y-a) \sin \varkappa_n(y-a),$$

входящее в (3.7.31)–(3.7.32), дает нулевой интеграл перекрытия полей.

В общем случае невозмущенные фазовые постоянные различны даже для мод одного порядка ($\beta_m^{TM} \neq \beta_n^{TE}$). Поэтому создать эффективную связь между ними практически невозможно. Тогда единственное, что остается, это воспользоваться особенностями периодической связи, возникающей при $E_y^\circ(z) = E_y^\circ(z + m\Lambda)$. В принципе, такая ситуация подобна той, что была рассмотрена в п. 3.4 для периодического гофрированного волновода. Несомненно, такая же возможность существует и при использовании периодического продольного поля, когда $E_z^\circ(z) = E_z^\circ(z + m\Lambda)$, однако реализовать эту ситуацию на практике сложнее, чем при $E_y^\circ(z) = E_y^\circ(z + m\Lambda)$.

Действительно, создать периодическое поперечное поле $E_y^\circ(z)$ легко с помощью встречно-штыревой электродной структуры, расположенной на поверхности волноведущего слоя (при $y = a$ на рис. 1.8), как показано на рис. 11.17 в книге [16]. В реальных условиях толщина $2a$ волноведущего слоя много меньше периода Λ электродной структуры. Тогда знакочередующиеся потенциалы электродов создают периодическое электрическое поле в волноведущем электрооптическом слое, приближенно описываемое следующей формулой (в координатах рис. 1.8, см. также формулу (11.7-17) в [16]):

$$\mathbf{E}^{\circ}(z) = \mathbf{e}_y \frac{V}{d} f(z) \equiv \mathbf{e}_y E_y^{\circ}(z), \tag{3.7.54}$$

где V — приложенное напряжение и d — межэлектродный зазор.

Периодическая прямоугольная функция $f(z)$, введенная в работе [16], связана с единичной импульсной функцией $\Pi_{1/2}(z)$, изображенной на рис. 3.2 *б*, соотношением

$$f(z) \equiv 2\,\Pi_{1/2}(z) - 1 = \sum_{s=-\infty}^{\infty} F_s\, e^{-isKz}. \tag{3.7.55}$$

Коэффициенты Фурье F_s для функции (3.7.55) вытекают из фурье-разложения функции $\Pi_{1/2}(z)$ в виде (3.3.29)–(3.3.30), тогда $F_0 = 0$ и

$$F_s = 2G_s = \frac{i\,(1-\cos s\pi)}{s\pi} = \begin{cases} 2i/s\pi & \text{при} \quad s = \pm 1,\, \pm 3, \ldots \\ 0 & \text{при} \quad s = \pm 2,\, \pm 4, \ldots \end{cases} \tag{3.7.56}$$

Подстановка (3.7.55)–(3.7.56) в (3.7.54) дает следующее разложение Фурье для поперечного управляющего поля:

$$E_y^{\circ}(z) = \frac{V}{d} \sum_{s=-\infty}^{\infty} F_s\, e^{-isKz} = \frac{V}{d} \sum_{\substack{s=-\infty \\ s\neq 0,\pm 2,\pm 4,\ldots}}^{\infty}{}' \frac{2i}{s\pi}\, e^{-isKz} \equiv$$

$$\equiv \frac{V}{d} \sum_{\substack{s=-\infty \\ s\neq 0}}^{\infty}{}' \frac{i\,(1-\cos s\pi)}{s\pi}\, e^{-isKz}. \tag{3.7.57}$$

Применение разложения (3.7.57) позволяет записать коэффициенты связи (3.7.49) и (3.7.50) в следующей форме:

$$c_{mn}(z) = \widehat{c}_{mn} \sum_{s=-\infty}^{\infty} F_s\, e^{-isKz}, \tag{3.7.58}$$

$$c_{nm}(z) = \widehat{c}_{nm} \sum_{s=-\infty}^{\infty} F_{-s}\, e^{isKz}, \tag{3.7.59}$$

где не зависящие от z коэффициенты связи равняются

$$\widehat{c}_{mn} = k_{\text{в}}\, n_1^3 (r_{41} V/d) \frac{\varkappa_n^{TE} a}{\sqrt{\beta_m^{TM} d_m^{TM}\, \beta_n^{TE} d_n^{TE}}} \times$$

$$\times \left[\frac{\sin^2\left(\varkappa_m^{TM} + \varkappa_n^{TE}\right)a}{\left(\varkappa_m^{TM} + \varkappa_n^{TE}\right)a} + \frac{\sin^2\left(\varkappa_m^{TM} - \varkappa_n^{TE}\right)a}{\left(\varkappa_m^{TM} - \varkappa_n^{TE}\right)a} \right], \tag{3.7.60}$$

$$\widehat{c}_{nm} = k_{\text{в}} n_1^3 (r_{41} V/d) \frac{\varkappa_m^{TM} a}{\sqrt{\beta_m^{TM} d_m^{TM} \beta_n^{TE} d_n^{TE}}} \times$$

$$\times \left[\frac{\sin^2\left(\varkappa_m^{TM} + \varkappa_n^{TE}\right) a}{\left(\varkappa_m^{TM} + \varkappa_n^{TE}\right) a} - \frac{\sin^2\left(\varkappa_m^{TM} - \varkappa_n^{TE}\right) a}{\left(\varkappa_m^{TM} - \varkappa_n^{TE}\right) a} \right]. \tag{3.7.61}$$

Подставляя коэффициенты связи (3.7.58) и (3.7.59) в уравнения связанных мод (3.7.42)–(3.7.43) и полагая в них $\beta_n^{TE\prime} = \beta_n^{TE} - \Delta\beta_n^{TE} \simeq \beta_n^{TE}$, приходим к следующей системе уравнений для амплитуд возбуждения TM_m- и TE_n-мод (ср. уравнение (3.4.1)):

$$\frac{dA_m^{TM}(z)}{dz} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} c_{mn}^{(s)} e^{i\Delta\beta_{mn}^{(s)} z} A_n^{TE}(z), \tag{3.7.62}$$

$$\frac{dA_n^{TE}(z)}{dz} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} c_{nm}^{(-s)} e^{i\Delta\beta_{nm}^{(-s)} z} A_m^{TM}(z), \tag{3.7.63}$$

где введены обозначения (ср. уравнения (3.4.2) и (3.4.3))

$$c_{mn}^{(s)} = \widehat{c}_{mn} F_s\,, \qquad c_{nm}^{(-s)} = \widehat{c}_{nm} F_{-s}\,, \tag{3.7.64}$$

$$\Delta\beta_{mn}^{(s)} = \beta_m^{TM} - \beta_n^{TE} - sK = -\Delta\beta_{nm}^{(-s)}. \tag{3.7.65}$$

Как и ранее (см. п. 3.4), условие фазового согласования,

$$\beta_m^{TM} - \beta_n^{TE} = sK \quad \text{при} \quad sK = \pm \frac{2\pi|s|}{\Lambda}, \tag{3.7.66}$$

позволяет отобрать из уравнений (3.7.62)–(3.7.63) две TM_m- и TE_n-моды, эффективно связанные парой уравнений типа (3.4.8)–(3.4.9), и исследовать взаимодействие между ними в любом s-м порядке.

Основные особенности, присущие периодической связи дискретных мод в гофрированном волноводе, рассмотренные в п. 3.4.1, остаются справедливыми и в применении к периодической электрооптической связи.

3.8. Тензоры объемной и поверхностной связи мод за счет фотоупругого эффекта

В последующих параграфах этой главы будем исследовать динамические (зависящие от времени) диэлектрические возмущения волноведущей среды для изучения параметрического взаимодействия оптических мод. Среди них:

а) *акустооптическое взаимодействие*, создаваемое фотоупругим эффектом в кристаллах с распространяющейся звуковой волной (пп. 3.8–3.10),

б) *магнитооптическое взаимодействие*, вызываемое магнитооптическими эффектами Фарадея и Коттона–Мутона в намагниченных ферритах с распространяющейся спиновой волной (пп. 3.11–3.12).

Эти оптические взаимодействия создают физическую основу современных научно-технических направлений, известных как акустооптика [16, 63–66] и магнитооптика [58, 67–70].

Как следует из п. 3.6, возмущение оптической индикатрисы, вызванное электрическим полем $\mathbf{E}$ и упругой деформацией $\overline{\mathbf{S}}$, описывается общим уравнением (3.6.4), которое в пренебрежении электрооптическим эффектом ($r_{ijk} = 0$) принимает следующий вид:

$$\Delta\eta_{ij} = p_{ijkl}S_{kl} \qquad \text{или} \qquad \Delta\overline{\boldsymbol{\eta}} = \overline{\overline{\mathbf{p}}} : \overline{\mathbf{S}}, \tag{3.8.1}$$

где p_{ijkl} — элементы фотоупругого тензора $\overline{\overline{\mathbf{p}}}$ четвертого ранга. Компоненты S_{kl} тензора деформации $\overline{\mathbf{S}}$ определены в виде (3.6.5).

Тензор диэлектрического возмущения $\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ связан с тензором непроницаемости $\Delta\overline{\boldsymbol{\eta}}$ общим соотношением (3.6.7) (или его частной формой (3.6.8) для оптически изотропных кристаллов кубической системы), которое в рассматриваемом случае фотоупругости имеет вид

$$\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\left[\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}\cdot\left(\overline{\overline{\mathbf{p}}} : \overline{\mathbf{S}}\right)\cdot\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}\right] = -\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon_0}\left(\overline{\overline{\mathbf{p}}} : \overline{\mathbf{S}}\right), \tag{3.8.2}$$

где ε_0 — электрическая постоянная. Последнее выражение в (3.8.2) соответствует оптически изотропным кристаллам, в которых $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \varepsilon\overline{\mathbf{I}}$.

Акустическая волна, распространяющаяся в фотоупругой среде на частоте Ω (играющей роль частоты накачки ω_p), модулирует диэлектрическую проницаемость в соответствии с (3.8.2). Это обеспечивает параметрическую связь между оптическими модами, соответствующими разным комбинационным частотам $\omega_\nu = \omega + \nu\Omega$, $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (см. уравнение (2.10.20)).

В общем случае поле упругих деформаций $\overline{\mathbf{S}}(\mathbf{r}, t)$ включает как неизменные во времени статические деформации $\overline{\mathbf{S}}_0(\mathbf{r})$, так и динамические деформации $\overline{\mathbf{S}}_{dyn}(\mathbf{r}, t)$, вызванные, в частности, распространением акустической волны с частотой Ω и волновым вектором $\mathbf{K}$. Тогда результирующий тензор деформаций равняется

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{S}}(\mathbf{r}, t) &= \overline{\mathbf{S}}_0(\mathbf{r}) + \overline{\mathbf{S}}_{dyn}(\mathbf{r}, t) = \overline{\mathbf{S}}_0(\mathbf{r}) + \mathrm{Re}\left\{\delta\overline{\mathbf{S}}(\mathbf{r})\, e^{i\Omega t}\right\} \equiv \\ &\equiv \overline{\mathbf{S}}_0(\mathbf{r}) + \mathrm{Re}\left\{\widehat{\overline{\mathbf{S}}}(\mathbf{r}_t)\, e^{i(\Omega t - \mathbf{K}\cdot\mathbf{r})}\right\}.\end{aligned} \tag{3.8.3}$$

Здесь $\delta\overline{\mathbf{S}}(\mathbf{r}) \equiv \widehat{\overline{\mathbf{S}}}(\mathbf{r}_t)\exp(-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r})$ означает *комплексную амплитуду* динамической деформации $\overline{\mathbf{S}}_{dyn}(\mathbf{r}, t)$, при этом колпачок отмечает зависимость только от поперечного радиуса-вектора $\mathbf{r}_t$, лежащего в плоскости, перпендикулярной направлению волнового распространения.

В этой ситуации диэлектрический тензор (3.8.2) играет роль полного (статического и динамического) тензора возмущения $\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_\Sigma(\mathbf{r}, t)$, даваемого выражениями (2.10.17) и (2.10.19). По аналогии с этими выражениями можно записать этот тензор в следующем виде:

$$\begin{aligned}\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_\Sigma(\mathbf{r}, t) &= \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}\,(\mathbf{r}) + \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{dyn}(\mathbf{r}, t) \equiv \\ &\equiv \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}\,(\mathbf{r}) + \mathrm{Re}\left\{2\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{r})\, e^{i\Omega t}\right\},\end{aligned} \tag{3.8.4}$$

при этом $\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ означает *комплексную полуамплитуду* динамического возмущения $\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{dyn}(\mathbf{r},t)$.

Подставляя (3.8.3) в (3.8.2) и сравнивая с формулой (3.8.4), получаем:

- *статический тензор* диэлектрического возмущения

$$\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}\,(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\left[\,\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}\cdot\left(\overline{\overline{\mathbf{p}}}:\overline{\mathbf{S}}_0\right)\cdot\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}\,\right] = -\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon_0}\left(\overline{\overline{\mathbf{p}}}:\overline{\mathbf{S}}_0\right), \tag{3.8.5}$$

- *динамический тензор* диэлектрического возмущения

$$\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}\,(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2\varepsilon_0}\left[\,\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}\cdot\left(\overline{\overline{\mathbf{p}}}:\delta\overline{\mathbf{S}}\right)\cdot\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}\,\right] \equiv \widehat{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_S(\mathbf{r}_t)\,e^{-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}, \tag{3.8.6}$$

$$\widehat{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_S = -\frac{1}{2\varepsilon_0}\left[\,\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}\cdot\left(\overline{\overline{\mathbf{p}}}:\widehat{\overline{\mathbf{S}}}\right)\cdot\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}\,\right] = -\frac{\varepsilon^2}{2\varepsilon_0}\left(\overline{\overline{\mathbf{p}}}:\widehat{\overline{\mathbf{S}}}\right). \tag{3.8.7}$$

Последнее равенство в выражениях (3.8.5) и (3.8.7) соответствует оптически изотропным средам, рассматриваемым ниже.

Для того, чтобы получить *тензоры связи* — объемные ($\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c$, $\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c$) и поверхностные ($\Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c$, $\delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c$), определенные общими формулами (3.1.16)–(3.1.17) и (3.1.20)–(3.1.21), — необходимо в эти формулы подставить выражения (3.8.5)–(3.8.7) для статического и динамического *тензоров возмущения*.

В последующем анализе не будем рассматривать статически-деформированное состояние фотоупругой среды, полагая $\overline{\mathbf{S}}_0 = 0$, так что $\overline{\mathbf{S}} = \overline{\mathbf{S}}_{dyn}$. В итоге этого получаем следующие результаты:

а) *статические тензоры* возмущения и связи исчезают:

$$\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c = \Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c = 0\,, \tag{3.8.8}$$

б) *динамический тензор объемной связи* $\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c$ в виде (3.1.17) становится равным тензору динамического возмущения в виде (3.8.6):

$$\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c = \delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} \equiv \widehat{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_S\,e^{-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}} = -\frac{\varepsilon^2}{2\varepsilon_0}\left(\overline{\overline{\mathbf{p}}}:\widehat{\overline{\mathbf{S}}}\right)e^{-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}, \tag{3.8.9}$$

в) *динамический тензор поверхностной связи* $\delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c$ в виде (3.1.21) с учетом (3.8.6) и (3.8.8) принимает вид

$$\delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c = \frac{\tau_b\mathbf{e}_z\cdot\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}\,(L_b)}{\varepsilon(L_b)} \equiv (\mathbf{e}_z\times\mathbf{n}_b)\,\frac{\mathbf{e}_z\cdot\,\widehat{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_S(L_b)}{\varepsilon(L_b)}\,e^{-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}. \tag{3.8.10}$$

Здесь $\varepsilon(L_b)$, $\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}(L_b)$ и $\widehat{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_S(L_b)$ — значения соответствующих величин, взятые в точках контура L_b, ограничивающего область S_b диэлектрических возмущений, с единичным нормальным вектором $\mathbf{n}_b$, направленным *наружу* по отношению к области S_b.

Следующий параграф имеет дело с безграничной фотоупругой средой, так что для нее остается единственно работающим динамический тензор объемной связи (3.8.9). Тензор поверхностной связи (3.8.10) вступает в действие при исследовании ультразвуковой дифракции оптических направляемых мод в планарных волноведущих структурах (п. 3.10).

3.9. Дифракция света на звуке в фотоупругой среде

3.9.1. Уравнения фотоупругой связи для неограниченной среды. В этом параграфе основное внимание уделяется рассмотрению особенностей дифракции света на звуке в безграничной фотоупругой среде, включая режимы дифракции Рамана–Ната и дифракции Брэгга. Полученные результаты будут затем обобщены на фотоупругое взаимодействие света и звука в тонкопленочных оптических волноводах.

Применим теорию связанных мод, разработанную в п. 3.2, для анализа дифракции плоских электромагнитных волн на акустической волне, распространяющейся в фотоупругой среде. Звуковая волна с частотой Ω выполняет функцию волны накачки, изменяющей параметры среды. Как следует из пп. 2.10 и Г.8, это обеспечивает параметрическую связь между оптическими модами комбинационных частот (ср. формулу (2.10.20))

$$\omega_\nu = \omega + \nu\Omega, \qquad \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{3.9.1}$$

Рассматриваемая диэлектрическая среда предполагается *оптически изотропной* со скалярными параметрами ε и μ_0. На фиксированной частоте ω_ν *собственной* модой такой среды является плоская электромагнитная волна с волновым вектором $\mathbf{k}^{(\nu)}$ *произвольного направления* (вырождение по направлению распространения) и *фиксированной величины*, равной $k^{(\nu)} = \omega_\nu\sqrt{\varepsilon\mu_0}$, которая удовлетворяет характеристическому уравнению изотропной среды, записанному в виде

$$\left(k^{(\nu)}\right)^2 \equiv \left(k_x^{(\nu)}\right)^2 + \left(k_y^{(\nu)}\right)^2 + \left(k_z^{(\nu)}\right)^2 = \omega_\nu^2\varepsilon\mu_0 \equiv n^2(\omega_\nu/c)^2. \tag{3.9.2}$$

Следовательно, система собственных мод безграничной изотропной среды представляет собой плоские волны с непрерывным *угловым спектром* волновых векторов $\mathbf{k}^{(\nu)}$, меняющихся по направлению. Одиночная собственная мода характеризуется поперечными компонентами волнового вектора $\mathbf{k}^{(\nu)}$, обозначенными совокупно как $\varkappa \equiv \{k_x^{(\nu)}, k_y^{(\nu)}\}$. Совокупность этих величин образует независимую переменную непрерывного спектра, которая сначала будет обозначена в виде индекса, а затем введена в аргумент соответствующих функций.

Собственные поля $\varkappa$-й моды непрерывного углового спектра имеют следующий вид (ср. уравнения (2.10.43)–(2.10.44)):

$$\mathbf{E}_\varkappa^{(\nu)}(x,y,z,t) = \mathbf{E}_0^{(\nu)} e^{i(\omega_\nu t - \mathbf{k}^{(\nu)}\cdot\mathbf{r})} \equiv \widehat{\mathbf{E}}_\varkappa^{(\nu)}(x,y)\, e^{i(\omega_\nu t - \beta_\varkappa^{(\nu)} z)}, \tag{3.9.3}$$

$$\mathbf{H}_\varkappa^{(\nu)}(x,y,z,t) = \mathbf{H}_0^{(\nu)} e^{i(\omega_\nu t - \mathbf{k}^{(\nu)}\cdot\mathbf{r})} \equiv \widehat{\mathbf{H}}_\varkappa^{(\nu)}(x,y)\, e^{i(\omega_\nu t - \beta_\varkappa^{(\nu)} z)}, \tag{3.9.4}$$

где $\beta_\varkappa^{(\nu)} \equiv k_z^{(\nu)}$ — продольная фазовая постоянная непрерывного спектра.

Электрическое поле $\mathbf{E}_0^{(\nu)}$ является *нормировочным полем*, которое определяет норму $\varkappa$-й моды, вычисленную ниже (см. уравнение (3.9.25)). По аналогии с волноводными структурами, для неограниченной среды также введены *мембранные функции* по отношению к выбранному направлению оси z (т. е. не зависящие от z, что, как и ранее, отмечается колпачком):

$$\widehat{\mathbf{E}}_{\varkappa}^{(\nu)}(x,y) = \mathbf{E}_0^{(\nu)} e^{-i(k_x^{(\nu)}x + k_y^{(\nu)}y)} \equiv \widehat{\mathbf{E}}^{(\nu)}(x,y;\, k_x^{(\nu)}, k_y^{(\nu)}) \equiv \widehat{\mathbf{E}}^{(\nu)}(x,y;\varkappa), \tag{3.9.5}$$

$$\widehat{\mathbf{H}}_{\varkappa}^{(\nu)}(x,y) = \mathbf{H}_0^{(\nu)} e^{-i(k_x^{(\nu)}x + k_y^{(\nu)}y)} \equiv \widehat{\mathbf{H}}^{(\nu)}(x,y;\, k_x^{(\nu)}, k_y^{(\nu)}) \equiv \widehat{\mathbf{H}}^{(\nu)}(x,y;\varkappa). \tag{3.9.6}$$

Мембранные функции электрического поля в виде (3.9.5) и магнитного поля в виде (3.9.6) связаны уравнениями Максвелла, которые дают следующее соотношение между ними:

$$\widehat{\mathbf{H}}_{\varkappa}^{(\nu)} = \frac{1}{\omega_\nu \mu_0}\left(\mathbf{k}^{(\nu)} \times \widehat{\mathbf{E}}_{\varkappa}^{(\nu)}\right). \tag{3.9.7}$$

Пусть область фотоупругого взаимодействия света и звука располагается между двумя параллельными плоскостями, перпендикулярными оси z, как показано на рис. 3.6. В пределах этой области существует звуковой луч конечной ширины L, распространяющийся с групповой скоростью параллельно граничным плоскостям $z = 0$ и $z = L$, что показано фигурной стрелкой. Конечная ширина звукового луча обеспечивает угловой разброс акустических волновых векторов $\mathbf{K}$ ($K = 2\pi/\Lambda$), изображенных двумя стрелками (более детальное обсуждение этого вопроса можно найти в п. 9.6 книги [16]). Плоская световая волна падает на левую границу $z = 0$ звукового луча. Частота света ω соответствует спектральной компоненте (3.9.1) с номером $\nu = 0$ из *дискретного спектра* комбинационных частот ω_ν, тогда как волновой вектор света $\mathbf{k}^{(0)}$ принадлежит *непрерывному угловому спектру* волновых векторов безграничного пространства.

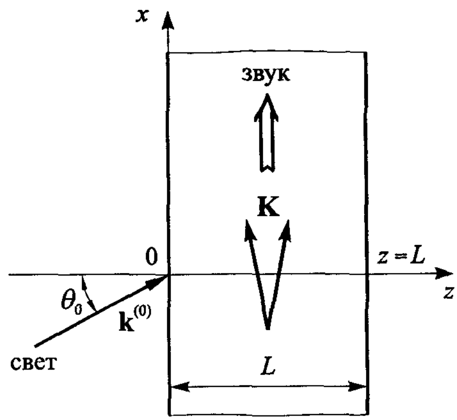


Рис. 3.6. Геометрическая иллюстрация фотоупругого взаимодействия между светом с волновым вектором $\mathbf{k}^{(0)}$ и звуковым лучом конечной ширины L, обеспечивающей угловой разброс акустических волновых векторов $\mathbf{K}$

Следовательно, в области фотоупругого взаимодействия ($0 < z < L$) полное электрическое поле, *поперечное* к оси z (направленной по нормали к границам звукового луча), может быть представлено посредством соотношений (2.10.21) и (2.10.38) (с опусканием суммирования по несуществующему спектру дискретных мод) в следующей спектральной форме:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_t(x,y,z,t) &= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_t^{(\nu)}(x,y,z)\, e^{i\omega_\nu t} = \\ &= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} a_\varkappa^{(\nu)}(z)\, \widehat{\mathbf{E}}_{\varkappa t}^{(\nu)}(x,y)\, e^{i\omega_\nu t}\, d\varkappa.\end{aligned} \tag{3.9.8}$$

В выражении (3.9.8) суммирование проводится по дискретному спектру комбинационных частот $\omega_\nu = \omega + \nu\Omega$, $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, а интегрирование выполняется по непрерывному спектру волновых чисел $\varkappa$ (иногда называемых пространственными частотами). Переменная интегрирования по непрерывному спектру (являющаяся набором поперечных волновых чисел $\varkappa \equiv \{k_x, k_y\}$) указана здесь, аналогично разложению (2.10.38), в виде индекса. Однако пределы интегрирования для плоских волн безграничной среды берутся в выражении (3.9.8) от $-\infty$ до ∞, что отличает его от разложения (2.10.38), записанного для волноведущих структур.

Модальные амплитуды $a_\varkappa^{(\nu)}(z)$ непрерывного спектра, входящие в спектральное представление поля (3.9.8), находятся из общих уравнений связанных мод (3.2.20). Изначально они были выведены для непрерывных мод открытой волноведущей структуры и теперь переписываются для рассматриваемого случая (с опусканием суммирования по несуществующему спектру дискретных мод) в следующем виде:

$$\frac{da_\varkappa^{(\nu)}}{dz} + i\beta_\varkappa^{(\nu)} a_\varkappa^{(\nu)} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(c_{\varkappa\varkappa'}^{(\nu,\nu-1)} a_{\varkappa'}^{(\nu-1)} + c_{\varkappa\varkappa'}^{(\nu,\nu+1)} a_{\varkappa'}^{(\nu+1)} \right) d\varkappa'. \tag{3.9.9}$$

По сравнению с исходным уравнением (3.2.20), в уравнение (3.9.9) не вошел коэффициент связи $c_{\varkappa\varkappa'}^{(\nu,\nu)}$ в форме (3.2.21) из-за отсутствия статического тензора (3.8.8).

С учетом того, что для безграничной среды отсутствует также поверхностный тензор (3.8.10), коэффициенты связи, вошедшие в (3.9.9), равняются (3.2.22) и (3.2.23) и принимают следующий вид:

$$c_{\varkappa\varkappa'}^{(\nu,\nu-1)} = -\frac{i\omega_\nu}{N_\varkappa^{(\nu)}} \int\limits_{S_b} \left(\widehat{\mathbf{E}}_\varkappa^{(\nu)*} \cdot \delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c \cdot \widehat{\mathbf{E}}_{\varkappa'}^{(\nu-1)} \right) dS, \tag{3.9.10}$$

$$c_{\varkappa\varkappa'}^{(\nu,\nu+1)} = -\frac{i\omega_\nu}{N_\varkappa^{(\nu)}} \int\limits_{S_b} \left(\widehat{\mathbf{E}}_\varkappa^{(\nu)*} \cdot \delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^{\,*} \cdot \widehat{\mathbf{E}}_{\varkappa'}^{(\nu+1)} \right) dS. \tag{3.9.11}$$

Здесь непрерывные переменные интегрирования $\varkappa$ и $\varkappa'$ представляют собой следующие комбинации поперечных волновых чисел:

$$\varkappa \equiv \{k_x^{(\nu)}, k_y^{(\nu)}\} \quad \text{и} \quad \varkappa' \equiv \{k_x^{(\nu\mp 1)}, k_y^{(\nu\mp 1)}\}. \tag{3.9.12}$$

Для последующего рассмотрения удобно вернуться к старым обозначениям, использованным в (2.10.36)–(2.10.37), и перенести переменные интегрирования $\varkappa$ и $\varkappa'$ из индексов в аргументы соответствующих функций, как показано в соотношениях (2.10.43)–(2.10.45). Кроме того, из (3.9.8)–(3.9.12) следует, что входящие в них величины имеют такие размерности:

- волновые амплитуды $a_{\varkappa}^{(\nu)}(z) \equiv \overline{\overline{a}}^{(\nu)}(z;\varkappa)$ — м^2,
- коэффициенты связи $c_{\varkappa\varkappa'}^{(\nu,\nu\mp1)} \equiv \overline{\overline{c}}^{(\nu,\nu\mp1)}(\varkappa,\varkappa')$ — м,
- модальные нормы $N_{\varkappa}^{(\nu)} \equiv \overline{\overline{N}}^{(\nu)}(\varkappa)$ — Вт/м^2.

Величины с такими размерностями были обозначены двойными чертами сверху в табл. 1.1 (см. п. 1.9). Поэтому будем делать следующие замены в наших обозначениях:

$$A_{\varkappa}^{(\nu)}(z) \to \overline{\overline{A}}^{(\nu)}(z;\varkappa), \quad N_{\varkappa}^{(\nu)} \to \overline{\overline{N}}^{(\nu)}(\varkappa), \quad c_{\varkappa\varkappa'}^{(\nu,\nu\mp1)} \to \overline{\overline{c}}^{(\nu,\nu\mp1)}(\varkappa,\varkappa'). \tag{3.9.13}$$

Амплитуда возбуждения $\overline{\overline{A}}^{(\nu)}(z;\varkappa)$, введенная здесь, связана с волновой амплитудой $\overline{\overline{a}}^{(\nu)}(z;\varkappa)$ соотношением (2.10.45), а именно

$$\overline{\overline{a}}^{(\nu)}(z;\varkappa) = \overline{\overline{A}}^{(\nu)}(z;\varkappa)\, e^{-ik_z^{(\nu)}(\varkappa)z}, \tag{3.9.14}$$

где $k_z^{(\nu)}(\varkappa)$ — продольное волновое число непрерывного спектра, рассматриваемое как функция независимой переменной $\varkappa \equiv \{k_x^{(\nu)},\, k_y^{(\nu)}\}$. Тогда из (3.9.2) следует, что

$$k_z^{(\nu)}(\varkappa) \equiv k_z^{(\nu)}\big(k_x^{(\nu)}, k_y^{(\nu)}\big) = \sqrt{\omega_\nu^2\varepsilon\mu_0 - \big(k_x^{(\nu)}\big)^2 - \big(k_y^{(\nu)}\big)^2}\,. \tag{3.9.15}$$

Использование замен (3.9.13) в предыдущих формулах приводит к их записи в новых обозначениях:

а) *спектральное разложение* электрического поля (вместо выражения (3.9.8))

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_t(x,y,z,t) &= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_t^{(\nu)}(x,y,z)\, e^{i\omega_\nu t} = \\ &= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\overline{A}}^{(\nu)}(z;\varkappa)\, \widehat{\mathbf{E}}_t^{(\nu)}(x,y;\varkappa)\, e^{i[\omega_\nu t - k_z^{(\nu)}(\varkappa)z]}\, d\varkappa;\end{aligned} \tag{3.9.16}$$

б) *уравнения связанных мод* (вместо выражения (3.9.9))

$$\begin{aligned}\frac{d\overline{\overline{A}}^{(\nu)}(z;\varkappa)}{dz} &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\overline{c}}^{(\nu,\nu-1)}(\varkappa,\varkappa')\, e^{i[k_z^{(\nu)}(\varkappa) - k_z^{(\nu-1)}(\varkappa')]\,z}\, \overline{\overline{A}}^{(\nu-1)}(z;\varkappa')\, d\varkappa' + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\overline{c}}^{(\nu,\nu+1)}(\varkappa,\varkappa')\, e^{i[k_z^{(\nu)}(\varkappa) - k_z^{(\nu+1)}(\varkappa')]\,z}\, \overline{\overline{A}}^{(\nu+1)}(z;\varkappa')\, d\varkappa';\end{aligned} \tag{3.9.17}$$

в) *коэффициенты связи* (вместо выражений (3.9.10) и (3.9.11))

$$\overline{\overline{c}}^{(\nu,\nu-1)}(\varkappa,\varkappa') = -\frac{i\omega_\nu}{\overline{\overline{N}}^{(\nu)}(\varkappa)} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\widehat{\mathbf{E}}^{(\nu)*}(\varkappa)\cdot\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c\cdot\widehat{\mathbf{E}}^{(\nu-1)}(\varkappa')\right]dxdy, \tag{3.9.18}$$

$$\overline{\overline{c}}^{(\nu,\nu+1)}(\varkappa,\varkappa') = -\frac{i\omega_\nu}{\overline{\overline{N}}^{(\nu)}(\varkappa)} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\widehat{\mathbf{E}}^{(\nu)*}(\varkappa)\cdot\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^{*}\cdot\widehat{\mathbf{E}}^{(\nu+1)}(\varkappa')\right]dxdy. \tag{3.9.19}$$

Мембранные функции $\widehat{\mathbf{E}}^{(\nu)}(\varkappa)\equiv\widehat{\mathbf{E}}^{(\nu)}(x,y;\varkappa)$ и $\widehat{\mathbf{E}}^{(\nu\mp1)}(\varkappa')\equiv\widehat{\mathbf{E}}^{(\nu\mp1)}(x,y;\varkappa')$ (отмеченные колпачком) имеют вид (3.9.5).

Коэффициенты связи (3.9.18) и (3.9.19) содержат тензор связи (3.8.9), переписанный в виде

$$\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c = -\frac{\varepsilon^2}{2\varepsilon_0}\left(\overline{\overline{\mathbf{p}}}:\widehat{\overline{\mathbf{S}}}\right)e^{-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}} \equiv -\varepsilon_0\frac{n^4}{2}\left(\overline{\overline{\mathbf{p}}}:\widehat{\overline{\mathbf{S}}}\right)e^{-i(K_x x+K_y y+K_z z)}. \tag{3.9.20}$$

Этот тензор симметричный, ибо $(\overline{\overline{\mathbf{p}}}:\widehat{\overline{\mathbf{S}}})_{ij}\equiv p_{ijkl}\widehat{S}_{kl}=p_{jikl}\widehat{S}_{kl}\equiv(\overline{\overline{\mathbf{p}}}:\widehat{\overline{\mathbf{S}}})_{ji}$.

Таким образом, коэффициенты связи (3.9.18) и (3.9.19) обладают следующим перестановочным свойством,

$$\frac{\overline{\overline{N}}^{(\nu)}}{\omega_\nu}\,\overline{\overline{c}}^{(\nu,\nu\mp1)} = -\frac{\overline{\overline{N}}^{(\nu\mp1)}}{\omega_{\nu\mp1}}\,\overline{\overline{c}}^{(\nu\mp1,\nu)*}, \tag{3.9.21}$$

которое согласуется с общими перестановочными соотношениями (3.2.52) и (3.2.53).

Для того, чтобы вычислить коэффициенты связи (3.9.18) и (3.9.19), необходимо найти норму $\overline{\overline{N}}^{(\nu)}(\varkappa)$ плоской электромагнитной волны, распространяющейся на частоте ω_ν в неограниченной изотропной среде и подчиняющейся характеристическому уравнению (3.9.2). С этой целью воспользуемся *соотношением ортонормировки* (1.9.5) или (2.12.14), изначально записанным для излучательных мод непрерывного спектра планарных волноводов, а теперь обобщенным для плоских волн в безграничной среде в виде

$$N(\varkappa;\varkappa')\equiv N\left(k_x^{(\nu)},k_y^{(\nu)};k_x^{(\nu)\prime},k_y^{(\nu)\prime}\right)\equiv \tag{3.9.22}$$
$$\equiv\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\widehat{\mathbf{E}}^{(\nu)*}(\varkappa)\times\widehat{\mathbf{H}}^{(\nu)}(\varkappa')+\widehat{\mathbf{E}}^{(\nu)}(\varkappa')\times\widehat{\mathbf{H}}^{(\nu)*}(\varkappa)\right]\cdot\mathbf{e}_z\,dxdy=$$
$$=\overline{\overline{N}}^{(\nu)}(\varkappa)\,\delta(\varkappa-\varkappa')\equiv\overline{\overline{N}}^{(\nu)}\left(k_x^{(\nu)},k_y^{(\nu)}\right)\delta\left(k_x^{(\nu)}-k_x^{(\nu)\prime}\right)\delta\left(k_y^{(\nu)}-k_y^{(\nu)\prime}\right).$$

Мембранные функции $\widehat{\mathbf{E}}^{(\nu)}(\varkappa)\equiv\widehat{\mathbf{E}}(x,y;\,k_x^{(\nu)},k_y^{(\nu)})$, $\widehat{\mathbf{H}}^{(\nu)}(\varkappa)\equiv\widehat{\mathbf{H}}(x,y;\,k_x^{(\nu)},k_y^{(\nu)})$ даются формулами (3.9.5)–(3.9.7).

Подстановка (3.9.5)–(3.9.6) в (3.9.22) позволяет преобразовать интеграл $N\left(k_x^{(\nu)},k_y^{(\nu)};k_x^{(\nu)\prime},k_y^{(\nu)\prime}\right)$ к следующему виду:

$$N\left(k_x^{(\nu)}, k_y^{(\nu)}; k_x^{(\nu)\prime}, k_y^{(\nu)\prime}\right) = 8\pi^2 \frac{k_z^{(\nu)}}{\omega_\nu \mu_0} \left|E_0^{(\nu)}\right|^2 \delta\left(k_x^{(\nu)} - k_x^{(\nu)\prime}\right)\delta\left(k_y^{(\nu)} - k_y^{(\nu)\prime}\right), \tag{3.9.23}$$

где применено интегральное представление дельта-функции Дирака [72]:

$$\delta\left(k_x^{(\nu)} - k_x^{(\nu)\prime}\right) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_x^{(\nu)} - k_x^{(\nu)\prime})x} dx. \tag{3.9.24}$$

Из сравнения (3.9.22) и (3.9.23) следует, что искомая *норма* плоской электромагнитной волны, распространяющейся в изотропной безграничной среде на частоте ω_ν, равняется

$$\overline{\overline{N}}^{(\nu)}(\varkappa) = 8\pi^2 \frac{k_z^{(\nu)}(\varkappa)}{\omega_\nu \mu_0} E_0^{(\nu)\,2}, \tag{3.9.25}$$

где функциональная зависимость $k_z^{(\nu)}(\varkappa)$ определяется формулой (3.9.15). Здесь, следуя работе [16], мы представили *нормировочное поле* как

$$\mathbf{E}_0^{(\nu)} = \mathbf{p}_\varkappa^{(\nu)} E_0^{(\nu)} \quad \text{при} \quad \mathbf{p}_\varkappa^{(\nu)*} \cdot \mathbf{p}_\varkappa^{(\nu)} = 1, \tag{3.9.26}$$

где $\mathbf{p}_\varkappa^{(\nu)}$ представляет собой единичный комплексный вектор, характеризующий поляризационное состояние непрерывной $\varkappa$-й моды, например, нормированный вектор Джонса [16].

Как следует из (3.9.25), знак нормы $\overline{\overline{N}}^{(\nu)}$ однозначно определяется знаком продольного волнового числа $k_z^{(\nu)}$.

С учетом (3.9.26), мембранная функция (3.9.5) электрического поля для $\varkappa$-й и $\varkappa'$-й мод принимает следующий вид:

$$\widehat{\mathbf{E}}^{(\nu)}(x, y; \varkappa) = \mathbf{p}_\varkappa^{(\nu)} E_0^{(\nu)} e^{-i(k_x^{(\nu)}x + k_y^{(\nu)}y)}, \tag{3.9.27}$$

$$\widehat{\mathbf{E}}^{(\nu\mp1)}(x, y; \varkappa') = \mathbf{p}_{\varkappa'}^{(\nu\mp1)} E_0^{(\nu\mp1)} e^{-i(k_x^{(\nu\mp1)}x + k_y^{(\nu\mp1)}y)}. \tag{3.9.28}$$

Подстановка уравнений (3.9.20) и (3.9.27)–(3.9.28) в формулу (3.9.18) дает следующее выражение для коэффициента связи:

$$\begin{aligned} \overline{\overline{c}}^{(\nu,\nu-1)}(\varkappa, \varkappa') = i\frac{\omega_\nu \varepsilon_0 n^4}{2\overline{\overline{N}}^{(\nu)}} \left(E_0^{(\nu)} E_0^{(\nu-1)}\right)\left[\mathbf{p}_\varkappa^{(\nu)*} \cdot \left(\overline{\overline{\mathbf{p}}} : \widehat{\overline{\mathbf{S}}}\right) \cdot \mathbf{p}_{\varkappa'}^{(\nu-1)}\right] e^{-iK_z z} \times \\ \times \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_x^{(\nu)} - k_x^{(\nu-1)} - K_x)x} dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_y^{(\nu)} - k_y^{(\nu-1)} - K_y)y} dy, \end{aligned} \tag{3.9.29}$$

где интегралы ассоциируются с дельта-функциями в форме (3.9.24).

Выражение (3.9.25) для нормы позволяет найти произведение *нормировочных амплитуд*, входящее в формулу (3.9.29):

$$E_0^{(\nu)} E_0^{(\nu\mp1)} = \frac{\mu_0}{8\pi^2}\left(\overline{\overline{N}}^{(\nu)}\,\overline{\overline{N}}^{(\nu\mp1)}\right)^{1/2} \sqrt{\frac{\omega_\nu}{k_z^{(\nu)}}\,\frac{\omega_{\nu\mp1}}{k_z^{(\nu\mp1)}}}\,. \tag{3.9.30}$$

Подставляя (3.9.30) в (3.9.29) и используя интегральное представление (3.9.24) для дельта-функций, приходим к окончательному результату:

$$\bar{\bar{c}}^{(\nu,\nu-1)}(\varkappa,\varkappa') = i\frac{n^4 k_\nu}{4s^{(\nu)}}\left(\overline{\overline{N}}^{(\nu-1)}\Big/\,\overline{\overline{N}}^{(\nu)}\right)^{1/2}\sqrt{\frac{k_\nu}{k_z^{(\nu)}}\,\frac{k_{\nu-1}}{k_z^{(\nu-1)}}}\;\mathcal{P}_{\varkappa\varkappa'}^{(\nu,\nu-1)}e^{-iK_z z}\times$$
$$\times\,\delta\big(k_x^{(\nu)}-k_x^{(\nu-1)}-K_x\big)\,\delta\big(k_y^{(\nu)}-k_y^{(\nu-1)}-K_y\big), \tag{3.9.31}$$

где введен фактор фотоупругой связи

$$\mathcal{P}_{\varkappa\varkappa'}^{(\nu,\nu-1)} = \mathbf{p}_\varkappa^{(\nu)*}\cdot\big(\overline{\overline{\mathbf{p}}}:\widehat{\mathbf{S}}\big)\cdot\mathbf{p}_{\varkappa'}^{(\nu-1)}. \tag{3.9.32}$$

Аналогичное выражение следует из формулы (3.9.19), а именно

$$\bar{\bar{c}}^{(\nu,\nu+1)}(\varkappa,\varkappa') = i\frac{n^4 k_\nu}{4s^{(\nu)}}\left(\overline{\overline{N}}^{(\nu+1)}\Big/\,\overline{\overline{N}}^{(\nu)}\right)^{1/2}\sqrt{\frac{k_\nu}{k_z^{(\nu)}}\,\frac{k_{\nu+1}}{k_z^{(\nu+1)}}}\;\mathcal{P}_{\varkappa\varkappa'}^{(\nu,\nu+1)}e^{iK_z z}\times$$
$$\times\,\delta\big(k_x^{(\nu)}-k_x^{(\nu+1)}+K_x\big)\,\delta\big(k_y^{(\nu)}-k_y^{(\nu+1)}+K_y\big), \tag{3.9.33}$$

где введен фактор фотоупругой связи

$$\mathcal{P}_{\varkappa\varkappa'}^{(\nu,\nu+1)} = \mathbf{p}_\varkappa^{(\nu)*}\cdot\big(\overline{\overline{\mathbf{p}}}:\widehat{\mathbf{S}}\big)^*\cdot\mathbf{p}_{\varkappa'}^{(\nu+1)}. \tag{3.9.34}$$

В формулах (3.9.31) и (3.9.33) введены также волновые числа вакуума,

$$\begin{aligned} k_\nu &= \omega_\nu\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \equiv \omega_\nu/c,\\ k_{\nu\mp1} &= \omega_{\nu\mp1}\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \equiv \omega_{\nu\mp1}/c, \end{aligned} \tag{3.9.35}$$

и аналогичные волновые числа рассматриваемой диэлектрической среды,

$$\begin{aligned} k^{(\nu)} &= \omega_\nu\sqrt{\varepsilon\mu_0} \equiv nk_\nu,\\ k^{(\nu\mp1)} &= \omega_{\nu\mp1}\sqrt{\varepsilon\mu_0} \equiv nk_{\nu\mp1}, \end{aligned} \tag{3.9.36}$$

которые определяют следующие продольные волновые числа:

$$\begin{aligned} k_z^{(\nu)} &= k^{(\nu)}\cos\theta_\nu \equiv nk_\nu\cos\theta_\nu,\\ k_z^{(\nu\mp1)} &= k^{(\nu\mp1)}\cos\theta_{\nu\mp1} \equiv nk_{\nu\mp1}\cos\theta_{\nu\mp1}. \end{aligned} \tag{3.9.37}$$

В выражениях (3.9.31) и (3.9.33) знак продольного волнового числа $k_z^{(\nu)}$ учитывается с помощью величины

$$s^{(\nu)} = \frac{k_z^{(\nu)}}{|\,k_z^{(\nu)}|} \equiv \frac{\cos\theta_\nu}{|\cos\theta_\nu|}, \tag{3.9.38}$$

где углы θ_ν и $\theta_{\nu\mp1}$ отсчитываются от положительного направления оси z, как показано на рис. 3.6.

Удобно выбрать такую нормировку полей, чтобы каждая мода непрерывного спектра (плоская оптическая волна) переносила плотность мощности 1 Вт/м^2 в направлении оси z, нормальной к границам звукового луча, тогда

$$\left|\overline{\overline{N}}^{(\nu)}\right| = \left|\overline{\overline{N}}^{(\nu\mp 1)}\right| = 4\ \text{Вт/м}^2. \tag{3.9.39}$$

В этом случае оба коэффициента связи (3.9.31) и (3.9.33) записываются в единой сингулярной форме (с δ-функциями):

$$\begin{aligned}\overline{\overline{c}}^{(\nu,\nu\mp 1)}(z;\ \varkappa,\varkappa') &= c_{\varkappa\varkappa'}^{(\nu,\nu\mp 1)} e^{\mp iK_z z} \times \\ &\times \delta\big(k_x^{(\nu)} - k_x^{(\nu\mp 1)} \mp K_x\big)\,\delta\big(k_y^{(\nu)} - k_y^{(\nu\mp 1)} \mp K_y\big);\end{aligned} \tag{3.9.40}$$

здесь введены новые коэффициенты связи (с измененной размерностью):

$$\begin{aligned}c_{\varkappa\varkappa'}^{(\nu,\nu\mp 1)} &= i\frac{n^4 k_\nu}{4s^{(\nu)}}\sqrt{\frac{k_\nu}{|k_z^{(\nu)}|}\,\frac{k_{\nu\mp 1}}{|k_z^{(\nu\mp 1)}|}}\ \mathcal{P}_{\varkappa\varkappa'}^{(\nu,\nu\mp 1)} \times \\ &= is^{(\nu)}\frac{n^3}{4}\,\frac{k_\nu}{\sqrt{|\cos\theta_\nu|\,|\cos\theta_{\nu\mp 1}|}}\ \mathcal{P}_{\varkappa\varkappa'}^{(\nu,\nu\mp 1)}.\end{aligned} \tag{3.9.41}$$

В отличие от коэффициентов $\overline{\overline{c}}^{(\nu,\nu\mp 1)}$ в виде (3.9.40) с размерностью длины (что отмечается двумя чертами сверху), новые коэффициенты связи $c_{\varkappa\varkappa'}^{(\nu,\nu\mp 1)}$, введенные равенством (3.9.41), имеют обычную размерность м$^{-1}$ (что отмечено отсутствием черты). Такие обозначения соответствуют использованным в табл. 1.1 (см. п. 1.9).

Факторы связи $\mathcal{P}_{\varkappa\varkappa'}^{(\nu,\nu\mp 1)}$, входящие в (3.9.41) и определенные равенствами (3.9.32) и (3.9.34), отражают специфические особенности фотоупругого взаимодействия света и звука, присущие оптическим кристаллам кубической системы. Они обладают следующей перестановочной симметрией:

$$\mathcal{P}_{\varkappa\varkappa'}^{(\nu,\nu\mp 1)} = \mathcal{P}_{\varkappa'\varkappa}^{(\nu\mp 1,\nu)*}. \tag{3.9.42}$$

В силу малости звуковой частоты по сравнению с частотой света ($\Omega \ll \omega$) можем считать, что

$$k_\nu \simeq k_{\nu\mp 1} \simeq k_{\text{в}} = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\ \equiv \omega/c. \tag{3.9.43}$$

В этом случае из выражения (3.9.41) с учетом (3.9.42) видно, что перестановочная симметрия коэффициентов связи для фотоупругого взаимодействия оптических мод зависит от их взаимного направления распространения:

- для *попутных волн*, распространяющихся в одном направлении по отношению к оси z, когда $k_z^{(\nu)}k_z^{(\nu\mp 1)} > 0$ или $s^{(\nu)}s^{(\nu\mp 1)} > 0$,

$$c_{\varkappa\varkappa'}^{(\nu,\nu\mp 1)} = -c_{\varkappa'\varkappa}^{(\nu\mp 1,\nu)*}; \tag{3.9.44}$$

- для *встречных волн*, распространяющихся в противоположных направлениях по отношению к оси z, когда $k_z^{(\nu)}k_z^{(\nu\mp 1)} < 0$ или $s^{(\nu)}s^{(\nu\mp 1)} < 0$,

$$c_{\varkappa\varkappa'}^{(\nu,\nu\mp 1)} = c_{\varkappa'\varkappa}^{(\nu\mp 1,\nu)*}. \tag{3.9.45}$$

Согласно общим положениям обычной теории связанных мод, изложенной в приложении Г, из перестановочных соотношений (3.9.44) и (3.9.45) следует, что фотоупругое взаимодействие двух оптических мод может происходить в одном из режимов:

а) в *режиме попутного переизлучения* с периодическим обменом мощностью между пассивно связанными попутными волнами (см. п. Г.10),

б) в *режиме встречного переизлучения* с апериодическим обменом мощностью между активно связанными встречными волнами (см. п. Г.11).

Коэффициенты связи (3.9.40) включают сингулярности в форме дельта-функций $\delta\big(k_x^{(\nu)} - k_x^{(\nu\mp1)} \mp K_x\big)$ и $\delta\big(k_y^{(\nu)} - k_y^{(\nu\mp1)} \mp K_y\big)$, которые после подстановки в уравнения (3.9.17) и интегрирования по $\varkappa' \equiv \{k_x^{(\nu\mp1)}, k_y^{(\nu\mp1)}\}$ исчезают во всех случаях, кроме единственного, когда они дают единицу, если

$$k_x^{(\nu)} - k_x^{(\nu\mp1)} \mp K_x = 0, \tag{3.9.46}$$

$$k_y^{(\nu)} - k_y^{(\nu\mp1)} \mp K_y = 0. \tag{3.9.47}$$

Формулы (3.9.46) и (3.9.47) представляют собой условия фазового согласования взаимодействующих волн по отношению к поперечным направлениям, вдоль которых звуковой луч имеет бесконечные размеры (см. рис. 3.6).

Следовательно, уравнения связанных мод (3.9.17) после интегрирования по $\varkappa'$ с учетом (3.9.40) принимают форму, включающую новые коэффициенты связи (3.9.41) (с привычной размерностью м$^{-1}$):

$$\begin{aligned}\frac{d\overline{\overline{A}}_{\varkappa}^{(\nu)}(z)}{dz} &= c_{\varkappa\varkappa'}^{(\nu,\nu-1)} e^{i\Delta k_z^{(\nu,\nu-1)}z}\,\overline{\overline{A}}_{\varkappa'}^{(\nu-1)}(z) + \\ &+ c_{\varkappa\varkappa'}^{(\nu,\nu+1)} e^{i\Delta k_z^{(\nu,\nu+1)}z}\,\overline{\overline{A}}_{\varkappa'}^{(\nu+1)}(z),\end{aligned} \tag{3.9.48}$$

где введено продольное фазовое рассогласование,

$$\Delta k_z^{(\nu,\nu\mp1)} = k_z^{(\nu)} - k_z^{(\nu\mp1)} \mp K_z. \tag{3.9.49}$$

В соответствии с рис. 3.6, где падающая световая волна имеет $k_z^{(0)} > 0$, будем различать дифрагированные плоские волны с разным знаком k_z:

а) волны с $k_z^{(\nu)} = |k_z^{(\nu)}| > 0$ и амплитудой $\overline{\overline{A}}_+{}^{(\nu)}$ называем *прямыми*,

б) волны с $k_z^{(\nu)} = -|k_z^{(\nu)}| < 0$ и амплитудой $\overline{\overline{A}}_-{}^{(\nu)}$ называем *обратными*.

Тогда из общего уравнения (3.9.48) получаем два частных уравнения для $d\overline{\overline{A}}_+{}^{(\nu)}/dz$ и $d\overline{\overline{A}}_-{}^{(\nu)}/dz$. Каждое из них имеет в правой части четыре слагаемые с коэффициентами связи: а) $c_{++}^{(\nu,\nu\mp1)}$, $c_{+-}^{(\nu,\nu\mp1)}$ — для $d\overline{\overline{A}}_+{}^{(\nu)}/dz$ и б) $c_{-+}^{(\nu,\nu\mp1)}$, $c_{--}^{(\nu,\nu\mp1)}$ — для $d\overline{\overline{A}}_-{}^{(\nu)}/dz$.

Общее выражение (3.9.41) определяет следующие соотношения между коэффициентами связи:

$$c_{++}^{(\nu,\nu\mp1)} = c_{+-}^{(\nu,\nu\mp1)} = -\,c_{-+}^{(\nu,\nu\mp1)} = -\,c_{--}^{(\nu,\nu\mp1)} \equiv i\chi^{(\nu,\nu\mp1)}, \tag{3.9.50}$$

где

$$\chi^{(\nu,\nu\mp1)} = \frac{n^3}{4}\,\frac{k_\nu}{\sqrt{|\cos\theta_\nu|\,|\cos\theta_{\nu\mp1}|}}\,\mathcal{P}^{(\nu,\nu\mp1)}_{\varkappa\varkappa'} \simeq$$

$$\simeq \frac{n^4}{4}\,\frac{k_{\text{в}}^2}{\sqrt{|k_z^{(\nu)}|\,|k_z^{(\nu\mp1)}|}}\,\mathcal{P}^{(\nu,\nu\mp1)}_{\varkappa\varkappa'}. \qquad (3.9.51)$$

Здесь последнее приближенное равенство соответствует условию (3.9.43), которое с учетом (3.9.42) дает следующее перестановочное соотношение:

$$\chi^{(\nu,\nu\mp1)} = \chi^{(\nu\mp1,\nu)*}. \qquad (3.9.52)$$

Таким образом, полная система уравнений связанных волн (3.9.48) с разделением их на *прямые* и *обратные* волны принимает следующий вид ($\nu = 0, \pm1, \pm2, \ldots$):

$$\begin{aligned}\frac{d\overline{\overline{A}}{}^{(\nu)}_{+}}{dz} = {}& i\chi^{(\nu,\nu-1)}\left[e^{i(\eta_-^{(\nu,\nu-1)} - K_z)z}\,\overline{\overline{A}}{}^{(\nu-1)}_{+} + e^{i(\eta_+^{(\nu,\nu-1)} - K_z)z}\,\overline{\overline{A}}{}^{(\nu-1)}_{-}\right] + \\ &+ i\chi^{(\nu,\nu+1)}\left[e^{i(\eta_-^{(\nu,\nu+1)} + K_z)z}\,\overline{\overline{A}}{}^{(\nu+1)}_{+} + e^{i(\eta_+^{(\nu,\nu+1)} + K_z)z}\,\overline{\overline{A}}{}^{(\nu+1)}_{-}\right],\end{aligned} \qquad (3.9.53)$$

$$\begin{aligned}\frac{d\overline{\overline{A}}{}^{(\nu)}_{-}}{dz} = {}& -i\chi^{(\nu,\nu-1)}\left[e^{-i(\eta_+^{(\nu,\nu-1)} + K_z)z}\,\overline{\overline{A}}{}^{(\nu-1)}_{+} + e^{-i(\eta_-^{(\nu,\nu-1)} + K_z)z}\,\overline{\overline{A}}{}^{(\nu-1)}_{-}\right] - \\ &- i\chi^{(\nu,\nu+1)}\left[e^{-i(\eta_+^{(\nu,\nu+1)} - K_z)z}\,\overline{\overline{A}}{}^{(\nu+1)}_{+} + e^{-i(\eta_-^{(\nu,\nu+1)} - K_z)z}\,\overline{\overline{A}}{}^{(\nu+1)}_{-}\right],\end{aligned} \qquad (3.9.54)$$

где, с учетом (3.9.49), введены обозначения

$$\begin{aligned}\eta_\pm^{(\nu,\nu-1)} &= |k_z^{(\nu)}| \pm |k_z^{(\nu-1)}|, \\ \eta_\pm^{(\nu,\nu+1)} &= |k_z^{(\nu)}| \pm |k_z^{(\nu+1)}|.\end{aligned} \qquad (3.9.55)$$

Решение задачи о дифракции света на звуке сводится к решению системы связанных уравнений (3.9.53)–(3.9.54) для области фотоупругой среды, занятой звуковым лучом ($0 < z < L$), с применением следующих краевых условий, накладываемых на амплитуды волн:

- для *падающей* световой волны ($\nu = 0$)

$$\overline{\overline{A}}{}^{(0)}_{+}(0) \neq 0, \qquad (3.9.56)$$

- для *дифрагированных* световых волн ($\nu = \pm1, \pm2, \ldots$)

$$\begin{cases} \overline{\overline{A}}{}^{(\nu)}_{+}(0) = 0 & \text{— прямые волны}, \\ \overline{\overline{A}}{}^{(\nu)}_{-}(L) = 0 & \text{— обратные волны}. \end{cases} \qquad (3.9.57)$$

Краевые условия (3.9.57) принимают во внимание тот факт, что прямые и обратные волны зарождаются на разных концах ($z=0$ и $z=L$) области взаимодействия из-за противоположного направления их распространения по отношению к положительной оси z (направленной по нормали к границам звукового луча, см. рис. 3.6): $k_z^{(\nu)}>0$ для прямых волн, включая падающую ($\nu=0$), и $k_z^{(\nu)}<0$ для обратных волн.

Как видно из (3.9.53)–(3.9.54), каждый дифракционный световой луч (ν)-го порядка взаимодействует только со своими ближайшими частотными соседями ($\nu-1$)-го и ($\nu+1$)-го порядков, соответствующими как прямым, так и обратным волнам. Между амплитудами этих волн имеется жесткое соотношение, вытекающее из (3.9.53)–(3.9.54) для произвольного (ν):

$$\frac{d\overline{\overline{A}}_+^{(\nu)}(z)}{dz}\,e^{-i|k_z^{(\nu)}|\,z}=-\,\frac{d\overline{\overline{A}}_-^{(\nu)}(z)}{dz}\,e^{i|k_z^{(\nu)}|\,z}. \tag{3.9.58}$$

Граничная задача, сформулированная выше в виде связанных уравнений (3.9.53)–(3.9.54) и краевых условий (3.9.56)–(3.9.57), описывает в самой общей форме фотоупругое взаимодействие между плоскими световыми волнами как результат дифракции света на звуке в неограниченной оптически изотропной среде. Общее решение такой граничной задачи практически невозможно. Поэтому рассмотрим два частных случая, известных как дифракция Рамана–Ната и дифракция Брэгга.

3.9.2. Дифракция Рамана–Ната. Режим Рамана–Ната реализуется в случае изотропной дифракции света на длинноволновом звуке ($\Lambda\gg\lambda$ или $K\ll k\equiv k^{(0)}$) в форме акустического луча относительно небольшой ширины, когда $L\approx\Lambda$.

Приведем общие связанные уравнения (3.9.53) и (3.9.54) к частному виду, типичному для режима дифракции Рамана–Ната, и вычислим продольное распределение амплитуд $\overline{\overline{A}}_+{}^{(\nu)}(z)$ дифракционных световых лучей разного порядка (ν). Интегрированием (3.9.58) с краевым условием $\overline{\overline{A}}_-{}^{(\nu)}(L)=0$ получаем амплитуду обратной волны дифракционного порядка (ν) в выходной плоскости $z=0$:

$$\overline{\overline{A}}_-^{(\nu)}(0)=\int\limits_0^L\frac{d\overline{\overline{A}}_+^{(\nu)}(z)}{dz}\,e^{-2i|k_z^{(\nu)}|\,z}\,dz\approx\left(\frac{d\overline{\overline{A}}_+^{(\nu)}}{dz}L\right)_{av}\frac{\sin|k_z^{(\nu)}L|}{|k_z^{(\nu)}L|}\,e^{-i|k_z^{(\nu)}|\,L}.$$

Здесь производная вынесена из-под знака интеграла в форме среднего значения с нижним индексом av (от англ. *average*). Так как ширина звукового луча L много больше длины волны света, что обычно имеет место в условиях эксперимента, то $|\sin k_z^{(\nu)}L|/|k_z^{(\nu)}L|\approx10^{-3}-10^{-4}$ [16, 65].

Этот факт позволяет полностью исключить из рассмотрения обратные волны, полагая $\overline{\overline{A}}_-{}^{(\nu)}\equiv0$, что приводит к исчезновению уравнения (3.9.54), а уравнение (3.9.53) принимает форму, включающую только прямые волны с $k_z^{(\nu)}>0$ и $k_z^{(\nu\mp1)}>0$:

$$\frac{d\overline{\overline{A}}_{+}^{(\nu)}}{dz} = i\chi^{(\nu,\nu-1)}\, e^{i(k_z^{(\nu)} - k_z^{(\nu-1)} - K_z)z}\, \overline{\overline{A}}_{+}^{(\nu-1)} +$$

$$+\, i\chi^{(\nu,\nu+1)}\, e^{i(k_z^{(\nu)} - k_z^{(\nu+1)} + K_z)z}\, \overline{\overline{A}}_{+}^{(\nu+1)}. \tag{3.9.59}$$

Для того чтобы реализовать изотропные условия дифракции света, необходимые для режима Рамана–Ната, полагаем

$$\left(\overline{\overline{\mathbf{p}}} : \widehat{\mathbf{S}}\right) = (p\widehat{S})\, \overline{\mathbf{I}}. \tag{3.9.60}$$

В этом случае тензор динамического возмущения (3.8.6) превращается в скаляр, т. е.

$$\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{r}) = \delta\varepsilon(\mathbf{r})\, \overline{\mathbf{I}} \qquad \text{при} \qquad \delta\varepsilon(\mathbf{r}) = -\,\varepsilon_0 \frac{n^4}{2} (p\widehat{S})\, e^{-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}, \tag{3.9.61}$$

а факторы фотоупругой связи (3.9.32) и (3.9.34) становятся такими:

$$\mathcal{P}_{\varkappa\varkappa'}^{(\nu,\nu-1)} = (p\widehat{S})\big(\mathbf{p}_{\varkappa}^{(\nu)*}\cdot \mathbf{p}_{\varkappa'}^{(\nu-1)}\big), \tag{3.9.62}$$

$$\mathcal{P}_{\varkappa\varkappa'}^{(\nu,\nu+1)} = (p\widehat{S})^*\big(\mathbf{p}_{\varkappa}^{(\nu)*}\cdot \mathbf{p}_{\varkappa'}^{(\nu+1)}\big). \tag{3.9.63}$$

Если различие в поляризационном состоянии двух частотных соседей пренебрежимо мало, т. е. $\mathbf{p}_{\varkappa'}^{(\nu\mp1)} \simeq \mathbf{p}_{\varkappa}^{(\nu)}$, тогда из условия $\mathbf{p}_{\varkappa}^{(\nu)*}\cdot \mathbf{p}_{\varkappa}^{(\nu)} = 1$, требуемого уравнением (3.9.26), следует, что

$$\mathbf{p}_{\varkappa}^{(\nu)*}\cdot \mathbf{p}_{\varkappa'}^{(\nu\mp1)} \simeq 1. \tag{3.9.64}$$

С учетом (3.9.64) выражения (3.9.62) и (3.9.63) для факторов фотоупругой связи принимают вид

$$\mathcal{P}_{\varkappa\varkappa'}^{(\nu,\nu-1)} \simeq \mathcal{P}_{\varkappa\varkappa'}^{(\nu,\nu+1)*} \simeq (p\widehat{S}) \equiv |p\widehat{S}|\, e^{i\phi_S}, \tag{3.9.65}$$

где для фазового угла ϕ_S надо найти конкретное значение, характерное для режима Рамана–Ната.

С этой целью рассмотрим результирующий показатель преломления изотропной фотоупругой среды в присутствии распространяющейся акустической волны, который с учетом (3.8.4) записывается в виде

$$n_\Sigma(\mathbf{r},t) \equiv \sqrt{\varepsilon_\Sigma(\mathbf{r},t)/\varepsilon_0} = \sqrt{\left[\varepsilon + \mathrm{Re}\left\{2\delta\varepsilon(\mathbf{r})\, e^{i\Omega t}\right\}\right]/\varepsilon_0}\,. \tag{3.9.66}$$

Диэлектрическое возмущение (3.9.61) предполагается достаточно малым ($\Delta n \ll n = \sqrt{\varepsilon/\varepsilon_0}$) для того, чтобы записать выражение (3.9.66) в приближенном виде

$$n_\Sigma(\mathbf{r},t) \simeq n + \Delta n\, \sin(\Omega t - \mathbf{K}\cdot\mathbf{r} + \pi), \tag{3.9.67}$$

где, согласно (3.9.61) и (3.9.66) при $(p\widehat{S}) = |p\widehat{S}|\, e^{i\phi_S}$, имеем

$$\Delta n = \frac{n^3}{2}\, |p\widehat{S}| \qquad \text{и} \qquad \phi_S = -\frac{\pi}{2}\,. \tag{3.9.68}$$

Тогда, используя уравнения (3.9.51), (3.9.65) и (3.9.68), можем записать коэффициенты связи, входящие в (3.9.59), в следующем виде:

$$c_{++}^{(\nu,\nu\mp 1)} \equiv i\chi^{(\nu,\nu\mp 1)} = \pm\,\frac{q_\nu}{2}\,, \tag{3.9.69}$$

где (при $k \equiv k^{(0)} = \omega\sqrt{\varepsilon\mu_0} = nk_{\text{в}}$) введен параметр [65]

$$q_\nu = \frac{n^4}{2}\,\frac{k_{\text{в}}^2}{k_z^{(\nu)}}\,|p\widehat{S}| = \frac{k^2}{k_z^{(\nu)}}\,\frac{\Delta n}{n}\,. \tag{3.9.70}$$

При выводе соотношения (3.9.69) в исходном выражении (3.9.51) было использовано приближенное равенство $k_z^{(\nu\mp 1)} \approx k_z^{(\nu)}$, справедливость которого при $K \ll k$ доказана ниже (см. формулу (3.9.73)).

Следовательно, связанные уравнения (3.9.59) принимают следующий вид ($\nu = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$):

$$\frac{d\overline{\overline{A}}{}_+^{(\nu)}}{dz} = \frac{q_\nu}{2}\left[e^{i(k_z^{(\nu)} - k_z^{(\nu-1)} - K_z)z}\,\overline{\overline{A}}{}_+^{(\nu-1)} - e^{i(k_z^{(\nu)} - k_z^{(\nu+1)} + K_z)z}\,\overline{\overline{A}}{}_+^{(\nu+1)}\right]. \tag{3.9.71}$$

Для того, чтобы уравнения (3.9.71) описывали режим Рамана–Ната, необходимо обеспечить выполнение двух условий:

а) постоянство параметра q_ν для всех порядков дифракции ($q_\nu \simeq q_0$, см. ниже формулу (3.9.80)),

б) одновременное обращение в единицу обеих экспоненциальных функций в уравнении (3.9.71), что реализуемо, если хотя бы приближенно выполняется продольное условие фазового согласования в форме

$$k_z^{(\nu)} - k_z^{(\nu\mp 1)} \simeq \pm K_z. \tag{3.9.72}$$

Выразим $k_z^{(\nu\mp 1)}$ через $k_z^{(\nu)}$, используя поперечные условия фазового согласования (3.9.46) при $K_x \ll k$ и полагая, что $k_y^{(\nu)} = k_y^{(\nu\mp 1)} = K_y \equiv 0$ (двумерный случай):

$$k_z^{(\nu\mp 1)} = \sqrt{\left(k^{(\nu\mp 1)}\right)^2 - \left(k_x^{(\nu\mp 1)}\right)^2} \simeq \sqrt{\left(k^{(\nu)}\right)^2 - \left(k_x^{(\nu)} \mp K_x\right)^2} =$$

$$= k_z^{(\nu)}\sqrt{1 + \frac{\pm 2K_x k_x^{(\nu)} - K_x^2}{\left(k_z^{(\nu)}\right)^2}} \simeq k_z^{(\nu)} \pm K_x\frac{k_x^{(\nu)}}{k_z^{(\nu)}}\,, \tag{3.9.73}$$

где последнее равенство записано в линейном приближении при $|K_x/k_z^{(\nu)}| \ll 1$.

Подстановка (3.9.73) в условие фазового согласования (3.9.72) дает вполне определенное соотношение между продольным и поперечным волновыми числами звука:

$$K_z = -K_x\frac{k_x^{(\nu)}}{k_z^{(\nu)}} \qquad \text{или} \qquad K_z\cos\theta_\nu = -K_x\sin\theta_\nu. \tag{3.9.74}$$

Поскольку $K_x^2 + K_z^2 = K^2 = \mathrm{const}$, то из равенства (3.9.74) видно, что для каждого дифракционного порядка (ν) существуют свои компоненты акустического волнового вектора $\mathbf{K} = \mathbf{e}_x K_x + \mathbf{e}_z K_z$, равные

$$\begin{aligned} K_x &= \pm K \cos\theta_\nu, \\ K_z &= \mp K \sin\theta_\nu. \end{aligned} \tag{3.9.75}$$

Здесь θ_ν — угол, под которым располагается дифракционный световой луч (ν)-го порядка, так что $k_z^{(\nu)} = k^{(\nu)} \cos\theta_\nu$ (см. рис. 3.7, которому соответствует верхний знак в формулах (3.9.75)).

Равенства (3.9.75) показывают, что для возникновения дифракционного луча (ν)-го порядка акустический волновой вектор $\mathbf{K} = \mathbf{e}_x K_x + \mathbf{e}_z K_z$ должен иметь вполне определенное направление, будучи постоянным по величине ($K = 2\pi/\Lambda = \mathrm{const}$). Следовательно, в режиме Рамана–Ната волновые векторы $\mathbf{K}$ имеют угловое распределение в пространстве для обеспечения точного поперечного условия (3.9.46) и приближенного продольного условия (3.9.72) для фазового согласования оптических волн. Такое угловое распределение возможно только в акустическом луче конечной ширины L (вдоль направления z). В этом случае для каждого светового луча (ν)-го порядка, удовлетворяющего условию (3.9.46), переписанному как

$$k_x^{(\nu)} = k_x^{(0)} + \nu K_x \qquad \text{или} \qquad \sin\theta_\nu = \sin\theta_0 + \nu K_x / k, \tag{3.9.76}$$

всегда найдется соответствующий звуковой вектор $\mathbf{K}$.

Поэтому образование (ν)-го порядка дифракции трактуется на корпускулярном языке [16] как процесс многократного рассеяния фотонов с поглощением (при $\nu = |\nu| > 0$) или испусканием (при $\nu = -|\nu| < 0$) фононов, чьи волновые векторы $\mathbf{K}$ слегка отличаются друг от друга по направлению. Этот процесс осуществляется с сохранением энергии и импульса частиц [16]:

$$\omega_\nu = \omega \pm |\nu|\Omega, \tag{3.9.77}$$

$$\mathbf{k}^{(\nu)} = \mathbf{k}^{(0)} \pm |\nu| \mathbf{K}. \tag{3.9.78}$$

Диаграмма волновых векторов для режима дифракции Рамана–Ната при нормальном падении света ($\theta_0 = 0$) на границу звукового луча построена на рис. 3.7 с соблюдением закона сохранения импульса (3.9.78). Первичный световой луч частоты ω расщепляется из-за взаимодействия со звуком на несколько лучей, соответствующих разным порядкам дифракции, обозначенными $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Согласно (3.9.77), частота ω_ν дифракционного луча, смещенного (по отношению к падающему лучу) в направлении распространения звука (вверх на рис. 3.7) превышает ω, а для лучей, смещенных в обратном направлении, меньше ω на величину $|\nu|\Omega$.

Интенсивность дифракционных максимумов может быть найдена из решения исходного уравнения (3.9.71) с отброшенными экспонентами в силу условия фазового согласования (3.9.72):

$$\frac{d\overline{\overline{A}}{}_+^{(\nu)}(z)}{dz} = \frac{q_0}{2} \left[\overline{\overline{A}}{}_+^{(\nu-1)}(z) - \overline{\overline{A}}{}_+^{(\nu+1)}(z) \right], \tag{3.9.79}$$

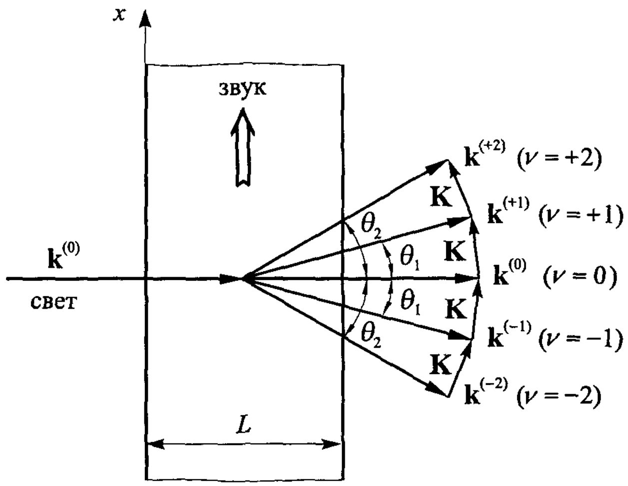


Рис. 3.7. Диаграмма волновых векторов для режима дифракции Рамана–Ната при нормальном падении светового луча на границу звукового канала конечной ширины L

где параметр q_0 получен из выражения (3.9.70) в предположении, что он не зависит от порядка дифракции, т. е.

$$q_\nu = \frac{k^2}{k_z^{(\nu)}}\frac{\Delta n}{n} \simeq \frac{k^2}{k_z^{(0)}}\frac{\Delta n}{n} = \frac{k_\text{в}}{\cos\theta_0}\Delta n \equiv q_0. \tag{3.9.80}$$

Выражение (3.9.80) является следствием требования $|K_x| \ll |k_z^{(\nu)}|$, когда соотношение (3.9.73) позволяет положить $k_z^{(\nu\mp1)} \simeq k_z^{(\nu)} \simeq k_z^{(0)} = k^{(0)}\cos\theta_0 \equiv \equiv k\cos\theta_0$.

Как известно [72], существует рекуррентное соотношение между функциями Бесселя трех соседних порядков в виде

$$2\frac{dJ_\nu(x)}{dx} = J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x). \tag{3.9.81}$$

Из сравнения уравнения (3.9.79) с (3.9.81) следует, что его решение имеет вид бесселевой функции ν-го порядка,

$$\overline{\overline{A}}{}_+^{(\nu)}(z) = A_0 J_\nu(q_0 z), \tag{3.9.82}$$

и удовлетворяет следующим краевым условиям:

$$\overline{\overline{A}}{}_+^{(0)}(0) = A_0 \neq 0 \quad \text{и} \quad \overline{\overline{A}}{}_+^{(\nu)}(0) = 0 \quad \text{при} \quad \nu = \pm1, \pm2, \ldots \tag{3.9.83}$$

Следовательно, распределение интенсивности света по дифракционным максимумам описывается уравнением

$$\frac{I_\nu}{I_0} = J_\nu^2(q_0 L), \tag{3.9.84}$$

где I_0 — интенсивность падающего света, а параметр [16, 64–66]

$$q_0 L = \frac{k_{\text{в}} L}{\cos\theta_0}\,\Delta n$$

часто называется индексом модуляции (в разных обозначениях).

В заключение уточним условие фазового согласования (3.9.72) и установим область применимости полученных формул к физическим условиям реализации режима Рамана–Ната, подчинив их следующему требованию:

$$\left|k_z^{(\nu)} - k_z^{(\nu\mp1)} \mp K_z\right| L \ll 1. \tag{3.9.85}$$

Это требование обеспечивает в пределах всей области взаимодействия $0 < z < L$ практически одинаковую величину, близкую к единице, обеих экспоненциальных функций в уравнении (3.9.71). Это является принципиальным условием для режима Рамана–Ната. Разложим волновые числа $k_z^{(\nu\mp1)}$ в ряд Тейлора по параметру $|K_x/k_z^{(\nu)}| \ll 1$, подобно разложению (3.9.73), только теперь учтем квадратичное слагаемое вида $\sqrt{1+x} \simeq 1 + x/2 - x^2/8$, тогда

$$k_z^{(\nu\mp1)} \simeq k_z^{(\nu)} \sqrt{1 + \frac{\pm 2K_x k_x^{(\nu)} - K_x^2}{\left(k_z^{(\nu)}\right)^2}} \simeq$$

$$\simeq \left(k_z^{(\nu)} \pm K_x \frac{k_x^{(\nu)}}{k_z^{(\nu)}}\right) - \frac{K_x^2}{2k_z^{(\nu)}}\left[1 + \left(\frac{k_x^{(\nu)}}{k_z^{(\nu)}}\right)^2\right]. \tag{3.9.86}$$

Используя (3.9.75), легко получить из (3.9.86) следующее выражение:

$$\left(k_z^{(\nu)} - k_z^{(\nu\mp1)} \mp K_z\right) \simeq \frac{K^2}{2k_z^{(\nu)}} = \frac{K^2}{2k^{(\nu)}\cos\theta_\nu}. \tag{3.9.87}$$

Подстановка (3.9.87) в требуемое неравенство (3.9.85) приводит к условию практической реализации режима дифракции Рамана–Ната:

$$\frac{K^2 L}{2k\cos\theta_\nu} \ll 1 \qquad \text{или} \qquad Q \ll 2\cos\theta_\nu, \tag{3.9.88}$$

где введен общепринятый параметр дифракции [16, 64–66]

$$Q \equiv \frac{K^2 L}{k} = \frac{K^2 L}{n k_{\text{в}}} = \frac{2\pi}{n}\,\frac{L/\Lambda}{\Lambda/\lambda}. \tag{3.9.89}$$

Для режима дифракции Рамана–Ната характерно сильное неравенство $\lambda \ll \Lambda$ между длинами волн света и звука, поэтому выбором ширины звукового луча $L \approx \Lambda$ легко обеспечить малый параметр дифракции (3.9.89). Неравенство $Q \ll 1$ обычно принято считать критерием реализации режима Рамана–Ната [16, 64–66]. В отличие от этого, полученное выше условие (3.9.88) требует $Q \ll 2\cos\theta_\nu$. Так как с ростом порядка дифракции $\cos\theta_\nu$ уменьшается, то условие (3.9.88) позволяет указать наивысший порядок еще наблюдаемого дифракционного луча, начиная с которого неравенство (3.9.88) перестает выполняться.

3.9.3. Дифракция Брэгга. Режим дифракции Брэгга реализуется в случае изотропной дифракции света на коротковолновом ультразвуке (когда $\Lambda \approx \approx \lambda$ или $K \approx k$) в форме акустического луча достаточно большой ширины, такой, что $L \gg \Lambda$. Из выражения (3.9.89) видно, что параметр дифракции Брэгга принимает большие значения ($Q \gg 1$). Следовательно, режим Брэгга является предельно противоположным случаем дифракции по отношению к режиму Рамана–Ната, для которого $Q \ll 1$.

Из-за большой ширины ультразвукового луча практически отсутствует угловой разброс акустического волнового вектора $\mathbf{K}$ (что было типично для дифракции Рамана–Ната). По этой причине при дифракции Брэгга многократное фотонное рассеяние запрещено и на практике наблюдается только первый порядок дифракции с поглощением или испусканием фононов [16, 63–66]. В этом случае законы сохранения энергии (3.9.77) и импульса (3.9.78) принимают следующий вид:

$$\omega_{\mp 1} = \omega \mp \Omega, \tag{3.9.90}$$

$$\mathbf{k}^{(\mp 1)} = \mathbf{k}^{(0)} \mp \mathbf{K}. \tag{3.9.91}$$

Поперечные условия фазового согласования в форме (3.9.46) и (3.9.47) совпадают с аналогичными равенствами, вытекающими из закона сохранения импульса (3.9.91):

$$k_x^{(0)} - k_x^{(\mp 1)} \mp K_x = 0, \tag{3.9.92}$$

$$k_y^{(0)} - k_y^{(\mp 1)} \mp K_y = 0. \tag{3.9.93}$$

Для анализа дифракции Брэгга необходимо использовать в качестве исходной общую систему связанных уравнений (3.9.53) и (3.9.54), в которой надо оставить члены с экспонентами, содержащими в показателе $\Delta k_z^{(0,\mp 1)} \equiv \equiv k_z^{(0)} - k_z^{(\mp 1)} \mp K_z \approx 0$. Эти члены соответствуют фазово-согласованному взаимодействию падающей световой волны ($\nu = 0$) с дифрагированными волнами первого порядка ($\nu = \mp 1$) — *прямой волной* с $k_{z+}^{(\mp 1)} = |k_{z+}^{(\mp 1)}| > 0$ и *обратной волной* с $k_{z-}^{(\mp 1)} = -|k_{z-}^{(\mp 1)}| < 0$.

Следовательно, система связанных уравнений, получающаяся из (3.9.53) и (3.9.54), которая описывает связь между падающей волной (с амплитудой $\overline{\overline{A}}_+{}^{(0)}$) и дифрагированными волнами первого порядка (с амплитудами $\overline{\overline{A}}_+{}^{(\mp 1)}$ и $\overline{\overline{A}}_-{}^{(\mp 1)}$), имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{\overline{A}}{}_+^{(0)}}{dz} &= i\chi^{(0,-1)} \left[e^{i(k_{z+}^{(0)} - k_{z+}^{(-1)} - K_z)z}\, \overline{\overline{A}}{}_+^{(-1)} + e^{i(k_{z+}^{(0)} - k_{z-}^{(-1)} - K_z)z}\, \overline{\overline{A}}{}_-^{(-1)} \right] + \\ &+ i\chi^{(0,+1)} \left[e^{i(k_{z+}^{(0)} - k_{z+}^{(+1)} + K_z)z}\, \overline{\overline{A}}{}_+^{(+1)} + e^{i(k_{z+}^{(0)} - k_{z-}^{(+1)} + K_z)z}\, \overline{\overline{A}}{}_-^{(+1)} \right], \end{aligned} \tag{3.9.94}$$

$$\frac{d\overline{\overline{A}}{}_+^{(-1)}}{dz} = i\chi^{(-1,0)}\, e^{-i(k_{z+}^{(0)} - k_{z+}^{(-1)} - K_z)z}\, \overline{\overline{A}}{}_+^{(0)}, \tag{3.9.95}$$

$$\frac{d\overline{\overline{A}}_-^{(-1)}}{dz} = -i\chi^{(-1,0)}\, e^{-i(k_{z+}^{(0)} - k_{z-}^{(-1)} - K_z)z}\, \overline{\overline{A}}_+^{(0)}, \tag{3.9.96}$$

$$\frac{d\overline{\overline{A}}_+^{(+1)}}{dz} = i\chi^{(+1,0)}\, e^{-i(k_{z+}^{(0)} - k_{z+}^{(+1)} + K_z)z}\, \overline{\overline{A}}_+^{(0)}, \tag{3.9.97}$$

$$\frac{d\overline{\overline{A}}_-^{(+1)}}{dz} = -i\chi^{(+1,0)}\, e^{-i(k_{z+}^{(0)} - k_{z-}^{(+1)} + K_z)z}\, \overline{\overline{A}}_+^{(0)}, \tag{3.9.98}$$

где коэффициенты связи получаются из выражений (3.9.50)–(3.9.51) и удовлетворяют перестановочному соотношению (3.9.52):

$$\chi^{(\mp 1,0)} = \chi^{(0,\mp 1)*}. \tag{3.9.99}$$

Уравнения (3.9.94)–(3.9.98) включают все фазово-согласованные пары волн, одна из которых всегда *падающая* волна $\overline{\overline{A}}_+{}^{(0)}$, в то время как другая — одна из четырех дифрагированных волн: либо *прямая* $\overline{\overline{A}}_+{}^{(\mp 1)}$ (с $k_{z+}^{(\mp 1)} > 0$), либо *обратная* $\overline{\overline{A}}_-{}^{(\mp 1)}$ (с $k_{z-}^{(\mp 1)} < 0$).

Рассмотрим по отдельности два режима дифракции Брэгга — *режим прямого прохождения* и *режим обратного отражения* (названных в [16], соответственно, дифракцией при малых и больших брэгговских углах), полагая для упрощения $k_y^{(0)} = k_y^{(\mp 1)} = K_y \equiv 0$ (двумерный случай).

Режим прямого прохождения при дифракции Брэгга в изотропной среде (когда $|\mathbf{k}^{(0)}| = |\mathbf{k}^{(\mp 1)}|$) реализуется, если звук распространяется вдоль направления x, параллельного границам области взаимодействия, так что $K_z \equiv 0$ и $\mathbf{K} = \pm\, \mathbf{e}_x K$. Соответствующая диаграмма волновых векторов, удовлетворяющая соотношению (3.9.92), изображена на рис. 3.8 *а* и *б* для дифракционных порядков $\nu = -1$ и $\nu = +1$, соответственно. Эти два случая отличаются друг от друга только направлением распространения звука, что на корпускулярном языке [16] соответствует *испусканию* ($\nu = -1$) или *поглощению* ($\nu = +1$) фонона с обязательным выполнением законов сохранения энергии и импульса, выраженных равенствами (3.9.90) и (3.9.91).

Для двух случаев распространения звука (рис. 3.8 *а* и *б*) угол падения θ_{B}, найденный из поперечного условия фазового согласования (3.9.92), называется *брэгговским углом*, который удовлетворяет равенству

$$2k_x^{(0)} = K \qquad \text{или} \qquad \sin\theta_{\text{B}} = \frac{K}{2k} \equiv \frac{\lambda/n}{2\Lambda}. \tag{3.9.100}$$

Поскольку в этом режиме обратные дифрагированные волны не участвуют в связи, то в уравнениях (3.9.94)–(3.9.98) можно положить $\overline{\overline{A}}_-{}^{(\mp 1)} \equiv 0$, так что остаются лишь связанные уравнения (3.9.94), (3.9.95) и (3.9.97), в которых $K_z = 0$. Эти уравнения распадаются на две независимые пары, одна из которых описывает связь между волнами $\overline{\overline{A}}_+{}^{(0)}$ и $\overline{\overline{A}}_+{}^{(-1)}$ (рис. 3.8 *а*), а другая — между волнами $\overline{\overline{A}}_+{}^{(0)}$ и $\overline{\overline{A}}_+{}^{(+1)}$ (рис. 3.8 *б*).

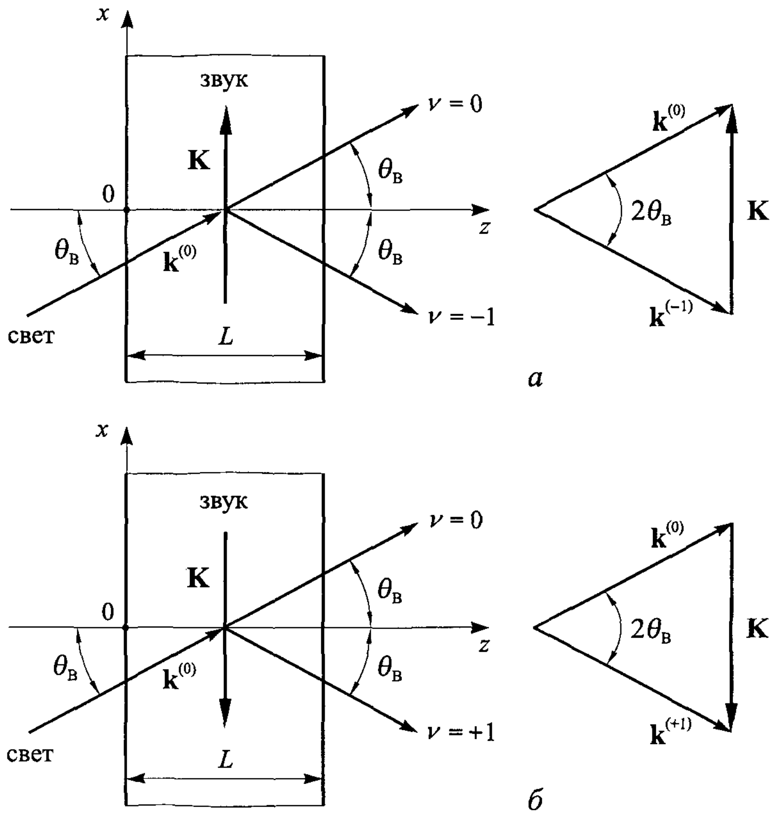


Рис. 3.8. Схема прямого прохождения при дифракции Брэгга и диаграмма волновых векторов: *а* — дифракционный порядок $\nu = -1$, *б* — дифракционный порядок $\nu = +1$

Каждая из двух пар связанных уравнений, соответствующих взаимодействию волн $\left(\overline{\overline{A}}_{+}{}^{(0)}, \overline{\overline{A}}_{+}{}^{(-1)}\right)$ и $\left(\overline{\overline{A}}_{+}{}^{(0)}, \overline{\overline{A}}_{+}{}^{(+1)}\right)$, имеет одну и ту же структуру, так что они обе могут быть записаны в единой форме:

$$\frac{dA_1(z)}{dz} = i\chi_{12}\, e^{i(\beta_1 - \beta_2)z} A_2(z), \tag{3.9.101}$$

$$\frac{dA_2(z)}{dz} = i\chi_{12}^{*}\, e^{-i(\beta_1 - \beta_2)z} A_1(z); \tag{3.9.102}$$

здесь введены следующие обозначения:

$$A_1 \equiv \overline{\overline{A}}_{+}^{(0)}, \qquad A_2 \equiv \overline{\overline{A}}_{+}^{(-1)} \text{ или } \overline{\overline{A}}_{+}^{(+1)}, \tag{3.9.103}$$

$$\beta_1 \equiv k_{z+}^{(0)}, \qquad \beta_2 \equiv k_{z+}^{(-1)} \text{ или } k_{z+}^{(+1)}. \tag{3.9.104}$$

Коэффициенты связи, входящие в уравнения (3.9.101)–(3.9.102), таковы, что

$$\chi_{12} \equiv \chi^{(0,-1)} \quad \text{или} \quad \chi^{(0,+1)}, \tag{3.9.105}$$

где, в соответствии с (3.9.32), (3.9.34) и (3.9.51),

$$\chi^{(0,-1)} = \frac{n^4 k_{\text{в}}^2}{4\sqrt{\beta_1\beta_2}}\,\mathcal{P}_{12}^{(0,-1)} \equiv \frac{n^4 k_{\text{в}}^2}{4\sqrt{\beta_1\beta_2}}\left(\mathbf{p}_1^{(0)*}\cdot(\overline{\overline{\mathbf{p}}}:\widehat{\mathbf{S}})\cdot\mathbf{p}_2^{(-1)}\right) =$$
$$= \frac{n^3 k_{\text{в}}}{4\cos\theta_{\text{B}}}\left(\mathbf{p}_1^{(0)*}\cdot(\overline{\overline{\mathbf{p}}}:\widehat{\mathbf{S}})\cdot\mathbf{p}_2^{(-1)}\right), \qquad (3.9.106)$$

$$\chi^{(0,+1)} = \frac{n^4 k_{\text{в}}^2}{4\sqrt{\beta_1\beta_2}}\,\mathcal{P}_{12}^{(0,+1)} \equiv \frac{n^4 k_{\text{в}}^2}{4\sqrt{\beta_1\beta_2}}\left(\mathbf{p}_1^{(0)*}\cdot(\overline{\overline{\mathbf{p}}}:\widehat{\mathbf{S}})^*\cdot\mathbf{p}_2^{(+1)}\right) =$$
$$= \frac{n^3 k_{\text{в}}}{4\cos\theta_{\text{B}}}\left(\mathbf{p}_1^{(0)*}\cdot(\overline{\overline{\mathbf{p}}}:\widehat{\mathbf{S}})^*\cdot\mathbf{p}_2^{(+1)}\right). \qquad (3.9.107)$$

Последние выражения в (3.9.106) и (3.9.107) записаны для точного брэгговского условия (3.9.100), когда продольные фазовые постоянные (3.9.104) равняются

$$\beta_1 \equiv k_{z+}^{(0)} = k^{(0)}\cos\theta_{\text{B}} \equiv k\cos\theta_{\text{B}} = nk_{\text{в}}\cos\theta_{\text{B}}, \qquad (3.9.108)$$

$$\beta_2 \equiv k_{z+}^{(\mp1)} = k^{(\mp1)}\cos\theta_{\text{B}} \simeq k\cos\theta_{\text{B}} = nk_{\text{в}}\cos\theta_{\text{B}}. \qquad (3.9.109)$$

Уравнения (3.9.101) и (3.9.102) полностью совпадают с уравнениями связанных мод (Г.9.3), в которых

$$\widehat{c}_{12} = i\chi_{12}, \qquad \widehat{c}_{21} = i\chi_{12}^*, \qquad \Delta\beta_{12} = \beta_1 - \beta_2. \qquad (3.9.110)$$

Так как в этом режиме $\widehat{c}_{12} = -\widehat{c}_{21}^*$, то, в соответствии с (Г.9.9), связь волн $A_1(z)$ и $A_2(z)$, описываемая уравнениями (3.9.101) и (3.9.102), является *пассивной*. По отношению к направлению z волны являются *попутными* ($\beta_1 \equiv k_{z+}^{(0)} > 0$ и $\beta_2 \equiv k_{z+}^{(\mp1)} > 0$). Это требует задания краевых условий для обеих волн при $z = 0$:

$$A_1(0) \equiv \overline{\overline{A}}_+^{(0)}(0) \neq 0 \quad \text{и} \quad A_2(0) \equiv \overline{\overline{A}}_+^{(\mp1)}(0) = 0. \qquad (3.9.111)$$

Из общих результатов обычной теории связанных мод, приведенных в приложении Г, известно, что решение уравнений (3.9.101)–(3.9.102) с краевыми условиями (3.9.111) соответствует пассивной связи попутных мод, приводящей к *режиму попутного переизлучения* с периодическим характером обмена мощностью (см. п. Г.10). По аналогии с этим, в режиме прямого прохождения при дифракции Брэгга имеет место периодический обмен мощностью между падающей световой волной ($\nu = 0$) и дифрагированными волнами ($\nu = \mp1$), который изображен на рис. Г.6. Если длина области взаимодействия L (ширина звукового луча) удовлетворяет требованиям $|\chi_{12}L| = \pi/2$ и $\Delta\beta_{12} = 0$ (точное брэгговское условие), то это соответствует полному переизлучению, при котором входная мощность падающей волны полностью переходит в дифрагированную волну.

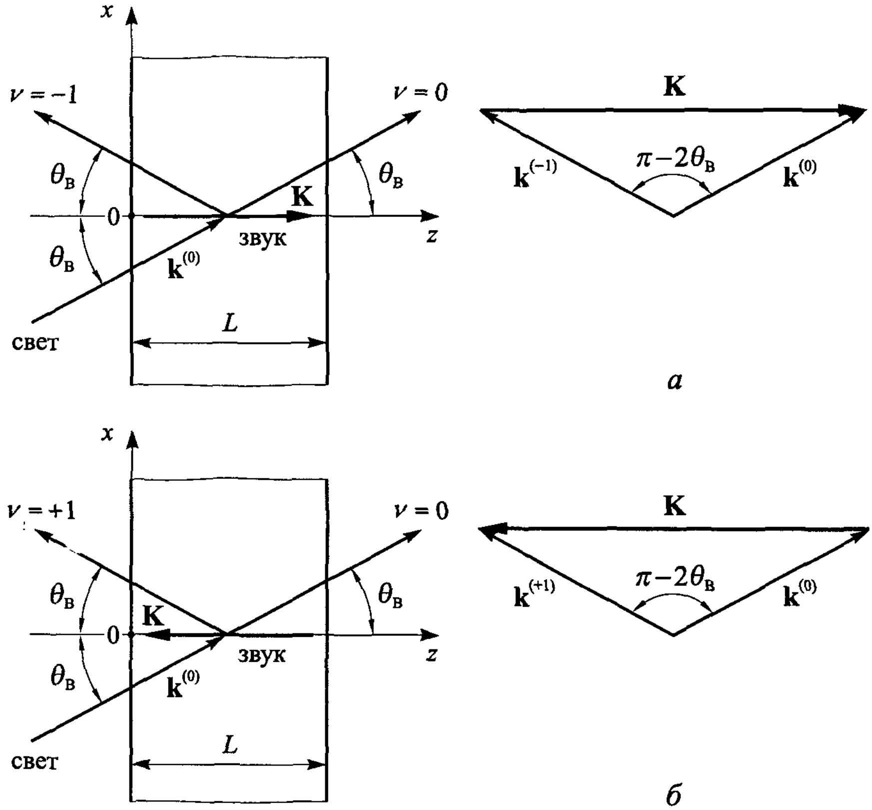


Рис. 3.9. Схема обратного отражения при дифракции Брэгга и диаграмма волновых векторов: *а* — дифракционный порядок $\nu = -1$, *б* — дифракционный порядок $\nu = +1$

Режим обратного отражения при дифракции Брэгга в изотропной среде (когда $|\mathbf{k}^{(0)}| = |\mathbf{k}^{(\mp 1)}|$) реализуется, если звук распространяется вдоль направления z, перпендикулярного к границам области взаимодействия, так что $K_x \equiv 0$ и $\mathbf{K} = \pm\, \mathbf{e}_z K$. Соответствующая диаграмма волновых векторов, удовлетворяющая соотношению (3.9.91), изображена на рис. 3.9 *а* и *б* для дифракционных порядков $\nu = -1$ и $\nu = +1$, соответственно. Как и в предыдущем режиме, эти два случая отличаются друг от друга только направлением распространения звука.

Для обоих случаев *брэгговский угол* падения θ_B, находится из общего соотношения (3.9.91), записанного для продольного направления:

$$2k_z^{(0)} = K \qquad \text{или} \qquad \cos\theta_B = \frac{K}{2k} \equiv \frac{\lambda/n}{2\Lambda}\,. \tag{3.9.112}$$

Поскольку в этом режиме прямые дифрагированные волны не участвуют в связи, то в уравнениях (3.9.94)–(3.9.98) можно положить $\overline{\overline{A}}_{+}{}^{(\mp 1)} \equiv 0$, так что остаются лишь связанные уравнения (3.9.94), (3.9.96) и (3.9.98). Как и в предыдущем режиме прямого прохождения, в данном случае эти уравнения также распадаются на две независимые пары, одна из которых описывает связь между волнами $\overline{\overline{A}}_+^{(0)}$ и $\overline{\overline{A}}_-^{(-1)}$ (рис. 3.9 *а*), а другая — между волнами $\overline{\overline{A}}_+^{(0)}$ и $\overline{\overline{A}}_-^{(+1)}$ (рис. 3.9 *б*).

Каждая из двух пар связанных уравнений, соответствующих взаимодействию волн $\left(\overline{\overline{A}}_+^{(0)}, \overline{\overline{A}}_-^{(-1)}\right)$ и $\left(\overline{\overline{A}}_+^{(0)}, \overline{\overline{A}}_-^{(+1)}\right)$, имеет одну и ту же структуру, так что они обе могут быть записаны в единой форме:

$$\frac{dA_1(z)}{dz} = i\chi_{12}\, e^{i\Delta\beta_{12}z} A_2(z), \tag{3.9.113}$$

$$\frac{dA_2(z)}{dz} = -i\chi_{12}^*\, e^{-i\Delta\beta_{12}z} A_1(z); \tag{3.9.114}$$

здесь по аналогии с (3.9.103) и (3.9.104) введены следующие *обозначения*:

$$A_1 \equiv \overline{\overline{A}}_+^{(0)}, \qquad A_2 \equiv \overline{\overline{A}}_-^{(-1)} \text{ или } \overline{\overline{A}}_-^{(+1)}, \tag{3.9.115}$$

$$\beta_1 \equiv k_{z+}^{(0)}, \qquad \beta_2 \equiv k_{z-}^{(-1)} \text{ или } k_{z-}^{(+1)}. \tag{3.9.116}$$

Коэффициенты связи, входящие в (3.9.113) и (3.9.114), даются теми же формулами (3.9.105)–(3.9.107), а фазовое рассогласование $\Delta\beta_{12}$ определено в виде

$$\Delta\beta_{12} = \beta_1 - \beta_2 \mp K \equiv k_{z+}^{(0)} - k_{z-}^{(\mp 1)} \mp K. \tag{3.9.117}$$

Так как в этом режиме $\widehat{c}_{12} = \widehat{c}_{21}^*$, то, в соответствии с (Г.9.10), связь волн $A_1(z)$ и $A_2(z)$, описываемая уравнениями (3.9.113) и (3.9.114), является *активной*. По отношению к направлению z волны являются *встречными* ($\beta_1 \equiv k_{z+}^{(0)} > 0$ и $\beta_2 \equiv k_{z-}^{(\mp 1)} < 0$). Это требует задания краевых условий для волн на противоположных краях $z = 0$ и $z = L$ области взаимодействия:

$$A_1(0) \equiv \overline{\overline{A}}_+^{(0)}(0) \neq 0 \quad \text{ и } \quad A_2(L) \equiv \overline{\overline{A}}_-^{(\mp 1)}(L) = 0. \tag{3.9.118}$$

Из общих результатов обычной теории связанных мод, приведенных в приложении Г, известно, что решение уравнений (3.9.113)–(3.9.114) с краевыми условиями (3.9.118) соответствует активной связи встречных мод, приводящей к *режиму встречного переизлучения* с апериодическим характером обмена мощностью (см. п. Г.11).

Следовательно, в режиме обратного отражения при дифракции Брэгга имеет место апериодический (экспоненциальный) обмен мощностью между падающей световой волной ($\nu = 0$) и дифрагированными волнами ($\nu = \mp 1$), который изображен на рис. Г.7. При достаточно большой длине L области взаимодействия (ширине звукового луча) практически вся входная мощность падающей волны переизлучается в дифрагированную волну, которая выходит в обратном направлении во входной плоскости $z = 0$, что воспринимается как обратное отражение. Именно такая физическая ситуация и дает название этому режиму дифракции Брэгга.

3.9.4. Специфические особенности анизотропной дифракции Брэгга. До настоящего момента дифракция Брэгга изучалась для оптически изотропных сред, в которых $|\mathbf{k}^{(0)}| = |\mathbf{k}^{(\mp 1)}|$. При наличии анизотропии показатель преломления для падающей и дифрагированных световых волн может оказаться различным, тогда $|\mathbf{k}^{(0)}| \neq |\mathbf{k}^{(\mp 1)}|$. Этот факт может существенно видоизменить изотропные режимы дифракции Брэгга, изображенные на рис. 3.8 и 3.9. Возможные типы векторных диаграмм для анизотропной дифракции показаны на рис. 3.10.

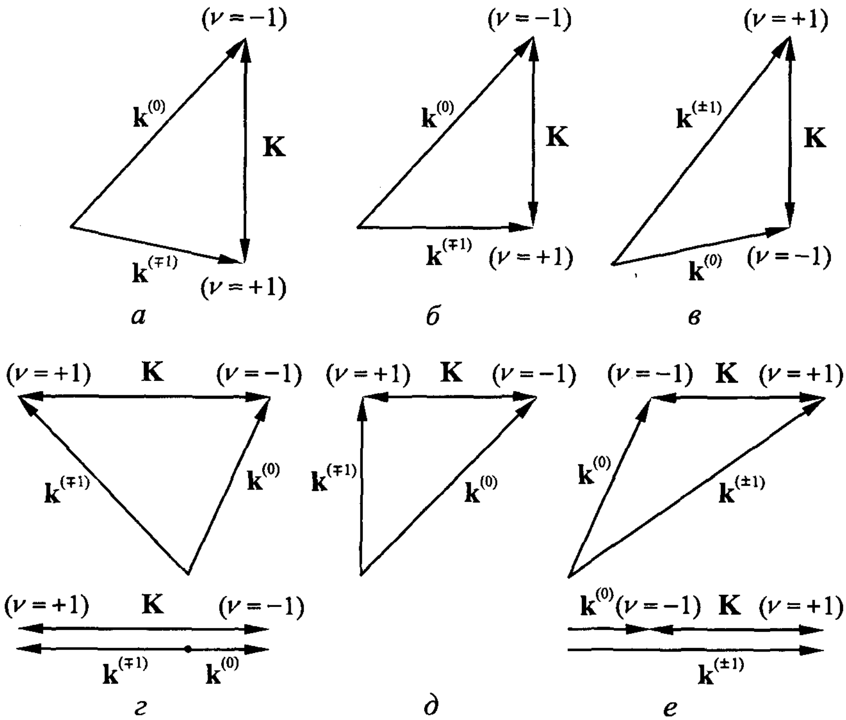


Рис. 3.10. Диаграммы волновых векторов для анизотропной брэгговской дифракции света на звуке: *а, б, в, е* — в режиме прямого прохождения, *г, д* — в режиме обратного отражения. Акустический волновой вектор $\mathbf{K}$ имеет два направления в виде двойных стрелок с указанием дифракционных порядков $\nu = -1$ и $\nu = +1$, которые соответствуют волновым векторам $\mathbf{k}^{(\mp 1)}$ дифрагированных световых волн (ось z направлена горизонтально)

Первые три диаграммы на рис. 3.10 *а, б, в* являются анизотропной модификацией двух векторных диаграмм, изображенных на рис. 3.8 для режима прямого прохождения при изотропной дифракции. На этих диаграммах два возможных направления акустического волнового вектора $\mathbf{K} = \pm\mathbf{e}_x K$ показаны двойными стрелками для того, чтобы объединить две диаграммы, изображенные по отдельности на рис. 3.8 *а* и *б*. Для волновых векторов $\mathbf{k}^{(\mp 1)}$ и $\mathbf{k}^{(\pm 1)}$ дифрагированных волн верхние знаки в индексах соответствуют акустическому вектору $\mathbf{K} = \mathbf{e}_x K$, а нижние знаки — вектору $\mathbf{K} = -\mathbf{e}_x K$.

Из сравнения векторных диаграмм на рис. 3.10 *а, б, в* с аналогичными диаграммами на рис. 3.8 *а* и *б* видно, что появление оптической анизотропии изменяет угол между падающим и дифрагированными лучами, но после дифракции световая волна в этих трех случаях остается прямой ($k_z^{(\mp 1)} > 0$).

Следовательно, анизотропное взаимодействие между падающей и дифрагированными волнами описывается уравнениями (3.9.101)–(3.9.102) с краевыми условиями (3.9.111). Такой режим соответствует пассивной связи попутных волн, дающей *попутное переизлучение* с периодическим обменом мощностью между падающей волной и дифрагированными волнами в пределах ширины звукового луча.

Векторные диаграммы, показанные на рис. 3.10 *г, д* и *е*, являются анизотропной модификацией двух диаграмм на рис. 3.9 для режима обратного отражения при изотропной дифракции. Здесь, как и ранее, два возможных направления акустического волнового вектора $\mathbf{K} = \pm\mathbf{e}_z K$ показаны двойными стрелками, что объединяет две диаграммы на рис. 3.9 *а* и *б* в одну. Верхние знаки в индексах волновых векторов $\mathbf{k}^{(\mp1)}$ и $\mathbf{k}^{(\pm1)}$ дифрагированного света соответствуют акустическому волновому вектору $\mathbf{K} = \mathbf{e}_z K$, а нижние знаки — волновому вектору $\mathbf{K} = -\mathbf{e}_z K$.

Диаграмма на рис. 3.10 *г* в принципе не отличается от аналогичных диаграмм на рис. 3.9 *а* и *б*, так как в обоих случаях дифрагированная волна является обратной ($k_z^{(\mp1)} < 0$). Анизотропное взаимодействие этой волны с прямой падающей волной описывается теми же связанными уравнениями (3.9.113)–(3.9.114) с краевыми условиями (3.9.118), которые применимы были при изотропной дифракции. Они соответствуют активной связи встречных волн, порождающей *встречное переизлучение с* экспоненциальным характером обмена мощностью между прямой падающей волной и обратной дифрагированной волной.

Диаграмма на рис. 3.10 *е* демонстрирует возможность появления *прямой* волны ($k_z^{(\mp1)} > 0$) как результат оптической анизотропии в режиме *обратного* отражения при дифракции Брэгга. Так как в этом случае взаимодействующие волны (падающая и дифрагированная) являются попутными, то они взаимодействуют в режиме попутного переизлучения, описываемого связанными уравнениями (3.9.101)–(3.9.102) с краевыми условиями (3.9.111).

Нижние диаграммы на рис. 3.10 *г* и *е* являются предельными случаями таких же верхних диаграмм, когда все векторы становятся параллельными или антипараллельными положительному направлению оси z. Диаграмма на рис. 3.10 *е* соответствует коллинеарному взаимодействию попутных волн, а на рис. 3.10 *г* — антиколлинеарному взаимодействию встречных волн.

Диаграммы волновых векторов на рис. 3.10 *б* и *д* описывают такие экспериментальные ситуации, при которых в силу оптической анизотропии дифрагированный световой луч распространяется перпендикулярно акустическому волновому вектору ($\mathbf{k}^{(\mp1)} \perp \mathbf{K}$).

3.10. Акустооптическая дифракция направляемых мод в планарном волноводе

3.10.1. Акустооптические уравнения связанных мод. В дополнение к рассмотренному в предыдущем параграфе, будем исследовать ультразвуковую дифракцию оптических мод в волноведущих структурах с фотоупругой оптически изотропной средой. Общая схема дифракции света соответствует рис. 3.6 с различием в том, что планарная структура является многослойной вдоль оси y, нормальной к плоскости рисунка.

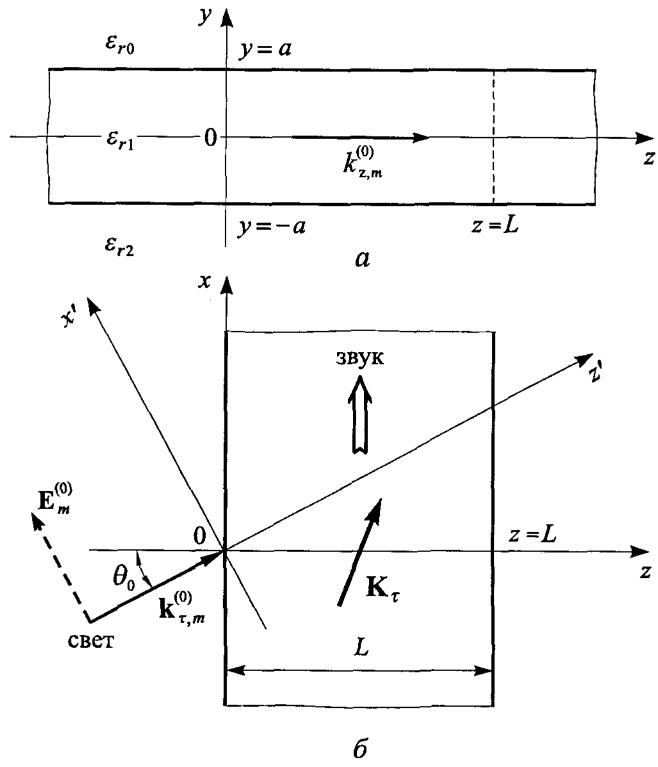


Рис. 3.11. Поперечное сечение трехслойного оптического волновода (a) и схема фотоупругого взаимодействия между m-й оптической модой и звуковой волной, которые распространяются в плоскости (x, z) слоев структуры с тангенциальными волновыми векторами $\mathbf{k}_{\tau,m}^{(0)}$ и $\mathbf{K}_\tau$ (*б*). Электрическое поле $\mathbf{E}_m^{(0)}$ соответствует TE_m-моде, в то время как TM_m-мода имеет компоненты электрического поля, направленные вдоль осей y и z'

Рассмотрим трехслойную оптически изотропную структуру на рис. 3.11 a. Оптический волновод образован центральным слоем с проницаемостью ε_{r1}, удовлетворяющей соотношениям $\varepsilon_{r0} \leqslant \varepsilon_{r2} < \varepsilon_{r1}$ (см. уравнение (1.7.5)). Роль акустической среды выполняет подложка (с проницаемостью ε_{r2}), вдоль границы которой может распространяться поверхностная акустическая волна (ПАВ), например, рэлеевского типа [16, 63, 64]. Можно считать, что оптический волноведущий слой (при $-a < y < a$), имея малую толщину по сравнению с длиной волны звука ($2a \ll \Lambda$), является пренебрежимо малой механической нагрузкой для ПАВ, поддерживаемой упругими свойствами подложки.

В общем случае фотоупругость может быть присуща как волноведущему слою, так и подложке, однако последней для упрощения будем пренебрегать. Иными словами, подложка ответственна за распространение акустической волны, а тонкий оптический слой с фотоупругими свойствами на ее поверхности обеспечивает связь звука со светом. В этом случае динамические тензоры *объемной* и *поверхностной* связи (3.8.9) и (3.8.10) принимают следующую форму:

$$\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c(x,y,z) \equiv \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_S(y)e^{-i\mathbf{K}_\tau\cdot\mathbf{r}} = -\frac{\varepsilon_1^2}{2\varepsilon_0}(\overline{\overline{\mathbf{p}}}:\widehat{\overline{\mathbf{S}}})e^{-i(K_x x+K_z z)}, \tag{3.10.1}$$

$$\delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c(x,z)\big|_{y=\pm a} \equiv (\mathbf{e}_z\times\mathbf{n}_b)\frac{\mathbf{e}_z\cdot\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_S(\pm a)}{\varepsilon_1}\,e^{-i\mathbf{K}_\tau\cdot\mathbf{r}} =$$
$$= \pm\frac{\varepsilon_1}{2\varepsilon_0}\,\mathbf{e}_x\mathbf{e}_z\cdot(\overline{\overline{\mathbf{p}}}:\widehat{\overline{\mathbf{S}}})\big|_{y=\pm a}e^{-i(K_x x+K_z z)}. \tag{3.10.2}$$

Здесь $\mathbf{K}_\tau = \mathbf{e}_x K_x + \mathbf{e}_z K_z$ — акустический волновой вектор, тангенциальный к плоскости (x,z) волноведущего оптического слоя, $\varepsilon_1 = \varepsilon_{r1}\varepsilon_0$, ε_0 — электрическая постоянная. Фактор фотоупругого взаимодействия $(\overline{\overline{\mathbf{p}}}:\widehat{\overline{\mathbf{S}}})$ определяется структурой тензора диэлектрического возмущения (3.8.2).

Собственные моды (с номерами $m = 1,2,\ldots$) оптического волновода возникают на комбинационных частотах $\omega_\nu = \omega + \nu\Omega$ ($\nu = 0, \pm1, \pm2, \ldots$) как результат фотоупругой дифракции входной световой m-й моды с волновым вектором $\mathbf{k}_{\tau,m}^{(0)}$ ($\nu = 0$) на акустической волне. Эти моды распространяются в плоскости (x,z) с тангенциальными волновыми векторами $\mathbf{k}_{\tau,m}^{(\nu)}$ под различными углами θ_ν (для входной моды угол θ_0 показан на рис. 3.11 *б*).

Продольная фазовая постоянная $\beta_m^{(\nu)} \equiv |\mathbf{k}_{\tau,m}^{(\nu)}|$ m-й моды на частоте ω_ν, которая распространяется в плоскости (x,z) в произвольном z'-направлении, однозначно определяет тангенциальный волновой вектор:

$$\mathbf{k}_{\tau,m}^{(\nu)} \equiv \mathbf{e}_x k_{x,m}^{(\nu)} + \mathbf{e}_z k_{z,m}^{(\nu)} = \mathbf{e}_x\,\beta_m^{(\nu)}\sin\theta_\nu + \mathbf{e}_z\,\beta_m^{(\nu)}\cos\theta_\nu \tag{3.10.3}$$

или

$$k_{x,m}^{(\nu)} = \beta_m^{(\nu)}\sin\theta_\nu \quad \text{и} \quad k_{z,m}^{(\nu)} = \beta_m^{(\nu)}\cos\theta_\nu\,. \tag{3.10.4}$$

Собственное электрическое поле m-й моды представляется в такой форме (ср. уравнение (3.9.3)):

$$\mathbf{E}_m^{(\nu)}(x,y,z,t) = \widehat{\mathbf{E}}_m^{(\nu)}(y)e^{i(\omega_\nu t-\mathbf{k}_{\tau,m}^{(\nu)}\cdot\mathbf{r})} \equiv \widehat{\mathbf{E}}_m^{(\nu)}(x,y)e^{i(\omega_\nu t-k_{z,m}^{(\nu)}z)}. \tag{3.10.5}$$

Здесь введена мембранная функция модального поля (отмеченная колпачком) по отношению к оси z (направленной перпендикулярно к границам $z=0$ и $z=L$ акустического луча):

$$\widehat{\mathbf{E}}_m^{(\nu)}(x,y) = \widehat{\mathbf{E}}_m^{(\nu)}(y)e^{-ik_{x,m}^{(\nu)}x} \equiv \widehat{\mathbf{E}}_m^{(\nu)}(y)e^{-i\beta_m^{(\nu)}\sin\theta_\nu x}. \tag{3.10.6}$$

Для любой m-й моды ее продольная фазовая постоянная $\beta_m^{(\nu)}(\omega_\nu)$ как функция частоты ω_ν (закон дисперсии моды) и мембранные функции полей $\widehat{\mathbf{E}}_m^{(\nu)}(y)$ (не зависящие от угла распространения θ_ν в оптически изотропных волноводах) предполагаются известными из решения невозмущенной задачи на собственные значения для базового волновода (в форме трехслойной планарной структуры), как описано в п. 1.7.

Фотоупругая связь может существовать как между различными оптическими модами (с номерами m и n), так и между модами одного типа, но распространяющимися в плоскости (x, z) под различными углами θ_ν. При этом угол θ_ν может принимать любое значение, т. е. угловой спектр направляемых мод (а значит и спектр поперечных волновых чисел $k_{x,m}^{(\nu)} = \beta_m^{(\nu)} \sin\theta_\nu$) является непрерывным. На этом основании, в области фотоупругого взаимодействия $(0 < z < L)$ электрическое поле, точнее, только его *поперечная* (по отношению к оси z) составляющая без ортогонального дополнения представляется следующим образом (ср. уравнение (3.9.16)):

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_t(x, y, z, t) &= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_t^{(\nu)}(x, y, z)\, e^{i\omega_\nu t} = \\ &= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \sum_m \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{A}_m^{(\nu)}(z; \overline{\varkappa}_m)\, \widehat{\mathbf{E}}_{mt}^{(\nu)}(x, y; \overline{\varkappa}_m)\, e^{i[\omega_\nu t - k_{z,m}^{(\nu)}(\overline{\varkappa}_m) z]}\, d\overline{\varkappa}_m.\end{aligned} \tag{3.10.7}$$

Здесь первая сумма распространяется на *частотный спектр* комбинационных частот $\omega_\nu = \omega + \nu\Omega$, а вторая подразумевает суммирование по *модальному спектру* поперечных волновых чисел $k_{yi,m}^{(\nu)}$ (различных для разных i-слоев многослойного волновода). Интегрирование в (3.10.7) выполняется по непрерывному спектру поперечных волновых чисел $\overline{\varkappa}_m \equiv k_{x,m}^{(\nu)} = \beta_m^{(\nu)} \sin\theta_\nu$ (или угловому спектру в плоскости (x, z) волноведущего слоя).

Продольное волновое число $k_{z,m}^{(\nu)} = \beta_m^{(\nu)} \cos\theta_\nu$ (являющееся в выражении (3.10.7) функцией $\overline{\varkappa}_m$), будучи единым, как и $k_{x,m}^{(\nu)}$, для всех слоев структуры, связано с $k_{yi,m}^{(\nu)}$ в каждом i-м слое $(i = 0, 1, 2)$ следующим соотношением (ср. уравнение (3.9.2)):

$$\left(k_i^{(\nu)}\right)^2 \equiv \left(k_{x,m}^{(\nu)}\right)^2 + \left(k_{yi,m}^{(\nu)}\right)^2 + \left(k_{z,m}^{(\nu)}\right)^2 = \omega_\nu^2 \varepsilon_i \mu_0. \tag{3.10.8}$$

Таким образом, в рассматриваемом случае звуковой дифракции оптических мод в волноводе мы имеем дело, согласно представлению поля в форме (3.10.7), с дискретно-непрерывным спектром направляемых мод. Он является дискретным по отношению к направлению y, нормальному к плоскости слоев (модальный спектр волновых чисел $k_{yi,m}^{(\nu)}$) и непрерывным по отношению к направлению x в плоскости слоев (угловой спектр продольного распространения каждой m-й моды).

Амплитуда возбуждения $\overline{A}_m^{(\nu)}(z; \overline{\varkappa}_m)$ направляемой m-й моды, входящая в спектральное представление (3.10.7) искомого электрического поля, находится из системы связанных уравнений $(m = 1, 2, \ldots)$, записанных по аналогии с (3.2.33) и (3.9.17) в следующей форме:

$$\begin{aligned}\frac{d\overline{A}_m^{(\nu)}(z; \overline{\varkappa}_m)}{dz} &= \sum_n \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{c}_{mn}^{(\nu,\nu-1)}(\overline{\varkappa}_m, \overline{\varkappa}_n)\, e^{i[k_{z,m}^{(\nu)}(\overline{\varkappa}_m) - k_{z,n}^{(\nu-1)}(\overline{\varkappa}_n)]z} \times \\ &\qquad \times \overline{A}_n^{(\nu-1)}(z; \overline{\varkappa}_n)\, d\overline{\varkappa}_n +\end{aligned}$$

$$+\sum_{n}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\overline{c}_{mn}^{(\nu,\nu+1)}(\overline{\varkappa}_m,\overline{\varkappa}_n)\,e^{i[k_{z,m}^{(\nu)}(\overline{\varkappa}_m)-k_{z,n}^{(\nu+1)}(\overline{\varkappa}_n)]z}\times$$

$$\times\,\overline{A}_n^{(\nu+1)}(z;\overline{\varkappa}_n)\,d\overline{\varkappa}_n\,. \qquad (3.10.9)$$

Здесь переменными интегрирования $\overline{\varkappa}_m$ и $\overline{\varkappa}_n$ по непрерывному (угловому) спектру являются поперечные (в плоскости слоев) волновые числа

$$\overline{\varkappa}_m\equiv k_{x,m}^{(\nu)}=\beta_m^{(\nu)}\sin\theta_\nu\qquad\text{и}\qquad\overline{\varkappa}_n\equiv k_{x,n}^{(\nu\mp1)}=\beta_n^{(\nu\mp1)}\sin\theta_{\nu\mp1}. \qquad (3.10.10)$$

В общем случае коэффициенты связи $\overline{c}_{mn}^{(\nu,\nu\mp1)}$ включают два вклада (объемный и поверхностный), создаваемые, соответственно, динамическими тензорами *объемной связи* и *поверхностной связи* в форме (3.10.1) и (3.10.2), а именно

$$\overline{c}_{mn}^{(\nu,\nu\mp1)}=\left(\overline{c}_{mn}^{(\nu,\nu\mp1)}\right)_{bulk}+\left(\overline{c}_{mn}^{(\nu,\nu\mp1)}\right)_{surf}. \qquad (3.10.11)$$

Из общих формул (3.2.34) и (3.2.35) для коэффициентов связи с использованием выражения (3.10.6) получаем:

- *коэффициенты объемной связи*

$$\left(\overline{c}_{mn}^{(\nu,\nu-1)}\right)_{bulk}=-\frac{i\omega_\nu}{\overline{N}_m^{(\nu)}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\widehat{\mathbf{E}}_m^{(\nu)*}(x,y)\cdot\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c\cdot\widehat{\mathbf{E}}_n^{(\nu-1)}(x,y)\right]dxdy=$$

$$=\frac{i\omega_\nu}{\overline{N}_m^{(\nu)}}\,\frac{\varepsilon_1^2}{2\varepsilon_0}\,e^{-iK_zz}\int\limits_{-a}^{a}\left[\widehat{\mathbf{E}}_m^{(\nu)*}(y)\cdot(\overline{\overline{\mathbf{p}}}:\widehat{\mathbf{S}})\cdot\widehat{\mathbf{E}}_n^{(\nu-1)}(y)\right]dy\,\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{\,i(k_{x,m}^{(\nu)}-k_{x,n}^{(\nu-1)}-K_x)x}dx, \qquad (3.10.12)$$

$$\left(\overline{c}_{mn}^{(\nu,\nu+1)}\right)_{bulk}=-\frac{i\omega_\nu}{\overline{N}_m^{(\nu)}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\widehat{\mathbf{E}}_m^{(\nu)*}(x,y)\cdot\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^{\,*}\cdot\widehat{\mathbf{E}}_n^{(\nu+1)}(x,y)\right]dxdy=$$

$$=\frac{i\omega_\nu}{\overline{N}_m^{(\nu)}}\,\frac{\varepsilon_1^2}{2\varepsilon_0}\,e^{iK_zz}\int\limits_{-a}^{a}\left[\widehat{\mathbf{E}}_m^{(\nu)*}(y)\cdot(\overline{\overline{\mathbf{p}}}:\widehat{\mathbf{S}})^*\cdot\widehat{\mathbf{E}}_n^{(\nu+1)}(y)\right]dy\,\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{\,i(k_{x,m}^{(\nu)}-k_{x,n}^{(\nu+1)}+K_x)x}dx\,; \qquad (3.10.13)$$

- *коэффициенты поверхностной связи*

$$\left(\overline{c}_{mn}^{(\nu,\nu-1)}\right)_{surf} = -\frac{1}{\overline{N}_m^{(\nu)}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big[\widehat{\mathbf{H}}_m^{(\nu)*}(x,a) \cdot \delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c(a) \cdot \widehat{\mathbf{E}}_n^{(\nu-1)}(x,a) +$$

$$+ \widehat{\mathbf{H}}_m^{(\nu)*}(x,-a) \cdot \delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c(-a) \cdot \widehat{\mathbf{E}}_n^{(\nu-1)}(x,-a)\Big] dx =$$

$$= -\frac{1}{\overline{N}_m^{(\nu)}} \frac{\varepsilon_1}{2\varepsilon_0} e^{-iK_z z} \Big[\widehat{H}_{mx}^{(\nu)*}(a) \left(\mathbf{e}_z \cdot (\overline{\overline{\mathbf{p}}} : \widehat{\overline{\mathbf{S}}}) \cdot \widehat{\mathbf{E}}_n^{(\nu-1)}\right)(a) -$$

$$- \widehat{H}_{mx}^{(\nu)*}(-a) \left(\mathbf{e}_z \cdot (\overline{\overline{\mathbf{p}}} : \widehat{\overline{\mathbf{S}}}) \cdot \widehat{\mathbf{E}}_n^{(\nu-1)}\right)(-a)\Big] \times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_{x,m}^{(\nu)} - k_{x,n}^{(\nu-1)} - K_x)x} dx, \qquad (3.10.14)$$

$$\left(\overline{c}_{mn}^{(\nu,\nu+1)}\right)_{surf} = -\frac{1}{\overline{N}_m^{(\nu)}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big[\widehat{\mathbf{H}}_m^{(\nu)*}(x,a) \cdot \delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c^*(a) \cdot \widehat{\mathbf{E}}_n^{(\nu+1)}(x,a) +$$

$$+ \widehat{\mathbf{H}}_m^{(\nu)*}(x,-a) \cdot \delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c^*(-a) \cdot \widehat{\mathbf{E}}_n^{(\nu+1)}(x,-a)\Big] dx =$$

$$= -\frac{1}{\overline{N}_m^{(\nu)}} \frac{\varepsilon_1}{2\varepsilon_0} e^{iK_z z} \Big[\widehat{H}_{mx}^{(\nu)*}(a) \left(\mathbf{e}_z \cdot (\overline{\overline{\mathbf{p}}} : \widehat{\overline{\mathbf{S}}})^* \cdot \widehat{\mathbf{E}}_n^{(\nu+1)}\right)(a) -$$

$$- \widehat{H}_{mx}^{(\nu)*}(-a) \left(\mathbf{e}_z \cdot (\overline{\overline{\mathbf{p}}} : \widehat{\overline{\mathbf{S}}})^* \cdot \widehat{\mathbf{E}}_n^{(\nu+1)}\right)(-a)\Big] \times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_{x,m}^{(\nu)} - k_{x,n}^{(\nu+1)} + K_x)x} dx, \qquad (3.10.15)$$

где стоящие последними несобственные интегралы по x ассоциируются с соответствующими дельта-функциями, представленными в виде (3.9.24).

Размерности величин $\overline{A}_m^{(\nu)}$, $\overline{c}_{mn}^{(\nu,\nu\mp1)}$ и $\overline{N}_m^{(\nu)}$, входящих в уравнения (3.10.7), (3.10.9) и (3.10.11)–(3.10.15), соответствуют приведенным в табл. 1.1 для излучательных мод планарной структуры (см. п. 1.9), которые отмечены чертой сверху, а именно

- амплитуды возбуждения $\overline{A}_m^{(\nu)}$ — м,
- коэффициенты связи $\overline{c}_{mn}^{(\nu,\nu\mp1)}$ — 1 (безразмерные),
- модальные нормы $\overline{N}_m^{(\nu)}$ — Вт/м.

Коэффициенты объемной связи (3.10.12) и (3.10.13) обладают следующим свойством перестановочной симметрии (ср. формулу (3.9.21)):

$$\frac{\overline{N}_m^{(\nu)}}{\omega_\nu}\left(\overline{c}_{mn}^{(\nu,\nu\mp1)}\right)_{bulk} = -\frac{\overline{N}_n^{(\nu\mp1)}}{\omega_{\nu\mp1}}\left(\overline{c}_{nm}^{(\nu\mp1,\nu)}\right)_{bulk}^*, \tag{3.10.16}$$

которое согласуется с общими перестановочными соотношениями (3.2.52) и (3.2.53). Однако коэффициенты поверхностной связи (3.10.14) и (3.10.15) приводят к асимметрии суммарных коэффициентов связи (3.10.11). Это вынуждает применять вместо обычной формы (Д.1.4) закона сохранения мощности его модифицированную форму (Д.1.10), учитывающую кросс-мощность, переносимую любой парой связанных мод (см. подробности в приложении Д и в п. 3.7.3).

Для преобразования коэффициентов связи удобно по аналогии с (3.9.26) ввести единичные поляризационные векторы $\mathbf{p}_m^{(\nu)}$ и $\mathbf{p}_n^{(\nu\mp1)}$, характеризующие поляризационное состояние m-й и n-й мод, так что

$$\mathbf{p}_m^{(\nu)*}\cdot\mathbf{p}_m^{(\nu)} = 1 \quad \text{и} \quad \mathbf{p}_n^{(\nu\mp1)*}\cdot\mathbf{p}_n^{(\nu\mp1)} = 1, \tag{3.10.17}$$

и записать мембранные функции (3.10.6) для модальных полей в виде

$$\widehat{\mathbf{E}}_m^{(\nu)}(x,y) \equiv \widehat{\mathbf{E}}_m^{(\nu)}(y)\, e^{-ik_{x,m}^{(\nu)}x} = \mathbf{p}_m^{(\nu)}\widehat{E}_m^{(\nu)}(y)\, e^{-ik_{x,m}^{(\nu)}x}, \tag{3.10.18}$$

$$\widehat{\mathbf{E}}_n^{(\nu\mp1)}(x,y) \equiv \widehat{\mathbf{E}}_n^{(\nu\mp1)}(y)\, e^{-ik_{x,n}^{(\nu\mp1)}x} = \mathbf{p}_n^{(\nu\mp1)}\widehat{E}_n^{(\nu\mp1)}(y)\, e^{-ik_{x,n}^{(\nu\mp1)}x}. \tag{3.10.19}$$

Подставляя (3.10.18)–(3.10.19) в выражения (3.10.12)–(3.10.13) и используя интегральное представление (3.9.24) для дельта-функций, можно оба коэффициента объемной связи записать в единой сингулярной (с δ-функцией) форме (ср. формулу (3.9.40)):

$$\left(\overline{c}_{mn}^{(\nu,\nu\mp1)}\right)_{bulk} = \left(c_{mn}^{(\nu,\nu\mp1)}\right)_{bulk} e^{\mp iK_z z}\,\delta\!\left(k_{x,m}^{(\nu)} - k_{x,n}^{(\nu\mp1)} \mp K_x\right). \tag{3.10.20}$$

Здесь введены новые коэффициенты связи (с обычной размерностью м$^{-1}$),

$$\left(c_{mn}^{(\nu,\nu\mp1)}\right)_{bulk} = i\omega_\nu\varepsilon_0\frac{\pi n_1^4}{\overline{N}_m^{(\nu)}}\int\limits_{-a}^{a}\left[\widehat{E}_m^{(\nu)*}(y)\,\mathcal{P}_{mn}^{(\nu,\nu\mp1)}(y)\,\widehat{E}_n^{(\nu\mp1)}(y)\right]dy, \tag{3.10.21}$$

и факторы фотоупругой связи между модами (ср. формулы (3.9.32) и (3.9.34)),

$$\mathcal{P}_{mn}^{(\nu,\nu-1)}(y) = \mathbf{p}_m^{(\nu)*}\cdot\left(\overline{\overline{\mathbf{p}}} : \widehat{\mathbf{S}}\right)\cdot\mathbf{p}_n^{(\nu-1)}, \tag{3.10.22}$$

$$\mathcal{P}_{mn}^{(\nu,\nu+1)}(y) = \mathbf{p}_m^{(\nu)*}\cdot\left(\overline{\overline{\mathbf{p}}} : \widehat{\mathbf{S}}\right)^*\cdot\mathbf{p}_n^{(\nu+1)}. \tag{3.10.23}$$

Аналогично, оба коэффициента поверхностной связи (3.10.14) и (3.10.15) можно записать в единой сингулярной форме:

$$\left(\overline{c}_{mn}^{(\nu,\nu\mp1)}\right)_{surf} = \left(c_{mn}^{(\nu,\nu\mp1)}\right)_{surf} e^{\mp iK_z z}\,\delta\!\left(k_{x,m}^{(\nu)} - k_{x,n}^{(\nu\mp1)} \mp K_x\right). \tag{3.10.24}$$

Здесь введены новые коэффициенты связи (с обычной размерностью м$^{-1}$),

$$\left(c_{mn}^{(\nu,\nu\mp1)}\right)_{surf} = -\frac{\pi n_1^2}{\overline{N}_m^{(\nu)}}\Big[\widehat{H}_{mx}^{(\nu)*}(a)\,\mathcal{Q}_n^{(\nu\mp1)}(a)\,\widehat{E}_{\imath}^{(\nu\mp1)}(a) - \widehat{H}_{mx}^{(\nu)*}(-a)\,\mathcal{Q}_n^{(\nu\mp1)}(-a)\,\widehat{E}_n^{(\nu\mp1)}(-a)\Big], \tag{3.10.25}$$

и факторы фотоупругой поверхностной связи между модами,

$$\mathcal{Q}_n^{(\nu-1)}(\pm a) = \mathbf{e}_z\cdot\left(\overline{\overline{\mathbf{p}}}:\widehat{\overline{\mathbf{S}}}\right)\cdot\mathbf{p}_n^{(\nu-1)}, \tag{3.10.26}$$

$$\mathcal{Q}_n^{(\nu+1)}(\pm a) = \mathbf{e}_z\cdot\left(\overline{\overline{\mathbf{p}}}:\widehat{\overline{\mathbf{S}}}\right)^*\cdot\mathbf{p}_n^{(\nu+1)}. \tag{3.10.27}$$

Подстановка (3.10.20) и (3.10.24) в (3.10.11) дает сингулярную форму для суммарных коэффициентов связи,

$$\overline{c}_{mn}^{(\nu,\nu\mp1)} = c_{mn}^{(\nu,\nu\mp1)}\,e^{\mp iK_z z}\,\delta\big(k_{x,m}^{(\nu)} - k_{x,n}^{(\nu\mp1)} \mp K_x\big), \tag{3.10.28}$$

где новые коэффициенты связи (обычной размерности м$^{-1}$) получаются как сумма выражений (3.10.21) и (3.10.25):

$$c_{mn}^{(\nu,\nu\mp1)} = \left(c_{mn}^{(\nu,\nu\mp1)}\right)_{bulk} + \left(c_{mn}^{(\nu,\nu\mp1)}\right)_{surf}. \tag{3.10.29}$$

Для последующего вычисления новых коэффициентов связи (3.10.21) и (3.10.25) необходимо знать норму $\overline{N}_m^{(\nu)}$ m-й моды на частоте ω_ν. С этой целью запишем соотношение ортонормировки, аналогичное (1.8.1) и (3.9.22). При этом учтем тот факт, что *модальный* спектр *дискретен* по отношению к волновым числам $k_{y,m}^{(\nu)}$, нормальным к слоям (что отражается символом Кронекера δ_{mn}), а *угловой* спектр *непрерывен* по отношению к волновым числам $k_{x,m}^{(\nu)}$, касательным к слоям (что отражается дельта-функцией Дирака $\delta(k_{x,m}^{(\nu)} - k_{x,m}^{(\nu)\prime})$, где $k_{x,m}^{(\nu)} = \beta_m^{(\nu)}\sin\theta_\nu$ и $k_{x,m}^{(\nu)\prime} = \beta_m^{(\nu)}\sin\theta_\nu'$).

Таким образом, на основе объединения соотношений (1.8.1) и (3.9.22) получаем искомое *соотношение ортонормировки*:

$$N_{mn}\big(k_{x,m}^{(\nu)}, k_{x,n}^{(\nu)\prime}\big) \equiv \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big[\widehat{\mathbf{E}}_m^{(\nu)*}\big(x,y;k_{x,m}^{(\nu)}\big)\times\widehat{\mathbf{H}}_n^{(\nu)}\big(x,y;k_{x,n}^{(\nu)\prime}\big) + \widehat{\mathbf{E}}_n^{(\nu)}\big(x,y;k_{x,n}^{(\nu)\prime}\big)\times\widehat{\mathbf{H}}_m^{(\nu)*}\big(x,y;k_{x,m}^{(\nu)}\big)\Big]\cdot\mathbf{e}_z\,dxdy = \overline{N}_m^{(\nu)}\,\delta_{mn}\,\delta(k_{x,m}^{(\nu)} - k_{x,m}^{(\nu)\prime}). \tag{3.10.30}$$

Здесь символ Кронекера δ_{mn} учитывает ортогональность мод с разными номерами m и n, в то время как дельта-функция Дирака $\delta(k_{x,m}^{(\nu)} - k_{x,m}^{(\nu)\prime})$ обеспечивает ортогональность мод одного типа (с номером m), которые распространяются в плоскости слоев (x,z) под различными углами θ_ν и θ_ν' по отношению к направлению z (нормальному к границам звукового луча), т. е. с различными волновыми числами $k_{x,m}^{(\nu)} = \beta_m^{(\nu)}\sin\theta_\nu$ и $k_{x,m}^{(\nu)\prime} = \beta_m^{(\nu)}\sin\theta_\nu'$.

3.10.2. Дифракция оптических мод ТЕ-типа. Для определенности рассмотрим TE_m-моду, распространяющуюся вдоль z'-направления под произвольным углом θ_ν к оси z в плоскости (x, z) планарной структуры. Волновой вектор $\mathbf{k}_{\tau,m}^{(\nu)} = \mathbf{e}_{z'}\beta_m^{(\nu)}$ и электрическое поле $\mathbf{E}_m^{(\nu)} = \mathbf{e}_{x'}E_{mx}^{(\nu)}$ аналогичны таковым же величинам $\mathbf{k}_{\tau,m}^{(0)}$ и $\mathbf{E}_m^{(0)}$, которые показаны на рис. 3.11 *б* для входной m-й моды ($\nu = 0$).

Для вычисления нормы $\overline{N}_m^{(\nu)}$ m-й моды ТЕ-типа запишем ее собственные поля, используя (1.7.6) и (3.10.18):

$$\widehat{\mathbf{E}}_m^{(\nu)}(x, y; k_{x,m}^{(\nu)}) = \mathbf{e}_{x'}\widehat{E}_{mx}^{(\nu)}(y)\, e^{-ik_{x,m}^{(\nu)}x}, \tag{3.10.31}$$

$$\widehat{\mathbf{H}}_{mt}^{(\nu)}(x, y; k_{x,m}^{(\nu)}) = \mathbf{e}_y\frac{\beta_m^{(\nu)}}{\omega_\nu\mu_0}\, \widehat{E}_{mx}^{(\nu)}(y)\, e^{-ik_{x,m}^{(\nu)}x}. \tag{3.10.32}$$

Аналогично выглядят подобные выражения для TE_n-моды:

$$\widehat{\mathbf{E}}_n^{(\nu)}(x, y; k_{x,n}^{(\nu)\prime}) = \mathbf{e}_{x'}\widehat{E}_{nx}^{(\nu)}(y)\, e^{-ik_{x,n}^{(\nu)\prime}x}, \tag{3.10.33}$$

$$\widehat{\mathbf{H}}_{nt}^{(\nu)}(x, y; k_{x,n}^{(\nu)\prime}) = \mathbf{e}_y\frac{\beta_n^{(\nu)}}{\omega_\nu\mu_0}\, \widehat{E}_{nx}^{(\nu)}(y)\, e^{-ik_{x,n}^{(\nu)\prime}x}. \tag{3.10.34}$$

Подстановка выражений (3.10.31)–(3.10.34) в соотношение ортонормировки (3.10.30) позволяет преобразовать интеграл $N_{mn}\big(k_{x,m}^{(\nu)}, k_{x,n}^{(\nu)\prime}\big)$ к следующему виду:

$$\begin{aligned} N_{mn}\big(k_{x,m}^{(\nu)}, k_{x,n}^{(\nu)\prime}\big) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_{x,m}^{(\nu)} - k_{x,n}^{(\nu)\prime})x}dx\, \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\beta_n^{(\nu)}}{\omega_\nu\mu_0}\,\widehat{E}_{mx}^{(\nu)*}\widehat{E}_{nx}^{(\nu)} + \frac{\beta_m^{(\nu)}}{\omega_\nu\mu_0}\,\widehat{E}_{nx}^{(\nu)}\widehat{E}_{mx}^{(\nu)*}\right](\mathbf{e}_{z'}\cdot\mathbf{e}_z)\,dy = \\ &= \left(4\pi\frac{k_{z,m}^{(\nu)}}{\omega_\nu\mu_0}\int_{-\infty}^{\infty}\big|\widehat{E}_{mx}^{(\nu)}(y)\big|^2dy\right)\delta_{mn}\delta(k_{x,m}^{(\nu)} - k_{x,m}^{(\nu)\prime}). \end{aligned} \tag{3.10.35}$$

Здесь использованы следующие равенства: $\mathbf{e}_{x'}\times\mathbf{e}_y = \mathbf{e}_{z'}$, $\mathbf{e}_{z'}\cdot\mathbf{e}_z = \cos\theta_\nu$ и $k_{z,m}^{(\nu)} = \beta_m^{(\nu)}\cos\theta_\nu$. Дельта-функция $\delta(k_{x,m}^{(\nu)} - k_{x,m}^{(\nu)\prime})$ появилась благодаря ее интегральному представлению (3.9.24), а использованное в ней равенство $k_{x,n}^{(\nu)\prime} = k_{x,m}^{(\nu)\prime}$ является следствием символа Кронекера δ_{mn}.

Из сравнения (3.10.35) с соотношением ортонормировки (3.10.30) видно, что стоящая в правой части (3.10.35) величина в скобках, содержащая интеграл по y, представляет собой норму TE_m-моды. Этот интеграл неявно был уже найден при вычислении нормы (1.8.23) ТЕ-моды с помощью исходных выражений (1.8.9)–(1.8.12). Из этих выражений следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\big|\widehat{E}_{mx}^{(\nu)}(y)\big|^2\,dy = \frac{d_m^{(\nu)}}{2}\,\big(E_m^{(\nu)}\big)^2, \tag{3.10.36}$$

где $E_m^{(\nu)}$ — максимальное значение электрического поля TE-типа в оптическом слое ($-a < y < a$), распределенного поперек слоя в виде (1.8.21) или (3.4.22), а $d_m^{(\nu)}$ — эффективная толщина этого слоя для TE_m-моды на частоте ω_ν, определенная в общей форме (1.8.20).

В частном случае *слабонаправленного волновода* с *сильной асимметрией* (когда $\varepsilon_{r0} \ll \varepsilon_{r2} = \varepsilon_{r1} - \Delta\varepsilon_r$ и $\Delta\varepsilon_r \ll \varepsilon_{r1}$) электрическое поле $\widehat{E}_{mx}^{(\nu)}(y)$ описывается формулой (3.4.23), а эффективная толщина имеет вид (3.4.24):

$$d_m^{(\nu)} = 2a + \frac{1}{\zeta_{2m}^{(\nu)}}, \tag{3.10.37}$$

где $\zeta_{2m}^{(\nu)}$ — поперечное волновое число подложки, равное (ср. формулу (3.4.27))

$$\zeta_{2m}^{(\nu)} \equiv ik_{y2,m}^{(\nu)} = \sqrt{\beta_m^{(\nu)2} - \omega_\nu^2 \varepsilon_2 \mu_0}\,. \tag{3.10.38}$$

Подстановка интеграла (3.10.36) в правую часть (3.10.35) дает искомое выражение для нормы TE_m-моды на частоте ω_ν (ср. формулу (3.9.25)),

$$\overline{N}_m^{(\nu)} = 2\pi \frac{k_{z,m}^{(\nu)} d_m^{(\nu)}}{\omega_\nu \mu_0} \left(E_m^{(\nu)}\right)^2, \tag{3.10.39}$$

откуда следует, что знак нормы определяется знаком продольного волнового числа (ср. формулу (3.9.38))

$$s_m^{(\nu)} = \frac{k_{z,m}^{(\nu)}}{|k_{z,m}^{(\nu)}|} \equiv \frac{\beta_m^{(\nu)} \cos\theta_\nu}{|\beta_m^{(\nu)}|\,|\cos\theta_\nu|}\,. \tag{3.10.40}$$

По аналогии с (3.10.39), записываем норму $\overline{N}_n^{(\nu\mp1)}$ для TE_n-моды на частотах $\omega_{\nu\mp1}$. Тогда произведение максимальных полей $E_m^{(\nu)}$ и $E_n^{(\nu\mp1)}$ представляется в виде

$$E_m^{(\nu)} E_n^{(\nu\mp1)} = \frac{\mu_0}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega_\nu \overline{N}_m^{(\nu)}}{k_{z,m}^{(\nu)}\, d_m^{(\nu)}}\, \frac{\omega_{\nu\mp1} \overline{N}_n^{(\nu\mp1)}}{k_{z,n}^{(\nu\mp1)}\, d_n^{(\nu\mp1)}}}\,. \tag{3.10.41}$$

Как отмечалось выше, толщина оптического слоя (при $-a < y < a$) много меньше длины волны звука ($2a \ll \Lambda$), так что тензор упругих деформаций $\widehat{\widehat{\mathbf{S}}}$ можно считать однородно распределенным по толщине этого слоя, тогда

$$\widehat{\widehat{\mathbf{S}}}(y) \simeq \widehat{\widehat{\mathbf{S}}}(a) = \mathrm{const} \qquad \text{при } -a < y < a. \tag{3.10.42}$$

В этом случае факторы фотоупругой связи мод (3.10.22) и (3.10.23), входящие в коэффициенты связи (3.10.21), также могут считаться постоянными и равными

$$\mathcal{P}_{mn}^{(\nu,\nu-1)}(a) = \mathbf{p}_m^{(\nu)*} \cdot \left(\overline{\overline{\mathbf{p}}} : \widehat{\widehat{\mathbf{S}}}\right) \cdot \mathbf{p}_n^{(\nu-1)}, \tag{3.10.43}$$

$$\mathcal{P}_{mn}^{(\nu,\nu+1)}(a) = \mathbf{p}_m^{(\nu)*} \cdot \left(\overline{\overline{\mathbf{p}}} : \widehat{\widehat{\mathbf{S}}}\right)^* \cdot \mathbf{p}_n^{(\nu+1)}. \tag{3.10.44}$$

В соответствии с рис. 3.11 *б*, для рассматриваемого случая ТЕ-мод единичные векторы поляризации, введенные равенствами (3.10.18)–(3.10.19) и подчиняющиеся соотношениям (3.10.17), имеют следующую форму:

$$\mathbf{p}_m^{(\nu)} = \mathbf{e}_{x'} = \mathbf{e}_x \cos\theta_\nu - \mathbf{e}_z \sin\theta_\nu \equiv \mathbf{p}^{(\nu)}, \tag{3.10.45}$$

$$\mathbf{p}_n^{(\nu\mp1)} = \mathbf{e}_{x'} = \mathbf{e}_x \cos\theta_{\nu\mp1} - \mathbf{e}_z \sin\theta_{\nu\mp1} \equiv \mathbf{p}^{(\nu\mp1)}, \tag{3.10.46}$$

которая зависит только от направления распространения моды (определяемого углами θ_ν и $\theta_{\nu\mp1}$) и является общей для всех мод (независимо от их номера m или n).

Коэффициент поверхностной связи (3.10.25) для мод ТЕ-типа отсутствует в силу $\widehat{H}_{mx}^{(\nu)}(y) \equiv 0$. Тогда коэффициент связи (3.10.29) содержит единственный объемный вклад в виде (3.10.21).

Подставляя в (3.10.21) поперечные распределения модальных полей типа (3.4.23) и вычисляя интеграл с учетом (3.10.41) и (3.10.43)–(3.10.44), приходим к окончательному выражению для коэффициентов связи (ср. формулы (3.9.31), (3.9.33) и (3.9.41)):

$$\begin{aligned} c_{mn}^{(\nu,\nu\mp1)} &= \left(c_{mn}^{(\nu,\nu\mp1)}\right)_{bulk} = \\ &= i\frac{n_1^4 k_\nu}{4 s_m^{(\nu)}} \left(\overline{N}_n^{(\nu\mp1)} / \overline{N}_m^{(\nu)}\right)^{1/2} \sqrt{\frac{2k_\nu a}{k_{z,m}^{(\nu)} d_m^{(\nu)}} \frac{2k_{\nu\mp1} a}{k_{z,n}^{(\nu\mp1)} d_n^{(\nu\mp1)}}}\, \mathcal{P}_{mn}^{(\nu,\nu\mp1)}(a) \times \\ &\qquad \times \left[\frac{\sin 2(\varkappa_m^{(\nu)} - \varkappa_n^{(\nu\mp1)})a}{2(\varkappa_m^{(\nu)} - \varkappa_n^{(\nu\mp1)})a} - \frac{\sin 2(\varkappa_m^{(\nu)} + \varkappa_n^{(\nu\mp1)})a}{2(\varkappa_m^{(\nu)} + \varkappa_n^{(\nu\mp1)})a}\right] = \\ &= i s_m^{(\nu)} \frac{n_1^4 k_\nu}{4} \sqrt{\frac{2k_\nu a}{|\beta_m^{(\nu)} d_m^{(\nu)}|\,|\cos\theta_\nu|} \frac{2k_{\nu\mp1} a}{|\beta_n^{(\nu\mp1)} d_n^{(\nu\mp1)}|\,|\cos\theta_{\nu\mp1}|}}\, \mathcal{P}_{mn}^{(\nu,\nu\mp1)} \times \\ &\qquad \times \left[\frac{\sin 2(\varkappa_m^{(\nu)} - \varkappa_n^{(\nu\mp1)})a}{2(\varkappa_m^{(\nu)} - \varkappa_n^{(\nu\mp1)})a} - \frac{\sin 2(\varkappa_m^{(\nu)} + \varkappa_n^{(\nu\mp1)})a}{2(\varkappa_m^{(\nu)} + \varkappa_n^{(\nu\mp1)})a}\right]. \end{aligned} \tag{3.10.47}$$

Здесь последнее выражение соответствует нормировке (ср. формулу (3.9.39)),

$$\left|\overline{N}_m^{(\nu)}\right| = \left|\overline{N}_n^{(\nu\mp1)}\right| = 4\ \text{Вт/м}, \tag{3.10.48}$$

при которой мощность с плотностью 1 Вт/м (измеренная для единичной ширины структуры вдоль x'-направления) переносится каждой модой в направлении оси z, нормальной к границам звукового луча (см. рис. 3.11 *б*).

Существенное упрощение выражения (3.10.47) достигается для *сильно ограниченных* мод ТЕ-типа одного порядка ($m = n$), распространяющихся под разными углами θ_ν и $\theta_{\nu\mp1}$. В этом случае на фазовые постоянные мод и эффективные толщины наложены жесткие ограничения типа (3.7.28):

$$|\beta_m^{(\nu)}| \simeq |\beta_n^{(\nu\mp1)}| \simeq k_1 = \omega\sqrt{\varepsilon_1\mu_0} = n_1 k_\text{в} \quad \text{и} \quad d_m^{(\nu)} \simeq d_n^{(\nu\mp1)} \simeq 2a. \tag{3.10.49}$$

Как и в (3.7.29), сильно ограниченные моды в волноводах с сильной асимметрией имеют такие поперечные волновые числа k_y в оптическом слое, что при $n = 1,\ 3,\ 5, \ldots$

$$2\varkappa_m^{(\nu)} a \simeq 2\varkappa_n^{(\nu\mp1)} a \simeq (n+1)\pi/2 = \pi,\ 2\pi,\ 3\pi, \ldots \qquad (3.10.50)$$

Из-за условий (3.10.50) первый член в квадратных скобках выражения (3.10.47) равняется единице, а второй обращается в нуль. Вводя (3.10.49) в (3.10.47) и полагая $k_\nu \simeq k_{\nu\mp1} \simeq k_{\text{в}}$, получаем приближенное выражение для коэффициентов связи сильно ограниченных мод ТЕ-типа:

$$c_{mn}^{(\nu,\nu\mp1)} \simeq i s_m^{(\nu)} \frac{n_1^3}{4} \frac{k_\nu}{\sqrt{|\cos\theta_\nu|\,|\cos\theta_{\nu\mp1}|}}\, \mathcal{P}_{mn}^{(\nu,\nu\mp1)}\, \delta_{mn}. \qquad (3.10.51)$$

Выражение (3.10.51) совпадает по структуре с аналогичным выражением (3.9.41), полученным для плоских оптических волн в неограниченной фотоупругой среде. Различие в физическом содержании этих формул заключается в том, что, в отличие от безграничной среды, волноводное акустооптическое взаимодействие осуществляется в тонком оптическом слое, внутри которого локализованы практически все поля сильно ограниченных мод.

В общем случае (при произвольной степени пространственного ограничения модальных полей) акустооптическое взаимодействие между различными ТЕ-модами ($m \neq n$) описывается коэффициентами связи в форме (3.10.47). Более того, вышеприведенный анализ позволяет исследовать взаимодействие между ТЕ- и ТМ-модами. В этом случае необходимо к коэффициентам объемной связи, вычисленным выше, добавить коэффициенты поверхностной связи, даваемые формулами (3.10.24) и (3.10.25).

Полные коэффициенты связи (3.10.28) содержат сингулярность в форме дельта-функций $\delta\big(k_{x,m}^{(\nu)} - k_{x,n}^{(\nu\mp1)} \mp K_x\big)$, которые после подстановки в уравнение (3.10.9) и интегрирования по $\overline{\varkappa}_n \equiv k_{x,n}^{(\nu\mp1)}$ исчезают всегда, за исключением единственного случая, когда они дают единицу при

$$k_{x,m}^{(\nu)} - k_{x,n}^{(\nu\mp1)} \mp K_x \equiv \beta_m^{(\nu)} \sin\theta_\nu - \beta_n^{(\nu\mp1)} \sin\theta_{\nu\mp1} \mp K_x = 0. \qquad (3.10.52)$$

Формула (3.10.52) выражает условие фазового согласования между связанными оптическими модами по отношению к x-направлению вдоль границ звукового луча (см. рис. 3.11 *б*).

Следовательно, уравнения связанных мод в форме (3.10.9) после интегрирования по $\overline{\varkappa}_n$ с учетом (3.10.28) принимают следующую форму, содержащую коэффициенты связи (3.10.29) (или их упрощения (3.10.47) и (3.10.51) для мод ТЕ-типа):

$$\frac{d\overline{A}_m^{(\nu)}(z)}{dz} = \sum_n \Big[c_{mn}^{(\nu,\nu-1)} e^{i\Delta k_{z,mn}^{(\nu,\nu-1)} z}\, \overline{A}_n^{(\nu-1)}(z) + \\ + c_{mn}^{(\nu,\nu+1)} e^{i\Delta k_{z,mn}^{(\nu,\nu+1)} z}\, \overline{A}_n^{(\nu+1)}(z)\Big]. \qquad (3.10.53)$$

Продольное фазовое рассогласование между m-й и n-й модами определено в (3.10.53) в виде

$$\Delta k_{z,mn}^{(\nu,\nu\mp1)} = k_{z,m}^{(\nu)} - k_{z,n}^{(\nu\mp1)} \mp K_z \equiv$$
$$\equiv \beta_m^{(\nu)}\cos\theta_\nu - \beta_n^{(\nu\mp1)}\cos\theta_{\nu\mp1} \mp K_z, \tag{3.10.54}$$

где из-за соотношения частот звука и света ($\Omega \ll \omega$)

$$\beta_n^{(\nu\mp1)} \equiv \beta_n(\omega_{\nu\mp1}) \simeq \beta_n^{(\nu)} \mp \frac{\Omega}{v_{\mathrm{gr},n}^{(\nu)}} \approx \beta_n(\omega) + \frac{(\nu\mp1)\Omega}{v_{gr,n}(\omega)},$$

при этом групповая скорость n-й моды равняется $v_{\mathrm{gr},n}(\omega) = (\partial\beta_n(\omega)/\partial\omega)^{-1}$.

Система связанных уравнений (3.10.53) для планарных оптических волноводов идентична по структуре с аналогичной системой (3.9.48) для безграничной фотоупругой среды. Следовательно, все результаты анализа взаимодействия плоских оптических волн при дифракции света на звуке, полученные в предыдущем параграфе, в принципе остаются применимыми к тонкопленочным оптическим волноводам. В частности, это справедливо для режимов прямого прохождения и обратного отражения при дифракции Брэгга.

Рассмотрим эти режимы для мод ТЕ-типа, отбирая из полной системы связанных уравнений (3.10.53) те из них, которые описывают фазово-согласованную связь между входной *прямой модой* $+m$ ($\nu = 0$) с амплитудой $\overline{A}_{+m}^{(0)}(z)$ и продольным волновым числом $k_{z,+m}^{(0)} \equiv \beta_m^{(0)}\cos\theta_0 > 0$ и *дифрагированными модами* первого порядка ($\nu = \mp1$), такими как:

- *прямая мода* $+n$ с амплитудой $\overline{A}_{+n}^{(\mp1)}(z)$ и продольным волновым числом $k_{z,+n}^{(\mp1)} \equiv \beta_n^{(\mp1)}\cos\theta_{\mp1} > 0$ — для *режима прямого прохождения*;
- *обратная мода* $-n$ с амплитудой $\overline{A}_{-n}^{(\mp1)}(z)$ и продольным волновым числом $k_{z,-n}^{(\mp1)} \equiv -\beta_n^{(\mp1)}\cos\theta_{\mp1} < 0$ — для *режима обратного отражения.*

Отбор парных мод, близко согласованных по фазовым скоростям, осуществляется путем *продольного* фазового согласования (3.10.54) с наложением приближенного требования $\Delta k_{z,+m\pm n}^{(0,\mp1)} \simeq 0$, что дает следующее:

- для *режима прямого прохождения*

$$k_{z,+m}^{(0)} - k_{z,+n}^{(\mp1)} \mp K_z \simeq 0,$$
или
$$\beta_m^{(0)}\cos\theta_0 - \beta_n^{(\mp1)}\cos\theta_{\mp1} \simeq \pm K_z; \tag{3.10.55}$$

- для *режима обратного отражения*

$$k_{z,+m}^{(0)} - k_{z,-n}^{(\mp1)} \mp K_z \simeq 0,$$
или
$$\beta_m^{(0)}\cos\theta_0 + \beta_n^{(\mp1)}\cos\theta_{\mp1} \simeq \pm K_z. \tag{3.10.56}$$

Одновременно накладывается точное требование *поперечного* фазового согласования (3.10.52), которое принимает следующие формы при дифракции Брэгга:

- для *режима прямого прохождения*

$$k_{x,+m}^{(0)} - k_{x,+n}^{(\mp 1)} \mp K_x = 0,$$
или
$$\beta_m^{(0)}\sin\theta_0 - \beta_n^{(\mp 1)}\sin\theta_{\mp 1} = \pm K_x; \tag{3.10.57}$$

- для *режима обратного отражения*

$$k_{x,+m}^{(0)} - k_{x,-n}^{(\mp 1)} \mp K_x = 0,$$
или
$$\beta_m^{(0)}\sin\theta_0 + \beta_n^{(\mp 1)}\sin\theta_{\mp 1} = \pm K_x. \tag{3.10.58}$$

3.10.3. Режим прямого прохождения при дифракции Брэгга. В планарных оптических волноводах этот режим реализуется для двух прямых мод с $k_{z,+m}^{(0)} \equiv \beta_m^{(0)}\cos\theta_0 > 0$ и $k_{z,+n}^{(\mp 1)} \equiv \beta_n^{(\mp 1)}\cos\theta_{\mp 1} > 0$, при этом на рис. 3.11 *б* имеем $\mathbf{K}_\tau = \pm\,\mathbf{e}_x K$ и $K_z \equiv 0$.

В этом случае рис. 3.11 *б* полностью соответствует рис. 3.8 при условии $\beta_n^{(\mp 1)} = \beta_m^{(0)} \equiv 2\pi/\lambda_m^{(0)}$, что означает изотропную дифракцию. Тогда брэгговский угол равняется $\theta_{\mathrm{B}} = \theta_0 = -\,\theta_{\mp 1}$, и точное условие поперечного фазового согласования (3.10.57) дает (ср. уравнение (3.9.100))

$$2k_{x,+m}^{(0)} = K \qquad \text{или} \qquad \sin\theta_{\mathrm{B}} = \frac{K}{2\beta_m^{(0)}} \equiv \frac{\lambda_m^{(0)}}{2\Lambda}. \tag{3.10.59}$$

Анизотропная ситуация $(\beta_n^{(\mp 1)} \neq \beta_m^{(0)})$ управляется общим условием поперечного фазового согласования (3.10.57), в котором брэгговский угол равняется $\theta_{\mathrm{B}} = \theta_0 \neq -\,\theta_{\mp 1}$, так что углы падения и дифракции связаны следующим соотношением:

$$\sin\theta_{\mathrm{B}} = \frac{K + \beta_n^{(\mp 1)}\sin\theta_{\mp 1}}{\beta_m^{(0)}}, \tag{3.10.60}$$

где угол $\theta_{\mp 1}$ может быть $\leqslant 0$ или $\geqslant 0$. Такие анизотропные ситуации соответствуют диаграммам волновых векторов, показанным на рис. 3.10 *а*, *б*, *в* с заменами $\mathbf{k}^{(0)} \to \boldsymbol{\beta}_m^{(0)}$ и $\mathbf{k}^{(\mp 1)} \to \boldsymbol{\beta}_n^{(\mp 1)}$.

Режим прямого прохождения при брэгговской дифракции мод TE-типа в планарных волноводах описывается парой связанных уравнений, аналогичных (3.9.101) и (3.9.102), а именно

$$\frac{dA_1(z)}{dz} = i\chi_{12}\, e^{i(\beta_1 - \beta_2)z} A_2(z), \tag{3.10.61}$$

$$\frac{dA_2(z)}{dz} = i\chi_{12}^{*}\, e^{-i(\beta_1 - \beta_2)z} A_1(z), \tag{3.10.62}$$

где введены следующие обозначения:

$$A_1 \equiv \overline{A}_{+m}^{(0)}, \qquad A_2 \equiv \overline{A}_{+n}^{(\mp 1)}, \tag{3.10.63}$$

$$\beta_1 \equiv k_{z,+m}^{(0)} = \beta_m^{(0)}\cos\theta_0, \qquad \beta_2 \equiv k_{z,+n}^{(\mp 1)} = \beta_n^{(\mp 1)}\cos\theta_{\mp 1}. \tag{3.10.64}$$

Коэффициенты связи, входящие в (3.10.61)–(3.10.62), получаются из выражения (3.10.47) при учете перестановочного соотношения (3.10.16). Полагая в них $s^{(0)}_{+m} > 0$, $s^{(\mp 1)}_{+n} > 0$, $\overline{N}^{(0)}_{+m} = \overline{N}^{(\mp 1)}_{+n} = 4$ Вт/м и $\omega_{\mp 1} \simeq \omega_0 = \omega$, получаем

$$c^{(0,\mp 1)}_{+m,+n} = -\,c^{(\mp 1,0)*}_{+n,+m} \equiv i\chi_{12}\,, \tag{3.10.65}$$

$$\chi_{12} = \frac{n_1^4 k_{\text{B}}}{2}\,\frac{k_{\text{B}}a}{\sqrt{\beta_1 d_1\, \beta_2 d_2}}\left[\frac{\sin 2(\varkappa_1 - \varkappa_2)a}{2(\varkappa_1 - \varkappa_2)a} - \frac{\sin 2(\varkappa_1 + \varkappa_2)a}{2(\varkappa_1 + \varkappa_2)a}\right]\mathcal{P}^{(0,\mp 1)},$$

где введены обозначения

$$d_1 \equiv d^{(0)}_{+m}, \qquad d_2 \equiv d^{(\mp 1)}_{+n}, \tag{3.10.66}$$

$$\varkappa_1 \equiv \varkappa^{(0)}_{+m}, \qquad \varkappa_2 \equiv \varkappa^{(\mp 1)}_{+n}. \tag{3.10.67}$$

В соответствии с выражениями (3.10.43) и (3.10.44), для факторов фотоупругой связи между модами имеем

$$\mathcal{P}^{(0,-1)} = \mathbf{p}^{(0)}\cdot\left(\overline{\overline{\mathbf{p}}} : \widehat{\overline{\mathbf{S}}}\right)\cdot\mathbf{p}^{(-1)}, \tag{3.10.68}$$

$$\mathcal{P}^{(0,+1)} = \mathbf{p}^{(0)}\cdot\left(\overline{\overline{\mathbf{p}}} : \widehat{\overline{\mathbf{S}}}\right)^{*}\cdot\mathbf{p}^{(+1)}, \tag{3.10.69}$$

где единичные поляризационные векторы, даваемые формулами (3.10.45)–(3.10.46), равняются

$$\mathbf{p}^{(0)} = \mathbf{e}_x\cos\theta_0 - \mathbf{e}_z\sin\theta_0, \tag{3.10.70}$$

$$\mathbf{p}^{(\mp 1)} = \mathbf{e}_x\cos\theta_{\mp 1} - \mathbf{e}_z\sin\theta_{\mp 1}. \tag{3.10.71}$$

Решение уравнений связанных мод в форме (3.10.61)–(3.10.62) с краевыми условиями (3.9.111) соответствует, как и в случае безграничной фотоупругой среды, пассивной связи попутных мод, приводящей к *режиму попутного переизлучения* с периодическим характером обмена мощностью между входной модой ($\nu = 0$) и дифрагированными модами ($\nu = \mp 1$), который изображен на рис. Г.6. (см. п. Г.10).

3.10.4. Режим обратного отражения при дифракции Брэгга. В планарных оптических волноводах этот режим реализуется для прямой и обратной мод с $k^{(0)}_{z,+m} \equiv \beta^{(0)}_m\cos\theta_0 > 0$ и $k^{(\mp 1)}_{z,-n} \equiv -\beta^{(\mp 1)}_n\cos\theta_{\mp 1} < 0$, при этом на рис. 3.11 *б* имеем $\mathbf{K}_\tau = \pm\,\mathbf{e}_z K$ и $K_x \equiv 0$.

В этом случае рис. 3.11 *б* полностью соответствует рис. 3.9 при условии $\beta^{(\mp 1)}_n = \beta^{(0)}_m \equiv 2\pi/\lambda^{(0)}_m$, что означает изотропную дифракцию. Тогда брэгговский угол равняется $\theta_{\text{B}} = \theta_0 = \theta_{\mp 1}$, и точное условие продольного фазового согласования (3.10.56) дает (ср. уравнение (3.9.112))

$$2k^{(0)}_{z,+m} = K \qquad \text{или} \qquad \cos\theta_{\text{B}} = \frac{K}{2\beta^{(0)}_m} \equiv \frac{\lambda^{(0)}_m}{2\Lambda}. \tag{3.10.72}$$

Анизотропная ситуация ($\beta^{(\mp 1)}_n \neq \beta^{(0)}_m$) управляется общим условием продольного фазового согласования (3.10.56), в котором брэгговский угол равен

$\theta_B = \theta_0 \neq \theta_{\mp 1}$, так что углы падения и дифракции связаны между собой соотношением

$$\cos\theta_B = \frac{K - \beta_n^{(\mp 1)}\cos\theta_{\mp 1}}{\beta_m^{(0)}}. \tag{3.10.73}$$

Такие анизотропные ситуации соответствуют диаграммам волновых векторов, показанным на рис. 3.10 *г*, *д*, *е* с заменами $\mathbf{k}^{(0)} \to \boldsymbol{\beta}_m^{(0)}$ и $\mathbf{k}^{(\mp 1)} \to \boldsymbol{\beta}_n^{(\mp 1)}$.

Режим обратного отражения при брэгговской дифракции мод ТЕ-типа в планарных волноводах описывается парой связанных уравнений, аналогичных (3.9.113) и (3.9.114), а именно

$$\frac{dA_1(z)}{dz} = i\chi_{12}\, e^{i\Delta\beta_{12}z} A_2(z), \tag{3.10.74}$$

$$\frac{dA_2(z)}{dz} = -i\chi_{12}^*\, e^{-i\Delta\beta_{12}z} A_1(z), \tag{3.10.75}$$

где по аналогии с (3.10.63) и (3.10.64) введены следующие обозначения:

$$A_1 \equiv \overline{A}_{+m}^{(0)}, \qquad A_2 \equiv \overline{A}_{-n}^{(\mp 1)}, \tag{3.10.76}$$

$$\beta_1 \equiv k_{z,+m}^{(0)} = \beta_m^{(0)}\cos\theta_0, \qquad \beta_2 \equiv k_{z,-n}^{(\mp 1)} = -\beta_n^{(\mp 1)}\cos\theta_{\mp 1}. \tag{3.10.77}$$

Коэффициенты связи, входящие в (3.10.74)–(3.10.75), даются прежними формулами (3.10.65)–(3.10.71), а фазовое рассогласование $\Delta\beta_{12}$ определено в виде

$$\Delta\beta_{12} = \beta_1 - \beta_2 \mp K \equiv k_{z,+m}^{(0)} - k_{z,-n}^{(\mp 1)} \mp K. \tag{3.10.78}$$

Решение уравнений связанных мод в форме (3.10.74)–(3.10.75) с краевыми условиями (3.9.118) соответствует, как и в случае безграничной фотоупругой среды, активной связи встречных мод, приводящей к *режиму встречного переизлучения* с апериодическим характером обмена мощностью между входной модой ($\nu = 0$) и дифрагированными модами ($\nu = \mp 1$), который изображен на рис. Г.7. (см. п. Г.11).

Таким образом, общая картина взаимодействия падающей световой волны (в безграничной среде) или направляемой моды (в волноведущей структуре) с прямыми и обратными дифрагированными волнами/модами остается в обоих случаях одинаковой:

а) пара *попутных* оптических волн/мод (для которых $k_{z,m}^{(\nu)} k_{z,n}^{(\nu\mp 1)} > 0$) *пассивно* взаимодействует в режиме прямого прохождения с периодическим переизлучением мощности (см. п. Г.10 и рис. Г.6);

б) пара *встречных* оптических волн/мод (для которых $k_{z,m}^{(\nu)} k_{z,n}^{(\nu\mp 1)} < 0$) *активно* взаимодействует в режиме обратного отражения с экспоненциальным переизлучением мощности (см. п. Г.11 и рис. Г.7).

Единственное различие между неограниченной фотоупругой средой и планарным оптическим волноводом заключается в структуре коэффициентов связи (ср. уравнения (3.9.105)–(3.9.107) и (3.10.65)–(3.10.71)).

Изложенный выше анализ звуковой дифракции направляемых мод в оптических волноводах учитывал только фотоупругий эффект в объеме волноведущей среды. В этом случае тензор деформации $\overline{\mathbf{S}}$, вызванный акустической волной (например, ПАВ рэлеевского типа), порождает тензор диэлектрического возмущения $\Delta\overline{\varepsilon}$ в виде (3.8.2), обусловленный фотоупругими свойствами среды. Однако даже в отсутствие фотоупругости возможен другой механизм дифракции света на звуке при наличии поперечных колебаний поверхности, вызванных распространением ПАВ [16]. Поперечная волнистость поверхности, бегущая вдоль нее со скоростью звука, играет роль динамической дифракционной решетки, подобно статическому поверхностному возмущению в гофрированном волноводе, рассмотренному в п. 3.3.

Следовательно, единственным условием реализации такого механизма дифракции является динамическое возмущение границ $y=\pm a$ оптического слоя, изображенного на рис. 3.11 *а*. При наличии такого возмущения уравнение верхней и нижней границы имеет вид (ср. формулу (3.3.2))

$$y_{\pm}(x,z,t) = \pm a + u_{\pm}(x,z,t), \tag{3.10.79}$$

где функции $u_{\pm}(x,z,t)$ описывают нормальные (к невозмущенному положению) смещения границ, вызванные звуковой волной.

Если ПАВ распространяется в плоскости (x,z) оптического слоя с волновым вектором $\mathbf{K}_\tau = \mathbf{e}_x K_x + \mathbf{e}_z K_z$, как показано на рис. 3.11 *б*, то вызванные ею нормальные смещения границ записываются в форме бегущей волны (ср. формулу (3.8.3)):

$$u_{\pm}(x,z,t) = \mathrm{Re}\left\{\delta u_{\pm}(x,z)\, e^{i\Omega t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\widehat{u}_{\pm}\, e^{i(\Omega t - \mathbf{K}_\tau\cdot\mathbf{r})}\right\}. \tag{3.10.80}$$

Вычисление динамического тензора возмущения и порожденных им коэффициентов связи между модами выполняется аналогично тому, как было сделано для гофрированного волновода в п. 3.3.1. Опуская детали вывода (который в подробностях изложен в монографии [56]), приведем лишь окончательные результаты.

Оказывается, что коэффициенты связи $\overline{c}_{mn}^{(\nu,\nu\mp1)}$, вычисленные из (3.2.34) и (3.2.35), аналогично выражению (3.10.11) содержат два вклада — объемный $(\overline{c}_{mn}^{(\nu,\nu\mp1)})_{bulk}$ и поверхностный $(\overline{c}_{mn}^{(\nu,\nu\mp1)})_{surf}$ — и имеют сингулярную форму, в точности описываемую формулами (3.10.28)–(3.10.29).

Объемный и поверхностный вклады в сумму (3.10.29) равняются [56]

$$\left(c_{mn}^{(\nu,\nu\mp1)}\right)_{bulk} = -i\omega_\nu \frac{\pi\widehat{u}}{\overline{N}_m^{(\nu)}} \left[(\varepsilon_1-\varepsilon_0)\,\mathcal{E}_{mn}^{(\nu,\nu\mp1)}(a) - (\varepsilon_1-\varepsilon_2)\,\mathcal{E}_{mn}^{(\nu,\nu\mp1)}(-a)\right], \tag{3.10.81}$$

$$\left(c_{mn}^{(\nu,\nu\mp1)}\right)_{surf} = \frac{\pi\widehat{u}}{\overline{N}_m^{(\nu)}} \left[\frac{\varepsilon_{r1}-\varepsilon_{r0}}{\varepsilon_{r0}}\,\mathcal{H}_{mn}^{(\nu,\nu\mp1)}(a) - \frac{\varepsilon_{r1}-\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}\,\mathcal{H}_{mn}^{(\nu,\nu\mp1)}(-a)\right], \tag{3.10.82}$$

с обозначениями (величины со штрихом означают производные по y)

$$\mathcal{E}_{mn}^{(\nu,\nu\mp1)}(y) = \widehat{\mathbf{E}}_m^{(\nu)*}(y)\cdot\widehat{\mathbf{E}}_n^{(\nu\mp1)}(y),$$

$$\mathcal{H}_{mn}^{(\nu,\nu\mp 1)}(y) = \widehat{H}_{mx}^{(\nu)*}(y)\widehat{E}_{nz}^{(\nu\mp 1)\prime}(y) + \widehat{H}_{mx}^{(\nu)\prime *}(y)\widehat{E}_{nz}^{(\nu\mp 1)}(y).$$

Таким образом, если волноведущая среда оптического волновода обладает фотоупругими свойствами, то вышеприведенные коэффициенты связи (3.10.81) и (3.10.82) должны быть добавлены к полученным ранее аналогичным коэффициентам (3.10.21) (объемный вклад) и (3.10.25) (поверхностный вклад), порожденным фотоупругостью. Сумма этих четырех коэффициентов связи входит в уравнения связанных оптических мод в общей форме (3.10.53), которые описывают самые разнообразные практические ситуации волноводной дифракции света на звуке. Эти уравнения применимы для всех мод, как TE-типа, так и TM-типа, и только для последних принципиально важным является учет поверхностных вкладов (3.10.25) и (3.10.82) (содержащих модальное магнитное поле $\widehat{H}_{mx}^{(\nu)}$), наряду с объемными вкладами (3.10.21) и (3.10.81), которые существуют всегда.

3.11. Тензоры объемной и поверхностной связи мод за счет эффектов Фарадея и Коттона–Мутона

Дифракция света на спиновых волнах в намагниченных ферритах по существу близка к дифракции на акустических волнах, изученной в предыдущих параграфах. В обоих случаях свет, распространяющийся в виде плоской волны в среде или оптической моды в волноводе, дифрагирует на динамической фазовой решетке, которая индуцирована соответствующим волновым процессом, достаточно медленным по сравнению с динамикой оптических явлений. Пространственно-временная картина дифракционной решетки повторяет во времени и пространстве распределение полей сравнительно низкочастотного процесса акустической или спиновой природы.

Различие между акустооптической и магнитооптической дифракцией состоит лишь в специфике механизма взаимодействия света с акустическими и спиновыми колебаниями кристаллической решетки. Специфичность взаимодействия отражается в структуре суммарного (статического и динамического) тензора диэлектрического возмущения $\Delta\bar{\varepsilon}_{\Sigma}$ в форме (2.10.19). Этот тензор однозначно определяет структуру тензоров объемной связи (3.1.16)–(3.1.17) и поверхностной связи (3.1.20)–(3.1.21), что в конечном итоге отражается на структуре коэффициентов связи между оптическими модами.

Для фотоупругого механизма дифракции света тензор возмущения $\Delta\bar{\varepsilon}_{\Sigma}$ был приведен к виду (3.8.4)–(3.8.7), который порождает тензоры объемной и поверхностной связи в форме (3.8.9) и (3.8.10). Именно эти тензоры описывают все многообразие акустооптических взаимодействий, в том числе рассмотренные в пп. 3.9–3.10.

Теперь нужно вывести статический и динамический тензоры объемной и поверхностной связи для магнитооптических эффектов в ферритах, известных под названием эффекта Фарадея и эффекта Коттона–Мутона [67–70].

Согласно современным физическим представлениям о динамике спинволновых процессов в магнитоупорядоченных средах, появление неравновесного пространственно-неоднородного магнитного момента на сравнительно невысоких частотах характеризуется вектором намагниченности $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$

и проявляет себя на высоких оптических частотах как возмущение диэлектрической проницаемости среды [57, 58].

С точностью до членов второго порядка по намагниченности тензор диэлектрического возмущения оптической среды представляется в следующем виде (с суммированием по повторяющимся индексам) [67, 70]:

$$\Delta\varepsilon_{ij} = \varepsilon_0\big(i\delta_{ijk}f_{kl}M_l + g_{ijkl}M_kM_l\big). \tag{3.11.1}$$

Здесь ε_0 — электрическая постоянная, δ_{ijk} — компоненты единичного псевдотензора Леви–Чивиты [72], а f_{kl} и g_{ijkl} — компоненты магнитооптических тензоров $\overline{\mathbf{f}}$ и $\overline{\overline{\mathbf{g}}}$ второго и четвертого ранга (первого и второго порядка по намагниченности). В первом слагаемом множитель i (мнимая единица) порожден выбранной зависимостью от времени в форме $\exp(i\omega t)$.

Основным материалом современной спин-волновой электроники и магнитооптики является кристалл железо-иттриевого граната (ЖИГ — $Y_3Fe_5O_{12}$). Ферримагнитная пленка ЖИГ, обычно выращенная на немагнитной подложке из галлий-гадолиниевого граната (ГГГ), является прозрачной для инфракрасного излучения с длинами волн от 1 до 5 мкм [58]. ЖИГ относится к кубическим феррит-гранатам класса m3m, для которых магнитооптические тензоры $\overline{\mathbf{f}}$ и $\overline{\overline{\mathbf{g}}}$ существенно упрощаются из-за кубической симметрии, а именно [70]

$$f_{kl} = f\delta_{kl} \qquad \text{и} \qquad g_{ijkl} = g_{jikl} = g_{ijlk} = g_{jilk}, \tag{3.11.2}$$

где δ_{kl} — символ Кронекера, f — скалярная константа эффекта Фарадея (для ЖИГ имеем $fM_s \simeq 4\cdot 10^{-4}$, намагниченность насыщения $M_s = 1{,}4\cdot 10^5$ А/м (1760 эрстед) [58, 68]).

Из-за свойств симметрии тензора g_{ijkl}, выраженных равенствами (3.11.2), он может быть записан в матричной форме [61]. Для этого каждая пара индексов заменяется одним индексом: $ij \to r$ и $kl \to s$ (с правилом замены $11\to 1$, $22\to 2$, $33\to 3$, $23, 32\to 4$, $13, 31\to 5$, $12, 21\to 6$), т. е. $g_{ijkl}\to g_{rs}$ [70]. Для кубических кристаллов граната, в том числе ЖИГ, среди компонент g_{rs} остаются только три ненулевые компоненты g_{11}, g_{12} и g_{44}. Тогда матрица $[g_{rs}]$ принимает вид [67, 70]

$$[g_{rs}] = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{12} & 0 & 0 & 0 \\ g_{12} & g_{11} & g_{12} & 0 & 0 & 0 \\ g_{12} & g_{12} & g_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{44} & 0 & 0 \\ g_{11} & g_{11} & g_{11} & 0 & g_{44} & 0 \\ g_{11} & g_{11} & g_{11} & 0 & 0 & g_{44} \end{pmatrix}.$$

Линейное и квадратичное (по намагниченности) слагаемые в выражении (3.11.1) ответственны за эффект Фарадея (магнитная гиротропия) и эффект Коттона–Мутона (магнитное двулучепреломление) [68, 69]. Поэтому тензор диэлектрического возмущения (3.11.1) представляется как сумма вкладов от этих двух эффектов:

$$\Delta\overline{\overline{\varepsilon}} = \Delta\overline{\overline{\varepsilon}}^{\,\mathrm{F}} + \Delta\overline{\overline{\varepsilon}}^{\,\mathrm{CM}}. \tag{3.11.3}$$

С учетом первого соотношения (3.11.2) для кристаллов граната, вклад от эффекта Фарадея в равенство (3.11.1), будучи антисимметричным тензором, может быть записан в бескоординатной форме [58, 68]:

$$\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{F}} = -if\varepsilon_0(\mathbf{M}\times\overline{\mathbf{I}}), \tag{3.11.4}$$

где $\overline{\mathbf{I}}$ — единичный тензор, а тензор $(\mathbf{M}\times\overline{\mathbf{I}})$ состоит из суммы трех диад, а именно, $(\mathbf{M}\times\overline{\mathbf{I}}) = (\mathbf{M}\times\mathbf{e}_x)\mathbf{e}_x + (\mathbf{M}\times\mathbf{e}_y)\mathbf{e}_y + (\mathbf{M}\times\mathbf{e}_z)\mathbf{e}_z$.

Следуя [68, 69], представим вклад от эффекта Коттона–Мутона в виде суммы двух частей — изотропной (с верхним индексом *iso* от англ. *isotropic*) и анизотропной (с верхним индексом *ani* от англ. *anisotropic*) [1]):

$$\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{CM}} = \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{iso} + \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{ani}. \tag{3.11.5}$$

Изотропная часть записывается в бескоординатной форме

$$\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{iso} = \varepsilon_0(g_{12}M^2\overline{\mathbf{I}} + 2g_{44}\mathbf{MM}), \tag{3.11.6}$$

включающей диаду $\mathbf{MM}$, тогда как *анизотропная часть* имеет форму

$$\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{ani} = \varepsilon_0(g_{11} - g_{12} - 2g_{44})M^2\overline{\boldsymbol{\nu}}, \tag{3.11.7}$$

чувствительную к кристаллографическим направлениям из-за тензора $\overline{\boldsymbol{\nu}}$. В главных осях (x_1, x_2, x_3) кубического кристалла он имеет вид [68, 69]

$$\overline{\boldsymbol{\nu}} = \begin{pmatrix} \alpha_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3^2 \end{pmatrix}, \tag{3.11.8}$$

где $\alpha_i\,(i = 1, 2, 3)$ — направляющие косинусы вектора намагниченности $\mathbf{M}$. Как оценено в [68, 69], для кристаллов ЖИГ анизотропная часть (3.11.7) примерно в четыре раза меньше диадного члена $2g_{44}\mathbf{MM}$ изотропной части (3.11.6) и поэтому в первом (грубом) приближении может быть опущена [2]).

Подстановка (3.11.4)–(3.11.6) в формулу (3.11.3) дает следующее выражение для тензора возмущения в первом приближении (с потерей эффекта анизотропной дифракции, поскольку вклад (3.11.4) от эффекта Фарадея в этом смысле всегда изотропен [68, 69]):

$$\begin{aligned} \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} &\simeq \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{F}} + \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{iso} = \\ &= -if\varepsilon_0\big(\mathbf{M}\times\overline{\mathbf{I}}\big) + \varepsilon_0\big(g_{12}M^2\overline{\mathbf{I}} + 2g_{44}\mathbf{MM}\big). \end{aligned} \tag{3.11.9}$$

Спиновая волна, распространяющаяся в магнитной среде на частоте Ω (играющей роль частоты накачки ω_p), модулирует диэлектрическую проницаемость оптической среды, в соответствии с выражением (3.11.9). Это обеспечивает параметрическую связь между оптическими модами на разных комбинационных частотах $\omega_\nu = \omega + \nu\Omega$, $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (см. уравнение (2.10.20)).

---

[1]) Термины *изотропная часть* и *анизотропная часть*, использованные автором [68, 69], в применении к тензорам являются условными (поскольку тензоры всегда «анизотропны»). Эти термины отражают лишь тот факт, что первая часть обеспечивает *изотропную дифракцию* Брэгга, а вторая добавляет к ней кристаллографическую анизотропию.

[2]) Параметр анизотропии $a = 2g_{44}/(g_{11} - g_{12}) \approx 1,335$ для ЖИГ [68, 69].

В общем случае полная намагниченность $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$ включает как постоянную составляющую $\mathbf{M}_0(\mathbf{r})$, вызванную статическим намагничиванием среды, так и динамическую составляющую $\mathbf{M}_{dyn}(\mathbf{r}, t)$, порожденную распространением спиновой волны с частотой Ω и волновым вектором $\mathbf{K}$. Результирующий вектор намагниченности равняется (ср. уравнение (3.8.3))

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{M}_0(\mathbf{r}) + \mathbf{M}_{dyn}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{M}_0(\mathbf{r}) + \mathrm{Re}\left\{\delta\mathbf{M}(\mathbf{r})e^{i\Omega t}\right\} \equiv$$
$$\equiv \mathbf{M}_0(\mathbf{r}) + \mathrm{Re}\left\{\widehat{\mathbf{M}}_1(\mathbf{r}_t)e^{i(\Omega t - \mathbf{K}\cdot\mathbf{r})}\right\}. \quad (3.11.10)$$

Здесь $\delta\mathbf{M}(\mathbf{r}) \equiv \widehat{\mathbf{M}}_1(\mathbf{r}_t)\exp(-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r})$ означает *комплексную амплитуду* динамической намагниченности $\mathbf{M}_{dyn}(\mathbf{r}, t)$, при этом колпачок отмечает зависимость только от поперечного радиуса-вектора $\mathbf{r}_t$, лежащего в плоскости, перпендикулярной направлению волнового распространения.

В этой ситуации диэлектрический тензор (3.11.9) играет роль полного (статического и динамического) тензора возмущения $\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_\Sigma(\mathbf{r}, t)$, даваемого выражениями (2.10.17) и (2.10.19). По аналогии с этими выражениями можно записать этот тензор в следующем виде:

$$\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_\Sigma(\mathbf{r}, t) = \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}\,(\mathbf{r}) + \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{dyn}(\mathbf{r}, t) \equiv$$
$$\equiv \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}\,(\mathbf{r}) + \mathrm{Re}\left\{2\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{r})\,e^{i\Omega t}\right\}, \quad (3.11.11)$$

где величина $\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ означает *комплексную полуамплитуду* динамического возмущения $\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{dyn}(\mathbf{r}, t)$.

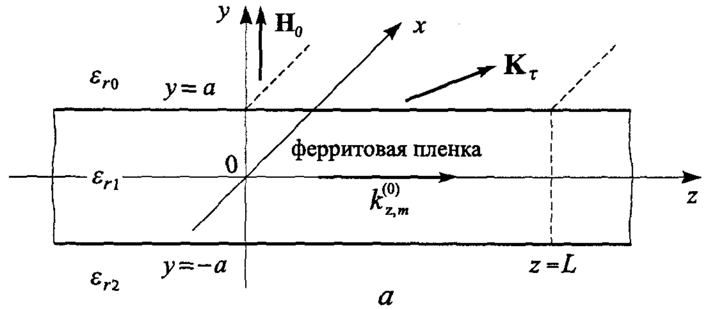
Как известно [56, 58], в намагниченной до насыщения ферритовой среде вектор полной (статической и динамической) намагниченности $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$ ведет себя при любых неравновесных процессах таким образом, что его величина $M(\mathbf{r}, t)$ остается постоянной во времени и в пространстве и всегда равняется намагниченности насыщения M_s, являясь неизменным параметром среды. Следовательно, спиновая волна создает динамическое возмущение в форме отклонения вектора $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$ от направления статического намагничивания $\mathbf{M}_0 = \mathbf{e}_\mathrm{M} M_0$, при этом $M(\mathbf{r}, t) = M_s = \mathrm{const}$.

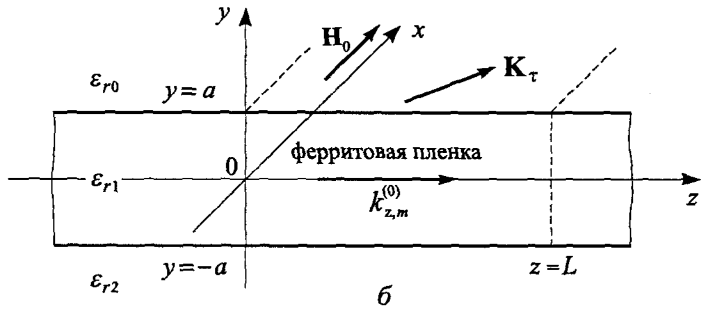
Малосигнальный режим работы ферритовой среды, намагниченной до насыщения постоянным магнитным полем $\mathbf{H}_0 = \mathbf{e}_\mathrm{H} H_0$, характеризуется следующими условиями, наложенными на статическую (с индексом 0) и динамическую (с индексом 1) намагниченности [58]:

$$\begin{aligned} &\mathbf{M}_0 \parallel \mathbf{H}_0, \quad \text{так что} \quad \mathbf{M}_0 = \mathbf{e}_\mathrm{M} M_0 = \mathbf{e}_\mathrm{H} M_s, \\ &\widehat{\mathbf{M}}_1 \perp \mathbf{H}_0 \qquad\quad \text{и} \qquad |\widehat{M}_1| \ll M_0 \equiv M_s. \end{aligned} \quad (3.11.12)$$

Следовательно, при слабом сигнале практически отсутствует динамическая намагниченность в направлении постоянного магнитного поля $\mathbf{H}_0$, а статическая намагниченность M_0 равняется намагниченности насыщения M_s.

Подстановка (3.11.10) в (3.11.9) с учетом соотношений (3.11.12) дает суммарный магнитооптический тензор возмущения в форме (3.11.11), содержащий в качестве двух независимых вкладов:





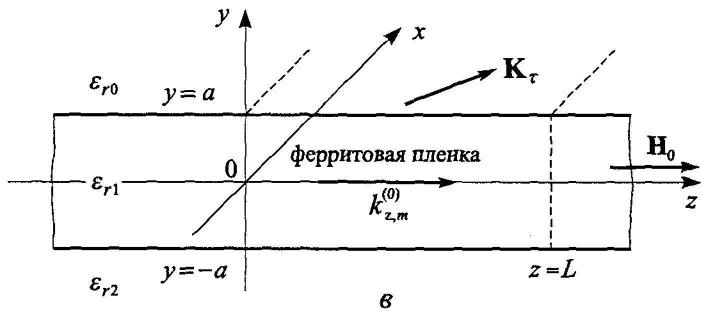


Рис. 3.12. Геометрические конфигурации волноводного магнитооптического взаимодействия: *а* — нормально намагниченная ферритовая структура, *б* — касательно намагниченная структура с продольным намагничивающим полем $\mathbf{H}_0$, *в* — то же с поперечным полем $\mathbf{H}_0$. Волновое число $k^{(0)}_{z,m}$ и волновой вектор $\mathbf{K}_\tau$ соответствуют m-й оптической моде и спиновой волне, распространяющимся в плоскости (x, z) ферритовой пленки. Вид сверху аналогичен геометрии акустооптического взаимодействия на рис. 3.11 *б*

- *статический тензор возмущения*

$$\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} = -if\varepsilon_0\big(\mathrm{M}_0\times\overline{\mathbf{I}}\big)+\varepsilon_0\big(g_{12}M_s^2\,\overline{\mathbf{I}}+2g_{44}\mathrm{M}_0\mathrm{M}_0\big), \tag{3.11.13}$$

- *динамический тензор возмущения*

$$\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}\,(\mathbf{r}) = \frac{\varepsilon_0}{2}\Big[-if\big(\delta\mathrm{M}\times\overline{\mathbf{I}}\big)+2g_{44}\big(\mathrm{M}_0\delta\mathrm{M}+\delta\mathrm{M}\mathrm{M}_0\big)\Big]\equiv$$

$$\equiv\widehat{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{\mathrm{M}}(\mathbf{r}_t)\,e^{-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}, \tag{3.11.14}$$

где введено следующее обозначение:

$$\widehat{\overline{\varepsilon}}_{\mathrm{M}} = \frac{\varepsilon_0}{2}\left[-if\left(\widehat{\mathbf{M}}_1 \times \overline{\mathbf{I}}\right) + 2g_{44}\left(\mathbf{M}_0\widehat{\mathbf{M}}_1 + \widehat{\mathbf{M}}_1\mathbf{M}_0\right)\right]; \qquad (3.11.15)$$

колпачок над всеми величинами отражает, как и прежде, их зависимость только от поперечных координат $\mathbf{r}_t$.

Однако общие выражения, полученные на основе (3.11.13)–(3.11.15), являются довольно сложными для анализа. Поэтому обычно рассматривают три геометрические конфигурации, показанные на рис. 3.12 для нормально намагниченной ферритовой структуры с полем намагничивания $\mathbf{H}_0 = \mathbf{e}_y H_0$ (рис. 3.12 *а*) и касательно намагниченных ферритовых пленок с *продольным* магнитным полем $\mathbf{H}_0 = \mathbf{e}_x H_0$ (рис. 3.12 *б*) и *поперечным* магнитным полем $\mathbf{H}_0 = \mathbf{e}_z H_0$ (рис. 3.12 *в*). Продольное и поперечное направления $\mathbf{H}_0$ введены по отношению к области, занятой спиновой волной в плоскости пленки (x, z) с границами $z = 0$ и $z = L$, направленными вдоль оси x (см. рис. 3.11 *б*).

Будем независимо анализировать эти три конфигурации волноводного магнитооптического взаимодействия с целью вывода для них статического и динамического *тензоров возмущения* $\Delta\overline{\varepsilon}$ и $\delta\overline{\varepsilon}$, даваемых формулами (3.11.13)–(3.11.15), и их следствий в форме *тензоров связи*, определенных в виде (3.1.16)–(3.1.17) (для статического $\Delta\overline{\varepsilon}_c$ и динамического $\delta\overline{\varepsilon}_c$ тензоров *объемной связи*) и (3.1.20)–(3.1.21) (для статического $\Delta\overline{\xi}_c$ и динамического $\delta\overline{\xi}_c$ тензоров *поверхностной связи*).

3.11.1. Нормально намагниченная ферритовая структура. Нормально намагниченная структура имеет постоянное намагничивающее поле $\mathbf{H}_0 = \mathbf{e}_y H_0$, перпендикулярное плоскости (x, z) (рис. 3.12 *а*), а ферритовая пленка характеризуется следующими компонентами статической и динамической намагниченности (см. уравнение (3.11.12)):

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_0 &= \mathbf{e}_y M_s, \\ \widehat{\mathbf{M}}_1 &= \mathbf{e}_x \widehat{M}_{1x} + \mathbf{e}_z \widehat{M}_{1z}. \end{aligned} \qquad (3.11.16)$$

Подстановка (3.11.16) в формулы (3.11.13) и (3.11.15) дает следующие выражения для статического и динамического *тензоров возмущения*:

$$\Delta\overline{\varepsilon} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} g_{12}M_s^2 & 0 & -ifM_s \\ 0 & (g_{12}+2g_{44})M_s^2 & 0 \\ ifM_s & 0 & g_{12}M_s^2 \end{pmatrix}, \qquad (3.11.17)$$

$$\widehat{\overline{\varepsilon}}_{\mathrm{M}}(y) = ifM_s\frac{\varepsilon_0}{2}\begin{pmatrix} 0 & \widehat{m}_z(y) & 0 \\ -\widehat{m}_z(y) & 0 & \widehat{m}_x(y) \\ 0 & -\widehat{m}_x(y) & 0 \end{pmatrix} + g_{44}M_s^2\varepsilon_0\begin{pmatrix} 0 & \widehat{m}_x(y) & 0 \\ \widehat{m}_x(y) & 0 & \widehat{m}_z(y) \\ 0 & \widehat{m}_z(y) & 0 \end{pmatrix}, \qquad (3.11.18)$$

где введены нормированные (безразмерные) компоненты динамической намагниченности, распределенной по толщине ферритового слоя $(-a < y < a)$:

$$\widehat{m}_k(y) = \frac{\widehat{M}_{1k}(y)}{M_s}, \qquad k = x, y, z. \qquad (3.11.19)$$

Использование тензоров возмущения (3.11.17) и (3.11.18) в формулах (3.1.16)–(3.1.17) и (3.1.20)–(3.1.21) приводит к следующим выражениям:

- для статического и динамического *тензоров объемной связи*

$$\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c \simeq \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \varepsilon_0\Big[-ifM_s(\mathbf{e}_x\mathbf{e}_z - \mathbf{e}_z\mathbf{e}_x) + g_{12}M_s^2\,\mathbf{e}_x\mathbf{e}_x + \\ + (g_{12}+2g_{44})M_s^2\,\mathbf{e}_y\mathbf{e}_y + g_{12}M_s^2\,\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z\Big], \tag{3.11.20}$$

$$\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c \simeq \delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\varepsilon_0}{2}\Big\{ifM_s\Big[\widehat{m}_x(\mathbf{e}_y\mathbf{e}_z - \mathbf{e}_z\mathbf{e}_y) + \widehat{m}_z(\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y - \mathbf{e}_y\mathbf{e}_x)\Big] + \\ + 2g_{44}M_s^2\Big[\widehat{m}_x(\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_y\mathbf{e}_x) + \widehat{m}_z(\mathbf{e}_y\mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z\mathbf{e}_y)\Big]\Big\}e^{-i\mathbf{K}_\tau\cdot\mathbf{r}} \equiv \\ \equiv \widehat{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{\mathrm{M}}(y)\,e^{-i(K_x x + K_z z)}; \tag{3.11.21}$$

- для статического и динамического *тензоров поверхностной связи*

$$\Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c(\pm a) = \mp\frac{1}{\varepsilon_{r1}}\Big[ifM_s\,\mathbf{e}_x\mathbf{e}_x + g_{12}M_s^2\,\mathbf{e}_x\mathbf{e}_z\Big], \tag{3.11.22}$$

$$\delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c(\pm a) = \mp\frac{1}{2\varepsilon_{r1}}\Big[-ifM_s\,\widehat{m}_x(\pm a) + 2g_{44}M_s^2\,\widehat{m}_z(\pm a)\Big]\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y\,e^{-i\mathbf{K}_\tau\cdot\mathbf{r}} \equiv \\ \equiv \widehat{\overline{\boldsymbol{\xi}}}_{\mathrm{M}}(\pm a)\,e^{-i(K_x x + K_z z)}. \tag{3.11.23}$$

Здесь $\mathbf{K}_\tau = \mathbf{e}_x K_x + \mathbf{e}_z K_z$ — волновой вектор спиновой волны, лежащий в плоскости пленки (x, z). Любая единичная диада $\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l$, составленная из ортов $\mathbf{e}_k$ и $\mathbf{e}_l$ $(k, l = x, y, z)$, в матричном представлении имеет единицу на пересечении строки k и столбца l, а остальные ее элементы нулевые.

При вычислении тензоров поверхностной связи $\Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c$ и $\delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c$ было учтено, что в формулах (3.1.20) и (3.1.21) контуру L_b с поверхностными токами в планарной структуре соответствуют верхняя $(y = a)$ и нижняя $(y = -a)$ границы ферритовой пленки с тангенциальными векторами $\boldsymbol{\tau}_b \equiv \mathbf{e}_z \times \mathbf{n}_b = \mathbf{e}_z \times (\pm\,\mathbf{e}_y) = \mp\,\mathbf{e}_x$.

3.11.2. Касательно намагниченная ферритовая структура с продольным полем намагничивания. Касательно намагниченная структура с продольным полем намагничивания имеет постоянное магнитное поле $\mathbf{H}_0 = \mathbf{e}_x H_0$, параллельное границам $z = 0$ и $z = L$ спин-волнового луча, направленного вдоль оси x (рис. 3.12 *б*). Ферритовая пленка характеризуется следующими компонентами статической и динамической намагниченности (см. уравнение (3.11.12)):

$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{e}_x M_s, \\ \widehat{\mathbf{M}}_1 = \mathbf{e}_y\widehat{M}_{1y} + \mathbf{e}_z\widehat{M}_{1z}. \tag{3.11.24}$$

Подстановка (3.11.24) в формулы (3.11.13) и (3.11.15) дает следующие выражения для статического и динамического *тензоров возмущения*:

$$\Delta\overline{\varepsilon} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} (g_{12}+2g_{44})M_s^2 & 0 & 0 \\ 0 & g_{12}M_s^2 & ifM_s \\ 0 & -ifM_s & g_{12}M_s^2 \end{pmatrix}, \qquad (3.11.25)$$

$$\widehat{\overline{\varepsilon}}_{\mathrm{M}}(y) = ifM_s\frac{\varepsilon_0}{2}\begin{pmatrix} 0 & \widehat{m}_z(y) & -\widehat{m}_y(y) \\ -\widehat{m}_z(y) & 0 & 0 \\ \widehat{m}_y(y) & 0 & 0 \end{pmatrix} + g_{44}M_s^2\varepsilon_0 \begin{pmatrix} 0 & \widehat{m}_y(y) & \widehat{m}_z(y) \\ \widehat{m}_y(y) & 0 & 0 \\ \widehat{m}_z(y) & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (3.11.26)$$

Использование тензоров возмущения (3.11.25) и (3.11.26) в формулах (3.1.16)–(3.1.17) и (3.1.20)–(3.1.21) приводит к следующим выражениям:

- для статического и динамического *тензоров объемной связи*

$$\Delta\overline{\varepsilon}_c \simeq \Delta\overline{\varepsilon} = \varepsilon_0\Big[ifM_s(\mathbf{e}_y\mathbf{e}_z - \mathbf{e}_z\mathbf{e}_y) + (g_{12}+2g_{44})M_s^2\,\mathbf{e}_x\mathbf{e}_x + \\ + g_{12}M_s^2\,\mathbf{e}_y\mathbf{e}_y + g_{12}M_s^2\,\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z\Big], \qquad (3.11.27)$$

$$\delta\overline{\varepsilon}_c \simeq \delta\overline{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_0}{2}\Big\{-ifM_s\Big[\widehat{m}_y(\mathbf{e}_x\mathbf{e}_z - \mathbf{e}_z\mathbf{e}_x) + \widehat{m}_z(\mathbf{e}_y\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_x\mathbf{e}_y)\Big] + \\ + 2g_{44}M_s^2\Big[\widehat{m}_y(\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_y\mathbf{e}_x) + \widehat{m}_z(\mathbf{e}_x\mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z\mathbf{e}_x)\Big]\Big\}e^{-i\mathbf{K}_\tau\cdot\mathbf{r}} \equiv \\ \equiv \widehat{\overline{\varepsilon}}_{\mathrm{M}}(y)\,e^{-i(K_x x + K_z z)}; \qquad (3.11.28)$$

- для статического и динамического *тензоров поверхностной связи*

$$\Delta\overline{\xi}_c(\pm a) = \mp\frac{1}{\varepsilon_{r1}}\Big[-ifM_s\,\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y + g_{12}M_s^2\,\mathbf{e}_x\mathbf{e}_z\Big], \qquad (3.11.29)$$

$$\delta\overline{\xi}_c(\pm a) = \mp\frac{1}{2\varepsilon_{r1}}\Big[ifM_s\,\widehat{m}_y(\pm a) + 2g_{44}M_s^2\,\widehat{m}_z(\pm a)\Big]\mathbf{e}_x\mathbf{e}_x\,e^{-i\mathbf{K}_\tau\cdot\mathbf{r}} \equiv \\ \equiv \widehat{\overline{\xi}}_{\mathrm{M}}(\pm a)\,e^{-i(K_x x + K_z z)}. \qquad (3.11.30)$$

3.11.3. Касательно намагниченная ферритовая структура с поперечным полем намагничивания. Касательно намагниченная структура с поперечным полем намагничивания имеет магнитное поле $\mathbf{H}_0 = \mathbf{e}_z H_0$, перпендикулярное границам $z = 0$ и $z = L$ спин-волнового луча, направленного вдоль оси x (рис. 3.12 *в*), а ферритовая пленка характеризуется следующими компонентами статической и динамической намагниченности (см. уравнение (3.11.12)):

$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{e}_z M_s, \\ \widehat{\mathbf{M}}_1 = \mathbf{e}_x\widehat{M}_{1x} + \mathbf{e}_y\widehat{M}_{1y}. \qquad (3.11.31)$$

Подстановка (3.11.31) в формулы (3.11.13) и (3.11.15) дает следующие выражения для статического и динамического *тензоров возмущения*:

$$\Delta\overline{\varepsilon} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} g_{12}M_s^2 & ifM_s & 0 \\ -ifM_s & g_{12}M_s^2 & 0 \\ 0 & 0 & (g_{12}+2g_{44})M_s^2 \end{pmatrix}, \tag{3.11.32}$$

$$\widehat{\overline{\varepsilon}}_{\mathrm{M}}(y) = ifM_s\frac{\varepsilon_0}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\widehat{m}_y(y) \\ 0 & 0 & \widehat{m}_x(y) \\ \widehat{m}_y(y) & -\widehat{m}_x(y) & 0 \end{pmatrix} + g_{44}M_s^2\varepsilon_0\begin{pmatrix} 0 & 0 & \widehat{m}_x(y) \\ 0 & 0 & \widehat{m}_y(y) \\ \widehat{m}_x(y) & \widehat{m}_y(y) & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.11.33}$$

Использование тензоров возмущения (3.11.32) и (3.11.33) в формулах (3.1.16)–(3.1.17) и (3.1.20)–(3.1.21) приводит к следующим выражениям:

- для статического и динамического *тензоров объемной связи*

$$\Delta\overline{\varepsilon}_c \simeq \Delta\overline{\varepsilon} = \varepsilon_0\Big[ifM_s(\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y - \mathbf{e}_y\mathbf{e}_x) + g_{12}M_s^2\,\mathbf{e}_x\mathbf{e}_x + \\ + g_{12}M_s^2\,\mathbf{e}_y\mathbf{e}_y + (g_{12}+2g_{44})M_s^2\,\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z\Big], \tag{3.11.34}$$

$$\delta\overline{\varepsilon}_c \simeq \delta\overline{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_0}{2}\Big\{ifM_s\Big[\widehat{m}_x(\mathbf{e}_y\mathbf{e}_z - \mathbf{e}_z\mathbf{e}_y) + \widehat{m}_y(\mathbf{e}_z\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_x\mathbf{e}_z)\Big] + \\ + 2g_{44}M_s^2\Big[\widehat{m}_x(\mathbf{e}_x\mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z\mathbf{e}_x) + \widehat{m}_y(\mathbf{e}_y\mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z\mathbf{e}_y)\Big]\Big\}\,e^{-i\mathbf{K}_\tau\cdot\mathbf{r}} \equiv \\ \equiv \widehat{\overline{\varepsilon}}_{\mathrm{M}}(y)\,e^{-i(K_x x + K_z z)}; \tag{3.11.35}$$

- для статического и динамического *тензоров поверхностной связи*

$$\Delta\overline{\xi}_c(\pm a) = \mp\frac{1}{\varepsilon_{r1}}\,(g_{12}+2g_{44})M_s^2\,\mathbf{e}_x\mathbf{e}_z, \tag{3.11.36}$$

$$\delta\overline{\xi}_c(\pm a) = \mp\frac{1}{2\varepsilon_{r1}}\Big\{\Big[ifM_s\,\widehat{m}_y(\pm a) + 2g_{44}M_s^2\,\widehat{m}_x(\pm a)\Big]\mathbf{e}_x\mathbf{e}_x + \\ + \Big[-ifM_s\,\widehat{m}_x(\pm a) + 2g_{44}M_s^2\,\widehat{m}_y(\pm a)\Big]\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y\Big\}\,e^{-i\mathbf{K}_\tau\cdot\mathbf{r}} \equiv \\ \equiv \widehat{\overline{\xi}}_{\mathrm{M}}(\pm a)\,e^{-i(K_x x + K_z z)}. \tag{3.11.37}$$

Все вышеприведенные выражения (3.11.20)–(3.11.23), (3.11.27)–(3.11.30) и (3.11.34)–(3.11.37) для объемных и поверхностных тензоров связи получены в пренебрежении квадратами величин fM_s и $2g_{44}M_s^2$ при $g_{12}M_s^2 \ll n_1^2$, так как для ЖИГ $fM_s \simeq 4\cdot 10^{-4}$, $2g_{44}M_s^2 \simeq 2,3\cdot 10^{-4}$ и $n_1 \simeq 2,2$ [58, 68, 69].

Нормально намагниченная структура (рис. 3.12 *а*) изотропна в плоскости (x, z) ферритовой пленки, т. е. все направления эквивалентны с точки зрения распространения спиновой волны. Поэтому картина дифракции оптических мод идентична той, что была рассмотрена в п. 3.10 для фотоупругого механизма.

Касательно намагниченные структуры (рис. 3.12 *б* и *в*) не являются для спиновой волны изотропными в плоскости (x, z), поскольку намагничивающее поле наводит анизотропию, выделяя одно из направлений. Принято различать два случая распространения спиновых волн.

1. *Продольные спиновые волны*, бегущие вдоль магнитного поля $\mathbf{H}_0$ с тангенциальным волновым вектором $\mathbf{K}_\tau$, равным:
   - в структурах с продольным полем $\mathbf{H}_0 = \mathbf{e}_x H_0$ (рис. 3.12 *б*)
   $$\mathbf{K}_\tau = \pm\,\mathbf{e}_x K \qquad \text{при} \qquad K_z \equiv 0, \tag{3.11.38}$$
   - в структурах с поперечным полем $\mathbf{H}_0 = \mathbf{e}_z H_0$ (рис. 3.12 *в*)
   $$\mathbf{K}_\tau = \pm\,\mathbf{e}_z K \qquad \text{при} \qquad K_x \equiv 0. \tag{3.11.39}$$
2. *Поперечные спиновые волны*, бегущие перпендикулярно магнитному полю $\mathbf{H}_0$ с тангенциальным волновым вектором $\mathbf{K}_\tau$, равным:
   - в структурах с продольным полем $\mathbf{H}_0 = \mathbf{e}_x H_0$ (рис. 3.12 *б*)
   $$\mathbf{K}_\tau = \pm\,\mathbf{e}_z K \qquad \text{при} \qquad K_x \equiv 0, \tag{3.11.40}$$
   - в структурах с поперечным полем $\mathbf{H}_0 = \mathbf{e}_z H_0$ (рис. 3.12 *в*)
   $$\mathbf{K}_\tau = \pm\,\mathbf{e}_x K \qquad \text{при} \qquad K_z \equiv 0. \tag{3.11.41}$$

Спиновые волны, распространяющиеся вдоль произвольного направления в плоскости (x, z) нормально намагниченной ферритовой пленки в пренебрежении обменным взаимодействием между спинами, принято называть *прямыми объемными магнитостатическими волнами* (ПОМСВ) [58].

В касательно намагниченных ферритовых пленках в отсутствие обменных эффектов продольные спиновые волны с волновым вектором (3.11.38) или (3.11.39) называют *обратными объемными магнитостатическими волнами* (ООМСВ), в то время как поперечные спиновые волны с волновым вектором (3.11.40) или (3.11.41) называются *поверхностными магнитостатическими волнами* (ПМСВ) [58].

3.12. Магнитооптическая дифракция направляемых мод в планарных ферритовых структурах

3.12.1. Магнитооптические связанные уравнения. Общая картина дифракции света на спиновых волнах близка к звуковой дифракции, изображенной на рис. 3.11, и получается заменой акустической волны на спиновую, которой соответствуют рис. 3.12 *а*, *б*, *в* для нормально и касательно намагниченных структур. Центральный слой $(-a < y < a)$ трехслойной оптически изотропной диэлектрической структуры, показанной на рис. 3.12, одновременно выполняет функции оптического волновода и волновода спиновых волн.

В области магнитооптического взаимодействия $(0 < z < L)$ полное электрическое поле, *поперечное* к оси z (направленной по нормали к границам спин-волнового луча) представляется в форме того же самого спектрального разложения (3.10.7), которое было использовано при анализе акустооптического взаимодействия. Это разложение содержит двойное суммирование:

а) по многочастотному спектру комбинационных частот $\omega_\nu = \omega + \nu\Omega$,

б) по многомодовому спектру поперечных волновых чисел $k_{yi,m}^{(\nu)}$ (различных для разных частот ω_ν и разных i-слоев волноведущей структуры),

а также интегрирование по непрерывному спектру поперечных волновых чисел $\overline{\varkappa}_m \equiv k_{x,m}^{(\nu)} = \beta_m^{(\nu)} \sin\theta_\nu$ (или угловому спектру в плоскости (x, z) волноведущего слоя).

Амплитуда возбуждения $\overline{A}_m^{(\nu)}(z; \overline{\varkappa}_m)$ оптической m-й моды, входящая в спектральное разложение (3.10.7) искомого электрического поля, может быть найдена из решения уравнений связанных мод типа (3.10.9), по аналогии с которыми записываем

$$
\begin{aligned}
\frac{d\overline{A}_m^{(\nu)}(z; \overline{\varkappa}_m)}{dz} &= \qquad\qquad (3.12.1)\\
&= \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} \overline{c}_{mn}^{(\nu,\nu)}(\overline{\varkappa}_m, \overline{\varkappa}_n)\, e^{i[k_{z,m}^{(\nu)}(\overline{\varkappa}_m) - k_{z,n}^{(\nu)}(\overline{\varkappa}_n)]z}\, \overline{A}_n^{(\nu)}(z; \overline{\varkappa}_n)\, d\overline{\varkappa}_n + \\
&+ \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} \overline{c}_{mn}^{(\nu,\nu-1)}(\overline{\varkappa}_m, \overline{\varkappa}_n)\, e^{i[k_{z,m}^{(\nu)}(\overline{\varkappa}_m) - k_{z,n}^{(\nu-1)}(\overline{\varkappa}_n)]z}\, \overline{A}_n^{(\nu-1)}(z; \overline{\varkappa}_n)\, d\overline{\varkappa}_n + \\
&+ \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} \overline{c}_{mn}^{(\nu,\nu+1)}(\overline{\varkappa}_m, \overline{\varkappa}_n)\, e^{i[k_{z,m}^{(\nu)}(\overline{\varkappa}_m) - k_{z,n}^{(\nu+1)}(\overline{\varkappa}_n)]z}\, \overline{A}_n^{(\nu+1)}(z; \overline{\varkappa}_n)\, d\overline{\varkappa}_n.
\end{aligned}
$$

Здесь переменными интегрирования $\overline{\varkappa}_m$ и $\overline{\varkappa}_n$ по непрерывному (угловому) спектру являются поперечные (в плоскости слоев) волновые числа

$$
\overline{\varkappa}_m \equiv k_{x,m}^{(\nu)} = \beta_m^{(\nu)} \sin\theta_\nu \qquad \text{и} \qquad \overline{\varkappa}_n \equiv \begin{cases} k_{x,n}^{(\nu)} = \beta_n^{(\nu)} \sin\theta'_\nu, \\ k_{x,n}^{(\nu\mp1)} = \beta_n^{(\nu\mp1)} \sin\theta_{\nu\mp1}. \end{cases} \tag{3.12.2}
$$

В отличие от уравнения (3.10.9), полученного для акустооптики, уравнение (3.12.1) содержит первую сумму, порожденную статическими тензорами связи $\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c$ и $\Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c$, которые отсутствовали в акустооптическом случае.

Коэффициенты связи $\overline{c}_{mn}^{(\nu,\nu)}$ и $\overline{c}_{mn}^{(\nu,\nu\mp1)}$ в общем случае содержат два вклада (объемный и поверхностный), создаваемые, соответственно, тензорами *объемной связи* (3.11.20)–(3.11.21), (3.11.27)–(3.11.28), (3.11.34)–(3.11.35) и тензорами *поверхностной связи* (3.11.22)–(3.11.23), (3.11.29)–(3.11.30), (3.11.36)–(3.11.37):

$$
\overline{c}_{mn}^{(\nu,\nu)} = \left(\overline{c}_{mn}^{(\nu,\nu)}\right)_{bulk} + \left(\overline{c}_{mn}^{(\nu,\nu)}\right)_{surf}, \tag{3.12.3}
$$

$$
\overline{c}_{mn}^{(\nu,\nu\mp1)} = \left(\overline{c}_{mn}^{(\nu,\nu\mp1)}\right)_{bulk} + \left(\overline{c}_{mn}^{(\nu,\nu\mp1)}\right)_{surf}. \tag{3.12.4}
$$

Из общих формул (3.2.17)—(3.2.19) для коэффициентов связи получаем:

- *коэффициенты объемной связи*

$$\left(\overline{c}_{mn}^{(\nu,\nu)}\right)_{bulk} = -\frac{i\omega_\nu}{\overline{N}_m^{(\nu)}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left[\widehat{\mathbf{E}}_m^{(\nu)*}(x,y)\cdot\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c\cdot\widehat{\mathbf{E}}_n^{(\nu)}(x,y)\right] dxdy, \qquad (3.12.5)$$

$$\left(\overline{c}_{mn}^{(\nu,\nu-1)}\right)_{bulk} = -\frac{i\omega_\nu}{\overline{N}_m^{(\nu)}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left[\widehat{\mathbf{E}}_m^{(\nu)*}(x,y)\cdot\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c\cdot\widehat{\mathbf{E}}_n^{(\nu-1)}(x,y)\right] dxdy, \qquad (3.12.6)$$

$$\left(\overline{c}_{mn}^{(\nu,\nu+1)}\right)_{bulk} = -\frac{i\omega_\nu}{\overline{N}_m^{(\nu)}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left[\widehat{\mathbf{E}}_m^{(\nu)*}(x,y)\cdot\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^{\,*}\cdot\widehat{\mathbf{E}}_n^{(\nu+1)}(x,y)\right] dxdy; \qquad (3.12.7)$$

- *коэффициенты поверхностной связи*

$$\left(\overline{c}_{mn}^{(\nu,\nu)}\right)_{surf} = -\frac{1}{\overline{N}_m^{(\nu)}} \int_{-\infty}^{\infty} \Big[\widehat{\mathbf{H}}_m^{(\nu)*}(x,a)\cdot\Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c(a)\cdot\widehat{\mathbf{E}}_n^{(\nu)}(x,a) + \\ + \widehat{\mathbf{H}}_m^{(\nu)*}(x,-a)\cdot\Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c(-a)\cdot\widehat{\mathbf{E}}_n^{(\nu)}(x,-a)\Big] dx, \qquad (3.12.8)$$

$$\left(\overline{c}_{mn}^{(\nu,\nu-1)}\right)_{surf} = -\frac{1}{\overline{N}_m^{(\nu)}} \int_{-\infty}^{\infty} \Big[\widehat{\mathbf{H}}_m^{(\nu)*}(x,a)\cdot\delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c(a)\cdot\widehat{\mathbf{E}}_n^{(\nu-1)}(x,a) + \\ + \widehat{\mathbf{H}}_m^{(\nu)*}(x,-a)\cdot\delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c(-a)\cdot\widehat{\mathbf{E}}_n^{(\nu-1)}(x,-a)\Big] dx, \qquad (3.12.9)$$

$$\left(\overline{c}_{mn}^{(\nu,\nu+1)}\right)_{surf} = -\frac{1}{\overline{N}_m^{(\nu)}} \int_{-\infty}^{\infty} \Big[\widehat{\mathbf{H}}_m^{(\nu)*}(x,a)\cdot\delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c^{\,*}(a)\cdot\widehat{\mathbf{E}}_n^{(\nu+1)}(x,a) + \\ + \widehat{\mathbf{H}}_m^{(\nu)*}(x,-a)\cdot\delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c^{\,*}(-a)\cdot\widehat{\mathbf{E}}_n^{(\nu+1)}(x,-a)\Big] dx. \qquad (3.12.10)$$

Использование для тензоров объемной и поверхностной связи выражений (3.11.20)-(3.11.23), (3.11.27)-(3.11.30) и (3.11.34)-(3.11.37) совместно со следующими формулами для мембранных функций собственных полей m-й и n-й оптических мод (см. уравнение (3.10.6)):

$$\widehat{\mathbf{E}}_m^{(\nu)}(x,y) = \widehat{\mathbf{E}}_m^{(\nu)}(y)\, e^{-ik_{x,m}^{(\nu)}x}, \qquad (3.12.11)$$

$$\widehat{\mathbf{H}}_m^{(\nu)}(x,y) = \widehat{\mathbf{H}}_m^{(\nu)}(y)\, e^{-ik_{x,m}^{(\nu)}x}, \qquad (3.12.12)$$

$$\widehat{\mathbf{E}}_n^{(\nu\mp1)}(x,y) = \widehat{\mathbf{E}}_n^{(\nu\mp1)}(y)\, e^{-ik_{x,n}^{(\nu\mp1)}x}, \qquad (3.12.13)$$

приводит коэффициенты связи (3.12.5)-(3.12.10) к сингулярной форме, подобной (3.10.20) и (3.10.24).

В этом случае суммарные коэффициенты связи (3.12.3) и (3.12.4) принимают следующий вид (ср. формулу (3.10.28)):

$$\overline{c}_{mn}^{(\nu,\nu)} = c_{mn}^{(\nu,\nu)}\,\delta\big(k_{x,m}^{(\nu)} - k_{x,n}^{(\nu\mp 1)}\big), \tag{3.12.14}$$

$$\overline{c}_{mn}^{(\nu,\nu\mp 1)} = c_{mn}^{(\nu,\nu\mp 1)} e^{\mp iK_z z}\,\delta\big(k_{x,m}^{(\nu)} - k_{x,n}^{(\nu\mp 1)} \mp K_x\big). \tag{3.12.15}$$

Здесь появились новые коэффициенты связи (без черты сверху) с обычной размерностью (м$^{-1}$), которые также содержат объемный и поверхностный вклады (ср. формулу (3.10.29)):

$$c_{mn}^{(\nu,\nu)} = \big(c_{mn}^{(\nu,\nu)}\big)_{bulk} + \big(c_{mn}^{(\nu,\nu)}\big)_{surf}, \tag{3.12.16}$$

$$c_{mn}^{(\nu,\nu\mp 1)} = \big(c_{mn}^{(\nu,\nu\mp 1)}\big)_{bulk} + \big(c_{mn}^{(\nu,\nu\mp 1)}\big)_{surf}. \tag{3.12.17}$$

Коэффициенты связи (3.12.16) и (3.12.17) получаются из выражений (3.12.5)–(3.12.10) в следующей форме:

- *коэффициенты объемной связи*

$$\big(c_{mn}^{(\nu,\nu)}\big)_{bulk} = -\frac{i\omega_\nu}{\overline{N}_m^{(\nu)}} \int_{-a}^{a} \Big[\widehat{\mathbf{E}}_m^{(\nu)*}(y)\cdot\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c(y)\cdot\widehat{\mathbf{E}}_n^{(\nu)}(y)\Big]\,dy, \tag{3.12.18}$$

$$\big(c_{mn}^{(\nu,\nu-1)}\big)_{bulk} = -\frac{i\omega_\nu}{\overline{N}_m^{(\nu)}} \int_{-a}^{a} \Big[\widehat{\mathbf{E}}_m^{(\nu)*}(y)\cdot\widehat{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{\mathrm{M}}(y)\cdot\widehat{\mathbf{E}}_n^{(\nu-1)}(y)\Big]\,dy, \tag{3.12.19}$$

$$\big(c_{mn}^{(\nu,\nu+1)}\big)_{bulk} = -\frac{i\omega_\nu}{\overline{N}_m^{(\nu)}} \int_{-a}^{a} \Big[\widehat{\mathbf{E}}_m^{(\nu)*}(y)\cdot\widehat{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{\mathrm{M}}^{*}(y)\cdot\widehat{\mathbf{E}}_n^{(\nu+1)}(y)\Big]\,dy; \tag{3.12.20}$$

- *коэффициенты поверхностной связи*

$$\begin{aligned}\big(c_{mn}^{(\nu,\nu)}\big)_{surf} = -\frac{1}{\overline{N}_m^{(\nu)}} \Big[&\widehat{\mathbf{H}}_m^{(\nu)*}(a)\cdot\Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c(a)\cdot\widehat{\mathbf{E}}_n^{(\nu)}(a) + \\ &+ \widehat{\mathbf{H}}_m^{(\nu)*}(-a)\cdot\Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c(-a)\cdot\widehat{\mathbf{E}}_n^{(\nu)}(-a)\Big],\end{aligned} \tag{3.12.21}$$

$$\begin{aligned}\big(c_{mn}^{(\nu,\nu-1)}\big)_{surf} = -\frac{1}{\overline{N}_m^{(\nu)}} \Big[&\widehat{\mathbf{H}}_m^{(\nu)*}(a)\cdot\widehat{\overline{\boldsymbol{\xi}}}_{\mathrm{M}}(a)\cdot\widehat{\mathbf{E}}_n^{(\nu-1)}(a) + \\ &+ \widehat{\mathbf{H}}_m^{(\nu)*}(-a)\cdot\widehat{\overline{\boldsymbol{\xi}}}_{\mathrm{M}}(-a)\cdot\widehat{\mathbf{E}}_n^{(\nu-1)}(-a)\Big],\end{aligned} \tag{3.12.22}$$

$$\begin{aligned}\big(c_{mn}^{(\nu,\nu+1)}\big)_{surf} = -\frac{1}{\overline{N}_m^{(\nu)}} \Big[&\widehat{\mathbf{H}}_m^{(\nu)*}(a)\cdot\widehat{\overline{\boldsymbol{\xi}}}_{\mathrm{M}}^{*}(a)\cdot\widehat{\mathbf{E}}_n^{(\nu+1)}(a) + \\ &+ \widehat{\mathbf{H}}_m^{(\nu)*}(-a)\cdot\widehat{\overline{\boldsymbol{\xi}}}_{\mathrm{M}}^{*}(-a)\cdot\widehat{\mathbf{E}}_n^{(\nu+1)}(-a)\Big].\end{aligned} \tag{3.12.23}$$

Здесь тензоры $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{M}}$ и $\widehat{\widehat{\boldsymbol{\xi}}}_{\mathrm{M}}$ определены формулами (3.11.21), (3.11.28), (3.11.35) и (3.11.23), (3.11.30), (3.11.37), соответственно.

После подстановки сингулярных коэффициентов связи (3.12.14)–(3.12.15) в (3.12.1) и интегрирования по $\varkappa_n \equiv \{k_{x,n}^{(\nu)},\ k_{x,n}^{(\nu\mp 1)}\}$ получаем следующее.

1. *Условия фазового согласования* для связанных оптических мод по отношению к поперечному x-направлению вдоль границ спин-волнового луча:

$$k_{x,m}^{(\nu)} - k_{x,n}^{(\nu)} \equiv \beta_m^{(\nu)} \sin\theta_\nu - \beta_n^{(\nu)} \sin\theta'_\nu = 0, \tag{3.12.24}$$

$$k_{x,m}^{(\nu)} - k_{x,n}^{(\nu\mp 1)} \mp K_x \equiv \beta_m^{(\nu)} \sin\theta_\nu - \beta_n^{(\nu\mp 1)} \sin\theta_{\nu\mp 1} \mp K_x = 0. \tag{3.12.25}$$

2. *Уравнения связанных мод* с коэффициентами связи (3.12.18)–(3.12.23):

$$\frac{d\overline{A}_m^{(\nu)}(z)}{dz} = \sum_n \Big[c_{mn}^{(\nu,\nu)}\, e^{i\Delta k_{z,mn}^{(\nu,\nu)} z}\, \overline{A}_n^{(\nu)}(z) + c_{mn}^{(\nu,\nu-1)}\, e^{i\Delta k_{z,mn}^{(\nu,\nu-1)} z}\, \overline{A}_n^{(\nu-1)}(z) + \\ + c_{mn}^{(\nu,\nu+1)}\, e^{i\Delta k_{z,mn}^{(\nu,\nu+1)} z}\, \overline{A}_n^{(\nu+1)}(z) \Big]; \tag{3.12.26}$$

здесь введены продольные фазовые рассогласования m-й и n-й мод,

$$\Delta k_{z,mn}^{(\nu,\nu)} = k_{z,m}^{(\nu)} - k_{z,n}^{(\nu)} \equiv \beta_m^{(\nu)} \cos\theta_\nu - \beta_n^{(\nu)} \cos\theta'_\nu, \tag{3.12.27}$$

$$\Delta k_{z,mn}^{(\nu,\nu\mp 1)} = k_{z,m}^{(\nu)} - k_{z,n}^{(\nu\mp 1)} \mp K_z \equiv \\ \equiv \beta_m^{(\nu)} \cos\theta_\nu - \beta_n^{(\nu\mp 1)} \cos\theta_{\nu\mp 1} \mp K_z. \tag{3.12.28}$$

Коэффициенты связи общего вида (3.12.18)–(3.12.23), входящие в уравнения связанных оптических мод (3.12.26), принимают конкретный вид для трех частных случаев нормально и касательно намагниченных ферритовых структур, изображенных на рис. 3.12 *а*, *б* и *в*. Тензоры связи $\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c$, $\Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c$, $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{M}}$, $\widehat{\widehat{\boldsymbol{\xi}}}_{\mathrm{M}}$, которые входят в формулы (3.12.18)–(3.12.23), определены выражениями (3.11.20)–(3.11.23), (3.11.27)–(3.11.30), (3.11.34)–(3.11.37).

Ниже приводим коэффициенты связи для трех ферритовых структур.

Нормально намагниченная ферритовая структура

- *коэффициенты объемной связи*:

$$\left(c_{mn}^{(\nu,\nu)}\right)_{bulk} = -\frac{i\omega_\nu \varepsilon_0}{\overline{N}_m^{(\nu)}} \Big[-ifM_s \int_{-a}^{a} \left(\widehat{E}_{mx}^{(\nu)*} \widehat{E}_{nz}^{(\nu)} - \widehat{E}_{mz}^{(\nu)*} \widehat{E}_{nx}^{(\nu)} \right) dy + \\ + g_{12} M_s^2 \int_{-a}^{a} \left(\widehat{\mathbf{E}}_m^{(\nu)*} \cdot \widehat{\mathbf{E}}_n^{(\nu)} \right) dy + 2g_{44} M_s^2 \int_{-a}^{a} \left(\widehat{E}_{my}^{(\nu)*} \widehat{E}_{ny}^{(\nu)} \right) dy \Big], \tag{3.12.29}$$

$$\left(c_{mn}^{(\nu,\nu-1)}\right)_{bulk} = -\frac{i\omega_\nu\varepsilon_0}{2\overline{N}_m^{(\nu)}}\int\limits_{-a}^{a}\Big[\left(\mathcal{M}_{xz}^{+}\widehat{E}_{my}^{(\nu)*}\widehat{E}_{nz}^{(\nu-1)} + \mathcal{M}_{xz}^{-}\widehat{E}_{mz}^{(\nu)*}\widehat{E}_{ny}^{(\nu-1)}\right) + \\ + \left(\mathcal{M}_{zx}^{+}\widehat{E}_{mx}^{(\nu)*}\widehat{E}_{ny}^{(\nu-1)} + \mathcal{M}_{zx}^{-}\widehat{E}_{my}^{(\nu)*}\widehat{E}_{nx}^{(\nu-1)}\right)\Big]\,dy, \tag{3.12.30}$$

$$\left(c_{mn}^{(\nu,\nu+1)}\right)_{bulk} = -\frac{i\omega_\nu\varepsilon_0}{2\overline{N}_m^{(\nu)}}\int\limits_{-a}^{a}\Big[\left(\mathcal{M}_{xz}^{+*}\widehat{E}_{my}^{(\nu)*}\widehat{E}_{nz}^{(\nu+1)} + \mathcal{M}_{xz}^{-*}\widehat{E}_{mz}^{(\nu)*}\widehat{E}_{ny}^{(\nu+1)}\right) + \\ + \left(\mathcal{M}_{zx}^{+*}\widehat{E}_{mx}^{(\nu)*}\widehat{E}_{ny}^{(\nu+1)} + \mathcal{M}_{zx}^{-*}\widehat{E}_{my}^{(\nu)*}\widehat{E}_{nx}^{(\nu+1)}\right)\Big]\,dy; \tag{3.12.31}$$

- *коэффициенты поверхностной связи*:

$$\left(c_{mn}^{(\nu,\nu)}\right)_{surf} = \frac{1}{n_1^2\overline{N}_m^{(\nu)}}\Big[ifM_s\widehat{H}_{mx}^{(\nu)*}(y)\widehat{E}_{nx}^{(\nu)}(y) + g_{12}M_s^2\widehat{H}_{mx}^{(\nu)*}(y)\widehat{E}_{nz}^{(\nu)}(y)\Big]_{y=-a}^{y=a}, \tag{3.12.32}$$

$$\left(c_{mn}^{(\nu,\nu-1)}\right)_{surf} = \frac{1}{2n_1^2\overline{N}_m^{(\nu)}}\Big[\mathcal{M}_{xz}^{-}(y)\widehat{H}_{mx}^{(\nu)*}(y)\widehat{E}_{ny}^{(\nu-1)}(y)\Big]_{y=-a}^{y=a}, \tag{3.12.33}$$

$$\left(c_{mn}^{(\nu,\nu+1)}\right)_{surf} = \frac{1}{2n_1^2\overline{N}_m^{(\nu)}}\Big[\mathcal{M}_{xz}^{-*}(y)\widehat{H}_{mx}^{(\nu)*}(y)\widehat{E}_{ny}^{(\nu+1)}(y)\Big]_{y=-a}^{y=a}. \tag{3.12.34}$$

Касательно намагниченная ферритовая структура с продольным полем намагничивания

- *коэффициенты объемной связи*:

$$\left(c_{mn}^{(\nu,\nu)}\right)_{bulk} = -\frac{i\omega_\nu\varepsilon_0}{\overline{N}_m^{(\nu)}}\Big[ifM_s\int\limits_{-a}^{a}\left(\widehat{E}_{my}^{(\nu)*}\widehat{E}_{nz}^{(\nu)} - \widehat{E}_{mz}^{(\nu)*}\widehat{E}_{ny}^{(\nu)}\right)dy + \\ + g_{12}M_s^2\int\limits_{-a}^{a}\left(\widehat{\mathbf{E}}_m^{(\nu)*}\cdot\widehat{\mathbf{E}}_n^{(\nu)}\right)dy + 2g_{44}M_s^2\int\limits_{-a}^{a}\left(\widehat{E}_{mx}^{(\nu)*}\widehat{E}_{nx}^{(\nu)}\right)dy\Big], \tag{3.12.35}$$

$$\left(c_{mn}^{(\nu,\nu-1)}\right)_{bulk} = -\frac{i\omega_\nu\varepsilon_0}{2\overline{N}_m^{(\nu)}}\int\limits_{-a}^{a}\Big[\left(\mathcal{M}_{yz}^{-}\widehat{E}_{mx}^{(\nu)*}\widehat{E}_{nz}^{(\nu-1)} + \mathcal{M}_{yz}^{+}\widehat{E}_{mz}^{(\nu)*}\widehat{E}_{nx}^{(\nu-1)}\right) + \\ + \left(\mathcal{M}_{zy}^{+}\widehat{E}_{mx}^{(\nu)*}\widehat{E}_{ny}^{(\nu-1)} + \mathcal{M}_{zy}^{-}\widehat{E}_{my}^{(\nu)*}\widehat{E}_{nx}^{(\nu-1)}\right)\Big]\,dy, \tag{3.12.36}$$

$$\left(c_{mn}^{(\nu,\nu+1)}\right)_{bulk} = -\frac{i\omega_\nu\varepsilon_0}{2\overline{N}_m^{(\nu)}}\int\limits_{-a}^{a}\Big[\left(\mathcal{M}_{yz}^{-*}\widehat{E}_{mx}^{(\nu)*}\widehat{E}_{nz}^{(\nu+1)} + \mathcal{M}_{yz}^{+*}\widehat{E}_{mz}^{(\nu)*}\widehat{E}_{nx}^{(\nu+1)}\right) + \\ + \left(\mathcal{M}_{zy}^{+*}\widehat{E}_{mx}^{(\nu)*}\widehat{E}_{ny}^{(\nu+1)} + \mathcal{M}_{zy}^{-*}\widehat{E}_{my}^{(\nu)*}\widehat{E}_{nx}^{(\nu+1)}\right)\Big]\,dy; \tag{3.12.37}$$

• *коэффициенты поверхностной связи:*

$$\left(c_{mn}^{(\nu,\nu)}\right)_{surf} = \frac{1}{n_1^2 \overline{N}_m^{(\nu)}} \left[-ifM_s \widehat{H}_{mx}^{(\nu)*}(y)\widehat{E}_{ny}^{(\nu)}(y) + g_{12}M_s^2 \widehat{H}_{mx}^{(\nu)*}(y)\widehat{E}_{nz}^{(\nu)}(y) \right]_{y=-a}^{y=a}, \tag{3.12.38}$$

$$\left(c_{mn}^{(\nu,\nu-1)}\right)_{surf} = \frac{1}{2n_1^2 \overline{N}_m^{(\nu)}} \left[\mathcal{M}_{yz}^{+}(y)\widehat{H}_{mx}^{(\nu)*}(y)\widehat{E}_{nx}^{(\nu-1)}(y) \right]_{y=-a}^{y=a}, \tag{3.12.39}$$

$$\left(c_{mn}^{(\nu,\nu+1)}\right)_{surf} = \frac{1}{2n_1^2 \overline{N}_m^{(\nu)}} \left[\mathcal{M}_{yz}^{+*}(y)\widehat{H}_{mx}^{(\nu)*}(y)\widehat{E}_{nx}^{(\nu+1)}(y) \right]_{y=-a}^{y=a}. \tag{3.12.40}$$

Касательно намагниченная ферритовая структура с поперечным полем намагничивания

• *коэффициенты объемной связи:*

$$\left(c_{mn}^{(\nu,\nu)}\right)_{bulk} = -\frac{i\omega_\nu \varepsilon_0}{\overline{N}_m^{(\nu)}} \left[ifM_s \int_{-a}^{a} \left(\widehat{E}_{mx}^{(\nu)*}\widehat{E}_{ny}^{(\nu)} - \widehat{E}_{my}^{(\nu)*}\widehat{E}_{nx}^{(\nu)} \right) dy + \right.$$
$$\left. + g_{12}M_s^2 \int_{-a}^{a} \left(\widehat{\mathbf{E}}_m^{(\nu)*} \cdot \widehat{\mathbf{E}}_n^{(\nu)} \right) dy + 2g_{44}M_s^2 \int_{-a}^{a} \left(\widehat{E}_{mz}^{(\nu)*}\widehat{E}_{nz}^{(\nu)} \right) dy \right], \tag{3.12.41}$$

$$\left(c_{mn}^{(\nu,\nu-1)}\right)_{bulk} = -\frac{i\omega_\nu \varepsilon_0}{2\overline{N}_m^{(\nu)}} \int_{-a}^{a} \left[\left(\mathcal{M}_{xy}^{+}\widehat{E}_{my}^{(\nu)*}\widehat{E}_{nz}^{(\nu-1)} + \mathcal{M}_{xy}^{-}\widehat{E}_{mz}^{(\nu)*}\widehat{E}_{ny}^{(\nu-1)} \right) + \right.$$
$$\left. + \left(\mathcal{M}_{yx}^{-}\widehat{E}_{mx}^{(\nu)*}\widehat{E}_{nz}^{(\nu-1)} + \mathcal{M}_{yx}^{+}\widehat{E}_{mz}^{(\nu)*}\widehat{E}_{nx}^{(\nu-1)} \right) \right] dy, \tag{3.12.42}$$

$$\left(c_{mn}^{(\nu,\nu+1)}\right)_{bulk} = -\frac{i\omega_\nu \varepsilon_0}{2\overline{N}_m^{(\nu)}} \int_{-a}^{a} \left[\left(\mathcal{M}_{xy}^{+*}\widehat{E}_{my}^{(\nu)*}\widehat{E}_{nz}^{(\nu+1)} + \mathcal{M}_{xy}^{-*}\widehat{E}_{mz}^{(\nu)*}\widehat{E}_{ny}^{(\nu+1)} \right) + \right.$$
$$\left. + \left(\mathcal{M}_{yx}^{-*}\widehat{E}_{mx}^{(\nu)*}\widehat{E}_{nz}^{(\nu+1)} + \mathcal{M}_{yx}^{+*}\widehat{E}_{mz}^{(\nu)*}\widehat{E}_{nx}^{(\nu+1)} \right) \right] dy; \tag{3.12.43}$$

• *коэффициенты поверхностной связи:*

$$\left(c_{mn}^{(\nu,\nu)}\right)_{surf} = \frac{1}{n_1^2 \overline{N}_m^{(\nu)}} \left[(g_{12} + 2g_{44})M_s^2 \widehat{H}_{mx}^{(\nu)*}(y)\widehat{E}_{nz}^{(\nu)}(y) \right]_{y=-a}^{y=a}, \tag{3.12.44}$$

$$\left(c_{mn}^{(\nu,\nu-1)}\right)_{surf} = \frac{1}{2n_1^2 \overline{N}_m^{(\nu)}} \left[\mathcal{M}_{yx}^{+}(y)\widehat{H}_{mx}^{(\nu)*}(y)\widehat{E}_{nx}^{(\nu-1)}(y) + \right.$$
$$\left. + \mathcal{M}_{xy}^{-}(y)\widehat{H}_{mx}^{(\nu)*}(y)\widehat{E}_{ny}^{(\nu-1)}(y) \right]_{y=-a}^{y=a}, \tag{3.12.45}$$

$$\left(c_{mn}^{(\nu,\nu+1)}\right)_{surf} = \frac{1}{2n_1^2\overline{N}_m^{(\nu)}}\Big[\mathcal{M}_{yx}^{+*}(y)\widehat{H}_{mx}^{(\nu)*}(y)\widehat{E}_{nx}^{(\nu+1)}(y) + \\ + \mathcal{M}_{xy}^{-*}(y)\widehat{H}_{mx}^{(\nu)*}(y)\widehat{E}_{ny}^{(\nu+1)}(y)\Big]_{y=-a}^{y=a}. \qquad (3.12.46)$$

В формулах (3.12.29)–(3.12.46) введены следующие обозначения:

$$\Big[A(y)B(y)\Big]_{y=-a}^{y=a} = A(a)B(a) - A(-a)B(-a), \qquad (3.12.47)$$

$$\mathcal{M}_{kl}^{\pm}(y) = \pm ifM_s\widehat{m}_k(y) + 2g_{44}M_s^2\widehat{m}_l(y), \qquad k,l = x,y,z, \qquad (3.12.48)$$

где нормированные (безразмерные) компоненты $\widehat{m}_k(y)$ динамической намагниченности определены в виде (3.11.19).

Полученные выражения для коэффициентов связи (3.12.29)–(3.12.46) основаны на предположении, что намагниченность насыщения M_s и магнитооптические параметры ЖИГ однородны, т.е. fM_s, $g_{12}M_s^2$, $2g_{44}M_s^2 = \text{const}$, в то время как поперечные распределения компонент динамической намагниченности $\widehat{m}_k(y) \equiv \widehat{M}_k(y)/M_s$ $(k = x,y,z)$ определяются типом спиновой волны, возбужденной в исследуемой ферритовой структуре [58].

Коэффициенты объемной связи мод на *одной* частоте $\big((c_{mn}^{(\nu,\nu)})_{bulk}$, см. формулы (3.12.29), (3.12.35), (3.12.41)$\big)$ определяются интегралами перекрытия полей взаимодействующих мод, а на *разных* частотах $\big((c_{mn}^{(\nu,\nu\mp1)})_{bulk}$, см. формулы (3.12.30)–(3.12.31), (3.12.36)–(3.12.37), (3.12.42)–(3.12.43)$\big)$ включают спин-волновые мембранные функции $\widehat{m}_i(y)$ в форме весовых множителей. Они должны быть заранее найдены из решения задачи на собственные значения при нахождении спектра спиновых (магнитостатических) волн намагниченных ферритовых структур. В наиболее общем случае такие задачи учитывают обменные граничные условия, которые отражают состояние (свободное или закрепленное) спинов на поверхности магнитных слоев [71].

Коэффициенты поверхностной связи мод на *одной* частоте $\big((c_{mn}^{(\nu,\nu)})_{surf}$, см. формулы (3.12.32), (3.12.38), (3.12.44)$\big)$ определяются значениями модальных полей, взятыми в форме (3.12.47) на противоположных границах $y = \pm a$ ферритовой пленки, а на *разных* частотах $\big((c_{mn}^{(\nu,\nu\mp1)})_{bulk}$, см. формулы (3.12.33)–(3.12.34), (3.12.39)–(3.12.40), (3.12.45)–(3.12.46)$\big)$ зависят от состояния поверхностных спинов на границах $y = \pm a$, которое определяет значение величин $\widehat{m}_i(\pm a)$. С учетом обменных эффектов свободное или закрепленное состояние спинов на поверхности задается граничными условиями Радо–Уиртмена или Киттеля [68, 69, 71].

Вычисленные коэффициенты связи охватывают широкое многообразие магнитооптических взаимодействий [67–70] для трех конфигураций ферритовых структур, показанных на рис. 3.12. Кроме спиновых волн в нормально намагниченных структурах, они описывают также два типа волн (продольных или ООМСВ и поперечных или ПМСВ), существующих в касательно намагниченных структурах и характеризуемых соотношениями (3.11.38)–(3.11.41).

Однако формулы (3.12.29)–(3.12.46) не принимают во внимание анизотропную часть (3.11.7) тензора Коттона–Мутона $\Delta\overleftrightarrow{\tau}^{CM}$. Это нетрудно выполнить *по аналогии* с вышеизложенным, если применить выражение (3.11.8) для кристаллографического тензора $\overleftrightarrow{\nu}$, что в частности было сделано в [68, 69].

В заключение применим полученные выше коэффициенты связи к исследованию особенностей брэгговской дифракции для оптических мод разной поляризации.

3.12.2. Уравнения связанных мод для брэгговской дифракции типа TE→TM. Геометрия магнитооптической дифракции света в планарной трехслойной структуре близка к аналогичной для акустооптической дифракции, изображенной на рис. 3.11 *б*. При этом картина на рис. 3.11 *а* должна быть заменена одной из трех, показанных на рис. 3.12 *а*, *б*, *в*, в зависимости от ориентации постоянного магнитного поля по отношению к плоскости (x, z) волноведущего слоя и к границам $z = 0$ и $z = L$ области, занятой спиновой волной (области дифракции света).

Рассмотрим магнитооптическую дифракцию Брэгга для оптических мод с различной поляризацией, для определенности, дифракцию типа $\mathrm{TE}_m \to \mathrm{TM}_n$. Это означает, что m-я оптическая мода TE-типа ($\nu = 0$) падает под углом θ_0 на левую границу $z = 0$ спин-волнового луча, как показано на рис. 3.11 *б*. Она имеет амплитуду $\overline{A}_m^{TE(0)}$ и продольное (по отношению к оси z) волновое число $k_{z,m}^{(0)} \equiv \beta_m^{(0)} \cos\theta_0$. В результате брэгговской дифракции возникают в первом порядке ($\nu = \mp 1$) дифрагированные TM_n-моды с амплитудами $\overline{A}_n^{TM(\mp1)}$ и продольными волновыми числами $k_{z,n}^{(\mp1)} \equiv \beta_n^{(\mp1)} \cos\theta_{\mp1}$.

Амплитуды падающей и дифрагированных мод связаны друг с другом следующими уравнениями, полученными из общей системы уравнений связанных мод в форме (3.12.26):

$$\frac{d\overline{A}_m^{TE(0)}(z)}{dz} = c_{mn}^{(0,\mp1)} e^{i\Delta k_{z,mn}^{(0,\mp1)} z}\, \overline{A}_n^{TM(\mp1)}(z), \tag{3.12.49}$$

$$\frac{d\overline{A}_n^{TM(\mp1)}(z)}{dz} = c_{nm}^{(\mp1,0)} e^{i\Delta k_{z,nm}^{(\mp1,0)} z}\, \overline{A}_m^{TE(0)}(z). \tag{3.12.50}$$

Продольные волновые числа определяют фазовые рассогласования (3.12.28):

$$\begin{aligned} \Delta k_{z,mn}^{(0,\mp1)} &= k_{z,m}^{(0)} - k_{z,n}^{(\mp1)} \mp K_z \equiv \\ &\equiv \beta_m^{(0)} \cos\theta_0 - \beta_n^{(\mp1)} \cos\theta_{\mp1} \mp K_z, \end{aligned} \tag{3.12.51}$$

$$\begin{aligned} \Delta k_{z,nm}^{(\mp1,0)} &= k_{z,n}^{(\mp1)} - k_{z,m}^{(0)} \pm K_z \equiv \\ &\equiv \beta_n^{(\mp1)} \cos\theta_{\mp1} - \beta_m^{(0)} \cos\theta_0 \pm K_z, \end{aligned} \tag{3.12.52}$$

так что они всегда связаны друг с другом соотношением

$$\Delta k_{z,mn}^{(0,\mp1)} + \Delta k_{z,nm}^{(\mp1,0)} = 0. \tag{3.12.53}$$

Поперечные волновые числа $k_{x,m}^{(0)}$ и $k_{x,n}^{(\mp1)}$ (в плоскости оптического слоя) определяют условие фазового согласования (3.12.25) для взаимодействующих мод по отношению к направлению оси x вдоль границ спин-волнового луча:

$$k_{x,m}^{(0)} - k_{x,n}^{(\mp1)} \mp K_x \equiv \beta_m^{(0)}\sin\theta_0 - \beta_n^{(\mp1)}\sin\theta_{\mp1} \mp K_x = 0. \tag{3.12.54}$$

Из общих соотношений (3.12.51) и (3.12.54) вытекают следующие частные выражения для касательно намагниченных структур:

• в случае продольной спиновой волны в структуре с продольным полем (рис. 3.12 *б*) и поперечной спиновой волны в структуре с поперечным полем (рис. 3.12 *в*), когда, согласно (3.11.38) и (3.11.41), $K_z = 0$ и $K_x \equiv K$,

$$\Delta k_{z,mn}^{(0,\mp1)} = \beta_m^{(0)}\cos\theta_0 - \beta_n^{(\mp1)}\cos\theta_{\mp1}, \tag{3.12.55}$$

$$\beta_m^{(0)}\sin\theta_0 - \beta_n^{(\mp1)}\sin\theta_{\mp1} = \pm K; \tag{3.12.56}$$

• в случае продольной спиновой волны в структуре с поперечным полем (рис. 3.12 *в*) и поперечной спиновой волны в структуре с продольным полем (рис. 3.12 *б*), когда, согласно (3.11.39) и (3.11.40), $K_x = 0$ и $K_z \equiv K$,

$$\Delta k_{z,mn}^{(0,\mp1)} = \beta_m^{(0)}\cos\theta_0 - \beta_n^{(\mp1)}\cos\theta_{\mp1} \mp K, \tag{3.12.57}$$

$$\beta_m^{(0)}\sin\theta_0 - \beta_n^{(\mp1)}\sin\theta_{\mp1} = 0. \tag{3.12.58}$$

Коэффициенты связи $c_{mn}^{(0,\mp1)}$ и $c_{nm}^{(\mp1,0)}$ в общей форме (3.12.29)–(3.12.46), входящие в уравнения связанных мод (3.12.49)–(3.12.50), могут быть преобразованы для частного случая дифракции Брэгга типа $\mathrm{TE}_m \to \mathrm{TM}_n$ по отдельности для каждой ферритовой структуры на рис. 3.12 *а*, *а*, *в* с использованием следующих свойств электромагнитных полей в планарных структурах:

$$H_{mx}^{TE} = E_{my}^{TE} = E_{mz}^{TE} \equiv 0 \quad \text{и} \quad E_{nx}^{TM} = H_{ny}^{TM} = H_{nz}^{TM} \equiv 0.$$

Нормально намагниченная ферритовая структура

$$c_{mn}^{(0,-1)} = -\frac{i\omega\varepsilon_0}{2\overline{N}_m^{TE(0)}} \int_{-a}^{a} \mathcal{M}_{zx}^{+}(y)\widehat{E}_{mx}^{TE(0)*}(y)\widehat{E}_{ny}^{TM(-1)}(y)\,dy, \tag{3.12.59}$$

$$c_{nm}^{(-1,0)} = -\frac{i\omega_{-1}\varepsilon_0}{2\overline{N}_n^{TM(-1)}} \int_{-a}^{a} \mathcal{M}_{zx}^{-*}(y)\widehat{E}_{ny}^{TM(-1)*}(y)\widehat{E}_{mx}^{TE(0)}(y)\,dy, \tag{3.12.60}$$

$$c_{mn}^{(0,+1)} = -\frac{i\omega\varepsilon_0}{2\overline{N}_m^{TE(0)}} \int_{-a}^{a} \mathcal{M}_{zx}^{+*}(y)\widehat{E}_{mx}^{TE(0)*}(y)\widehat{E}_{ny}^{TM(+1)}(y)\,dy, \tag{3.12.61}$$

$$c_{nm}^{(+1,0)} = -\frac{i\omega_{+1}\varepsilon_0}{2\overline{N}_n^{TM(+1)}} \int_{-a}^{a} \mathcal{M}_{zx}^{-}(y)\widehat{E}_{ny}^{TM(+1)*}(y)\widehat{E}_{mx}^{TE(0)}(y)\,dy. \tag{3.12.62}$$

Касательно намагниченная ферритовая структура с продольным полем намагничивания

$$c_{mn}^{(0,-1)} = -\frac{i\omega\varepsilon_0}{2\overline{N}_m^{TE(0)}} \int_{-a}^{a} \Big[\mathcal{M}_{zy}^{+}(y) \widehat{E}_{mx}^{TE(0)*}(y) \widehat{E}_{ny}^{TM(-1)}(y) + \\ + \mathcal{M}_{yz}^{-}(y) \widehat{E}_{mx}^{TE(0)*}(y) \widehat{E}_{nz}^{TM(-1)}(y) \Big]\, dy, \tag{3.12.63}$$

$$c_{nm}^{(-1,0)} = -\frac{i\omega_{-1}\varepsilon_0}{2\overline{N}_n^{TM(-1)}} \int_{-a}^{a} \Big[\mathcal{M}_{yz}^{+*}(y) \widehat{E}_{nz}^{TM(-1)*}(y) \widehat{E}_{mx}^{TE(0)}(y) + \\ + \mathcal{M}_{zy}^{-*}(y) \widehat{E}_{ny}^{TM(-1)*}(y) \widehat{E}_{mx}^{TE(0)}(y) \Big]\, dy + \\ + \frac{1}{2n_1^2 \overline{N}_n^{TM(-1)}} \Big[\mathcal{M}_{yz}^{+*}(y) \widehat{H}_{nx}^{TM(-1)*}(y) \widehat{E}_{mx}^{TE(0)}(y) \Big]_{y=-a}^{y=a}, \tag{3.12.64}$$

$$c_{mn}^{(0,+1)} = -\frac{i\omega\varepsilon_0}{2\overline{N}_m^{TE(0)}} \int_{-a}^{a} \Big[\mathcal{M}_{zy}^{+*}(y) \widehat{E}_{mx}^{TE(0)*}(y) \widehat{E}_{ny}^{TM(+1)}(y) + \\ + \mathcal{M}_{yz}^{-*}(y) \widehat{E}_{mx}^{TE(0)*}(y) \widehat{E}_{nz}^{TM(+1)}(y) \Big]\, dy, \tag{3.12.65}$$

$$c_{nm}^{(+1,0)} = -\frac{i\omega_{+1}\varepsilon_0}{2\overline{N}_n^{TM(+1)}} \int_{-a}^{a} \Big[\mathcal{M}_{yz}^{+}(y) \widehat{E}_{nz}^{TM(+1)*}(y) \widehat{E}_{mx}^{TE(0)}(y) + \\ + \mathcal{M}_{zy}^{-}(y) \widehat{E}_{ny}^{TM(+1)*}(y) \widehat{E}_{mx}^{TE(0)}(y) \Big]\, dy + \\ + \frac{1}{2n_1^2 \overline{N}_n^{TM(+1)}} \Big[\mathcal{M}_{yz}^{+}(y) \widehat{H}_{nx}^{TM(+1)*}(y) \widehat{E}_{mx}^{TE(0)}(y) \Big]_{y=-a}^{y=a}. \tag{3.12.66}$$

Касательно намагниченная ферритовая структура с поперечным полем намагничивания

$$c_{mn}^{(0,-1)} = -\frac{i\omega\varepsilon_0}{2\overline{N}_m^{TE(0)}} \int_{-a}^{a} \mathcal{M}_{yx}^{-}(y) \widehat{E}_{mx}^{TE(0)*}(y) \widehat{E}_{nz}^{TM(-1)}(y)\, dy, \tag{3.12.67}$$

$$c_{nm}^{(-1,0)} = -\frac{i\omega_{-1}\varepsilon_0}{2\overline{N}_n^{TM(-1)}} \int_{-a}^{a} \mathcal{M}_{yx}^{+*}(y) \widehat{E}_{nz}^{TM(-1)*}(y) \widehat{E}_{mx}^{TE(0)}(y)\, dy + \\ + \frac{1}{2n_1^2 \overline{N}_n^{TM(-1)}} \Big[\mathcal{M}_{yx}^{+*}(y) \widehat{H}_{nx}^{TM(-1)*}(y) \widehat{E}_{mx}^{TE(0)}(y) \Big]_{y=-a}^{y=a}, \tag{3.12.68}$$

$$c_{mn}^{(0,+1)} = -\frac{i\omega\varepsilon_0}{2\overline{N}_m^{TE(0)}} \int\limits_{-a}^{a} \mathcal{M}_{yx}^{-*}(y)\widehat{E}_{mx}^{TE(0)*}(y)\widehat{E}_{nz}^{TM(+1)}(y)\,dy, \tag{3.12.69}$$

$$c_{nm}^{(+1,0)} = -\frac{i\omega_{+1}\varepsilon_0}{2\overline{N}_n^{TM(+1)}} \int\limits_{-a}^{a} \mathcal{M}_{yx}^{+}(y)\widehat{E}_{nz}^{TM(+1)*}(y)\widehat{E}_{mx}^{TE(0)}(y)\,dy + \\ + \frac{1}{2n_1^2\overline{N}_n^{TM(+1)}}\left[\mathcal{M}_{yx}^{+}(y)\widehat{H}_{nx}^{TM(+1)*}(y)\widehat{E}_{mx}^{TE(0)}(y)\right]_{y=-a}^{y=a}. \tag{3.12.70}$$

Для нормально намагниченных структур коэффициенты связи (3.12.59)–(3.12.62) содержат только объемные вклады, так как поверхностные вклады (3.12.33)–(3.12.34) исчезли из-за того, что $H_{mx}^{TE(0)} = E_{my}^{TE(0)} \equiv 0$.

В противоположность этому, в касательно намагниченных структурах коэффициенты связи $c_{nm}^{(\mp1,0)}$ (в виде (3.12.64), (3.12.66), (3.12.68), (3.12.70)) содержат оба вклада, что отличает их от коэффициентов связи $c_{mn}^{(0,\mp1)}$ (в виде (3.12.63), (3.12.65), (3.12.67), (3.12.69)), которые также не имеют поверхностных вкладов. Этот факт нарушает перестановочную симметрию между коэффициентами $c_{mn}^{(0,\mp1)}$ и $c_{nm}^{(\mp1,0)}$, что с неизбежностью вынуждает обращаться к модифицированной теории связанных мод, изложенной в приложении Д. Модификация теории состоит в учете кросс-мощности, переносимой связанными модами при наличии асимметрии связи, которая порождена эффективными поверхностными токами, ранее потерянными другими авторами.

Связь оптических мод типа TE $\leftrightarrow$ TM полностью описывается коэффициентами связи в общей форме (3.12.59)–(3.12.70). Для их практического применения необходимо знать структуру полей и закон дисперсии для TE$_m$- и TM$_n$-мод, которые получены в пп. 1.7 и 1.8 для трехслойной планарной структуры. Их знание позволяет, во-первых, найти модальные нормы $\overline{N}_m^{TE(0)}$ и $\overline{N}_n^{TM(\mp1)}$, во-вторых, вычислить интегралы перекрытия полей (с весом (3.12.48)) и, в-третьих, привести интегральную форму коэффициентов связи (3.12.59)–(3.12.70) к аналитической форме. Именно такая форма необходима для практического решения связанных уравнений (3.12.49)–(3.12.50), в том числе численными методами [68, 69]. Техника преобразования интегральной формы коэффициентов связи к аналитической была продемонстрирована выше в пп. 3.4, 3.7, 3.10 и без труда может быть применена к магнитооптическим коэффициентам связи в форме уравнений (3.12.59)–(3.12.70).

Глава 4

ТЕОРИЯ СВЯЗИ МОД В МНОГОВОЛНОВОДНЫХ СИСТЕМАХ

Настоящая глава продолжает демонстрацию схемы перехода от общей теории возбуждения волноводов заданными источниками, разработанной в гл. 2, к теории связанных мод, которая была начата в предыдущей главе в применении к одноволноводным системам. Многоволноводные системы выделены в отдельную главу потому, что они требуют специального рассмотрения из-за противоречивости предыдущих результатов, полученных разными авторами, которые остаются несогласованными вплоть до настоящего времени.

В литературе существуют два различных подхода к анализу связанных систем, которые разделяют все опубликованные работы по теории связанных мод (ТСМ) на две группы, принадлежащие либо к *обычной формулировке*, либо к *модифицированной формулировке* (см. обзор литературы в начале гл. 3 и приложения Г).

Такое разделение публикаций началось после появления статьи Харди и Стрейфера [19]. Они первыми приняли во внимание факт неортогональности базиса из собственных функций для двух диэлектрических волноводов при анализе связи между ними даже в отсутствие потерь. По тем временам это была неожиданная идея, так как все известные тогда формулировки ТСМ использовали ортогональные базисные функции [1–18] в применении как к одноволноводным, так и к многоволноводным системам. Именно такой «ортогональный» подход в совокупности сегодня называется *обычной теорией связанных мод* (ОТСМ), в отличие от *модифицированной теории связанных мод* (МТСМ), математическое обоснование которой дано в приложении Д.

Позднее Харди и Стрейфер распространили свой «неортогональный» подход на многоволноводные системы [20–22]. Они интуитивно предложили разумную и оказавшуюся плодотворной идею о модальной неортогональности полей двух и более волноводов, разнесенных в пространстве. Однако математическая реализация этой идеи в статье [19] оказалась нестрогой и физически запутанной. Более того, полученные ими результаты противоречат закону сохранения энергии, что признавалось самими авторами [19] и неоднократно подчеркивалось другими [24, 28–30, 41, 42].

Чтобы объяснить это противоречие, Харди и Стрейфер связали его появление с неким названным ими *«остаточным полем»* (англ. *residue field*), которое якобы вызвано излучательными модами. Это утверждение сделано авторами без какого-либо физического обоснования. Кроме того, при выводе коэффициентов связи они были вынуждены предположить, что излучательные моды в форме «остаточного поля» не взаимодействуют с направляемыми модами в области межмодовой связи. Однако это бесспорно ошибочное предположение противоречит общей физической идее о связи волноводных мод. Рассуждения о роли излучательных мод, приведенные в статье [19], выглядят поверхностными и физически спорными, поскольку их строгое рассмотрение требует детальной математической проработки, аналогичной той, что выполнена в гл. 2 и 3 настоящей книги.

Наша точка зрения заключается в том, что излучательные моды открытого диэлектрического волновода, будучи собственными решениями соответствующей граничной задачи, идентичны (в смысле их возбуждения и связи) направляемым модам дискретного спектра. Действительно, в области межмодовой связи направляемые моды в общем случае связаны не только друг с другом, но и со всем непрерывным спектром излучательных мод. Об этом свидетельствуют, например, уравнения (3.2.9)–(3.2.10) для одноволноводных систем и полученные ниже уравнения (4.8.7)–(4.8.8) для многоволноводных систем. По этой причине попытка Харди и Стрейфера приписать реально существующим излучательным модам вторичную роль неких «остаточных полей» выглядит физически несостоятельной.

Тем не менее, именно публикация статьи [19] инициировала в свое время дальнейшие исследования в области связи оптических волноводов [24–40], которые вместе с работами Харди и Стрейфера [19–22] заложили основы теории, известной сегодня как *модифицированная* ТСМ (см. сноску на с. 177). Для лучшего понимания идеи модальной неортогональности в отсутствие потерь некоторые авторы предприняли иные теоретические подходы, отличные от использованного в работах [19–22]. Среди них формулировка связи мод, основанная на вариационном принципе [24–27, 29, 38] и на теореме взаимности [29, 30, 34, 35]. Другие авторы выполнили сравнительный анализ результатов обычной теории и модифицированной теории (см., например, обзоры [28, 37, 52]).

Снайдер с сотрудниками, пытаясь спасти собственную теорию [3–5, 15], построенную на основе обычной (ортогональной) формулировки, полностью отверг новую идею о модальной неортогональности [41, 42]. Как следствие этого, в литературе конца 80-х годов прошлого столетия возникла дискуссия по вопросам справедливости и точности модифицированной неортогональной ТСМ в сравнении с обычными ортогональными формулировками [43–52]. Более подробные детали и критическое обсуждение дискуссии можно найти в обзорных статьях [27, 28].

Критика со стороны Снайдера заставила Харди и Стрейфера переформулировать изначально выведенные ими уравнения связанных мод [19] в некой измененной форме [23]. Однако выполнили они это довольно странным образом, заявив, что основная их задача — *примирить эти две формулировки* (дословно англ. *to reconcile the two formulations* [23]).

С этой целью Харди и Стрейфер сравнивают свои уравнения [19–22] с аналогичными уравнениями, полученными на основе вариационного принципа в работе [24] и удовлетворяющими закону сохранения энергии. Путем интуитивных рассуждений, лишенных какой-либо математической строгости, они просто переписывают (не давая вывода) свои старые коэффициенты связи и интегралы перекрытия полей в формально скорректированной форме $\widetilde{L}_{mn}$ и P_{mn} для того, чтобы «примирить» их с результатами [24]. Искусственно составленная таким образом система связанных уравнений для волновых амплитуд U_m принимает следующую матричную форму (в наших обозначениях $a_m \equiv U_m$, $K_{mn} \equiv i\widetilde{L}_{mn}$ и $N_{mn} \equiv P_{mn}$, ср. уравнения (17) и (19) в работе [23]):

$$\overline{\mathbf{N}} \cdot \frac{d\overline{\mathbf{a}}}{dz} = -i\overline{\mathbf{N}} \cdot \overline{\boldsymbol{\beta}} \cdot \overline{\mathbf{a}} + \overline{\mathbf{K}} \cdot \overline{\mathbf{a}} \quad \text{или} \quad \frac{d\overline{\mathbf{a}}}{dz} + i\overline{\boldsymbol{\beta}} \cdot \overline{\mathbf{a}} = \overline{\mathbf{N}}^{-1} \cdot \overline{\mathbf{K}} \cdot \overline{\mathbf{a}}.$$

Здесь $\overline{\mathbf{a}} \equiv \mathrm{col}[a_1, a_2, \ldots]$ — вектор-столбец, построенный на волновых амплитудах a_m, $\overline{\boldsymbol{\beta}} \equiv \mathrm{diag}[\beta_1, \beta_2, \ldots]$ — диагональная матрица, состоящая из невозмущенных фазовых постоянных β_m (для недиссипативных волноводов), а квадратные матрицы $\overline{\mathbf{N}}$ и $\overline{\mathbf{K}}$ образованы элементами N_{mn} и K_{mn}.

Записанное выше уравнение по форме справедливо для ТСМ как в модифицированной, так и в обычной формулировке. Различие между ними состоит в том, что в модифицированной форме интегралы перекрытия (названные в нашей теории *нормировочными коэффициентами*, см. уравнение (2.2.6)) отличны от нуля ($N_{mn} \neq 0$), только если m-я и n-я моды принадлежат различным волноводам, в противном случае $N_{mn} = N_m \delta_{mn}$. В рамках обычной ТСМ соотношение ортогональности $N_{mn} = N_m \delta_{mn}$ считается применимым ко всем без исключения парам мод *многоволноводной системы*, включая как моды одного и того же волновода в составе этой системы (что вполне очевидно), так и моды разных волноводов (в чем и заключается *ошибочность* ОТСМ).

Полезно отметить, что написанное выше уравнение полностью совпадает по структуре со связанными уравнениями, полученными для *одноволноводных систем* (см. уравнения (3.2.14) и (3.2.15)). Для диссипативных волноводов в силу соотношения квази-ортогональности (2.12.6) все нормировочные коэффициенты N_{mn} отличны от нуля. Этого нет в волноводах без потерь, где работает обычное соотношение ортогональности (2.12.12), т. е. $N_{mn} = N_m \delta_{mn}$.

Несмотря на то, что уравнения связанных волноводных мод путем искусственной переформулировки, выполненной Харди и Стрейфером [23], были приведены к правильной форме, строгое их обоснование там отсутствует. Оно позже было сделано в монографии [56], которой и будем следовать ниже.

Данная глава имеет целью разработку самосогласованной теории связанных мод для многоволноводных систем, применимую к различным физическим ситуациям независимо от степени воздействия таких факторов, как слабая направленность волноводного распространения, слабая связь между волноводами и другие, включая непараллельность волноводов.

Поскольку самосогласованный подход базируется на сопряженной лемме Лоренца как исходном квадратичном соотношении для вывода условий квази-ортогональности и уравнений возбуждения и связи мод, то п. 4.1 посвящен модификации леммы Лоренца включением в нее разных диэлектрических сред, что типично для многоволноводных систем.

Модифицированная лемма Лоренца используется в п. 4.2 для вывода соотношения квази-ортогональности мод в диссипативных многоволноводных системах, включая как идентичные, так и неидентичные волноводы, входящие в состав системы. Особенности многоволноводных систем без потерь в применении к модальной квази-ортогональности и ортогональности проанализированы в п. 4.3.

Обоснование модального разложения электромагнитных полей, избыточной поляризации среды и возбуждающих токов (объемного электрического тока и эффективного поверхностного магнитного тока) составляет предмет рассмотрения в п. 4.4. Детали математических преобразований при выводе модального разложения поляризации среды для двух-, трех- и многоволноводных систем вынесены в приложение Е, в то время как анализ структуры тензоров объемной и поверхностной связи для этих систем выполнен в п. 4.5.

Параграф 4.6 содержит строгий вывод уравнений возбуждения направляемых и излучательных мод в диссипативных многоволноводных системах с произвольным числом волноводов, а частный случай этих уравнений в отсутствие потерь рассмотрен в п. 4.7. Переход от уравнений возбуждения к системе уравнений связанных мод на основе модального разложения возбуждающих токов для многоволноводных систем с потерями и без потерь приведен, соответственно, в пп. 4.8 и 4.9.

Применение общих уравнений связанных мод, полученных в п. 4.9, к анализу взаимодействия направляемых ТЕ- и ТМ-мод демонстрируется в п. 4.10 с вычислением коэффициентов связи в п. 4.11. Исследована пространственная картина энергообмена между взаимодействующими модами двух параллельных волноводов с учетом как собственной, так и взаимной (кросс) мощности, переносимой связанными модами. Математические детали вычисления коэффициентов объемной и поверхностной связи и кросс-норм для мод ТЕ-типа и ТМ-типа вынесены в приложение Ж.

Параграф 4.12 посвящен обобщению предыдущих результатов, полученных для параллельных диэлектрических волноводов, на случай нарушения параллельности с использованием для этой цели концепции так называемых *локальных мод*. Применение такой концепции определенным образом изменяет соотношение модальной квази-ортогональности, сохраняя общую структуру уравнений возбуждения и связи мод в почти параллельных волноводах.

4.1. Модифицированная лемма Лоренца для разных диэлектрических сред

4.1.1. Дифференциальная форма сопряженной леммы Лоренца. Как и ранее (см. пп. 2.8 и 2.11), стартовой точкой электродинамического анализа является сопряженная лемма Лоренца. Она получается на основе уравнений Максвелла, записанных для двух различных электромагнитных процессов, отмеченных индексами 1 и 2 (последние с комплексным сопряжением):

$$\nabla\times\mathbf{E}_1 = -i\omega\mu_0\mathbf{H}_1, \qquad \nabla\times\mathbf{E}_2^* = i\omega\mu_0\mathbf{H}_2^*, \tag{4.1.1}$$

$$\nabla\times\mathbf{H}_1 = i\omega\mathbf{D}_1+\mathbf{J}_1^e, \qquad \nabla\times\mathbf{H}_2^* = -i\omega\mathbf{D}_2^*+\mathbf{J}_2^{e*}. \tag{4.1.2}$$

Согласно вышесказанному, в уравнениях (4.1.1) и (4.1.2) учтено, что на оптических частотах среды не обладают магнитными свойствами [57, 58], тогда $\mathbf{B}_{1(2)} = \mu_0 \mathbf{H}_{1(2)}$ и $\mathbf{J}^m_{1(2)} \equiv 0$ (см. уравнения (2.10.11) и (2.11.5)). Электрические токи $\mathbf{J}^e_{1(2)}$ включают возбуждающие *объемные токи* $\mathbf{J}^e_{b1(b2)}$ и *токи проводимости* среды $\mathbf{J}^e_{c1(c2)}$:

$$\mathbf{J}^e_{1(2)} = \mathbf{J}^e_{b1(b2)} + \mathbf{J}^e_{c1(c2)}. \tag{4.1.3}$$

Уравнения Максвелла (4.1.1)–(4.1.2), в отличие от аналогичных уравнений (2.11.1)–(2.11.2), записаны для фиксированной частоты ω, что естественным образом исключает из рассмотрения динамические (параметрические) возмущения диэлектрической проницаемости среды, т. е. $\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{1(2)} \equiv 0$ (см. уравнения (2.10.17)–(2.10.19)).

Следовательно, возбуждающие объемные токи $\mathbf{J}^e_{b1(b2)}$ генерируются избыточной поляризацией среды $\mathbf{P}_{1(2)}$, которая вызвана *статическим* тензором возмущения $\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{1(2)}$ (см. уравнения (2.10.24) и (2.10.26) при $\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} = 0$ и $\omega_\nu \equiv \omega$):

$$\mathbf{J}^e_{b1(b2)} \equiv i\omega \mathbf{P}_{1(2)} = i\omega \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{1(2)} \cdot \mathbf{E}_{1(2)}. \tag{4.1.4}$$

Применяя к уравнениям (4.1.1) и (4.1.2) ту же самую процедуру, которая ранее привела к квадратичному соотношению (2.8.3), получаем искомую лемму Лоренца в комплексно-сопряженной форме (ср. уравнение (2.11.3)):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2^* + \mathbf{E}_2^* \times \mathbf{H}_1) &= -i\omega(\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{E}_2^* - \mathbf{D}_2^* \cdot \mathbf{E}_1) - \\ &- (\mathbf{J}^e_{b1} \cdot \mathbf{E}_2^* + \mathbf{J}^{e*}_{b2} \cdot \mathbf{E}_1) - (\mathbf{J}^e_{c1} \cdot \mathbf{E}_2^* + \mathbf{J}^{e*}_{c2} \cdot \mathbf{E}_1). \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

Векторы электрической индукции $\mathbf{D}_{1(2)}$ соответствуют невозмущенной среде, заполняющей базовый волновод, так как все ее возмущения вошли в возбуждающие объемные токи $\mathbf{J}^e_{b1(b2)}$. В предыдущей главе, где рассматривались одноволноводные оптические системы, невозмущенная проницаемость среды принималась скалярной и одинаковой для обеих физических ситуаций, соответствующих индексам 1 и 2, т. е. было $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \equiv \varepsilon$ и $\mathbf{D}_{1(2)} = \varepsilon \mathbf{E}_{1(2)}$.

В противоположность этому, индивидуальные волноводы, входящие в состав многоволноводной системы, в общем случае имеют различные диэлектрические проницаемости и проводимости, тогда

$$\mathbf{D}_1 = \varepsilon_1 \mathbf{E}_1 \quad \text{и} \quad \mathbf{D}_2 = \varepsilon_2 \mathbf{E}_2, \tag{4.1.6}$$

$$\mathbf{J}^e_{c1} = \sigma_1 \mathbf{E}_1 \quad \text{и} \quad \mathbf{J}^e_{c2} = \sigma_2 \mathbf{E}_2. \tag{4.1.7}$$

Таким образом, с учетом (4.1.6) и (4.1.7) лемма Лоренца в *дифференциальной форме* (4.1.5) записывается в виде (ср. уравнения (2.8.6) и (2.11.7))

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{S}_{12} + i\omega w_{12} + q^{(b)}_{12} = r^{(b)}_{12}, \tag{4.1.8}$$

где введены обозначения (ср. уравнения (2.8.7)–(2.8.9) и (2.11.8)–(2.11.10))

$$\mathbf{S}_{12} = \mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2^* + \mathbf{E}_2^* \times \mathbf{H}_1, \tag{4.1.9}$$

$$w_{12} = \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{E}_2^* - \mathbf{D}_2^* \cdot \mathbf{E}_1, \tag{4.1.10}$$

$$q_{12}^{(b)} = \mathbf{J}_{c1}^{e} \cdot \mathbf{E}_2^* + \mathbf{J}_{c2}^{e*} \cdot \mathbf{E}_1, \tag{4.1.11}$$

$$r_{12}^{(b)} = -\left(\mathbf{J}_{b1}^{e} \cdot \mathbf{E}_2^* + \mathbf{J}_{b2}^{e*} \cdot \mathbf{E}_1\right). \tag{4.1.12}$$

Индекс (b) отражает принадлежность соответствующих величин к объемным свойствам системы, которые дополняются поверхностными свойствами, отмечаемыми индексом (s). В частности, это касается *эффективных* поверхностных магнитных токов, имеющих для оптических волноводов вид (2.10.33) (отбрасывая нижний индекс eff и верхний частотный индекс (ν)):

$$\mathbf{J}_{s1(s2)}^{m} \equiv \mathbf{n}_b \times \mathbf{E}_b \Big|_{L_b} = \boldsymbol{\tau}_b \frac{\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{J}_{b1(b2)}^{e}(L_b)}{i\omega\varepsilon_{1(2)}} = \frac{\boldsymbol{\tau}_b}{\varepsilon_{1(2)}} P_{z1(z2)}(L_b). \tag{4.1.13}$$

Здесь $P_{z1(z2)}(L_b)$ — продольная компонента векторов поляризации, взятая в точках контура L_b (с единичным *касательным* вектором $\boldsymbol{\tau}_b = \mathbf{e}_z \times \mathbf{n}_b$), который ограничивает сечение S_b (с единичной *внешней* нормалью $\mathbf{n}_b$), занятое объемными электрическими токами $\mathbf{J}_{b1(b2)}^{e}$ в форме (4.1.4).

Для многоволноводных систем дифференциальная форма (4.1.8) леммы Лоренца отличается от аналогичной формы (2.11.7) для одноволноводных систем тем, что в ней появился дополнительный член $i\omega w_{12}$. Он порожден, как видно из (4.1.6) и (4.1.10), разностью диэлектрических проницаемостей и исчезает в одноволноводных системах, когда $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$.

4.1.2. Интегральная форма сопряженной леммы Лоренца. Для получения сопряженной леммы Лоренца в интегральной форме необходимо проинтегрировать ее дифференциальную форму (4.1.8) по поперечному сечению S волноведущей структуры, как это сделано в пп. 2.8 и 2.11. Результат такой операции следующий (ср. уравнения (2.8.13) и (2.11.16)):

$$\frac{dP_{12}}{dz} + i\omega W_{12} + Q_{12} = R_{12}, \tag{4.1.14}$$

где введены величины (см. уравнения (2.8.14)–(2.8.16) и (2.11.17)–(2.11.19))

$$P_{12} \equiv \int_S \mathbf{S}_{12}(\mathbf{r}_t, z) \cdot \mathbf{e}_z dS = \int_S (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2^* + \mathbf{E}_2^* \times \mathbf{H}_1) \cdot \mathbf{e}_z \, dS, \tag{4.1.15}$$

$$W_{12} \equiv \int_S w_{12}(\mathbf{r}_t, z) dS = \int_S (\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{E}_2^* - \mathbf{D}_2^* \cdot \mathbf{E}_1) \, dS, \tag{4.1.16}$$

$$\begin{aligned} Q_{12} = Q_{12}^{(b)} + Q_{12}^{(s)} &\equiv \int_S q_{12}^{(b)}(\mathbf{r}_t, z) \, dS + \int_L q_{12}^{(s)}(\mathbf{r}_t, z) \, dL = \\ &= \int_S (\mathbf{J}_{c1}^{e} \cdot \mathbf{E}_2^* + \mathbf{J}_{c2}^{e*} \cdot \mathbf{E}_1) \, dS + \int_L (\mathbf{J}_{c1}^{m} \cdot \mathbf{H}_{\tau 2}^* + \mathbf{J}_{c2}^{m*} \cdot \mathbf{H}_{\tau 1}) \, dL, \end{aligned} \tag{4.1.17}$$

$$R_{12} = R_{12}^{(b)} + R_{12}^{(s)} \equiv \int\limits_{S_b} r_{12}^{(b)}(\mathbf{r}_t, z)\, dS + \int\limits_{L_b} r_{12}^{(s)}(\mathbf{r}_t, z)\, dL =$$
$$= -\int\limits_{S_b} (\mathbf{J}_{b1}^{e} \cdot \mathbf{E}_2^* + \mathbf{J}_{b2}^{e*} \cdot \mathbf{E}_1)\, dS - \int\limits_{L_b} (\mathbf{J}_{s1}^{m} \cdot \mathbf{H}_2^* + \mathbf{J}_{s2}^{m*} \cdot \mathbf{H}_1)\, dL. \tag{4.1.18}$$

Член $Q_{12}^{(s)}$, входящий в (4.1.17), включает поверхностные потери, которые связаны с поверхностным сопротивлением $\mathcal{R}_{s1(s2)}$ (присущим металлическим проводящим поверхностям) в форме (2.1.36) и учитываются граничным условием (2.1.35). Такие поверхностные потери представлены в (4.1.17) как мощность взаимодействия тангенциальных магнитных полей $\mathbf{H}_{\tau 1(\tau 2)}$ с *диссипативными* эффективными поверхностными магнитными токами

$$\mathbf{J}_{c1(c2)}^{m} = \mathcal{R}_{s1(s2)} \mathbf{H}_{\tau 1(\tau 2)}. \tag{4.1.19}$$

Член $R_{12}^{(s)}$, входящий в (4.1.18), включает *возбуждающие* эффективные поверхностные магнитные токи $\mathbf{J}_{s1(s2)}^{m}$ (с опущенным индексом eff), локализованные вдоль контура L_b в виде (4.1.13).

Как и прежде, интегральная форма (4.1.14) сопряженной леммы Лоренца служит основой для доказательства соотношений квази-ортогональности и ортогональности собственных мод в диссипативных и недиссипативных волноводах, а также для вывода уравнений возбуждения и связи мод в многоволноводных оптических системах.

4.2. Квази-ортогональность мод в многоволноводных системах с потерями

Для вывода соотношения модальной квази-ортогональности применяем интегральную лемму Лоренца (4.1.14) в отсутствие возбуждающих источников ($R_{12} = 0$) к любой паре собственных мод произвольных волноводов, входящих в состав многоволноводной системы.

Пусть поля с индексом 1 принадлежат n-й моде волновода с номером q, имеющего невозмущенные параметры среды $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon^q(\mathbf{r}_t)$, $\sigma_1 \equiv \sigma^q(\mathbf{r}_t)$ и $\mathcal{R}_{s1} \equiv \equiv \mathcal{R}_s^q(\mathbf{r}_t)$, а поля с индексом 2 — m-й моде другого волновода с номером p, имеющего параметры $\varepsilon_2 \equiv \varepsilon^p(\mathbf{r}_t)$, $\sigma_2 \equiv \sigma^p(\mathbf{r}_t)$ и $\mathcal{R}_{s2} \equiv \mathcal{R}_s^p(\mathbf{r}_t)$, рассматриваемые как функции поперечных координат $\mathbf{r}_t$.

Электромагнитные поля, $\mathbf{E}_{1(2)}$, $\mathbf{H}_{1(2)}$, электрические индукции, $\mathbf{D}_{1(2)}$, и электрические и магнитные токи, $\mathbf{J}_{c1(c2)}^{e}$, $\mathbf{J}_{c1(c2)}^{m}$, входящие в (4.1.14), должны быть заменены следующими собственными функциями для упомянутых мод:

$$\mathbf{E}_1 \equiv \mathbf{E}_n^q(\mathbf{r}_t, z) = \widehat{\mathbf{E}}_n^q(\mathbf{r}_t)\, \mathrm{e}^{-\gamma_n^q z},$$
$$\mathbf{E}_2 \equiv \mathbf{E}_m^p(\mathbf{r}_t, z) = \widehat{\mathbf{E}}_m^p(\mathbf{r}_t)\, \mathrm{e}^{-\gamma_m^p z}; \tag{4.2.1}$$

$$\mathbf{H}_1 \equiv \mathbf{H}_n^q(\mathbf{r}_t, z) = \widehat{\mathbf{H}}_n^q(\mathbf{r}_t)\, \mathrm{e}^{-\gamma_n^q z},$$
$$\mathbf{H}_2 \equiv \mathbf{H}_m^p(\mathbf{r}_t, z) = \widehat{\mathbf{H}}_m^p(\mathbf{r}_t)\, \mathrm{e}^{-\gamma_m^p z}; \tag{4.2.2}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_1 &\equiv \mathbf{D}_n^q(\mathbf{r}_t, z) = \varepsilon^q(\mathbf{r}_t)\mathbf{E}_n^q(\mathbf{r}_t, z), \\ \mathbf{D}_2 &\equiv \mathbf{D}_m^p(\mathbf{r}_t, z) = \varepsilon^p(\mathbf{r}_t)\mathbf{E}_m^p(\mathbf{r}_t, z); \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{c1}^e &\equiv \mathbf{J}_{cn}^{e,q}(\mathbf{r}_t, z) = \sigma^q(\mathbf{r}_t)\mathbf{E}_n^q(\mathbf{r}_t, z), \\ \mathbf{J}_{c2}^e &\equiv \mathbf{J}_{cm}^{e,p}(\mathbf{r}_t, z) = \sigma^p(\mathbf{r}_t)\mathbf{E}_m^p(\mathbf{r}_t, z); \end{aligned} \tag{4.2.4}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{c1}^m &\equiv \mathbf{J}_{cn}^{m,q}(\mathbf{r}_t, z) = \mathcal{R}_s^q(\mathbf{r}_t)\mathbf{H}_{\tau n}^q(\mathbf{r}_t, z), \\ \mathbf{J}_{c2}^m &\equiv \mathbf{J}_{cm}^{m,p}(\mathbf{r}_t, z) = \mathcal{R}_s^p(\mathbf{r}_t)\mathbf{H}_{\tau m}^p(\mathbf{r}_t, z). \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

Здесь мембранные функции полей (отмеченные колпачком) зависят от координат $\mathbf{r}_t$ поперечного сечения, а невозмущенные постоянные распространения учитывают диссипативное затухание мод с помощью амплитудных постоянных α_m^p и α_n^q:

$$\gamma_m^p = \alpha_m^p + i\beta_m^p \quad \text{и} \quad \gamma_n^q = \alpha_n^q + i\beta_n^q. \tag{4.2.6}$$

Подстановка полей (4.2.1)–(4.2.5) в выражения (4.1.15)–(4.1.17) превращает их в следующее:

$$P_{12} \to N_{mn}^{pq}\, \mathrm{e}^{-(\gamma_m^{p*}+\gamma_n^q)z}, \tag{4.2.7}$$

$$Q_{12} \to M_{mn}^{pq}\, \mathrm{e}^{-(\gamma_m^{p*}+\gamma_n^q)z}, \tag{4.2.8}$$

$$W_{12} \to -W_{mn}^{pq}\, \mathrm{e}^{-(\gamma_m^{p*}+\gamma_n^q)z}. \tag{4.2.9}$$

Здесь по аналогии с (2.2.6)–(2.2.7) и (2.12.4)–(2.12.5) введены *нормировочные коэффициенты* $N_{mn}^{pq} = N_{nm}^{qp*}$ (кросс-нормы m-й моды p-волновода и n-й моды q-волновода) и *диссипативные коэффициенты* $M_{mn}^{pq} = M_{nm}^{qp*}$:

$$N_{mn}^{pq} = \int\limits_S (\widehat{\mathbf{E}}_m^{p*} \times \widehat{\mathbf{H}}_n^q + \widehat{\mathbf{E}}_n^q \times \widehat{\mathbf{H}}_m^{p*}) \cdot \mathbf{e}_z\, dS, \tag{4.2.10}$$

$$M_{mn}^{pq} = \int\limits_S (\sigma^p + \sigma^q)(\widehat{\mathbf{E}}_m^{p*} \cdot \widehat{\mathbf{E}}_n^q)\, dS + \int\limits_L (\mathcal{R}_s^p + \mathcal{R}_s^q)(\widehat{\mathbf{H}}_{\tau m}^{p*} \cdot \widehat{\mathbf{H}}_{\tau n}^q)\, dL, \tag{4.2.11}$$

а также определена новая величина,

$$W_{mn}^{pq} = \int\limits_S (\varepsilon^p - \varepsilon^q)(\widehat{\mathbf{E}}_m^{p*} \cdot \widehat{\mathbf{E}}_n^q)\, dS = -W_{nm}^{qp*}, \tag{4.2.12}$$

свойственная исключительно многоволноводным системам. В них для разных, в том числе *идентичных*, волноводов $\varepsilon^p(\mathbf{r}_t) \neq \varepsilon^q(\mathbf{r}_t)$ при $p \neq q$, кроме одного и того же волновода, когда $p = q$. По этой причине величина W_{mn}^{pq} может быть названа *многоволноводным коэффициентом.*

Включение замен (4.2.7)–(4.2.9) в лемму Лоренца (4.1.14) при $R_{12} = 0$ дает искомое ***соотношение квази-ортогональности*** для многоволноводных систем в общей форме:

$$(\gamma_m^{p*} + \gamma_n^q)N_{mn}^{pq} + i\omega W_{mn}^{pq} = M_{mn}^{pq}. \tag{4.2.13}$$

Если ввести результирующий *диссипативно-многоволноводный коэффициент* в виде

$$M_{mn}^{pq\Sigma} = M_{mn}^{pq} - i\omega W_{mn}^{pq}, \tag{4.2.14}$$

то соотношение квази-ортогональности (4.2.13) принимает вид, характерный для одноволноводных структур (ср. уравнения (2.3.7) и (2.12.6)),

$$(\gamma_m^{p*} + \gamma_n^q) N_{mn}^{pq} = M_{mn}^{pq\Sigma}. \tag{4.2.15}$$

Согласно (4.2.11) и (4.2.12), диссипативно-многоволноводный коэффициент (4.2.14) обладает свойством перестановочности, типичным для обычного диссипативного коэффициента M_{mn}^{pq}:

$$M_{mn}^{pq\Sigma} = M_{nm}^{qp\Sigma\,*}. \tag{4.2.16}$$

Следовательно, все рассуждения относительно поведения произвольной пары мод при переносе ими собственной и взаимной мощностей в диссипативных одиночных волноводах, которые приведены в пп. 2.3 и 2.12, остаются справедливыми для многоволноводных структур, независимо от того, принадлежит ли рассматриваемая пара мод одному и тому же волноводу или разным волноводам. Однако совершенно иная ситуация возникает в недиссипативных многоволноводных системах.

4.3. Квази-ортогональность и ортогональность мод в многоволноводных системах без потерь

В отсутствие потерь, когда $M_{mn}^{pq} = 0$, соотношение квази-ортогональности в общей форме (4.2.13) принимает частный вид, характерный для *недиссипативных многоволноводных* структур:

$$(\gamma_m^{p*} + \gamma_n^q) N_{mn}^{pq} = -i\omega W_{mn}^{pq}. \tag{4.3.1}$$

Как известно, модальный спектр недиссипативных волноведущих структур содержит не только моды, распространяющиеся без затухания ($\alpha_m = 0$), названные *активными модами*, но и так называемые *реактивные моды*, имеющие недиссипативное (реактивное) затухание ($\alpha_m \neq 0$). Поэтому постоянные распространения для реактивных мод сохраняют форму (4.2.6), а для активных мод содержат лишь фазовые постоянные:

$$\gamma_m^p = i\beta_m^p \quad \text{и} \quad \gamma_n^q = i\beta_n^q. \tag{4.3.2}$$

В частном случае *активных мод* с постоянными распространения (4.3.2) общее недиссипативное соотношение квази-ортогональности (4.3.1) принимает вид

$$(\beta_m^p - \beta_n^q) N_{mn}^{pq} = \omega W_{mn}^{pq}. \tag{4.3.3}$$

Рассмотрим два частных случая модальной ортогональности и квази-ортогональности для пары мод, принадлежащих: а) одному и тому же волноводу, б) двум разным волноводам; при этом каждый из них является частью многоволноводной системы.

4.3.1. Две моды одного волновода. Для любой пары собственных мод одного волновода ($q = p$) с номерами m и n из соотношения (4.2.12) следует

$$W_{mn}^{pp} = 0, \tag{4.3.4}$$

как следствие равенства $\varepsilon^p(\mathbf{r}_t) = \varepsilon^q(\mathbf{r}_t)$ при $q = p$ (один и тот же волновод).

В этом случае общие недиссипативные *соотношения квази-ортогональности* (4.3.1) и (4.3.3) с учетом (4.3.4) принимают привычную форму *соотношения ортогональности* (с нулевой правой частью):

- для *активных мод* (ср. уравнения (2.4.8) и (2.12.11))

$$(\beta_m^p - \beta_n^p) N_{mn}^{pp} = 0, \tag{4.3.5}$$

- для *реактивных мод* (ср. уравнения (2.4.1) и (2.12.10))

$$(\gamma_m^{p*} + \gamma_n^p) N_{mn}^{pp} = 0. \tag{4.3.6}$$

Активные моды подчиняются соотношению ортогональности (4.3.5), которое полностью совпадает с подобными выражениями (2.4.8) и (2.12.11), полученными для одиночных волноводов. Это позволяет по аналогии с (2.4.15) и (2.12.12) записать *соотношение ортонормировки*

$$N_{mn}^{pp} = N_{mm}^{pp} \delta_{mn} \equiv N_m^p \delta_{mn}, \tag{4.3.7}$$

где нормировочный коэффициент N_{mn}^{pp} дается формулой (4.2.10) при $q = p$, а именно

$$N_{mn}^{pp} = \int\limits_S (\widehat{\mathbf{E}}_m^{p*} \times \widehat{\mathbf{H}}_n^p + \widehat{\mathbf{E}}_n^p \times \widehat{\mathbf{H}}_m^{p*}) \cdot \mathbf{e}_z \, dS, \tag{4.3.8}$$

и норма N_m^p активной m-й моды p-волновода равняется (ср. уравнения (2.4.10) и (2.12.13))

$$N_m^p \equiv N_{mm}^{pp} = 2\mathrm{Re} \int\limits_S (\widehat{\mathbf{E}}_m^{p*} \times \widehat{\mathbf{H}}_m^p) \cdot \mathbf{e}_z \, dS. \tag{4.3.9}$$

Как следует из соотношения ортонормировки (4.3.7), различные активные моды ($m \neq n$) *одного волновода* ($q = p$) *взаимно ортогональны* в энергетическом смысле, т. е. они не имеют взаимной (кросс) мощности ($P_{mn}^{pp} = 0$). Каждая из них переносит только собственную мощность независимо от других мод (см. уравнения (2.2.10)):

$$P_m^p(z) \equiv P_{mm}^{pp}(z) = \frac{1}{4} N_m^p \, |a_m^p(z)|^2 = \frac{1}{4} N_m^p \, |A_m^p(z)|^2, \tag{4.3.10}$$

где a_m^p — волновая амплитуда активной m-й моды для p-волновода, которая связана с амплитудой возбуждения A_m^p равенством

$$a_m^p(z) = A_m^p(z) \, \mathrm{e}^{-i\beta_m^p z}. \tag{4.3.11}$$

Реактивные моды подчиняются соотношению ортогональности (4.3.6), которое полностью идентично аналогичным выражениям (2.4.1) и (2.12.10) для одиночных волноводов. Это позволяет по аналогии с (2.4.23) записать *соотношение ортонормировки*

$$N^{pp}_{mn} = N^{pp}_{m\widetilde{m}}\delta_{\widetilde{m}n} \equiv N^{p}_{m}\delta_{\widetilde{m}n}, \tag{4.3.12}$$

где нормировочный коэффициент N^{pp}_{mn} дается формулой (4.3.8), а норма N^p_m реактивной m-й моды p-волновода равняется (ср. уравнения (2.4.17) и (2.4.18)–(2.4.21))

$$N^p_m \equiv N^{pp}_{m\widetilde{m}} = \int\limits_S (\widehat{\mathbf{E}}^{p*}_m \times \widehat{\mathbf{H}}^p_{\widetilde{m}} + \widehat{\mathbf{E}}^p_{\widetilde{m}} \times \widehat{\mathbf{H}}^{p*}_m) \cdot \mathbf{e}_z\, dS \equiv N^{p*}_{\widetilde{m}}. \tag{4.3.13}$$

Индекс $\widetilde{m}$ соответствует реактивной моде, которая образует с m-й реактивной модой *двойниковую пару*, такую, что их постоянные распространения связаны соотношением $\gamma^p_{\widetilde{m}} + \gamma^{p*}_m = 0$.

Как известно (см. п. 2.4.2), каждая *реактивная* m-я мода не имеет собственной мощности ($P^{pp}_{mm} = 0$), но в паре со своим двойником с номером $\widetilde{m}$ создает взаимную мощность

$$P^{pp}_{m\widetilde{m}}(z) = \frac{1}{4}\, N^{pp}_{m\widetilde{m}}\, a^{p*}_m(z) a^p_{\widetilde{m}}(z). \tag{4.3.14}$$

Тогда двойниковая пара реактивных мод переносит активную *парную кросс-мощность* (см. уравнение (2.4.22))

$$P^{pair}_{m\widetilde{m}}(z) = P^{pp}_{m\widetilde{m}}(z) + P^{pp}_{\widetilde{m}m}(z) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\{N^p_m\, a^{p*}_m(z) a^p_{\widetilde{m}}(z)\right\}, \tag{4.3.15}$$

где a^p_m — волновая амплитуда реактивной m-й моды для p-волновода, которая связана с амплитудой возбуждения A^p_m равенством

$$a^p_m(z) = A^p_m(z)\, \mathrm{e}^{-\gamma^p_m z}. \tag{4.3.16}$$

Все рассуждения, касающиеся энергетических свойств и условий ортонормировки активных и реактивных мод, приведенные в п. 2.4, остаются в силе и для многоволноводных систем без потерь.

4.3.2. Две моды разных волноводов. Любые две моды с номерами m и n, принадлежащие *разным волноводам* ($p \neq q$), *всегда неортогональны*, поскольку $N^{pq}_{mn} \neq 0$ независимо от того, являются ли волноводы p и q идентичными или неидентичными.

Неидентичные волноводы имеют различные среды и разные геометрические параметры, так что $\varepsilon^p(\mathbf{r}_t) \neq \varepsilon^q(\mathbf{r}_t)$ и $W^{pq}_{mn} \neq 0$. Поскольку такие волноводы не имеют вырожденных мод ($m \neq n$), то недиссипативные соотношения квази-ортогональности (4.3.1) и (4.3.3) всегда обеспечивают для них ненулевые кросс-нормы следующего вида:

- для *активных мод*

$$N^{pq}_{mn} = \frac{\omega}{\beta^p_m - \beta^q_n}\, W^{pq}_{mn} \neq 0, \tag{4.3.17}$$

- для *реактивных мод*

$$N^{pq}_{mn} = -\frac{i\omega}{\gamma^{p*}_m + \gamma^q_n}\, W^{pq}_{mn} \neq 0. \tag{4.3.18}$$

Идентичные волноводы имеют полностью одинаковые среды и геометрические параметры, но пространственно разнесены друг по отношению к другу, так что $\varepsilon^p(\mathbf{r}_t) \neq \varepsilon^q(\mathbf{r}_t)$, что аналогично неидентичным волноводам. Однако эти две ситуации радикально отличаются, так как идентичные волноводы имеют полностью *вырожденный* спектр мод. Это означает, что моды одного и того же типа ($m = n$) имеют $\beta_m^p = \beta_m^q$, если они активные, и $\gamma_m^p = -\gamma_{\widetilde{m}}^{q*}$, если они реактивные и образуют двойниковую пару $(m, \widetilde{m})$.

В этом случае из недиссипативных соотношений квази-ортогональности (4.3.1) и (4.3.3) следует, что структура поперечного распределения модальных полей такова, что:

- для *вырожденных мод* одного типа ($m = n$) с $\beta_m^p = \beta_m^q$ (для активных мод), или с $\gamma_m^p = -\gamma_{\widetilde{m}}^{q*}$ (для реактивных мод) имеем
$$W_{mm}^{pq} = 0 \quad \text{и} \quad N_{mm}^{pq} \neq 0; \tag{4.3.19}$$
- для *невырожденных мод* разного типа ($m \neq n$) имеем
$$W_{mn}^{pq} \neq 0 \quad \text{и} \quad N_{mn}^{pq} \neq 0, \tag{4.3.20}$$

где кросс-норма N_{mn}^{pq} связана с W_{mn}^{pq} соотношением, аналогичным (4.3.17) и (4.3.18) для неидентичных волноводов.

Как следует из (2.2.12), в обоих случаях идентичных и неидентичных волноводов кросс-норма N_{mn}^{pq} однозначно определяет взаимную мощность, переносимую совместно m-й и n-й модами различных волноводов (включая $m = n$, но $p \neq q$), а именно
$$P_{mn}^{pq}(z) = \frac{1}{4} N_{mn}^{pq}\, a_m^{p*}(z) a_n^q(z), \tag{4.3.21}$$
где $a_m^p(z)$ и $a_n^q(z)$ — волновые амплитуды, выражающиеся через амплитудами возбуждения в виде (4.3.11) и (4.3.16).

Таким образом, любые две моды (включая вырожденные), принадлежащие *разным* недиссипативным волноводам, *всегда неортогональны* друг по отношению к другу в том смысле, что для них всегда $N_{mn}^{pq} \neq 0$ и, следовательно, *не существует* соотношения ортонормировки. Такие соотношения в форме (4.3.7) и (4.3.12) имеют место только для активных и реактивных мод одного и того же волновода в составе недиссипативной многоволноводной системы.

4.4. Модальные разложения полей, избыточной поляризации среды и возбуждающих токов

В отличие от одноволноводных структур, при рассмотрении избыточной поляризации среды для изолированного волновода, скажем с номером p, выделенного из многоволноводной системы, надо учитывать, что эта поляризация $\mathbf{P}^p \equiv \Delta\mathbf{D}^p$ создается не только искомым электрическим полем $\mathbf{E}^p$ рассматриваемого p-волновода, как было для одиночного волновода. В данном случае необходимо принимать во внимание также вклад сторонних электрических полей $\mathbf{E}_{ext}^p$. Тогда на основании общего выражения (2.5.1) (при $\Delta\overline{\xi} = 0$ в отсутствие бианизотропных свойств) записываем
$$\mathbf{P}^p = \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \cdot (\mathbf{E}^p + \mathbf{E}_{ext}^p). \tag{4.4.1}$$

Электрические поля, создаваемые всеми другими волноводами, входящими в состав многоволноводной структуры, играют роль сторонних полей $\mathbf{E}^p_{ext}$ по отношению к данному p-волноводу, выделенному из состава структуры и рассматриваемому как *базовый волновод*. Присутствие других волноводов воспринимается базовым p-волноводом в виде диэлектрического возмущения среды, описываемого тензором возмущения $\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$.

Из электродинамического анализа, разработанного в гл. 2, следует, что полное представление электрического поля $\mathbf{E}^p$ для базового p-волновода включает не только *модальное разложение* поля $\mathbf{E}^p_a$ (отмеченное нижним индексом a, отражающим зависимость этой части поля от волновых амплитуд $a^p_m = A^p_m \exp(-\gamma^p_m z)$), но и *ортогональное дополнительное поле* $\mathbf{E}^p_b$. В соответствии с (2.10.34), полное поле p-волновода имеет вид

$$\mathbf{E}^p = \mathbf{E}^p_a + \mathbf{E}^p_b = \sum_m A^p_m \mathbf{E}^p_m - \mathbf{e}_z \frac{P^p_z}{\varepsilon^p}, \tag{4.4.2}$$

где $\mathbf{E}^p_m = \widehat{\mathbf{E}}^p_m \exp(-\gamma^p_m z)$ — собственное поле m-й моды p-волновода, P^p_z — продольная компонента вектора избыточной поляризации (4.4.1). Суммирование в (4.4.2) следует понимать в обобщенном смысле с одновременным интегрированием по непрерывному спектру излучательных мод, что в явном виде записано в формуле (2.10.38).

По аналогии с (4.4.2), стороннее для данного p-волновода поле, создаваемое другими волноводами с номерами $q \neq p$, представляется в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^p_{ext} &= {\sum_{q\neq p}}' \mathbf{E}^q = {\sum_{q\neq p}}' \left(\mathbf{E}^q_a + \mathbf{E}^q_b\right) = \\ &= {\sum_{q\neq p}}' \sum_n A^q_n \mathbf{E}^q_n - \mathbf{e}_z {\sum_{q\neq p}}' \frac{P^q_z}{\varepsilon^q}, \end{aligned} \tag{4.4.3}$$

где штрих у знаков суммы дополнительно подчеркивает исключение p-волновода из числа суммируемых.

Подстановка формул (4.4.2) и (4.4.3) в равенство (4.4.1) приводит к следующему выражению:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^p &\equiv \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \cdot \mathbf{E}^\Sigma = \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \cdot \sum_q \mathbf{E}^q = \\ &= \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \cdot \sum_q \left(\mathbf{E}^q_a + \mathbf{E}^q_b\right) \equiv \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \cdot \left(\mathbf{E}^\Sigma_a + \mathbf{E}^\Sigma_b\right) = \\ &= \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \cdot \sum_q \sum_n A^q_n \mathbf{E}^q_n - \left(\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \cdot \mathbf{e}_z\right) \sum_q \frac{P^q_z}{\varepsilon^q}. \end{aligned} \tag{4.4.4}$$

Здесь, в отличие от (4.4.3), суммирование по q распространяется на все волноводы, входящие в состав многоволноводной системы, включая рассматриваемый p-волновод.

Выражение (4.4.4) является ключевым при выводе модального разложения вектора избыточной поляризации $\mathbf{P}^p$ для p-волновода, выделенного из состава многоволноводной системы с произвольным числом волноводов. Такой вывод сделан в приложении Е для частного случая изотропных диэлектрических возмущений, когда $\Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \Delta\varepsilon^p\,\bar{\mathbf{I}}$. Окончательный результат дается формулами (Е.2.10)–(Е.2.12), с помощью которых в следующем виде выражаются:

а) избыточная поляризация для p-волновода,

$$\mathbf{P}^p = \Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^p \cdot \mathbf{E}_a^{\Sigma} \equiv \Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^p \cdot \sum_q \mathbf{E}_a^q = \sum_q \sum_n A_n^q \left(\Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^p \cdot \mathbf{E}_n^q\right), \tag{4.4.5}$$

б) суммарное (для всех волноводов) модальное поле (*без учета* суммарного ортогонального дополнительного поля $\mathbf{E}_b^{\Sigma} = \sum_q \mathbf{E}_b^q$),

$$\mathbf{E}_a^{\Sigma} = \sum_q \mathbf{E}_a^q \equiv \sum_q \sum_n A_n^q \mathbf{E}_n^q. \tag{4.4.6}$$

Избыточная поляризация $\mathbf{P}^p$ однозначно определяет возбуждающие токи для p-волновода, даваемые формулами типа (2.10.26) и (2.10.33), а именно

- ***объемный электрический ток***

$$\mathbf{J}_b^{e,p} \equiv i\omega\mathbf{P}^p = i\omega\Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^p \cdot \mathbf{E}_a^{\Sigma} = i\omega \sum_q \sum_n A_n^q \left(\Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^p \cdot \mathbf{E}_n^q\right), \tag{4.4.7}$$

- ***эффективный поверхностный магнитный ток*** (опущен индекс eff)

$$\mathbf{J}_s^{m,p} \equiv \boldsymbol{\tau}_b^p \frac{P_z^p(L_b^p)}{\varepsilon^p(L_b^p)} = \Delta\bar{\boldsymbol{\xi}}_c^p \cdot \mathbf{E}_a^{\Sigma} = \sum_q \sum_n A_n^q \left(\Delta\bar{\boldsymbol{\xi}}_c^p \cdot \mathbf{E}_n^q\right). \tag{4.4.8}$$

Возбуждающие токи (4.4.7) и (4.4.8) содержат следующие тензоры связи:

- ***тензор объемной связи*** (см. выражение (Е.2.11))

$$\begin{aligned} \Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^p &= \Delta\varepsilon^p \left(\bar{\mathbf{I}} - \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z \frac{\sum_q \Delta\varepsilon^q/\varepsilon^q}{1 + \sum_q \Delta\varepsilon^q/\varepsilon^q} \right) = \\ &= \Delta\varepsilon^p \left(\bar{\mathbf{I}}_t + \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z \frac{1}{1 + \sum_q \Delta\varepsilon^q/\varepsilon^q} \right), \end{aligned} \tag{4.4.9}$$

- ***тензор поверхностной связи***

$$\Delta\bar{\boldsymbol{\xi}}_c^p = \boldsymbol{\tau}_b^p \mathbf{e}_z \frac{\Delta\varepsilon^p(L_b^p)/\varepsilon^p(L_b^p)}{1 + \sum_q \Delta\varepsilon^q(L_b^p)/\varepsilon^q(L_b^p)}. \tag{4.4.10}$$

При выводе формул (4.4.8) и (4.4.10) было использовано выражение (Е.2.9).

4.5. Тензоры объемной и поверхностной связи для многоволноводных систем

Тензоры объемной и поверхностной связи, определяющие в дальнейшем коэффициенты связи между модами многоволноводной системы, имеют общую форму, даваемую формулами (4.4.9) и (4.4.10). В выражении (4.4.10) значения $\varepsilon^{p,q}(L_b^p)$ и $\Delta\varepsilon^{p,q}(L_b^p)$ берутся в точках составного контура L_b^p (с единичным *тангенциальным* вектором $\boldsymbol{\tau}_b^p = \mathbf{e}_z \times \mathbf{n}_b^p$), который охватывает многосвязное поперечное сечение S_b^p (с единичной *внешней* нормалью $\mathbf{n}_b^p$), занимаемое объемными токами $\mathbf{J}_b^{e,p}$ в виде (4.4.7), возбуждающими p-волновод. Для уточнения вышесказанного полезно рассмотреть рис. 4.1.

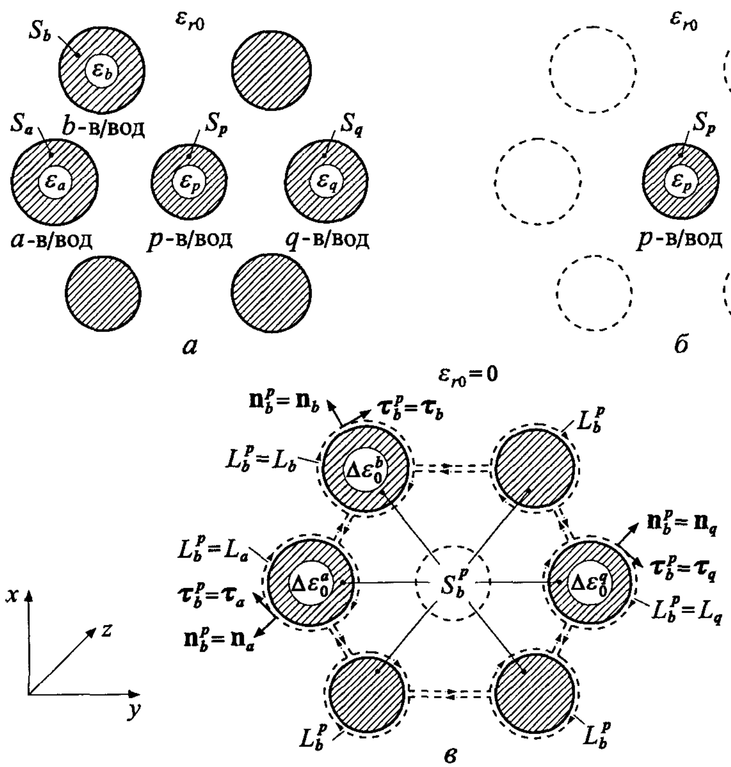


Рис. 4.1. Поперечное сечение многоволноводной структуры, имеющей профиль диэлектрической проницаемости $\varepsilon_r^{\Sigma}(x,y)$, составленный из произвольного числа волноводов (обозначенных как $a, b, \ldots, p, q, \ldots$) с относительными проницаемостями $\varepsilon_{ra}, \varepsilon_{rb}, \ldots, \varepsilon_{rp}, \varepsilon_{rq}, \ldots$, однородными в пределах отдельных сечений $S_a, S_b, \ldots, S_p, S_q, \ldots$ (ограниченных своими контурами $L_a, L_b, \ldots, L_p, L_q, \ldots$), которые расположены во внешней однородной среде с проницаемостью ε_{r0} (*а*); выделенный p-волновод с профилем проницаемости $\varepsilon_r^p(x,y) = \varepsilon_{r0}+\Delta\varepsilon_{r0}^p(x,y)$, получаемым заменой других волноводов на внешнюю среду с проницаемостью ε_{r0} (*б*); удаленные волноводы, исполняющие роль диэлектрических возмущений $\Delta\varepsilon_{r0}^q(x,y) = \varepsilon_{rq}(x,y) - \varepsilon_{r0}$ ($q = a, b, \ldots \neq p$) по отношению к выделенному p-волноводу, для которого полный профиль возмущения равняется $\Delta\varepsilon_r^p(x,y) \equiv \varepsilon_r^{\Sigma}(x,y) - \varepsilon_r^p(x,y) = \Delta\varepsilon_{r0}^a(x,y) + \Delta\varepsilon_{r0}^b(x,y) + \ldots + \Delta\varepsilon_{r0}^q(x,y) + \ldots$ (*в*). В общем случае форма поперечного сечения отдельных волноводов может быть произвольной и отличающейся от круговой формы, изображенной на этом рисунке

Многоволноводная структура, изображенная на рис. 4.1 *а*, состоит из нескольких волноводов, обозначенных как $a, b, \ldots, p, q, \ldots$ Их относительные диэлектрические проницаемости $\varepsilon_{ra}, \varepsilon_{rb}, \ldots, \varepsilon_{rp}, \varepsilon_{rq}, \ldots$ (обозначенные на рисунке как $\varepsilon_i \equiv \varepsilon_{ri}\varepsilon_0$, $i = a, b, \ldots, p, q, \ldots$ и заданные в пределах своих сечений $S_a, S_b, \ldots, S_p, S_q, \ldots$) вместе с относительной проницаемостью ε_{r0} внешней среды, в которую погружены эти волноводы, образуют составной профиль $\varepsilon_r^{\Sigma}(\mathbf{r}_t)$ относительной диэлектрической проницаемости многоволноводной структуры.

Любой индивидуальный волновод, скажем с номером p, может быть выделен из общей структуры (как показано на рис. 4.1 *б*) с невозмущенным профилем относительной проницаемости в форме

$$\varepsilon_r^p(\mathbf{r}_t) = \varepsilon_{r0} + \Delta\varepsilon_{r0}^p(\mathbf{r}_t), \tag{4.5.1}$$

где $\Delta\varepsilon_{r0}^p = \varepsilon_{rp} - \varepsilon_{r0}$ — *избыточная проницаемость* p-ой среды над проницаемостью ε_{r0} внешней среды в пределах сечения S_p для данного волновода и равная нулю за пределами этого сечения.

Если невозмущенный профиль проницаемости $\varepsilon_r^p(\mathbf{r}_t)$ известен, тогда исходный составной профиль $\varepsilon_r^{\Sigma}(\mathbf{r}_t)$ всей структуры определяет диэлектрическое возмущение для рассматриваемого p-волновода:

$$\Delta\varepsilon_r^p(\mathbf{r}_t) = \varepsilon_r^{\Sigma}(\mathbf{r}_t) - \varepsilon_r^p(\mathbf{r}_t). \tag{4.5.2}$$

Выделение p-волновода создается удалением других волноводов ($q \neq p$) с заменой их проницаемостей ε_{rq} на единую проницаемость ε_{r0} внешней окружающей среды, в которую погружены все волноводы. Тогда диэлектрическое возмущение (4.5.2) для p-волновода может быть представлено как сумма избыточных проницаемостей $\Delta\varepsilon_{r0}^q$ всех удаленных сред:

$$\Delta\varepsilon_r^p = \Delta\varepsilon_{r0}^a + \Delta\varepsilon_{r0}^b + \ldots + \Delta\varepsilon_{r0}^q + \ldots \equiv \sum_{q\neq p}{}' \Delta\varepsilon_{r0}^q, \tag{4.5.3}$$

где, согласно (4.5.1), избыточная проницаемость q-ой среды

$$\Delta\varepsilon_{r0}^q = \varepsilon_{rq} - \varepsilon_{r0} \neq 0 \quad \text{в пределах сечения } S_q. \tag{4.5.4}$$

Именно такая картина изображена на рис. 4.1 *в*, где полное диэлектрическое возмущение $\Delta\varepsilon^p(\mathbf{r}_t) \equiv \Delta\varepsilon_r^p(\mathbf{r}_t)\varepsilon_0$ для выделенного p-волновода составлено, в соответствии с (4.5.3), из отдельных вкладов избыточных проницаемостей $\Delta\varepsilon_0^q \equiv \Delta\varepsilon_{r0}^q\varepsilon_0$ всех других волноводов, распределенных в пространстве. При этом поперечное сечение S_b^p (с нижним индексом b от англ. *bulk*), которое занимают *объемные* электрические токи $\mathbf{J}_b^{e,p}$ в форме (4.4.7), возбуждающие p-волновод (верхний индекс p), составлено из индивидуальных сечений S_q других волноводов с номерами $q \neq p$:

$$S_b^p = S_a + S_b + \ldots + S_q + \ldots \equiv \sum_{q\neq p}{}' S_q. \tag{4.5.5}$$

Аналогично, составной контур L_b^p, охватывающий многосвязную область возбуждающих объемных токов для p-волновода, заданную в виде (4.5.5), является также многосвязным и состоит из суммы отдельных контуров L_q, которые ограничивают индивидуальные сечения S_q с номерами $q \neq p$ (см. рис. 4.1 *в*):

$$L_b^p = L_a + L_b + \ldots + L_q + \ldots \equiv \sum_{q\neq p}{}' L_q. \tag{4.5.6}$$

Картина, изображенная на рис. 4.1, носит частный характер, вызванный тем, что внешняя среда является *единой* для всех волноводов, погруженных в эту среду. Поэтому значения $\varepsilon^q \equiv \varepsilon_r^q\varepsilon_0$ и $\varepsilon^p \equiv \varepsilon_r^p\varepsilon_0$, входящие в выражения (4.4.9) и (4.4.10) для тензоров связи, берутся в областях, где существует диэлектрическое возмущение $\Delta\varepsilon_r^p$ для p-волновода, задаваемое в виде (4.5.3). Оно всегда (для любого выделенного волновода) располагается на фоне общей внешней среды с проницаемостью ε_{r0}. Следовательно, в выражениях (4.4.9) и (4.4.10) следует положить

$$\varepsilon_r^p = \varepsilon_r^q = \varepsilon_{r0}. \tag{4.5.7}$$

Таким образом, в случае *единой внешней среды*, окружающей все волноводы, выражения (4.4.9) и (4.4.10) принимают упрощенную форму:

- *тензор объемной связи*

$$\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^p = \Delta\varepsilon^p\left(\overline{\mathbf{I}}_t + \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z\,\frac{\varepsilon_{r0}}{\varepsilon_{r0} + \sum_q \Delta\varepsilon_r^q}\right), \tag{4.5.8}$$

- *тензор поверхностной связи*

$$\Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c^p = \tau_b^p\mathbf{e}_z\,\frac{\Delta\varepsilon_r^p(L_b^p)}{\varepsilon_{r0} + \sum_q \Delta\varepsilon_r^q(L_b^p)}\,. \tag{4.5.9}$$

Здесь суммирование по q распространяется на все волноводы, включая выделенный p-волновод. При этом диэлектрические возмущения $\Delta\varepsilon_r^q$ для каждого q-волновода ($q = a, b, \ldots, p, q, \ldots$) вычисляются как сумма избыточных проницаемостей $\Delta\varepsilon_{r0}^{q'}$ для всех других волноводов, отличных от данного q-волновода ($q' \neq q$). Используя формулу, аналогичную (4.5.3), записываем диэлектрические возмущения, входящие в формулы (4.5.8) и (4.5.9):

$$\Delta\varepsilon_r^q = \sum_{q'\neq q}{}'\Delta\varepsilon_{r0}^{q'}. \tag{4.5.10}$$

Чтобы конкретизировать выражения (4.4.9), (4.4.10), (4.5.8) и (4.5.9) для тензоров объемной и поверхностной связи, рассмотрим сначала два частных случая, соответствующих двухволноводной и трехволноводной структурам, а затем обобщим полученные формулы на многоволноводные структуры.

4.5.1. Двухволноводные системы. Двухволноводные структуры, состоящие из a- и b-волноводов с *произвольной внешней средой*, описываются общими формулами (4.4.9) и (4.4.10) для тензоров связи, которые могут быть теперь переписаны в следующем виде при $p = a, b$:

- *тензор объемной связи*

$$\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^p = \Delta\varepsilon^p\left(\overline{\mathbf{I}}_t + \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z\frac{1}{1 + \Delta\varepsilon_r^a/\varepsilon_r^a + \Delta\varepsilon_r^b/\varepsilon_r^b}\right), \tag{4.5.11}$$

- *тензор поверхностной связи*

$$\Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c^p = \tau_b^p\mathbf{e}_z\left(\frac{\Delta\varepsilon_r^p/\varepsilon_r^p}{1 + \Delta\varepsilon_r^a/\varepsilon_r^a + \Delta\varepsilon_r^b/\varepsilon_r^b}\right)\Bigg|_{L_b^p}. \tag{4.5.12}$$

Единая внешняя среда с однородной проницаемостью ε_{r0}, окружающая оба волновода, позволяет заметно упростить выражения (4.5.11) и (4.5.12). В этом случае волноводы a и b имеют следующие профили диэлектрического возмущения:

$$\Delta\varepsilon_r^a(\mathbf{r}_t) \equiv \varepsilon_r^\Sigma(\mathbf{r}_t) - \varepsilon_r^a(\mathbf{r}_t) = \Delta\varepsilon_{r0}^b(\mathbf{r}_t) \equiv \varepsilon_{rb}(\mathbf{r}_t) - \varepsilon_{r0}, \tag{4.5.13}$$

$$\Delta\varepsilon_r^b(\mathbf{r}_t) \equiv \varepsilon_r^\Sigma(\mathbf{r}_t) - \varepsilon_r^b(\mathbf{r}_t) = \Delta\varepsilon_{r0}^a(\mathbf{r}_t) \equiv \varepsilon_{ra}(\mathbf{r}_t) - \varepsilon_{r0}. \tag{4.5.14}$$

Отсюда следует, что $\Delta\varepsilon_r^a(\mathbf{r}_t) = 0$ в точках, где $\Delta\varepsilon_r^b(\mathbf{r}_t) \neq 0$, и наоборот, т. е. в случае единой внешней среды для двух волноводов имеем

$$\Delta\varepsilon_r^a(\mathbf{r}_t)\,\Delta\varepsilon_r^b(\mathbf{r}_t) = 0. \tag{4.5.15}$$

Использование условия (4.5.15) упрощает общие выражения (4.5.11) и (4.5.12), превращая их в следующую форму при $p = a, b$:

- *тензор объемной связи*

$$\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^p = \Delta\varepsilon^p\left(\overline{\mathbf{I}}_t + \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z\frac{\varepsilon_r^p}{\varepsilon_r^\Sigma}\right), \tag{4.5.16}$$

- *тензор поверхностной связи*

$$\Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c^p = \boldsymbol{\tau}_b^p\mathbf{e}_z\frac{\Delta\varepsilon_r^p(L_b^p)}{\varepsilon_r^\Sigma(L_b^p)}, \tag{4.5.17}$$

при этом полная диэлектрическая проницаемость двухволноводной структуры

$$\varepsilon_r^\Sigma = \varepsilon_r^a + \Delta\varepsilon_r^a = \varepsilon_r^b + \Delta\varepsilon_r^b. \tag{4.5.18}$$

Применение выражений (4.5.13)–(4.5.15) к формулам (4.5.8) и (4.5.9), которые справедливы в случае *единой внешней среды* и теперь переписываются для двух связанных волноводов, дает следующие результаты:

- *тензоры объемной связи*

$$\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^a = \Delta\varepsilon_0^b\left(\overline{\mathbf{I}}_t + \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z\frac{\varepsilon_{r0}}{\varepsilon_{rb}}\right), \tag{4.5.19}$$

$$\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^b = \Delta\varepsilon_0^a\left(\overline{\mathbf{I}}_t + \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z\frac{\varepsilon_{r0}}{\varepsilon_{ra}}\right); \tag{4.5.20}$$

- *тензоры поверхностной связи*

$$\Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c^a = \boldsymbol{\tau}_b^a\mathbf{e}_z\frac{\Delta\varepsilon_{r0}^b(L_b^a)}{\varepsilon_{rb}(L_b^a)} \equiv \boldsymbol{\tau}_b\mathbf{e}_z\frac{\Delta\varepsilon_{r0}^b(L_b)}{\varepsilon_{rb}(L_b)}, \tag{4.5.21}$$

$$\Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c^b = \boldsymbol{\tau}_b^b\mathbf{e}_z\frac{\Delta\varepsilon_{r0}^a(L_b^a)}{\varepsilon_{ra}(L_b^a)} \equiv \boldsymbol{\tau}_a\mathbf{e}_z\frac{\Delta\varepsilon_{r0}^a(L_a)}{\varepsilon_{ra}(L_a)}. \tag{4.5.22}$$

В формулах (4.5.21)–(4.5.22) учтено, что контур L_b^a, который охватывает сечение S_b^a с *объемными* (нижний индекс b от англ. *bulk*) электрическими токами $\mathbf{J}_b^{e,a}$, возбуждающими a-волновод (верхний индекс a), совпадает с контуром L_b, ограничивающим сечение S_b волновода b, т. е. $L_b^a = L_b$. И наоборот, имеем $L_b^b = L_a$ при возбуждении b-волновода (верхний индекс b) объемными (нижний индекс b) электрическими токами $\mathbf{J}_b^{e,b}$, расположенными внутри сечения S_a волновода a. Аналогичные изменения в обозначениях были сделаны для единичных касательных векторов: $\boldsymbol{\tau}_b^a = \boldsymbol{\tau}_b$ и $\boldsymbol{\tau}_b^b = \boldsymbol{\tau}_a$, где $\boldsymbol{\tau}_a$ и $\boldsymbol{\tau}_b$ обозначают единичные векторы, касательные к контурам L_a и L_b, ограничивающим индивидуальные волноводы a и b (см. рис. 4.1 *в*).

Сопоставление выражений (4.5.19)–(4.5.20) и (4.5.21)–(4.5.22) с аналогичными выражениями (4.5.16) и (4.5.17) показывает их полную идентичность, если в последних последовательно положить $p = a$ и $p = b$.

В гл. 3 были выведены коэффициенты связи (3.2.30) для изотропного диэлектрического возмущения в одноволноводной системе, содержащие тензоры объемной и поверхностной связи $\Delta\overline{\varepsilon}_c$ и $\Delta\overline{\xi}_c$. Сравнение их с аналогичными тензорами (4.5.16) и (4.5.17) показывает, что они совпадают по структуре. Единственное различие между ними состоит в появлении у последних дополнительных верхних индексов a и b, которые отмечают каждый из связанных волноводов. Такое совпадение тензоров связи наблюдается только в случае *двухволноводных* структур с *единой внешней средой*, когда применимы формулы (4.5.16)–(4.5.17) и (4.5.19)–(4.5.22).

В противном случае, когда нулевое равенство (4.5.15) для двухволноводных структур не работает, т. е. $\Delta\varepsilon_r^a \Delta\varepsilon_r^b \neq 0$, необходимо применять общие выражения (4.5.11)–(4.5.12) для объемных и поверхностных тензоров связи. Именно такая ситуация будет иметь место в случае, соответствующем рис. 4.2 (см. п. 4.10), где $\Delta\varepsilon_r^a(y)\Delta\varepsilon_r^b(y) \neq 0$ в пределах интервала $-h < y < h$.

4.5.2. Трехволноводные системы. Трехволноводные структуры, состоящие из a-, b- и c-волноводов с *произвольной внешней средой*, описываются общими формулами (4.4.9) и (4.4.10) для тензоров связи, которые могут быть теперь переписаны в следующем виде при $p = a, b, c$:

- *тензор объемной связи*

$$\Delta\overline{\varepsilon}_c^p = \Delta\varepsilon^p \left(\overline{\mathbf{I}}_t + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z \frac{1}{1 + \Delta\varepsilon_r^a/\varepsilon_r^a + \Delta\varepsilon_r^b/\varepsilon_r^b + \Delta\varepsilon_r^c/\varepsilon_r^c} \right), \tag{4.5.23}$$

- *тензор поверхностной связи*

$$\Delta\overline{\xi}_c^p = \tau_b^p \mathbf{e}_z \left(\frac{\Delta\varepsilon_r^p/\varepsilon_r^p}{1 + \Delta\varepsilon_r^a/\varepsilon_r^a + \Delta\varepsilon_r^b/\varepsilon_r^b + \Delta\varepsilon_r^c/\varepsilon_r^c} \right) \Bigg|_{L_b^p}. \tag{4.5.24}$$

Использование *единой внешней среды*, окружающей все три волновода, позволяет модифицировать формулы (4.5.23) и (4.5.24) путем применения нижеследующих выражений для диэлектрических возмущений волноводов, получающихся из (4.5.3) (ср. уравнения (4.5.13) и (4.5.14)):

$$\Delta\varepsilon_r^a = \Delta\varepsilon_{r0}^b + \Delta\varepsilon_{r0}^c, \qquad \Delta\varepsilon_r^b = \Delta\varepsilon_{r0}^a + \Delta\varepsilon_{r0}^c, \qquad \Delta\varepsilon_r^c = \Delta\varepsilon_{r0}^a + \Delta\varepsilon_{r0}^b. \tag{4.5.25}$$

Отсюда следует, что в случае трех и более волноводов, погруженных в общую среду, отсутствует нулевое соотношение типа (4.5.15), которое имело место для двух волноводов. Действительно, из выражения (4.5.25) получаем

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon_r^a \Delta\varepsilon_r^b &= (\Delta\varepsilon_{r0}^c)^2 \neq 0, \\ \Delta\varepsilon_r^a \Delta\varepsilon_r^c &= (\Delta\varepsilon_{r0}^b)^2 \neq 0, \\ \Delta\varepsilon_r^b \Delta\varepsilon_r^c &= (\Delta\varepsilon_{r0}^a)^2 \neq 0, \end{aligned} \tag{4.5.26}$$

где использовано очевидное соотношение

$$\Delta\varepsilon_{r0}^p \Delta\varepsilon_{r0}^q = \delta_{pq} (\Delta\varepsilon_{r0}^p)^2. \tag{4.5.27}$$

Ненулевые произведения диэлектрических возмущений для разных волноводов, даваемые формулами (4.5.26), вынуждают применять общие выражения (4.5.23)–(4.5.24) для тензоров связи или их упрощенные формы (4.5.8)–(4.5.9) в случае единой внешней среды, когда работают равенства (4.5.7). Эти выражения модифицируются при использовании (4.5.27).

Как следует из (4.5.27), диэлектрические возмущения (4.5.25) удовлетворяют следующему соотношению при $p = a, b, c$:

$$\Delta\varepsilon_r^p \Delta\varepsilon_{r0}^p = 0. \tag{4.5.28}$$

Применение (4.5.7) и (4.5.28) к общим выражениям (4.5.23) и (4.5.24) для тензоров связи придает им следующий вид при $p = a$, b, c:

- *тензор объемной связи* (ср. уравнение (4.5.16))

$$\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^p = \Delta\varepsilon^p\left(\overline{\mathbf{I}}_t + \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z\frac{\varepsilon_r^p}{\varepsilon_r^\Sigma + \Delta\varepsilon_r^p}\right), \tag{4.5.29}$$

- *тензор поверхностной связи* (ср. уравнение (4.5.17))

$$\Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c^p = \tau_b^p\mathbf{e}_z\frac{\Delta\varepsilon_r^p(L_b^p)}{\varepsilon_r^\Sigma(L_b^p) + \Delta\varepsilon_r^p(L_b^p)}, \tag{4.5.30}$$

при этом полная диэлектрическая проницаемость трехволноводной структуры

$$\varepsilon_r^\Sigma = \varepsilon_r^a + \Delta\varepsilon_r^a = \varepsilon_r^b + \Delta\varepsilon_r^b = \varepsilon_r^c + \Delta\varepsilon_r^c. \tag{4.5.31}$$

Применение выражений (4.5.25)–(4.5.27) к формулам (4.5.8) и (4.5.9), которые справедливы в случае *единой внешней среды* и теперь переписываются для трех связанных волноводов, дает следующие результаты:

- *тензоры объемной связи*

$$\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^a = \Delta\varepsilon_0^b\left(\overline{\mathbf{I}}_t + \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z\frac{\varepsilon_{r0}}{\varepsilon_{rb} + \Delta\varepsilon_{r0}^b}\right) + \Delta\varepsilon_0^c\left(\overline{\mathbf{I}}_t + \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z\frac{\varepsilon_{r0}}{\varepsilon_{rc} + \Delta\varepsilon_{r0}^c}\right), \tag{4.5.32}$$

$$\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^b = \Delta\varepsilon_0^a\left(\overline{\mathbf{I}}_t + \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z\frac{\varepsilon_{r0}}{\varepsilon_{ra} + \Delta\varepsilon_{r0}^a}\right) + \Delta\varepsilon_0^c\left(\overline{\mathbf{I}}_t + \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z\frac{\varepsilon_{r0}}{\varepsilon_{rc} + \Delta\varepsilon_{r0}^c}\right), \tag{4.5.33}$$

$$\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^c = \Delta\varepsilon_0^a\left(\overline{\mathbf{I}}_t + \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z\frac{\varepsilon_{r0}}{\varepsilon_{ra} + \Delta\varepsilon_{r0}^a}\right) + \Delta\varepsilon_0^b\left(\overline{\mathbf{I}}_t + \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z\frac{\varepsilon_{r0}}{\varepsilon_{rb} + \Delta\varepsilon_{r0}^b}\right); \tag{4.5.34}$$

- *тензоры поверхностной связи*

$$\Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c^a = \tau_b\mathbf{e}_z\frac{\Delta\varepsilon_{r0}^b(L_b)}{\varepsilon_{rb}(L_b) + \Delta\varepsilon_{r0}^b(L_b)} + \tau_c\mathbf{e}_z\frac{\Delta\varepsilon_{r0}^c(L_c)}{\varepsilon_{rc}(L_c) + \Delta\varepsilon_{r0}^c(L_c)}, \tag{4.5.35}$$

$$\Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c^b = \tau_a\mathbf{e}_z\frac{\Delta\varepsilon_{r0}^a(L_a)}{\varepsilon_{ra}(L_a) + \Delta\varepsilon_{r0}^a(L_a)} + \tau_c\mathbf{e}_z\frac{\Delta\varepsilon_{r0}^c(L_c)}{\varepsilon_{rc}(L_c) + \Delta\varepsilon_{r0}^c(L_c)}, \tag{4.5.36}$$

$$\Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c^c = \tau_a\mathbf{e}_z\frac{\Delta\varepsilon_{r0}^a(L_a)}{\varepsilon_{ra}(L_a) + \Delta\varepsilon_{r0}^a(L_a)} + \tau_b\mathbf{e}_z\frac{\Delta\varepsilon_{r0}^b(L_b)}{\varepsilon_{rb}(L_b) + \Delta\varepsilon_{r0}^b(L_b)}. \tag{4.5.37}$$

Здесь применены обозначения, использованные в (4.5.21)–(4.5.22), так что L_a, L_b и L_c означают контуры, ограничивающие волноводы a, b и c, а $\boldsymbol{\tau}_a, \boldsymbol{\tau}_b$ и $\boldsymbol{\tau}_c$ — их единичные касательные векторы (см. рис. 4.1 *в*).

Нетрудно видеть, что формулы (4.5.32)–(4.5.37) полностью совпадают с общими выражениями (4.5.29) и (4.5.30), если в последних использовать (4.5.25)–(4.5.28) и (4.5.31) и последовательно положить $p=a$, $p=b$ и $p=c$.

Вышеприведенные формулы для двухволноводных и трехволноводных структур могут быть без труда обобщены на многоволноводные структуры.

4.5.3. Многоволноводные системы. Общие формулы (4.4.9) и (4.4.10) для тензоров связи можно записать в слегка измененной форме:

- *тензор объемной связи*

$$\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^p = \Delta\varepsilon^p\left(\overline{\mathbf{I}}_t + \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z\frac{\varepsilon_r^p}{\varepsilon_r^\Sigma + \sum\limits_{q\neq p}{}'\Delta\varepsilon_r^q(\varepsilon_r^p/\varepsilon_r^q)}\right), \tag{4.5.38}$$

- *тензор поверхностной связи*

$$\Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c^p = \boldsymbol{\tau}_b^p\mathbf{e}_z\left(\frac{\Delta\varepsilon_r^p}{\varepsilon_r^\Sigma + \sum\limits_{q\neq p}{}'\Delta\varepsilon_r^q(\varepsilon_r^p/\varepsilon_r^q)}\right)\Bigg|_{L_b^p}, \tag{4.5.39}$$

где полная диэлектрическая проницаемость многоволноводной структуры

$$\varepsilon_r^\Sigma = \varepsilon_r^a + \Delta\varepsilon_r^a = \varepsilon_r^b + \Delta\varepsilon_r^b = \ldots = \varepsilon_r^p + \Delta\varepsilon_r^p = \ldots \tag{4.5.40}$$

Если многоволноводная структура имеет для всех волноводов *единую внешнюю среду* (рис. 4.1), тогда в формулах (4.5.38) и (4.5.39) имеем $\varepsilon_r^p = \varepsilon_r^q = \varepsilon_{r0}$, в соответствии с (4.5.7). Выражая с помощью (4.5.10) диэлектрические возмущения $\Delta\varepsilon_r^q$ через избыточные проницаемости $\Delta\varepsilon_{r0}^{q'} \equiv \varepsilon_{rq'} - \varepsilon_{r0}$ и подставляя их в (4.5.38) и (4.5.39), приходим к следующим выражениям:

- *тензор объемной связи*

$$\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^p = \Delta\varepsilon^p\left(\overline{\mathbf{I}}_t + \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z\frac{\varepsilon_r^p}{\varepsilon_r^\Sigma + \sum\limits_{q\neq p}{}'\sum\limits_{q'\neq q}{}'\Delta\varepsilon_{r0}^{q'}}\right), \tag{4.5.41}$$

- *тензор поверхностной связи*

$$\Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c^p = \boldsymbol{\tau}_b^p\mathbf{e}_z\left(\frac{\Delta\varepsilon_r^p}{\varepsilon_r^\Sigma + \sum\limits_{q\neq p}{}'\sum\limits_{q'\neq q}{}'\Delta\varepsilon_{r0}^{q'}}\right)\Bigg|_{L_b^p}. \tag{4.5.42}$$

Применением к многоволноводным структурам формул, аналогичных (4.5.25)–(4.5.28), можно получить непосредственное обобщение предыдущих выражений (4.5.19)–(4.5.22) и (4.5.32)–(4.5.37) для двух и трех волноводов, которые теперь записываются в следующей форме:

- *тензор объемной связи*

$$\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^p = \sum\limits_{q\neq p}{}'\Delta\varepsilon_0^q\left(\overline{\mathbf{I}}_t + \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z\frac{\varepsilon_{r0}}{\varepsilon_{rq} + \Delta\varepsilon_{r0}^q}\right), \tag{4.5.43}$$

• *тензор поверхностной связи*

$$\Delta\overline{\xi}_c^p = \sum_{q\neq p}{}' \tau_q \mathbf{e}_z \frac{\Delta\varepsilon_{r0}^q(L_q)}{\varepsilon_{rq}(L_q) + \Delta\varepsilon_{r0}^q(L_q)}. \tag{4.5.44}$$

С учетом (4.5.15) и (4.5.25)–(4.5.28) при $\varepsilon_r^p = \varepsilon_r^q = \varepsilon_{r0}$, формулы (4.5.38)–(4.5.39) дают соответствующие выражения (4.5.16)–(4.5.17) и (4.5.29)–(4.5.30) для двух- и трехволноводных систем с единой внешней средой.

4.6. Возбуждение направляемых и излучательных мод в системах с потерями

Для вывода уравнений возбуждения собственной моды многоволноводной системы, скажем направляемой m-й моды или излучательной $\varkappa$-й моды, принадлежащих p-волноводу, сопряженная лемма Лоренца в общей интегральной форме (4.1.14)–(4.1.18) должна быть применена к области, занятой сторонними источниками, возбуждающими эту моду. Роль возбуждающих источников для p-волновода выполняют *объемный электрический ток* $\mathbf{J}_b^{e,p}$ и эффективный *поверхностный магнитный ток* $\mathbf{J}_{s,eff}^{m,p}$ (с опущенным далее индексом eff), которые определены формулами (4.4.7) и (4.4.8).

Электромагнитные поля в лемме Лоренца с индексами 1 и 2, подчиняющиеся уравнениям Максвелла (4.1.1) и (4.1.2), имеют следующие значения.

1. Электромагнитные поля с индексом 1 считаются *искомыми* суммарными (для всех волноводов) модальными полями $\mathbf{E}_a^\Sigma$ и $\mathbf{H}_a^\Sigma$ (*без учета* ортогонального дополнительного поля $\mathbf{E}_b^\Sigma = \sum_q \mathbf{E}_b^q$), которые возбуждаются объемным электрическим $\left(\mathbf{J}_b^{e,p}\right)$ и поверхностным магнитным $\left(\mathbf{J}_s^{m,p}\right)$ токами:

$$\mathbf{E}_1 \equiv \mathbf{E}_a^\Sigma = \sum_q \mathbf{E}_a^q, \qquad \mathbf{J}_{b1}^e \equiv \mathbf{J}_b^{e,p} \neq 0, \tag{4.6.1}$$

$$\mathbf{H}_1 \equiv \mathbf{H}_a^\Sigma = \sum_q \mathbf{H}_a^q, \qquad \mathbf{J}_{s1}^m \equiv \mathbf{J}_s^{m,p} \neq 0. \tag{4.6.2}$$

Аналогичным образом *суммарные* (для всех волноводов) электрическая индукция $\mathbf{D}_a^\Sigma$, электрический ток $\mathbf{J}_{ca}^{e,\Sigma}$ и магнитный ток $\mathbf{J}_{ca}^{m,\Sigma}$ принимаются равными величинам $\mathbf{D}_1$, $\mathbf{J}_{c1}^e$ и $\mathbf{J}_{c1}^m$, входящим в лемму Лоренца (4.1.14)–(4.1.18). С учетом уравнения (4.1.19) и того факта, что каждый q-волновод, будучи выделенным из системы, имеет профили диэлектрической проницаемости, электрической проводимости и поверхностного сопротивления, описываемые функциями $\varepsilon^q(\mathbf{r}_t)$, $\sigma^q(\mathbf{r}_t)$ и $\mathcal{R}_s^q(\mathbf{r}_t)$, записываем

$$\mathbf{D}_1 \equiv \mathbf{D}_a^\Sigma = \sum_q \mathbf{D}_a^q = \sum_q \varepsilon^q \mathbf{E}_a^q, \tag{4.6.3}$$

$$\mathbf{J}_{c1}^e \equiv \mathbf{J}_{ca}^{e,\Sigma} = \sum_q \mathbf{J}_{ca}^{e,q} = \sum_q \sigma^q \mathbf{E}_a^q, \tag{4.6.4}$$

$$\mathbf{J}_{c1}^m \equiv \mathbf{J}_{ca}^{m,\Sigma} = \sum_q \mathbf{J}_{ca}^{m,q} = \sum_q \mathcal{R}_s^q \mathbf{H}_{\tau a}^q. \tag{4.6.5}$$

Модальные разложения полей $\mathbf{E}_a^q$ и $\mathbf{H}_a^q$ для q-волновода, входящие в (4.6.1)–(4.6.5), имеют следующий вид (с явно выделенным непрерывным спектром):

$$\mathbf{E}_a^q = \sum_n A_n^q \mathbf{E}_n^q + \int_0^\infty A_\varkappa^q \mathbf{E}_\varkappa^q \, d\varkappa, \tag{4.6.6}$$

$$\mathbf{H}_a^q = \sum_n A_n^q \mathbf{H}_n^q + \int_0^\infty A_\varkappa^q \mathbf{H}_\varkappa^q \, d\varkappa. \tag{4.6.7}$$

2. Электромагнитные поля с индексом 2 считаются *известными* собственными полями направляемой m-й моды или излучательной $\varkappa$-й моды p-волновода, которые подчиняются однородным уравнениям Максвелла (без возбуждающих токов), тогда (ср. уравнения (4.2.1)–(4.2.5))

$$\mathbf{E}_2 \equiv \mathbf{E}_m^p \quad \text{или} \equiv \mathbf{E}_\varkappa^p, \qquad \mathbf{J}_{b2}^e = 0, \tag{4.6.8}$$

$$\mathbf{H}_2 \equiv \mathbf{H}_m^p \quad \text{или} \equiv \mathbf{H}_\varkappa^p, \qquad \mathbf{J}_{s2}^m = 0, \tag{4.6.9}$$

$$\mathbf{D}_2 \equiv \mathbf{D}_m^p = \varepsilon^p \mathbf{E}_m^p \quad \text{или} \equiv \mathbf{D}_\varkappa^p = \varepsilon^p \mathbf{E}_\varkappa^p, \tag{4.6.10}$$

$$\mathbf{J}_{c2}^e \equiv \mathbf{J}_{cm}^{e,p} = \sigma^p \mathbf{E}_m^p \quad \text{или} \equiv \mathbf{J}_{c\varkappa}^{e,p} = \sigma^p \mathbf{E}_\varkappa^p, \tag{4.6.11}$$

$$\mathbf{J}_{c2}^m \equiv \mathbf{J}_{cm}^{m,p} = \mathcal{R}_s^p \mathbf{H}_{\tau m}^p \quad \text{или} \equiv \mathbf{J}_{c\varkappa}^{m,p} = \mathcal{R}_s^p \mathbf{H}_{\tau\varkappa}^p. \tag{4.6.12}$$

Здесь модальные поля и мембранные функции, а также волновые амплитуды и амплитуды возбуждения мод дискретного и непрерывного спектров связаны соотношениями типа (2.10.40)–(2.10.42) и (2.10.43)–(2.10.45), а именно

- для *направляемых мод* (номер моды m — дискретное целое число):

$$\mathbf{E}_m^p(\mathbf{r}_t, z) = \widehat{\mathbf{E}}_m^p(\mathbf{r}_t)\, e^{-\gamma_m^p z}, \tag{4.6.13}$$

$$\mathbf{H}_m^p(\mathbf{r}_t, z) = \widehat{\mathbf{H}}_m^p(\mathbf{r}_t)\, e^{-\gamma_m^p z}, \tag{4.6.14}$$

$$a_m^p(z) = A_m^p(z)\, e^{-\gamma_m^p z}; \tag{4.6.15}$$

- для *излучательных мод* (номер моды $\varkappa$ — непрерывная переменная):

$$\mathbf{E}_\varkappa^p(\mathbf{r}_t, z) = \widehat{\mathbf{E}}_\varkappa^p(\mathbf{r}_t)\, e^{-\gamma_\varkappa^p z} \equiv \widehat{\mathbf{E}}^p(\mathbf{r}_t; \varkappa)\, e^{-\gamma^p(\varkappa) z}, \tag{4.6.16}$$

$$\mathbf{H}_\varkappa^p(\mathbf{r}_t, z) = \widehat{\mathbf{H}}_\varkappa^p(\mathbf{r}_t)\, e^{-\gamma_\varkappa^p z} \equiv \widehat{\mathbf{H}}^p(\mathbf{r}_t; \varkappa)\, e^{-\gamma^p(\varkappa) z}, \tag{4.6.17}$$

$$a_\varkappa^p(z) = A_\varkappa^p(z)\, e^{-\gamma_\varkappa^p z} \equiv A^p(z; \varkappa)\, e^{-\gamma^p(\varkappa) z}. \tag{4.6.18}$$

Уместно отметить, что сделанное выше пренебрежение ортогональными дополнительными полями $\mathbf{E}_b^q$ в формуле (4.6.1) оправдывается тем фактом, что каждое из этих полей заменяется действием других волноводов, рассматриваемых как сторонние, когда выделяется индивидуально q-волновод. В рассматриваемой постановке задачи о возбуждении выбранный p-волновод ощущает присутствие всех других волноводов (см. формулу (4.4.1)). Поэтому учет суммарного дополнительного поля $\mathbf{E}_b^\Sigma = \sum_q \mathbf{E}_b^q$ является излишним.

Следующий шаг следует делать в направлении получения дифференциальных уравнений, описывающих продольную зависимость амплитуд возбуждения $A_m^p(z)$ и $A_\varkappa^p(z)$ (или волновых амплитуд $a_m^p(z)$ и $a_\varkappa^p(z)$), которая появляется как результат действия объемного электрического тока $\mathbf{J}_b^{e,p}$ и эффективного поверхностного магнитного тока $\mathbf{J}_{s,eff}^{m,p} \equiv \mathbf{J}_s^{m,p}$ (индекс eff далее опускаем). Как и прежде, основу для вывода уравнений возбуждения составляет интегральная лемма Лоренца (4.1.14), которая будет по отдельности применяться для дискретных направляемых мод и для непрерывных излучательных мод в многоволноводных оптических системах.

4.6.1. Вывод уравнений возбуждения направляемых мод. Если интересоваться возбуждением направляемой моды, скажем с номером m в p-волноводе, то необходимо подставить вышеприведенные формулы (4.6.1)–(4.6.12) с учетом (4.6.13)–(4.6.18) в выражения (4.1.15)–(4.1.18) с заменой индекса 2 на модовый индекс m. После ряда преобразований эти выражения принимают следующий вид (ср. уравнения (2.13.7)–(2.13.9)):

$$\begin{aligned} P_{12}(z) &\equiv \int_S (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2^* + \mathbf{E}_2^* \times \mathbf{H}_1) \cdot \mathbf{e}_z \, dS = \\ &= \sum_q \int_S (\mathbf{E}_a^q \times \mathbf{H}_m^{p*} + \mathbf{E}_m^{p*} \times \mathbf{H}_a^q) \cdot \mathbf{e}_z \, dS = \\ &= \sum_q \left\{ \sum_n N_{mn}^{pq} A_n^q(z) \, e^{-\gamma_n^q z} + \int_0^\infty N_{m\varkappa}^{pq} A_\varkappa^q(z) \, e^{-\gamma_\varkappa^q z} d\varkappa \right\} e^{-\gamma_m^{p*} z}, \end{aligned} \tag{4.6.19}$$

$$\begin{aligned} W_{12}(z) &\equiv \int_S (\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{E}_2^* - \mathbf{D}_2^* \cdot \mathbf{E}_1) \, dS = \sum_q \int_S (\mathbf{D}_a^q \cdot \mathbf{E}_m^{p*} - \mathbf{D}_m^{p*} \cdot \mathbf{E}_a^q) \, dS = \\ &= -\sum_q \int_S (\varepsilon^p - \varepsilon^q)(\mathbf{E}_m^{p*} \cdot \mathbf{E}_a^q) \, dS = \\ &= -\sum_q \left\{ \sum_n W_{mn}^{pq} A_n^q(z) \, e^{-\gamma_n^q z} + \int_0^\infty W_{m\varkappa}^{pq} A_\varkappa^q(z) \, e^{-\gamma_\varkappa^q z} d\varkappa \right\} e^{-\gamma_m^{p*} z}, \end{aligned} \tag{4.6.20}$$

$$\begin{aligned} Q_{12}(z) &\equiv \int_S (\mathbf{J}_{c1}^e \cdot \mathbf{E}_2^* + \mathbf{J}_{c2}^{e*} \cdot \mathbf{E}_1) \, dS + \int_L (\mathbf{J}_{c1}^m \cdot \mathbf{H}_{\tau 2}^* + \mathbf{J}_{c2}^{m*} \cdot \mathbf{H}_{\tau 1}) \, dL = \\ &= \sum_q \left\{ \int_S (\mathbf{J}_{ca}^{e,q} \cdot \mathbf{E}_m^{p*} + \mathbf{J}_m^{e,p*} \cdot \mathbf{E}_a^q) \, dS + \int_L (\mathbf{J}_{ca}^{m,q} \cdot \mathbf{H}_{\tau m}^{p*} + \mathbf{J}_m^{m,p*} \cdot \mathbf{H}_{\tau a}^q) \, dL \right\} = \\ &= \sum_q \left\{ \sum_n M_{mn}^{pq} A_n^q(z) \, e^{-\gamma_n^q z} + \int_0^\infty M_{m\varkappa}^{pq} A_\varkappa^q(z) \, e^{-\gamma_\varkappa^q z} d\varkappa \right\} e^{-\gamma_m^{p*} z}, \end{aligned} \tag{4.6.21}$$

$$R_{12}(z) = -\int\limits_{S_b} \left(\mathbf{J}_b^{e,p} \cdot \mathbf{E}_m^{p*}\right) dS - \int\limits_{L_b} \left(\mathbf{J}_s^{m,p} \cdot \mathbf{H}_m^{p*}\right) dL \equiv R_m^p(z)\, e^{-\gamma_m^{p*} z}. \tag{4.6.22}$$

Здесь интегралы объемного и поверхностного возбуждения дискретной m-й моды p-волновода входят в виде суммы (ср. уравнение (2.13.10)):

$$R_m^p(z) = -\int\limits_{S_b} \left(\mathbf{J}_b^{e,p} \cdot \widehat{\mathbf{E}}_m^{p*}\right) dS - \int\limits_{L_b} \left(\mathbf{J}_s^{m,p} \cdot \widehat{\mathbf{H}}_m^{p*}\right) dL. \tag{4.6.23}$$

Эти интегралы содержат мембранные функции полей $\widehat{\mathbf{E}}_m^p(\mathbf{r}_t)$ и $\widehat{\mathbf{H}}_m^p(\mathbf{r}_t)$, принадлежащие m-й моде p-волновода, которые зависят только от поперечного радиуса-вектора $\mathbf{r}_t$, что отмечено колпачком. Поэтому зависимость интеграла возбуждения $R_m^p(z)$ от z обусловлена продольным распределением возбуждающих токов $\mathbf{J}_b^{e,p}(\mathbf{r}_t, z)$ и $\mathbf{J}_s^{m,p}(\mathbf{r}_t, z)$, которые считаются заданными на этапе вывода уравнений возбуждения.

Выражения (4.6.19)–(4.6.21) включают нормировочные коэффициенты $(N_{mn}^{pq}, N_{m\varkappa}^{pq})$, диссипативные коэффициенты $(M_{mn}^{pq}, M_{m\varkappa}^{pq})$ и многоволноводные коэффициенты $(W_{mn}^{pq}, W_{m\varkappa}^{pq})$, которые ранее были определены только для направляемых мод в виде (4.2.10)–(4.2.12), а теперь обобщаются также и на излучательные моды путем замены индекса $n \to \varkappa$.

Подстановка (4.6.19)–(4.6.22) в лемму Лоренца (4.1.14) приводит к следующему уравнению (ср. уравнение (2.13.11)):

$$\begin{gathered}\sum_q \sum_n \left\{N_{mn}^{pq} \frac{dA_n^q}{dz} - \left[\left(\gamma_m^{p*} + \gamma_n^q\right) N_{mn}^{pq} + i\omega W_{mn}^{pq} - M_{mn}^{pq}\right] A_n^q\right\} e^{-\gamma_n^q z} + \\ + \sum_q \int\limits_0^\infty \left\{N_{m\varkappa}^{pq} \frac{dA_\varkappa^q}{dz} - \left[\left(\gamma_m^{p*} + \gamma_\varkappa^q\right) N_{m\varkappa}^{pq} + i\omega W_{m\varkappa}^{pq} - M_{m\varkappa}^{pq}\right] A_\varkappa^q\right\} e^{-\gamma_\varkappa^q z} d\varkappa = R_m^p.\end{gathered} \tag{4.6.24}$$

Соотношение квази-ортогональности (4.2.13) для пары (m, n) направляемых мод p- и q-волноводов и его обобщение для пары $(m, \varkappa)$, состоящей из направляемой моды и излучательной моды, требуют выполнения равенств

$$\left(\gamma_m^{p*} + \gamma_n^q\right) N_{mn}^{pq} + i\omega W_{mn}^{pq} = M_{mn}^{pq}, \tag{4.6.25}$$

$$\left(\gamma_m^{p*} + \gamma_\varkappa^q\right) N_{m\varkappa}^{pq} + i\omega W_{m\varkappa}^{pq} = M_{m\varkappa}^{pq}. \tag{4.6.26}$$

Соотношения квази-ортогональности (4.6.25) и (4.6.26) обращают в нуль обе квадратные скобки в уравнении (4.6.24). Это дает систему уравнений возбуждения дискретных мод в диссипативной многоволноводной системе, записанную в следующих двух формах (ср. уравнения (2.13.14) и (2.13.15)):

- для *амплитуд возбуждения* A_n^q и $A_\varkappa^q$

$$\sum_{\substack{q \\ p=1,2,\ldots}} \sum_{\substack{n \\ m=1,2,\ldots}} N_{mn}^{pq} \frac{dA_n^q}{dz} e^{-\gamma_n^q z} + \sum_q \int\limits_0^\infty N_{m\varkappa}^{pq} \frac{dA_\varkappa^q}{dz} e^{-\gamma_\varkappa^q z} d\varkappa = R_m^p; \tag{4.6.27}$$

• для *волновых амплитуд* $a_n^q = A_n^q e^{-\gamma_n^q z}$ и $a_\varkappa^q = A_\varkappa^q\, e^{-\gamma_\varkappa^q z}$

$$\sum_{\substack{q\\ p=1,2,\dots}} \sum_{\substack{n\\ m=1,2,\dots}} N_{mn}^{pq}\left(\frac{da_n^q}{dz}+\gamma_n^q a_n^q\right)+\sum_q \int\limits_0^\infty N_{m\varkappa}^{pq}\left(\frac{da_\varkappa^q}{dz}+\gamma_\varkappa^q a_\varkappa^q\right)d\varkappa = R_m^p, \quad (4.6.28)$$

где, в соответствии с (4.2.10), нормировочные коэффициенты равняются

$$N_{mn}^{pq} = \int\limits_S \left(\widehat{\mathbf{E}}_m^{p*}\times \widehat{\mathbf{H}}_n^q + \widehat{\mathbf{E}}_n^q \times \widehat{\mathbf{H}}_m^{p*}\right)\cdot \mathbf{e}_z\, dS \equiv N_{nm}^{qp*}, \quad (4.6.29)$$

$$N_{m\varkappa}^{pq} = \int\limits_S \left(\widehat{\mathbf{E}}_m^{p*}\times \widehat{\mathbf{H}}_\varkappa^q + \widehat{\mathbf{E}}_\varkappa^q \times \widehat{\mathbf{H}}_m^{p*}\right)\cdot \mathbf{e}_z\, dS \equiv N_{\varkappa m}^{qp*}. \quad (4.6.30)$$

4.6.2. Вывод уравнений возбуждения излучательных мод. Если интересоваться возбуждением излучательной моды, скажем с номером $\varkappa$ в p-волноводе, то необходимо подставить вышеприведенные формулы (4.6.1)–(4.6.12) с учетом (4.6.13)–(4.6.18) в выражения (4.1.15)–(4.1.18) с заменой индекса 2 на модовый индекс $\varkappa$. После ряда преобразований эти выражения принимают следующий вид (ср. уравнения (2.13.22)–(2.13.24)):

$$\begin{aligned} P_{12}(z) &\equiv \int\limits_S (\mathbf{E}_1\times\mathbf{H}_2^* + \mathbf{E}_2^*\times\mathbf{H}_1)\cdot\mathbf{e}_z\, dS = \\ &= \sum_q \int\limits_S (\mathbf{E}_a^q\times\mathbf{H}_\varkappa^{p*} + \mathbf{E}_\varkappa^{p*}\times\mathbf{H}_a^q)\cdot\mathbf{e}_z\, dS = \\ &= \sum_q\left\{\sum_n N_{\varkappa n}^{pq} A_n^q(z)\, e^{-\gamma_n^q z} + \int\limits_0^\infty N_{\varkappa\varkappa'}^{pq} A_{\varkappa'}^q(z)\, e^{-\gamma_{\varkappa'}^q z} d\varkappa'\right\} e^{-\gamma_\varkappa^{p*} z}, \end{aligned} \quad (4.6.31)$$

$$\begin{aligned} W_{12}(z) &\equiv \int\limits_S (\mathbf{D}_1\cdot\mathbf{E}_2^* - \mathbf{D}_2^*\cdot\mathbf{E}_1)\, dS = \sum_q \int\limits_S (\mathbf{D}_a^q\cdot\mathbf{E}_\varkappa^{p*} - \mathbf{D}_\varkappa^{p*}\cdot\mathbf{E}_a^q)\, dS = \\ &= -\sum_q \int\limits_S (\varepsilon^p - \varepsilon^q)(\mathbf{E}_\varkappa^{p*}\cdot\mathbf{E}_a^q)\, dS = \\ &= -\sum_q\left\{\sum_n W_{\varkappa n}^{pq} A_n^q(z)\, e^{-\gamma_n^q z} + \int\limits_0^\infty W_{\varkappa\varkappa'}^{pq} A_{\varkappa'}^q(z)\, e^{-\gamma_{\varkappa'}^q z} d\varkappa'\right\} e^{-\gamma_\varkappa^{p*} z}, \end{aligned} \quad (4.6.32)$$

$$\begin{aligned} Q_{12}(z) &\equiv \int\limits_S (\mathbf{J}_{c1}^e\cdot\mathbf{E}_2^* + \mathbf{J}_{c2}^{e*}\cdot\mathbf{E}_1)\, dS + \int\limits_L (\mathbf{J}_{c1}^m\cdot\mathbf{H}_{\tau 2}^* + \mathbf{J}_{c2}^{m*}\cdot\mathbf{H}_{\tau 1})\, dL = \\ &= \sum_q\left\{\int\limits_S (\mathbf{J}_{ca}^{e,q}\cdot\mathbf{E}_\varkappa^{p*} + \mathbf{J}_\varkappa^{e,p*}\cdot\mathbf{E}_a^q)\, dS + \int\limits_L (\mathbf{J}_{ca}^{m,q}\cdot\mathbf{H}_{\tau\varkappa}^{p*} + \mathbf{J}_\varkappa^{m,p*}\cdot\mathbf{H}_{\tau a}^q)\, dL\right\} = \end{aligned}$$

$$= \sum_q \left\{ \sum_n M^{pq}_{\varkappa n} A^q_n(z)\, e^{-\gamma^q_n z} + \int\limits_0^\infty M^{pq}_{\varkappa\varkappa'} A^q_{\varkappa'}(z)\, e^{-\gamma^q_{\varkappa'} z} d\varkappa' \right\} e^{-\gamma^{p*}_\varkappa z}, \quad (4.6.33)$$

$$R_{12}(z) = -\int\limits_{S_b} \left(\mathbf{J}^{e,p}_b \cdot \mathbf{E}^{p*}_\varkappa\right) dS - \int\limits_{L_b} \left(\mathbf{J}^{m,p}_s \cdot \mathbf{H}^{p*}_\varkappa\right) dL \equiv R^p_\varkappa(z)\, e^{-\gamma^{p*}_\varkappa z}. \quad (4.6.34)$$

Здесь интегралы объемного и поверхностного возбуждения излучательной $\varkappa$-й моды p-волновода входят в виде суммы (ср. уравнение (2.13.10)):

$$R^p_\varkappa(z) = -\int\limits_{S_b} \left(\mathbf{J}^{e,p}_b \cdot \widehat{\mathbf{E}}^{p*}_\varkappa\right) dS - \int\limits_{L_b} \left(\mathbf{J}^{m,p}_s \cdot \widehat{\mathbf{H}}^{p*}_\varkappa\right) dL. \quad (4.6.35)$$

Выражения (4.6.31)–(4.6.33) включают нормировочные коэффициенты $(N^{pq}_{\varkappa n}, N^{pq}_{\varkappa\varkappa'})$, диссипативные коэффициенты $(M^{pq}_{\varkappa n}, M^{pq}_{\varkappa\varkappa'})$ и многоволноводные коэффициенты $(W^{pq}_{\varkappa n}, W^{pq}_{\varkappa\varkappa'})$, которые ранее были определены только для направляемых мод в виде (4.2.10)–(4.2.12), а теперь обобщаются на излучательные моды путем замены индексов $m \to \varkappa$ и $n \to \varkappa'$.

Подстановка (4.6.31)–(4.6.34) в лемму Лоренца (4.1.14) приводит к следующему уравнению (ср. уравнение (2.13.26)):

$$\begin{gathered}\sum_q \sum_n \left\{ N^{pq}_{\varkappa n} \frac{dA^q_n}{dz} - \left[\left(\gamma^{p*}_\varkappa + \gamma^q_n\right) N^{pq}_{\varkappa n} + i\omega W^{pq}_{\varkappa n} - M^{pq}_{\varkappa n}\right] A^q_n \right\} e^{-\gamma^q_n z} + \\ + \sum_q \int\limits_0^\infty \left\{ N^{pq}_{\varkappa\varkappa'} \frac{dA^q_{\varkappa'}}{dz} - \left[\left(\gamma^{p*}_\varkappa + \gamma^q_{\varkappa'}\right) N^{pq}_{\varkappa\varkappa'} + i\omega W^{pq}_{\varkappa\varkappa'} - M^{pq}_{\varkappa\varkappa'}\right] A^q_{\varkappa'} \right\} e^{-\gamma^q_{\varkappa'} z} d\varkappa' = R^p_\varkappa.\end{gathered} \quad (4.6.36)$$

Обобщение *соотношения квази-ортогональности* (4.2.13) для пары (m, n) направляемых мод p- и q-волноводов на случай двух пар — одной $(\varkappa, n)$, состоящей из излучательной и направляемой мод, и другой $(\varkappa, \varkappa')$, состоящей из двух излучательных мод, приводит к следующим соотношениям:

$$\left(\gamma^{p*}_\varkappa + \gamma^q_n\right) N^{pq}_{\varkappa n} + i\omega W^{pq}_{\varkappa n} = M^{pq}_{\varkappa n}, \quad (4.6.37)$$

$$\left(\gamma^{p*}_\varkappa + \gamma^q_{\varkappa'}\right) N^{pq}_{\varkappa\varkappa'} + i\omega W^{pq}_{\varkappa\varkappa'} = M^{pq}_{\varkappa\varkappa'}. \quad (4.6.38)$$

Соотношения квази-ортогональности (4.6.37) и (4.6.38) обращают в нуль обе квадратные скобки в уравнении (4.6.36). Это дает систему уравнений возбуждения излучательных мод в диссипативной многоволноводной системе, записанную в следующих двух формах (ср. уравнения (2.13.29) и (2.13.30)):

- *для амплитуд возбуждения* A^q_n и $A^q_{\varkappa'}$

$$\sum_{\substack{q \\ p=1,2,\ldots}} \sum_{\substack{n \\ \varkappa\ \text{continuous}}} N^{pq}_{\varkappa n} \frac{dA^q_n}{dz} e^{-\gamma^q_n z} + \sum_q \int\limits_0^\infty N^{pq}_{\varkappa\varkappa'} \frac{dA^q_{\varkappa'}}{dz} e^{-\gamma^q_{\varkappa'} z}\, d\varkappa' = R^p_\varkappa; \quad (4.6.39)$$

• для *волновых амплитуд* $a_n^q = A_n^q e^{-\gamma_n^q z}$ и $a_{\varkappa'}^q = A_{\varkappa'}^q e^{-\gamma_{\varkappa'}^q z}$

$$\sum_{\substack{q \\ p=1,2,\ldots}} \sum_{\substack{n \\ \varkappa\ \text{continuous}}} N_{\varkappa n}^{pq}\left(\frac{da_n^q}{dz} + \gamma_n^q a_n^q\right) + \sum_q \int_0^\infty N_{\varkappa\varkappa'}^{pq}\left(\frac{da_{\varkappa'}^q}{dz} + \gamma_{\varkappa'}^q a_{\varkappa'}^q\right) d\varkappa' = R_\varkappa^p, \quad (4.6.40)$$

где, в соответствии с (4.2.10), нормировочные коэффициенты равняются

$$N_{\varkappa n}^{pq} = \int_S \left(\widehat{\mathbf{E}}_\varkappa^{p*} \times \widehat{\mathbf{H}}_n^q + \widehat{\mathbf{E}}_n^q \times \widehat{\mathbf{H}}_\varkappa^{p*}\right) \cdot \mathbf{e}_z\, dS \equiv N_{n\varkappa}^{qp*}, \quad (4.6.41)$$

$$N_{\varkappa\varkappa'}^{pq} = \int_S \left(\widehat{\mathbf{E}}_\varkappa^{p*} \times \widehat{\mathbf{H}}_{\varkappa'}^q + \widehat{\mathbf{E}}_{\varkappa'}^q \times \widehat{\mathbf{H}}_\varkappa^{p*}\right) \cdot \mathbf{e}_z\, dS \equiv N_{\varkappa'\varkappa}^{qp*}. \quad (4.6.42)$$

Из сравнения (4.6.27)–(4.6.28) и (4.6.39)–(4.6.40) с аналогичными уравнениями (2.13.14)–(2.13.15) и (2.13.29)–(2.13.30) для одиночных волноводов становится очевидным, что система уравнений для многоволноводных систем, будучи более общей, отличается наличием суммирования (с индексом q) по числу волноводов многоволноводной системы.

С другой стороны, величины, входящие в уравнения (2.13.14)–(2.13.15) и (2.13.29)–(2.13.30) для одиночных волноводов, имеют верхний частотный индекс (ν). Такой индекс отсутствует в теории возбуждения многоволноводных систем, так как многочастотные (параметрические) процессы были заведомо исключены из настоящего рассмотрения. Введением дополнительного индекса (ν) в уравнения (4.6.27)–(4.6.28) и (4.6.39)–(4.6.40) можно получить наиболее общую форму уравнений возбуждения для многоволноводных многочастотных систем.

Отмеченная выше тождественность структуры уравнений возбуждения для одиночных и связанных волноводов характерна только для диссипативных систем. В отсутствие потерь ситуация становится иной, что будет видно из последующего рассмотрения.

4.7. Возбуждение направляемых и излучательных мод в системах без потерь

4.7.1. Вывод уравнений возбуждения направляемых мод. Уравнения возбуждения для направляемой моды дискретного спектра в многоволноводной системе без потерь могут быть получены как частный случай из общих диссипативных уравнений возбуждения (4.6.27) и (4.6.28) при использовании свойства модальной ортогональности. Такое свойство присуще всем системам без потерь и представляется в форме обычного соотношения ортогональности, использованного, например, в п. 2.13.1 для получения недиссипативного уравнения возбуждения одиночных волноводов.

Как следует из результатов п. 4.3, в многоволноводных системах без потерь ортогональность существует только между модами одного и того же волновода, в то время как моды разных волноводов всегда неортогональны, даже в отсутствие потерь. Поскольку диссипативные уравнения возбуждения (4.6.27) и (4.6.28) были выведены для произвольной m-й моды p-волновода, то при получении аналогичных недиссипативных уравнений необходимо выделить в них члены, связанные с модами p-волновода и применить к ним соотношение ортонормировки, типичное для недиссипативных систем.

Такое соотношение ортонормировки в форме (4.3.7) было записано для пары (m, n) направляемых активных мод, принадлежащих дискретному спектру p-волновода без потерь. Обобщение этого *соотношения для пары* $(m, \varkappa)$, состоящей из m-й направляемой и $\varkappa$-й излучательной мод, было сделано в форме (2.12.16). На их основе можем записать аналогичные *соотношения ортонормировки* для m-й моды p-волновода (ср. уравнение (2.13.18)):

$$N_{mn}^{pp} = N_m^p\,\delta_{mn} \quad \text{и} \quad N_{m\varkappa}^{pp} = 0. \tag{4.7.1}$$

Здесь нормировочные коэффициенты N_{mn}^{pp} и $N_{m\varkappa}^{pp}$ даны формулами (4.6.29) и (4.6.30) при $q = p$, а норма N_m^p активной m-й моды p-волновода определена в виде (4.3.9).

Выделяя из полной суммы по q в исходных диссипативных уравнениях (4.6.27) и (4.6.28) члены, связанные с p-волноводом, и применяя к ним соотношения ортонормировки (4.7.1) для m-й направляемой моды, немедленно приходим к искомому уравнению возбуждения *активной* дискретной моды (с чисто мнимой постоянной распространения $\gamma_m^p = i\beta_m^p$), записанному в следующих двух формах (ср. уравнения (2.13.19) и (2.13.20)):

- для *амплитуд возбуждения* $A_{m(n)}^{p(q)}$ и $A_\varkappa^q$

$$\underset{p=1,2,\ldots}{\frac{dA_m^p}{dz}} + \sum_{q\neq p}{}' \underset{m=1,2,\ldots}{\sum_n} \frac{N_{mn}^{pq}}{N_m^p}\frac{dA_n^q}{dz}\,e^{i(\beta_m^p-\beta_n^q)z} +$$
$$+ \sum_{q\neq p}{}' \int_0^\infty \frac{N_{m\varkappa}^{pq}}{N_m^p}\frac{dA_\varkappa^q}{dz}\,e^{i(\beta_m^p-\beta_\varkappa^q)z}\,d\varkappa =$$
$$= -\frac{1}{N_m^p}\int_{S_b}\left(\mathbf{J}_b^{e,p}\cdot\mathbf{E}_m^{p*}\right)dS - \frac{1}{N_m^p}\int_{L_b}\left(\mathbf{J}_s^{m,p}\cdot\mathbf{H}_m^{p*}\right)dL; \tag{4.7.2}$$

- для *волновых амплитуд* $a_{m(n)}^{p(q)} = A_{m(n)}^{p(q)}e^{-i\beta_{m(n)}^{p(q)}z}$ и $a_\varkappa^q = A_\varkappa^q e^{-i\beta_\varkappa^q z}$

$$\underset{p=1,2,\ldots}{\left(\frac{da_m^p}{dz} + i\beta_m^p a_m^p\right)} + \sum_{q\neq p}{}' \underset{m=1,2,\ldots}{\sum_n} \frac{N_{mn}^{pq}}{N_m^p}\left(\frac{da_n^q}{dz} + i\beta_n^q a_n^q\right) +$$
$$+ \sum_{q\neq p}{}' \int_0^\infty \frac{N_{m\varkappa}^{pq}}{N_m^p}\left(\frac{da_\varkappa^q}{dz} + i\beta_\varkappa^q a_\varkappa^q\right)d\varkappa =$$
$$= -\frac{1}{N_m^p}\int_{S_b}\left(\mathbf{J}_b^{e,p}\cdot\widehat{\mathbf{E}}_m^{p*}\right)dS - \frac{1}{N_m^p}\int_{L_b}\left(\mathbf{J}_s^{m,p}\cdot\widehat{\mathbf{H}}_m^{p*}\right)dL. \tag{4.7.3}$$

Для частного случая одиночного волновода, когда обе суммы по $q \neq p$ исчезают, уравнения (4.7.2) и (4.7.3) принимают форму недиссипативных уравнений (2.13.19) и (2.13.20), которые были независимо получены для одноволноводных оптических систем.

4.7.2. Вывод уравнений возбуждения излучательных мод. Уравнения возбуждения для активных излучательных мод в многоволноводной системе без потерь могут быть получены как частный случай из общих диссипативных уравнений возбуждения (4.6.39) и (4.6.40) путем вышеописанных преобразований. Только вместо (4.7.1) надо использовать соотношения ортонормировки для излучательных мод, подобные использованным в п. 2.13.2 для одиночных волноводов. По аналогии с (2.13.33) записываем соответствующие *соотношения ортонормировки* для $\varkappa$-й моды p-волновода:

$$N^{pp}_{\varkappa\varkappa'} = N^p_\varkappa \delta(\varkappa - \varkappa') \quad \text{и} \quad N^{pp}_{\varkappa n} = 0. \tag{4.7.4}$$

Первое равенство в (4.7.4) выражает соотношение ортонормировки для излучательных мод, записанное аналогично (2.12.14), где $N^p_\varkappa$ является нормой излучательной моды p-волновода. Второе равенство в (4.7.4) выражает взаимную ортогональность для пары $(\varkappa, n)$, состоящей из $\varkappa$-й излучательной моды и n-й направляемой моды, которая записана по аналогии с (2.12.16). Нормировочные коэффициенты $N^{pp}_{\varkappa n}$ и $N^{pp}_{\varkappa\varkappa'}$ определены в виде (4.6.41) и (4.6.42) при $q = p$.

Выделяя из полной суммы по q в исходных диссипативных уравнениях (4.6.39) и (4.6.40) члены, связанные с p-волноводом, и применяя к ним соотношения ортонормировки (4.7.4) для $\varkappa$-й излучательной моды, немедленно приходим к искомому уравнению возбуждения *активной* непрерывной моды (с чисто мнимой постоянной распространения $\gamma^p_\varkappa = i\beta^p_\varkappa$), записанному в следующих двух формах (ср. уравнения (2.13.34) и (2.13.35)):

- для *амплитуд возбуждения* $A^{p(q)}_{\varkappa(n)}$ и $A^q_{\varkappa'}$

$$\begin{aligned} &\underset{p=1,2,\ldots}{\frac{dA^p_\varkappa}{dz}} + \sum_{q\neq p}{}' \underset{\varkappa\ \text{continuous}}{\sum_n} \frac{N^{pq}_{\varkappa n}}{N^p_\varkappa} \frac{dA^q_n}{dz} e^{i(\beta^p_\varkappa - \beta^q_n)z} + \\ &+ \sum_{q\neq p}{}' \int_0^\infty \frac{N^{pq}_{\varkappa\varkappa'}}{N^p_\varkappa} \frac{dA^q_{\varkappa'}}{dz} e^{i(\beta^p_\varkappa - \beta^q_{\varkappa'})z}\, d\varkappa' = \\ &= -\frac{1}{N^p_\varkappa} \int_{S_b} \left(\mathbf{J}^{e,p}_b \cdot \mathbf{E}^{p*}_\varkappa\right) dS - \frac{1}{N^p_\varkappa} \int_{L_b} \left(\mathbf{J}^{m,p}_s \cdot \mathbf{H}^{p*}_\varkappa\right) dL; \end{aligned} \tag{4.7.5}$$

- для *волновых амплитуд* $a^{p(q)}_{\varkappa(n)} = A^{p(q)}_{\varkappa(n)} e^{-i\beta^{p(q)}_{\varkappa(n)} z}$ и $a^q_{\varkappa'} = A^q_{\varkappa'} e^{-i\beta^q_{\varkappa'} z}$

$$\underset{p=1,2,\ldots}{\left(\frac{da^p_\varkappa}{dz} + i\beta^p_\varkappa a^p_\varkappa\right)} + \sum_{q\neq p}{}' \underset{\varkappa\ \text{continuous}}{\sum_n} \frac{N^{pq}_{\varkappa n}}{N^p_\varkappa} \left(\frac{da^q_n}{dz} + i\beta^q_n a^q_n\right) +$$

$$+\sum_{q\neq p}{}' \int\limits_0^\infty \frac{N^{pq}_{\varkappa\varkappa'}}{N^p_\varkappa}\left(\frac{da^q_{\varkappa'}}{dz}+i\beta^q_{\varkappa'}a^q_{\varkappa'}\right)d\varkappa' =$$

$$= -\frac{1}{N^p_\varkappa}\int\limits_{S_b}\left(\mathbf{J}^{e,p}_b\cdot\widehat{\mathbf{E}}^{p*}_\varkappa\right)dS - \frac{1}{N^p_\varkappa}\int\limits_{L_b}\left(\mathbf{J}^{m,p}_s\cdot\widehat{\mathbf{H}}^{p*}_\varkappa\right)dL. \tag{4.7.6}$$

Как и для направляемых мод, опускание суммирования по $q\neq p$ в уравнениях (4.7.5) и (4.7.6) превращает их в аналогичные уравнения (2.13.34) и (2.13.35), полученные независимо для одиночных волноводов.

Полезно отметить, что различие между уравнениями (4.7.2), (4.7.5) для амплитуд возбуждения и (4.7.3), (4.7.6) для волновых амплитуд состоит в том, что интегралы возбуждения в первом случае содержат модальные поля (без колпачков), а во втором случае — мембранные функции полей (с колпачками), связанные равенствами (4.6.13)–(4.6.14) и (4.6.16)–(4.6.17).

Таким образом, любая мода с номером m (дискретный спектр) или $\varkappa$ (непрерывный спектр) в p-волноводе взаимодействует с возбуждающими токами $\mathbf{J}^{e,p}_b$ и $\mathbf{J}^{m,p}_s$ через свои модальные поля $\mathbf{E}^p_{m(\varkappa)}$ и $\mathbf{H}^p_{m(\varkappa)}$. Возбуждающие *интегралы* (4.6.23) *и* (4.6.35), которые стоят в правой части всех уравнений возбуждения (4.6.27)–(4.6.28), (4.6.39)–(4.6.40), (4.7.2)–(4.7.3) и (4.7.5)–(4.7.6), определяют комплексную мощность взаимодействия токов и полей. Если волноведущая структура состоит из двух или более волноводов, то мощность, поставляемая токами $\mathbf{J}^{e,p}_b$ и $\mathbf{J}^{m,p}_s$ в *первичную моду*, подаваемую на вход области возбуждения, будет делиться между *вторичными модами*. Последние возбуждаются первичной модой из-за взаимной неортогональности мод, независимо от их природы.

В отсутствие потерь вторичные моды принадлежат другим волноводам и модальная неортогональность обусловлена перекрытием полей соседних волноводов. Как показано в п. 4.3.2, это обеспечивает ненулевую величину нормировочных коэффициентов N^{pq}_{mn} при $p\neq q$, и даже для вырожденных мод ($m=n$) двух идентичных волноводов всегда имеем $N^{pq}_{mm}\neq 0$.

Если учитывать потери в связанных волноводах, то их появление приводит к диссипативному механизму модальной неортогональности ($M^{pq}_{mn}\neq 0$) в дополнение к недиссипативному механизму, связанному с перекрытием полей ($W^{pq}_{mn}\neq 0$). Эти два механизма обычно воспринимаются как нераздельные, и они оба в совокупности определяют общее соотношение квазиортогональности (4.2.13). Фактически это соотношение позволяет получить, если требуется, два различных вклада в кросс-норму N^{pq}_{mn} от каждого из этих механизмов. Действительно, из (4.2.14) и (4.2.15) следует, что

$$N^{pq}_{mn} = \frac{M^{pq\Sigma}_{mn}}{\gamma^{p*}_m+\gamma^q_n} = \frac{M^{pq}_{mn}}{\gamma^{p*}_m+\gamma^q_n} - \frac{i\omega W^{pq}_{mn}}{\gamma^{p*}_m+\gamma^q_n}. \tag{4.7.7}$$

Однако на практике как правило легче вычислить норму N^{pq}_{mn} по формуле (4.2.10), чем использовать соотношение (4.7.7).

Единственная физическая ситуация, при которой выбранная мода селективно возбуждается данными источниками без связи (диссипативной или за счет перекрытия полей) с другими модами реализуется в *одиночных недиссипативных* волноводах, которые описываются простейшими уравнениями возбуждения, такими как (2.13.19)–(2.13.20) и (2.13.34)–(2.13.35).

4.8. Уравнения связанных мод для многоволноводных систем с потерями

Уравнения возбуждения мод заданными токами, выведенные в предыдущем параграфе, завершают второй этап разработки электродинамической теории связанных волноводов (первый этап нахождения спектра мод был изложен в гл. 1) и открывают путь к построению последнего этапа в форме теории связанных мод для многоволноводных оптических систем.

Правая часть уравнений возбуждения содержит возбуждающие интегралы R_m^p и $R_\varkappa^p$ в виде (4.6.23) и (4.6.35). Они включают объемный электрический ток $\mathbf{J}_b^{e,p}$ и эффективный поверхностный магнитный ток $\mathbf{J}_s^{m,p}$, которые были представлены в форме модальных разложений (4.4.7) и (4.4.8). Следовательно, подстановка этих разложений в правую часть уравнений возбуждения превращает их в искомую систему уравнений связанных мод.

Продемонстрируем технику перехода от уравнений возбуждения к уравнениям связи мод по отдельности для многоволноводных систем с потерями и без потерь.

Возбуждение собственных мод в диссипативных многоволноводных системах заданными источниками описывается общей системой диссипативно связанных уравнений (4.6.27)–(4.6.28) для направляемой m-й моды ($m = 1, 2, \ldots$ — индекс суммирования по дискретному спектру) и (4.6.39)–(4.6.40) для излучательной $\varkappa$-й моды ($\varkappa$ — переменная интегрирования по непрерывному спектру). Как уже отмечалось, в правой части этих уравнений стоят интегралы возбуждения R_m^p и $R_\varkappa^p$ в виде (4.6.23) и (4.6.35) с возбуждающими токами $\mathbf{J}_b^{e,p}$ и $\mathbf{J}_s^{m,p}$.

Подстановка модальных разложений (4.4.7) и (4.4.8) для возбуждающих токов в выражения (4.6.23) и (4.6.35) для интегралов возбуждения дает модальные разложения этих интегралов, записанные в нижеследующей форме с явным выделением излучательных мод:

- для *направляемой m-й моды* p-волновода (ср. уравнение (3.2.1))

$$R_m^p \equiv -\int\limits_{S_b} \left(\mathbf{J}_b^{e,p} \cdot \widehat{\mathbf{E}}_m^{p*}\right) dS - \int\limits_{L_b} \left(\mathbf{J}_s^{m,p} \cdot \widehat{\mathbf{H}}_m^{p*}\right) dL =$$
$$= \sum_q \sum_n K_{mn}^{pq} a_n^q + \sum_q \int\limits_0^\infty K_{m\varkappa}^{pq} a_\varkappa^q \, d\varkappa, \qquad (4.8.1)$$

где введены следующие *коэффициенты связи* (ср. уравнение (3.2.2)):

$$K_{mn}^{pq} = -i\omega \int\limits_{S_b} \left(\widehat{\mathbf{E}}_m^{p*} \cdot \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^{\,p} \cdot \widehat{\mathbf{E}}_n^q\right) dS - \int\limits_{L_b} \left(\widehat{\mathbf{H}}_m^{p*} \cdot \Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c^{\,p} \cdot \widehat{\mathbf{E}}_n^q\right) dL, \qquad (4.8.2)$$

$$K^{pq}_{m\varkappa} = -i\omega\int\limits_{S_b}\left(\widehat{\mathbf{E}}^{p*}_m\cdot\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^p_c\cdot\widehat{\mathbf{E}}^q_\varkappa\right)dS - \int\limits_{L_b}\left(\widehat{\mathbf{H}}^{p*}_m\cdot\Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}^p_c\cdot\widehat{\mathbf{E}}^q_\varkappa\right)dL; \qquad (4.8.3)$$

• для *излучательной $\varkappa$-й моды* p-волновода (ср. уравнение (3.2.5))

$$R^p_\varkappa \equiv -\int\limits_{S_b}\left(\mathbf{J}^{e,p}_b\cdot\widehat{\mathbf{E}}^{p*}_\varkappa\right)dS - \int\limits_{L_b}\left(\mathbf{J}^{m,p}_s\cdot\widehat{\mathbf{H}}^{p*}_\varkappa\right)dL =$$

$$= \sum_q\sum_n K^{pq}_{\varkappa n}a^q_n + \sum_q\int\limits_0^\infty K^{pq}_{\varkappa\varkappa'}a^q_{\varkappa'}d\varkappa', \qquad (4.8.4)$$

где введены следующие *коэффициенты связи* (ср. уравнение (3.2.6)):

$$K^{pq}_{\varkappa n} = -i\omega\int\limits_{S_b}\left(\widehat{\mathbf{E}}^{p*}_\varkappa\cdot\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^p_c\cdot\widehat{\mathbf{E}}^q_n\right)dS - \int\limits_{L_b}\left(\widehat{\mathbf{H}}^{p*}_\varkappa\cdot\Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}^p_c\cdot\widehat{\mathbf{E}}^q_n\right)dL, \qquad (4.8.5)$$

$$K^{pq}_{\varkappa\varkappa'} = -i\omega\int\limits_{S_b}\left(\widehat{\mathbf{E}}^{p*}_\varkappa\cdot\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^p_c\cdot\widehat{\mathbf{E}}^q_{\varkappa'}\right)dS - \int\limits_{L_b}\left(\widehat{\mathbf{H}}^{p*}_\varkappa\cdot\Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}^p_c\cdot\widehat{\mathbf{E}}^q_{\varkappa'}\right)dL. \qquad (4.8.6)$$

Подставляя модальные разложения возбуждающих интегралов R^p_m и $R^p_\varkappa$ в виде (4.8.1) и (4.8.4) в правую часть уравнений возбуждения (4.6.28) и (4.6.40), приходим к системе связанных уравнений, охватывающей все моды дискретного и непрерывного спектров для произвольного числа волноводов, входящих в состав многоволноводной системы (ср. уравнения (3.2.9) и (3.2.10)):

$$\sum_q\sum_n N^{pq}_{mn}\left(\frac{da^q_n}{dz}+\gamma^q_n a^q_n\right) + \sum_q\int\limits_0^\infty N^{pq}_{m\varkappa}\left(\frac{da^q_\varkappa}{dz}+\gamma^q_\varkappa a^q_\varkappa\right)d\varkappa =$$

$p = 1,2,\ldots \quad m = 1,2,\ldots$

$$= \sum_q\sum_n K^{pq}_{mn}a^q_n + \sum_q\int\limits_0^\infty K^{pq}_{m\varkappa}a^q_\varkappa\,d\varkappa; \qquad (4.8.7)$$

$$\sum_q\sum_n N^{pq}_{\varkappa n}\left(\frac{da^q_n}{dz}+\gamma^q_n a^q_n\right) + \sum_q\int\limits_0^\infty N^{pq}_{\varkappa\varkappa'}\left(\frac{da^q_{\varkappa'}}{dz}+\gamma^q_{\varkappa'} a^q_{\varkappa'}\right)d\varkappa' =$$

$p = 1,2,\ldots \quad \varkappa$ continuous

$$= \sum_q\sum_n K^{pq}_{\varkappa n}a^q_n + \sum_q\int\limits_0^\infty K^{pq}_{\varkappa\varkappa'}a^q_{\varkappa'}\,d\varkappa'. \qquad (4.8.8)$$

Уравнения связанных мод (4.8.7) и (4.8.8) образуют сложную систему интегро-дифференциальных уравнений, в наиболее общей форме описывающую *статическую связь* между модами в отсутствие динамических (параметрических) эффектов. Из сравнения этих уравнений с аналогичными уравнениями (3.2.9) и (3.2.10), полученными для одиночных волноводов с учетом параметрических эффектов, видно, что последние следуют из (4.8.7)–(4.8.8) при отбрасывании здесь суммирования по q, а там — динамических коэффициентов связи типа $K_{mn}^{(\nu,\nu\mp1)}$. В этом случае статические коэффициенты связи типа K_{mn}^{pp} здесь (когда индекс p соответствует одиночному волноводу) и $K_{mn}^{(\nu,\nu)}$ там (когда индекс ν соответствует единственной частоте $\omega_\nu = \omega$) имеют одинаковую структуру, даваемую выражениями (4.8.2) и (3.2.2), которые содержат тензоры *объемной связи* ($\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^p$ или $\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c$) и *поверхностной связи* ($\Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c^p$ или $\Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c$).

Коэффициенты связи (4.8.2)–(4.8.3) и (4.8.5)–(4.8.6) включают тензоры связи $\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^p$ и $\Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c^p$, определенные общими выражениями (4.4.9) и (4.4.10). В п. 4.5 тензоры связи преобразованы в различные формы, соответствующие двух-, трех- и многоволноводным структурам с единой внешней средой, в которую погружены все волноводы. Поэтому существует возможность объединить эти тензоры со статическими тензорами $\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c$ и $\Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c$, полученными для одиночного волновода в общей форме (3.1.16) и (3.1.20). Это позволяет анализировать более сложные случаи связи двух и более волноводов, например, при наличии гофрированной поверхности [28], когда тензоры $\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c$ и $\Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c$ имеют специальную форму (3.3.4) и (3.3.6).

Система связанных уравнений (4.8.7)–(4.8.8) может быть записана в упрощенной форме, если интеграл по непрерывному спектру считать включенным в обобщенную сумму по всем собственным модам дискретного и непрерывного спектров для рассматриваемой открытой многоволноводной системы. Тогда вместо двух систем уравнений (4.8.7) и (4.8.8) остается только одна, записанная в обобщенном виде:

$$\sum_q \sum_n N_{mn}^{pq}\left(\frac{da_n^q}{dz} + \gamma_n^q a_n^q\right) = \sum_q \sum_n K_{mn}^{pq} a_n^q. \tag{4.8.9}$$

Для дальнейшего сокращения записи знаки суммирования по q, нумерующие волноводы в многоволноводной системе (совместно с верхними индексами p и q), могут быть опущены:

$$\sum_n N_{mn}\left(\frac{da_n}{dz} + \gamma_n a_n\right) = \sum_n K_{mn} a_n, \tag{4.8.10}$$

где суммирование по n включает последовательную нумерацию мод всех волноводов в составе многоволноводной системы.

Сокращенная форма (4.8.10) связанных уравнений может быть представлена в матричном виде (ср. уравнения (3.2.14)–(3.2.15)):

$$\overline{\mathbf{N}} \cdot \frac{d\overline{\mathbf{a}}}{dz} = -\overline{\mathbf{N}} \cdot \overline{\gamma} \cdot \overline{\mathbf{a}} + \overline{\mathbf{K}} \cdot \overline{\mathbf{a}} \quad \text{или} \quad \frac{d\overline{\mathbf{a}}}{dz} + \overline{\gamma} \cdot \overline{\mathbf{a}} = \overline{\mathbf{N}}^{-1} \cdot \overline{\mathbf{K}} \cdot \overline{\mathbf{a}}. \tag{4.8.11}$$

Здесь $\overline{\mathbf{a}} \equiv \mathrm{col}\,[a_1, a_2, \ldots]$ — вектор-столбец, составленный из волновых амплитуд $a_n \equiv a_n^q$, $\overline{\gamma} \equiv \mathrm{diag}\,[\gamma_1, \gamma_2, \ldots]$ — диагональная матрица, образованная невозмущенными постоянными распространения $\gamma_n \equiv \gamma_n^q$, а квадратные матрицы $\overline{\mathbf{N}}$ и $\overline{\mathbf{K}}$ состоят из кросс-норм $N_{mn} \equiv N_{mn}^{pq}$ и коэффициентов связи $K_{mn} \equiv K_{mn}^{pq}$ (черта сверху имеет тензорный смысл и не должна приводить к путанице с обозначением, использованным в п. 3.10 для планарных структур, см. табл. 1.1 в п. 1.9). Матричное уравнение (4.8.11) совпадает по виду с аналогичным уравнением, приведенным в начале этой главы для недиссипативных систем, где $\overline{\gamma} = i\overline{\beta} \equiv i\,\mathrm{diag}\,[\beta_1, \beta_2, \ldots]$, которое было записано Харди и Стрейфером в переформулированной форме [23].

4.9. Уравнения связанных мод для многоволноводных систем без потерь

4.9.1. Связанные уравнения и коэффициенты связи. Интегралы возбуждения R^p_m и $R^p_\varkappa$, входящие в правую часть недиссипативных уравнений возбуждения (4.7.2)–(4.7.3) и (4.7.5)–(4.7.6) в виде R^p_m/N^p_m и $R^p_\varkappa/N^p_\varkappa$, имеют универсальную форму (4.6.23) и (4.6.35), которая справедлива как для диссипативных, так и недиссипативных многоволноводных структур.

Таким образом, можно использовать модальные разложения для возбуждающих интегралов R^p_m и $R^p_\varkappa$ в виде (4.8.1)–(4.8.3) и (4.8.4)–(4.8.6) для того, чтобы преобразовать недиссипативные уравнения возбуждения в форме (4.7.3) и (4.7.6), записанной для волновых амплитуд, и получить искомую систему уравнений связанных мод, тогда:

- для *направляемой m-й моды p*-волновода

$$\underset{p=1,2,\ldots \quad m=1,2,\ldots}{\left(\frac{da^p_m}{dz} + i\beta^p_m a^p_m\right)} + \tag{4.9.1}$$

$$+\sum_{q\neq p}{}'\left\{\sum_n C^{pq}_{mn}\left(\frac{da^q_n}{dz} + i\beta^q_n a^q_n\right) + \int_0^\infty C^{pq}_{m\varkappa}\left(\frac{da^q_\varkappa}{dz} + i\beta^q_\varkappa a^q_\varkappa\right)d\varkappa\right\} =$$

$$= \left(\sum_n c^{pp}_{mn} a^p_n + \int_0^\infty c^{pp}_{m\varkappa} a^p_\varkappa\, d\varkappa\right) + \sum_{q\neq p}{}'\left\{\sum_n c^{pq}_{mn} a^q_n + \int_0^\infty c^{pq}_{m\varkappa} a^q_\varkappa\, d\varkappa\right\},$$

где введены *относительные нормировочные коэффициенты* (безразмерные кросс-нормы мод),

$$C^{pq}_{mn} \equiv \frac{N^{pq}_{mn}}{N^p_m} = \frac{1}{N^p_m}\int_S \left(\widehat{\mathbf{E}}^{p*}_m \times \widehat{\mathbf{H}}^q_n + \widehat{\mathbf{E}}^q_n \times \widehat{\mathbf{H}}^{p*}_m\right)\cdot \mathbf{e}_z\, dS, \tag{4.9.2}$$

$$C^{pq}_{m\varkappa} \equiv \frac{N^{pq}_{m\varkappa}}{N^p_m} = \frac{1}{N^p_m}\int_S \left(\widehat{\mathbf{E}}^{p*}_m \times \widehat{\mathbf{H}}^q_\varkappa + \widehat{\mathbf{E}}^q_\varkappa \times \widehat{\mathbf{H}}^{p*}_m\right)\cdot \mathbf{e}_z\, dS, \tag{4.9.3}$$

и *коэффициенты связи*

$$c^{pq}_{mn} \equiv \frac{K^{pq}_{mn}}{N^p_m} = -\frac{i\omega}{N^p_m}\int_{S_b}\left(\widehat{\mathbf{E}}^{p*}_m \cdot \Delta\overline{\varepsilon}^p_c \cdot \widehat{\mathbf{E}}^q_n\right)dS -$$

$$-\frac{1}{N^p_m}\int_{L_b}\left(\widehat{\mathbf{H}}^{p*}_m \cdot \Delta\overline{\xi}^p_c \cdot \widehat{\mathbf{E}}^q_n\right)dL, \tag{4.9.4}$$

$$c^{pq}_{m\varkappa} \equiv \frac{K^{pq}_{m\varkappa}}{N^p_m} = -\frac{i\omega}{N^p_m}\int\limits_{S_b} (\widehat{\mathbf{E}}^{p*}_m \cdot \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^p_c \cdot \widehat{\mathbf{E}}^q_\varkappa)\, dS - \\ - \frac{1}{N^p_m}\int\limits_{L_b} (\widehat{\mathbf{H}}^{p*}_m \cdot \Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}^p_c \cdot \widehat{\mathbf{E}}^q_\varkappa)\, dL; \qquad (4.9.5)$$

• для *излучательной $\varkappa$-й моды* p-волновода

$$\left(\frac{da^p_\varkappa}{dz} + i\beta^p_\varkappa a^p_\varkappa\right) + \qquad (4.9.6)$$

$p = 1,2,\ldots$ $\varkappa$ continuous

$$+ \sum_{q\neq p}{}' \left\{ \sum_n C^{pq}_{\varkappa n}\left(\frac{da^q_n}{dz} + i\beta^q_n a^q_n\right) + \int\limits_0^\infty C^{pq}_{\varkappa\varkappa'}\left(\frac{da^q_{\varkappa'}}{dz} + i\beta^q_{\varkappa'} a^q_{\varkappa'}\right) d\varkappa' \right\} =$$

$$= \left(\sum_n c^{pp}_{\varkappa n} a^p_n + \int\limits_0^\infty c^{pp}_{\varkappa\varkappa'} a^p_{\varkappa'}\, d\varkappa'\right) + \sum_{q\neq p}{}' \left\{ \sum_n c^{pq}_{\varkappa n} a^q_n + \int\limits_0^\infty c^{pq}_{\varkappa\varkappa'} a^q_{\varkappa'}\, d\varkappa' \right\},$$

где введены *относительные нормировочные коэффициенты* (безразмерные кросс-нормы мод),

$$C^{pq}_{\varkappa n} \equiv \frac{N^{pq}_{\varkappa n}}{N^p_\varkappa} = \frac{1}{N^p_\varkappa}\int\limits_S \left(\widehat{\mathbf{E}}^{p*}_\varkappa \times \widehat{\mathbf{H}}^q_n + \widehat{\mathbf{E}}^q_n \times \widehat{\mathbf{H}}^{p*}_\varkappa\right)\cdot \mathbf{e}_z\, dS, \qquad (4.9.7)$$

$$C^{pq}_{\varkappa\varkappa'} \equiv \frac{N^{pq}_{\varkappa\varkappa'}}{N^p_\varkappa} = \frac{1}{N^p_\varkappa}\int\limits_S \left(\widehat{\mathbf{E}}^{p*}_\varkappa \times \widehat{\mathbf{H}}^q_{\varkappa'} + \widehat{\mathbf{E}}^q_{\varkappa'} \times \widehat{\mathbf{H}}^{p*}_\varkappa\right)\cdot \mathbf{e}_z\, dS, \qquad (4.9.8)$$

и *коэффициенты связи*

$$c^{pq}_{\varkappa n} \equiv \frac{K^{pq}_{\varkappa n}}{N^p_\varkappa} = -\frac{i\omega}{N^p_\varkappa}\int\limits_{S_b} (\widehat{\mathbf{E}}^{p*}_\varkappa \cdot \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^p_c \cdot \widehat{\mathbf{E}}^q_n)\, dS - \\ - \frac{1}{N^p_\varkappa}\int\limits_{L_b} (\widehat{\mathbf{H}}^{p*}_\varkappa \cdot \Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}^p_c \cdot \widehat{\mathbf{E}}^q_n)\, dL, \qquad (4.9.9)$$

$$c^{pq}_{\varkappa\varkappa'} \equiv \frac{K^{pq}_{\varkappa\varkappa'}}{N^p_\varkappa} = -\frac{i\omega}{N^p_\varkappa}\int\limits_{S_b} (\widehat{\mathbf{E}}^{p*}_\varkappa \cdot \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^p_c \cdot \widehat{\mathbf{E}}^q_{\varkappa'})\, dS - \\ - \frac{1}{N^p_\varkappa}\int\limits_{L_b} (\widehat{\mathbf{H}}^{p*}_\varkappa \cdot \Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}^p_c \cdot \widehat{\mathbf{E}}^q_{\varkappa'})\, dL. \qquad (4.9.10)$$

Связанные уравнения (4.9.1) и (4.9.6) записаны в такой форме, чтобы можно было легко выделить члены, относящиеся к выбранной моде. Такое выделение сделано в правой части уравнений путем размещения в круглых скобках соответствующих членов: а) для направляемой m-й моды p-волновода в уравнении (4.9.1) и б) для излучательной $\varkappa$-й моды p-волновода в уравнении (4.9.6). Оставшаяся часть учитывает влияние других мод путем суммирования по $q \neq p$. Поэтому удаление из уравнений (4.9.1) и (4.9.6) сумм по $q \neq p$ превращает их, соответственно, в уравнения (3.2.16) и (3.2.20), которые были независимо получены для одноволноводных структур.

Использование обобщенной суммы по всему модальному спектру, включающей суммирование по дискретным направляемым модам и интегрирование по непрерывным излучательным модам, позволяет две системы связанных уравнений (4.9.1) и (4.9.6) объединить в одну, аналогично уравнению (4.8.9), а именно

$$\left(\frac{da_m^p}{dz} + i\beta_m^p a_m^p\right) + \sum_{q\neq p}{}' \sum_n C_{mn}^{pq}\left(\frac{da_n^q}{dz} + i\beta_n^q a_n^q\right) = \\ = \sum_n c_{mn}^{pp} a_n^p + \sum_{q\neq p}{}' \sum_n c_{mn}^{pq} a_n^q. \tag{4.9.11}$$

Для многих применений более удобно использовать амплитуды возбуждения A_m^p и $A_\varkappa^p$ вместо волновых амплитуд a_m^p и $a_\varkappa^p$. С этой целью подстановка соотношений (4.6.15) (при $\gamma_m^p = i\beta_m^p$) и (4.6.18) (при $\gamma_\varkappa^p = i\beta_\varkappa^p$) в уравнения связанных мод (4.9.1) и (4.9.6) превращает их в систему уравнений, записанную в сокращенной форме, аналогичной (4.9.11):

$$\frac{dA_m^p}{dz} + \sum_{q\neq p}{}' \sum_n C_{mn}^{pq} e^{i(\beta_m^p - \beta_n^q)z} \frac{dA_n^q}{dz} = \\ = \sum_n c_{mn}^{pp} e^{i(\beta_m^p - \beta_n^p)z} A_n^p + \sum_{q\neq p}{}' \sum_n c_{mn}^{pq} e^{i(\beta_m^p - \beta_n^q)z} A_n^q. \tag{4.9.12}$$

Преимущество такой формы записи связанных уравнений над уравнением (4.9.11) заключается в том, что в явном виде проявляется фазовое согласование (когда $\beta_m^p = \beta_n^p$ или $\beta_m^p = \beta_n^q$) и фазовое рассогласование (когда $\beta_m^p \neq \beta_n^p$ или $\beta_m^p \neq \beta_n^q$) между m-й и n-й связанными модами одного волновода или разных волноводов.

Внимательный анализ недиссипативных связанных уравнений (4.9.1) и (4.9.6) в сравнении с их диссипативными аналогами (4.8.7) и (4.8.8) показывает, что отсутствие потерь в многоволноводных системах не дает заметного упрощения структуры уравнений, в отличие от одноволноводных систем. Такая ситуация вызвана тем, что в обоих случаях (с потерями и без них) уравнения содержат ненулевые нормировочные кросс-коэффициенты (N_{mn}^{pq} или $C_{mn}^{pq} = N_{mn}^{pq}/N_m^p$). Это усложняет уравнения, поскольку в дополнение к связи между волновыми амплитудами a_m^p и a_n^q через коэффициенты связи c_{mn}^{pq} имеется также связь между производными da_m^p/dz и da_n^q/dz. В одиночных волноводах отсутствие потерь приводит к исчезновению этой дополнительной связи (см. уравнения (3.2.16) и (3.2.20)), в то время как недиссипативные уравнения (4.9.1) и (4.9.6) для связанных волноводов всегда сохраняют такую связь между производными.

4.9.2. Энергетические соотношения между коэффициентами связи. Для получения соотношения между коэффициентами связи K_{mn}^{pq} применим сокращенную запись (4.8.10) (без верхних индексов p и q, которые позже будут восстановлены) к уравнениям связанных мод в многоволноводных системах в отсутствие потерь:

$$\sum_n N_{mn}\left(\frac{da_n}{dz} + i\beta_n a_n\right) = \sum_n K_{mn} a_n. \tag{4.9.13}$$

Искомое соотношение следует из закона сохранения мощности, записанного на основе общего выражения (2.2.17) в следующей форме:

$$\frac{dP(z)}{dz} = \frac{d}{dz}\sum_m \sum_n P_{mn}(z) = \frac{1}{4}\frac{d}{dz}\sum_m \sum_n N_{mn} a_m^*(z) a_n(z) = 0. \tag{4.9.14}$$

После дифференцирования, с учетом того, что $N_{mn} = N_{nm}^*$, равенство (4.9.14) приводит к выражению

$$\sum_m \left(\sum_n N_{mn}\frac{da_n}{dz}\right) a_m^* + \sum_n \left(\sum_m N_{nm}\frac{da_m}{dz}\right)^* a_n = 0. \tag{4.9.15}$$

Использование уравнений связанных мод (4.9.13) в выражении (4.9.15) дает

$$\sum_m \sum_n \left[(K_{mn} + K_{nm}^*) + i(\beta_m - \beta_n) N_{mn}\right] a_m^*(z) a_n(z) = 0. \tag{4.9.16}$$

Поскольку двойная сумма в (4.9.16) должна обращаться в нуль при любых волновых амплитудах $a_m(z)$ и $a_n(z)$, то это будет тождественно выполняться в произвольной точке z, если и только, если каждая квадратная скобка равняется нулю. Это дает искомое соотношение между коэффициентами связи (с восстановлением нумерации волноводов p и q),

$$K_{mn}^{pq} + K_{nm}^{qp\,*} = -i(\beta_m^p - \beta_n^q) N_{mn}^{pq}, \tag{4.9.17}$$

или, с учетом равенств $K_{mn}^{pq} = N_m^p c_{mn}^{pq}$ и $K_{nm}^{qp} = N_n^q c_{nm}^{qp}$,

$$N_m^p c_{mn}^{pq} + N_n^q c_{nm}^{qp*} = -i(\beta_m^p - \beta_n^q) N_{mn}^{pq}. \tag{4.9.18}$$

Соотношение (4.9.17) справедливо только для *активных мод* с постоянными распространения $\gamma_m^p = i\beta_m^p$ и $\gamma_n^q = i\beta_n^q$. Его обобщение на все моды недиссипативной многоволноводной системы, включая *реактивные моды*, для которых $\gamma_m^p = \alpha_m^p + i\beta_m^p$ и $\gamma_n^q = \alpha_n^q + i\beta_n^q$, имеет вид

$$K_{mn}^{pq} + K_{nm}^{qp\,*} = (\gamma_m^{p*} + \gamma_n^q) N_{mn}^{pq}. \tag{4.9.19}$$

В соответствии с общим соотношением квази-ортогональности (4.3.1), справедливым для недиссипативных многоволноводных систем, имеем

$$(\gamma_m^{p*} + \gamma_n^q) N_{mn}^{pq} = -i\omega W_{mn}^{pq}, \tag{4.9.20}$$

где W_{mn}^{pq} — многоволноводный коэффициент, определенный в виде (4.2.12). С учетом (4.9.20) соотношение (4.9.19) принимает вид

$$K_{mn}^{pq} + K_{nm}^{qp*} = -i\omega W_{mn}^{pq}. \tag{4.9.21}$$

Принимая во внимание равенства (4.3.4), (4.3.17), (4.3.19) и (4.3.20), из анализа соотношения (4.9.21) вытекают следующие важные заключения:

- для *любой пары* мод, принадлежащих *одному* волноводу ($m \neq n$ и $q = p$), и для *вырожденных* мод одного типа ($m = n$), принадлежащих *разным идентичным* ($q \neq p$) волноводам, для которых всегда, соответственно, $W_{mn}^{pp} = 0$ (см. формулу (4.3.4)) и $W_{mm}^{pq} = 0$ (см. формулу (4.3.19)), имеем

$$K_{mn}^{pp} = -K_{nm}^{pp*} \qquad \text{или} \qquad N_m^p c_{mn}^{pp} = -N_n^p c_{nm}^{pp*}, \tag{4.9.22}$$

$$K_{mm}^{pq} = -K_{mm}^{qp*} \qquad \text{или} \qquad N_m^p c_{mm}^{pq} = -N_m^p c_{mm}^{qp*}; \tag{4.9.23}$$

- для *любой пары* мод, принадлежащих *неидентичным* волноводам ($m \neq n$ и $q \neq p$), и для *невырожденных* мод разных типов ($m \neq n$), принадлежащих *разным идентичным* ($q \neq p$) волноводам, для которых всегда $W_{mn}^{pq} \neq 0$ (см. формулы (4.3.17) и (4.3.20)), имеем

$$K_{mn}^{pq} \neq -K_{nm}^{qp*} \qquad \text{или} \qquad N_m^p c_{mn}^{pq} \neq -N_n^q c_{nm}^{qp*}, \tag{4.9.24}$$

т. е. в этом случае надо применять общие соотношения (4.9.17)–(4.9.19), которые совпадают с аналогичными выражениями, полученными ранее другими авторами [27, 28].

Соотношения (4.9.17) и (4.9.18) являются обобщением аналогичных выражений (Г.6.5) и (Г.6.9) на случай неортогональных мод. В частности, для одночастотного (непараметрического) режима соотношение (Г.6.9) принимает форму, тождественную с (4.9.22) и (4.9.23).

Более того, нетрудно видеть, что соотношение (4.9.18) совпадает с выражением (Д.1.13), выведенным в приложении Д. Это выражение соответствует случаю, когда асимметрия коэффициентов связи в одноволноводных структурах (вызванная, например, вкладом тензора поверхностной связи $\Delta\overline{\xi}_c$) требует использования модифицированной формы (Д.1.10) закона сохранения мощности для того, чтобы учесть кросс-мощность, переносимую связанными модами.

Совпадение выражений (4.9.18) и (Д.1.13) означает, что общие соотношения между коэффициентами связи в форме (4.9.17)–(4.9.19), порождаемые законом сохранения мощности, учитывают одновременно два фактора:

а) неортогональность пространственно разнесенных мод, принадлежащих разным волноводам;

б) асимметрию коэффициентов связи, вызванную дополнительной межмодовой связью за счет тензора поверхностной связи $\Delta\overline{\xi}_c^p$.

Следовательно, при анализе недиссипативных многоволноводных структур нет необходимости обращаться к приложению Д, так как уравнения связанных мод в общей форме (4.9.1) и (4.9.6) с коэффициентами связи, подчиняющимися энергетическим соотношениям (4.9.17)–(4.9.19), удовлетворяют закону сохранения мощности.

4.10. Уравнения связанных мод для двух диэлектрических волноводов

Рассмотрим два параллельных планарных волновода a и b, изображенных на рис. 4.2 *а*, с полным профилем диэлектрической проницаемости $\varepsilon_r^{\Sigma}(y)$ всей структуры, показанным на рис. 4.2 *б*. Индивидуальные профили $\varepsilon_r^a(y)$ и $\varepsilon_r^b(y)$ для каждого отдельного волновода показаны на рис. 4.2 *в* и *г*.

Пусть в каждом отдельном волноводе существует единственная распространяющаяся мода — направляемая m-я мода в a-волноводе и направляемая n-я мода в b-волноводе. Дифференциальные уравнения, описывающие взаимодействие между этими модами и представленные в виде

$$\left(\frac{da_m^a}{dz} + i\beta_m^a a_m^a\right) + C_{mn}^{ab}\left(\frac{da_n^b}{dz} + i\beta_n^b a_n^b\right) = c_{mm}^{aa} a_m^a + c_{mn}^{ab} a_n^b, \tag{4.10.1}$$

$$\left(\frac{da_n^b}{dz} + i\beta_n^b a_n^b\right) + C_{nm}^{ba}\left(\frac{da_m^a}{dz} + i\beta_m^a a_m^a\right) = c_{nn}^{bb} a_n^b + c_{nm}^{ba} a_m^a, \tag{4.10.2}$$

получаются из общих связанных уравнений (4.9.11) для частных случаев: а) уравнение (4.10.1) при $p = a$, $q = b$; б) уравнение (4.10.2) при $p = b$, $q = a$.

В уравнениях (4.10.1)–(4.10.2) собственные коэффициенты связи c_{mm}^{aa} и c_{nn}^{bb} дают самовоздействие мод, а c_{mn}^{ab} и c_{nm}^{ba} учитывают взаимную связь между модами. Эти уравнения совпадают по структуре (но не в деталях!) с аналогичными уравнениями, полученными вариационным методом [24–28].

Ради упрощения записи удобно использовать следующие обозначения:

$$a_m^a = a_1, \qquad \beta_m^a = \beta_1, \qquad a_n^b = a_2, \qquad \beta_n^b = \beta_2; \tag{4.10.3}$$

$$c_{mm}^{aa} = c_{11}, \qquad c_{mn}^{ab} = c_{12}, \qquad c_{nn}^{bb} = c_{22}, \qquad c_{nm}^{ba} = c_{21}; \tag{4.10.4}$$

$$C_{mn}^{ab} \equiv \frac{N_{mn}^{ab}}{N_m^a} = \frac{N_{12}}{N_1} \equiv C_{12}, \qquad C_{nm}^{ba} \equiv \frac{N_{nm}^{ba}}{N_n^b} = \frac{N_{21}}{N_2} \equiv C_{21}. \tag{4.10.5}$$

После ряда преобразований с введением обозначений (4.10.3)–(4.10.5) исходные уравнения (4.10.1) и (4.10.2) приведены к привычной форме уравнений связанных мод:

$$\frac{da_1(z)}{dz} = -i\bar{\bar{\beta}}_1 a_1(z) + \bar{\bar{c}}_{12}\, a_2(z), \tag{4.10.6}$$

$$\frac{da_2(z)}{dz} = \bar{\bar{c}}_{21} a_1(z) - i\bar{\bar{\beta}}_2\, a_2(z), \tag{4.10.7}$$

где введены *приведенные* фазовые постоянные (отмеченные двойной чертой),

$$\bar{\bar{\beta}}_1 = \beta_1 + i\frac{c_{11} - C_{12}c_{21}}{1 - C_{12}C_{21}} \quad \text{и} \quad \bar{\bar{\beta}}_2 = \beta_2 + i\frac{c_{22} - C_{21}c_{12}}{1 - C_{12}C_{21}}, \tag{4.10.8}$$

и *приведенные* коэффициенты связи (отмеченные двойной чертой)

$$\bar{\bar{c}}_{12} = \frac{c_{12} - C_{12}c_{22}}{1 - C_{12}C_{21}} \quad \text{и} \quad \bar{\bar{c}}_{21} = \frac{c_{21} - C_{21}c_{11}}{1 - C_{12}C_{21}}. \tag{4.10.9}$$

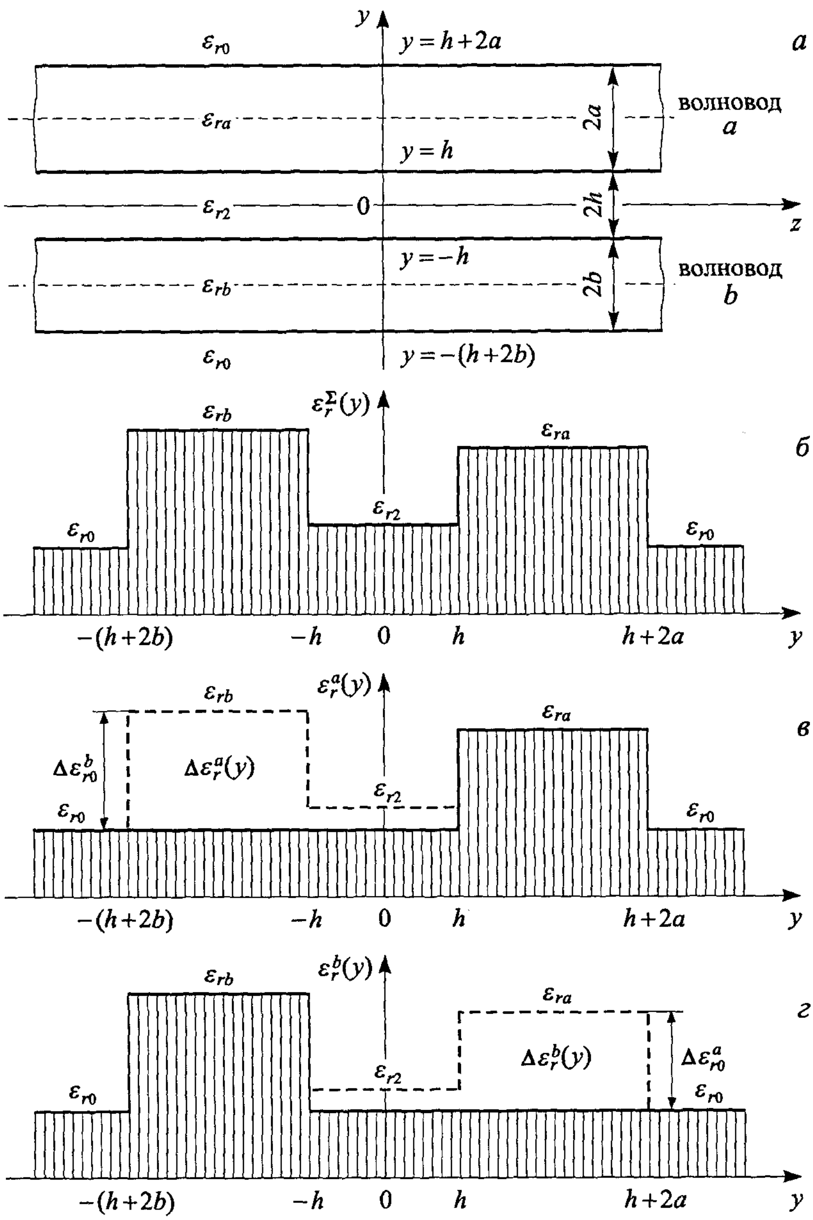


Рис. 4.2. Схематическое изображение двух планарных связанных волноводов (*а*) и профили поперечного распределения относительной диэлектрической проницаемости: *б* — $\varepsilon_r^{\Sigma}(y)$ для всей структуры, *в* — $\varepsilon_r^a(y)$ для волновода *a*, *г* — $\varepsilon_r^b(y)$ для волновода *b*. Пунктирные линии изображают диэлектрические возмущения $\Delta\varepsilon_r^a(y)$ и $\Delta\varepsilon_r^b(y)$ для каждого из волноводов

Следует отметить, что двойная черта не имеет отношения к обозначениям в табл. 1.1 (см. п. 1.9). Величины (4.10.8) и (4.10.9), названные *приведенными параметрами*, близки к введенным Харди и Стрейфером [19], только их формулы (3) и (4) содержат лишние члены, пропорциональные $(\beta_1 - \beta_2)$.

Легко убедиться в том, что наши параметры (4.10.8) и (4.10.9), в отличие от аналогичных величин Харди и Стрейфера [19], удовлетворяют общему энергетическому требованию (4.9.18), переписанному в следующем виде:

$$N_1\bar{\bar{c}}_{12} + N_2\bar{\bar{c}}_{21}^* = -i(\bar{\bar{\beta}}_1 - \bar{\bar{\beta}}_2)N_{12}. \tag{4.10.10}$$

Действительно, если принять во внимание, что коэффициенты связи (4.10.4) являются чисто мнимыми, а относительные кросс-нормы (4.10.5) вещественными, что верно для *активных мод*, то подстановка выражений (4.10.8) и (4.10.9) в (4.10.10) приводит к следующему равенству:

$$i(\beta_1 - \beta_2) = -\frac{c_{12}}{C_{12}} + \frac{c_{21}}{C_{21}}. \tag{4.10.11}$$

Выражение (4.10.11) является следствием энергетического соотношения (4.9.18), примененного к величинам (4.10.3)–(4.10.5), входящим в исходные уравнения связанных мод (4.10.1)–(4.10.2).

4.10.1. Корни характеристического уравнения. Исходные уравнения (4.10.1)–(4.10.2) для двух связанных волноводов учитывают связь как между волновыми амплитудами, так и между их производными. Введением приведенных параметров связи (4.10.8)–(4.10.9) они приведены к форме (4.10.6)–(4.10.7), типичной для обычной (не модифицированной) теории связанных мод (ОТСМ) и даваемой уравнением (Г.9.15).

Структура общего решения уравнений ОТСМ выражается формулами (Г.9.19)–(Г.9.20) с неизвестными константами A_{11} и A_{22}, которые находятся из входных краевых условий (Г.6.11)–(Г.6.12), а именно

$$a_1(z) = A_{11}e^{-\Gamma_1 z} - \frac{\Gamma_2 - i\bar{\bar{\beta}}_2}{\bar{\bar{c}}_{21}} A_{22}e^{-\Gamma_2 z}, \tag{4.10.12}$$

$$a_2(z) = -\frac{\Gamma_1 - i\bar{\bar{\beta}}_1}{\bar{\bar{c}}_{12}} A_{11}e^{-\Gamma_1 z} + A_{22}e^{-\Gamma_2 z}, \tag{4.10.13}$$

где Γ_1 и Γ_2 — корни характеристического уравнения (Г.9.18), имеющие следующий вид (см. уравнение (Г.9.21)):

$$\Gamma_{1,2} = i\,\frac{\bar{\bar{\beta}}_1 + \bar{\bar{\beta}}_2}{2} \pm \sqrt{\bar{\bar{c}}_{12}\bar{\bar{c}}_{21} - \left(\frac{\bar{\bar{\beta}}_1 - \bar{\bar{\beta}}_2}{2}\right)^2}. \tag{4.10.14}$$

Окончательные выражения для $\Gamma_{1,2}$ могут быть представлены в двух различных формах, удобных для практического применения.

Форма I соответствует обычным выражениям (Г.9.23)–(Г.9.24), которые были получены для *пассивной связи* двух мод в отсутствие потерь. В рассматриваемом случае двух связанных волноводов эти выражения должны быть модифицированы заменой обычных фазовых постоянных $\beta_{1(2)}$ и коэффициентов связи $c_{12(21)}$ на их приведенные аналоги $\bar{\bar{\beta}}_{1(2)}$ и $\bar{\bar{c}}_{12(21)}$, введенные по формулам (4.10.8) и (4.10.9). Поскольку для диэлектрических волноводов связь двух мод одного направления носит пассивный характер, то, по аналогии с отрицательным значением $c_{12}c_{21} = -|c_{12}|^2 < 0$ в ОТСМ (см. уравнение (Г.9.9)), для приведенных коэффициентов связи (4.10.9) при $|\overline{\overline{c}}_{12}| \neq |\overline{\overline{c}}_{21}|$ их произведение представляем как

$$\overline{\overline{c}}_{12}\overline{\overline{c}}_{21} = -|\overline{\overline{c}}_{12}\overline{\overline{c}}_{21}| \equiv -|\overline{\overline{c}}_{eff}|^2 < 0. \tag{4.10.15}$$

В этом случае постоянные распространения (4.10.14) представляются, по аналогии (Г.9.23)–(Г.9.24), в следующем виде:

$$\Gamma_{1,2} = i(\overline{\overline{\beta}}_0 \pm \overline{\overline{\beta}}_c). \tag{4.10.16}$$

Здесь введено среднее арифметическое *приведенных* фазовых постоянных,

$$\overline{\overline{\beta}}_0 = \frac{\overline{\overline{\beta}}_1 + \overline{\overline{\beta}}_2}{2} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} + i\,\frac{(c_{11} + c_{22}) - (c_{12}C_{21} + c_{21}C_{12})}{2(1 - C_{12}C_{21})}, \tag{4.10.17}$$

и *приведенная* фазовая константа связи

$$\overline{\overline{\beta}}_c = |\overline{\overline{c}}_{eff}|\sqrt{1 + \overline{\overline{\Delta}}_{12}^{\,2}}, \tag{4.10.18}$$

где по аналогии с (Г.9.1) определен *приведенный* параметр фазового рассогласования,

$$\overline{\overline{\Delta}}_{12} = \frac{|\overline{\overline{\beta}}_1 - \overline{\overline{\beta}}_2|}{2\,|\overline{\overline{c}}_{eff}|} \equiv \frac{|\Delta\overline{\overline{\beta}}_{12}|}{2\,|\overline{\overline{c}}_{eff}|}, \tag{4.10.19}$$

в котором

$$\Delta\overline{\overline{\beta}}_{12} \equiv \overline{\overline{\beta}}_1 - \overline{\overline{\beta}}_2 = (\beta_1 - \beta_2) + i\,\frac{(c_{11} - c_{22}) + (c_{12}C_{21} - c_{21}C_{12})}{(1 - C_{12}C_{21})}, \tag{4.10.20}$$

$$|\overline{\overline{c}}_{eff}| \equiv \sqrt{-\overline{\overline{c}}_{12}\overline{\overline{c}}_{21}} = \frac{1}{|1 - C_{12}C_{21}|}\sqrt{|(c_{12} - c_{22}C_{12})(c_{21} - c_{11}C_{21})|}. \tag{4.10.21}$$

Параметр фазового рассогласования (4.10.19) введен по отношению к разности $\Delta\overline{\overline{\beta}}_{12} = \overline{\overline{\beta}}_1 - \overline{\overline{\beta}}_2$ между приведенными фазовыми постоянными (4.10.8), которые учитывают как собственную, так и взаимную связь мод. В ОТСМ формулы (Г.9.22)–(Г.9.27) содержат аналогичный параметр (Г.9.1), в котором фазовое рассогласование равняется $\Delta\beta_{12} = \beta_1' - \beta_2'$, где фазовые постоянные $\beta_1' = \beta_1 + ic_{11}$ и $\beta_2' = \beta_2 + ic_{22}$ учитывают только самовоздействие (самосвязь) мод. Из (4.10.8) следует, что

$$\Delta\overline{\overline{\beta}}_{12} \equiv \overline{\overline{\beta}}_1 - \overline{\overline{\beta}}_2 = (\beta_1' - \beta_2') + i(\overline{\overline{c}}_{12}C_{21} - \overline{\overline{c}}_{21}C_{12}). \tag{4.10.22}$$

Форма II используется в работе [28] для того, чтобы записать корни (4.10.14) в виде

$$\Gamma_{1,2} = i\left(\overline{\overline{\beta}}_0 \pm \sqrt{\delta^2 + \varkappa^2}\ \right), \tag{4.10.23}$$

где фазовая постоянная $\overline{\overline{\beta}}_0$ имеет тот же вид (4.10.17) и обычным образом вводится фазовое рассогласование

$$\delta = \frac{\beta_1' - \beta_2'}{2} = \frac{(\beta_1 - \beta_2) + i(c_{11} - c_{22})}{2}. \tag{4.10.24}$$

Таким образом, из формул (4.10.14) и (4.10.22)–(4.10.24) следует, что величина $\varkappa^2$, входящая в выражение (4.10.23), имеет следующий вид:

$$\varkappa^2 = \frac{1}{2}\left[i(\beta_1-\beta_2)-(c_{11}-c_{22})-\frac{1}{2}\left(\bar{\bar{c}}_{12}C_{21}-\bar{\bar{c}}_{21}C_{12}\right)\right]\times$$
$$\times\left(\bar{\bar{c}}_{12}C_{21}-\bar{\bar{c}}_{21}C_{12}\right)-\bar{\bar{c}}_{12}\bar{\bar{c}}_{21}. \qquad (4.10.25)$$

Подстановка энергетического соотношения (4.10.11) в (4.10.25) приводит к окончательному выражению

$$\varkappa^2 = -\frac{\left(\bar{\bar{c}}_{12}C_{21}+\bar{\bar{c}}_{21}C_{12}\right)^2}{4C_{12}C_{21}}-\frac{\left(\bar{\bar{c}}_{12}C_{21}-\bar{\bar{c}}_{21}C_{12}\right)^2}{4C_{12}C_{21}}(1-C_{12}C_{21}), \qquad (4.10.26)$$

где

$$\left(\bar{\bar{c}}_{12}C_{21}\pm\bar{\bar{c}}_{21}C_{12}\right)=\frac{(c_{12}C_{21}\pm c_{21}C_{12})-(c_{22}\pm c_{11})\,C_{12}C_{21}}{1-C_{12}C_{21}}. \qquad (4.10.27)$$

Если использовать нормировку мод на единичную мощность в виде (1.8.49), полагая $N_1 \equiv N_m^a = N_2 \equiv N_n^b = 4$ Вт, тогда выражение (4.9.2) для относительной кросс-нормы мод принимает вид

$$C_{12}\equiv C_{mn}^{ab}=\frac{N_{mn}^{ab}}{N_m^a}=\frac{1}{4}\int\limits_S\left(\widehat{\mathbf{E}}_m^{a*}\times\widehat{\mathbf{H}}_n^b+\widehat{\mathbf{E}}_n^b\times\widehat{\mathbf{H}}_m^{a*}\right)\cdot\mathbf{e}_z\,dS=$$
$$=\frac{N_{nm}^{ba*}}{N_n^b}=C_{nm}^{ba*}\equiv C_{21}^*. \qquad (4.10.28)$$

Поскольку для активных мод их кросс-нормы вещественные, то соотношение (4.10.28) позволяет приравнять их и, следуя [28], обозначить как X, т. е. $C_{12}=C_{21}\equiv X$. В этом случае выражения (4.10.26) и (4.10.27) можно переписать в следующем виде:

$$\varkappa^2=-\frac{(\bar{\bar{c}}_{12}+\bar{\bar{c}}_{21})^2}{4}-\frac{(\bar{\bar{c}}_{12}-\bar{\bar{c}}_{21})^2}{4}(1-X^2), \qquad (4.10.29)$$

где

$$(\bar{\bar{c}}_{12}\pm\bar{\bar{c}}_{21})=\frac{(c_{12}\pm c_{21})-(c_{22}\pm c_{11})X}{1-X^2}. \qquad (4.10.30)$$

Учитывая, что в рассматриваемом случае для активных мод все коэффициенты связи c_{kl} (собственные и взаимные, $k,l=1,2$) являются чисто мнимыми величинами, перепишем формулу (3.40) из работы [28] в наших обозначениях:

$$\varkappa_{[28]}=\frac{|c_{12}+c_{21}|-X|c_{11}+c_{22}|}{2(1-X^2)^{1/2}}=\sqrt{-\frac{1-X^2}{4}(\bar{\bar{c}}_{12}+\bar{\bar{c}}_{21})^2}. \qquad (4.10.31)$$

Из сравнения (4.10.31) с (4.10.29)–(4.10.30) видно, что формула (3.40) работы [28] неточная и должна быть заменена выражением для $\varkappa$, полученным в виде (4.10.26)–(4.10.27) или (4.10.29)–(4.10.30).

4.10.2. Обмен мощностью между модами связанных волноводов. Знание постоянных распространения $\Gamma_{1,2}$ позволяет найти продольное распределение волновых амплитуд, описываемое выражениями (4.10.12) и (4.10.13). С этой целью для вычисления неизвестных констант A_{11} и A_{22} в этих выражениях необходимо наложить входные краевые условия при $z = 0$:

$$a_1(0) \neq 0 \quad \text{и} \quad a_2(0) \neq 0. \tag{4.10.32}$$

Однако необходимость в таком вычислении отпадает, если воспользоваться постоянными распространения $\Gamma_{1,2}$ в форме I, даваемой уравнением (4.10.16). Эта форма оказывается более удобной по сравнению с формой II, даваемой уравнением (4.10.23), так как она обеспечивает прямую аналогию с результатами ОТСМ, изложенными в приложении Г (см. п. Г.10 для режима попутного переизлучения пассивно связанных мод).

Взаимодействие двух связанных диэлектрических волноводов полностью соответствует этому режиму, так как уравнения связанных мод (4.10.6)–(4.10.7) с приведенными параметрами связи (4.10.8)–(4.10.9) совпадает по форме с аналогичными уравнениями (Г.9.15), соответствующими ОТСМ. По этой причине, делая соответствующие замены в формулах (Г.10.1) и (Г.10.2) для волновых амплитуд, получаем необходимые выражения:

$$a_1(z) = \left[a_1(0)\left(\cos\overline{\overline{\beta}}_c z - i\frac{\Delta\overline{\overline{\beta}}_{12}}{2\overline{\overline{\beta}}_c}\sin\overline{\overline{\beta}}_c z\right) + a_2(0)\frac{\overline{\overline{c}}_{12}}{\overline{\overline{\beta}}_c}\sin\overline{\overline{\beta}}_c z\right]e^{-i\overline{\overline{\beta}}_0 z}, \tag{4.10.33}$$

$$a_2(z) = \left[a_2(0)\left(\cos\overline{\overline{\beta}}_c z + i\frac{\Delta\overline{\overline{\beta}}_{12}}{2\overline{\overline{\beta}}_c}\sin\overline{\overline{\beta}}_c z\right) + a_1(0)\frac{\overline{\overline{c}}_{21}}{\overline{\overline{\beta}}_c}\sin\overline{\overline{\beta}}_c z\right]e^{-i\overline{\overline{\beta}}_0 z}, \tag{4.10.34}$$

где приведенные величины $\overline{\overline{\beta}}_0$, $\overline{\overline{\beta}}_c$ и $\Delta\overline{\overline{\beta}}_{12}$ имеют вид (4.10.17)–(4.10.21).

Вычислим сначала собственные мощности, переносимые модами a_1 и a_2, используя нормировку мод на единичную мощность $N_1 = N_2 = 4$ Вт, соотношение $|\overline{\overline{c}}_{eff}|^2 = -\overline{\overline{c}}_{12}\overline{\overline{c}}_{21} = |\overline{\overline{c}}_{12}||\overline{\overline{c}}_{21}|$ и упрощающее предположение $a_2(0) = 0$ (ср. уравнения (Г.10.3) и (Г.10.4)):

$$P_1(z) \equiv |a_1(z)|^2 = P_1(0)\left(1 - \overline{\overline{F}}_{pas}\sin^2\overline{\overline{\beta}}_c z\right), \tag{4.10.35}$$

$$P_2(z) \equiv |a_2(z)|^2 = P_1(0)\frac{|\overline{\overline{c}}_{21}|}{|\overline{\overline{c}}_{12}|}\overline{\overline{F}}_{pas}\sin^2\overline{\overline{\beta}}_c z, \tag{4.10.36}$$

где $P_1(0) \equiv |a_1(0)|^2$ — входная мощность, поставляемая в систему модой a_1. По аналогии с (Г.10.7), в выражениях (4.10.35) и (4.10.36) введен *приведенный* фактор пассивной связи мод

$$\overline{\overline{F}}_{pas} = \frac{1}{1 + \overline{\overline{\Delta}}_{12}^{\,2}}, \tag{4.10.37}$$

где *приведенный* параметр фазового рассогласования $\overline{\overline{\Delta}}_{12}$ определен выражением (4.10.19).

Как видно из (4.10.35) и (4.10.36), сумма собственных мощностей, переносимых вдоль направления z, не сохраняется. Этого следовало ожидать, так как моды разных волноводов, будучи неортогональными, кроме собственных мощностей, переносят совместно взаимную (кросс-) мощность. Вычисляя ее по формуле (Д.1.10) (при нормировке на единичную мощность), получаем

$$\begin{aligned}
P_{12}(z) &\equiv \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\Big\{N_{12}\,a_1^*(z)a_2(z)\Big\} = 2\mathrm{Re}\Big\{C_{12}\,a_1^*(z)a_2(z)\Big\} = \\
&= 2\mathrm{Re}\left\{C_{12}\left(\cos\overline{\overline{\beta}}_c z + i\frac{\Delta\overline{\overline{\beta}}_{12}}{2\overline{\overline{\beta}}_c}\sin\overline{\overline{\beta}}_c z\right)\frac{\overline{\overline{c}}_{21}}{\overline{\overline{\beta}}_c}\sin\overline{\overline{\beta}}_c z\right\}|a_1(0)|^2 = \\
&= i\Delta\overline{\overline{\beta}}_{12}\,C_{12}\,\frac{\overline{\overline{c}}_{21}}{\overline{\overline{\beta}}_c^{\,2}}\sin^2\overline{\overline{\beta}}_c z\,P_1(0) = \\
&= i\Delta\overline{\overline{\beta}}_{12}\,C_{12}\,\frac{\overline{\overline{c}}_{21}}{|\overline{\overline{c}}_{eff}|^2}\,\overline{\overline{F}}_{pas}\sin^2\overline{\overline{\beta}}_c z\,P_1(0).
\end{aligned} \tag{4.10.38}$$

Здесь учтено соотношение $\overline{\overline{\beta}}_c = |\overline{\overline{c}}_{eff}|\,\overline{\overline{F}}_{pas}^{\,-1/2}$ (см. (4.10.18) и (4.10.37)) и принято во внимание, что приведенные коэффициенты связи $\overline{\overline{c}}_{12}$ и $\overline{\overline{c}}_{21}$ (так же, как и исходные c_{12} и c_{21}) являются чисто мнимыми для рассматриваемых активных мод. Из энергетического соотношения (4.10.10) следует, что

$$\overline{\overline{c}}_{12} + \overline{\overline{c}}_{21}^{\,*} = -i\Delta\overline{\overline{\beta}}_{12}\,C_{12}. \tag{4.10.39}$$

Подстановка (4.10.39) в равенство (4.10.38) с учетом (4.10.15) дает выражение для кросс-мощности, переносимой парой мод связанных волноводов:

$$P_{12}(z) = P_1(0)\left(1 - |\overline{\overline{c}}_{21}|/|\overline{\overline{c}}_{12}|\right)\overline{\overline{F}}_{pas}\sin^2\overline{\overline{\beta}}_c z, \tag{4.10.40}$$

где, согласно (4.10.9),

$$\frac{\overline{\overline{c}}_{21}}{\overline{\overline{c}}_{12}} = \frac{c_{21} - c_{11}C_{21}}{c_{12} - c_{22}C_{12}}. \tag{4.10.41}$$

Теперь сумма трех мощностей (4.10.35), (4.10.36) и (4.10.40) сохраняется вдоль направления распространения взаимодействующих мод:

$$P_1(z) + P_2(z) + P_{12}(z) = P_1(0) = \mathrm{const}. \tag{4.10.42}$$

Периодическое распределение мощностей (4.10.35), (4.10.36), (4.10.40), свойственное пассивной связи попутных мод, изображено на рис. 4.3 в нормированной форме $P_k(z)/P_1(0)$, $k = 1, 2, 12$. Закон сохранения мощности в виде (4.10.42) требует, чтобы сумма заштрихованных площадей на двух нижних рисунках была равна такой же площади на верхнем рисунке.

Как следует из (4.10.40), кросс-мощность P_{12} исчезает в случае двух *идентичных* волноводов, когда $\overline{\overline{c}}_{12} = \overline{\overline{c}}_{21}$. В этом случае картина продольного распределения собственных мощностей на рис. 4.3 становится полностью совпадающей со сплошными кривыми на рис. Г.6 (для непараметрического режима при $|\omega_1| = |\omega_2|$), которые описывают периодическое переизлучение мощности между связанными модами. Однако если волноводы *неидентичные*, то возможны две ситуации в зависимости от соотношения между приведенными коэффициентами связи $\overline{\overline{c}}_{12}$ и $\overline{\overline{c}}_{21}$:

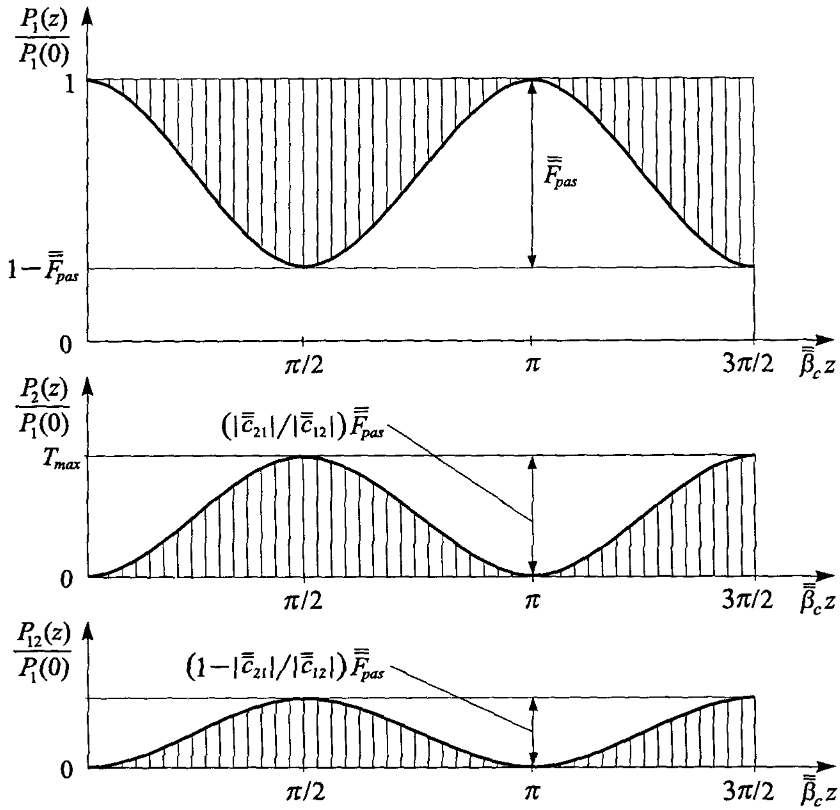


Рис. 4.3. Качественная картина продольного распределения собственных мощностей $P_1(z)/P_1(0)$, $P_2(z)/P_1(0)$ и взаимной мощности $P_{12}(z)/P_1(0)$ (нормированных к входной мощности $P_1(0)$), которые переносят направляемые моды a_1 и a_2, распространяющиеся в двухволноводной системе. Закон сохранения мощности требует равенства заштрихованной площади на верхнем графике сумме аналогичных площадей на нижних графиках

1) при $|\bar{\bar{c}}_{12}| < |\bar{\bar{c}}_{21}|$ кросс-мощность положительна ($P_{12} > 0$) и картина соответствует изображенной на рис. 4.3;

2) при $|\bar{\bar{c}}_{12}| > |\bar{\bar{c}}_{21}|$ кросс-мощность становится отрицательной, т.е. возникает противопоток $P_{12} < 0$, направленный навстречу потокам собственной мощности P_1 и P_2.

Для того, чтобы детально проанализировать взаимодействие между модами двух связанных волноводов на основе вышеприведенных формул, необходимо знать исходные коэффициенты связи $c_{12} \equiv c_{mn}^{ab}$ и $c_{21} \equiv c_{nm}^{ba}$. Они позволяют вычислить *приведенные* параметры (отмеченные двойной чертой), даваемые формулами (4.10.8)–(4.10.9), (4.10.17)–(4.10.21) и (4.10.37), и воспользоваться выражениями (4.10.33)–(4.10.36) и (4.10.40) для нахождения продольного распределения амплитуд мод и переносимых ими мощностей.

Будем вычислять исходные коэффициенты связи, даваемые формулой (4.9.4), отдельно для мод TE- и TM-типов в планарной диэлектрической двухволноводной структуре.

4.11. Коэффициенты связи для мод ТЕ- и ТМ-типа в связанных волноводах

Необходимые для анализа связанных волноводов коэффициенты связи даются формулой (4.9.4), которая содержит два вклада, порожденные тензорами *объемной связи* $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_c^{a,b}$ и *поверхностной связи* $\Delta\boldsymbol{\xi}_c^{a,b}$ для волноводов a и b:

$$c_{mn}^{ab} = \left(c_{mn}^{ab}\right)_{bulk} + \left(c_{mn}^{ab}\right)_{surf} \quad \text{и} \quad c_{nm}^{ba} = \left(c_{nm}^{ba}\right)_{bulk} + \left(c_{nm}^{ba}\right)_{surf}, \tag{4.11.1}$$

где коэффициенты *объемной связи*

$$\left(c_{mn}^{ab}\right)_{bulk} = -\frac{i\omega}{N_m^a} \int\limits_{S_b^a} \left(\widehat{\mathbf{E}}_m^{a*} \cdot \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^{\,a} \cdot \widehat{\mathbf{E}}_n^b\right) dS, \tag{4.11.2}$$

$$\left(c_{nm}^{ba}\right)_{bulk} = -\frac{i\omega}{N_n^b} \int\limits_{S_b^b} \left(\widehat{\mathbf{E}}_n^{b*} \cdot \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^{\,b} \cdot \widehat{\mathbf{E}}_m^a\right) dS, \tag{4.11.3}$$

и коэффициенты *поверхностной связи*

$$\left(c_{mn}^{ab}\right)_{surf} = -\frac{1}{N_m^a} \int\limits_{L_b^a} \left(\widehat{\mathbf{H}}_m^{a*} \cdot \Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c^{\,a} \cdot \widehat{\mathbf{E}}_n^b\right) dL, \tag{4.11.4}$$

$$\left(c_{nm}^{ba}\right)_{surf} = -\frac{1}{N_n^b} \int\limits_{L_b^b} \left(\widehat{\mathbf{H}}_n^{b*} \cdot \Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c^{\,b} \cdot \widehat{\mathbf{E}}_m^a\right) dL. \tag{4.11.5}$$

Согласно (4.10.4), исходные коэффициенты связи (собственные и взаимные), которые в комбинациях с относительными нормировочными коэффициентами (4.9.2) образуют приведенные параметры связи (4.10.8)–(4.10.9), составлены из выражений (4.11.2)–(4.11.5) в виде сумм объемных и поверхностных вкладов:

$$c_{11} \equiv c_{mm}^{aa} = \left(c_{mm}^{aa}\right)_{bulk} + \left(c_{mm}^{aa}\right)_{surf} \equiv c_{11}^{bulk} + c_{11}^{surf}, \tag{4.11.6}$$

$$c_{12} \equiv c_{mn}^{ab} = \left(c_{mn}^{ab}\right)_{bulk} + \left(c_{mn}^{ab}\right)_{surf} \equiv c_{12}^{bulk} + c_{12}^{surf}, \tag{4.11.7}$$

$$c_{22} \equiv c_{nn}^{bb} = \left(c_{nn}^{bb}\right)_{bulk} + \left(c_{nn}^{bb}\right)_{surf} \equiv c_{22}^{bulk} + c_{22}^{surf}, \tag{4.11.8}$$

$$c_{21} \equiv c_{nm}^{ba} = \left(c_{nm}^{ba}\right)_{bulk} + \left(c_{nm}^{ba}\right)_{surf} \equiv c_{21}^{bulk} + c_{21}^{surf}. \tag{4.11.9}$$

Коэффициенты связи $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_c^{a,b}$ и $\Delta\xi_c^{a,b}$, входящие в (4.11.2)–(4.11.5), были вычислены в п. 4.5.1 для двухволноводных структур:

- тензоры *объемной связи* (см. формулы (4.5.11), (4.5.16), (4.5.19)–(4.5.20))

$$\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^{\,a} = \begin{cases} \Delta\varepsilon^a\left[\overline{\mathbf{I}}_t + \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z\left(1 + \Delta\varepsilon_r^a/\varepsilon_r^a + \Delta\varepsilon_r^b/\varepsilon_r^b\right)^{-1}\right], \\ \Delta\varepsilon^a\left[\overline{\mathbf{I}}_t + \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z\,\varepsilon_r^a/(\varepsilon_r^a + \Delta\varepsilon_r^a)\right] \equiv \Delta\varepsilon_0^b\left[\overline{\mathbf{I}}_t + \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z\,\varepsilon_{r0}/\varepsilon_{rb}\right], \end{cases} \tag{4.11.10}$$

$$\Delta\bar{\varepsilon}_c^b = \begin{cases} \Delta\varepsilon^b\left[\bar{\mathbf{I}}_t + \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z\left(1 + \Delta\varepsilon_r^a/\varepsilon_r^a + \Delta\varepsilon^b/\varepsilon_r^b\right)^{-1}\right], \\ \Delta\varepsilon^b\left[\bar{\mathbf{I}}_t + \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z\,\varepsilon_r^b/(\varepsilon_r^b + \Delta\varepsilon_r^b)\right] \equiv \Delta\varepsilon_0^a\left[\bar{\mathbf{I}}_t + \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z\,\varepsilon_{r0}/\varepsilon_{ra}\right]; \end{cases} \tag{4.11.11}$$

• тензоры *поверхностной связи* (см. (4.5.12), (4.5.17), (4.5.21)–(4.5.22))

$$\Delta\bar{\xi}_c^a = \begin{cases} \tau_b^a\mathbf{e}_z\left[(\Delta\varepsilon_r^a/\varepsilon_r^a)\left(1 + \Delta\varepsilon_r^a/\varepsilon_r^a + \Delta\varepsilon_r^b/\varepsilon_r^b\right)^{-1}\right]\Big|_{L_b^a}, \\ \tau_b^a\mathbf{e}_z\left[\Delta\varepsilon_r^a\left(\varepsilon_r^a + \Delta\varepsilon_r^a\right)^{-1}\right]\Big|_{L_b^a} \equiv \tau_b\mathbf{e}_z\,\Delta\varepsilon_{r0}^b(L_b)/\varepsilon_{rb}(L_b), \end{cases} \tag{4.11.12}$$

$$\Delta\bar{\xi}_c^b = \begin{cases} \tau_b^b\mathbf{e}_z\left[(\Delta\varepsilon_r^b/\varepsilon_r^b)\left(1 + \Delta\varepsilon_r^a/\varepsilon_r^a + \Delta\varepsilon_r^b/\varepsilon_r^b\right)^{-1}\right]\Big|_{L_b^b}, \\ \tau_b^b\mathbf{e}_z\left[\Delta\varepsilon_r^b\left(\varepsilon_r^b + \Delta\varepsilon_r^b\right)^{-1}\right]\Big|_{L_b^b} \equiv \tau_a\mathbf{e}_z\,\Delta\varepsilon_{r0}^a(L_a)/\varepsilon_{ra}(L_a). \end{cases} \tag{4.11.13}$$

Нижнее выражение в каждой из формул (4.11.10)–(4.11.13) относится к структурам с единой внешней средой, в которую погружены оба волновода, так что $\Delta\varepsilon_r^a(y)\Delta\varepsilon_r^b(y) = 0$, а верхнее выражение соответствует более общей ситуации, когда $\Delta\varepsilon_r^a(y)\Delta\varepsilon_r^b(y) \neq 0$, т. е. когда диэлектрические возмущения для каждого отдельного волновода перекрываются в пространстве.

Именно такая ситуация имеет место на рис. 4.2, где $\Delta\varepsilon_r^a(y)\Delta\varepsilon_r^b(y) \neq 0$ в пределах интервала $-h < y < h$. Действительно, как следует из рис. 4.2, диэлектрические возмущения равняются

$$\Delta\varepsilon_r^a(y) = \begin{cases} \varepsilon_{rb} - \varepsilon_{r0} & \text{при} \quad -(h+2b) < y < -h, \\ \varepsilon_{r2} - \varepsilon_{r0} & \text{при} \quad -h < y < h, \\ 0 & \text{в других местах}, \end{cases} \tag{4.11.14}$$

$$\Delta\varepsilon_r^b(y) = \begin{cases} \varepsilon_{ra} - \varepsilon_{r0} & \text{при} \quad h < y < (h+2a), \\ \varepsilon_{r2} - \varepsilon_{r0} & \text{при} \quad -h < y < h, \\ 0 & \text{в других местах}, \end{cases} \tag{4.11.15}$$

в то время как невозмущенные профили диэлектрической проницаемости для каждого волновода равняются

$$\varepsilon_r^a(y) = \begin{cases} \varepsilon_{ra} & \text{при} \quad h < y < (h+2a), \\ \varepsilon_{r0} & \text{в других местах}, \end{cases} \tag{4.11.16}$$

$$\varepsilon_r^b(y) = \begin{cases} \varepsilon_{rb} & \text{при} \quad -(h+2b) < y < -h, \\ \varepsilon_{r0} & \text{в других местах}. \end{cases} \tag{4.11.17}$$

Из (4.11.14)–(4.11.17) следуют формулы для относительных проницаемостей:

$$\frac{\Delta\varepsilon_r^a(y)}{\varepsilon_r^a(y)} = \begin{cases} (\varepsilon_{rb} - \varepsilon_{r0})/\varepsilon_{r0} & \text{при} \quad -(h+2b) < y < -h, \\ (\varepsilon_{r2} - \varepsilon_{r0})/\varepsilon_{r0} & \text{при} \quad -h < y < h, \\ 0 & \text{в других местах}, \end{cases} \tag{4.11.18}$$

$$\frac{\Delta\varepsilon_r^b(y)}{\varepsilon_r^b(y)} = \begin{cases} (\varepsilon_{ra} - \varepsilon_{r0})/\varepsilon_{r0} & \text{при} \quad h < y < (h+2a), \\ (\varepsilon_{r2} - \varepsilon_{r0})/\varepsilon_{r0} & \text{при} \quad -h < y < h, \\ \quad 0 & \text{в других местах.} \end{cases} \tag{4.11.19}$$

Ситуация, соответствующая структурам с единой внешней средой, может быть реализована на рис. 4.2, если положить $\varepsilon_{r2} = \varepsilon_{r0}$. В этом случае вторая строка в (4.11.18)–(4.11.19) исчезает и становятся применимыми упрощенные нижние выражения в (4.11.10)–(4.11.13).

Подстановка тензоров связи (4.11.10)–(4.11.13) в формулы (4.11.2)–(4.11.5) дает общие выражения для коэффициентов связи, справедливые для произвольной двухволноводной структуры:

- коэффициенты *объемной связи*

$$\left(c_{mn}^{ab}\right)_{bulk} = -\frac{i\omega}{N_m^a} \int\limits_{S_b^a} \Delta\varepsilon^a \left(\widehat{\mathbf{E}}_{mt}^{a*} \cdot \widehat{\mathbf{E}}_{nt}^b + \frac{1}{1 + \Delta\varepsilon_r^a/\varepsilon_r^a + \Delta\varepsilon_r^b/\varepsilon_r^b} \widehat{E}_{mz}^{a*} \widehat{E}_{nz}^b\right) dS =$$

$$= -\frac{i\omega}{N_m^a} \int\limits_{S_b^a} \Delta\varepsilon^a \left(\widehat{\mathbf{E}}_{mt}^{a*} \cdot \widehat{\mathbf{E}}_{nt}^b + \frac{\varepsilon_r^a}{\varepsilon_r^a + \Delta\varepsilon_r^a} \widehat{E}_{mz}^{a*} \widehat{E}_{nz}^b\right) dS, \tag{4.11.20}$$

$$\left(c_{nm}^{ba}\right)_{bulk} = -\frac{i\omega}{N_n^b} \int\limits_{S_b^b} \Delta\varepsilon^b \left(\widehat{\mathbf{E}}_{nt}^{b*} \cdot \widehat{\mathbf{E}}_{mt}^a + \frac{1}{1 + \Delta\varepsilon_r^a/\varepsilon_r^a + \Delta\varepsilon_r^b/\varepsilon_r^b} \widehat{E}_{nz}^{b*} \widehat{E}_{mz}^a\right) dS =$$

$$= -\frac{i\omega}{N_n^b} \int\limits_{S_b^b} \Delta\varepsilon^b \left(\widehat{\mathbf{E}}_{nt}^{b*} \cdot \widehat{\mathbf{E}}_{mt}^a + \frac{\varepsilon_r^b}{\varepsilon_r^b + \Delta\varepsilon_r^b} \widehat{E}_{nz}^{b*} \widehat{E}_{mz}^a\right) dS; \tag{4.11.21}$$

- коэффициенты *поверхностной связи*

$$\left(c_{mn}^{ab}\right)_{surf} = -\frac{1}{N_m^a} \int\limits_{L_b^a} \frac{\Delta\varepsilon_r^a/\varepsilon_r^a}{1 + \Delta\varepsilon_r^a/\varepsilon_r^a + \Delta\varepsilon_r^b/\varepsilon_r^b} \left(\widehat{\mathbf{H}}_m^{a*} \cdot \tau_b^a\right) \widehat{E}_{nz}^b \, dL =$$

$$= -\frac{1}{N_m^a} \int\limits_{L_b^a} \frac{\Delta\varepsilon_r^a}{\varepsilon_r^a + \Delta\varepsilon_r^a} \left(\widehat{\mathbf{H}}_m^{a*} \cdot \tau_b^a\right) \widehat{E}_{nz}^b \, dL, \tag{4.11.22}$$

$$\left(c_{nm}^{ba}\right)_{surf} = -\frac{1}{N_n^b} \int\limits_{L_b^b} \frac{\Delta\varepsilon_r^b/\varepsilon_r^b}{1 + \Delta\varepsilon_r^a/\varepsilon_r^a + \Delta\varepsilon_r^b/\varepsilon_r^b} \left(\widehat{\mathbf{H}}_n^{b*} \cdot \tau_b^b\right) \widehat{E}_{mz}^a \, dL =$$

$$= -\frac{1}{N_n^b} \int\limits_{L_b^b} \frac{\Delta\varepsilon_r^b}{\varepsilon_r^b + \Delta\varepsilon_r^b} \left(\widehat{\mathbf{H}}_n^{b*} \cdot \tau_b^b\right) \widehat{E}_{mz}^a \, dL. \tag{4.11.23}$$

В формулах (4.11.20)–(4.11.23) первое выражение описывает двухволноводные структуры с произвольным профилем диэлектрической проницаемости, а второе соответствует структурам с единой внешней средой, для которых $\Delta\varepsilon_r^a(y)\Delta\varepsilon_r^b(y) = 0$.

Знание поперечного распределения полей для мод ТЕ- и ТМ-типов позволяет вычислить коэффициенты связи, подставляя (4.11.14)–(4.11.19) в выражения (4.11.20)–(4.11.23). Такие вычисления выполнены в приложении Ж для любой пары мод, принадлежащих связанным волноводам, изображенным на рис. 4.2.

Будем анализировать полученные выражения для ТЕ- и ТМ-мод в применении к двухволноводным структурам с единой внешней средой, когда $\varepsilon_{r2} = \varepsilon_{r0}$ на рис. 4.2, хотя все формулы в приложении Ж выведены для более общего случая при $\varepsilon_{r2} \neq \varepsilon_{r0}$.

4.11.1. Коэффициенты связи для мод ТЕ-типа. В планарных диэлектрических волноводах моды ТЕ-типа имеют такую структуру поперечного распределения полей (см. уравнения (Ж.1.5)–(Ж.1.12)), что коэффициенты поверхностной связи всегда отсутствуют (в силу того, что $H_x^{TE} = 0$), а коэффициенты объемной связи (собственные и взаимные) содержат лишь поперечные электрические поля $\widehat{E}_{mx}^a$ и $\widehat{E}_{nx}^b$.

Вычисления, выполненные в приложении Ж, дают коэффициенты объемной связи в виде формул (Ж.1.14)–(Ж.1.17), которые переписаны ниже в упрощенной форме для волноводов с единой внешней средой, когда $\varepsilon_{r2} = \varepsilon_{r0}$:

$$c_{11} = -i\frac{(\varkappa_m^a)^2}{\beta_m^a d_m^a}\,\frac{\varepsilon_{rb}-\varepsilon_{r0}}{\varepsilon_{ra}-\varepsilon_{r0}}\,\frac{1-e^{-4\zeta_m^a b}}{2\zeta_m^a}\,e^{-4\zeta_m^a h}, \tag{4.11.24}$$

$$c_{22} = -i\frac{(\varkappa_n^b)^2}{\beta_n^b d_n^b}\,\frac{\varepsilon_{ra}-\varepsilon_{r0}}{\varepsilon_{rb}-\varepsilon_{r0}}\,\frac{1-e^{-4\zeta_n^b a}}{2\zeta_n^b}\,e^{-4\zeta_n^b h}, \tag{4.11.25}$$

$$c_{12} = -i\frac{\varkappa_m^a\varkappa_n^b}{\sqrt{\beta_m^a d_m^a\,\beta_n^b d_n^b}}\sqrt{\frac{\varepsilon_{rb}-\varepsilon_{r0}}{\varepsilon_{ra}-\varepsilon_{r0}}}\,\frac{\left(1-e^{-2\zeta_m^a b}\right)\zeta_m^a+\left(1+e^{-2\zeta_m^a b}\right)\zeta_n^b}{(\zeta_m^a)^2+(\varkappa_n^b)^2}\,e^{-2\zeta_m^a h}, \tag{4.11.26}$$

$$c_{21} = -i\frac{\varkappa_m^a\varkappa_n^b}{\sqrt{\beta_m^a d_m^a\,\beta_n^b d_n^b}}\sqrt{\frac{\varepsilon_{ra}-\varepsilon_{r0}}{\varepsilon_{rb}-\varepsilon_{r0}}}\,\frac{\left(1-e^{-2\zeta_n^b a}\right)\zeta_n^b+\left(1+e^{-2\zeta_n^b a}\right)\zeta_m^a}{(\zeta_n^b)^2+(\varkappa_m^a)^2}\,e^{-2\zeta_n^b h}. \tag{4.11.27}$$

Здесь β_m^a и β_n^b — невозмущенные фазовые постоянные m-й моды волновода a и n-й моды волновода b, которые определяют поперечные волновые числа для волноведущего слоя ($\varkappa_m^a$ и $\varkappa_n^b$) и для внешней среды (ζ_m^a и ζ_n^b) в виде следующих соотношений:

$$\varkappa_m^a = \sqrt{\omega^2\varepsilon_a\mu_0-(\beta_m^a)^2}, \qquad \varkappa_n^b = \sqrt{\omega^2\varepsilon_b\mu_0-(\beta_n^b)^2}, \tag{4.11.28}$$

$$\zeta_m^a = \sqrt{(\beta_m^a)^2-\omega^2\varepsilon_0\mu_0}, \qquad \zeta_n^b = \sqrt{(\beta_n^b)^2-\omega^2\varepsilon_0\mu_0}. \tag{4.11.29}$$

Эффективные толщины d_m^a и d_n^b волноведущих слоев для ТЕ-мод, входящие в выражения (4.11.24)–(4.11.27), определяются общей формулой (1.8.20), которая принимает следующий вид для симметричных волноводов:

$$d_m^a = 2\left(a + \frac{1}{\zeta_m^a}\right) \quad \text{и} \quad d_n^b = 2\left(b + \frac{1}{\zeta_n^b}\right). \tag{4.11.30}$$

Существенное упрощение коэффициентов связи получается при взаимодействии одинаковых мод ТЕ-типа ($m = n$) в двух идентичных волноводах ($a = b$ и $\varepsilon_{ra} = \varepsilon_{rb}$), когда $\beta_m^a = \beta_n^b \equiv \beta_m$, $\varkappa_m^a = \varkappa_n^b \equiv \varkappa_m$ и $\zeta_m^a = \zeta_n^b \equiv \zeta_m$. В этом случае выражения (4.11.24)–(4.11.27) принимают следующую симметричную форму:

$$c_{11} = c_{22} = -i\frac{\varkappa_m^2}{\beta_m d_m}\,\frac{1 - e^{-4\zeta_m a}}{2\zeta_m}\,e^{-4\zeta_m h}, \tag{4.11.31}$$

$$c_{12} = c_{21} = -i\frac{\zeta_m}{\beta_m d_m}\,\frac{2\varepsilon_{r0}}{\varepsilon_{ra} - \varepsilon_{r0}}\left(\frac{\varkappa_m}{k_0}\right)^2 e^{-2\zeta_m h}. \tag{4.11.32}$$

Формула (4.11.32) совпадает с аналогичной формулой (11.8-15), приведенной в [16] (при сравнении следует делать замены: $\beta_m \to \beta$, $\varkappa_m \to h$, $\zeta_m \to p$, $d_m \to (t + 2/p)$, $2h \to s$, а также учесть, что $\varkappa_m^2 + \zeta_m^2 = k_0^2(\varepsilon_{ra} - \varepsilon_{r0})/\varepsilon_{r0}$).

4.11.2. Коэффициенты связи для мод ТМ-типа. Для мод ТМ-типа ситуация межмодовой связи становится существенно сложнее. Кроме поперечных электрических полей ($\widehat{E}_{my}^a, \widehat{E}_{ny}^b$), во взаимодействии также участвуют продольные электрические поля ($\widehat{E}_{mz}^a, \widehat{E}_{nz}^b$) и поперечные магнитные поля ($\widehat{H}_{mx}^a, \widehat{H}_{nx}^b$) (см. уравнения (Ж.2.9)–(Ж.2.20)). Именно последние приводят к появлению тензоров поверхностной связи.

Вычисления, выполненные в приложении Ж, дают выражения для коэффициентов объемной и поверхностной связи в виде формул (Ж.2.22)–(Ж.2.25) и (Ж.2.29)–(Ж.2.32), которые переписаны ниже в упрощенной форме для случая волноводов с единой внешней средой, когда $\varepsilon_{r2} = \varepsilon_{r0}$:

- коэффициенты *объемной связи*

$$c_{11}^{bulk} = -i\frac{(\varkappa_m^a)^2}{\beta_m^a d_m^a}\,\frac{\varepsilon_{rb} - \varepsilon_{r0}}{\varepsilon_{ra} - \varepsilon_{r0}}\,\frac{1 - e^{-4\zeta_m^a b}}{2\zeta_m^a}\,F_m^a\,\mathcal{F}_m\,e^{-4\zeta_m^a h}, \tag{4.11.33}$$

$$c_{22}^{bulk} = -i\frac{(\varkappa_n^b)^2}{\beta_n^b d_n^b}\,\frac{\varepsilon_{ra} - \varepsilon_{r0}}{\varepsilon_{rb} - \varepsilon_{r0}}\,\frac{1 - e^{-4\zeta_n^b a}}{2\zeta_n^b}\,F_n^b\,\mathcal{F}_n\,e^{-4\zeta_n^b h}, \tag{4.11.34}$$

$$c_{12}^{bulk} = -i\frac{\varkappa_m^a \varkappa_n^b}{\sqrt{\beta_m^a d_m^a\,\beta_n^b d_n^b}}\,\frac{\varepsilon_{r0}}{\varepsilon_{rb}}\sqrt{\frac{\varepsilon_{rb} - \varepsilon_{r0}}{\varepsilon_{ra} - \varepsilon_{r0}}}\,\times$$

$$\times\,\frac{\left(1 - e^{-2\zeta_m^a b}\right)\zeta_m^a f_n^b + \left(1 + e^{-2\zeta_m^a b}\right)\zeta_n^b g_m^a}{(\zeta_m^a)^2 + (\varkappa_n^b)^2}\,\mathcal{F}_{mn}\,e^{-2\zeta_m^a h}, \tag{4.11.35}$$

$$c_{21}^{bulk} = -i\frac{\varkappa_m^a \varkappa_n^b}{\sqrt{\beta_m^a d_m^a\,\beta_n^b d_n^b}}\,\frac{\varepsilon_{r0}}{\varepsilon_{ra}}\sqrt{\frac{\varepsilon_{ra} - \varepsilon_{r0}}{\varepsilon_{rb} - \varepsilon_{r0}}}\,\times$$

$$\times \frac{\left(1-e^{-2\zeta_n^b a}\right)\zeta_n^b f_m^a + \left(1+e^{-2\zeta_n^b a}\right)\zeta_m^a g_n^b}{(\zeta_n^b)^2 + (\varkappa_m^a)^2} \mathcal{F}_{mn}\, e^{-2\zeta_n^b h}; \tag{4.11.36}$$

• коэффициенты *поверхностной связи*

$$c_{11}^{surf} = -i\frac{(\varkappa_m^a)^2}{\beta_m^a d_m^a}\frac{\zeta_m^a}{(\beta_m^a)^2}\frac{\varepsilon_{r0}}{\varepsilon_{rb}}\frac{\varepsilon_{rb}-\varepsilon_{r0}}{\varepsilon_{ra}-\varepsilon_{r0}}\left(1-e^{-4\zeta_m^a b}\right)\mathcal{F}_m e^{-4\zeta_m^a h}, \tag{4.11.37}$$

$$c_{22}^{surf} = -i\frac{(\varkappa_n^b)^2}{\beta_n^b d_n^b}\frac{\zeta_n^b}{(\beta_n^b)^2}\frac{\varepsilon_{r0}}{\varepsilon_{ra}}\frac{\varepsilon_{ra}-\varepsilon_{r0}}{\varepsilon_{rb}-\varepsilon_{r0}}\left(1-e^{-4\zeta_n^b a}\right)\mathcal{F}_n e^{-4\zeta_n^b h}, \tag{4.11.38}$$

$$c_{12}^{surf} = i\frac{\varkappa_m^a \varkappa_n^b}{\sqrt{\beta_m^a d_m^a\,\beta_n^b d_n^b}}\frac{\zeta_n^b}{\beta_m^a\beta_n^b}\frac{\varepsilon_{r0}}{\varepsilon_{rb}}\sqrt{\frac{\varepsilon_{rb}-\varepsilon_{r0}}{\varepsilon_{ra}-\varepsilon_{r0}}}\left(1+e^{-2\zeta_m^a b}\right)\mathcal{F}_{mn} e^{-2\zeta_m^a h}, \tag{4.11.39}$$

$$c_{21}^{surf} = i\frac{\varkappa_m^a \varkappa_n^b}{\sqrt{\beta_m^a d_m^a\,\beta_n^b d_n^b}}\frac{\zeta_m^a}{\beta_m^a\beta_n^b}\frac{\varepsilon_{r0}}{\varepsilon_{ra}}\sqrt{\frac{\varepsilon_{ra}-\varepsilon_{r0}}{\varepsilon_{rb}-\varepsilon_{r0}}}\left(1+e^{-2\zeta_n^b a}\right)\mathcal{F}_{mn} e^{-2\zeta_n^b h}. \tag{4.11.40}$$

Кроме обозначений (4.11.28)–(4.11.29), коэффициенты связи (4.11.33)–(4.11.40) для TM-мод включают дополнительно следующие обозначения:

а) для собственных коэффициентов связи

$$\mathcal{F}_m = \frac{(\beta_m^a)^2}{(\beta_m^a)^2 - (\varepsilon_{r0}/\varepsilon_{ra})(\varkappa_m^a)^2}, \qquad \mathcal{F}_n = \frac{(\beta_n^b)^2}{(\beta_n^b)^2 - (\varepsilon_{r0}/\varepsilon_{rb})(\varkappa_n^b)^2}, \tag{4.11.41}$$

$$F_m^a = 1 + \frac{\varepsilon_{r0}}{\varepsilon_{rb}}\frac{(\zeta_m^a)^2}{(\beta_m^a)^2}, \qquad F_n^b = 1 + \frac{\varepsilon_{r0}}{\varepsilon_{ra}}\frac{(\zeta_n^b)^2}{(\beta_n^b)^2}; \tag{4.11.42}$$

б) для взаимных коэффициентов связи

$$\mathcal{F}_{mn} = \frac{\beta_m^a\beta_n^b}{\sqrt{\left[(\beta_m^a)^2 - (\varepsilon_{r0}/\varepsilon_{ra})(\varkappa_m^a)^2\right]\left[(\beta_n^b)^2 - (\varepsilon_{r0}/\varepsilon_{rb})(\varkappa_n^b)^2\right]}}, \tag{4.11.43}$$

$$f_m^a = 1 + \frac{\varepsilon_{r0}}{\varepsilon_{ra}}\frac{(\varkappa_m^a)^2}{\beta_m^a\beta_n^b}, \qquad f_n^b = 1 + \frac{\varepsilon_{r0}}{\varepsilon_{rb}}\frac{(\varkappa_n^b)^2}{\beta_m^a\beta_n^b}, \tag{4.11.44}$$

$$g_m^a = 1 - \frac{(\zeta_m^a)^2}{\beta_m^a\beta_n^b}, \qquad g_n^b = 1 - \frac{(\zeta_n^b)^2}{\beta_m^a\beta_n^b}. \tag{4.11.45}$$

Интересно отметить, что коэффициенты связи (4.11.24)–(4.11.27) для TE-мод получаются из коэффициентов связи (4.11.33)–(4.11.36) для TM-мод как частный случай, если в последних положить все множители (4.11.41)–(4.11.45) равными единице.

Для идентичных волноводов ($a = b$ и $\varepsilon_{ra} = \varepsilon_{rb}$), когда $\beta_m^a = \beta_n^b \equiv \beta_m$, $\varkappa_m^a = \varkappa_n^b \equiv \varkappa_m$ и $\zeta_m^a = \zeta_n^b \equiv \zeta_m$, обозначения (4.11.41)–(4.11.45) превращаются в следующие:

$$\mathcal{F}_{mm} = \mathcal{F}_{nn} \equiv \mathcal{F}_n = \mathcal{F}_m = \frac{\beta_m^2}{\beta_m^2 - (\varepsilon_{r0}/\varepsilon_{ra})\varkappa_m^2}, \tag{4.11.46}$$

$$F_m^a = F_n^b \equiv F_m = 1 + \frac{\varepsilon_{r0}}{\varepsilon_{ra}} \frac{\zeta_m^2}{\beta_m^2}, \tag{4.11.47}$$

$$f_m^a = f_n^b \equiv f_m = 1 + \frac{\varepsilon_{r0}}{\varepsilon_{ra}} \frac{\varkappa_m^2}{\beta_m^2}, \tag{4.11.48}$$

$$g_m^a = g_n^b \equiv g_m = 1 - \frac{\zeta_m^2}{\beta_m^2} = \frac{k_0^2}{\beta_m^2}, \tag{4.11.49}$$

а коэффициенты связи (4.11.33)–(4.11.40) принимают упрощенную симметричную форму:

$$c_{11}^{bulk} = c_{22}^{bulk} = -i\frac{\varkappa_m^2}{\beta_m d_m} \frac{1 - e^{-4\zeta_m a}}{2\zeta_m} F_m \mathcal{F}_m e^{-4\zeta_m h} =$$
$$= -i\frac{\varkappa_m^2}{\beta_m d_m} \frac{\zeta_m^2 + (\varepsilon_{ra}/\varepsilon_{r0})\beta_m^2}{\beta_m^2 + (\varepsilon_{ra}/\varepsilon_{r0})\zeta_m^2} \frac{1 - e^{-4\zeta_m a}}{2\zeta_m} e^{-4\zeta_m h}, \tag{4.11.50}$$

$$c_{11}^{surf} = c_{22}^{surf} = -i\frac{\varkappa_m^2}{\beta_m d_m} \frac{\zeta_m}{\beta_m^2} \frac{\varepsilon_{r0}}{\varepsilon_{ra}} \left(1 - e^{-4\zeta_m a}\right) \mathcal{F}_m e^{-4\zeta_m h} =$$
$$= -i\frac{\varkappa_m^2}{\beta_m d_m} \frac{\zeta_m}{\beta_m^2 + (\varepsilon_{ra}/\varepsilon_{r0})\zeta_m^2} \left(1 - e^{-4\zeta_m a}\right) e^{-4\zeta_m h}, \tag{4.11.51}$$

$$c_{12}^{bulk} = c_{21}^{bulk} = -i\frac{\varkappa_m^2}{\beta_m d_m} \frac{\zeta_m}{k_0^2} \frac{\varepsilon_{r0}^2}{\varepsilon_{ra}(\varepsilon_{ra} - \varepsilon_{r0})} \times$$
$$\times \left[\left(1 - e^{-2\zeta_m a}\right) f_m + \left(1 + e^{-2\zeta_m a}\right) g_m\right] \mathcal{F}_m e^{-2\zeta_m h} =$$
$$= -i\frac{\varkappa_m^2}{\beta_m d_m} \frac{\zeta_m}{\beta_m^2 + (\varepsilon_{ra}/\varepsilon_{r0})\zeta_m^2} \frac{2\varepsilon_{r0}}{\varepsilon_{ra} - \varepsilon_{r0}} \times$$
$$\times \left[1 + \frac{\varepsilon_{ra} - \varepsilon_{r0}}{2\varepsilon_{ra}} \frac{\beta_m^2}{k_0^2} \left(1 - e^{-2\zeta_m a}\right)\right] e^{-2\zeta_m h}, \tag{4.11.52}$$

$$c_{12}^{surf} = c_{21}^{surf} = i\frac{\varkappa_m^2}{\beta_m d_m} \frac{\zeta_m}{\beta_m^2} \frac{\varepsilon_{r0}}{\varepsilon_{ra}} \left(1 + e^{-2\zeta_m a}\right) \mathcal{F}_m e^{-2\zeta_m h} =$$
$$= i\frac{\varkappa_m^2}{\beta_m d_m} \frac{\zeta_m}{\beta_m^2 + (\varepsilon_{ra}/\varepsilon_{r0})\zeta_m^2} \left(1 + e^{-2\zeta_m a}\right) e^{-2\zeta_m h}, \tag{4.11.53}$$

где вторые выражения в каждой формуле получены с использованием соотношений $\varepsilon_a\left[\beta_m^2 - (\varepsilon_0/\varepsilon_a)\varkappa_m^2\right] = \varepsilon_0\left[\beta_m^2 + (\varepsilon_a/\varepsilon_0)\zeta_m^2\right]$ и $\varkappa_m^2 + \zeta_m^2 = k_0^2(\varepsilon_a - \varepsilon_0)/\varepsilon_0$.

4.11.3. Кросс-нормы мод ТЕ- и ТМ-типов. Для того, чтобы воспользоваться выражениями (4.10.8) для *приведенных* фазовых постоянных $\overline{\overline{\beta}}_{1,2}$ и выражениями (4.10.9) для *приведенных* коэффициентов связи $\overline{\overline{c}}_{12}$ и $\overline{\overline{c}}_{21}$, недостаточно знать только исходные коэффициенты связи c_{12} и c_{21}, вычисленные в приложении Ж и представленные выше формулами (4.11.24)–(4.11.27), (4.11.31)–(4.11.40) и (4.11.50)–(4.11.53). Для этой цели необходимо также вычислить относительные кросс-нормы $C_{12} \equiv N_{12}/N_1 = N_{21}^*/N_2 \equiv C_{21}^*$ (вещественные для активных мод), используя выражение (4.10.28). Однако для *неидентичных* волноводов с невырожденными собственными модами нет необходимости в таких вычислениях.

Действительно, требование сохранения суммарной мощности в продольном направлении дало общее соотношение (4.9.18), которое для активных мод принимает форму (4.10.11), переписанную в виде

$$(\beta_1 - \beta_2)C_{12} = i(c_{12} - c_{21}). \tag{4.11.54}$$

Отсюда следует, что знание исходных коэффициентов связи c_{12} и c_{21} сразу же дает искомую кросс-норму C_{12} при условии, что $\beta_1 \neq \beta_2$.

В отличие от этого, для одинаковых волноводов с идентичными спектрами собственных мод соотношение (4.11.54) превращается в тождество, так как из (4.11.32) и (4.11.52)–(4.11.53) следует, что $c_{12} = c_{21}$. В этом случае относительная кросс-норма C_{12} должна быть найдена независимо, что и сделано в приложении Ж в виде выражений (Ж.3.9) и (Ж.4.9):

- для мод ТЕ-типа

$$C_{12} = C_{21} = \frac{2}{\zeta_m d_m}\frac{\varkappa_m^2}{k_0^2}\frac{\varepsilon_{r0}}{\varepsilon_{ra} - \varepsilon_{r0}}\left(\frac{4\varepsilon_{r0}}{\varepsilon_{ra} - \varepsilon_{r0}}\frac{\zeta_m^2}{k_0^2} + 2\zeta_m h + e^{-2\zeta_m a}\right)e^{-2\zeta_m h}, \tag{4.11.55}$$

- для мод ТМ-типа

$$C_{12} = C_{21} = \frac{2}{\zeta_m d_m}\frac{\varkappa_m^2}{\beta_m^2 - (\varepsilon_{r0}/\varepsilon_{ra})\varkappa_m^2}\frac{\varepsilon_{r0}}{\varepsilon_{ra} - \varepsilon_{r0}} \times$$
$$\times\left(\frac{2\varepsilon_{r0}}{\varepsilon_{ra}}\frac{\varepsilon_{ra} + \varepsilon_{r0}}{\varepsilon_{ra} - \varepsilon_{r0}}\frac{\zeta_m^2}{k_0^2} + 2\zeta_m h + e^{-2\zeta_m a}\right)e^{-2\zeta_m h}. \tag{4.11.56}$$

Таким образом, теория связи диэлектрических волноводов, разработанная в этой главе, является достаточно строгой и точной, но дает довольно сложные аналитические выражения даже для двух связанных волноводов. Поэтому применение связанных уравнений с использованием полученных выше выражений для коэффициентов связи и приведенных параметров связи к конкретным волноводным устройствам требует численного счета.

С полной определенностью можно заключить, что любая попытка применения результатов обычной теории связанных мод (при $C_{12} \equiv 0$) к анализу связи двух и более волноводов (как это было ранее сделано, например, Снайдером [4, 15] и Яривом [11, 16]) полностью безосновательна и дает ошибочные результаты, за исключением, возможно, очень специфических приближений к реальным физическим ситуациям волноводной связи.

4.12. Обобщение теории связанных мод для непараллельных волноводов

До настоящего момента мы имели дело с так называемыми *идеальными модами*, которые являются собственными модами любого регулярного волновода (выбранного в качестве базового) с неизменным поперечным сечением вдоль оси z, являющейся осью волноводного распространения. Такая ситуация типична, например, для центрального однородного участка направленного ответвителя с параллельными волноводами. Кроме того, в нем имеются боковые (входная и выходная) секции с наклонными (непараллельными) волноводами, для которых модель идеальных мод не подходит.

При анализе волновых процессов в нерегулярных (продольно-изменяющихся) волноводах базовый волновод для каждого сечения $z = \text{const}$ выбирается с *локально неизменными* границами раздела сред, параллельными продольной оси волновода. Другими словами, в каждом сечении нерегулярного волновода выбирается свой *локальный* базовый регулярный волновод, модальный спектр которого соответствует именно данному сечению $z = \text{const}$. Поэтому вместо единого базиса идеальных мод (направляемых и излучательных) в нерегулярных волноведущих структурах существует система так называемых *локальных мод*, характеристики которых (постоянные распространения и векторные мембранные функции) теперь являются функциями z. Метод локальных мод широко использовался для анализа различных волноводных переходов и нерегулярностей в волноводах [8, 15, 28, 73].

Обычно непараллельные волноводы имеют достаточно малые углы продольной расходимости и поэтому называются *почти параллельными* волноводами. В этом случае электромагнитные поля m-й моды *локального* базового волновода могут быть представлены в форме, близкой к выражению (2.3.5) для модальных полей в *регулярном* базовом волноводе:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_m(\mathbf{r}_t, z) &= \widehat{\mathbf{E}}_m(\mathbf{r}_t, z)\, e^{-\gamma_m(z) z}, \\ \mathbf{H}_m(\mathbf{r}_t, z) &= \widehat{\mathbf{H}}_m(\mathbf{r}_t, z)\, e^{-\gamma_m(z) z}. \end{aligned} \tag{4.12.1}$$

В отличие от (2.3.5), выражения (4.12.1) для локальных полей содержат дополнительную «медленную» зависимость от z, вызванную непараллельностью границ волноводов. Она входит как в постоянную распространения $\gamma_m(z) = \alpha_m(z) + i\beta_m(z)$ для локальных мод, так и в мембранные функции модальных полей $\widehat{\mathbf{E}}_m(\mathbf{r}_t, z)$ и $\widehat{\mathbf{H}}_m(\mathbf{r}_t, z)$ (сохраняющие, тем не менее, колпачок, который ранее отражал зависимость только от поперечных координат $\mathbf{r}_t$).

Необходимо обобщить соотношения квази-ортогональности, уравнения возбуждения мод и уравнения связанных мод, выведенные выше для идеальных мод, на случай почти параллельных волноводов с локальными модальными полями в виде (4.12.1).

4.12.1. Соотношение квази-ортогональности для локальных мод почти параллельных волноводов. Уравнения Максвелла (4.1.1) и (4.1.2), которые были использованы в качестве исходных для вывода сопряженной леммы Лоренца, допускают произвольную пространственную зависимость электромагнитных полей и возбуждающих источников. Поэтому дифференциальная и интегральная формы леммы Лоренца (4.1.8)–(4.1.12) и (4.1.14)–(4.1.18), справедливы всегда, в том числе и для почти параллельных волноводов, анализируемых в рамках метода локальных мод.

Для того, чтобы получить соотношения квази-ортогональности для почти параллельных волноводов, необходимо применить тот же самый подход, который был использован в п. 4.2 для параллельных волноводов. Следовательно, все соотношения (4.2.1)–(4.2.12), использованные там, остаются применимыми и здесь с учетом того факта, что, в соответствии с (4.12.1), мембранные функции полей и постоянные распространения становятся медленными функциями z из-за непараллельности волноводов.

Различие между параллельными и непараллельными волноводами возникает при дифференцировании по z равенства (4.2.7):

$$\frac{dP_{12}(z)}{dz} \to \frac{d}{dz}\left[N_{mn}^{pq}(z)\, e^{-[\gamma_m^{p*}(z)+\gamma_n^q(z)]z}\right] \equiv$$

$$\equiv \left[-\left(\tilde{\gamma}_m^{p*}+\tilde{\gamma}_n^q\right)N_{mn}^{pq}+N_{mn}^{pq\,\prime}\right]e^{-(\gamma_m^{p*}+\gamma_n^q)z}. \qquad (4.12.2)$$

Здесь $N_{mn}^{pq\,\prime} \equiv dN_{mn}^{pq}/dz$ означает производную от нормировочного коэффициента N_{mn}^{pq}, определенного в виде (4.2.10). Кроме того, введены *обобщенные* постоянные распространения (отмеченные знаком тильды),

$$\tilde{\gamma}_m^p(z) = \gamma_m^p(z)\left(1+\frac{d\ln\gamma_m^p(z)}{d\ln z}\right), \qquad (4.12.3)$$

$$\tilde{\gamma}_n^q(z) = \gamma_n^q(z)\left(1+\frac{d\ln\gamma_n^q(z)}{d\ln z}\right), \qquad (4.12.4)$$

появляющиеся как результат дифференцирования по z в выражении (4.12.2). Следует обратить внимание на то, что экспоненты в формуле (4.12.2) содержат обычные (без тильды) постоянные распространения, зависящие от z.

Подстановка замен (4.2.8), (4.2.9) и (4.12.2) в лемму Лоренца (4.1.14) при $R_{12}=0$ дает искомое ***соотношение квази-ортогональности*** для локальных мод, записанное в общей форме:

$$(\tilde{\gamma}_m^{p*}+\tilde{\gamma}_n^q)N_{mn}^{pq} + i\omega W_{mn}^{pq} = M_{mn}^{pq} + N_{mn}^{pq\,\prime}. \qquad (4.12.5)$$

Если ввести результирующий *локальный диссипативно-многоволноводный* коэффициент,

$$M_{mn}^{pq\Sigma} = M_{mn}^{pq} - i\omega W_{mn}^{pq} + N_{mn}^{pq\,\prime}, \qquad (4.12.6)$$

то соотношение квази-ортогональности (4.12.5) принимает форму, типичную как для одиночных волноводов (см. уравнения (2.3.7) и (2.12.6)), так и для многоволноводных систем параллельных волноводов (см. уравнение (4.2.15)):

$$(\tilde{\gamma}_m^{p*}+\tilde{\gamma}_n^q)N_{mn}^{pq} = M_{mn}^{pq\Sigma}. \qquad (4.12.7)$$

Таким образом, в самой общей форме (4.12.5) соотношения квази-ортогональности учтены три физические причины модальной неортогональности:

- *диссипация энергии* в волноведущей системе, учитываемая диссипативным коэффициентом M_{mn}^{pq} в форме (4.2.11);
- *перекрытие модальных полей* в многоволновоцной системе, учитываемое многоволноводным коэффициентом W_{mn}^{pq} в форме (4.2.12);
- *продольная неоднородность* волноведущей структуры, учитываемая производной $N_{mn}^{pq\prime}$ от кросс-нормы в форме (4.2.10).

Следовательно, все соотношения, приведенные в п. 4.3, и следствия из них, касающиеся (квази-)ортогональности идеальных мод в параллельных волноводах без потерь, остаются в силе и для локальных мод в почти параллельных волноводах с учетом замены $W_{mn}^{pq} \to W_{mn}^{pq} - N_{mn}^{pq\prime}/i\omega$.

4.12.2. Уравнения возбуждения и связи локальных мод. Процедура получения уравнений возбуждения, изложенная в п. 4.6, полностью применима для локальных мод с учетом того факта, что, в соответствии с (4.12.1), мембранные функции модальных полей и постоянные распространения, которые появляются в выражениях (4.6.19)–(4.6.22), считаются теперь функциями z. Единственная отличительная особенность связана с результатом дифференцирования выражения (4.6.19), который имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{dP_{12}(z)}{dz} &= \frac{d}{dz}\sum_q\Biggl\{\sum_n N_{mn}^{pq}(z)\,A_n^q(z)\,e^{-\gamma_n^q(z)z} + \\ &\qquad + \int_0^\infty N_{m\varkappa}^{pq}(z)\,A_\varkappa^q(z)\,e^{-\gamma_\varkappa^q(z)z}\,d\varkappa\Biggr\}\,e^{-\gamma_m^{p*}(z)z} = \\ &= \sum_q\sum_n\Biggl\{N_{mn}^{pq}\frac{dA_n^q}{dz}\,e^{-\gamma_n^q z} - \Bigl[\bigl(\tilde\gamma_m^{p*}+\tilde\gamma_n^q\bigr)N_{mn}^{pq} - N_{mn}^{pq\prime}\Bigr]A_n^q\,e^{-\gamma_n^q z}\Biggr\}\,e^{-\gamma_m^{p*}z} + \\ &\quad + \sum_q\int_0^\infty\Biggl\{N_{m\varkappa}^{pq}\frac{dA_\varkappa^q}{dz}\,e^{-\gamma_\varkappa^q z} - \Bigl[\bigl(\tilde\gamma_m^{p*}+\tilde\gamma_\varkappa^q\bigr)N_{m\varkappa}^{pq} - N_{m\varkappa}^{pq\prime}\Bigr]A_\varkappa^q\,e^{-\gamma_\varkappa^q z}\Biggr\}\,e^{-\gamma_m^{p*}z}d\varkappa,\end{aligned} \tag{4.12.8}$$

где обобщенные постоянные распространения (4.12.3) и (4.12.4) (со знаком тильды) появились из-за использования соотношения (4.12.2).

Подстановка производной (4.12.8) вместе с выражениями, аналогичными (4.6.20)–(4.6.22), в лемму Лоренца (4.1.14) приводит к следующему уравнению (ср. уравнение (4.6.24)):

$$\begin{aligned}&\sum_q\sum_n\Biggl\{N_{mn}^{pq}\frac{dA_n^q}{dz} - \Bigl[\bigl(\tilde\gamma_m^{p*}+\tilde\gamma_n^q\bigr)N_{mn}^{pq} - M_{mn}^{pq\Sigma}\Bigr]A_n^q\Biggr\}\,e^{-\gamma_n^q z} + \\ &+ \sum_q\int_0^\infty\Biggl\{N_{m\varkappa}^{pq}\frac{dA_\varkappa^q}{dz} - \Bigl[\bigl(\tilde\gamma_m^{p*}+\tilde\gamma_\varkappa^q\bigr)N_{m\varkappa}^{pq} - M_{m\varkappa}^{pq\Sigma}\Bigr]A_\varkappa^q\Biggr\}\,e^{-\gamma_\varkappa^q z}\,d\varkappa = R_m^p,\end{aligned} \tag{4.12.9}$$

где использована величина $M_{m\varkappa}^{pq\Sigma}$, аналогичная по форме с (4.12.6).

Соотношение квази-ортогональности (4.12.7) для пары (m,n) локальных мод p- и q-волноводов и его обобщение для пары $(m,\varkappa)$, состоящей из направленной m-й моды и излучательной $\varkappa$-й моды, обращает в нуль обе квадратные скобки в (4.12.9). Это дает искомую систему уравнений возбуждения локальных мод для почти параллельных волноводов, записанную в следующих двух видах (ср. уравнения (4.6.27) и (4.6.28)):

- для *амплитуд возбуждения* A_n^q и $A_\varkappa^q$

$$\sum_{\substack{q\\p=1,2,\dots}} \sum_{\substack{n\\m=1,2,\dots}} N_{mn}^{pq} \frac{dA_n^q}{dz} e^{-\gamma_n^q z} + \sum_q \int_0^\infty N_{m\varkappa}^{pq} \frac{dA_\varkappa^q}{dz} e^{-\gamma_\varkappa^q z} d\varkappa = R_m^p, \tag{4.12.10}$$

- для *волновых амплитуд* $a_n^q = A_n^q e^{-\gamma_n^q z}$ и $a_\varkappa^q = A_\varkappa^q e^{-\gamma_\varkappa^q z}$

$$\sum_{\substack{q\\p=1,2,\dots}} \sum_{\substack{n\\m=1,2,\dots}} N_{mn}^{pq} \left(\frac{da_n^q}{dz} + \widetilde{\gamma}_n^q a_n^q \right) + \sum_q \int_0^\infty N_{m\varkappa}^{pq} \left(\frac{da_\varkappa^q}{dz} + \widetilde{\gamma}_\varkappa^q a_\varkappa^q \right) d\varkappa = R_m^p, \tag{4.12.11}$$

где интеграл возбуждения R_m^p сохраняет прежний вид (4.6.23).

Сравнение уравнений (4.6.27) и (4.12.10), записанных для амплитуд возбуждения, показывает их полную идентичность. Однако уравнение (4.12.11), записанное для волновых амплитуд, отличается от аналогичного уравнения (4.6.28) присутствием *обобщенных* постоянных распространения $\widetilde{\gamma}_n^q$ и $\widetilde{\gamma}_\varkappa^q$. Этот результат является следствием следующих соотношений между волновыми амплитудами и амплитудами возбуждения для локальных мод:

$$a_n^q(z) = A_n^q(z)\, e^{-\gamma_n^q(z) z} \quad \text{и} \quad \frac{da_n^q(z)}{dz} = \frac{dA_n^q(z)}{dz} e^{-\gamma_n^q(z) z} - \widetilde{\gamma}_n^q(z) a_n^q(z).$$

Следовательно, экспонента всегда содержит в показателе обычную постоянную распространения $\gamma_n^q(z)$, которая вне экспоненты превращается в *обобщенную* постоянную распространения $\widetilde{\gamma}_n^q(z)$, помеченную тильдой.

Отмеченное выше свойство уравнений возбуждения (4.12.10) и (4.12.11) присуще также всем другим формам уравнений, включая (4.6.39)–(4.6.40), (4.7.2)–(4.7.3) и (4.7.5)–(4.7.6). Более того, это свойство распространяется и на уравнения связанных мод, так как интегралы возбуждения (4.6.23) и (4.6.35) имеют одинаковую структуру как для идеальных, так и для локальных мод. Действительно, модальные разложения интегралов возбуждения по спектру *локальных мод* представляются прежними формулами (4.8.1) и (4.8.4). Как и ранее, подстановка этих разложений в правую часть вышеупомянутых уравнений возбуждения превращает их в связанные уравнения для локальных мод, которые имеют ту же структуру, что и для идеальных мод.

В частности, в отсутствие потерь уравнения связанных локальных мод сохраняют прежние формы (4.9.1) и (4.9.6), только теперь входящие в них коэффициенты связи $\left(c_{mn}^{pq}, c_{m\varkappa}^{pq}, c_{\varkappa n}^{pq}, c_{\varkappa\varkappa'}^{pq}\right)$ и относительные модальные кросснормы $\left(C_{mn}^{pq}, C_{m\varkappa}^{pq}, C_{\varkappa n}^{pq}, C_{\varkappa\varkappa'}^{pq}\right)$ содержат дополнительную зависимость от z, появившуюся как результат зависимости от z для мембранных функций локальных мод (отмеченных колпачком). Кроме того, обычные фазовые постоянные β_m^p и $\beta_{n(\varkappa)}^q$ заменены их обобщенными величинами $\widetilde{\beta}_m^p$ и $\widetilde{\beta}_{n(\varkappa)}^q$, помеченными тильдой и введенными по аналогии с (4.12.3) и (4.12.4). Например, обобщенное уравнение связанных локальных мод типа (4.9.11) имеет следующий вид:

$$\left(\frac{da_m^p}{dz} + i\widetilde{\beta}_m^p a_m^p\right) + \sum_{q\neq p}{}' \sum_n C_{mn}^{pq}\left(\frac{da_n^q}{dz} + i\widetilde{\beta}_n^q a_n^q\right) = \\ = \sum_n c_{mn}^{pp} a_n^p + \sum_{q\neq p}{}' \sum_n c_{mn}^{pq} a_n^q. \qquad (4.12.12)$$

Однако такое же уравнение, записанное для амплитуд возбуждения, сохраняет прежнюю форму (4.9.12).

В применении к двум почти параллельным волноводам исходные уравнения связанных мод записываются на основе прежних уравнений (4.10.1) и (4.10.2) в следующем виде:

$$\left(\frac{da_m^a}{dz} + i\widetilde{\beta}_m^a a_m^a\right) + C_{mn}^{ab}\left(\frac{da_n^b}{dz} + i\widetilde{\beta}_n^b a_n^b\right) = c_{mm}^{aa} a_m^a + c_{mn}^{ab} a_n^b, \qquad (4.12.13)$$

$$\left(\frac{da_n^b}{dz} + i\widetilde{\beta}_n^b a_n^b\right) + C_{nm}^{ba}\left(\frac{da_m^a}{dz} + i\widetilde{\beta}_m^a a_m^a\right) = c_{nn}^{bb} a_n^b + c_{nm}^{ba} a_m^a. \qquad (4.12.14)$$

Здесь обобщенные фазовые постоянные $\widetilde{\beta}_m^a$ и $\widetilde{\beta}_n^b$ (отмеченные знаком тильды) имеют вид, аналогичный (4.12.3) и (4.12.4) (см. (4.12.16) и (4.12.17)).

По аналогии с (4.10.1)–(4.10.2), уравнения (4.12.13)–(4.12.14) преобразуются в упрощенную форму (4.10.6)–(4.10.7), типичную для ОТСМ, которая содержит *приведенные параметры* (отмеченные двойной чертой) — приведенные фазовые постоянные $\overline{\overline{\beta}}_{1(2)}$ и приведенные коэффициенты связи $\overline{\overline{c}}_{12(21)}$. При этом последние сохраняют старую форму (4.10.9), а приведенные фазовые постоянные для локальных мод включают обобщенные постоянные вместо обычных, а именно (ср. уравнение (4.10.8)),

$$\overline{\overline{\beta}}_1 = \widetilde{\beta}_1 + i\frac{c_{11} - C_{12}c_{21}}{1 - C_{12}C_{21}} \quad \text{и} \quad \overline{\overline{\beta}}_2 = \widetilde{\beta}_2 + i\frac{c_{22} - C_{21}c_{12}}{1 - C_{12}C_{21}}, \qquad (4.12.15)$$

где *обобщенные* фазовые постоянные имеют вид (ср. (4.12.3) и (4.12.4))

$$\widetilde{\beta}_1(z) \equiv \widetilde{\beta}_m^a(z) = \beta_m^a(z)\left(1 + \frac{d\ln\beta_m^a(z)}{d\ln z}\right), \qquad (4.12.16)$$

$$\widetilde{\beta}_2(z) \equiv \widetilde{\beta}_n^b(z) = \beta_n^b(z)\left(1 + \frac{d\ln\beta_n^b(z)}{d\ln z}\right). \qquad (4.12.17)$$

Несмотря на полную тождественность в форме записи между связанными уравнениями (4.10.6)–(4.10.7) для идеальных мод и аналогичными уравнениями для локальных мод, их решения принципиально различные. Действительно, уравнения для идеальных мод содержат постоянные коэффициенты и решение для них имеет вид (4.10.12)–(4.10.13). Для локальных мод такие же уравнения имеют зависящие от z коэффициенты, поэтому решение в форме выражений (4.10.12)–(4.10.13) для них не подходит и надо использовать метод вариации постоянных [72].

На основании вышеизложенного можно заключить, что между теорией связанных мод для параллельных волноводов и почти параллельных волноводов нет существенной разницы.

Приложение А

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА ВОЛНОВЕДУЩИХ СТРУКТУР

А.1. Спектральная структура решения неоднородных граничных задач

А.1.1. Безграничная однородная среда. Пусть волновой процесс в безграничной среде описывается *линейным* оператором $\mathcal{L}_{t,z}$, действующим на *функцию поля* $f(t,z)$, которая зависит от времени t и координаты z и характеризует физические свойства среды.

Внутри области возбуждающих источников, описываемых *функцией источника* $s(t,z)$, волновой процесс подчиняется неоднородному линейному уравнению, записанному в общей форме:

$$\mathcal{L}_{t,z}f(t,z) = s(t,z). \tag{A.1.1}$$

Вне области источников уравнение (А.1.1) принимает однородную форму

$$\mathcal{L}_{t,z}f(t,z) = 0. \tag{A.1.2}$$

По определению, действие линейного оператора на функцию специального вида $f(t,z) = A\exp[i(\omega t - k_z z)]$, дающую картину плоских волн, производит так называемую *дисперсионную функцию* $\mathcal{D}(\omega, k_z)$, а именно

$$\mathcal{L}_{t,z}Ae^{i(\omega t - k_z z)} = \mathcal{D}(\omega, k_z)Ae^{i(\omega t - k_z z)}. \tag{A.1.3}$$

Подстановка (А.1.3) в однородное уравнение (А.1.2) приводит к *дисперсионному уравнению* для рассматриваемой безграничной среды:

$$\mathcal{D}(\omega, k_z) = 0. \tag{A.1.4}$$

Чтобы получить решение неоднородного уравнения (А.1.1) внутри области источников, обычно используют функцию Грина $G(t,z;t',z')$, введенную как функцию координат двух точек — *точки поля* (t,z) и *точки источника* (t',z'). Эта функция представляет собой, по определению, отклик системы на действие точечного источника, описываемого δ-функциями, т. е. функция Грина удовлетворяет следующему уравнению:

$$\mathcal{L}_{t,z}\, G(t,z;t',z') = \delta(t-t')\,\delta(z-z'). \tag{A.1.5}$$

Если функция Грина $G(t,z;t',z')$ найдена тем или иным способом, то искомая функция поля $f(t,z)$, как решение исходного неоднородного уравнения (А.1.1), может быть записана в виде

$$f(t,z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(t,z;t',z')\, s(t',z')\, dt'dz'. \tag{A.1.6}$$

Действительно, действие оператора $\mathcal{L}_{t,z}$ на обе стороны выражения (А.1.6) с учетом (А.1.5) дает исходное уравнение (А.1.1):

$$\mathcal{L}_{t,z}\, f(t,z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t')\,\delta(z-z')\, s(t',z')\, dt'dz' \equiv s(t,z).$$

Для трансляционно-инвариантных систем (т. е. однородных вдоль t и z), функция Грина зависит от разности между координатами точки поля и точки источника, т. е. имеет форму $G(t-t', z-z')$, которая может быть представлена в виде двойного интеграла Фурье [1]:

$$G(t-t', z-z') = \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(\omega, k_z)\, e^{i[\omega(t-t')-k_z(z-z')]}\, d\omega dk_z. \tag{A.1.7}$$

Подставив (А.1.7) в выражение (А.1.6) и проинтегрировав его по t' и z', получим

$$f(t,z) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(\omega,k_z)\, s(\omega,k_z)\, e^{i(\omega t-k_z z)} d\omega dk_z, \tag{A.1.8}$$

где для функции источника $s(t,z)$ использован ее фурье-образ

$$s(\omega,k_z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} s(t',z')\, e^{-i(\omega t'-k_z z')} dt'dz'. \tag{A.1.9}$$

Выражение (А.1.8) может быть переписано в следующей форме:

$$f(t,z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\omega(z)\, e^{i\omega t} d\omega; \tag{A.1.10}$$

здесь введена комплексная амплитуда $f_\omega(z)$ на частоте ω, равная

$$f_\omega(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(\omega,k_z)\, s(\omega,k_z)\, e^{-ik_z z} dk_z. \tag{A.1.11}$$

Подставляем двойной интеграл Фурье (А.1.7) в левую часть уравнения (А.1.5). Согласно (А.1.3), действие оператора $\mathcal{L}_{t,z}$ на переменные t и z, входящие в экспоненту $\exp[i\omega(t-t') - ik_z(z-z')]$, приводит к дисперсионной функции $D(\omega, k_z)$. Тогда уравнение (А.1.5) принимает следующий вид:

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(\omega,k_z)\,\mathcal{D}(\omega,k_z)\,e^{i[\omega(t-t')\,-\,k_z(z-z')]}\,d\omega dk_z =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i[\omega(t-t')\,-\,k_z(z-z')]}\,d\omega dk_z, \qquad \text{(А.1.12)}$$

где правая часть была записана с использованием преобразования Фурье для δ-функций [1]:

$$\delta(t-t') = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-t')}d\omega \quad \text{и} \quad \delta(z-z') = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ik_z(z-z')}dk_z. \qquad \text{(А.1.13)}$$

Сравнение подынтегральных выражений, стоящих слева и справа в формуле (А.1.12), дает искомое соотношение между функцией Грина и дисперсионной функцией:

$$G(\omega,k_z) = \frac{1}{\mathcal{D}(\omega,k_z)}\,. \qquad \text{(А.1.14)}$$

С учетом (А.1.14), выражение (А.1.11) для комплексной амплитуды поля $f_\omega(z)$ в безграничной среде принимает окончательный вид

$$f_\omega(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\omega,k_z)}{\mathcal{D}(\omega,k_z)}\,e^{-ik_z z}dk_z. \qquad \text{(А.1.15)}$$

А.1.2. Многослойная планарная структура. Рассмотрим открытую планарную структуру, показанную на рис. 1.4 при $D\to\infty$, в которой волноведущая среда, ограниченная крайними плоскостями $y=\pm d$, принимается многослойной. Каждый i-й слой имеет свое поперечное волновое число k_{yi} ($i=1,2,\ldots$ — номер слоя). Оно считается известной функцией $k_{yi}(k_z)$ продольного волнового числа k_z, так как k_{yi} и k_z связаны характеристическим уравнением (типа (1.1.1) в случае изотропной среды). Поперечное распределение полей в i-м слое описывается соответствующей мембранной функцией $\widehat{f}(k_{yi}y)$. Тогда комплексная амплитуда поля $f_\omega(y,z)$ в точке (y,z), соответствующей i-слою, может быть записана как обобщение выражения (А.1.15), полученного для безграничной среды, в форме

$$f_\omega(y,z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\omega,k_z)}{\mathcal{D}(\omega,k_z)}\,\widehat{f}\big(k_{yi}(k_z)\,y\big)\,e^{-ik_z z}dk_z, \qquad \text{(А.1.16)}$$

дополнительно включающей мембранную функцию $\widehat{f}\big(k_{yi}y\big)$ для i-слоя.

Для внешней полуограниченной изотропной среды, которая окружает многослойную волноведущую среду при $y > d$ и $y < -d$ (см. рис. 1.4), мембранная функция $\widehat{f}(k_y y)$ (с опущенным индексом i) удовлетворяет уравнению Гельмгольца (1.1.5) и имеет форму

$$\widehat{f}(k_y y) = \exp\left[-ik_y(|y| - d)\right], \tag{A.1.17}$$

где поперечное волновое число k_y рассматривается как двузначная функция продольного волнового числа k_z вида

$$k_y(k_z) = \sqrt{k^2 - k_z^2}\,. \tag{A.1.18}$$

Следовательно, выражение (A.1.16) для поля во внешней диэлектрической среде (при $|y| > d$) с учетом (A.1.17) принимает следующий вид:

$$f_\omega(y, z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\omega, k_z)}{\mathcal{D}(\omega, k_z)}\, \exp\left[-ik_y(|y| - d)\right] e^{-ik_z z} dk_z. \tag{A.1.19}$$

Из двух ветвей квадратного корня (A.1.18) должна быть выбрана та ветвь, которая удовлетворяет требованию исчезновения полного поля на поперечной бесконечности, выраженному принципом излучения (1.2.7), а именно

$$|f_\omega(y, z)| \to 0 \qquad \text{при} \quad |y| \to \infty. \tag{A.1.20}$$

Принцип отбора физически реализуемого решения обсуждался в п. 1.3. Применительно к функции (A.1.19) он требует

$$\operatorname{Im} k_y(k_z) < 0 \tag{A.1.21}$$

для того, чтобы обеспечить затухание экспоненты $\exp\left[-ik_y(k_z)(|y| - d)\right]$ в подинтегральном выражении (A.1.19) при $|y| > d$.

Обычно функция источника $s(\omega, z)$ имеет ограниченную область локализации вдоль оси z, скажем в пределах $-z_0 < z < z_0$, как показано на рис. 1.4, что означает

$$s(\omega, z) = 0 \qquad \text{при} \quad z < -z_0 \ \text{ и } \ z > z_0. \tag{A.1.22}$$

Как правило, фурье-образ $s(\omega, k_z)$ такой функции является целой трансцендентной функцией k_z (такой как $(\sin k_z z_0)/k_z z_0$ или $J_m(k_z z_0)$), которая имеет единственную сингулярность на бесконечности в виде существенно особой точки [1]. Нулевые условия (A.1.22), наложенные на функцию источника $s(\omega, z)$ при $|z| > z_0$, обеспечивают определенные аналитические свойства ее фурье-образа $s(\omega, k_z)$. Они с очевидностью следуют из преобразования Фурье для функции $s(\omega, z)$, записанного в виде

$$\begin{gathered} s(\omega, z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} s(\omega, k_z)\, e^{-ik_z z} dk_z \equiv \\ \equiv \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} s^{+}(\omega, k_z)\, e^{-ik_z(z+z_0)} dk_z \equiv \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} s^{-}(\omega, k_z)\, e^{-ik_z(z-z_0)} dk_z, \end{gathered} \tag{A.1.23}$$

где введено следующее обозначение:

$$s^{\pm}(\omega, k_z) = s(\omega, k_z)\, e^{\pm i k_z z_0}. \tag{A.1.24}$$

Экспоненциальные функции $\exp[-ik_z(z \pm z_0)]$, появившиеся в правой части двух последних интегралов в (А.1.23), исчезают, когда $|k_z| \to \infty$: для первого интеграла в верхней полуплоскости k_z ($\operatorname{Im} k_z > 0$) при $z < -z_0$, а для второго интеграла в нижней полуплоскости k_z ($\operatorname{Im} k_z < 0$) при $z > z_0$. Это позволяет использовать лемму Жордана для вычисления этих интегралов по теореме о вычетах [1]. В применении к интегралам (А.1.23) замкнутый контур интегрирования C должен включать интервал $(-J,\ J)$ на вещественной оси $\operatorname{Re} k_z$ и полуокружность C_J радиуса $|k_z| = J$ (контур Жордана, см. рис. 1.5), лежащую, соответственно, в верхней или нижней полуплоскости k_z, чтобы удовлетворить требованию леммы Жордана, когда $J \to \infty$. Тогда при $|z| > z_0$ лемма Жордана [1] обеспечивает выполнение равенства

$$\lim_{J \to \infty} \int\limits_{C_J} s^{\pm}(\omega, k_z)\, e^{-ik_z(z \pm z_0)} dk_z = 0 \tag{A.1.25}$$

при условии, что функции $s^{\pm}(\omega, k_z)$ стремятся равномерно к нулю при $|k_z| \to \to \infty$, когда $\operatorname{Im} k_z > 0$ (верхние знаки) и $\operatorname{Im} k_z < 0$ (нижние знаки).

В этом случае последние интегралы в (А.1.23) оба обращаются в нуль при $z < -z_0$ и $z > z_0$, как того требует формула (А.1.22), только в том случае, когда функции $s^{\pm}(\omega, k_z)$ не имеют сингулярностей, соответственно, в верхней и нижней полуплоскостях комплексной переменной k_z.

Итак, функция $s^{+}(\omega, k_z) = s(\omega, k_z)\exp(ik_z z_0)$ является аналитической при $\operatorname{Im} k_z > 0$, в то время как функция $s^{-}(\omega, k_z) = s(\omega, k_z)\exp(-ik_z z_0)$ аналитична, когда $\operatorname{Im} k_z < 0$, и обе они стремятся равномерно к нулю при $|k_z| \to \infty$. По этой причине поле (А.1.19) во внешней диэлектрической среде (при $|y| > > d$), взятое вне области источников (при $|z| > z_0$) (см. рис. 1.4) может быть записано в следующей окончательной форме:

$$f_\omega(y, z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\omega,k_z)\exp(+ik_z z_0)}{\mathcal{D}(\omega,k_z)}\, e^{-ik_y(k_z)y'} e^{-ik_z(z+z_0)}\, dk_z & \text{при } z < -z_0, \\ \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\omega,k_z)\exp(-ik_z z_0)}{\mathcal{D}(\omega,k_z)}\, e^{-ik_y(k_z)y'} e^{-ik_z(z-z_0)}\, dk_z & \text{при } z > z_0, \end{cases} \tag{A.1.26}$$

где функция $k_y(k_z)$ имеет вид (А.1.18), а также введены новые поперечные оси с помощью соотношения

$$y' \equiv |y| - d = \begin{cases} y - d > 0 & \text{при } y > d, \\ -(y+d) > 0 & \text{при } y < -d. \end{cases} \tag{A.1.27}$$

Оси y' для верхней и нижней полуограниченной диэлектрической среды, которая окружает волноведущую среду, расположенную при $-d < y < d$, показаны на рис. 1.4. Так как значения y' положительны для точек обеих сред, экспоненты $\exp(-ik_y y')$ под интегралом каждого из выражений (А.1.26) обеспечивают затухающий характер полей при (А.1.21) одновременно выше ($y > d$) и ниже ($y < -d$) волноведущей среды.

Чтобы вычислить несобственные интегралы в (А.1.26) по теореме Коши методом контурного интегрирования, фурье-контур C_{F} вдоль вещественной оси $\mathrm{Re}\, k_z$ должен быть замкнут с помощью контура Жордана C_{J} в форме полуокружности бесконечно большого радиуса $J \to \infty$ (см. рис. 1.5). Такая процедура подобна примененной выше к интегралу (А.1.25), который теперь включает $\left[s^{\pm}(\omega, k_z)/\mathcal{D}(\omega, k_z)\right] \exp(-ik_y y')$ вместо функций $s^{\pm}(\omega, k_z)$, определенных выражением (А.1.24). Из-за аналитичности функций $s^{\pm}(\omega, k_z)$ в соответствующих полуплоскостях ($\mathrm{Im}\, k_z > 0$ для $z < -z_0$ и $\mathrm{Im}\, k_z < 0$ для $z > z_0$) вклады в интегралы (А.1.26) дают только:

- точка ветвления $k_z = \pm k$ двузначной функции $k_y(k_z) = \sqrt{k^2 - k_z^2}$ и
- полюсы, отвечающие корням дисперсионного уравнения $\mathcal{D}(\omega, k_z) = 0$.

Детали такого вычисления подробно обсуждаются в п. 1.3.

А.2. Аналитические свойства функции $k_y(k_z) = \sqrt{k^2 - k_z^2}$ на комплексной плоскости k_z

Двузначная функция $k_y(k_z) = \sqrt{k^2 - k_z^2}$, определенная на комплексной плоскости переменной k_z, имеет две точки ветвления $k_z = \pm k$. Предположим, что изотропная диэлектрическая среда имеет малую электрическую проводимость, что учитывается с помощью комплексной проницаемости $\varepsilon_c = \varepsilon - i\sigma/\omega$, такой, что $\sigma \ll \omega\varepsilon$. Тогда волновое число такой среды является комплекснозначным:

$$k = \omega\sqrt{\varepsilon_c \mu} \approx \omega\sqrt{\varepsilon\mu}\,(1 - i\sigma/2\omega\varepsilon) \equiv k' - ik'', \tag{А.2.1}$$

где $k' > 0$, $k'' > 0$ и $k' \gg k''$. Предельный случай $k'' \to 0$ соответствует среде без потерь.

Основная цель нижеследующего рассмотрения состоит в обосновании правила проведения разрезов для двузначной функции $k_y(k_z) = \sqrt{k^2 - k_z^2}$, которое позволяет выбрать физически подходящие листы римановой поверхности. Условием для этого правила является *принцип излучения*, сформулированный как требование обращения в нуль полного поля $f(y, z)$ на поперечной бесконечности, когда $|y| \to \infty$, и записанный в форме (1.2.7). Как показано в п. 1.3, такое требование удовлетворяется следующим условием (см. уравнение (1.3.8)):

$$\mathrm{Im}\, k_y < 0. \tag{А.2.2}$$

Набор значений k_z, удовлетворяющих условию (А.2.2), соответствует *физическому листу* римановой поверхности. Другой лист, нефизический, содержит значения k_z, не удовлетворяющие принципу излучения, так как для них $\mathrm{Im}\, k_y > 0$, что приводит, согласно (А.1.26), к бесконечно большим полям при бесконечном удалении от границ волноведущей среды.

Следовательно, разрезы на комплексной плоскости k_z, разделяющие физический и нефизический листы, соответственно, с $\mathrm{Im}\, k_y < 0$ и $\mathrm{Im}\, k_y > 0$, должны удовлетворять следующему уравнению:

$$\operatorname{Im} k_y(k_z) = 0. \qquad (\text{A.2.3})$$

Чтобы изобразить *линии разреза*, необходимо записать вспомогательные выражения для вещественной и мнимой части функции $k_y^2 = (\operatorname{Re} k_y + i\operatorname{Im} k_y)^2$:

$$\operatorname{Re} k_y^2 = (\operatorname{Re} k_y)^2 - (\operatorname{Im} k_y)^2, \qquad (\text{A.2.4})$$

$$\operatorname{Im} k_y^2 = 2\operatorname{Re} k_y \operatorname{Im} k_y. \qquad (\text{A.2.5})$$

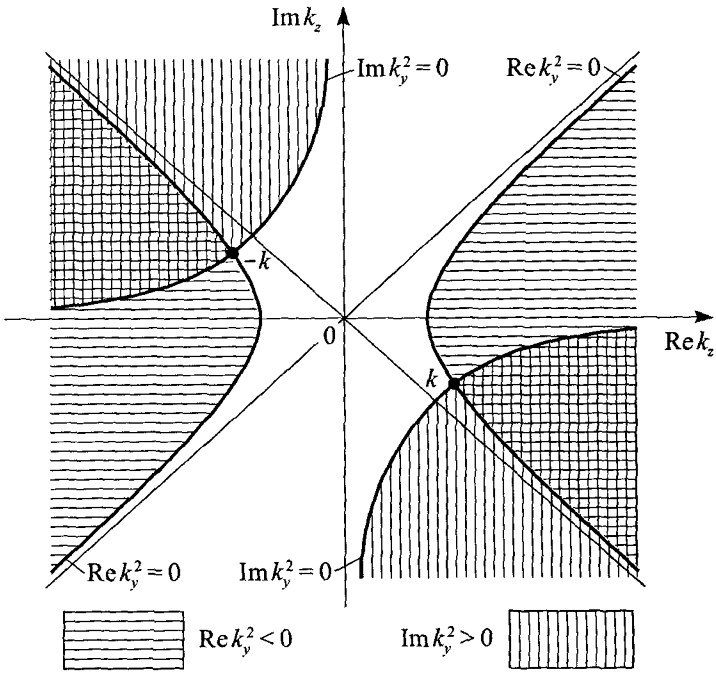


Рис. А.1. К выбору разрезов для функции $k_y = \sqrt{k^2 - k_z^2}$ на комплексной плоскости k_z: кривые $\operatorname{Re} k_y^2 = 0$ и $\operatorname{Im} k_y^2 = 0$ разделяют области со штриховкой и без нее

Из формул (А.2.4) и (А.2.5) следует, что разрез, проведенный вдоль линии $\operatorname{Im} k_y = 0$, должен одновременно подчиняться двум уравнениям:

$$\operatorname{Im} k_y^2 = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{Re} k_y^2 > 0. \qquad (\text{A.2.6})$$

Следовательно, необходимо рассмотреть на комплексной плоскости k_z функцию

$$k_y^2 = k^2 - k_z^2, \qquad (\text{A.2.7})$$

где k^2 подчиняется уравнению (А.2.1). Записывая следующие соотношения,

$$k_y^2 = \operatorname{Re} k_y^2 + i\operatorname{Im} k_y^2,$$

$$k_z = \operatorname{Re} k_z + i\operatorname{Im} k_z,$$

и подставляя их в (А.2.7), легко получить требуемые выражения:

$$\operatorname{Re} k_y^2 = \left(k'^2 - k''^2\right) - (\operatorname{Re} k_z)^2 + (\operatorname{Im} k_z)^2, \tag{А.2.8}$$

$$\operatorname{Im} k_y^2 = -2\left(k'k'' + \operatorname{Re} k_z \operatorname{Im} k_z\right). \tag{А.2.9}$$

Выражения (А.2.8) и (А.2.9) дают следующие уравнения для двух наборов кривых на комплексной плоскости k_z:

$$\operatorname{Re} k_y^2 = 0 \quad \text{или} \quad (\operatorname{Re} k_z)^2 - (\operatorname{Im} k_z)^2 = k'^2 - k''^2 > 0, \tag{А.2.10}$$

$$\operatorname{Im} k_y^2 = 0 \quad \text{или} \quad \operatorname{Re} k_z \operatorname{Im} k_z = -k'k'' < 0, \tag{А.2.11}$$

где неравенства соответствуют условиям $k' > 0$, $k'' > 0$ и $k' > k''$.

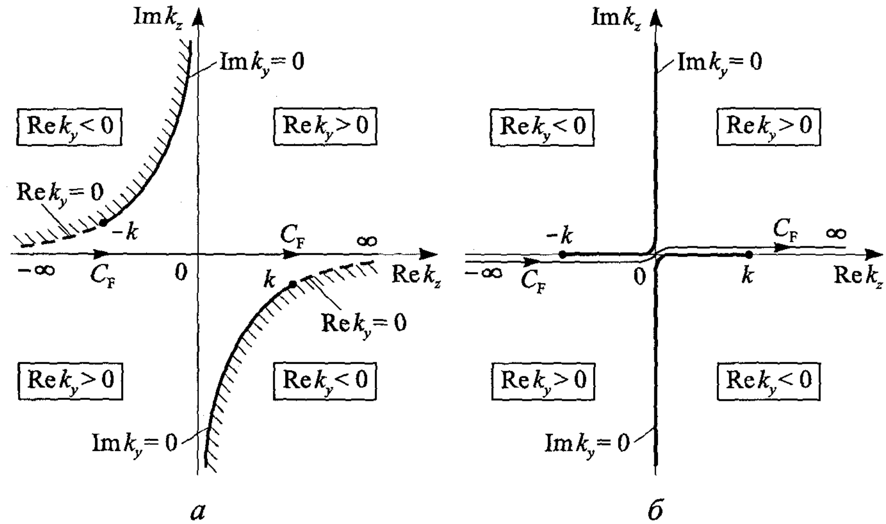


Рис. А.2. Разрезы для функции $k_y(k_z) = \sqrt{k^2 - k_z^2}$, изображенные сплошными линиями $\operatorname{Im} k_y(k_z) = 0$: *а* — с учетом потерь, *б* — без учета потерь. Области с разными знаками $\operatorname{Re} k_y$ соответствуют *физическому листу* римановой поверхности, для которого $\operatorname{Im} k_y < 0$

Кривые, описываемые уравнениями (А.2.10) и (А.2.11), изображены на рис. А.1 в форме двух наборов гипербол, которые пересекаются в точках ветвления $k_z = \pm k$, где оба равенства $\operatorname{Re} k_y^2 = 0$ и $\operatorname{Im} k_y^2 = 0$ выполняются. Эти гиперболы разделяют всю плоскость k_z на следующие области:

- области с горизонтальной штриховкой соответствуют $\operatorname{Re} k_y^2 < 0$,
- области с вертикальной штриховкой соответствуют $\operatorname{Im} k_y^2 > 0$,
- области без штриховки соответствуют как $\operatorname{Re} k_y^2 > 0$, так и $\operatorname{Im} k_y^2 < 0$.

Сопоставление этих областей с математическими ограничениями (А.2.6), наложенными на линию разреза, позволяет изобразить разрезы на рис. А.2 *а* сплошными линиями, выходящими из точек ветвления $k_z = k$ и $k_z = -k$, которые удовлетворяют уравнению $\operatorname{Im} k_y = 0$. Пунктирное продолжение этих линий удовлетворяет условию $\operatorname{Re} k_y = 0$, так как в этом случае из выражений (А.2.4) и (А.2.5) следует, что

$$\operatorname{Im} k_y^2 = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{Re} k_y^2 < 0. \tag{А.2.12}$$

Действительно, из областей на рис. А.1 видно, что условия (А.2.12) соответствуют пунктирным кривым на рис. А.2 *а*, для которых $\operatorname{Re} k_y = 0$.

Разрезы, изображенные сплошными линиями, вместе с их пунктирными продолжениями делят всю плоскость k_z на рис. А.2 *а* на три области с противоположными знаками величины $\operatorname{Re} k_y$, которую находим из (А.2.5):

$$\operatorname{Re} k_y = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{Im} k_y^2}{\operatorname{Im} k_y}. \tag{А.2.13}$$

Для физического листа римановой поверхности имеем $\operatorname{Im} k_y < 0$. Следовательно, уравнение (А.2.13) позволяет присвоить ярлыки $\operatorname{Re} k_y > 0$ и $\operatorname{Re} k_y < 0$ соответствующим областям на рис. А.2 *а*, согласно знакам $\operatorname{Im} k_y^2$ на рис. А.1. Для нефизического листа все знаки $\operatorname{Re} k_y$ на рис. А.2 должны быть противоположными из-за $\operatorname{Im} k_y > 0$.

В предельном случае нулевых потерь, когда в формулах (А.2.1) и (А.2.8)–(А.2.11) $k'' \to 0$, разрезы на рис. А.2 *а* трансформируются в сплошные линии на рис. А.2 *б*. Полезно отметить, что в обоих случаях (с потерями и без потерь) фурье-контур C_F в спектральных представлениях (А.1.26) и (1.3.3), проходящий в положительном направлении вдоль вещественной оси $\operatorname{Re} k_z$ от $-\infty$ до ∞, всегда лежит в области с $\operatorname{Re} k_y > 0$.

А.3. Метод седловой точки

А.3.1. Общие сведения. Метод седловой точки (известный также как *метод перевала* или *метод наибыстрейшего спуска*) обычно применяется для асимптотической оценки интегралов особого вида (см. уравнения (1.5.8) и (1.5.10)) [2, 3]:

$$f(r, \theta) = \int_{C_\mathrm{F}} Q(w)\, e^{krq(w,\theta)} dw. \tag{А.3.1}$$

Здесь аналитические функции $Q(w)$ и $q(w, \theta)$ комплексной переменной $w = u + iv$ определены вдоль пути интегрирования C_F (фурье-контур в нашем рассмотрении), концы которого лежат в бесконечности (см. рис. 1.6 *б*). Параметр kr должен быть достаточно большим положительным числом, чтобы описать асимптотическое поведение интеграла (А.3.1) при $kr \to \infty$.

Сущность метода перевала заключается в следующем [2]. Если вещественная часть $\operatorname{Re} q(w)$ комплекснозначной функции $q(w)$ имеет максимальное значение в точке w_s (т. е. в ее окрестности $\operatorname{Re} q(w) < \operatorname{Re} q(w_s)$), которая лежит на контуре интегрирования, то основной вклад в интеграл (А.3.1) создается окрестностью этой точки при $kr \to \infty$. Функция $Q(w)$ считается медленно меняющейся и не имеющей особенностей в окрестности точки w_s. Это позволяет заменить функцию $Q(w)$ ее значением $Q(w_s)$, так что под знаком интеграла остается только экспоненциальная функция $\exp(krq)$.

Следующий шаг состоит в трансформации контура C_{F} в такой путь P_s, проходящий через точку w_s (индекс s от англ. *saddle*), вдоль которого $\mathrm{Re}\, q(w)$ изменяется наибыстрейшим образом, в то время как $\mathrm{Im}\, q(w) = \mathrm{Im}\, q(w_s) = \mathrm{const}$. Постоянство мнимой части функции $q(w)$ обеспечивает стационарность фазы подынтегрального выражения $\exp(krq)$ вдоль нового пути интегрирования P_s. Существование осцилляций фазы вдоль любого другого пути, отличного от P_s, уменьшает вклад экспоненты $\exp(krq)$ в вычисляемый интеграл. Покажем, что требования, наложенные на $\mathrm{Re}\, q(w)$ и $\mathrm{Im}\, q(w)$, выполняются в стационарной точке w_s, для которой

$$q'(w_s) \equiv \left.\frac{\partial q(w)}{\partial w}\right|_{w_s} = 0. \tag{A.3.2}$$

Для аналитической функции $q(w)$, представленной в виде

$$q(w) = \alpha(u, v) + i\beta(u, v) \quad \text{при} \quad w = u + iv, \tag{A.3.3}$$

ее вещественная и мнимая части α и β, как функции вещественных переменных u и v, подчиняются уравнениям Коши–Римана [1]:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial u} = \frac{\partial \beta}{\partial v} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \alpha}{\partial v} = -\frac{\partial \beta}{\partial u}. \tag{A.3.4}$$

Условие стационарности (A.3.2) для функции $q(w)$ выполняется, если в точке $w_s = u_s + iv_s$ обе функции $\alpha(u, v)$ и $\beta(u, v)$ стационарны, т. е., в соответствии с уравнениями (A.3.4),

$$\frac{\partial \alpha}{\partial u} = \frac{\partial \alpha}{\partial v} = \frac{\partial \beta}{\partial u} = \frac{\partial \beta}{\partial v} = 0 \quad \text{при} \quad u = u_s \;\text{ и }\; v = v_s. \tag{A.3.5}$$

Несмотря на исчезновение первых производных, функции $\alpha(u, v)$ и $\beta(u, v)$ не имеют экстремальных значений (максимума или минимума) в точке w_s, поскольку из уравнений Коши–Римана (A.3.4) следует, что всегда (включая стационарную точку w_s)

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial u^2} = -\frac{\partial^2 \alpha}{\partial v^2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 \beta}{\partial u^2} = -\frac{\partial^2 \beta}{\partial v^2}. \tag{A.3.6}$$

Следовательно, в стационарной точке w_s, удовлетворяющей нулевым условиям (A.3.5), кривые $\alpha(u, v_s)$ и $\alpha(u_s, v)$ (как и кривые $\beta(u, v_s)$ и $\beta(u_s, v)$) имеют вдоль направлений u и v кривизну противоположных знаков из-за знака минус в уравнениях (A.3.6). Это исключает существование экстремума, а стационарная точка с такими свойствами называется *седловой точкой*.

Любой путь наибыстрейшего изменения (спуска или подъема) функции $\alpha(u, v) \equiv \mathrm{Re}\, q(w)$ всегда совпадает с линией стационарной фазы, на которой $\beta(u, v) \equiv \mathrm{Im}\, q(w) = \mathrm{const}$. Чтобы доказать это утверждение, рассмотрим элемент длины ds вдоль контура P_s, проходящий через седловую точку w_s. Скорость изменения функции $\alpha(u, v)$ в направлении пути P_s равняется

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\partial \alpha}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial \alpha}{\partial v}\frac{dv}{ds} \equiv \frac{\partial \alpha}{\partial u}\cos\phi + \frac{\partial \alpha}{\partial v}\sin\phi, \tag{A.3.7}$$

где ϕ — угол между элементом ds и положительным направлением u, т. е. $du = ds\cos\phi$ и $dv = ds\sin\phi$. Величина ϕ, которая обеспечивает наибольшую скорость изменения функции $\alpha(u,v)$ вдоль пути P_s, находится из условия:

$$\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{d\alpha}{ds}\right) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial\alpha}{\partial u}\sin\phi = \frac{\partial\alpha}{\partial v}\cos\phi. \tag{A.3.8}$$

По аналогии с (А.3.7), скорость изменения функции $\beta(u,v)$ в направлении пути P_s равняется

$$\frac{d\beta}{ds} = \frac{\partial\beta}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial\beta}{\partial v}\frac{dv}{ds} = -\frac{\partial\alpha}{\partial v}\cos\phi + \frac{\partial\alpha}{\partial u}\sin\phi, \tag{A.3.9}$$

где последнее равенство записано с учетом уравнений Коши–Римана (А.3.4).

Принимая во внимание условие (А.3.8), из уравнения (А.3.9) получаем, что $d\beta/ds = 0$. Следовательно, путь наибыстрейшего изменения (спуска или подъема) амплитудного множителя $\exp\alpha(s)$ совпадает с линией стационарной фазы $\beta(s) = \text{const}$. И наоборот, линия постоянного уровня ($\alpha(s) = \text{const}$) является путем наибыстрейшего изменения фазы.

А.3.2. Асимптотическое вычисление поля в дальней зоне. Общее интегральное представление (1.5.8) для поля $f(r,\theta)$ сводится к форме (А.3.1), в которой

$$Q(w) = \frac{k\cos w}{2\pi}F(k\sin w) \equiv \frac{k\cos w}{2\pi}\,\frac{s(\omega, k\sin w)}{\mathcal{D}(\omega, k\sin w)}, \tag{A.3.10}$$

$$q(w,\theta) = -i\cos(w-\theta). \tag{A.3.11}$$

Для функции $q(w,\theta)$ вида (А.3.11) условие (А.3.2) дает седловую точку,

$$w_s = \theta \quad \text{или} \quad u_s = \theta \ \text{ и } \ v_s = 0, \tag{A.3.12}$$

где вещественный угол θ соответствует точке наблюдения M на рис. 1.4. В седловой точке $w_s = \theta$ функция (А.3.11) принимает значение

$$q(w_s) = -i \quad \text{или} \quad \operatorname{Re} q(w_s) = 0 \ \text{ и } \ \operatorname{Im} q(w_s) = -1. \tag{A.3.13}$$

Так как мнимая часть функции (А.3.11) равняется

$$\operatorname{Im} q(w) = -\cos(u-\theta)\operatorname{ch} v, \tag{A.3.14}$$

то требование постоянства фазы вдоль пути P_s, записанное с учетом (А.3.13) в виде

$$\operatorname{Im} q(w) = \operatorname{Im} q(w_s) = -1,$$

дает уравнение для линии наибыстрейшего изменения (спуска или подъема) функции $\operatorname{Re} q(w)$ на плоскости (u,v) в следующей форме:

$$\cos(u-\theta) = \frac{1}{\operatorname{ch} v}. \tag{A.3.15}$$

Графическое решение уравнения (А.3.15) проиллюстрировано рис. А.3. Это уравнение имеет два корня $u > \theta$ и $u' < \theta$, которые сливаются в одно значение $u = \theta$ при $v = 0$ и принимают предельные значения $u_\infty = \pi/2 + \theta$ и $u'_\infty = -\pi/2 + \theta$ при $v \to \infty$. Следовательно, имеются две линии постоянной фазы, проходящие через седловую точку $w_s = \theta$, в которой $\operatorname{Im} q(w_s) = -1$.

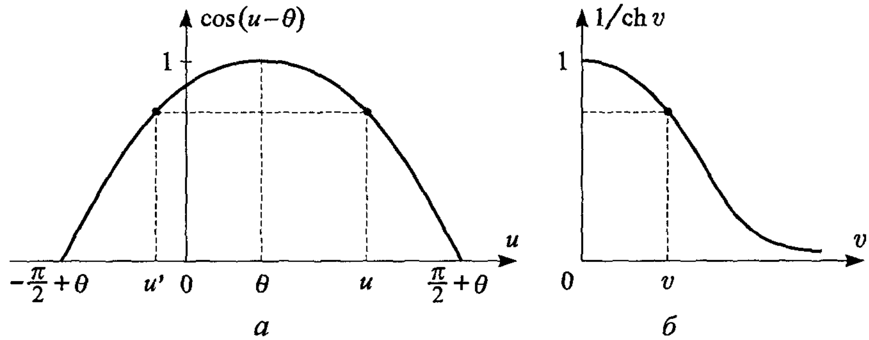


Рис. А.3. Графическое решение уравнения $\cos(u-\theta) = 1/\operatorname{ch} v$

Эти линии изображены на рис. А.4 в виде контуров P_s (сплошная кривая) и P_s' (пунктирная кривая).

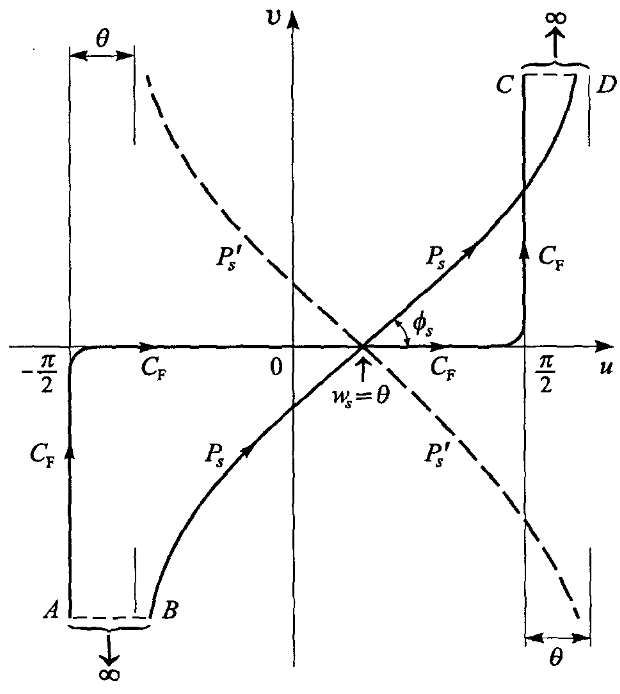


Рис. А.4. Трансформация фурье-контура C_F на плоскости комплексного угла $w = \arcsin(k_z/k)$ в путь наибыстрейшего спуска P_s, проходящий через седловую точку $w_s = \theta$

Реальная часть функции (А.3.11) равняется

$$\operatorname{Re} q(w) = -\sin(u-\theta)\operatorname{sh} v, \tag{А.3.16}$$

тогда в седловой точке $w_s = \theta$ получаем

$$\operatorname{Re} q(w_s) = 0. \tag{А.3.17}$$

Следовательно, в любой точке w, отличной от седловой и лежащей на контуре P_s, для которой $u > \theta$ и $v > 0$, имеем $\mathrm{Re}\, q(w) < \mathrm{Re}\, q(w_s) = 0$, что следует из уравнения (А.3.16). Следовательно, контур P_s на рис. А.4 образует *путь наибыстрейшего спуска*. В противоположность этому, в точках на контуре P_s', для которых $u' < \theta$ и $v > 0$, имеем $\mathrm{Re}\, q(w) > \mathrm{Re}\, q(w_s) = 0$, т. е. контур P_s' образует *путь наибыстрейшего подъема*, который не подходит для асимптотического вычисления интеграла (А.3.1). В том случае, когда $v < 0$, точки u и u', как корни уравнения (А.3.15), меняются местами друг с другом, т. е. $u < \theta$ и $u' > \theta$.

Угол наклона кривой P_s в седловой точке $w_s = \theta$ может быть найден дифференцированием (А.3.15), тогда

$$\mathrm{tg}\,\phi_s \equiv \left.\frac{dv}{du}\right|_{w_s=\theta} = \left.\frac{\sin(u-\theta)}{\mathrm{sh}\, v}\,\mathrm{ch}^2 v\right|_{\substack{u_s=\theta\\ v_s=0}} = 1 \quad \text{или} \quad \phi_s = \frac{\pi}{4}. \tag{А.3.18}$$

Разложение функции (А.3.11) в ряд Тейлора в районе седловой точки $w_s = \theta$ имеет вид

$$q(w) = q(w_s) + \frac{1}{2}\, q''(w_s)(w-w_s)^2 + \cdots = -i + \frac{i}{2}(w-\theta)^2 + \cdots \tag{А.3.19}$$

Подстановка (А.3.19) в исходный интеграл (А.3.1) приводит к следующему результату:

$$f(r,\theta) = \int\limits_{P_s} Q(w)\, e^{krq(w,\theta)} dw \simeq Q(\theta)\, e^{-ikr} \int\limits_{\Delta P_s} e^{ikr(w-\theta)^2/2} dw, \tag{А.3.20}$$

где ΔP_s — отрезок пути P_s, локализованный около седловой точки $w_s = \theta$, в пределах которого можно ограничиться двумя первыми членами разложения функции $q(w)$ в форме (А.3.19).

Следует отметить, что трансформация фурье-контура C_{F} в путь наибыстрейшего спуска P_s на рис. А.4 сделана в предположении, что отсутствуют вклады от сегментов AB и CD, лежащих в бесконечности. Это действительно так, поскольку эти сегменты, как следует из сравнения рис. А.4 с рис. 1.6 *б*, являются частью контуров Жордана C_{J}' и C_{J}'' при $J \to \infty$ (см. рис. 1.5), на которых подынтегральное выражение экспоненциально затухает.

Для вычисления интеграла (А.3.20) сделаем следующую замену переменных вдоль пути интегрирования P_s:

$$w - \theta \equiv w' = \begin{cases} |w'|\, e^{i\pi/4} & \text{при} \quad v > 0, \\ |w'|\, e^{-i3\pi/4} & \text{при} \quad v < 0, \end{cases} \tag{А.3.21}$$

где, согласно (А.3.18), $\phi_s = \pi/4$ (см. рис. А.4).

Из (А.3.21) следует, что $(w-\theta)^2 = i|w'|^2$, как при $v > 0$, так и при $v < 0$. Тогда подстановка (А.3.21) в интеграл (А.3.20) приводит к выражению [3]

$$f(r,\theta) \simeq Q(\theta)\, e^{-ikr}\left(e^{i\pi/4} - e^{-i3\pi/4}\right) \int\limits_0^{\Gamma} e^{-kr|w'|^2/2}\, d|w'|, \tag{А.3.22}$$

где Γ — расстояние вдоль пути интегрирования P_s от седловой точки $w_s = \theta$ до концов линейного отрезка пути ΔP_s, расположенных симметрично относительно точки w_s.

Интеграл, появившийся в выражении (А.3.22), пропорционален функции ошибок (см. формулу (18.8-5) в [1]):

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \to 1 \quad \text{при } x \to \infty. \tag{А.3.23}$$

Тогда, вводя обозначение $x = \sqrt{kr/2}\,\Gamma$, получаем

$$\int_0^\Gamma e^{-kr|w'|^2/2}\, d|w'| = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} \operatorname{erf} x \to \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} \quad \text{при } kr \to \infty.$$

Следовательно, выражение (А.3.22) принимает форму асимптотического представления для вычисляемого интеграла (1.5.8):

$$f(r,\theta) \simeq \sqrt{\frac{2\pi}{kr}}\; Q(\theta)\, e^{-i(kr-\pi/4)} \quad \text{при } kr \to \infty, \tag{А.3.24}$$

где (А.3.10) дает следующее выражение для $Q(w)$ в седловой точке $w_s = \theta$:

$$Q(\theta) \equiv \frac{k\cos\theta}{2\pi} F(k\sin\theta) \equiv \frac{k\cos\theta}{2\pi}\, \frac{s(\omega, k\sin\theta)}{\mathcal{D}(\omega, k\sin\theta)}. \tag{А.3.25}$$

Формула (А.3.24) с учетом выражения (А.3.25) принимает нулевые значения в продольном направлении, т. е. при углах наблюдения $\theta = \pm\pi/2$, поскольку $Q(\pm\pi/2) = 0$. Для этого случая вычисления, выполненные в [4], дают другое выражение (в наших обозначениях):

$$f(r,\theta{=}\pm\pi/2) \equiv f(y{=}0,z) = \frac{k}{2}\Big[F(k\sin w)\cos w\Big]''_{w=\pm\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-i(k|z|-3\pi/4)}}{\sqrt{2\pi|kz|^3}} \equiv$$

$$\equiv \sqrt{\frac{\pi}{2|kz|^3}}\; Q''(\pm\pi/2)\, e^{-i(k|z|-3\pi/4)} \quad \text{при } k|z| \to \infty, \tag{А.3.26}$$

где $Q''(\pm\pi/2)$ — значение второй производной $Q''(w)$, вычисленной в точках $w = \pm\pi/2$. В соответствии с (А.3.10),

$$Q''(w) = \frac{k}{2\pi}\big[F(w)\cos w\big]'' = \frac{k}{2\pi}\big[(F'' - F)\cos w - 2F'\sin w\big],$$

тогда формула (А.3.26) дает искомое выражение при $\theta \simeq \pm\pi/2$:

$$f(y{\simeq}0,z) \simeq \mp\frac{k}{\sqrt{2\pi|kz|^3}}\, F'(\pm\pi/2)\, e^{-i(k|z|-3\pi/4)} \quad \text{при } k|z| \to \infty. \tag{А.3.27}$$

Асимптотические выражения (А.3.24) и (А.3.27) справедливы для таких функций $Q(w)$, которые не имеют особенностей вблизи седловой точки $w_s = \theta$, а также между контурами C_F и P_s. В противном случае математические выкладки становятся более сложными; они могут быть найдены в книге [2] (гл. 4). Вклад в поле дальней зоны от полюса, соответствующего вытекающей моде, который дополняет вклад от седловой точки, даваемый формулами (А.3.24) и (А.3.27), вычисляется в п. 1.5.2.

Как уже отмечалось ранее, если бы контур интегрирования был выбран таким образом, что вдоль него $\operatorname{Re} q(w) = \operatorname{Re} q(w_s) = \mathrm{const}$, то он был бы линией постоянного уровня, на которой фаза $\operatorname{Im} q(w)$ экспоненциальной функции $\exp(krq)$ наиболее быстро меняется. В частном случае функции вида (А.3.11), для которой на линии постоянного уровня, согласно (А.3.17), имеем $\operatorname{Re} q(w) = \operatorname{Re} q(w_s) = 0$, функция $q(w) = i\operatorname{Im} q(w)$ принимает чисто мнимые значения вдоль пути интегрирования.

Такой подход приводит к *методу стационарной фазы* [2]. В этом методе путь интегрирования выбирается вдоль вещественной оси $\operatorname{Re} w$, т. е. $q(w) = -i\cos(w - \theta)$ рассматривается как функция вещественной переменной w. Тогда точка стационарной фазы $w_s = \theta$, найденная из условия (А.3.2), дает, как и прежде, определяющий вклад в интеграл (А.3.1) от осциллирующей экспоненты $\exp(ikr \operatorname{Im} q)$ при $kr \to \infty$. Действительно, при удалении от стационарной точки $w_s = \theta$ быстрые осцилляции фазы усредняются в результате интегрирования, что дает практически нулевой вклад от них. Метод стационарной фазы применяется в п. 1.4 для асимптотического вычисления поля излучения в дальней зоне.

В вышеизложенном рассмотрении мы следовали публикациям [2–4], где можно найти более детальную информацию.

Приложение Б

СООТНОШЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА И ИХ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЕ АНАЛОГИ

Б.1. Математическая формулировка

В отличие от общепринятого в математической литературе подхода, будем анализировать общий случай *неортогонального базиса* функционального пространства, который дает ортогональный базис как частный случай.

Рассмотрим счетное множество комплексных функций $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots$, квадратично интегрируемых (в смысле Лебега) на множестве S точек (x). Класс $L_2(S)$ таких функций (рассматриваемых как обобщенные векторы) составляет бесконечномерное *унитарное векторное* (*функциональное*) *пространство*, если, в дополнение к двум бинарным операциям суммы векторов $\psi_m(x) + \psi_n(x)$ и их произведения $a_m\psi_m(x)$ на комплексный скаляр a_m, определено также скалярное произведение двух векторов $\psi_m(x)$ и $\psi_n(x)$ [1]:

$$(\psi_m, \psi_n) = \int\limits_S \psi_m^*(x)\gamma(x)\psi_n(x)\,dx. \tag{Б.1.1}$$

Здесь весовая функция $\gamma(x)$ является вещественной, неотрицательной и квадратично интегрируемой на S, в частности, может быть $\gamma(x) \equiv 1$.

Как известно [1], если определители Грама $\det[\,(\psi_m, \psi_n)\,]$ для любых конечных подмножеств счетного множества функций, построенные на скалярных произведениях (Б.1.1), отличны от нуля, то функции $\psi_m(x)$, $m = 1, 2, \ldots$ являются линейно независимыми на L_2. Они могут быть выбраны в качестве базиса унитарного функционального пространства, при этом их взаимная ортогональность в общем случае не требуется. Данный набор функций $\{\psi_m(x)\}$ образует линейное многообразие, охватывающее всевозможные линейные комбинации функций $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots$ Составим частичную сумму N-го порядка,

$$s_N(x) = \sum_{m=1}^{N} a_m^{(N)}\psi_m(x), \tag{Б.1.2}$$

со скалярными коэффициентами $a_m^{(N)}$, которые подлежат определению.

Пусть данная функция $\psi(x)$ полностью принадлежит линейному многообразию, натянутому на базисные функции $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots$ Тогда коэффициенты $a_m^{(N)}$ могут быть найдены из требования минимальности среднеквадратичной разности между $s_N(x)$ и $\psi(x)$:

$$D_N = \int\limits_S \gamma(x)\big|s_N(x) - \psi(x)\big|^2 dx = \min. \tag{Б.1.3}$$

С использованием (Б.1.2), величину D_N можно переписать в следующей форме:

$$D_N = \int\limits_S \left[\sum_{m=1}^{N} a_m^{(N)*}\psi_m^*(x) - \psi^*(x)\right]\gamma(x)\left[\sum_{n=1}^{N} a_n^{(N)}\psi_n(x) - \psi(x)\right]dx. \tag{Б.1.4}$$

Тогда условия ее минимальности относительно коэффициентов $a_m^{(N)}$ записываем как

$$\frac{\partial D_N}{\partial a_m^{(N)*}} = \int\limits_S \psi_m^*(x)\gamma(x)\left[\sum_{n=1}^{N} a_n^{(N)}\psi_n(x) - \psi(x)\right]dx = 0, \tag{Б.1.5}$$

$$\frac{\partial^2 D_N}{\partial a_m^{(N)*}\partial a_m^{(N)}} = \int\limits_S \psi_m^*(x)\gamma(x)\psi_m(x)\,dx > 0. \tag{Б.1.6}$$

Условие (Б.1.6) совпадает с требованием квадратичной интегрируемости (с весом), наложенным на базисные функции $\psi_m(x)$, в то время как условие (Б.1.5) дает следующую систему для нахождения коэффициентов $a_m^{(N)}$:

$$\sum_{n=1}^{N} N_{mn}a_n^{(N)} = R_m, \qquad m = 1, 2, \ldots, \tag{Б.1.7}$$

где введены обозначения

$$N_{mn} = \int\limits_S \psi_m^*(x)\gamma(x)\psi_n(x)\,dx \equiv (\psi_m, \psi_n), \tag{Б.1.8}$$

$$R_m = \int\limits_S \psi_m^*(x)\gamma(x)\psi(x)\,dx \equiv (\psi_m, \psi). \tag{Б.1.9}$$

Сходимость по метрике в L_2 определяется как *сходимость в среднем* (англ. *mean convergence*) последовательности частичных сумм $s_N(x)$ вида (Б.1.2) (с коэффициентами $a_m^{(N)}$, найденными из решения системы (Б.1.7)) к функции $\psi(x)$, т. е. $s_N(x) \xrightarrow{\text{mean}} \psi(x)$ при $N \to \infty$, что имеет место, если

$$D_N \equiv \int\limits_S \gamma(x)\big|s_N(x) - \psi(x)\big|^2 dx \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty. \tag{Б.1.10}$$

Использование формул (Б.1.7)–(Б.1.9) и равенства $N_{mn} = N^*_{nm}$ позволяет записать выражение (Б.1.4) в следующем виде:

$$D_N = \sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} N_{mn} a_m^{(N)*} a_n^{(N)} - \sum_{m=1}^{N} R_m a_m^{(N)*} - \sum_{n=1}^{N} R_n^* a_n^{(N)} + \int_S \gamma(x)|\psi(x)|^2 dx =$$

$$= -\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} N_{mn} a_m^{(N)*} a_n^{(N)} + \int_S \gamma(x)|\psi(x)|^2\, dx.$$

Отсюда в предельном случае (Б.1.10), когда $a_m^{(N)} \to a_m$ при $N \to \infty$, следует, что

$$(\psi, \psi) \equiv \int_S \psi^*(x)\gamma(x)\psi(x)\, dx = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} N_{mn} a_m^* a_n. \tag{Б.1.11}$$

Соотношение (Б.1.11) реализуется только для функций $\psi(x)$, квадратично интегрируемых на S (с весовой функцией $\gamma(x)$), для которых существует написанный выше интеграл. Оно выражает полноту системы базисных функций $\psi_m(x)$ (также квадратично интегрируемых на S) в классе квадратично интегрируемых функций $\psi(x)$.

Свойство полноты базиса превращает унитарное функциональное пространство L_2 в *гильбертово пространство*, для которого справедливо разложение

$$\psi(x) \overset{\text{mean}}{=} \sum_{m=1}^{\infty} a_m \psi_m(x), \tag{Б.1.12}$$

определенное в смысле сходимости в среднем, даваемой формулой (Б.1.10). Однозначность такого разложения доказывается следующим образом.

Пусть два различных разложения $\sum_m a'_m \psi_m(x)$ и $\sum_m a''_m \psi_m(x)$ соответствуют одной и той же функции $\psi(x)$ в смысле сходимости в среднем. Для нахождения коэффициентов разложения a'_m и a''_m имеются две системы уравнений типа (Б.1.7) с одинаковой правой частью R_m. Тогда разность между ними в форме $\sum_n N_{mn}(a'_n - a''_n) = 0$, $m = 1, 2, \ldots$ дает $a'_n \equiv a''_n$ в силу $N_{mn} \neq 0$, т. е. исходные разложения совпадают. Если наоборот предположить, что одно и тоже разложение $\sum_m a_m \psi_m(x)$ соответствует двум различным функциям $\psi'(x)$ и $\psi''(x)$, то разностная функция $\psi^-(x) = \psi'(x) - \psi''(x)$ имеет коэффициенты разложения, тождественно равные нулю. В таком случае правая часть соотношения (Б.1.11) исчезает, а это с необходимостью обеспечивает $\psi^-(x) \equiv 0$, т. е. исходные функции совпадают.

Соотношение полноты (Б.1.11) является обобщением известного *равенства Парсеваля* (см. ниже формулу (Б.1.17)) на случай неортогонального базиса. Все вышесказанное убеждает в том, что линейная независимость и полнота системы базисных функций $\{\psi_m(x)\}$ являются фундаментальным свойством базиса, в то время как их взаимная ортогональность не является обязательным требованием, а просто облегчает задачу вычисления коэффициентов разложения a_m.

Действительно, в случае ортогонального базиса имеем

$$(\psi_m, \psi_n) \equiv \int\limits_S \psi_m^*(x)\gamma(x)\psi_n(x)\,dx = 0 \quad \text{при} \quad m \neq n, \tag{Б.1.13}$$

так что с введением символа Кронекера δ_{mn} получаем

$$N_{mn} = N_m \delta_{mn}, \tag{Б.1.14}$$

где

$$N_m = \int\limits_S \psi_m^*(x)\gamma(x)\psi_m(x)\,dx \equiv \|\psi_m\|^2. \tag{Б.1.15}$$

Величину $\|\psi_m\| = \sqrt{(\psi_m, \psi_m)}$ в математической литературе называют *нормой* функции $\psi_m(x)$ [1].

В отличие от этого, в задачах электродинамики *собственной нормой* волноводной функции $\psi_m(x)$ принято называть квадрат этой величины, т. е. $N_m = \|\psi_m\|^2$, как тождественно записано в формуле (Б.1.15). Более того, это понятие расширяется до *взаимной нормы* N_{mn} двух функций $\psi_m(x)$ и $\psi_n(x)$, определенной в виде (Б.1.8) при $n \neq m$, так что при $n = m$ имеем $N_{mn} = N_{mm} \equiv N_m$.

Таким образом, в случае ортогонального базиса, удовлетворяющего условию (Б.1.14), получаем следующее:

1) система связанных уравнений (Б.1.7) превращается в отдельные уравнения, дающие коэффициенты разложения в (Б.1.12) в простейшей форме

$$a_m = \frac{R_m}{N_m} \equiv \frac{(\psi_m, \psi)}{(\psi_m, \psi_m)} = \frac{1}{N_m} \int\limits_S \psi_m^*(x)\gamma(x)\psi(x)\,dx, \tag{Б.1.16}$$

2) общее соотношение полноты (Б.1.11) переходит в обычное *равенство Парсеваля* [1]

$$(\psi, \psi) \equiv \int\limits_S \psi^*(x)\gamma(x)\psi(x)\,dx = \sum_m N_m |a_m|^2. \tag{Б.1.17}$$

Следует иметь в виду, что применение процесса ортогонализации Грама–Шмидта [1] в принципе всегда позволяет сконструировать при необходимости ортогональный базис из неортогонального.

Сформулированное выше свойство полноты базиса гильбертова пространства, выраженное соотношением (Б.1.11) (для неортогонального базиса) или (Б.1.17) (для ортогонального базиса) справедливо только по отношению к таким функциям $\psi(x)$, которые полностью принадлежат этому пространству, натянутому на базисные функции $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots$ Однако в самом общем случае произвольных функций это не так.

Произвольная функция $f(x)$, квадратично интегрируемая на S (в общем случае с весовой функцией $\gamma(x)$), формально может быть связана с функцией $\psi(x)$, представленной в виде разложения (Б.1.12). Будем считать, что коэффициенты разложения a_m, удовлетворяющие (Б.1.7)–(Б.1.9), обусловлены функцией $f(x)$, а не $\psi(x)$, т. е. величина R_m содержит $f(x)$ вместо $\psi(x)$.

В таком случае интеграл (Б.1.9) принимает вид

$$R_m = \int\limits_S \psi_m^*(x)\gamma(x)f(x)\,dx \equiv (\psi_m, f). \tag{Б.1.18}$$

Докажем, что разностная функция $c(x) = f(x) - \psi(x)$ ортогональна каждой базисной функции $\psi_m(x)$ в смысле соотношения (Б.1.13):

$$(\psi_m, c) \equiv (\psi_m, f - \psi) = (\psi_m, f) - (\psi_m, \psi) =$$

$$= R_m - \sum_n (\psi_m, \psi_n)a_n = R_m - \sum_n N_{mn}a_n = 0, \tag{Б.1.19}$$

где использованы формулы (Б.1.8), (Б.1.12) и (Б.1.18), т. е. $N_{mn} = (\psi_m, \psi_n)$ и $R_m = (\psi_m, f)$. Нулевое равенство в (Б.1.19) обеспечивает уравнение (Б.1.7).

Таким образом, любая произвольная функция $f(x)$, не принадлежащая полностью гильбертову пространству (натянутому, например, на собственные функции $\psi_m(x)$ граничной задачи) представляется в следующем виде:

$$f(x) = \psi(x) + c(x) = \sum_m a_m\psi_m(x) + c(x). \tag{Б.1.20}$$

Здесь функция $\psi(x)$, записанная в виде разложения (Б.1.12) (сходящегося в среднем) по базисным функциям и рассматриваемая как составляющая, касательная к гильбертову пространству, называется *проекцией* $f(x)$ на это пространство. Функция $c(x)$ является составляющей, ортогональной к гильбертову пространству из-за того, что, в соответствии с (Б.1.19), $(\psi_m, c) = 0$. Поэтому она называется *ортогональным дополнением*. Для суммарной функции $f(x)$ вместо обобщенного равенства Парсеваля (Б.1.11) существует обобщенное *неравенство Бесселя*:

$$(f, f) \equiv \|\psi + c\|^2 \equiv \int\limits_S f^*(x)\gamma(x)f(x)\,dx \geqslant \sum_m \sum_n N_{mn}a_m^* a_n$$

$$\text{или} \geqslant \sum_n N_m |a_m|^2, \tag{Б.1.21}$$

где последняя одиночная сумма соответствует ортогональному базису [1].

Б.2. Электродинамическая формулировка

Рассмотрим основные соотношения электродинамической модальной теории, отчасти следуя книге [2], с целью установления их аналогии с математическими соотношениями функционального анализа, изложенными в предыдущем параграфе.

Пусть имеется множество собственных функций однородной граничной задачи, определенное на поперечном сечении S волноведущей структуры (с поперечным радиусом-вектором $\mathbf{r}_t$ и продольной осью z). Любая собственная функция $\mathbf{\Psi}_m(\mathbf{r}_t)$ и ее эрмитово сопряжение $\mathbf{\Psi}_m^\dagger(\mathbf{r}_t)$ представляются в бивекторном обозначении как вектор-столбец и вектор-строка [2]:

$$\boldsymbol{\Psi}_m(\mathbf{r}_t) = \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{E}}_m(\mathbf{r}_t) \\ \widehat{\mathbf{H}}_m(\mathbf{r}_t) \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{\Psi}_m^\dagger(\mathbf{r}_t) = \left(\widehat{\mathbf{E}}_m^*(\mathbf{r}_t)\ \widehat{\mathbf{H}}_m^*(\mathbf{r}_t)\right). \tag{Б.2.1}$$

Здесь колпачок сверху векторов поля отмечает соответствующие им *мембранные функции* m-й моды, зависящие лишь от координат $\mathbf{r}_t$ поперечного сечения S и не имеющие зависимости от z (см. во введении формулы (1), учитывающие волновой множитель m-й моды).

По аналогии с (Б.1.1), скалярное произведение двух собственных функций $\boldsymbol{\Psi}_m(\mathbf{r}_t)$ и $\boldsymbol{\Psi}_n(\mathbf{r}_t)$ может быть определено в следующем виде [2]:

$$(\boldsymbol{\Psi}_m, \boldsymbol{\Psi}_n) = \int\limits_S \boldsymbol{\Psi}_m^\dagger(\mathbf{r}_t) \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\Gamma}}} \cdot \boldsymbol{\Psi}_n(\mathbf{r}_t)\, dS \tag{Б.2.2}$$

с весовой функцией $\overline{\overline{\boldsymbol{\Gamma}}}$, заданной в специальной тензорной форме [2],

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\Gamma}}} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{e}_z \times \overline{\overline{\mathbf{I}}} \\ \mathbf{e}_z \times \overline{\overline{\mathbf{I}}} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{при} \quad \mathbf{e}_z \times \overline{\overline{\mathbf{I}}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{Б.2.3}$$

где $\mathbf{e}_z$ — единичный вектор продольной оси z, а $\overline{\overline{\mathbf{I}}}$ — единичный тензор, такой что $(\mathbf{e}_z \times \overline{\overline{\mathbf{I}}}) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{e}_z \times \mathbf{a}$ для любого вектора $\mathbf{a}$. Тензор $\overline{\overline{\boldsymbol{\Gamma}}}$ сконструирован таким образом, чтобы подынтегральная величина (Б.2.2) давала $\boldsymbol{\Psi}_m^\dagger \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\Gamma}}} \cdot \boldsymbol{\Psi}_n = \left(\widehat{\mathbf{E}}_m^* \times \widehat{\mathbf{H}}_n + \widehat{\mathbf{E}}_n \times \widehat{\mathbf{H}}_m^*\right) \cdot \mathbf{e}_z$.

На основе формул (Б.1.8) и (Б.1.15) можно записать их электродинамические аналоги в виде *взаимной нормы* N_{mn} для m-й и n-й мод и *собственной нормы* $N_m \equiv N_{mm}$ для m-й моды:

$$\begin{aligned} N_{mn} \equiv (\boldsymbol{\Psi}_m, \boldsymbol{\Psi}_n) &= \int\limits_S \boldsymbol{\Psi}_m^\dagger \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\Gamma}}} \cdot \boldsymbol{\Psi}_n\, dS = \\ &= \int\limits_S \left(\widehat{\mathbf{E}}_m^* \times \widehat{\mathbf{H}}_n + \widehat{\mathbf{E}}_n \times \widehat{\mathbf{H}}_m^*\right) \cdot \mathbf{e}_z\, dS, \end{aligned} \tag{Б.2.4}$$

$$\begin{aligned} N_m \equiv (\boldsymbol{\Psi}_m, \boldsymbol{\Psi}_m) &= \int\limits_S \boldsymbol{\Psi}_m^\dagger \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\Gamma}}} \cdot \boldsymbol{\Psi}_m\, dS = \\ &= 2\mathrm{Re} \int\limits_S \left(\widehat{\mathbf{E}}_m^* \times \widehat{\mathbf{H}}_m\right) \cdot \mathbf{e}_z\, dS. \end{aligned} \tag{Б.2.5}$$

По аналогии с (Б.1.20), произвольная функция $\mathbf{F}(\mathbf{r}_t, z)$, квадратично интегрируемая на сечении S, может быть записана в виде суммы *модального разложения* $\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{r}_t, z)$ по собственным функциям $\boldsymbol{\Psi}_m(\mathbf{r}_t)$ (сходящегося в среднем), представляющего собой проекцию функции $\mathbf{F}(\mathbf{r}_t, z)$ на гильбертово пространство, и *ортогонального дополнения* $\mathbf{C}(\mathbf{r}_t, z)$, не имеющего проекции на это пространство:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_t, z) = \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{r}_t, z) + \mathbf{C}(\mathbf{r}_t, z) = \sum_m a_m(z)\, \boldsymbol{\Psi}_m(\mathbf{r}_t) + \mathbf{C}(\mathbf{r}_t, z), \tag{Б.2.6}$$

где введены обозначения

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_t, z) = \begin{pmatrix} \mathbf{E}(\mathbf{r}_t, z) \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}_t, z) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Psi}(\mathbf{r}_t, z) = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_a(\mathbf{r}_t, z) \\ \mathbf{H}_a(\mathbf{r}_t, z) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}(\mathbf{r}_t, z) = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_b(\mathbf{r}_t, z) \\ \mathbf{H}_b(\mathbf{r}_t, z) \end{pmatrix}.$$

Ортогональное дополнение $\mathbf{C}$, будучи ортогональным к каждой собственной функции $\mathbf{\Psi}_m$, по аналогии с (Б.1.19) удовлетворяет соотношению

$$(\mathbf{\Psi}_m, \mathbf{C}) \equiv \int\limits_S \mathbf{\Psi}_m^\dagger \cdot \overline{\mathbf{\Gamma}} \cdot \mathbf{C}\, dS = \\ = \int\limits_S \left(\widehat{\mathbf{E}}_m^* \times \mathbf{H}_b + \mathbf{E}_b \times \widehat{\mathbf{H}}_m^*\right) \cdot \mathbf{e}_z\, dS = 0. \tag{Б.2.7}$$

Уравнения (Б.2.6) и (Б.2.7) позволяют представить электромагнитные поля в следующей форме:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_t, z) = \mathbf{E}_a(\mathbf{r}_t, z) + \mathbf{E}_b(\mathbf{r}_t, z) = \sum_m a_m(z)\, \widehat{\mathbf{E}}_m(\mathbf{r}_t) + \mathbf{E}_b(\mathbf{r}_t, z), \tag{Б.2.8}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}_t, z) = \mathbf{H}_a(\mathbf{r}_t, z) + \mathbf{H}_b(\mathbf{r}_t, z) = \sum_m a_m(z)\, \widehat{\mathbf{H}}_m(\mathbf{r}_t) + \mathbf{H}_b(\mathbf{r}_t, z). \tag{Б.2.9}$$

Входящие сюда *ортогональные дополнительные поля* $\mathbf{E}_b(\mathbf{r}_t, z)$, $\mathbf{H}_b(\mathbf{r}_t, z)$ и волновые амплитуды $a_m(z)$, представляющие собой коэффициенты *модальных разложений*,

$$\mathbf{E}_a(\mathbf{r}_t, z) = \sum_m a_m(z)\, \widehat{\mathbf{E}}_m(\mathbf{r}_t), \tag{Б.2.10}$$

$$\mathbf{H}_a(\mathbf{r}_t, z) = \sum_m a_m(z)\, \widehat{\mathbf{H}}_m(\mathbf{r}_t), \tag{Б.2.11}$$

должны быть определены из решения задачи о возбуждении мод.

Модальные амплитуды $a_m(z)$ могут быть найдены из уравнений, аналогичных (Б.1.7) для неортогонального базиса или (Б.1.16) для ортогонального базиса, при этом R_m равняется

$$R_m \equiv (\mathbf{\Psi}_m, \mathbf{\Psi}) = (\mathbf{\Psi}_m, \mathbf{F}) = \int\limits_S \mathbf{\Psi}_m^\dagger \cdot \overline{\mathbf{\Gamma}} \cdot \mathbf{F}\, dS \equiv \\ \equiv \int\limits_S \left(\widehat{\mathbf{E}}_m^* \times \mathbf{H} + \mathbf{E} \times \widehat{\mathbf{H}}_m^*\right) \cdot \mathbf{e}_z\, dS. \tag{Б.2.12}$$

В частности, аналогия с равенством (Б.1.16) для ортогонального базиса дает

$$a_m = \frac{R_m}{N_m} \equiv \frac{(\mathbf{\Psi}_m, \mathbf{F})}{(\mathbf{\Psi}_m, \mathbf{\Psi}_m)} = \frac{1}{N_m} \int\limits_S \left(\widehat{\mathbf{E}}_m^* \times \mathbf{H} + \mathbf{E} \times \widehat{\mathbf{H}}_m^*\right) \cdot \mathbf{e}_z\, dS. \tag{Б.2.13}$$

Для электродинамических приложений важно, что подобный метод нахождения волновых амплитуд $a_m(z)$, основанный на уравнениях (Б.1.7) или (Б.1.16), позволяет вместо модального разложения $\mathbf{\Psi}(\mathbf{r}_t, z)$ для полей использовать его конечную сумму N-го порядка (ср. уравнение (Б.1.2)),

$$\mathbf{S}_N(\mathbf{r}_t, z) = \sum_{m=1}^{N} a_m^{(N)}(z)\mathbf{\Psi}_m(\mathbf{r}_t), \tag{Б.2.14}$$

которая дает наименьшую среднеквадратичную ошибку,

$$D_N = \int_S \left[\mathbf{S}_N^\dagger(\mathbf{r}_t, z) - \mathbf{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}_t, z)\right] \cdot \overline{\mathbf{\Gamma}} \cdot \left[\mathbf{S}_N(\mathbf{r}_t, z) - \mathbf{\Psi}(\mathbf{r}_t, z)\right] dS, \tag{Б.2.15}$$

аналогичную выражению (Б.1.4).

Изложенная в предыдущем параграфе общая аргументация, касающаяся сходимости в среднем, свойств полноты и ортогональности базисных функций гильбертова пространства, может быть обобщена на электродинамический базис собственных функций граничной задачи.

В частности, обобщенные равенства Парсеваля (Б.1.11) и неравенства Бесселя (Б.1.21) позволяют записать их электродинамические аналоги в следующем виде:

- ***электродинамический аналог*** *равенства Парсеваля*

$$\begin{aligned}(\mathbf{\Psi}, \mathbf{\Psi}) \equiv \|\mathbf{\Psi}\|^2 &= \int_S \mathbf{\Psi}^\dagger \cdot \overline{\mathbf{\Gamma}} \cdot \mathbf{\Psi}\, dS = \\ &= \int_S \left(\mathbf{E}_a^* \times \mathbf{H}_a + \mathbf{E}_a \times \mathbf{H}_a^*\right) \cdot \mathbf{e}_z\, dS = \sum_m \sum_n N_{mn} a_m^* a_n \\ &\qquad\qquad \text{или} = \sum_m N_m |a_m|^2,\end{aligned} \tag{Б.2.16}$$

- ***электродинамический аналог*** *неравенства Бесселя*

$$\begin{aligned}(\mathbf{F}, \mathbf{F}) \equiv \|\mathbf{\Psi} + \mathbf{C}\|^2 &= \int_S \mathbf{F}^\dagger \cdot \overline{\mathbf{\Gamma}} \cdot \mathbf{F}\, dS = \\ &= \int_S \left(\mathbf{E}^* \times \mathbf{H} + \mathbf{E} \times \mathbf{H}^*\right) \cdot \mathbf{e}_z\, dS \geqslant \sum_m \sum_n N_{mn} a_m^* a_n \\ &\qquad\qquad \text{или} \geqslant \sum_m N_m |a_m|^2,\end{aligned} \tag{Б.2.17}$$

где последние одиночные суммы соответствуют ортогональному базису.

Интегралы по поперечному сечению волновода, входящие в (Б.2.16) и (Б.2.17), пропорциональны мощности, переносимой по волноводу электромагнитными полями, в то время как модальные суммы справа выражают ту же мощность через амплитуды мод. Это придает физическое содержание электродинамическим аналогам равенства Парсеваля (Б.2.16) и неравенства Бесселя (Б.2.17), которые могут быть переписаны в следующей форме:

- ***электродинамическая формулировка*** *равенства Парсеваля*

$$P_a \equiv \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\int\limits_S (\mathbf{E}_a \times \mathbf{H}_a^*)\cdot \mathbf{e}_z\, dS = \sum_m \sum_n P_{mn}, \tag{Б.2.18}$$

- ***электродинамическая формулировка*** *неравенства Бесселя*

$$P \equiv \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\int\limits_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)\cdot \mathbf{e}_z\, dS \geqslant \sum_m \sum_n P_{mn}, \tag{Б.2.19}$$

где взаимная мощность, переносимая m-й и n-й модами, определена следующим образом:

$$P_{mn} = \frac{1}{4}\, N_{mn} a_m^* a_n \tag{Б.2.20}$$

Разница между (Б.2.18) и (Б.2.19) состоит в том, что равенство Парсеваля содержит под интегралом только поля $\mathbf{E}_a$ и $\mathbf{H}_a$ в форме модальных разложений (Б.2.10) и (Б.2.11), в то время как в неравенство Бесселя они входят в сумме с ортогональными дополнительными полями $\mathbf{E}_b$ и $\mathbf{H}_b$ в форме (Б.2.8) и (Б.2.9). Это и объясняет знак неравенства в формуле (Б.2.19).

Как отмечалось выше, ортогональность собственных мод волноведущей структуры, образующих базис гильбертова пространства, не является обязательным требованием, но ее наличие облегчает задачу нахождения волновых амплитуд a_m в виде (Б.2.13), являющихся коэффициентами модальных разложений (Б.2.10) и (Б.2.11). Такое свойство присуще физическим системам без потерь, в то время как появление потерь в диссипативных системах разрушает «чистую» ортогональность мод и превращает ее в так называемую модальную *квази-ортогональность* (см. п. 2.3).

Приложение В

ПРОСТАЯ ЛЕММА ЛОРЕНЦА И ЕЕ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЕ СЛЕДСТВИЯ

В.1. Вывод леммы Лоренца в простой (несопряженной) форме

Основу электродинамического анализа, выполненного в пп. 2.8–2.13, составляет лемма Лоренца в комплексно-сопряженной форме. Из нее как частные случаи вытекают следующие важные следствия:

а) теорема Пойнтинга,

б) соотношения квази-ортогональности мод,

в) уравнения возбуждения мод заданными токами.

Однако многие авторы (см., например, [5–11]) вместо сопряженной леммы Лоренца альтернативно применяют для тех же целей ее несопряженную формулировку. По этой причине необходимо рассмотреть электродинамические следствия такого подхода с целью обоснования нашего выбора в пользу комплексно сопряженной формы леммы Лоренца.

При выводе леммы Лоренца в обеих формах рассматриваются два электромагнитных поля ($\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$ и $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$), возбуждаемых разными токами — объемными ($\mathbf{J}_{b1}^{e,m} \neq \mathbf{J}_{b2}^{e,m}$) и поверхностными ($\mathbf{J}_{s1}^{e,m} \neq \mathbf{J}_{s2}^{e,m}$). В качестве исходных уравнений для простой леммы Лоренца вместо уравнения Максвелла (2.8.1) и (2.8.2) используют те же уравнения, но без комплексного сопряжения полей:

$$\nabla \times \mathbf{E}_1 = -i\omega\mathbf{B}_1 - \mathbf{J}_{b1}^m, \qquad \nabla \times \mathbf{E}_2 = -i\omega\mathbf{B}_2 - \mathbf{J}_{b2}^m, \tag{B.1.1}$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_1 = i\omega\mathbf{D}_1 + \mathbf{J}_{b1}^e, \qquad \nabla \times \mathbf{H}_2 = i\omega\mathbf{D}_2 + \mathbf{J}_{b2}^e. \tag{B.1.2}$$

Применяя к уравнениям (B.1.1) и (B.1.2) ту же схему преобразований, которая привела к (2.8.3), получаем следующее квадратичное соотношение:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1) &= \\ &= (\mathbf{J}_{b1}^e \cdot \mathbf{E}_2 - \mathbf{J}_{b2}^e \cdot \mathbf{E}_1) - (\mathbf{J}_{b1}^m \cdot \mathbf{H}_2 - \mathbf{J}_{b2}^m \cdot \mathbf{H}_1) + \\ &+ i\omega\Big[(\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{E}_2 - \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{E}_1) - (\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{H}_2 - \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{H}_1)\Big], \end{aligned} \tag{B.1.3}$$

известное как *несопряженная лемма Лоренца* или просто *лемма Лоренца* (часто называемая в английской литературе *теоремой взаимности* [12, 13]).

Будем рассматривать *анизотропные среды*, характеризуемые тензорными проницаемостями $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{1,2}$ и $\overline{\boldsymbol{\mu}}_{1,2}$ с индексами 1 и 2, соответствующими двум разным процессам, описываемым уравнениями Максвелла (В.1.1) и (В.1.2). Тогда материальные уравнения для них имеют вид

$$\mathbf{D}_{1,2} = \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{1,2} \cdot \mathbf{E}_{1,2} \quad \text{и} \quad \mathbf{B}_{1,2} = \overline{\boldsymbol{\mu}}_{1,2} \cdot \mathbf{H}_{1,2}. \tag{В.1.4}$$

Последнее слагаемое в правой части (В.1.3) преобразуется с помощью материальных уравнений (В.1.4) к следующему виду:

$$i\omega\Big[(\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{E}_2 - \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{E}_1) - (\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{H}_2 - \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{H}_1)\Big] = \\ = i\omega\Big[(\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 - \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_2^{\mathsf{T}}) : \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2 - (\overline{\boldsymbol{\mu}}_1 - \overline{\boldsymbol{\mu}}_2^{\mathsf{T}}) : \mathbf{H}_1\mathbf{H}_2\Big], \tag{В.1.5}$$

где $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_2^{\mathsf{T}}$ и $\overline{\boldsymbol{\mu}}_2^{\mathsf{T}}$ — транспонированные тензоры $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_2$ и $\overline{\boldsymbol{\mu}}_2$. При выводе (В.1.5) использовано перестановочное свойство двойного скалярного произведения тензора и диады: $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_2^{\mathsf{T}} : \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2 \equiv \mathbf{E}_2 \cdot \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_2^{\mathsf{T}} \cdot \mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_1 \cdot \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_2 \cdot \mathbf{E}_2 \equiv \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_2 : \mathbf{E}_2\mathbf{E}_1$.

В общем случае тензоры $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ и $\overline{\boldsymbol{\mu}}$ учитывают электрические и магнитные потери среды, т. е. понимаются как суммы $(\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} + \overline{\boldsymbol{\sigma}}_e/i\omega)$ и $(\overline{\boldsymbol{\mu}} + \overline{\boldsymbol{\sigma}}_m/i\omega)$, где $\overline{\boldsymbol{\sigma}}_e$ и $\overline{\boldsymbol{\sigma}}_m$ характеризуют электрическую и магнитную проводимость среды.

Обязательным условием превращения леммы Лоренца (В.1.3) в теорему взаимности является исчезновение последнего члена в правой части, т. е. равенство нулю выражения (В.1.5), что имеет место при

$$\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 = \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_2^{\mathsf{T}} \quad \text{и} \quad \overline{\boldsymbol{\mu}}_1 = \overline{\boldsymbol{\mu}}_2^{\mathsf{T}}. \tag{В.1.6}$$

Реализация условий (В.1.5) возможна для двух типов сред, называемых *взаимными* (англ. *reciprocal*) и *взаимно-сопряженными* (англ. по-разному *adjoint* или *complementary* [13]).

Взаимные среды характеризуются такими материальными параметрами $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ и $\overline{\boldsymbol{\mu}}$, для которых всегда (как с потерями, так и без потерь) справедливы соотношения

$$\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathsf{T}} \quad \text{и} \quad \overline{\boldsymbol{\mu}} = \overline{\boldsymbol{\mu}}^{\mathsf{T}}, \tag{В.1.7}$$

т. е. тензоры проницаемости (и проводимости при наличии потерь) являются *симметричными*, в частности, скалярами для изотропных сред.

В отсутствие потерь эти тензоры, в соответствии с (2.1.18), эрмитовы, тогда для них

$$\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathsf{T}} = \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^* \quad \text{и} \quad \overline{\boldsymbol{\mu}}^{\mathsf{T}} = \overline{\boldsymbol{\mu}}^*. \tag{В.1.8}$$

Из формул (В.1.7) и (В.1.8) следуют равенства

$$\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^* \quad \text{и} \quad \overline{\boldsymbol{\mu}} = \overline{\boldsymbol{\mu}}^*, \tag{В.1.9}$$

свидетельствующие о том, что взаимные среды без потерь имеют чисто вещественные тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости.

Таким образом, равенства (В.1.7), выполняемые для взаимных сред, удовлетворяют общим требованиям (В.1.6) при равных индексах 1 и 2 (которые теперь можно опустить, но только у тензоров $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ и $\overline{\boldsymbol{\mu}}$, а не у полей).

Это означает, что два разных электромагнитных процесса 1 и 2 с полями $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$ и $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$, протекающие в одной и той же взаимной среде (с симметричными тензорами проницаемости), всегда таковы, что для них автоматически исчезает выражение (В.1.5). Это и есть энергетический признак взаимных сред.

Взаимно-сопряженные среды являются парными средами с такими материальными параметрами, что если для одной из них (пусть с индексом 1)

$$\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 = \overline{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \text{и} \quad \overline{\boldsymbol{\mu}}_1 = \overline{\boldsymbol{\mu}}, \tag{В.1.10}$$

то для другой среды (с индексом 2), сопряженной с первой,

$$\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_2 = \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathsf{T}} \quad \text{и} \quad \overline{\boldsymbol{\mu}}_2 = \overline{\boldsymbol{\mu}}^{\mathsf{T}}. \tag{В.1.11}$$

Иными словами, тензоры $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c$ и $\overline{\boldsymbol{\mu}}_c$ для сопряженной среды (с индексом c) получаются транспонированием тензоров $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ и $\overline{\boldsymbol{\mu}}$ для исходной среды.

Следовательно, пара взаимно-сопряженных сред *имеет* тензоры проницаемостей, сопряженные по следующему правилу:

$$\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} \Leftrightarrow \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c \equiv \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathsf{T}} \quad \text{и} \quad \overline{\boldsymbol{\mu}} \Leftrightarrow \overline{\boldsymbol{\mu}}_c \equiv \overline{\boldsymbol{\mu}}^{\mathsf{T}}. \tag{В.1.12}$$

Примером невзаимной среды, *для которой* существует *парная* взаимно-сопряженная среда, является намагниченный до насыщения феррит (гиромагнитная среда). Как известно [14, 15], изменение направления намагничивания феррита превращает несимметричный тензор магнитной проницаемости в *транспонированную* форму. Поэтому две взаимно-сопряженные гиромагнитные среды отличаются только направлением статического намагничивания.

Равенства (В.1.10) и (В.1.11), наложенные на взаимно-сопряженные среды, удовлетворяют общим требованиям (В.1.6). Это означает, что электромагнитные процессы 1 и 2 с полями $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$ и $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$ в разных средах, описываемых материальными параметрами, взаимно сопряженными по правилу (В.1.12), удовлетворяют лемме Лоренца (В.1.3) без последнего слагаемого в правой части.

Таким образом, как для одиночной взаимной среды, так и для пары взаимно-сопряженных сред, лемма Лоренца (В.1.3) после интегрирования по поперечному сечению S волноведущей структуры с применением интегрального соотношения типа (2.8.10) и граничных условий (2.5.9)–(2.5.10) на контуре L_s (с возбуждающими поверхностными токами $\mathbf{J}_s^{e,m}$) принимает следующую интегральную форму:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z} \int\limits_S \left(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1\right) \cdot \mathbf{e}_z \, dS &= \\
= \int\limits_{S_b} \Big[(\mathbf{J}_{b1}^e \cdot \mathbf{E}_2 - \mathbf{J}_{b1}^m \cdot \mathbf{H}_2) - (\mathbf{J}_{b2}^e \cdot \mathbf{E}_1 - \mathbf{J}_{b2}^m \cdot \mathbf{H}_1)\Big] dS &+ \\
+ \int\limits_{L_s} \Big[(\mathbf{J}_{s1}^e \cdot \mathbf{E}_2 - \mathbf{J}_{s1}^m \cdot \mathbf{H}_2) - (\mathbf{J}_{s2}^e \cdot \mathbf{E}_1 - \mathbf{J}_{s2}^m \cdot \mathbf{H}_1)\Big] dS&.
\end{aligned} \tag{В.1.13}$$

По аналогии с п. 2.7, поверхностные токи $\mathbf{J}_s^{e,m}$, входящие в (В.1.13), учитывают, наряду с реальными токами, также эффективные поверхностные токи $\mathbf{J}_{s,eff}^{e,m}$, расположенные на контуре L_b, ограничивающем сечение S_b, занятое объемными возбуждающими токами $\mathbf{J}_b^{e,m}$.

Простая лемма Лоренца в интегральной форме (В.1.13), как и ее сопряженный аналог (2.8.13)–(2.8.16), позволяет выводить такие важные электродинамические следствия, как соотношения ортогональности и уравнения возбуждения мод заданными источниками. Однако в отличие от сопряженной леммы, она не приводит к теореме Пойнтинга при равных индексах 1 и 2, так как превращается при этом в тождественно нулевое равенство.

Применим интегральную лемму Лоренца (В.1.13) для вывода соотношения ортогональности и уравнений возбуждения мод.

В.2. Вывод соотношения ортогональности

Ортогональность мод в спектре любой волноведущей структуры доказывается в отсутствие возбуждающих источников, при этом роль систем с индексами 1 и 2 выполняют собственные моды с номерами m и n для волновода, выбранного в качестве базового. Тогда лемма Лоренца (В.1.13) превращается в соотношение

$$\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_S \left(\mathbf{E}_m\times\mathbf{H}_n-\mathbf{E}_n\times\mathbf{H}_m\right)\cdot\mathbf{e}_z\,dS=0. \qquad \text{(В.2.1)}$$

Электромагнитные поля m-й и n-й мод описываются выражениями (2.3.5), подстановка которых в (В.2.1) дает искомое ***соотношение ортогональности***:

$$(\gamma_m+\gamma_n)\,\mathcal{N}_{mn}=0. \qquad \text{(В.2.2)}$$

Здесь введен нормировочный коэффициент, построенный на мембранных функциях (отмеченных колпачком) для модальных полей в виде

$$\mathcal{N}_{mn}=\int\limits_S\left(\widehat{\mathbf{E}}_m\times\widehat{\mathbf{H}}_n-\widehat{\mathbf{E}}_n\times\widehat{\mathbf{H}}_m\right)\cdot\mathbf{e}_z dS. \qquad \text{(В.2.3)}$$

Чтобы отличить (В.2.3) от аналогичного нормировочного коэффициента N_{mn} в форме (2.2.6), построенного на комплексно-сопряженных мембранных функциях, величина $\mathcal{N}_{mn}$ обозначена рукописной буквой.

Как следует из соотношения ортогональности (В.2.2), любая m-я мода ортогональна (в смысле $\mathcal{N}_{mn}=0$) всем другим модам с номером n, для которых $\gamma_n\neq-\gamma_m$. Следовательно, неортогональность имеет место только между *встречно-бегущими модами*[1] с номерами m и $n=\overline{m}$, постоянные

[1] *Встречно-бегущие моды*, отличающиеся знаком *постоянной распространения*, не следует смешивать со *встречными модами*, введенными в п. Г.9.2 для недиссипативных волноводов как пара активных мод, отличающихся знаком *групповой скорости*. Пара встречно-бегущих мод $(m,\overline{m})$ использует в обозначениях черту над номером моды, что следует отличать от знака тильды, применяемого для одной из реактивных мод двойниковой пары $(m,\widetilde{m})$.

распространения которых имеют разные знаки (ср. уравнение (2.4.2)):

$$\gamma_{\overline{m}} = -\gamma_m, \qquad \text{или} \qquad \alpha_{\overline{m}} = -\alpha_m \quad \text{и} \quad \beta_{\overline{m}} = -\beta_m. \tag{B.2.4}$$

Если m-я мода — прямая (при $m = +m > 0$), то $\overline{m}$-я мода — *обязательно* обратная (при $\overline{m} = -m < 0$), так как, согласно (В.2.4),

$$\gamma_{\pm m} = \pm\,\gamma_m, \qquad \text{или} \qquad \alpha_{\pm m} = \pm\,\alpha_m \gtrless 0 \quad \text{и} \quad \beta_{\pm m} = \pm\,\beta_m \gtrless 0. \tag{B.2.5}$$

Отсюда вытекает проблема *двунаправленности* (или *бинаправленности*, англ. *bidirectionality*) волноведущих структур: *каждая волноводная мода должна иметь свою встречно-бегущую моду* среди мод, принадлежащих:

а) либо спектру данного волновода — для *взаимных волноводов*, т.е. волноводов, заполненных взаимными средами с проницаемостями, удовлетворяющими соотношениям (В.1.7);

б) либо спектру сопряженной граничной задачи — для *невзаимных волноводов*, заполненных взаимно-сопряженными средами с проницаемостями, удовлетворяющими правилам сопряжения (В.1.12).

Если такая физическая ситуация реализована, то взаимные волноводы называются *двунаправленными*, а невзаимные волноводы с взаимно-сопряженными средами — *взаимно-двунаправленными*.

Детальное исследование проблемы двунаправленности волноводов, в том числе, с гиротропным заполнением, выполнено в работах [15, 16].

Взаимный волновод, как оказалось, является двунаправленным только тогда, когда он имеет по крайней мере один из трех элементов симметрии:

а) плоскость симметрии, перпендикулярную оси волновода,

б) ось симметрии второго порядка, перпендикулярную оси волновода,

в) зеркально-поворотную ось порядка n, параллельную оси волновода.

В этих случаях двунаправленность возникает по той причине, что после применения любой из указанных операций симметрии преобразованный волновод оказывается идентичным исходному и отличается лишь положительным направлением оси z.

Невзаимные волноводы, даже обладающие указанными элементами симметрии и заполненные взаимно-сопряженными средами, отнюдь не всегда являются двунаправленными по отношению друг к другу. Это детально показано в работе [15] на примере гиромагнитных (ферритовых) волноводов с тремя вышеперечисленными элементами симметрии и взаимным сопряжением сред путем изменения направления статического намагничивания.

Таким образом, свойство двунаправленности не является всеобъемлющим для волноведущих структур, что ограничивает применимость соотношения ортогональности (В.2.2) даже для волноводов, заполненных взаимными и взаимно-сопряженными средами.

В тех случаях, когда волновод является двунаправленным (при взаимной среде) или имеет взаимную двунаправленность (при взаимно-сопряженных средах), равенство (В.2.2) может быть записано в виде *соотношения ортонормировки* (ср. уравнение (2.4.23)):

$$\mathcal{N}_{mn} = \mathcal{N}_{m\overline{m}}\,\delta_{\overline{m}n} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad n \neq \overline{m}, \\ \mathcal{N}_{m\overline{m}} \equiv \mathcal{N}_m & \text{при} \quad n = \overline{m}. \end{cases} \tag{B.2.6}$$

Здесь нормировочный коэффициент $\mathcal{N}_{mn}$ определен в форме (В.2.3), а норма $\mathcal{N}_m$ построена на полях m-й и $\overline{m}$-й мод (ср. уравнение (2.4.18)):

$$\mathcal{N}_m \equiv \mathcal{N}_{m\overline{m}} = \int\limits_S \left(\widehat{\mathbf{E}}_m \times \widehat{\mathbf{H}}_{\overline{m}} - \widehat{\mathbf{E}}_{\overline{m}} \times \widehat{\mathbf{H}}_m\right) \cdot \mathbf{e}_z \, dS = -\mathcal{N}_{\overline{m}m} \equiv -\mathcal{N}_{\overline{m}}. \qquad (\text{В.2.7})$$

Если m-ю моду считать прямой с номером $m = +m > 0$, а $\overline{m}$-ю моду — обратной с номером $\overline{m} = -m < 0$ (где m теперь означает абсолютное значение номера моды), то их нормы, согласно (В.2.7), связаны соотношением

$$\mathcal{N}_{+m} = \int\limits_S \left(\widehat{\mathbf{E}}_{+m} \times \widehat{\mathbf{H}}_{-m} - \widehat{\mathbf{E}}_{-m} \times \widehat{\mathbf{H}}_{+m}\right) \cdot \mathbf{e}_z \, dS = -\mathcal{N}_{-m}. \qquad (\text{В.2.8})$$

При этом и прямая мода (с индексом $+m > 0$), и обратная мода (с индексом $-m < 0$) принадлежат либо одному и тому же двунаправленному волноводу (при взаимной среде), либо разным взаимно-двунаправленным волноводам (при взаимно-сопряженных средах).

Следует подчеркнуть, что нормы прямой и обратной мод, будучи всегда противоположными по знаку, согласно (В.2.7) и (В.2.8), в общем случае являются комплекснозначными и не имеют прямого энергетического смысла, так как не связаны непосредственно с активной мощностью, переносимой модами. Это отличает их от норм (2.4.10) и (2.4.18), введенных с комплексным сопряжением полей, которые напрямую определяют активные модальные мощности в виде (2.4.12) и (2.4.22).

В.3. Вывод уравнений возбуждения мод

Как и ранее при выводе уравнений возбуждения в п. 2.8.4, электромагнитные поля с индексом 1 полагаем соответствующими *искомым полям* $\mathbf{E} = \mathbf{E}_a + \mathbf{E}_b$ и $\mathbf{H} = \mathbf{H}_a + \mathbf{H}_b$ исследуемого волновода в форме (2.6.1) и (2.6.2) (с заменой индекса суммирования m на n), которые возбуждаются заданными токами — объемными $\mathbf{J}_b^{e,m}$ и поверхностными $\mathbf{J}_s^{e,m}$ (последние учитывают совместный вклад реальных и эффективных токов). Электромагнитные поля с индексом 2 соответствуют *известным полям* $\mathbf{E}_m$ и $\mathbf{H}_m$ собственной m-й моды волновода, принятого в качестве базового, без возбуждающих токов ($\mathbf{J}_{b2}^{e,m} = \mathbf{J}_{s2}^{e,m} = 0$). По аналогии с формулами (2.8.25) записываем

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}_1 \equiv \mathbf{E} = \mathbf{E}_a + \mathbf{E}_b, && \mathbf{J}_{b1}^{e,m} \equiv \mathbf{J}_b^{e,m} \neq 0, \\ &\mathbf{H}_1 \equiv \mathbf{H} = \mathbf{H}_a + \mathbf{H}_b, && \mathbf{J}_{s1}^{e,m} \equiv \mathbf{J}_s^{e,m} \neq 0, \\ &\mathbf{E}_2 \equiv \mathbf{E}_m, \ \mathbf{H}_2 \equiv \mathbf{H}_m, && \mathbf{J}_{b2}^{e,m} = 0, \ \mathbf{J}_{s2}^{e,m} = 0. \end{aligned} \qquad (\text{В.3.1})$$

Подстановка полных полей в форме (2.6.1) и (2.6.2) (с заменой индекса $m \to n$ и с учетом (В.3.1)) в общее интегральное соотношение (В.1.13) при замене индекса $2 \to m$ позволяет записать его в виде

$$\frac{d\mathcal{P}_{1m}(z)}{dz} = \mathcal{R}_{1m}(z). \qquad (\text{В.3.2})$$

Здесь введены следующие величины (обозначенные рукописными буквами, чтобы отличить их от аналогичных величин P_{lm} и R_{lm} с комплексным сопряжением, введенных в гл. 2 на основе сопряженной леммы Лоренца):

$$\mathcal{P}_{lm}(z) = \int\limits_S (\mathbf{E}_l \times \mathbf{H}_m - \mathbf{E}_m \times \mathbf{H}_l) \cdot \mathbf{e}_z \, dS = \\ = -\sum_n \mathcal{N}_{mn} A_n(z) e^{-(\gamma_m + \gamma_n)z}, \tag{B.3.3}$$

$$\mathcal{R}_{lm}(z) = \mathcal{R}_{lm}^{(b)}(z) + \mathcal{R}_{lm}^{(s)}(z) = \\ = \left[\mathcal{R}_m^{(b)}(z) + \mathcal{R}_m^{(s)}(z)\right] e^{-\gamma_m z} \equiv \mathcal{R}_m(z) e^{-\gamma_m z}. \tag{B.3.4}$$

В выражении (В.3.3) использован нормировочный коэффициент (В.2.3), а в выражении (В.3.4) введены два интеграла возбуждения:

- интеграл *объемного возбуждения* (ср. уравнение (2.8.29))

$$\mathcal{R}_m^{(b)}(z) = \int\limits_{S_b} \left(\mathbf{J}_b^e(z) \cdot \widehat{\mathbf{E}}_m - \mathbf{J}_b^m(z) \cdot \widehat{\mathbf{H}}_m\right) dS, \tag{B.3.5}$$

- интеграл *поверхностного возбуждения* (ср. уравнение (2.8.30))

$$\mathcal{R}_m^{(s)}(z) = \int\limits_{L_s} \left(\mathbf{J}_s^e(z) \cdot \widehat{\mathbf{E}}_m - \mathbf{J}_s^m(z) \cdot \widehat{\mathbf{H}}_m\right) dL. \tag{B.3.6}$$

Подстановка выражений (В.3.3)–(В.3.4) в соотношение (В.3.2) дает следующее уравнение (ср. уравнение (2.8.31)):

$$\sum_n \left\{\mathcal{N}_{mn} \frac{dA_n(z)}{dz} - \left[(\gamma_m + \gamma_n)\mathcal{N}_{mn}\right] A_n(z)\right\} e^{-\gamma_n z} = \\ = -\left[\mathcal{R}_m^{(b)}(z) + \mathcal{R}_m^{(s)}(z)\right] \equiv -\mathcal{R}_m(z), \tag{B.3.7}$$

где квадратная скобка в левой части уравнения исчезает в силу соотношения ортогональности (В.2.2).

Использование в формуле (В.3.7) условия ортонормировки (В.2.6) в виде $\mathcal{N}_{mn} = \mathcal{N}_m \delta_{\overline{m}n}$ приводит к искомому уравнению возбуждения для m-й и $\overline{m}$-й *встречно-бегущих мод*:

$$\frac{dA_m}{dz} e^{-\gamma_m z} = -\frac{\mathcal{R}_{\overline{m}}}{\mathcal{N}_{\overline{m}}} \quad \text{и} \quad \frac{dA_{\overline{m}}}{dz} e^{-\gamma_{\overline{m}} z} = -\frac{\mathcal{R}_m}{\mathcal{N}_m}, \tag{B.3.8}$$

где нормы $\mathcal{N}_m \equiv \mathcal{N}_{m\overline{m}}$ и $\mathcal{N}_{\overline{m}} \equiv \mathcal{N}_{\overline{m}m}$ определены формулой (В.2.7), а постоянные распространения γ_m и $\gamma_{\overline{m}}$ связаны равенством (В.2.4).

На основании уравнений в форме (В.3.8) можно записать уравнения возбуждения для прямой моды (с номером $m = +m > 0$) и обратной моды (с номером $\overline{m} = -m < 0$) (где m означает абсолютное значение номера моды), объединяя их в одно уравнение:

- для *амплитуд возбуждения* $A_{\pm m}$

$$\frac{dA_{\pm m}}{dz} = \frac{1}{\mathcal{N}_{\pm m}}\int\limits_{S_b}\left(\mathbf{J}_b^e\cdot\mathbf{E}_{\mp m}-\mathbf{J}_b^m\cdot\mathbf{H}_{\mp m}\right)dS + \\ + \frac{1}{\mathcal{N}_{\pm m}}\int\limits_{L_s}\left(\mathbf{J}_s^e\cdot\mathbf{E}_{\mp m}-\mathbf{J}_s^m\cdot\mathbf{H}_{\mp m}\right)dL, \tag{В.3.9}$$

- для *волновых амплитуд* $a_{\pm m} = A_{\pm m}\exp(-\gamma_{\pm m}z)$

$$\frac{da_{\pm m}}{dz} + \gamma_{\pm m}a_{\pm m} = \frac{1}{\mathcal{N}_{\pm m}}\int\limits_{S_b}\left(\mathbf{J}_b^e\cdot\widehat{\mathbf{E}}_{\mp m}-\mathbf{J}_b^m\cdot\widehat{\mathbf{H}}_{\mp m}\right)dS + \\ + \frac{1}{\mathcal{N}_{\pm m}}\int\limits_{L_s}\left(\mathbf{J}_s^e\cdot\widehat{\mathbf{E}}_{\mp m}-\mathbf{J}_s^m\cdot\widehat{\mathbf{H}}_{\mp m}\right)dL. \tag{В.3.10}$$

Здесь нормы $\mathcal{N}_{\pm m}$ (в общем случае комплекснозначные даже в отсутствие потерь) двух встречно-бегущих мод, для которых $\gamma_{+m} = -\gamma_{-m}$, связаны между собой соотношением $\mathcal{N}_{+m} = -\mathcal{N}_{-m}$ и определены в виде (В.2.8).

Разница между этими уравнениями состоит в том, что уравнение (В.3.9) (для амплитуд возбуждения $A_{\pm m}$) содержит под интегралами модальные поля $\mathbf{E}_{\mp m}$ и $\mathbf{H}_{\mp m}$ (без колпачка), а уравнение (В.3.10) (для волновых амплитуд $a_{\pm m}$) — мембранные функции $\widehat{\mathbf{E}}_{\mp m}$ и $\widehat{\mathbf{H}}_{\mp m}$, обозначенные колпачком сверху и связанные с полями соотношениями

$$\mathbf{E}_{\mp m} = \widehat{\mathbf{E}}_{\mp m}e^{-\gamma_{\mp m}z} \quad \text{и} \quad \mathbf{H}_{\mp m} = \widehat{\mathbf{H}}_{\mp m}e^{-\gamma_{\mp m}z}. \tag{В.3.11}$$

Уравнения возбуждения (В.3.9) и (В.3.10) совпадают с аналогичными уравнениями Вайнштейна в теории возбуждения заданными источниками волноводов с изотропным заполнением [5]. Как уже отмечалось в п. 2.7, среди возбуждающих источников Вайнштейном были полностью потеряны эффективные поверхностные токи — электрические $\mathbf{J}^e_{s,eff}$ и магнитные $\mathbf{J}^m_{s,eff}$, в полученной нами форме (2.6.26). В этом теория Вайнштейна проигрывает теории Фелсена–Маркувица [2], где наши эффективные поверхностные токи неявно учтены эффективными объемными токами $\mathbf{J}^e_{b,eff}$ и $\mathbf{J}^m_{b,eff}$, введенными авторами [2] в форме (2.7.20) и (2.7.21) (доказательство см. в п. 2.7.2).

Как видно из (В.3.9)–(В.3.10), возбуждение *прямой моды* (с амплитудой A_{+m} или a_{+m}) осуществляется через поля *обратной моды* ($\mathbf{E}_{-m}, \mathbf{H}_{-m}$ или $\widehat{\mathbf{E}}_{-m}, \widehat{\mathbf{H}}_{-m}$) и наоборот. В этом смысле пара *встречно-бегущих мод* $(m, \overline{m})$, для которых $\gamma_m + \gamma_{\overline{m}} = 0$, напоминает пару *двойниковых мод* $(m, \widetilde{m})$, введенных в п. 2.4, для которых $\gamma_m + \gamma^*_{\widetilde{m}} = 0$. Это видно из сравнения (В.3.9)–(В.3.10) с уравнениями возбуждения (2.7.13)–(2.7.14).

Разница между этими парами мод состоит в том, что *встречно-бегущие моды* существуют *только* в двунаправленных и взаимно-двунаправленных волноводах, в то время как *двойниковые моды* существуют *всегда* в недиссипативных волноводах с реактивными модами. Как показано в п. 2.4, последнее является простым следствием альтернативной записи волнового множителя в двух формах $\exp[\pm i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})]$.

Таким образом, простая (несопряженная) лемма Лоренца привела к уравнениям возбуждения каждой отдельной моды заданными токами. Подобная особенность модального возбуждения, как и свойство ортогональности, выраженное равенством (В.2.2), не зависит от наличия или отсутствия потерь во взаимных и взаимно-сопряженных средах. Именно это и сделало привлекательной лемму Лоренца в несопряженной форме [5]. Действительно, при наличии потерь одиночные уравнения возбуждения типа (В.3.9)–(В.3.10) проще, чем система диссипативно связанных уравнений (2.8.32)–(2.8.33). Однако как показано в п. 2.9, эта простота исчезает при самосогласованной постановке задачи о связи мод. Более того, использование нормы в форме (В.2.7)–(В.2.8), не имеющей ясной физической интерпретации, делает невозможным введение энергетической нормировки, которая чрезвычайно важна при построении теории связанных мод.

Все вышесказанное послужило аргументом в пользу нашего выбора леммы Лоренца именно в комплексно-сопряженной форме, на основе которой в гл. 2 разработана общая теория возбуждения волноведущих структур сторонними источниками. Только такой подход позволяет на базе теории возбуждения самосогласованно построить теорию связи волноводных мод. Это продемонстрировано в гл. 3 и 4 в применении к открытым волноведущим структурам оптического диапазона.

Приложение Г

ЭЛЕМЕНТЫ ОБЫЧНОЙ ТЕОРИИ СВЯЗАННЫХ МОД

Теория связанных мод (ТСМ) уходит своими корнями в начало 50-х годов прошлого столетия к пионерским работам Миллера [17] и Пирса [18, 19]. Они первыми применили идею о связанных волнах к анализу взаимодействия электромагнитных волн в СВЧ волноводных устройствах [17] и в лампе бегущей волны (ЛБВ) [18, 19]. В случае ЛБВ электромагнитные волны, замедленные до скорости дрейфа электронов в вакууме, взаимодействуют с волнами пространственного заряда (ВПЗ) в электронном луче. Позднее волновой подход Пирса был применен для описания работы лампы обратной волны (ЛОВ) [20, 21], а также параметрических усилителей и преобразователей частоты, использующих как продольные и поперечные волны электронного луча [22–24], так и волноведущие свойства ферритовой среды [25, 26].

Вклад многочисленных авторов в разработку и реализацию идей ТСМ был обобщен Люиселлом в монографии [27], а специфические особенности консервативной связи двух мод в непараметрических и параметрических системах отражены в табулированном виде в статье [28]. В последующие годы указанные области применения связанных волн получили дальнейшее продвижение в направлении преобразования волноводных мод, вызванных различными возмущениями в нерегулярных и периодических волноводах и электронно-лучевых приборах СВЧ диапазона. Детальное изложение работ по исследованию волновых и колебательных явлений в вакуумных электронных потоках можно найти в монографии [29].

Наиболее значительный прогресс в теории связанных волн был стимулирован практическими потребностями волоконной и интегральной оптики. Здесь отсчет идет от первых публикаций Снайдера [30, 31], Маркузе [32] и Ярива [33]. Многочисленные исследования большого числа авторов в течение ряда лет привели к формулировке ТСМ, известной сегодня как *обычная* (англ. *conventional*) *теория связанных мод* (ОТСМ). Различные варианты теории сходны в главном, что присуще ОТСМ: все они используют *ортогональный базис* модальных функций, применяемый для разложения искомых полей взаимодействующих волноведущих структур. Поэтому аббревиатура ОТСМ расшифровывается и как *ортогональная теория связанных мод.*

В течение десяти с небольшим лет было опубликовано свыше десятка ставших теперь популярными книг [6, 7, 12, 34–43], где различные теоретические и прикладные вопросы волноводной оптики изложены с позиций ОТСМ.

Ортогональная формулировка ТСМ была общепризнанной и не вызывала сомнений до тех пор, пока не появилась статья Харди и Стрейфера [44], где был предложен неортогональный подход к теории недиссипативной связи параллельных диэлектрических волноводов. Непривычная идея модальной неортогональности в отсутствие потерь породила волну новых исследований связи оптических мод, результаты которых сегодня составляют так называемую *модифицированную* (англ. *improved*) *теорию связанных мод* (МТСМ) (см. сноску на с. 177). Расхождения между результатами ОТСМ и МТСМ вызвали в конце 80-х годов прошлого века дискуссию в литературе между сторонниками и противниками новой неортогональной теории связанных мод. Обзор этой тематики и существа дискуссии можно найти в статьях [45, 46].

В настоящем изложении теория связанных диэлектрических волноводов, входящих в состав многоволноводной системы, разработана в гл. 4, начало которой содержит обзор работ по МТСМ, а далее с единых электродинамических позиций построена самосогласованная теория связи волноводов. Специальные вопросы неортогональной связи мод вынесены в приложение Д.

Данное приложение включает общие вопросы ортогональной теории связанных мод, которые на данный момент, к сожалению, не нашли последовательного изложения в опубликованной литературе. Исключение составляет лишь монография Люиселла [27], которая, однако, стала библиографической редкостью и, кроме того, имеет недостатки методического характера в изложении материала, ориентированного главным образом на вакуумную волновую электронику.

Основная цель настоящего приложения — дать читателю представление о режимах недиссипативной связи и закономерностях энергообмена между взаимодействующими модами, которые не требуют конкретизации физических механизмов межмодовой связи и носят достаточно общий характер. Поэтому результаты теории (в рамках применимости ОТСМ) справедливы для любых связанных систем, в том числе волноведущих оптических структур, изученных в гл. 3. Рассмотренные там механизмы взаимодействия оптических мод дают аналитические выражения для коэффициентов связи, которые входят в общие формулы, приведенные в этом приложении.

Изложенные ниже режимы связи мод выходят за рамки того, что необходимо в гл. 3 и 4 для анализа взаимодействия оптических мод. В частности, рассматриваются режимы параметрического и непараметрического усиления и генерации, включая режимы ЛБВ и ЛОВ, которые нетипичны для волноводной оптики. Это сделано для того, чтобы сформировать у читателя общую картину волновых взаимодействий, охватывающую всевозможные режимы межмодовой связи. Однако мы вынуждены ограничиться здесь только недиссипативными взаимодействиями. Обсуждение роли потерь в режимах диссипативной связи можно найти в монографии [47].

Г.1. Усреднение квадратичных величин для многочастотных процессов

Соотношения Мэнли–Роу являются следствием закона сохранения энергии в недиссипативных многочастотных системах. Обычно эти соотношения доказывают для цепей с сосредоточенными параметрами, содержащими нелинейный реактивный элемент [27, 48, 49], а затем обобщают на распределенные системы, как это сделано, например, Люиселлом [27].

В противоположность этому, будем выводить соотношения Мэнли–Роу непосредственно для *волноведущих структур*, исходя из требования сохранения средней мощности, переносимой всеми частотными компонентами спектра. Для этого необходимо вспомнить выражения для средних во времени квадратичных (энергетических) величин, записанных в рамках метода комплексных амплитуд при гармоническом возбуждении нелинейной системы входным одночастотным и двухчастотным воздействиями.

Г.1.1. Одночастотное входное воздействие. Рассмотрим последовательно возбуждение линейных и нелинейных систем в результате подачи на их вход одночастотного гармонического сигнала.

Линейные процессы, возбужденные монохроматическим сигналом частотой ω, описываются реальной физической величиной $a(t) = A\cos(\omega t + \phi)$, которая может быть представлена в форме

$$a(t) = \mathrm{Re}\big[a(\omega)\, e^{i\omega t}\big] = \frac{1}{2}\,\big[a(\omega)\, e^{i\omega t} + a(-\omega)\, e^{-i\omega t}\big], \qquad (\text{Г}.1.1)$$

где введена комплексная амплитуда $a(\omega) = A\exp(i\phi)$. В первом равенстве (Г.1.1) частота ω является положительной, а во втором, наряду с $\omega > 0$, имеется отрицательная частота $-\omega < 0$, для которой $a(-\omega) = a^*(\omega)$, что обеспечивает вещественный характер величины $a(t)$. Суперпозиция двух членов во втором выражении интерпретируется как сумма комплексных векторов с противоположным направлением вращения.

При чисто гармоническом входном воздействии достаточно малой амплитуды (для обеспечения линейности системы) любая физическая величина $a(t)$ имеет среднее во времени значение, равное нулю ($\langle a(t)\rangle = 0$). Однако для энергетических величин квадратичного типа, определенных в виде произведения $a(t)b(t)$ двух линейных величин $a(t)$ и $b(t)$ с комплексными амплитудами $a(\omega)$ и $b(\omega)$, их среднее значение $P \equiv \langle a(t)b(t)\rangle$ отлично от нуля и равняется

$$P = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\big[a(\omega)\, b^*(\omega)\big] = \frac{1}{2}\,(P_\omega + P_{-\omega}), \qquad (\text{Г}.1.2)$$

откуда, с учетом $a(-\omega) = a^*(\omega)$, следует, что

$$P_\omega \equiv \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\big[a(\omega)\, b^*(\omega)\big] = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\big[a(-\omega)\, b^*(-\omega)\big] \equiv P_{-\omega}. \qquad (\text{Г}.1.3)$$

Нелинейные процессы обеспечивают многочастотный режим даже в случае монохроматического входного воздействия на частоте ω_1, поскольку нелинейность системы генерирует частотные гармоники $\omega_s = s\omega_1$ $(s = 1, 2, 3, \ldots)$

с комплексными амплитудами a_s. По аналогии с выражением (Г.1.1), реальная величина $a(t)$ может быть записана в следующем виде:

$$a(t) = \mathrm{Re} \sum_{s=1}^{\infty} a_s e^{i\omega_s t} = \frac{1}{2} \sum_{s=-\infty}^{\infty} a_s e^{i\omega_s t}, \tag{Г.1.4}$$

где для чисто монохроматического возбуждения среднее значение $\langle a(t)\rangle \equiv \equiv a_0 = 0$. Первая сумма в (Г.1.4) включает только положительные частоты $\omega_s \equiv s\omega_1 > 0$. Вторая сумма представляет собой комплексный ряд Фурье с положительными и отрицательными частотами, такими что для обеспечения вещественности величины $a(t)$ имеют место равенства

$$\omega_{-s} = -\omega_s \qquad \text{и} \qquad a_{-s} = a_s^*. \tag{Г.1.5}$$

Среднее значение $P \equiv \langle a(t)b(t)\rangle$ квадратичной (энергетической) величины $a(t)b(t)$ записывается по аналогии с (Г.1.2) в виде

$$P = \frac{1}{2} \mathrm{Re} \sum_{s=1}^{\infty} a_s b_s^* = \frac{1}{2} \sum_{s=-\infty}^{\infty} P_s, \tag{Г.1.6}$$

откуда, с учетом (Г.1.5), следует, что (ср. формулу (Г.1.3))

$$P_s \equiv \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left(a_s b_s^*\right) = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left(a_{-s} b_{-s}^*\right) \equiv P_{-s}. \tag{Г.1.7}$$

Г.1.2. Двухчастотное входное воздействие. Если нелинейная система возбуждается входным сигналом с двумя частотами ω_1 и ω_2, то нелинейность генерирует комбинационные частоты $\omega_{s,p} = s\omega_1 + p\omega_2$, где $s,\ p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ В этом случае вещественная величина $a(t)$ может быть представлена в виде (ср. формулы (Г.1.1) и (Г.1.4))

$$a(t) = \mathrm{Re} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} a_{s,p}\, e^{i\omega_{s,p} t} = \frac{1}{2} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} a_{s,p}\, e^{i\omega_{s,p} t}, \tag{Г.1.8}$$

где $\langle a(t)\rangle \equiv a_{0,0} = 0$. Двойная сумма во втором равенстве (Г.1.8) представляет собой комплексный ряд Фурье с положительными и отрицательными комбинационными частотами $\omega_{s,p}$, такими что для вещественной величины $a(t)$ имеем (ср. формулу (Г.1.5))

$$\omega_{-s,-p} = -\omega_{s,p} \qquad \text{и} \qquad a_{-s,-p} = a_{s,p}^*. \tag{Г.1.9}$$

Двойная сумма в первом равенстве (Г.1.8) также содержит как положительные, так и отрицательные частоты $\omega_{s,p} = s\omega_1 + p\omega_2$, но, в отличие от (Г.1.9), для каждого слагаемого с частотой $\omega_{s,p}$ нет комплексно-сопряженного ему члена на частоте $\omega_{-s,-p}$.

Среднее значение $P \equiv \langle a(t)b(t)\rangle$ квадратичной (энергетической) величины $a(t)b(t)$ записывается по аналогии с (Г.1.6) в виде

$$P = \frac{1}{2} \mathrm{Re} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} a_{s,p} b_{s,p}^* = \frac{1}{2} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} P_{s,p}, \tag{Г.1.10}$$

откуда, с учетом (Г.1.9), следует, что (ср. формулы (Г.1.3) и (Г.1.7))

$$P_{s,p} \equiv \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(a_{s,p}b^*_{s,p}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(a_{-s,-p}\,b^*_{-s,-p}\right) \equiv P_{-s,-p}. \qquad (\text{Г.1.11})$$

Строгое доказательство соотношений (Г.1.10) и (Г.1.11) основано на применении следующей операции усреднения к произведению двух произвольно изменяющихся во времени величин $a(t)$ и $b(t)$:

$$\langle a(t)b(t)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} a(t)b(t)\,dt.$$

Подставляем сюда временные зависимости $a(t)$ и $b(t)$ в виде (Г.1.8), а именно

$$a(t) = \frac{1}{2}\sum_{s=-\infty}^{\infty}\sum_{p=-\infty}^{\infty} a_{s,p}\,e^{i(s\omega_1+p\omega_2)t},$$

$$b(t) = \frac{1}{2}\sum_{s'=-\infty}^{\infty}\sum_{p'=-\infty}^{\infty} b_{s',p'}\,e^{i(s'\omega_1+p'\omega_2)t}.$$

Тогда введением символов Кронекера и с использованием (Г.1.9) получаем

$$\begin{aligned}
\langle a(t)b(t)\rangle &= \frac{1}{4}\lim_{T\to\infty}\sum_s\sum_p\sum_{s'}\sum_{p'} a_{s,p}b_{s',p'}\,\frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} e^{i[(s+s')\omega_1+(p+p')\omega_2]\,t}dt = \\
&= \frac{1}{4}\sum_s\sum_p\sum_{s'}\sum_{p'} a_{s,p}b_{s',p'}\lim_{T\to\infty}\frac{\sin\left[(s+s')\omega_1+(p+p')\omega_2\right]T/2}{\left[(s+s')\omega_1+(p+p')\omega_2\right]T/2} = \\
&= \frac{1}{4}\sum_s\sum_p\sum_{s'}\sum_{p'} a_{s,p}b_{s',p'}\begin{cases}1 & \text{при } s+s'=0 \text{ и } p+p'=0\\ 0 & \text{в остальных случаях}\end{cases} = \\
&= \frac{1}{4}\sum_s\sum_p\sum_{s'}\sum_{p'} a_{s,p}b_{s',p'}\,\delta_{s',-s}\,\delta_{p',-p}\,\delta_{s,-s'}\,\delta_{p,-p'} = \\
&= \frac{1}{4}\sum_s\sum_p\left(a_{s,p}b_{-s,-p}+a_{-s,-p}b_{s,p}\right) = \\
&= \frac{1}{4}\sum_s\sum_p\left(a_{s,p}b^*_{s,p}+a^*_{s,p}b_{s,p}\right) = \frac{1}{2}\sum_s\sum_p \mathrm{Re}\left(a_{s,p}b^*_{s,p}\right),
\end{aligned}$$

что дает искомые соотношения (Г.1.10) и (Г.1.11).

Следует отметить, что, если в вышеприведенных выражениях положить $\omega_2 = 0$ (т. е. отбросить индексы p, p' и суммирование по ним), то получим доказательство соотношений (Г.1.6) и (Г.1.7) для одночастотного входного возбуждения.

Г.2. Соотношения Мэнли–Роу для нелинейных волноведущих систем

Как уже было сказано ранее, соотношения Мэнли–Роу обычно доказываются сначала для сосредоточенных систем с нелинейным реактивным элементом, а затем по аналогии записываются для распределенных систем [27]. Ниже эти соотношения выводятся непосредственно для волноведущих недиссипативных структур, в которых сохраняется полная электромагнитная мощность, переносимая собственными модами на всех комбинационных частотах $\omega_{s,p} = s\omega_1 + p\omega_2$.

Интегральная теорема Пойнтинга (2.1.37) для средних во времени величин в отсутствие потерь (при $Q(z) = 0$) имеет вид

$$\frac{dP(z)}{dz} = 0, \qquad (\text{Г}.2.1)$$

где средняя электромагнитная мощность, переносимая через поперечное сечение S волновода, дается формулой (2.1.38) в виде

$$P(z) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\int\limits_S \left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*\right)\cdot\mathbf{e}_z\,dS. \qquad (\text{Г}.2.2)$$

В многочастотном режиме, характерном для нелинейных систем, среднее значение полной переносимой мощности P имеет вид (Г.1.10). Требование (Г.2.1) неизменности $P(z)$ в продольном направлении записывается как

$$\frac{d}{dz}\sum_{s=-\infty}^{\infty}\sum_{p=-\infty}^{\infty} P_{s,p} = 0, \qquad (\text{Г}.2.3)$$

где $P_{s,p}$ — средняя мощность на комбинационной частоте $\omega_{s,p} = s\omega_1 + p\omega_2$, определенная формулой (Г.1.11).

Следуя Люиселлу [27], преобразуем уравнение (Г.2.3) путем умножения и деления каждого слагаемого $P_{s,p}$ на частоту $\omega_{s,p} = s\omega_1 + p\omega_2$. В результате этого двойная сумма в (Г.2.3) может быть представлена в виде суммы двух слагаемых:

$$\omega_1\frac{d}{dz}\sum_{p=-\infty}^{\infty}\sum_{s=-\infty}^{\infty}\frac{sP_{s,p}}{s\omega_1+p\omega_2} + \omega_2\frac{d}{dz}\sum_{s=-\infty}^{\infty}\sum_{p=-\infty}^{\infty}\frac{pP_{s,p}}{s\omega_1+p\omega_2} = 0. \qquad (\text{Г}.2.4)$$

Первая двойная сумма в (Г.2.4) преобразуется путем разделения интервала суммирования по s на две части (одна от $s=-\infty$ до $s=-1$, а другая от $s=1$ до $s=\infty$) с последующей заменой индексов $s\to -s$ и $p\to -p$ в первой из двух сумм, образованных после разделения интервала суммирования. Применяя соотношение (Г.1.11), т. е. $P_{-s,-p} = P_{s,p}$, получаем

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty}\sum_{s=-\infty}^{\infty}\frac{sP_{s,p}}{s\omega_1+p\omega_2} = 2\sum_{p=-\infty}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{sP_{s,p}}{s\omega_1+p\omega_2}. \qquad (\text{Г}.2.5)$$

Вторая двойная сумма в (Г.2.4) преобразуется по аналогии с (Г.2.5). Как итог, получаем формулу (Г.2.4) в виде

$$\omega_1 \frac{d}{dz} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{sP_{s,p}}{s\omega_1 + p\omega_2} + \omega_2 \frac{d}{dz} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{pP_{s,p}}{s\omega_1 + p\omega_2} = 0. \qquad (\text{Г.2.6})$$

Поскольку независимые частоты ω_1 и ω_2 были выбраны совершенно произвольными, то сложение двух двойных сумм в (Г.2.6) дает нуль, если и только если каждая из них по отдельности равняется нулю. Это и приводит к искомым соотношениям Мэнли–Роу для нелинейных распределенных систем, записанным в общей форме:

$$\frac{d}{dz} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{sP_{s,p}}{s\omega_1 + p\omega_2} = 0, \qquad (\text{Г.2.7})$$

$$\frac{d}{dz} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{pP_{s,p}}{s\omega_1 + p\omega_2} = 0. \qquad (\text{Г.2.8})$$

В отсутствие дифференцирования по z формулы (Г.2.7) и (Г.2.8) принимают привычную форму соотношений Мэнли–Роу для недиссипативных сосредоточенных систем с нелинейной реактивностью [27, 48, 49]. Другие формы частотно-энергетических соотношений, в том числе с учетом диссипации, можно найти в работе [50].

Г.3. Соотношения Мэнли–Роу для параметрических волноведущих систем

Соотношения Мэнли–Роу в общей форме (Г.2.7)–(Г.2.8) были получены для нелинейной системы, в которой обе амплитуды входного воздействия на двух независимых частотах ω_1 и ω_2 являются достаточно большими для проявления нелинейности. В результате этого возникают два набора частотных гармоник $s\omega_1$ $(s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ и $p\omega_2$ $(p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, которые образуют комбинационные частоты $\omega_{s,p} = s\omega_1 + p\omega_2$.

Параметрические системы составляют специальный класс систем с двухчастотным входным возбуждением, в которых амплитуда сигнала на частоте $\omega_1 \equiv \omega_s$ (индекс s от англ. *signal*) много меньше амплитуды накачки на частоте $\omega_2 \equiv \omega_p$ (индекс p от англ. *pump*). Иными словами, сигнал настолько слабый, что параметрические системы остаются линейными по сигналу и проявляют нелинейность лишь по отношению к накачке с достаточно большой амплитудой. Следовательно, нелинейность в системе генерирует только гармоники накачки на частотах $p\omega_p$ $(p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, в то время как гармоники сигнала отсутствуют, т. е. сигнальный индекс s принимает лишь значения $s = 0$ и $s = \pm 1$. В этом случае спектр частот $\omega_{s,p} = s\omega_1 + p\omega_2$ содержит только гармоники накачки (соответствующие значению $s = 0$) и комбинационные частоты (соответствующие значениям $s = \pm 1$):

$$\omega_{0,p} = p\omega_p \ (\text{при } s = 0) \quad \text{и} \quad \omega_{\pm 1,p} = \pm\omega_s + p\omega_p \ (\text{при } s = \pm 1). \qquad (\text{Г.3.1})$$

Частоты, соответствующие реальным входным воздействиям сигнала и накачки, всегда положительны, т. е. $\omega_1 \equiv \omega_s > 0$ и $\omega_2 \equiv \omega_p > 0$, тогда как частоты (Г.3.1) могут иметь как положительные, так и отрицательные знаки.

Г.3.1. Многочастотные параметрические системы. Чтобы получить соотношения Мэнли–Роу для параметрических систем, как частный случай общих соотношений (Г.2.7)–(Г.2.8), надо учесть в них равенства (Г.3.1), тогда

$$\frac{d}{dz}\sum_{p=-\infty}^{\infty}\frac{P_{+1,p}}{\omega_s + p\omega_p} = 0, \qquad (\text{Г.3.2})$$

$$\frac{d}{dz}\sum_{p=1}^{\infty} p\left(\frac{P_{0,p}}{p\omega_p} + \frac{P_{+1,p}}{\omega_s + p\omega_p} - \frac{P_{+1,-p}}{\omega_s - p\omega_p}\right) = 0, \qquad (\text{Г.3.3})$$

где было использовано условие (Г.1.11) при $s = -1$, т. е. $P_{-1,p} = P_{+1,-p}$.

Для последующего применения удобнее вместо индекса накачки p ввести частотный индекс $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, такой, что

$$\omega_s + p\omega_p \to \omega_s + \nu\omega_p \equiv \omega_\nu \quad \text{и} \quad P_{+1,p} = P_{+1,\nu} \to P^{(\nu)}.$$

Тогда соотношения (Г.3.2)–(Г.3.3) принимают окончательную форму:

$$\frac{d}{dz}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\frac{P^{(\nu)}}{\omega_\nu} = 0, \qquad (\text{Г.3.4})$$

$$\frac{d}{dz}\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu\left(\frac{P^{(\nu)}}{\omega_\nu} - \frac{P^{(-\nu)}}{\omega_{-\nu}}\right) = -\frac{1}{\omega_p}\frac{dP_{pump}}{dz}, \qquad (\text{Г.3.5})$$

где $P_{pump} = \sum_{p=1}^{\infty} P_{0,p}$ — мощность, поставляемая источником накачки.

Формула (Г.3.4) играет роль основного частотно-энергетического соотношения для линеаризованных систем с переменными во времени параметрами, применимого к анализу энергообмена при параметрических взаимодействиях в волноведущих структурах. Если параметрические эффекты отсутствуют ($\omega_p = 0$), то формула (Г.3.4) превращается в равенство (Г.2.1), выражающее пространственное сохранение мощности $P(z) = \text{const}$ на частоте сигнала $\omega_s \equiv \equiv \omega$ (сигнальный индекс s в дальнейшем будет опущен).

Формула (Г.3.5) играет вспомогательную роль и позволяет после нахождения мощностей $P^{(\nu)}$ для каждой из параметрически связанных частотных компонент, входящих в соотношение Мэнли–Роу (Г.3.4), вычислить мощность P_{pump}, затраченную источником накачки.

Г.3.2. Трехчастотные параметрические системы. Трехчастотные параметрические системы наиболее часто применяются на практике и существуют при такой физической ситуации, когда в системе имеются только три компоненты с частотами ω_p (накачка), ω_s (сигнал) и одна из компонент $\omega_{\pm 1} = \omega_s \pm \omega_p$. Оказывается, что выбор разностной частоты $\omega_{-1} = \omega_s - \omega_p$ в качестве холостой частоты ω_i (индекс i от англ. *idle*) охватывает также случай $\omega_{+1} = \omega_s + \omega_p$.

Для доказательства этого утверждения надо записать общие соотношения (Г.3.4) и (Г.3.5) с учетом только трех частотных компонент, соответствующих $\nu = 0$, $\nu = +1$ и $\nu = -1$, а именно

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{P^{(0)}}{\omega_0} + \frac{P^{(+1)}}{\omega_{+1}} + \frac{P^{(-1)}}{\omega_{-1}}\right) = 0, \tag{Г.3.6}$$

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{P_{pump}}{\omega_p} + \frac{P^{(+1)}}{\omega_{+1}} - \frac{P^{(-1)}}{\omega_{-1}}\right) = 0. \tag{Г.3.7}$$

Среди трех частот $\omega_0 > 0$, $\omega_{+1} \equiv \omega_0 + \omega_p > 0$ и $\omega_{-1} \equiv \omega_0 - \omega_p \gtrless 0$ выбор независимой входной частоты, принимаемой в качестве сигнальной частоты ω_s, является произвольным. Единственное требование, чтобы эта частота всегда была положительной ($\omega_s > 0$), как и частота накачки ($\omega_p > 0$), в то время как холостая частота ω_i может быть любого знака. Тогда при фиксированной частоте накачки ($\omega_p = \text{const}$) для выбора ω_s и ω_i из трех частот ω_0 и $\omega_{\pm 1}$ имеются два альтернативных парных варианта:

- выбор ω_s и ω_i из пары частот ω_0 и ω_{-1} при отсутствии ω_{+1},
- выбор ω_s и ω_i из пары частот ω_0 и ω_{+1} при отсутствии ω_{-1}.

Проанализируем соотношения (Г.3.6) и (Г.3.7) в применении к двум вышеуказанным вариантам выбора сигнальной и холостой частот.

Вариант 1: $\omega_s = \omega_0 > 0$ и $\omega_i = \omega_{-1} = \omega_0 - \omega_p = \omega_s - \omega_p \gtrless 0$.

Тогда $P^{(0)} = P_{sign}$, $P^{(-1)} = P_{idle}$, $P^{(+1)} \equiv 0$, так что равенства (Г.3.6) и (Г.3.7) принимают вид

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{P_{sign}}{\omega_s} + \frac{P_{idle}}{\omega_i}\right) = 0, \tag{Г.3.8}$$

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{P_{pump}}{\omega_p} - \frac{P_{idle}}{\omega_i}\right) = 0. \tag{Г.3.9}$$

Вариант 2: $\omega_s = \omega_{+1} > 0$ и $\omega_i = \omega_0 = \omega_{+1} - \omega_p = \omega_s - \omega_p > 0$.

Тогда $P^{(0)} = P_{idle}$, $P^{(+1)} = P_{sign}$, $P^{(-1)} \equiv 0$, так что равенства (Г.3.6) и (Г.3.7) принимают вид

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{P_{idle}}{\omega_i} + \frac{P_{sign}}{\omega_s}\right) = 0, \tag{Г.3.10}$$

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{P_{pump}}{\omega_p} + \frac{P_{sign}}{\omega_s}\right) = 0. \tag{Г.3.11}$$

Нетрудно видеть, что обе системы уравнений (Г.3.8)–(Г.3.9) и (Г.3.10)–(Г.3.11) дают одинаковые частотно-энергетические соотношения следующего вида:

$$\frac{P'_{sign}}{\omega_s} = -\frac{P'_{idle}}{\omega_i} = -\frac{P'_{pump}}{\omega_p}, \tag{Г.3.12}$$

где штрих означает дифференцирование по z.

Из анализа соотношений (Г.3.12) следует, что оба варианта выбора сигнальной и холостой частот неразличимы при $\omega_i > 0$. Положительная холостая частота является единственно возможной для варианта 2 и лишь вариант 1 допускает разные знаки $\omega_i \gtrless 0$.

Следовательно, разностная холостая частота, $\omega_i = \omega_{-1} = \omega_s - \omega_p \gtrless 0$, является единственным вариантом, который одновременно обеспечивает режимы низкочастотной и высокочастотной накачки.

Низкочастотная накачка осуществляется при $\omega_p < \omega_s$, так что $\omega_s > 0$ и $\omega_i = \omega_s - \omega_p > 0$, т. е. сигнальная и холостая частоты — одного знака. Это интерпретируется как два вектора в фиксированной точке z, которые вращаются со временем в одном направлении. В применении к двум связанным модам этот режим обеспечивает такой характер пространственного распределения мощностей вдоль z, даваемый равенствами (Г.3.12), что

$$\text{если} \quad \frac{dP_{sign}}{dz} > 0, \quad \text{то} \quad \frac{dP_{idle}}{dz} < 0 \quad \text{и} \quad \frac{dP_{pump}}{dz} < 0. \tag{Г.3.13}$$

По терминологии Люиселла [27], в этом случае сигнальная и холостая моды *пассивно связаны* накачкой и, согласно (Г.3.13), энергия, подаваемая в сигнальную моду, отбирается не только от накачки, но и от холостой моды. Это приводит к обмену мощностью между сигнальной и холостой модами, что соответствует *режиму переизлучения*.

Высокочастотная накачка осуществляется при $\omega_p > \omega_s$, так что $\omega_s > 0$ и $\omega_i = \omega_s - \omega_p < 0$, т. е. сигнальная и холостая частоты разных знаков. Это интерпретируется как два вектора в фиксированной точке z, которые вращаются со временем в противоположных направлениях. В применении к двум связанным модам этот режим обеспечивает такой характер распределения мощностей вдоль z, даваемый равенствами (Г.3.12), что

$$\text{если} \quad \frac{dP_{sign}}{dz} > 0, \quad \text{то} \quad \frac{dP_{idle}}{dz} > 0 \quad \text{и} \quad \frac{dP_{pump}}{dz} < 0. \tag{Г.3.14}$$

По терминологии Люиселла [27], в этом случае сигнальная и холостая моды *активно связаны* накачкой и, согласно (Г.3.14), как сигнальная, так и холостая мода получают энергию от накачки. Это приводит к пространственному нарастанию мощности в обеих модах, что соответствует *режиму параметрического усиления*.

Г.4. Энергетическая нормировка активных мод в параметрических системах

Будем далее преобразовывать соотношение Мэнли–Роу (Г.3.4) для того, чтобы наряду с многочастотностью учесть многомодовый характер волнового процесса. Для упрощения записи модального разложения будем считать волноведущую структуру закрытой (с внешней идеально проводящей границей), спектр которой всегда чисто дискретный (см. п. 1.1). Обобщение на открытые структуры достигается предположением о том, что суммирование по модам дискретного спектра неявно включает также интегрирование по непрерывному спектру излучательных мод (см. п. 1.9 и формулы (2.10.34)–(2.10.35) и (2.10.38)–(2.10.39)).

Как известно, каждая распространяющаяся (активная) m-я мода в волноводе без потерь переносит на частоте ω_ν собственную мощность $P_m^{(\nu)}(z)$ независимо от других мод (здесь не рассматриваются реактивные моды, для которых ситуация иная — см. пп. 2.4.1 и 2.4.2). Тогда полная мощность, переносимая всеми активными модами, представляется в виде модального разложения (см. формулу (2.4.24)):

$$P^{(\nu)}(z) = \sum_m P_m^{(\nu)}(z) = \frac{1}{4}\sum_m N_m^{(\nu)}|a_m^{(\nu)}(z)|^2. \tag{Г.4.1}$$

Здесь $N_m^{(\nu)}$ — *норма* m-й моды, определенная в виде (2.12.13), и $a_m^{(\nu)}$ — *волновая амплитуда* на частоте ω_ν, связанная с *амплитудой возбуждения* $A_m^{(\nu)}$ соотношением типа (2.2.3) или (2.10.42):

$$a_m^{(\nu)}(z) = A_m^{(\nu)}(z)\, e^{-i\beta_m^{(\nu)} z}. \tag{Г.4.2}$$

Фазовая постоянная $\beta_m^{(\nu)} \equiv \beta_m(\omega_\nu)$ определяет постоянную распространения $\gamma_m^{(\nu)} = i\beta_m^{(\nu)}$ для m-й активной моды, так как в отсутствие потерь $\alpha_m^{(\nu)} = 0$ (для реактивных мод — см. п. 2.4.2). Частотная зависимость $\beta_m(\omega_\nu)$, называемая *законом дисперсии*, считается известной из решения граничной задачи для базового волновода в отсутствие возбуждающих источников.

В выражении (Г.4.1) суммирование по m включает как прямые, так обратные моды, распространяющиеся вдоль оси z в положительном и отрицательном направлениях. Для активной моды направление распространения определяется знаком групповой скорости, найденной из закона дисперсии как $v_{\mathrm{gr},m}^{(\nu)} = (\partial\beta_m^{(\nu)}/\partial\omega_\nu)^{-1}$. Групповая скорость определяет также среднюю мощность, переносимую m-й модой и равную

$$P_m^{(\nu)} = v_{\mathrm{gr},m}^{(\nu)} W_m^{(\nu)}, \tag{Г.4.3}$$

где $W_m^{(\nu)}$ — средняя энергия, запасенная электромагнитным полем m-й моды в единице длины волновода на частоте ω_ν.

Как видно из (Г.4.3), знак мощности $P_m^{(\nu)}$ (по отношению к положительному направлению оси z) определяется комбинацией знаков групповой скорости $v_{\mathrm{gr},m}^{(\nu)}$ (> 0 или < 0) и запасенной энергии $W_m^{(\nu)}$ (> 0 или < 0). Физическая ситуация, при которой $W_m^{(\nu)} < 0$, реализуется только в системах с дрейфовыми потоками носителей заряда. В таких системах в общем случае могут существовать так называемые *медленные волны*, запасающие *отрицательную энергию* $W_m^{(\nu)} < 0$ (например, медленные волны пространственного заряда, медленные циклотронные волны, медленные геликонные волны и др. [27, 51, 52, 57, 59]). Во всех остальных случаях волны запасают *положительную энергию* $W_m^{(\nu)} > 0$. Сюда относятся электромагнитные волны, акустические волны, спиновые волны, а также *быстрые волны* в дрейфовых потоках носителей заряда [27, 51, 52, 57, 59].

Таким образом, знание закона дисперсии и энергетических характеристик m-й моды позволяет найти переносимую мощность (Г.4.3) и ввести дополнительную характеристику моды, называемую *фактором направленности* (англ. *parity*), в форме [27]

$$p_m = \frac{P_m^{(\nu)}}{|P_m^{(\nu)}|} = \frac{v_{\mathrm{gr},m}^{(\nu)}}{|v_{\mathrm{gr},m}^{(\nu)}|}\frac{W_m^{(\nu)}}{|W_m^{(\nu)}|} = \begin{cases} +1 & \text{при } P_m^{(\nu)} > 0, \\ -1 & \text{при } P_m^{(\nu)} < 0. \end{cases} \tag{Г.4.4}$$

Согласно (Г.4.1), мощность $P_m^{(\nu)}$ связана с нормой $N_m^{(\nu)}$ m-й моды соотношением

$$P_m^{(\nu)}(z) = \frac{1}{4}\, N_m^{(\nu)}\, |a_m^{(\nu)}(z)|^2. \tag{Г.4.5}$$

Тогда фактор направленности p_m характеризует знак нормы:

$$N_m^{(\nu)} = p_m |N_m^{(\nu)}|. \tag{Г.4.6}$$

Величина $|N_m^{(\nu)}|$ выбирается в соответствии с принятой формой нормировки мод (см. с. 80).

Параметрические системы (с переменными во времени параметрами) делают возможным применять нормировку мод в следующей форме:

$$|N_m^{(\nu)}| \,/\, |\omega_\nu| = 4 \text{ Дж}, \tag{Г.4.7}$$

так что норма $|N_m^{(\nu)}|$ имеет размерность мощности (Вт).

В этом случае средняя мощность (Г.4.5), переносимая m-й модой на частоте ω_ν, равняется

$$P_m^{(\nu)}(z) = p_m |\omega_\nu|\, |a_m^{(\nu)}(z)|^2, \tag{Г.4.8}$$

а все активные моды волновода переносят мощность (Г.4.1), равную

$$P^{(\nu)}(z) = \sum_m P_m^{(\nu)}(z) = |\omega_\nu| \sum_m p_m |a_m^{(\nu)}(z)|^2. \tag{Г.4.9}$$

Подстановка (Г.4.9) в соотношение Мэнли–Роу (Г.3.4) приводит его к следующему виду:

$$\frac{d}{dz}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\sum_m q_\nu\, p_m |a_m^{(\nu)}(z)|^2 = 0, \tag{Г.4.10}$$

где введен частотный фактор q_ν, отражающий знак комбинационной частоты $\omega_\nu = \omega + \nu\omega_p$:

$$q_\nu = \frac{\omega_\nu}{|\omega_\nu|} = \frac{\omega + \nu\omega_p}{|\omega + \nu\omega_p|} = \begin{cases} +1 & \text{при } \omega_\nu > 0, \\ -1 & \text{при } \omega_\nu < 0. \end{cases} \tag{Г.4.11}$$

Вспомним, что знак частоты сигнала $\omega_s \equiv \omega$ и частоты накачки ω_p всегда принимается положительным.

Непараметрические системы (с постоянными параметрами и $\omega_\nu \equiv \omega$) делают возможным применять нормировку мод в следующей форме:

$$|N_m| = 4 \text{ Вт}. \tag{Г.4.12}$$

В этом случае средняя мощность (Г.4.5), переносимая m-й модой, равна (с опущенным частотным индексом (ν))

$$P_m(z) = p_m |a_m(z)|^2, \tag{Г.4.13}$$

что дает полную мощность, переносимую всеми активными модами:

$$P(z) = \sum_m P_m(z) = \sum_m p_m |a_m(z)|^2. \tag{Г.4.14}$$

В этом случае вместо соотношения Мэнли–Роу (Г.3.4) работает закон сохранения мощности (Г.2.1), который после подстановки в него (Г.4.14) принимает вид

$$\frac{d}{dz} \sum_m p_m |a_m(z)|^2 = 0. \tag{Г.4.15}$$

Следует заметить, что формула (Г.4.15) вытекает из более общего соотношения (Г.4.10), полученного для параметрических систем, как частный случай при единственном значении $\nu = 0$ и $q_0 = +1$.

Более того, самая общая форма модальной записи соотношения Мэнли–Роу получается из исходного соотношения (Г.3.4) путем подстановки в него модального разложения мощности (Г.4.1) без использования условия нормировки (Г.4.7) или (Г.4.12), тогда

$$\frac{d}{dz} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \sum_m \frac{N_m^{(\nu)}}{\omega_\nu} |a_m^{(\nu)}(z)|^2 \equiv \frac{d}{dz} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \sum_m \frac{|N_m^{(\nu)}|}{|\omega_\nu|} q_\nu p_m |a_m^{(\nu)}(z)|^2 = 0. \tag{Г.4.16}$$

Легко видеть, что оба равенства (Г.4.10) и (Г.4.15) получаются как частные случаи общего соотношения (Г.4.16).

Г.5. Общая форма уравнений связанных мод для недиссипативных волноведущих структур

Вне области связи амплитуда возбуждения $A_m^{(\nu)}$ любой m-й моды остается постоянной ($A_m^{(\nu)}(z) = \text{const}$), так что связанная с ней равенством (Г.4.2) волновая амплитуда $a_m^{(\nu)}(z)$ подчиняется дифференциальному уравнению

$$\frac{da_m^{(\nu)}(z)}{dz} = -i\beta_m^{(\nu)} a_m^{(\nu)}(z), \tag{Г.5.1}$$

где $\beta_m^{(\nu)}$ — известная невозмущенная фазовая постоянная m-й моды.

Внутри области связи амплитуды $A_m^{(\nu)}(z)$ взаимодействующих мод изменяются вдоль z как результат этой связи. Тогда волновая амплитуда $a_m^{(\nu)}(z)$ подчиняется уравнению, полученному дифференцированием (Г.4.2),

$$\frac{da_m^{(\nu)}(z)}{dz} = -i\beta_m^{(\nu)} a_m^{(\nu)}(z) + \frac{dA_m^{(\nu)}(z)}{dz} e^{-i\beta_m^{(\nu)} z}. \tag{Г.5.2}$$

Из сравнения (Г.5.1) и (Г.5.2) видно, что последний член в правой части (Г.5.2) учитывает связь между модами. Для выбранной m-й моды этот член в принципе можно выразить через амплитуды $a_n^{(\nu)}(z)$ других мод, которые вносят вклад в производную $da_m^{(\nu)}/dz$ с коэффициентами пропорциональности $c_{mn}^{(\nu,\nu')}$, называемыми *коэффициентами связи*. Следовательно, уравнение (Г.5.2) может быть приведено к форме связанных уравнений:

$$\frac{da_m^{(\nu)}(z)}{dz} = -i\beta_m^{(\nu)} a_m^{(\nu)}(z) + \sum_{\nu'} \sum_n c_{mn}^{(\nu,\nu')}(z)\, a_n^{(\nu')}(z). \qquad (\text{Г}.5.3)$$

Система связанных уравнений (Г.5.3) учитывает взаимодействие всех собственных мод (отмеченных индексом m или n), параметрически связанных на различных частотах (отмеченных индексом ν или ν'). Чтобы упростить форму записи объединим модальный индекс m (или n) с частотным индексом ν (или ν') в единый индекс, обозначенный как k (или l). Тогда уравнение (Г.5.3) принимает упрощенную форму

$$\frac{da_k(z)}{dz} = -i\beta_k a_k(z) + \sum_l c_{kl}(z)\, a_l(z), \quad k, l = 1,\, 2,\, \ldots \qquad (\text{Г}.5.4)$$

где индекс k соответствует паре индексов (m, ν), а индекс l паре индексов (n, ν'), т. е. мода k берется на частоте ω_ν, а мода l на частоте $\omega_{\nu'}$.

Для параметрических систем и статических пространственно неоднородных (в частности, периодических) систем коэффициенты связи зависят от z. Они становятся константами только в частном случае пространственно однородной связи между модами, которую будем называть *однородной связью*, чтобы отличить от *периодической связи* и *параметрической связи*.

При абстрактном подходе к теории связанных мод, описываемой системой уравнений (Г.5.4), коэффициенты связи c_{kl} и невозмущенные фазовые постоянные β_k считаются феноменологически заданными параметрами задачи, а искомыми величинами являются волновые амплитуды $a_k(z)$ как функции z. При условии $|c_{kl}(z)| \ll |\beta_k|$ взаимодействие между модами слабо возмущает исходные β_k, поэтому это условие обеспечивает *слабую связь* между модами.

При самосогласованном электродинамическом подходе к теории связанных мод, разработанной в гл. 3 и 4, коэффициенты связи строго вычисляются для конкретных физических механизмов взаимодействия оптических мод в одноволноводных и многоволноводных системах. Именно эти коэффициенты используются в связанных уравнениях типа (Г.5.4).

Г.6. Энергетические требования к коэффициентам связи

В системах без потерь частотно-энергетическое соотношение (Г.4.10), полученное из соотношения Мэнли–Роу (Г.3.4), предъявляет вполне определенные требования к коэффициентам связи $c_{kl}(z)$. Чтобы их получить, перепишем (Г.4.10) в упрощенной форме, применяя указанную выше процедуру объединения модальных и частотных индексов, тогда

$$\frac{d}{dz} \sum_k r_k |a_k(z)|^2 = 0. \qquad (\text{Г}.6.1)$$

Здесь для k-й моды вместо двух факторов (Г.4.4) и (Г.4.11) — энергетического (фактора направленности) p_k и частотного $q_\nu \equiv q_k$ — введен единый *частотно-энергетический* фактор r_k в форме

$$r_k = q_k p_k = \frac{\omega_k}{|\omega_k|}\frac{N_k}{|N_k|} = \begin{cases} +1, & \text{если } q_k \text{ и } p_k \text{ одинаковые}, \\ -1, & \text{если } q_k \text{ и } p_k \text{ разные}. \end{cases} \tag{Г.6.2}$$

Для непараметрических систем $q_k = +1$ ($\omega_k \equiv \omega > 0$), так что $r_k = p_k$.

В реальных условиях межмодовая связь охватывает конечное число мод, скажем N. Тогда сумма в (Г.5.4) становится конечной и частотно-энергетическое соотношение (Г.6.1) может быть записано в виде

$$\sum_{k=1}^{N} r_k\left(a_k^*\frac{da_k}{dz} + a_k\frac{da_k^*}{dz}\right) = 0. \tag{Г.6.3}$$

Результат от умножения уравнения (Г.5.4) на $r_k a_k^*$ складываем с его комплексно-сопряженным значением. Это дает величину, стоящую под знаком суммы в формуле (Г.6.3), которая принимает следующий вид:

$$\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N} r_k c_{kl} a_k^* a_l + \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N} r_k c_{kl}^* a_k a_l^* = \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\left(r_k c_{kl} + r_l c_{lk}^*\right) a_k^* a_l = 0, \tag{Г.6.4}$$

где во второй двойной сумме слева индексы k и l были взаимно заменены.

Последняя двойная сумма в (Г.6.4) обращается в нуль при любых функциях $a_k(z)$ и $a_l(z)$, поэтому надо положить $(r_k c_{kl} + r_l c_{lk}^*) = 0$. Следовательно, коэффициенты связи должны удовлетворять следующему условию:

$$c_{lk}^*(z) = -\frac{r_k}{r_l}\,c_{kl}(z) = -\frac{q_k}{q_l}\frac{p_k}{p_l}\,c_{kl}(z) = \begin{cases} -c_{kl}(z) & \text{при } r_k r_l = +1, \\ \ \ c_{kl}(z) & \text{при } r_k r_l = -1. \end{cases} \tag{Г.6.5}$$

Общее требование (Г.6.5) дает следующие частные случаи для непараметрических и параметрических систем.

Непараметрическая связь между модами имеет место в одночастотном режиме, когда $q_k = q_l = +1$, так что из (Г.6.5) следует

$$c_{lk}^*(z) = -\frac{p_k}{p_l}\,c_{kl}(z) = \begin{cases} -c_{kl}(z) & \text{при } p_k p_l = +1, \\ \ \ c_{kl}(z) & \text{при } p_k p_l = -1, \end{cases} \tag{Г.6.6}$$

или

$$c_{lk}^*(z) = \mp\, c_{kl}(z), \tag{Г.6.7}$$

где верхний и нижний знаки соответствуют k-й и l-й модам, имеющим нормы $N_{k(l)} = p_{k(l)}|N_{k(l)}|$ с одинаковыми и разными знаками.

Параметрическая связь между модами с одинаковым фактором направленности ($p_k = p_l$) накладывает, согласно (Г.6.5), требование

$$c_{lk}^*(z) = -\frac{q_k}{q_l}\,c_{kl}(z) = \begin{cases} -c_{kl}(z) & \text{при } q_k q_l = +1, \\ \ \ c_{kl}(z) & \text{при } q_k q_l = -1. \end{cases} \tag{Г.6.8}$$

Если мода k — сигнальная с частотой $\omega_k = \omega_s \equiv \omega$ ($q_k = +1$), а мода l — холостая с частотой $\omega_l = \omega_i \equiv \omega - \omega_p$, то становится существенным соотношение между частотами сигнала ω и накачки ω_p: $q_l = +1$ при низкочастотной накачке и $q_l = -1$ при высокочастотной накачке. Тогда соотношение (Г.6.8) принимает форму (Г.6.7), в которой верхний и нижний знаки соответствуют режимам низкочастотной ($\omega_p < \omega$) и высокочастотной ($\omega_p > \omega$) накачки.

Формулы (Г.6.5)–(Г.6.8) получены на основе соотношения Мэнли-Роу (Г.4.10), использующего модальную нормировку (Г.4.7). Если исходить из более общего соотношения (Г.4.16), то вместо (Г.6.5) получим следующие перестановочные соотношения (с восстановлением старых индексов путем обратных замен $k \to (m, \nu)$ и $l \to (n, \nu')$):

$$\frac{N_m^{(\nu)}}{\omega_\nu} c_{mn}^{(\nu,\nu')}(z) = -\frac{N_n^{(\nu')}}{\omega_{\nu'}} c_{nm}^{(\nu',\nu)*}(z), \tag{Г.6.9}$$

или, с использованием (Г.4.6) и (Г.4.11),

$$\frac{|N_m^{(\nu)}|}{|\omega_\nu|} \frac{p_m}{q_\nu} c_{mn}^{(\nu,\nu')}(z) = -\frac{|N_n^{(\nu')}|}{|\omega_{\nu'}|} \frac{p_n}{q_{\nu'}} c_{nm}^{(\nu',\nu)*}(z). \tag{Г.6.10}$$

Таким образом, в отсутствие связи между модами каждая из них имеет следующие три характерных параметра:

- *знак частоты* $q_k = \pm 1$ (только для параметрических систем);
- *направленность* $p_k = \pm 1$ (знак нормы N_k или мощности $P_k = v_{\text{gr},k} W_k$ по отношению к выбранному положительному направлению оси z);
- *знак групповой скорости* $v_{\text{gr},k} > 0$ или < 0 (направление распространения моды по отношению к положительному направлению оси z).

Первые два параметра определяют знаки в соотношениях (Г.6.5)–(Г.6.8) между коэффициентами связи. Согласно терминологии Люиселла [27], моды, для которых $c_{kl} = -c_{lk}^*$ (при $r_k r_l = +1$), связаны *пассивно*, а для которых $c_{kl} = c_{lk}^*$ (при $r_k r_l = -1$) связаны *активно*. В частности, в параметрических системах сигнальная и холостая моды связаны пассивно низкочастотной накачкой и активно высокочастотной накачкой. Частоты ω_s и ω_i в первом случае одного знака, а во втором разных знаков, что интерпретируется как два вектора (сигнальный и холостой) на комплексной плоскости с одинаковым направлением вращения (при пассивной связи) или с противоположным вращением (при активной связи).

Направление групповой скорости $v_{\text{gr},k}$ показывает тот край области связи между модами (левый или правый), на котором должны быть заданы краевые условия, наложенные на входную амплитуду моды a_k или A_k. Эти краевые условия имеют вид (1.1.38) и (1.1.39). Перепишем их, приняв положение области связи мод вдоль оси z между плоскостями $z = 0$ и $z = L$, тогда

- для ***прямой моды*** с $v_{\text{gr},k} > 0$ на левом краю при $z = 0$:

$$a_k(0) \neq 0 \qquad \text{или} \qquad a_k(0) = 0; \tag{Г.6.11}$$

- для ***обратной моды*** с $v_{\text{gr},k} < 0$ на правом краю при $z = L$:

$$a_k(L) \neq 0 \qquad \text{или} \qquad a_k(L) = 0. \tag{Г.6.12}$$

Нулевые входные условия в (Г.6.11) и (Г.6.12) соответствуют той активной (распространяющейся) моде, которая не вводится в область межмодовой связи, а возникает там в результате взаимодействия с другими модами.

Следует иметь в виду, что мощность $P_k = v_{\text{gr},k} W_k$ может быть как положительной, так и отрицательной для прямой моды (с $v_{\text{gr},k} > 0$) и для обратной моды (с $v_{\text{gr},k} < 0$) в зависимости от знака запасенной энергии W_k.

Знание направления и значения фазовой скорости каждой из взаимодействующих мод требуется для того, чтобы установить условия фазового согласования между ними, обеспечивающие эффективное взаимодействие даже при слабой связи, о чем пойдет речь в пп. Г.7 и Г.8.

Г.7. Критерий отбора сильно взаимодействующих мод

Самосогласованная формулировка проблемы межмодовой связи, разработанная в гл. 3 и 4 для оптических волноводов, приводит к бесконечномерной системе уравнений связанных мод дискретного и непрерывного спектров. Точное решение таких уравнений в общей форме математически невозможно и физически бессмысленно. В реальных условиях основной физический эффект проявляется во взаимодействии конечного числа мод (ограниченного обычно двумя–тремя модами в первом приближении). Поэтому необходимо установить критерий отбора мод, эффективно взаимодействующих между собой в пренебрежении связью с другими модами.

С этой целью рассмотрим связанные уравнения в форме (Г.5.4), полагая для простоты, что коэффициенты связи постоянны, т. е. $c_{kl}(z) \equiv c_{kl} = \text{const}$, что соответствует однородной связи. Результаты, полученные ниже, будут обобщены позже для периодической и параметрической связи.

Уравнение (Г.5.4) может быть переписано в следующем виде:

$$\frac{da_k(z)}{dz} = -i\beta_k' a_k(z) + \sum_{l \neq k}{}' c_{kl}\, a_l(z), \tag{Г.7.1}$$

где штрих у знака суммы подчеркивает отсутствие члена с номером $l = k$.

Модифицированная фазовая постоянная, введенная в уравнении (Г.7.1) равенством

$$\beta_k' = \beta_k + i c_{kk}, \tag{Г.7.2}$$

учитывает эффект самовоздействия k-й моды, который описывается членом $c_{kk} a_k(z)$ в исходном уравнении (Г.5.4). В этом случае волновая амплитуда $a_k(z)$ и амплитуда возбуждения $A_k(z)$ связаны между собой привычным соотношением (ср. формулы (2.2.3) и (Г.4.2)):

$$a_k(z) = A_k(z)\, e^{-i(\beta_k + i c_{kk})z} \equiv A_k(z)\, e^{-i\beta_k' z}. \tag{Г.7.3}$$

Подстановка (Г.7.3) в уравнение (Г.7.1) дает следующее уравнение для амплитуд возбуждения:

$$\frac{dA_k(z)}{dz} = \sum_{l \neq k}{}' c_{kl}\, e^{i\Delta\beta_{kl} z} A_l(z), \tag{Г.7.4}$$

где введено *фазовое рассогласование* (англ. *phase mismatch*) между k-й и l-й модами, определенное как

$$\Delta\beta_{kl} = \beta'_k - \beta'_l \equiv (\beta_k - \beta_l) + i(c_{kk} - c_{ll}). \tag{Г.7.5}$$

Рассмотрим область межмодовой связи, расположенную вдоль оси z волноведущей структуры между сечениями $z = 0$ и $z = L$. Пусть k-я мода является единственной среди всех мод, которая имеет ненулевую входную амплитуду $A_k(0) \neq 0$ при $z = 0$. Назовем такую моду *первичной*, в отличие от *вторичных* мод с номерами l, которые возбуждаются за счет связи с первичной модой, имея нулевые входные амплитуды: $A_l(0) = 0$ при $v_{\mathrm{gr},l} > 0$ (прямая мода) и $A_l(L) = 0$ при $v_{\mathrm{gr},l} < 0$ (обратная мода).

По аналогии с уравнением (Г.7.4) для первичной k-й моды записываем такое же уравнение для l-й вторичной моды (с выделением члена, соответствующего k-й моде):

$$\frac{dA_l(z)}{dz} = c_{lk}e^{i\Delta\beta_{lk}z}A_k(z) + \sum_{\substack{j\neq k\\ j\neq l}}{}'' c_{lj}e^{i\Delta\beta_{lj}z}A_j(z), \tag{Г.7.6}$$

где двойной штрих у суммы подчеркивает отсутствие двух членов с номерами $j = k$ и $j = l$. Эта сумма принимает во внимание взаимодействие только между вторичными модами.

Будем интегрировать уравнения (Г.7.4) и (Г.7.6) вдоль области межмодовой связи от $z = 0$ до $z = L$. Интегрирование по частям приводит к появлению в правой части уравнений производных $dA_l(z)/dz$ и $dA_k(z)/dz$ под знаком интеграла. Подстановка вместо этих производных соответствующих выражений, даваемых формулами (Г.7.4) и (Г.7.6), после ряда преобразований дает следующий результат:

$$\begin{aligned} A_k(L) - A_k(0) = {} & \sum_{l\neq k}{}' \left\{ \frac{c_{kl}}{i\Delta\beta_{kl}} \left[A_l(L)e^{i\Delta\beta_{kl}L} - A_l(0)\right] - \frac{c_{kl}c_{lk}}{i\Delta\beta_{kl}} \int\limits_0^L A_k(z)dz \right\} - \\ & - \sum_{l\neq k}{}' \sum_{\substack{j\neq k\\ j\neq l}}{}'' \frac{c_{kl}c_{lj}}{i\Delta\beta_{kl}} \int\limits_0^L A_j(z)e^{i\Delta\beta_{kj}z}dz, \end{aligned} \tag{Г.7.7}$$

$$\begin{aligned} A_l(L) - A_l(0) = {} & \frac{c_{lk}}{i\Delta\beta_{lk}} \left[A_k(L)e^{i\Delta\beta_{lk}L} - A_k(0)\right] - \frac{c_{lk}c_{kl}}{i\Delta\beta_{lk}} \int\limits_0^L A_l(z)dz + \\ & + \sum_{\substack{j\neq k\\ j\neq l}}{}'' \left(c_{lj} - \frac{c_{lk}c_{kj}}{i\Delta\beta_{lk}}\right) \int\limits_0^L A_j(z)e^{i\Delta\beta_{lj}z}dz. \end{aligned} \tag{Г.7.8}$$

Для определенности предполагаем, что все вторичные моды являются прямыми, так что $A_l(0) = 0$ для $l \neq k$. Это позволяет подставить значение $A_l(L)$, даваемое формулой (Г.7.8), в правую часть (Г.7.7). Тогда амплитуда первичной моды при $z = L$ на выходе из области межмодовой связи равняется

$$A_k(L) = A_k(0)\,\frac{1+\sum\limits_{l\neq k}{}' Q_{kl}\,e^{i\Delta\beta_{kl}L}}{1+\sum\limits_{l\neq k}{}' Q_{kl}} + \frac{\sum\limits_{l\neq k}{}' Q_{kl}B_{lk}\,e^{i\Delta\beta_{kl}L}}{1+\sum\limits_{l\neq k}{}' Q_{kl}}, \tag{Г.7.9}$$

где

$$B_{lk} = \frac{i\Delta\beta_{lk}}{c_{lk}}\left[e^{i\Delta\beta_{lk}L}\sum_{j\neq l}{}' c_{lj}\int\limits_0^L A_j(z)e^{i\Delta\beta_{kj}z}dz - \sum_{\substack{j\neq k\\ j\neq l}}{}'' c_{lj}\int\limits_0^L A_j(z)e^{i\Delta\beta_{lj}z}dz\right] + \\ + \sum_{j\neq k}{}' c_{kj}\int\limits_0^L A_j(z)e^{i\Delta\beta_{lj}z}dz. \tag{Г.7.10}$$

В дополнение к B_{lk}, выражение (Г.7.9) содержит также величины

$$Q_{kl} = \frac{c_{kl}c_{lk}}{\Delta\beta_{kl}\Delta\beta_{lk}} \equiv \frac{p_k p_l}{4\Delta_{kl}^2}, \tag{Г.7.11}$$

где введен *параметр фазового рассогласования* между k-й и l-й модами в форме

$$\Delta_{kl} = \sqrt{\frac{|\Delta\beta_{kl}\Delta\beta_{lk}|}{4|c_{kl}c_{lk}|}} \equiv \frac{|\Delta\beta_{kl}|}{2|c_{kl}|}. \tag{Г.7.12}$$

Название параметра отражает тот факт, что величина Δ_{kl} стремится к нулю при $\beta_k' \equiv \beta_k + ic_{kk} \to \beta_l' \equiv \beta_l + ic_{ll}$, т.е. при исчезновении фазового рассогласования между модами. Произведение $p_k p_l$ факторов направленности мод, входящее в Q_{kl}, определяется характером связи: $p_k p_l > 0$ при пассивной связи и $p_k p_l < 0$ при активной связи.

Анализ выражения (Г.7.9) показывает, что наиболее заметный вклад в выходную амплитуду $A_k(L)$ первичной моды вносят те вторичные моды, которые наименее рассогласованы по фазовым скоростям с k-й модой, тогда для них $|\Delta\beta_{kl}| \to 0$, $\Delta_{kl} \to 0$ и $|Q_{kl}| \to \infty$. Последнее верно даже при слабой связи, когда коэффициенты связи c_{kl} малы. В этом случае первое слагаемое в (Г.7.9) становится равным $A_k(0)$. Тогда основной эффект взаимодействия мод, проявляющийся в приращении $\Delta A_k \equiv A_k(L) - A_k(0)$ амплитуды первичной моды, определяется вторым слагаемым в (Г.7.9), содержащим величину B_{lk}.

Из формулы (Г.7.10) видно, что при фазовом согласовании мод, когда $\Delta\beta_{lk} = 0$, первое слагаемое, содержащее две суммы в квадратных скобках, исчезает и основной вклад в B_{lk} дает последняя сумма. Интеграл, входящий в эту сумму, приближенно вычисляется как

$$\int\limits_0^L A_j(z)e^{i\Delta\beta_{lj}z}dz \simeq A_j(z_0)L\,\frac{\sin(\Delta\beta_{lj}L/2)}{\Delta\beta_{lj}L/2}\,e^{i\Delta\beta_{lj}L/2}. \tag{Г.7.13}$$

Здесь $A_j(z_0)$ равняется значению функции $A_j(z)$, взятому в некоторой точке $z_0 \in (0, L)$ и вынесенному из-под интеграла в предположении, что эта функция меняется много медленнее по сравнению с быстро осциллирующей функцией $\exp(i\Delta\beta_{lj}z)$ при $\Delta\beta_{lj} \neq 0$.

Из выражения (Г.7.13) следует, что вклад в величину B_{lk} от рассогласованных по фазовым скоростям мод (с номерами $j \neq k, l$) может стать заметным, если он делается такими модами, для которых фазовое рассогласование $\Delta\beta_{lj}$ ненулевое, но минимальное. Вклад таких несинфазных мод (для которых $\Delta\beta_{lj} \neq 0$) много меньше по сравнению с синфазными модами (для которых $\Delta\beta_{kl} = 0$) по двум причинам:

- конечное значение $Q_{lj} \propto |\Delta\beta_{lj}|^{-2}$, в отличие от $Q_{kl} \to \infty$,
- усреднение медленно меняющейся амплитуды $A_j(z)$ с помощью быстро осциллирующих весовых функций $\exp(i\Delta\beta_{lj}z)$.

Таким образом, требование *минимальности* параметра фазового рассогласования Δ_{kl} (в пределе $\Delta_{kl} \to 0$) служит *критерием* для отбора эффективно взаимодействующих синфазных мод. Как видно из выражения (Г.7.12), значение Δ_{kl} определяется не только величиной фазового рассогласования $|\Delta\beta_{kl}|$ в виде (Г.7.5) (в пределе $|\Delta\beta_{kl}| \to 0$), но и величиной коэффициента связи $|c_{kl}|$ (большей по возможности). Следовательно, пара сильно связанных мод (при большом значении $|c_{kl}|$) может давать заметный вклад в эффект межмодовой связи, даже будучи рассогласованными по фазовым скоростям, но имея малой величину Δ_{kl}.

Для любой пары мод условие точного фазового согласования в виде $\Delta\beta_{kl} = 0$ реализуется, как правило, на одной частоте рабочего диапазона. Поэтому на других частотах эти моды становятся рассогласованными по фазовым скоростям. Однако их вклад в общую модальную связь будет как прежде преобладающим, если их параметр фазового рассогласования Δ_{kl} остается минимальным по сравнению с другими парами несинфазных мод во всем рабочем диапазоне частот. Этот диапазон ограничивается частотами, найденными из условия $\Delta_{kl} = 1$ или $|\Delta\beta_{kl}| = 2|c_{kl}|$.

В большинстве практических ситуаций связь мод является достаточно слабой, поскольку коэффициенты связи таковы, что $|c_{kl}| \ll |\beta'_k + \beta'_l|/2$ [27]. Синфазные k-я и l-я моды эффективно взаимодействуют друг с другом лишь в пределах того частотного диапазона, для которого $\Delta_{kl} \leqslant 1$. Таким образом, *синфазные* слабо связанные моды удовлетворяют условиям

$$|\beta'_k - \beta'_l| \leqslant 2|c_{kl}| \ll |\beta'_k + \beta'_l|, \tag{Г.7.14}$$

а для *несинфазных* слабо связанных мод имеем

$$2|c_{lj}| \ll |\beta'_l - \beta'_j| \leqslant |\beta'_l + \beta'_j|, \tag{Г.7.15}$$

где штрих отмечает фазовую постоянную (Г.7.2), модифицированную самовоздействием моды в виде $\beta'_k = \beta_k + ic_{kk}$.

Приведенные выше результаты получены для продольно-инвариантной системы, в которой коэффициенты связи не зависят от координаты z. Как уже отмечалось выше, такая связь называется *однородной* (или *прямой*) связью, в отличие от *периодической* и *параметрической* связи, при которой коэффициенты связи становятся функциями z.

Г.8. Условия фазового согласования мод при однородной, периодической и параметрической связи

Однородная связь между модами реализуется посредством статических (не зависящих от времени) и продольно однородных (не зависящих от координаты z) возмущений рассматриваемой волноведущей структуры. Как очевидно из вышесказанного, *условие фазового согласования* $\Delta\beta_{kl} \equiv \beta'_k - \beta'_l = 0$, соответствующее отсутствию рассогласования по фазовым скоростям между k-й и l-й модами, имеет следующий вид:

$$\beta_k = \beta_l. \tag{Г.8.1}$$

Здесь и в последующем штрих у фазовых постоянных, отмечающий самовоздействие моды в виде (Г.7.2), для простоты опускаем.

Обобщим условие фазового согласования (Г.8.1) на случай систем с периодической и параметрической связью.

Периодическая связь между модами реализуется посредством статических (не зависящих от времени) возмущений, которые периодически неоднородны в продольном направлении z с периодом Λ. Пусть пространственное изменение описывается периодической функцией $g(z) = g(z + n\Lambda)$, характеризующей продольную зависимость коэффициентов связи в виде

$$c_{kl}(z) = \widehat{c}_{kl}\, g(z), \tag{Г.8.2}$$

где колпачок, как и у мембранных функций модальных полей, обозначает отсутствие зависимости от z.

Периодическая функция $g(z)$ может быть представлена в виде комплексного ряда Фурье,

$$g(z) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} G_s e^{-isKz} \quad \text{при} \quad K = 2\pi/\Lambda, \tag{Г.8.3}$$

где коэффициенты фурье-разложения для вещественных периодических функций $g(z)$,

$$G_s = \frac{1}{\Lambda}\int_0^{\Lambda} g(z)\, e^{isKz} dz, \tag{Г.8.4}$$

подчиняются соотношению $G_s = G^*_{-s}$.

Согласно теореме Флоке [29], электромагнитное поле любой собственной моды периодического волновода разложимо по полям пространственных гармоник. Тогда для k-й моды продольная зависимость ее волновой амплитуды $a_k(z)$ имеет вид гармонического ряда

$$a_k(z) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} A_k^{(s)} e^{-i\beta_k^{(s)} z}. \tag{Г.8.5}$$

Фазовая постоянная s-й пространственной гармоники равняется

$$\beta_k^{(s)} = \beta_k + sK \equiv \beta_k + \frac{2\pi s}{\Lambda}, \qquad s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{Г.8.6}$$

Следовательно, пространственные гармоники имеют разные фазовые скорости $v_{\mathrm{ph},k}^{(s)} = \omega/\beta_k^{(s)}$, но общую для всех групповую скорость, равную $v_{\mathrm{gr},k}^{(s)} = (\partial\beta_k^{(s)}/\partial\omega)^{-1} = (\partial\beta_k/\partial\omega)^{-1} \equiv v_{\mathrm{gr},k}$.

Если k-я и l-я моды связаны друг с другом благодаря парному взаимодействию двух пространственных гармоник, скажем с номерами s' и s'', тогда их условие фазового согласования, по аналогии с условием (Г.8.1) при однородной связи, может быть записано в виде

$$\beta_k^{(s')} = \beta_l^{(s'')}. \tag{Г.8.7}$$

Использование выражения (Г.8.6) для фазовой постоянной пространственных гармоник превращает равенство (Г.8.7) в *условие фазового согласования* при периодической связи k-й и l-й мод:

$$\beta_k - \beta_l = sK, \tag{Г.8.8}$$

где $|s| = |\,s' - s''|$ известен как порядок периодического взаимодействия.

Очевидно, что однородная связь является частным случаем периодической связи в нулевом порядке, так как при $s = 0$ условие фазового согласования (Г.8.8) превращается в (Г.8.1). Взаимодействия первого порядка более эффективны по сравнению с высшими порядками, поскольку коэффициенты Фурье (Г.8.4) всегда уменьшаются по величине с ростом $|s|$ [1]. По этой причине обычно ограничиваются рассмотрением только взаимодействий первого порядка как первым приближением к общей задаче о периодически связанных системах (см. п. 3.4).

Периодическая связь имеет отличительную особенность, связанную с возможностью взаимодействия между модами, распространяющимися в противоположных направлениях. В отличие от однородной связи, условие (Г.8.8) допускает разные знаки фазовых постоянных β_k и β_l. Как предельный случай этой ситуации, когда существует периодическая связь между прямой и обратной модами одного и того же типа, т. е. при $\beta_k = \beta_{+m} \equiv \beta_m > 0$ и $\beta_l = \beta_{-m} \equiv -\beta_m < 0$, общее условие (Г.8.8) принимает частный вид

$$\beta_m = s\,\frac{\pi}{\Lambda}, \tag{Г.8.9}$$

соответствующий *брэгговскому отражению* (см. п. 3.4.1).

Действительно, если обозначить $\beta_m = k\sin\theta$, где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число плоской электромагнитной волны, падающей на поверхность периодической структуры с периодом Λ под углом скольжения θ, то выражение (Г.8.9) превращается в известную формулу Брэгга–Вульфа в форме $2\Lambda\sin\theta = s\lambda$, полученную впервые при анализе дифракции рентгеновских лучей на периодической решетке кристаллов [53].

Параметрическая связь между модами реализуется посредством динамических (зависящих от времени) возмущений, производимых пространственно-временной модуляцией распределенных параметров волноведущей среды (например, ее диэлектрической проницаемости). Такие возмущения могут создаваться волной накачки, распространяющейся с волновым множителем $\exp[i(\omega_p t - \beta_p z)]$ и амплитудой, достаточно большой для того, чтобы проявилась нелинейность среды. Это приводит к появлению гармоник частоты накачки $\nu\omega_p$ и комбинационных частот $\omega_\nu = \omega + \nu\omega_p$ ($\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) при условии, что существует малый сигнал на частоте ω. Если k-я сигнальная мода имеет фазовую постоянную β_k, то накачка генерирует пространственные гармоники с фазовыми постоянными

$$\beta_k^{(\nu)} = \beta_k + \nu\beta_p, \quad \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{Г.8.10}$$

В волноведущей структуре с двумя распространяющимися модами k и l, имеющими фазовые постоянные β_k и β_l (на сигнальной и холостой частотах), параметрическая связь между ними появляется как результат парного взаимодействия их пространственных гармоник, скажем с номерами ν' и ν''. Условие фазового согласования этих пространственных гармоник, записанное по аналогии с (Г.8.1), имеет вид (ср. формулу (Г.8.7))

$$\beta_k^{(\nu')} = \beta_l^{(\nu'')}. \tag{Г.8.11}$$

Использование выражения (Г.8.10) для фазовой постоянной пространственных гармоник превращает равенство (Г.8.11) в *условие фазового согласования* при параметрической связи k-й и l-й мод:

$$\beta_k - \beta_l = \nu\beta_p, \tag{Г.8.12}$$

где $|\nu| = |\nu' - \nu''|$ известен как порядок параметрического взаимодействия.

Трехчастотный параметрический случай, рассмотренный в п. Г.3, соответствует первому порядку взаимодействия ($\nu = 1$), которым обычно ограничиваются в первом приближении. Тогда коэффициенты связи равны

$$c_{kl}(z) = \widehat{c}_{kl}\, e^{-i\beta_p z}. \tag{Г.8.13}$$

При $\nu = 1$ из равенства (Г.8.12), означающего $\Delta\beta_{kl} \equiv \beta_k - \beta_l - \beta_p = 0$, следует, что фазовое рассогласование, введенное для однородной связи в виде (Г.7.5), принимает следующую форму для параметрической связи:

$$\Delta\beta_{kl} = (\beta_k - \beta_p/2) - (\beta_l + \beta_p/2). \tag{Г.8.14}$$

Именно в такой форме *фазовое рассогласование* $\Delta\beta_{kl}$ входит в выражение (Г.7.12) для *параметра фазового рассогласования* Δ_{kl}.

Следует помнить, что все фазовые постоянные модифицируются самовоздействием мод, как определено в виде (Г.7.2), т. е. они должны быть отмечены штрихом (β_k' и β_l'), который здесь и везде в дальнейшем опускается для простоты записи.

Таким образом, отбор связанных мод путем использования критерия минимальности параметра фазового рассогласования Δ_{kl}, введенного формулой (Г.7.12), позволяет привести бесконечную систему связанных уравнений (Г.7.1) к укороченной форме. На практике часто встречаются такие ситуации, когда основной физический эффект проявляется в первом приближении как результат связи только двух мод, согласованных по фазовым скоростям. Все другие моды, будучи несинфазными и слабо связанными, могут быть учтены как малое возмущение в следующих приближениях.

Параметрическая связь является наиболее общим случаем взаимодействия мод, который охватывает как частные случаи и периодическую связь (при $\omega_p = 0$ и $\beta_p = K$), и однородную связь (при $\omega_p = 0$ и $\beta_p = 0$). По этой причине будем для общности рассматривать волноведущую систему, состоящую из двух параметрически связанных мод, для того чтобы исследовать режимы парного взаимодействия мод, согласованных по фазовым скоростям.

Г.9. Нормальные волны недиссипативной волноведущей структуры с двумя связанными модами

Г.9.1. Дисперсионные и энергетические свойства нормальных волн. В этом параграфе мы ограничиваем анализ рассмотрением только двух согласованных по фазовой скорости мод с номерами $k = 1$ и $l = 2$. Эти моды принадлежат трехчастотной параметрической недиссипативной системе и выделены из полного спектра собственных мод на основе критерия минимальности параметра фазового рассогласования (Г.7.12), который теперь записан как

$$\Delta_{12} = \sqrt{\frac{|\Delta\beta_{12}\Delta\beta_{21}|}{4|c_{12}c_{21}|}} \equiv \frac{|\Delta\beta_{12}|}{2|c_{12}|}. \qquad (\text{Г.9.1})$$

Обозначим волновые амплитуды этих мод на частоте сигнала $\omega_1 = \omega_s \equiv \omega$ и холостой частоте $\omega_2 = \omega_i \equiv (\omega - \omega_p)$ в виде $a_1(z;\omega_1)$ и $a_2(z;\omega_2)$. Согласно сказанному в п. Г.3, частота сигнала, как и частота накачки, всегда положительна, в то время как холостая частота может быть либо положительной (при низкочастотной накачке с $\omega_p < \omega$), либо отрицательной (при высокочастотной накачке с $\omega_p > \omega$).

Укороченная форма связанных уравнений для двух мод получается из общей системы уравнений (Г.7.1) или (Г.7.4) с применением (Г.8.13) и записывается в следующем виде:

- *для волновых амплитуд* $a_1(z;\omega_1)$ и $a_2(z;\omega_2)$ на частотах ω_1 и ω_2

$$\begin{aligned} \frac{da_1(z;\omega_1)}{dz} &= -i\beta_1 a_1(z;\omega_1) + \widehat{c}_{12} e^{-i\beta_p z} a_2(z;\omega_2), \\ \frac{da_2(z;\omega_2)}{dz} &= \widehat{c}_{21} e^{i\beta_p z} a_1(z;\omega_1) - i\beta_2\, a_2(z;\omega_2); \end{aligned} \qquad (\text{Г.9.2})$$

- для *амплитуд возбуждения* $A_1(z;\omega_1)$ и $A_2(z;\omega_2)$ на частотах ω_1 и ω_2

$$\begin{aligned} \frac{dA_1(z;\omega_1)}{dz} &= \widehat{c}_{12} e^{i\Delta\beta_{12} z} A_2(z;\omega_2), \\ \frac{dA_2(z;\omega_2)}{dz} &= \widehat{c}_{21} e^{i\Delta\beta_{21} z} A_1(z;\omega_1). \end{aligned} \qquad (\text{Г.9.3})$$

Входящее в (Г.9.3) фазовое рассогласование (Г.8.14), записанное в виде

$$\Delta\beta_{12} = (\beta_1 - \beta_p/2) - (\beta_2 + \beta_p/2) \equiv -\Delta\beta_{21}, \qquad (\text{Г.9.4})$$

содержит фазовые постоянные, модифицированные самовоздействием мод, согласно (Г.7.2), т. е. $\beta_{1,2} \to \beta'_{1,2}$, но здесь и ниже штрих опускается.

Амплитуды мод a_k или A_k $(k = 1, 2)$ нормированы так, что средняя мощность, переносимая каждой модой в положительном направлении оси z, представляется в форме (Г.4.8), а именно

$$P_k(z; \omega_k) = p_k|\omega_k|\,|a_k(z; \omega_k)|^2 = p_k|\omega_k|\,|A_k(z; \omega_k)|^2, \tag{Г.9.5}$$

где $p_k = \pm 1$ — фактор направленности k-й моды, введенный в виде (Г.4.4) с целью определения знака переносимой мощности.

В этом случае закон сохранения мощности (Г.6.1) принимает форму

$$r_1|a_1(z; \omega_1)|^2 + r_2|a_2(z; \omega_2)|^2 = \text{const}, \tag{Г.9.6}$$

включающую частотно-энергетический фактор $r_k \equiv q_k p_k = \pm 1$ для k-й моды $(k = 1, 2)$ в виде (Г.4.5), где $q_k = \omega_k/|\omega_k|$ определяет знак частоты.

Подстановка (Г.9.5) в равенство (Г.9.6) дает соотношение Мэнли–Роу

$$\frac{P_1(z; \omega_1)}{\omega_1} + \frac{P_2(z; \omega_2)}{\omega_2} = \text{const}. \tag{Г.9.7}$$

Без потери общности удобно принять мощность, переносимую модой 1, положительной ($r_1 = +1$) и записать закон сохранения мощности (Г.9.6):

$$|a_1(z; \omega_1)|^2 \pm |a_2(z; \omega_2)|^2 \equiv |A_1(z; \omega_1)|^2 \pm |A_2(z; \omega_2)|^2 = \text{const}. \tag{Г.9.8}$$

Здесь, в соответствии с условиями (Г.6.5), наложенными на коэффициенты связи, верхним (положительным) и нижним (отрицательным) знаками учитываются (по терминологии Люиселла [27]):

- *пассивная связь*, когда $r_1 r_2 = +1$ и

$$\widehat{c}_{21} = -\widehat{c}_{12}^{\,*}, \tag{Г.9.9}$$

- *активная связь*, когда $r_1 r_2 = -1$ и

$$\widehat{c}_{21} = \widehat{c}_{12}^{\,*}. \tag{Г.9.10}$$

Для параметрических систем удобно ввести новые волновые амплитуды:

$$\overline{a}_1(z; \omega_1) = a_1(z; \omega_1)e^{i\beta_p z/2} = A_1(z; \omega_1)e^{-i\overline{\beta}_1 z}, \tag{Г.9.11}$$

$$\overline{a}_2(z; \omega_2) = a_2(z; \omega_2)e^{-i\beta_p z/2} = A_2(z; \omega_2)e^{-i\overline{\beta}_2 z}, \tag{Г.9.12}$$

где определены также новые фазовые постоянные параметрических мод,

$$\overline{\beta}_1 = \beta_1 - \beta_p/2 \quad \text{и} \quad \overline{\beta}_2 = \beta_2 + \beta_p/2, \tag{Г.9.13}$$

для которых фазовое рассогласование (Г.9.4) равняется

$$\Delta\beta_{12} = \overline{\beta}_1 - \overline{\beta}_2 \equiv -\Delta\beta_{21}. \tag{Г.9.14}$$

Следует помнить, что в параметрических системах фазовые постоянные β_1 и β_2, как и волновые амплитуды (Г.9.11) и (Г.9.12), соответствуют разным частотам, т. е. $\beta_1(\omega_1) \equiv \beta_1(\omega)$ и $\beta_2(\omega_2) \equiv \beta_2(\omega - \omega_p)$. Для упрощения записи будем опускать в обозначениях эту частотную зависимость.

Введение новых волновых амплитуд (Г.9.11) и (Г.9.12) в уравнения (Г.9.2) превращает их в уравнения с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{a}_1(z)}{dz} &= -i\overline{\beta}_1\overline{a}_1(z) + \widehat{c}_{12}\,\overline{a}_2(z), \\ \frac{d\overline{a}_2(z)}{dz} &= \widehat{c}_{21}\overline{a}_1(z) - i\overline{\beta}_2\overline{a}_2(z). \end{aligned} \tag{Г.9.15}$$

Представление искомого решения в виде $\exp(-\Gamma z)$ приводит уравнения (Г.9.15) к алгебраической форме,

$$(\Gamma - i\overline{\beta}_1)\,\overline{a}_1 + \widehat{c}_{12}\,\overline{a}_2 = 0, \tag{Г.9.16}$$

$$\widehat{c}_{21}\overline{a}_1 + (\Gamma - i\overline{\beta}_2)\,\overline{a}_2 = 0, \tag{Г.9.17}$$

которая имеет характеристическое уравнение следующего вида:

$$\Gamma^2 - i\big(\overline{\beta}_1 + \overline{\beta}_2\big)\Gamma - \big(\overline{\beta}_1\overline{\beta}_2 + \widehat{c}_{12}\widehat{c}_{21}\big) = 0. \tag{Г.9.18}$$

Корни квадратного уравнения (Г.9.18) соответствуют двум независимым решениям системы уравнений (Г.9.16) и (Г.9.17). Они описывают *нормальные волны* связанной системы, так как для них детерминант системы уравнений имеет диагональную форму. Общее решение связанных уравнений (Г.9.15) представляется в форме суперпозиция нормальных решений $\exp(-\Gamma_1 z)$ и $\exp(-\Gamma_2 z)$ с неизвестными константами интегрирования:

$$\begin{aligned} \overline{a}_1(z) &= A_{11}e^{-\Gamma_1 z} + A_{12}e^{-\Gamma_2 z} = \\ &= A_{11}e^{-\Gamma_1 z} - \frac{\Gamma_2 - i\overline{\beta}_2}{\widehat{c}_{21}}\,A_{22}e^{-\Gamma_2 z}, \end{aligned} \tag{Г.9.19}$$

$$\begin{aligned} \overline{a}_2(z) &= A_{21}e^{-\Gamma_1 z} + A_{22}e^{-\Gamma_2 z} = \\ &= -\frac{\Gamma_1 - i\overline{\beta}_1}{\widehat{c}_{12}}\,A_{11}e^{-\Gamma_1 z} + A_{22}e^{-\Gamma_2 z}. \end{aligned} \tag{Г.9.20}$$

Последние равенства в (Г.9.19) и (Г.9.20) содержат константы A_{12} и A_{21}, выраженные через A_{22} и A_{11} с помощью уравнений (Г.9.17) и (Г.9.16), записанных, соответственно, при $\Gamma = \Gamma_2$ и $\Gamma = \Gamma_1$. Две оставшихся константы A_{11} и A_{22} находятся из краевых условий (Г.6.11) и (Г.6.12), взятых для рассматриваемых мод либо при $z = 0$, либо при $z = L$, в зависимости от направления групповых скоростей этих мод. Подобное решение будет выполнено ниже для четырех физических ситуаций, соответствующих разным режимам недиссипативной связи двух мод.

Будем анализировать корни характеристического уравнения (Г.9.18), записанные в виде

$$\Gamma_{1,2} = i\,\frac{\overline{\beta}_1 + \overline{\beta}_2}{2} \pm \sqrt{\widehat{c}_{12}\widehat{c}_{21} - \left(\frac{\overline{\beta}_1 - \overline{\beta}_2}{2}\right)^2}, \tag{Г.9.21}$$

которые характеризуют дисперсию нормальных волн связанной системы при пассивной и активной связи мод.

Пассивная связь мод реализуется, когда закон сохранения мощности (Г.9.8) имеет форму (со знаком плюс)

$$|\overline{a}_1(z)|^2 + |\overline{a}_2(z)|^2 = \text{const}. \tag{Г.9.22}$$

В этом случае коэффициенты связи подчиняются соотношению (Г.9.9), так что $\widehat{c}_{12}\widehat{c}_{21} = -|\widehat{c}_{12}|^2 < 0$. Следовательно, корни (Г.9.21) при пассивной связи имеют следующий вид:

$$\Gamma_{1,2} = i(\beta_0 \pm \beta_c), \tag{Г.9.23}$$

где введены новые величины — *средняя фазовая постоянная* β_0 и *фазовая константа связи* β_c, равные

$$\beta_0 = \frac{\overline{\beta}_1 + \overline{\beta}_2}{2} \equiv \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \quad \text{и} \quad \beta_c = |\widehat{c}_{12}|\sqrt{1 + \Delta_{12}^2}\,. \tag{Г.9.24}$$

Активная связь мод реализуется, когда закон сохранения мощности (Г.9.8) имеет форму (со знаком минус)

$$|\overline{a}_1(z)|^2 - |\overline{a}_2(z)|^2 = \text{const}. \tag{Г.9.25}$$

В этом случае коэффициенты связи подчиняются соотношению (Г.9.10), так что $\widehat{c}_{12}\widehat{c}_{21} = |\widehat{c}_{12}|^2 > 0$. Следовательно, корни (Г.9.21) при активной связи имеют следующий вид:

$$\Gamma_{1,2} = \pm\,\alpha_c + i\beta_0, \tag{Г.9.26}$$

где введены новые величины — *средняя фазовая постоянная* β_0 и *амплитудная константа связи* α_c, равные

$$\beta_0 = \frac{\overline{\beta}_1 + \overline{\beta}_2}{2} \equiv \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \quad \text{и} \quad \alpha_c = |\widehat{c}_{12}|\sqrt{1 - \Delta_{12}^2}\,. \tag{Г.9.27}$$

Вновь введенные константы связи β_c и α_c содержат параметр фазового рассогласования Δ_{12} в виде (Г.9.1). Он зависит от фазового рассогласования мод $\Delta\beta_{12} = -\Delta\beta_{21}$, определенного формулой (Г.9.14) как разность фазовых постоянных $\overline{\beta}_1 \equiv \beta_1 - \beta_p/2$ и $\overline{\beta}_2 \equiv \beta_2 + \beta_p/2$, где $\beta_{1(2)}$ учитывают самовоздействие мод, т. е. они понимаются как $\beta_{1(2)} \to \beta'_{1(2)} = \beta_{1(2)} + ic_{11(22)}$.

Корни $\Gamma_{1,2}$ характеристического уравнения (Г.9.18), представленные в виде (Г.9.23) и (Г.9.26) для пассивной и активной связи мод, представляют собой постоянные распространения нормальных волн связанной системы. Они имеют близкую структуру, в которой к фазовой постоянной β_0 (равной среднему арифметическому исходных величин β_1 и β_2) добавляется результат связи двух мод в форме фазовой ($\pm\beta_c$) или амплитудной ($\mp i\alpha_c$) константы связи. Однако при активной связи величина α_c, входящая в постоянную распространения (Г.9.26), является амплитудной константой только в том случае, если $\Delta_{12} < 1$. В противном случае (при $\Delta_{12} > 1$) она превращается в фазовую константу $\beta_c = -i\alpha_c = |\widehat{c}_{12}|(\Delta_{12}^2 - 1)^{1/2}$, а постоянная распространения (Г.9.26) принимает форму (Г.9.23). В отличие от этого, при пассивной связи постоянная распространения (Г.9.23) сохраняет свою форму при любом фазовом рассогласовании мод.

Различие между постоянными распространения $\Gamma_{1,2}$, даваемыми формулами (Г.9.23) и (Г.9.26), состоит в том, что первые являются чисто мнимыми, а вторые — комплекснозначными. Следовательно, в первом случае нормальные волны описываются осциллирующими функциями, не меняющими свою амплитуду, в отличие от второго случая, когда осциллирующие функции имеют экспоненциально изменяющиеся амплитуды. Именно это послужило Люиселлу основанием назвать первый режим *пассивной связью*, а второй — *активной связью* [27]. Важно подчеркнуть, что активная связь не означает действительное существование активных свойств системы, проявляющихся в ее способности к усилению или генерации сигналов. И наоборот, пассивная связь, несмотря на отсутствие пространственно нарастающих решений, может обеспечивать истинное усиление и даже генерацию сигналов (см. п. Г.13).

Для того, чтобы убедиться в истинной активности системы как способности ее к усилению (или генерации), необходимо знать направление групповых скоростей взаимодействующих мод. *Истинное усиление* имеет место тогда и только тогда, когда нарастание амплитуды моды происходит в направлении ее групповой скорости. Уменьшение амплитуды в этом направлении имеет чисто реактивную природу и обеспечивает *исчезающий характер* волнового процесса в недиссипативных системах.

Г.9.2. Дисперсия нормальных волн при пассивной и активной связи попутных и встречных мод. Пары активных (распространяющихся) мод по признаку взаимного направления групповых скоростей принято подразделять на два типа:

- *попутные моды* (нередко называемые сонаправленными, англ. *codirectional*), обе из которых либо прямые, либо обратные, так что $v_{\mathrm{gr},1}v_{\mathrm{gr},2} > 0$; согласно (Г.6.11) или (Г.6.12), краевые условия их ввода в область связи задаются для обеих мод на одном и том же конце — либо при $z = 0$ для прямых мод, либо при $z = L$ для обратных мод;
- *встречные моды* (нередко называемые противонаправленными, англ. *contradirectional*), одна из которых — прямая, а другая — обратная, так что $v_{\mathrm{gr},1}v_{\mathrm{gr},2} < 0$; согласно (Г.6.11) или (Г.6.12), краевые условия их ввода в область связи задаются для каждой из мод на противоположных концах — при $z = 0$ для прямой моды и при $z = L$ для обратной моды.

Будем исследовать дисперсию нормальных волн, т. е. характер постоянных распространения $\Gamma_{1,2}$, даваемых формулами (Г.9.23) и (Г.9.26), для режимов пассивной и активной связи попутных и встречных мод.

Дисперсионные кривые *несвязанных* мод a_1 и a_2 в близкой окрестности точки фазового согласования (задаваемой равенствами (Г.8.1) и (Г.8.12) для однородной и параметрической связи) могут быть аппроксимированы прямыми линиями, наклон которых определяется групповыми скоростями. Такие дисперсионные прямые показаны на рис. Г.1 *а* и *б*, соответственно, для попутных и встречных мод. Частоты ω_1 и ω_2 являются сигнальной ($\omega_1 = \omega_s \equiv \omega$) и холостой ($\omega_2 = \omega_i \equiv \omega - \omega_p$), причем последняя становится отрицательной при высокочастотной накачке, когда $\omega_p > \omega$.

При *однородной связи*, отмеченной номером 1 на рис. Г.1, точное фазовое согласование мод имеет место в точке пересечения дисперсионных прямых на частоте ω_0, где $\beta_1(\omega_0) = \beta_2(\omega_0) \equiv \beta_0^{\mathrm{o}}$.

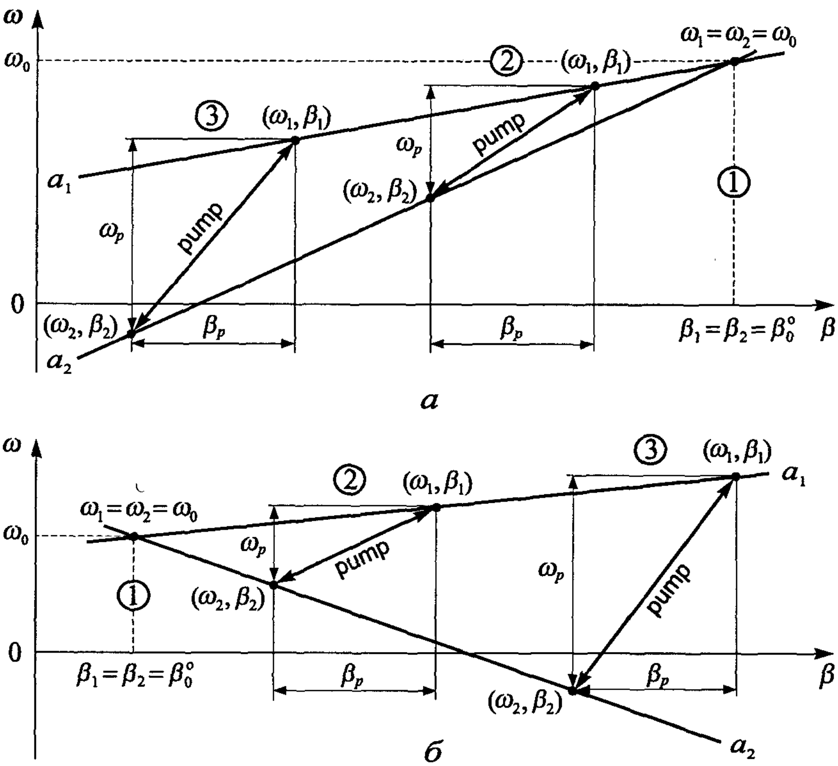


Рис. Г.1. Дисперсионные линии несвязанных мод a_1 и a_2 в окрестности точек их фазового согласования: *а* — попутные моды, *б* — встречные моды. Номер ① соответствует однородной связи, а номера ② и ③ использованы для параметрической связи при низкочастотной и высокочастотной накачке, соответственно. Двойные стрелки с надписью pump показывают связь накачкой сигнальной точки (ω_1, β_1) с холостой точкой (ω_2, β_2)

При *параметрической связи* накачка, изображенная двойной стрелкой на рис. Г.1, связывает две точки — сигнальную (ω_1, β_1) и холостую (ω_2, β_2), не совпадающие с точкой $(\omega_0, \beta_0^{\circ})$ пересечения дисперсионных прямых. Эти две точки связываются условием фазового согласования (Г.8.12), а именно $\beta_1(\omega) - \beta_2(\omega - \omega_p) = \beta_p$. Низкочастотная накачка $(\omega_p < \omega)$ и высокочастотная накачка $(\omega_p > \omega)$ отмечены на рис. Г.1 номерами ② и ③, соответственно. В первом случае холостая частота $\omega_2 = \omega - \omega_p$ положительная и связь мод пассивная, тогда как второй случай обеспечивает отрицательную холостую частоту и активную связь мод, что следует из (Г.6.8).

Взаимодействие между модами возмущает картину дисперсионных линий на рис. Г.1. Возмущенные дисперсионные кривые описываются корнями $\Gamma_{1,2}$ характеристического уравнения (Г.9.18) в виде (Г.9.23) и (Г.9.26), соответственно, для пассивной и активной связи.

Рассмотрим для определенности *однородную связь* между модами a_1 и a_2. Согласно рис. Г.1, мода a_1 является прямой модой с групповой скоростью $v_{\mathrm{gr},1} \equiv v_1 > 0$, а мода a_2 может быть либо прямой с $v_{\mathrm{gr},2} \equiv v_2 > 0$ (попутные моды на рис. Г.1 *а*), либо обратной с $v_{\mathrm{gr},2} \equiv -v_2 < 0$ (встречные моды на рис. Г.1 *б*). Невозмущенная зависимость фазовых постоянных в окрестности точки точного фазового согласования, где $\omega = \omega_0$ и $\beta_1 = \beta_2 = \beta_0^o$, описывается следующими уравнениями:

$$\beta_1(\omega) = \beta_0^o + \frac{\omega - \omega_0}{v_1}, \qquad v_1 \equiv v_{\mathrm{gr},1} > 0, \tag{Г.9.28}$$

$$\beta_2(\omega) = \beta_0^o \pm \frac{\omega - \omega_0}{v_2}, \qquad v_2 \equiv |v_{\mathrm{gr},2}| > 0, \tag{Г.9.29}$$

где двойные знаки соответствуют $v_{\mathrm{gr},2} = \pm v_2$, т. е. *попутным модам* (верхний знак) и встречным модам (нижний знак).

Пассивная связь мод характеризуется чисто мнимыми значениями постоянных распространения $\Gamma_{1,2} = i\,\mathrm{Im}\,\Gamma_{1,2}$ в виде (Г.9.23)–(Г.9.24), которые рассматриваются как функции реальной частоты ω. Обозначив $\beta \equiv \mathrm{Im}\,\Gamma$, можно изобразить эти функции на диаграмме $\omega - \beta$, подобной рис. Г.1. Такие кривые показаны в качественном виде $\mathrm{Im}\,\Gamma_{1,2} = f_{1,2}(\omega)$ на рис. Г.2 *а* и *б* для попутных и встречных мод, соответственно.

Из кривых на рис. Г.2 видно, что взаимодействие между модами приводит к «расталкиванию» невозмущенных дисперсионных линий, показанных на рис. Г.1. Это расталкивание максимально в точке (ω_0, β_0^o) пересечения невозмущенных прямых (Г.9.28) и (Г.9.29) и равняется

$$\mathrm{Im}\,\Gamma_1 - \mathrm{Im}\,\Gamma_2 = 2|c_{12}| \quad \text{при} \quad \omega = \omega_0. \tag{Г.9.30}$$

Характеристическое уравнение (Г.9.18) после подстановки в него соотношений (Г.9.28) и (Г.9.29) при $\Gamma = i\,\mathrm{Im}\,\Gamma \equiv i\beta$ и $c_{12}c_{21} = -|c_{12}|^2 < 0$ для пассивной связи можно привести к квадратному уравнению относительно частоты ω (отсчитываемой от частоты ω_0 точного фазового синхронизма мод):

$$\begin{aligned}(\omega - \omega_0)^2 - (\omega - \omega_0)\big[(\beta - \beta_0^o)(v_1 \pm v_2)\big] \pm \\ \pm \big[(\beta - \beta_0^o)^2 - |c_{12}|^2\big] v_1 v_2 = 0,\end{aligned} \tag{Г.9.31}$$

где верхние и нижние знаки соответствуют попутным модам $(v_{\mathrm{gr},1} v_{\mathrm{gr},2} > 0)$ и встречным модам $(v_{\mathrm{gr},1} v_{\mathrm{gr},2} < 0)$. Корни этого уравнения дают две частоты связи $\omega_{1,2}$, зависящие от вещественных значений $\beta \equiv \mathrm{Im}\,\Gamma$.

Нетрудно видеть, что для *попутных мод* (при верхних знаках в уравнении (Г.9.31)) обе частоты связи $\omega_{1,2}$ всегда принимают чисто вещественные значения при реальных β (см. рис. Г.2 *а*). Это означает, что такая система всегда стабильна при случайных флуктуациях и соответствует устойчивому *пропусканию волн*. Подобная физическая ситуация реализуется в сонаправленных ответвителях СВЧ и оптического диапазона [27, 54, 58].

Однако *встречные моды*, которым соответствует рис. Г.2 *б*, ведут себя иначе. Их взаимодействие приводит к появлению на вещественной оси β окна между значениями β_1^o и β_2^o, равными

$$\beta_{1,2}^o = \beta_0^o \mp 2|c_{12}| \frac{\sqrt{v_1 v_2}}{v_1 + v_2}. \tag{Г.9.32}$$

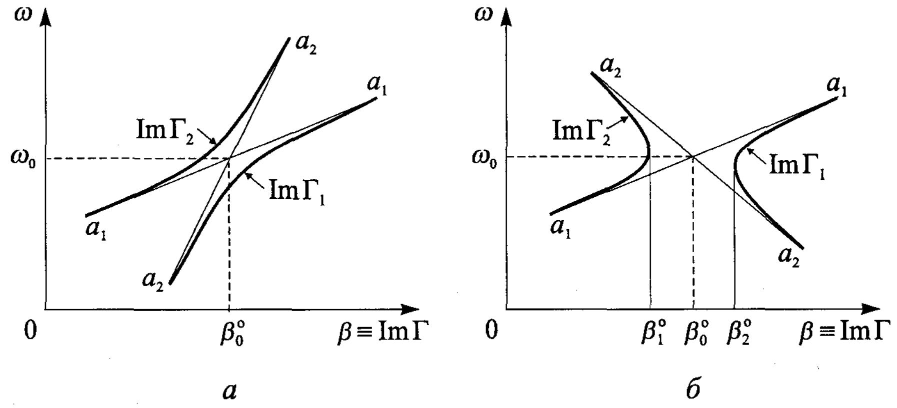


Рис. Г.2. Дисперсионные кривые $\operatorname{Im}\Gamma_{1,2}$ как функции частоты ω при *пассивной связи* мод a_1 и a_2: *а* — попутные моды, *б* — встречные моды. Интервал волновых чисел между β_1° и β_2°, внутри которого частота принимает комплексные значения, соответствует *абсолютной неустойчивости* системы со встречными модами

Внутри этого окна частоты связи оказываются комплексно-сопряженными, т. е. $\omega_{1,2} = \omega' \pm i\omega''$: в центре окна при $\beta = \beta_0^\circ$ (на частоте ω_0 точного фазового синхронизма) корни уравнения (Г.9.31) с нижними знаками равняются

$$\omega_{1,2} = \omega_0 \pm i\,|c_{12}|\sqrt{v_1 v_2}\,. \qquad \text{(Г.9.33)}$$

Это обеспечивает потенциальную неустойчивость системы в форме случайных флуктуаций, спонтанно нарастающих во времени как $\exp(|\omega''|t)$ с вещественными волновыми числами, лежащими внутри окна. Такую неустойчивость распределенных систем принято называть *абсолютной неустойчивостью* [51, 52, 55, 56]. Как будет показано позже (см. п. Г.13), в системах конечной длины абсолютная неустойчивость имеет пороговый характер, т. е. в допороговых условиях система обеспечивает стабильное пространственное нарастание сигнала, а выше порога — самовозбуждается. Именно такая физическая ситуация существует в лампе обратной волны (ЛОВ) [27, 57].

Активная связь мод характеризуется комплексными значениями возмущенных постоянных распространения $\Gamma_{1,2} = \operatorname{Re}\Gamma_{1,2} + i\operatorname{Im}\Gamma_{1,2}$ в форме (Г.9.26)–(Г.9.27), которые рассматриваются как функции действительной частоты ω. Как видно из (Г.9.27), комплексные $\Gamma_{1,2}$ существуют только, если фазовое рассогласование $\Delta\beta_{12} = \beta_1 - \beta_2$ таково, что параметр $\Delta_{12} = |\Delta\beta_{12}|/2|c_{12}|$ не превышает единицы. Когда $\Delta_{12} > 1$, величина под корнем выражения для α_c в (Г.9.27) становится отрицательной, и постоянные распространения (Г.9.26) принимают чисто мнимые значения, подобно (Г.9.23) для пассивной связи.

Поэтому условие существования комплекснозначных постоянных распространения (Г.9.26) имеет вид

$$\Delta_{12} \leqslant 1 \qquad \text{или} \qquad |\beta_1(\omega) - \beta_2(\omega)| \leqslant 2|c_{12}|. \qquad \text{(Г.9.34)}$$

Подстановка (Г.9.28) и (Г.9.29) в равенство, входящее в формулу (Г.9.34), дает интервал $(\omega_1^\circ, \omega_2^\circ)$ реальных рабочих частот, где

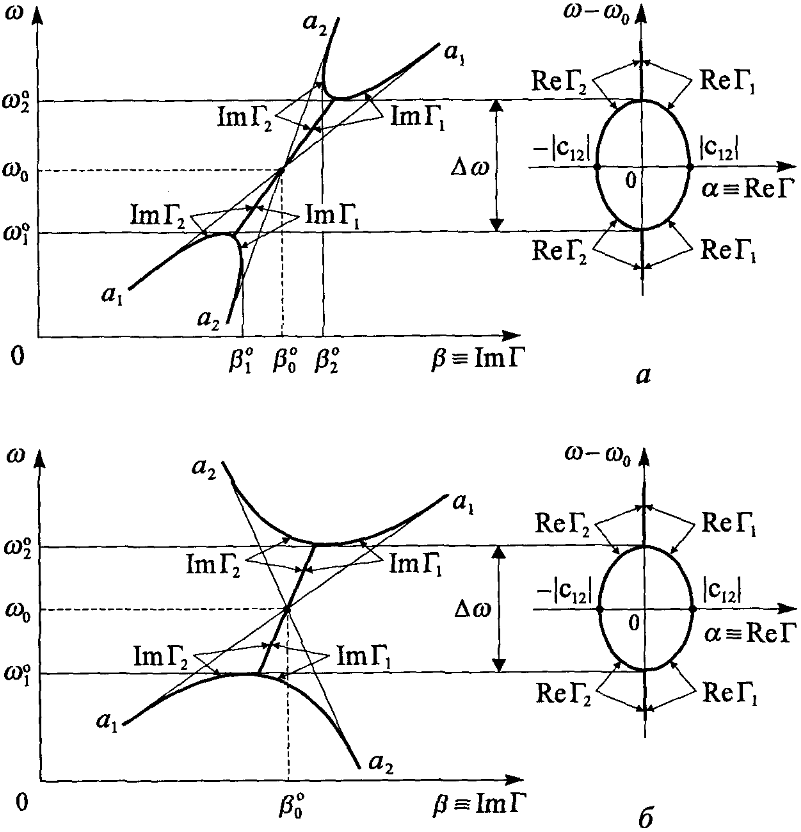


Рис. Г.3. Дисперсионные кривые $\mathrm{Im}\,\Gamma_{1,2}$ и $\mathrm{Re}\,\Gamma_{1,2}$ как функции частоты ω при *активной связи* мод a_1 и a_2: *а* — попутные моды, *б* — встречные моды. Частотный диапазон $\Delta\omega$ между ω_1° и ω_2°, внутри которого постоянные распространения $\Gamma_{1,2}$ имеют комплексные значения, соответствует *конвективной неустойчивости* системы с попутными модами (*а*) и *полосе непропускания* в системе со встречными модами (*б*)

$$\omega_{1,2}^\circ = \omega_0 \mp 2|c_{12}|v_{12} \quad \text{при} \quad v_{12} = \frac{v_1 v_2}{v_1 \mp v_2}. \qquad (\text{Г.9.35})$$

Двойные знаки в выражении для v_{12} (но не для $\omega_{1,2}^\circ$!) соответствуют попутным модам (верхний знак) и встречным модам (нижний знак).

В пределах частотного диапазона $(\omega_1^\circ, \omega_2^\circ)$ обе постоянные распространения $\Gamma_{1,2} = \mathrm{Re}\,\Gamma_{1,2} + i\,\mathrm{Im}\,\Gamma_{1,2}$ в виде (Г.9.26)–(Г.9.27) имеют вещественную и мнимую части как функции ω, которые находятся из уравнений

$$(\mathrm{Re}\,\Gamma_{1,2})^2 + \left(\frac{\omega - \omega_0}{2v_{12}}\right)^2 = |c_{12}|^2, \qquad (\text{Г.9.36})$$

$$\mathrm{Im}\,\Gamma_1 = \mathrm{Im}\,\Gamma_2 = \frac{\beta_1(\omega) + \beta_2(\omega)}{2}. \qquad (\text{Г.9.37})$$

Кривые, выраженные формулами (Г.9.36) и (Г.9.37), качественно изображены на рис. Г.3 *а* и *б*, соответственно, для попутных и встречных мод.

Формула (Г.9.37) соответствует биссектрисе угла между прямыми линиями $\beta_1(\omega)$ и $\beta_2(\omega)$, описываемыми уравнениями (Г.9.28) и (Г.9.29), которая показана внутри частотного окна $\Delta\omega$ в виде прямой линии $\beta \equiv \operatorname{Im}\Gamma_{1,2} = f(\omega)$ на левых графиках рис. Г.2 и Г.3. Формула (Г.9.36) дает уравнение эллипса с полуосями длиною $|c_{12}|$ и $2|c_{12}|v_{12}$, направленными вдоль осей $\alpha \equiv \operatorname{Re}\Gamma$ и $\omega - \omega_0$, который изображен на правых графиках рис. Г.2 и Г.3.

Как будет показано позже (см. п. Г.12), в частотном окне $\Delta\omega$ с границами ω_1° и ω_2°, внутри которого постоянные распространения $\Gamma_{1,2}$ комплексные, наблюдается так называемая *конвективная неустойчивость* системы с *попутными модами* (см. рис. Г.3 *а*). В отличие от абсолютной, конвективная неустойчивость обеспечивает стабильное распространение сигнальной моды с усилением в продольном направлении [51, 52, 55]. Именно такая физическая ситуация существует в лампе бегущей волны (ЛБВ) [27, 57].

Однако в случае *встречных мод*, показанных на рис. Г.3 *б*, частотное окно $\Delta\omega$ с комплексными $\Gamma_{1,2}$ соответствует *полосе непропускания*, вызванной появлением *исчезающих волн* как результат активной связи между встречными модами. Подобная физическая ситуация реализуется в СВЧ противонаправленных ответвителях [27, 54].

Согласно (Г.9.35), ширина, $\Delta\omega \equiv \omega_2^\circ - \omega_1^\circ$, частотного окна равняется

$$\Delta\omega = 4|c_{12}|v_{12} = 4|c_{12}|\,\frac{v_1 v_2}{v_1 \mp v_2}\,. \qquad (\text{Г.9.38})$$

Как видно из (Г.9.38), при активной связи встречных мод (нижний знак в знаменателе) полоса непропускания имеет максимальную ширину $\Delta\omega_{max} = 2|c_{12}|v$, когда $v_1 = v_2 \equiv v$. В случае попутных мод частотный диапазон конвективной неустойчивости (верхний знак в знаменателе) становится бесконечным, так как $\Delta\omega \to \infty$ при $v_1 \to v_2$.

Подводя итог вышеизложенному, отметим, что характер дисперсионных зависимостей на рис. Г.2 *а*, *б* и Г.3 *а*, *б* соответствует так называемым *правилам Стэррока* [55], разработанным в электродинамике плазмы для установления критериев пропускания и непропускания волн (рис. Г.2 *а* и Г.3 *б*), а также абсолютной и конвективной неустойчивости (рис. Г.2 *б* и Г.3 *а*).

Пропускание волн (рис. Г.2 *а*) соответствует устойчивому распространению нормальных волн в окрестности частоты $\omega = \omega_0$ точного фазового синхронизма, где $\beta_1(\omega_0) = \beta_2(\omega_0)$. В отличие от этого, *непропускание* (рис. Г.3 *б*) имеет место лишь в ограниченной полосе частот $\Delta\omega$ вокруг ω_0, где существуют так называемые исчезающие волны, за пределами которой непропускание сменяется пропусканием. Последовательное чередование полос пропускания и непропускания (называемых в оптике полосами прозрачности и непрозрачности) является характерным признаком периодических волноведущих структур.

Неустойчивость (абсолютная и конвективная) может возникать лишь в системах с дрейфующими носителями заряда, физическая особенность которых обеспечивает усиление сигнала. Это проявляется на дисперсионных кривых (рис. Г.2 *б* и Г.3 *а*) как наличие окна $(\beta_1^\circ, \beta_2^\circ)$ на вещественной оси волновых чисел, внутри которого частота принимает комплексные значения $\omega_{1,2} = \omega' \pm i\omega''$. Нарастающая во времени экспонента $\exp(|\omega''|t)$ обеспечивает

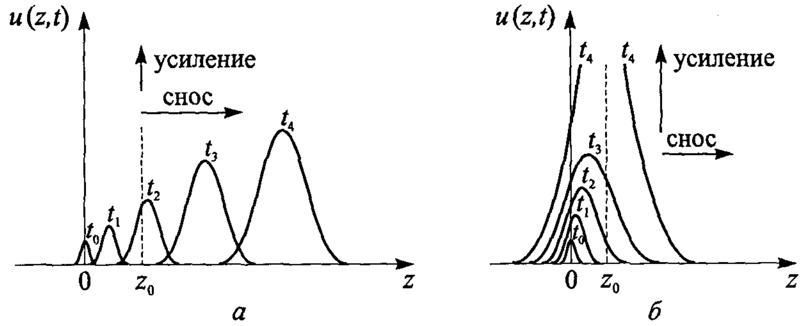


Рис. Г.4. К объяснению асимптотического поведения возмущения $u(z,t)$ в системе с *конвективной* неустойчивостью (*а*) и с *абсолютной* неустойчивостью (*б*)

самопроизвольное усиление возмущения, приводящее к неустойчивости системы. Характер неустойчивости (абсолютной или конвективной) определяется конкуренцией между двумя процессами — между *усилением сигнала по амплитуде* и его *продольным сносом* за счет дрейфа носителей заряда.

Физическая ситуация для потенциально неустойчивых систем качественно отображена на рис. Г.4. Здесь показано асимптотическое (при $t \to \infty$) поведение возмущения в форме волнового пакета $u(z,t)$, возникающего в момент времени $t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < \ldots$

В системе с *конвективной неустойчивостью* (рис. Г.4 *а*) *снос возмущения в продольном направлении* преобладает над его амплитудным усилением во времени. В результате этого при $t \to \infty$ сигнал в любом фиксированном сечении $z_0 = \text{const}$ стремится к нулю:

$$\lim_{t\to\infty} u(z_0, t) = 0.$$

Это обеспечивает устойчивое пространственное усиление сигнала, нарастающего по амплитуде в направлении дрейфового сноса, что характерно для работы ЛБВ.

В системе с *абсолютной неустойчивостью* (рис. Г.4 *б*) наблюдается прямо противоположная физическая картина: усиление преобладает над сносом. В результате этого возмущение неограниченно возрастает при фиксированном z_0 и $t \to \infty$:

$$\lim_{t\to\infty} u(z_0, t) = \infty.$$

Именно такая ситуация соответствует истинно неустойчивой системе, способной к самовозбуждению и генерации когерентного сигнала, что характерно для работы ЛОВ.

В физической литературе (см., например, [51, 52, 55, 56]) разработаны различные критерии пропускания и непропускания волн, а также конвективной и абсолютной неустойчивости, основанные только на анализе корней дисперсионного уравнения *без решения* краевой задачи о вводе сигнала в систему.

В отличие от этого, теория связанных волн позволяет строго решить задачу о волновых взаимодействиях, используя исследованные выше дисперсионные свойства нормальных мод, отраженные в формулах (Г.9.23)–(Г.9.24) для пассивной связи и (Г.9.26)–(Г.9.27) для активной связи. Конечным результатом теории является выяснение характера энергообмена при взаимодействии попутных и встречных мод. Для этого необходимо найти пространственное распределение волновых амплитуд $a_1(z)$ и $a_2(z)$, исходя из выражений (Г.9.19) и (Г.9.20), записанных для $\overline{a}_1(z)$ и $\overline{a}_2(z)$.

Используя связь между вышеуказанными амплитудами в форме (Г.9.11)–(Г.9.12), можно получить

$$\begin{aligned} a_1(z;\omega_1) &= \overline{a}_1(z;\omega_1)\, e^{-i\beta_p z/2} = \\ &= A_{11} e^{-(\Gamma_1 + i\beta_p/2)z} - \frac{\Gamma_2 - i\overline{\beta}_2}{\widehat{c}_{21}} A_{22}\, e^{-(\Gamma_2 + i\beta_p/2)z}, \end{aligned} \qquad (Г.9.39)$$

$$\begin{aligned} a_2(z;\omega_2) &= \overline{a}_2(z;\omega_2)\, e^{i\beta_p z/2} = \\ &= -\frac{\Gamma_1 - i\overline{\beta}_1}{\widehat{c}_{12}} A_{11} e^{-(\Gamma_1 - i\beta_p/2)z} + A_{22}\, e^{-(\Gamma_2 - i\beta_p/2)z}. \end{aligned} \qquad (Г.9.40)$$

Константы A_{11} и A_{22}, входящие в (Г.9.39) и (Г.9.40), находятся из краевых условий (Г.6.11) и (Г.6.12), наложенных на входные амплитуды мод на левом ($z = 0$) или правом ($z = L$) конце области межмодовой связи.

Без потери общности будем считать моду a_1 прямой с положительной групповой скоростью ($v_{\mathrm{gr},1} > 0$). Поэтому для нее входным концом является сечение $z = 0$, где краевое условие (Г.6.11) задает

$$a_1(0;\omega_1) \neq 0 \quad \text{или} \quad a_1(0;\omega_1) = 0. \qquad (Г.9.41)$$

Мода a_2 может быть либо прямой ($v_{\mathrm{gr},2} > 0$), либо обратной ($v_{\mathrm{gr},2} < 0$). Тогда в первом случае краевое условие (Г.6.11) при $z = 0$ задает

$$a_2(0;\omega_2) \neq 0 \quad \text{или} \quad a_2(0;\omega_2) = 0, \qquad (Г.9.42)$$

а во втором случае из краевого условия (Г.6.12) при $z = L$ следует, что

$$a_2(L;\omega_2) \neq 0 \quad \text{или} \quad a_2(L;\omega_2) = 0. \qquad (Г.9.43)$$

В дальнейшем при выводе выражений для волновых амплитуд $a_1(z;\omega_1)$ и $a_2(z;\omega_2)$ будем использовать краевые условия (Г.9.41)–(Г.9.43) с ненулевыми входными амплитудами. Именно такой вывод приведен в математическом дополнении к приложению Г (см. с. 457–464).

Однако при расчете продольного распределения мощностей $P_1(z;\omega_1)$ и $P_2(z;\omega_2)$, переносимых модами, будем считать, что входная мощность вводится только в моду a_1. Тогда мода a_2 возбуждается в результате связи с первичной модой a_1, имея нулевую входную амплитуду в соответствии с краевыми условиями (Г.9.42) или (Г.9.43).

Краевые условия (Г.9.41)–(Г.9.43), взятые попарно — условия (Г.9.41) и (Г.9.42) для попутных мод и условия (Г.9.41) и (Г.9.43) для встречных мод, в комбинации с двумя случаями пассивной и активной связи приводят к следующим четырем режимам модальной связи:

- ***переизлучение попутных мод*** как результат их пассивной связи,
- ***переизлучение встречных мод*** как результат их активной связи,

- ***усиление попутных мод*** как результат их активной связи,
- ***усиление встречных мод*** как результат их пассивной связи.

Эти режимы характеризуются специфическими распределениями волновых амплитуд и мощностей вдоль области связи. Реализация того или иного режима всецело определяется комбинацией свойств невозмущенных мод, таких как направление групповой скорости, фактор направленности и знак частоты (для параметрической связи). Эти режимы полностью соответствуют четырем типам дисперсионных кривых на рис. Г.2 и Г.3, которые изображены для частного случая однородной связи мод.

В нижеследующих параграфах будем анализировать четыре режима парного взаимодействия мод для наиболее общего случая параметрической связи. Полученные результаты применимы также для частных случаев периодической связи (при $\omega_p = 0$ и $\beta_p = K$) и однородной связи (при $\omega_p = 0$ и $\beta_p = 0$).

Г.10. Режим переизлучения попутных мод

Это режим пассивной связи, реализуемый при взаимодействии попутных мод, удовлетворяющих закону сохранения мощности в форме (Г.9.22). Для частного случая однородной связи он характеризуется дисперсионными кривыми, изображенными на рис. Г.2 *а*. Продольное распределение волновых амплитуд двух пассивно связанных попутных мод получено в математическом дополнении (см. с. 457–464) в виде уравнений (М.18) и (М.19), *а именно*

$$a_1(z;\omega_1) = \left[a_1(0;\omega_1)\left(\cos\beta_c z - i\frac{\Delta\beta_{12}}{2\beta_c}\sin\beta_c z\right) + \right.$$
$$\left. + \, a_2(0;\omega_2)\,\frac{\widehat{c}_{12}}{\beta_c}\sin\beta_c z\right] e^{-i(\beta_0+\beta_p/2)z}, \qquad (\text{Г}.10.1)$$

$$a_2(z;\omega_2) = \left[a_2(0;\omega_2)\left(\cos\beta_c z + i\frac{\Delta\beta_{12}}{2\beta_c}\sin\beta_c z\right) + \right.$$
$$\left. + \, a_1(0;\omega_1)\,\frac{\widehat{c}_{21}}{\beta_c}\sin\beta_c z\right] e^{-i(\beta_0-\beta_p/2)z}. \qquad (\text{Г}.10.2)$$

где величины $\Delta\beta_{12}$, β_0 и β_c определены в виде (Г.9.13), (Г.9.14) и (Г.9.24).

Мощности, переносимые модами a_1 и a_2, вычисляются на основе (Г.9.5) и (Г.10.1)–(Г.10.2) с упрощающим предположением $a_2(0;\omega_2) = 0$:

$$P_1(z;\omega_1) \equiv p_1|\omega_1|\,|a_1(z;\omega_1)|^2 = \left(1 - F_{pas}\sin^2\!\beta_c z\right)P_1(0;\omega_1), \qquad (\text{Г}.10.3)$$

$$P_2(z;\omega_2) \equiv p_2|\omega_2|\,|a_2(z;\omega_2)|^2 = \frac{p_2}{p_1}\frac{|\omega_2|}{|\omega_1|}\left(F_{pas}\sin^2\!\beta_c z\right)P_1(0;\omega_1) =$$
$$= \frac{\omega_2}{\omega_1}\left(F_{pas}\sin^2\!\beta_c z\right)P_1(0;\omega_1), \qquad (\text{Г}.10.4)$$

где входная мощность, вводимая в систему на моде a_1, равняется

$$P_1(0;\omega_1) = p_1|\omega_1|\,|a_1(0;\omega_1)|^2. \qquad (\text{Г}.10.5)$$

В последнем равенстве (Г.10.4) введен знак частоты $q_k = \omega_k/|\omega_k|$ $(k=1,2)$ и использовано соотношение

$$r_1 \equiv q_1 p_1 = q_2 p_2 \equiv r_2, \tag{Г.10.6}$$

справедливое при пассивной связи мод.

Величину F_{pas}, введенную в выражениях (Г.10.3) и (Г.10.4) в форме

$$F_{pas} = \frac{1}{1+\Delta_{12}^2}, \tag{Г.10.7}$$

назовем *фактором пассивной связи* мод. Зависимость фактора F_{pas} от параметра фазового рассогласования Δ_{12} в форме (Г.9.1) показана на рис. Г.5. Следовательно, значения F_{pas} не превышают единицы и только при условии точного согласования фазовых скоростей, когда $\Delta\beta_{12} \equiv \overline{\beta}_1(\omega_1) - \overline{\beta}_2(\omega_2) = 0$, имеем $F_{pas} = 1$.

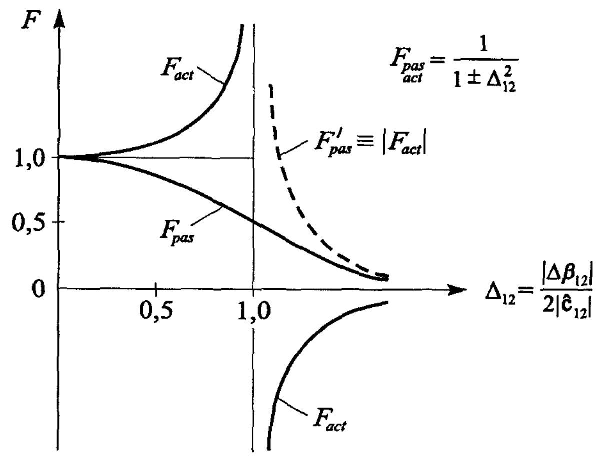


Рис. Г.5. Зависимость факторов пассивной (F_{pas}) и активной (F_{act}) связи мод от параметра фазового рассогласования $\Delta_{12} = |\Delta\beta_{12}|/2|\widehat{c}_{12}|$. Пунктирная кривая F'_{pas} соответствует квазипассивной связи, получающейся из активной связи при сверхкритическом рассогласовании, когда $\Delta_{12} > 1$

Модальные мощности в форме (Г.10.3) и (Г.10.4) удовлетворяют соотношению Мэнли–Роу (Г.9.7), которое в данном случае принимает вид

$$\frac{P_1(z;\omega_1)}{\omega_1} + \frac{P_2(z;\omega_2)}{\omega_2} = \frac{P_1(0;\omega_1)}{\omega_1} = \text{const}. \tag{Г.10.8}$$

Согласно (Г.10.6), знаки частот q_1 и q_2 задают жесткое соотношение между факторами направленности p_1 и p_2. Последние, как следует из (Г.4.4), определяют знаки мощности $P_k = v_{\text{gr},k} W_k$ $(k = 1,2)$, переносимой модами в положительном направлении оси z. Поскольку в рассматриваемом режиме обе групповые скорости $v_{\text{gr},k}$ положительны, то значения фактора направленности $p_k = \pm 1$ (т. е. знак $P_k > 0$ или < 0) однозначно определяется знаком средней энергии W_k, запасенной сигнальной модой $(k = 1)$ или холостой модой $(k = 2)$.

Низкочастотная накачка (при $\omega_1 \equiv \omega > 0$ и $\omega_2 \equiv \omega - \omega_p > 0$, т. е. при $q_1 = q_2 = +1$) обеспечивает, согласно (Г.10.6), переносимые мощности $P_1(z;\omega_1)$ и $P_2(z;\omega_2)$ *одного знака*. Следовательно, при $p_1 = p_2 = +1$ каждая мода запасает положительную энергию ($W_1 > 0$ и $W_2 > 0$), а при $p_1 = p_2 = -1$ — отрицательную энергию ($W_1 < 0$ и $W_2 < 0$). Последнее возможно только для медленных волн дрейфовых потоков носителей заряда (таких как медленные волны пространственного заряда, медленные циклотронные, синхронные и геликонные волны [27, 51, 52, 57, 59]). Вышесказанное справедливо также при однородной и периодической связи, когда $\omega_p = 0$ и $\omega_1 = \omega_2 \equiv \omega > 0$.

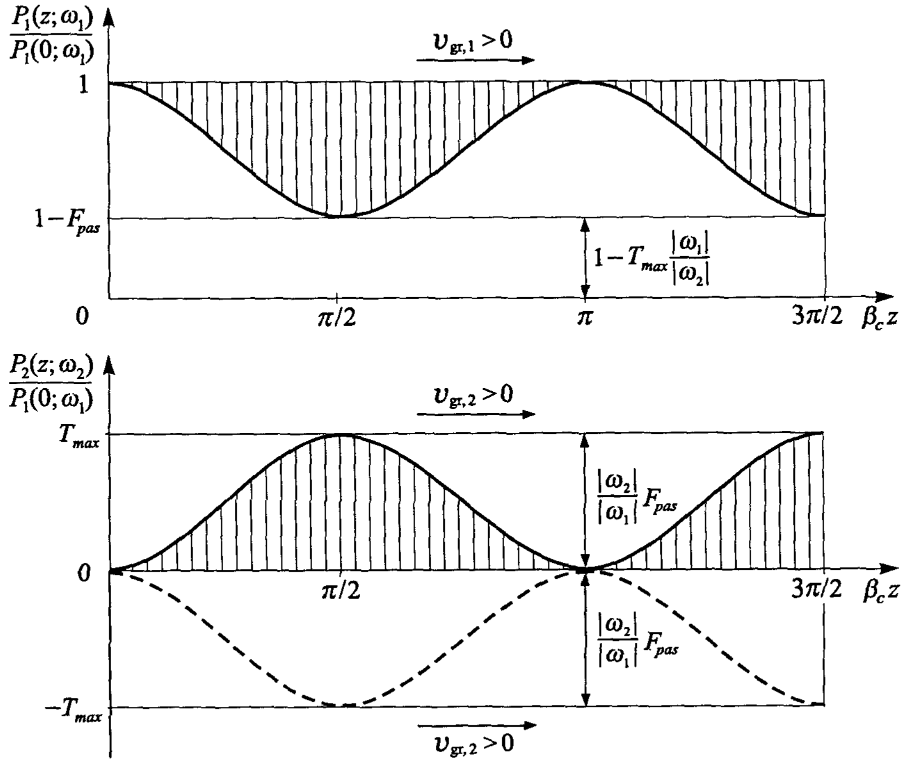


Рис. Г.6. Пространственное распределение мощностей $P_1(z;\omega_1)$ и $P_2(z;\omega_2)$ (отнесенных к входной мощности $P_1(0;\omega_1)$), переносимых *попутными модами* a_1 и a_2 при *пассивной связи*. Сплошная и пунктирная кривые на нижнем рисунке соответствуют низкочастотной накачке (при $\omega_p < \omega \equiv \omega_1$, включая $\omega_p = 0$) и высокочастотной накачке (при $\omega_p > \omega \equiv \omega_1$). Заштрихованные площади на верхнем и нижнем рисунках равны друг другу при $\omega_p = 0$

Высокочастотная накачка (при $\omega_1 \equiv \omega > 0$ и $\omega_2 \equiv \omega - \omega_p < 0$, т. е. при $q_1 = +1$ и $q_2 = -1$) обеспечивает, согласно (Г.10.6), связь между сигнальной и холостой модами с разными факторами направленности p_1 и p_2 или с запасенными энергиями W_1 и W_2 *разных знаков*. Следовательно, одна из мод обязательно должна быть медленной волной потока носителей заряда.

Пространственное распределение мощностей (Г.10.3) и (Г.10.4) показано на рис. Г.6 в нормированном виде $P_k(z;\omega_k)/P_1(0;\omega_1)$, $k = 1, 2$.

Сплошная кривая $P_2(z;\omega_2)/P_1(0;\omega_1)$ на нижнем графике соответствует связи мод с одинаковым знаком запасенной энергии ($W_1W_2 > 0$), что характерно для низкочастотной накачки (при $\omega_p < \omega$) или для однородной и периодической связи (при $\omega_p = 0$). В случае высокочастотной накачки, когда моды запасают энергии разных знаков, аналогичная зависимость изображена *пунктирной кривой*, лежащей ниже горизонтальной оси $\beta_c z$ из-за $\omega_2 < 0$. В обоих случаях соотношение Мэнли–Роу в форме (Г.10.8) остается верным.

Как видно из рис. Г.6, пассивная связь попутных мод характеризуется *периодическим обменом* мощностью между модами с пространственным полупериодом L_c, называемым *длиной переизлучения*:

$$L_c = \frac{\pi}{2\beta_c} \equiv \frac{\pi}{2|\widehat{c}_{12}|}\sqrt{F_{pas}}\,. \tag{Г.10.9}$$

Длина переизлучения удовлетворяет соотношению $\beta_c L_c = \pi/2$ и характеризует такое расстояние от входного конца, на котором максимальная часть F_{pas} входной мощности $P_1(0;\omega_1)$, вводимой в моду a_1, переизлучается в моду a_2, а затем обратно переизлучается в моду a_1 на такой же длине L_c.

Таким образом, полное переизлучение мощности имеет место, когда моды точно согласованы по фазовым скоростям, поскольку $F_{pas} = 1$ при $\Delta_{12} = 0$. В этом случае длина переизлучения L_c максимальна при фиксированном коэффициенте связи ($|\widehat{c}_{12}| = \text{const}$). Однако как следует из (Г.10.7) и (Г.10.9), при фиксированном фазовом рассогласовании ($\Delta\beta_{12} = \text{const} \neq 0$) рост коэффициента связи $|\widehat{c}_{12}|$ уменьшает длину переизлучения L_c и увеличивает фактор связи мод F_{pas}. Однако если $|\widehat{c}_{12}| = \text{const}$, то рассогласование уменьшает как L_c, так и F_{pas} (т.е. снижает переизлучаемую мощность). В предельном случае больших рассогласований обе величины становятся настолько малыми, что картина распределения мощностей на рис. Г.6 принимает вид «слабой ряби» (не показанной на рисунке) в районе единицы для $P_1(z;\omega_1)/P_1(0;\omega_1)$ и нуля для $P_2(z;\omega_2)/P_1(0;\omega_1)$.

Передача мощности от прямой моды a_1 (с частотой ω_1) в другую прямую моду a_2 (с частотой ω_2) на произвольной длине L волноведущей структуры характеризуется *коэффициентом передачи*

$$T \equiv \frac{|P_2(L;\omega_2)|}{|P_1(0;\omega_1)|} = \frac{|\omega_2|}{|\omega_1|} F_{pas} \sin^2\beta_c L. \tag{Г.10.10}$$

Как видно из (Г.10.10), коэффициент передачи достигает максимального значения $T_{max} = |\omega_2/\omega_1| F_{pas}$ на длине переизлучения L_c, равной (Г.10.9). Следовательно, в случае одночастотных систем (без параметрических эффектов, когда $\omega_1 = \omega_2 \equiv \omega$), имеем $T_{max} = F_{pas} \leqslant 1$. В соответствии с законом сохранения энергии, максимальная мощность $P_2(L_c) = T_{max}P_1(0)$, получаемая возбуждаемой модой a_2, равняется мощности $F_{pas}P_1(0) \leqslant P_1(0)$, отдаваемой входной модой a_1.

В отличие от этого, параметрические системы допускают периодический обмен мощностью между связанными модами с одновременным усилением. Как видно из (Г.10.10), при условии $|\omega_2| > |\omega_1|$ максимальный коэффициент передачи становится больше единицы ($T_{max} \equiv G > 1$). Такая ситуация характерна для преобразователей частоты вверх (англ. *up-converters*), при этом дополнительная мощность поставляется в возбуждаемую моду a_2 от источника накачки. В преобразователях частоты вниз (англ. *down-converters*), в которых $|\omega_2| < |\omega_1|$, часть мощности, отбираемой от входной моды a_1, потребляется накачкой, а оставшаяся часть переизлучается в возбуждаемую моду a_2, обеспечивая $T_{max} < F_{pas} \leqslant 1$.

Режим пассивной связи попутных мод, приводящий к периодическому переизлучению мощности, лежит в основе работы следующих устройств:

1. Направленные ответвители СВЧ, работающие на использовании однородной и периодической связи между модами на одной и той же частоте, а также оптические ответвители и преобразователи мод [27–29, 37, 38, 54, 58].

2. Элементы возбуждения быстрых волн в электроннолучевых параметрических СВЧ усилителях [27, 28, 57, 59].

3. Параметрические преобразователи частоты вниз и вверх, последние с усилением по мощности [27, 28, 59].

4. Элементы обесшумливания быстрых волн в вакуумных электронных потоках [27, 28, 59].

Г.11. Режим переизлучения встречных мод

Это режим активной связи, реализуемый при взаимодействии встречных мод (прямой и обратной), удовлетворяющих закону сохранения мощности в форме (Г.9.25). Для частного случая однородной связи он характеризуется дисперсионными кривыми, изображенными на рис. Г.3 *б*.

Продольное распределение волновых амплитуд двух активно связанных встречных мод получено в математическом дополнении (см. с. 457–464) в виде уравнений (М.38) и (М.39), а именно

$$a_1(z;\omega_1) = \Big[a_1'(0;\omega_1)\Big(\operatorname{ch}\alpha_c(L-z) + i\frac{\Delta\beta_{12}}{2\alpha_c}\operatorname{sh}\alpha_c(L-z)\Big) + \\ + a_2'(L;\omega_2)\,\frac{\widehat{c}_{12}}{\alpha_c}\operatorname{sh}\alpha_c z\Big]\, e^{-i(\beta_0+\beta_p/2)z}, \qquad (\text{Г.11.1})$$

$$a_2(z;\omega_2) = \Big[a_2'(L;\omega_2)\Big(\operatorname{ch}\alpha_c z + i\frac{\Delta\beta_{12}}{2\alpha_c}\operatorname{sh}\alpha_c z\Big) - \\ - a_1'(0;\omega_1)\,\frac{\widehat{c}_{21}}{\alpha_c}\operatorname{sh}\alpha_c(L-z)\Big]\, e^{-i(\beta_0-\beta_p/2)z}, \qquad (\text{Г.11.2})$$

где величины $\Delta\beta_{12}$, β_0 и α_c определены в виде (Г.9.13), (Г.9.14) и (Г.9.27); кроме того, использованы обозначения (М.40) и (М.41):

$$a_1'(0;\omega_1) = \frac{a_1(0;\omega_1)}{\operatorname{ch}\alpha_c L + i(\Delta\beta_{12}/2\alpha_c)\operatorname{sh}\alpha_c L},$$

$$a_2'(L;\omega_2) = \frac{a_2(L;\omega_2)\,\exp\big[i(\beta_0-\beta_p/2)L\big]}{\operatorname{ch}\alpha_c L + i(\Delta\beta_{12}/2\alpha_c)\operatorname{sh}\alpha_c L}.$$

Мощности, переносимые модами a_1 и a_2, вычисляются на основе (Г.9.5) и (Г.11.1)–(Г.11.2) с упрощающим предположением $a_2(L;\omega_2) = 0$:

$$P_1(z;\omega_1) \equiv p_1|\omega_1||a_1(z;\omega_1)|^2 = \frac{1 + F_{act}\,\mathrm{sh}^2\alpha_c(L-z)}{1 + F_{act}\,\mathrm{sh}^2\alpha_c L}\,P_1(0;\omega_1), \qquad (Г.11.3)$$

$$P_2(z;\omega_2) \equiv p_2|\omega_2||a_2(z;\omega_2)|^2 = \frac{p_2}{p_1}\frac{|\omega_2|}{|\omega_1|}\,\frac{F_{act}\,\mathrm{sh}^2\alpha_c(L-z)}{1 + F_{act}\,\mathrm{sh}^2\alpha_c L}\,P_1(0;\omega_1) =$$

$$= -\frac{\omega_2}{\omega_1}\,\frac{F_{act}\,\mathrm{sh}^2\alpha_c(L-z)}{1 + F_{act}\,\mathrm{sh}^2\alpha_c L}\,P_1(0;\omega_1), \qquad (Г.11.4)$$

где входная мощность $P_1(0;\omega_1)$, подаваемая в моду a_1, определена, как и прежде, в виде (Г.10.5).

Величину F_{act}, введенную в выражениях (Г.11.3) и (Г.11.4) в форме

$$F_{act} = \frac{1}{1-\Delta_{12}^2}, \qquad (Г.11.5)$$

назовем *фактором активной связи* мод. Зависимость фактора F_{act} от параметра фазового рассогласования Δ_{12} в форме (Г.9.1) показана на рис. Г.5. Следовательно, при условии точного согласования фазовых скоростей, когда $\Delta\beta_{12} \equiv \overline{\beta}_1(\omega_1) - \overline{\beta}_2(\omega_2) = 0$, имеем $F_{act} = F_{pas} = 1$. Однако в отличие от F_{pas}, величина F_{act} возрастает с увеличением фазового рассогласования, становясь бесконечно большой при критическом рассогласовании $\Delta_{12} = 1$ и отрицательной в сверхкритическом режиме при $\Delta_{12} > 1$, т. е. вне полосы непропускания системы.

В последнем равенстве (Г.11.4) введен знак частоты $q_k = \omega_k/|\omega_k|$ $(k = 1, 2)$ и использовано соотношение

$$r_1 \equiv q_1 p_1 = -q_2 p_2 \equiv -r_2, \qquad (Г.11.6)$$

справедливое при активной связи мод.

Модальные мощности в форме (Г.11.3) и (Г.11.4) удовлетворяют соотношению Мэнли–Роу (Г.9.7), которое в данном случае принимает вид

$$\frac{P_1(z;\omega_1)}{\omega_1} + \frac{P_2(z;\omega_2)}{\omega_2} = \frac{P_1(0;\omega_1)}{\omega_1}\left(1 + F_{act}\,\mathrm{sh}^2\alpha_c L\right)^{-1} = \mathrm{const}. \qquad (Г.11.7)$$

Как и ранее, знаки частот $\omega_1 \equiv \omega$ (> 0 всегда) и $\omega_2 \equiv \omega - \omega_p$ (> 0 или < 0 в зависимости от частоты накачки $\omega_p > 0$) задают жесткое соотношение между факторами направленности p_1 и p_2, т. е. между знаками мощности $P_k = v_{\mathrm{gr},k}W_k$ $(k = 1, 2)$, переносимой в положительном направлении оси z. В отличие от предыдущего режима, встречные моды имеют противоположно направленные групповые скорости ($v_{\mathrm{gr},1} > 0$ и $v_{\mathrm{gr},2} < 0$), что обеспечивает вполне определенные знаки запасенных энергий ($W_k > 0$ или < 0, $k = 1, 2$).

Низкочастотная накачка (при $\omega_1 \equiv \omega > 0$ и $\omega_2 \equiv \omega - \omega_p > 0$, т. е. при $q_1 = q_2 = +1$), согласно (Г.11.6), обеспечивает $p_1 p_2 = -1$, т. е. переносимые мощности $P_1 = v_{\mathrm{gr},1}W_1$ и $P_2 = v_{\mathrm{gr},2}W_2$ имеют противоположные знаки. Это означает, что из-за $v_{\mathrm{gr},1} > 0$ и $v_{\mathrm{gr},2} < 0$ встречные моды запасают энергии *одного знака*: либо $W_1 > 0$ и $W_2 > 0$ при $p_1 = -p_2 = +1$, либо $W_1 < 0$ и $W_2 < 0$ при $p_1 = -p_2 = -1$. Вышесказанное справедливо также при однородной и периодической связи, когда $\omega_p = 0$ и $\omega_1 = \omega_2 \equiv \omega > 0$.

Высокочастотная накачка (при $\omega_1 \equiv \omega > 0$ и $\omega_2 \equiv \omega - \omega_p < 0$, т.е. при $q_1 = +1$ и $q_2 = -1$) обеспечивает, согласно (Г.11.6), связь между сигнальной и холостой модами с одинаковыми факторами направленности ($p_1 p_2 = +1$) или с запасенными энергиями *разных знаков*: либо $W_1 > 0$ и $W_2 < 0$ при $p_1 = p_2 = +1$, либо $W_1 < 0$ и $W_2 > 0$ при $p_1 = p_2 = -1$.

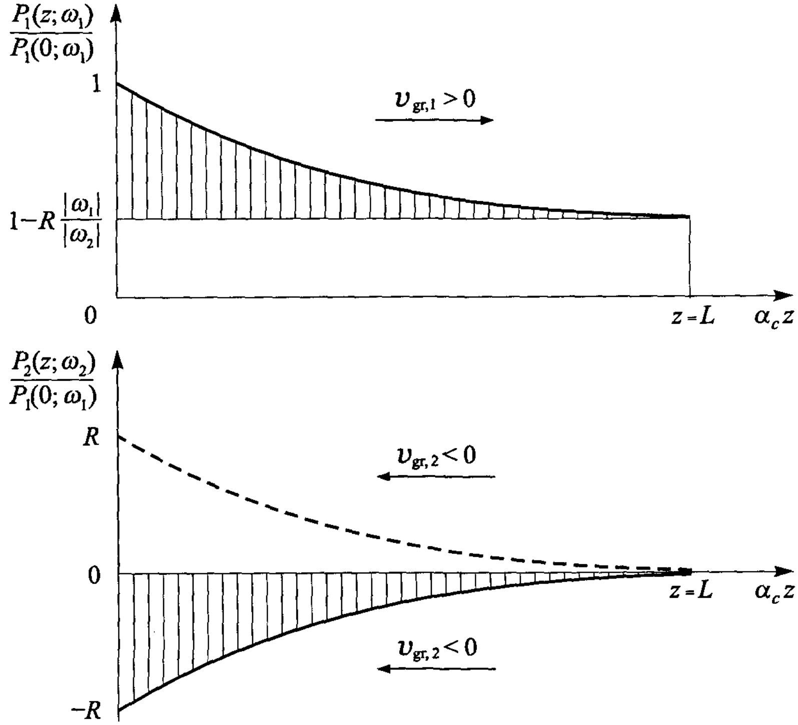


Рис. Г.7. Пространственное распределение мощностей $P_1(z;\omega_1)$ и $P_2(z;\omega_2)$ (отнесенных к входной мощности $P_1(0;\omega_1)$), переносимых *встречными модами* a_1 и a_2 при *активной связи*. Сплошная и пунктирная кривые на нижнем рисунке соответствуют низкочастотной накачке (при $\omega_p < \omega \equiv \omega_1$, включая $\omega_p = 0$) и высокочастотной накачке (при $\omega_p > \omega \equiv \omega_1$). Заштрихованные площади на верхнем и нижнем рисунках равны друг другу при $\omega_p = 0$

На рис. Г.7 показано пространственное распределение мощностей (Г.11.3) и (Г.11.4) в нормированном виде $P_k(z;\omega_k)/P_1(0;\omega_1)$, $k = 1, 2$. На нижнем графике *сплошная кривая* $P_2(z;\omega_2)/P_1(0;\omega_1)$, лежащая ниже горизонтальной оси $\alpha_c z$, соответствует случаю низкочастотной накачки ($\omega_p < \omega$) или ее отсутствию ($\omega_p = 0$), когда $W_1 W_2 > 0$ или $p_1 p_2 = -1$. *Пунктирная кривая*, лежащая выше оси $\alpha_c z$, характерна для высокочастотной накачки ($\omega_p > \omega$), когда $W_1 W_2 < 0$ или $p_1 p_2 = +1$. В обоих случаях соотношение Мэнли–Роу в форме (Г.11.7) остается справедливым.

Как видно из рис. Г.7, активная связь встречных мод характеризуется *апериодическим обменом* мощностью между модами. Входная мощность, подаваемая в прямую моду a_1, монотонно уменьшается при удалении от входа $z = 0$ из-за того, что она переизлучается в моду a_2, распространяющуюся встречно (с групповой скоростью $v_{gr,2} < 0$) в направлении к $z = 0$. Мощность $P_2(z;\omega_2)$, переносимая обратной модой, монотонно нарастает, начиная с нулевого значения при $z = L$ (вход моды a_2), до максимальной величины $|P_2(0;\omega_2)|$ при $z = 0$. Эта величина определяется нормированной длиной системы $\alpha_c L$, фактором связи мод $F_{act} = (|\widehat{c}_{12}|/\alpha_c)^2$ и отношением частот $|\omega_2|/|\omega_1|$. При фиксированной длине ($L = \text{const}$), наибольший эффект переизлучения достигается при точном согласовании фазовых скоростей, когда $\Delta_{12} = 0$, $F_{act} = 1$ и $\alpha_c = |\widehat{c}_{12}|$. Как следует из рис. Г.5, значение F_{act} увеличивается с ростом параметра фазового рассогласования Δ_{12}, но величина $\alpha_c = |\widehat{c}_{12}|/F_{act}^{1/2}$ снижается, так что результирующий эффект переизлучения мощности в целом уменьшается.

Передача мощности из прямой моды a_1 (на частоте ω_1) в обратную моду a_2 (на частоте ω_2), выходящую из системы при $z = 0$ (что рассматривается как эффект отражения от входа), характеризуется *коэффициентом отражения* на входном конце $z = 0$:

$$R \equiv \frac{|P_2(0;\omega_2)|}{|P_1(0;\omega_1)|} = \frac{|\omega_2|}{|\omega_1|}\,\frac{F_{act}\,\mathrm{sh}^2\alpha_c L}{1 + F_{act}\,\mathrm{sh}^2\alpha_c L}. \qquad (\text{Г}.11.8)$$

Как видно из (Г.11.8), коэффициент отражения достигает максимального значения $R_{max} = |\omega_2/\omega_1|\,\mathrm{th}^2|\widehat{c}_{12}|L$ при условии точного фазового согласования ($\Delta\beta_{12} = 0$), когда $F_{act} = 1$ и $\alpha_c = |\widehat{c}_{12}|$. Следовательно, для одночастотных систем (без параметрических эффектов, когда $\omega_1 = \omega_2 \equiv \omega$), имеем $R_{max} = \mathrm{th}^2\,|\widehat{c}_{12}|L \leqslant 1$ с равенством для предельного случая $L \to \infty$.

В отличие от этого, параметрические системы позволяют при $|\omega_2| > |\omega_1|$ осуществлять преобразование частоты вверх с коэффициентом усиления $G = R_{max} > 1$, что обеспечивается за счет источника накачки. При преобразовании частоты вниз, когда $|\omega_2| < |\omega_1|$, всегда имеем $R_{max} < 1$, так как часть входной мощности потребляется накачкой.

Как следует из рис. Г.7, встречное переизлучение, в отличие от попутного переизлучения, рассмотренного в предыдущем параграфе, не позволяет осуществить полную перекачку входной мощности из прямой моды в обратную для систем конечной длины. Это возможно только для полубесконечной системы ($L \to \infty$), когда выражения (Г.11.3) и (Г.11.4) принимают вид

$$P_1(z;\omega_1) = P_1(0;\omega_1)\,e^{-2\alpha_c z}, \qquad (\text{Г}.11.9)$$

$$P_2(z;\omega_2) = -\frac{\omega_2}{\omega_1}P_1(0;\omega_1)\,e^{-2\alpha_c z}, \qquad (\text{Г}.11.10)$$

а соотношение Мэнли–Роу (Г.11.7) превращается в следующее:

$$\frac{P_1(z;\omega_1)}{\omega_1} + \frac{P_2(z;\omega_2)}{\omega_2} = 0. \qquad (\text{Г}.11.11)$$

Формулы (Г.11.9)–(Г.11.11) описывают продольное распределение мощности падающей и отраженной волн внутри полубесконечной среды, которая возбуждается падающей волной со стороны границы $z = 0$ на частотах, лежащих за пределами ее полосы пропускания. В применении к периодическим структурам такой случай соответствует так называемому *брэгговскому отражению* [6, 40, 47].

В полученных выражениях (Г.11.3)–(Г.11.4) и (Г.11.9)–(Г.11.10) экспоненциальный характер продольной зависимости мощностей сохраняется только внутри частотного диапазона, который ограничен частотами ω_1^{o} и ω_2^{o}, даваемыми формулой (Г.9.35), и имеет ширину (Г.9.38), равную

$$\Delta\omega \equiv \omega_2^{\mathrm{o}} - \omega_1^{\mathrm{o}} = 4|\widehat{c}_{12}|\,\frac{v_1 v_2}{v_1 + v_2}\,. \qquad (\text{Г.11.12})$$

Частотное окно (Г.11.12) определяет *полосу непропускания*, внутри которой существуют нормальные волны связанной системы с комплексными постоянными распространения $\Gamma_{1,2}$, равными (Г.9.26). Они качественно изображены на рис. Г.3 *б* для частного случая однородной связи мод.

Границы полосы непропускания (Г.11.12) соответствуют критическому фазовому рассогласованию, при котором параметр $\Delta_{12} = 1$. Вне полосы (Г.11.12), т. е. при сверхкритическом рассогласовании, когда $\Delta_{12} > 1$, формулы (Г.9.27) и (Г.11.5) дают следующее:

$$\alpha_c = i\beta_c, \qquad \text{где} \qquad \beta_c = |\widehat{c}_{12}|\sqrt{\Delta_{12}^2 - 1} \equiv \frac{|\widehat{c}_{12}|}{\sqrt{|F_{act}|}}\,, \qquad (\text{Г.11.13})$$

$$F_{act} = -|F_{act}|, \qquad \text{где} \qquad |F_{act}| = \frac{1}{\Delta_{12}^2 - 1}\,. \qquad (\text{Г.11.14})$$

В этом случае формулы (Г.11.1)–(Г.11.4), (Г.11.7) и (Г.11.8) сохраняют свой вид при следующих заменах:

$$F_{act} \to |F_{act}|\,, \quad \alpha_c \to \beta_c, \quad \mathrm{sh} \to \sin, \quad \mathrm{ch} \to \cos\,. \qquad (\text{Г.11.15})$$

В частности, пространственное распределение мощностей (Г.11.3) и (Г.11.4), переносимых связанными модами *вне* полосы непропускания (Г.11.12), описывается следующими выражениями:

$$P_1(z;\omega_1) = \frac{1 + |F_{act}|\sin^2\beta_c(L - z)}{1 + |F_{act}|\sin^2\beta_c L}\,P_1(0;\omega_1), \qquad (\text{Г.11.16})$$

$$P_2(z;\omega_2) = -\frac{\omega_2}{\omega_1}\,\frac{|F_{act}|\sin^2\beta_c(L - z)}{1 + |F_{act}|\sin^2\beta_c L}\,P_1(0;\omega_1). \qquad (\text{Г.11.17})$$

Мощности (Г.11.16) и (Г.11.17) удовлетворяют соотношению Мэнли–Роу (Г.11.7) в модифицированной с помощью (Г.11.15) форме:

$$\frac{P_1(z;\omega_1)}{\omega_1} + \frac{P_2(z;\omega_2)}{\omega_2} = \frac{P_1(0;\omega_1)}{\omega_1}\left(1 + |F_{act}|\sin^2\beta_c L\right)^{-1} = \mathrm{const}. \qquad (\text{Г.11.18})$$

В сравнении с (Г.11.3)–(Г.11.4), выражения (Г.11.16)–(Г.11.17), соответствующие активной связи встречных мод при сверхкритическом рассогласовании, содержат вместо гиперболических функций тригонометрические, аналогично формулам (Г.10.3)–(Г.10.4) для режима пассивной связи попутных мод. По этой причине такой сверхкритический режим может быть назван *квази-*

пассивной связью, для которой фактор связи мод $F'_{pas} \equiv |F_{act}|$ показан на рис. Г.5 в виде пунктирной кривой.

В критическом режиме при $\Delta_{12} = 1$, т. е.на границах полосы непропускания (Г.11.12), имеем $\alpha_c = 0$, $|\Delta\beta_{12}| = 2|\widehat{c}_{12}|$ и $F_{act} = (|\widehat{c}_{12}|/\alpha_c)^2 \to \infty$. В этом случае формулы (Г.11.1)–(Г.11.4) содержат неопределенности типа 0/0, раскрытие которых с учетом того, что $(\operatorname{sh} x)/x \to 1$ при $x \to 0$ и $F_{act}^{1/2}\alpha_c = |\widehat{c}_{12}|$, приводит к линейной и квадратичной зависимостям от z, соответственно, в формулах (Г.11.1)–(Г.11.2) и (Г.11.3)–(Г.11.4). В частности, пространственное распределение мощностей (Г.11.3) и (Г.11.4) принимает следующий вид:

$$P_1(z;\omega_1) = \frac{1 + |\widehat{c}_{12}|^2(L-z)^2}{1 + |\widehat{c}_{12}|^2 L^2} P_1(0;\omega_1), \tag{Г.11.19}$$

$$P_2(z;\omega_2) = -\frac{\omega_2}{\omega_1}\frac{|\widehat{c}_{12}|^2(L-z)^2}{1 + |\widehat{c}_{12}|^2 L^2} P_1(0;\omega_1). \tag{Г.11.20}$$

Мощности (Г.11.19) и (Г.11.20) на границах полосы непропускания удовлетворяют соотношению Мэнли–Роу (Г.11.7) в модифицированной форме:

$$\frac{P_1(z;\omega_1)}{\omega_1} + \frac{P_2(z;\omega_2)}{\omega_2} = \frac{P_1(0;\omega_1)}{\omega_1}\left(1 + |\widehat{c}_{12}|^2 L^2\right)^{-1} = \text{const}. \tag{Г.11.21}$$

Соответствующим образом изменяется и ход кривых на рис. Г.7 путем замены квадратов гиперболических синусов в формулах (Г.11.3)–(Г.11.4): а) на квадраты тригонометрических синусов в формулах (Г.11.16)–(Г.11.17) вне полосы непропускания (Г.11.12), б) на квадратичные функции в формулах (Г.11.19)–(Г.11.20) на границах полосы непропускания.

Области практического применения режима встречного переизлучения (с монотонным характером обмена мощностью между связанными модами в полосе непропускания волноведущей структуры) аналогичны таковым для режима попутного переизлучения. Сюда относятся: противонаправленные ответвители, преобразователи мод, параметрические преобразователи частоты и шумоподавители [27–29, 37, 38, 54, 57–59]. Единственная разница между устройствами на попутных и встречных волнах состоит в том, что в последнем случае прямая мода, подаваемая на вход устройства, возбуждает не прямую, а обратную моду, переносящую мощность навстречу входной моде в направлении ко входу.

Г.12. Режим усиления попутных мод

Это режим активной связи, реализуемый при взаимодействии попутных мод, удовлетворяющих закону сохранения мощности в форме (Г.9.25). Для частного случая однородной связи он характеризуется дисперсионными кривыми, изображенными на рис. Г.3 *а*.

Продольное распределение волновых амплитуд двух активно связанных попутных мод получено в математическом дополнении (см. с. 457–464) в виде уравнений (М.21) и (М.22), а именно

$$a_1(z;\omega_1) = \left[a_1(0;\omega_1)\left(\operatorname{ch}\alpha_c z - i\frac{\Delta\beta_{12}}{2\alpha_c}\operatorname{sh}\alpha_c z\right) + \right.$$

$$\left. + \; a_2(0;\omega_2)\,\frac{\widehat{c}_{12}}{\alpha_c}\operatorname{sh}\alpha_c z\right] e^{-i(\beta_0+\beta_p/2)z}, \qquad (\text{Г.12.1})$$

$$a_2(z;\omega_2) = \left[a_2(0;\omega_2)\left(\operatorname{ch}\alpha_c z + i\frac{\Delta\beta_{12}}{2\alpha_c}\operatorname{sh}\alpha_c z\right) + \right.$$

$$\left. + \; a_1(0;\omega_1)\,\frac{\widehat{c}_{21}}{\alpha_c}\operatorname{sh}\alpha_c z\right] e^{-i(\beta_0-\beta_p/2)z}, \qquad (\text{Г.12.2})$$

где величины $\Delta\beta_{12}$, β_0 и α_c определены в виде (Г.9.13), (Г.9.14) и (Г.9.27).

Мощности, переносимые модами a_1 и a_2, вычисляются на основе (Г.9.5) и (Г.12.1)–(Г.12.2) с упрощающим предположением $a_2(0;\omega_2) = 0$:

$$P_1(z;\omega_1) \equiv p_1|\omega_1|\,|a_1(z;\omega_1)|^2 = \left(1 + F_{act}\operatorname{sh}^2\alpha_c z\right) P_1(0;\omega_1), \qquad (\text{Г.12.3})$$

$$P_2(z;\omega_2) \equiv p_2|\omega_2|\,|a_2(z;\omega_2)|^2 = \frac{p_2}{p_1}\frac{|\omega_2|}{|\omega_1|}\left(F_{act}\operatorname{sh}^2\alpha_c z\right) P_1(0;\omega_1) =$$

$$= -\frac{\omega_2}{\omega_1}\left(F_{act}\operatorname{sh}^2\alpha_c z\right) P_1(0;\omega_1), \qquad (\text{Г.12.4})$$

где входная мощность $P_1(0;\omega_1)$, подаваемая в моду a_1, и фактор F_{act} активной связи мод определены в виде (Г.10.5) и (Г.11.5). В последнем равенстве (Г.12.4) введен знак частоты $q_k = \omega_k/|\omega_k|$ $(k = 1, 2)$ и использовано соотношение (Г.11.6) для активной связи мод.

Модальные мощности в форме (Г.12.3) и (Г.12.4) удовлетворяют соотношению Мэнли–Роу (Г.9.7), которое в данном случае принимает вид

$$\frac{P_1(z;\omega_1)}{\omega_1} + \frac{P_2(z;\omega_2)}{\omega_2} = \frac{P_1(0;\omega_1)}{\omega_1} = \text{const}. \qquad (\text{Г.12.5})$$

Как и в предыдущих режимах, знаки сигнальной ($\omega_1 \equiv \omega > 0$) и холостой ($\omega_2 \equiv \omega - \omega_p > 0$ или < 0) частот жестко определяют знаки энергетических характеристик взаимодействующих мод. Поскольку обе моды являются прямыми с $v_{\text{gr},k} > 0$ $(k = 1, 2)$, то знак мощности $P_k = v_{\text{gr},k}W_k$, переносимой в положительном направлении оси z, определяется знаком запасенной энергии $W_k > 0$ или < 0.

Низкочастотная накачка (при $\omega_1 \equiv \omega > 0$ и $\omega_2 \equiv \omega - \omega_p > 0$, т. е. при $q_1 = q_2 = +1$), согласно (Г.11.6), обеспечивает $p_1p_2 = -1$, т. е. переносимые мощности $P_1 = v_{\text{gr},1}W_1$ и $P_2 = v_{\text{gr},2}W_2$ имеют противоположные знаки. Это означает, что попутные моды запасают энергии *разных знаков*: либо $W_1 > 0$ и $W_2 < 0$ при $p_1 = -p_2 = +1$, либо $W_1 < 0$ и $W_2 > 0$ при $p_1 = -p_2 = -1$. Вышесказанное справедливо также при однородной и периодической связи, когда $\omega_p = 0$ и $\omega_1 = \omega_2 \equiv \omega > 0$.

Высокочастотная накачка (при $\omega_1 \equiv \omega > 0$ и $\omega_2 \equiv \omega - \omega_p < 0$, т. е. при $q_1 = +1$ и $q_2 = -1$) обеспечивает, согласно (Г.11.6), связь между сигнальной и холостой модами с одинаковыми факторами направленности ($p_1 p_2 = +1$) или с запасенными энергиями *одного знака*: либо $W_1 > 0$ и $W_2 > 0$ при $p_1 = p_2 = +1$, либо $W_1 < 0$ и $W_2 < 0$ при $p_1 = p_2 = -1$.

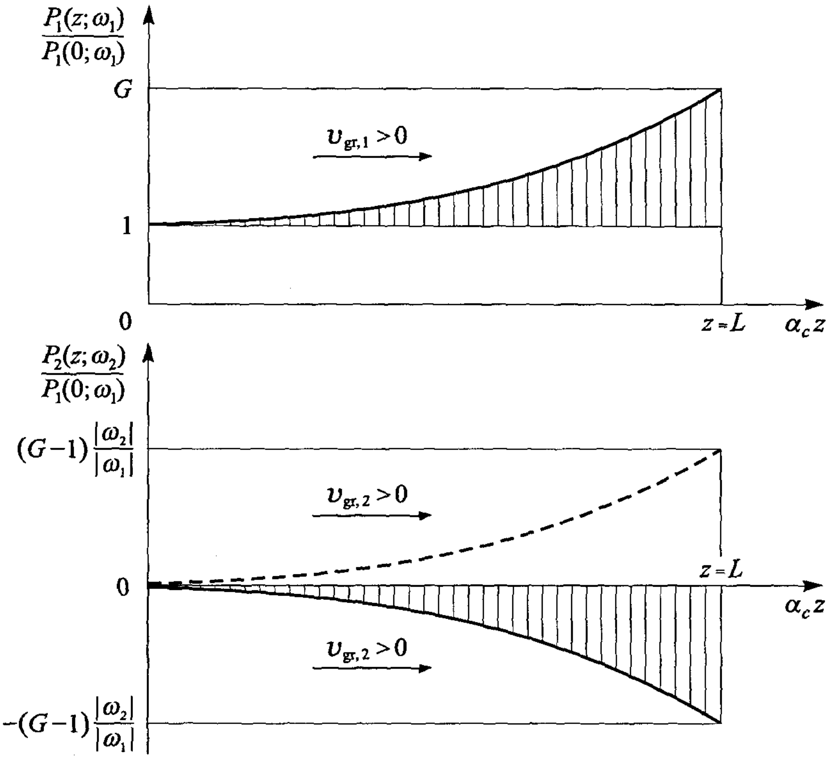


Рис. Г.8. Пространственное распределение мощностей $P_1(z;\omega_1)$ и $P_2(z;\omega_2)$ (отнесенных к входной мощности $P_1(0;\omega_1)$), переносимых *попутными модами* a_1 и a_2 при *активной связи*. Сплошная и пунктирная кривые на нижнем рисунке соответствуют низкочастотной накачке (при $\omega_p < \omega \equiv \omega_1$, включая $\omega_p = 0$) и высокочастотной накачке (при $\omega_p > \omega \equiv \omega_1$). Заштрихованные площади на верхнем и нижнем рисунках равны друг другу при $\omega_p = 0$

Пространственное распределение мощностей (Г.12.3) и (Г.12.4) изображено на рис. Г.8 в нормированном виде $P_k(z;\omega_k)/P_1(0;\omega_1)$, $k = 1, 2$. Верхняя кривая $P_1(z;\omega_1)/P_1(0;\omega_1)$ показывает, что в этом режиме связи реализуется истинное усиление входного сигнала. Действительно, мощность $P_1(0;\omega_1)$, подаваемая в прямую моду a_1, экспоненциально нарастает в направлении групповой скорости этой моды. Механизм такого усиления различен для случаев, изображенных сплошной и пунктирной кривыми на нижнем графике.

Сплошная кривая $P_2(z;\omega_2)/P_1(0;\omega_1)$, лежащая ниже горизонтальной оси $\alpha_c z$, соответствует модам с разным знаком запасенной энергии ($W_1 W_2 < 0$ или $p_1 p_2 = -1$ в силу $v_{gr,1} v_{gr,2} > 0$), что характерно для низкочастотной накачки (при $\omega_p < \omega$) или для однородной и периодической связи (при $\omega_p = 0$). В этом случае входной сигнал, вводимый при $z = 0$ в прямую моду a_1 с энергией $W_1 > 0$, возбуждает другую прямую моду a_2 с энергией $W_2 < 0$. Последняя может быть лишь *медленной волной* дрейфового потока носителей заряда [27, 51, 52, 57, 59]. Применительно к вакуумной электронике мода a_1 с $W_1 > 0$ соответствует электромагнитной волне в замедляющей системе (ЗС), бегущей со скоростью, близкой к скорости дрейфа электронов. В электронном потоке существует медленная волна пространственного заряда (ВПЗ), играющая роль моды a_2 с $W_2 < 0$. Возбуждение медленной волны означает замедление электронов, в результате чего их кинетическая энергия превращается в энергию электромагнитной волны в ЗС, обеспечивая ее усиление. Именно такой механизм усиления лежит в основе работы лампы бегущей волны (ЛБВ) [27, 57, 59] в отсутствие параметрических эффектов ($\omega_p = 0$). В этом случае выполняется закон сохранения мощности (Г.12.5) при $\omega_1 = \omega_2 \equiv \omega > 0$.

Пунктирная кривая $P_2(z;\omega_2)/P_1(0;\omega_1)$, лежащая выше горизонтальной оси $\alpha_c z$, соответствует высокочастотной накачке, при которой имеется связь между попутными модами, запасающими энергии одного знака ($W_1 W_2 > 0$ или $p_1 p_2 = +1$ в силу того, что $v_{\text{gr},1} v_{\text{gr},2} > 0$). Такими модами могут быть либо электромагнитные волны в линии передачи, либо быстрые волны электронного потока, например, быстрые ВПЗ. Их взаимодействие лежит в основе работы параметрического усилителя бегущей волны [27, 57, 59]. Экспоненциальное пространственное нарастание параметрически взаимодействующих волн происходит за счет энергии источника накачки, в соответствии с соотношением Мэнли–Роу в форме (Г.12.5).

Коэффициент усиления входного сигнала на частоте ω_1, получаемый при длине области взаимодействия L, определен в виде

$$G \equiv \frac{P_1(L;\omega_1)}{P_1(0;\omega_1)} = 1 + F_{act}\,\mathrm{sh}^2 \alpha_c L. \qquad (\text{Г.12.6})$$

При достаточно большой длине L, такой, что $\alpha_c L \gg 1$, коэффициент усиления (Г.12.6) можно приближенно записать в децибелах:

$$G(\text{дБ}) \equiv 10 \lg \frac{P_1(L;\omega_1)}{P_1(0;\omega_1)} \simeq 8.68\,\alpha_c L + 10 \lg F_{act} - 6. \qquad (\text{Г.12.7})$$

Максимальное усиление достигается при условии точного согласования фазовых скоростей, когда $\Delta\beta_{12} = 0$, $\alpha_c = |\widehat{c}_{12}|$ и $F_{act} = 1$. Это имеет место на центральной частоте ω_0 полосы усиления $\Delta\omega$, показанной на рис. Г.3 *а*. При фазовом рассогласовании фактор F_{act} активной связи мод возрастает, но величина $\alpha_c = |\widehat{c}_{12}|/F_{act}^{1/2}$ уменьшается, что определяет результирующее снижение коэффициента усиления (Г.12.7).

Все вышесказанное справедливо только внутри частотного диапазона экспоненциального усиления, даваемого формулой (Г.9.38) в виде

$$\Delta\omega = 4|\widehat{c}_{12}|\,\frac{v_1 v_2}{v_1 - v_2}. \qquad (\text{Г.12.8})$$

Область частот (Г.12.8) определяет *полосу усиления* волноведущей структуры, внутри которой нормальные волны связанной системы имеют комплексные постоянные распространения $\Gamma_{1,2}$, равные (Г.9.26) и изображенные на рис. Г.3 *а* для частного случая прямой связи мод.

Вне полосы усиления (Г.12.8) при сверхкритическом рассогласовании, когда $\Delta_{12} > 1$, справедливы соотношения (Г.11.13) и (Г.11.14). В этом случае формулы (Г.12.1)–(Г.12.4) и (Г.12.6) сохраняют свою форму при замене соответствующих величин, согласно правилам (Г.11.15). В частности, пространственное распределение мощностей (Г.12.3) и (Г.12.4) описывается следующими выражениями:

$$P_1(z;\omega_1) = \left(1 + |F_{act}|\sin^2\beta_c z\right) P_1(0;\omega_1), \tag{Г.12.9}$$

$$P_2(z;\omega_2) = -\frac{\omega_2}{\omega_1}\left(|F_{act}|\sin^2\beta_c z\right) P_1(0;\omega_1). \tag{Г.12.10}$$

Соответствующим образом изменяется и ход кривых на рис. Г.8, так как теперь они описываются квадратами тригонометрических синусов вместо квадратов гиперболических синусов в формулах (Г.12.3) и (Г.12.4). Тем не менее, и в этом случае возможно пространственное нарастание входной моды, только теперь экспоненциальное усиление в форме (Г.12.6) сменяется на периодический режим с коэффициентом усиления,

$$G = 1 + |F_{act}|\sin^2\beta_c L, \tag{Г.12.11}$$

который достигает максимального значения, $G_{max} = 1 + |F_{act}|$, на длине

$$L_{max} = \frac{\pi}{2\beta_c} = \frac{\pi}{2|\widehat{c}_{12}|\sqrt{\Delta_{12}^2 - 1}} \equiv \frac{\pi}{2|\widehat{c}_{12}|}\sqrt{|F_{act}|}. \tag{Г.12.12}$$

В критическом режиме, когда $\Delta_{12} = 1$, имеем $\alpha_c = 0$, $|\Delta\beta_{12}| = 2|\widehat{c}_{12}|$ и $F_{act} = (|\widehat{c}_{12}|/\alpha_c)^2 \to \infty$. Такая ситуация полностью аналогична той, что имела место в предыдущем режиме встречного переизлучения при критическом рассогласовании. Раскрытие неопределенностей типа 0/0, появляющихся в выражениях (Г.12.1)–(Г.12.2) и (Г.12.3)–(Г.12.4), приводит их, соответственно, к линейной и квадратичной зависимостям от z. В частности, пространственное распределение мощностей (Г.12.3) и (Г.12.4) принимает следующий вид:

$$P_1(z;\omega_1) = \left(1 + |\widehat{c}_{12}|^2 z^2\right) P_1(0;\omega_1), \tag{Г.12.13}$$

$$P_2(z;\omega_2) = -\frac{\omega_2}{\omega_1}\left(|\widehat{c}_{12}|z\right)^2 P_1(0;\omega_1). \tag{Г.12.14}$$

Следовательно, на границах между полосами экспоненциального и периодического усиления кривые на рис. Г.8, описываемые теперь формулами (Г.12.13) и (Г.12.14), имеют квадратичный характер, обеспечивая параболический коэффициент усиления

$$G = 1 + |\widehat{c}_{12}|^2 L^2. \tag{Г.12.15}$$

Во всех режимах усиления соотношение Мэнли–Роу сохраняет единую форму (Г.12.5).

Режимы периодического и параболического усиления не нашли практического применения, в то время как экспоненциальный режим усиления используется в лампе бегущей волны и в параметрических усилителях для усиления СВЧ сигналов [27, 57, 59].

Г.13. Режим усиления (генерации) встречных мод

Это режим пассивной связи, реализуемый при взаимодействии встречных мод (прямой и обратной), удовлетворяющих закону сохранения мощности в форме (Г.9.22). Для частного случая однородной связи он характеризуется дисперсионными кривыми, изображенными на рис. Г.2 *б*.

Продольное распределение волновых амплитуд двух пассивно связанных встречных мод получено в математическом дополнении (см. с. 457–464) в виде уравнений (М.34) и (М.35), а именно

$$a_1(z;\omega_1) = \left[a_1'(0;\omega_1)\left(\cos\beta_c(L-z) + i\frac{\Delta\beta_{12}}{2\beta_c}\sin\beta_c(L-z)\right) + \right.$$
$$\left. + \, a_2'(L;\omega_2)\,\frac{\widehat{c}_{12}}{\beta_c}\sin\beta_c z\right] e^{-i(\beta_0+\beta_p/2)z}, \qquad (\text{Г}.13.1)$$

$$a_2(z;\omega_2) = \left[a_2'(L;\omega_2)\left(\cos\beta_c z + i\frac{\Delta\beta_{12}}{2\beta_c}\sin\beta_c z\right) - \right.$$
$$\left. - \, a_1'(0;\omega_1)\,\frac{\widehat{c}_{21}}{\beta_c}\sin\beta_c(L-z)\right] e^{-i(\beta_0-\beta_p/2)z}, \qquad (\text{Г}.13.2)$$

где величины $\Delta\beta_{12}$, β_0 и β_c определены в виде (Г.9.13), (Г.9.14) и (Г.9.24); кроме того, использованы обозначения (М.36) и (М.37):

$$a_1'(0;\omega_1) = \frac{a_1(0;\omega_1)}{\cos\beta_c L + i(\Delta\beta_{12}/2\beta_c)\sin\beta_c L},$$

$$a_2'(L;\omega_2) = \frac{a_2(L;\omega_2)\,\exp\left[i(\beta_0-\beta_p/2)L\right]}{\cos\beta_c L + i(\Delta\beta_{12}/2\beta_c)\sin\beta_c L}.$$

Мощности, переносимые модами a_1 и a_2, вычисляются на основе (Г.9.5) и (Г.13.1)–(Г.13.2) с упрощающим предположением $a_2(L;\omega_2) = 0$:

$$P_1(z;\omega_1) \equiv p_1|\omega_1|\,|a_1(z;\omega_1)|^2 = \frac{1 - F_{pas}\sin^2\beta_c(L-z)}{1 - F_{pas}\sin^2\beta_c L}\,P_1(0;\omega_1), \qquad (\text{Г}.13.3)$$

$$P_2(z;\omega_2) \equiv p_2|\omega_2|\,|a_2(z;\omega_2)|^2 = \frac{p_2}{p_1}\frac{|\omega_2|}{|\omega_1|}\,\frac{F_{pas}\sin^2\beta_c(L-z)}{1 - F_{pas}\sin^2\beta_c L}\,P_1(0;\omega_1) =$$
$$= \frac{\omega_2}{\omega_1}\,\frac{F_{pas}\sin^2\beta_c(L-z)}{1 - F_{pas}\sin^2\beta_c L}\,P_1(0;\omega_1), \qquad (\text{Г}.13.4)$$

где входная мощность $P_1(0;\omega_1)$, подаваемая в моду a_1, и фактор F_{pas} пассивной связи мод определены в виде (Г.10.5) и (Г.10.7). В последнем равенстве (Г.13.4) введен знак частоты $q_k = \omega_k/|\omega_k|$ $(k = 1, 2)$ и использовано соотношение (Г.10.6) для пассивной связи мод.

Модальные мощности в форме (Г.13.3) и (Г.13.4) удовлетворяют соотношению Мэнли–Роу (Г.9.7), которое в данном случае принимает вид

$$\frac{P_1(z;\omega_1)}{\omega_1}+\frac{P_2(z;\omega_2)}{\omega_2}=\frac{P_1(0;\omega_1)}{\omega_1}\left(1-F_{pas}\sin^2\beta_c L\right)^{-1}=\text{const}. \qquad (\text{Г}.13.5)$$

Как и в ранее, знаки сигнальной частоты ($\omega_1\equiv\omega>0$) и холостой частоты ($\omega_2\equiv\omega-\omega_p>0$ или <0) задают совершенно определенные знаки энергетических характеристик взаимодействующих мод.

Низкочастотная накачка (при $\omega_1\equiv\omega>0$ и $\omega_2\equiv\omega-\omega_p>0$, т. е. при $q_1=q_2=+1$) обеспечивает, согласно (Г.10.6), одинаковые факторы направленности мод p_1 и p_2, так что мощности $P_1=v_{\text{gr},1}W_1$ и $P_2=v_{\text{gr},2}W_2$ одного знака. Так как групповые скорости мод направлены встречно ($v_{\text{gr},1}>0$ и $v_{\text{gr},2}<0$), то запасенные энергии имеют *разные знаки*: либо $W_1>0$ и $W_2<0$ при $p_1=p_2=+1$, либо $W_1<0$ и $W_2>0$ при $p_1=p_2=-1$. Вышесказанное справедливо также при однородной и периодической связи, когда $\omega_p=0$ и $\omega_1=\omega_2\equiv\omega>0$.

Высокочастотная накачка (при $\omega_1\equiv\omega>0$ и $\omega_2\equiv\omega-\omega_p<0$, т. е. при $q_1=+1$ и $q_2=-1$) обеспечивает, согласно (Г.10.6), связь между сигнальной и холостой модами с разными факторами направленности ($p_1p_2=+1$) или с запасенными энергиями *одного знака*: либо $W_1>0$ и $W_2>0$ при $p_1=-p_2=+1$, либо $W_1<0$ и $W_2<0$ при $p_1=-p_2=-1$.

Пространственное распределение мощностей (Г.13.3) и (Г.13.4) изображено на рис. Г.9 в нормированном виде $P_k(z;\omega_k)/P_1(0;\omega_1)$, $k=1,2$. Верхняя кривая $P_1(z;\omega_1)/P_1(0;\omega_1)$ показывает, что в этом режиме связи реализуется истинное усиление входного сигнала. Действительно, мощность $P_1(0;\omega_1)$, подаваемая в прямую моду a_1, пространственно нарастает в направлении групповой скорости $v_{\text{gr},1}>0$, хотя нормальные волны системы не меняются по амплитуде с расстоянием в силу (Г.9.23) и (Г.9.24). Этот факт приводит к тригонометрическому характеру нарастания мощности вместо экспоненциального, типичного для связи попутных мод, рассмотренной в предыдущем параграфе. Механизм такого «тригонометрического» усиления различен для случаев, соответствующих сплошной и пунктирной кривым на нижнем графике рис. Г.9.

Сплошная кривая $P_2(z;\omega_2)/P_1(0;\omega_1)$, лежащая выше горизонтальной оси $\beta_c z$, описывает связь мод при низкочастотной накачке или в отсутствие ее, когда моды запасают энергии разных знаков ($W_1W_2<0$ или $p_1p_2=+1$ в силу $v_{\text{gr},1}v_{\text{gr},2}<0$). Следовательно, одна из мод (для определенности, мода a_2) обязательно должна быть медленной волной электронного потока (например, медленной ВПЗ с отрицательной энергией $W_2<0$) [27, 57, 59]. В этом ситуация аналогична предыдущему режиму усиления попутных мод в ЛБВ. Отличие между ними состоит в том, что другая взаимодействующая мода a_1, как и ранее, является замедленной электромагнитной волной ЗС, но с противоположно направленными фазовой и групповой скоростями. Именно такой механизм усиления лежит в основе работы лампы обратной волны (ЛОВ) в отсутствие параметрических эффектов ($\omega_p=0$).

Вышесказанное требует разъяснения в связи с кривыми, изображенными на рис. Г.9. В данном случае модой a_2 является медленная ВПЗ в электронном

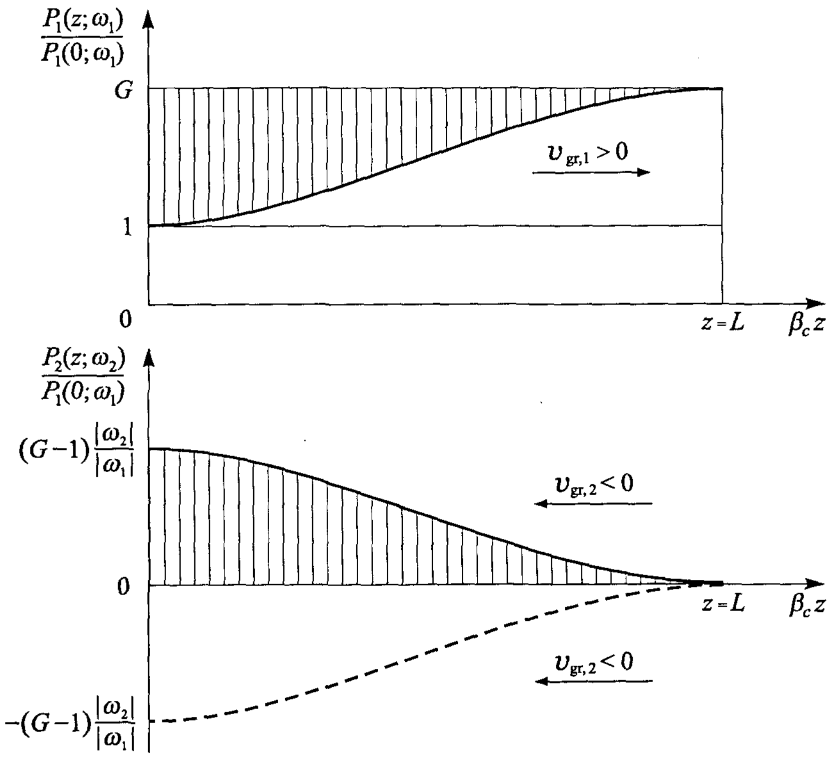


Рис. Г.9. Пространственное распределение мощностей $P_1(z;\omega_1)$ и $P_2(z;\omega_2)$ (отнесенных к входной мощности $P_1(0;\omega_1)$), переносимых *встречными модами* a_1 и a_2 при *пассивной связи*. Сплошная и пунктирная кривые на нижнем рисунке соответствуют низкочастотной накачке (при $\omega_p < \omega \equiv \omega_1$, включая $\omega_p = 0$) и высокочастотной накачке (при $\omega_p > \omega \equiv \omega_1$). Заштрихованные площади на верхнем и нижнем рисунках равны друг другу при $\omega_p = 0$

потоке, для которой групповая и фазовая скорости совпадают по направлению с дрейфом электронов [27, 57, 59]. Тогда, в соответствии с рис. Г.9, имеем $v_{\mathrm{gr},2} < 0$ и $v_{\mathrm{ph},2} < 0$, т. е. электроны дрейфуют справа (катод при $z = L$) налево (коллектор при $z = 0$). В этом случае мода a_1 соответствует электромагнитной волне ЗС, которая должна иметь отрицательную фазовую скорость ($v_{\mathrm{ph},1} < 0$, чтобы быть согласованной с медленной ВПЗ) и положительную групповую скорость ($v_{\mathrm{gr},1} > 0$, чтобы быть встречной по отношению к медленной ВПЗ, имеющей $v_{\mathrm{gr},2} < 0$).

Расположение катода и коллектора на рис. Г.9 (не показанных в явном виде) противоположно ситуации на рис. Г.8, которая в ЛБВ соответствует усилению электромагнитной волны, бегущей вдоль дрейфа электронов. В обоих случаях (ЛБВ и ЛОВ) фазовая скорость волны в ЗС (мода a_1) всегда направлена вдоль дрейфа электронов. Если бы ось z на рис. Г.9 была направлена в другую сторону (от катода к коллектору, как на рис. Г.8), тогда электромагнитная мода a_1 была бы обратной волной по отношению к измененному направлению оси z, что и дает лампе обратной волны общепринятое название.

В режиме ЛОВ мощность, подаваемая в электромагнитную волну a_1 на коллекторном конце прибора (при $z = 0$ на рис. Г.9), возбуждает медленную волну пространственного заряда в электронном потоке. Амплитуда последней пространственно нарастает от нулевого значения на катодном конце ($z = L$) благодаря замедлению электронов. Их кинетическая энергия превращается в электромагнитную энергию, что обеспечивает усиление волны a_1 в замедляющей системе. В этом случае выполняется закон сохранения мощности (Г.13.5) при $\omega_1 = \omega_2 \equiv \omega > 0$.

Пунктирная кривая $P_2(z;\omega_2)/P_1(0;\omega_1)$ на рис. Г.9, лежащая ниже горизонтальной оси $\beta_c z$, соответствует параметрической системе с высокочастотной накачкой, в которой имеется связь между встречными модами, запасающими энергии одного знака ($W_1W_2 > 0$ или $p_1p_2 = -1$ в силу того, что $v_{\mathrm{gr},1}v_{\mathrm{gr},2} < 0$). Такими модами могут быть электромагнитные волны в линии передачи, тогда их взаимодействие составляет основу параметрического усиления встречных волн. Пространственное нарастание взаимодействующих волн происходит за счет энергии источника накачки, в соответствии с соотношением Мэнли–Роу в форме (Г.13.5).

Коэффициент усиления входного сигнала на частоте ω_1, получаемый при длине области взаимодействия L, определен в виде

$$G \equiv \frac{P_1(L;\omega_1)}{P_1(0;\omega_1)} = \frac{1}{1 - F_{pas}\sin^2\beta_c L}\,. \tag{Г.13.6}$$

В соответствии с рис. Г.5, для фактора пассивной связи мод всегда имеем $0 < F_{pas} \leqslant 1$. Поэтому выражение (Г.13.6) обеспечивает максимальное усиление,

$$G_{max} = \frac{1}{1 - F_{pas}}\,, \tag{Г.13.7}$$

при условии

$$\beta_c L = \frac{\pi}{2}\,. \tag{Г.13.8}$$

Как следует из (Г.13.7), при приближении F_{pas} к единице, максимальное усиление G_{max} достигает бесконечно больших значений. Следовательно, такой механизм распределенного усиления имеет регенеративную природу, присущую цепям с положительной обратной связью.

В данном случае распределенная обратная связь обеспечивается встречным характером взаимодействующих мод, которые переносят энергию в противоположных направлениях друг по отношению к другу. Любой регенеративный усилитель превращается в генератор, если положительная обратная связь достаточна для того, чтобы обеспечить бесконечно большое усиление на конечной длине. Как видно из (Г.13.7), подобная физическая ситуация, дающая $G_{max} \to \infty$, возникает, если $F_{pas} \to 1$, т. е. при условии точного фазового согласования между встречными модами, когда

$$\Delta\beta_{12} = 0 \qquad \text{или} \qquad \beta_1(\omega_1) - \beta_2(\omega_2) = \beta_p(\omega_p). \tag{Г.13.9}$$

Неустойчивость распределенных систем типа ЛОВ, называемая *абсолютной неустойчивостью*, объясняется самовозбуждением системы под действием малых случайных флуктуаций благодаря внутренней обратной связи.

Это отличает ее от *конвективной неустойчивости*, реализуемой в ЛБВ, где стабильное пространственное нарастание волны обеспечивается благодаря преобладающему конвективному сносу колебаний вдоль дрейфа, что препятствует самовозбуждению системы [51, 52, 55, 56]. Качественная картина асимптотического поведения конвективно и абсолютно неустойчивых систем была описана в п. Г.9.2 (см. рис. Г.4).

Формулы (Г.13.8) и (Г.13.9) выражают пороговые условия для генерации колебаний. Частота генерации ω определяется из условия точного фазового согласования (Г.13.9), в котором $\omega_1 = \omega$ и $\omega_2 = \omega - \omega_p$. Равенство (Г.13.8) означает амплитудное пороговое условие, которое превращается в требование $|\widehat{c}_{12}|L = \pi/2$, если фазовое условие (Г.13.9) выполнено точно. Спонтанный рост начальных флуктуаций ограничивается со временем нелинейными свойствами системы, что устанавливает стационарную амплитуду колебаний. Поэтому в стационарном режиме генерации когерентного сигнала равенства (Г.13.8) и (Г.13.9) играют роль известных в радиотехнике условий баланса амплитуд и баланса фаз.

Г.14. Сравнительная характеристика режимов парной связи мод

В заключение полезно сравнить дисперсионные и энергетические характеристики двух мод, взаимодействующих в форме четырех рассмотренных выше режимов недиссипативной связи. Они представлены на рис. Г.10 и в табл. Г.1 для того, чтобы отразить специфические особенности, присущие однородной, периодической и параметрической связи мод.

Однородная связь между модами осуществляется посредством статических (не зависящих от t) и однородных (не зависящих от z) возмущений, наложенных на *базовый* (регулярный) волновод, спектр мод которого считается известным. Это означает, что для каждой k-й моды задан ее закон дисперсии $\beta_k(\omega)$, т. е. известны фазовая и групповая скорости

$$v_{\mathrm{ph},k} = \frac{\omega}{\beta_k} \quad \text{и} \quad v_{\mathrm{gr},k} = \left(\frac{\partial \beta_k}{\partial \omega}\right)^{-1}. \tag{Г.14.1}$$

Эти скорости могут быть направлены по-разному как по отношению к оси z (выбранной слева направо в нашем случае), так и относительно друг друга.

Кроме того, энергетические характеристики собственной k-й моды также известны, в частности средняя энергия W_k, запасенная полями этой моды в единице длины базового волновода. Хорошо известно, что все моды электромагнитной, акустической и спиновой природы всегда запасают положительную энергию ($W_k > 0$). Отрицательная энергия ($W_k < 0$) присуща только медленным волнам в дрейфовых потоках носителей заряда, тогда как быстрые волны запасают всегда положительную энергию.

Мощность, переносимая k-й модой в положительном z-направлении,

$$P_k = v_{\mathrm{gr},k} W_k, \tag{Г.14.2}$$

является положительной или отрицательной в зависимости от комбинации знаков групповой скорости и запасенной энергии.

попутные моды		встречные моды	
мода a_1	мода a_2	мода a_1	мода a_2
$\upsilon_{\mathrm{ph},1}>0$ $\longrightarrow$	$\upsilon_{\mathrm{ph},2}>0$ $\longrightarrow$	$\upsilon_{\mathrm{ph},1}>0$ $\longrightarrow$	$\upsilon_{\mathrm{ph},2}>0$ $\longrightarrow$
$\upsilon_{\mathrm{gr},1}>0$ $\longrightarrow$	$\upsilon_{\mathrm{gr},2}>0$ $\longrightarrow$	$\upsilon_{\mathrm{gr},1}>0$ $\longrightarrow$	$\upsilon_{\mathrm{gr},2}<0$ $\longleftarrow$
$W_1>0$	$W_2>0$	$W_1>0$	$W_2>0$
$P_1=\upsilon_{\mathrm{gr},1}W_1>0$	$P_2=\upsilon_{\mathrm{gr},2}W_2>0$	$P_1=\upsilon_{\mathrm{gr},1}W_1>0$	$P_2=\upsilon_{\mathrm{gr},2}W_2<0$
$P_1(z)+P_2(z)=\lvert a_1(z)\rvert^2+\lvert a_2(z)\rvert^2=\mathrm{const}$		$P_1(z)+P_2(z)=\lvert a_1(z)\rvert^2-\lvert a_2(z)\rvert^2=\mathrm{const}$	
пассивная связь (*попутное переизлучение*)		***активная связь*** (*встречное переизлучение*)	
мода a_1	мода a_2	мода a_1	мода a_2
$\upsilon_{\mathrm{ph},1}>0$ $\longrightarrow$	$\upsilon_{\mathrm{ph},2}>0$ $\longrightarrow$	$\upsilon_{\mathrm{ph},1}<0$ $\longleftarrow$	$\upsilon_{\mathrm{ph},2}<0$ $\longleftarrow$
$\upsilon_{\mathrm{gr},1}>0$ $\longrightarrow$	$\upsilon_{\mathrm{gr},2}>0$ $\longrightarrow$	$\upsilon_{\mathrm{gr},1}>0$ $\longrightarrow$	$\upsilon_{\mathrm{gr},2}<0$ $\longleftarrow$
$W_1>0$	$W_2<0$	$W_1>0$	$W_2<0$
$P_1=\upsilon_{\mathrm{gr},1}W_1>0$	$P_2=\upsilon_{\mathrm{gr},2}W_2<0$	$P_1=\upsilon_{\mathrm{gr},1}W_1>0$	$P_2=\upsilon_{\mathrm{gr},2}W_2>0$
$P_1(z)+P_2(z)=\lvert a_1(z)\rvert^2-\lvert a_2(z)\rvert^2=\mathrm{const}$		$P_1(z)+P_2(z)=\lvert a_1(z)\rvert^2+\lvert a_2(z)\rvert^2=\mathrm{const}$	
активная связь (*попутное усиление*)		***пассивная связь*** (*встречное усиление*)	

Рис. Г.10. Дисперсионные и энергетические характеристики несвязанных мод a_1 и a_2, обеспечивающие их однородную (непериодическую и непараметрическую) связь: соотношение между направлениями фазовых $\left(\upsilon_{\mathrm{ph},1(2)}\right)$ и групповых $\left(\upsilon_{\mathrm{gr},1(2)}\right)$ скоростей и знак запасенной энергии $\left(W_{1(2)} \gtrless 0\right)$ определяют конкретный режим межмодовой связи

Среди трех параметров мод, даваемых формулами (Г.14.1) и (Г.14.2), имеем:

- *фазовые скорости* — для обеспечения условия фазового согласования мод (Г.8.1) в форме
$$\beta_1 = \beta_2 \qquad \text{или} \qquad \upsilon_{\mathrm{ph},1} = \upsilon_{\mathrm{ph},2}; \tag{Г.14.3}$$
- *групповые скорости* — для определения того края области связи ($z=0$ при $\upsilon_{\mathrm{gr},1(2)}>0$ и $z=L$ при $\upsilon_{\mathrm{gr},1(2)}<0$), где должно быть задано входное краевое условие (Г.6.11) и (Г.6.12), соответственно;
- *мощности*, переносимые каждой модой, — для записи закона сохранения (Г.9.8) при недиссипативной однородной связи в виде
$$P_1(z)+P_2(z) = |a_1(z)|^2 \pm |a_1(z)|^2 = \mathrm{const}, \tag{Г.14.4}$$
где знаки $\pm$ соответствуют пассивной и активной связи мод.

Комбинации вышеуказанных параметров для пары мод a_1 и a_2, необходимые для реализации четырех режимов, рассмотренных в пп. Г.10–Г.13, изображены в виде четырех картин на рис. Г.10. Каждая из этих картин отличается от других только одним признаком: либо комбинацией взаимного направления фазовых и групповых скоростей, либо комбинацией знаков запасенной энергии.

В качестве исходной точки выбирается сонаправленность фазовых скоростей $v_{\mathrm{ph},1}$ и $v_{\mathrm{ph},2}$, необходимая из условия фазового согласования (Г.14.3). Эти скорости направлены слева направо, за исключением последней картины при пассивной связи встречных мод (для случая ЛОВ с катодом, расположенным при $z = L$ — см. рис. Г.9 и его описание в п. Г.13). Для каждой моды ее групповая скорость $v_{\mathrm{gr},1(2)}$ может быть либо сонаправленной, либо противонаправленной по отношению к своей фазовой скорости $v_{\mathrm{ph},1(2)}$, что дает две комбинации.

Две другие комбинации обеспечиваются знаками запасенных энергий $W_{1(2)} \gtrless 0$. Верхние картины на рис. Г.10 соответствуют режимам переизлучения с $W_1 W_2 > 0$, а две нижние картины — режимам усиления с $W_1 W_2 < 0$, которые типичны для случаев ЛБВ и ЛОВ.

Каждой из четырех комбинаций параметров мод a_1 и a_2 на рис. Г.10 соответствует специфическая картина пространственного распределения модальных мощностей $P_1(z)/P_1(0)$ и $P_2(z)/P_1(0)$, изображенная на рис. Г.6–Г.9 *сплошными кривыми* для однородной связи мод при $\omega_1 = \omega_2 \equiv \omega > 0$.

Периодическая связь между модами осуществляется посредством статических (не зависящих от времени) возмущений, наложенных на базовый волновод, которые пространственно периодичны вдоль z-направления с периодом Λ. Это изменяет условие фазового согласования (Г.14.3) для однородной связи и придает ему новую форму (Г.8.8):

$$\beta_1 - \beta_2 = s\,\frac{2\pi}{\Lambda}, \qquad s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{Г.14.5}$$

Следствием условия (Г.14.5) при $s \neq 0$ является тот важный факт, что при периодической связи фазовые скорости мод совсем не обязательно должны быть сонаправленными и близкими по величине. Они могут быть даже направленными навстречу друг другу, приводя в случае равенства их величин к брэгговскому отражению, удовлетворяющему условию (Г.8.9). Поэтому четыре картины, приведенные на рис. Г.10, сохраняют свой вид, за исключением того, что фазовые скорости $v_{\mathrm{ph},1}$ и $v_{\mathrm{ph},2}$ могут иметь даже противоположные направления. В этом состоит отличительная особенность периодической связи двух мод.

Следует подчеркнуть, что как периодическая, так и однородная связь обеспечивают взаимодействие между модами на одной и той же частоте, в отличие от параметрической связи.

Параметрическая связь осуществляется посредством динамических (зависящих от времени) возмущений, вызванных волной накачки, распространяющейся с фазовым множителем $\exp\bigl[i(\omega_p t - \beta_p z)\bigr]$. Это порождает принципиальную особенность параметрических систем, вызванную связью между

Таблица Г.1. Энергетические характеристики пары взаимодействующих мод

Режимы связи мод	низкочастотная накачка ($\omega_1 > 0,\ \omega_2 > 0$)		высокочастотная накачка ($\omega_1 > 0,\ \omega_2 < 0$)	
	$p_1 = +1$ $W_1 > 0$	$p_1 = -1$ $W_1 < 0$	$p_1 = +1$ $W_1 > 0$	$p_1 = -1$ $W_1 < 0$
Переизлучение попутных мод ($v_{gr,1} > 0,\ v_{gr,2} > 0$)	$p_2 = +1$ $W_2 > 0$	$p_2 = -1$ $W_2 < 0$	$p_2 = -1$ $W_2 < 0$	$p_2 = +1$ $W_2 > 0$
Переизлучение встречных мод ($v_{gr,1} > 0,\ v_{gr,2} < 0$)	$p_2 = -1$ $W_2 > 0$	$p_2 = +1$ $W_2 < 0$	$p_2 = +1$ $W_2 < 0$	$p_2 = -1$ $W_2 > 0$
Усиление попутных мод ($v_{gr,1} > 0,\ v_{gr,2} > 0$)	$p_2 = -1$ $W_2 < 0$	$p_2 = +1$ $W_2 > 0$	$p_2 = +1$ $W_2 > 0$	$p_2 = -1$ $W_2 < 0$
Усиление встречных мод ($v_{gr,1} > 0,\ v_{gr,2} < 0$)	$p_2 = +1$ $W_2 < 0$	$p_2 = -1$ $W_2 > 0$	$p_2 = -1$ $W_2 > 0$	$p_2 = +1$ $W_2 < 0$

модами разных частот — сигнальной частоты $\omega_1 = \omega_s \equiv \omega$ и холостой частоты $\omega_2 = \omega_i \equiv \omega - \omega_p$. Возможны два параметрических режима:

а) режим *низкочастотной накачки*, реализуемый при $\omega_p < \omega_s$ и $\omega_i > 0$,

б) режим *высокочастотной накачки*, реализуемый при $\omega_p > \omega_s$ и $\omega_i < 0$,

которые характеризуются, соответственно, соотношениями (Г.3.13) и (Г.3.14).

Диаграмма невозмущенных дисперсионных линий для двух параметрически связанных мод изображена на рис. Г.1. Четыре картины, показанные на рис. Г.10, остаются справедливыми и для параметрических систем при возможных изменениях во взаимном направлении фазовых скоростей $v_{\mathrm{ph},1}$ и $v_{\mathrm{ph},2}$, которые теперь удовлетворяют условию фазового согласования (Г.8.12) при $k = l = 1$ и $\nu = 1$. Соотношения между энергетическими характеристиками (факторами направленности $p_{1(2)}$ и запасенными энергиями $W_{1(2)}$) параметрически связанных мод, требуемыми для реализации низкочастотной и высокочастотной накачки, даны в табл. Г.1.

Следует еще раз подчеркнуть, что появление пространственно нарастающих решений в форме нормальных волн не может служить признаком усилительных свойств системы, если не соотносить нарастание с направлением групповой скорости. Так, при однородной связи усиление имеет место только в том случае, если физическая ситуация соответствует нижним картинам на рис. Г.10, содержащим моду с отрицательной энергией при активной связи попутных мод (режим ЛБВ) и пассивной связи встречных мод (режим ЛОВ).

Таким образом, для возникновения истинного усиления (генерации) в недиссипативной системе из двух связанных волн необходимо:

- для ***непараметрических систем*** (с однородной или периодической связью) — наличие *медленной волны*, запасающей отрицательную энергию $W_2 < 0$, что осуществимо только в системах с дрейфующими носителями заряда в вакууме или плазме (в особых условиях);

- для **параметрических систем** (без дрейфующих носителей заряда) — наличие *высокочастотной накачки* с частотой $\omega_p = \omega_1 + |\omega_2|$ для обеспечения связи между модами разных по знаку частот: частоты сигнала $\omega_s \equiv \omega_1 = \omega > 0$ и холостой частоты $\omega_i \equiv \omega_2 = \omega - \omega_p < 0$.

В обоих случаях (непараметрических и параметрических систем) связь между попутными модами (с одинаковым направлением групповых скоростей) дает стабильное нарастание сигнальной волны в пространстве, называемое в физической литературе *конвективной неустойчивостью*. Если имеет место взаимодействие между встречными модами (с противоположным направлением групповых скоростей), то при определенных условиях возникает внутренняя положительная обратная связь, что приводит к самовозбуждению системы. Подобная ситуация соответствует так называемой *абсолютной неустойчивости* системы (см. рис. Г.4).

Во всех иных случаях (без участия мод с отрицательной энергией и без высокочастотной накачки) система абсолютно устойчива в смысле невозможности усиливать или генерировать колебания. В ней возможен только истинно пассивный обмен энергией периодического или монотонного характера, названный *переизлучением мощности* между связанными модами. Именно такая физическая ситуация типична для волноведущих структур оптического диапазона, которые исследованы в гл. 3 и 4.

Все вышеизложенное в этом приложении было посвящено анализу энергообмена между связанными модами в отсутствие влияния потерь. Особенности диссипативной парной связи мод, исключенной из настоящего рассмотрения, могут быть найдены в монографии [47].

Математическое дополнение

Вывод распределения волновых амплитуд для двух связанных мод недиссипативной системы

Продольное распределение волновых амплитуд для двух связанных мод описывается уравнениями (Г.9.39) и (Г.9.40), переписанными в виде

$$a_1(z;\omega_1) = \left[A_{11}e^{-(\Gamma_1 - i\beta_0)z} - \frac{\Gamma_2 - i\overline{\beta}_2}{\widehat{c}_{21}} A_{22}\, e^{-(\Gamma_2 - i\beta_0)z}\right] e^{-i(\beta_0+\beta_p/2)z}, \tag{М.1}$$

$$a_2(z;\omega_2) = \left[-\frac{\Gamma_1 - i\overline{\beta}_1}{\widehat{c}_{12}} A_{11}e^{-(\Gamma_1 - i\beta_0)z} + A_{22}\, e^{-(\Gamma_2 - i\beta_0)z}\right] e^{-i(\beta_0-\beta_p/2)z}. \tag{М.2}$$

Постоянные распространения Γ_1 и Γ_2, записанные в общей форме (Г.9.21), как корни характеристического уравнения (Г.9.18) обладают следующими свойствами:

$$\Gamma_1 + \Gamma_2 = i(\overline{\beta}_1 + \overline{\beta}_2) \equiv 2i\beta_0, \qquad \Gamma_1\Gamma_2 = -(\widehat{c}_{12}\widehat{c}_{21} + \overline{\beta}_1\overline{\beta}_2), \tag{М.3}$$

где $\overline{\beta}_1$ и $\overline{\beta}_2$ определены в виде (Г.9.13). Отсюда следуют важные для дальнейших преобразований соотношения:

$$(\Gamma_1 - i\overline{\beta}_1) = -(\Gamma_2 - i\overline{\beta}_2), \qquad (\Gamma_1 - i\beta_0) = -(\Gamma_2 - i\beta_0), \tag{M.4}$$

$$\widehat{c}_{12}\widehat{c}_{21} = (\Gamma_1 - i\overline{\beta}_1)\left[(\Gamma_1 - \Gamma_2) - (\Gamma_1 - i\overline{\beta}_1)\right], \tag{M.5}$$

$$\frac{(\Gamma_1 - i\overline{\beta}_1)(\Gamma_2 - i\overline{\beta}_2)}{\widehat{c}_{12}\widehat{c}_{21}} = -\frac{(\Gamma_1 - i\overline{\beta}_1)/(\Gamma_1 - \Gamma_2)}{1 - (\Gamma_1 - i\overline{\beta}_1)/(\Gamma_1 - \Gamma_2)}, \tag{M.6}$$

$$1 - \frac{\Gamma_1 - i\overline{\beta}_1}{\Gamma_1 - \Gamma_2} = \frac{\widehat{c}_{12}\widehat{c}_{21}}{(\Gamma_1 - \Gamma_2)(\Gamma_1 - i\overline{\beta}_1)}. \tag{M.7}$$

Дальнейшая задача состоит в вычислении констант A_{11} и A_{22}, входящих в уравнения (М.1) и (М.2). Для этого будем применять краевые условия (Г.9.41)–(Г.9.43) в общей форме с ненулевыми входными амплитудами мод, взятые попарно для попутных и встречных волн.

1. Попутные волны

Для пары попутных волн работают ненулевые краевые условия (Г.9.41) и (Г.9.42), задаваемые на одном краю области связи мод, а именно при $z = 0$:

$$a_1(0;\omega_1) \neq 0, \qquad a_2(0;\omega_2) \neq 0.$$

Применение их к выражениям (М.1) и (М.2) дает систему уравнений для нахождения констант A_{11} и A_{22}:

$$A_{11} - \frac{\Gamma_2 - i\overline{\beta}_2}{\widehat{c}_{21}} A_{22} = a_1(0;\omega_1), \tag{M.8}$$

$$-\frac{\Gamma_1 - i\overline{\beta}_1}{\widehat{c}_{12}} A_{11} + A_{22} = a_2(0;\omega_2). \tag{M.9}$$

Эти уравнения характеризуются следующими детерминантами:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -\dfrac{\Gamma_2 - i\overline{\beta}_2}{\widehat{c}_{21}} \\ -\dfrac{\Gamma_1 - i\overline{\beta}_1}{\widehat{c}_{12}} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{1 - (\Gamma_1 - i\overline{\beta}_1)/(\Gamma_1 - \Gamma_2)}, \tag{M.10}$$

$$D_{11} = \begin{vmatrix} a_1(0;\omega_1) & -\dfrac{\Gamma_2 - i\overline{\beta}_2}{\widehat{c}_{21}} \\ a_2(0;\omega_2) & 1 \end{vmatrix} = a_1(0;\omega_1) + a_2(0;\omega_2)\frac{\Gamma_2 - i\overline{\beta}_2}{\widehat{c}_{21}}, \tag{M.11}$$

$$D_{22} = \begin{vmatrix} 1 & a_1(0;\omega_1) \\ -\dfrac{\Gamma_1 - i\overline{\beta}_1}{\widehat{c}_{12}} & a_2(0;\omega_2) \end{vmatrix} = a_1(0;\omega_1)\frac{\Gamma_1 - i\overline{\beta}_1}{\widehat{c}_{12}} + a_2(0;\omega_2), \tag{M.12}$$

где при вычислении детерминанта (М.10) использовано соотношение (М.6).

Тогда искомые константы равняются

$$A_{11} \equiv \frac{D_{11}}{D} = \left[a_1(0;\omega_1) + a_2(0;\omega_2)\,\frac{\Gamma_2 - i\overline{\beta}_2}{\widehat{c}_{21}}\right]\left(1 - \frac{\Gamma_1 - i\overline{\beta}_1}{\Gamma_1 - \Gamma_2}\right), \tag{M.13}$$

$$A_{22} \equiv \frac{D_{22}}{D} = \left[a_1(0;\omega_1)\,\frac{\Gamma_1 - i\overline{\beta}_1}{\widehat{c}_{12}} + a_2(0;\omega_2)\right]\left(1 - \frac{\Gamma_1 - i\overline{\beta}_1}{\Gamma_1 - \Gamma_2}\right). \tag{M.14}$$

Подстановка формул (М.13) и (М.14) в выражения (М.1) и (М.2) после ряда преобразований приводит их к следующему виду:

$$\begin{aligned} a_1(z;\omega_1) = &\left[a_1(0;\omega_1)\left(1 - \frac{\Gamma_1 - i\overline{\beta}_1}{\Gamma_1 - \Gamma_2}\right)\times\right.\\ &\times\left(e^{-(\Gamma_1 - i\beta_0)z} - \frac{(\Gamma_1 - i\overline{\beta}_1)(\Gamma_2 - i\overline{\beta}_2)}{\widehat{c}_{12}\widehat{c}_{21}}\,e^{-(\Gamma_2 - i\beta_0)z}\right) +\\ &+ a_2(0;\omega_2)\left(1 - \frac{\Gamma_1 - i\overline{\beta}_1}{\Gamma_1 - \Gamma_2}\right)\frac{\Gamma_2 - i\overline{\beta}_2}{\widehat{c}_{21}}\times\\ &\left.\times\left(e^{-(\Gamma_1 - i\beta_0)z} - e^{-(\Gamma_2 - i\beta_0)z}\right)\right] e^{-i(\beta_0 + \beta_p/2)z} =\\ = &\left\{a_1(0;\omega_1)\left[e^{-(\Gamma_1 - i\beta_0)z} - \frac{\Gamma_1 - i\overline{\beta}_1}{\Gamma_1 - \Gamma_2}\left(e^{-(\Gamma_1 - i\beta_0)z} - e^{-(\Gamma_2 - i\beta_0)z}\right)\right] -\right.\\ &\left.- a_2(0;\omega_2)\,\frac{\widehat{c}_{12}}{\Gamma_1 - \Gamma_2}\left(e^{-(\Gamma_1 - i\beta_0)z} - e^{-(\Gamma_2 - i\beta_0)z}\right)\right\} e^{-i(\beta_0 + \beta_p/2)z}, \end{aligned} \tag{M.15}$$

$$\begin{aligned} a_2(z;\omega_2) = &\left[a_2(0;\omega_2)\left(1 - \frac{\Gamma_1 - i\overline{\beta}_1}{\Gamma_1 - \Gamma_2}\right)\times\right.\\ &\times\left(e^{-(\Gamma_2 - i\beta_0)z} - \frac{(\Gamma_1 - i\overline{\beta}_1)(\Gamma_2 - i\overline{\beta}_2)}{\widehat{c}_{12}\widehat{c}_{21}}\,e^{-(\Gamma_1 - i\beta_0)z}\right) +\\ &+ a_1(0;\omega_1)\left(1 - \frac{\Gamma_1 - i\overline{\beta}_1}{\Gamma_1 - \Gamma_2}\right)\frac{\Gamma_1 - i\overline{\beta}_1}{\widehat{c}_{12}}\times\\ &\left.\times\left(e^{-(\Gamma_2 - i\beta_0)z} - e^{-(\Gamma_1 - i\beta_0)z}\right)\right] e^{-i(\beta_0 - \beta_p/2)z} =\\ = &\left\{a_2(0;\omega_2)\left[e^{-(\Gamma_2 - i\beta_0)z} + \frac{\Gamma_1 - i\overline{\beta}_1}{\Gamma_1 - \Gamma_2}\left(e^{-(\Gamma_1 - i\beta_0)z} - e^{-(\Gamma_2 - i\beta_0)z}\right)\right] -\right.\\ &\left.- a_1(0;\omega_1)\,\frac{\widehat{c}_{21}}{\Gamma_1 - \Gamma_2}\left(e^{-(\Gamma_1 - i\beta_0)z} - e^{-(\Gamma_2 - i\beta_0)z}\right)\right\} e^{-i(\beta_0 - \beta_p/2)z}. \end{aligned} \tag{M.16}$$

При вычислении амплитуд (М.15) и (М.16) были использованы, соответственно, соотношения (М.6) и (М.7).

Применим общие выражения (М.15) и (М.16) для частных случаев пассивной и активной связи попутных мод.

Пассивная связь попутных мод

Выражения (Г.9.23)–(Г.9.24) для постоянных распространения Γ_1 и Γ_2 нормальных волн при пассивной связи дают следующие соотношения:

$$\begin{aligned} &\Gamma_1 - i\beta_0 = i\beta_c, && \Gamma_2 - i\beta_0 = -i\beta_c, \\ &\Gamma_1 - \Gamma_2 = 2i\beta_c, && \Gamma_1 - i\overline{\beta}_1 = i\beta_c(1 - \Delta\beta_{12}/2\beta_c), \end{aligned} \tag{М.17}$$

где β_c и $\Delta\beta_{12}$ определены в виде (Г.9.24) и (Г.9.13)–(Г.9.14). Подставляя (М.17) в (М.15) и (М.16), получаем окончательные выражения:

$$\begin{aligned} a_1(z;\omega_1) = \Big[a_1(0;\omega_1)\Big(\cos\beta_c z - i\frac{\Delta\beta_{12}}{2\beta_c}\sin\beta_c z\Big) + \\ + a_2(0;\omega_2)\,\frac{\widehat{c}_{12}}{\beta_c}\sin\beta_c z\Big]\, e^{-i(\beta_0+\beta_p/2)z}, \end{aligned} \tag{М.18}$$

$$\begin{aligned} a_2(z;\omega_2) = \Big[a_2(0;\omega_2)\Big(\cos\beta_c z + i\frac{\Delta\beta_{12}}{2\beta_c}\sin\beta_c z\Big) + \\ + a_1(0;\omega_1)\,\frac{\widehat{c}_{21}}{\beta_c}\sin\beta_c z\Big]\, e^{-i(\beta_0-\beta_p/2)z}. \end{aligned} \tag{М.19}$$

Активная связь попутных мод

Выражения (Г.9.26)–(Г.9.27) для постоянных распространения Γ_1 и Γ_2 нормальных волн при активной связи дают следующие соотношения:

$$\begin{aligned} &\Gamma_1 - i\beta_0 = \alpha_c, && \Gamma_2 - i\beta_0 = -\alpha_c, \\ &\Gamma_1 - \Gamma_2 = 2\alpha_c, && \Gamma_1 - i\overline{\beta}_1 = \alpha_c(1 - i\Delta\beta_{12}/2\alpha_c). \end{aligned} \tag{М.20}$$

где α_c и $\Delta\beta_{12}$ определены в виде (Г.9.27) и (Г.9.13)–(Г.9.14). Подставляя (М.20) в (М.15) и (М.16), получаем окончательные выражения:

$$\begin{aligned} a_1(z;\omega_1) = \Big[a_1(0;\omega_1)\Big(\operatorname{ch}\alpha_c z - i\frac{\Delta\beta_{12}}{2\alpha_c}\operatorname{sh}\alpha_c z\Big) + \\ + a_2(0;\omega_2)\,\frac{\widehat{c}_{12}}{\alpha_c}\operatorname{sh}\alpha_c z\Big]\, e^{-i(\beta_0+\beta_p/2)z}, \end{aligned} \tag{М.21}$$

$$\begin{aligned} a_2(z;\omega_2) = \Big[a_2(0;\omega_2)\Big(\operatorname{ch}\alpha_c z + i\frac{\Delta\beta_{12}}{2\alpha_c}\operatorname{sh}\alpha_c z\Big) + \\ + a_1(0;\omega_1)\,\frac{\widehat{c}_{21}}{\alpha_c}\operatorname{sh}\alpha_c z\Big]\, e^{-i(\beta_0-\beta_p/2)z}. \end{aligned} \tag{М.22}$$

2. Встречные волны

Для пары встречных волн работают ненулевые краевые условия (Г.9.41) и (Г.9.43), задаваемые на разных краях области связи мод, а именно при $z = 0$ и $z = L$:

$$a_1(0;\omega_1) \neq 0, \qquad a_2(L;\omega_2) \neq 0.$$

Применение их к выражениям (М.1) и (М.2) дает систему уравнений для нахождения констант A_{11} и A_{22}:

$$A_{11} - \frac{\Gamma_2 - i\overline{\beta}_2}{\widehat{c}_{21}} A_{22} = a_1(0;\omega_1), \tag{М.23}$$

$$-\frac{\Gamma_1 - i\overline{\beta}_1}{\widehat{c}_{12}} A_{11} e^{-(\Gamma_1 - i\beta_p/2)L} + A_{22}\, e^{-(\Gamma_2 - i\beta_p/2)L} = a_2(L;\omega_2). \tag{М.24}$$

Эти уравнения характеризуются следующими детерминантами:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -\dfrac{\Gamma_2 - i\overline{\beta}_2}{\widehat{c}_{21}} \\ -\dfrac{\Gamma_1 - i\overline{\beta}_1}{\widehat{c}_{12}}\, e^{-(\Gamma_1 - i\beta_p/2)L} & e^{-(\Gamma_2 - i\beta_p/2)L} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{C\, e^{-i(\beta_0 - \beta_p/2)L}}{1 - (\Gamma_1 - i\overline{\beta}_1)/(\Gamma_1 - \Gamma_2)}, \tag{М.25}$$

$$D_{11} = \begin{vmatrix} a_1(0;\omega_1) & -\dfrac{\Gamma_2 - i\overline{\beta}_2}{\widehat{c}_{21}} \\ a_2(L;\omega_2) & e^{-(\Gamma_2 - i\beta_p/2)L} \end{vmatrix} =$$

$$= a_1(0;\omega_1)\, e^{-(\Gamma_2 - i\beta_p/2)L} + a_2(L;\omega_2)\, \frac{\Gamma_2 - i\overline{\beta}_2}{\widehat{c}_{21}}, \tag{М.26}$$

$$D_{22} = \begin{vmatrix} 1 & a_1(0;\omega_1) \\ -\dfrac{\Gamma_1 - i\overline{\beta}_1}{\widehat{c}_{12}}\, e^{-(\Gamma_1 - i\beta_p/2)L} & a_2(L;\omega_2) \end{vmatrix} =$$

$$= a_1(0;\omega_1)\, \frac{\Gamma_1 - i\overline{\beta}_1}{\widehat{c}_{12}}\, e^{-(\Gamma_1 - i\beta_p/2)L} + a_2(L;\omega_2), \tag{М.27}$$

где при вычислении детерминанта (М.25) использовано соотношение (М.6) и введено обозначение

$$C = e^{-(\Gamma_2 - i\beta_0)L} + \frac{\Gamma_1 - i\overline{\beta}_1}{\Gamma_1 - \Gamma_2} \left(e^{-(\Gamma_1 - i\beta_0)L} - e^{-(\Gamma_2 - i\beta_0)L} \right). \tag{М.28}$$

Тогда искомые коэффициенты принимают следующий вид:

$$A_{11} \equiv \frac{D_{11}}{D} = \frac{D_{11}}{C}\left(1 - \frac{\Gamma_1 - i\overline{\beta}_1}{\Gamma_1 - \Gamma_2}\right) e^{i(\beta_0 - \beta_p/2)L} =$$

$$= \frac{a_1(0;\omega_1)}{C}\left(1 - \frac{\Gamma_1 - i\overline{\beta}_1}{\Gamma_1 - \Gamma_2}\right) e^{-(\Gamma_2 - i\beta_0)L} +$$

$$+ \frac{a_2(L;\omega_2)}{C}\,\frac{\Gamma_2 - i\overline{\beta}_2}{\widehat{c}_{21}}\left(1 - \frac{\Gamma_1 - i\overline{\beta}_1}{\Gamma_1 - \Gamma_2}\right) e^{i(\beta_0 - \beta_p/2)L}, \qquad \text{(M.29)}$$

$$A_{22} \equiv \frac{D_{22}}{D} = \frac{D_{22}}{C}\left(1 - \frac{\Gamma_1 - i\overline{\beta}_1}{\Gamma_1 - \Gamma_2}\right) e^{i(\beta_0 - \beta_p/2)L} =$$

$$= \frac{a_2(L;\omega_2)}{C}\left(1 - \frac{\Gamma_1 - i\overline{\beta}_1}{\Gamma_1 - \Gamma_2}\right) e^{i(\beta_0 - \beta_p/2)L} +$$

$$+ \frac{a_1(0;\omega_1)}{C}\,\frac{\Gamma_1 - i\overline{\beta}_1}{\widehat{c}_{12}}\left(1 - \frac{\Gamma_1 - i\overline{\beta}_1}{\Gamma_1 - \Gamma_2}\right) e^{-(\Gamma_1 - i\beta_0)L}. \qquad \text{(M.30)}$$

Подстановка формул (M.29) и (M.30) в выражения (M.1) и (M.2) после ряда преобразований приводит их к следующему виду:

$$a_1(z;\omega_1) = \left[a_1'(0;\omega_1)\left(1 - \frac{\Gamma_1 - i\overline{\beta}_1}{\Gamma_1 - \Gamma_2}\right) \times\right.$$

$$\times \left(e^{(\Gamma_1 - i\beta_0)(L-z)} - \frac{(\Gamma_1 - i\overline{\beta}_1)(\Gamma_2 - i\overline{\beta}_2)}{\widehat{c}_{12}\widehat{c}_{21}}\, e^{(\Gamma_2 - i\beta_0)(L-z)}\right) +$$

$$+ a_2'(L;\omega_2)\left(1 - \frac{\Gamma_1 - i\overline{\beta}_1}{\Gamma_1 - \Gamma_2}\right)\frac{\Gamma_2 - i\overline{\beta}_2}{\widehat{c}_{21}} \times$$

$$\left.\times \left(e^{-(\Gamma_1 - i\beta_0)z} - e^{-(\Gamma_2 - i\beta_0)z}\right)\right] e^{-i(\beta_0 + \beta_p/2)z} =$$

$$= \left\{a_1'(0;\omega_1)\left[e^{(\Gamma_1 - i\beta_0)(L-z)} - \frac{\Gamma_1 - i\overline{\beta}_1}{\Gamma_1 - \Gamma_2} \times\right.\right.$$

$$\left.\times \left(e^{(\Gamma_1 - i\beta_0)(L-z)} - e^{(\Gamma_2 - i\beta_0)(L-z)}\right)\right] -$$

$$\left. - a_2'(L;\omega_2)\,\frac{\widehat{c}_{12}}{\Gamma_1 - \Gamma_2}\left(e^{-(\Gamma_1 - i\beta_0)z} - e^{-(\Gamma_2 - i\beta_0)z}\right)\right\} e^{-i(\beta_0 + \beta_p/2)z}, \qquad \text{(M.31)}$$

$$a_2(z;\omega_2) = \left[a_2'(L;\omega_2)\left(1 - \frac{\Gamma_1 - i\overline{\beta}_1}{\Gamma_1 - \Gamma_2}\right) \times\right.$$

$$\times \left(e^{-(\Gamma_2 - i\beta_0)z} - \frac{(\Gamma_1 - i\overline{\beta}_1)(\Gamma_2 - i\overline{\beta}_2)}{\widehat{c}_{12}\widehat{c}_{21}}\, e^{-(\Gamma_1 - i\beta_0)z}\right) +$$

$$+ a_1'(0;\omega_1)\left(1 - \frac{\Gamma_1 - i\overline{\beta}_1}{\Gamma_1 - \Gamma_2}\right)\frac{\Gamma_1 - i\overline{\beta}_1}{\widehat{c}_{12}} \times$$

$$\left.\times \left(e^{(\Gamma_2 - i\beta_0)(L-z)} - e^{(\Gamma_1 - i\beta_0)(L-z)}\right)\right] e^{-i(\beta_0 - \beta_p/2)z} =$$

$$= \left\{a_2'(L;\omega_2)\left[e^{-(\Gamma_2 - i\beta_0)z} + \frac{\Gamma_1 - i\overline{\beta}_1}{\Gamma_1 - \Gamma_2}\left(e^{-(\Gamma_1 - i\beta_0)z} - e^{-(\Gamma_2 - i\beta_0)z}\right)\right] - \right.$$

$$\left. - a_1'(0;\omega_1)\,\frac{\widehat{c}_{21}}{\Gamma_1 - \Gamma_2}\left(e^{(\Gamma_1 - i\beta_0)(L-z)} - e^{(\Gamma_2 - i\beta_0)(L-z)}\right)\right\} e^{-i(\beta_0 - \beta_p/2)z}, \tag{M.32}$$

где введены обозначения

$$a_1'(0;\omega_1) = \frac{a_1(0;\omega_1)}{C}, \qquad a_2'(L;\omega_2) = \frac{a_2(L;\omega_2)}{C}\, e^{i(\beta_0 - \beta_p/2)L}. \tag{M.33}$$

При вычислении выражений (M.31) и (M.32) были использованы соотношения (M.4), (M.6) и (M.7).

Применим общие выражения (M.31) и (M.32) для частных случаев пассивной и активной связи встречных мод с учетом выражения (M.28) для C.

Пассивная связь встречных мод

Подставляя соотношения (M.17), справедливые для пассивной связи мод, в формулы (M.31) и (M.32), получаем окончательные выражения:

$$a_1(z;\omega_1) = \left[a_1'(0;\omega_1)\left(\cos\beta_c(L-z) + i\frac{\Delta\beta_{12}}{2\beta_c}\sin\beta_c(L-z)\right) + \right.$$

$$\left. + a_2'(L;\omega_2)\,\frac{\widehat{c}_{12}}{\beta_c}\sin\beta_c z\right] e^{-i(\beta_0 + \beta_p/2)z}, \tag{M.34}$$

$$a_2(z;\omega_2) = \left[a_2'(L;\omega_2)\left(\cos\beta_c z + i\frac{\Delta\beta_{12}}{2\beta_c}\sin\beta_c z\right) - \right.$$

$$\left. - a_1'(0;\omega_1)\,\frac{\widehat{c}_{21}}{\beta_c}\sin\beta_c(L-z)\right] e^{-i(\beta_0 - \beta_p/2)z}, \tag{M.35}$$

где, в соответствии с соотношениями (M.17), (M.28) и (M.33), имеем

$$a_1'(0;\omega_1) = \frac{a_1(0;\omega_1)}{\cos\beta_c L + i(\Delta\beta_{12}/2\beta_c)\sin\beta_c L}, \tag{M.36}$$

$$a_2'(L;\omega_2) = \frac{a_2(L;\omega_2)\,\exp\bigl[i(\beta_0 - \beta_p/2)L\bigr]}{\cos\beta_c L + i(\Delta\beta_{12}/2\beta_c)\sin\beta_c L}. \tag{M.37}$$

Активная связь встречных мод

Подставляя соотношения (M.20), справедливые для активной связи мод, в формулы (M.31) и (M.32), получаем окончательные выражения:

$$a_1(z;\omega_1) = \left[a_1'(0;\omega_1)\left(\operatorname{ch}\alpha_c(L-z) + i\frac{\Delta\beta_{12}}{2\alpha_c}\operatorname{sh}\alpha_c(L-z)\right) + \right.$$
$$\left. + \, a_2'(L;\omega_2)\,\frac{\widehat{c}_{12}}{\alpha_c}\operatorname{sh}\alpha_c z\right] e^{-i(\beta_0+\beta_p/2)z}, \tag{M.38}$$

$$a_2(z;\omega_2) = \left[a_2'(L;\omega_2)\left(\operatorname{ch}\alpha_c z + i\frac{\Delta\beta_{12}}{2\alpha_c}\operatorname{sh}\alpha_c z\right) - \right.$$
$$\left. - \, a_1'(0;\omega_1)\,\frac{\widehat{c}_{21}}{\alpha_c}\operatorname{sh}\alpha_c(L-z)\right] e^{-i(\beta_0-\beta_p/2)z}, \tag{M.39}$$

где, в соответствии с соотношениями (M.17), (M.28) и (M.33), имеем

$$a_1'(0;\omega_1) = \frac{a_1(0;\omega_1)}{\operatorname{ch}\alpha_c L + i(\Delta\beta_{12}/2\alpha_c)\operatorname{sh}\alpha_c L}, \tag{M.40}$$

$$a_2'(L;\omega_2) = \frac{a_2(L;\omega_2)\,\exp\bigl[i(\beta_0 - \beta_p/2)L\bigr]}{\operatorname{ch}\alpha_c L + i(\Delta\beta_{12}/2\alpha_c)\operatorname{sh}\alpha_c L}. \tag{M.41}$$

Приложение Д

РЕШЕНИЕ МОДИФИЦИРОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ СВЯЗАННЫХ МОД

Д.1. Энергетические требования к коэффициентам связи

Закон сохранения энергии, требование взаимности или другие ограничения, накладываемые на волноведущую структуру, приводят к появлению определенных свойств симметрии коэффициентов связи по отношению к перестановке модальных индексов, называемой *перестановочной симметрией* (см. [8, 27, 45–47], а также п. Г.6 в приложении Г).

В этом приложении покажем, что нарушение перестановочной симметрии коэффициентов связи вызывается необходимостью учета взаимной (кросс) мощности, переносимой совместно двумя модами в дополнение к их собственным мощностям. Только специальная форма перестановочного соотношения, которая порождена тензором объемной связи *эрмитовой формы*, исключает необходимость в учете кросс-мощности.

Рассмотрим две моды с номерами 1 и 2, отобранные из спектра собственных мод недиссипативного волновода по правилу фазового согласования как синфазно-связанные. Их волновые амплитуды удовлетворяют следующей паре связанных уравнений (ср. уравнение (Г.7.1)):

$$\frac{da_1}{dz} = -i\beta_1' a_1 + c_{12} a_2, \tag{Д.1.1}$$

$$\frac{da_2}{dz} = c_{21} a_1 - i\beta_2' a_2. \tag{Д.1.2}$$

Уравнения (Д.1.1) и (Д.1.2) учитывают не только взаимную связь мод через коэффициенты c_{12} и c_{21}, но и их самовоздействие за счет собственных коэффициентов связи c_{11} и c_{22}, которые модифицируют невозмущенные фазовые постоянные β_1 и β_2 в виде (ср. уравнение (Г.7.2))

$$\beta_1' = \beta_1 + ic_{11} \quad \text{и} \quad \beta_2' = \beta_2 + ic_{22}. \tag{Д.1.3}$$

Условие близкого фазового согласования означает, что $\beta_1' \approx \beta_2'$.

Начнем с того, что сначала установим перестановочную симметрию коэффициентов связи, порожденную требованием сохранения суммы собственных мощностей мод, а затем рассмотрим ее нарушение при учете взаимной мощности, переносимой парой мод в волноводе без потерь.

Д.1.1. Сохранение собственной переносимой мощности. Сумма собственных мощностей, переносимых двумя активными модами, в соответствии с (2.2.10), равняется

$$P(z) = \frac{1}{4} N_1 \left|a_1(z)\right|^2 + \frac{1}{4} N_2 \left|a_2(z)\right|^2, \tag{Д.1.4}$$

где N_1 и N_2 — нормы активных мод, являющиеся вещественными величинами (см. уравнение (2.2.9)).

Из закона сохранения мощности ($P(z) = \text{const}$) в применении к выражению (Д.1.4), с использованием уравнений (Д.1.1) и (Д.1.2), следует, что

$$\begin{aligned} 4\frac{dP(z)}{dz} &\equiv N_1(c_{11}+c_{11}^*)\left|a_1(z)\right|^2 + N_2(c_{22}+c_{22}^*)\left|a_2(z)\right|^2 + \\ &+ (N_1c_{12}+N_2c_{21}^*)\,a_1^*(z)a_2(z) + \\ &+ (N_1c_{12}^*+N_2c_{21})\,a_1(z)a_2^*(z) = 0. \end{aligned} \tag{Д.1.5}$$

Поскольку равенство нулю выражения (Д.1.5) должно выполняться для любых функций $a_1(z)$ и $a_2(z)$, то отсюда следует тождественное обращение в нуль по отдельности каждой скобки в этом выражении, тогда

$$c_{11} = -c_{11}^* \quad \text{и} \quad c_{22} = -c_{22}^*, \tag{Д.1.6}$$

$$N_1c_{12} = -N_2c_{21}^*. \tag{Д.1.7}$$

Из (Д.1.6) следует, что собственные коэффициенты связи (самовоздействие мод) в системах без потерь всегда должны быть чисто мнимыми,

$$c_{11} = i\Delta\beta_1 \quad \text{и} \quad c_{22} = i\Delta\beta_2, \tag{Д.1.8}$$

так что модифицированные фазовые постоянные (Д.1.3) принимают вид

$$\beta_1' = \beta_1 - \Delta\beta_1 \quad \text{и} \quad \beta_2' = \beta_2 - \Delta\beta_2. \tag{Д.1.9}$$

Соотношение (Д.1.7) устанавливает перестановочную симметрию коэффициентов взаимной связи для одночастотного режима работы непараметрической системы. Для этого случая в приложении Г получено аналогичное соотношение (Г.6.7), в которое переходит выражение (Д.1.7) при $N_2 = \pm N_1$.

Д.1.2. Сохранение собственной и взаимной мощностей. Как следует из вышеизложенного, невыполнение перестановочного соотношения (Д.1.7) неизбежно приводит к ошибочному заключению о нарушении закона сохранения мощности, что невозможно из-за отсутствия потерь.

Подобная ситуация реально возникает при учете поверхностного вклада в коэффициенты связи в виде контурных интегралов в формулах (3.2.17)–(3.2.19), (3.2.21)–(3.2.23) или в их следствиях (3.2.27), (3.2.30), (3.2.34)–(3.2.35). Этот дополнительный вклад обусловлен эффективным поверхностным магнитным током, взаимодействующим с собственным магнитным полем волноводных мод. Такое взаимодействие порождает коэффициенты поверхностной связи *асимметричного типа*, поскольку они связывают не электрические поля двух мод, как при объемной связи, а электрическое поле с магнитным полем через тензоры поверхностной связи (3.1.20) и (3.1.21).

Понятно, что физическая ситуация, возникающая при учете эффективного поверхностного тока и, как следствие его, коэффициентов поверхностной связи, будучи недиссипативной по своей природе, не может нарушать закон сохранения энергии, но тем не менее она явно не подчиняется перестановочному соотношению (Д.1.7), являющемуся следствием этого закона.

Единственный способ устранить это противоречие состоит в учете кросс-мощности, переносимой парой мод, которая *должна входить в закон* сохранения вместе с собственными мощностями. Поэтому необходимо модифицировать старую форму (Д.1.4) этого закона и записать его, исходя из общего выражения (2.2.17), в новой форме

$$P(z) = \frac{1}{4} N_1 \left|a_1(z)\right|^2 + \frac{1}{4} N_2 \left|a_2(z)\right|^2 + \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left\{N_{12}\, a_1^*(z) a_2(z)\right\}, \qquad (Д.1.10)$$

где введена кросс-норма N_{12} двух мод, обладающая свойством эрмитовости $N_{12} = N_{21}^*$ (см. формулу (2.2.8)).

Из закона сохранения мощности ($P(z) = \text{const}$) в применении к выражению (Д.1.10), с использованием уравнений (Д.1.1) и (Д.1.2), следует, что

$$\begin{aligned} 4\frac{dP(z)}{dz} \equiv {} & \left[N_1(c_{11} + c_{11}^*) + (N_{12}c_{21} + N_{12}^* c_{21}^*)\right] |a_1(z)|^2 + \\ & + \left[N_2(c_{22} + c_{22}^*) + (N_{12}c_{12}^* + N_{12}^* c_{12})\right] |a_2(z)|^2 + \\ & + \left[(N_1 c_{12} + N_2 c_{21}^*) + i(\beta_1'^* - \beta_2')N_{12}\right] a_1^*(z) a_2(z) + \\ & + \left[(N_1 c_{12}^* + N_2 c_{21}) - i(\beta_1' - \beta_2'^*)N_{12}^*\right] a_1(z) a_2^*(z) = 0. \qquad (Д.1.11) \end{aligned}$$

Как и ранее, произвольность выбора волновых амплитуд $a_1(z)$ и $a_2(z)$ накладывает следующие соотношения на коэффициенты собственной и взаимной связи мод:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} c_{11} &= -\frac{1}{N_1} \operatorname{Re}\left\{N_{12} c_{21}\right\}, \\ \operatorname{Re} c_{22} &= -\frac{1}{N_2} \operatorname{Re}\left\{N_{12} c_{12}^*\right\}, \end{aligned} \qquad (Д.1.12)$$

$$N_{12} = -\frac{N_1 c_{12} + N_2 c_{21}^*}{i(\beta_1'^* - \beta_2')} \equiv -\frac{N_1 c_{12} + N_2 c_{21}^*}{i(\beta_1 - \beta_2) + (c_{11}^* + c_{22})}. \qquad (Д.1.13)$$

Как следует из (Д.1.13), если между коэффициентами связи c_{12} и c_{21} существует перестановочное соотношение (Д.1.7), тогда кросс-норма N_{12} становится равной нулю, а закон сохранения мощности принимает старую форму (Д.1.4). При этом, согласно (Д.1.12), $\operatorname{Re} c_{11} = \operatorname{Re} c_{22} = 0$, т. е. собственные коэффициенты связи c_{11} *и* c_{22} *становятся* чисто мнимыми, как того требуют соотношения (Д.1.8). В противном случае этот закон должен использоваться в *модифицированной форме* (Д.1.10) с кросс-нормой N_{12}, вычисленной по формуле (Д.1.13).

Применим полученные результаты к одночастотной (непараметрической) системе с коэффициентами связи c_{12} и c_{21}, представленными аналогично (3.2.37) в виде суммы объемных и поверхностных вкладов (с пренебрежением частотным индексом (ν,ν) и поднятием вверх индексов *bulk* и *surf*):

$$c_{12} = c_{12}^{bulk} + c_{12}^{surf} \equiv \left(c_{12}^{h} + c_{12}^{a}\right) + c_{12}^{as}, \tag{Д.1.14}$$

$$c_{21} = c_{21}^{bulk} + c_{21}^{surf} \equiv \left(c_{21}^{h} + c_{21}^{a}\right) + c_{21}^{as}. \tag{Д.1.15}$$

Здесь поверхностные вклады $c_{12}^{surf} \equiv c_{12}^{as}$ и $c_{21}^{surf} \equiv c_{21}^{as}$ обозначены как *асимметричные* части (с индексом *as* от англ. *asymmetric*), каковыми они по существу и являются.

Объемные вклады c_{12}^{bulk} и c_{21}^{bulk}, в соответствии с (3.2.42), представлены в виде суммы «эрмитовой» (c_{12}^{h}, c_{21}^{h}) и «антиэрмитовой» (c_{12}^{a}, c_{21}^{a}) частей (с индексами *h* и *a* от англ. *hermitian* и *antihermitian*). Как уже отмечалось в п. 3.2.2, термины «эрмитовый/антиэрмитовый» в применении к коэффициентам связи являются *условными* и поэтому заключены в кавычки. Дело в том, что истинно эрмитовыми/антиэрмитовыми являются части тензора связи $\Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_c = \Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^{h} + \Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^{a}$, которые удовлетворяют требованиям эрмитовости/антиэрмитовости в форме (3.2.39).

Такие требования к «эрмитовой/антиэрмитовой» частям коэффициентов связи не предъявляются. В применении к ним эти термины просто отражают связь «эрмитовых» (c_{12}^{h}, c_{21}^{h}) и «антиэрмитовых» (c_{12}^{a}, c_{21}^{a}) коэффициентов связи с истинно эрмитовыми $(\Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^{h})$ и антиэрмитовыми $(\Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^{a})$ тензорами связи при помощи формулы (3.2.43). Сами же коэффициенты связи в общем случае не обладают требуемыми свойствами эрмитовой/антиэрмитовой симметрии в истинной форме (3.2.39), а удовлетворяют перестановочному соотношению (3.2.45), которое в рассматриваемом случае имеет вид

$$N_1 c_{12}^{h} = -N_2 c_{21}^{h*}, \tag{Д.1.16}$$

$$N_1 c_{12}^{a} = N_2 c_{21}^{a*}. \tag{Д.1.17}$$

Из сравнения формул (Д.1.7) и (Д.1.16) видно, что коэффициенты связи, входящие в условие (Д.1.7), являются «эрмитовыми» в сформулированном выше понимании.

Подстановка (Д.1.14)–(Д.1.17) в соотношение (Д.1.13) приводит к следующему выражению для кросс-нормы:

$$N_{12} = -\frac{2N_1 c_{12}^{a} + (N_1 c_{12}^{as} + N_2 c_{21}^{as*})}{i(\beta_1'^{*} - \beta_2')} \equiv$$

$$\equiv -\frac{2N_1 c_{12}^{a} + (N_1 c_{12}^{as} + N_2 c_{21}^{as*})}{i(\beta_1 - \beta_2) + (c_{11}^{*} + c_{22})}. \tag{Д.1.18}$$

Как видно из (Д.1.18), существуют две причины, приводящие к необходимости учета ненулевой кросс-нормы N_{12} и использования закона сохранения мощности в модифицированной форме (Д.1.10):

- ненулевая «антиэрмитова» часть коэффициента объемной связи,

$$c_{12}^a = -\frac{i\omega}{N_1}\int\limits_{S_b}\left(\widehat{\mathbf{E}}_1^*\cdot\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^a\cdot\widehat{\mathbf{E}}_2\right)dS = \frac{N_2}{N_1}c_{21}^{a*}, \qquad (Д.1.19)$$

порожденная антиэрмитовой частью $\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^a$ тензора объемной связи (3.1.16);

- коэффициенты поверхностной связи (всегда асимметричные),

$$c_{12}^{as} = -\frac{1}{N_1}\int\limits_{L_b}\left(\widehat{\mathbf{H}}_1^*\cdot\Delta\overline{\xi}_c\cdot\widehat{\mathbf{E}}_2\right)dL, \qquad (Д.1.20)$$

$$c_{21}^{as} = -\frac{1}{N_2}\int\limits_{L_b}\left(\widehat{\mathbf{H}}_2^*\cdot\Delta\overline{\xi}_c\cdot\widehat{\mathbf{E}}_1\right)dL, \qquad (Д.1.21)$$

порожденные тензором поверхностной связи $\Delta\overline{\xi}_c$ в виде (3.1.20).

Следовательно, закон сохранения мощности в обычной форме (Д.1.4) применим только в тех случаях, когда, во-первых, тензор объемной связи (3.1.16) является эрмитовым, и, во-вторых, отсутствуют эффективные поверхностные магнитные токи, учет которых приводит к появлению тензора (3.1.20), определяющего коэффициенты поверхностной связи.

Д.2. Модификация структуры решения связанных уравнений

По аналогии с выражениями (Г.9.15)–(Г.9.21), общее решение связанных уравнений (Д.1.1) и (Д.1.2) записывается в следующем виде (ср. уравнения (Г.9.19) и (Г.9.20)):

$$a_1(z) = A_{11}e^{-\Gamma_1 z} - \frac{\Gamma_2 - i\beta_2'}{c_{21}}A_{22}e^{-\Gamma_2 z}, \qquad (Д.2.1)$$

$$a_2(z) = -\frac{\Gamma_1 - i\beta_1'}{c_{12}}A_{11}e^{-\Gamma_1 z} + A_{22}e^{-\Gamma_2 z}, \qquad (Д.2.2)$$

где Γ_1 и Γ_2 — корни характеристического уравнения типа (Г.9.18), равные (ср. формулу (Г.9.21))

$$\Gamma_{1,2} = i\,\frac{\beta_1' + \beta_2'}{2} \pm \sqrt{c_{12}c_{21} - \left(\frac{\beta_1' - \beta_2'}{2}\right)^2}\,. \qquad (Д.2.3)$$

Таким образом, структура решения в виде продольного распределения волновых амплитуд (Д.2.1) и (Д.2.2) определяется произведением $c_{12}c_{21}$ коэффициентов связи, самая общая форма которых представлена формулами (Д.1.14) и (Д.1.15).

Проанализируем следующие три ситуации.

Случай 1. Тензор объемной связи имеет *эрмитову* формы *в отсутствие* тензора поверхностной связи.

Случай 2. Тензор объемной связи имеет *произвольную* форму *в отсутствие* тензора поверхностной связи.

Случай 3. Тензор объемной связи имеет *произвольную* форму *при наличии* тензора поверхностной связи.

Для согласованности с результатами, полученными в п. Г.9, удобно без потери общности нормировать моды на единичную мощность в виде (Г.4.12) и считать, что собственная мощность моды 1 всегда положительна (с фактором направленности $p_1 = +1$), тогда как мода 2 (с фактором направленности $p_2 = \pm 1$) может переносить в положительном направлении оси z либо положительную ($p_2 = +1$), либо отрицательную ($p_2 = -1$) мощность. Тогда в соответствии с (Г.4.12) собственные нормы мод равняются

$$\begin{aligned} N_1 &\equiv p_1|N_1| = +|N_1| = +4 \text{ Вт}, \\ N_2 &\equiv p_2|N_2| = \pm|N_2| = \pm 4 \text{ Вт}. \end{aligned} \tag{Д.2.4}$$

В этом случае закон сохранения мощности, записанный ранее в виде (Д.1.4) и (Д.1.10), представляется следующим образом:

- в *обычной* форме

$$P(z) = |a_1(z)|^2 \pm |a_2(z)|^2 = \text{const}, \tag{Д.2.5}$$

- в *модифицированной* форме

$$P(z) = |a_1(z)|^2 \pm |a_2(z)|^2 + \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left\{N_{12}\, a_1^*(z) a_2(z)\right\} = \text{const}, \tag{Д.2.6}$$

в то время как перестановочные соотношения — «эрмитовое» (Д.1.16) и «антиэрмитовое» (Д.1.17), теперь имеют вид

$$c_{12}^h = \mp c_{21}^{h*}, \tag{Д.2.7}$$

$$c_{12}^a = \pm c_{21}^{a*}. \tag{Д.2.8}$$

Верхние и нижние знаки в (Д.2.4)–(Д.2.8) соответствуют таким физическим ситуациям, которые ранее в приложении Г (в условиях применимости *обычной* теории связанных волн, когда работает закон сохранения мощности (Д.2.5)) были Люиселлом [1] названы *пассивной* и *активной* связью мод. При этом $c_{12}^a = c_{21}^a = 0$ и $c_{12} = c_{12}^h = \mp c_{21}^{h*} = \mp c_{21}^*$ (ср. (Г.9.9) и (Г.9.10)).

Случай 1. Тензор объемной связи (3.1.16) *эрмитов* ($\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c = \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^h$), а тензор поверхностной связи (3.1.20) *отсутствует* ($\Delta\overline{\boldsymbol{\xi}}_c = 0$).

Тогда, в соответствии с (Д.1.19)–(Д.1.21),

$$c_{12}^a = c_{21}^a = 0, \tag{Д.2.9}$$

$$c_{12}^{as} = c_{21}^{as} = 0, \tag{Д.2.10}$$

так что коэффициенты связи (Д.1.14) и (Д.1.15) с учетом соотношений (Д.2.7)–(Д.2.8) принимают следующий вид:

$$c_{12} = c_{12}^h, \tag{Д.2.11}$$

$$c_{21} = c_{21}^h = \mp c_{12}^*. \tag{Д.2.12}$$

Следовательно, из (Д.1.18) и (Д.2.9)–(Д.2.12) получаем, что

$$N_{12} = 0, \tag{Д.2.13}$$

$$c_{12}c_{21} = \mp |c_{12}^h|^2 \equiv \mp |c_{12}|^2. \tag{Д.2.14}$$

Таким образом, справедлива обычная форма (Д.2.5) закона сохранения мощности и корни (Д.2.3) характеристического уравнения принимает привычную форму, даваемую выражениями (Г.9.23)–(Г.9.24) и (Г.9.26)–(Г.9.27), соответственно, для пассивной и активной связи:

$$\Gamma_{1,2} = i\beta_0 \pm \begin{cases} i\beta_c \quad \text{с} \quad \beta_c = |c_{12}|\sqrt{1+\Delta_{12}^2} & \text{— пассивная связь,} \\ \alpha_c \quad \text{с} \quad \alpha_c = |c_{12}|\sqrt{1-\Delta_{12}^2} & \text{— активная связь,} \end{cases} \tag{Д.2.15}$$

где средняя фазовая постоянная β_0 и параметр фазового рассогласования Δ_{12} определены в виде (ср. формулу (Г.9.1))

$$\beta_0 = \frac{\beta_1' + \beta_2'}{2} \quad \text{и} \quad \Delta_{12} = \frac{|\beta_1' - \beta_2'|}{2\sqrt{|c_{12}c_{21}|}} \equiv \frac{|\beta_1' - \beta_2'|}{2|c_{12}|}. \tag{Д.2.16}$$

Этот случай соответствует *обычной теории связанных мод*, изложенной в приложении Г. Поэтому все предыдущие результаты, ранее полученные в пп. Г.9–Г.14, остаются применимыми без каких-либо изменений.

Случай 2. Тензор объемной связи *произвольный* ($\Delta\overline{\varepsilon}_c = \Delta\overline{\varepsilon}_c^h + \Delta\overline{\varepsilon}_c^a$), а тензор поверхностной связи (3.1.20) *отсутствует* ($\Delta\overline{\xi}_c = 0$).

Тогда, в соответствии с (Д.1.19)–(Д.1.21),

$$c_{12}^a = \pm c_{21}^{a*} \neq 0, \tag{Д.2.17}$$

$$c_{12}^{as} = c_{21}^{as} = 0, \tag{Д.2.18}$$

так что коэффициенты связи (Д.1.14) и (Д.1.15) с учетом соотношений (Д.2.7)–(Д.2.8) принимают следующий вид:

$$c_{12} = c_{12}^h + c_{12}^a, \tag{Д.2.19}$$

$$c_{21} = \mp (c_{12}^{h*} - c_{12}^{a*}). \tag{Д.2.20}$$

Следовательно, из (Д.1.18) и (Д.2.17)–(Д.2.20) получаем, что

$$N_{12} = -\frac{2N_1 c_{12}^a}{i(\beta_1'^* - \beta_2')} \equiv -\frac{2N_1 c_{12}^a}{i(\beta_1 - \beta_2) + (c_{11}^* + c_{22})}, \tag{Д.2.21}$$

$$\begin{aligned} c_{12}c_{21} &= \mp \left[\left(|c_{12}^h|^2 - |c_{12}^a|^2 \right) + 2i\,\mathrm{Im}\,(c_{12}^{h*} c_{12}^a) \right] \equiv \\ &\equiv \mp |c_{eff}|^2 e^{i\phi_c}, \end{aligned} \tag{Д.2.22}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} |c_{12}c_{21}| \equiv |c_{eff}|^2 &= \sqrt{\left(|c_{12}^h|^2 - |c_{12}^a|^2 \right)^2 + \left[2\mathrm{Im}\,(c_{12}^{h*} c_{12}^a) \right]^2} \equiv \\ &\equiv \left(|c_{12}^h|^2 - |c_{12}^a|^2 \right) \sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\,\phi_c}, \end{aligned} \tag{Д.2.23}$$

$$\operatorname{tg}\phi_c = \frac{2\operatorname{Im}(c_{12}^{h*}\,c_{12}^{a})}{|c_{12}^{h}|^2 - |c_{12}^{a}|^2}. \tag{Д.2.24}$$

В этом случае работает *модифицированная форма* (Д.2.6) закона сохранения мощности и корни (Д.2.3) характеристического уравнения также изменяются в сравнении с привычными выражениями, даваемыми формулами (Г.9.23)–(Г.9.24) и (Г.9.26)–(Г.9.27), соответственно, для пассивной и активной связи (ср. формулу (Д.2.15)):

$$\Gamma_{1,2} = i\beta_0 \pm \begin{cases} i\beta_c \quad \text{с} \quad \beta_c = |c_{eff}|\sqrt{e^{i\phi_c} + \Delta_{12}^2} & \text{— пассивная связь,} \\ \alpha_c \quad \text{с} \quad \alpha_c = |c_{eff}|\sqrt{e^{i\phi_c} - \Delta_{12}^2} & \text{— активная связь,} \end{cases} \tag{Д.2.25}$$

где средняя фазовая постоянная β_0 и параметр фазового рассогласования Δ_{12} определены в виде (ср. формулу (Д.2.16))

$$\beta_0 = \frac{\beta_1' + \beta_2'}{2} \quad \text{и} \quad \Delta_{12} = \frac{|\beta_1' - \beta_2'|}{2\sqrt{|c_{12}c_{21}|}} \equiv \frac{|\beta_1' - \beta_2'|}{2|c_{eff}|}. \tag{Д.2.26}$$

Принципиальная разница между обычным выражением (Д.2.15) для корней $\Gamma_{1,2}$ и его модифицированным вариантом (Д.2.25) состоит в появлении в последнем случае экспоненциальной функции $\exp(i\phi_c)$ вместо единицы под знаком квадратного корня.

Случай 3. Тензор объемной связи *произвольный* ($\Delta\overline{\varepsilon}_c = \Delta\overline{\varepsilon}_c^h + \Delta\overline{\varepsilon}_c^a$), а тензор поверхностной связи (3.1.20) *ненулевой* ($\Delta\overline{\xi}_c \neq 0$).

Тогда, в соответствии с (Д.1.19)–(Д.1.21),

$$c_{12}^{a} = \pm\, c_{21}^{a*} \neq 0, \tag{Д.2.27}$$

$$c_{12}^{as} \neq 0, \quad c_{21}^{as} \neq 0, \tag{Д.2.28}$$

так что коэффициенты связи (Д.1.14) и (Д.1.15) с учетом соотношений (Д.2.7)–(Д.2.8) сохраняют свою общую форму:

$$c_{12} = (c_{12}^{h} + c_{12}^{a}) + c_{12}^{as}, \tag{Д.2.29}$$

$$c_{21} = \mp\,(c_{12}^{h*} - c_{12}^{a*}) + c_{21}^{as}. \tag{Д.2.30}$$

Следовательно, кросс-норма N_{12} имеет вид, даваемый общей формулой (Д.1.18), а из равенств (Д.2.29)–(Д.2.30) следует более сложное выражение для произведения коэффициентов связи:

$$\begin{aligned} c_{12}c_{21} &= \mp\Big\{\Big[\big(|c_{12}^{h}|^2 - |c_{12}^{a}|^2\big) + 2i\operatorname{Im}(c_{12}^{h*}\,c_{12}^{a})\Big] + \\ &\qquad + \Big[(c_{12}^{h*} - c_{12}^{a*})c_{12}^{as} + (c_{21}^{h*} - c_{21}^{a*})c_{21}^{as} \mp c_{12}^{as}\,c_{21}^{as}\Big]\Big\} \equiv \\ &\equiv \mp|c_{eff}|^2 e^{i\phi_c}. \end{aligned} \tag{Д.2.31}$$

Здесь, как и прежде в формулах (Д.2.22)–(Д.2.24), величины $|c_{eff}|^2$ и ϕ_c означают модуль и фазу комплексной величины $\mp c_{12}c_{21}$.

Подстановка (Д.2.31) в выражение (Д.2.3) для корней $\Gamma_{1,2}$ сохраняет их в той же *модифицированной форме* (Д.2.25)–(Д.2.26). Однако величины $|c_{eff}|^2$ и ϕ_c, определенные теперь формулой (Д.2.31), имеют более сложную структуру, чем ранее в формуле (Д.2.22).

В обоих последних случаях параметр фазового рассогласования Δ_{12}, определенный в виде (Д.2.26), остается вещественным, как и ранее в (Д.2.16). Однако постоянные распространения $\Gamma_{1,2}$, найденные по формуле (Д.2.25), становятся более сложными по сравнению с аналогичными величинами, получаемыми из (Д.2.15), несмотря на их внешнее сходство. Дело в том, что величины β_c и α_c, входящие в (Д.2.25), в отличие от (Д.2.15), являются комплекснозначными, поскольку под корнем стоит комплексная экспоненциальная функция $\exp(i\phi_c)$. Поэтому их нельзя, как всегда делалось, называть фазовой и амплитудной постоянными.

По этой же причине терминология Люиселла в отношении пассивной и активной связи мод, принятая в обычной теории, становится некорректной в рамках модифицированной теории, когда работает закон сохранения мощности в новой форме (Д.2.6). Тем не менее, мы сохраняем эту терминологию в применении к формуле (Д.2.25). Это делается для того, чтобы выявить два предельных значения $\Gamma_{1,2}$, которые возникают при исчезновении тензоров $\Delta\bar{\varepsilon}_c^a$ и $\Delta\bar{\xi}_c$, когда новые формулы (Д.2.25)–(Д.2.26) модифицированной теории превращаются в старые формулы (Д.2.15)–(Д.2.16) обычной теории связанных мод, изложенной в приложении Г.

Несмотря на более сложные выражения (Д.2.25)–(Д.2.26) для постоянных распространения $\Gamma_{1,2}$ в модифицированной теории, они в принципе позволяют точно решить краевую задачу о возбуждении нормальных волн структуры по той же схеме, что реализована в рамках обычной теории. Для этого необходимо с помощью краевых условий (Г.9.41)–(Г.9.43) найти коэффициенты A_{11} и A_{22} в выражениях (Д.2.1) и (Д.2.2) и в конечном итоге найти продольное распределение волновых амплитуд $a_1(z)$ и $a_2(z)$. Именно такая процедура демонстрируется в приложении Г (см. пп. Г.10–Г.13). Однако картина пространственного обмена энергией между модами становится более сложной. Она определяется не только собственными мощностями, но и взаимной мощностью мод, зависящей от кросс-нормы N_{12}, введенной в виде (Д.1.13), (Д.1.18) или (Д.2.21). При этом во всех режимах энергообмена выполняется закон сохранения мощности в модифицированной форме (Д.1.10) или (Д.2.6).

Элементы модифицированной теории использованы при анализе электрооптической связи мод (см. п. 3.7.3) и обмена мощностью между модами двух связанных волноводов (см. п. 4.10.2).

Приложение Е

МОДАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ИЗБЫТОЧНОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ СРЕДЫ ДЛЯ ВОЛНОВОДА МНОГОВОЛНОВОДНОЙ СИСТЕМЫ

Стартовой точкой при выводе модального разложения избыточной поляризации $\mathbf{P}^p$ для p-волновода, выделенного из многоволноводной системы, является исходная формула (4.4.4), записанная для изотропного диэлектрического возмущения, когда $\Delta\overline{\varepsilon}^p = \Delta\varepsilon^p \,\overline{\mathbf{I}}$, в следующей форме:

$$\mathbf{P}^p = \Delta\varepsilon^p \sum_q \sum_n A_n^q \mathbf{E}_n^q - \mathbf{e}_z \Delta\varepsilon^p \sum_q \frac{P_z^q}{\varepsilon^q}.$$

Эта формула будет последовательно применена к двухволноводной и трехволноводной системам для того, чтобы в дальнейшем получить ее обобщение на случай многоволноводных систем с произвольным числом и расположением отдельных волноводов.

Е.1. Двухволноводная система

Рассмотрим два связанных волновода a и b, для каждого из которых вышеприведенная исходная формула принимает вид

$$\mathbf{P}^a = \Delta\varepsilon^a \left(\sum_m A_m^a \mathbf{E}_m^a + \sum_n A_n^b \mathbf{E}_n^b\right) - \mathbf{e}_z \Delta\varepsilon^a \left(\frac{P_z^a}{\varepsilon^a} + \frac{P_z^b}{\varepsilon^b}\right), \tag{Е.1.1}$$

$$\mathbf{P}^b = \Delta\varepsilon^b \left(\sum_m A_m^a \mathbf{E}_m^a + \sum_n A_n^b \mathbf{E}_n^b\right) - \mathbf{e}_z \Delta\varepsilon^b \left(\frac{P_z^a}{\varepsilon^a} + \frac{P_z^b}{\varepsilon^b}\right). \tag{Е.1.2}$$

Проекция этих выражений на ось z дает систему уравнений для P_z^a и P_z^b:

$$\frac{P_z^a}{\varepsilon^a} = \frac{\Delta\varepsilon^a}{\varepsilon^a} E_{az}^{\Sigma} - \frac{\Delta\varepsilon^a}{\varepsilon^a} \left(\frac{P_z^a}{\varepsilon^a} + \frac{P_z^b}{\varepsilon^b}\right), \tag{Е.1.3}$$

$$\frac{P_z^b}{\varepsilon^b} = \frac{\Delta\varepsilon^b}{\varepsilon^b} E_{az}^{\Sigma} - \frac{\Delta\varepsilon^b}{\varepsilon^b} \left(\frac{P_z^a}{\varepsilon^a} + \frac{P_z^b}{\varepsilon^b}\right). \tag{Е.1.4}$$

Здесь $E_{az}^{\Sigma} = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{E}_a^{\Sigma}$ — продольная компонента суммарного (для двух волноводов) *модального* электрического поля (*без учета* суммарного ортогонального дополнительного поля $\mathbf{E}_b^{\Sigma}$), равного

$$\mathbf{E}_a^{\Sigma} = \mathbf{E}_a^a + \mathbf{E}_a^b = \sum_m A_m^a \mathbf{E}_m^a + \sum_n A_n^b \mathbf{E}_n^b. \tag{Е.1.5}$$

Решение уравнений (Е.1.3) и (Е.1.4) имеет вид

$$\frac{P_z^a}{\varepsilon^a} = \frac{\Delta\varepsilon^a/\varepsilon^a}{1 + \Delta\varepsilon^a/\varepsilon^a + \Delta\varepsilon^b/\varepsilon^b}\, E_{az}^{\Sigma}, \tag{Е.1.6}$$

$$\frac{P_z^b}{\varepsilon^b} = \frac{\Delta\varepsilon^b/\varepsilon^b}{1 + \Delta\varepsilon^a/\varepsilon^a + \Delta\varepsilon^b/\varepsilon^b}\, E_{az}^{\Sigma}. \tag{Е.1.7}$$

Подстановка (Е.1.6) и (Е.1.7) в выражения (Е.1.1) и (Е.1.2) дает искомые модальные разложения избыточной поляризации для волноводов a и b:

$$\mathbf{P}^a = \Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^a \cdot \mathbf{E}_a^{\Sigma} = \Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^a \cdot \left(\sum_m A_m^a \mathbf{E}_m^a + \sum_n A_n^b \mathbf{E}_n^b\right), \tag{Е.1.8}$$

$$\mathbf{P}^b = \Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^b \cdot \mathbf{E}_a^{\Sigma} = \Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^b \cdot \left(\sum_m A_m^a \mathbf{E}_m^a + \sum_n A_n^b \mathbf{E}_n^b\right), \tag{Е.1.9}$$

где введены *тензоры связи* (отмеченные нижним индексом c)

$$\begin{aligned}\Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^a &= \Delta\varepsilon^a \left(\bar{\mathbf{I}} - \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z \frac{\Delta\varepsilon^a/\varepsilon^a + \Delta\varepsilon^b/\varepsilon^b}{1 + \Delta\varepsilon^a/\varepsilon^a + \Delta\varepsilon^b/\varepsilon^b}\right) = \\ &= \Delta\varepsilon^a \left(\bar{\mathbf{I}}_t + \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z \frac{1}{1 + \Delta\varepsilon^a/\varepsilon^a + \Delta\varepsilon^b/\varepsilon^b}\right),\end{aligned} \tag{Е.1.10}$$

$$\begin{aligned}\Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^b &= \Delta\varepsilon^b \left(\bar{\mathbf{I}} - \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z \frac{\Delta\varepsilon^a/\varepsilon^a + \Delta\varepsilon^b/\varepsilon^b}{1 + \Delta\varepsilon^a/\varepsilon^a + \Delta\varepsilon^b/\varepsilon^b}\right) = \\ &= \Delta\varepsilon^b \left(\bar{\mathbf{I}}_t + \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z \frac{1}{1 + \Delta\varepsilon^a/\varepsilon^a + \Delta\varepsilon^b/\varepsilon^b}\right),\end{aligned} \tag{Е.1.11}$$

при этом $\bar{\mathbf{I}}_t = \mathbf{e}_x\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y\mathbf{e}_y$ — единичный поперечный тензор.

Е.2. Трехволноводная и многоволноводная системы

Для трех связанных волноводов a, b и c исходная формула принимает вид:

$$\mathbf{P}^a = \Delta\varepsilon^a \mathbf{E}_a^{\Sigma} - \mathbf{e}_z \Delta\varepsilon^a \left(\frac{P_z^a}{\varepsilon^a} + \frac{P_z^b}{\varepsilon^b} + \frac{P_z^c}{\varepsilon^c}\right), \tag{Е.2.1}$$

$$\mathbf{P}^b = \Delta\varepsilon^b \mathbf{E}_a^{\Sigma} - \mathbf{e}_z \Delta\varepsilon^b \left(\frac{P_z^a}{\varepsilon^a} + \frac{P_z^b}{\varepsilon^b} + \frac{P_z^c}{\varepsilon^c}\right), \tag{Е.2.2}$$

$$\mathbf{P}^c = \Delta\varepsilon^c \mathbf{E}_a^{\Sigma} - \mathbf{e}_z \Delta\varepsilon^c \left(\frac{P_z^a}{\varepsilon^a} + \frac{P_z^b}{\varepsilon^b} + \frac{P_z^c}{\varepsilon^c}\right). \tag{Е.2.3}$$

Суммарное (для трех волноводов) модальное электрическое поле (*без суммарного ортогонального дополнительного поля* $\mathbf{E}_b^{\Sigma}$) равняется (ср. формулу (Е.1.5))

$$\mathbf{E}_a^\Sigma = \mathbf{E}_a^a + \mathbf{E}_a^b + \mathbf{E}_a^c = \sum_m A_m^a \mathbf{E}_m^a + \sum_n A_n^b \mathbf{E}_n^b + \sum_k A_k^c \mathbf{E}_k^c. \tag{E.2.4}$$

Проекция на ось z уравнений (E.2.1)–(E.2.3) дает систему из трех уравнений относительно P_z^p ($p = a, b, c$) (ср. формулы (E.1.3)–(E.1.4)):

$$\frac{P_z^p}{\varepsilon^p} = \frac{\Delta\varepsilon^p}{\varepsilon^p} E_{az}^\Sigma - \frac{\Delta\varepsilon^p}{\varepsilon^p}\left(\frac{P_z^a}{\varepsilon^a} + \frac{P_z^b}{\varepsilon^b} + \frac{P_z^c}{\varepsilon^c}\right), \tag{E.2.5}$$

решение которой имеет вид ($p = a, b, c$) (ср. формулы (E.1.6)–(E.1.7))

$$\frac{P_z^p}{\varepsilon^p} = \frac{\Delta\varepsilon^p/\varepsilon^p}{1 + \Delta\varepsilon^a/\varepsilon^a + \Delta\varepsilon^b/\varepsilon^b + \Delta\varepsilon^c/\varepsilon^c} E_{az}^\Sigma. \tag{E.2.6}$$

Подстановка (E.2.6) в выражения (E.2.1)–(E.2.3) дает искомые модальные разложения избыточной поляризации для отдельно взятого волновода ($p = a, b, c$) (ср. формулы (E.1.8)–(E.1.9)):

$$\mathbf{P}^p = \Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^p \cdot \mathbf{E}_a^\Sigma = \Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^p \cdot \left(\sum_m A_m^a \mathbf{E}_m^a + \sum_n A_n^b \mathbf{E}_n^b + \sum_k A_k^c \mathbf{E}_k^c\right), \tag{E.2.7}$$

где *тензоры связи* ($p = a, b, c$) определены аналогично (E.1.10) и (E.1.11):

$$\Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^p = \Delta\varepsilon^p\left(\bar{\mathbf{I}} - \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z \frac{\Delta\varepsilon^a/\varepsilon^a + \Delta\varepsilon^b/\varepsilon^b + \Delta\varepsilon^c/\varepsilon^c}{1 + \Delta\varepsilon^a/\varepsilon^a + \Delta\varepsilon^b/\varepsilon^b + \Delta\varepsilon^c/\varepsilon^c}\right) =$$
$$= \Delta\varepsilon^p\left(\bar{\mathbf{I}}_t + \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z \frac{1}{1 + \Delta\varepsilon^a/\varepsilon^a + \Delta\varepsilon^b/\varepsilon^b + \Delta\varepsilon^c/\varepsilon^c}\right). \tag{E.2.8}$$

Формулы (E.2.6)–(E.2.8) легко обобщить на случай многоволноводных систем. Действительно, для выделенного p-волновода имеем

$$\frac{P_z^p}{\varepsilon^p} = \frac{\Delta\varepsilon^p/\varepsilon^p}{1 + \sum_q \Delta\varepsilon^q/\varepsilon^q}(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{E}_a^\Sigma) = \frac{\Delta\varepsilon^p/\varepsilon^p}{1 + \sum_q \Delta\varepsilon^q/\varepsilon^q}\sum_q\sum_n A_n^q(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{E}_n^q), \tag{E.2.9}$$

$$\mathbf{P}^p = \Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^p \cdot \mathbf{E}_a^\Sigma = \Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^p \cdot \sum_q \mathbf{E}_a^q = \Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^p \cdot \sum_q\sum_n A_n^q \mathbf{E}_n^q, \tag{E.2.10}$$

где *тензор объемной связи* (отмеченный нижним индексом c) равен

$$\Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^p = \Delta\varepsilon^p\left(\bar{\mathbf{I}} - \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z \frac{\sum_q \Delta\varepsilon^q/\varepsilon^q}{1 + \sum_q \Delta\varepsilon^q/\varepsilon^q}\right) =$$
$$= \Delta\varepsilon^p\left(\bar{\mathbf{I}}_t + \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z \frac{1}{1 + \sum_q \Delta\varepsilon^q/\varepsilon^q}\right), \tag{E.2.11}$$

а суммарное (для всех волноводов) *модальное* электрическое поле (*без учета* суммарного ортогонального дополнительного поля $\mathbf{E}_b^\Sigma$) имеет вид

$$\mathbf{E}_a^\Sigma = \sum_q \mathbf{E}_a^q = \sum_q\sum_n A_n^q \mathbf{E}_n^q. \tag{E.2.12}$$

Приложение Ж

КОЭФФИЦИЕНТЫ СВЯЗИ И КРОСС-НОРМЫ ДЛЯ ДВУХ СВЯЗАННЫХ ВОЛНОВОДОВ

Ж.1. Коэффициенты связи для мод ТЕ-типа

ТЕ-моды планарного волновода имеют следующие компоненты электромагнитного поля (см. п. 1.7.1):

$$E_x \neq 0,\ \ H_y \neq 0,\ \ H_z \neq 0 \quad \text{и} \quad E_y = E_z = H_x = 0.$$

Таким образом, из (4.11.22)–(4.11.23) следует, что *поверхностный вклад* в коэффициенты связи для мод ТЕ-типа всегда *отсутствует*, т. е.

$$c_{11}^{surf} = c_{22}^{surf} = c_{12}^{surf} = c_{21}^{surf} = 0.$$

Тогда формулы (4.11.6)–(4.11.9) и (4.11.20)–(4.11.21) дают следующие выражения для собственных и взаимных коэффициентов *объемной связи*:

$$c_{11} \equiv \left(c_{mm}^{aa}\right)_{bulk} = -\frac{i\omega w}{N_m^a} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Delta\varepsilon^a(y) \left|\widehat{E}_{mx}^a(y)\right|^2 dy, \tag{Ж.1.1}$$

$$c_{22} \equiv \left(c_{nn}^{bb}\right)_{bulk} = -\frac{i\omega w}{N_n^b} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Delta\varepsilon^b(y) \left|\widehat{E}_{nx}^b(y)\right|^2 dy, \tag{Ж.1.2}$$

$$c_{12} \equiv \left(c_{mn}^{ab}\right)_{bulk} = -\frac{i\omega w}{N_m^a} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Delta\varepsilon^a(y)\, \widehat{E}_{mx}^{a*}(y) \widehat{E}_{nx}^b(y)\, dy, \tag{Ж.1.3}$$

$$c_{21} \equiv \left(c_{nm}^{ba}\right)_{bulk} = -\frac{i\omega w}{N_n^b} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Delta\varepsilon^b(y)\, \widehat{E}_{nx}^{b*}(y) \widehat{E}_{mx}^a(y)\, dy, \tag{Ж.1.4}$$

где профили диэлектрического возмущения $\Delta\varepsilon^a(y)$ и $\Delta\varepsilon^b(y)$ изображены на рис. 4.2 для относительных величин (см. формулы (4.11.14) и (4.11.15)).

Чтобы воспользоваться формулами (Ж.1.1)–(Ж.1.4), необходимо знать мембранные функции модальных полей $\left(\widehat{E}^a_{mx}(y),\ \widehat{E}^b_{nx}(y)\right)$ и нормы $\left(N^a_m,\ N^b_n\right)$ для m-й моды a-волновода и n-й моды b-волновода. В пп. 1.7.1 и 1.8.1 приведены выражения для этих величин. Поскольку невозмущенные профили $\varepsilon^a_r(y) = \varepsilon^a(y)/\varepsilon_0$ и $\varepsilon^b_r(y) = \varepsilon^b(y)/\varepsilon_0$, показанные на рис. 4.2 *в* и *г*, являются симметричными для каждого волновода относительно своего центра $y = h + a$ и $y = -(h + b)$, то будем использовать выражения для четных мод симметричного волновода, которые имеют следующий вид (см. уравнения (1.8.7), (1.8.20), (1.8.21) и (1.8.23)).

TE$_m$-мода a-волновода

$$\widehat{E}^a_{mx}(y) = \begin{cases} E^a_m \cos\varkappa^a_m a\ \exp\left[-\zeta^a_m[y-(h+2a)]\right], & y \geqslant (h+2a), \\ E^a_m \cos\varkappa^a_m[y-(h+a)], & h \leqslant y \leqslant (h+2a), \\ E^a_m \cos\varkappa^a_m a\ \exp\left[\zeta^a_m(y-h)\right], & y \leqslant h, \end{cases} \tag{Ж.1.5}$$

$$N^a_m = w\frac{\beta^a_m d^a_m}{\omega\mu_0}\left(E^a_m\right)^2, \qquad d^a_m = 2\left(a + \frac{1}{\zeta^a_m}\right), \tag{Ж.1.6}$$

$$\varkappa^a_m = \sqrt{\omega^2\varepsilon_a\mu_0 - (\beta^a_m)^2}\,, \qquad \zeta^a_m = \sqrt{(\beta^a_m)^2 - \omega^2\varepsilon_0\mu_0}\,, \tag{Ж.1.7}$$

$$\begin{aligned} \cos\varkappa^a_m a &= \frac{\varkappa^a_m}{\sqrt{(\varkappa^a_m)^2 + (\zeta^a_m)^2}} = \frac{\varkappa^a_m}{\omega\sqrt{(\varepsilon_a - \varepsilon_0)\mu_0}}\,, \\ \sin\varkappa^a_m a &= \frac{\zeta^a_m}{\sqrt{(\varkappa^a_m)^2 + (\zeta^a_m)^2}} = \frac{\zeta^a_m}{\omega\sqrt{(\varepsilon_a - \varepsilon_0)\mu_0}}\,. \end{aligned} \tag{Ж.1.8}$$

Выражения (Ж.1.8) являются следствием дисперсионного уравнения (1.7.18) для четных мод, записанного с учетом замен $ik^\mu_{y2} \to \zeta^a_m$ и $k_{y1} \to \varkappa^a_m$ в виде

$$\zeta^a_m = \varkappa^a_m \operatorname{tg}\varkappa^a_m a.$$

TE$_n$-мода b-волновода

$$\widehat{E}^b_{nx}(y) = \begin{cases} E^b_n \cos\varkappa^b_n b\ \exp\left[-\zeta^b_n(y+h)\right], & y \geqslant -h, \\ E^b_n \cos\varkappa^b_n[y+(h+b)], & -(h+2b) \leqslant y \leqslant -h, \\ E^b_n \cos\varkappa^b_n b\ \exp\left[\zeta^b_n[y+(h+2b)]\right], & y \leqslant -(h+2b), \end{cases} \tag{Ж.1.9}$$

$$N^b_n = w\frac{\beta^b_n d^b_n}{\omega\mu_0}\left(E^b_n\right)^2, \qquad d^b_n = 2\left(b + \frac{1}{\zeta^b_n}\right), \tag{Ж.1.10}$$

$$\varkappa^b_n = \sqrt{\omega^2\varepsilon_b\mu_0 - (\beta^b_n)^2}\,, \qquad \zeta^b_n = \sqrt{(\beta^b_n)^2 - \omega^2\varepsilon_0\mu_0}\,, \tag{Ж.1.11}$$

$$\cos \varkappa_n^b b = \frac{\varkappa_n^b}{\sqrt{(\varkappa_n^b)^2 + (\zeta_n^b)^2}} = \frac{\varkappa_n^b}{\omega\sqrt{(\varepsilon_b - \varepsilon_0)\mu_0}}\,,$$
$$\sin \varkappa_n^b b = \frac{\zeta_n^b}{\sqrt{(\varkappa_n^b)^2 + (\zeta_n^b)^2}} = \frac{\zeta_n^b}{\omega\sqrt{(\varepsilon_b - \varepsilon_0)\mu_0}}\,. \qquad (Ж.1.12)$$

Выражения (Ж.1.12) являются следствием дисперсионного уравнения (1.7.18) для четных мод, записанного с учетом замен $ik_{y2}^{\mu} \to \zeta_n^b$ и $k_{y1} \to \varkappa_n^b$ в виде

$$\zeta_n^b = \varkappa_n^b \operatorname{tg} \varkappa_n^b b.$$

Будем вычислять собственные и взаимные коэффициенты связи, подставляя выражения (Ж.1.5), (Ж.1.9) и (4.11.14)–(4.11.19) в (Ж.1.1)–(Ж.1.4) и используя соотношения (Ж.1.6)–(Ж.1.8) и (Ж.1.10)–(Ж.1.12), в частности,

$$\left(E_m^a E_n^b\right) = \frac{\omega\mu_0}{w}\sqrt{\frac{N_m^a}{\beta_m^a d_m^a}\,\frac{N_n^b}{\beta_n^b d_n^b}}\,. \qquad (Ж.1.13)$$

Вспомогательные интегралы, обозначенные ниже как J_1–J_{11}, которые будут применяться в последующих преобразованиях, вычислены в конце этого приложения.

Ж.1.1. Собственные коэффициенты связи

$$c_{11} = -\frac{i\omega w}{N_m^a}\left\{\int\limits_{-(h+2b)}^{-h} (\varepsilon_b - \varepsilon_0)\left(E_m^a \cos \varkappa_m^a a\right)^2 e^{2\zeta_m^a (y-h)}\,dy + \right.$$
$$\left. + \int\limits_{-h}^{h} (\varepsilon_2 - \varepsilon_0)\left(E_m^a \cos \varkappa_m^a a\right)^2 e^{2\zeta_m^a (y-h)}\,dy \right\} =$$
$$= -\frac{i\omega w}{N_m^a}\left(E_m^a\right)^2 \left(\cos \varkappa_m^a a\right)^2 \left[(\varepsilon_b - \varepsilon_0)\,J_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_0)\,J_2\right] =$$
$$= -i\frac{(\varkappa_m^a)^2}{\beta_m^a d_m^a}\left(\frac{\varepsilon_b - \varepsilon_0}{\varepsilon_a - \varepsilon_0}\,\frac{1 - e^{-4\zeta_m^a b}}{2\zeta_m^a} - \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_0}{\varepsilon_a - \varepsilon_0}\,\frac{1 - e^{4\zeta_m^a h}}{2\zeta_m^a}\right) e^{-4\zeta_m^a h}, \qquad (Ж.1.14)$$

$$c_{22} = -\frac{i\omega w}{N_n^b}\left\{\int\limits_{h}^{(h+2a)} (\varepsilon_a - \varepsilon_0)\left(E_n^b \cos \varkappa_n^b b\right)^2 e^{-2\zeta_n^b (y+h)}\,dy + \right.$$
$$\left. + \int\limits_{-h}^{h} (\varepsilon_a - \varepsilon_0)\left(E_n^b \cos \varkappa_n^b b\right)^2 e^{-2\zeta_n^b (y+h)}\,dy \right\} =$$

$$= -\frac{i\omega w}{N_n^b}\left(E_n^b\right)^2\left(\cos\varkappa_n^b b\right)^2\left[(\varepsilon_a-\varepsilon_0)\,J_3+(\varepsilon_2-\varepsilon_0)\,J_4\right] =$$

$$= -i\frac{(\varkappa_n^b)^2}{\beta_n^b d_n^b}\left(\frac{\varepsilon_a-\varepsilon_0}{\varepsilon_b-\varepsilon_0}\,\frac{1-e^{-4\zeta_n^b a}}{2\zeta_n^b}-\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_0}{\varepsilon_b-\varepsilon_0}\,\frac{1-e^{4\zeta_n^b h}}{2\zeta_n^b}\right)e^{-4\zeta_n^b h}. \qquad (Ж.1.15)$$

Ж.1.2. Взаимные коэффициенты связи

$$c_{12} = -\frac{i\omega w}{N_m^a}\left\{\int\limits_{-(h+2b)}^{-h}(\varepsilon_b-\varepsilon_0)\left(E_m^a\cos\varkappa_m^a a\right)e^{\zeta_m^a(y-h)}\,E_n^b\cos\varkappa_n^b\left[y+(h+b)\right]dy\;+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{-h}^{h}(\varepsilon_2-\varepsilon_0)\left(E_m^a\cos\varkappa_m^a a\right)e^{\zeta_m^a(y-h)}\left(E_n^b\cos\varkappa_n^b b\right)e^{-\zeta_n^b(y+h)}dy\right\} =$$

$$= -\frac{i\omega w}{N_m^a}\left(E_m^a E_n^b\right)\cos\varkappa_m^a a\left[(\varepsilon_b-\varepsilon_0)\,J_5+(\varepsilon_2-\varepsilon_0)\cos\varkappa_n^b b\;J_6\right] =$$

$$= -i\frac{\varkappa_m^a\varkappa_n^b}{\sqrt{\beta_m^a d_m^a\,\beta_n^b d_n^b}}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_b-\varepsilon_0}{\varepsilon_a-\varepsilon_0}}\;\frac{\left(1-e^{-2\zeta_m^a b}\right)\zeta_m^a+\left(1+e^{-2\zeta_m^a b}\right)\zeta_n^b}{(\zeta_m^a)^2+(\varkappa_n^b)^2}\;-\right.$$

$$\left.-\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_0}{\sqrt{(\varepsilon_a-\varepsilon_0)(\varepsilon_b-\varepsilon_0)}}\;\frac{1-e^{2(\zeta_m^a-\zeta_n^b)h}}{\zeta_m^a-\zeta_n^b}\right)e^{-2\zeta_m^a h}, \qquad (Ж.1.16)$$

$$c_{21} = -\frac{i\omega w}{N_n^b}\left\{\int\limits_{h}^{(h+2a)}(\varepsilon_a-\varepsilon_0)\left(E_n^b\cos\varkappa_n^b b\right)e^{-\zeta_n^b(y+h)}\,E_m^a\cos\varkappa_m^a\left[y-(h+a)\right]dy\;+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{-h}^{h}(\varepsilon_2-\varepsilon_0)\left(E_n^b\cos\varkappa_n^b b\right)e^{-\zeta_n^b(y+h)}\left(E_m^a\cos\varkappa_m^a a\right)e^{\zeta_m^a(y-h)}dy\right\} =$$

$$= -\frac{i\omega w}{N_n^b}\left(E_m^a E_n^b\right)\cos\varkappa_n^b b\left[(\varepsilon_a-\varepsilon_0)\,J_7+(\varepsilon_2-\varepsilon_0)\cos\varkappa_m^a a\;J_6\right] =$$

$$= -i\frac{\varkappa_m^a\varkappa_n^b}{\sqrt{\beta_m^a d_m^a\,\beta_n^b d_n^b}}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_a-\varepsilon_0}{\varepsilon_b-\varepsilon_0}}\;\frac{\left(1-e^{-2\zeta_n^b a}\right)\zeta_n^b+\left(1+e^{-2\zeta_n^b a}\right)\zeta_m^a}{(\zeta_n^b)^2+(\varkappa_m^a)^2}\;-\right.$$

$$\left.-\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_0}{\sqrt{(\varepsilon_a-\varepsilon_0)(\varepsilon_b-\varepsilon_0)}}\;\frac{1-e^{2(\zeta_n^b-\zeta_m^a)h}}{\zeta_n^b-\zeta_m^a}\right)e^{-2\zeta_n^b h}. \qquad (Ж.1.17)$$

Ж.2. Коэффициенты связи для мод ТМ-типа

ТМ-моды планарного волновода имеют следующие компоненты электромагнитного поля (см. п. 1.7.2):

$$E_y \neq 0, \quad E_z \neq 0, \quad H_x \neq 0 \quad \text{и} \quad E_x = H_y = H_z = 0.$$

Из (4.11.6)–(4.11.9) и (4.11.20)–(4.11.23) следует, что для мод ТМ-типа все коэффициенты связи содержат объемный и поверхностный вклады:

- ***коэффициенты объемной связи***

$$c_{11}^{bulk} \equiv \left(c_{mm}^{aa}\right)_{bulk} =$$

$$= -\frac{i\omega w}{N_m^a} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Delta\varepsilon^a(y) \left[\left|\widehat{E}_{my}^a(y)\right|^2 + \frac{\left|\widehat{E}_{mz}^a(y)\right|^2}{1 + \Delta\varepsilon^a/\varepsilon^a + \Delta\varepsilon^b/\varepsilon^b}\right] dy, \qquad (Ж.2.1)$$

$$c_{22}^{bulk} \equiv \left(c_{nn}^{bb}\right)_{bulk} =$$

$$= -\frac{i\omega w}{N_n^b} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Delta\varepsilon^b(y) \left[\left|\widehat{E}_{ny}^b(y)\right|^2 + \frac{\left|\widehat{E}_{nz}^b(y)\right|^2}{1 + \Delta\varepsilon^a/\varepsilon^a + \Delta\varepsilon^b/\varepsilon^b}\right] dy, \qquad (Ж.2.2)$$

$$c_{12}^{bulk} \equiv \left(c_{mn}^{ab}\right)_{bulk} =$$

$$= -\frac{i\omega w}{N_m^a} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Delta\varepsilon^a(y) \left[\widehat{E}_{my}^{a*}(y)\widehat{E}_{ny}^b(y) + \frac{\widehat{E}_{mz}^{a*}(y)\widehat{E}_{nz}^b(y)}{1 + \Delta\varepsilon^a/\varepsilon^a + \Delta\varepsilon^b/\varepsilon^b}\right] dy, \quad (Ж.2.3)$$

$$c_{21}^{bulk} \equiv \left(c_{nm}^{ba}\right)_{bulk} =$$

$$= -\frac{i\omega w}{N_n^b} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Delta\varepsilon^b(y) \left[\widehat{E}_{ny}^{b*}(y)\widehat{E}_{my}^a(y) + \frac{\widehat{E}_{nz}^{b*}(y)\widehat{E}_{mz}^a(y)}{1 + \Delta\varepsilon^a/\varepsilon^a + \Delta\varepsilon^b/\varepsilon^b}\right] dy; \quad (Ж.2.4)$$

- ***коэффициенты поверхностной связи***

$$c_{11}^{surf} \equiv \left(c_{mm}^{aa}\right)_{surf} = -\frac{1}{N_m^a} \int\limits_{L_b^a} \frac{\Delta\varepsilon^a/\varepsilon^a}{1 + \Delta\varepsilon^a/\varepsilon^a + \Delta\varepsilon^b/\varepsilon^b} \left(\widehat{\mathbf{H}}_m^{a*} \cdot \boldsymbol{\tau}_b^a\right)\widehat{E}_{mz}^a dL =$$

$$= -\frac{1}{N_m^a}\int\limits_{-w/2}^{w/2}\frac{\Delta\varepsilon^a/\varepsilon^a}{1+\Delta\varepsilon^a/\varepsilon^a+\Delta\varepsilon^b/\varepsilon^b}\Big[-\widehat{H}_{mx}^{a*}(y_u)\widehat{E}_{mz}^{a}(y_u)+ \\ +\widehat{H}_{mx}^{a*}(y_l)\widehat{E}_{mz}^{a}(y_l)\Big]\,dx, \tag{Ж.2.5}$$

$$c_{22}^{surf} \equiv \left(c_{nn}^{bb}\right)_{surf} = -\frac{1}{N_n^b}\int\limits_{L_b^b}\frac{\Delta\varepsilon^b/\varepsilon^b}{1+\Delta\varepsilon^a/\varepsilon^a+\Delta\varepsilon^b/\varepsilon^b}\left(\widehat{\mathbf{H}}_n^{b*}\cdot\boldsymbol{\tau}_b^b\right)\widehat{E}_{nz}^b\,dL = \\ = -\frac{1}{N_n^b}\int\limits_{-w/2}^{w/2}\frac{\Delta\varepsilon^b/\varepsilon^b}{1+\Delta\varepsilon^a/\varepsilon^a+\Delta\varepsilon^b/\varepsilon^b}\Big[-\widehat{H}_{nx}^{b*}(y_u)\widehat{E}_{nz}^{b}(y_u)+ \\ +\widehat{H}_{nx}^{b*}(y_l)\widehat{E}_{nz}^{b}(y_l)\Big]\,dx, \tag{Ж.2.6}$$

$$c_{12}^{surf} \equiv \left(c_{mn}^{ab}\right)_{surf} = -\frac{1}{N_m^a}\int\limits_{L_b^a}\frac{\Delta\varepsilon^a/\varepsilon^a}{1+\Delta\varepsilon^a/\varepsilon^a+\Delta\varepsilon^b/\varepsilon^b}\left(\widehat{\mathbf{H}}_m^{a*}\cdot\boldsymbol{\tau}_b^a\right)\widehat{E}_{nz}^b\,dL = \\ = -\frac{1}{N_m^a}\int\limits_{-w/2}^{w/2}\frac{\Delta\varepsilon^a/\varepsilon^a}{1+\Delta\varepsilon^a/\varepsilon^a+\Delta\varepsilon^b/\varepsilon^b}\Big[-\widehat{H}_{mx}^{a*}(y_u)\widehat{E}_{nz}^{b}(y_u)+ \\ +\widehat{H}_{mx}^{a*}(y_l)\widehat{E}_{nz}^{b}(y_l)\Big]\,dx, \tag{Ж.2.7}$$

$$c_{21}^{surf} \equiv \left(c_{nm}^{ba}\right)_{surf} = -\frac{1}{N_n^b}\int\limits_{L_b^b}\frac{\Delta\varepsilon^b/\varepsilon^b}{1+\Delta\varepsilon^a/\varepsilon^a+\Delta\varepsilon^b/\varepsilon^b}\left(\widehat{\mathbf{H}}_n^{b*}\cdot\boldsymbol{\tau}_b^b\right)\widehat{E}_{mz}^a\,dL = \\ = -\frac{1}{N_n^b}\int\limits_{-w/2}^{w/2}\frac{\Delta\varepsilon^b/\varepsilon^b}{1+\Delta\varepsilon^a/\varepsilon^a+\Delta\varepsilon^b/\varepsilon^b}\Big[-\widehat{H}_{nx}^{b*}(y_u)\widehat{E}_{mz}^{a}(y_u)+ \\ +\widehat{H}_{nx}^{b*}(y_l)\widehat{E}_{mz}^{a}(y_l)\Big]\,dx. \tag{Ж.2.8}$$

Здесь учтено, что на верхней и нижней границах (соответствующих плоскостям $y = y_u$ и $y = y_l$ с единичными внешними нормалями $\mathbf{n}_b = \pm\,\mathbf{e}_y$) единичные тангенциальные векторы равны $\boldsymbol{\tau}_b \equiv \mathbf{e}_z \times \mathbf{n}_b = \mp\,\mathbf{e}_x$. Диэлектрические возмущения $\Delta\varepsilon^{a,b}(y)$ и их относительные величины $\Delta\varepsilon^{a,b}(y)/\varepsilon^{a,b}(y)$ для двухволноводной структуры, изображенной на рис. 4.2, даются формулами (4.11.14)–(4.11.15) и (4.11.18)–(4.11.19).

Направляемая m-я мода a-волновода и n-я мода b-волновода характеризуются мембранными функциями модальных полей и другими величинами следующего вида (см. уравнения (1.8.26) и (1.8.37)–(1.8.39)).

ТМ$_m$-мода a-волновода

$$\widehat{H}^a_{mx}(y) = \begin{cases} H^a_m \cos \varkappa^a_m a \, \exp\bigl[-\zeta^a_m[y-(h+2a)]\bigr], & y \geqslant (h+2a), \\ H^a_m \cos \varkappa^a_m [y-(h+a)], & h \leqslant y \leqslant (h+2a), \\ H^a_m \cos \varkappa^a_m a \, \exp\bigl[\zeta^a_m (y-h)\bigr], & y \leqslant h, \end{cases} \tag{Ж.2.9}$$

$$\widehat{E}^a_{my}(y) = \begin{cases} -\frac{\beta^a_m}{\omega\varepsilon_0} H^a_m \cos \varkappa^a_m a \, \exp\bigl[-\zeta^a_m[y-(h+2a)]\bigr], & y > (h+2a), \\ -\frac{\beta^a_m}{\omega\varepsilon_a} H^a_m \cos \varkappa^a_m [y-(h+a)], & h < y < (h+2a), \\ -\frac{\beta^a_m}{\omega\varepsilon_0} H^a_m \cos \varkappa^a_m a \, \exp\bigl[\zeta^a_m (y-h)\bigr], & y < h, \end{cases} \tag{Ж.2.10}$$

$$\widehat{E}^a_{mz}(y) = \begin{cases} \frac{\zeta^a_m}{i\omega\varepsilon_0} H^a_m \cos \varkappa^a_m a \, \exp\bigl[-\zeta^a_m[y-(h+2a)]\bigr], & y \geqslant (h+2a), \\ \frac{\varkappa^a_m}{i\omega\varepsilon_a} H^a_m \cos \varkappa^a_m [y-(h+a)], & h \leqslant y \leqslant (h+2a), \\ -\frac{\zeta^a_m}{i\omega\varepsilon_0} H^a_m \cos \varkappa^a_m a \, \exp\bigl[\zeta^a_m (y-h)\bigr], & y \leqslant h, \end{cases} \tag{Ж.2.11}$$

$$N^a_m = w\frac{\beta^a_m d^a_m}{\omega\varepsilon_a}\bigl(H^a_m\bigr)^2, \qquad d^a_m = 2\left(a + \frac{1}{\zeta^a_m q^a_m}\right), \tag{Ж.2.12}$$

$$\varkappa^a_m = \sqrt{\omega^2\varepsilon_a\mu_0 - (\beta^a_m)^2}\,, \qquad \zeta^a_m = \sqrt{(\beta^a_m)^2 - \omega^2\varepsilon_0\mu_0}\,, \tag{Ж.2.13}$$

$$\cos \varkappa^a_m a = \frac{\varepsilon_0\varkappa^a_m}{\sqrt{(\varepsilon_0\varkappa^a_m)^2 + (\varepsilon_a\zeta^a_m)^2}} = \frac{\varepsilon_0\varkappa^a_m}{\sqrt{\varepsilon_a(\varepsilon_a-\varepsilon_0)\bigl[(\beta^a_m)^2 - (\varepsilon_0/\varepsilon_a)(\varkappa^a_m)^2\bigr]}}\,,$$
$$\sin \varkappa^a_m a = \frac{\varepsilon_a\zeta^a_m}{\sqrt{(\varepsilon_0\varkappa^a_m)^2 + (\varepsilon_a\zeta^a_m)^2}} = \frac{\varepsilon_a\zeta^a_m}{\sqrt{\varepsilon_a(\varepsilon_a-\varepsilon_0)\bigl[(\beta^a_m)^2 - (\varepsilon_0/\varepsilon_a)(\varkappa^a_m)^2\bigr]}}\,. \tag{Ж.2.14}$$

Выражения (Ж.2.14) вытекают из дисперсионного уравнения (1.7.35) для четных мод, записанного с учетом замен $ik^\varepsilon_{y2} \to (\varepsilon_a/\varepsilon_0)\zeta^a_m$ и $k_{y1} \to \varkappa^a_m$ в виде

$$\frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_0}\,\zeta^a_m = \varkappa^a_m \operatorname{tg} \varkappa^a_m a.$$

ТМ$_n$-мода b-волновода

$$\widehat{H}^b_{nx}(y) = \begin{cases} H^b_n \cos \varkappa^b_n b \, \exp\bigl[-\zeta^b_n (y+h)\bigr], & y \geqslant -h, \\ H^b_n \cos \varkappa^b_n [y+(h+b)], & -(h+2b) \leqslant y \leqslant -h, \\ H^b_n \cos \varkappa^b_n b \, \exp\bigl[\zeta^b_n [y+(h+2b)]\bigr], & y \leqslant -(h+2b), \end{cases} \tag{Ж.2.15}$$

$$\widehat{E}^b_{ny}(y)=\begin{cases}-\frac{\beta^b_n}{\omega\varepsilon_0}\,H^b_n\cos\varkappa^b_n b\,\exp\bigl[-\zeta^b_n(y+h)\bigr], & y\geqslant -h,\\ -\frac{\beta^b_n}{\omega\varepsilon_b}\,H^b_n\cos\varkappa^b_n\bigl[y+(h+b)\bigr], & -(h+2b)\leqslant y\leqslant -h,\\ -\frac{\zeta^b_n}{\omega\varepsilon_0}\,H^b_n\cos\varkappa^b_n b\,\exp\bigl[\zeta^b_n[y+(h+2b)]\bigr], & y\leqslant -(h+2b),\end{cases} \tag{Ж.2.16}$$

$$\widehat{E}^b_{nz}(y)=\begin{cases}\frac{\zeta^b_n}{i\omega\varepsilon_0}\,H^b_n\cos\varkappa^b_n b\,\exp\bigl[-\zeta^b_n(y+h)\bigr], & y\geqslant -h,\\ \frac{\varkappa^b_n}{i\omega\varepsilon_b}\,H^b_n\cos\varkappa^b_n\bigl[y+(h+b)\bigr], & -(h+2b)\leqslant y\leqslant -h,\\ -\frac{\beta^b_n}{i\omega\varepsilon_0}\,H^b_n\cos\varkappa^b_n b\,\exp\bigl[\zeta^b_n[y+(h+2b)]\bigr], & y\leqslant -(h+2b),\end{cases} \tag{Ж.2.17}$$

$$N^b_n=w\frac{\beta^b_n d^b_n}{\omega\varepsilon_b}\bigl(H^b_n\bigr)^2,\qquad d^b_n=2\left(b+\frac{1}{\zeta^b_n q^b_n}\right), \tag{Ж.2.18}$$

$$\varkappa^b_n=\sqrt{\omega^2\varepsilon_b\mu_0-(\beta^b_n)^2}\,,\qquad \zeta^b_n=\sqrt{(\beta^b_n)^2-\omega^2\varepsilon_0\mu_0}\,, \tag{Ж.2.19}$$

$$\begin{aligned}\cos\varkappa^b_n b&=\frac{\varepsilon_0\varkappa^b_n}{\sqrt{(\varepsilon_0\varkappa^b_n)^2+(\varepsilon_b\zeta^b_n)^2}}=\frac{\varepsilon_0\varkappa^b_n}{\sqrt{\varepsilon_b(\varepsilon_b-\varepsilon_0)\bigl[(\beta^b_n)^2-(\varepsilon_0/\varepsilon_b)(\varkappa^b_n)^2\bigr]}},\\ \sin\varkappa^b_n b&=\frac{\varepsilon_b\zeta^b_n}{\sqrt{(\varepsilon_0\varkappa^b_n)^2+(\varepsilon_b\zeta^b_n)^2}}=\frac{\varepsilon_b\zeta^b_n}{\sqrt{\varepsilon_b(\varepsilon_b-\varepsilon_0)\bigl[(\beta^b_n)^2-(\varepsilon_0/\varepsilon_b)(\varkappa^b_n)^2\bigr]}}.\end{aligned} \tag{Ж.2.20}$$

Выражения (Ж.2.20) вытекают из дисперсионного уравнения (1.7.35) для четных мод, записанного с учетом замен $ik^{\varepsilon}_{y2}\to(\varepsilon_a/\varepsilon_0)\zeta^b_n$ и $k_{y1}\to\varkappa^b_n$ в виде

$$\frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_0}\,\zeta^b_n=\varkappa^b_n\operatorname{tg}\varkappa^b_n a.$$

Будем вычислять собственные и взаимные коэффициенты объемной и поверхностной связи, подставляя выражения (Ж.2.9)–(Ж.2.11), (Ж.2.15)–(Ж.2.17) и (4.11.14)–(4.11.19) в (Ж.2.1)–(Ж.2.8), а также используя соотношения (Ж.2.12)–(Ж.2.14) и (Ж.2.18)–(Ж.2.20), в частности,

$$\bigl(H^a_m H^b_n\bigr)=\frac{\omega\sqrt{\varepsilon_a\varepsilon_b}}{w}\sqrt{\frac{N^a_m}{\beta^a_m d^a_m}\,\frac{N^b_n}{\beta^b_n d^b_n}}\,. \tag{Ж.2.21}$$

Ж.2.1. Собственные коэффициенты связи

- ***коэффициенты объемной связи***

$$c^{bulk}_{11}=-\frac{i\omega w}{N^a_m}\left\{\int\limits_{-(h+2b)}^{-h}(\varepsilon_b-\varepsilon_0)\left[\left(-\frac{\beta^a_m}{\omega\varepsilon_0}\,H^a_m\cos\varkappa^a_m a\right)^2 e^{2\zeta^a_m(y-h)}+\right.\right.$$

$$+\frac{1}{1+(\varepsilon_b-\varepsilon_0)/\varepsilon_0}\left(\frac{\zeta_m^a}{\omega\varepsilon_0}H_m^a\cos\varkappa_m^a a\right)^2 e^{2\zeta_m^a(y-h)}\Bigg]\,dy+$$

$$+\int\limits_{-h}^{h}(\varepsilon_2-\varepsilon_0)\left[\left(-\frac{\beta_m^a}{\omega\varepsilon_0}H_m^a\cos\varkappa_m^a a\right)^2 e^{2\zeta_m^a(y-h)}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{1+2(\varepsilon_2-\varepsilon_0)/\varepsilon_0}\left(\frac{\zeta_m^a}{\omega\varepsilon_0}H_m^a\cos\varkappa_m^a a\right)^2 e^{2\zeta_m^a(y-h)}\right]dy\Bigg\}= \qquad (Ж.2.22)$$

$$=-\frac{i\omega w}{N_m^a}\frac{(\beta_m^a)^2}{(\omega\varepsilon_0)^2}\left(H_m^a\right)^2\left(\cos\varkappa_m^a a\right)^2\left[(\varepsilon_b-\varepsilon_0)\left(1+\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_b}\frac{(\zeta_m^a)^2}{(\beta_m^a)^2}\right)J_1+\right.$$

$$\left.+(\varepsilon_2-\varepsilon_0)\left(1+\frac{\varepsilon_0}{2\varepsilon_2-\varepsilon_0}\frac{(\zeta_m^a)^2}{(\beta_m^a)^2}\right)J_2\right]=$$

$$=-i\frac{(\varkappa_m^a)^2}{\beta_m^a d_m^a}\left(\frac{\varepsilon_b-\varepsilon_0}{\varepsilon_a-\varepsilon_0}\frac{1-e^{-4\zeta_m^a b}}{2\zeta_m^a}F_m^a-\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_0}{\varepsilon_a-\varepsilon_0}\frac{1-e^{4\zeta_m^a h}}{2\zeta_m^a}G_m^a\right)\mathcal{F}_m e^{-4\zeta_m^a h},$$

$$c_{22}^{bulk}=-\frac{i\omega w}{N_n^b}\left\{\int\limits_{h}^{(h+2a)}(\varepsilon_a-\varepsilon_0)\left[\left(-\frac{\beta_n^b}{\omega\varepsilon_0}H_n^b\cos\varkappa_n^b b\right)^2 e^{-2\zeta_n^b(y+h)}+\right.\right.$$

$$+\frac{1}{1+(\varepsilon_a-\varepsilon_0)/\varepsilon_0}\left(\frac{\zeta_n^b}{\omega\varepsilon_0}H_n^b\cos\varkappa_n^b b\right)^2 e^{-2\zeta_n^b(y+h)}\Bigg]\,dy+$$

$$+\int\limits_{-h}^{h}(\varepsilon_2-\varepsilon_0)\left[\left(-\frac{\beta_n^b}{\omega\varepsilon_0}H_n^b\cos\varkappa_n^b b\right)^2 e^{-2\zeta_n^b(y+h)}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{1+2(\varepsilon_2-\varepsilon_0)/\varepsilon_0}\left(\frac{\zeta_n^b}{\omega\varepsilon_0}H_n^b\cos\varkappa_n^b b\right)^2 e^{-2\zeta_n^b(y+h)}\right]dy\Bigg\}= \qquad (Ж.2.23)$$

$$=-\frac{i\omega w}{N_n^b}\frac{(\beta_n^b)^2}{(\omega\varepsilon_0)^2}\left(H_n^b\right)^2\left(\cos\varkappa_n^b b\right)^2\left[(\varepsilon_a-\varepsilon_0)\left(1+\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_a}\frac{(\zeta_n^b)^2}{(\beta_n^b)^2}\right)J_3+\right.$$

$$\left.+(\varepsilon_2-\varepsilon_0)\left(1+\frac{\varepsilon_0}{2\varepsilon_2-\varepsilon_0}\frac{(\zeta_n^b)^2}{(\beta_n^b)^2}\right)J_4\right]=$$

$$=-i\frac{(\varkappa_n^b)^2}{\beta_n^b d_n^b}\left(\frac{\varepsilon_a-\varepsilon_0}{\varepsilon_b-\varepsilon_0}\frac{1-e^{-4\zeta_n^b a}}{2\zeta_n^b}F_n^b-\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_0}{\varepsilon_b-\varepsilon_0}\frac{1-e^{4\zeta_n^b h}}{2\zeta_n^b}G_n^b\right)\mathcal{F}_n e^{-4\zeta_n^b h};$$

- ***коэффициенты поверхностной связи***

$$c_{11}^{surf}=-\frac{1}{N_m^a}\int\limits_{-w/2}^{w/2}\left\{\frac{(\varepsilon_b-\varepsilon_0)/\varepsilon_0}{1+(\varepsilon_b-\varepsilon_0)/\varepsilon_0}\left[-\widehat{H}_{mx}^{a*}(-h)\widehat{E}_{mz}^{a}(-h)+\right.\right.$$

$$\left.+\widehat{H}_{mx}^{a*}(-h-2b)\widehat{E}_{mz}^{a}(-h-2b)\right]+$$

$$\left.+\frac{(\varepsilon_2-\varepsilon_0)/\varepsilon_0}{1+2(\varepsilon_2-\varepsilon_0)/\varepsilon_0}\left[-\widehat{H}_{mx}^{a*}(h)\widehat{E}_{mz}^{a}(h)+\widehat{H}_{mx}^{a*}(-h)\widehat{E}_{mz}^{a}(-h)\right]\right\}dx=$$

$$=-\frac{w}{N_m^a}\left\{\frac{\varepsilon_b-\varepsilon_0}{\varepsilon_b}\left[-\left(H_m^a\cos\varkappa_m^a a\right)e^{-2\zeta_m^a h}\left(-\frac{\zeta_m^a}{i\omega\varepsilon_0}\,H_m^a\cos\varkappa_m^a a\right)e^{-2\zeta_m^a h}+\right.\right.$$

$$\left.+\left(H_m^a\cos\varkappa_m^a a\right)e^{-2\zeta_m^a(h+b)}\left(-\frac{\zeta_m^a}{i\omega\varepsilon_0}\,H_m^a\cos\varkappa_m^a a\right)e^{-2\zeta_m^a(h+b)}\right]+$$

$$+\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_0}{2\varepsilon_2-\varepsilon_0}\left[-\left(H_m^a\cos\varkappa_m^a a\right)\left(-\frac{\zeta_m^a}{i\omega\varepsilon_0}\,H_m^a\cos\varkappa_m^a a\right)+\right.$$

$$\left.\left.+\left(H_m^a\cos\varkappa_m^a a\right)e^{-2\zeta_m^a h}\left(-\frac{\zeta_m^a}{i\omega\varepsilon_0}\,H_m^a\cos\varkappa_m^a a\right)e^{-2\zeta_m^a h}\right]\right\}=$$

$$=-\frac{iw}{N_m^a}\,\frac{\zeta_m^a}{\omega\varepsilon_0}\left(H_m^a\right)^2\left(\cos\varkappa_m^a a\right)^2\left[\frac{\varepsilon_b-\varepsilon_0}{\varepsilon_b}\left(1-e^{-4\zeta_m^a b}\right)e^{-4\zeta_m^a h}+\right.$$

$$\left.+\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_0}{2\varepsilon_2-\varepsilon_0}\left(1-e^{-4\zeta_m^a h}\right)\right]=$$

$$=-i\frac{(\varkappa_m^a)^2}{\beta_m^a d_m^a}\,\frac{\zeta_m^a}{(\beta_m^a)^2}\left[\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_b}\,\frac{\varepsilon_b-\varepsilon_0}{\varepsilon_a-\varepsilon_0}\left(1-e^{-4\zeta_m^a b}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\varepsilon_0}{2\varepsilon_2-\varepsilon_0}\,\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_0}{\varepsilon_a-\varepsilon_0}\left(1-e^{4\zeta_m^a h}\right)\right]\mathcal{F}_m e^{-4\zeta_m^a h},\qquad (\text{Ж}.2.24)$$

$$c_{22}^{surf}=-\frac{1}{N_n^b}\int\limits_{-w/2}^{w/2}\left\{\frac{(\varepsilon_a-\varepsilon_0)/\varepsilon_0}{1+(\varepsilon_a-\varepsilon_0)/\varepsilon_0}\left[\widehat{H}_{nx}^{b*}(h)\widehat{E}_{nz}^{b}(h)-\right.\right.$$

$$\left.-\widehat{H}_{nx}^{b*}(h+2a)\widehat{E}_{nz}^{b}(h+2a)\right]+$$

$$+\frac{(\varepsilon_2-\varepsilon_0)/\varepsilon_0}{1+2(\varepsilon_2-\varepsilon_0)/\varepsilon_0}\left[-\widehat{H}^{b*}_{nx}(h)\widehat{E}^{b}_{nz}(h)+\widehat{H}^{b*}_{nx}(-h)\widehat{E}^{b}_{nz}(-h)\right]\Bigg\}\,dx=$$

$$=-\frac{w}{N^b_n}\Bigg\{\frac{\varepsilon_a-\varepsilon_0}{\varepsilon_a}\Bigg[-\left(H^b_n\cos\varkappa^b_n b\right)e^{-2\zeta^b_n(h+a)}\left(\frac{\zeta^b_n}{i\omega\varepsilon_0}H^b_n\cos\varkappa^b_n b\right)e^{-2\zeta^b_n(h+a)}+$$

$$+\left(H^b_n\cos\varkappa^b_n b\right)e^{-2\zeta^b_n h}\left(\frac{\zeta^b_n}{i\omega\varepsilon_0}H^b_n\cos\varkappa^b_n b\right)e^{-2\zeta^b_n h}\Bigg]+$$

$$+\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_0}{2\varepsilon_2-\varepsilon_0}\Bigg[-\left(H^b_n\cos\varkappa^b_n b\right)e^{-2\zeta^b_n h}\left(\frac{\zeta^b_n}{i\omega\varepsilon_0}H^b_n\cos\varkappa^b_n b\right)e^{-2\zeta^b_n h}+$$

$$+\left(H^b_n\cos\varkappa^b_n b\right)\left(\frac{\zeta^b_n}{i\omega\varepsilon_0}H^b_n\cos\varkappa^b_n b\right)\Bigg]\Bigg\}=$$

$$=-\frac{iw}{N^b_n}\frac{\zeta^b_n}{\omega\varepsilon_0}\left(H^b_n\right)^2\left(\cos\varkappa^b_n b\right)^2\Bigg[\frac{\varepsilon_a-\varepsilon_0}{\varepsilon_a}\left(1-e^{-4\zeta^b_n a}\right)e^{-4\zeta^b_n h}+$$

$$+\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_0}{2\varepsilon_2-\varepsilon_0}\left(1-e^{-4\zeta^b_n h}\right)\Bigg]=$$

$$=-i\frac{(\varkappa^b_n)^2}{\beta^b_n d^b_n}\frac{\zeta^b_n}{(\beta^b_n)^2}\Bigg[\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_a}\frac{\varepsilon_a-\varepsilon_0}{\varepsilon_b-\varepsilon_0}\left(1-e^{-4\zeta^b_n a}\right)-$$

$$-\frac{\varepsilon_0}{2\varepsilon_2-\varepsilon_0}\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_0}{\varepsilon_b-\varepsilon_0}\left(1-e^{4\zeta^b_n h}\right)\Bigg]\mathcal{F}_n\,e^{-4\zeta^b_n h}. \qquad (Ж.2.25)$$

В формулах (Ж.2.22)–(Ж.2.25) введены следующие обозначения:

$$\mathcal{F}_m=\frac{(\beta^a_m)^2}{(\beta^a_m)^2-(\varepsilon_0/\varepsilon_a)(\varkappa^a_m)^2},\qquad \mathcal{F}_n=\frac{(\beta^b_n)^2}{(\beta^b_n)^2-(\varepsilon_0/\varepsilon_b)(\varkappa^b_n)^2},\qquad (Ж.2.26)$$

$$F^a_m=1+\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_b}\frac{(\zeta^a_m)^2}{(\beta^a_m)^2},\qquad F^b_n=1+\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_a}\frac{(\zeta^b_n)^2}{(\beta^b_n)^2},\qquad (Ж.2.27)$$

$$G^a_m=1+\frac{\varepsilon_0}{2\varepsilon_2-\varepsilon_0}\frac{(\zeta^a_m)^2}{(\beta^a_m)^2},\qquad G^b_n=1+\frac{\varepsilon_0}{2\varepsilon_2-\varepsilon_0}\frac{(\zeta^b_n)^2}{(\beta^b_n)^2}.\qquad (Ж.2.28)$$

Ж.2.2. Взаимные коэффициенты связи

- ***коэффициенты объемной связи***

$$c_{12}^{bulk}=-\frac{i\omega w}{N_m^a}\left\{\int\limits_{-(h+2b)}^{-h}(\varepsilon_b-\varepsilon_0)\left[\left(-\frac{\beta_m^a}{\omega\varepsilon_0}H_m^a\cos\varkappa_m^a a\right)e^{\zeta_m^a(y-h)}\times\right.\right.$$

$$\times\left(-\frac{\beta_n^b}{\omega\varepsilon_b}H_n^b\right)\cos\varkappa_n^b[y+(h+b)]+$$

$$+\frac{1}{1+(\varepsilon_b-\varepsilon_0)/\varepsilon_0}\left(\frac{\zeta_m^a}{i\omega\varepsilon_0}H_m^a\cos\varkappa_m^a a\right)e^{\zeta_m^a(y-h)}\times$$

$$\left.\times\left(\frac{\varkappa_n^b}{i\omega\varepsilon_b}H_n^b\right)\sin\varkappa_n^b[y+(h+b)]\right]dy+$$

$$+\int\limits_{-h}^{h}(\varepsilon_2-\varepsilon_0)\left[\left(-\frac{\beta_m^a}{\omega\varepsilon_0}H_m^a\cos\varkappa_m^a a\right)e^{\zeta_m^a(y-h)}\times\right.$$

$$\times\left(-\frac{\beta_n^b}{\omega\varepsilon_0}H_n^b\cos\varkappa_n^b b\right)e^{-\zeta_n^b(y+h)}+$$

$$+\frac{1}{1+2(\varepsilon_2-\varepsilon_0)/\varepsilon_0}\left(\frac{\zeta_m^a}{i\omega\varepsilon_0}H_m^a\cos\varkappa_m^a a\right)e^{\zeta_m^a(y-h)}\times$$

$$\left.\left.\times\left(\frac{\zeta_n^b}{i\omega\varepsilon_0}H_n^b\cos\varkappa_n^b b\right)e^{-\zeta_n^b(y+h)}\right]dy\right\}=$$

$$=-\frac{i\omega w}{N_m^a}\frac{\beta_m^a\beta_n^b}{(\omega\varepsilon_0)^2}\left(H_m^aH_n^b\right)\cos\varkappa_m^a a\left[(\varepsilon_b-\varepsilon_0)\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_b}\left(J_5-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_b}\frac{\zeta_m^a\varkappa_n^b}{\beta_m^a\beta_n^b}J_8\right)+\right.$$

$$\left.+(\varepsilon_2-\varepsilon_0)\cos\varkappa_n^b b\left(1-\frac{\varepsilon_0}{2\varepsilon_2-\varepsilon_0}\frac{\zeta_m^a\zeta_n^b}{\beta_m^a\beta_n^b}\right)J_6\right]=$$

$$=-i\frac{\varkappa_m^a\varkappa_n^b}{\sqrt{\beta_m^a d_m^a\,\beta_n^b d_n^b}}\left[\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_b}\sqrt{\frac{\varepsilon_b-\varepsilon_0}{\varepsilon_a-\varepsilon_0}}\frac{\left(1-e^{-2\zeta_m^a b}\right)\zeta_m^a f_n^b+\left(1+e^{-2\zeta_m^a b}\right)\zeta_n^b g_m^a}{(\zeta_m^a)^2+(\varkappa_n^b)^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_0}{\sqrt{(\varepsilon_a-\varepsilon_0)(\varepsilon_b-\varepsilon_0)}}\frac{1-e^{2(\zeta_m^a-\zeta_n^b)h}}{\zeta_m^a-\zeta_n^b}G_{mn}\right]\mathcal{F}_{mn}e^{-2\zeta_m^a h},\qquad(Ж.2.29)$$

$$c_{21}^{bulk} = -\frac{i\omega w}{N_n^b}\left\{\int\limits_h^{(h+2a)}(\varepsilon_a - \varepsilon_0)\left[\left(-\frac{\beta_n^b}{\omega\varepsilon_0}H_n^b\cos\varkappa_n^b b\right)e^{-\zeta_n^b(y+h)}\times\right.\right.$$

$$\times\left(-\frac{\beta_m^a}{\omega\varepsilon_a}H_m^a\right)\cos\varkappa_m^a[y-(h+a)]+$$

$$+\frac{1}{1+(\varepsilon_a - \varepsilon_0)/\varepsilon_0}\left(-\frac{\zeta_n^b}{i\omega\varepsilon_0}H_n^b\cos\varkappa_n^b b\right)e^{-\zeta_n^b(y+h)}\times$$

$$\left.\times\left(\frac{\varkappa_m^a}{i\omega\varepsilon_a}H_m^a\right)\sin\varkappa_m^a[y-(h+a)]\right]dy+$$

$$+\int\limits_{-h}^{h}(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)\left[\left(-\frac{\beta_n^b}{\omega\varepsilon_0}H_n^b\cos\varkappa_n^b b\right)e^{-\zeta_n^b(y+h)}\times\right.$$

$$\times\left(-\frac{\beta_m^a}{\omega\varepsilon_0}H_m^a\cos\varkappa_m^a a\right)e^{\zeta_m^a(y-h)}+$$

$$+\frac{1}{1+2(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)/\varepsilon_0}\left(-\frac{\zeta_n^b}{i\omega\varepsilon_0}H_n^b\cos\varkappa_n^b b\right)e^{-\zeta_n^b(y+h)}\times$$

$$\left.\left.\times\left(-\frac{\zeta_m^a}{i\omega\varepsilon_0}H_m^a\cos\varkappa_m^a a\right)e^{\zeta_m^a(y-h)}\right]dy\right\} =$$

$$= -\frac{i\omega w}{N_n^b}\frac{\beta_m^a\beta_n^b}{(\omega\varepsilon_0)^2}\left(H_m^a H_n^b\right)\cos\varkappa_n^b b\left[(\varepsilon_a - \varepsilon_0)\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_a}\left(J_7 + \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_a}\frac{\zeta_n^b\varkappa_m^a}{\beta_m^a\beta_n^b}J_9\right)+\right.$$

$$\left.+(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)\cos\varkappa_m^a a\left(1-\frac{\varepsilon_0}{2\varepsilon_2 - \varepsilon_0}\frac{\zeta_m^a\zeta_n^b}{\beta_m^a\beta_n^b}\right)J_6\right]+$$

$$= -i\frac{\varkappa_m^a\varkappa_n^b}{\sqrt{\beta_m^a d_m^a\,\beta_n^b d_n^b}}\left[\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_a}\sqrt{\frac{\varepsilon_a - \varepsilon_0}{\varepsilon_b - \varepsilon_0}}\,\frac{\left(1-e^{-2\zeta_n^b a}\right)\zeta_n^b f_m^a + \left(1+e^{-2\zeta_n^b a}\right)\zeta_m^a g_n^b}{(\zeta_n^b)^2+(\varkappa_m^a)^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_0}{\sqrt{(\varepsilon_a - \varepsilon_0)(\varepsilon_b - \varepsilon_0)}}\,\frac{1-e^{2(\zeta_n^b - \zeta_m^a)h}}{\zeta_n^b - \zeta_m^a}\,G_{mn}\right]\mathcal{F}_{mn}e^{-2\zeta_n^b h}; \qquad (Ж.2.30)$$

• ***коэффициенты поверхностной связи***

$$c_{12}^{surf} = -\frac{1}{N_m^a}\int\limits_{-w/2}^{w/2}\left\{\frac{(\varepsilon_b - \varepsilon_0)/\varepsilon_0}{1+(\varepsilon_b - \varepsilon_0)/\varepsilon_0}\Big[-\widehat{H}_{mx}^{a*}(-h)\widehat{E}_{nz}^{b}(-h) + \right.$$

$$+\widehat{H}_{mx}^{a*}(-h-2b)\widehat{E}_{nz}^{b}(-h-2b)\Big] +$$

$$\left. + \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)/\varepsilon_0}{1+2(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)/\varepsilon_0}\Big[-\widehat{H}_{mx}^{a*}(h)\widehat{E}_{nz}^{b}(h) + \widehat{H}_{mx}^{a*}(-h)\widehat{E}_{nz}^{b}(-h)\Big]\right\} dx =$$

$$= -\frac{w}{N_m^a}\left\{\frac{\varepsilon_b - \varepsilon_0}{\varepsilon_b}\Big[-\big(H_m^a \cos \varkappa_m^a a\big)e^{-2\zeta_m^a h}\Big(\frac{\zeta_n^b}{i\omega\varepsilon_0}H_n^b \cos \varkappa_n^b b\Big) + \right.$$

$$+\big(H_m^a \cos \varkappa_m^a a\big)e^{-2\zeta_m^a (h+b)}\Big(-\frac{\zeta_n^b}{i\omega\varepsilon_0}H_n^b \cos \varkappa_n^b b\Big)\Big] +$$

$$+\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_0}{2\varepsilon_2 - \varepsilon_0}\Big[-\big(H_m^a \cos \varkappa_m^a a\big)\Big(\frac{\zeta_n^b}{i\omega\varepsilon_0}H_n^b \cos \varkappa_n^b b\Big)e^{-2\zeta_n^b h} +$$

$$\left. +\big(H_m^a \cos \varkappa_m^a a\big)e^{-2\zeta_m^a h}\Big(\frac{\zeta_n^b}{i\omega\varepsilon_0}H_n^b \cos \varkappa_n^b b\Big)\Big]\right\} =$$

$$= \frac{iw}{N_m^a}\frac{\zeta_n^b}{\omega\varepsilon_0}\big(H_m^a H_n^b\big)\big(\cos \varkappa_m^a a\ \cos \varkappa_n^b b\big)\left[\frac{\varepsilon_b - \varepsilon_0}{\varepsilon_b}\Big(1 + e^{-2\zeta_m^a b}\Big)e^{-2\zeta_m^a h} - \right.$$

$$\left. - \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_0}{2\varepsilon_2 - \varepsilon_0}\Big(e^{-2\zeta_m^a h} - e^{-2\zeta_n^b h}\Big)\right] =$$

$$= i\frac{\varkappa_m^a \varkappa_n^b}{\sqrt{\beta_m^a d_m^a\, \beta_n^b d_n^b}}\,\frac{\zeta_n^b}{\beta_m^a \beta_n^b}\left[\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_b}\sqrt{\frac{\varepsilon_b - \varepsilon_0}{\varepsilon_a - \varepsilon_0}}\Big(1 + e^{-2\zeta_m^a b}\Big) - \right.$$

$$\left. - \frac{\varepsilon_0}{2\varepsilon_2 - \varepsilon_0}\,\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_0}{\sqrt{(\varepsilon_a - \varepsilon_0)(\varepsilon_b - \varepsilon_0)}}\Big(1 - e^{2(\zeta_m^a - \zeta_n^b)h}\Big)\right]\mathcal{F}_{mn}e^{-2\zeta_m^a h}, \quad (Ж.2.31)$$

$$c_{21}^{surf} = -\frac{1}{N_n^b}\int\limits_{-w/2}^{w/2}\left\{\frac{(\varepsilon_a - \varepsilon_0)/\varepsilon_0}{1+(\varepsilon_a - \varepsilon_0)/\varepsilon_0}\Big[\widehat{H}_{nx}^{b*}(h)\widehat{E}_{mz}^{a}(h) - \right.$$

$$+\widehat{H}_{nx}^{b*}(h+2a)\widehat{E}_{mz}^{a}(h+2a)\Big] +$$

$$+\frac{(\varepsilon_2-\varepsilon_0)/\varepsilon_0}{1+2(\varepsilon_2-\varepsilon_0)/\varepsilon_0}\left[-\widehat{H}^{b*}_{nx}(h)\widehat{E}^a_{mz}(h)+\widehat{H}^{b*}_{nx}(-h)\widehat{E}^a_{mz}(-h)\right]\Bigg\}\,dx=$$

$$=-\frac{w}{N^b_n}\left\{\frac{\varepsilon_a-\varepsilon_0}{\varepsilon_a}\left[-\left(H^b_n\cos\varkappa^b_n b\right)e^{-2\zeta^b_n(h+a)}\left(\frac{\zeta^a_m}{i\omega\varepsilon_0}H^a_m\cos\varkappa^a_m a\right)+\right.\right.$$

$$\left.+\left(H^b_n\cos\varkappa^b_n b\right)e^{-2\zeta^b_n h}\left(-\frac{\zeta^a_m}{i\omega\varepsilon_0}H^a_m\cos\varkappa^a_m a\right)\right]+$$

$$+\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_0}{2\varepsilon_2-\varepsilon_0}\left[-\left(H^b_n\cos\varkappa^b_n b\right)e^{-2\zeta^b_n h}\left(-\frac{\zeta^a_m}{i\omega\varepsilon_0}H^a_m\cos\varkappa^a_m a\right)+\right.$$

$$\left.\left.+\left(H^b_n\cos\varkappa^b_n b\right)\left(-\frac{\zeta^a_m}{i\omega\varepsilon_0}H^a_m\cos\varkappa^a_m a\right)e^{-2\zeta^a_m h}\right]\right\}=$$

$$=\frac{iw}{N^b_n}\frac{\zeta^a_m}{\omega\varepsilon_0}\left(H^a_m H^b_n\right)\left(\cos\varkappa^a_m a\,\cos\varkappa^b_n b\right)\left[\frac{\varepsilon_a-\varepsilon_0}{\varepsilon_a}\left(1+e^{-2\zeta^b_n a}\right)e^{-2\zeta^b_n h}-\right.$$

$$\left.-\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_0}{2\varepsilon_2-\varepsilon_0}\left(e^{-2\zeta^b_n h}-e^{-2\zeta^a_m h}\right)\right]=$$

$$=i\frac{\varkappa^a_m\varkappa^b_n}{\sqrt{\beta^a_m d^a_m\,\beta^b_n d^b_n}}\,\frac{\zeta^a_m}{\beta^a_m\beta^b_n}\left[\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_a}\sqrt{\frac{\varepsilon_a-\varepsilon_0}{\varepsilon_b-\varepsilon_0}}\left(1+e^{-2\zeta^b_n a}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\varepsilon_0}{2\varepsilon_2-\varepsilon_0}\,\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_0}{\sqrt{(\varepsilon_a-\varepsilon_0)(\varepsilon_b-\varepsilon_0)}}\left(1-e^{2(\zeta^b_n-\zeta^a_m)h}\right)\right]\mathcal{F}_{mn}e^{-2\zeta^b_n h}.\quad (Ж.2.32)$$

В формулах (Ж.2.29)–(Ж.2.32) введены следующие обозначения:

$$\mathcal{F}_{mn}=\frac{\beta^a_m\beta^b_n}{\sqrt{\left[(\beta^a_m)^2-(\varepsilon_0/\varepsilon_a)(\varkappa^a_m)^2\right]\left[(\beta^b_n)^2-(\varepsilon_0/\varepsilon_b)(\varkappa^b_n)^2\right]}},\quad (Ж.2.33)$$

$$G_{mn}=1-\frac{\varepsilon_0}{2\varepsilon_2-\varepsilon_0}\,\frac{\zeta^a_m\zeta^b_n}{\beta^a_m\beta^b_n},\quad (Ж.2.34)$$

$$f^a_m=1+\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_a}\,\frac{(\varkappa^a_m)^2}{\beta^a_m\beta^b_n},\qquad f^b_n=1+\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_b}\,\frac{(\varkappa^b_n)^2}{\beta^a_m\beta^b_n},\quad (Ж.2.35)$$

$$g^a_m=1-\frac{(\zeta^a_m)^2}{\beta^a_m\beta^b_n},\qquad g^b_n=1-\frac{(\zeta^b_n)^2}{\beta^a_m\beta^b_n}.\quad (Ж.2.36)$$

В каждой из вышеприведенных формул для коэффициентов связи последние выражения соответствуют нормировке на единичную мощность, когда, согласно (1.8.49), собственные нормы мод равняются $N_1\equiv N^a_m=N^b_n\equiv N_2=$ $=4$ Вт.

Ж.3. Кросс-норма мод ТЕ-типа

Относительная кросс-норма мод введена общим соотношением (4.10.28) и для частного случая ТЕ-мод в рассматриваемой планарной диэлектрической структуре принимает следующий вид:

$$C_{12} \equiv C_{mn}^{ab} = \frac{N_{mn}^{ab}}{N_m^a} = \frac{1}{4}\int\limits_S \left(\widehat{\mathbf{E}}_m^{a*} \times \widehat{\mathbf{H}}_n^b + \widehat{\mathbf{E}}_n^b \times \widehat{\mathbf{H}}_m^{a*}\right)\cdot \mathbf{e}_z\, dS =$$

$$= \frac{w}{4}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\widehat{E}_{mx}^{a*}(y)\widehat{H}_{ny}^b(y) + \widehat{E}_{nx}^b(y)\widehat{H}_{my}^{a*}(y)\right] dy, \qquad (Ж.3.1)$$

где электрическое поле $\widehat{E}_x$ для m-й и n-й мод дается формулами (Ж.1.5) и (Ж.1.9), а магнитное поле равняется $\widehat{H}_y = (k_z/\omega\mu_0)\widehat{E}_x$ (см. формулу (1.7.6)).

Для двухволноводной структуры, изображенной на рис. 4.2, интеграл (Ж.3.1) имеет вид суммы пяти интегралов:

$$C_{12} = C_{12}^{(1)} + C_{12}^{(2)} + C_{12}^{(3)} + C_{12}^{(4)} + C_{12}^{(5)}, \qquad (Ж.3.2)$$

где

$$C_{12}^{(1)} \equiv \frac{w}{4}\int\limits_{-\infty}^{-(h+2b)} \left[\widehat{E}_{mx}^{a*}(y)\widehat{H}_{ny}^b(y) + \widehat{E}_{nx}^b(y)\widehat{H}_{my}^{a*}(y)\right] dy =$$

$$= \frac{w}{4}\int\limits_{-\infty}^{-(h+2b)} \left[\left(E_m^a \cos\varkappa_m^a a\right) e^{\zeta_m^a (y-h)} \left(\frac{\beta_n^b}{\omega\mu_0} E_n^b \cos\varkappa_n^b b\right) e^{\zeta_n^b [y+(h+2b)]} + \right.$$

$$\left. + \left(E_n^b \cos\varkappa_n^b b\right) e^{\zeta_n^b [y+(h+2b)]} \left(\frac{\beta_m^a}{\omega\mu_0} E_m^a \cos\varkappa_m^a a\right) e^{\zeta_m^a (y-h)}\right] dy, \qquad (Ж.3.3)$$

$$C_{12}^{(2)} \equiv \frac{w}{4}\int\limits_{-(h+2b)}^{-h} \left[\widehat{E}_{mx}^{a*}(y)\widehat{H}_{ny}^b(y) + \widehat{E}_{nx}^b(y)\widehat{H}_{my}^{a*}(y)\right] dy =$$

$$= \frac{w}{4}\int\limits_{-(h+2b)}^{-h} \left[\left(E_m^a \cos\varkappa_m^a a\right) e^{\zeta_m^a (y-h)} \left(\frac{\beta_n^b}{\omega\mu_0} E_n^b\right) \cos\varkappa_n^b [y+(h+b)] + \right.$$

$$\left. + \left(E_n^b\right) \cos\varkappa_n^b [y+(h+b)] \left(\frac{\beta_m^a}{\omega\mu_0} E_m^a \cos\varkappa_m^a a\right) e^{\zeta_m^a (y-h)}\right] dy, \qquad (Ж.3.4)$$

$$C_{12}^{(3)} \equiv \frac{w}{4}\int\limits_{-h}^{h} \left[\widehat{E}_{mx}^{a*}(y)\widehat{H}_{ny}^b(y) + \widehat{E}_{nx}^b(y)\widehat{H}_{my}^{a*}(y)\right] dy =$$

$$= \frac{w}{4}\int\limits_{-h}^{h}\Big[\big(E_m^a\cos\varkappa_m^a a\big)\,e^{\zeta_m^a(y-h)}\Big(\frac{\beta_n^b}{\omega\mu_0}E_n^b\cos\varkappa_n^b b\Big)\,e^{-\zeta_n^b(y+h)}+$$

$$+\big(E_n^b\cos\varkappa_n^b b\big)\,e^{-\zeta_n^b(y+h)}\Big(\frac{\beta_m^a}{\omega\mu_0}E_m^a\cos\varkappa_m^a a\Big)\,e^{\zeta_m^a(y-h)}\Big]dy, \qquad \text{(Ж.3.5)}$$

$$C_{12}^{(4)} \equiv \frac{w}{4}\int\limits_{h}^{(h+2a)}\Big[\widehat{E}_{mx}^{a*}(y)\widehat{H}_{ny}^{b}(y)+\widehat{E}_{nx}^{b}(y)\widehat{H}_{my}^{a*}(y)\Big]dy =$$

$$= \frac{w}{4}\int\limits_{h}^{(h+2a)}\Big[\big(E_m^a\big)\cos\varkappa_m^a\big[y-(h+a)\big]\Big(\frac{\beta_n^b}{\omega\mu_0}E_n^b\cos\varkappa_n^b b\Big)\,e^{-\zeta_n^b(y+h)}+$$

$$+\big(E_n^b\cos\varkappa_n^b b\big)\,e^{-\zeta_n^b(y+h)}\Big(\frac{\beta_m^a}{\omega\mu_0}E_m^a\Big)\cos\varkappa_m^a\big[y-(h+a)\big]\Big]dy, \qquad \text{(Ж.3.6)}$$

$$C_{12}^{(5)} \equiv \frac{w}{4}\int\limits_{(h+2a)}^{\infty}\Big[\widehat{E}_{mx}^{a*}(y)\widehat{H}_{ny}^{b}(y)+\widehat{E}_{nx}^{b}(y)\widehat{H}_{my}^{a*}(y)\Big]dy =$$

$$= \frac{w}{4}\int\limits_{(h+2a)}^{\infty}\Big[\big(E_m^a\cos\varkappa_m^a a\big)\,e^{-\zeta_m^a[y-(h+2a)]}\Big(\frac{\beta_n^b}{\omega\mu_0}E_n^b\cos\varkappa_n^b b\Big)\,e^{-\zeta_n^b(y+h)}+$$

$$+\big(E_n^b\cos\varkappa_n^b b\big)\,e^{-\zeta_n^b(y+h)}\Big(\frac{\beta_m^a}{\omega\mu_0}E_m^a\cos\varkappa_m^a a\Big)\,e^{-\zeta_m^a[y-(h+2a)]}\Big]dy. \qquad \text{(Ж.3.7)}$$

Подстановка выражений (Ж.3.3)–(Ж.3.7) в равенство (Ж.3.2) окончательно дает искомый результат:

$$C_{12} = \frac{w}{4}\,\frac{E_m^aE_n^b}{\omega\mu_0}\,\big(\beta_m^a+\beta_n^b\big)\Big[(\cos\varkappa_m^a a\,\cos\varkappa_n^b b)J_{10}+(\cos\varkappa_m^a a)J_5+$$

$$+(\cos\varkappa_m^a a\,\cos\varkappa_n^b b)J_6+(\cos\varkappa_n^b b)J_7+(\cos\varkappa_m^a a\,\cos\varkappa_n^b b)J_{11}\Big] =$$

$$= \frac{w}{4}\,\frac{E_m^aE_n^b}{\omega\mu_0}\,\big(\beta_m^a+\beta_n^b\big)\big(\cos\varkappa_m^a a\,\cos\varkappa_n^b b\big)\times$$

$$\times\Bigg[\frac{e^{-2\zeta_m^a(h+b)}+e^{-2\zeta_n^b(h+a)}}{\zeta_m^a+\zeta_n^b}-\frac{e^{-2\zeta_m^a h}-e^{-2\zeta_n^b h}}{\zeta_m^a-\zeta_n^b}+$$

$$+\frac{\left(1-e^{-2\zeta_m^a b}\right)\zeta_m^a+\left(1+e^{-2\zeta_m^a b}\right)\zeta_n^b}{(\zeta_m^a)^2+(\varkappa_n^b)^2}\,e^{-2\zeta_m^a h}+$$

$$+\left.\frac{\left(1-e^{-2\zeta_n^b a}\right)\zeta_n^b+\left(1+e^{-2\zeta_n^b a}\right)\zeta_m^a}{(\zeta_n^b)^2+(\varkappa_m^a)^2}\,e^{-2\zeta_n^b h}\right]. \qquad (Ж.3.8)$$

Выражение (Ж.3.8) существенно упрощается для двух одинаковых мод $(m=n)$ в идентичных волноводах (когда $a=b$ и $\varepsilon_a=\varepsilon_b$, так что $\beta_m^a=\beta_n^b\equiv$ $\equiv\beta_m$, $\varkappa_m^a=\varkappa_n^b\equiv\varkappa_m$, $\zeta_m^a=\zeta_n^b\equiv\zeta_m$). Тогда, используя соотношения (Ж.1.6) для N_m^a (при нормировке $N_m^a=4$ Вт) и (Ж.1.8) для $\cos\varkappa_m^a a$, получаем

$$C_{12}=\frac{w}{4}\frac{E_m^2}{\omega\mu_0}\frac{2\beta_m}{\zeta_m}\cos^2\varkappa_m^a a\left(\frac{4\varepsilon_0}{\varepsilon_a-\varepsilon_0}\frac{\zeta_m^2}{k_0^2}+2\zeta_m h+e^{-2\zeta_m a}\right)e^{-2\zeta_m h}=$$

$$=\frac{2}{\zeta_m d_m}\frac{\varkappa_m^2}{k_0^2}\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_a-\varepsilon_0}\left(\frac{4\varepsilon_0}{\varepsilon_a-\varepsilon_0}\frac{\zeta_m^2}{k_0^2}+2\zeta_m h+e^{-2\zeta_m a}\right)e^{-2\zeta_m h}. \qquad (Ж.3.9)$$

Ж.4. Кросс-норма мод ТМ-типа

Для ТМ-мод в рассматриваемой планарной диэлектрической структуре относительная кросс-норма (4.10.28) имеет следующий вид:

$$C_{12}\equiv C_{mn}^{ab}=\frac{N_{mn}^{ab}}{N_m^a}=\frac{1}{4}\int\limits_S\left(\widehat{\mathbf{E}}_m^{a*}\times\widehat{\mathbf{H}}_n^b+\widehat{\mathbf{E}}_n^b\times\widehat{\mathbf{H}}_m^{a*}\right)\cdot\mathbf{e}_z dS=$$

$$=-\frac{w}{4}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\widehat{H}_{mx}^{a*}(y)\widehat{E}_{ny}^b(y)+\widehat{H}_{nx}^b(y)\widehat{E}_{my}^{a*}(y)\right]dy, \qquad (Ж.4.1)$$

где поля $\widehat{H}_x$ и $\widehat{E}_y$ для m-й и n-й мод даются формулами (Ж.2.9)–(Ж.2.10) и (Ж.2.15)–(Ж.2.16).

Для двухволноводной структуры, изображенной на рис. 4.2, интеграл (Ж.4.1) имеет вид суммы пяти интегралов:

$$C_{12}=C_{12}^{(1)}+C_{12}^{(2)}+C_{12}^{(3)}+C_{12}^{(4)}+C_{12}^{(5)}, \qquad (Ж.4.2)$$

где

$$C_{12}^{(1)}\equiv-\frac{w}{4}\int\limits_{-\infty}^{-(h+2b)}\left[\widehat{H}_{mx}^{a*}(y)\widehat{E}_{ny}^b(y)+\widehat{H}_{nx}^b(y)\widehat{E}_{my}^{a*}(y)\right]dy=$$

$$=\frac{w}{4}\int\limits_{-\infty}^{-(h+2b)}\left[\left(H_m^a\cos\varkappa_m^a a\right)e^{\zeta_m^a(y-h)}\left(\frac{\beta_n^b}{\omega\varepsilon_0}H_n^b\cos\varkappa_n^b b\right)e^{\zeta_n^b[y+(h+2b)]}+\right.$$

$$+\left(H_n^b \cos \varkappa_n^b b\right) e^{\zeta_n^b [y+(h+2b)]} \left(\frac{\beta_m^a}{\omega\varepsilon_0} H_m^a \cos \varkappa_m^a a\right) e^{\zeta_m^a (y-h)}\Big] dy, \quad \text{(Ж.4.3)}$$

$$C_{12}^{(2)} \equiv -\frac{w}{4} \int\limits_{-(h+2b)}^{-h} \left[\widehat{H}_{mx}^{a*}(y)\widehat{E}_{ny}^{b}(y) + \widehat{H}_{nx}^{b}(y)\widehat{E}_{my}^{a*}(y)\right] dy =$$

$$= \frac{w}{4} \int\limits_{-(h+2b)}^{-h} \Big[\left(H_m^a \cos \varkappa_m^a a\right) e^{\zeta_m^a (y-h)} \left(\frac{\beta_n^b}{\omega\varepsilon_b} H_n^b\right) \cos \varkappa_n^b [y+(h+b)] +$$

$$+\left(H_n^b\right) \cos \varkappa_n^b [y+(h+b)] \left(\frac{\beta_m^a}{\omega\varepsilon_0} H_m^a \cos \varkappa_m^a a\right) e^{\zeta_m^a (y-h)}\Big] dy, \quad \text{(Ж.4.4)}$$

$$C_{12}^{(3)} \equiv -\frac{w}{4} \int\limits_{-h}^{h} \left[\widehat{H}_{mx}^{a*}(y)\widehat{E}_{ny}^{b}(y) + \widehat{H}_{nx}^{b}(y)\widehat{E}_{my}^{a*}(y)\right] dy =$$

$$= \frac{w}{4} \int\limits_{-h}^{h} \Big[\left(H_m^a \cos \varkappa_m^a a\right) e^{\zeta_m^a (y-h)} \left(\frac{\beta_n^b}{\omega\varepsilon_0} H_n^b \cos \varkappa_n^b b\right) e^{-\zeta_n^b (y+h)} +$$

$$+\left(H_n^b \cos \varkappa_n^b b\right) e^{-\zeta_n^b (y+h)} \left(\frac{\beta_m^a}{\omega\varepsilon_0} H_m^a \cos \varkappa_m^a a\right) e^{\zeta_m^a (y-h)}\Big] dy, \quad \text{(Ж.4.5)}$$

$$C_{12}^{(4)} \equiv -\frac{w}{4} \int\limits_{h}^{(h+2a)} \left[\widehat{H}_{mx}^{a*}(y)\widehat{E}_{ny}^{b}(y) + \widehat{H}_{nx}^{b}(y)\widehat{E}_{my}^{a*}(y)\right] dy =$$

$$= \frac{w}{4} \int\limits_{h}^{(h+2a)} \Big[\left(H_m^a\right) \cos \varkappa_m^a [y-(h+a)] \left(\frac{\beta_n^b}{\omega\varepsilon_0} H_n^b \cos \varkappa_n^b b\right) e^{-\zeta_n^b (y+h)} +$$

$$+\left(H_n^b \cos \varkappa_n^b b\right) e^{-\zeta_n^b (y+h)} \left(\frac{\beta_m^a}{\omega\varepsilon_a} H_m^a\right) \cos \varkappa_m^a [y-(h+a)]\Big] dy, \quad \text{(Ж.4.6)}$$

$$C_{12}^{(5)} \equiv -\frac{w}{4} \int\limits_{(h+2a)}^{\infty} \left[\widehat{H}_{mx}^{a*}(y)\widehat{E}_{ny}^{b}(y) + \widehat{H}_{nx}^{b}(y)\widehat{E}_{my}^{a*}(y)\right] dy =$$

$$= \frac{w}{4} \int\limits_{(h+2a)}^{\infty} \Big[\left(H_m^a \cos \varkappa_m^a a\right) e^{-\zeta_m^a [y-(h+2a)]} \left(\frac{\beta_n^b}{\omega\varepsilon_0} H_n^b \cos \varkappa_n^b b\right) e^{-\zeta_n^b (y+h)} +$$

$$+\left(H_n^b \cos \varkappa_n^b b\right) e^{-\zeta_n^b(y+h)} \left(\frac{\beta_m^a}{\omega \varepsilon_0} H_m^a \cos \varkappa_m^a a \right) e^{-\zeta_m^a[y-(h+2a)]} \Bigg] dy. \quad (Ж.4.7)$$

Подстановка выражений (Ж.4.3)–(Ж.4.7) в равенство (Ж.4.2) окончательно дает искомый результат:

$$C_{12} = \frac{w}{4} \frac{H_m^a H_n^b}{\omega \varepsilon_0} \left(\beta_m^a + \beta_n^b\right) \Bigg[(\cos \varkappa_m^a a \, \cos \varkappa_n^b b) J_{10} +$$

$$+ \frac{\beta_m^a + (\varepsilon_0/\varepsilon_b)\beta_n^b}{(\beta_m^a + \beta_n^b)} (\cos \varkappa_m^a a) J_5 + (\cos \varkappa_m^a a \, \cos \varkappa_n^b b) J_6 +$$

$$+ \frac{\beta_n^b + (\varepsilon_0/\varepsilon_a)\beta_m^a}{(\beta_m^a + \beta_n^b)} (\cos \varkappa_n^b b) J_7 + (\cos \varkappa_m^a a \, \cos \varkappa_n^b b) J_{11} \Bigg] =$$

$$= \frac{w}{4} \frac{H_m^a H_n^b}{\omega \varepsilon_0} \left(\beta_m^a + \beta_n^b\right) \left(\cos \varkappa_m^a a \, \cos \varkappa_n^b b\right) \times$$

$$\times \Bigg[\frac{e^{-2\zeta_m^a(h+b)} + e^{-2\zeta_n^b(h+a)}}{\zeta_m^a + \zeta_n^b} - \frac{e^{-2\zeta_m^a h} - e^{-2\zeta_n^b h}}{\zeta_m^a - \zeta_n^b} +$$

$$+ \frac{\beta_m^a + (\varepsilon_0/\varepsilon_b)\beta_n^b}{\beta_m^a + \beta_n^b} \, \frac{\left(1 - e^{-2\zeta_m^a b}\right)\zeta_m^a + \left(1 + e^{-2\zeta_m^a b}\right)\zeta_n^b}{(\zeta_m^a)^2 + (\varkappa_n^b)^2} \, e^{-2\zeta_m^a h} +$$

$$+ \frac{\beta_n^b + (\varepsilon_0/\varepsilon_a)\beta_m^a}{\beta_m^a + \beta_n^b} \, \frac{\left(1 - e^{-2\zeta_n^b a}\right)\zeta_n^b + \left(1 + e^{-2\zeta_n^b a}\right)\zeta_m^a}{(\zeta_n^b)^2 + (\varkappa_m^a)^2} \, e^{-2\zeta_n^b h} \Bigg]. \quad (Ж.4.8)$$

Выражение (Ж.4.8) существенно упрощается для двух одинаковых мод $(m = n)$ в идентичных волноводах (когда $a = b$ и $\varepsilon_a = \varepsilon_b$, так что $\beta_m^a = \beta_n^b \equiv \equiv \beta_m$, $\varkappa_m^a = \varkappa_n^b \equiv \varkappa_m$, $\zeta_m^a = \zeta_n^b \equiv \zeta_m$). Тогда, используя соотношения (Ж.2.12) для N_m^a (при нормировке $N_m^a = 4$ Вт) и (Ж.2.14) для $\cos \varkappa_m^a a$, получаем

$$C_{12} = \frac{w}{4} \frac{H_m^2}{\omega \varepsilon_0} \frac{2\beta_m}{\zeta_m} \cos^2 \varkappa_m^a a \left(\frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon_a} \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_0}{\varepsilon_a - \varepsilon_0} \frac{\zeta_m^2}{k_0^2} + 2\zeta_m h + e^{-2\zeta_m a} \right) e^{-2\zeta_m h} =$$

$$= \frac{2}{\zeta_m d_m} \frac{\varkappa_m^2}{\beta_m^2 - (\varepsilon_0/\varepsilon_a)\varkappa_m^2} \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_a - \varepsilon_0} \times$$

$$\times \left(\frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon_a} \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_0}{\varepsilon_a - \varepsilon_0} \frac{\zeta_m^2}{k_0^2} + 2\zeta_m h + e^{-2\zeta_m a} \right) e^{-2\zeta_m h}. \quad (Ж.4.9)$$

В данном приложении все вышеприведенные формулы содержат полные размерные величины ε_0, ε_2, ε_a, ε_b, которые (в отличие от рис. 4.2 с относительными диэлектрическими проницаемостями ε_{r0}, ε_{r2}, ε_{ra}, ε_{rb}) включают множителем электрическую постоянную, равную $8,854 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

Вычисление вспомогательных интегралов

$$J_1 \equiv \int\limits_{-(h+2b)}^{-h} e^{2\zeta_m^a(y-h)}\,dy = \frac{1-e^{-4\zeta_m^a b}}{2\zeta_m^a}\,e^{-4\zeta_m^a h},$$

$$J_2 \equiv \int\limits_{-h}^{h} e^{2\zeta_m^a(y-h)}\,dy = \frac{1-e^{-4\zeta_m^a h}}{2\zeta_m^a},$$

$$J_3 \equiv \int\limits_{h}^{(h+2a)} e^{-2\zeta_n^b(y+h)}\,dy = \frac{1-e^{-4\zeta_n^b a}}{2\zeta_n^b}\,e^{-4\zeta_n^b h},$$

$$J_4 \equiv \int\limits_{-h}^{h} e^{-2\zeta_n^b(y+h)}\,dy = \frac{1-e^{-4\zeta_n^b h}}{2\zeta_n^b},$$

$$J_5 \equiv \int\limits_{-(h+2b)}^{-h} e^{\zeta_m^a(y-h)}\cos\varkappa_n^b\big[y+(h+b)\big]\,dy = e^{-\zeta_m^a(2h+b)}\int\limits_{-b}^{b} e^{\zeta_m^a x}\cos\varkappa_n^b x\,dx =$$

$$= \frac{e^{-2\zeta_m^a h}}{(\zeta_m^a)^2+(\varkappa_n^b)^2}\cos\varkappa_n^b b\left[\left(1-e^{-2\zeta_m^a b}\right)\zeta_m^a+\left(1+e^{-2\zeta_m^a b}\right)\zeta_n^b\right],$$

$$J_6 \equiv \int\limits_{-h}^{h} e^{\zeta_m^a(y-h)}\,e^{-\zeta_n^b(y+h)}\,dy = e^{-(\zeta_m^a+\zeta_n^b)h}\int\limits_{-h}^{h} e^{(\zeta_m^a-\zeta_n^b)y}\,dy =$$

$$= \frac{e^{-2\zeta_m^a h}-e^{-2\zeta_n^b h}}{\zeta_n^b-\zeta_m^a},$$

$$J_7 \equiv \int\limits_{h}^{(h+2a)} e^{-\zeta_n^b(y+h)}\cos\varkappa_m^a\big[y-(h+a)\big]\,dy = e^{-\zeta_n^b(2h+a)}\int\limits_{-a}^{a} e^{-\zeta_n^b x}\cos\varkappa_m^a x\,dx =$$

$$= \frac{e^{-2\zeta_n^b h}}{(\zeta_n^b)^2+(\varkappa_m^a)^2}\cos\varkappa_m^a a\left[\left(1-e^{-2\zeta_n^b a}\right)\zeta_n^b+\left(1+e^{-2\zeta_n^b a}\right)\zeta_m^a\right],$$

$$J_8 \equiv \int\limits_{-(h+2b)}^{-h} e^{\zeta_m^a(y-h)} \sin \varkappa_n^b \left[y + (h+b)\right] dy = e^{-\zeta_m^a(2h+b)} \int\limits_{-b}^{b} e^{\zeta_m^a x} \sin \varkappa_n^b x \, dx =$$

$$= \frac{e^{-2\zeta_m^a h}}{(\zeta_m^a)^2 + (\varkappa_n^b)^2} \left[\left(1 + e^{-2\zeta_m^a b}\right) \zeta_m^a \sin \varkappa_n^b b - \left(1 - e^{-2\zeta_m^a b}\right) \varkappa_n^b \cos \varkappa_n^b b\right],$$

$$J_9 \equiv \int\limits_{h}^{(h+2a)} e^{-\zeta_n^b(y+h)} \sin \varkappa_m^a \left[y - (h+a)\right] dy = e^{-\zeta_n^b(2h+a)} \int\limits_{-a}^{a} e^{-\zeta_n^b x} \sin \varkappa_m^a x \, dx =$$

$$= \frac{e^{-2\zeta_n^b h}}{(\zeta_n^b)^2 + (\varkappa_m^a)^2} \left[\left(1 - e^{-2\zeta_n^b a}\right) \varkappa_m^a \cos \varkappa_m^a a - \left(1 + e^{-2\zeta_n^b a}\right) \zeta_n^b \sin \varkappa_m^a a\right],$$

$$J_{10} \equiv \int\limits_{-\infty}^{-(h+2b)} e^{\zeta_m^a(y-h)} \, e^{\zeta_n^b[y+(h+2b)]} \, dy = e^{-\zeta_m^a h} \, e^{\zeta_n^b(h+2b)} \int\limits_{-\infty}^{-(h+2b)} e^{(\zeta_m^a + \zeta_n^b)y} \, dy =$$

$$= \frac{e^{-2\zeta_m^a(h+b)}}{\zeta_m^a + \zeta_n^b},$$

$$J_{11} \equiv \int\limits_{(h+2a)}^{\infty} e^{-\zeta_m^a[y-(h+2a)]} \, e^{-\zeta_n^b(y+h)} \, dy = e^{\zeta_m^a(h+2a)} e^{-\zeta_n^b h} \int\limits_{(h+2a)}^{\infty} e^{-(\zeta_m^a + \zeta_n^b)y} \, dy =$$

$$= \frac{e^{-2\zeta_n^b(h+a)}}{\zeta_m^a + \zeta_n^b}.$$

При вычислении J_5 и J_7–J_9 использованы известные интегралы [1]:

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx),$$

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx).$$

Список литературы

К главам 1 и 2

1. *Ramo S., Whinnery J. R.* Fields and Waves in Modern Radio, Van Nostrand, New York, 1944 [Имеется перевод: *Рамо С., Уиннери Дж.* Поля и волны в современной радиотехнике. — М.: Гостехиздат, 1948].
2. *Гуревич А. Г.* Полые резонаторы и волноводы. — М.: Советское радио, 1952.
3. *Гольдштейн Л. Д., Зернов Н. И.* Электромагнитные поля и волны. — М.: Советское радио, 1956.
4. *Вайнштейн Л. А.* Электромагнитные волны. — М.: Советское радио, 1957.
5. *Ширман Я. Д.* Радиоволноводы и объемные резонаторы. — М.: Связьиздат, 1959.
6. *Collin R. E.* Field Theory of Guided Waves, McGraw-Hill, New York, 1960.
7. *Jackson J. D.* Classical Electrodynamics, Wiley, New York, 1962 [Имеется перевод: *Джексон Дж.* Классическая электродинамика. — М.: Мир, 1965].
8. *Johnson C. C.* Field and Wave Electrodynamics, McGraw-Hill, New York, 1965.
9. *Каценеленбаум Б. З.* Высокочастотная электродинамика (основы математического аппарата). — М.: Наука, 1966.
10. *Шевченко В. В.* Плавные переходы в открытых волноводах. — М.: Наука, 1969.
11. *Kapany N. S., Burke J. J.* Optical Waveguides, Academic Press, New York, 1972.
12. *Marcuse D.* Light Transmission Optics, Van Nostrand, New York, 1972 [Имеется перевод: *Маркузе Д.* Оптические волноводы. — М.: Мир, 1974].
13. *Marcuse D.* Theory of Dielectric Optical Waveguides, Academic Press, New York, 1974.
14. *Barnoski M. K.* (ed.), Introduction to Integrated Optics, Plenum Press, New York, 1974 [Имеется перевод: Введение в интегральную оптику / Под ред. М. Барноски. — М.: Мир, 1977].
15. *Tamir T.* (ed.), Integrated Optics, Springer-Verlag, New York, 1975 [Имеется перевод: Интегральная оптика / Под ред. Т. Тамира — М.: Мир, 1978].
16. *Yariv A.* Introduction to Optical Electronics, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1976 [Имеется перевод: *Ярив А.* Введение в оптическую электронику. — М.: Высшая школа, 1983].
17. *Unger H.-G.* Planar Optical Waveguides and Fibers, Clarendon Press, Oxford, 1977 [Имеется перевод: *Унгер Х.-Г.* Планарные и волоконные оптические волноводы. — М.: Мир, 1980].
18. *Adams M. J.* An Introduction to Optical Waveguides, Wiley, New York, 1981 [Имеется перевод: *Адамс М.* Введение в теорию оптических волноводов. — М.: Мир, 1984].
19. *Snyder A. W., Love J. D.* Optical Waveguide Theory, Chapman and Hall, London, 1983 [Имеется перевод: *Снайдер А., Лав Дж.* Теория оптических волноводов. — М.: Радио и связь, 1987].
20. *Haus H. A.* Waves and Fields in Optoelectronics, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1984 [Имеется перевод: *Хаус Х.* Волны и поля в оптоэлектронике. — М.: Мир, 1988].
21. *Solimeno S., Crosignani B., DiPorto P.* Guiding, Diffraction, and Confinement of Optical Radiation, Academic Press, New York, 1986 [Имеется перевод: *Солимено С., Крозиньяни Б., Ди Порто П.* Дифракция и волноводное распространение оптического излучения. — М.: Мир, 1989].
22. *Kogelnik H.* "Theory of optical waveguides", in «Guided-Wave Optoelectronics» (ed. T. Tamir), Springer-Verlag, Berlin, 1988, pp. 7–88.

23. *Balanis C. A.* Advanced Engineering Electromagnetics, Wiley, New York, 1989.

24. *Barybin A. A., Dmitriev V. A.* Modern Electrodynamics and Coupled-Mode Theory: Application to Guided-Wave Optics, Rinton Press, Princeton, New Jersey, 2002.

25. *Korn G. A., Korn T. M.* Mathematical Handbook for Scientists and Engineers, McGraw-Hill, New York, 1961 [Имеется перевод: *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1968].

26. *Morse P. M., Feshbach H.* Methods of Theoretical Physics, McGraw-Hill, New York, 1953 [Имеется перевод: *Морс Ф.М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. — М.: ИЛ, 1958].

27. *Felsen L. B., Marcuvitz N.* Radiation and Scattering of Electromagnetic Waves, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1973 [Имеется перевод: *Фелсен Л., Маркувиц Н.* Излучение и рассеяние волн. — М.: Мир, 1978].

28. *Tamir T., Oliner A. A.* "Guided complex waves", Proc. IEE, **110**, 310–334, 1963.

29. *Tamir T., Felsen L. B.* "On lateral waves in slab configurations and their relation to other wave types", IEEE Trans. Antennas Propag., **AP-13**, 410–422, 1965.

30. *Tamir T.* "Inhomogeneous wave types at planar interfaces: III. Leaky waves", Optik, **38**, 269–297, 1973.

31. *Post E. J.* Formal Structure of Electromagnetics, North-Holland, Amsterdam, 1962.

32. *Kong J. A.* Electromagnetic Wave Theory, Wiley, New York, 1986.

33. *Lindell I. V.* Methods for Electromagnetic Field Analysis, Clarendon Press, Oxford, 1992.

34. *O'Dell T. H.* Electrodynamics of Magneto-Electric Media, North-Holland, Amsterdam, 1970.

35. *Lakhtakia A., Varadan V. K., Varadan V. V.* Time-Harmonic Electromagnetic Fields in Chiral Media, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

36. *Lindell I. V., Sihvola A. H., Tretyakov S. A., Viitanen A. J.* Electromagnetic Waves in Chiral and Bi-Isotropic Media, Artech House, Boston, 1994.

37. *Barybin A. A.* "Modal expansions and orthogonal complements in the theory of complex media waveguide excitation by external sources for isotropic, anisotropic, and bianisotropic media", in «Progress In Electromagnetics Research» (ed. J. A. Kong), **PIER 19**, EMW Publishing, Cambridge, MA, 1998, pp. 241–300.

38. *Serdyukov A., Semchenko I., Tretyakov S., Sihvola A.* Electromagnetics of Bi-anisotropic Materials: Theory and Applications, Taylor & Francis, London, 2001.

39. *Barybin A. A.* "On the generalized theory of normal mode excitation in electromagnetic and polarized medium waveguides by external sources", J. Appl. Phys., **46**, 1707–1720, 1975.

40. *Barybin A. A.* "Power-energy relations of electrodynamics for space-dispersive active media", Eur. Phys. J.– Appl. Phys., **22**, 189–205, 2003.

41. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. — М.: Наука, 1992.

42. *Barybin A. A.* "Excitation theory for space-dispersive active media waveguides", J. Phys. D: Appl. Phys., **32**, 2014–2028, 1999.

43. *Yariv A., Yeh P.* Optical Waves in Crystals, Wiley, New York, 1984 [Имеется перевод: *Ярив А., Юх П.* Оптические волны в кристаллах. — М.: Мир, 1987].

44. *Snyder A. W., Ankiewicz A., Altintas A.* "Coupled mode theory neglects polarization phenomena", Electron. Lett., **24**, 720–721, 1988.

45. *Ankiewicz A., Altintas A., Snyder A. W.* "Polarization properties of evanescent couplers", Opt. Lett., **13**, 524–25, 1988.

46. *Haus H. A., Huang W. P., Snyder A. W.* "Coupled-mode formulations", Opt. Lett., **14**, 1222–1224, 1989.

47. *Barybin A. A.* "Electrodynamic concepts of wave interactions in thin-film semiconductor structures", in «Advances in Electronics and Electron Physics» (ed. L. Marton), Academic Press, New York, Part I: **44**, 99–139, 1977; Part II: **45**, 1–38, 1978.

48. *Барыбин А. А., Степанова М. Г.* "Теория связи оптических мод в тонкопленочных структурах интегральной оптики и акустооптики", ЖТФ, **61**, 120–126, 1991.

К главам 3 и 4

1. *Miller S. E.* "Coupled wave theory and waveguide applications", Bell Syst. Tech. J., **33**, 661–718, 1954.
2. *Pierce J. R.* "Coupling of modes of propagation", J. Appl. Phys., **25**, 179–183, 1954.
3. *Snyder A. W.* "Coupling of modes on a tapered dielectric cylinder", IEEE Trans., Microwave Theory Tech., **MTT-18**, 383–392, 1970.
4. *Snyder A. W.* "Coupled-mode theory for optical fiber", J. Opt. Soc. Am., **62**, 1267–1277, 1972.
5. *McIntyre P. D., Snyder A. W.* "Power transfer between optical fibers", J. Opt. Soc. Am., **63**, 1518–1527, 1973.
6. *Marcuse D.* "The coupling of degenerate modes in two parallel dielectric waveguides", Bell Syst. Tech. J., **50**, 1791–1816, 1971.
7. *Marcuse D.* Light Transmission Optics, Van Nostrand, New York, 1972 [Имеется перевод: *Маркузе Д.* Оптические волноводы. — М.: Мир, 1974].
8. *Marcuse D.* Theory of Dielectric Optical Waveguides, Academic Press, New York, 1974.
9. *Yariv A.* "Coupled-mode theory for guided-wave optics", IEEE J. Quantum Electron., **QE-9**, 919–933, 1973.
10. *Taylor H. F., Yariv A.* "Guided wave optics", Proc. IEEE, **62**, 1044–1060, 1974.
11. *Yariv A.* Introduction to Optical Electronics, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1976 [Имеется перевод: *Ярив А.* Введение в оптическую электронику. — М.: Высшая школа, 1983].
12. *Barnoski M. K.* (ed.), Introduction to Integrated Optics, Plenum Press, New York, 1974 [Имеется перевод: Введение в интегральную оптику / Под ред. М. Барноски. — М.: Мир, 1977].
13. *Tamir T.* (ed.), Integrated Optics, Springer-Verlag, New York, 1975 [Имеется перевод: Интегральная оптика / Под ред. Т. Тамира — М.: Мир, 1978].
14. *Unger H.-G.* Planar Optical Waveguides and Fibers, Clarendon Press, Oxford, 1977 [Имеется перевод: *Унгер Х.-Г.* Планарные и волоконные оптические волноводы. — М.: Мир, 1980].
15. *Snyder A. W., Love J. D.* Optical Waveguide Theory, Chapman and Hall, London, 1983 [Имеется перевод: *Снайдер А., Лав Дж.* Теория оптических волноводов. — М.: Радио и связь, 1987].
16. *Yariv A., Yeh P.* Optical Waves in Crystals, Wiley, New York, 1984 [Имеется перевод: *Ярив А., Юх П.* Оптические волны в кристаллах. — М.: Мир, 1987].
17. *Haus H. A.* Waves and Fields in Optoelectronics, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1984 [Имеется перевод: *Хаус Х.* Волны и поля в оптоэлектронике. — М.: Мир, 1988].
18. *Lee D. L. Electromagnetic Principles of Integrated Optics*, Wiley, New York, 1986.
19. *Hardy A., Streifer W.* "Coupled mode theory of parallel waveguides", J. Lightwave Tech., **LT-3**, 1135–1146, 1985.
20. *Hardy A., Streifer W.* "Coupled modes of multiwaveguide systems and phased arrays", J. Lightwave Technol., **LT-4**, 90–99, 1986.
21. *Hardy A., Streifer W.* "Coupled mode solutions of multiwaveguide systems", IEEE J. Quantum Electron., **QE-22**, 528–534, 1986.
22. *Hardy A., Shakir S., Streifer W.* "Coupled-mode equations for two weakly guiding single-mode fibers", Opt. Lett., **11**, 324–326, 1986.
23. *Streifer W., Osinski M., Hardy A.* "Reformulation of coupled mode theory of multiwaveguide systems", J. Lightwave Technol., **LT-5**, 1–4, 1987.
24. *Haus H. A., Huang W. P. Kawakami S., Whitaker N. A.* "Coupled mode theory of optical waveguides", J. Lightwave Technol., **LT-5**, 16–23, 1987.
25. *Huang W. P., Chaudhuri K.* "Variational coupled-mode theory of optical couplers", J. Lightwave Technol., **LT-8**, 1565–1570, 1990.
26. *Huang W. P., Chu S. T., Chaudhuri K.* "A scalar coupled-mode theory with vector correction", IEEE J. Quantum Electron., **QE-28**, 184–193, 1992.

27. *Haus H. A., Huang W. P.* “Coupled-mode theory”, Proc. IEEE, **79**, 1505–1518, 1991.
28. *Huang W. P.* “Coupled-mode theory for optical waveguides: an overview”, J. Opt. Soc. Am., **11**, 963–983, 1994.
29. *Chuang S.-L.* “A coupled mode formulation by reciprocity and a variational principle”, J. Lightwave Technol., **LT-5**, 5–15, 1987.
30. *Chuang S.-L.* “A coupled-mode theory for multiwaveguide systems satisfying the reciprocity theorem and power conservation”, J. Lightwave Technol., **LT-5**, 174–183, 1987.
31. *Chuang S.-L.* “Application of the strongly coupled-mode theory to integrated optical devices”, IEEE J. Quantum Electron., **QE-23**, 499–509, 1987.
32. *Ankiewicz A., Snyder A. W., Zheng X.* “Coupling between parallel optical fiber cores — critical examination”, J. Lightwave Technol., **LT-4**, 1317–1323, 1986.
33. *Snyder A. W.* “Optical fiber couplers — optimum solution for unequal cores”, J. Lightwave Technol., **LT-6**, 463–474, 1988.
34. *Marcatili E.* “Improved coupled-mode equations for dielectric guides”, IEEE J. Quantum Electron., **QE-22**, 988–993, 1986.
35. *Qian J.R.* “Generalized coupled-mode equations and their applications to fibre couplers”, Electron. Lett., **22**, 304–306, 1986.
36. *Chang H.-C.* “Coupled-mode equations for dielectric waveguides based on projection and partition modal amplitudes”, IEEE J. Quantum Electron., **QE-23**, 1929–1937, 1987.
37. *Vassallo C.* “About coupled-mode theories for dielectric waveguides”, J. Lightwave Technol., **LT-6**, 294–303, 1988.
38. *Vassallo C.* “Condensed formula for coupling coefficients between parallel dielectric waveguides”, Electron. Lett., **23**, 334–335, 1987.
39. *Peall R. G., Syms R. A.* “Scalar strong coupled mode theory for slowly-varying waveguide arrays”, Opt. Commun., **67**, 421–424, 1988.
40. *Peall R. G., Syms R. A.* “Comparison between strong coupling theory and experiment for three-arm directional couplers in Li:NbO_3”, J. Lightwave Technol., **LT-7**, 540–554, 1989.
41. *Snyder A. W., Ankiewicz A.* “Fibre couplers composed of unequal cores”, Electron. Lett., **22**, 1237–1238, 1986; Erratum, ibid., **22**, 251, 1987.
42. *Snyder A. W., Ankiewicz A., Altintas A.* “Fundamental error of recent coupled mode formulations”, Electron. Lett., **23**, 1097–1098, 1987.
43. *Streifer W., Osinski M., Hardy A.* “A critical review of coupled mode theory”, Proc. SPIE, **835**, 178–187, 1987.
44. *Streifer W.* “Coupled mode theory”, Electron. Lett., **23**, 315–316, 1987.
45. *Streifer W.* “Comment on ‘Fundamental error of recent coupled mode formulations’ ”, Electron. Lett., **24**, 718–719, 1988.
46. *Snyder A. W., Ankiewicz A., Altintas A.* “Coupled mode theory neglects polarization phenomena”, Electron. Lett., **24**, 720–721, 1988.
47. *Hardy A., Streifer W., Osinski M.* “Weak coupling of parallel waveguides”, Opt. Lett., **13**, 162–163, 1988; Erratum, ibid., **13**, 428, 1988.
48. *Wu Y.* “Discussion of HS formulation using equivalent current theory”, Electron. Lett., **24**, 376–377, 1988.
49. *Wang Z. H., Seshadri S. R.* “Asymptotic theory of guided modes in two parallel identical dielectric waveguides”, J. Opt. Soc. Am., **A5**, 782–792, 1988.
50. *Snyder A. W., Chen Y., Ankiewicz A.* “Coupled waves on optical fibers by power conservation”, J. Lightwave Technol., **LT-7**, 1400–1406, 1989.
51. *Haus H. A., Huang W. P., Snyder A. W.* “Coupled-mode formulations”, Opt. Lett., **14**, 1222–1224, 1989.
52. *Yuen W.-P.* “On the different formulations of the coupled-mode theory for parallel dielectric waveguides”, J. Lightwave Technol., **LT-12**, 82–85, 1994.
53. *Tamir T.* (ed.) Guided-Wave Optoelectonics, Springer-Verlag, New York, 1988.
54. *Hall D. G.* (ed.) Selected Papers on Coupled-Mode Theory in Guided-Wave Optics, SPIE Milestone Series, vol. MS 84, SPIE Optical Engineering Press, New York, 1993.

55. *Barybin A. A.* “Modal expansions and orthogonal complements in the theory of complex media waveguide excitation by external sources for isotropic, anisotropic, and bianisotropic media”, in «Progress In Electromagnetics Research» (ed. J. A. Kong), **PIER 19**, EMW Publishing, Cambridge, MA, 1998, pp. 241–300.
56. *Barybin A. A., Dmitriev V. A.* Modern Electrodynamics and Coupled-Mode Theory: Application to Guided-Wave Optics, Rinton Press, Princeton, New Jersey, 2002.
57. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. — М.: Наука, 1992.
58. *Stancil D. D.* Theory of Magnetostatic Modes, Springer-Verlag, New York, 1993.
59. *Барыбин А. А., Степанова М. Г.* “Теория связи оптических мод в тонкопленочных структурах интегральной оптики и акустооптики”, ЖТФ, **61**, 120–126, 1991.
60. *Elachi C.* “Waves in active and passive periodic structures: a review”, Proc. IEEE **64**, 1666–1698, 1976.
61. *Nye J. F.* Physical Properties of Crystals: Their Representation by Tensors and Matrices, Clarendon Press, Oxford, 1964 [Имеется перевод: *Най Дж.* Физические свойства кристаллов и их описание при помощи тензоров и матриц. — М.: Мир, 1967].
62. *Kaminow I. P.* An Introduction to Electrooptic Devices, Academic Press, New York, 1974.
63. *Dieulesaint E., Royer D.* Elastic Waves in Solids, Wiley, New York, 1980 [Имеется перевод: *Дьелесан Э., Руайе Д.* Упругие волны в твердых телах. — М.: Наука, 1982].
64. *Яковкин И. Б., Петров Д. В.* Дифракция света на акустических поверхностных волнах. — Новосибирск.: Наука, 1979.
65. *Балакший В. И., Парыгин В. Н., Чирков Л. Е.* Физические основы акустооптики. — М.: Радио и связь, 1985.
66. *Korpel A.* Acousto-Optics, Marcel Dekker, New York, 1988.
67. *Прохоров А. М., Смоленский Г. А., Агеев А. Н.* “Оптические явления в магнитных волноводах и их техническое использование”, УФН, **143**, 33–72, 1984.
68. *Сташкевич А. А.* “Волноводное взаимодействие света со спиновыми волнами в ферромагнитной пленке”, Известия вузов – Физика, №4, 5–31, 1989.
69. *Stashkevich A. A.* “Diffraction of guided light by spin waves in ferromagnetic films”, in «High Frequency Processes in Magnetic Materials» (eds. G. Srinvasan, A. N. Slavin), World Scientific, Singapore, 1995, pp. 321–356.
70. *Stancil D. D., Bilaniuk N.* “Collinear interaction of optical guided modes with microwave spin waves in magnetic films”, in «High Frequency Processes in Magnetic Materials» (eds. G. Srinvasan, A. N. Slavin), World Scientific, Singapore, 1995, pp. 357–393.
71. *Калиникос Б. А.* “Спектр и линейное возбуждение спиновых волн в ферромагнитных пленках”, Известия вузов – Физика, №8, 42-56, 1981.
72. *Korn G. A., Korn T. M.* Mathematical Handbook for Scientists and Engineers, McGraw-Hill, New York, 1961 [Имеется перевод: *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1968].
73. *Burns W. K., Milton A.* “Waveguide transitions and junctions”, in «Guided-Wave Optoelectronics» (ed. T. Tamir), Springer-Verlag, Berlin, 1988, pp. 89–144.

К приложениям

1. *Korn G. A., Korn T. M.* Mathematical Handbook for Scientists and Engineers, McGraw-Hill, New York, 1961 [Имеется перевод: *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1968].
2. *Felsen L. B., Marcuvitz N.* Radiation and Scattering of Electromagnetic Waves, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1973 [Имеется перевод: *Фелсен Л., Маркувиц Н.* Излучение и рассеяние волн. — М.: Мир, 1978].
3. *Mittra R., Lee S. W.* Analytical Techniques in the Theory of Guided Waves, Macmillan, New York, 1971 [Имеется перевод: *Миттра Р., Ли С.* Аналитические методы в теории волноводов. — М.: Мир, 1974].

4. *Tamir T., Oliner A. A.* “Guided complex waves”, Proc. IEE, **110**, 310–334, 1963.
5. *Вайнштейн Л. А.* Электромагнитные волны. — М.: Советское радио, 1957.
6. *Yariv A.* Introduction to Optical Electronics, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1976 [Имеется перевод: *Ярив А.* Введение в оптическую электронику. — М.: Высшая школа, 1983].
7. *Unger H.-G.* Planar Optical Waveguides and Fibers, Clarendon Press, Oxford, 1977 [Имеется перевод: *Унгер Х.-Г.* Планарные и волоконные оптические волноводы. — М.: Мир, 1980].
8. *Chuang S.-L.* “A coupled mode formulation by reciprocity and a variational principle”, J. Lightwave Technol., **LT-5**, 5–15, 1987.
9. *Chang H.-C.* “Coupled-mode equations for dielectric waveguides based on projection and partition modal amplitudes”, IEEE J. Quantum Electron., **QE-23**, 1929–1937, 1987.
10. *Vassallo C.* “About coupled-mode theories for dielectric waveguides”, J. Lightwave Technol., **LT-6**, 294–303, 1988.
11. *Yuen W.-P.* “On the different formulations of the coupled-mode theory for parallel dielectric waveguides”, J. Lightwave Technol., **LT-12**, 82–85, 1994.
12. *Snyder A. W., Love J. D.* Optical Waveguide Theory, Chapman and Hall, London, 1983 [Имеется перевод: *Снайдер А., Лав Дж.* Теория оптических волноводов. — М.: Радио и связь, 1987].
13. *Kong J. A.* Electromagnetic Wave Theory, Wiley, New York, 1986.
14. *Lax B., Button K. J.* Microwave Ferrites and Ferrimagnetics, McGraw-Hill, New York, 1962 [Имеется перевод: *Лакс Б., Баттон К.* Сверхвысокочастотные ферриты и ферримагнетики. — М.: Мир, 1965].
15. *McIsaac P. R.* “Mode orthogonality in reciprocal and nonreciprocal waveguides”, IEEE Trans. Microwave Theory Tech., **MTT-39**, 1808–1816, 1991.
16. *McIsaac P. R.* “Bidirectionality in gyrotropic waveguides”, IEEE Trans. Microwave Theory Tech., **MTT-24**, 223–226, 1976.
17. *Miller S.E.* “Coupled wave theory and waveguide applications”, Bell Syst. Tech. J., **33**, 661–718, 1954.
18. *Pierce J. R.* “Coupling of modes of propagation”, J. Appl. Phys., **25**, 179–183, 1954.
19. *Pierce J. R.* “The wave picture of microwave tubes”, Bell Syst. Tech. J., **33**, 1343–1372, 1954.
20. *Gould R. W.* “A coupled mode description of the backward-wave oscillator and the Kompfner dip condition”, IRE Trans. Electron Devices, **ED-2**, 37–42, 1955.
21. *Johnson H.R.* “Backward-wave oscillators”, Proc. IRE, **43**, 684–697, 1955.
22. *Louisell W. H., Quate C. F.* “Parametric amplification of space-charge waves”, Proc. IRE, **46**, 707–716, 1958.
23. *Adler R.* “Parametric amplification of the fast electron wave”, Proc. IRE, **46**, 1300–1301, 1958.
24. *Siegman A. E.* “The waves on a filamentary electron beam in a transverse-field slow wave circuit”, J. Appl. Phys., **31**, 17–26, 1960.
25. *Tien P. K.* “Parametric amplification and frequency mixing in propagating circuits”, J. Appl. Phys., **29**, 1347–1357, 1958.
26. *Tien P. K., Suhl H.* “A traveling wave ferromagnetic amplifier”, Proc. IRE, **46**, 700–706, 1958.
27. *Louisell W. H.* Coupled Mode and Parametric Electronics, Wiley, New York, 1960 [Имеется перевод: *Люиселл У.* Связанные и параметрические колебания в электронике. — М.: ИЛ, 1963].
28. *Barnes C. W.* “Conservative coupling between modes of propagation – a tabular summary”, Proc. IRE, **52**, 64–73, 296–299, 1964.
29. *Шевчик В. Н., Шведов Г. Н., Соболева А. В.* Волновые и колебательные явления в электронных потоках на сверхвысоких частотах. — Саратов: Изд-во СГУ, 1962.
30. *Snyder A. W.* “Coupling of modes on a tapered dielectric cylinder”, IEEE Trans., Microwave Theory Tech., **MTT-18**, 383–392, 1970.

31. *Snyder A. W.* "Coupled-mode theory for optical fiber", J. Opt. Soc. Am., **62**, 1267–1277, 1972.
32. *Marcuse D.* "The coupling of degenerate modes in two parallel dielectric waveguides", Bell Syst. Tech. J., **50**, 1791–1816, 1971.
33. *Yariv A.* "Coupled-mode theory for guided-wave optics", IEEE J. Quantum Electron., **QE-9**, 919–933, 1973.
34. *Kapany N. S., Burke J. J.* Optical Waveguides, Academic Press, New York, 1972.
35. *Marcuse D.* Light Transmission Optics, Van Nostrand, New York, 1972 [Имеется перевод: *Маркузе Д.* Оптические волноводы. — М.: Мир, 1974].
36. *Marcuse D.* Theory of Dielectric Optical Waveguides, Academic Press, New York, 1974.
37. *Barnoski M. K.* (ed.), Introduction to Integrated Optics, Plenum Press, New York, 1974 [Имеется перевод: Введение в интегральную оптику / Под ред. М. Барноски. — М.: Мир, 1977].
38. *Tamir T.* (ed.), Integrated Optics, Springer-Verlag, New York, 1975 [Имеется перевод: Интегральная оптика / Под ред. Т. Тамира — М.: Мир, 1978].
39. *Adams M. J.* An Introduction to Optical Waveguides, Wiley, New York, 1981 [Имеется перевод: *Адамс М.* Введение в теорию оптических волноводов. — М.: Мир, 1984].
40. *Yariv A., Yeh P.* Optical Waves in Crystals, Wiley, New York, 1984 [Имеется перевод: *Ярив А., Юх П.* Оптические волны в кристаллах. — М.: Мир, 1987].
41. *Haus H. A.* Waves and Fields in Optoelectronics, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1984 [Имеется перевод: *Хаус Х.* Волны и поля в оптоэлектронике. — М.: Мир, 1988].
42. *Huang H. C.* Coupled Mode Theory as Applied to Microwave and Optical Transmission, VNU Science Press, Utrecht, The Netherlands, 1984.
43. *Балакший В. И., Парыгин В. Н., Чирков Л. Е.* Физические основы акустооптики. — М.: Радио и связь, 1985.
44. *Hardy A., Streifer W.* "Coupled mode theory of parallel waveguides", J. Lightwave Tech., **LT-3**, 1135–1146, 1985.
45. *Haus H. A., Huang W. P.* "Coupled-mode theory", Proc. IEEE, **79**, 1505–1518, 1991.
46. *Huang W. P.* "Coupled-mode theory for optical waveguides: an overview", J. Opt. Soc. Am., **11**, 963–983, 1994.
47. *Barybin A. A., Dmitriev V. A.* Modern Electrodynamics and Coupled-Mode Theory: Application to Guided-Wave Optics, Rinton Press, Princeton, New Jersey, 2002.
48. *Manley J. M., Rowe H. E.* "Some general properties of nonlinear elements. I. General energy relations", Proc. IEEE, **44**, 904–913, 1956.
49. *Manley J. M., Rowe H. E.* "General energy relations in nonlinear reactance", Proc. IEEE, **47**, 2115–2116, 1959.
50. *Penfield P.* Frequency–power formulas, Wiley, New York, 1960.
51. *Steele M. C., Vural B.* Wave Interactions in Solid State Plasmas, McGraw-Hill, New York, 1969 [Имеется перевод: *Стил М., Вюраль Б.* Взаимодействие волн в плазме твердого тела. — М.: Атомиздат, 1973].
52. *Барыбин А. А.* Волны в тонкопленочных полупроводниковых структурах с горячими электронами. — М.: Наука, 1986.
53. *Калитеевский Н. И.* Волновая оптика. — М.: Наука, 1971.
54. *Сазонов Д. М.* Антенны и устройства СВЧ. — М.: Высшая школа, 1988.
55. *Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Физическая кинетика. — М.: Наука, 1979.
56. *Барыбин А. А.* "О глобальной и абсолютной неустойчивостях распределенных систем", ЖТФ, **55**, 781–783, 1985.
57. *Гайдук В. И., Палатов К. И., Петров Д. М.* Физические основы электроники СВЧ. — М.: Советское радио, 1971.
58. *Мировицкий Д. И., Будагян И. Ф., Дубровин В. Ф.* Микроволноводная оптика и голография. — М.: Наука, 1983.
59. *Железовский Б. Е.* Электроннолучевые параметрические СВЧ усилители. — М.: Наука, 1971.

Предметный указатель

Научное издание

БАРЫБИН Анатолий Андреевич

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА ВОЛНОВЕДУЩИХ СТРУКТУР. ТЕОРИЯ ВОЗБУЖДЕНИЯ И СВЯЗИ ВОЛН

Редактор *М.Б. Козинцова*
Оригинал-макет: *Автор*
Оформление переплета: *Н.В. Гришина*

Подписано в печать 29.05.07. Формат 70×100/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 41,3. Уч.-изд. л. 41,6. Тираж 700 экз. Заказ № 1306

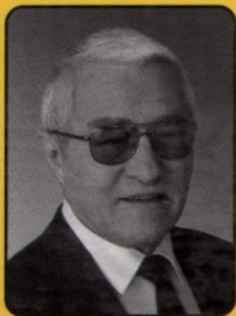
Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;
http://www.fml.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ООО «Чебоксарская типография № 1»
428019, г. Чебоксары, пр. И. Яковлева, 15

ISBN 978-5-9221-0740-2

9 785922 107402

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ и ПРИКЛАДНАЯ ФИЗИКА



А.А. БАРЫБИН
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры физической электроники и технологии Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета.

Лишь строгий и последовательный анализ на базе фундаментальных положений электродинамики и теории связанных волн открывает путь к единой теории волновых взаимодействий в разнообразных структурах интегральной оптики, а также акусто-, электро- и магнитооптики

ISBN 978-5-9221-0740-2
9 785922 107402